

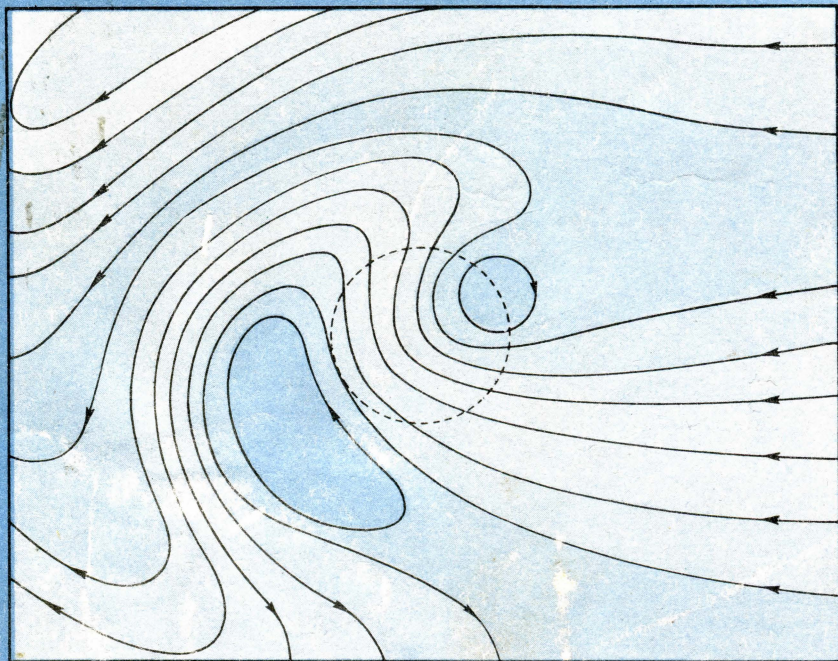
551.46  
к 59

108

894

В.Ф.КОЗЛОВ

# МОДЕЛИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ В ОКЕАНЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
Тихоокеанский океанологический институт

В.Ф. КОЗЛОВ

МОДЕЛИ  
ТОПОГРАФИЧЕСКИХ  
ВИХРЕЙ  
В ОКЕАНЕ

247943



ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

Москва 1983

**БИБЛИОТЕКА**  
**ДВНЦ АН СССР**

УДК 551.465

К о з л о в В. Ф. Модели топографических вихрей в океане. М.: Наука, 1983.

В книге излагается современное состояние теории вихреобразования и меандрирования в потоках вращающейся несжимаемой жидкости под действием возмущений рельефа дна.

Приводится систематический вывод основных соотношений квазигеострофического и геострофического приближений, предназначенных соответственно для описания средне- и крупномасштабных движений в океане. На различных модельных примерах изучается влияние степени стратификации, бета-эффекта, формы и размеров подводных возвышенностей и возмущений боковых границ, сдвигов скорости, нестационарности и других факторов.

Ил.37.Табл.2.Библиогр.181 назв.

Ответственный редактор  
доктор физико-математических наук  
А.С.САРКИСЯН

Вадим Федорович Козлов

## МОДЕЛИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ В ОКЕАНЕ

*Утверждено к печати*

*Тихоокеанским океанологическим институтом ДВНЦ АН СССР*

Редактор *Л.Е. Кочарьянц*. Художник *А.Г. Кобрин*.

Художественный редактор *Т.П. Поленова*. Технический редактор *О.В. Аредова*

ИБ № 27056

Подписано к печати 12.04.83. Т – 02783. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная № 1

Печать офсетная. Усл.печ. л. 12,5. Усл.кр.-отг. 12,8. Уч.-изд. л. 13,6

Тираж 650 экз. Тип. зак. 324. Цена 2р.10к.

Издательство "Наука", 117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени 1-я типография издательства "Наука"  
199034, Ленинград, В-34, 9-я линия, 12

К1903030200-241-175-83-П  
042(02)-83

© Издательство "Наука", 1983 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Введение двухсотмильных экономических зон вынуждает рыбопромысловые организации многих стран форсировать освоение новых районов лова в открытой части океана, главным образом в областях с ярко выраженными морфометрическими особенностями рельефа дна типа подводных возвышенностей, хребтов и отдельных гор. Интерес океанологов к закономерностям формирования гидрологического режима в указанных районах перестает быть только академическим.

Движение вод Мирового океана происходит во вращающейся системе, охватывает тонкую сферическую оболочку и протекает в стратифицированной среде. Эти признаки характерны для геофизической гидродинамики, которую А.С.Монин определяет как "механику дозвуковых течений вращающейся бароклинной стратифицированной жидкости" [52]. Поэтому раздел геофизической гидродинамики, изучающий влияние неровностей подстилающей поверхности на движение вращающейся стратифицированной жидкости, дает теоретическую основу для понимания механизмов возникновения и развития различных структурных образований топографической природы в реальном океане, включая вихри и меандры.

Обсуждаемая проблема и соответствующие теоретические результаты еще не получили сколько-нибудь полного отражения в существующей монографической и учебной литературе. Это обстоятельство делает, на наш взгляд, вполне оправданной всякую попытку единообразного изложения основных результатов, рассеянных в журнальной литературе и относящихся к исследованию влияния рельефа дна на движение вращающейся стратифицированной жидкости. Первый такой опыт составления систематической сводки современных представлений автор приобрел при чтении спецкурса студентам ДВГУ, изданного затем в виде учебного пособия [26]. Существенно переработанный и значительно расширенный материал этих лекций лег в основу настоящей книги, задуманной как общее введение в предмет и обзор литературы.

Мы не ставили своей целью охватить все развиваемые направления исследований и ограничились изложением лишь двух моделей — квазигеострофической (инерционно-вязкой) для описания явлений синоптического и субсиноптического масштабов и геострофической, пригодной для изучения влияний крупномасштабных топографических воздействий. Все рассматриваемые задачи решаются аналитическими средствами с широким привлечением асимптотического анализа, этого главного орудия прикладной математики нынешнего столетия. Некоторые исследования океанографического характера и работы по лабораторному моделированию упоминаются лишь в



той мере, в какой это представляется целесообразным для иллюстрации теоретических выводов.

В первой главе, в рамках модели несжимаемой неоднородной жидкости, приводится исходная математическая формулировка рассматриваемых задач, которая затем с помощью асимптотического анализа, основанного на малости числа Россби—Кибеля, подвергается систематическому упрощению отдельно для геострофических движений первого и второго типа. В результате устанавливаются основные для дальнейшего уравнения сохранения потенциального вихря однородной и стратифицированной жидкости с соответствующими граничными условиями.

Наиболее изученному случаю однородной жидкости посвящена вторая глава. Здесь приводятся имеющие самостоятельный интерес некоторые точные решения уравнения баротропного потенциального вихря, рассматриваются простейшие модельные задачи о столбах Тэйлора и о волновых روسбиевских следах за подводными препятствиями и островами. Решается ряд задач о баротропных течениях в каналах, а также исследуются нестационарные эффекты.

В третьей главе изучается влияние плотностной неоднородности, включая предельные случаи слабой и сильной стратификации. Основное внимание уделяется особенностям трехмерной структуры топографических возмущений потока над изолированными подводными горами и бесконечными хребтами.

В последней, четвертой главе, отдельно рассматриваются геострофические движения второго типа. Здесь изучаются особенности крупномасштабного взаимного приспособления полей плотности и течений к рельефу дна и предлагается ряд асимптотических алгоритмов, позволяющих исследовать воздействие на заданные зональные потоки произвольных топографических возмущений.

Книгу завершает небольшое заключение, в котором кратко характеризуются теоретические результаты, не нашедшие отражения в настоящей монографии, и указываются возможные направления дальнейших исследований.

Приведенный список литературы не является исчерпывающим, однако, как нам кажется, он включает наиболее существенные работы с океанологической направленностью, опубликованные до 1980 г.

Автор благодарит рецензентов доктора физико-математических наук Г.К.Коротаяева и доктора географических наук К.Т.Богданова за их труд, а также прочитавшего рукопись доктора физико-математических наук Ю.А.Иванова, замечания которого были весьма полезны. Особую признательность хочется выразить научному редактору профессору А.С.Саркисяну. Ценную помощь оказали студенты отделения прикладной математики ДВГУ А.Ю.Куракин, П.Ю.Сальников, Т.И.Сыроватская и М.В.Чепикова, выполнившие ряд иллюстрационных расчетов. Приятно также отметить атмосферу доброжелательности и поддержки, сложившуюся в Лаборатории волновых процессов Тихоокеанского океанологического института ДВНЦ АН СССР, где была выполнена настоящая работа.

## ВВЕДЕНИЕ

Еще четверть века назад среди океанологов преобладало мнение, что в глубинных слоях океана водные массы практически неподвижны и что движением охвачен лишь верхний, бароклинный слой. Когда в конце 50-х и начале 60-х годов были выполнены первые измерения глубоководных течений с помощью только что появившихся буев нейтральной плавучести, обнаружилось, что поток ниже главного термоклина значительно меняется в пространстве и во времени с характерными масштабами соответственно в несколько десятков километров и несколько недель [53]. Эти измерения позволили установить не только сам факт движения глубинных вод, но и его весьма сложный характер.

Накопление экспериментального материала и его обработка продолжают и в настоящее время (программы Полигон-70, Полимоде и др.). Анализ данных прямых и косвенных измерений течений приводит к выводу, что большая часть энергии маломасштабных и высокочастотных флуктуаций заключена в районах с неровным дном. Это показывает, что одной из возможных причин пространственно-временной изменчивости глубинных течений может быть реакция переменных средних течений на возмущения рельефа дна.

Наиболее ярко топографические воздействия проявляются при формировании вихрей и в меандрировании потоков. Обычно в океанологии под вихрями подразумеваются структурные образования, характеризующиеся наличием замкнутых линий тока. Спектр океанических вихрей охватывает широкий диапазон пространственных и временных масштабов, от квазистационарных циркуляционных колец планетарного размера до короткоживущих микровихрей, реализующих вязкую диссипацию энергии. Причины вихреобразования также могут быть самыми различными. Объектом нашего внимания будут только те вихри, которые формируются в океанических потоках под действием локализованных особенностей рельефа дна типа подводных гор или возвышенностей, хребтов и желобов и т.п.

Процессы вихреобразования, как правило, сопровождаются меандрированием потоков, при котором линии тока значительно искривляются, приобретая волновой характер; при определенных условиях из отдельных меандров могут образоваться изолированные вихри.

Теоретические исследования топографического циклогенеза и меандрирования и соответствующие лабораторные эксперименты значительно опережают процесс накопления репрезентативных данных натуральных наблюдений в реальном океане. Возникновение столбообразных вихревых возмущений в потоке однородной быстро вращающейся жидкости над медленно перемещаю-

щимся по дну препятствием теоретически было предсказано еще в начале века Праудменом [152] и вскоре получило подтверждение в лабораторных экспериментах Дж.Тэйлора [167]. После нескольких десятилетий забвения внимание к этому феномену вновь привлек Хайд [103], указавший на возможные геофизические приложения обнаруженных эффектов; он же ввел в употребление термин "столб (колонна) Тэйлора" (Taylor column). Простое аналитическое решение стационарной задачи для препятствия в форме невысокого прямого кругового цилиндра построил Ингерсолл [114]; в рассмотренном им случае исчезающе малой вязкости столб Тэйлора вырождается в застойную область. Условия возникновения топографических вихрей над осесимметричными возмущениями рельефа дна были проанализированы для однородной и стратифицированной жидкости Хашпертом [110]. Влияние стратификации детально исследовал Хогг [108], который показал, что в случае простейшего распределения плотности по вертикали с постоянной частотой плаучести вихревое возмущение принимает конусообразную форму ("конус Тэйлора"). Процесс формирования топографического вихря и сопутствующего ему свободного вихря в стратифицированном потоке, возникающем из остояния покоя и затем стационарирующем, с помощью численной и схематической аналитической модели был изучен Хашпертом и Брайеном [111]. Стационарные конфигурации топографического и свободного вихрей в однородной жидкости рассмотрены Джонсоном [126] на основе сформулированного им вариационного принципа; численные результаты, полученные в простейшем случае подводного препятствия в форме прямого кругового цилиндра, были также подтверждены для достаточно слабых набегающих потоков аналитическим асимптотическим решением; обобщение на случай стратифицированных сред дано в [124]. Влияние кривизны земной поверхности ("бета-эффект"), сопровождающееся образованием подветренных rossбиевских волн, изучалось Мак-Картни [135] и Джонсоном [123, 127].

Перечисленные выше работы, хотя они далеко не исчерпывают перечень современных исследований по топографическому циклогенезу в океане, вскрывают основной механизм генерации вихрей над подводными горами, основанный на законе сохранения так называемого потенциального вихря.

Идентификация топографических вихрей и меандров в реальном океане сопряжена с огромными трудностями, которые обусловлены несколькими причинами: нестационарным характером указанных реальных структурных образований, отсутствием необходимого количества синхронных прямых измерений поля течений в исследуемом районе, воздействием многих побочных факторов.

Как правило, по различным косвенным признакам, а также с помощью стандартных динамических расчетов, над подводными горами и в их окрестности выявляются весьма сложные вихревые структуры. Приведем некоторые из наиболее известных примеров. Влияние локальных возмущений рельефа дна на поведение глубинных течений отмечал Дефант [87] над подводной горой Альтаир, Фэглистер [95] - над горой Кельвина, Мейнке

[139] — над горой Большой Метеор, Вастано и Уоррен [170] — над горой Атлантис-II. Обнаружены интересные связи между распределением динамических высот и неровностями топографии дна в Южном океане [38, 80, 99].

Изгибы континентального склона, острова, гайоты можно рассматривать как крайние формы проявления возмущений рельефа дна. В районах с морфометрическими особенностями указанного типа такие пограничные течения, как Голлфстрим или Куроиси, подвержены сильному меандрированию, которое может сопровождаться образованием мощных вихрей.

Надежное экспериментальное выделение вихревых структур возможно лишь с помощью прямых наблюдений над полем скорости. Поэтому трудно не согласиться с мнением Вастано и Уоррена [170], которые отмечают, что "... по-видимому, единственным удовлетворительным методом обнаружения реального столба Тэйлора в океане является наблюдение за группой подводных дрейфтеров, которые следуют за трехмерным потоком и таким образом определяют фактические траектории жидких элементов". К сожалению, наблюдения с использованием буев нейтральной плавучести еще слишком разрозненны.

Обычно фиксируемые вихревые структуры не укладываются в простые теоретические схемы. Это обстоятельство порождает многообразие различных интерпретаций наблюдаемых вихревых систем. Одни авторы достаточно определенно говорят о столбах Тэйлора как о захваченных топографических вихрях, другие обсуждают эффекты снесенных с гор теплых свободных вихрей, третьи связывают вихреобразование с вертикальным сдвигом скорости в приливных течениях или с действием атмосферных возмущений.

До недавнего времени достоверных наблюдений, свидетельствующих о существовании столбов Тэйлора в океане, не имелось. И лишь в последние годы появился ряд публикаций, в которых приведены убедительные факты, доказывающие реальность столбов Тэйлора в гидросфере Земли. Здесь прежде всего следует отметить исследования Эйде [90] в районе Хальтен-банки на Норвежском шельфе, анализ гидрологических наблюдений в районе подводной горы высотой 400 м с центром в точке  $36^{\circ}$  с.ш.,  $55^{\circ}$  з.д., выполненный Оуэнсом и Хоггом [145], а также глубинный топографический эксперимент над вытянутой горой  $20 \times 5 \times 0,5$  км на глубине 5340 м в районе  $14^{\circ}$  з.д.,  $41^{\circ}$  с.ш., описанный Голдом, Хендри и Халпертом [100]. Нет сомнения, что не заставят себя ждать новые свидетельства.

Таким образом, топографический циклогенез в океане перестал быть только теоретической проблемой; по-видимому, в ближайшее десятилетие значительно усилится его практический аспект, что, в свою очередь, послужит новым стимулом к дальнейшим теоретическим исследованиям.

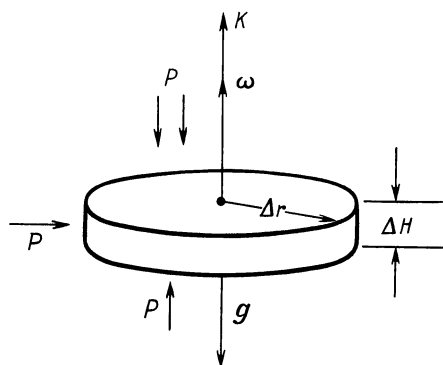
Предваряя более строгие построения в последующих главах книги, мы попытаемся в настоящем введении с помощью элементарных средств познакомить читателя с современными представлениями об основных механизмах топографического циклогенеза и меандрирования [28]. Это позволит нам также условиться о применяемой терминологии.



Как уже указывалось выше, процессы формирования и эволюции топографических вихрей могут быть описаны с помощью основного соотношения геофизической гидродинамики – закона сохранения потенциального вихря, элементарный вывод которого можно получить на основе известной теоремы механики об изменении кинетического момента системы.

Средняя глубина океана составляет лишь малую долю (менее 1/1000) среднего радиуса Земли. Это позволяет рассматривать гидросферу как очень тонкую и слабо искривленную жидкую оболочку на вращающемся шаре. Указанная геометрическая особенность проявляется в кинематических свойствах движения океанических вод, в частности, горизонтальные скорости по величине оказываются на несколько порядков больше вертикальных. Поэтому океан удобно представлять как жидкую механическую систему, состоящую из отдельных тонких почти горизонтальных слоев, скользящих один относительно другого.

Р и с. I. К элементарному выводу закона сохранения потенциального вихря



Выделим мысленно в таком квазигоризонтальном слое бесконечно малый жидкий элемент в форме прямого кругового цилиндра высоты  $\Delta H$  и радиуса  $\Delta r$  (рис. I). За бесконечно малое время  $\Delta t$  этот "блин" в процессе движения перейдет в новое положение, причем его результирующее перемещение

складывается из трех элементарных движений: поступательного, вращательного и деформационного. Вращательно-деформационное движение элемента относительно его центра масс описывается известным из классической механики [6] законом изменения кинетического момента (момента количества движения). Из-за существенного преобладания горизонтальных компонент вектор кинетического момента  $\vec{K}$  практически направлен по вертикали, поэтому в скалярной форме этот закон можно записать в виде  $dK/dt = M$ , где  $M$  – главный момент всех внешних сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс элемента. Пренебрегая эффектами вязкости (касательные внутренние напряжения, если элемент внутренний, и напряжения ветра и придонное трение – если элемент поверхностный или придонный), мы должны включить в число внешних только силы гидродинамического давления, действующие по нормали к поверхности элемента, и вертикальную силу тяжести. Но как видно из рис. I, каждая из этих сил расположена в одной плоскости с вертикалью, благодаря чему их моменты равны нулю. Таким образом, в принятом приближении  $M=0$  и мы получаем закон сохранения кинетического момента  $K = \text{const}$ .

Пренебрегая деформационной частью движения, можно рассматривать только мгновенное вращение элемента как твердого тела. Если  $\omega$  — его абсолютная мгновенная угловая скорость вращения относительно вертикали, то, как известно из механики,  $K = J\omega$ , где  $J$  — осевой момент инерции, характеризующий распределение масс. Момент инерции пропорционален массе  $\Delta m$  элемента и квадрату радиуса  $(\Delta r)^2$  или прямо пропорционален объему  $\Delta \tau$  и обратно пропорционален толщине  $\Delta H$ . Морская вода обладает очень слабой сжимаемостью, пренебрегая которой, мы приходим к сохранению объема  $\Delta \tau$ ; разумеется, сохраняется и масса  $\Delta m$  элемента. Следовательно, для каждого жидкого элемента толщины  $\Delta H$  в процессе движения сохраняется величина  $\omega/\Delta H$ .

Введем локальную декартову систему координат  $x, y, z$ , оси которой направим соответственно на восток, на север и по вертикали вверх от невозмущенной поверхности океана. Так как связанная с вращающейся Землей система отсчета не является инерциальной, абсолютная мгновенная угловая скорость вращения  $\omega$  складывается из переносной вертикальной компоненты угловой скорости вращения Земли  $\Omega/2$  и относительной угловой скорости вращения жидкого элемента  $\zeta/2$ , где  $\Omega$  — обычный параметр Кориолиса, пропорциональный синусу широты, а  $\zeta$  — вертикальная составляющая вихря скорости,  $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ . (Здесь термин "вихрь" используется в гидромеханическом смысле, как ротор векторного поля скорости; величину  $\zeta$  мы часто будем называть просто завихренностью). Учитывая сказанное, окончательно получим закон сохранения кинетического момента в виде

$$\frac{\Omega + \zeta}{\Delta H} = \text{const}, \quad (I)$$

где постоянная, разумеется, своя для каждого жидкого элемента.

Теперь установим важные следствия, вытекающие из соотношения (I). Океанологам хорошо известно, что в океане с высокой степенью точности справедливы так называемые геострофические соотношения и условие гидростатичности

$$u = -\frac{1}{\rho\Omega} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{\rho\Omega} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (2)$$

из которых следует соотношения "термического ветра"

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность морской воды,  $p$  — давление, а  $u$  и  $v$  — горизонтальные компоненты скорости. Если океан однороден ( $\rho \equiv \text{const}$ ), из (3) получаем теорему Тэйлора-Праудмена  $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$ , согласно которой горизонтальное движение не зависит от глубины. Но тогда

таким же свойством обладает завихренность  $\zeta$  и из (I) следует

$$\frac{\Omega + \zeta}{H} = \text{const} \quad (4)$$

для каждого вертикального столбика жидкости, где  $H$  — его полная высота от поверхности до дна в данном месте. Это соотношение известно под названием закона сохранения потенциального вихря в баротропном (однородном) океане.

Для бароклинной (неоднородной) жидкости теорема Тэйлора—П्राудмена не имеет места и мы поступим по другому. Обозначим через  $\Delta\rho$  приращение плотности по вертикали в пределах жидкого элемента; очевидно, при устойчивой стратификации оно не меняется в процессе движения. Умножая (I) на  $\Delta\rho$  и переходя к пределу при  $\Delta H \rightarrow 0$ , получим закон сохранения потенциального вихря

$$(\Omega + \zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z} = \text{const} \quad (5)$$

для каждой жидкой частицы в бароклинном случае. Стоящую в левой части величины также называют потенциальным вихрем.

Соотношениями (4) и (5) удобно пользоваться в случае, когда из каких-либо соображений известны значения постоянных в правой части равенства (которые в общем случае различны для разных частиц или столбиков). От этой неопределенности нетрудно избавиться, записывая (4) и (5) в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Omega + \zeta}{H} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ (\Omega + \zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = 0, \quad (7)$$

где введен дифференциальный оператор полного дифференцирования по времени  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ , причем учтена малость вертикальной адвекции.

Полагая  $H = H_0 - h$ ,  $h \ll H_0$ , и используя приближение бета-плоскости  $\Omega = \Omega_0 + \beta y$ , можно записать  $(\Omega + \zeta)/H = \Omega_0/H_0 \approx (\beta y + \zeta + h\Omega_0/H_0)/H_0$ , поэтому из (6) следует

$$\frac{d}{dt} (\zeta + \beta y + \Omega_0 h/H_0) = 0. \quad (8)$$

Так как в силу геострофических соотношений (2) можно считать  $\zeta = (\partial^2 p/\partial x^2 + \partial^2 p/\partial y^2)/\rho\Omega$ , (8) представляет уравнение, определяющее давление в баротропном потоке над неровным дном.

Аналогичным образом можно преобразовать и уравнение (7). Представим поле плотности в виде  $\rho = \rho^{(0)}(z) + \rho'$ , где стандартное распределение

$\rho^{(0)}$  можно связать с частотой плавучести  $N(z)$  известным соотношением  $N^2(z) = (g/\rho_0)(d\rho^{(0)}/dz)$ . Так как

$$(\Omega + \zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z} - \Omega_0 \frac{d\rho^{(0)}}{dz} \approx \frac{d\rho^{(0)}}{dz} \left( \zeta + \beta y + \frac{g \Omega_0}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right),$$

вместо (7) находим

$$\frac{d}{dt} \left( \zeta + \beta y + \frac{g \Omega_0}{\rho^* N^2(z)} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) = 0. \quad (9)$$

Более последовательно и строго уравнения типа (8) и (9) вместе с соответствующими граничными условиями будут выведены в первой главе и составят основной предмет дальнейшего исследования. Здесь мы ограничимся анализом некоторых важных следствий, вытекающих из закона сохранения баротропного потенциального вихря в форме (4). Для простоты будем предполагать, что характерные горизонтальные масштабы возмущений рельефа дна  $L$  порядка 10 км (в дальнейшем порядок величины  $X$  будем обозначать  $0(X)$ ), что позволяет принять  $\Omega = \text{const}$ . Рассмотрим две простейшие задачи о циклогенезе.

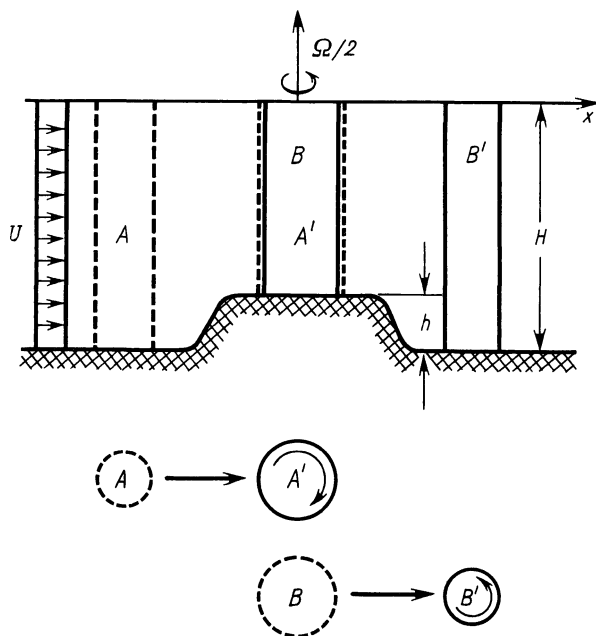
**З а д а ч а I [III].** Пусть в океане с ровным дном глубины  $H$  расположена подводная гора высоты  $h$ , причем жидкость первоначально покоится (рис.2). В начальный момент времени всей массе воды сообщается постоянная скорость  $U$  в направлении оси  $x$ . Через некоторое время после начала движения расположенный над горой жидкий столбик  $B$  переходит в положение  $B'$ , а его место занимает столбик  $A$ , обозначенный в новом положении через  $A'$ . С помощью (4) легко вычисляются завихренности столбиков  $A'$  и  $B'$ , которые оказываются равными

$$\zeta_{A'} = -\Omega \frac{h}{H} < 0, \quad \zeta_{B'} = \Omega \frac{h}{H-h} \approx \Omega \frac{h}{H} > 0. \quad (10)$$

Таким образом, в потоке возникли две области завихренности — антициклоническая  $A'$  над горой и циклоническая  $B'$  вниз по течению. Если  $A'$  покинет гору, его завихренность снова станет равной нулю и он потеряет свою индивидуальность, а на его место придет новый столбик, приобретая ту же завихренность  $\zeta_{A'}$ . Следовательно, мы можем считать, что завихренность  $\zeta_{A'}$  остается захваченной над горой; назовем ее топографической завихренностью. Что происходит дальше?

Столбики  $A'$  и  $B'$  образуют пару вихрей, интенсивности которых равны по величине, но противоположны по знаку. Под действием  $A'$  столбик  $B'$  начнет движение по часовой стрелке вокруг горы и одновременно будет сноситься потоком вниз по течению. Если скорость  $U$  потока достаточно велика, снесенная свободная циклоническая завихренность уйдет в конце концов в бесконечность [III], и мы получим стационарную картину, в которой антициклоническая завихренность будет захвачена над горой. Инду-

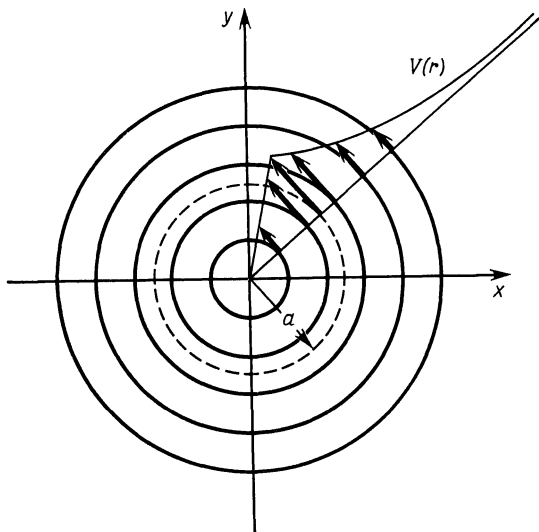




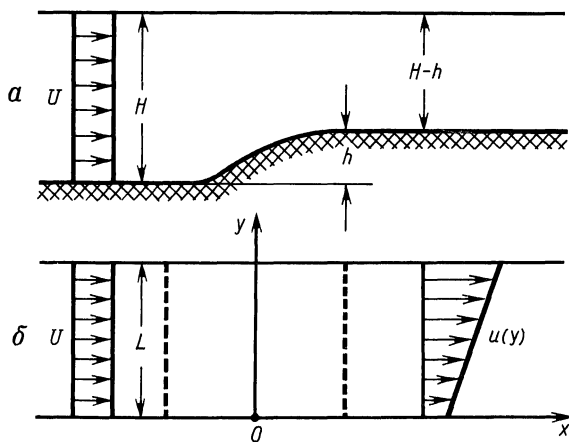
Р и с. 2. К объяснению циклогенеза в потоке однородной жидкости над изолированной подводной возвышенностью

цируемое этой завихренностью поле скорости, складываясь с полем скорости набегающего потока, может привести к двум качественно различным результатам: если высота горы достаточно мала, везде будет преобладать набегающий поток, что приведет лишь к некоторому искривлению (меандрированию) линий тока с усилением течений слева от горы и с ослаблением справа от нее по отношению к направлению набегающего потока. Если же высота горы достаточно велика и, следовательно, достаточно велика завихренность  $\zeta_{A'}$ , справа от вершины горы может возникнуть область замкнутых линий тока – это и есть топографический вихрь. Так как в нашем случае течение не зависит от вертикальной координаты, занятая топографическим вихрем область имеет форму прямого цилиндра – отсюда название "столб (колонна) Тэйлора".

В простейшем модельном случае, когда гора имеет форму прямого кругового цилиндра радиуса  $a$  и высоты  $h$ , легко установить количественный критерий образования столба Тэйлора. Так как препятствие имеет ровный верх, согласно (10) завихренность в пределах круга радиуса  $a$  является постоянной и равной  $-\Omega \frac{h}{H}$ , а вне круга тождественно равна нулю. Индуцируемое поле скоростей должно обладать осевой симметрией (рис.3),  $V = V(r)$ . Применяя теорему Стокса к произвольному кругу ра-



Р и с. 3. Поле скоростей, индуцируемое постоянной в круге радиуса  $a$  завихренностью  $\zeta$



Р и с. 4. Формирование поперечного сдвига скорости в канале с неровным дном

диуса  $r$  с центром на оси цилиндра, мы должны приравнять циркуляцию скорости  $2\pi r V(r)$  вдоль ограничивающей окружности и интеграл от завихренности по площади круга, равный  $\zeta S(r)$ , где  $S(r)$  — площадь той части круга, в которой  $\zeta \neq 0$ . Отсюда легко находим распределение скорости  $V(r)$

$$V(r) = \frac{\zeta}{2} \begin{cases} r, & r < a, \\ a^2/r; & r > a, \end{cases}$$

причем  $\max |V| = |\zeta| a/2$ . На это поле скоростей накладывается кинематически однородный набегающий поток в направлении оси  $x$ . Необходимым условием возникновения области замкнутых линий тока в результирующем течении является существование по крайней мере одной критической точки, в которой скорость обращается в нуль. Очевидно, для этого необходимо выполнение неравенства  $|\zeta| a/2 > U$  или  $\Omega h a/2H > U$ , откуда окончательно следует

$$\sigma \equiv \frac{h \Omega a}{H U} > 2 \equiv \sigma_{кр}. \quad (II)$$

Таким образом, существует некоторое критическое значение  $\sigma_{кр}$  топографического параметра  $\sigma$ , превышение которого приводит к образованию столбов Тейлора; для кругового цилиндра это значение равно 2. Оценим по формуле (II) значение  $\sigma$  для реальных характерных значений определяющих параметров. Полагая  $\Omega = 10^{-4} \text{с}^{-1}$ ,  $H = 4 \text{ км}$ ,  $a = 10 \text{ км}$ ,  $U = 10 \text{ см/с}$  и  $h = 800 \text{ м}$ , в точности получим  $\sigma = \sigma_{кр} = 2$ . Это показывает, что по крайней мере в слабо стратифицированных районах Мирового океана над подводными горами даже сравнительно небольшой высоты вполне вероятно формирование столбов Тейлора.

**З а д а ч а 2.** Продемонстрируем применение закона сохранения потенциального вихря на примере другой стационарной задачи, заимствованной из [ИЗ, 165]. Пусть в бесконечном канале постоянной ширины  $L$  глубина меняется в некоторой переходной области от постоянного значения  $H$  до постоянного значения  $H - h$  (рис.4). Из более глубокой части набегаёт поток с постоянной скоростью  $U$ . Предположим, что вниз по течению, на некотором удалении от переходной зоны, он перестраивается в новый поток с продольной скоростью  $u(y)$ . Допуская, что все линии тока берут начало вверх по течению, применим снова закон (4). Так как вверх по течению  $\zeta = 0$ , а вниз по течению  $\zeta = -u'(y)$ , имеем равенство  $\Omega/H = (\Omega - u'(y)) / (H - h)$ . Отсюда следует, что первоначально равномерный поток переходит вниз по течению в поток с постоянным сдвигом скорости  $u'(y) = \Omega h/H$ . Интегрируя последнее соотношение и используя закон сохранения массы  $UHL = [u(0) + u(L)](H-h)L/2$ , окончательно получим

$$u(y) = \frac{\Omega h}{H} \left[ \frac{U H^2}{\Omega h(H-h)} + y - \frac{L}{2} \right]. \quad (I2)$$

Скорость  $u(y)$  убывает слева направо поперек канала, принимая минимальное значение

$$u(0) = \frac{\Omega h}{H} \left[ \frac{UH^2}{\Omega h(H-h)} - \frac{L}{2} \right].$$

Если  $u(0) > 0$ , скорость вниз по течению нигде не меняет знака. В переходной зоне происходит перестройка потока, в результате которой линии тока поджимаются к левому краю канала. Если допустить, что соотношение (12) справедливо при любых значениях определяющих параметров, то при условии

$$U < \Omega h(H-h)L/2H^2 \quad (13)$$

у правой стенки канала появляется область возвратных течений. В переходной области в некотором месте происходит отрыв набегающего потока от стенки. Описанные эффекты являются родственными столбам Тэйлора из задачи I. Интересно отметить, что при  $h \ll H$  условие (13) по существу эквивалентно (II), если  $L$  заменить на  $\alpha [112]$ .

Рассмотренные выше примеры относились к простейшему случаю баротропных невязких потоков над возмущениями рельефа дна сравнительно небольшого масштаба. Развивая элементарную теорию топографического циклогенеза, мы пренебрегли влиянием ряда факторов, наиболее важными из которых являются: плотностная стратификация потоков, изменение параметра Кориолиса с широтой, ветер на поверхности и трение на дне, форма и масштабы топографических возмущений, переходные и периодические режимы, вертикальный и горизонтальный сдвиги скорости набегающих потоков.

В той или иной мере все эти проблемы обсуждаются на простых модельных примерах в остальной части этой книги, которая посвящена изложению современного состояния некоторых разделов теории топографического циклогенеза и меандрирования в океане.



## Г л а в а I

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ

#### I.1. Исходные уравнения и граничные условия по вертикали

Уравнения динамики океана описывают движение некоторой модельной сплошной среды с определенными свойствами. В настоящей книге принимается модель несжимаемой неоднородной вязкой жидкости, заполняющей океан, который расположен на вращающейся Земле и находится под действием постоянной силы тяжести  $g$  и заданных на поверхности ветровых напряжений и атмосферного давления. Кривизна земной поверхности учитывается с помощью известного приближения бета-плоскости (см., например, [17]), когда параметр Кориолиса  $\Omega$  аппроксимируется линейной функцией меридиональной координаты

$$\Omega = \Omega^* + \beta y. \quad (I.1.1)$$

Экваториальная область исключается из рассмотрения, поэтому всегда предполагается  $\Omega \neq 0$ .

При сопоставлении результатов теоретических исследований с данными натурных наблюдений важное значение имеет принятая интерпретация характеристик сплошной среды. Например, под скоростью в фиксированной точке океана по существу подразумевается результат действия некоторого оператора (реализуемого в виде прибора, способа численного дифференцирования и т.п.), осуществляющего пространственно-временное осреднение с определенными масштабами. Перенос импульса структурами меньших масштабов параметризуется с помощью коэффициентов турбулентной вязкости, которые не являются физическими константами и не допускают точного количественного определения. Турбулентность представляет собой проявление нелинейных взаимодействий в сплошной среде. Поскольку в рассматриваемых ниже моделях нелинейные свойства, хотя и не в полной мере, учитываются, мы предполагаем для простоты мелкомасштабную турбулентность однородной и изотропной и описываем ее с помощью одного постоянного коэффициента турбулентной вязкости  $\mu$ , который по величине значительно больше коэффициента молекулярной вязкости. Ниже будет показано, что основные выводы теории практически не зависят от принимаемого в разумных пределах численного значения  $\mu$ , и это является обнадеживающим обстоятельством. Как отмечает Педлоски [148], "... любая динамическая теория, которая решающим образом зависит от конкретного значения коэффициента турбулентной вязкости, на самом деле должна рассматриваться как имеющая шаткое основание".

С целью дальнейших упрощений мы полностью пренебрегаем турбулентным обменом массы, исключая тем самым возможные тепловые воздействия на границах.

Помещая начало левовинтовой системы локальных прямоугольных координат на невозмущенной поверхности океана и направляя оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно на восток, на север и по вертикали вниз, запишем исходную систему уравнений движения, неразрывности и несжимаемости в следующем виде:

$$\rho(Du/Dt - \Omega v) = -p_x + \mu \nabla^2 u, \quad (I.I.2)$$

$$\rho(Dv/Dt + \Omega u) = -p_y + \mu \nabla^2 v, \quad (I.I.3)$$

$$\rho Dw/Dt = -p_z + g\rho + \mu \nabla^2 w, \quad (I.I.4)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (I.I.5)$$

$$D\rho/Dt = 0. \quad (I.I.6)$$

Здесь использованы обозначения для операторов полного дифференцирования  $Df/Dt = f_t + u f_x + v f_y + w f_z$  и Лапласа  $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ ; индексы внизу обозначают частные производные по указанным независимым переменным.

Соотношения (I.I.2) - (I.I.6) представляют замкнутую систему дифференциальных уравнений для пяти искомым функций - трех компонент вектора скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$ , каждая из которых зависит от трех пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ .

Сформулируем граничные условия по вертикали. Естественными границами в этом направлении являются возмущенная поверхность океана  $z = -\eta(x, y, z)$  и твердое дно  $z = D(x, y)$  (рис. 5). Кинематические и динамические граничные условия на поверхности запишем в виде

$$w = -D\eta/Dt, \quad z = -\eta, \quad (I.I.7)$$

$$p = p^{(\alpha)}(x, y, t), \quad z = -\eta, \quad (I.I.8)$$

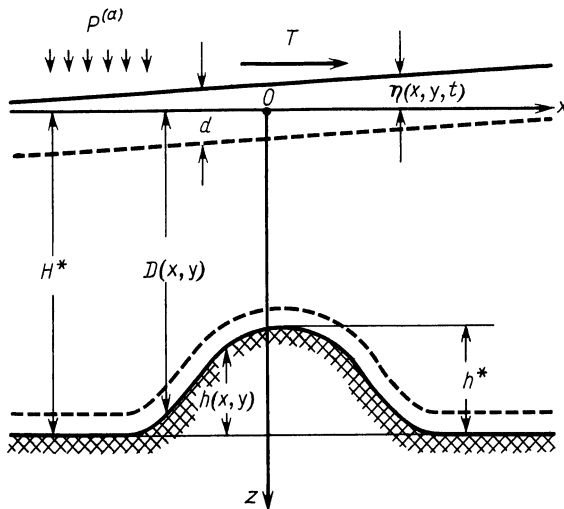
$$\mu u_z = -T^{(x)}(x, y, t), \quad \mu v_z = -T^{(y)}(x, y, t), \quad z = -\eta, \quad (I.I.9)$$

где  $p^{(\alpha)}$  и  $T^{(x, y)}$  суть заданные возмущение атмосферного давления и касательное напряжение ветра.

На дне  $z = D(x, y)$  потребуем выполнения условий прилипания

$$u = v = 0, \quad z = D, \quad (I.I.I0)$$

$$w = 0, \quad z = D. \quad (I.I.II)$$



Р и с. 5. К формулировке граничных условий по вертикали

Дополнительные граничные условия по горизонтали и начальные условия будут сформулированы ниже для отдельных классов задач.

В достаточно быстро вращающихся системах, к которым относится и гидросфера Земли, с высокой степенью точности оправдывается так называемое геострофическое приближение, выражающееся в равновесии внутренних слоев в уравнениях (I.I.2) и (I.I.3). По существу все теории средне- и крупномасштабных динамических процессов в океане исходят из геострофического приближения; различия состоят только в способах определения поля гидродинамического давления. Обычно различают два типа геострофических движений [17, 150] в зависимости от определяющего горизонтального масштаба, регулирующего баланс отдельных членов в уравнении вихря, которое получается из (I.I.2) и (I.I.3) путем исключения давления. В простейшем случае невязкой ( $\mu=0$ ) и однородной ( $\rho = \text{const}$ ) жидкости это уравнение с учетом (I.I.1) и (I.I.5) принимает вид

$$D\zeta/Dt - (\zeta + \Omega)\omega_z + \beta\psi + \omega_x\psi_z - \omega_y\psi_z = 0, \quad (\text{I.I.I2})$$

где  $\zeta = \omega_x - \omega_y$  представляет вертикальную компоненту вихря скорости. Обозначая через  $L^*$ ,  $H^*$ ,  $t_*^* = L^*/U^*$ ,  $U^*$ ,  $W^*$ ,  $\Omega^*$  характерные масштабы горизонтальной и вертикальной протяженности, времени, горизонтальной и вертикальной скорости и параметра Кориолиса соответственно, легко получаем оценки порядков величин

$$\zeta/\Omega \sim \varepsilon, \quad (\omega_x\psi_z - \omega_y\psi_z)/\omega_z\Omega \sim \varepsilon,$$

где параметр  $\varepsilon = U^*/L^*\Omega^* \ll 1$  для геострофических движений. Следова-

тельно, уравнение (I.I.12) упрощается к виду

$$D\zeta / Dt - \omega_z \Omega + \beta \sigma = 0. \quad (\text{I.I.13})$$

Это соотношение можно переписать в форме  $D(\zeta + \Omega) / Dt = \omega_z \Omega$ , допускающей очень простое физическое истолкование: изменение абсолютного вихря  $\zeta + \Omega$  каждого жидкого элемента пропорционально его деформации (растяжению или сжатию) в вертикальном направлении.

По определению, для геострофических движений первого типа все члены в уравнении (I.I.13) имеют одинаковый порядок, т.е.  $(U^*/L^*)^2 = W^* \Omega^* / N^* \sim \beta U^*$ , откуда следует  $W^* = \varepsilon U^* N^* / L^*$ ,  $L^* \sim L_w \equiv (U^* / \beta)^{1/2}$ . Для типичных в океане горизонтальных скоростей порядка 10 см/с величина  $L_w$  имеет порядок 100 км. Отсюда, в частности, следует, что имеющие указанный масштаб синоптические движения относятся к классу геострофических движений первого типа [537].

Для геострофических движений второго типа в уравнении (I.I.13) имеет место иной баланс членов, при котором  $(U^*/L^*)^2 \ll W^* \Omega^* / N^* \sim \beta U^*$ . В этом случае  $L^{*2} \gg L_w^2$ , и  $L^*$  уже приближается к планетарному масштабу, так что  $\Omega^* \sim \beta L^*$  и поэтому можно принять  $W^* = N^* U^* / L^*$ . Таким образом, геострофические движения первого и второго типа характеризуются также различными способами масштабирования вертикальных движений. Мы существенно используем этот факт ниже при приведении исходных уравнений к безразмерному виду.

## I.2. Масштабирование

Геострофический характер движения определяется малостью безразмерного параметра  $\varepsilon$ , который можно использовать для построения асимптотических решений задачи. Для этой цели удобно привести исходные уравнения и граничные условия к безразмерному виду, задавшись определенными характерными масштабами для всех искомым функций и независимых переменных. Формально это можно сделать многими способами, однако корректным будет лишь такое масштабирование, при котором все безразмерные функции и их производные имеют порядок единицы. Относительная роль отдельных слагаемых в полученных соотношениях определяется тогда численными значениями появившихся при них безразмерных коэффициентов. Рассмотрим отдельно случаи геострофических движений первого и второго типов.

Геострофические движения первого типа. При отсутствии всех внешних воздействий ( $T^{(x,y)} \equiv 0$ ,  $p^{(a)} \equiv 0$ ) океан находится в состоянии относительного равновесия  $u^{(0)} = v^{(0)} = \omega^{(0)} \equiv 0$ ,  $\eta^{(0)} \equiv 0$  и характеризуется некоторым устойчивым вертикальным распределением плотности  $\rho^{(0)}(z)$ , которому отвечает давление  $p^{(0)}(z)$ . Граничные условия (I.I.7) – (I.I.II) и уравнения (I.I.2), (I.I.3), (I.I.5), (I.I.6) при этом удовлетворяются тождественно, а из (I.I.4) следует  $\rho_z^{(0)} = g\rho^{(0)}$ , откуда с точностью до несущественной аддитивной постоянной находим

$$p^{(0)} = g \int_0^z \rho^{(0)} dz.$$

Вертикальный профиль плотности в состоянии устойчивого равновесия ( $\rho_z^{(0)} > 0$ ) удобно описывать с помощью частоты плавуемости

$$N(z) = \left( \frac{g}{\rho^{(0)}} \frac{d\rho^{(0)}}{dz} \right)^{1/2}.$$

Характерные значения функций  $\rho^{(0)}(z)$  и  $N(z)$  обозначим соответственно через  $\rho^*$  и  $N^*$ . Введем также характерные масштабы внешних воздействий -  $p^{(\alpha)*}$  для возмущения атмосферного давления и  $T^*$  для направления ветра. Локальную глубину океана представим в виде  $D(x,y) = H^* - h(x,y)$ , где функция  $h(x,y)$  определяет возмущение рельефа дна с характерным вертикальным масштабом  $h^*$ .

С помощью введенных выше можно сконструировать еще ряд новых линейных масштабов [94, 149]: внешний радиус деформации  $L_e = (gH^*)^{1/2}/\Omega^*$ ; внутренний радиус деформации  $L_i = N^*H^*/\Omega^*$ ; толщина экмановского слоя трения  $d = (\mu/\rho^*\Omega^*)^{1/2}$ .

Среди производных масштабов времени отметим так называемое время "спинапа" /10/

$$t^{**} = H^*(\rho^*/\mu\Omega^*)^{1/2} = H^*/\Omega^*d. \quad (I.2.1)$$

Перечислим теперь основные безразмерные параметры задачи. Это - число Россби (Кибеля)  $\varepsilon = U^*/L^*\Omega^*$ , число Экмана  $E = \mu/\rho^*\Omega^*H^{*2} = (d/H^*)^2$ , число Бургера  $B = H^*N^*/L^*\Omega^* = L_i/L^*$ , планетарный параметр  $\beta = \beta L^{*2}/U^{*2} = (L^*/L_w)^2$ , три геометрических параметра  $\delta = H^*/L^*$ ,  $\gamma = h^*/H^*$ ,  $\alpha = L^*/L_e$ , ветровой параметр  $\tau = T^*L^*/\rho^*H^*U^{*2}$ , барический параметр  $\alpha = \rho^{(\alpha)*}/\rho^*\Omega^*L^*U^*$ .

Отметим также используемые иногда число Тэйлора  $T_\alpha = 1/E$  и параметр стратификации  $S = B^2$ .

Приведем численные оценки для введенных параметров. Полагая  $U^* = 10$  см/с,  $H^* = 4$  км,  $L^* = 100$  км,  $\Omega^* = 10^{-4}$  с $^{-1}$ ,  $\rho^* = 1$  г/см $^3$ ,  $g = 10$  м/с $^2$ ,  $N^* = 2 \cdot 10^{-3}$  с $^{-1}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^{-13}$  см $^{-1}$  с $^{-1}$ ,  $\mu = 10^2$  г/см.с,  $h^* = 100$  м,  $T^* = 1$  дн/см $^2$ ,  $\rho^{(\alpha)*} = 10$  мбар, получим  $L_e = 2000$  км,  $L_i = 80$  км,  $L_w = 70$  км,  $d = 10$  м,  $t^* = 10^6$  с  $\approx 12$  сут,  $t^{**} = 4 \cdot 10^6$  с  $\approx 1,5$  мес. Безразмерные параметры принимают значения  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $E = 0,6 \cdot 10^{-5}$ ,  $B = 0,8$ ,  $\beta = 2$ ,  $\delta = 4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\tau = 0,25$  и  $\alpha = 1$ .

Перейдем к отмеченным штрихами безразмерным переменным с помощью соотношений [147]

$$\begin{aligned} x, y &= L^*x', y'; \quad z = H^*z'; \quad t = L^*t'/U^*; \quad u, v = U^*u', v'; \quad \omega = \varepsilon \delta U^* \omega'; \\ \rho &= \rho^{(0)}(z) + \Omega^* U^* L^* \rho^{(0)}(z) \rho'; \quad \rho^{(0)} = \rho^* \rho^{(0)'}; \quad \rho = \rho^{(0)}(z)(1 + \varepsilon \alpha^2 \rho'); \\ \rho^{(0)} &= \rho^* g H^* \rho^{(0)'}; \quad h = h^* h'; \quad \Omega = \Omega^*(1 + \varepsilon \beta y'); \quad T^{(x,y)} = T^* T^{(x',y')}; \quad \rho^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)*} \rho^{(\alpha)'}; \quad \eta = \Omega^* U^* L^* \eta/g. \end{aligned}$$

Опуская в дальнейшем для простоты штрихи, вместо (I.I.2) - (I.I.6) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} \{ (1 + \varepsilon \alpha^2 \rho) [ \varepsilon (du/dt + \varepsilon \omega u_z) - \\ - (1 + \varepsilon \beta y) \sigma ] + p_x \} = E (\delta^2 \Delta u + u_{zz}), \end{aligned} \quad (I.2.2)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} \{ (1 + \varepsilon \alpha^2 \rho) [ \varepsilon (d\sigma/dt + \varepsilon \omega \sigma_z) + \\ + (1 + \varepsilon \beta y) u ] + p_y \} = E (\delta^2 \Delta \sigma + \sigma_{zz}), \end{aligned} \quad (I.2.3)$$

$$\rho^{(0)}[(1 + \varepsilon \alpha^2 \rho) \varepsilon^2 \delta^2 (d\omega/dt + \varepsilon \omega \omega_z) + p_z - \rho + \alpha^2 B^2 N \rho] = \varepsilon \delta^2 E (\delta^2 \Delta \omega + \omega_{zz}), \quad (I.2.4)$$

$$u_x + v_y + \varepsilon \omega_z = 0, \quad (I.2.5)$$

$$d\rho/dt + \varepsilon \omega \rho_z + \omega (1 + \varepsilon \alpha^2 \rho) B^2 N^2 = 0, \quad (I.2.6)$$

где  $d/dt$  и  $\Delta$  соответственно обозначают горизонтальные операторы полной производной и Лапласа.

Граничные условия (I.I.7) – (I.I.II) примут вид:

$$\omega = -\alpha^2 d\eta/dt, \quad z = -\varepsilon \alpha^2 \eta, \quad (I.2.7)$$

$$(\varepsilon \alpha^2)^{-1} \int_0^z \rho^{(0)} dz + \rho^{(0)} \rho = \alpha \rho^{(\alpha)}, \quad z = -\varepsilon \alpha^2 \eta, \quad (I.2.8)$$

$$u_z = -(\tau \varepsilon / E) T^{(x)}, \quad v_z = -(\tau \varepsilon / E) T^{(y)}, \quad z = -\varepsilon \alpha^2 \eta, \quad (I.2.9)$$

$$u = v = 0, \quad z = 1 - \gamma h, \quad (I.2.10)$$

$$\omega = 0, \quad z = 1 - \gamma h. \quad (I.2.11)$$

Полученные выше соотношения с помощью асимптотического анализа будут подвергнуты систематическим упрощениям в следующем параграфе.

**Геострофические движения второго типа.** Когда характерный горизонтальный масштаб приближается к планетарному (радиус Земли), вертикальную скорость следует масштабировать по-иному, чем это было сделано выше. Кроме того, удобно использовать более простые формулы перехода к безразмерным плотности и давлению. Положим

$$\omega = \delta U^* \omega'; \quad \rho = \rho^* (1 + \varepsilon \alpha^2 \rho');$$

$$\rho = \rho^* (gz + \Omega^* U^* \Delta^* \rho'); \quad \Omega = \Omega^* \Omega'; \quad D = H^* D',$$

а все остальные величины приводятся к безразмерному виду точно так же, как и в предыдущем случае. Исходные уравнения и граничные условия по вертикали теперь принимают вид

$$(1 + \alpha^2 \varepsilon \rho) (\varepsilon D u / D t - \Omega \sigma) = -p_x + E (\delta^2 \Delta u + u_{zz}), \quad (I.2.12)$$

$$(1 + \alpha^2 \varepsilon \rho) (\varepsilon D \sigma / D t + \Omega u) = -p_y + E (\delta^2 \Delta \sigma + \sigma_{zz}), \quad (I.2.13)$$

$$(1 + \alpha^2 \varepsilon \rho) \varepsilon \delta^2 D \omega / D t = -p_z + \rho + E \delta^2 (\delta^2 \Delta \omega + \omega_{zz}), \quad (I.2.14)$$

$$u_x + v_y + \omega_z = 0, \quad (I.2.15)$$

$$D \rho / D t = 0, \quad (I.2.16)$$

$$\omega = -\varepsilon \alpha^2 d\eta/dt, \quad z = -\varepsilon \alpha^2 \eta, \quad (I.2.17)$$

$$(\varepsilon \alpha^2)^{-1} z + \rho = \alpha \rho^{(\alpha)}, \quad z = -\varepsilon \alpha^2 \eta, \quad (I.2.18)$$

$$u_z = -(\tau\varepsilon/\varepsilon)\tau^{(x)}, \quad \sigma_z = -(\tau\varepsilon/\varepsilon)\tau^{(y)}, \quad z = -\varepsilon\alpha^2\eta, \quad (I.2.19)$$

$$u = \sigma = 0, \quad z = D, \quad (I.2.20)$$

$$\omega = 0, \quad z = D \quad (I.2.21)$$

При  $L^* = 1000$  км и прежних численных значениях остальных параметров мы теперь имеем  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha = 0,1$  и  $\tau = 2,5$ .

### I.3. Метод возмущений (задачи первого типа)

Сформулированные в предыдущем параграфе в безразмерном виде две задачи содержат несколько, вообще говоря, независимых малых параметров. Для упрощения дальнейшего анализа их удобно связать между собой с помощью некоторых переходных множителей, имеющих порядок единицы. В качестве основного малого параметра примем число Россби  $\varepsilon$ . Как мы видели выше, для геострофических движений первого типа  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $E^{1/2}$  имеют примерно одинаковый порядок малости. Положим

$$E = 2k^2\varepsilon^2, \quad \gamma = \sigma\varepsilon, \quad \alpha = \gamma\varepsilon, \quad \delta = \alpha\varepsilon, \quad (I.3.1)$$

где безразмерные множители

$$k = \frac{L^*}{H^*U^*} \sqrt{\frac{\mu \Omega^{*1}}{2\rho^*}}, \quad \sigma = \frac{h^* L^* \Omega^*}{H^* U^*}, \quad \gamma = \frac{L^{*2} \Omega^{*2}}{(gH^*)^{1/2} U^*}, \quad \alpha\varepsilon = \frac{H^* \Omega^*}{U^*}$$

теперь имеют порядок единицы.

В связи с трудностями решения нелинейных уравнений (I.2.12) - (I.2.16) все подходы к изучаемой проблеме по необходимости являются приближенными. Наличие в задаче малых параметров позволяет использовать многочисленные методы возмущений, из которых наиболее употребительный в геофизической гидродинамике связан с разложениями по степеням числа Россби [58].

Для построения приближенного решения мы воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений [39, 55]. Представим каждую из искоемых функций  $u$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $p$ ,  $\rho$  в виде асимптотического ряда

$$f = f^{(0)}(x, y, z, t) + \varepsilon f^{(1)}(x, y, z, t) + \dots \quad (I.3.2)$$

Учитывая (I.3.1) и подставляя такие разложения в (I.2.2) - (I.2.6), получим уравнения нулевого

$$-\sigma^{(0)} + p_x^{(0)} = 0, \quad (I.3.3)$$

$$u^{(0)} + p_y^{(0)} = 0, \quad (I.3.4)$$

$$p_z^{(0)} - \rho^{(0)} = 0, \quad (I.3.5)$$

$$u_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)} = 0, \quad (I.3.6)$$

$$d\rho^{(0)}/dt + \beta^2 N^2 \omega^{(0)} = 0 \quad (I.3.7)$$

$$\text{и первого порядков } d u^{(0)}/dt - \sigma_y^{(1)} - \sigma_y \sigma^{(0)} + p_x^{(1)} = 0, \quad (I.3.8)$$

$$d\sigma^{(0)}/dt + u^{(1)} + \upsilon_y u^{(0)} + p_y^{(1)} = 0, \quad (I.3.9)$$

$$u_x^{(1)} + \upsilon_y^{(1)} + \omega_z^{(0)} = 0. \quad (I.3.10)$$

Из соотношений первого порядка мы выписали только уравнения горизонтального движения и неразрывности, так как остальные в дальнейшем не используются.

Из (I.3.3) и (I.3.4) следуют известные геострофические соотношения

$$u^{(0)} = -p_y^{(0)}, \quad \upsilon^{(0)} = p_x^{(0)}, \quad (I.3.11)$$

которые показывают, что в нулевом приближении  $p^{(0)}(x, y, z, t)$  на каждом горизонте представляет функцию тока горизонтального движения. Из (I.3.5) получаем выражение для возмущения плотности

$$\rho^{(0)} = p_z^{(0)}, \quad (I.3.12)$$

представляющее обычное условие гидростатики.

Уравнение неразрывности (I.3.6) удовлетворяется тождественно, а (I.3.7) с учетом (I.3.11) и (I.3.12) можно переписать в виде

$$p_{zt}^{(0)} + J(p^{(0)}, p_z^{(0)}) + B^2 N^2 \omega^{(0)} = 0, \quad (I.3.13)$$

где введено обозначение для функционального определителя

$$J(f_1, f_2) = f_{1x} f_{2y} - f_{1y} f_{2x}.$$

Соотношения (I.3.11) - (I.3.13) не образуют замкнутой системы уравнений относительно пяти искомых функций нулевого приближения, и в этом смысле геострофическое приближение является вырожденным /148/. Поэтому мы должны обратиться к соотношениям первого порядка (I.3.8) - (I.3.10), исключая из которых  $p^{(1)}$  и  $u_x^{(1)} + \upsilon_y^{(1)}$ , получим уравнение для вихря  $\zeta^{(0)}$

$$\zeta_t^{(0)} + J(p^{(0)}, \zeta^{(0)}) + \upsilon \zeta^{(0)} - \omega_z^{(0)} = 0,$$

где согласно (I.3.11)

$$\zeta^{(0)} = p_{xx}^{(0)} + p_{yy}^{(0)} \equiv \Delta p^{(0)}. \quad (I.3.14)$$

Учитывая равенство  $\upsilon^{(0)} = p_x^{(0)} = J(p^{(0)}, y)$  и (I.3.14), окончательно находим

$$\Delta p_t^{(0)} + J(p^{(0)}, \Delta p^{(0)} + \upsilon \zeta) - \omega_z^{(0)} = 0. \quad (I.3.15)$$

Уравнения (I.3.13) и (I.3.15) образуют замкнутую систему для определения двух функций нулевого приближения - давления  $p^{(0)}$  и вертикальной скорости  $\omega^{(0)}$ .

Нетрудно убедиться, что с помощью разложений вида (I.3.2) для горизонтальных скоростей нельзя удовлетворить граничным условиям (I.2.9) и (I.2.10). Это означает, что указанные разложения не являются равномерно пригодными относительно вертикальной координаты  $z$  и должны быть видоизменены в пределах тонких поверхностного и придонного пограничных слоев. Вне этих слоев справедливы представления (I.3.2), которые называются "внешними" разложениями. В пограничных слоях мы построим так



называемые "внутренние" разложения, которые затем "срастим" с "внешними".

Рассмотрим поверхностный и придонный пограничные слои (рис.5), толщина которых, как легко показать, имеет порядок  $\varepsilon$ .

Вводя в верхнем слое погранслоиную переменную  $\xi = (z + \varepsilon \alpha^2 \eta) / \varepsilon$ , представим все искомые поля в виде внутренних асимптотических разложений

$$f = \tilde{f}^{(0)}(x, y, \xi, t) + \varepsilon \tilde{f}^{(1)}(x, y, \xi, t) + \dots$$

Умножив предварительно (I.2.2) и (I.2.3) на  $\varepsilon$ , получим в нулевом

$$\tilde{p}_\xi^{(0)} = 0 \quad (\text{I.3.I6})$$

и в первом приближениях

$$\rho^{(0)}(0)(-\tilde{\sigma}^{(0)} + \tilde{p}_x^{(0)}) = 2k^2 \tilde{u}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (\text{I.3.I7})$$

$$\rho^{(0)}(0)(\tilde{u}^{(0)} + \tilde{p}_y^{(0)}) = 2k^2 \tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (\text{I.3.I8})$$

$$\tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{\sigma}_y^{(0)} + \tilde{\omega}_\xi^{(0)} = 0. \quad (\text{I.3.I9})$$

Как и выше, в первом приближении выписаны лишь те уравнения, которые будут использоваться дальше.

Граничные условия на поверхности соответственно дают

$$\tilde{\omega}^{(0)}(x, y, 0, t) = 0, \quad (\text{I.3.20})$$

$$\rho^{(0)}(0)[\tilde{p}^{(0)}(x, y, 0, t) - \eta] = \alpha p^{(\alpha)}, \quad (\text{I.3.2I})$$

$$\tilde{u}_\xi^{(0)}(x, y, 0, t) = -\frac{\tau}{2k^2} \Gamma^{(x)}, \quad \tilde{\sigma}_\xi^{(0)}(x, y, 0, t) = -\frac{\tau}{2k^2} \Gamma^{(y)}. \quad (\text{I.3.22})$$

Из (I.3.I6) следует  $\tilde{p}^{(0)} = \tilde{p}^{(0)}(x, y, t)$ , т.е. в нулевом приближении гидродинамическое давление не меняется поперек пограничного слоя. Уравнения (I.3.I7) и (I.3.I8) удобно объединить в комплексной форме

$$\frac{1}{2q^2} (\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)})_{\xi\xi} - i(\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)}) = \tilde{p}_x^{(0)} + i\tilde{p}_y^{(0)}, \quad (\text{I.3.23})$$

где обозначено  $q = \sqrt{\rho^{(0)}(0)}/2k$ . Поскольку в полученном уравнении зависимость от  $x, y, t$  параметрическая, его можно рассматривать как обыкновенное по отношению к вертикальной координате  $\xi$ ; общее решение имеет вид

$$\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)} = i(\tilde{p}_x^{(0)} + i\tilde{p}_y^{(0)}) + C_1 \exp[q(t+i)\xi] + C_2 \exp[-q(t+i)\xi]. \quad (\text{I.3.24})$$

Для определения произвольных "постоянных" интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  необходимо воспользоваться граничными условиями (I.3.22) и учесть погранслоинный характер решения (I.3.24). Из (I.3.22) находим

$$(\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)})_\xi = -\frac{\tau}{2k^2} (\Gamma^{(x)} + i\Gamma^{(y)}), \quad \xi = 0. \quad (\text{I.3.25})$$

Требую ограниченности решения при  $\xi \rightarrow \infty$ , получаем  $C_1 = 0$ . Тогда (I.3.25)

определяет вторую постоянную  $C_2$ , и (I.3.24) окончательно принимает вид

$$\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{v}^{(0)} = i(\tilde{p}_x^{(0)} + i\tilde{p}_y^{(0)}) + \frac{\tau(1-i)}{4k^2q} (\tau^{(x)} + i\tau^{(y)}) \exp[-(1+i)q\xi], \quad (\text{I.3.26})$$

откуда после разделения вещественной и мнимой частей и последующего дифференцирования легко находим горизонтальную дивергенцию

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{v}_y^{(0)} &= \frac{\tau}{4k^2q} e^{-q\xi} [(\tau_x^{(x)} + \tau_y^{(y)})(\cos q\xi - \sin q\xi) + \\ &+ (\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)})(\cos q\xi + \sin q\xi)]. \end{aligned} \quad (\text{I.3.27})$$

Заметим, что в выражении (I.3.26) первое слагаемое справа представляет обычную геострофическую скорость, а второе – погранслоиную поправку в виде известной спирали Экмана [91].

Интегрируя (I.3.19) по вертикали при условии (I.3.20), получим

$$\tilde{\omega}^{(0)} = - \int_0^{\xi} (\tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{v}_y^{(0)}) d\xi,$$

откуда, с помощью (I.3.27), имеем

$$\tilde{\omega}^{(0)} = \frac{\tau}{\rho^{(0)}(0)} \left[ (\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)}) (e^{-q\xi} \cos q\xi - 1) - (\tau_x^{(x)} + \tau_y^{(y)}) e^{-q\xi} \sin q\xi \right]. \quad (\text{I.3.28})$$

Выражения (I.3.26) и (I.3.28) определяют поле скоростей в поверхностном пограничном слое.

Теперь мы должны согласовать "внешнее" и "внутреннее" разложения.

Это достигается с помощью процедуры сращивания [39, 55], которая в нашем случае для нулевых приближений имеет вид равенства  $f^{(0)}(x, y, 0, t) = \tilde{f}^{(0)}(x, y, \infty, t)$ . Из этого условия находим  $\tilde{p}^{(0)}(x, y, t) = p^{(0)}(x, y, 0, t)$ , и тогда в силу (I.3.26) автоматически обеспечивается сращивание горизонтальных скоростей. С помощью (I.3.28) для вертикальной скорости имеем

$$\omega^{(0)}(x, y, 0, t) = - \frac{\tau}{\rho^{(0)}(0)} (\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)}). \quad (\text{I.3.29})$$

Таким образом, по отношению к внутренним слоям океана механическое действие атмосферы сводится к индуцированию поля вертикальной скорости (I.3.29) на нижней границе поверхностного слоя трения. Эта так называемая "экмановская вертикальная скорость" [67] пропорциональна завихренности поля напряжения ветра, причем атмосферному циклону отвечает восходящее движение ("экмановский подсос"), а антициклону – нисходящее движение. Прямое действие атмосферного давления при этом проявляется лишь в виде поправки к возвышению свободной поверхности (закон "обратного барометра"), которая согласно (I.3.21) имеет вид

$$\eta = p^{(0)}(x, y, 0, t) - \frac{\alpha}{\rho^{(0)}(0)} p^{(a)}.$$

Обращаясь к придонному пограничному слою, вводим новую погранслоиную вертикальную координату  $\xi = (1 - \delta \varepsilon h - z)/\varepsilon$  и ищем соответствующие "внутренние" разложения всех функций снова в виде

$$f = \tilde{f}^{(0)}(x, y, \xi, t) + \varepsilon \tilde{f}^{(1)}(x, y, \xi, t) + \dots \quad (\text{I.3.30})$$

Подстановка в систему (I.2.2) - (I.2.6) дает в нулевом

$$\tilde{p}^{(0)} = 0 \quad (\text{I.3.31})$$

и в первом приближениях

$$\rho^{(0)}(1)(-\tilde{\sigma}^{(0)} + \tilde{p}_x^{(0)} - 6h_x \tilde{p}_\xi^{(0)}) = 2k^2 \tilde{u}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (\text{I.3.32})$$

$$\rho^{(0)}(1)(\tilde{u}^{(0)} + \tilde{p}_y^{(0)} - 6h_y \tilde{p}_\xi^{(0)}) = 2k^2 \tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (\text{I.3.33})$$

$$\tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{\sigma}_y^{(0)} - 6\tilde{u}_\xi^{(0)} h_x - 6\tilde{\sigma}_\xi^{(0)} h_y - \tilde{\omega}_\xi^{(0)} = 0. \quad (\text{I.3.34})$$

Из граничных условий (I.2.I0) и (I.2.II) следует

$$\tilde{u}^{(0)}(x, y, 0, t) = \tilde{\sigma}^{(0)}(x, y, 0, t) = 0, \quad (\text{I.3.35})$$

$$\tilde{\omega}^{(0)}(x, y, 0, t) = 0. \quad (\text{I.3.36})$$

Полагая  $q = \sqrt{\rho^{(0)}(1)}/2k$  и учитывая (I.3.31), из (I.3.32) и (I.3.33) получим в комплексной форме уравнение точно такого же вида, как и (I.3.23). Удовлетворяющее граничным условиям (I.3.35) решение пограничного типа имеет вид

$$\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)} = i(\tilde{p}_x^{(0)} + i\tilde{p}_y^{(0)})\{1 - \exp[-(1+i)q\xi]\}, \quad (\text{I.3.37})$$

откуда после разделения вещественной и мнимой частей находим

$$\tilde{u}^{(0)} = -\tilde{p}_x^{(0)} e^{-q\xi} \sin(q\xi) - \tilde{p}_y^{(0)} [1 - e^{-q\xi} \cos(q\xi)], \quad (\text{I.3.38})$$

$$\tilde{\sigma}^{(0)} = \tilde{p}_x^{(0)} [1 - e^{-q\xi} \cos(q\xi)] - \tilde{p}_y^{(0)} e^{-q\xi} \sin(q\xi). \quad (\text{I.3.39})$$

Интегрируя уравнение (I.3.34) с учетом граничных условий (I.3.35) и (I.3.36), получим

$$\tilde{\omega}^{(0)} = \int_0^\xi (\tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{\sigma}_y^{(0)}) d\xi - 6(h_x \tilde{u}^{(0)} + h_y \tilde{\sigma}^{(0)}). \quad (\text{I.3.40})$$

С помощью (I.3.38) и (I.3.39) находим

$$\tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{\sigma}_y^{(0)} = -\zeta^{(0)} e^{-q\xi} \sin(q\xi),$$

откуда

$$\int_0^\xi (\tilde{u}_x^{(0)} + \tilde{\sigma}_y^{(0)}) d\xi = \frac{\zeta^{(0)}}{2q} \left\{ e^{-q\xi} [\sin(q\xi) + \cos(q\xi)] - 1 \right\}. \quad (\text{I.3.41})$$

Условие сращивания главных членов асимптотических разложений имеет теперь вид  $f^{(0)}(x, y, 1, t) = \tilde{f}^{(0)}(x, y, \infty, t)$ . С учетом (I.3.31) получаем  $\tilde{p}^{(0)}(x, y, t) = p^{(0)}(x, y, 1, t)$ , т.е. поперек придонного пограничного слоя давление также не меняется в нулевом приближении. Согласно (I.3.37) сращивание горизонтальных скоростей происходит автоматически, а для вертикальной скорости из (I.3.40) и (I.3.41) получаем

$$\omega^{(0)}(x, y, 1, t) = -\frac{1}{2q} \zeta^{(0)} + 6(h_x p_y^{(0)} - h_y p_x^{(0)})$$

или

$$\omega^{(0)}(x, y, t) = - \frac{k}{\sqrt{\rho^{(0)}(t)}} \Delta p^{(0)} - \delta J(p^{(0)}, h). \quad (I.3.42)$$

Последнее соотношение показывает, что влияние дна проявляется в поле вертикальной скорости на верхней границе придонного пограничного слоя двойко: трение дает вклад, пропорциональный вихрю горизонтальной скорости в окрестности дна, а возмущение рельефа дна пропорционально величине скалярного произведения горизонтальной скорости и градиента глубины, поскольку именно такой смысл имеет якобиан  $J(p^{(0)}, h)$ . Нетрудно видеть, что циклоническая завихренность ( $\zeta^{(0)} > 0$  в северном полушарии) и ориентация вектора придонной скорости в сторону возвышения рельефа дна приводит к подъему ( $\omega^{(0)} < 0$ ) придонных вод в рассматриваемом месте; в противном случае имеет место опускание вод.

Дадим в заключение сводку полученных результатов. Опуская индекс  $u$  величин нулевого приближения внешних разложений, перепишем соотношения (I.3.13) и (I.3.15) в виде

$$\rho_{zt} + J(\rho, \rho_z) + B^2 N^2(z) \omega = 0, \quad (I.3.43)$$

$$\Delta p_t + J(\rho, \Delta p + \rho_y) - \omega_z = 0. \quad (I.3.44)$$

Из двух безразмерных постоянных  $\rho^{(0)}(0)$  и  $\rho^{(0)}(1)$  можно принять равной единице; пусть, например,  $\rho^{(0)}(0) = 1$ . Включая  $\sqrt{\rho^{(0)}(1)}$  в определение параметра  $k$ , т.е. полагая

$$k = \frac{L^*}{H^* U^*} \sqrt{\frac{\mu \Omega^*}{2 \rho_D}},$$

где  $\rho_D$  — постоянное значение невозмущенной плотности на дне, вместо (I.3.29) и (I.3.42) получим граничные условия

$$\omega = -\tau(\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)}), \quad z = 0, \quad (I.3.45)$$

$$\omega + k \Delta p + \delta J(\rho, h) = 0, \quad z = 1. \quad (I.3.46)$$

Для возвышения свободной поверхности имеем

$$\eta = \rho(x, y, 0, t) - \rho^{(a)}. \quad (I.3.47)$$

Условимся в дальнейшем уравнения (I.3.43), (I.4.44) и граничные условия (I.3.45), (I.3.46) именовать основными соотношениями квазигеострофической модели. Если давление  $\rho$  и вертикальная скорость  $\omega$  найдены, горизонтальные скорости и возмущение плотности определяются из (I.3.II) и уравнения гидростатики (I.3.I2):

$$u = -\rho_y, \quad v = \rho_x, \quad (I.3.48)$$

$$\rho = \rho_z. \quad (I.3.49)$$

При необходимости поправки к скоростям в пограничных слоях можно найти по формулам (I.3.26), (I.3.28), (I.3.37) и (I.3.39).

Граничные и начальные условия будут сформулированы при рассмотрении конкретных задач.

Представленный выше вывод основных соотношений был выполнен в предположении, что жидкость несжимаема. Это вполне оправдано для океанологических приложений, однако для атмосферы эффекты сжимаемости могут уже играть заметную роль. Как показал Яновиц [122], учет сжимаемости несколько видоизменяет уравнение потенциального вихря; пример применения построенной им аналитической модели к реальным горным системам в атмосфере дан в работе [158].

Более сильным ограничением является предположение о малости параметра  $\gamma$ , позволившее осуществить снос граничных условий на дне на невозмущенную поверхность  $z = 1$ . В квазигеострофической модели мы принимаем это допущение в целях упрощения математической постановки задачи. Тем не менее, даже при этих условиях, как показывают лабораторные эксперименты [171], построенная для бесконечно малых топографических возмущений теория может быть хорошим приближением для конечных топографий.

Система уравнений (1.3.43) и (1.3.44), несмотря на свой асимптотический характер, физически все еще весьма содержательна и широко используется в геофизической гидродинамике для исследования многих важных вопросов: бароклинной неустойчивости, синоптической изменчивости, различных волновых процессов, фронтогенеза и др. [159]. Предметом нашего рассмотрения будут топографический циклогенез и мёандрирование.

Квазигеострофические задачи удобно классифицировать по степени стратификации поля плотности. Легко устанавливается связь

$$\tilde{N}^2 = N^2 + \frac{\varepsilon}{B^2} \rho_z, \quad (1.3.50)$$

где  $\tilde{N}$  есть частота плавучести возмущенного состояния, причём  $0(N) = 0(\tilde{N}) = 1$ .

Если  $B^2 \ll \varepsilon$ , то в уравнении (1.3.43) можно пренебречь членом вертикальной адвекции, а из (1.3.50) следует, что тогда  $\rho_z \sim B^2/\varepsilon \ll 1$ . Это случай очень слабой стратификации, который в пределе  $B = 0$  ( $\rho_z = 0$ ) переходит в простейшую задачу для однородной жидкости. При  $B^2 \sim \varepsilon$  в (1.3.43) по-прежнему пренебрежимо малым является последнее слагаемое, однако теперь  $\rho_z \sim 1$ , и мы должны учитывать зависимость возмущения плотности от вертикальной координаты (слабая стратификация). При  $B^2 \sim 1$  имеем умеренную стратификацию, когда уравнение (1.3.43) уже не допускает упрощений. Наконец, при сильной стратификации имеем  $B^2 \gg 1$ , и это показывает, что в уравнении (1.3.41) должны быть сильны пограничные эффекты, которые также можно изучить методом сращиваемых асимптотических разложений путем введения нового вертикального масштаба  $1/B$ .

#### 1.4. Метод возмущений (задачи второго типа)

Как следует из оценок, приведенных в конце § 1.2, в случае геострофических движений второго типа по-прежнему можно использовать зависимости  $E = 2k^2\varepsilon^2$ ,  $\delta = \alpha\varepsilon$ , где наряду с  $\alpha$ ,  $\alpha$  и  $\tau$  параметры  $k$  и  $\alpha\varepsilon$  имеют порядок единицы. Асимптотическим методом из (1.2.12) - (1.2.16)

получаем, что нулевые приближения внешних разложений теперь удовлетворяют соотношениям

$$-\Omega \psi^{(0)} = -\rho_x^{(0)}, \quad (I.4.1)$$

$$\Omega u^{(0)} = -\rho_y^{(0)}, \quad (I.4.2)$$

$$0 = -\rho_z^{(0)} + \rho^{(0)}, \quad (I.4.3)$$

$$u_x^{(0)} + \psi_y^{(0)} + \omega_z^{(0)} = 0, \quad (I.4.4)$$

$$D\rho^{(0)}/Dt = 0, \quad (I.4.5)$$

образующим замкнутую систему уравнений для пяти функций  $u^{(0)}$ ,  $\psi^{(0)}$ ,  $\omega^{(0)}$ ,  $\rho^{(0)}$  и  $\rho^{(0)}$ .

В поверхностном пограничном слое из (I.2.I2) - (I.2.I6) для главных членов внутренних разложений находим

$$\tilde{\omega}^{(0)} \tilde{u}_\xi^{(0)} - \Omega \tilde{\psi}^{(0)} = -\tilde{\rho}_x^{(0)} - \alpha^2 \tilde{\rho}_\xi^{(0)} \eta_x + 2k^2 \tilde{u}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (I.4.6)$$

$$\tilde{\omega}^{(0)} \tilde{\psi}_\xi^{(0)} + \Omega \tilde{u}^{(0)} = -\tilde{\rho}_y^{(0)} - \alpha^2 \tilde{\rho}_\xi^{(0)} \eta_y + 2k^2 \tilde{\psi}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (I.4.7)$$

$$\tilde{\rho}_\xi^{(0)} = 0, \quad (I.4.8)$$

$$\tilde{\omega}_\xi^{(0)} = 0. \quad (I.4.9)$$

Граничные условия (I.2.I7) - (I.2.I9) дают

$$\tilde{\omega}^{(0)} = 0, \quad \xi = 0, \quad (I.4.I0)$$

$$-\eta + \tilde{\rho}^{(0)} = \alpha r^{(\alpha)}, \quad \xi = 0, \quad (I.4.II)$$

$$\tilde{u}_\xi^{(0)} = -(\tau/2k^2)T^{(x)}, \quad \tilde{\psi}_\xi^{(0)} = -(\tau/2k^2)T^{(y)}, \quad \xi = 0. \quad (I.4.I2)$$

Из уравнения (I.4.9) с учетом граничного условия (I.4.I0) следует  $\tilde{\omega}^{(0)} = 0$ ; принимая во внимание этот результат и (I.4.8), из (I.4.6) и (I.4.7) при граничных условиях (I.4.I2) находим, как и в § I.3,

$$\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\psi}^{(0)} = \frac{i}{\Omega} \left( \tilde{\rho}_x^{(0)} + i\tilde{\rho}_y^{(0)} \right) + q\tau(1-i)(T^{(x)} + iT^{(y)}) \exp[-(1+i)q\xi], \quad (I.4.I3)$$

где  $q = \sqrt{\Omega}/2k$ . Так как из условия сращивания следует  $\tilde{\rho}^{(0)}(x, y, t) = \rho^{(0)}(x, y, 0, t)$ , то в соответствии с (I.4.I), (I.4.2) и (I.4.I3) сращивание горизонтальных скоростей происходит автоматически, а для вертикальной скорости имеем  $\omega^{(0)}(x, y, 0, t) = 0$ .

В придонном пограничном слое вводим погранслоиную переменную  $\xi = (D-z)/\varepsilon$  и перед подстановкой разложений вида (I.3.30) предварительно умножаем уравнения (I.2.I2) - (I.2.I3) на  $\varepsilon$ . Тогда в нулевом приближении получаем  $\tilde{\rho}_\xi^{(0)} = 0$ ,

$$-\tilde{u}_{\xi}^{(0)} D_x - \tilde{\sigma}_{\xi}^{(0)} D_y + \tilde{\omega}_{\xi}^{(0)} = 0, \quad (I.4.14)$$

$$(-\tilde{u}^{(0)} D_x - \tilde{\sigma}^{(0)} D_y + \tilde{\omega}^{(0)}) \rho_{\xi}^{(0)} = 0. \quad (I.4.15)$$

Из граничных условий (I.2.20) - (I.2.21) имеем

$$\tilde{u}^{(0)} = \tilde{\sigma}^{(0)} = 0, \quad \xi = 0, \quad (I.4.16)$$

$$\tilde{\omega}^{(0)} = 0, \quad \xi = 0. \quad (I.4.17)$$

Интегрируя (I.4.14) по вертикали при условиях (I.4.16) и (I.4.17), находим

$$\omega^{(0)} = \tilde{u}^{(0)} D_x + \tilde{\sigma}^{(0)} D_y, \quad (I.4.18)$$

и тогда (I.4.15) удовлетворяется тождественно.

В первом приближении из динамических уравнений получаем

$$\tilde{u}_{\xi}^{(0)} (\omega^{(0)} - \tilde{u}^{(0)} D_x - \tilde{\sigma}^{(0)} D_y) - \Omega \sigma^{(0)} = -\tilde{p}_x^{(0)} + \tilde{p}_{\xi}^{(1)} D_x + 2k^2 u_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (I.4.19)$$

$$\tilde{\sigma}_{\xi}^{(0)} (\tilde{\omega}^{(0)} - \tilde{u}^{(0)} D_x - \tilde{\sigma}^{(0)} D_y) + \Omega \tilde{u}^{(0)} = -\tilde{p}_y^{(0)} + \tilde{p}_{\xi}^{(1)} D_y + 2k^2 \tilde{\sigma}_{\xi\xi}^{(0)}, \quad (I.4.20)$$

$$-\tilde{p}_{\xi}^{(1)} + \tilde{p}^{(0)} = 0. \quad (I.4.21)$$

Предположим, что  $\tilde{p}_{\xi}^{(0)} \neq 0$ , т.е.  $\tilde{p}^{(0)} = \tilde{p}^{(0)}(x, y, t)$ . Тогда с учетом (I.4.21) и (I.4.18) уравнения (I.4.19) и (I.4.20) приводятся к виду

$$\frac{1}{2q^2} (\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)})_{\xi\xi} - \Omega i (\tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)}) = \tilde{p}_x^{(0)} + i\tilde{p}_y^{(0)} - \rho^{(0)} (D_x + iD_y)$$

с решением пограничного типа

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(0)} + i\tilde{\sigma}^{(0)} &= \frac{i}{\Omega} [(\tilde{p}_x^{(0)} + i\tilde{p}_y^{(0)}) - \\ &- \tilde{p}^{(0)} (D_x + iD_y)] \{1 - \exp[-(1+i)q\xi]\}, \end{aligned} \quad (I.4.22)$$

которое, очевидно, удовлетворяет граничным условиям (I.4.16). Условие сращивания  $f^{(0)}(x, y, D, t) = \tilde{f}^{(0)}(x, y, \infty, t)$  дает  $\tilde{p}^{(0)}(x, y, t) = \rho^{(0)}(x, y, D, t)$  и  $\rho^{(0)}(x, y, D, t) = \tilde{\rho}^{(0)}(x, y, t)$ . Но тогда  $\tilde{p}_x^{(0)}(x, y, t) = \rho_x^{(0)}(x, y, D, t) + \rho_z^{(0)}(x, y, D, t) D_x = \rho_x^{(0)}(x, y, D, t) + \rho^{(0)}(x, y, D, t) D_x$  и аналогично  $\tilde{p}_y^{(0)}(x, y, t) = \rho_y^{(0)}(x, y, D, t) + \rho^{(0)}(x, y, D, t) D_y$  и (I.4.22) обеспечивает сращивание горизонтальных скоростей. Теперь из (I.4.18) в результате сращивания получаем

$$\omega^{(0)} = u^{(0)} D_x + \sigma^{(0)} D_y, \quad z = D. \quad (I.4.23)$$

Соберем вместе все полученные результаты, опуская индексы над величинами нулевого приближения внешних разложений. Задача сводится к построению решения системы уравнений

$$-\Omega \sigma = -p_x, \quad (I.4.24)$$

$$\Omega u = -p_y, \quad (I.4.25)$$

$$\rho = p_z, \quad (I.4.26)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (I.4.27)$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z = 0 \quad (I.4.28)$$

при граничных условиях по вертикали

$$w = 0, \quad z = 0, \quad (I.4.29)$$

$$w = uD_x + vD_y, \quad z = D. \quad (I.4.30)$$

Из (I.4.II) находим возвышение свободной поверхности

$$\eta = p(x, y, 0, t) - \alpha p^{(\alpha)}(x, y, t). \quad (I.4.31)$$

Соотношения (I.4.24) – (I.4.28) приводятся к системе двух уравнений относительно давления  $p$  и вертикальной скорости  $w$  :

$$p_{zt} + \frac{1}{\Omega} J(p, p_z) + w\rho_{zz} = 0, \quad (I.4.32)$$

$$\frac{1}{\Omega^2} J(p, \Omega) - w_z = 0. \quad (I.4.33)$$

Граничные условия (I.4.29) – (I.4.30) можно переписать в виде

$$w = 0, \quad z = 0, \quad (I.4.34)$$

$$w = \frac{1}{\Omega} J(p, D), \quad z = D \quad (I.4.35)$$

Если  $p$  и  $w$  найдены, горизонтальные скорости и возмущение плотности определяются по формулам

$$u = -\frac{1}{\Omega} p_y, \quad v = \frac{1}{\Omega} p_x, \quad (I.4.36)$$

$$p = p_z. \quad (I.4.37)$$

Условимся в дальнейшем под геострофической моделью понимать уравнения (I.4.32), (I.4.33) и граничные условия (I.4.34) и (I.4.35).

Интересно сопоставить уравнения (I.4.32) и (I.4.33) с аналогичными уравнениями (I.3.43) и (I.3.44) для квазигеострофической модели. Имеются три различия: 1) в геострофической модели не учитывается вихрь горизонтальной скорости; 2) в квазигеострофической модели член вертикальной адвекции в уравнении несжимаемости (I.3.43) линеаризован относительно вертикального градиента невозмущенного поля плотности; 3) и, наконец, в квазигеострофической модели изменения параметра Кориолиса учитываются только при его дифференцировании ( $\beta y$  в уравнении (I.3.44)).

Отметим также, что в геострофической модели отсутствуют какие-либо эффекты турбулентного трения, тогда как в квазигеострофической модели они явно входят в граничное условие на дне (I.3.46) и неявно – через посредство касательного напряжения ветра.



## Г л а в а 2

### ОДНОРОДНЫЙ ОКЕАН

#### 2.1. Баротропные потоки и некоторые их свойства

В соответствии с принятой в главе I классификацией все задачи в рамках квазигеострофического приближения разбиваются на четыре класса. Простейший и наиболее изученный случай — это модель однофазной жидкости, для которой  $B=0$  и  $\rho=0$ . Как следует из соотношения (I.3.49), при указанном условии поле давления  $p = p(x, y, t)$  не зависит от вертикальной координаты, и тогда уравнение (I.3.43) удовлетворяется тождественно. Интегрируя уравнение (I.3.44) по вертикали при условиях (I.3.45) и (I.3.46), получим основное соотношение квазигеострофической баротропной модели

$$\Delta p_t + J(p, \Delta p + \delta h + \delta y) + k \Delta p = \tau (T_x^{(y)} - T_y^{(x)}). \quad (2.1.1)$$

Если ввести потенциальный вихрь  $\Pi = \Delta p + \delta y + \delta h$ , уравнение (2.1.1) можно переписать в виде

$$\Pi_t + J(p, \Pi) = \tau (T_x^{(y)} - T_y^{(x)} - k \Delta p). \quad (2.1.2)$$

Так как в принятом приближении стоящий слева оператор означает полное дифференцирование вдоль траекторий жидких столбиков, последнее соотношение указывает на источники и стоки потенциального вихря. Если завихренность напряжения ветра равна нулю и в системе отсутствует диссипация ( $k=0$ ), потенциальный вихрь для каждого жидкого столбика сохраняется в процессе движения.

Из структуры уравнения (2.1.1) видно, что топографический и планетарный факторы в принятом приближении действуют аддитивно в виде комбинации  $g = \delta y + \delta h$ , представляющей некоторую заданную функцию горизонтальных координат. Это обстоятельство широко используется при лабораторном моделировании планетарных влияний (так называемого бета-эффекта) на вращающихся установках с помощью соответствующим образом подобранного рельефа дна [172].

Установим некоторые полезные энергетические соотношения, вытекающие из уравнения (2.1.1). С этой целью рассмотрим в плоскости движения ограниченную односвязную область  $\Sigma$  с границей  $\Gamma$  и внешней нормалью  $n$ ; элемент дуги вдоль  $\Gamma$  обозначим через  $d\ell$ . Для любых однозначных функций  $f_1$  и  $f_2$  с помощью теоремы Стокса устанавливается интегральное тождество

$$\iint_{\Sigma} J(f_1, f_2) d\Sigma = \oint_{\Gamma} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \ell} d\ell = - \oint_{\Gamma} f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \ell} d\ell \quad (2.1.3)$$

Интегрируя уравнение (2.1.1) по области  $\Sigma$  и учитывая (2.1.3), получим

$$\oint_{\Gamma} p_{nt} dl - \oint_{\Gamma} (\Delta p + q) p_e dl + k \oint_{\Gamma} p_n dl = \tau \oint_{\Gamma} T^{(e)} dl. \quad (2.1.4)$$

Далее, умножая (2.1.1) на  $p$  и снова интегрируя по  $\Sigma$ , находим

$$\iint_{\Sigma} p \Delta p_t d\Sigma + \iint_{\Sigma} J(p^2/2, \Delta p + q) d\Sigma + \iint_{\Sigma} p \Delta p d\Sigma = \tau \iint_{\Sigma} p (T_x^{(y)} - T_y^{(x)}) d\Sigma.$$

Учитывая геострофические соотношения (1.3.48) и выполняя элементарные преобразования, с помощью теоремы Стокса получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2)_t d\Sigma &= \oint_{\Gamma} p p_{nt} dl - \oint_{\Gamma} (\Delta p + q) p p_e dl + k \oint_{\Gamma} p p_n dl - \\ &- k \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2) d\Sigma - \tau \oint_{\Gamma} p T^{(e)} dl + \tau \iint_{\Sigma} (u T^{(x)} + v T^{(y)}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

По своему физическому содержанию — это теорема об изменении кинетической энергии, что хорошо видно в частном случае, когда  $\Gamma$  совпадает с линией тока, на которой  $p_e = 0$ . Вынося  $p$  из-под знаков криволинейных интегралов, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2)_t d\Sigma &= p \left( \oint_{\Gamma} p_{nt} dl + k \oint_{\Gamma} p_n dl - \tau \oint_{\Gamma} T^{(e)} dl \right) - \\ &- k \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2) d\Sigma + \tau \iint_{\Sigma} (u T^{(x)} + v T^{(y)}) d\Sigma, \end{aligned}$$

но согласно (2.1.4) первое слагаемое справа обращается в нуль, поэтому

$$\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2)_t d\Sigma = -k \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2) d\Sigma + \tau \iint_{\Sigma} (u T^{(x)} + v T^{(y)}) d\Sigma.$$

Если  $\Gamma$  — неподвижная линия тока (например, твердая граница), последнее соотношение переписывается в виде

$$E_t = -2kE + \tau \iint_{\Sigma} (u T^{(x)} + v T^{(y)}) d\Sigma, \quad (2.1.6)$$

где введена кинетическая энергия

$$E = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2) d\Sigma.$$

В уравнении (2.1.6) первое слагаемое справа определяет диссипацию кинетической энергии под действие придонного трения, а второе — работу сил ветра. Из этого соотношения следует, что при отсутствии ветра и как угодно малом отличном от нуля трении в рассматриваемой области  $E = E_0 e^{-2kt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. в конце концов движение исчезает. Время стационарирования имеет порядок  $O(t) = O(k^{-1}) = O(\varepsilon E^{-1/2})$ , что в размерных переменных соответствует масштабу "спинаша"  $t^{**}$ , определяемому по формуле (1.2.1) и составляющему величину порядка нескольких месяцев.

В стационарном случае для любой замкнутой линии тока из (2.1.4) следует

$$k \oint_{\Gamma} p_n dl = \tau \oint_{\Gamma} T^{(e)} dl, \quad (2.1.7)$$

т.е. циркуляция скорости вдоль  $\Gamma$  пропорциональна циркуляции напряжения ветра. Условие (2.1.7) остается справедливым также для многосвязных областей и используется для выделения единственного решения задачи [12, 16, 97].

Рассмотрим еще одно интересное следствие уравнения (2.1.2), которое в частном случае  $k = \tau = 0$  принимает вид закона сохранения  $\Pi_t + J(p, \Pi) = 0$ . Умножая это уравнение на  $\Pi$  и интегрируя результат по любой области, ограниченной неподвижной линией тока, найдем

$$Q_t = 0, \quad (2.1.8)$$

где введена полная энстрофия

$$Q = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \Pi^2 d\Sigma,$$

которая согласно (2.1.8) сохраняется в процессе движения. Если в системе имеется трение, то при постепенном затухании движения, очевидно,

$$Q \rightarrow Q_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} q^2 d\Sigma > 0.$$

В общем случае для решения уравнения (2.1.1) необходимо сформулировать граничные и начальные условия. Простейшая постановка задачи получается для замкнутого ограниченного водоема  $\Sigma$  с границей  $\Gamma$ , которая должна быть одновременно линией тока. Тогда граничное условие можно записать в виде

$$p = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \quad (2.1.9)$$

Задавая состояние в момент времени  $t = 0$ , получим начальное условие

$$p = p_0(x, y), \quad t = 0, \quad (2.1.10)$$

где функция  $p_0$ , разумеется, согласована с (2.1.9)

Таким образом, все сводится к интегрированию уравнения (2.1.1) при условиях (2.1.9) и (2.1.10) и заданных  $q = \nu y + \delta h$ ,  $\vec{\tau}$  и постоянных параметрах  $k$  и  $\tau$ . Возможны и другие постановки задач, например, для неограниченных областей, с периодическими граничными условиями и т.д.; с конкретными примерами мы еще встретимся в настоящей главе.

В общем случае решение сформулированной выше задачи может быть получено только численными методами. Здесь мы кратко остановимся на применении метода Галеркина, когда в качестве координатных функций принимаются собственные функции некоторой спектральной задачи. Установим сначала вспомогательное тождество. Пусть функция  $\Psi(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям (2.1.9). Умножая (2.1.1) на  $\Psi$  и интегрируя результат по области  $\Sigma$ , после несложных преобразований получим

$$\iint_{\Sigma} (p_t + kp) \Delta \Psi d\Sigma - \iint_{\Sigma} (\Delta p + q) J(p, \Psi) d\Sigma = \tau \iint_{\Sigma} (\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)}) \Psi d\Sigma. \quad (2.1.11)$$

Обозначим через  $\Psi^m$  и  $\lambda_m$  собственные функции и собственные числа спектральной задачи

$$\begin{aligned} \Delta \Psi + \lambda \Psi &= 0 & \text{в} & \Sigma, \\ \Psi &= 0 & \text{на} & \Gamma. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Известно [41], что все  $\lambda_m$  положительны и неограниченно возрастают с

номером  $m$ , а функции  $\psi^{(m)}$  — взаимно ортогональны. Нормируя их, будем считать выполненным условие

$$\iint_{\Sigma} \psi^{(i)} \psi^{(j)} d\Sigma = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Положим

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} p_m(t) \psi^{(m)}(x, y), \quad q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \psi^{(m)}(x, y), \\ \tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)} &= \sum_{m=1}^{\infty} z_m(t) \psi^{(m)}(x, y), \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

где, очевидно,

$$\begin{aligned} p_m(t) &= \iint_{\Sigma} p \psi^{(m)} d\Sigma, \quad q_m = \iint_{\Sigma} q \psi^{(m)} d\Sigma, \\ z_m(t) &= \iint_{\Sigma} (\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)}) \psi^{(m)} d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Полагая теперь в (2.1.11)  $\psi \equiv \psi^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  и учитывая соотношения (2.1.12) — (2.1.14), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_m = -k p_m + \frac{1}{\lambda_m} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_i p_i - q_i) p_j \alpha_{jm}^{(i)} - \tau z_m \right\}, \quad (2.1.15)$$

где

$$\alpha_{jm}^{(i)} = \iint_{\Sigma} \psi^{(i)} J(\psi^{(j)}, \psi^{(m)}) d\Sigma, \quad i, j, m = 1, 2, \dots$$

Постоянные  $\alpha_{jm}^{(i)}$  зависят только от геометрии области  $\Sigma$  и удовлетворяют легко проверяемым условиям

$$\alpha_{jm}^{(i)} + \alpha_{mj}^{(i)} = 0, \quad \alpha_{jm}^{(i)} + \alpha_{im}^{(j)} = 0, \quad (2.1.16)$$

откуда, в частности, следует  $\alpha_{ij}^{(i)} = 0$ ,  $\alpha_{ij}^{(i)} = \alpha_{ji}^{(i)} = 0$ . Начальные условия для системы (2.1.15) получаются из (2.1.9):

$$p_m(0) = p_m^{(0)} = \iint_{\Sigma} p_0(x, y) \psi^{(m)} d\Sigma.$$

Обрывая разложения (2.1.13) и систему (2.1.15) при некотором  $m = M$ , получим конечномерную аппроксимацию рассматриваемой задачи, доступную для численного анализа с помощью ЭВМ. Заметим, что в силу свойств (2.1.16) для  $M$  степеней свободы только  $\frac{1}{6}M(M-1)(M-2)$  коэффициентов  $\alpha_{jm}^{(i)}$  фактически отлично от нуля. Построенный конечномерный аналог относится к числу так называемых систем гидродинамического типа [56, 59], интенсивно изучавшихся в последние годы.

С помощью представлений (2.1.13) получают выражения для кинетической энергии, полной энтропии и циркуляции вдоль границ  $\Gamma$ :

$$E = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\nabla p)^2 d\Sigma = -\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} p \Delta p d\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m p_m^2, \quad (2.1.17)$$

$$Q = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\Delta p + q)^2 d\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (q_m - \lambda_m p_m)^2, \quad (2.1.18)$$

$$C = \oint_{\Gamma} p_n d\ell = \iint_{\Sigma} \Delta p d\Sigma = - \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \lambda_m p_m, \quad (2.1.19)$$

$$\text{где } \sigma_m = \iint_{\Sigma} \psi^{(m)} d\Sigma.$$

Поскольку нашей главной целью является изучение влияния локализованных возмущений рельефа дна, наибольший интерес представляют задачи для неограниченных областей. Попытаемся с помощью уравнения (2.1.1) проследить за процессом вихреобразования в потоке, мгновенно возникшем в безграничном океане из состояния покоя. Аналогичная по своему физическому содержанию задача на качественном уровне обсуждалась во введении.

Пренебрегая для простоты действием ветра и придонного трения, перепишем уравнение (2.1.1) в виде

$$\Delta p_t + J(p, \Delta p + q) = 0. \quad (2.1.20)$$

Пусть в начальный момент времени создается внешнее поле давления, которое затем поддерживается по закону

$$p_0 = -U(t)y + V(t)x. \quad (2.1.21)$$

Согласно (1.3.48) это соответствует безвихревому полю скорости  $u_0 = U(t)$ ,  $v_0 = V(t)$ . Под действием планетарно-топографического эффекта в потоке индуцируется вихревое поле, вызывающее возмущение основного потока (2.1.21). Представим результирующее решение в виде

$$p = p_0 + p_q + p_s, \quad (2.1.22)$$

где  $p_q(x, y)$  есть стационарное планетарно-топографическое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\Delta p_q = -q. \quad (2.1.23)$$

Подставляя (2.1.22) в (2.1.20) и учитывая (2.1.23), получим прогноз-тическое уравнение

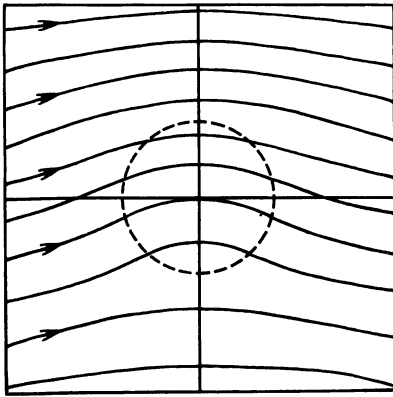
$$\Delta p_{st} + J(p, \Delta p_s) = 0 \quad (2.1.24)$$

для свободной завихренности  $\Delta p_s$ . Начальное условие для уравнения (2.1.24) имеет вид

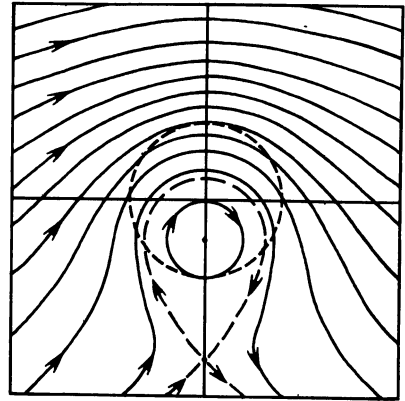
$$p_s = -p_q, \quad t = 0. \quad (2.1.25)$$

Таким образом, суммарное поле давления складывается из заданного внешнего поля  $p_0$ , стационарного поля планетарно-топографических вихрей  $p_q$ , определяемого из уравнения (2.1.23), и поля свободных вихрей  $p_s$ , которое должно находиться путем решения задачи (2.1.24) – (2.1.25).

Приведенная выше вихревая интерпретация оказывается особенно полезной при изучении топографического циклогенеза при отсутствии бета-эффекта. В этом случае  $q = \beta h(x, y)$  представляет финитную функцию, и реше-



а



б

Р и с. 6. Поле  $p_0 - p_g$  для препятствия в форме прямого кругового цилиндра для  $b = 1$  (а) и  $b = 4$  (б)

ние уравнения (2.1.23) можно представить в виде логарифмического потенциала [41]

$$p_g = - \frac{6}{2\pi} \iint_T \ln r_T h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где  $r_T = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$  и интегрирование распространяется по области  $T$ , в которой  $h(x, y)$  отлична от нуля. Аналогичным образом,

$$p_s = \frac{1}{2\pi} \iint_S \ln r_s \Delta p_s(\xi, \eta, t) d\xi d\eta,$$

где свободная завихренность  $\Delta p_s$  теперь определяется из интегро-дифференциального уравнения (2.1.24).

Рассмотрим в качестве примера случай подводной возвышенности в форме прямого кругового цилиндра единичного радиуса, для которого  $h(x, y) = 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$  и  $h \equiv 0$  при  $r > 1$ . Тогда, непосредственно интегрируя (2.1.23), находим

$$p_g = - \frac{6}{4} \begin{cases} r^2, & r < 1, \\ 1 + 2 \ln r, & r > 1. \end{cases}$$

Свободная завихренность будет эволюционировать во внешнем по отношению к ней поле  $p_0 + p_g$ , линии тока которого для различных  $b$  изображены на рис. 6; для простоты принято  $U \equiv 1$ ,  $V \equiv 0$ , т.е.  $p_0 = -y$ . При  $b < 2$  все линии тока поля  $p_0 + p_g$  имеют начало и конец на бесконечности; это означает, что свободный вихрь при  $t \rightarrow \infty$  будет унесен потоком на бесконечность и установится картина течений, изображенная на рис. 6, а. При  $b > 2$  в поле  $p_0 + p_g$  появляются замкнутые линии тока (рис. 6, б); можно ожидать, что при этом по крайней мере часть свободной завихренности

ти окажется захваченной в окрестности препятствия. Ясно, что окончательное распределение вихрей в окрестности подводной возвышенности будет зависеть от закона стационарирования набегающего потока.

## 2.2. Свободные баротропные волны Россби

Продолжая изучать общие свойства нелинейного уравнения (2.1.1), в этом параграфе мы построим несколько его точных частных решений для безграничного океана в предположении, что ветровые воздействия отсутствуют. Хотя они будут получены для случая плоского дна, все эти решения представляют самостоятельный физический интерес и позволяют глубже понять механизмы изучаемых процессов.

Свободные планетарные волны Россби. Рассмотрим сначала случай горизонтального дна. Полагая  $\delta = \tau = 0$ , перепишем уравнение (2.1.1) в форме

$$\Delta p_t + J(p, \Delta p + v\psi) + k\Delta p = 0 \quad (2.2.1)$$

и будем искать его частные решения вида  $p = e^{-kt} \psi(x, y, t)$ . Подстановка в (2.2.1) приводит к соотношению

$$\Delta \psi_t + v\psi_x + e^{-kt} J(\psi, \Delta \psi) = 0,$$

которое будет заведомо выполнено, если одновременно справедливы уравнения

$$\Delta \psi_t + v\psi_x = 0, \quad (2.2.2)$$

$$J(\psi, \Delta \psi) = 0. \quad (2.2.3)$$

Бегущая волна  $\psi = F(x - Ut, y)$  удовлетворяет условиям (2.2.2) и (2.2.3), если функция  $F(\xi, \eta)$  есть любое решение уравнения

$$\Delta F - \frac{\delta}{U} F = 0. \quad (2.2.4)$$

Ограниченные на бесконечности решения уравнения Гельмгольца (2.2.4) имеют место лишь при  $U < 0$  и в полярных координатах выражаются через функции Бесселя  $J_n$ . При этом поле давления принимает вид

$$p = e^{-kt} \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(\alpha r) \cos(n\theta + \alpha_n), \quad (2.2.5)$$

где  $A_n$  и  $\alpha_n$  — произвольные постоянные,

$$\alpha = \sqrt{-\delta/U}, \quad (2.2.6)$$

и

$$\xi = x - Ut = r \cos \theta, \quad \eta = y = r \sin \theta.$$

К сожалению, решение (2.2.5) не позволяет удовлетворить произвольным начальным данным. Это можно сделать лишь для линеаризованного варианта уравнения (2.2.1), суммируя частные решения вида (2.2.5) при различных  $\alpha$  с помощью интеграла Фурье-Бесселя; такой подход использовал Флерл <sup>637</sup>

при моделировании рингов Гольфстрима. Так как разным  $\alpha$  отвечают разные скорости распространения  $U$ , начальные возмущения поля давления произвольной формы при своем распространении на запад будут подвержены дисперсии.

Заметим, что линеаризация уравнения (2.2.1), сводящаяся к отбрасыванию слагаемого  $J(p, \Delta p)$ , эквивалентна допущению, что условие (2.2.3) выполняется тождественно для любых решений уравнения (2.2.2), которое представляет известное уравнение линейной теории баротропных волн Россби [17].

В декартовых координатах уравнение (2.2.4) допускает частные решения вида

$$G(\xi, \eta) = A_0 \cos \ell \xi \cos m \eta,$$

где, как и в (2.2.6), волновой вектор  $(\ell, m)$  удовлетворяет условию

$$\alpha \ell^2 = \ell^2 + m^2 = -\frac{\beta}{U}. \quad (2.2.7)$$

Поле давления представляет бегущую волну

$$p = A_0 e^{-kt} \cos \ell(x - Ut) \cos m y \quad (2.2.8)$$

с шахматным расположением циклонических и антициклонических вихрей, размеры которых по осям соответственно равны  $d_x = \pi/\ell$  и  $d_y = \pi/m$  (рис.7). Простое решение (2.2.8) можно использовать для интерпретации синоптических вихрей открытого океана. Пусть, например, зональный размер отдельного вихря вдвое больше меридионального [40]. Полагая  $d_x = 2d_y = 2d$ , из (2.2.7) получим  $U = -4\beta d^2/5\pi^2$ . При  $d=1$  и  $\beta=2$  эта формула дает  $U \approx -0,16$ , что в размерных переменных соответствует большому диаметру вихря 200 км и фазовой скорости 1.6 см/с. При соответствующем выборе амплитудного множителя  $A_0$  можно получить какие угодно величины орбитальных скоростей в вихре. Время перемещения вихря на расстояние, равное его большому диаметру, составляет  $2d/|U| = 5\pi^2/2\beta d \approx 12,3$ , что составляет примерно 5 месяцев. Несмотря на значительную схематизацию явления, приведенная оценка хорошо согласуется с данными наблюдений [40, 53].

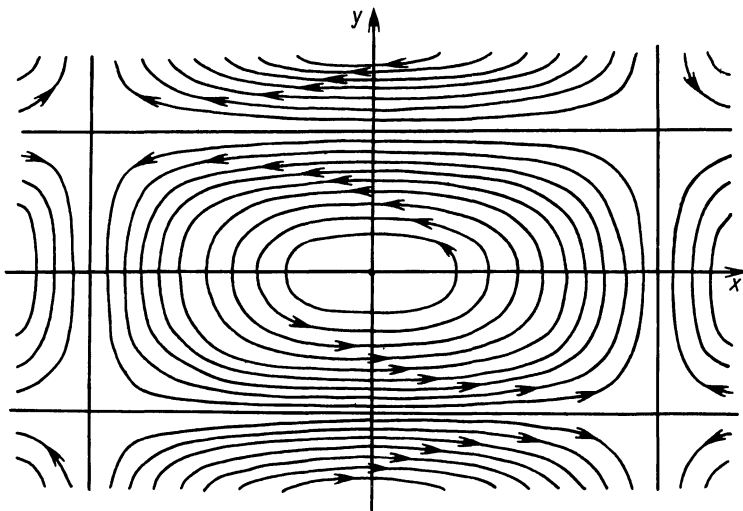
Благодаря периодичности решения (2.2.8) по пространственным координатам справедливы соотношения

$$\int_{x_0}^{x_0+2d_x} v dx = \int_{y_0}^{y_0+2d_y} u dy = 0,$$

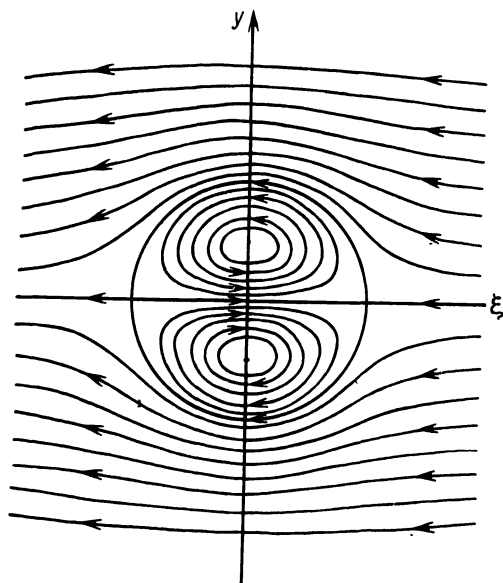
т.е. в рассматриваемом волновом процессе отсутствует результирующий интегральный перенос масс. Ниже мы изучим другой тип решений, где такой перенос имеет место.

Уединенные волны Россби. Положим  $k=0$  и будем искать решения уравнения (2.2.1) в виде бегущей волны  $p = \psi(x - Ut, y)$ . Подстановка этого





Р и с. 7. Поле давления, определяемое формулой (2.2.8) при  $A_0 < 0$   
(модель синоптического вихря)



Р и с. 8. Поле давления, определяемое формулой (2.2.20)  
(модель солитона Россби)

выражения в (2.2.I) и простые преобразования приводят к соотношению

$$J(U\eta + \psi, \Delta\psi + \delta\eta) = 0, \quad (2.2.9)$$

где якобиан рассматривается в переменных  $\xi = x - Ut$ ,  $\eta = y$ .

Всякое уравнение  $J(f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta)) = 0$  геометрически означает параллельность векторов  $\nabla f_1$  и  $\nabla f_2$ , т.е. совпадение изолиний полей  $f_1$  и  $f_2$ . Каждой линии  $f_1(\xi, \eta) = \text{const}$  отвечает некоторая линия  $f_2(\xi, \eta) = \text{const}$ , и наоборот. Отсюда следует, что  $f_1$  и  $f_2$  должны быть связаны функциональной зависимостью вида  $F(f_1, f_2) = 0$ , которая может и не допускать однозначной разрешимости относительно  $f_1$  или  $f_2$ . Для приложений представляет интерес случай, когда функция  $F$  представима в виде  $F(f_1, f_2) = \prod_{i=1}^N F_i(f_1, f_2)$ , причем каждое из уравнений  $F_i(f_1, f_2) = 0$  уже однозначно разрешимо относительно одного из аргументов. Если при этом существуют такие точки  $(\alpha_i, \beta_i)$ , что  $F_i(\alpha_i, \beta_i) = F_{i+1}(\alpha_i, \beta_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , то можно в плоскости переменных  $f_1, f_2$  в указанных точках совершить непрерывный переход от одной ветви к другой. Поясним это на примере. Пусть  $F = F_1 F_2$ , где  $F_1(f_1, f_2) = f_1 - C_1 f_2$  и  $F_2(f_1, f_2) = f_1 - C_2 f_2$  при постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Каждое из уравнений  $F_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , однозначно разрешимо относительно  $f_1$ , причем переход от одной ветви к другой осуществляется в точке  $(0, 0)$  пересечения прямых  $f_1 = C_1 f_2$  и  $f_1 = C_2 f_2$ . Если плоскость  $(\xi, \eta)$  линиями  $f_1(\xi, \eta) = f_2(\xi, \eta) = 0$  разбивается на ряд областей, то переход из одной области в соседнюю может сопровождаться переходом с одной ветви функциональной связи между  $f_1$  и  $f_2$  к другой.

Вернемся к уравнению (2.2.9) и запишем две ветви его интеграла в виде линейных соотношений

$$\Delta\psi + \delta\eta = -\nu^2(U\eta + \psi), \quad r \ll 1, \quad (2.2.I0)$$

$$\Delta\psi + \delta\eta = \varkappa^2(U\eta + \psi), \quad r \gg 1, \quad (2.2.II)$$

которые соответственно относятся к указанным областям плоскости  $(\xi, \eta)$ , где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , а  $\nu$  и  $\varkappa$  — некоторые постоянные. Переход с одной ветви на другую происходит на окружности  $r = 1$ , где, очевидно, должны выполняться условия

$$\Delta\psi + \delta\eta = U\eta + \psi = 0, \quad r = 1. \quad (2.2.I2)$$

Кроме того, на этой окружности потребуем непрерывности производной по нормали  $\partial\psi/\partial r$ ; непрерывность  $\psi$  и вихря  $\Delta\psi$  следует из (2.2.I2).

При вещественном  $\nu$  любое ограниченное решение уравнения (2.2.I0) имеет вид

$$\psi = -\left(U + \frac{\delta}{\nu^2}\right) r \sin\theta + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\nu r) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

где  $\alpha_n, \beta_n$  — произвольные постоянные. Вне единичного круга будем искать решения, экспоненциально исчезающие на бесконечности. Тогда из

(2.2.II) следует  $U = \delta/\varepsilon^2 > 0$ , причем само решение имеет вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\varepsilon r)(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

где  $K_n$  - функции Макдональда /46/, а  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  - произвольные постоянные. Из (2.2.I2) и условия непрерывности радиальной производной получаем систему уравнений

$$J_n(\nu)\alpha_n = K_n(\varepsilon)\alpha_n = 0, \quad n \geq 0; \quad (2.2.I3)$$

$$J_n(\nu)\beta_n = K_n(\varepsilon)\beta_n = 0, \quad n \neq 1; \quad (2.2.I4)$$

$$-\frac{\delta}{\nu^2} + J_1(\nu)\beta_1 = \frac{\delta}{\varepsilon^2} + K_1(\varepsilon)\beta_1 = 0; \quad (2.2.I5)$$

$$\nu J_n'(\nu)\alpha_n = \varepsilon K_n'(\varepsilon)\alpha_n, \quad n \geq 0; \quad (2.2.I6)$$

$$\nu J_n'(\nu)\beta_n = \varepsilon K_n'(\varepsilon)\beta_n, \quad n \neq 1; \quad (2.2.I7)$$

$$-\left(\frac{\delta}{\varepsilon^2} + \frac{\delta}{\nu^2}\right) + \nu J_1'(\nu)\beta_1 = \varepsilon K_1'(\varepsilon)\beta_1. \quad (2.2.I8)$$

Из (2.2.I5) находим выражения

$$\beta_1 = \frac{\delta}{\nu^2 J_1(\nu)}, \quad \beta_1 = -\frac{\delta}{\varepsilon^2 K_1(\varepsilon)},$$

подстановка которых в (2.2.I8) приводит к уравнению

$$G(\nu) = \frac{J_2(\nu)}{\nu J_1(\nu)} = -\frac{K_2(\varepsilon)}{\varepsilon K_1(\varepsilon)}. \quad (2.2.I9)$$

Функция  $G(\nu)$  имеет простые полюсы  $\mu_{1,m}$ ,  $m \geq 1$ , которые являются положительными корнями уравнения  $J_1(\nu) = 0$ ; при переходе через эти полюсы  $G(\nu)$  меняет знак с плюса на минус, причем на каждом промежутке  $\mu_{1,m} < \nu < \mu_{1,m+1}$  она обращается в нуль в точке  $\mu_{2,m}$ , которая совпадает с соответствующим положительным корнем уравнения  $J_2(\nu) = 0$ . При любом  $x > 0$  всегда  $K_2(\varepsilon)/\varepsilon K_1(\varepsilon) > 0$ , поэтому уравнение (2.2.I9) имеет счетное множество решений  $\nu_m$ , где  $\mu_{1,m} < \nu_m < \mu_{2,m}$ ; корень  $\nu_m$  стремится к левому пределу, если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и к правому при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Поскольку при положительных значениях аргумента всегда  $K_n > 0$ , из уравнений (2.2.I3) и (2.2.I4) находим  $\alpha_n = 0$ ,  $n \geq 0$  и  $\beta_n = 0$ ,  $n \neq 1$ . Так как  $J_n(\nu)$  имеет простые корни и, следовательно, не обращается в нуль одновременно с  $J_n'(\nu)$  ни при одном  $\nu > 0$ , из (2.2.I6) и (2.2.I7) следует  $\alpha_n = 0$ ,  $n \geq 0$  и  $\beta_n = 0$ ,  $n \neq 1$ .

Собирая все полученные результаты, окончательно запишем

$$\psi + U\eta = \begin{cases} \frac{\delta}{\nu^2} \left[ \frac{J_1(\nu_m r)}{J_1(\nu_m)} - r \right] \sin \theta, & r \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left[ \frac{K_1(\varepsilon r)}{K_1(\varepsilon)} - r \right] \sin \theta, & r > 1, \end{cases} \quad (2.2.20)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{\delta/U}$ .

Решения вида (2.2.20) были построены Ларичевым и Резником и названы уединенными волнами (солитонами) Россби [45, 69]. Функция  $\rho(x, y, t) = \psi(x - Ut, y)$  определяет распространяющееся на восток ( $U > 0$ ) локализованное возмущение, которое экспоненциально затухает на бесконечности. Сумма  $\psi(\xi, \eta) + U\eta$  представляет функцию тока в системе координат, движущейся вместе с солитоном. Характер линий тока при  $U = v_1$  изображен на рис. 8; внутри единичной окружности заключена симметричная двухвихревая структура, состоящая из циклона в верхней половине и антициклона — в нижней. Рассмотренный пример показывает, что, по-видимому, любая локализованная стационарная структура на бета-плоскости должна иметь обязательно по крайней мере дипольный характер или представлять композицию отдельных диполей. С этой точки зрения любое начальное локализованное вихревое возмущение одного знака не может оставаться стационарным и начнет излучать волны Россбиевского типа в окружающее пространство; это означает, что синоптическая изменчивость океана должна проявлять себя в единстве двух форм — отдельных мощных вихревых образований и порождаемого ими волнового фона [36, 37].

Рассмотрим интересный частный случай, когда  $U \rightarrow 0$ . Функция (2.2.20) принимает вид

$$\psi = \begin{cases} \frac{\beta}{\mu_{2,m}^2} \left[ \frac{J_1(\mu_{2,m} r)}{J_1(\mu_{2,m})} - r \right] \sin \theta, & r \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, \\ 0, & r > 1. \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Эти решения были построены Стерном [166] и названы им модонами. Структура модона для первого корня  $\mu_{1,2}$  качественно такая же, как внутри единичной окружности на рис. 8; вне ее движение отсутствует. Вычислим энергию и полную энтропию этого стационарного вихревого образования. Так как в рассматриваемом случае  $\Pi = \Delta\psi + \beta y = -\mu_{2,m}^2 \psi$ , то

$$Q = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \Pi^2 d\Sigma = \frac{1}{2} \pi \beta^2 \int_0^1 \left[ \frac{J_1(\mu_{2,m} r)}{J_1(\mu_{2,m})} - r \right]^2 r dr = \frac{3}{8} \pi \beta^2,$$

т.е. полная энтропия не зависит от номера модона. С учетом (2.2.10) для энергии получаем выражение

$$E = -\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \psi \Delta\psi d\Sigma = \frac{\pi \beta^2}{2 \mu_{2,m}^2} \int_0^1 \left[ \frac{J_1(\mu_{2,m} r)}{J_1(\mu_{2,m})} - r \right] \frac{J_1(\mu_{2,m} r)}{J_1(\mu_{2,m})} r dr = \frac{\pi \beta^2}{4 \mu_{2,m}^2},$$

откуда видно, что с ростом номера энергии модонов убывает.

В следующем параграфе будут приведены соображения, указывающие, что модоны и солитоны являются, по-видимому, неустойчивыми образованиями, причем с ростом номера  $m$  степень их неустойчивости растет. Имея в виду это замечание, рассмотрим случай, когда модоны одинакового размера и одного номера плотно упакованы в безграничном океане. Тогда нетрудно вычислить среднюю энергию движения, отнесенную к единице площади  $\bar{E} = E/2\sqrt{3}$ . Среднеквадратичная скорость синоптического "шума", создавае-

мого не взаимодействующими однотипными модонами, равна  $\bar{V} = \sqrt{2E} = 6\sqrt{\pi}/\mu_{2,m}2\sqrt{3}$ . Предположим, что в результате неустойчивости происходит переход от одного типа модонов к другому, менее неустойчивому, причем при отсутствии диссипации сохраняется средняя плотность энергии и, следовательно,  $\bar{V}$ . Таким образом, для наименее неустойчивой модонной структуры при  $m=1$  имеем  $\beta = \beta L^*2/U^* = 2\sqrt{3}\mu_{2,1}\bar{V}/\pi = 7,627\bar{V}$ , откуда

$$L^* = 2,762 \sqrt{\frac{U^*}{\beta}} \sqrt{V}. \quad (2.2.22)$$

Примем в качестве масштаба  $U^*$  среднеквадратичную скорость поля синоптических вихрей, которая по оценкам [40] составляет примерно 10 см/с. Тогда  $\bar{V}=1$ , и из (2.2.22) получаем для радиуса модона  $L^* = 195$  км, что вполне согласуется с наблюдаемыми размерами синоптических вихрей.

Топографические и смешанные волны Россби. Все выполненные выше построения относились к случаю горизонтального дна, поэтому обнаруженные эффекты имели планетарную природу. Покажем теперь, какие видоизменения вносит учет топографии. Рассмотрим простейший случай плоского наклонного дна, возвышение которого в безразмерных переменных определяется по формуле

$$h = \gamma_x x + \gamma_y y + h_0,$$

где  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  и  $h_0$  — постоянные. Введем новые оси координат  $x', y'$  так, чтобы ось  $Oy'$  совпадала по направлению с градиентом планетарно-топографической функции  $g = \beta y + h$ . Это эквивалентно преобразованию  $x = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ ,  $y = -x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$ , где  $\cos \alpha = \beta \gamma_x / \sqrt{(\beta \gamma_y + \beta)^2 + (\beta \gamma_x)^2}$  и  $\sin \alpha = (\beta \gamma_y + \beta) / \sqrt{(\beta \gamma_y + \beta)^2 + (\beta \gamma_x)^2}$ . В новых переменных  $g = \hat{\beta} y' + h_0$ , где введен "эффективный" планетарно-топографический параметр  $\hat{\beta} = \sqrt{(\beta \gamma_x)^2 + (\beta \gamma_y + \beta)^2}$ . Так как операторы Лапласа  $\Delta$  и Якоби  $J$  инвариантны относительно поворота координатной системы, уравнение (2.2.1) в новых переменных сохраняет прежний вид, но с заменой  $\beta$  на  $\hat{\beta}$ . Это означает, что все полученные выше решения уравнения (2.2.1) переносятся на случай неровного дна вида (2.2.23) путем простой замены  $\beta$  на  $\hat{\beta}$ , однако теперь роль меридионального играет направление градиента функции  $g$ . При  $\beta=0$  мы получаем  $\hat{\beta} = \beta \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ , и соответствующие решения называются топографическими волнами Россби. В общем случае ( $\beta > 0$  и  $\beta \neq 0$ ) имеют место смешанные планетарно-топографические волны Россби. При  $\beta \gamma_y = -\beta$  и  $\gamma_x = 0$  рельеф дна компенсирует бета-эффект, поскольку теперь  $\beta = 0$ .

Таким образом, любое решение задачи о планетарных волнах при  $\beta > 0$  всегда может быть интерпретировано в планетарно-топографическом плане, и наоборот. Мы видим, что в зависимости от локальной топографии дна свободные волны Россби рассмотренных выше типов могут распространяться в любых направлениях. Например, из наблюдений известно [5], что ринги Куроиси мигрируют преимущественно в меридиональном направлении. На основе сказанного выше это можно объяснить сильной меридиональной расчлененностью рельефа дна к востоку от Японии.

### 2.3. Стационарные задачи и вариационные принципы

Математические трудности построения решений основного уравнения баротропной модели (2.1.1) в первую очередь обусловлены его нелинейностью. Поэтому большой интерес представляет выделение частных случаев, в которых удается перейти к линейным задачам, допускающим затем применение эффективных методов классического анализа. Один из путей в указанном направлении состоит в получении некоторых линейных интегралов уравнения (2.1.1) или ему эквивалентного (2.1.2). Например, это можно сделать для важного класса стационарных задач при дополнительном предположении, что ветер и трение в системе отсутствуют ( $\tau = k = 0$ ). При упомянутых условиях уравнение (2.1.2) принимает форму  $J(p, \Pi) = 0$  и допускает интеграл

$$\Pi \equiv \Delta p + \delta y + \delta h = F(p). \quad (2.3.1)$$

Функция  $F(p)$  зависит от предистории процесса, который привел к рассматриваемому стационарному состоянию. Ее вид должен, строго говоря, определяться из анализа соответствующей нестационарной задачи без трения при  $t \rightarrow \infty$  (для неограниченных областей) или же с учетом эффектов трения и с последующим предельным переходом при  $k \rightarrow 0$ . Часто  $F(p)$  удается найти из граничных условий. Можно, наоборот, задавшись видом этой функции, установить, каким условиям на бесконечности должно при этом удовлетворять решение и насколько эти условия приемлемы.

Рассмотрим в качестве примера безграничный океан с локализованным возмущением рельефа дна (функция  $h(x, y)$  финитна), предполагая, что по крайней мере в одном из направлений  $|x| \rightarrow \infty$  решение  $p(x, y)$  стремится к предельному значению  $P(y)$ . Переходя в интеграле (2.3.1) к соответствующему пределу, получим уравнение

$$P''(y) + \delta y = F(P), \quad (2.3.2)$$

которое при заданной функции  $F$  определяет возможные распределения давления на бесконечности. Полагая

$$p = P(y) + \delta \psi(x, y) \quad (2.3.3)$$

и учитывая (2.3.2), из (2.3.1) находим уравнение

$$\Delta \psi + h = \frac{1}{\delta} [F(P + \delta \psi) - F(P)] \quad (2.3.4.)$$

для нормированного возмущения поля давления  $\psi$ , обусловленного действием рельефа дна.

Соотношению (2.3.2) можно дать несколько иную интерпретацию. Предположим, что при отсутствии возмущений рельефа дна ( $h = 0$ ) поток является чисто зональным и описывается распределением давления  $P(y)$ , для которого справедлив интеграл (2.3.1) с той же самой функцией  $F(p)$ . Тогда, очевидно,  $P(y)$  по-прежнему удовлетворяет уравнению (2.3.2).

При таком подходе не требуется существование конечного предела у функции  $p(x, y)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Для линейной функции

$$F(p) = Cp + D \quad (2.3.5)$$

уравнения (2.3.2) и (2.3.4) также становятся линейными:

$$P''(y) + \beta y = Cp + D, \quad (2.3.6)$$

$$\Delta\psi + h = C\psi. \quad (2.3.7)$$

Решения уравнения (2.3.6) имеют вид

$$P(y) = A \operatorname{ch} \alpha y + B \operatorname{sh} \alpha y + \frac{1}{\alpha^2} (\beta y - D), \quad C = \alpha^2 > 0,$$

$$P(y) = Ay + \frac{D}{2} y^2 - \frac{\beta}{6} y^3, \quad C = 0,$$

$$P(y) = A \cos \sqrt{\beta} y + B \sin \sqrt{\beta} y + \frac{1}{\sqrt{\beta}} (D - \beta y), \quad C = -\sqrt{\beta} < 0$$

с соответствующими профилями скорости

$$U(y) = -\alpha (A \operatorname{sh} \alpha y + B \operatorname{ch} \alpha y) - \frac{\beta}{\alpha^2}, \quad C = \alpha^2 > 0,$$

$$U(y) = -A - \beta y + \frac{\beta}{2} y^2, \quad C = 0,$$

$$U(y) = \sqrt{\beta} (A \sin \sqrt{\beta} y - B \cos \sqrt{\beta} y) + \frac{\beta}{\sqrt{\beta}}, \quad C = -\sqrt{\beta} < 0.$$

Каждый из этих набегающих потоков можно также использовать для решения задач в областях с конечной меридиональной протяженностью типа зональных каналов.

В безбрежном океане поле скорости будет ограниченным лишь при  $C \neq 0$ , причем в случае  $C > 0$  необходимо принять  $A = B = 0$ . Если  $C = -\beta/U_0$  и  $A = B = 0$ , на бесконечности получаем кинематически однородный (без поперечного сдвига) зональный поток с постоянной скоростью  $U(y) \equiv U_0$ , причем

$$P(y) = -U_0 y, \quad (2.3.8)$$

где отброшена несущественная аддитивная постоянная  $-D/C$ . Легко видеть, что (2.3.8) можно также построить и при  $\beta = 0$ .

Заметим, что для малых  $\beta$  можно выполнять линеаризацию уравнения (2.3.4) при произвольных  $F(p)$ . Учитывая, что  $-P'(y) = U(y)$  есть скорость потока на бесконечности и используя вытекающее из (2.3.2) тождество  $U''(y) - \beta = F'(P)U$ , получим

$$\Delta\psi + \frac{1}{U} (\beta - U'')\psi = -h.$$

Линейная зависимость потенциального вихря от давления (2.3.5) связана с определенными экстремальными свойствами потока, которые проще всего демонстрируются в случае, когда океан занимает ограниченную область  $\Sigma$  с непроницаемой границей  $\Gamma$ .

Изучение поведения энтропии в двумерной турбулентности [71] привело к формулировке вариационного принципа минимальной энтропии [76], который получил определенное подтверждение в численных экспериментах. Предположим, что при заданных кинетической энергии  $E$  и циркуляции  $C$  в фактическом установившемся движении полная энтропия  $Q$  принимает стационарное значение. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, рассмотрим функционал  $I = Q - \lambda E - \mu C$ . Тогда принцип стационарной энтропии дает  $\delta I = 0$ . Вычислим вариации  $\delta Q$ ,  $\delta E$  и  $\delta C$ . Пусть  $\delta p$  — вариация  $p$ , удовлетворяющая естественному кинематическому граничному условию  $\delta p = 0$  на  $\Gamma$ . Очевидно,

$$\delta C = \oint_{\Gamma} \delta p_n d\ell.$$

Так как

$$\delta \frac{(\nabla p)^2}{2} = \nabla p \cdot \nabla(\delta p) = \nabla \cdot (\delta p \nabla p) - \Delta p \delta p,$$

легко находим

$$\delta E = - \iint_{\Sigma} \Delta p \delta p d\Sigma.$$

Поскольку

$$\delta \frac{\Pi^2}{2} = \Pi \delta \Pi = \Pi \delta \Delta p = \nabla \cdot (\Pi \nabla \delta p) - \nabla \cdot (\delta p \nabla \Pi) + \Delta \Pi \delta p,$$

имеем

$$\delta Q = \oint_{\Gamma} \Pi \delta p_n d\ell + \iint_{\Sigma} \Delta \Pi \delta p d\Sigma.$$

Собирая результаты, для стационарных условий получаем

$$\delta I = \iint_{\Sigma} (\Delta \Pi + \lambda \Delta p) \delta p d\Sigma + \oint_{\Gamma} (\Pi - \mu) \delta p_n d\ell = 0,$$

откуда в силу произвольности  $\delta p$  и  $\delta p_n$  находим

$$\Delta(\Pi + \lambda p) = 0 \text{ в } \Sigma, \quad \Pi - \mu = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (2.3.9)$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$\Pi + \lambda p = \mu \text{ на } \Gamma, \quad (2.3.10)$$

так как на линии тока  $\Gamma$  принимается условие  $p = 0$ . Из (2.3.9) и (2.3.10) благодаря единственности решения внутренней задачи Дирихле получаем

$$\Pi = \mu - \lambda p \text{ в } \Sigma, \quad (2.3.11)$$

$$p = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (2.3.12)$$



где постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  должны определяться по заданным  $C$  и  $E$ . Сравнение (2.3.I) и (2.3.II) показывает, что в рассматриваемом случае  $F(p) = -\lambda p + \mu$  является линейной функцией  $p$ .

Убедимся, что на решении задачи (2.3.II) и (2.3.I2) достигается минимум функционала  $Q$ . В самом деле,

$$Q(p + \delta p) - Q(p) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [(\Pi + \delta \Pi)^2 - \Pi^2] \alpha \Sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma} \Pi \delta \Pi \alpha \Sigma + \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\delta \Pi)^2 \alpha \Sigma = \delta Q + \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\delta \Pi)^2 \alpha \Sigma > 0,$$

так как  $\delta Q = 0$ .

Аналогичным образом показывается, что при заданных  $Q$  и  $C$  на решении задачи (2.3.II) и (2.3.I2) достигается минимум кинетической энергии  $E$ .

Нетрудно построить формальное решение при заданных  $Q$  и  $C$  с помощью введенных в предыдущем параграфе собственных функций  $\psi^{(m)}$ . Используя представления (2.I.I3), из (2.3.II) находим

$$p_m = \frac{q_m - \mu b_m}{\lambda_m - \lambda}. \quad (2.3.I3)$$

Тогда выражения (2.I.I7) - (2.I.I9) можно переписать в виде

$$E = G_0(\lambda) - \mu \Phi'_0(\lambda) - \frac{\mu^2}{2} \Phi'(\lambda), \quad (2.3.I4)$$

$$C = -\Phi_0(\lambda) + \mu \Phi(\lambda), \quad (2.3.I5)$$

$$Q = \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} p_m^2 - \lambda \mu \sum_{m=1}^{\infty} p_m b_m + \frac{\mu^2}{2} \Sigma, \quad (2.3.I6)$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m b_m^2}{\lambda_m - \lambda}, \quad \Phi_0(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m b_m q_m}{\lambda_m - \lambda}, \quad G_0(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m q_m^2}{(\lambda_m - \lambda)^2},$$

и штрихи обозначают дифференцирование по  $\lambda$ .

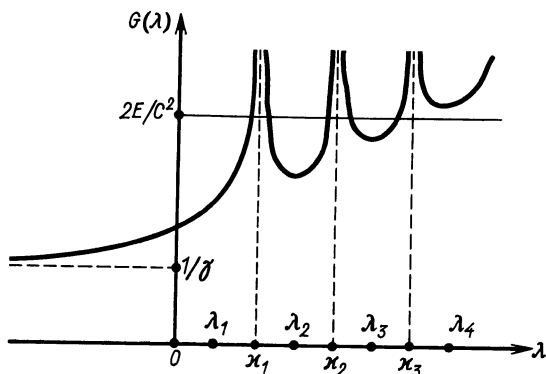
Исследуем вопрос о разрешимости системы уравнений (2.3.I4) - (2.3.I5) относительно  $\lambda$  и  $\mu$ . Пусть сначала  $q \equiv 0$ , и мы соответственно имеем

$$E = \frac{\mu^2}{2} \Phi'(\lambda), \quad (2.3.I7)$$

$$C = \mu \Phi(\lambda), \quad (2.3.I8)$$

$$Q = \frac{1}{2} [C\mu + 2E\lambda + \mu^2(\gamma_0 + \Sigma)], \quad (2.3.I9)$$

где  $\gamma_0 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 = \Phi(0)$ . Предположим для простоты, что все  $\lambda_m$  различны; не умаляя общности можно считать, что  $b_m \neq 0$  для всех  $m \geq 1$ . В каждой точке  $\lambda_m$  функция  $\Phi(\lambda)$  имеет простой полюс и переходит от положительных значений к отрицательным. Кроме того,  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [-\lambda \Phi(\lambda)] = \gamma_1$ , где ряд  $\gamma_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m b_m^2$  сходится в силу общих свойств собственных чисел и собственных функций спектральной задачи [41]. Простые нули  $\alpha_m$  функции  $\Phi(\lambda)$  распределены так, что  $\lambda_m < \alpha_m < \lambda_{m+1}$ . При  $C=0$  из (2.3.I8) следует либо



Р и с. 9. Качественное поведение функции  $G(\lambda)$   
(формула (2.3.20))

$\mu = 0$ , либо  $\lambda = \lambda_m$ . В первом случае  $E = 0$ , что отвечает состоянию покоя  $p \equiv 0$ , а во втором —  $\mu = \pm \sqrt{2E/\Phi'(\lambda_m)}$ , причем  $Q = E [\lambda_m + (\gamma_0 + \Sigma)/\Phi'(\lambda_m)]$ , как показывает качественный анализ, является монотонно возрастающей функцией  $\lambda_m$ . При  $C \neq 0$ , исключая  $\mu$  из (2.3.17) и (2.3.18), получим

$$\frac{2E}{C^2} = - \left( \frac{1}{\Phi} \right)' \equiv G(\lambda). \quad (2.3.20)$$

Качественное поведение функции  $G(\lambda)$  изображено на рис. 9. Заметим, что  $G(-\infty) = 1/\gamma_1$ ,  $G(\lambda_m) = 1/\lambda_m \delta_m^2$  и  $G(\lambda_m) = \infty$ . Хорошо видно, что при  $2E/C^2 < 1/\gamma_1$  задача вообще не имеет решений (в классе линейных функций  $F(p)$ ). При  $1/\lambda_m \delta_m^2 < 2E/C^2 < 1/\lambda_{m+1} \delta_{m+1}^2$  имеется ровно  $2m-1$  решений уравнения (2.3.20). Переписывая выражение (2.3.19) в виде

$$Q(\lambda) = \frac{C^2}{2} \left[ \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} (\gamma_0 + \Sigma) + \lambda G(\lambda) \right],$$

можно показать, что  $Q(-\infty) = Q(\lambda_m) = \infty$ ,  $Q(\lambda_m) = C^2/2\delta_m^2$ . Отсюда следует, что на каждой ветви функции  $G(\lambda)$  энтропия принимает в некоторой точке минимальное значение; для каждого фиксированного  $2E/C^2 > 1/\gamma_1$  наименьшее значение  $Q$  достигается на самой левой ветви  $G(\lambda)$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $\lambda \rightarrow \lambda_m$ ; при конечных  $C$  и  $E$  это означает, что  $\mu \rightarrow 0$ . Полагая  $\mu = -\alpha(\lambda_m - \lambda)$ ,  $\alpha \neq 0$  и переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow \lambda_m$ , получим из (2.3.13)  $p_s = \alpha \delta_{sm}$ , что при произвольном  $\alpha$  соответствует решению  $p = \alpha \psi^{(m)}$ , для которого  $C = -\alpha \lambda_m \delta_m$ ,  $E = \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda_m$ ,  $Q = \frac{1}{2} \alpha \lambda_m^2$  и поэтому  $2E/C^2 = G(\lambda_m)$ .

В случае  $q = 0$  получаются аналогичные результаты, причем  $\lambda$  определяется из уравнения

$$E = G_0 - \frac{1}{2} \left[ \frac{(C + \Phi_0)}{\Phi} \right]' \equiv \tilde{G}(\lambda, C).$$

Можно показать, что теперь  $\tilde{G}(-\infty, C) = C^2/2\gamma_1$ ,  $\tilde{G}(\lambda_m, C) = \infty$ ,  $\tilde{G}(\infty_m, C) = \infty$ . Функция  $\tilde{G}(\lambda, C)$  качественно ведет себя так же, как и  $G(\lambda)$  на рис. 9, с тем лишь отличием, что двукратные полюсы теперь совпадают с точками  $\lambda_m$  и  $\infty_m$ .

Таким образом, если в некоторой ограниченной области  $\Sigma$  заданные кинетическая энергия  $E$  и циркуляция  $C$  вдоль непроницаемой границы  $\Gamma$  удовлетворяют условию  $2E/C^2 > 1/\gamma_1$ , принцип минимальной энтропии приводит стационарную баротропную задачу при отсутствии внешних воздействий и трения к линейному уравнению (2.3.II). При  $2E/C^2 < G^*$ , где  $G^* > 1/\gamma_1$  есть некоторое критическое значение, полученное уравнение определится однозначно и имеет единственное решение. В случае  $2E/C^2 > G^*$  существует конечное число уравнений вида (2.3.II) с различными значениями параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , единственные решения которых (при  $q = 0$ ) отличаются величиной полной энтропии, которая минимальна при  $\lambda < \lambda_1$ . Из физических соображений следует выбирать именно этот случай. Можно показать [2, II], что при  $F'(p) > 0$  уравнение (2.3.I) определяет устойчивые по Ляпунову решения; для линейных функций  $F(p)$  это эквивалентно условию  $\lambda < 0$ . По-видимому, при  $\lambda < \lambda_1$  мы получаем неустойчивые решения задачи.

Из принципа минимальной полной энтропии следует, что рассмотренные в предыдущем параграфе модоны Стерна должны обладать определенными минимальными свойствами. Справедливо следующее утверждение: среди всех решений уравнения  $J(\psi, \Delta\psi + \beta\psi) = 0$  в единичном круге  $\Sigma$  при заданных циркуляции  $C = 0$  и энергии  $E = \pi\beta^2/4\mu_{2,m}^2$  и граничном условии  $\psi = 0$  на  $\Gamma$ , модон (2.2.2I) имеет минимальную полную энтропию  $Q = 3\pi\beta^2/8$ . Так как  $\mu_{2,m}^2$  представляют собственные числа спектральной задачи (2.1.I2), модоны и солитоны являются, по-видимому, неустойчивыми образованиями, причем с ростом номера  $m$  степень неустойчивости растет. Факт неустойчивости подтверждается также тем, что для модонов справедливо равенство  $F(p) = -\mu_{2,m}^2 p$ , т.е.  $F'(p) = -\mu_{2,m}^2 < 0$ .

Приведенные выше рассуждения вводят в круг вопросов, характерных для стационарных задач при отсутствии трения: прежде всего, это проблемы единственности и устойчивости решений. В настоящей главе мы встретимся с примерами, в которых имеют место и неединственность, и неустойчивость. Физический смысл таких решений и их отношение к действительности каждый раз будут обсуждаться отдельно.

#### 2.4. Столбы Тэйлора

В этом и последующем параграфах настоящей главы будут рассмотрены различные конкретные задачи топографического вихреобразования и меандрирования в баротропных потоках. Мы начнем с простейшего случая локализованного возмущения рельефа дна в виде подводной возвышенности или котловины в безграничном океане, предполагая движение жидкости установившимся и пренебрегая бета-эффектом, а также действием ветра и придонного трения.

Пусть распределение давления в невозмущенном потоке описывается формулой (2.3.8). Так как по условию  $\delta = 0$ , из (2.3.6) следует  $C = 0$ , поэтому уравнение (2.3.7) принимает простейший вид

$$\Delta \psi = -h \quad (2.4.1)$$

и должно интегрироваться при естественном условии  $\Delta \psi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Формальное решение задачи можно записать с помощью функции Грина для уравнения Пуассона (2.4.1)

$$\psi(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где  $G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Для подводных препятствий осесимметричной формы  $h = h(r)$  решение проще получить непосредственно из (2.4.1), так как поле возмущения давления  $\psi$  благодаря единственности решения задачи также обладает осевой симметрией и легко находится. Оно имеет вид

$$\psi(r) = -\int_0^r \frac{Q(r')}{r'} dr' + \text{const}, \quad (2.4.2)$$

где  $Q(r) = \int_0^r r' h(r') dr'$ .

Согласно (2.3.3) и (2.3.8) для суммарного поля давления в полярных координатах  $(r, \varphi)$  получаем представление

$$p = -U_0 r \sin \varphi + b\psi(r). \quad (2.4.3)$$

Рассмотрим вопрос об образовании в поле течения замкнутых линий тока, характерных для вихревых структур. Для этого необходимо появление по крайней мере одной критической точки, в которой скорость обращается в нуль, т.е.  $p_r = p_\varphi = 0$ . Эти условия приводят к уравнениям

$$U_0 \sin \varphi + \frac{b}{r} Q(r) = 0, \quad U_0 r \cos \varphi = 0.$$

Из второго соотношения следует  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , но так как для подводной возвышенности  $h(r) \geq 0$  и  $Q(r) > 0$  при  $r > 0$ , то первое уравнение имеет корень лишь при  $\varphi = -\pi/2$ , причем

$$\frac{b}{U_0} = \mathcal{F}(r) \equiv \frac{r}{Q(r)}. \quad (2.4.4)$$

Исследуем это уравнение. Для малых и больших  $r$  положительная функция  $\mathcal{F}(r)$  имеет асимптотическое поведение

$$\mathcal{F}(r) \sim \begin{cases} \frac{2}{r h(0)}, & r \rightarrow 0, \quad h(0) > 0, \\ \frac{2\pi r}{V}, & r \rightarrow \infty, \quad V > 0, \end{cases}$$

где  $V = 2\pi Q(\infty)$  определяет безразмерный объем препятствия. Это означает, что при некотором  $r_c$  функция  $\mathcal{F}(r)$  принимает свое минимальное значение  $\mathcal{F}_{\min}$ . Поэтому условие появления критических точек имеет вид

$$\frac{b}{U_0} \geq \mathcal{F}_{\min} = \mathcal{F}(r_c). \quad (2.4.5)$$

Хашперт [110] рассмотрел несколько простых модельных препятствий, для которых построил графики функций  $\mathcal{F}(r)$  и вычислил соответствующие значения  $r_c$  и  $\mathcal{F}_{\min}$ ; при этом возмущения рельефа дна нормировались условием  $h(0) = 1$ . В табл. I приводятся аналогичные и некоторые другие примеры, однако при таком условии нормировки, когда фиксируется объем  $V = 2\pi$ , что эквивалентно требованию  $Q(\infty) = 1$ . Везде под  $\theta(t)$  подразумевается единичная функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Т а б л и ц а I

Значения  $r_c$  и  $\mathcal{F}_{\min} = \mathcal{F}(r_c)$  для различных модельных препятствий

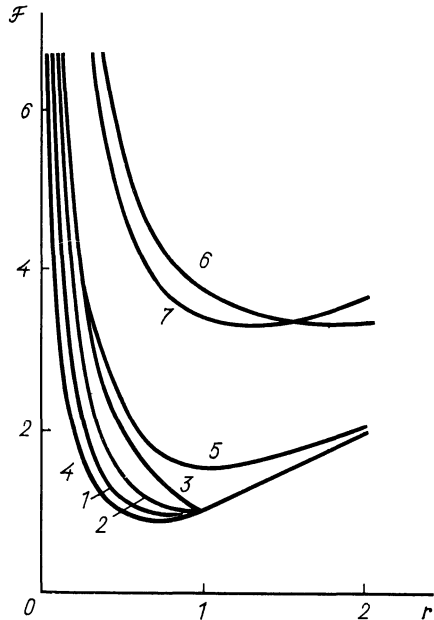
Форма препятствия	Уравнение формы препятствия	$r_c$	$\mathcal{F}_{\min}$
Параболоид вращения	$h(r) = 4\theta(1-r)(1-r^2)$	0,816	0,919
Полусфера	$h(r) = 3\theta(1-r)(1-r^2)^{1/2}$	0,931	0,979
Прямой круговой цилиндр	$h(r) = 2\theta(1-r)$	I	I
Прямой круговой конус	$h(r) = 6\theta(1-r)(1-r)$	0,750	0,889
Поверхность вращения гауссовой формы	$h(r) = 2e^{-r^2}$	1,121	1,567
Поверхность вращения о острием	$h(r) = e^{-r}$	1,795	3,353
Поверхность вращения колоколообразной формы	$h(r) = (1+r^2)^{-3/2}$	1,272	3,330

Во всех приведенных выше примерах, независимо от степени гладкости поверхности  $h(r)$ , функции  $\mathcal{F}(r)$  качественно ведут себя одинаково (рис. 10), а вычисленные  $r_c$  и  $\mathcal{F}_{\min}$  оказываются величинами одного порядка. При  $\delta/U_0 > \mathcal{F}_{\min}$  уравнение (2.4.4) имеет два корня  $r_1$  и  $r_2$ , причем  $0 < r_1 < r_c < r_2 < \infty$ . Нетрудно показать, что собственные числа матрицы  $\begin{vmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{vmatrix}$  в этих точках равны  $\lambda^{(1)} = -\delta/2\mathcal{F}(r)$  и  $\lambda^{(2)} = \delta\mathcal{F}'/\mathcal{F}^2$ . Так как  $\mathcal{F} > 0$ ,  $\mathcal{F}'(r_1) < 0$  и  $\mathcal{F}'(r_2) > 0$ , при  $r = r_1$  оба собственных числа отрицательны и связанная с матрицей квадратичная форма является отрицательно определенной, что соответствует максимуму давления; при  $r = r_2$  собственные числа имеют разные знаки, и соответствующая квадратичная форма оказывается неопределенной, что характерно для седловой точки в поле давления. При  $\delta/U_0 = \mathcal{F}_{\min}$  получаем слияние корней, причем теперь  $\lambda^{(2)} = 0$ .

Таким образом, при сверхкритическом режиме  $\delta/U_0 > \mathcal{F}_{\min}$  справа от центра препятствия, если смотреть вниз по течению, появляется область замкнутых линий тока. Этот результат физически понятен, так как при  $h \geq 0$  индуцируемый препятствием вихрь поля возмущения  $\Delta\psi = -h \leq 0$  является антициклоническим, что и приводит при взаимодействии с однородным набегающим потоком к появлению области замкнутых линий тока. В случае подводной котловины ( $h \leq 0$ ) вихрь в поле возмущения является циклоничес-

Р и с. 10. Функция  $\mathcal{F}(r)$  (2.4.4) для препятствий различной формы

1 - параболоид вращения, 2 - полусфера, 3 - прямой круговой цилиндр, 4 - прямой круговой конус, 5 - поверхность вращения гауссовой формы, 6 - поверхность вращения вида  $h(r) = e^{-r}$ , 7 - поверхность колоколообразной формы  $h(r) = (1+r^2)^{-3/2}$



ким, и область замкнутых линий тока появляется по левую сторону от центра котловины.

Выше мы видели, что конкретная форма препятствия качественно не влияет на поведение потока. Рассмотрим поэтому более подробно простейший случай цилиндрического препятствия  $h(r) = \theta(1-r)$ . Согласно (2.4.2) и (2.4.3) решение в полярных координатах имеет вид

$$\rho = -U_0 r \sin \varphi + \theta \begin{cases} \frac{1}{4} (1-r^2), & r \leq 1, \\ \frac{1}{2} \ln r, & r \geq 1, \end{cases} \quad (2.4.6)$$

где из соображений удобства несущественная постоянная в (2.4.2) принята равной  $1/4$ . Легко убедиться, что при  $\theta/U_0 < 2$  в потоке нет критических точек, а при  $\theta/U_0 > 2$  их появляется две:  $(0, -2U_0/\theta)$  и  $(0, -\theta/2U_0)$ . Первую точку, расположенную над препятствием, окружают замкнутые линии тока в виде концентрических окружностей  $x^2 + (y + 2U_0/\theta)^2 = \alpha^2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1 - 2U_0/\theta = \alpha_c$ . На рис. 6, а, б изображены линии тока соответственно для докритического ( $\theta/U_0 < 2$ ) и сверхкритического ( $\theta/U_0 > 2$ ) режимов.

Аналитическое решение можно построить также в случае, когда препятствие имеет форму прямого эллиптического цилиндра с полуосями  $a$  и  $b$ , в пределах которого мы примем  $h \equiv 1$ . Определение функции  $\psi$  из уравнения (2.4.1) эквивалентно при этом вычислению функции тока поля скорости, индуцируемого вихрем Кирхгофа [44]. Введем новые декартовы координаты  $x', y'$  так, что ось  $Ox'$  составляет угол  $\varphi^*$  с осью  $Ox$  и одновременно по направлению совпадает с большим диаметром эллипса. Вне эллипса удобно использовать эллиптические координаты  $\xi, \eta$ , связанные с декартовыми соотношениями  $x' = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta$ ,  $y' = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$ , где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

и эллипсу отвечает отрезок  $\xi = \xi_0$ ,  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ , причем  $\text{th} \xi_0 = \delta/a$ . Тогда решение уравнения (2.4.1) записывается в виде

$$\psi = - \begin{cases} \frac{1}{2(\alpha + \delta)} (\delta x'^2 + \alpha y'^2), & (x'/\alpha)^2 + (y'/\delta)^2 \leq 1, \\ \frac{\alpha \delta}{2} (\xi - \xi_0) + \frac{\alpha \delta}{4} (1 + e^{-2\xi} \cos 2\eta), & (x'/\alpha)^2 + (y'/\delta)^2 \geq 1. \end{cases}$$

Вычисленные с помощью этих формул линии тока результирующего поля  $p = -\psi + \delta\psi$  при сверхкритическом значении  $\delta = 5$  и  $\psi^* = 0$  (а),  $\pi/4$  (б),  $\pi/2$  (в),  $3\pi/4$  (г) изображены на рис. II; везде хорошо видны области столбов Тэйлора.

Рассмотренные схемы потоков не являются единственно возможными. Как было показано в § 2.1, наличие как угодно малого отличного от нуля придонного трения приводит к образованию в областях с замкнутыми линиями тока застойных зон, в которых движение отсутствует. Это означает, что при  $k \rightarrow 0$  должен существовать предельный стационарный режим, в котором  $p = \text{const}$  в некоторой области  $\Sigma$ . В этом случае на ее границе  $\Gamma$  должно выполняться условие  $\Delta p = 0$  с сохранением непрерывности  $p$  и  $p_n$ . Так как согласно (2.4.1) потенциальный вихрь вдоль каждой линии тока сохраняет постоянное значение, отсюда следует, что граница  $\Gamma$  застойной области совпадает с изобатой  $h = \text{const}$ . Для кругового цилиндра нетрудно построить решение рассматриваемого типа. В круге  $\Sigma$  радиуса  $\alpha_c$  для решения (2.4.6) имеем  $\Delta p = -\delta$ ; поэтому если к этому решению прибавить решение уравнения

$$\Delta p' = \begin{cases} \delta & \text{в } \Sigma, \\ 0 & \text{вне } \Sigma, \end{cases}$$

принимаящее постоянное значение на границе  $\Gamma$  и удовлетворяющее условиям  $\nabla p' \rightarrow 0$  на бесконечности, то сумма будет удовлетворять уравнению  $\Delta(p + p') = 0$  в  $\Sigma$  и граничному условию  $p + p' = \text{const}$  на  $\Gamma$ . В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа это будут означать  $p + p' = \text{const}$  везде в  $\Sigma$ . Функция с указанными свойствами существует и имеет вид, аналогичный второму слагаемому в (2.4.6)

$$p' = -\delta \begin{cases} \frac{1}{4} (\alpha_c^2 - r'^2), & r' < \alpha_c, \\ -\frac{1}{2} \ln \frac{r'}{\alpha_c}, & r' > \alpha_c, \end{cases}$$

где  $r' = [x^2 + (y + 2U_0/\delta)^2]^{1/2}$  — расстояние до точки  $(0, -2U_0/\delta)$  (рис. I2). Прибавляя это решение к (2.4.6), получим

$$p = -U_0 r \sin \psi + \delta \begin{cases} \frac{1}{4} (1 - r^2) - \frac{1}{4} (\alpha_c^2 - r'^2), & r' > \alpha_c, \\ \frac{1}{4} (1 - r^2) + \frac{1}{2} \ln \frac{r'}{\alpha_c}, & r < 1, r' > \alpha_c \\ -\frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{2} \ln \frac{r'}{\alpha_c}, & r > 1. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Легко проверить, что в  $\Sigma$  давление постоянно ( $p = U_0 = \text{const}$ ) и движение действительно отсутствует. Решение (2.4.7), изображенное в виде

линий тока на рис. 13, б, было построено Ингерсоллом [114]; оно справедливо в сверхкритическом случае  $\delta/U_0 > 2(\alpha_c > 0)$ . Заметим, что для (2.4.7) функция  $F(p)$  в (2.3.1) не является однозначной и аналитической функцией; при  $p = U_0$  она допускает два значения — 0 и  $\delta$ .

Возникает вопрос, какой из двух рассмотренных режимов течения является наиболее вероятным в природе. Согласно приведенным в § 2.1 оценкам, время стационарирования при наличии вязкости имеет порядок времени спинапа  $t^{**}$ . Если вязкость очень мала, то процесс стационарирования в области замкнутых линий тока будет протекать очень медленно. Тогда решение уравнения (2.3.1) для случая, когда потенциальный вихрь  $F(p)$  определяется везде условиями на бесконечности, включая и области замкнутых линий тока, можно рассматривать как решение квазистационарировавшейся задачи, пригодное на промежутке времени, который гораздо меньше времени, требуемого для полного исчезновения движения в застойной области, но больше времени квазистационарирования [136]. С течением времени движение в области замкнутых линий тока будет замедляться, пока в пределе не образуется застойная область, описываемая решением Ингерсолла (2.4.7). Интересно отметить, что это решение остается справедливым, если в нем заменить  $\alpha_c$  на любое  $\alpha < \alpha_c$ ; этот результат можно истолковать как некоторый промежуточный этап эволюции от решения (2.4.6) к решению (2.4.7). Таким образом, решение стационарной задачи при отсутствии трения является сингулярным в том смысле, что наличие как угодно малой вязкости может существенно видоизменить его [101].

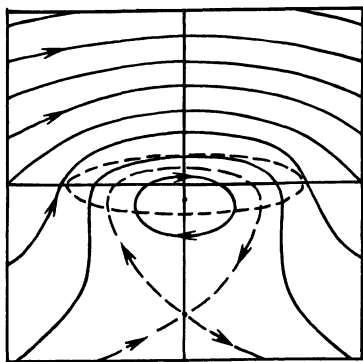
Первое геофизическое приложение столбов Тэйлора было связано с так называемым Большим красным пятном Юпитера (БКПЮ) — квазистационарным вихрем в одной из зональных полос атмосферы Юпитера, самой большой планеты Солнечной системы. Хайд [103] высказал гипотезу, что это загадочное образование, в 3 раза превосходящее по размерам Землю, может быть столбом Тэйлора, возникшим в результате воздействия на атмосферные потоки неровной подстилающей поверхности. Из соображений теории размерностей он получил выражение для критической высоты препятствия

$$h_c = \alpha N^* (U^* / \Lambda^* \omega), \quad (2.4.8)$$

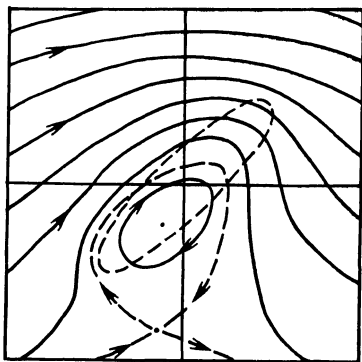
где  $U^*$  — характерная скорость ветра,  $\Lambda^*$  — характерный горизонтальный размер препятствия,  $\omega$  — угловая скорость вращения планеты,  $N^*$  — высота атмосферы,  $\alpha$  — некоторый безразмерный параметр. Легко видеть, что в безразмерных переменных этот критерий переходит в вытекающее при  $U_0 = U^*$  из (2.4.5) условие  $\delta_{кр} = \mathcal{F}(r_c) \equiv \alpha$ . При  $\Lambda^* = 25000$  км,  $N^* = 12000$  км,  $U^* = 2$  м/с и  $\omega = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$  из (2.4.8) получаем  $h_c = 6$  км. Хайд и Ибетсон [104] отмечали, что гипотеза о природе БКПЮ есть не более как возможный первый шаг к созданию теории.

Гипотеза Хайда вызвала оживленную научную дискуссию и стимулировала появление ряда интересных теоретических и экспериментальных исследований столбов Тэйлора [86, 104, 114, 116, 168]. Полученные недавно с по-

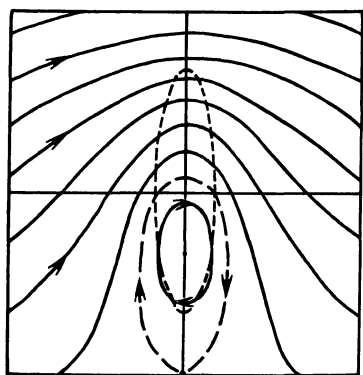




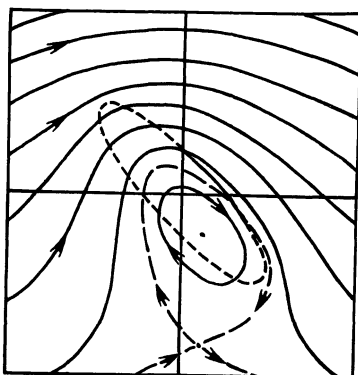
а



б

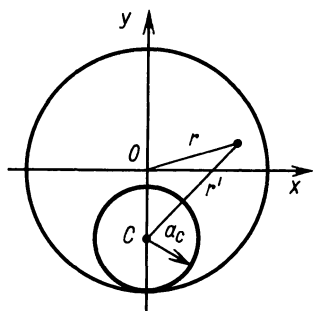


в

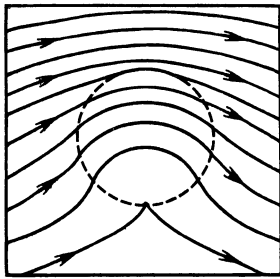


г

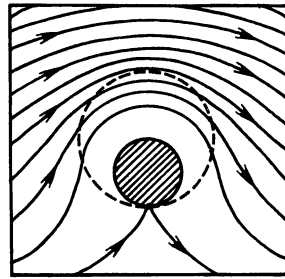
Р и с. II. Линии тока результирующего течения над цилиндрическим препятствием эллиптического сечения (штриховая линия) с полуосями  $a = 2$ ,  $b = 1/2$  при различных положениях цилиндра



Р и с. I2. К задаче Ингерсолла



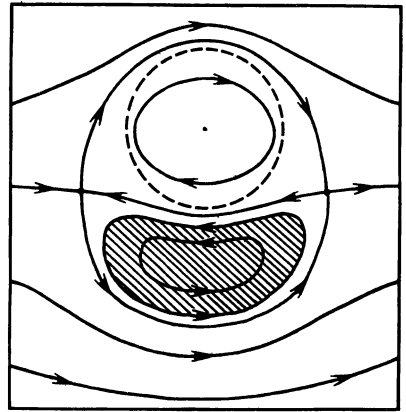
*a*



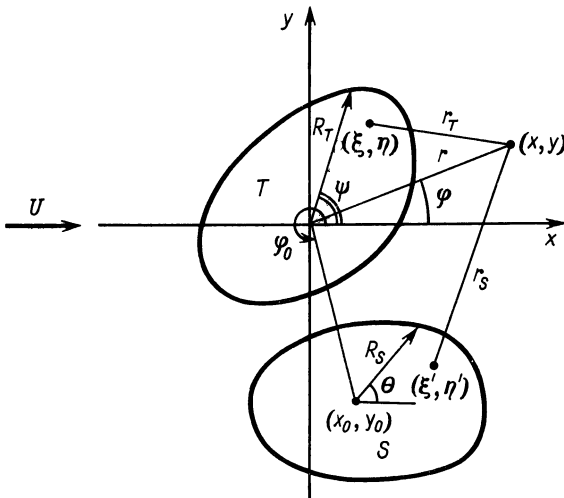
*б*

Р и с. 13. Линии тока в задаче Ингерсолла [Г14]  
*a* -  $\delta = 2$  и  $\delta - \delta = 4$ . Застойная  
 область заштрихована

Р и с. 14. Стационарная конфигурация топографического и свободного (заштрихован) вихрей при  $\delta = 4$  (по Джонсону [Г26])



Р и с. 15. Схематическое изображение топографического (Т) и свободного (S) вихрей



мощью межпланетных станций "Вояджер-1" и "Вояджер-2" новые данные о структуре БКЮ, в частности, показали, что внутри пятна имеется активная циркуляция, а скорость вращения газов в столбе тем меньше, чем больше высота. Это может свидетельствовать о важности таких эффектов, как стратификация и сферичность, на что указывал Ингерсолл [114]. Имеются и другие объяснения происхождения БКЮ, например, существенно использующие наличие поперечного сдвига скорости в набегающем потоке [72, 133, 134].

Если сравнительно недавно достоверность существования столбов Тейлора в океане вызвала определенные сомнения, то в настоящее время океанология располагает уже убедительными свидетельствами реальности этих вихрей, с учетом тех изменений в их структуре, которые приносятся стратификацией и сдвигами скорости в набегающем потоке [90, 100, 145].

## 2.5. Стационарные конфигурации топографического и свободного вихрей

По современным представлениям одной из возможных причин формирования в океане вихрей синоптического и субсиноптического масштабов наряду с баротропной и бароклиной неустойчивостью является рельеф дна. Данный во Введении элементарный анализ топографического циклогенеза показывает, что в районе подводных гор могут существовать установившиеся течения, включающие некоторые стационарные конфигурации топографических и снесенных вихрей. Пример для препятствия в виде кругового цилиндра конечной высоты был построен Джонсоном [126].

В настоящем параграфе мы с более высокой точностью построим асимптотическое решение стационарной баротропной задачи для возмущения рельефа дна в форме прямого цилиндра, но произвольного поперечного сечения [24]. Можно представить себе такой закон стационарирования набегающего потока, при котором только часть циклонической завихренности уносится в бесконечность, а оставшаяся занимает стационарное положение в окрестности горы; это обстоятельство учитывается при формулировке задачи. Главной нашей целью будет определение формы и положения циклонического вихря, который в дальнейшем в отличие от топографического называется свободным; картина линий тока топологически имеет такую же структуру, как и в [126] (рис. 14).

Полагая  $\delta = 2/\lambda$ , получим для потенциального вихря выражение

$$\Pi = \Delta p + \frac{2}{\lambda} h(x, y), \quad (2.5.1)$$

где  $\lambda \ll 1$  есть основной малый параметр задачи. Пусть  $T$  и  $S$  соответственно обозначают две непересекающиеся области, занятые топографическим и свободным вихрями; очевидно,  $h \equiv 1$  в  $T$  и  $h \equiv 0$  вне  $T$ . Распределение относительной завихренности  $\Delta p$  легко находится из закона сохранения потенциального вихря (2.5.1) для каждой жидкой частицы (столбика) в процессе стационарирования из начального состояния покоя, когда везде  $\Delta p \equiv 0$ . Так как в конечном состоянии  $T$  состоит из частиц, первоначально находившихся в области с ровным дном  $h \equiv 0$ , а  $S$  — из частиц,

расположенных при  $t = 0$  над препятствием  $T$ , получаем  $(\Delta p)_T = -2/\alpha < 0$  и  $(\Delta p)_S = 2/\alpha > 0$ . Индуцируемые этими завихренностями поля давления выражаются с помощью логарифмических потенциалов. Направляя ось  $Ox$  вдоль набегающего потока, окончательно получим (обозначения см. на рис. 15) суммарное поле давления в виде  $p = p_0 + p_T + p_S$ , где  $p_0 = -\gamma$  и

$$p_T = -\frac{1}{\alpha\pi} \iint_T \ln r_T d\xi d\eta,$$

$$p_S = \frac{1}{\alpha\pi} \iint_S \ln r_S d\xi' d\eta'. \quad (2.5.2)$$

При стационарном геострофическом движении граница  $\partial S$  области  $S$  должна быть линией тока, т.е. изобарической линией

$$p \Big|_{\partial S} = \text{const}. \quad (2.5.3)$$

Выбирая соответствующим образом масштаб  $L^*$ , будем считать, что площадь препятствия  $T$  равна  $\pi$ . Учитывая, что в общем случае в  $S$  попадает лишь часть снесенной с  $T$  завихренности, примем

$$\iint_S d\xi' d\eta' = \eta\pi, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (2.5.4)$$

При  $\eta = 1$  вся циклоническая завихренность формирует  $S$ , а при  $\eta = 0$  она вся уносится в бесконечность. Фактическое значение  $\eta$  определяется законом стационарирования  $U(t) \rightarrow U^*$  скорости набегающего потока и является параметром предыстории конечного стационарного состояния.

Таким образом, задача сводится к определению формы и положения  $S$  из условия (2.5.3) с учетом (2.5.4).

Поместим начало координат в геометрический центр тяжести топографического вихря и пусть  $r = R_T(\varphi)$  есть уравнение границы  $\partial T$  в полярных координатах. Учитывая соотношение  $r_T = r [1 + (\rho/r)^2 - 2(\rho/r) \cos(\psi - \varphi)]^{1/2}$  (рис. 15) и известное разложение для радикала ( $\sqrt{\phantom{x}}$ , с.55), при  $r > \max_{\varphi} R_T(\varphi)$  можно записать

$$\ln r_T = \ln r - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \frac{\cos k(\psi - \varphi)}{k}.$$

Выполняя в выражении для  $p_T$  квадратуру по  $\rho$ , получим

$$p_0 + p_T = \frac{1}{\alpha} \left[ -\alpha r \sin \psi - \ln r + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k r^k} (A_k \cos k\psi + B_k \sin k\psi) \right], \quad (2.5.5)$$

где введены характеристики формы препятствия

$$\begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi(k+2)} \int_0^{2\pi} R_T^{k+2}(\psi) \begin{Bmatrix} \cos k\psi \\ \sin k\psi \end{Bmatrix} d\psi, \quad k \geq 2.$$

Найдем критическую точку  $(r_0, \varphi_0)$  поля (2.5.5), в которой  $(p_0 + p_T)_T = (p_0 + p_T)_\varphi = 0$ . Эта система уравнений имеет решение лишь при  $\alpha < \alpha_{кр}$ , которое зависит от формы  $T$ . Например, в случае круга,  $R_T(\varphi) \equiv 1$ , имеем

$\alpha_{кр} = 1$ . Представляя решение в виде рядов по степеням параметра  $\alpha$ , получим

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{\alpha} - A_2 \alpha + B_3 \alpha^2 + \left( \frac{5}{2} B_2^2 - 2A_2^2 + A_4 \right) \alpha^3 + (6B_2 A_3 + 5A_2 B_3 - B_5) \alpha^4 + O(\alpha^5), \\ \varphi_0 &= -\frac{\pi}{2} - B_2 \alpha^2 - A_3 \alpha^3 + (B_4 - 5A_2 B_2) \alpha^4 + (A_5 + 6B_2 B_3 - 6A_2 A_3) \alpha^5 + O(\alpha^6) \end{aligned}$$

Или, в декартовых координатах,

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cos \varphi_0 = -B_2 \alpha - A_3 \alpha^2 + (B_4 - 4A_2 B_2) \alpha^3 + \\ &+ (A_5 + 5B_2 B_3 - 5A_2 A_3) \alpha^4 + O(\alpha^5), \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

$$y_0 = r_0 \sin \varphi_0 = -\frac{1}{\alpha} + A_2 \alpha - B_3 \alpha^2 + (2A_2^2 - 2B_2^2 - A_4) \alpha^3 + (B_5 - 5A_3 B_2 - 5A_2 B_3) \alpha^4 + O(\alpha^5).$$

Для дальнейшего удобно перейти к полярным координатам  $(R, \theta)$  относительно полюса  $(x_0, y_0)$ . Учитывая очевидные соотношения  $r \cos \varphi = x_0 + R \cos \theta$ ,  $r \sin \varphi = y_0 + R \sin \theta$  и выполняя в (2.5.5) перераспределение, получим с точностью до несущественной аддитивной постоянной

$$p_0 + p_T = \frac{1}{\alpha} \left[ -\frac{R^2}{2} \alpha^2 \cos 2\theta - \frac{R^3}{3} \alpha^3 \sin 3\theta + \left[ \frac{R^4}{4} \cos 4\theta - \frac{1}{2} R^2 (A_2 \cos 2\theta - B_2 \sin 2\theta) \right] \alpha^4 + O(\alpha^5) \right]. \quad (2.5.7)$$

Пусть  $R = R_5(\theta)$  есть уравнение э5. Выполняя в (2.5.2) одну квадратуру, в новых переменных получим

$$p_5(R, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(R, \theta; \psi) d\psi,$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad G(R, \theta; \psi) &= \frac{1}{2} \left[ R_5^2(\psi) - R^2 \cos 2(\psi - \theta) \right] \ln \left[ R_5^2(\psi) + R^2 - 2RR_5(\psi) \cos(\psi - \theta) \right] + \\ &+ 2R^2 |\sin(\psi - \theta)| \cos(\psi - \theta) \left[ \operatorname{arctg} \frac{R_5(\psi) - R \cos(\psi - \theta)}{R |\sin(\psi - \theta)|} + \operatorname{arctg} \frac{\cos(\psi - \theta)}{|\sin(\psi - \theta)|} \right] - \frac{1}{2} R_5^2(\psi) - \\ &- RR_5(\psi) \cos(\psi - \theta). \end{aligned}$$

Используя представление

$$R_5(\theta) = \alpha + \sum_{i=1}^4 \alpha^i f_i(\theta) + O(\alpha^5), \quad (2.5.8)$$

можно записать

$$p_5(R_5(\theta), \theta) = \frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{i=0}^4 \alpha^i q_i(\theta) + O(\alpha^5) \right], \quad (2.5.9)$$

где

$$q_k(\theta) = \frac{1}{2\pi k!} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} G(R_5(\theta), \psi, \theta) \right]_{\alpha=0} d\psi, \quad k \geq 0.$$

Учитывая (2.5.7) - (2.5,9), из условия (2.5.3) получим уравнения

$$q_0 = C_0, \quad q_1 = C_1, \quad q_2 - \frac{d^2}{2} \cos 2\theta = C_2, \quad q_3 - d f_1(\theta) \cos 2\theta - \frac{d^3}{3} \sin 3\theta = C_3, \quad (2.5.10)$$

$$q_4 - \frac{1}{2} [f_1^2(\theta) + 2d f_2(\theta)] \cos 2\theta - \frac{d^2}{2} (A_2 \cos 2\theta - B_2 \sin 2\theta) - d^2 f_1(\theta) \sin 3\theta + \frac{d^4}{4} \cos 4\theta = C_4,$$

где  $C_i$  - постоянные, для определения которых служит условие (2.5.4), принимающее вид

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R_5^2(\theta) d\theta = \eta \pi.$$

Отсюда с помощью разложения (2.5.8) получаем

$$f_0(\theta) \equiv \alpha = \sqrt{\eta}, \quad \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^k f_i(\theta) f_{k-i}(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Опуская несложные, но громоздкие выкладки по вычислению  $q_k(\theta)$ , остановимся на общей структуре соотношений (2.5.10). Все они имеют вид интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$f(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \left( 2 \left| \sin \frac{\psi - \theta}{2} \right| \right) d\psi = q(\theta), \quad (2.5.11)$$

где  $f(\theta)$  - одна из искоемых функций  $f_i(\theta)$ , а  $q(\theta)$  - известные правые части, определяемые последовательно. Нетрудно показать, что условием разрешимости уравнения (2.5.11) является ортогональность правой части к функциям  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ . При выполнении этого условия  $q(\theta)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$q(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta),$$

и тогда решение имеет вид

$$f(\theta) = \alpha_0 + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k-1} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta)$$

с произвольными постоянными  $\alpha$  и  $\beta$ . При решении последовательности уравнений (2.5.10) эти постоянные каждый раз оказываются равными нулю в силу упомянутого свойства ортогональности. Приведем окончательный результат

$$R_5(\theta) = \sqrt{\eta} \left\{ 1 + \alpha^2 \cos 2\theta + \frac{\alpha^3}{2} \sqrt{\eta} \sin 3\theta + \left[ \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \eta \right) \cos 4\theta - \frac{1}{4} + A_2 \cos 2\theta - B_2 \sin 2\theta \right] \alpha^4 \right\} + O(\alpha^5). \quad (2.5.12)$$

Формулы (2.5.6) и (2.5.12), определяющие положение и форму свободного вихря, дают решение рассматриваемой задачи с ошибкой  $O(\alpha^5)$ . В частном случае круглого препятствия  $R_T(\varphi) \equiv 1$  при условии полного захвата циклонической завихренности ( $\eta = 1$ ) и с ошибкой  $O(\alpha^4)$  такое асимптотическое решение использовалось в [126] для тестирования численного метода.

Соотношения (2.5.6) показывают, что форма препятствия, от которой зависят коэффициенты  $A_k, B_k, k \geq 2$ , уже в первом порядке относительно параметра  $\alpha$  влияет на положение свободного вихря. В то же время соответствующее влияние на его форму (2.5.12) проявляется через посредство  $A_2$  и  $B_2$  лишь в четвертом порядке. Отсюда следует, что принятая в [126] точность обеспечивает воспроизведение лишь той части формы свободного вихря, которая не зависит от формы препятствия.

Заметим, что решение (2.5.12) справедливо лишь для  $\alpha < \alpha^* < \alpha_{кр}$ , где  $\alpha^*$ , зависящее от формы препятствия и параметра  $\eta$ , есть наибольшее значение  $\alpha$ , при котором еще не происходит пересечения областей  $T$  и  $S$ .

Рассмотрим в качестве примера подводное препятствие в форме прямого эллиптического цилиндра с полуосями  $\alpha$  и  $1/\alpha$ ; большой диаметр эллипса составляет угол  $\varphi^*$  с осью  $Ox$ . В этом случае

$$R_T(\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha^4}} \frac{1}{\sqrt{1-q \cos 2(\varphi - \varphi^*)}},$$

где  $0 \leq \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha^4 + 1} = q < 1$ . Вычисления дают  $A_{2m+1} = B_{2m+1} = 0$ ,  $m \geq 0$  (из-за двойной симметрии эллипса) и  $\begin{cases} A_{2m} \\ B_{2m} \end{cases} = \frac{2(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^m \begin{cases} \cos 2m\varphi^* \\ \sin 2m\varphi^* \end{cases}$ ,  $m \geq 1$ .

Полагая  $\eta = 1$  и  $\delta = \frac{1}{4} \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$ , из (2.5.6) и (2.5.12) получим

$$x_0 = -\delta \alpha \sin 2\varphi^* + O(\alpha^5), \quad y_0 = -\frac{1}{\alpha} + \delta \alpha \cos 2\varphi^* + O(\alpha^5), \quad (2.5.13)$$

$$R_S(\theta) = 1 + \alpha^2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \alpha^3 \sin 3\theta + \left[ \delta \cos 2(\theta + \varphi^*) - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \cos 4\theta \right] \alpha^4 + O(\alpha^5).$$

Анализ этих выражений показывает, что при изменении  $\varphi^*$  от 0 до  $\Pi$  точка  $(x_0, y_0)$  описывает близкую к окружности радиуса  $\delta\alpha$  замкнутую кривую с центром  $(0, -1/\alpha)$ , двигаясь по часовой стрелке из точки  $(0, -1/\alpha + \delta\alpha)$ . Форма свободного вихря при этом остается практически неизменной благодаря малому множителю  $\alpha^4$  в (2.5.13).

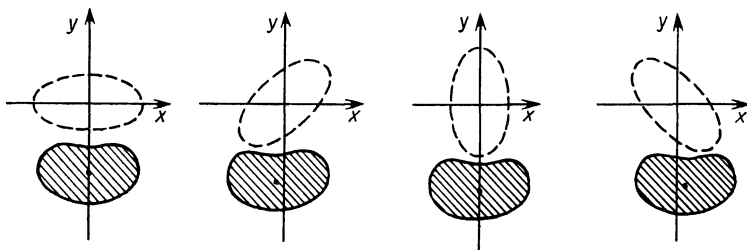
На рис. 16 показаны взаимные стационарные положения топографического (пунктир) и свободного (заштрихован) вихрей для четырех значений  $\varphi^* = 0, \Pi/4, \Pi/2, 3\Pi/4$  и параметров  $\alpha = 1/2$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$  (а) и  $\alpha = 1/4$ ,  $\alpha = 4$  (б). В первом случае свободный вихрь имеет ту же "бананообразную" форму, что и в [126]. Во втором случае, когда препятствие имеет отношение полуосей  $\alpha : b = 16$  и скорее моделирует подводный хребет, нежели отдельную гору, форма свободного вихря очень близка к эллиптической с небольшим эксцентриситетом.

Расчет полей давления, определяемых интегралами вида (2.5.2), в общем случае можно осуществить только численными методами. Опишем кратко одну из возможных вычислительных процедур. Пусть  $x = x(\ell)$ ,  $y = y(\ell)$ ,  $0 \leq \ell \leq N$  — параметрические уравнения контура  $\partial S$  и требуется вычислить  $p_s$  в произвольной точке  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Принимая эту точку за полюс, перейдем к полярным координатам  $r_s$  и  $\psi = \arctg[(\eta' - y)/(\xi' - \tilde{x})]$ . Выполняя квадратуру по  $r_s$ , получим вместо (2.5.2)

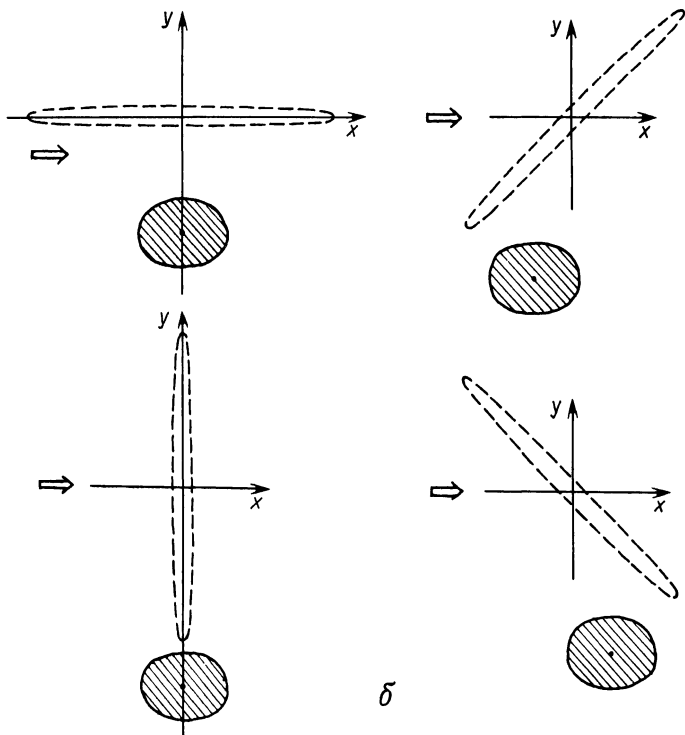
$$p_s(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\alpha\pi} \oint R^2(2\ln R - 1) d\psi,$$

где обозначено  $R = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}$ . Так как  $d\psi = (K/R^2) d\ell$ , где  $K(\tilde{x}, \tilde{y}, \ell) = \dot{y}(x - \tilde{x}) - \dot{x}(y - \tilde{y})$ , окончательно получаем

$$p_s(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\alpha\pi} \int_0^N K(\tilde{x}, \tilde{y}, \ell) (2\ln R - 1) d\ell.$$



а



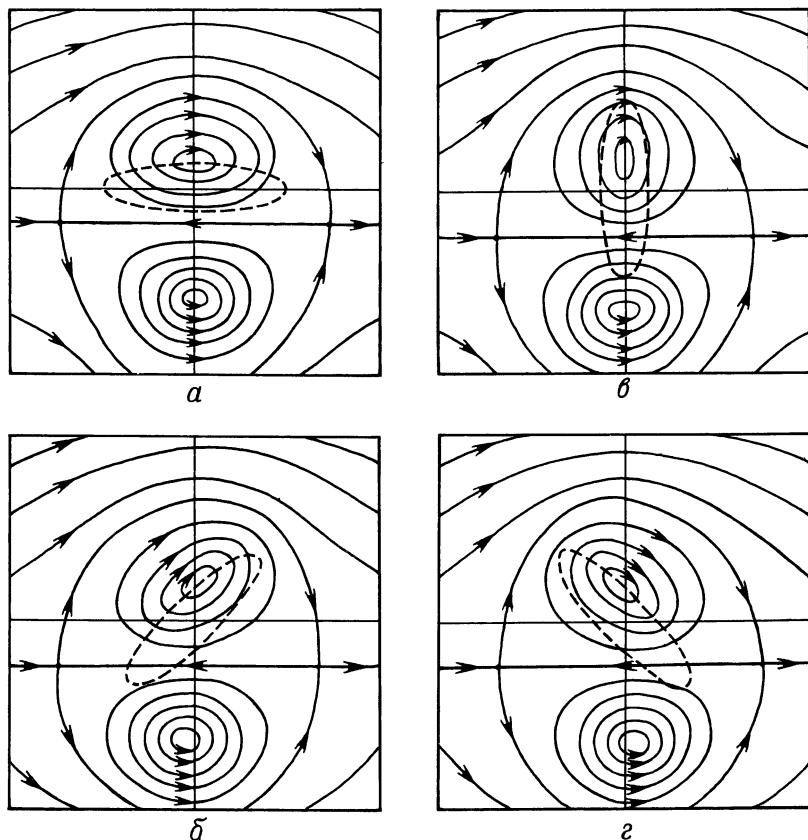
б

Р и с. 16. Вычисленные стационарные конфигурации эллиптического топографического (штриховая линия) и свободного вихрей (заштрихованы) в случаях  $\mathcal{L} = 1/2$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$  (а) и  $\mathcal{L} = 1/4$ ,  $\alpha = 4$  (б)

Если при некотором  $\tilde{\ell}$  имеем  $\tilde{R} = 0$  (точка  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  расположена на  $\partial S$ ), подынтегральная функция при этом значении параметра обращается в нуль, т.к.  $\lim_{\ell \rightarrow \tilde{\ell}} K(2\ell n R - 1) = 0$ .

Полученные интегралы вычисляются с помощью тех или иных формул численных квадратур. Параметрические уравнения контура удобно строить с помощью периодических кубических сплайнов  $[I]$ , интерполирующих контур по  $N$  заданным опорным точкам.





Р и с. 17. Линии тока для стационарных конфигураций топографического и свободного вихрей в окрестности эллиптического препятствия с полуосями  $a = 2$ ,  $b = 1/2$  при  $\alpha = 1/5$  и различных его ориентациях  
 $a - \psi^* = 0$ ,  $б - \pi/4$ ,  $в - \pi/2$ ,  $г - 3\pi/4$

Описанным методом были рассчитаны результирующие поля давления для стационарной конфигурации топографического и свободного вихрей для препятствия эллиптической формы с полуосями  $a = 2$ ,  $b = 1/2$  при  $\alpha = 1/5$  и значениях  $\psi^* = 0, \pi/4, \pi/2$  и  $3\pi/4$ . Соответствующие линии тока представлены на рис. 17. Хорошо видно, что топологическая структура течений такая же, как и в задаче Джонсона (см. рис. 14). Обращает на себя внимание практическая неизменность формы свободного вихря при различных положениях эллиптического препятствия.

Интересным является вопрос об устойчивости равновесия полученных конфигураций. Если топографический и свободный вихри моделировать точечными, неустойчивость устанавливается элементарно из анализа линий тока

"внешнего" поля  $p_0 + p_T$  (см. § 2.1), в котором стационарная точка является седлом. В случаях вихревых образований конечной протяженности требуется более детальное рассмотрение; пробные численные эксперименты по эволюции свободного вихря, описываемого формулой (2.5.13), показывают его неустойчивость.

Так как процесс распада стационарных конфигураций происходит достаточно медленно, рассмотренная выше модель свидетельствует о возможности обнаружения в океане не только захваченных топографических вихрей над подводными горами, но и циклонических возмущений, квазистационарирующих в слабом потоке справа от препятствия. Джонсон [126], например, упоминает лабораторные эксперименты Хапшперта и Мак-Ивена, которые хорошо согласуются с полученными им результатами.

## 2.6. Россбиевский волновой след

До сих пор стационарные баротропные задачи о топографических вихрях мы рассматривали в предположении, что бета-эффектом можно пренебречь ( $\beta = 0$ ). При этом, естественно, из поля зрения выпадали интересные явления, связанные с формированием стационарных волн Россби. Будем теперь предполагать, что  $\beta > 0$ , по-прежнему пренебрегая трением и ветром. Представляя решение в виде (2.3.3), где невозмущенный поток определяется по формуле (2.3.8), вместо (2.3.7) получим уравнение

$$\Delta \psi - \frac{\beta}{U_0} \psi = -h(x, y), \quad (2.6.1)$$

которое должно интегрироваться при условии  $|\nabla \psi| \rightarrow 0$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ .

В случае произвольной финитной функции  $h(x, y)$  решение уравнения (2.6.1) удобно представить в виде

$$\psi(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, y; \xi, \eta; \frac{\beta}{U_0}) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где функция Грина, в свою очередь, удовлетворяет уравнению

$$\Delta G + \frac{\beta}{U_0} G = -\delta(x - \xi) \delta(y - \eta). \quad (2.6.2)$$

и условию  $|\nabla G| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Здесь  $\delta$  - символ дельта-функции Дирака.

Характер функции Грина существенно зависит от знака скорости невозмущенного потока  $U_0$ . Для западного потока ( $U_0 < 0$ ) решение уравнения (2.6.2) при заданных условиях на бесконечности определяется однозначно и имеет вид

$$G(R) = \frac{1}{2\pi} K_0(\alpha R), \quad (2.6.3)$$

где  $K_0$  - функция Макдональда [46],  $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  и  $\alpha = \sqrt{-\beta/U_0}$ .

При  $U_0 > 0$  всем условиям удовлетворяет функция

$$G = -\frac{1}{4} Y_0(\alpha R) + \alpha_0 J_0(\alpha R) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) J_n(\alpha R), \quad (2.6.4)$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  - произвольные постоянные,  $Y_n$ ,  $J_n$  - функции Бесселя порядка  $n$  и решение записано в полярных координатах  $R, \theta$ , причем  $x = \xi + R \cos \theta$ ,  $y = \eta + R \sin \theta$  и  $\nu = \sqrt{\delta / U_0}$ .

Таким образом, для восточного потока функция Грина (и, следовательно, решение задачи) определяется неоднозначно. Для выделения единственного решения необходимо сформулировать дополнительные условия "излучения". Сначала установим асимптотический характер поведения (2.6.4) при больших  $R$ . Подставляя в (2.6.4) известные асимптотические представления [46]

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/2}),$$

$$Y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/2}),$$

$$\text{получим } G = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu R}} \times$$

$$\times \left[ \Phi_1(\theta) \sin\left(\nu R - \frac{\pi}{4}\right) + \Phi_2(\theta) \cos\left(\nu R - \frac{\pi}{4}\right) \right] + O(R^{-3/2}),$$

$$\text{где } \Phi_1(\theta) = -\frac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [\alpha_{2m+1} \cos(2m+1)\theta + \beta_{2m+1} \sin(2m+1)\theta],$$

$$\Phi_2(\theta) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\alpha_{2m} \cos 2m\theta + \beta_{2m} \sin 2m\theta).$$

Физически естественным является требование, чтобы вверх по течению функция  $G$  убывала быстрее, чем вниз по течению. Это означает, что

$$\Phi_1(\theta) = \Phi_2(\theta) = 0 \quad \text{при } \pi/2 < \theta < 3\pi/2. \quad (2.6.5)$$

Так как система функций  $1, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \cos 2k\theta, \sin 2k\theta, \dots$  полна на промежутке  $[\pi/2, 3\pi/2]$ , условия (2.6.5) приводят к соотношениям

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Phi_i(\theta) \begin{cases} \cos 2k\theta \\ \sin 2k\theta \end{cases} d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2. \quad (2.6.6)$$

Вычисляя интегралы, получим бесконечные системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)\alpha_{2m+1}}{4k^2 - (2m+1)^2} = (-1)^k \frac{\pi}{16} \delta_{k0}, \quad \alpha_{2k} = (-1)^{k+1} \alpha_0 \delta_{k0}, \quad k \geq 0, \quad (2.6.7)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m+1}}{4k^2 - (2m+1)^2} = 0, \quad \beta_{2k} = 0, \quad k \geq 1,$$

откуда следует  $\beta_n = 0$  для всех  $n$  и  $\alpha_{2m} = 0, m \geq 0$ . Коэффициенты  $\alpha_{2m+1}$  должны определяться из системы (2.6.7). Однако проще их найти с помощью очевидных соотношений

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Phi_1(\theta) \cos(2k+1)\theta d\theta = 0, \quad k \geq 0,$$

которые дают  $\alpha_{2k+1} = -\frac{1}{\pi(2k+1)}, k \geq 0$ . Проверкой можно убедиться, что это есть решение системы (2.6.7).

Введем обозначение

$$S(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(\rho) \cos(2n+1)\theta}{2n+1}, \quad (2.6.8)$$

тогда окончательно выражение для функции Грина в восточном потоке принимает вид

$$G = -\frac{1}{4} Y_0(\sqrt{R}) - \frac{1}{\pi} S(\sqrt{R}, \theta). \quad (2.6.9)$$

Приведенный выше метод выделения единственного решения, использующий асимптотики цилиндрических функций для больших значений аргумента, впервые, по-видимому, был применен Мак-Картни [135], который, в частности, ввел и функцию  $S$ . Другой метод построения  $G$ , основанный на идее стационарирования решения линеаризованной задачи, приведен в [123]; полученные обоими способами результаты совпадают.

С помощью преобразования Фурье, примененного к уравнению (2.6.2), можно получить интегральное представление для (2.6.9). В ином контексте, для линейного вихря с горизонтальной осью в стратифицированной жидкости, это было сделано Яновицем [119]. Здесь мы укажем другое интегральное представление для функции  $S$ . Из (2.6.8) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\rho) \sin(2n+1)\theta = -\frac{1}{2} \sin(\rho \sin \theta).$$

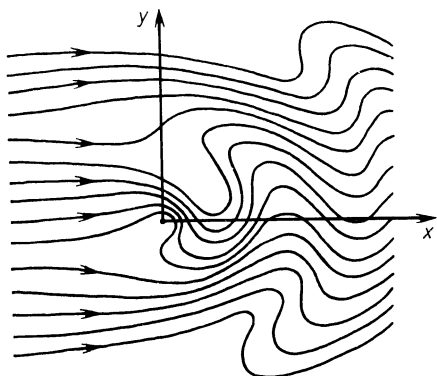
Отсюда с учетом  $S(\rho, \pi/2) = 0$  получаем  $S(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\pi/2} \sin(\rho \sin \varphi) d\varphi$ .

Легко проверяется свойство  $S(\rho, \pi - \theta) = -S(\rho, \theta)$ . По построению, при  $|\theta - \pi| < \pi/2$  главные члены асимптотических разложений оболочек слагаемых в (2.6.9) взаимно уничтожаются, но, следовательно, при  $|\theta| < \pi/2$  они удаляются. Иными словами, при больших  $R$

$$G = \begin{cases} O(R^{-3/2}), & |\theta - \pi| < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{R}}} \sin\left(\sqrt{R} - \frac{\pi}{4}\right) + O(R^{-3/2}), & |\theta| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для сравнения заметим, что при  $U_0 < 0$  функция Грина (2.6.3) имеет при больших  $R$  асимптотическое представление  $G = e^{-\varepsilon R} / 2\sqrt{\pi \varepsilon R}$ . При  $\beta \rightarrow 0$  (2.6.3) и (2.6.9) переходят в функцию Грина для уравнения Лапласа (см. § 2.4).

Построенные функции позволяют в виде квадратур выписать решение для произвольного финитного возмущения рельефа дна. Однако уже вид самих функций Грина позволяет указать качественные различия в случаях  $U_0 > 0$  и  $U_0 < 0$ . В западном потоке точечное возмущение рельефа приводит к осесимметричному возмущению поля давления при любых  $\beta > 0$ . В восточном потоке при  $\beta > 0$  эти возмущения становятся несимметричными относительно меридиана, проходящего через точку возмущения, складываясь из осесимметричной и кососимметричной относительно указанного меридиана частей. В любом случае эффект "бета" сводится к локализации возмущений возле центра возмущения рельефа, причем тем сильнее, чем больше величина  $\beta$ , однако при  $U_0 < 0$  поле возмущений давления затухает экспоненциально, а при  $U_0 > 0$  это происходит лишь алгебраически, хотя и быстрее, чем в случае  $\beta = 0$ .



Р и с. 18. Картина линий тока, определяемая полем давления  $p = -y + \beta G(x, y)$  при  $\beta = 1$  и  $\sigma = 9,38$ .

Функция Грина вычисляется по формуле (2.6.9) (по Яновицу [119]).

Чтобы понять физическую сущность возникновения асимметрии в случае  $U_0 > 0$ , достаточно вспомнить, что баротропное уравнение потенциального вихря допускает решения типа бегущих

на запад волн (планетарные волны Россби). Если теперь всей системе сообщить постоянную скорость в восточном направлении, равную скорости волны, мы получим стационарную картину. Возмущение рельефа дна действует как источник возникновения таких волн в восточном потоке, поэтому за препятствием может сформироваться стационарный волновой след. В западном потоке это не происходит, так как волны быстро уносятся течением на бесконечность. Таким образом, асимметрия функции Грина в восточном потоке обусловлена сносом волн Россби вниз по течению (см. рис. 18). За счет этой асимметрии возникает волновое сопротивление, так как энергия потока расходуется на генерирование подветренных волн [121].

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об обтекании осесимметричной возвышенности вида  $h = h(r)$ . Решение можно получить с помощью построенных функций Грина (2.6.3) или (2.6.9) в зависимости от направления набегающего потока, как это сделано в [123]. Мы выберем здесь другой, более прямой путь.

**З а п а д н ы й п о т о к.** Пусть сначала  $U_0 < 0$ . Из свойств функции Грина (2.6.3) следует, что возмущение давления  $\psi$  должно обладать осевой симметрией, поэтому уравнение (2.6.1) можно переписать в виде  $\psi''(r) + \frac{1}{r}\psi'(r) - \alpha^2\psi(r) = -h(r)$ . Его ограниченное решение построим методом варьирования произвольных постоянных. Полагая

$$\psi(r) = C_1(r) I_0(\alpha r) + C_2(r) K(\alpha r) \quad (2.6.10)$$

и учитывая, что вронскиан  $W = I_0(z) K'_0(z) - I'_0(z) K_0(z) = -1/z$ , легко получим

$$C'_1 = -r h(r) K_0(\alpha r), \quad C'_2 = r h(r) I_0(\alpha r). \quad (2.6.11)$$

Так как при малых  $r$  логарифмическую особенность имеет  $K_0(\alpha r)$ , а при больших  $r$  экспоненциально растет  $I_0(\alpha r)$ , для выделения ограничен-

ного решения примем условия  $C_1(\infty) = C_2(0) = 0$ , при которых из (2.6.II) квадратурами определяем функции  $C_1$  и  $C_2$  и вместо (2.6.I0) окончательно находим

$$\psi(r) = I_0(\alpha r) \int_r^{\infty} h(t) + K_0(\alpha t) dt + K_0(\alpha r) \int_0^r h(t) + I_0(\alpha t) dt.$$

Для цилиндрического препятствия  $h(r) = \theta(1-r)$  после вычисления интегралов получим решение Мак-Картни [135]

$$\psi(r) = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} 1 - K_1(\alpha) I_0(\alpha r), & r < 1, \\ I_1(\alpha) K_0(\alpha r), & r > 1. \end{cases}$$

Очевидно, условие появления критических точек имеет вид

$$\frac{\delta}{|U_0|} > \frac{1}{\max_r |\psi'(r)|}.$$

Так как в нашем случае

$$\psi'(r) = - \begin{cases} K_1(\alpha) I_1(\alpha r), & r < 1, \\ I_1(\alpha) K_1(\alpha r), & r > 1 \end{cases}$$

и функции  $I_1$  и  $K_1$  монотонны и положительны,  $\max |\psi'(r)| = I_1(\alpha) K_1(\alpha)$  и достигается при  $r_c = 1$ , откуда следует  $\frac{\delta}{|U_0|} > \frac{1}{K_1(\alpha) I_1(\alpha)} \equiv \mathcal{F}(\alpha)$ .

Функция  $\mathcal{F}(\alpha)$  является монотонно возрастающей функцией своего аргумента, причем асимптотически  $\mathcal{F}(\alpha) \sim 2$  при  $\alpha \ll 1$  и  $\mathcal{F}(\alpha) \sim 2\alpha$  при  $\alpha \gg 1$ . Это означает, что при сравнении со случаем  $\delta = 0$  бета-эффект увеличивает значение критического параметра  $\delta/|U_0|$ , при котором происходит формирование столба Тейлора. Картина линий тока при этом качественно такая же, как и в случае  $\delta = 0$ .

В о с т о ч н ы й п о т о к. Обратимся к более интересному случаю  $U_0 > 0$  и построим сначала ограниченное частное решение неоднородного уравнения (2.6.I). Полагая  $\psi_0 = \psi_0(r)$ , получим  $\psi_0''(r) + \frac{1}{r} \psi_0'(r) + \nu^2 \psi_0(r) = -h(r)$ . Действуя таким же образом, как и выше, находим

$$\psi_0(r) = -\frac{\pi}{2} \left[ Y_0(\nu r) \int_0^r J_0(\nu t) h(t) dt + J_0(\nu r) \int_r^{\infty} Y_0(\nu t) h(t) dt \right]. \quad (2.6.I2)$$

К этой функции можно прибавить общее решение однородного уравнения (2.6.I). Структура (2.6.9) подсказывает, что в силу симметрии препятствия мы должны ограничиться лишь членами с  $\cos n\theta$ , исчезающими на бесконечности, и можно принять

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_n(\nu r) \cos n\theta. \quad (2.6.I3)$$

Предложим, что функция  $h(r)$  финитна, т.е.  $h \equiv 0$  при  $r > 1$ . Тогда вне препятствия (2.6.I3) примет вид

$$\psi(r, \theta) = M Y_0(\nu r) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_n(\nu r) \cos n\theta, \quad (2.6.I4)$$

где  $M = -\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^1 t J_0(\nu t) h(t) dt$ . Выражение (2.6.14) совершенно аналогично функции (2.6.4). Поступая для определения постоянных  $\alpha_n$  таким же образом, как и выше, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_n(\nu r) \cos n\theta = \frac{4M}{\pi} S(\nu r, \theta),$$

откуда окончательно

$$\psi(r, \theta) = \frac{4M}{\pi} S(\nu r, \theta) + \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \left[ Y_0(\nu r) \int_0^r t J_0(\nu t) h(t) dt + J_0(\nu r) \int_r^1 t Y_0(\nu t) h(t) dt \right], & r < 1, \\ M Y_0(\nu r), & r > 1. \end{cases} \quad (2.6.15)$$

Восточно-западная асимметрия решения определяется лишь первым слагаемым с функцией  $S(\nu r, \theta)$ , ответственным за формирование волнового следа. Если функция  $h(r)$  такова, что  $M = 0$ , возмущение поля давления вне препятствия исчезает, а над препятствием оно становится радиально симметричным. Рассмотрим этот своеобразный случай "резонанса" для препятствия цилиндрической формы [135]. После простых преобразований из (2.6.15) получим

$$\psi(r, \theta) = -\left(\frac{2}{\nu}\right) J_1(\nu) S(\nu r, \theta) - \begin{cases} (1/\nu^2) + (\pi/2\nu) Y_1(\nu) J_0(\nu r), & r < 1, \\ (\pi/2\nu) J_1(\nu) Y_0(\nu r), & r > 1. \end{cases}$$

Резонанс имеет место для всех  $\nu$ , совпадающих с одним из корней  $\nu^*$  уравнения  $J_1(\nu) = 0$ . В этом случае

$$\psi = \psi_0(r) = -\left[\nu^{*-2} + (\pi/2\nu^*) Y_1(\nu^*) J_0(\nu^* r)\right] \theta(1-r)$$

и удается решить вопрос о критической высоте препятствия, определяемой условием

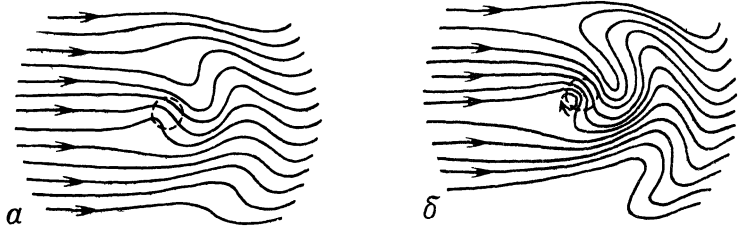
$$\frac{\delta}{U_0} > \frac{1}{r \max |\psi'_0(r)|}. \quad (2.6.16)$$

В нашем случае

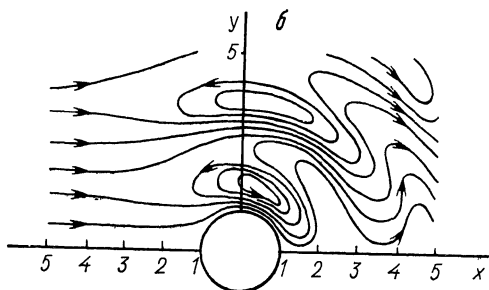
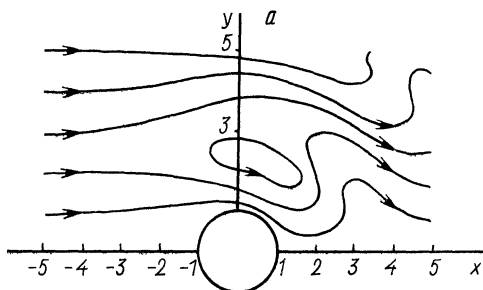
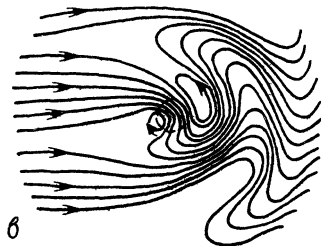
$$\psi'_0(r) = -\frac{\pi}{2} Y_1(\nu^*) J'_0(\nu^* r) = \frac{\pi}{2} Y_1(\nu^*) J_1(\nu^* r).$$

Обозначим точку первого максимума функции  $J_1$  через  $\mu$ , тогда  $r_c = \mu/\nu^*$ , а условие (2.6.16) принимает вид  $\frac{\delta}{U_0} > \frac{2}{\pi J_1(\mu) |Y_1(\nu^*)|}$ . Легко показать, что при  $Y_1(\nu^*) > 0$  всегда  $\theta_c = \pi/2$ , а при  $Y_1(\nu^*) < 0$  соответственно имеем  $\theta_c = -\pi/2$ , т.е. критическая точка может появляться по обе стороны от препятствия.

Выполненный Мак-Картни [136] детальный анализ рассмотренных задач показывает, что в общем случае осесимметричного препятствия в западных потоках влияние параметра  $\delta$  состоит в ограничении радиальной протяженности возмущений основного зонального течения, однако картина линий тока все еще симметрична вверх и вниз по течению, как и при  $\delta=0$ . В восточных потоках вниз по течению от препятствия возникает широкий меандрирующий след, который вниз по течению затухает лишь алгебраически, как  $r^{-1/2}$ . С картиной меандров могут быть связаны вихри - циклонические на приполярной стороне и антициклонические на приэкватор-



Р и с. 19. Линии тока в случае восточного потока над цилиндрической горой при  $\nu = 1$  (по Мак-Картни [136])  
 а -  $\delta = 4$ , б -  $8$  и в -  $16$



Р и с. 20. Круглый остров в восточном потоке (по Уайту [178])  
 а -  $\nu = \sqrt{6}/U_0 = 2$  и б -  $3$ . Ввиду симметрии показана только верхняя полуплоскость



риальной подветренной стороне. На рис. 19 изображены линии тока восточного потока над цилиндрическим препятствием  $h(r) = \theta(1-r)$  при  $U_0 = 1$  и  $\delta = 2, 4, 6$  [136].

Как уже отмечалось в конце § 2.2, бета-эффект в известном смысле эквивалентен эффекту наклонного дна. Ряд задач о rossбиевских волновых следах за локальными возмущениями наклонного дна рассмотрен в работах [81] и [125].

## 2.7. Круглый остров в зональном потоке

Наиболее ярко волновой rossбиевский след в восточном потоке проявляется в задаче об обтекании острова. Вертикальные боковые границы в теоретических моделях можно рассматривать как крайнюю форму проявления особенностей рельефа дна. С аналитической точки зрения удобной формой острова является прямой круговой цилиндр единичного радиуса.

Так как в занятой потоком области  $r > 1$  везде  $h \equiv 0$ , в формуле (2.3.3) параметром  $\delta$  мы можем распорядиться по своему усмотрению. Используя (2.3.8) и полагая  $\delta = U_0$ , получим

$$p = -U_0 y + U_0 \psi, \quad (2.7.1)$$

где функция  $\psi$  по-прежнему удовлетворяет уравнению (2.3.7), которое с учетом сказанного переходит в  $\Delta \psi + (\delta_0/U_0)\psi = 0$ . Граничные условия на бесконечности и на боковой поверхности острова в полярных координатах соответственно имеют вид  $|\nabla \psi| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $\psi_\theta = \cos \theta$  при  $r = 1$ . Представляя решение в виде ряда Фурье

$$\psi(r, \theta) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta], \quad (2.7.2)$$

находим, что коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  удовлетворяют однотипным уравнениям

$$Z_n''(r) + \frac{1}{r} Z_n'(r) + \left( \frac{\delta}{U_0} - \frac{n^2}{r^2} \right) Z_n(r) = 0 \quad (2.7.3)$$

и граничным условиям

$$Z_n'(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.7.4)$$

$$A_n(1) = 0, \quad B_n(1) = \delta_{n1}, \quad n \geq 1,$$

где  $\delta_{n1}$  - символ Кронекера.

Прежде чем переходить к построению решения, вычислим силы, действующие на остров со стороны жидкости. Для проекций на координатные оси соответственно имеем

$$X = - \int_0^{2\pi} p(1, \theta) \cos \theta d\theta, \quad Y = - \int_0^{2\pi} p(1, \theta) \sin \theta d\theta,$$

откуда с помощью (2.7.1) и (2.7.2) находим  $X = -\pi U_0 A_0(1)$ ,  $Y = -\pi U_0 [B_1(1) - 1]$ ,

но в силу граничных условий (2.7.4) окончательно получаем  $\chi = \psi = 0$ . Заметим, что циркуляция скорости вдоль границы острова равна

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta = 2\pi U_0 A_0' (1) \quad (2.7.5)$$

и в общем случае отлична от нуля. Таким образом, несмотря на наличие циркуляции, в геострофическом потоке теорема Жуковского не имеет места. Чтобы получить необходимые поправки, следует учесть агеострофические эффекты /37/.

Теперь отдельно рассмотрим случаи западного и восточного потоков.

**Западный поток.** При  $U_0 < 0$  полагаем  $\varkappa = \sqrt{-\beta/U_0}$ . Тогда удовлетворяющие условиям на бесконечности решения уравнений (2.7.3) имеют вид  $A_n(r) = \alpha_n K_n(\varkappa r)$ ,  $B_n(r) = \beta_n K_n(\varkappa r)$ . Произвольные постоянные  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  определяются из граничных условий (2.7.4), из которых находим  $\alpha_n = 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $\beta_1 = 1/K_1(\varkappa)$  и  $\beta_n = 0$ ,  $n \geq 2$ . Таким образом,

$$\psi(r, \theta) = \alpha_0 K_0(\varkappa r) + \frac{K_1(\varkappa r)}{K_1(\varkappa)} \sin \theta.$$

Постоянную  $\alpha_0$  можно связать с циркуляцией скорости по периметру острова. Из (2.7.5) имеем  $\Gamma = -2\pi U_0 \alpha_0 \varkappa K_1(\varkappa)$ , откуда  $\alpha_0 = -\Gamma / 2\pi U_0 \varkappa K_1(\varkappa)$  и окончательно

$$\psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi U_0} \frac{K_0(\varkappa r)}{\varkappa K_1(\varkappa)} + \frac{K_1(\varkappa r)}{K_1(\varkappa)} \sin \theta. \quad (2.7.6)$$

При  $\beta \rightarrow 0$  ( $\varkappa \rightarrow 0$ ) в пределе с точностью до несущественной аддитивной постоянной получаем

$$\psi(r, \theta) \approx -\frac{\Gamma}{2\pi U_0 \varkappa \sqrt{r}} + \frac{1}{r} \sin \theta,$$

что соответствует классическому решению задачи о циркуляционном обтекании кругового цилиндра. При  $\varkappa \gg 1$ , учитывая асимптотику  $K_n(z)$ , имеем

$$\psi(r, \theta) \approx -\frac{\Gamma e^{-\varkappa(r-1)}}{2\pi U_0 \varkappa \sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\varkappa(r-1)} \sin \theta.$$

Последнее соотношение показывает, что бета-эффект способствует локализации возмущений возле острова, с удалением от которого они затухают по экспоненциальному закону.

**Восточный поток.** В случае  $U_0 > 0$  обозначим  $\nu = \sqrt{\beta/U_0}$  (так называемое "островное число" [178]). Тогда исчезающие на бесконечности решения имеют вид

$$A_n(r) = \alpha_n Y_n(\nu r) + \alpha_n J_n(\nu r), \quad B_n(r) = \beta_n Y_n(\nu r) + \beta_n J_n(\nu r).$$

Из граничных условий (2.7.4) следует

$$\alpha_n Y_n(\nu) + \alpha_n J_n(\nu) = 0, \quad n \geq 1, \quad (2.7.7)$$

$$\beta_n Y_n(\nu) + \beta_n J_n(\nu) = \delta_{n1}, \quad n \geq 1. \quad (2.7.8)$$

Задавая, как и выше, циркуляцию  $\Gamma$ , получим еще одно соотношение

$$\alpha_0 Y_1(\nu) + \alpha_0 J_1(\nu) = - \frac{\Gamma}{2\pi U_0 \nu}. \quad (2.7.9)$$

В отличие от западного потока полученных уравнений недостаточно для определения всех постоянных. Для выделения единственного решения воспользуемся таким же условием излучения, как и в предыдущем параграфе /143/. При больших  $r$  асимптотически имеем

$$\psi(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu r}} \left[ \Phi_1(\theta) \cos\left(\sqrt{r} - \frac{\pi}{4}\right) + \Phi_2(\theta) \sin\left(\sqrt{r} - \frac{\pi}{4}\right) \right] + O(r^{-3/2}),$$

где

$$\Phi_1(\theta) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\alpha_{2m} \cos 2m\theta + \beta_{2m} \sin 2m\theta) - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [\alpha_{2m+1} \cos(2m+1)\theta + \beta_{2m+1} \sin(2m+1)\theta],$$

$$\Phi_2(\theta) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\alpha_{2m} \cos 2m\theta + \beta_{2m} \sin 2m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [\alpha_{2m+1} \cos(2m+1)\theta + \beta_{2m+1} \sin(2m+1)\theta].$$

Условие более быстрого затухания возмущений вверх по течению означает  $\Phi_i(\theta) = 0$ ,  $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ,  $i = 1, 2$ , откуда получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\pi}{2} \alpha_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} = 0, \quad (2.7.10)$$

$$\frac{\pi}{4} \alpha_{2k} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4k^2} \alpha_{2m+1} = 0, \quad k \geq 1, \quad (2.7.11)$$

$$\frac{\pi}{2} \alpha_0 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} = 0, \quad (2.7.12)$$

$$\frac{\pi}{4} \alpha_{2k} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4k^2} \alpha_{2m+1} = 0, \quad k \geq 1, \quad (2.7.13)$$

$$\frac{\pi}{8k} \beta_{2k} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m+1}}{(2m+1)^2 - 4k^2} = 0, \quad k \geq 1, \quad (2.7.14)$$

$$\frac{\pi}{8k} \beta_{2k} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m+1}}{(2m+1)^2 - 4k^2} = 0, \quad k \geq 1, \quad (2.7.15)$$

Уравнения (2.7.7), (2.7.11) и (2.7.13) образуют однородную систему относительно  $\alpha_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $n \geq 1$ , поэтому  $\alpha_n = \alpha_n = 0$  при  $n \geq 1$ . Но тогда из (2.7.10), (2.7.12) и (2.7.9) следует  $\alpha_0 = \alpha_0 = \Gamma = 0$ , т.е. движение должно быть бесциркуляционным. Для определения постоянных  $\beta_n$  и  $\beta_n$  служит система уравнений (2.7.8), (2.7.14) и (2.7.15). Заметим, что вместо (2.7.14) и (2.7.15) можно использовать эквивалентные им уравнения, которые получаются из очевидных соотношений  $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Phi_i(\theta) \sin(2k+1)\theta d\theta = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k \geq 0$  и имеют вид

$$\frac{\pi}{8} \beta_{2k+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(2k+1)^2 - 4m^2} \beta_{2m} = 0, \quad k \geq 0, \quad (2.7.16)$$

$$\frac{\pi}{8} \beta_{2k+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2 - (2k+1)^2} \beta_{2m} = 0, \quad k \geq 0. \quad (2.7.17)$$

Теперь легко получить системы уравнений только для  $\beta_n$  или  $\delta_n$ . Исключая с помощью (2.7.8), (2.7.15) и (2.7.16) постоянные  $\delta_n$ , находим

$$J_{2k+1}(\nu) \beta_{2k+1} + \frac{8}{\pi} Y_{2k+1}(\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2 - (2k+1)^2} \beta_{2m} = \delta_{2k+1,1}, \quad k \geq 0, \quad (2.7.18)$$

$$J_{2k}(\nu) \beta_{2k} + \frac{8k}{\pi} Y_{2k}(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 - 4k^2} \beta_{2m+1} = 0, \quad k \geq 1.$$

Аналогичным образом, используя (2.7.14) и (2.7.17) и исключая  $\beta_n$ , получаем

$$Y_{2k+1}(\nu) \delta_{2k+1} + \frac{8}{\pi} J_{2k+1}(\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(2k+1)^2 - 4m^2} \delta_{2m} = \delta_{2k+1,1}, \quad k \geq 0, \quad (2.7.19)$$

$$Y_{2k}(\nu) \delta_{2k} + \frac{8k}{\pi} J_{2k}(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - (2m+1)^2} \delta_{2m+1} = 0, \quad k \geq 1.$$

Достаточно решить любую из систем (2.7.18), (2.7.19). В первом случае  $\delta_n$  находятся с помощью уравнений (2.7.15) и (2.7.16), а во втором — с помощью (2.7.14) и (2.7.17) определяем  $\beta_n$ . На практике каждая из указанных систем решается методом усечения, когда все бесконечные суммы заменяются на конечные. Рассмотрим простейший случай, предполагая, что можно пренебречь всеми  $\beta_n$  и  $\delta_n$  при  $n > 2$ . Тогда система (2.7.18) принимает вид

$$J_1(\nu) \beta_1 + \frac{8}{3\pi} Y_1(\nu) \beta_2 = 1, \quad \frac{8}{3\pi} Y_2(\nu) \beta_1 - J_2(\nu) \beta_2 = 0$$

с решением  $\beta_1 = J_2(\nu) / \Delta$ ,  $\beta_2 = 8Y_2(\nu) / 3\pi\Delta$ , где  $\Delta = J_1(\nu)J_2(\nu) + (8/3\pi)^2 Y_1(\nu)Y_2(\nu)$ . С помощью (2.7.5) и (2.7.16) после усечения получаем  $\beta_1 = (8/3\pi)^2 Y_2(\nu) / \Delta$ ,  $\beta_2 = -(8/3\pi)J_2(\nu) / \Delta$ .

Если за основу взять усеченную систему (2.7.19), получим уравнения

$$Y_1(\nu) \delta_1 - \frac{8}{3\pi} J_1(\nu) \delta_2 = 1, \quad \frac{8}{3\pi} J_2(\nu) \delta_1 + Y_2(\nu) \delta_2 = 0$$

с решением  $\delta_1 = Y_2(\nu) / \Delta^*$ ,  $\delta_2 = -8J_2(\nu) / 3\pi\Delta^*$ , причем теперь  $\Delta^* = Y_1(\nu)Y_2(\nu) + (8/3\pi)^2 J_1(\nu)J_2(\nu)$ . Из (2.7.4) и (2.7.14) находим  $\beta_1 = (8/3\pi)^2 J_2(\nu) / \Delta^*$ ,  $\beta_2 = (8/3\pi)Y_2(\nu) / \Delta^*$ .

Мы видим, что построенные двумя способами решения не совпадают; это результат усечения бесконечных систем. Для упрощения полученных формул примем приближенно  $8/3\pi \approx 1$ . Тогда  $\Delta = \Delta^* = J_1(\nu)J_2(\nu) + Y_1(\nu)Y_2(\nu)$  и  $\beta_1 = -\delta_2 = J_2(\nu) / \Delta$ ,  $\beta_2 = \delta_1 = Y_2(\nu) / \Delta$ , причем полученные обоими способами результаты совпадают. С принятой точностью решение задачи имеет вид /I78/

$$\rho(r, \theta) = \frac{U_0}{\Delta(\nu)} \left\{ [Y_2(\nu)Y_1(\nu r) + J_2(\nu)J_1(\nu r) - r\Delta(\nu)] \sin \theta + [Y_2(\nu)J_2(\nu r) - J_2(\nu)Y_2(\nu r)] \sin 2\theta \right\}. \quad (2.7.20)$$

Так как поле (2.7.20) является кососимметрическим относительно направления набегающего потока, картина линий тока симметрична относительно оси  $Ox$ , и поэтому построенное решение одновременно является решением задачи о возмущении зонального потока полуостровом в форме полукруга, прилегающим к прямолинейному берегу  $y=0$ . Этот вывод не зависит от принятого приближения и является общим. Примеры решения аналогичных задач для полуостровов иной формы с помощью полуобратных методов можно найти в [141] (см. также [180, 181]).

Рассмотрим теперь вопрос о критических точках, в которых обращается в нуль вектор скорости, т.е.  $v_r = v_\theta = 0$ . Эти уравнения имеют очевидные решения  $r=1$ ,  $\theta = 0, \pi$ , отвечающие передней и задней точке на границе острова. Другие возможные корни в явном виде найти не удастся, поэтому мы ограничимся качественным анализом. Рассмотрим изменение зональной скорости вдоль оси  $Oy$ . Из (2.7.20) имеем  $u(0, y) = -V_0(r, \frac{y}{2}) =$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \left\{ 1 - \frac{\nu}{\Delta(\nu)} \left[ Y_2(\nu) Y_1'(\nu r) + J_2(\nu) J_1'(\nu r) \right] \right\}.$$

Для достаточно больших  $\nu$  асимптотически получаем  $u(0, r)/U_0 \sim 1 + (2\nu^2/3\sqrt{r})\cos\nu(r-1)$ . В точках  $y_n = r_n = 1 + (2n-1)\pi/\nu$ ,  $n \geq 1$  имеем  $u(0, r_n)/U_0 \sim 1 - 2\nu^2\sqrt{r}/3\sqrt{1+(2n-1)\pi}$ . Введем целое неотрицательное число  $N = E \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nu}{\pi} \left( \left( \frac{2\nu^2}{3} \right)^2 - 1 \right) + 1 \right\} \right] \approx E \left[ \frac{\nu}{2\pi} \left( \frac{2\nu^2}{3} \right)^2 \right]$ , где  $E[z]$  означает целую часть  $z$ . Тогда  $u(0, r_n) < 0$  при  $1 \leq n \leq N$ , т.е. в указанных точках имеются возвратные течения, которые могут представлять ветви замкнутых вихревых циркуляций. Очевидно, необходимым условием появления таких вихрей является неравенство  $\nu > (9\pi/2)^{1/5} \approx 1,7$ ; размеры возникающих вихрей в поперечном направлении имеют порядок  $2\pi/\nu$ .

Таким образом, с уменьшением скорости набегающего потока при некотором  $\nu_{кр}$  по обе стороны от острова появляется первая пара критических точек, вокруг которых при дальнейшем увеличении  $\nu$  формируются два вихря противоположных вращений. С ростом  $\nu$  число вихрей растет, причем одновременно усиливается меандрирование потока за островом (волновой rossbeevский след). Картина линий тока при  $\nu=2$  и  $\nu=3$  изображена на рис. 20.

Поскольку расходы и, следовательно, средние скорости восточных течений в реальных океанах колеблются в широких пределах одновременно с изменением интенсивности океанических субтропических колец, вихреобразование и меандрирование топографической природы можно рассматривать как реакцию на колебания океанической циркуляции глобального масштаба.

## 2.8. Баротропные течения в бесконечном канале

В геофизической гидродинамике широкое распространение получила модельная задача о течениях в канале. Обычно рассматриваются либо бес-

конечный канал, когда задаваемые вверх и вниз по течению граничные условия независимы, либо канал конечной длины, когда вверх и вниз по потоку формулируются условия периодичности. В настоящем параграфе мы рассмотрим стационарную задачу о течениях в бесконечном канале  $0 < y < 1$ ,  $|x| < \infty$ , на примере которой, в частности, изучим влияние распределения потенциального вихря в набегающем потоке.

Будем предполагать, что распределение потенциального вихря характеризуется линейной функцией  $F(p) = Cp + D$ ; тогда, как показано в § 2.3, поле давления определяется по формуле  $p = P(y) + \delta\psi(x, y)$ , где  $\psi(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi - C\psi = -h(x, y), \quad (2.8.1)$$

которое теперь должно интегрироваться при условиях [138]

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad (2.8.2)$$

$\psi \rightarrow 0$  вверх по течению,

$\psi$  ограничено вниз по течению.

Возможные профили скорости набегающих потоков приведены в § 2.3; при этом предполагается, что  $U(y)$  не меняет знака, который определяется направлением потока.

Решение уравнения (2.8.1) ищем в виде ряда Фурье

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) Y_n(y), \quad (2.8.3)$$

где  $Y_n(y) = \sqrt{2} \sin n\pi y$ ,  $n = 1, 2, \dots$  образуют полную и ортонормированную систему функций на отрезке  $0 < y < 1$ . Полагая  $h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) Y_n(y)$ ,

где, очевидно,  $h_n(x, y) = \int_0^1 h(x, y) Y_n(y) dy$ , из (2.8.1) - (2.8.2) получаем последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_n'' - (C + \lambda_n)\psi_n = -h_n(x), \quad \lambda_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.8.4)$$

при условиях  $\psi_n \rightarrow 0$  вверх по течению и  $\psi_n$  ограничено вниз по течению. Решения сформулированных элементарных задач легко строятся стандартными методами. Введем обозначения  $\omega_n = \sqrt{-C - \lambda_n}$  при  $C + \lambda_n < 0$  и  $\delta_n = \sqrt{C + \lambda_n}$  при  $C + \lambda_n > 0$ . Тогда для восточных потоков

$$\psi_n(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{-\infty}^x h_n(\xi) \sin \omega_n(x - \xi) d\xi, \quad C + \lambda_n < 0, \quad (2.8.5)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\delta_n} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\xi) e^{-\delta_n|x - \xi|} d\xi, \quad C + \lambda_n > 0. \quad (2.8.6)$$

Для западных потоков в (2.8.5) нижний предел в интеграле следует изменить на  $+\infty$ . Далее мы будем рассматривать наиболее интересные восточные потоки. Пусть  $N$  есть наименьшее целое число, для которого еще

справедливо неравенство  $G + \lambda_n < 0$ . Определим функции  $g_n(x)$  по формулам

$$g_n(x) = \begin{cases} -\frac{\theta(x)}{\omega_n} \sin \omega_n x, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{1}{2\delta_n} e^{-\delta_n |x|}, & n > N. \end{cases} \quad (2.8.7)$$

Тогда решение задачи можно представить с помощью функции Грина

$$G(x; y; \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) Y_n(y) Y_n(\eta) \quad (2.8.8)$$

в виде

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 G(x - \xi, y; \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.8.9)$$

Из приведенных выражений следует, что в поле возмущений присутствует ровно  $N$  волновых мод с длинами волн  $\ell_n = 2\pi/\omega_n$ , причем с ростом номера моды длина волны растет. Условие появления волновых мод  $N > 1$  означает, что  $C < -\pi^2$ , причем число этих мод  $N$  в точности равно целой части числа  $\sqrt{-C}/\pi$ . Возникновение волновых возмущений, по-видимому, связано с неустойчивостью набегающего потока, так как при этом  $F'(p) = C < 0$  (см. § 2.3). Благодаря наличию волновых компонент в решении, в потоке вниз по течению от области возмущения рельефа дна линии тока принимают колебательный характер (меандрируют) и даже могут образовывать отдельные изолированные вихри.

При  $C = -\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , (2.8.8) как функция параметра  $C$  терпит разрыв; для этих значений  $C$  не существует ограниченных вниз по течению решений — наступает своеобразный "резонанс".

Рассмотрим в качестве примера "тригонометрический" профиль скорости из § 2.3  $U(y) = \sqrt{A \sin \nu y - B \cos \nu y} + \beta/\sqrt{2}$ ,  $C = -\nu^2 < 0$ . Полагая здесь  $A = B = 0$  и  $\beta/\sqrt{2} = U_0 > 0$ , получим кинематически однородный восточный поток, причем  $P(y) = -U_0 y$  и  $C = -\beta/U_0$ . Условие появления волновых мод имеет вид  $\beta/U_0 > \pi^2$ , т.е. скорость должна быть меньше критического значения  $U_{кр} = \beta/\pi^2$ . Зададим рельеф дна в простой форме

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta(x) Y_1(y) = \theta(x) \sin \pi y.$$

Эта функция моделирует полубесконечный зональный хребет, расположенный симметрично относительно оси канала. Решение (2.8.9) принимает вид

$$\psi(x, y) = \int_0^{\infty} g_1(x - \xi) d\xi \sin \pi y.$$

Используя (2.8.7), для результирующего поля давления получим окончательно  $p = -U_0 y + \beta \Phi(x) \sin \pi y$ , где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi^2(1 - U_{кр}/U)} \begin{cases} 2\theta(x) \sin^2 \frac{\omega_1 x}{2}, & U_0 < U_{кр} \\ \frac{1}{2} e^{\delta_1 x}, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\delta_1 x}, & x > 0, \quad U_0 > U_{кр}, \end{cases}$$

$$78 \quad \omega_1 = \pi \sqrt{(U_{кр}/U_0) - 1}, \quad \delta_1 = \pi \sqrt{1 - (U_{кр}/U_0)}.$$

При  $U_0 < U_{кр}$  набегающий поток "не чувствует" препятствия вверх по течению от хребта; вниз по течению поле возмущения давления  $b\psi$  имеет вид циклонических повторяющихся вихрей с зональным диаметром  $d = 2\pi/\delta_1$ . Продольная суммарная скорость равна

$$u(x, y) = -p_y = U_0 + \frac{2\delta \sin^2(\delta_1 x/2) \cos \pi y}{\pi(U_{кр}/U_0 - 1)}.$$

Хорошо видно, что над приэкваториальным склоном хребта происходит усиление потока, а над приполярным - замедление. При условии

$$U_{кр} - 2\delta/\pi < U_0 < U_{кр} \quad (2.8.10)$$

в точках  $x_m = \pi(2m-1)/\delta_1$ ,  $y = 1$ ,  $m = 1, 2, \dots$  и в некоторой их окрестности  $u < 0$ , что свидетельствует о появлении в результирующем поле циклонических вихрей, смещенных к приполярной стороне канала. При  $U_0 < U_{кр} - 2\delta/\pi$  вихрей нет и происходит лишь меандрирование потока с длиной волны  $\ell_1 = 2\pi/\delta_1$ .

При  $U_0 > U_{кр}$  возмущения от хребта распространяются вверх по течению, заставляя набегающий поток постепенно смещаться к приполярной стороне ( $y = 1$ ) канала. Это смещение продолжается и вниз по течению, и при достаточно больших  $x$  приближенно получаем

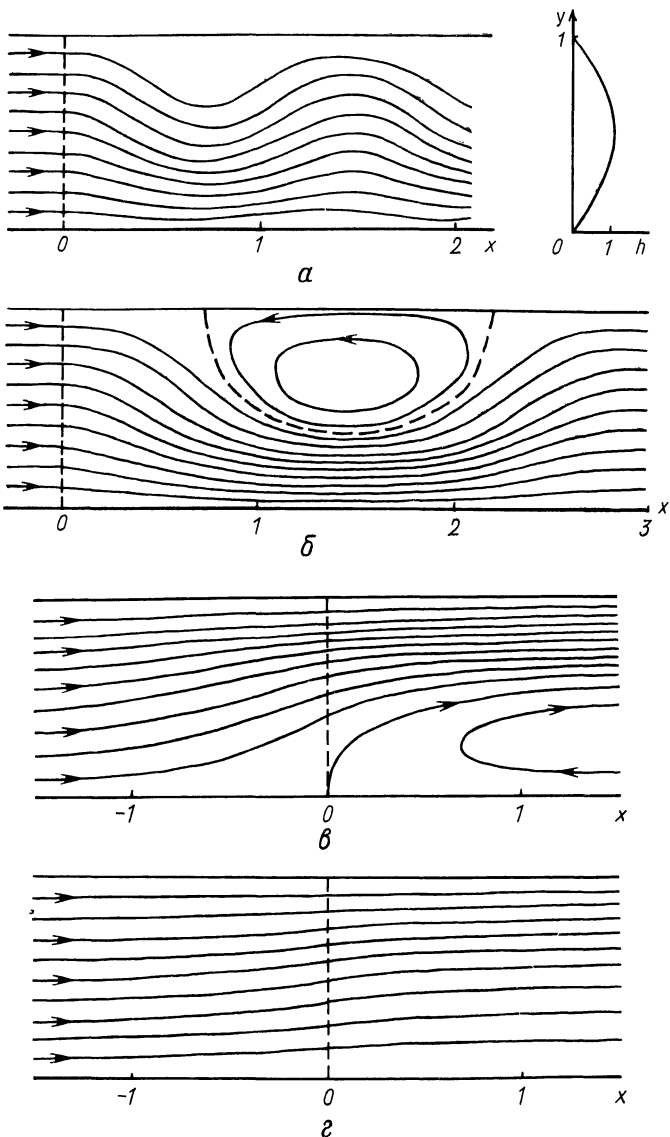
$$p \approx -U_0 y + \frac{\delta}{\pi^2(1 - U_{кр}/U_0)} \sin \pi y, \quad u(x, y) \approx U_0 - \frac{\delta \cos \pi y}{\pi(1 - U_{кр}/U_0)}, \quad v(x, y) \approx 0.$$

Эти соотношения определяют зональный поток, усиливающийся на приполярной стороне и замедляющийся на приэкваториальной. В частности, при  $U_{кр} < U_0 < U_{кр} + \delta/\pi$  на приэкваториальной стороне возникает противотечение.

Все сказанное иллюстрирует рис. 21, на котором представлены линии тока для четырех значений скорости набегающего потока  $U_0$ , заключенной соответственно в промежутках:  $(0, U_{кр} - 2\delta/\pi)$ ,  $(U_{кр} - 2\delta/\pi, U_{кр})$ ,  $(U_{кр}, U_{кр} + \delta/\pi)$  и  $(U_{кр} + \delta/\pi, \infty)$ . При расчетах принималось  $U_{кр} = 1$  и  $\delta = 1$ .

Оценим теперь определяющие параметры для условий, близких к естественным, применительно к Антарктическому циркумполярному течению (АЦТ) в Тихоокеанском секторе Мирового океана, где оно на своем пути встречает почти зональное Южно-Тихоокеанское поднятие. Ширину модельного канала примем равной  $L^* = 1000$  км (примерное расстояние между Новозеландским плато и Антарктидой) с осью на  $60^\circ$  ю.ш. Принимая  $H^* = 4$  км и расход АЦТ равным  $2 \times 10^8$  м<sup>3</sup>/с, получим среднюю скорость  $U^* = 5$  см/с; при  $h^* = 1$  км это дает безразмерные параметры  $U_0 = 1$ ,  $U_{кр} \approx 23$  и  $2\delta/\pi \approx 401$ . Это означает, что выполнены условия (2.8.10), для которых над приполярным склоном хребта должны возникать замкнутые вихревые образования с зональным размером порядка  $\ell_1 = 0,425$ , что соответствует 425 км. Несмотря на известную условность выполненных оценок (параметры  $\delta$  и  $\delta_1$  оказываются гораздо больше единицы), они приводят к результатам, которые качественно согласуются с данными наблюдений [136].





Р и с. 21. Линии тока в канале для четырех значений скорости набегающего потока

а -  $0 < U_0 < U_{кр} - 26/\pi$ , б -  $U_{кр} - 26/\pi < U_0 < U_{кр}$ ,  
 в -  $U_{кр} < U_0 < U_{кр} + 6/\pi$  и г -  $U_{кр} + 6/\pi < U_0 < \infty$ .  
 При расчетах принималось:  $U_{кр} = 1$ ,  $\delta = 1$  и а -  
 $U_0 = 0,349$ , б -  $0,682$ , в -  $1,159$ , г -  $1,636$ .  
 Штриховая линия отмечает начало полубесконечного зонального хребта

В заключение отметим интересную работу Мак-Интайра [137], в которой решается линеаризованная задача на установление в зональном канале; такой подход позволяет оценить скорость стационарирования и одновременно устраняет трудности, связанные с формулировкой граничных условий на бесконечности.

## 2.9. Ветровые течения в замкнутом зональном канале

До сих пор при решении конкретных задач мы пренебрегали действием ветра и придонного трения. В этом параграфе рассматривается задача о стационарных ветровых течениях в зональном канале конечной длины  $L$  с периодическими условиями на концах. Область течения является по существу двухсвязной, так как ее можно рассматривать в виде замкнутого канала на сфере. Здесь мы имеем пример системы, в которой условия вверх по течению не определены. Математическая постановка задачи следующая [84, 85, 101].

В области  $0 < x < L$ ,  $0 < y < 1$  требуется решить уравнение потенциального вихря

$$J(p, \Delta p + \delta h + \delta y) + k \Delta p = \tau (\bar{T}_x^{(y)} - \bar{T}_y^{(x)}), \quad (2.9.1)$$

где  $\bar{T}$  и  $h$  — заданные достаточно гладкие периодические по  $x$  с периодом  $L$  функции. Зональные непроницаемые границы канала должны быть линиями тока, поэтому можно принять

$$p(x, 0) = Q, \quad (2.9.2)$$

$$p(x, 1) = 0, \quad (2.9.3)$$

где определяющая суммарный геострофический расход постоянная  $Q$  находится из дополнительного условия (2.1.7), примененного к одной из зональных границ канала, например

$$-k \int_0^L p_y dx = \tau \int_0^L \bar{T}^{(x)} dx, \quad y = 0. \quad (2.9.4)$$

Определим зональное осреднение по формуле  $\bar{f} = (1/L) \int_0^L f dx$ , применяя которую к (2.9.1) — (2.9.3) с учетом условий периодичности, получим [101]

$$\overline{[p_x (\Delta p + \delta h)]}_y + k \bar{p}_{yy} = -\tau \bar{T}_y^{(x)}, \quad (2.9.5)$$

$$\bar{p}(0) = Q, \quad (2.9.6)$$

$$\bar{p}(1) = 0. \quad (2.9.7)$$

Условие (2.9.4) переписется в виде

$$-k \bar{p}_y(0) = \tau \bar{T}^{(x)}(0). \quad (2.9.8)$$

Интегрируя (2.9.5) и учитывая (2.9.6) и (2.9.8), находим

$$\bar{p} = Q - \frac{1}{k} \left[ \tau \int_0^y \bar{T}^{(x)} d\eta + \int_0^y \overline{p_x (\Delta p + \delta h)} d\eta \right],$$

откуда с помощью (2.9.7) окончательно получаем уравнение

$$Q = \frac{1}{k} \left[ \tau \int_0^1 \bar{T}^{(x)} dy + \int_0^1 \overline{p_x (\Delta p + \delta h)} dy \right], \quad (2.9.9)$$

которое в дальнейшем будет служить для определения постоянной  $Q$ . Заметим, что в этом соотношении в силу граничного условия (2.9.2)  $p$  зависит от  $Q$ ; одновременно хорошо видно, что средний зональный перенос зависит от рельефа дна.

Представим возмущение рельефа дна в виде  $h(x, y) = \bar{h}(y) + \varepsilon \hat{h}(x, y)$ , где предполагается  $0 < \varepsilon \ll 1$  и  $\bar{\hat{h}} = 0$ ; тогда, очевидно,  $\overline{h(x, y)} = \bar{h}(y)$ . Используя прямой метод возмущений по малому параметру  $\varepsilon$ , полагаем  $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$ ,  $Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots$ . Подстановка этих разложений в (2.9.1) – (2.9.3) и (2.9.9) приведет к последовательности линейных задач

$$J(p_0, \Delta p_0 + \delta \bar{h}(y)) + k \Delta p_0 = \tau (T_x^{(y)} - T_y^{(x)}), \quad (2.9.10)$$

$$J(p_0, \Delta p_1 + \delta \hat{h}) + J(p_1, \Delta p_0 + \delta \bar{h}) + k \Delta p_1 = 0, \quad (2.9.11)$$

$$p_i(x, 0) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.9.12)$$

$$p_i(x, 1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.9.13)$$

$$Q_0 = \frac{1}{k} \left[ \tau \int_0^1 \bar{T}^{(x)} dy + \int_0^1 \overline{p_{0x} \Delta p_0} dy \right], \quad (2.9.14)$$

$$Q_1 = \frac{1}{k} \int_0^1 \left[ \overline{p_{1x} \Delta p_0} + \overline{p_{0xx} (\Delta p_1 + \delta \hat{h})} \right] dy, \quad (2.9.15)$$

$$Q_2 = \frac{1}{k} \int_0^1 \left[ \overline{p_{0xx} \Delta p_2} + \overline{p_{1xx} (\Delta p_1 + \delta \hat{h})} + \overline{p_{2xx} \Delta p_0} \right] dy. \quad (2.9.16)$$

Пусть для простоты  $T^{(x)} \equiv T(y)$  и  $T^{(y)} \equiv 0$  (чисто зональный ветер), тогда  $p_0 = p_0(y)$  и уравнение (2.9.10) принимает вид

$$k p_0 = -\tau T', \quad (2.9.17)$$

а (2.9.14) переходит в

$$Q_0 = \frac{\tau}{k} \int_0^1 T(y) dy. \quad (2.9.18)$$

Интегрируя (2.9.17) при условиях (2.9.12) и (2.9.13), получаем

$$p_0(y) = \frac{\tau}{k} \left[ \int_0^1 T(\eta) d\eta - \int_0^y T(\eta) d\eta \right]. \quad (2.9.19)$$

Нулевое приближение (2.9.19) определяет чисто зональное течение с суммарным расходом (2.9.18) и не зависит ни от бета-эффекта, ни от

рельефа дна. Так как  $\rho_0$  не зависит от  $x$ , соотношения (2.9.15) и (2.9.16) принимают вид  $Q_1 = 0$  и

$$Q_2 = \frac{1}{k} \int_0^1 \overline{p_{1x}(\Delta p_1 + \delta \hat{h})} dy, \quad (2.9.20)$$

где  $p_1$  удовлетворяет линейному уравнению (2.9.11)

$$-p_0'(\Delta p_1 + \delta \hat{h})_x + (p_0''' + \delta + \delta \hat{h}')p_{1x} + k\Delta p_1 = 0, \quad (2.9.21)$$

которое должно интегрироваться при граничных условиях (2.9.12) и (2.9.13)

$$p_1(x, 0) = p_1(x, 1) = 0. \quad (2.9.22)$$

Используя периодичность  $\hat{h}$  по  $x$ , примем

$$\hat{h} = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(y) \cos \omega_n x + \beta_n(y) \sin \omega_n x], \quad (2.9.23)$$

где  $\omega_n = 2\pi n / L$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причем автоматически выполнено условие  $h = 0$ . Представляя решение в виде аналогичного ряда

$$p_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(y) \cos \omega_n x + \beta_n(y) \sin \omega_n x], \quad (2.9.24)$$

из (2.9.21) находим

$$\begin{aligned} k(\alpha_n'' - \omega_n^2 \alpha_n) - \omega_n p_0'(\beta_n'' - \omega_n^2 \beta_n + \delta \beta_n) + (p_0''' + \delta + \delta \hat{h}')\omega_n \beta_n &= 0, \\ k(\beta_n'' - \omega_n^2 \beta_n) - \omega_n p_0'(\alpha_n'' - \omega_n^2 \alpha_n + \delta \alpha_n) - (p_0''' + \delta + \delta \hat{h}')\omega_n \alpha_n &= 0, \end{aligned} \quad (2.9.25)$$

с вытекающими из (2.9.22) граничными условиями

$$\alpha_n(0) = \alpha_n(1) = \beta_n(0) = \beta_n(1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9.26)$$

Подставляя (2.9.23) и (2.9.24) в (2.9.20), получим поправку к расходу во втором приближении

$$Q_2 = \frac{\delta}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int_0^1 (\alpha_n \beta_n - \beta_n \alpha_n) dy. \quad (2.9.27)$$

При  $T = \text{const}$ ,  $\hat{h} = \hat{h}(x)$  и  $h \equiv 0$  задача (2.9.25) - (2.9.26) решается в элементарных функциях, поскольку в этом случае  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  и  $p_0' = -\tau T/k$  суть постоянные величины. Решение имеет вид

$$\alpha_n(y) = \hat{\alpha}_n f(\gamma_n, \varepsilon_n; y) - \hat{\beta}_n g(\gamma_n, \varepsilon_n; y), \quad (2.9.28)$$

$$\beta_n(y) = \hat{\alpha}_n g(\gamma_n, \varepsilon_n; y) + \hat{\beta}_n f(\gamma_n, \varepsilon_n; y). \quad (2.9.29)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\delta}{\omega_n^2} \frac{\delta_n \beta_n + [1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)] \alpha_n}{\delta_n^2 + [1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)]^2}, \quad (2.9.30)$$

$$\hat{\beta}_n = \frac{\delta}{\omega_n^2} \frac{[1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)] \beta_n - \delta_n \alpha_n}{\delta_n^2 + [1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)]^2}, \quad (2.9.31)$$

$$f(\nu, \alpha; y) = 1 - \frac{\operatorname{ch} \nu(1-y) \cos \alpha y + \operatorname{ch} \nu y \cos \alpha (1-y)}{\operatorname{ch} \nu + \cos \alpha},$$

$$g(\nu, \alpha; y) = \frac{\operatorname{sh} \nu(1-y) \sin \alpha y + \operatorname{sh} \nu y \sin \alpha (1-y)}{\operatorname{ch} \nu + \cos \alpha}, \quad (2.9.32)$$

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \sqrt{\gamma_n - 1 + \sqrt{(\gamma_n - 1)^2 + \delta_n^2 \gamma_n^2}},$$

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \operatorname{sign} \beta \sqrt{\sqrt{(\gamma_n - 1)^2 + \delta_n^2 \gamma_n^2} + 1 - \gamma_n}, \quad (2.9.33)$$

$$\gamma_n = \frac{\tau \Gamma \beta k}{k^4 + \omega_n^2 \tau^2 \Gamma^2}, \quad \delta_n = \frac{k^2}{\omega_n \tau \Gamma}.$$

Выражение (2.9.27) с помощью (2.9.28) – (2.9.31) можно преобразовать к виду

$$Q_2 = -\frac{\sigma^2}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{\omega_n \{ \delta_n^2 + [1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)]^2 \}} \left\{ \delta_n \int_0^1 f_n dy - [1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)] \int_0^1 g_n dy \right\}$$

или, после выполнения квадратур

$$Q_2 = -\frac{\sigma^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n^2 + \beta_n^2) R_n}{\omega_n \{ \delta_n^2 + [1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)]^2 \}}, \quad (2.9.34)$$

$$\text{где } R_n = \delta_n \left[ \frac{1}{2} - \frac{\alpha_n \sin \alpha_n + \nu_n \operatorname{sh} \nu_n}{\omega_n^2 \sqrt{(\gamma_n - 1)^2 + \delta_n^2 \gamma_n^2} (\operatorname{ch} \nu_n + \cos \alpha_n)} \right] +$$

$$+ \frac{[1 - \gamma_n(1 + \delta_n^2)] (\nu_n \sin \alpha_n - \alpha_n \operatorname{sh} \nu_n)}{\omega_n^2 \sqrt{(\gamma_n - 1)^2 + \delta_n^2 \gamma_n^2} (\operatorname{ch} \nu_n + \cos \alpha_n)}.$$

Рассмотрим в качестве примера простой случай  $\hat{h} = -\cos \omega_1 x$ ; примем также  $\sigma = \tau = \Gamma = 1$ ,  $L = 2\pi$ . Тогда единственными определяющими параметрами являются  $k$  и  $\beta$ . Так как теперь  $\omega_1 = 1$ ,  $\delta_1 = k^2$  и  $\gamma_1 = \beta k / (1 + k^4)$ , решение принимает вид

$$p = \frac{1}{k} (1-y) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{k^4 + (1 - \beta k)^2}} [f_1 \cos(x + \theta) + g_1 \sin(x + \theta)], \quad (2.9.35)$$

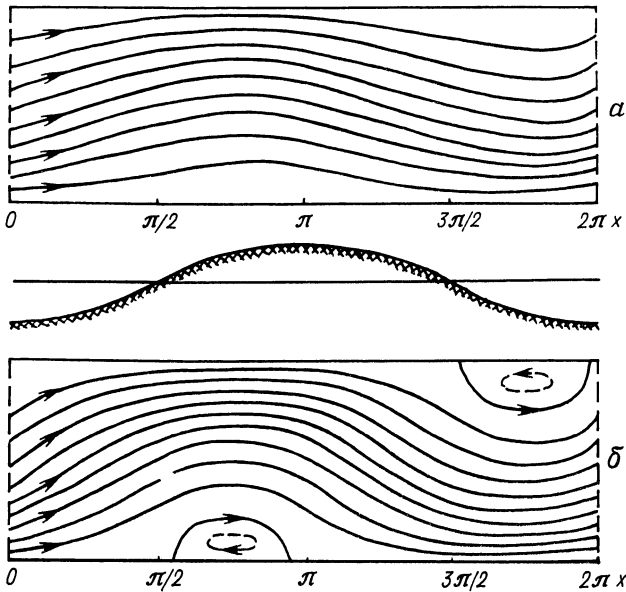
где сдвиг фазы  $\theta$  определяется соотношениями

$$\sin \theta = \frac{k^2}{\sqrt{k^4 + (1 - \beta k)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \beta k}{\sqrt{k^4 + (1 - \beta k)^2}}.$$

В пределе при  $\beta \rightarrow 0$  из (2.9.32) и (2.9.33) получаем  $\alpha_1 = 0$  и  $\nu_1 = 1$ , а (2.9.35) переходит в

$$p = \frac{1}{k} (1-y) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + k^4}} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch}(1-y) + \operatorname{ch} y}{1 + \operatorname{ch} 1} \right] \cos(x + x_0),$$

$$0 < x_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \sin x_0 = \frac{k^2}{\sqrt{1 + k^4}}.$$



Р и с. 22. Ветровые течения в замкнутом канале над неровным дном

$$a - k=1, \xi=2 \quad \text{и} \quad b - k=1, \xi=4$$

В этом случае возмущение поля течения описывается вторым слагаемым, которое в пределах периода по  $x$  представляет систему двух вихрей разных вращений, причем антициклон смещен на расстояние  $x_0$  вверх по течению от гребня хребта ( $x = \pi$ ). Таким образом, результирующий поток усиливается у правой стенки канала на наветренной стороне хребта и у левой - на подветренной стороне. При выполнении условия  $\xi > \sqrt{1+k^4}(1+ch1)/ksh1 = 2,164\sqrt{1+k^4}/k$  в потоке возникают замкнутые циркуляции возле стенок канала, приводящие к встречным течениям. На рис. 22 приведены картины линий тока при  $k=1$  в случаях  $\xi=2$  и  $\xi=4$ . Учет бета-эффекта при  $\delta=1$  слабо видоизменяет картину течения.

Следует заметить, что принимая при расчете указанные значения параметра  $\xi$ , мы тем самым нарушаем сделанное выше предположение о его малости. Оправданием может служить хорошо известный факт, что очень часто пределы применимости асимптотических методов оказываются шире тех, которые диктуются формальными критериями.

Формула (2.9.34) в рассмотренном случае дает

$$Q_2 = - \frac{1}{k [k^4 + (1 - \delta k)^2]} \left\{ k^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 + \nu_1 \operatorname{sh} \nu_1}{\sqrt{(\gamma_1 - 1)^2 + \delta_1^2 \gamma_1^2} (ch \nu_1 + \cos \alpha_1)} \right] + \right.$$

+  $\frac{(1-\delta k)(\gamma_1 s_1 \eta \alpha_1 - \alpha_1 s_1 h \alpha_1)}{\sqrt{(\gamma_1-1)^2 + \delta_1^2 \gamma_1^2} (ch \gamma_1 + \cos \alpha_1)}$ , откуда, в частности, при  $\delta \rightarrow 0$  следует

$$Q_2 = -\frac{k}{2(1+k^4)} \left( \frac{1}{2} - \frac{sh 1}{1+ch 1} \right) < 0, \text{ т.е. под действием рельефа дна имеется}$$

результатирующее торможение потока, которое максимально при  $k = 1/\sqrt[4]{3}$ .

В заключение отметим, что все приведенные выше формулы остаются справедливыми и при  $\bar{h}'(y) = \text{const}$ , следует лишь везде параметр  $\delta$  заменить на  $\delta + \delta \bar{h}'$ .

## 2.10. Бесконечный канал переменного сечения

Выше мы рассматривали задачи о потоках в каналах постоянной ширины с прямолинейными боковыми стенками. Здесь предметом изучения будут стационарные инерционные течения в бесконечном канале, боковые границы которого  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  могут быть криволинейными. Пренебрегая действием ветра, придонного трения и рельефа дна ( $\tau = k = \delta = 0$ ), предполагаем линейное распределение потенциального вихря по линиям тока,  $F(p) \equiv \Delta p + \delta y = C p + D$ . Вверх по течению при  $x \rightarrow -\infty$  возможные распределения давления  $P(y)$  в набегающем восточном потоке приведены в § 2.3; их удобно условно разделить на три типа - "тригонометрические" ( $C < 0$ ), "параболические" ( $C = 0$ ) и "гиперболические" ( $C > 0$ ). Предположение о том, что вверх по течению известно распределение потенциального вихря, составляет суть так называемой гипотезы Лонга [131, 142, 162].

Представляя решение задачи в виде  $p = P(y) + \psi(x, y)$  для возмущения давления получаем уравнение (см. § 2.3)

$$\Delta \psi - C \psi = 0. \quad (2.10.1)$$

Пусть  $y = S_{0,1}(x)$  соответственно представляют уравнения боковых границ канала, причем  $S_{0,1}(-\infty) = 0, 1$  и  $S_{0,1}(\infty) = \ell_{0,1}$ . Тогда граничные условия запишутся в виде

$$\psi(x, S_0(x)) = P(0) - P(S_0(x)), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.10.2)$$

$$\psi(x, S_1(x)) = P(1) - P(S_1(x)), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.10.3)$$

$$\psi(-\infty, y) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad (2.10.4)$$

$$\psi(\infty, y) \text{ ограничено, } \ell_0 < y < \ell_1. \quad (2.10.5)$$

Конкретный вид решения зависит от определяющей тип профиля постоянной  $C$  и от формы боковых границ (функций  $S_{0,1}(x)$ ). Мы рассмотрим две задачи. В первой из них форма боковых границ слабо отличается от прямолинейной, а во второй она меняется скачком конечной величины в сечении  $x=0$ , оставаясь строго прямолинейной при  $x \neq 0$ .

**Задача Лонга.** Пусть выполнены условия  $|S_0(x)| < 1$  и  $|1 - S_1(x)| < 1$ ; тогда (2.10.2), (2.10.3) и (2.10.5) можно линеаризовать

вать, осуществив снос граничных условий на невозмущенные прямолинейные границы  $y=0$  и  $y=1$  (метод Лонга [130]):

$$\psi(x,0) = -P'(0)S_0(x) = U(0)S_0(x), \quad (2.10.6)$$

$$\psi(x,1) = -P'(1)(S_1(x)-1) = U(1)(S_1(x)-1), \quad (2.10.7)$$

$\psi(\infty, y)$  ограничено,  $0 < y < 1$ .

Решение ищем в виде  $\psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) Y_n(y)$ ,  $Y_n = \sqrt{2} \sin n\pi y$ , где, очевидно,

$$\psi_n(x) = \int_0^1 \psi(x,y) Y_n(y) dy. \quad (2.10.8)$$

Уравнения для коэффициентов  $\psi_n$  находятся по методу Гринберга [9]. Умножая (2.10.1) на  $Y_n$  и интегрируя результат по  $y$  в пределах от 0 до 1, с учетом (2.10.6) - (2.10.8) получим

$$\psi_n'' - (C + \lambda_n)\psi_n = \sqrt{2\lambda_n} [(-1)^n U(1)(S_1(x)-1) - U(0)S_0(x)], \quad (2.10.9)$$

$$\psi_n(-\infty) = 0, \quad \psi_n(\infty) \text{ ограничено,} \quad \lambda_n = (n\pi)^2.$$

Уравнение (2.10.9) совершенно аналогично уравнению (2.8.4) и должно интегрироваться при тех же граничных условиях. Используя (2.8.5) и (2.8.6), после несложных преобразований окончательно можно записать

$$\psi(x,y) = U(0) \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x-\xi, y; 0) S_0(\xi) d\xi + U(1) \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x-\xi, y; 1) [1-S_1(\xi)] d\xi, \quad (2.10.10)$$

где функция  $G(x,y;\eta)$  определяется по формуле (2.8.8) в виде ряда, который суммируется в частном случае  $C=0$  [8]:

$$G(x,y;\eta) = \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi(y+\eta)}{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi(y-\eta)}, \quad C=0.$$

В общем случае решение (2.10.10) включает  $N = [\sqrt{-C}/\pi]$  волновых мод, условие появления которых имеет вид  $C < -\pi^2$ .

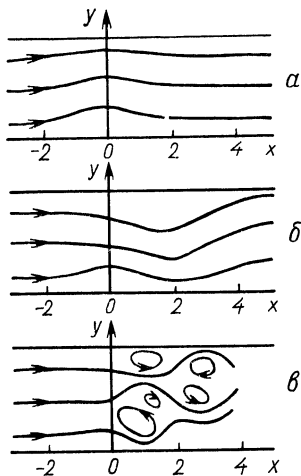
Рассмотрим в качестве примера задачу о восточном кинематически однородном невозмущенном потоке  $P(y) = -U_0 y$  в канале, на правой стенке которого имеется небольшой локализованный выступ. Приведенный профиль относится к типу тригонометрических, причем  $C = -\delta/U_0 < 0$ ; в нашем случае  $S_1(x) \equiv 1$  и  $U(0) = U(1) = U_0 > 0$ . Результирующее поле давления имеет вид

$$p(x,y) = U_0 \left[ -y + \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x-\xi, y; 0) S_0(\xi) d\xi \right], \quad (2.10.11)$$

где

$$G_n(x,y;0) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n g_n(x) \sin n\pi y \quad (2.10.12)$$





Р и с. 23. Линии тока в задаче Лонга в случае дельтаобразного возмущения граници (по Дразину и Муру [887])

$$a - \beta/U_0 = \pi^2/2, \quad б - 2\pi^2 \quad \text{и} \quad в - 12\pi^2$$

и  $g_n(x)$  определяются по формулам (2.8.7). Ряд (2.10.12) сходится достаточно медленно, поэтому для расчетов его удобно преобразовать к другой форме. Так как для достаточно больших  $n$  имеем  $g_n(x) =$

$$= \frac{e^{-\delta n|x|}}{2\delta n} \approx \frac{e^{-n\pi|x|}}{2\pi n} \quad \text{и}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi|x|} \sin n\pi y = \frac{\sin \pi y}{2(\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y)},$$

вместо (2.10.12) можно записать  $G_n(x, y; 0) = \frac{\sin \pi y}{2(\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y)} +$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [2n\pi g_n(x) - e^{-n\pi|x|}] \sin n\pi y,$$

где ряд уже сходится достаточно быстро.

Если  $S_0(x) = \alpha \delta(x)$ , где  $\alpha$  - амплитудный множитель, а  $\delta$  - дельта-функция Дирака, из (2.10.11) следует  $p(x, y) = U_0 [-y + \alpha G_n(x, y; 0)]$ .

На рис. 23 показаны картины линий тока для этого течения при  $\alpha = \pi$  и  $\beta/U_0 = \pi^2/2, 2\pi^2$  и  $12\pi^2$ , когда число возбужденных волновых мод соответственно равно 0, 1 и 3 [887].

Пусть теперь правая стенка канала имеет выступ в форме

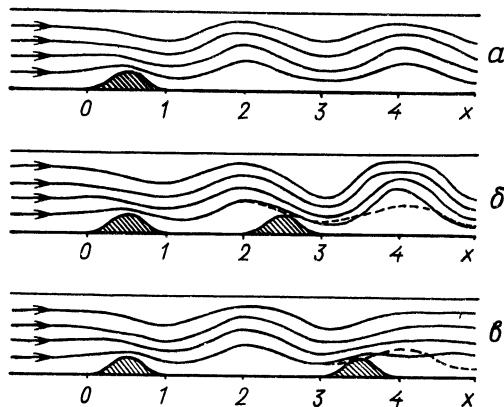
$$S_0(x) = \alpha \begin{cases} \sin^2 \pi x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0 \quad x > 1. \end{cases} \quad (2.10.13)$$

Интегралы в (2.10.11) легко вычисляются. При  $U_0 = 1, \beta = (1,4\pi)^2$  (одна волновая мода) и  $\alpha = 0,2$  картина линий тока представлена на рис. 24, а; хорошо видно появление подветренных волн с длиной  $2\pi/\omega_1 = 2,04\lambda$ .

Усложнение возмущения границы за счет добавления новых выступов может значительно видоизменить амплитуду подветренных волн, приводя к их усилению или ослаблению. Рассмотрим схематически это явление, полагая  $S_0(x) = \alpha \delta(x) + \alpha \delta(x - x_0), x_0 > 0$ . Решение (2.10.11) принимает вид

$$p(x, y) = U_0 \{-y + \alpha [G_n(x, y, 0) + G_n(x - x_0, y, 0)]\}.$$

Предположим, что в потоке возбуждается только одна волновая мода, т.е.  $\pi^2 < \beta/U_0 < 4\pi^2$ . Согласно (2.10.12) соответствующая компонента решения пропорциональна  $g_1(x) + g_1(x - x_0)$ ; при  $x > x_0$  в соответствии с (2.8.7) эта сумма, в свою очередь, пропорциональна  $\sin \omega_1 x + \sin \omega_1(x - x_0) =$



Р и с. 24. Интерференция подветренных волн (по Иноуэ [115])  
 а - один полуостров в канале, б - два полуострова в случае усиления и в - ослабления волн вниз по течению

$= 2 \sin \omega_1 (x - x_0/2) \cos \frac{\omega_1 x_0}{2}$ . Отсюда следует, что при  $x = (2k+1) \pi / \omega_1 = (2k+1) \sqrt{(\delta/\pi^2 U_0) - 1}$ ,  $k \geq 0$ , происходит полное гашение подветренной волны, а при  $x = 2k \pi / \omega_1 = 2k / \sqrt{(\delta/\pi^2 U_0) - 1}$ ,  $k \geq 0$ , наоборот, имеет место усиление ее амплитуды вдвое. Это явление проиллюстрировано на рис. 24, б, в, где построены линии тока для случая двух одинаковых выступов вида (2.10.13), максимальные амплитуды которых расположены соответственно в точках  $x_0^{(1)} = 1/2$  и  $x_0^{(2)} = 1/2 + x_0$ . По приведенным выше оценкам при  $x_0 = 2\pi/\omega_1 = 2,042$  должно происходить максимальное усиление подветренных волн и их полное гашение при  $x_0 = 3\pi/\omega_1 = 3,063$ . Практически это мы и наблюдаем на рис. 24, б, в, построенных соответственно для  $x_0 = 2$  и  $x_0 = 3$ ; пунктиром показана линия тока, отвечающая случаю одного выступа на стенке канала (ср. с рис. 24, а). Таким образом, амплитуда подветренной волны становится максимальной, когда вершина второго выступа расположена возле желоба подветренной волны  $x_0 = 2k\pi/\omega_1$ , создаваемой первым выступом [115].

Влияние возмущений границы конечной амплитуды численно исследовалось в [115]. Среди аналитических подходов к решению подобного типа задач отметим инверсионный метод, состоящий в подборе подходящего распределения особенностей типа вихрей и источников при  $y=0$  с целью получения желаемой формы препятствия [129].

Приведенные простые примеры показывают, что причиной меандрирования течений в зональных каналах могут быть не только возмущения рельефа дна (см. § 2.8), но и форма боковых границ, причем вниз по течению суммарный эффект определяется характером береговой черты на всем пути следования потока до рассматриваемого места.

Особенно ярко влияние формы границы видно в следующем примере.

Канал со скачкообразным изменением сечения. Вернемся к общей постановке задачи (2.10.1) - (2.10.5) и рассмотрим канал, ширина которого меняется скачком от 1 до  $\ell > 1$  в сечении  $x=0$  (в первом приближении такую схематизацию можно, например, принять для района Куроиси к югу от Японии). В этом случае  $S_0(x) = 0$  и  $S_1(x) = 1 + \theta(x)(\ell - 1)$ . Граничные условия переписуются в виде

$$\psi(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.10.14)$$

$$\psi(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.10.15)$$

$$\psi(x, \ell) = P(1) - P(\ell), \quad 0 < x < \infty, \quad (2.10.16)$$

$$\psi(0, y) = P(1) - P(y), \quad 1 < y < \ell, \quad (2.10.17)$$

$$\psi(-\infty, y) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad (2.10.18)$$

$$\psi(\infty, y) \quad \text{ограничено, } 0 < y < \ell. \quad (2.10.19)$$

Математическая формулировка задачи аналогична [128], где рассматривался воздушный поток над уступом; воспользуемся таким же методом решения, как и в цитированной работе. Помимо  $Y_n(y)$  введем также функции  $\tilde{Y}_m(y) = \sqrt{2/\ell} \sin(m\pi y/\ell)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , образующие полную ортонормированную систему на отрезке  $0 < y < \ell$ . Положим

$$Y(y) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{-C} y}{\sin \sqrt{-C} \ell}, & C < 0, \quad \sqrt{-C} \ell \neq k\pi, \\ y/\ell, & C = 0, \\ \frac{\text{sh} \sqrt{C} y}{\text{sh} \sqrt{C} \ell}, & C > 0. \end{cases}$$

Мы исключаем из рассмотрения случаи  $\sqrt{-C} \ell = k\pi$  при целых  $k$ , для которых не существует исчезающих вверх по течению решений. Обозначим

$$N = \begin{cases} \left[ \frac{\sqrt{-C}}{\pi} \right], & C < 0, \\ 0, & C \geq 0; \end{cases} \quad M = \begin{cases} \left[ \frac{\ell \sqrt{-C}}{\pi} \right], & C < 0, \\ 0, & C > 0; \end{cases} \quad (2.10.20)$$

$\tilde{\omega}_m = \sqrt{-C - (m\pi/\ell)^2}$ ,  $m \leq M$ ;  $\delta_m = \sqrt{C + (m\pi/\ell)^2}$ ,  $m < M+1$ . Очевидно, всегда  $M \geq N$ , так как по предположению  $\ell \geq 1$ . Удовлетворяющие условиям (2.10.14) - (2.10.16), (2.10.18) и (2.10.19) решения уравнения (2.10.1) имеют вид

$$\psi(x, y) = \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n e^{\delta_n x} Y_n(y), \quad x < 0; \quad (2.10.21)$$

$$\psi(x, y) = \tilde{\psi}(x, y) \equiv [P(1) - P(\ell)] Y(y) + \sum_{m=1}^M (B_m \cos \tilde{\omega}_m x +$$
(2.10.22)

$$+ C_m \sin \tilde{\omega}_m x) \tilde{Y}_m(y) + \sum_{m=M+1}^{\infty} B_m e^{-\tilde{\delta}_m x} \tilde{Y}_m(y), \quad x > 0,$$

где произвольные постоянные  $A_n$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  должны определяться из условия непрерывного сопряжения  $\psi$  и  $\psi_x$  в сечении  $x=0$ ,  $0 < y < 1$ , а также из граничного условия (2.10.17). Эти требования приводят к соотношениям

$$\tilde{\psi}(0, y) = \begin{cases} \psi(0, y), & 0 < y < 1, \\ P(1) - P(y), & 1 < y < \ell, \end{cases} \quad (2.10.23)$$

$$\tilde{\psi}_x(0, y) = \psi_x(0, y), \quad 0 < y < 1. \quad (2.10.24)$$

Умножая (2.10.23) на  $\tilde{Y}_k$  и затем интегрируя результат по  $y$  на отрезке  $(0, \ell)$ , с учетом (2.10.21) и (2.10.22) получим уравнения

$$B_k = \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n Q_{kn} + R_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.10.25)$$

где  $Q_{kn} = \int_0^1 Y_n \tilde{Y}_k dy$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $n = N+1, \dots$ ,

$$R_k = \int_1^{\ell} [P(1) - P(y)] \tilde{Y}_k dy - [P(1) - P(\ell)] \int_0^{\ell} Y \tilde{Y}_k dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поступая аналогичным образом с (2.10.24), но уже по отношению к функциям  $Y_s$  на отрезке  $(0, 1)$ , получим

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\omega}_m C_m Q_{ms} - \sum_{m=M+1}^{\infty} \tilde{\delta}_m B_m Q_{ms} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n A_n \delta_{ns}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.10.26)$$

С помощью (2.10.25) можно исключить  $B_k$ , подставляя которые в (2.10.26) найдем

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\omega}_m Q_{ms} C_m - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \sum_{m=M+1}^{\infty} \tilde{\delta}_m Q_{ms} Q_{mn} + \delta_n \delta_{ns} \right) A_n = \sum_{m=M+1}^{\infty} \tilde{\delta}_m Q_{ms} R_m, \quad (2.10.27)$$

$$s = 1, 2, \dots$$

Бесконечную систему уравнений (2.10.27) решаем методом усечения, полагая  $A_n \equiv 0$  для всех  $n > L > N+1$ . Общее число неизвестных при этом равно  $K = L + M - N$  и складывается из  $M$  коэффициентов  $C_1, C_2, \dots, C_M$  и  $L - M$  коэффициентов  $A_{N+1}, A_{N+2}, \dots, A_L$ . Следовательно, для замыкания из системы (2.10.27) необходимо удержать  $K$  первых уравнений,  $s = 1, 2, \dots, K$ , которые затем решаются каким-либо стандартным методом. Когда коэффициенты  $C_m$  и  $A_n$  найдены,  $B_k$  определяются по формулам (2.10.25).

Величины  $Q_{kn}$  зависят только от геометрии задачи и имеют вид

$$Q_{kn} = \begin{cases} \frac{2n(-1)^n \operatorname{sh} k\pi/\ell}{\pi\sqrt{\ell} [(k/\ell)^2 - n^2]}, & k/\ell \neq n, \\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}, & \frac{k}{\ell} = n. \end{cases}$$

Коэффициенты  $R_k$  зависят от профиля невозмущенного потока, определяемого функцией  $P(y)$ , которая удовлетворяет уравнению  $P''(y) + \delta y = CP + D$  (см. § 2.3). Всегда можно принять  $P(0) = 0$ , поэтому расход течения равен  $Q = -P(1)$ . При  $C \neq -(n\pi)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , возможные профили невозмущенного потока можно представить в виде  $P(y) = -Q \operatorname{sh}\sqrt{C}y / \operatorname{sh}\sqrt{C} + \int_0^y G(y, \eta, c)(D - \delta\eta) d\eta$ , где введена функция Грина

$$G = -\frac{1}{\sqrt{C} \operatorname{sh}\sqrt{C}} \begin{cases} \operatorname{sh}[\sqrt{C}(1-\eta)] \operatorname{sh}[\sqrt{C}y], & 0 < y < \eta, \\ \operatorname{sh}[\sqrt{C}\eta] \operatorname{sh}[\sqrt{C}(1-y)], & \eta < y < 1. \end{cases}$$

В "резонансном" случае  $C = -(n\pi)^2$  расход не может быть задан произвольно и определяется формулой  $Q = \{D[(-1)^n - 1] + \delta\} / (n\pi)^2$ , а само решение имеет вид  $P(y) = \alpha \sin n\pi y - \frac{D}{(n\pi)^2} \cos n\pi y + \frac{D - \delta y}{(n\pi)^2}$ ,

где  $\alpha$  — новая произвольная постоянная. При  $C \neq -(n\pi)^2$  удобно ввести следующие стандартные функции:

$$P_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{C} \left( y - \frac{\sin\sqrt{C}y}{\sin\sqrt{C}} \right), & C < 0, \\ \frac{1}{6} y(1-y^2), & C = 0, \\ \frac{1}{C} \left( y - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{C}y)}{\operatorname{sh}\sqrt{C}} \right), & C > 0, \end{cases}$$

$$U_0(y) = -P_0'(y), \quad P_1(y) = CP_0(y) - y, \quad P_2(y) = -P_0(y) - P_0(1-y),$$

$$U_1(y) = CU_0(y) + 1, \quad U_2(y) = U_0(1-y) - U_0(y).$$

Тогда давление и скорость в невозмущенном потоке определяются по формулам

$$P(y) = \delta P_0(y) + QP_1(y) + DP_2(y),$$

$$U(y) = \delta U_0(y) + QU_1(y) + DU_2(y).$$

Для удовлетворяющих условию  $U(y) = U(1-y)$ ,  $0 < y < 1$ , симметричных профилей имеем  $D = 1/2(\delta + QC)$ . При  $C = -(n\pi)^2$

$$U(y) = -\alpha n\pi \cos n\pi y - \frac{D}{n\pi} \sin n\pi y + \frac{\delta}{(n\pi)^2},$$

причем для симметричных профилей  $D = (n\pi)^2 \operatorname{tg}(n\pi/2)$ .

Коэффициенты  $R_k$  имеют вид  $R_k = \beta E_k^{(0)} + Q E_k^{(1)} + D_k^{(2)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  
 где  $E_k^{(0)} = \beta_k [(\ell/k\pi)^2 \sin(k\pi/\ell) - \gamma_k + (-1)^k (\ell/k\pi)(\ell-1)]$ ,

$$E_k^{(1)} = -\beta_k [\sin(k\pi/\ell) + C\gamma_k],$$

$$E_k^{(2)} = \beta_k [\gamma_k - U(0) \sin(k\pi/\ell)],$$

$$\beta_k = \sqrt{2/\ell} / [C + (k\pi/\ell)^2],$$

$$\gamma_k = U_0(1) \sin(k\pi/\ell) + (\ell/k\pi) [\cos(k\pi/\ell) - (-1)^k].$$

Отметим некоторые общие свойства построенного решения. Наибольший интерес представляет поведение  $p(x, y)$  вниз по течению в расширенной части канала. При  $x \rightarrow \infty$  с помощью (2.10.22) асимптотически имеем

$$p(x, y) \approx p_\infty(x, y) \equiv P(y) + [P(1) - P(\ell)]Y(y) + \sum_{m=1}^M (B_m \cos \tilde{\omega}_m x + C_m \sin \tilde{\omega}_m x) \tilde{Y}_m(y). \quad (2.10.28)$$

Меандрирование и вихреобразование определяется волновыми модами последней суммы в (2.10.28). Согласно (2.10.20) условие появления этих слагаемых имеет вид

$$C \leq -(\pi/\ell)^2. \quad (2.10.29)$$

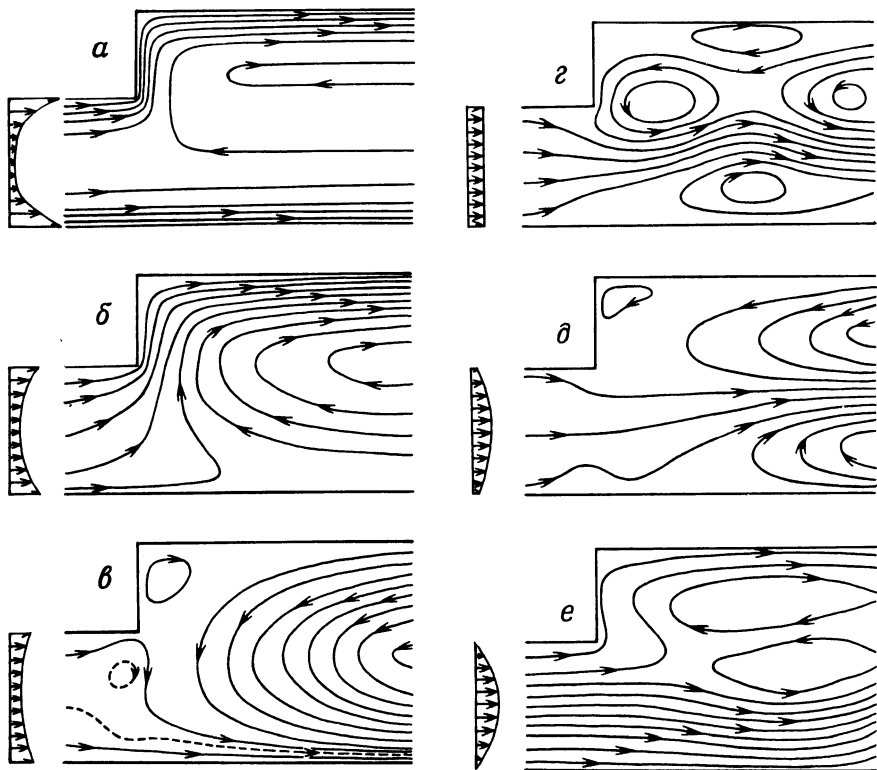
Таким образом, для появления волновых мод необходимо, чтобы профиль принадлежал к тригонометрическому типу. С другой стороны, достаточным условием отсутствия волновых мод является принадлежность профиля к параболическому или гиперболическому типу. Если волновые моды отсутствуют, вместо (2.10.28) имеем для больших  $x$

$$p(x, y) \approx \bar{p}_\infty(y) = P(y) + [P(1) - P(\ell)]Y(y),$$

т.е. чисто зональное течение. Может оказаться, что в некоторой части канала  $\bar{p}'_\infty(y) > 0$ ; это соответствует появлению возвратных течений. В более общем случае (2.10.28) при  $M \geq 1$  картина будет осложняться наличием отдельных вихрей, образующих квазипериодическую структуру.

Различные варианты потоков, рассчитанные по приведенным выше формулам, проиллюстрированы на рис. 25 для случая  $Q/\beta = 1/\pi^2$  и  $\ell = 1,7$  при различных значениях  $C/\pi^2/\sqrt{29}$ . На всех рисунках слева показан соответствующий профиль скорости невозмущенного потока.

На рис. 25, а, б представлены гиперболический и параболический случаи с вогнутым профилем скорости невозмущенного потока; здесь  $M = N = 0$ , волновые моды отсутствуют. В широкой части канала видны возвратные течения, причем в первом случае они захватывают лишь центральную часть, а во втором - нижнюю половину области.



Р и с. 25. Вычисленные картины линий тока при заданном расходе  $Q/\delta = 1/\pi^2$ ,  $e = 1,7$  и различных формах симметричного профиля невозмущенного потока  
 а -  $C/\pi^2 = 4$ ; б - 0; в -  $-0,5$ ; г -  $-1$ ;  
 д -  $-1,4$ ; е -  $-1,8$

На рис. 25, в-е изображены картины течений для тригонометрических профилей, меняющихся от вогнутых до выпуклых. В этих случаях соответственно  $N = 0$ ,  $M = 1$  (в),  $N = M = 1$  (г) и  $N = 1$ ,  $M = 2$  (д, е). Появление волновых мод делает поле течений более сложным и приводит к возникновению вихревых образований.

Условию появления волновых мод (2.10.29) можно придать иной вид. Из уравнения  $P''(y) + \delta y = CP + D$  дифференцированием находим тождество  $-U''(y) + \delta = -C U(y)$  с помощью которого вместо (2.10.29) получаем

$$(U'' - \delta)/U \leq (\pi/e)^2. \quad (2.10.30)$$

Это неравенство можно интерпретировать как условие неустойчивости [27], благодаря которой возникает процесс меандрирования и вихреобразо-

вания. Умножая (2.10.30) на  $U(\psi)$  и интегрируя результат по ширине канала вверх по течению, получаем "смягченное" условие появления волновых мод

$$U'(1) - U'(0) \leq \pi^2 Q / \ell^2 + \nu. \quad (2.10.31)$$

Условия (2.10.30) и (2.10.31) эквивалентны для бессдвиговых течений, для которых они всегда выполнены.

Рассмотренные примеры показывают, что любые попытки прогнозирования поведения течений типа Гольфстрим, Куроиси или АЦТ должны основываться на изучении не только изменения их расхода  $Q$ , но (что, по-видимому, более важно) также на анализе поперечной структуры вверх по потоку от рассматриваемого района.

## 2.11. Тонкие инерционные струи

До сих пор рассматривались примеры, когда набегающий поток слабо менялся в поперечном направлении или просто принимался кинематически однородным. В этом параграфе мы изложим простую модель стационарной реакции тонкой инерционной струи на произвольное возмущение рельефа дна на бета-плоскости, приняв за основу закон сохранения потенциально-го вихря (2.3.1) в виде

$$\Delta p + q = F(p), \quad (2.11.1)$$

где введена планетарно-топографическая функция  $q = \beta h + \beta \psi$ .

Пусть параметрические уравнения некоторой линии тока  $p = p^* = \text{const}$  в горизонтальной плоскости имеют вид  $X = X(s)$ ,  $Y = Y(s)$ , где  $s$  — длина дуги, отсчитываемая от фиксированной точки  $s=0$  в направлении движения. Направляющие косинусы  $\ell = \dot{X}$  и  $m = \dot{Y}$  удовлетворяют очевидному условию  $\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = 1$ . Введем еще одну координату  $t$ , которая отсчитывается по нормали вправо от линии тока. Тогда каждой точке  $(x, y)$  в некоторой окрестности этой линии можно поставить в соответствие пару параметров  $(t, s)$ , связанных с координатами  $x, y$  соотношениями (рис. 26).

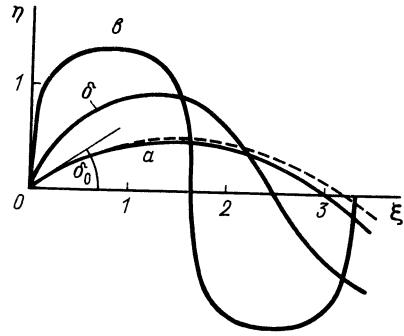
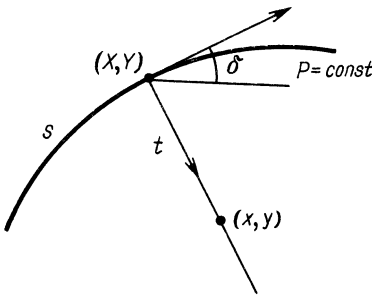
$$x = X(s) + t \dot{Y}(s), \quad y = Y(s) - t \dot{X}(s). \quad (2.11.2)$$

Если ввести кривизну линии тока  $\kappa(s) = \dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}$ , то при  $|t| \leq R(s) = 1/|\kappa(s)|$  заведомо гарантируется взаимная однозначность преобразования (2.11.2). Мы будем далее предполагать, что ширина рассматриваемой струи гораздо меньше ее радиуса кривизны  $R$ .

Как известно [54], в ортогональных криволинейных координатах ладасиан записывается в виде

$$\Delta p = \frac{1}{H^{(\xi)} H^{(\eta)}} \left[ \left( \frac{H^{(\xi)}}{H^{(\xi)}} p_t \right)_t + \left( \frac{H^{(\eta)}}{H^{(\eta)}} p_s \right)_s \right], \quad (2.11.3)$$





Р и с. 26. К выводу соотношений (2.II.2)

Р и с. 27. Форма инерционной струи при различных значениях начального угла  $\delta_0$   
 а -  $\delta_0 = 30^\circ$ , б -  $60^\circ$ , в -  $90^\circ$

где коэффициенты Ламе  $H^{(t)} = \sqrt{(x_t)^2 + (y_t)^2}$  и  $H^{(s)} = \sqrt{(x_s)^2 + (y_s)^2}$  в нашем случае легко вычисляются:  $H^{(t)} = 1$ ,  $H^{(s)} = 1 + t \varkappa(s)$ . На рассматриваемой линии тока по определению  $t = 0$ ,  $p_s = p_{ss} = 0$ , поэтому с учетом (2.II.3) соотношение (2.II.1) переходит в

$$V_t + \varkappa V + q = F(p^*), \quad (2.II.4)$$

где введена геострофическая скорость  $V = p_t$ . При заданных скорости  $V$ , ее поперечном сдвиге  $V_t$  и величине потенциального вихря  $F(p^*)$  соотношение (2.II.4) определяет кривизну линии тока, вид которой находится путем интегрирования системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \ell, \quad (2.II.5)$$

$$\dot{Y} = m, \quad (2.II.6)$$

$$\dot{\ell} = -\varkappa m, \quad (2.II.7)$$

$$m = \varkappa \ell \quad (2.II.8)$$

при начальных данных

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \ell = \ell_0, \quad m = m_0, \quad s = 0, \quad (2.II.9)$$

причем, очевидно,  $\ell_0^2 + m_0^2 = 1$ . Уравнения (2.II.7) и (2.II.8) получены путем дифференцирования по  $s$  тождества  $\ell = \cos \delta$  и  $m = \sin \delta$ , где  $\delta$  - угол касательной с осью  $Ox$ , причем  $\varkappa = d\delta/ds$ .

В общем случае распределение  $V$  и  $V_t$  вдоль линии тока неизвестно, и мы должны прибегнуть к дополнительным предположениям. Пусть уравнение  $p = p^*$  определяет ось сильного инерционного течения, на которой  $V_t \approx 0$  и  $V \approx U_0 = \text{const}$ . Примем также, что в точке  $(x_0, y_0)$  задана кривизна этой оси. Тогда из (2.II.4) следует

$$\varkappa = \frac{1}{U_0} (F_0 - g), \quad (2.II.10)$$

где  $F_0 = \varkappa_0 U_0 + g_0$ . Теперь система (2.II.5) - (2.II.8) замкнута, однако ее решение при произвольной топографии дна может быть найдено только численно. Мы ограничимся простейшим модельным случаем, когда удастся построить аналитическое решение задачи. Примем для простоты  $\varkappa_0 = 0$  и аппроксимируем рельеф дна в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  линейной функцией вида (2.2.3I)  $h = h_0 + \gamma_x(x - x_0) + \gamma_y(y - y_0)$ . Тогда вместо (2.II.10) имеем  $\varkappa = -[\delta\gamma_x(x - x_0) + (\delta + \delta)\gamma_y(y - y_0)]/U_0$ . Перейдем к новым координатам  $\xi, \eta$  по формулам  $x - x_0 = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$ ,  $y - y_0 = -\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между  $\nabla q$  и осью  $Ox$  (см. § 2.2). В новых переменных  $\varkappa = -\hat{\delta}\eta/U_0$ , где  $\hat{\delta} = \sqrt{(\delta\gamma_x)^2 + (\delta + \delta\gamma_y)^2}$ . Представляя искомым линию тока в виде  $\eta = \eta\xi$ , получаем для ее определения обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta''(1 + \eta'^2)^{-3/2} + (\hat{\delta}/U_0)\eta = 0, \quad (2.II.11)$$

решение которого выражается через эллиптические функции. Пропорциональность между кривизной и перемещением линии тока указывает на ее колебательный характер; в самом деле, при  $\eta > 0$  траектория струи имеет отрицательную (антициклоническую) кривизну, а при  $\eta < 0$  - положительную (циклоническую) кривизну.

Присоединим к уравнению (2.II.11) начальные условия

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = \text{tg } \delta_0,$$

где для простоты примем  $|\delta_0| \leq \pi/2$ . С учетом начальных данных из (2.II.11) следует интеграл

$$2 \left[ \cos \delta_0 - (1 + \eta'^2)^{-1/2} \right] + (\hat{\delta}/U_0)\eta^2 = 0, \quad (2.II.12)$$

откуда легко определяется амплитуда волны  $\alpha = \max |\eta|$  в зависимости от начального направления  $\delta_0$ . Полагая  $\eta' = 0$ , находим  $\alpha = 2 \sin(\delta_0/2) \sqrt{U_0/\hat{\delta}}$ . Из (2.II.12) получаем в пределах первой четверти волны

$$\xi = \text{sign } \delta_0 \int_0^\eta \frac{1 - \hat{\delta}(\alpha^2 - \eta^2)/2U_0}{\sqrt{1 - [\hat{\delta}(\alpha^2 - \eta^2)/2U_0]^2}} d\eta, \quad 0 < \xi < \lambda/4.$$

Замена переменных

$$\eta = \alpha \text{sign } \delta_0 \frac{\sqrt{1 - k^2} \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \sin \frac{\delta_0}{2} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\hat{\delta}}{U_0}} \quad (2.II.13)$$

приводит этот интеграл к виду

$$\xi = \sqrt{\frac{U_0}{\delta}} \int_0^{\varphi} \frac{1 - 2k^2 + k^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi = \sqrt{\frac{U_0}{\delta}} \left[ 2E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - \frac{k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right], \quad (2.II.14)$$

где  $F(\varphi, k)$  и  $E(\varphi, k)$  суть эллиптические интегралы первого и второго рода [8]. Отсюда для длины волны получаем выражение

$$\lambda = 4\sqrt{\frac{U_0}{\delta}} \left[ 2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right]. \quad (2.II.15)$$

Для малых  $k$ , используя первые два члена разложений полных эллиптических интегралов, имеем

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{U_0}{\delta}} \left[ 1 - \frac{3}{4}k^2 + O(k^4) \right], \quad (2.II.16)$$

где первое слагаемое соответствует решению линейной задачи, которое легко находится, если линеаризовать уравнение (2.II.II):

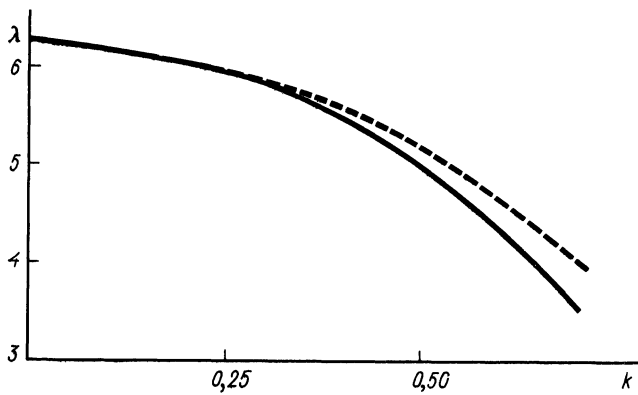
$$\eta(\xi) = tg\delta_0 \sqrt{\frac{U_0}{\delta}} \sin\left(\sqrt{\frac{\delta}{U_0}} \xi\right). \quad (2.II.17)$$

На рис. 27 показаны формы инерционной струи, определяемые параметрическими уравнениями (2.II.I3) и (2.II.I4) для  $\delta_0 = 30, 60$  и  $90^\circ$ ; штриховая линия отвечает линейному решению (2.II.I7) при  $\delta_0 = 30^\circ$ . На рис. 28 представлена зависимость (2.II.I5) длины волны от ее амплитуды; штриховой линией показано приближение (2.II.I6).

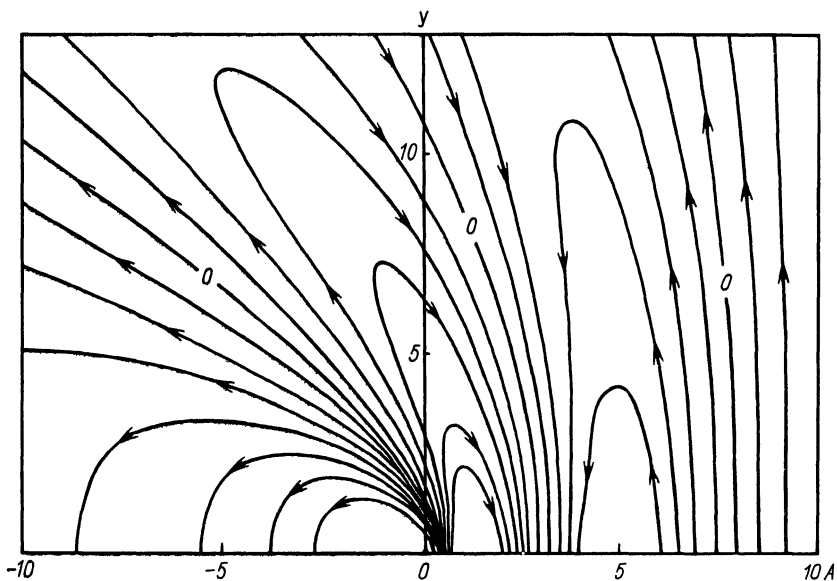
Можно показать [160], что при дальнейшем увеличении угла  $\delta_0$  расположенные на оси  $O\xi$  точки перегибов траектории все теснее прижимаются друг к другу, и при критическом значении  $\delta_{кр} = 117,5^\circ$  происходит касание двух соседних меандров одинаковой кривизны. Это можно истолковать как начало отделения рингов от меандрирующей струи. При дальнейшем увеличении угла  $\delta_0$  начинается самопересечение струи, и решение теряет физический смысл.

Аппроксимируя произвольный рельеф дна кусочно-линейной функцией, можно использовать решения вида (2.II.I3) - (2.II.I4) для расчета траектории струи; такая идея была реализована Уорреном [177] для Гольфстрима. Однако проще применять численные методы интегрирования системы (2.II.5) - (2.II.8) при начальных условиях (2.II.9). Примеры решения указанным способом модельных задач в баротропном и бароклинном океанах, а также расчетов в конкретных физико-географических условиях можно найти в работах [13, 20, 68, 98, 144, 156, 157]; тонким нестационарным струям посвящены исследования [96, 154, 155].

В заключение сделаем еще одно замечание качественного характера, относящееся к общему случаю системы (2.II.5) - (2.II.8). Для того чтобы возмущенная рельефом дна струя имела колебательный характер, необ-



Р и с. 28. Длина волны мнандрирующей струи как функция параметра  $k = \sin(\delta_0/2)$ , пропорционального амплитуде (штриховой линией показана зависимость (2.II.16))



Р и с. 29. Поле функции  $q(x, y, 1, 0)$  в переменных  $x, y$

ходимо, чтобы кривизна (2.11.10) вдоль траектории струи попеременно меняла знак. Тогда уравнение  $q = F_0$  определяет некоторую среднюю линию, относительно которой происходит меандрирование. Этим, в частности, определяется важная роль изолиний планетарно-топографической функции  $q$  в динамике океана.

## 2.12. Нестационарная реакция зонального потока на слабое возмущение рельефа дна

В настоящем и в двух последующих параграфах мы рассмотрим несколько нестационарных задач топографического циклогенеза и меандрирования. Хотя баротропным волнам Россби посвящена обширная литература, в подавляющем большинстве случаев рассматривается либо гармоническая зависимость решения от времени, либо стационарный поток. Имеется очень мало исследований, в которых бы анализировались переходные режимы, связанные с формированием волнового следа и захваченных топографических вихрей. Задачи подобного типа, важные сами по себе, оказываются также полезными при изучении стационарных режимов, когда единственность решения может отсутствовать и конечное состояние зависит от закона стационарирования.

Мы начнем с простейшей задачи, когда возмущение рельефа дна достаточно мало и допустима линеаризация основного уравнения (2.1.1), которое при отсутствии ветра ( $\Gamma = 0$ ) имеет вид

$$\Delta p_t + J(p, \Delta p + \delta y + \delta h) + \kappa \Delta p = 0. \quad (2.12.1)$$

Представим решение в форме

$$p = -U(t)y + \delta \psi(x, y, t). \quad (2.12.2)$$

Подставляя (2.12.2) в (2.12.1) и отбрасывая члены порядка  $\delta^2$ , получим линейное уравнение

$$\Delta \psi_t + U(t) \Delta \psi_x + \delta \psi_x + \kappa \Delta \psi = -U(t) h_x, \quad (2.12.3)$$

которое будем интегрировать при нулевом начальном условии. Такая постановка задачи соответствует случаю, когда в кинематически однородном зональном потоке  $U(t)$  в начальный момент времени мгновенно возникает возмущение топографии дна  $h(x, y)$ . Требуется изучить эволюцию поля течения. Подобная ситуация в реальном океане может, например, иметь место в результате вызванной подводным землетрясением небольшой вертикальной подвижки дна.

Для построения формального решения задачи воспользуемся двойным преобразованием Фурье по пространственным координатам [66]

$$\bar{\psi}(\alpha, \beta, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, t) \exp[i(\alpha x + \beta y)] dx dy,$$

применение которого к (2.12.3) дает

$$\bar{\Psi}_t + \left[ \frac{i\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + k - i\alpha U(t) \right] \bar{\Psi} = - \frac{i\alpha\bar{h}U(t)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения при нулевом начальном условии имеет вид

$$\bar{\Psi} = - \frac{i\alpha\hat{h}(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^t U(\tau) \exp \left\{ i\alpha [S(t) - S(\tau)] - \left( \frac{i\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + k \right) (t - \tau) \right\} d\tau,$$

где  $S(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau$ .

Используя формулу обращения и теорему о свертках [66], окончательно получим

$$\psi(x, y, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta,$$

где функция Грина имеет представление

$$G(x, y, t) = \int_0^t Q_x(x, y, t, \tau) U(\tau) d\tau,$$

причем

$$Q = \frac{e^{-k(t-\tau)}}{2\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \exp \left[ i\alpha [S(t) - S(\tau) - x] - i\beta y - \frac{i\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (t - \tau) \right] d\alpha d\beta. \quad (2.12.4)$$

Для дальнейшего преобразования функции  $Q$  введем обозначения  $A = x - S(t) + S(\tau)$ ,  $T = t - \tau$  и  $Q = e^{-kT} q$ , и перейдем к интегрированию в полярных координатах с помощью соотношений  $\alpha = \rho \cos \varphi$ ,  $\beta = \rho \sin \varphi$ . Тогда вместо (2.12.4) получим

$$q(x, y, t, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi) d\varphi,$$

где  $z = \sqrt{(\rho y)^2 + \left( A\rho + \frac{\beta T}{\rho} \right)^2}$

Известно интегральное представление функции Бесселя [8]  $J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi) d\varphi$ , поэтому  $q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} J_0(\sqrt{(\rho y)^2 + \left( A\rho + \frac{\beta T}{\rho} \right)^2}) d\rho$ .

Полагая  $\rho = \sqrt{\beta T} (s + \sqrt{s^2 + 1}) / (A^2 + y^2)^{1/4}$ , окончательно получим

$$q = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha \sqrt{s^2 + 1})}{\sqrt{s^2 + 1}} ds,$$

где  $\alpha = 2\sqrt{\beta T} (A^2 + y^2)^{1/4}$ ,  $c^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{A}{\sqrt{A^2 + y^2}} \right)$ .

В общем случае функцию  $q$  удается вычислить только при  $y=0$ , когда  $\alpha = 2\sqrt{\beta\tau|A|}$  и  $c^2 = (1/2)(1 + A/|A|)$ . Так как /8/

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}} ds = -\frac{\pi}{2} J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) Y_0\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \alpha > 0,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha s) ds}{\sqrt{s^2+1}} = I_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) K_0\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \alpha > 0,$$

имеем

$$Q(x, 0, t, \tau) = e^{-k\tau} \begin{cases} \frac{1}{\pi} I_0(\sqrt{\beta\tau A}) K_0(\sqrt{\beta\tau A}), & A < 0, \\ -\frac{1}{2} J_0(\sqrt{\beta\tau A}) Y_0(\sqrt{\beta\tau A}), & A > 0. \end{cases}$$

Отсюда легко находятся асимптотики

$$Q(x, 0, t, \tau) = -\frac{e^{-k\tau}}{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\beta\tau|A|}}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta\tau A}{4}\right), \quad |A|\beta\tau \ll 1,$$

$$Q(x, 0, t, \tau) = \frac{e^{-k\tau}}{2\pi\sqrt{\beta\tau|A|}} \begin{cases} 1, & A < 0, \\ \cos(2\sqrt{\beta\tau A}), & A > 0, \quad |A|\beta\tau \gg 1. \end{cases}$$

Изолинии функции  $Q(x, y, t, \tau)$ , построенные численно при  $k = \tau = 0$ ,  $\beta = t = U_0 = 1$ , показаны на рис. 29, причем в качестве независимых переменных приняты  $A \equiv x-t$  и  $y$ . Нетрудно показать, что  $Q$  имеет смысл функции Грина для задач о возбуждении возмущений в океане с ровным дном под действием мгновенно приложенного вихря напряжения ветра при условии  $\tau^2 \ll 1$  [132]. Функция  $Q_x$  качественно имеет такой же вид, что и  $Q$ . Восточно-западная асимметрия обусловлена бета-эффектом и сопутствующими волнами Россби. Хорошо виден различный характер возмущений вверх и вниз по течению.

Решение задачи значительно упрощается при отсутствии бета-эффекта. Результат легче всего получить непосредственно из уравнения (2.12.3), которое при  $\beta = 0$  переходит в

$$\zeta_t + U(t)\zeta_x + k\zeta = -U(t)h_x,$$

где введено обозначение для вихря  $\zeta = \Delta\psi$ . Решение строится методом характеристик и имеет вид

$$\zeta(x, y, t) = -\int_0^t e^{-k(t-\tau)} U(\tau) h_x(x + S(\tau) - S(t), y) d\tau.$$

Поле возмущения давления теперь восстанавливается с помощью обращения оператора Лапласа

$$\psi(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^t U(\tau) d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-k(t-\tau)} h(\xi, \eta) \frac{[x - \xi + S(\tau) - S(t)] d\xi d\eta}{[x - \xi + S(\tau) - S(t)]^2 + (y - \eta)^2}.$$

Интегрируя по частям, окончательно получим

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-k(t-\tau)} \ell n \sqrt{[x-\xi+S(\tau)-S(t)]^2+(y-\eta)^2} U(\tau) h_{\xi}(\xi, \eta) d\xi d\eta d\tau. \quad (2.12.5)$$

При отсутствии трения ( $k=0$ ) возможны дальнейшие упрощения. Так как  $U(\tau)d\tau=dA$ , интегрирование по времени приводит к представлению

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x, y) - \psi_0(x-S(t), y), \quad (2.12.6)$$

где  $\psi_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \ell n \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} d\xi d\eta.$

Выражение (2.12.6) позволяет понять, как происходит процесс формирования топографического вихря над очень малым препятствием. Каждое из слагаемых представляет вихревое возмущение, причем первое из них,  $\psi_0(x, y)$ , является стационарным и расположено непосредственно над возмущением рельефа дна, а второе,  $-\psi_0(x-S(t), y)$ , имея интенсивность противоположного знака, смещается вместе с потоком вниз по течению. В рамках линейной задачи эти возмущения никак не влияют друг на друга. С увеличением топографического параметра  $\delta$  воздействие захваченного вихря  $\psi_0$  на свободный становится существенным и приводит к изменению траектории последнего. Эта картина качественно была описана в §§ 2.1 и 2.5.

Для осесимметричных препятствий решение (2.12.5) можно преобразовать к более удобной форме. Полагая  $h(x, y) = h(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $A = R \cos \Omega$ ,  $y = R \sin \Omega$ ,  $R = \sqrt{A^2 + y^2}$  и переходя с помощью соотношений  $\xi = \rho \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \varphi$  к интегрированию в полярных координатах, получим

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^t U(\tau) e^{-k(t-\tau)} \int_0^{\infty} h(\rho) \rho d\rho I(R, \rho, \Omega) d\tau,$$

где внутренний интеграл вычисляется [8]

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R \cos \theta - \rho \cos \varphi}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi = \frac{2\pi \cos \theta}{R} \begin{cases} 1, & \rho < R, \\ 0, & \rho > R, \end{cases}$$

и с помощью замены  $\xi' = S(t) - S(\tau)$  мы имеем

$$\psi = -\int_0^{S(t)} \frac{e^{-k(t-\tau)} (x-\xi')}{(x-\xi')^2 + y^2} \int_0^{\sqrt{(x-\xi')^2 + y^2}} h(\rho) \rho d\rho d\xi'. \quad (2.12.7)$$

Рассмотрим в качестве примера "колоколообразное" препятствие вида  $h(r) = 1/(1+r^2)^{3/2}$ . Тогда при отсутствии трения, выполняя в (2.12.7) квадратуру, окончательно получим решение в форме (2.12.6), где теперь  $\psi_0(x, y) = -\ell n(1+\sqrt{1+r^2})$ . Найдем критические точки потока и установим условия их осуществления. Приравнявая нулю частные производные от (2.12.2), получим систему уравнений



$$\frac{x - S(t)}{\ell_s(1 + \ell_s)} - \frac{x}{\ell_0(1 + \ell_0)} = 0, \quad \frac{y}{\ell_s(1 + \ell_s)} - \frac{y}{\ell_0(1 + \ell_0)} = \frac{U(t)}{\delta},$$

где для краткости обозначено  $\ell_0 = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ,  $\ell_s = \sqrt{1 + [x - S(t)]^2 + y^2}$ . Для достаточно больших моментов времени имеем  $\ell_s \gg 1$ , поэтому первыми слагаемыми в полученных уравнениях можно пренебречь, откуда следует  $x = 0$  и соответственно  $\Phi(y) \equiv \frac{1}{y} (1/\sqrt{1+y^2} - 1) = U/\delta$ . При  $U(t) > 0$  это уравнение имеет два отрицательных корня лишь при условии  $\max \Phi(y) > U/\delta$ . Максимум  $\Phi(y)$  достигается при  $y_c = -\sqrt{(1+\sqrt{5})}/2} = -1,272$ , поэтому условие существования критических точек принимает вид

$$\frac{\delta}{U(t)} \geq \frac{1}{\Phi(y_c)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = 3,330. \quad (2.12.8)$$

В стационарном случае  $U(t) = U_0 = \text{const}$  это условие совпадает с установленным в § 2.4.

Если скорость набегающего потока  $U(t)$  пульсирует во времени таким образом, что условие (2.12.8) выполняется лишь при достаточно малых  $U(t) > 0$ , замкнутые линии тока в результирующем течении будут попеременно исчезать и появляться вновь.

При учете бета-эффекта рассмотренная простая схема циклогенеза становится более сложной в результате формирования роосбьевского следа за препятствием и одновременного излучения волн Россби снесенным циклоническим вихрем. Учет нелинейных взаимодействий приводит к дальнейшим уточнениям задачи.

### 2.13. Нестационарный зональный поток над бесконечными хребтами

В настоящем параграфе мы рассмотрим одну из немногочисленных нестационарных задач, допускающих точное решение при произвольной амплитуде возмущения рельефа дна из некоторого фиксированного класса возможных форм. Имеются в виду цилиндрические возмущения  $h = h(\xi)$ , где  $\xi = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  [83], причем  $\alpha$  представляет угол между параллельными изобатами  $\xi = \text{const}$  и меридианом, а координата  $\xi$  имеет смысл расстояния, измеряемого перпендикулярно изобатам. Будем предполагать, что  $|\alpha| < \pi/2$ . Представляя решение в виде  $p = -U(t)y + \delta \psi(\xi, t)$ , из (2.12.1) получим линейное уравнение

$$\psi_{\xi\xi t} + [U(t)\psi_{\xi\xi\xi} + \delta\psi_{\xi\xi}] \cos \alpha + k\psi_{\xi\xi} = -U(t)h'(\xi) \cos \alpha. \quad (2.13.1)$$

Заметим, что тождественное обращение в нуль комбинации нелинейных членов есть следствие специфической структуры решения, зависящего по существу лишь от одной пространственной координаты.

Мы изучим две задачи для полученного уравнения - с нулевыми начальными данными (задача Коши) и с условиями периодичности по времени заданной скорости  $U(t)$  и искомого решения.

Задача Коши [23]. Пусть в начальный момент времени  $\psi = 0$ , т.е. по

своему физическому содержанию задача относится к типу, рассмотренному в предыдущем параграфе. Применяя преобразование Фурье

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, t) e^{i\omega\xi} d\xi,$$

в пространстве изображений получим задачу Коши

$$\bar{\psi}_t + \left[ k + i \left( \frac{b}{\omega} - U\omega \right) \cos \alpha \right] \bar{\psi} = - \frac{i}{\omega} U \bar{h} \cos \alpha, \quad \psi = 0, \quad t = 0$$

с решением

$$\bar{\psi} = - \frac{i \bar{h} \cos \alpha}{\omega} \int_0^t U(\tau) \exp \left\{ i\omega [s(t) - s(\tau)] \cos \alpha - \left( k + \frac{i b \cos \alpha}{\omega} \right) (t - \tau) \right\} d\tau.$$

$$s(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau.$$

Используя теорему о свертках, можно записать

$$\psi(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \xi', t) h(\xi') d\xi', \quad (2.13.2)$$

$$\text{где } G(\xi, t) = - \cos \alpha \int_0^t U(\tau) e^{-k(t-\tau)} g(\xi, t, \tau) d\tau. \quad (2.13.3)$$

$$g(\xi, t, \tau) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \exp \left\{ i \left[ \omega (s(t) - s(\tau)) \cos \alpha - \xi \right] - \frac{b \cos \alpha}{\omega} (t - \tau) \right\} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \left( A\omega + \frac{B}{\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad \text{причем } A = \xi + (s(t) - s(\tau)) \cos \alpha, \quad B = b(t - \tau) \cos \alpha.$$

Так как  $\sqrt{B}$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \left( A\omega + \frac{B}{\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega} = \theta(A) J_0(2\sqrt{AB}), \quad B > 0, \quad (2.13.4)$$

получаем

$$g(\xi, t, \tau) = \theta(A) J_0(2\sqrt{b(t-\tau)A \cos \alpha}). \quad (2.13.5)$$

Формулы (2.13.2) – (2.13.5) исчерпывают формальное решение задачи. В дальнейшем мы ограничимся анализом поведения только функции Грина (2.13.3), которой можно дать следующую наглядную интерпретацию. При  $\alpha = 0$  уравнение линии тока, асимптотически приближающейся далеко вверх по течению к оси  $Ox$ , имеет вид  $-U(t)y + b\psi(x, t) = 0$ , откуда  $y = \frac{b}{U(t)} \psi(x, t)$ . Для дельтаобразного возмущения рельефа дна ( $h(x) =$

$= \delta(x)$  имеем  $y = \frac{\delta}{U(t)} G(x, t)$ . Таким образом, график функции Грина подобен линиям тока в каждый момент времени.

Для восточного потока, когда  $U(t) > 0$ , величина  $A$  заведомо отрицательна при  $\xi < 0$ . Следовательно,  $G = 0$  при  $\xi < 0$ , т.е. набегающий поток "не чувствует" препятствия, тогда как вниз по течению при любом  $\xi > 0$  возмущение мгновенно возникает при  $t = 0$ . Этот интересный эффект имеет место благодаря интерференции возмущений, возбуждаемых отдельными участками цилиндрического рельефа дна. Как мы видели в предыдущем параграфе, локализованное возмущение рельефа приводит к появлению возмущений поля давления как перед, так и за препятствием.

При постоянной скорости невозмущенного потока  $U=1$  имеем  $A = \xi - (t-T)\cos\alpha$ , поэтому (2.13.3) для  $0 < \xi < t\cos\alpha$  принимает вид  $G_E = -I$ , где интеграл

$$I = \int_0^{\xi} e^{-k\tau/\cos\alpha} J_0(2\sqrt{\beta\tau(\xi-\tau)}) d\tau$$

удается вычислить. Используя снова представление (2.13.4), выполняя квадратуру по  $\tau$  и затем вводя новую переменную интегрирования  $z = \beta\omega - 1/\omega$ , получим

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{[(k/\cos\alpha)^2 + z^2]\sqrt{z^2 + 4\beta}} \left\{ \frac{k}{\cos\alpha} (1 - e^{-k\xi/\cos\alpha}) \sin\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{z^2 + 4\beta}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}z\right) + z(1 + e^{-k\xi/\cos\alpha}) \sin\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{z^2 + 4\beta}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}z\right) \right\}$$

Известно, что (18), с. 486)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(p\sqrt{z^2 + a^2})}{(z^2 + c^2)\sqrt{z^2 + a^2}} \cos\beta z dz = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{-\beta c} \sin(p\sqrt{a^2 - c^2})}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

откуда дифференцированием по параметру  $\beta$  находим второй интересующий нас интеграл. Таким образом,

$$I = e^{-k\xi/2\cos\alpha} \frac{\sin(\xi\sqrt{\beta - (k/2\cos\alpha)^2})}{\sqrt{\beta - (k/2\cos\alpha)^2}}$$

Собирая полученные результаты, окончательно имеем

$$G_E(\xi, t) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ e^{-k\xi/2\cos\alpha} \frac{\sin(\xi\sqrt{R})}{\sqrt{R}}, & 0 < \xi \leq t\cos\alpha, \\ \cos\alpha \int_0^t e^{-k\tau} J_0(2\sqrt{\beta\tau(\xi - \tau\cos\alpha)\cos\alpha}) d\tau, & \xi > t\cos\alpha, \end{cases} \quad (2.13.6)$$

где  $R = \beta - (k/2\cos\alpha)^2$ .

Хорошо видно, что при  $0 \leq \xi \leq t\cos\alpha$  решение не меняется со временем. Очевидно, это то предельное значение, к которому стремится  $G_E$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. стационарное решение [15]. При любом фиксированном  $\xi$  вниз по течению возмущение, возникнув в начальный момент времени, стационарирует при  $t = \xi/\cos\alpha$ , оставаясь далее неизменным. В любой фиксиро-

важный момент времени  $t > 0$  при  $0 < \xi \leq t \cos \alpha$  уже сформировалась стационарная волна Россби, а при  $\xi > t \cos \alpha$  она еще находится в стадии формирования. При  $t \rightarrow \infty$  процесс устанавливается везде, и тогда средняя строка в (2.13.6) определяет функцию Грина стационарной задачи [151, 172]. Из (2.13.6) следует, что при  $\xi > 0$

$$G_E(\xi, \infty) = -e^{-k\xi/2\cos\alpha} \begin{cases} \frac{\sin(\xi\sqrt{R})}{\sqrt{R}}, & R > 0, \\ \frac{\text{sh}(\xi\sqrt{-R})}{\sqrt{-R}}, & R < 0. \end{cases}$$

Эти соотношения показывают, что при достаточно близком к  $\pm \pi/2$  значении угла  $\alpha$  (поток почти "скользит" вдоль изобат) решение перестает быть колебательным. Отметим также интересный частный случай, когда  $\beta = 0$ , т.е. исчезает механизм волн Россби. Тогда из (2.13.6) получаем

$$G_E(\xi, t) = -\frac{\cos\alpha}{k} \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ 1 - e^{-k\xi/\cos\alpha}, & 0 < \xi \leq t \cos\alpha, \\ 1 - e^{-kt}, & t \cos\alpha < \xi, \end{cases} \quad (2.13.7)$$

откуда видно, что в стационарном состоянии линии тока вниз по течению получают смещение  $-(\beta/k)\cos\alpha$  [73-75].

Обратимся теперь к западному потоку  $U(t) < 0$ . В этом случае величина  $A < 0$  при  $\xi < S(t)\cos\alpha$ , т.е. фронт возмущения распространяется вдоль оси  $O\xi$  со скоростью  $U(t)\cos\alpha < 0$ , причем возмущение охватывает также область и вверх по течению. В частности, при постоянной скорости  $U = -1$  (2.13.3) принимает вид

$$G_W(\xi, t) = \cos\alpha \begin{cases} 0, & \xi \leq -t \cos\alpha \\ \int_{-t \cos\alpha}^t e^{-k\tau} J_0(2\sqrt{\beta\tau(\xi + \tau \cos\alpha)\cos\alpha}) d\tau, & -t \cos\alpha < \xi \leq 0, \\ \int_0^t e^{-k\tau} J_0(2\sqrt{\beta\tau(\xi + \tau \cos\alpha)\cos\alpha}) d\tau, & \xi > 0. \end{cases} \quad (2.13.8)$$

В отличие от случая восточного потока (2.13.6) здесь при каждом заданном  $\xi$  процесс установления длится бесконечно долго. При  $t = \infty$  интегралы в (2.13.8) вычисляются, если учесть, что ([8], с. 724)

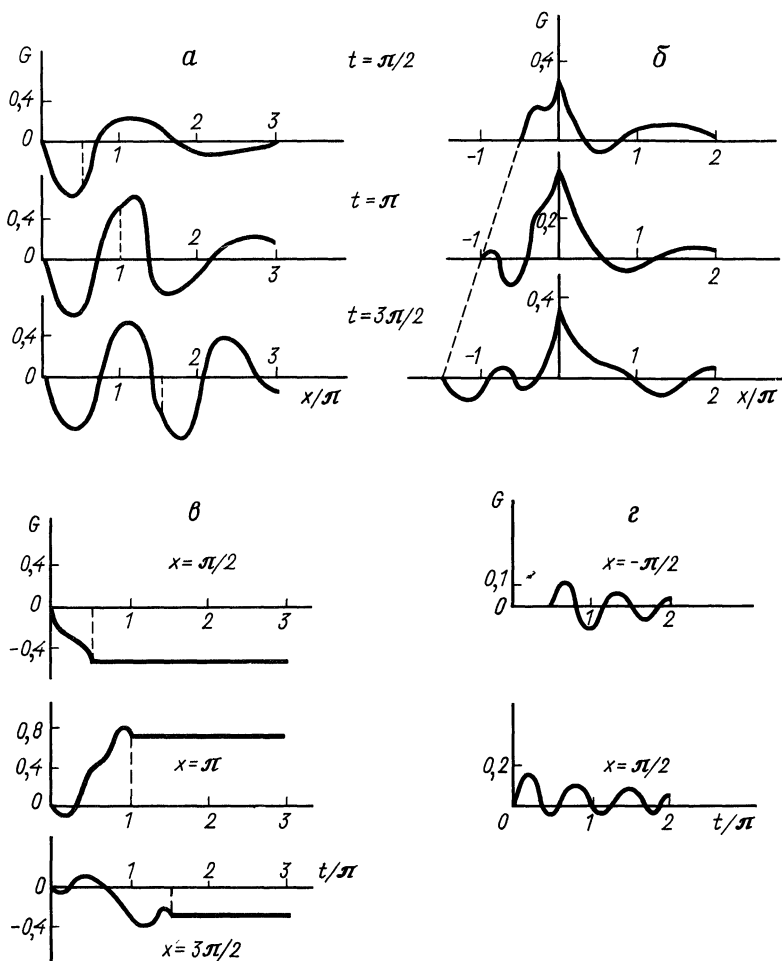
$$\int_0^{\infty} e^{-\rho z} J_0(\beta\sqrt{z^2 + 2\gamma z}) dz = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} \exp[\gamma(\rho - \sqrt{\rho^2 + \beta^2})].$$

В результате мы получаем стационарное решение

$$G_W(\xi, \infty) = \frac{1}{2D} \begin{cases} e^{s_2\xi}, & \xi \leq 0, \\ e^{s_1\xi}, & \xi > 0, \end{cases} \quad (2.13.9)$$

где  $D = \sqrt{\beta + (k/2\cos\alpha)^2}$ ,  $s_1 = k/2\cos\alpha - D$ ,  $s_2 = k/2\cos\alpha + D$ .

Из (2.13.9) видно, что стационарное решение всегда имеет неколебательный характер, причем при наличии трения ( $k > 0$ ) вниз по течению ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) оно затухает быстрее, чем вверх по течению ( $\xi \rightarrow +\infty$ ).



Р и с. 30. Формирование волны Россби над бесконечным меридиональным хребтом в восточном (а, в) и западном (б, г) потоках

а, б — фиксированные моменты времени, в, г — фиксированные положения на оси  $Ox$

В случае  $\beta = 0$  из (2.13.8) находим

$$G_w(\xi, t) = \frac{\cos \alpha}{k} \begin{cases} 0, & \xi \leq -t \cos \alpha \\ e^{k\xi / \cos \alpha} - e^{-kt}, & -t \cos \alpha < \xi \leq 0, \\ 1 - e^{-kt}, & \xi > 0. \end{cases} \quad (2.13.10)$$

При отсутствии бета-эффекта понятия "восточный" и "западный" теряют смысл, поэтому (2.13.7) и (2.13.10) представляют по существу два различных решения одного и того же уравнения, причем для первого из них возмущение затухает вверх по течению, но остается лишь ограниченным вниз по течению, а для второго имеет место обратная картина.

В рассмотренной выше задаче наиболее интересным является сам процесс стационарирования, представление о котором дает рис. 30. Во всех случаях приведены графики вычисленной по формуле (2.13.3) с помощью численных квадратур функции Грина  $G$  при  $U = \pm 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $k = 0$ ,  $\alpha = 0$  [25].

Рис. 30,а показывает, как формируется волна Россби в восточном потоке  $U = 1$  под действием возмущения рельефа дна; пунктир отделяет область  $0 < x < t$ , где волна уже стационарировалась, от области  $t < x < \infty$ , где процесс установления еще продолжается.

На рис. 30,в показан процесс стационарирования в трех фиксированных точках за препятствием; пунктир указывает момент установления  $t = x$ . Таким образом, при каждом заданном  $x$  переходной режим длится ровно столько времени, сколько требуется основному потоку для преодоления расстояния  $x$ .

На рис. 30,б представлены графики функции Грина  $G(x, t)$  для западного потока  $U = -1$  в те же моменты времени, что и на рис. 30,а. Хорошо виден качественно различный характер формирования стационарного возмущения поля давления. На рис. 30,г развернуто во времени поведение решения в точках  $x = \pm \pi/2$  соответственно правее и левее препятствия (вверх и вниз по течению); период колебаний в безразмерных переменных близок к  $3\pi/5$ .

Как указывалось выше, изображенные на рис. 30,а, б кривые можно истолковать как форму линий тока возмущенного зонального течения. Наличие изломов на графиках связано с тем, что функция Грина описывает реакцию потока на возмущение рельефа дна специфической формы в виде дельта-функции. Для гладких форм рельефа решение  $\psi$  также будет гладкой функцией.

Аналогичным образом может быть решена задача о чисто ветровом возмущении "цилиндрического" типа  $T^{(x)} = T^{(x)}(\eta, t)$ ,  $T^{(y)} = T^{(y)}(\eta, t)$ ,  $\eta = x \cos \beta - y \sin \beta$ , моделирующем атмосферный фронт, ориентированный под углом  $\beta$  к меридиану [23].

Близкая к рассмотренной смешанная задача была изучена в работе [154] (см. также [96]).

Периодический режим. Рассмотрим теперь задачу о меандрировании пульсирующего зонального потока, когда  $U(t)$  является периодической знакопостоянной функцией времени с периодом  $T$ . Выберем специальным образом масштабы длины и времени, полагая  $\Delta^* = \sqrt{U^*/\beta}$  и  $t' = 2\pi t/T$ . Так как теперь  $\beta = 1$ , уравнение (2.13.1) примет вид

$$2\mu \psi_{\xi\xi t} + \psi_{\xi} + U(t)\psi_{\xi\xi\xi} + 2\alpha\psi_{\xi\xi} = -U(t)h'(\xi), \quad (2.13.11)$$

где  $\mu = \pi/T \cos \alpha$ ,  $\alpha = k/2 \cos \alpha$ , и для простоты опущен штрих над времен-

ной координатой. Мы будем изучать только периодические решения этого уравнения при условии  $U(t+2\pi) = U(t)$ .

Так как при наличии трения и финитных  $h(\xi)$  возмущения давления на бесконечности должны затухать, однократное интегрирование (2.13.11) дает

$$2\mu\psi_{\xi t} + \psi + U(t)\psi_{\xi\xi} + 2\alpha\psi_{\xi} = -U(t)h(\xi)$$

Поле возмущения  $\psi$  по-прежнему представимо в виде (2.13.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$2\mu G_{\xi t} + G + U(t)G_{\xi\xi} + 2\alpha G_{\xi} = -U(t)\delta(\xi),$$

откуда для фурье-образа  $\bar{G}$  получаем

$$\bar{G}_t + \frac{1}{2\mu} \left[ 2\alpha + i \left( \frac{1}{\omega} - U(t)\omega \right) \right] \bar{G} = -\frac{i U(t)}{2\sqrt{2\pi} \mu \omega}.$$

Периодическое решение последнего уравнения имеет вид  $\sqrt{35}$

$$\bar{G} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \mu \omega^2} \left\{ \frac{2\alpha + i/\omega}{E(t)} \left[ \frac{1}{1-E(2\pi)} \int_0^{2\pi} E(\tau) d\tau - \int_0^t E(\tau) d\tau \right] + 2\mu \right\}, \quad (2.13.12)$$

где  $E(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[ 2\alpha t + i \left( \frac{t}{\omega} - \omega S(t) \right) \right] \right\}$ , и при выводе использовано легко проверяемое тождество

$$\int U(\tau) E(\tau) d\tau = \frac{i}{\omega} \left[ 2\mu E(t) - \left( 2\alpha + \frac{i}{\omega} \right) \int E(\tau) d\tau \right].$$

В общем случае по изображению (2.13.12) не удается в обозримой форме восстановить оригинал. Поэтому мы воспользуемся приближенным методом, полагая  $U(t) = U_0 + \varepsilon f(t)$ , где  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  и  $U_0 = \pm 1$  соответственно для восточного и западного потоков. Тогда  $S(t) = U_0 t + \varepsilon \chi(t)$ ,  $\chi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ , причем  $\chi(0) = \chi(2\pi) = 0$ . Используя разложение экспоненты в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , получим

$$\bar{G} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{2\mu} \right)^m \frac{\bar{G}_m}{m!}, \quad (2.13.13)$$

где

$$\bar{G}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 + 2i\omega\alpha/U_0 - 1/U_0},$$

$$\bar{G}_m = \frac{(-i\omega)^{m-3} (1-2i\omega\alpha)}{2\sqrt{2\pi} \mu E_0(t)} \left[ \frac{1}{E_0(2\pi)-1} \int_0^{2\pi} E_0(\tau) [\chi(\tau) - \chi(t)]^m dt + \right. \quad (2.13.14)$$

$$\left. + \int_0^t E_0(\tau) [\chi(\tau) - \chi(t)]^m d\tau \right], \quad m \geq 1,$$

и  $E_0(t) = \exp \left\{ \frac{t}{2\mu} \left[ 2\alpha + i \left( \frac{1}{\omega} - \omega U_0 \right) \right] \right\}$ . Интегралы в (2.13.14) легко вычисляются при  $f(t) = \cos t$ , что соответствует  $\chi(t) = \sin t$ . Так как в этом случае

$$\int E_0(\tau) (\sin \tau - \sin t)^m d\tau = E_0(\tau) \varphi_m(\tau, t), \quad m \geq 1,$$

где всегда  $\varphi_m(\tau + 2\pi, t) = \varphi_m(\tau, t)$ , то, как легко проверить,

$$\bar{G}_m = \frac{(-i\omega)^{m-3} (1 - 2i\omega\alpha)}{2\sqrt{2\pi} \mu} \varphi_m(t, t), \quad m \geq 1.$$

В частности, при  $m=1$  получаем

$$\bar{G}_1 = -\frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - 2i\omega\alpha) [(1 - \omega^2 U_0 - 2i\omega\alpha) \cos t - 2\mu\omega i \sin t]}{(1 - \omega^2 U_0 - 2i\omega\alpha) [(1 - \omega^2 U_0 - 2i\omega\alpha)^2 - 4\mu^2 \omega^2]}.$$

Ограничиваясь только первыми двумя членами разложения (2.13.13) и возвращаясь к оригиналам, получим

$$G(\xi, t) = G_0(\xi) + \frac{\varepsilon}{2\mu} G_1(\xi, t) + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{2\mu}\right)^2\right), \quad (2.13.15)$$

где  $G_m$  легко восстанавливается по формуле обращения с применением леммы Жордана и теории вычетов [43]. Выпишем сразу результаты, отдельно для восточного и западного потоков.

1. В о с т о ч н ы й п о т о к,  $U_0 = 1$ .

$$G_0(\xi) = -\theta(\xi) e^{-\alpha\xi} \frac{\sin \gamma \xi}{\gamma},$$

$$G_1(\xi, t) = \theta(\xi) \left\{ e^{-\alpha\xi} \left( \cos \gamma \xi - \frac{\alpha\xi}{\gamma} \sin \gamma \xi \right) \sin t + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})\xi} \left[ \bar{A} \cos(t - (\mu + \bar{\mu})\xi) + (\bar{B} - 1) \sin(t - (\mu + \bar{\mu})\xi) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{-(\alpha + \bar{\alpha})\xi} \left[ \bar{A} \cos(t + (\mu - \bar{\mu})\xi) + (\bar{B} + 1) \sin(t + (\mu - \bar{\mu})\xi) \right] \right\},$$

где приняты обозначения:  $\bar{A} = \frac{\bar{\mu}\alpha - \mu\bar{\alpha}}{\bar{\mu}^2 + \bar{\alpha}^2}$ ,  $\bar{B} = \frac{\bar{\mu}\mu + \alpha\bar{\alpha}}{\bar{\mu}^2 + \bar{\alpha}^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2}$ ,

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1 + \mu^2 - \alpha^2)^2 + 4\mu^2\alpha^2} + (1 + \mu^2 - \alpha^2) \right]},$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1 + \mu^2 - \alpha^2)^2 + 4\mu^2\alpha^2} - (1 + \mu^2 - \alpha^2) \right]},$$

причем всегда выполнены условия  $\bar{\mu} > \mu$  и  $\alpha \geq \bar{\alpha}$  и знак равенства достигается при  $\alpha = \bar{\alpha} = 0$ .

2. З а п а д н ы й п о т о к,  $U_0 = -1$ .

$$G_0(\xi) = \frac{1}{2\delta} e^{\alpha\xi - \delta|\xi|}, \quad G_1(\xi, t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\delta} \pm 1 \right) e^{(\alpha \pm \delta)\xi} \sin t - \frac{1}{2} e^{(\alpha \pm \bar{\alpha})\xi} \left[ \bar{A} \cos(t + \right.$$



$$+(\mu \pm \bar{\mu})\xi) + (\bar{B} \mp 1) \sin(t + (\mu \pm \bar{\mu})\xi)], \quad \xi \leq 0,$$

где

$$\bar{A} = \frac{\bar{\alpha}\bar{\mu} + \bar{\mu}\bar{\alpha}}{\bar{\mu}^2 + \bar{\alpha}^2}, \quad \bar{B} = \frac{\mu\bar{\mu} - \alpha\bar{\alpha}}{\bar{\mu}^2 + \bar{\alpha}^2}, \quad \delta = \sqrt{1 + \alpha^2},$$

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{(1 + \alpha^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2\alpha^2} + (\mu^2 - \alpha^2 - 1)]},$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{(1 + \alpha^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2\alpha^2} - (\mu^2 - \alpha^2 - 1)]},$$

причем  $\alpha \leq \bar{\alpha}$  и  $\mu \geq \bar{\mu}$ .

В частном случае, когда отсутствует трение ( $\alpha = 0$ ), приведенные выше формулы принимают следующий вид:

1.  $U_0 = 1$ .

$$G_0(\xi) = -\theta(\xi) \sin \xi,$$

$$G_1(\xi, t) = \theta(\xi) \left[ \sin t \cos \xi - \cos(\bar{\mu}\xi) \sin(t - \mu\xi) - \frac{\mu}{\bar{\mu}} \sin(\bar{\mu}\xi) \cos(t - \mu\xi) \right],$$

где теперь  $\bar{\mu} = \sqrt{1 + \mu^2} > \mu$ .

2.  $U_0 = -1$ .

$$G_0(\xi) = \frac{1}{2} e^{-|\xi|},$$

$$G_1(\xi, t) = \mp \frac{1}{2} \left[ e^{-|\xi|} \sin t - \left( 1 \mp \frac{\mu}{\hat{\mu}} \right) \sin(t + (\mu \pm \hat{\mu})\xi) \right], \quad \xi \geq 0,$$

при  $\mu > 1$ ,  $\hat{\mu} = \sqrt{\mu^2 - 1} < \mu$

$$G_1(\xi, t) = \mp \frac{1}{2} \left\{ e^{-|\xi|} \sin t - e^{-\hat{\alpha}|\xi|} \left[ \sin(t + \mu\xi) \mp \frac{\mu}{\alpha} \cos(t + \mu\xi) \right] \right\}, \quad \xi \geq 0$$

при  $\mu < 1$ ,  $\hat{\alpha} = \sqrt{1 - \mu^2}$ .

В любом случае нулевое приближение  $G_0(\xi)$  представляет решение соответствующей стационарной задачи. В восточном потоке определяемое поправкой  $(\varepsilon/2\mu)G_1(\xi, t)$  возмущение всегда отсутствует вверх по течению, а вниз по течению оно складывается из совокупности стоячих и модулированных бегущих волн. В западном потоке возмущения присутствуют выше и ниже препятствия, причем при  $\alpha = 0$  и  $\mu \rightarrow 1$  амплитуда  $G_1(\xi, t)$  неограниченно возрастает (резонанс).

С точки зрения приложений наиболее интересен случай восточного потока  $U_0 = 1$ . Поскольку условия применимости метода возмущений требуют  $\varepsilon \ll 2\mu$ , а случай слишком малых  $\varepsilon$  малоинтересен, следует считать, что по крайней мере  $\mu \gg O(1)$ . В размерных переменных значение  $\mu = 1$  соответствует периоду возмущения скорости  $T^* = \pi / \sqrt{U^* \beta} \cos \alpha$ , что при  $\alpha = 0$ ,  $U^* = 10$  см/с и  $\beta = 2 \cdot 10^{-13}$  см<sup>-1</sup>с<sup>-1</sup> дает близкое к синоптическому зна-

чение около 25 сут. Выполненный при  $\alpha = 0, \mu = 1$  и  $\varepsilon = 1/2$  расчет функции Грина (2.13.15) показывает, что даже при достаточно большом принятом значении  $\varepsilon$  отличия от стационарного значения сравнительно невелики. Это означает, что при  $\alpha = 0$  линия тока приближенно имеет вид

$$\psi \approx \frac{\delta}{U(t)} G_0(x) = -\frac{\delta \theta(x) \sin x}{U(t)}, \quad \mu \geq O(1), \quad (2.13.16)$$

т.е. амплитуда практически стоячей волны меняется обратно пропорционально скорости невозмущенного потока.

В случае  $\mu \gg 1$  (длиннопериодные возмущения скорости) приближенное решение можно получить непосредственно из (2.13.11), отбрасывая первый малый член. Решения

$$G = -\theta(\xi) \sqrt{U(t)} \sin(\xi / \sqrt{U(t)}), \quad U > 0,$$

$$G = \frac{1}{2} \sqrt{-U(t)} \exp\{-|\xi| / \sqrt{-U(t)}\}, \quad U < 0.$$

имеют формально такой же вид, как и в случае стационарной задачи  $U = \text{const}$ , но с параметрической зависимостью от времени. Отсюда при  $\alpha = 0$  для восточного потока  $U > 0$  получаем уравнение линии тока в виде

$$\psi \approx -\frac{\delta \theta(x)}{\sqrt{U(t)}} \sin(x / \sqrt{U(t)}), \quad \mu \ll 1. \quad (2.13.17)$$

Сравнение (2.13.16) и (2.13.17) показывает характер влияния связанного с параметром  $\mu$  периода возмущения на линии тока.

Рассмотренная модель может оказаться полезной для анализа особенностей временной изменчивости подветренных волн Россби, которые формируются в мощных зональных потоках, пересекающих на своем пути подводные хребты и желоба. Классическим примером такого потока является АЦТ. Данные наблюдений показывают, что скорости АЦТ испытывают временные колебания различных масштабов (от нескольких дней до нескольких лет), однако они, как правило, невелики. Это оправдывает использование упрощений, основанных на представлении  $U(t) = U_0 + \delta f(t)$ .

## 2.14. Ветровые течения над анизотропным рельефом дна

В предыдущем параграфе изучалась реакция заданного кинематически однородного зонального потока  $U(t)$  на специфическое возмущение рельефа дна в виде бесконечных хребтов, желобов и т.п. Такой "цилиндрический" характер топографии приводил к вырождению нелинейного уравнения (2.1.1) в линейное, что существенно облегчало построение решения задачи. Возникающие при этом возмущения течения не оказывали влияния на внешний заданный поток. Теперь мы примем более правдоподобное предположение о том, что подводные хребты имеют конечную протяженность, хотя все еще сильно вытянуты в продольном направлении (анизотропия рельефа дна). Для простоты будем считать, что хребты (или желоба) ориентирова-

ны строго в меридиональном направлении и образуют периодическую по  $x$  структуру с периодом  $L$ .

Усредняя уравнение (2.1.1) по  $x$  (см. § 2.9), получим

$$\bar{p}_{yyt} + \overline{[p_x(p_{yy} + \delta h)]}_y + k\bar{p}_{yy} = -\tau\bar{T}_y^{(x)},$$

где предполагается периодичность по  $x$  поля давления  $p$  с тем же периодом  $L$ . Однократное интегрирование полученного уравнения по  $y$  дает

$$\bar{p}_{yt} + \overline{p_x(p_{yy} + \delta h)} + kp_y = -\tau\bar{T}^{(x)} - kU_0(t) - U_0'(t), \quad (2.14.1)$$

где функция  $U_0(t)$  имеет смысл некоторого среднего зонального потока, в чем легко убедиться, полагая  $\tau = \delta = 0$  и  $p = -U_0(t)y$ .

Пусть рельеф дна и напряжение ветра являются медленно меняющимися функциями координаты  $y$ , т.е.  $h = h(x, \eta)$ ,  $\bar{T} = \bar{T}(x, \eta)$ , где  $\eta = \varepsilon y$  и  $\varepsilon = L_x/L_y$  имеет смысл отношения характерных зонального и меридионального масштабов, на которых происходит заметное изменение этих функций. (Противоположный случай  $L_y/L_x \ll 1$  рассмотрен, например, в [169].) Из (2.14.1) следует, что  $\bar{p}_y = O(1)$ , поэтому  $\bar{p}_\eta = O(1/\varepsilon)$ . Это подсказывает структуру асимптотического разложения для решения

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \psi(\eta, t) + \psi_1(\eta, t) + \dots + \varphi(x, \eta, t) + \varepsilon \varphi_1(x, \eta, t) + \dots,$$

подставляя которое в (2.1.1), получим соответственно при членах с  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ .

$$v_{xt} + v\sigma + (\sigma_{xx} + \delta h_x)U(\eta, t) + kv_x = \tau T_x^{(y)}, \quad (2.14.2)$$

$$U_{\eta t} - \varphi_{1xxt} - \delta \varphi_{1x} - \varphi_x(\varphi_{xx\eta} + \delta h_\eta) - U\varphi_{1xxx} + (\varphi_{xxx} +$$

$$+ \delta h_x)(\varphi_\eta + \psi_{1\eta}) + k(U_\eta - \varphi_{1xx}) = \tau T_\eta^{(x)},$$

где  $U(\eta, t) = -\psi_\eta$  обозначает главный член разложения средней зональной скорости, а  $\sigma(x, \eta, t) = \varphi_x$  - меридиональной скорости. При выделении чисто зональной части поля давления естественно считать, что  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 = \dots = 0$ . Так как  $\varphi_\eta(\varphi_{xxx} + \delta h_x) - \varphi_x(\varphi_{xx\eta} + \delta h_\eta) = [(\varphi_{xx} + \delta h)\varphi_\eta]_x - [\varphi_x(\varphi_{xx} + \delta h)]_\eta$ , осреднение (2.14.3) по периоду дает

$$U_{\eta t} - \delta(\overline{\sigma h})_\eta + kU_\eta = \tau\bar{T}_\eta^{(x)}.$$

Интегрируя это уравнение по  $\eta$ , окончательно получим

$$U_t + kU - \delta(\overline{\sigma h}) = \tau\bar{T}^{(x)} + U_0'(t) + kU_0(t), \quad (2.14.4)$$

где  $U_0(t)$  есть заданный зональный поток. Очевидно, это уравнение можно было непосредственно получить из (2.14.1).

Соотношения (2.14.2) и (2.14.4) образуют замкнутую систему уравнений относительно функции  $V(\eta, t)$  и  $\sigma(x, \eta, t)$  причем зависимость от меридиональной координаты  $\eta$  везде является параметрической.

Как и в § 2.9, представим рельеф дна с помощью ряда Фурье

$$h = \alpha_0(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(\eta) \cos \omega_n x + \beta_n(\eta) \sin \omega_n x], \quad (2.14.5)$$

где  $\omega_n = 2\pi n/L$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Аналогичным образом полагаем

$$T^{(4)} = A_0(\eta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(\eta, t) \cos \omega_n x + B_n(\eta, t) \sin \omega_n x] \quad (2.14.6)$$

и ищем решение в виде

$$\sigma = \alpha_0(\eta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(\eta, t) \cos \omega_n x + \beta_n(\eta, t) \sin \omega_n x]. \quad (2.14.7)$$

Заметим, что

$$\overline{\sigma h} = \alpha_0 \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \alpha_n + \beta_n \beta_n).$$

Подставляя (2.14.5) - (2.14.7) в уравнение (2.14.2), получим вместе с (2.14.4) бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha'_0 = 0, \quad \alpha'_n = k\alpha_n + \left( \omega_n V - \frac{\beta}{\omega_n} \right) \beta_n = -\beta \alpha_n V + \tau A_n, \\ \beta'_n + k\beta_n - \left( \omega_n V - \frac{\beta}{\omega_n} \right) \alpha_n = -\beta \beta_n V + \tau B_n, \end{aligned} \quad (2.14.8)$$

$$V' + kV - \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \alpha_n + \beta_n \beta_n) = \tau \bar{T}^{(x)} + U'_0(t) + kU_0(t), \quad n \geq 1,$$

к которой необходимо присоединить начальные условия. Если эта задача решена, функции  $\psi$  и  $\varphi$  находятся по формулам

$$\psi(\eta, t) = - \int_0^{\eta} V(\eta, t) d\eta, \quad \varphi(x, \eta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} (\alpha_n \sin \omega_n x - \beta_n \cos \omega_n x).$$

Исключая из системы (2.14.8) члены с параметром  $\beta$ , получим энергетическое соотношение

$$E_{\pm} + 2kE = \tau (\overline{T^{(x)} V} + \overline{T^{(y)} \sigma}) + V(U'_0(t) + kU_0(t)), \quad (2.14.9)$$

где введены средние по периоду  $L$  кинетическая энергия

$$E = \frac{1}{2} (\overline{U^2 + \sigma^2}) = \frac{1}{2} \left[ U^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]$$

и работа сил ветра

$$\tau (\overline{T^{(x)} V} + \overline{T^{(y)} \sigma}) = \tau \left[ \bar{T}^{(x)} U + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n A_n + \beta_n B_n) \right].$$

При отсутствии ветра и внешнего потока из (2.14.9) получаем интеграл  $E = E_0 e^{-2kt}$ , который в системе без трения ( $k=0$ ) переходит в обычный закон сохранения кинетической энергии. Таким образом, система (2.14.8) с квадратичными нелинейностями, допускающая при определенных условиях квадратичные интегралы, относится к классу нелинейных систем гидродинамического типа [56].

Если рельеф дна и меридиональное напряжение ветра имеют простейшую незональную структуру  $b_n = \alpha_{n+1} = B_n = A_{n+1} = 0, n \geq 0$ , то система (2.14.8) существенно упрощается и сводится лишь к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \alpha' + k\alpha + (U - \beta)\beta &= -\alpha U + A, \\ \beta' + k\beta - (U - \beta)\alpha &= 0, \\ U' + kU' - \frac{1}{2}\alpha\alpha &= T + U_0'(t) + kU_0(t) \end{aligned} \quad (2.14.10)$$

для трех функций  $\alpha \equiv \alpha_1, \beta \equiv \beta_1, U$ , где использованы обозначения  $\alpha = \beta\alpha_1, A = T A_1, T = T \bar{T}^{(x)}$  и за счет выбора зонального линейного масштаба  $L$  принято  $\omega_1 = 2\pi/L = 1$ . При отсутствии ветра ( $A = T = 0$ ) и постоянном внешнем течении ( $U_0(t) \equiv 1$ ) эта система была проанализирована применительно к атмосферным потокам Хартом [102]. Интересно отметить, что соотношения (2.14.10) аналогичны уравнениям, которые можно получить в задаче о ветровых течениях в замкнутом канале с помощью конечномерного галеркинского приближения описанном в § 2.1 способом (см. [82, 176]).

Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда внешний поток отсутствует и имеется постоянный зональный ветер, т.е. примем  $A = 0, U_0(t) \equiv 0, T = \text{const}$ . Для дальнейшего анализа удобно перейти к новым переменным и параметрам с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} T X(\tilde{t})/k, \quad \beta = \sqrt{2} T Y(\tilde{t})/k, \quad U = T Z(\tilde{t})/k, \quad \alpha = \sqrt{2} T \mu/k, \\ c &= k^2/T, \quad Z_0 = \beta k/T, \quad \tilde{t} = kt. \end{aligned}$$

Тогда система (2.14.10) примет вид

$$\begin{aligned} X' &= -X - (Z - Z_0)Y/c - \mu Z/c, \\ Y' &= -Y + (Z - Z_0)X/c, \quad Z' = -Z + \mu X/c + 1. \end{aligned} \quad (2.14.11)$$

Напомним, что везде сохраняется параметрическая зависимость от "медленной" меридиональной координаты  $\eta = \xi y$ .

Изучим сначала возможные стационарные решения задачи. Приравнявая

левые части уравнений нулю и исключая затем  $X$  и  $Y$ , получим для  $Z$  алгебраическое уравнение

$$\mu^2 = f(Z^{(s)}) \equiv (1/Z^{(s)} - 1)[c^2 + (Z^{(s)} - Z_0)^2], \quad (2.14.12)$$

причем

$$X^{(s)} = \frac{c}{\mu} (Z^{(s)} - 1), \quad Y^{(s)} = \frac{1}{\mu} (Z^{(s)} - Z_0)(Z^{(s)} - 1). \quad (2.14.13)$$

В зависимости от соотношения параметров  $\mu$ ,  $c$  и  $Z_0$  уравнение (2.14.12) имеет один или три вещественных корня, однако в любом случае  $0 < Z^{(s)} < 1$ .

Исследуем поведение функции  $f(Z)$  на отрезке  $(0,1)$ . В окрестности концов асимптотически имеем

$$f(Z) \sim \frac{1}{Z} (c^2 + Z_0^2), \quad Z \rightarrow 0,$$

$$f(Z) \sim (1-Z)[c^2 + (1-Z_0)^2], \quad Z \rightarrow 1-0.$$

Так как  $f'(Z) = -g(Z)/Z^2$ , где  $g(Z) = G(Z) + c^2$ ,  $G(Z) = (2Z^2 - Z - Z_0)(Z - Z_0)$ , для обнаружения локальных экстремумов функции  $f(Z)$  достаточно найти корни уравнения  $g(Z) = 0$ . Из приведенных выше асимптотик следует, что это уравнение на отрезке  $(0,1)$  имеет 0 или 2 вещественных корня; в последнем случае мы их обозначим через  $Z^{(1)}$  и  $Z^{(2)}$ , причем  $0 < Z^{(1)} < Z^{(2)} < 1$ . В первом случае  $f(Z)$  представляет монотонно убывающую функцию, и уравнение (2.14.12) при любом заданном  $\mu$  имеет единственный корень. Во втором случае на отрезке  $(Z^{(1)}, Z^{(2)})$  функция  $f(Z)$  является возрастающей и, следовательно, при условии  $f(Z^{(1)}) < \mu^2 < f(Z^{(2)})$  уравнение (2.14.12) имеет три вещественных корня  $Z_1, Z_2, Z_3$ , причем справедливы неравенства  $0 < Z_1 < Z^{(1)} < Z_2 < Z^{(2)} < Z_3 < 1$ . При  $\mu^2 < f(Z^{(1)})$  остается лишь корень  $Z_3$ , а при  $\mu^2 > f(Z^{(2)})$  — корень  $Z_1$ .

Наибольший интерес представляет та область изменения параметров  $c$  и  $Z_0$ , в которой при увеличении  $\mu^2$  возможен переход от одного к трем корням уравнения (2.14.12). Предельным здесь является случай, когда при некотором  $Z$  имеем  $g(Z) = g'(Z) = 0$  (точки  $Z^{(1)}$  и  $Z^{(2)}$  сливаются). Поскольку  $g'(Z) = 2Z(3Z - 1 - 2Z_0)$ , из сформулированного условия находим  $Z = (1 + 2Z_0)/3$  и  $c^2 = (1 - Z_0)^2(1 + 8Z_0)/27$ . Нас интересует случай, когда найденный корень находится на отрезке  $(0, 1)$ , поэтому из полученных выражений следует ограничение  $-1/8 < Z_0 < 1$ . Заметим, что в случае сливающихся корней максимальное значение  $c^2 = 1/16$  достигается при  $Z_0 = 1/4$ .

На рис. 31 показаны зависимости  $\mu^2 = f(Z)$ , построенные для  $Z_0 = 1/4$  и  $c^2 = i/32$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . При  $c^2 > 1/16$  функции  $f(Z)$  монотонно убывают, а при  $c^2 < 1/16$  они имеют два локальных экстремума. Хорошо видно, что при  $c^2 > 1/16$  уравнение (2.14.12) для любого  $\mu^2$  имеет

только одно решение, а при  $c^2 < 1/16$  их оказывается три для каждого  $\mu^2$  из области  $f(Z^{(1)}) < \mu^2 < f(Z^{(2)})$ .

Примем теперь для определенности  $0 < Z_0 < 1$  (западный ветер) и, используя малость параметра  $c^2$ , будем искать корни уравнения (2.14.12) в виде асимптотических разложений

$$Z^{(s)} = \gamma_0 + \gamma_1 c^2 + O(c^4). \quad (2.14.14)$$

Подстановка в уравнение дает

$$\mu^2 = F(\gamma_0) = (1/\gamma_0 - 1)(\gamma_0 - Z_0)^2, \quad (2.14.15)$$

$$\gamma_1 [(\gamma_0 - Z_0)^2 + \mu^2 + 2(\gamma_0 - Z_0)(\gamma_0 - 1)] = 1 - \gamma_0. \quad (2.14.16)$$

Функция  $F(Z)$  имеет такой же вид, что и  $f(Z)$  на рис. 3I при  $c^2 = 0$  (кривая 0). Она имеет нулевой минимум при  $\bar{Z}^{(1)} = Z_0$  и локальный максимум при  $\bar{Z}^{(2)} = (1 + \sqrt{1 + 8Z_0})/4 > Z_0$ ,  $\bar{Z}^{(1)}$  и  $\bar{Z}^{(2)}$  являются корнями уравнения  $G(Z) = 0$ . Следовательно, при  $0 < \mu^2 < F(\bar{Z}^{(2)})$  уравнение (2.14.15) имеет три вещественных корня  $\gamma_{01}$ ,  $\gamma_{02}$ ,  $\gamma_{03}$ , причем  $0 < \gamma_{01} < \bar{Z}^{(1)} < \gamma_{02} < \bar{Z}^{(2)} < \gamma_{03} < 1$ . При  $\mu^2 > F(\bar{Z}^{(2)})$  имеется только один корень  $\gamma_{01}$  причем  $0 < \gamma_{01} < \bar{Z}^{(1)} \equiv Z_0$ .

Исключая в (2.14.16) параметр  $\mu^2$  с помощью (2.14.15), получим

$\gamma_1 = \gamma_0(1 - \gamma_0) / G(\gamma_0)$ . Легко убедиться в справедливости неравенств  $G(\gamma_{01}) > 0$ ,  $G(\gamma_{02}) < 0$  и  $G(\gamma_{03}) > 0$ , поэтому всегда  $\gamma_{10} > 0$ ,  $\gamma_{12} < 0$  и  $\gamma_{13} > 0$ , в полном соответствии с рис. 3I.

Проанализируем теперь устойчивость стационарных решений, полагая в возмущенном состоянии

$$x = \chi^{(s)} + \hat{\chi} \exp[(\lambda - 1)\tilde{t}], \quad y = y^{(s)} + \hat{y} \exp[(\lambda - 1)\tilde{t}], \quad (2.14.17)$$

$$z = Z^{(s)} + \hat{z} \exp[(\lambda - 1)\tilde{t}].$$

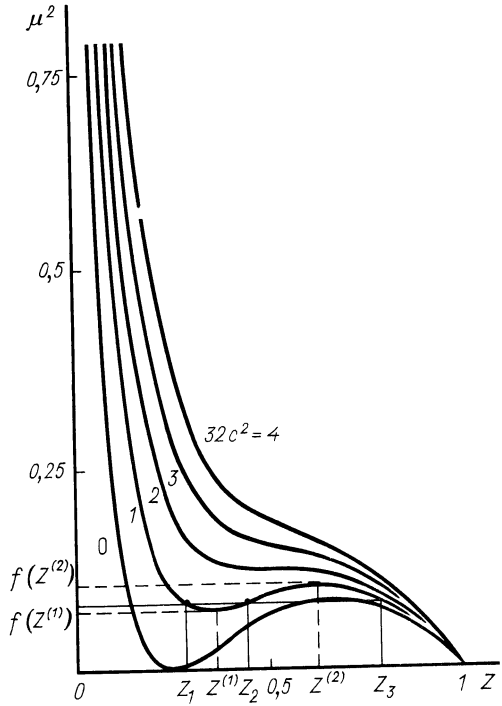
Подстановка этих выражений в (2.14.11) и последующая линеаризация относительно амплитуд возмущений  $\hat{\chi}$ ,  $\hat{y}$  и  $\hat{z}$  дает однородную систему, условие разрешимости которой приводит к характеристическому уравнению

$$c^2 \lambda^3 + [(Z^{(s)} - Z_0)^2 + (Z^{(s)} - Z_0)(Z^{(s)} - 1) + \mu^2] \lambda + (Z^{(s)} - Z_0)(Z^{(s)} - 1) = 0. \quad (2.14.18)$$

Учитывая разложения (2.14.14), один из корней этого уравнения можно искать в виде  $\lambda = \lambda_0 + O(c^2)$ , где с помощью (2.14.18) и (2.14.15) легко находим

$$\lambda_0 = \gamma_0(1 - \gamma_0) / (\gamma_0^2 - Z_0) = 1 - G(\gamma_0) / (\gamma_0^2 - Z_0)(\gamma_0 - Z_0).$$

Р и с. 31. Графики функций  $\mu^2 = f(Z)$  при  $Z_0 = 1/4$  и различных значениях  $32c^2$



Два других корня имеют представления  $\lambda = \lambda_0/c + O(1)$ , где  $\lambda_0 = \pm i \sqrt{(\gamma_0 - Z_0)(\gamma_0^2 - Z_0)/\gamma_0}$ . Заметим, что всегда  $Z_0 < \sqrt{Z_0} < Z^{(2)}$ . Теперь легко проверяется устойчивость стационарных решений. Для крайних корней  $Z_1^{(s)} \approx \gamma_{01}$  и  $Z_3^{(s)} \approx \gamma_{03}$  находим  $\lambda_{01} < 1$  и  $\text{Re} \lambda_{01} = 0$ . Для промежуточного корня  $Z_2^{(s)} \approx \gamma_{02}$  в случае  $Z_0 < \gamma_{02} < \sqrt{Z_0}$  получаем  $\lambda_0 < 1$  и  $\text{Im} \lambda_{01} = 0$ , а при  $\sqrt{Z_0} < \gamma_{02} < Z^{(2)}$  имеем  $\lambda_0 > 1$  и  $\text{Re} \lambda_{01} = 0$ . Это означает, что по крайней мере для достаточно малых  $c^2$  при  $Z^{(s)} = Z_2^{(s)}$  среди корней уравнения (2.14.18) имеется всегда один, у которого  $\text{Re} \lambda > 1$ , что в силу (2.14.17)

определяет неустойчивость соответствующего стационарного решения. Крайние решения  $Z_1^{(s)}$  и  $Z_3^{(s)}$  всегда устойчивы; аналогичное утверждение справедливо и в случае одного решения  $Z_1^{(s)}$ .

Путем более детального анализа уравнения (2.14.18) можно показать, что полученные выводы остаются верными при любых значениях параметров  $\mu, c$  и  $Z_0$ , а именно: если уравнение (2.14.12) имеет только один вещественный корень, то он всегда устойчив; если таких корней три и они различны, крайние решения  $Z_1^{(s)}$  и  $Z_3^{(s)}$  устойчивы, а промежуточное решение  $Z_2^{(s)}$  неустойчиво. В случае слияния двух или всех трех корней соответствующие стационарные решения нейтрально устойчивы.

Рассмотрим в качестве примера рельеф дна, практически не зависящий от меридиональной координаты. Тогда  $\psi = -T\eta Z^{(s)}/k$ , и мы получаем поле  $p = (T/k)[ -\eta Z^{(s)} + \sqrt{2}(\chi^{(s)} \sin \alpha - \gamma^{(s)} \cos \alpha) ]$ , откуда следует уравнение линии тока

$$\eta = (\sqrt{2}/Z^{(s)}) (\chi^{(s)} \sin \alpha - \gamma^{(s)} \cos \alpha). \tag{2.14.19}$$

Напомним, что рельеф дна имеет вид  $h = (\sqrt{2} T/k6) \mu \cos \alpha$ . Выражение (2.14.19) можно представить в форме

$$\eta = R \cos(\alpha - \alpha_0), \tag{2.14.20}$$



где с учетом соотношений (2.14.12) и (2.14.13) амплитуда линии тока равна

$$R = \sqrt{2(1-Z^{(s)})/Z^{(s)}}, \quad (2.14.21)$$

а фаза  $\alpha_0$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -c / (Z^{(s)} - Z_0), \quad (2.14.22)$$

причем  $0 < \alpha_0 < \pi$  при  $c/\mu < 0$  и  $\pi < \alpha_0 < 2\pi$  при  $c/\mu > 0$ . Пусть для определенности  $\mu < 0$ , т.е. гребень меридионального хребта расположен при  $x = \pi$ . Если внешние параметры задачи таковы, что уравнение (2.14.12) имеет один вещественный корень  $Z^{(s)}$ , линии тока имеют форму (2.14.20), где максимальное смещение на север вычисляется по формуле (2.14.21) и достигается всегда на "наветренной" стороне. В случае трех вещественных корней каждому из них отвечает своя линия тока, однако средняя должна быть отброшена как неустойчивая. Две остальные, имея по-прежнему вид (2.14.20), отличаются лишь амплитудами и фазами, причем при  $Z_1 < Z_3$  всегда  $R_1 > R_3$ , т.е. меньшей средней зональной скорости отвечает большая амплитуда меандров. Оставаясь в рамках стационарной задачи, мы не можем ответить на вопрос, какой же из двух устойчивых режимов будет осуществляться на самом деле. Аналогичная неединственность стационарных решений отмечается в работах [102, 176] и связывается с эффектами блокирования.

Рассмотрим теперь задачу Коши для системы (2.14.11) и попытаемся представить поведение решения в зависимости от параметра  $\mu$ . Из (2.14.11) следует  $d\tilde{E}/dt = 1/4 - x^2 - y^2 - (z-1/2)^2$ , где  $\tilde{E} = (x^2 + y^2 + z^2)/2 = r^2/2$ . С помощью этого соотношения легко устанавливается, что все траектории не выходят наружу из сферы  $r = \max(1, r_0)$ , где  $r_0$  определяется начальными данными. В частности, при нулевых начальных данных точка  $(X, Y, Z)$  в фазовом пространстве всегда заключена внутри сферы единичного радиуса.

Качественная теория динамических систем рассматриваемого типа позволяет провести классификацию возможных решений [57], однако она еще пока не дает методов, которые позволили бы по правым частям уравнений (2.14.11) однозначно идентифицировать соответствующие траектории. К сожалению, даже численные эксперименты не имеют доказательной силы. Поэтому мы можем высказать лишь самые общие соображения.

Если при любых  $\mu^2$  уравнение (2.14.12) имеет только одно вещественное решение, естественно ожидать (и это подтверждается численными экспериментами), что  $X, Y, Z$  стремятся при  $\tilde{t} \rightarrow \infty$  к соответствующему единственному и поэтому устойчивому стационарному решению  $X^{(s)}, Y^{(s)}, Z^{(s)}$ . Ситуация осложняется, когда существует интервал  $(\mu_1^2, \mu_2^2)$  изменения параметра  $\mu^2$ , в котором имеется три стационарных значения  $Z^{(s)}$ . При  $\mu < \mu_1^2$  или  $\mu^2 > \mu_2^2$ , по-видимому, по-прежнему происходит установление к единственному стационарному решению. В случае  $\mu_1^2 < \mu^2 < \mu_2^2$  ста-

ционирования  $Z$  к среднему корню  $Z_2^{(s)}$  быть не может ввиду его неустойчивости. Численные эксперименты показывают, что при указанных  $\mu^2$  всегда происходит стационарирование к одному из устойчивых решений. Во всяком случае ясно, что в рассмотренной ситуации не существует непрерывных по параметру  $\mu$  стационарных решений, и задача требует более детального исследования подобно тому, как это сделано в [176].

В заключение мы рассмотрим поведение свободной системы [146] ( $T = 0$ ) при отсутствии трения ( $k=0$ )

$$\alpha' = -(U-\beta)\beta - \alpha U, \quad \beta' = (U-\beta)\alpha, \quad U' = \alpha\alpha/2, \quad (2.14.23)$$

задавая начальные условия в виде  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, U = U_0, t = 0$ . Решение уравнений (2.14.23) можно свести к квадратурам. Исключая из двух последних уравнений  $\alpha$  и интегрируя полученное соотношение с учетом начальных данных, находим

$$\beta = \beta_0 + [(U-\beta)^2 - (U_0-\beta)^2] / \alpha. \quad (2.14.24)$$

Интеграл энергии в рассматриваемом случае имеет вид

$$U^2/2 + (\alpha^2 + \beta^2)/4 = U_0^2/2 + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)/4,$$

откуда

$$\alpha^2 = \frac{Q(U)}{\alpha^2}, \quad (2.14.25)$$

где  $Q(u) = \alpha_0^2 \alpha^2 + 2\alpha^2(U_0^2 - u^2) - 2\beta_0 \alpha(u - U_0)(u + U_0 - 2\beta) - (u - U_0)^2(u + U_0 - 2\beta)^2$

Учитывая последнее из уравнений (2.14.23), окончательно находим

$$t = \pm 2 \int_{U_0}^U \frac{du}{\sqrt{Q(u)}}, \quad (2.14.26)$$

где выбор знака должен быть согласован с начальными данными. Обращая этот интеграл, находим  $U(t)$ , а затем определяем  $\alpha$  и  $\beta$  по формулам (2.14.25) и (2.14.24).

В частном случае  $\alpha_0 = \beta_0 = \beta = 0$  имеем  $Q(u) = (U_0^2 - u^2)(u^2 + 2\alpha^2 - U_0^2)$ . Не умаляя общности можно считать  $U_0 > 0$ ; примем для определенности  $U_0^2 < 2\alpha^2$ . Тогда (2.14.26) принимает вид ([8], с.259)

$$t = (\sqrt{2}/|\alpha|) F(\arccos(U/U_0), U_0/\sqrt{2}|\alpha|),$$

где  $F(\varphi, k)$  - эллиптический интеграл первого рода, обращая который, находим решение в виде функции Якоби  $U = U_0 \operatorname{cn}(\alpha t/\sqrt{2}, \kappa)$ , где  $\kappa = U_0/\sqrt{2}|\alpha|$ . Отсюда легко получаем в эллиптических функциях

$$\alpha = -\sqrt{2} U_0 \operatorname{sh}(\alpha t/\sqrt{2}, \kappa) \operatorname{dn}(\alpha t/\sqrt{2}, \kappa), \quad \beta = U\alpha.$$

Период колебаний системы равен  $T = 4\sqrt{2}K/|\alpha|$ , где  $K = F(\pi/2, \kappa)$ .

## Глава 3

### СТРАТИФИЦИРОВАННЫЙ ОКЕАН

#### 3.1. Слабая стратификация

Однородная жидкость является достаточно грубым приближением к водам реального океана, который всегда в той или иной степени стратифицирован в зависимости от рассматриваемого района. В настоящей и следующей главе мы будем изучать процессы вихреобразования и меандрирования в стратифицированных потоках жидкости над неровным дном. Для отдельных типов плотностных структур часто удается выполнить некоторые упрощения в общей постановке исходной задачи; мы начнем с рассмотрения крайних случаев слабой и сильной стратификации.

Согласно принятой в конце § 1.3 классификации слабая стратификация характеризуется условием  $B^2 \sim \varepsilon \ll 1$ , что позволяет пренебречь в уравнении адвекции плотности (1.3.43) последним слагаемым

$$\rho_{zt} + J(\rho, \rho_z) = 0. \quad (3.1.1)$$

Вертикальная скорость определяется из уравнения вихря (1.3.44), интегрируя которое при условии (1.3.45), получим

$$\omega = -\tau \left( T_x^{(y)} - T_y^{(x)} \right) + \int_0^z \left[ \Delta p_t + J(\rho, \Delta p + \nu \zeta) \right] dz. \quad (3.1.2)$$

Граничное условие на дне (1.3.46) приводит к дополнительному соотношению

$$\int_0^1 \left[ \Delta p_t + J(\rho, \Delta p + \nu \zeta) \right] dz + \left[ \sigma J(\rho, h) + k \Delta p \right]_{z=1} = \tau \left( T_x^{(y)} - T_y^{(x)} \right). \quad (3.1.3)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения (3.1.1) при дополнительном ограничении (3.1.3), а также при определенных начальных и граничных условиях. По найденному полю давления горизонтальные скорости по-прежнему находятся из геострофических соотношений (1.3.48), плотность — из (1.3.49), а вертикальная скорость вычисляется из (3.1.2). Формально в уравнение (3.1.1) и условие (3.1.3) не входят никакие признаки стратификации; это должно быть отражено в начальных данных

$$\rho = \rho_0(x, y, z), \quad t = 0 \quad (3.1.4)$$

и в граничных условиях по горизонтали. Отбрасывание в уравнении (1.3.43) члена  $B^2 N^2(z) \omega$  приводит к фильтрации части возмущений, связанных с бароклинными волнами Россби (см. § 3.3). Поэтому сформулированную выше модель можно рассматривать как первое приближение к стратифицированной

среде, при котором заданные возмущения плотности переносятся баротропными волнами Россби.

В общем случае решение нелинейной и нестационарной задачи (3.1.1), (3.1.3) и (3.1.4) все еще сопряжено с большими математическими трудностями; в рамках такой модели попытка применения асимптотических рядов по степеням временной координаты для анализа начального этапа эволюции изолированного вихревого возмущения в случае ровного дна была предпринята в работе [32]. Гораздо большие возможности для построения аналитических решений представляет стационарная задача, когда (3.1.1) упрощается к виду  $J(\rho, \rho_z) = 0$  и допускает интеграл

$$\rho = G(\psi(x, y), z), \quad (3.1.5)$$

где  $G$  и  $\psi$  — произвольные функции своих аргументов. Вид функции  $G$ , определяющей вертикальную стратификацию, должен быть задан. Из (3.1.5) следует  $\nabla \rho = G_\psi(\psi, z) \nabla \psi$ , откуда видно, что геострофические скорости на каждой вертикали расположены в одной плоскости, а  $\psi(x, y)$  можно рассматривать как функцию тока горизонтального движения. Из (1.3.49) получаем  $\nabla \rho = G_{\psi z} \nabla \psi$ , т.е. экстремумам функции  $\psi$  отвечают экстремумы в поле плотности. Уравнение для  $\psi$  находится из условия (3.1.3), которое для стационарного потока дает

$$J(\psi, \Delta \psi \int_0^1 G_\psi^2 dz + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 \frac{d}{d\psi} \int_0^1 G_\psi^2 dz + \delta y \int_0^1 G_\psi dz + \delta G_\psi(\psi, 1) h) + [G_{\psi\psi}(\psi, 1) (\nabla \psi)^2 + G_\psi(\psi, 1) \Delta \psi] = \tau (T_x^{(y)} - T_y^{(x)}). \quad (3.1.6)$$

По своей структуре это уравнение аналогично стационарному варианту основного уравнения баротропной задачи. Поэтому случай слабой стратификации можно интерпретировать как некоторую эквивалентную баротропную модель. Особенно ясно это видно, когда  $G$  допускает факторизацию /136/.

$$G = A(z)\psi, \quad (3.1.7)$$

что означает подобие вертикальных профилей скорости и плотности на всех вертикалях. Нормируя функцию  $A(z)$  условием  $\int_0^1 A^2(z) dz = 1$  и полагая  $S = \int_0^1 A(z) dz$ , получим вместо (3.1.6) уравнение

$$J(\psi, \Delta \psi + \hat{\delta} y + \hat{\delta} h) + \hat{k} \Delta \psi = \tau (T_x^{(y)} - T_y^{(x)}), \quad (3.1.8)$$

совпадающее по форме со стационарным вариантом (2.1.1). Здесь введены эффективные значения планетарного, топографического и фрикционного параметров

$$\hat{\delta} = S\delta, \quad \hat{\delta} = A(1)\delta, \quad \hat{k} = A(1)k. \quad (3.1.9)$$

Следовательно, решение любой стационарной баротропной задачи может быть истолковано как решение некоторой бароклинной задачи в случае слабой стратификации. Обратное, для решения уравнения (3.1.8) можно использовать методы, развитые в главе 2.

Не умаляя общности, всегда можно считать  $S > 0$ , причем знак равенства отвечает течению с нулевым полным потоком. Благодаря нормировке  $A(z)$  имеем  $S \leq 1$ , и равенство достигается только в баротропном случае  $A(z) \equiv 1$ . Как следует из (3.1.5) и (3.1.7), заданная функция  $A(z)$  определяет вертикальную структуру горизонтальной скорости, а  $A'(z)$  — распределение возмущения плотности по вертикали. Функция  $\Psi = S\psi$  есть функция полных потоков геострофических течений.

Соотношения (3.1.9) позволяют сделать некоторые качественные выводы. Так как  $\hat{\beta} \leq \beta$ , стратификация всегда ослабляет бета-эффект, причем при нулевом полном потоке он полностью исчезает (в поле горизонтальной скорости). Параметр  $A(1)$  пропорционален придонной скорости и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В частности, если придонная скорость равна нулю, рельеф дна и придонное трение перестают оказывать влияние на течение. В зависимости от знака  $A(1)$  эффективные значения топографического и фрикционного параметров могут быть как положительными, так и отрицательными, т.е. характер влияния топографии и придонного трения на интегральную циркуляцию существенно зависит от поведения придонной скорости.

Примеры применения стационарной модели слабо стратифицированной жидкости при условии (3.1.7) рассмотрены в работах [29, 30, 106, 107, 136].

Здесь мы укажем один простой случай, когда легко находится точное стационарное решение уравнений (3.1.1) и (3.1.3). Предположим, что рельеф дна и напряжение ветра являются функциями только радиальной координаты,  $h = h(r)$  и  $\vec{T} = \vec{T}(r)$ . Полагая  $p = P(r, z)$ , мы удовлетворим уравнению (3.1.1) тождественно, а (3.1.2) в полярных координатах  $r, \theta$  дает

$$\omega = -\frac{\tau}{r} \frac{d}{dr} (rT) + \beta \cos \theta \int_0^z P_r dz,$$

где  $T(r) \equiv T^{(\theta)}(r)$  есть азимутальная составляющая напряжения ветра. Если теперь принять дополнительно

$$P_r(r, 1) = \tau T / k, \quad (3.1.10)$$

$$\int_0^1 P_r(r, z) dz = 0, \quad (3.1.11)$$

то будет выполнено условие (3.1.3). Соотношение (3.1.10) определяет придонную геострофическую скорость, а (3.1.11) показывает, что полный поток при этом равен нулю. Простейшей из рассмотренных структур является "двухслойный" вихрь, имеющий разные вращения в слоях. Свидетельства о существовании таких вихрей в реальном океане приводятся в [62, 161].

Если ветер и трение отсутствуют ( $\tau = k = 0$ ), единственным ограничением на функцию  $P(r, z)$  является (3.1.11).

Еще один интересный подход к построению приближенных решений стационарных задач со слабой стратификацией можно получить, исходя из общего случая  $B > 0$ , когда система (1.3.43), (1.3.44) сводится только к одному

уравнению относительно давления. В самом деле, исключая из этих соотношений вертикальную скорость, получим основное уравнение для стратифицированной жидкости

$$\Pi_t + J(p, \Pi) = 0, \quad (3.1.12)$$

описывающее эволюцию квазигеострофического потенциального вихря

$$\Pi = \Delta p + (p_z / B^2 N^2)_z + \delta y. \quad (3.1.13)$$

Граничные условия (I.3.45) и (I.3.46) также легко выражаются только через давление:

$$(p_z / B^2 N^2)_t + J(p, p_z / B^2 N^2) \approx \tau (\tau_x^{(y)} - \tau_y^{(x)}), \quad z = 0, \quad (3.1.14)$$

$$(p_z / B^2 N^2 - \delta h)_t + J(p, p_z / B^2 N^2 - \delta h) - k \Delta p = 0 \quad z = 1. \quad (3.1.15)$$

Для завершения математической постановки задачи необходимо добавить начальные и граничные условия по горизонтали. Ниже мы еще вернемся к этому общему случаю, а здесь ограничимся рассмотрением стационарного режима в безграничном океане. Предположим для простоты, что ветер и придонное трение отсутствуют, возмущения рельефа дна финитны и на бесконечности имеется зональный поток без поперечного сдвига скорости  $P = -U(z)y$ . Уравнение (3.1.12) и граничные условия (3.1.14) и (3.1.15) допускают интеграл

$$\Delta p + (p_z / B^2 N^2)_z + \delta y = F(p, z), \quad (3.1.16)$$

$$p_z / B^2 N^2 = F_0(p), \quad z = 0, \quad (3.1.17)$$

$$p_z / B^2 N^2 - \delta h = F_1(p), \quad z = 1. \quad (3.1.18)$$

Будем считать, что функции  $F$ ,  $F_0$  и  $F_1$  полностью определяются условиями на бесконечности. Переходя в (3.1.16) – (3.1.18) к пределу при  $p \rightarrow P$ , получим функциональные уравнения

$$-y(U'/B^2 N^2)' + \delta y = F(-Uy, z), \quad -yU'/B^2 N^2 = F_0(-Uy), \quad z = 0, 1,$$

откуда находятся  $F$ ,  $F_0$  и  $F_1$ . Представим, как обычно, решение в виде  $p = -U(z)y + \delta\psi(x, y, z)$ . Тогда для топографического возмущения поля давления  $\psi$  получается линейная задача

$$\Delta\psi + (\psi_z / B^2 N^2)_z + [\delta - (U'/B^2 N^2)']\psi / U = 0, \quad (3.1.19)$$

$$\psi_z = -U'\psi / U = 0, \quad z = 0, \quad (3.1.20)$$

$$\psi_z - U'\psi / U = B^2 N^2 h, \quad z = 1, \quad (3.1.21)$$

$$\psi \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3.1.22)$$

Если  $U' \equiv 0$ , т.е. набегающий поток не имеет вертикального сдвига скорости, уравнение (3.1.19) допускает дальнейшие упрощения

$$\Delta\psi + (\psi_z / B^2 N^2)_z + \psi / U_0 = 0. \quad (3.1.23)$$

В этом случае решение удобно представить в виде  $\psi = \psi_M(x, y) + \psi_p(x, y, z)$ , где не зависящая от вертикальной координаты баротропная часть возмущения определяется как

$$\psi_M(x, y) = \int_0^1 \psi(x, y, z) dz.$$

Тогда, очевидно, бароклининая часть возмущения удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \psi_p(x, y, z) dz = 0. \quad (3.1.24)$$

Интегрируя (3.1.23) по вертикали и учитывая граничные условия (3.1.20) и (3.1.21) с учетом того, что  $U = U_0 = \text{const}$ , получим

$$\Delta\psi_M + \psi_M / U_0 = -h, \quad (3.1.25)$$

т.е. обычное уравнение стационарной баротропной задачи (2.6.1). Для бароклининой части возмущения получаем

$$\Delta\psi_p + (\psi_{pz} / B^2 N^2)_z + \psi_p / U_0 = h, \quad (3.1.26)$$

$$\psi_{pz} = 0, \quad z = 0, \quad (3.1.27)$$

$$\psi_{pz} = B^2 N^2(1) h, \quad z = 1 \quad (3.1.28)$$

при дополнительном условии (3.1.24). Таким образом, в рассматриваемом случае происходит полное расщепление задачи на две независимых – баротропную и бароклининую. По поводу соотношения между баротропной и бароклининой частью решения в общем случае см. [61].

Как показал Яновиц [120], при  $B^2 \ll 1$  бароклининая задача решается в замкнутой форме. Ищем асимптотическое решение

$$\psi_p = B^2 \psi_2(x, y, z) + B^4 \psi_4(x, y, z) + \dots \quad (3.1.29)$$

Подставляя (3.1.29) в (3.1.26) – (3.1.28), для главного члена разложения получим

$$(\psi_z / N^2)_z = h; \quad \psi_z = 0, \quad z = 0; \quad \psi_z = N^2(1) h, \quad z = 1,$$

откуда сразу следует  $\psi_z = N^2(z)zh(x, y)$ . Интегрируя еще раз и определяя произвольную функцию интегрирования с помощью условия (3.1.24), окончательно находим

$$\psi = M(z)h(x, y), \quad (3.1.30)$$

где обозначено  $M(z) = \int_0^z N^2(z)z dz - \int_0^1 N^2(z)z(1-z) dz$ .

Заметим, что

$$M(0) = -\int_0^1 N^2(z)z(1-z) dz < 0, \quad M(1) = \int_0^1 N^2(z)z^2 dz > 0.$$

и, следовательно, на некотором промежуточном горизонте  $0 < \bar{z} < 1$  получаем  $M(\bar{z}) = 0$  (например, при  $N = \text{const}$  имеем  $\bar{z} = 1/\sqrt{3} = 0,58$ ). Из (3.1.30) видно, что бароклиная часть возмущения поля давления целиком сосредоточена над возмущением рельефа дна, причем  $\Delta\psi_p \approx B^2 M(z)\Delta h$ , т.е. завихренность пропорциональна лапласиану от рельефа, а линии тока бароклиных течений на отдельных горизонтах совпадают с изобатами. Согласно (3.1.30) над препятствием, для которого  $\Delta h \leq 0$  (например, для параболического купола  $h(r) = \theta(1-r)(1-r^2)$  имеем  $\Delta h = -4\theta(1-r)$ ) в верхних слоях ( $0 < z < \bar{z}$ ) развивается циклоническая завихренность, а в нижних ( $\bar{z} < z < 1$ ) - антициклоническая, причем смена знака циркуляции происходит при  $z = \bar{z}$ . Если пренебречь бета-эффектом ( $\beta = 0$ ), то из (3.1.25) следует  $\Delta\psi_M = -h$ , т.е. баротропная циркуляция над препятствием ( $h > 0$ ) всегда антициклоническая. Это означает, что в суммарном поле возмущений в верхнем слое бароклиность ослабляет завихренность, а в нижнем - усиливает, т.е. способствует концентрации возмущений непосредственно над препятствием. Особенно заметно это должно быть выражено в сильно стратифицированной среде ( $B^2 \gg 1$ ), но этот специальный случай мы рассмотрим ниже отдельно.

### 3.2. Сильная стратификация

Упрощения в исходной постановке задачи возможны и в другом предельном случае - очень сильной стратификации, когда  $B^2 \gg 1$ . В качестве исходных примем соотношения (3.1.19) - (3.1.22). Если в уравнении (3.1.19) формально положить  $B^2 = \infty$ , мы получим  $\Delta\psi^{(0)} + (\beta/U(z))\psi^{(0)} = 0$  с параметрической зависимостью решения от вертикальной координаты. Этому уравнению и не зависящим от  $B^2$  граничным условиям (3.1.20) и (3.1.22) удовлетворяет тривиальное решение  $\psi^{(0)} \equiv 0$ . Так как при этом граничное условие на дне (3.1.21) не выполняется, мы должны допустить существование придонного пограничного слоя, в котором происходят заметные изменения решения. Для анализа этого пограничного слоя удобно перейти к новой отсчитываемой вверх вертикальной координате  $\eta = BN(1)(1-z)$  и к новой зависимой переменной  $\Psi = \psi / BN(1)$ . Уравнение (3.1.19) и граничное условие (3.1.21) примут вид

$$\Delta \Psi + \left[ \frac{N^2(1)\Psi_\eta}{N^2(1-\eta/BN(1))} \right] + \frac{1}{U} \left[ \beta - (U'/B^2 N^2(z))' \right] \Psi = 0,$$

$$\Psi_\eta + U'(1)\Psi / BN(1)U(1) = -h, \quad \eta = 0.$$



Переходя здесь к пределу  $B \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\eta$ , окончательно получим

$$\Delta \Psi + \Psi_{\eta\eta} + \delta \Psi / U(1) = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\Psi_{\eta} = -h, \quad \eta = 0. \quad (3.2.2)$$

Условие срачивания и (3.1.22) соответственно дают

$$\left. \begin{aligned} \Psi &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty, \\ \Psi &\rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

Для построения решения удобно воспользоваться косинус-преобразованием Фурье [66]

$$\bar{\Psi}(x, y, \gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Psi(x, y, \eta) \cos \gamma \eta d\eta$$

с формулой обращения

$$\Psi(x, y, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{\Psi}(x, y, \gamma) \cos \gamma \eta d\gamma, \quad (3.2.4)$$

применяя которое к (3.2.1) с учетом условий (3.2.2) и (3.2.3), получим

$$\Delta \bar{\Psi} + (\delta / U(1) - \gamma^2) \bar{\Psi} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} h(x, y), \quad \bar{\Psi} \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty.$$

Задача этого вида подробно анализировалась в § 2.6, поэтому мы воспользуемся готовым решением

$$\bar{\Psi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(x, y; x', y') h(x', y') dx' dy',$$

$$\text{где } \hat{G} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0(r\sqrt{\gamma^2 - \delta/U(1)}), & \gamma^2 - \delta/U(1) > 0, \\ -\frac{1}{4} Y_0(r\sqrt{\delta/U(1) - \gamma^2}) - \frac{1}{\pi} S(r\sqrt{\delta/U(1) - \gamma^2}, \theta), & \gamma^2 - \delta/U(1) < 0 \end{cases}$$

и  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ , причем функция  $S$  определяется формулой (2.6.II).

Далее рассмотрим отдельно случаи восточного ( $U(z) > 0$ ) и западного ( $U(z) < 0$ ) потоков.

**В о с т о ч н ы й п о т о к.** Используя формулу обращения (3.2.4), получим

$$\Psi(x, y, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, y; x', y') h(x', y') dx' dy', \quad (3.2.5)$$

$$\text{где } G = \frac{1}{\pi^2} \int_{\sqrt{\delta/U(1)}}^{\infty} K_0(r\sqrt{\gamma^2 - \delta/U(1)}) \cos \gamma \eta \, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{\delta/U(1)}} Y_0(r\sqrt{\delta/U(1) - \gamma^2}) \cos \gamma \eta \, d\gamma - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\delta/U(1)}} S(r\sqrt{\delta/U(1) - \gamma^2}, \theta) \cos \gamma \eta \, d\gamma.$$

Известно, что (/8/, с.486)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{\alpha}(\tau^2 + \eta^2)^{1/2})}{\sqrt{\tau^2 + \eta^2}} \cos(\gamma \eta) \, d\eta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} Y_0(r\sqrt{\alpha - \gamma^2}), & \gamma < \sqrt{\alpha}, \\ K_0(r\sqrt{\gamma^2 - \alpha}), & \gamma > \sqrt{\alpha}, \end{cases}$$

откуда по формуле обращения получаем представление

$$\frac{1}{2\pi R} \cos(\sqrt{\alpha} R) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} K_0(r\sqrt{\gamma^2 - \alpha}) \cos \gamma \eta \, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{\alpha}} Y_0(r\sqrt{\alpha - \gamma^2}) \cos \gamma \eta \, d\gamma,$$

где  $R = \sqrt{\tau^2 + \eta^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + \eta^2}$ . Таким образом, окончательно

$$G = \frac{1}{2\pi R} \cos(R\sqrt{\delta/U(1)}) - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\delta/U(1)}} S(r\sqrt{\delta/U(1) - \gamma^2}, \theta) \cos \gamma \eta \, d\gamma. \quad (3.2.6)$$

Иное представление для этой функции Грина дано Джонсоном [123].

**З а п а д н ы й п о т о к.** В этом случае всегда  $\gamma^2 - \delta/U(1) > 0$ , поэтому функция Грина имеет вид

$$G = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} K_0(r\sqrt{\gamma^2 - \delta/U(1)}) \cos \gamma \eta \, d\gamma.$$

Интеграл указанного типа вычисляется (/8/, с.750)

$$\int_0^{\infty} K_0(r\sqrt{\gamma^2 + c^2}) \cos(\gamma \eta) \, d\gamma = \frac{\pi}{2\sqrt{\tau^2 + \eta^2}} \exp(-c\sqrt{\tau^2 + \eta^2}),$$

поэтому окончательно

$$G = \frac{1}{2\pi R} \exp(-\sqrt{\delta/U(1)} R). \quad (3.2.7)$$

Соотношения (3.2.5) - (3.2.7) исчерпывают формальное решение задачи при любых  $U(1)$  и любом финитном возмущении рельефа дна. Если отсутствует бета-эффект ( $\delta=0$ ) функция Грина (3.2.6) и (3.2.7) переходит в  $G_0=1/2\pi R$ ; пример применения такого решения для интерпретации данных наблюдений приводится в работе [100].

Во многих случаях решения интересных задач можно получить иными методами, среди которых мы отметим распространенный полуобратный метод, состоящий в следующем. Пусть  $\Psi$  - некоторое решение уравнения (3.2.1),

удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, включая условие излучения. Тогда соотношение  $h(x, y) = -\Psi_{\eta}(x, y, 0)$  определяет соответствующий рельеф дна, обеспечивающий выполнение условия (3.2.2). Приведем пример, заимствованный из работы [77] и относящийся к случаю  $\delta = 0$  (см. также [163]). Уравнению Лапласа  $\Delta \Psi + \Psi_{\eta\eta} = 0$  и всем условиям на бесконечности удовлетворяет фундаментальное решение

$$\Psi = [x^2 + y^2 + (\eta + 1)^2]^{-1/2}, \quad (3.2.8)$$

с помощью которого получаем осесимметричное возмущение рельефа дна колоколообразной формы  $h(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-3/2}$ .

Аналогичным образом можно построить решение плоской задачи об обтекании хребта. Принимая  $\Psi(x, y) = -\epsilon n \sqrt{x^2 + (\eta + 1)^2}$ , получим  $h(x) = 1/(1+x^2)$ .

Используя (3.2.8), суммарное поле давления можно теперь представить в цилиндрических координатах в виде

$$p = -U(z)r \sin \theta + \delta B \left\{ r^2 + [(1-z)B + 1]^2 \right\}^{-1/2},$$

где для простоты принято  $N(1) = 1$ .

Критические точки потока располагаются в полуплоскости  $\theta = -\pi/2$  на расстоянии  $r_c(z)$  от оси подводной возвышенности, где  $r_c$  есть корень уравнения  $U(z)/\delta = B r \left\{ r^2 + [(1-z)B + 1]^2 \right\}^{-3/2}$ .

Простой анализ показывает, что условие существования вещественных решений имеет вид

$$U(z)/\delta B < 2 \left\{ 3^{3/2} [1 + B(1-z)]^2 \right\}^{-1}. \quad (3.2.9)$$

Если при некотором  $z$  оно выполнено, существуют две критические точки, одна из которых, ближайшая к оси  $r = 0$ , отвечает центру замкнутого вихревого образования, а другая, более удаленная, расположена на границе этого вихря. В простейшем случае потока без вертикального сдвига скорости,  $U(z) \equiv 1$ , условие (3.2.9) выполняется лишь при  $\delta > \delta_{кр} = 3^{3/2}/2B$ . При  $z = 1 - 3^{3/4} \sqrt{\delta/B}$  условие (3.2.9) заведомо не выполнено, т.е. выше указанного горизонта замкнутых линий тока нет.

Таким образом, приведенные оценки показывают, что при сильной стратификации происходит концентрация создаваемых рельефом возмущений потока возле дна. В отличие от баротропного случая область замкнутых линий тока представляет трехмерное образование, возникновение которого происходит при меньшем критическом значении топографического параметра  $\delta$  (ср. с § 2.4). Если  $\delta > \delta_{кр}$ , эта область, которую по аналогии со столбом Тэйлора можно условно назвать конусом Тэйлора, сосредоточена в слое толщиной порядка  $B^{-1/2}$ .

В заключение отметим, что в случае  $\delta = 0$  и при условии конечности предела  $U'(1)/BN(1)U(1)$  при  $B \rightarrow \infty$  (сильный вертикальный сдвиг) аналогичная задача решена в [77].

### 3.3. Некоторые общие свойства стратифицированных потоков

Как было показано в § 3.1, при  $0 < B < \infty$  уравнение для потенциального вихря  $\Pi = \Delta p + (p_z / B^2 N^2)_z + \delta y$  имеет вид закона сохранения

$$\Pi_t + J(p, \Pi) = 0 \quad (3.3.1)$$

и должно интегрироваться при граничных условиях по вертикали

$$Q_t + J(p, Q) = \tau (T_x^{(y)} - T_y^{(x)}), \quad z = 0, \quad (3.3.2)$$

$$Q_t + J(p, Q - \delta h) - \kappa \Delta p = 0, \quad z = 1, \quad (3.3.3)$$

где для краткости записи введена так называемая потенциальная плаучасть  $Q = p_z / B^2 N^2 \sqrt{124}$ . В общем случае следует также задать граничные условия по горизонтали и начальное состояние.

Задача полностью решается, если удастся каким-либо способом найти распределение потенциального вихря в океане и потенциальной плаучести на поверхности и на дне. Пусть

$$\Delta p + (p_z / B^2 N^2)_z + \delta y = \Pi(x, y, z, t), \quad (3.3.4)$$

$$p_z / B^2 N^2 = Q^{(0)}(x, y, t), \quad z = 0, \quad (3.3.5)$$

$$p_z / B^2 N^2 = Q^{(1)}(x, y, t), \quad z = 1, \quad (3.3.6)$$

где стоящие справа функции предполагаются известными. Рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$(Z' / N^2)' = -\lambda Z, \quad 0 < z < 1; \quad Z' = 0, \quad z = 0, 1.$$

Обозначим через  $\lambda_n$  и  $Z_n$  собственные числа и соответствующие собственные функции, образующие полную ортонормированную систему [47]. Очевидно,  $\lambda_0 = 0$  и  $Z_0(z) \equiv 1$ , а все остальные собственные числа неограниченно возрастают с увеличением номера. Представим решение в виде

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y, t) Z_n(z), \quad (3.3.7)$$

где

$$p_n = \int_0^1 p Z_n dz, \quad n \geq 0. \quad (3.3.8)$$

Уравнения для коэффициентов  $p_n$  легко находятся по методу Гринберга [9]; умножая (3.3.4) на  $Z_n$  и интегрируя результат по вертикали, с учетом граничных условий (3.3.5), (3.3.6) получим

$$\Delta p_n - \lambda_n p_n / B^2 = \Pi_n + Z_n(0) Q^{(0)} - Z_n(1) Q^{(1)} - \delta_n \delta y \equiv f_n, \quad (3.3.9)$$

где  $\Pi_n = \int_0^1 \Pi Z_n dz$ ,  $\delta_n = \int_0^1 Z_n dz$ .

Если  $G_n$  — функция Грина, решающая (3.3.9) при соответствующих граничных условиях, окончательно находим

$$p = \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, y, x', y') f_n(x', y', t) dx' dy' \cdot Z_n(z). \quad (3.3.10)$$

Если потенциальные функции неизвестны, то соотношения (3.3.1) — (3.3.3), которым они соответственно удовлетворяют, представляют с учетом (3.3.10) систему интегро-дифференциальных уравнений относительно  $\Pi$ ,  $Q^{(0)}$  и  $Q^{(1)}$ . В общем случае решение такой системы можно получить только численно.

Рассмотрим теперь частный случай, когда ветер, трение и бета-эффект отсутствуют и к безграничному по горизонтали океану в начальный момент времени прикладывается внешнее поле давления, которое далее поддерживается по закону  $p_0 = -U(t)\eta$ . При  $t=0$  потенциальные функции  $\Pi$ ,  $Q^{(0)}$  и  $Q^{(1)}$  тождественно равны нулю. Соотношения (3.3.1) — (3.3.2) имеют вид законов сохранения вдоль траекторий горизонтального движения, поэтому  $\Pi$  и  $Q^{(0)}$  остаются тождественно равными нулю в любой последующий момент времени. Величина  $Q^{(1)} - \delta h$  также сохраняется для каждой жидкой частицы на дне, совпадая в начальный момент с функцией  $-\delta h$ . Положим  $Q^{(1)} = Q_h^{(0)}(x, y) + Q_s^{(1)}(x, y, t)$ , где  $Q_h^{(0)} = \delta h(x, y)$  и  $Q_s^{(1)}(x, y, 0) = -\delta h(x, y)$  и соответственно расщепим поле давления:

$$p = p_0 + p_h(x, y, z) + p_s(x, y, z, t), \quad t \geq 0.$$

Функция  $p_0$  задана, а  $p_h$  представляет стационарное распределение давления и является решением задачи

$$\Delta p_h + (p_{hz} / B^2 N^2)_z = 0, \quad p_{hz} / B^2 N^2 = 0, \quad z = 0,$$

$$p_{hz} / B^2 N^2 = \delta h(x, y), \quad z = 1, \quad p_h \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad 0 < z < 1.$$

Индукцируемое "свободной" плавучестью на дне  $Q_s^{(1)}$  давление  $p_s$  характеризует нестационарную часть поля и удовлетворяет соотношениям

$$\Delta p_s + (p_{sz} / B^2 N^2)_z = 0, \quad p_{sz} / B^2 N^2 = 0, \quad z = 0,$$

$$p_{sz} / B^2 N^2 = Q_s^{(1)}, \quad z = 1, \quad p_s \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad 0 < z < 1.$$

Для определения  $Q_s^{(1)}$  служит граничное условие (3.3.3), из которого следует

$$Q_{st}^{(1)} + J(p, Q_s^{(1)}) = 0. \quad (3.3.11)$$

Это уравнение описывает эволюцию свободной плавучести  $Q_s^{(1)}$  на дне, в отличие от захваченной стационарной плавучести  $Q_h^{(0)} \equiv \delta h$ , которая полностью определяется рельефом дна.

Решение каждой из задач для  $p_h$  и  $p_s$  можно представить в виде (3.3.10), где с учетом сформулированных граничных условий (см. (2.6.7))

$$\text{имеем } G_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad G_n = \frac{1}{2} K_0 \left( r \frac{\sqrt{\lambda_n}}{B} \right), \quad n \geq 1.$$

Обозначим

$$G(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left( r \frac{\sqrt{\lambda_n}}{B} \right) Z_n(1) Z_n(z).$$

$$\text{Тогда } p_h = \oint_{-\infty}^{\infty} \oint G(R, z) h(x', y') dx' dy',$$

где  $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ . Аналогичным образом формально имеем

$$p_s = \oint_{-\infty}^{\infty} \oint G(R, z) Q_s^{(1)}(x', y', t) dx' dy',$$

где  $Q_s^{(1)}$  в свою очередь удовлетворяет уравнению (3.3.11). Таким образом, в рассматриваемом случае все сводится к определению закона изменения свободной плавучести  $Q_s^{(1)}$ . Качественное описание формирования и последующего развития вихревого поля можно дать по существу такое же, как и в §§ 2.1 и 2.5, где рассматривался простейший баротропный случай. Если  $U(t) \rightarrow U_0$  при  $t \rightarrow \infty$ , результирующая конфигурация свободной и захваченной плавучести на дне будет зависеть от закона стационарирования. В частности, при достаточно большой скорости набегающего потока произойдет снос свободной плавучести в бесконечность, и тогда поле давления будет стационарироваться к  $p = -U_0 y + p_h$ .

Рассмотрим простейший пример, задавая дельтообразное возмущение рельефа дна вида  $h(x, y) = \delta(x) \delta(y)$ . Тогда  $p_h = \oint G(r, z)$ , а свободная плавучесть в силу (3.3.11) должна быть дельтообразной функцией с носителем в некоторой точке с координатами  $X(t), Y(t)$ . С учетом начальных условий  $Q_s^{(1)} = -\oint \delta(x-X(t)) \delta(y-Y(t))$ , поэтому  $p_s = -\oint G(\hat{R}, z)$ , где  $\hat{R} = \sqrt{(x-X(t))^2 + (y-Y(t))^2}$ . Благодаря осевой симметрии поля  $p_s$  свободная потенциальная плавучесть сама на себя не влияет, поэтому движение точки  $(X, Y)$  полностью определяется "внешним" полем  $p_0 + p_h = -U_0(t)y + \oint G(r, z)$  при  $z=1$ . Уравнения движения можно записать в виде

$$\dot{X} = U(t) - \oint G_r(\tilde{r}, 1) Y / \tilde{r}, \quad (3.3.12)$$

$$\dot{Y} = \oint G_r(\tilde{r}, 1) X / \tilde{r}, \quad (3.3.13)$$

$$\text{где } \tilde{r} = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ и } G_r(\tilde{r}, 1) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} K_1 \left( \tilde{r} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{B} \right) Z_n^2(1) \right].$$

Чтобы избежать неопределенности в правых частях (3.3.12) и (3.3.13) в начале координат, начальное положение следует задать в некоторой отличной от  $(0, 0)$  точке  $(X_0, Y_0)$ , где  $\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$  имеет порядок размера топографического возмущения, которое моделируется дельтообразным. Такая идея была использована в работе Хашперта и Брайена [III].

Чтобы лучше познакомиться с некоторыми свойствами задачи (3.3.1) – (3.3.3), в заключение этого параграфа мы рассмотрим два примера, в которых соответствующие решения удается построить в замкнутой форме. В обоих случаях будем предполагать, что ветер и придонное трение отсутствуют ( $\tau = k = 0$ ), а дно – ровное ( $\beta = 0$ ).

**Пример I.** Уравнение (3.3.1) можно переписать в виде

$$\hat{p}_t + J(p, \hat{p}) + \beta p_x = 0,$$

где  $\hat{p} = \Delta p + (p_z / B^2 N^2)_z$ . Воспользуемся идеей расщепления и будем искать решения этого уравнения, которые одновременно удовлетворяют соотношениям (ср. с § 2.2)

$$\hat{p}_t + \beta p_x = 0, \quad (3.3.14)$$

$$J(p, \hat{p}) = 0. \quad (3.3.15)$$

При любой постоянной  $C$  условию (3.3.15) удовлетворяет функция  $\hat{p} = Cp$ , подстановка которой в (3.3.14) приводит к уравнению  $Cp_t + \beta p_x = 0$  с общим решением  $p = \psi(x - \beta t / C, y, z)$ , где  $\psi$  – произвольная функция своих аргументов. Полагая  $C = \beta / U_0$ , окончательно получим

$$p = \psi(x - U_0 t, y, z), \quad (3.3.16)$$

где  $\psi$  есть любое решение уравнения

$$\Delta \psi + (\psi_z / B^2 N^2)_z - \beta \psi / U_0 = 0. \quad (3.3.17)$$

Функция (3.3.16) представляет бегущую волну, которая распространяется со скоростью  $U_0$  в направлении оси  $Ox$ . При сделанных выше предположениях граничные условия (3.3.1) и (3.3.2) будут удовлетворены, если принять

$$\psi_z / N^2 = 0, \quad z = 0, 1. \quad (3.3.18)$$

Общее решение задачи (3.3.17) – (3.3.18) легко находится методом Фурье. Используя представление вида (3.3.7), получим

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x, y) Z_n(z),$$

где

$$\Delta \psi_n - (\lambda_n / B^2 + \beta / U_0) \psi_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Последнее уравнение имеет нетривиальные и ограниченные на всей плоскости  $(x, y)$  решения только при условии (см. § 2.6)

$$\lambda_n / B^2 + \beta / U_0 < 0. \quad (3.3.19)$$

Пусть  $\nu_n = \sqrt{-(\beta / U_0 + \lambda_n / B^2)}$  и  $N$  есть наибольшее из  $n$ , для которых выполнено (3.3.19). Тогда ограниченные решения задачи (3.3.17)–

(3.3.18) в цилиндрических координатах можно записать в виде

$$\psi = \sum_{n=0}^N \tilde{\Psi}_n(r, \theta; \lambda_n) Z_n(z), \quad (3.3.20)$$

где 
$$\tilde{\Psi}_n(r, \theta, \lambda) = \alpha_{n0} J_0(\lambda r) + \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{n,m} \cos m\theta + \beta_{n,m} \sin m\theta) J_m(\lambda r)$$

при произвольных постоянных  $\alpha_{n,m}$  и  $\beta_{n,m}$ . Поскольку (3.3.20) содержит только конечное число слагаемых (бароклинных мод), мы не можем удовлетворить произвольным начальным данным. Тем не менее, построенные решения позволяют моделировать достаточно широкий класс бароклинных возмущений, распространяющихся на запад ( $U_0 < 0$ ) с постоянной скоростью. Если зафиксировать номер моды и параметр  $\lambda$ , легко строится решение вида  $p = \psi_n(x - U_0 t, y) Z_n(z)$ , для которого  $U_0 = -\beta / (\lambda^2 + \lambda_n^2 / B^2)$ . Отсюда следует, что с ростом номера моды или с уменьшением параметра стратификации скорость распространения уменьшается. В частном случае баротропного возмущения ( $n=0, \lambda_0=0$ ) скорость  $U_0 = -\beta / \lambda^2$  в полном соответствии с § 2.6.

Пример 2 заимствован из [4]. Предположим, что  $N^2(z) \equiv 1$  и введем новую вертикальную координату  $\zeta = B(z - z_0)$ , где  $0 \leq z_0 \leq 1$ . Будем искать решения вида бегущей волны  $p = \psi(\xi, \eta, \zeta)$ , где  $\xi = x - U_0 t$ ,  $\eta = y$ . Подстановка этого выражения в (3.3.1) приводит к уравнению

$$J(\psi + U_0 \eta, \Delta_3 \psi + \beta \eta) = 0, \quad (3.3.21)$$

где введен трехмерный оператор Лапласа  $\Delta_3 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2 + \partial^2 / \partial \zeta^2$ , а якобиан вычисляется по переменным  $\xi, \eta$ . Запишем две ветви частного интеграла уравнения (3.3.21) в виде линейных соотношений (ср. с § 2.2)

$$\Delta_3 \psi + \beta \eta = -\lambda^2 (\psi + U_0 \eta), \quad \rho \leq 1, \quad (3.3.22)$$

$$\Delta_3 \psi + \beta \eta = \kappa^2 (\psi + U_0 \eta), \quad \rho \geq 1, \quad (3.3.23)$$

где  $\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$ , а  $\lambda$  и  $\kappa$  — положительные постоянные. Переход с одной ветви на другую происходит на сфере  $\rho = 1$ , на которой в силу непрерывности  $\Delta_3 \psi$  должны выполняться условия

$$\Delta_3 \psi + \beta \eta = \psi + U_0 \eta = 0, \quad \rho = 1. \quad (3.3.24)$$

Кроме того, потребуем непрерывности производной по нормали к сфере

$$\left. \partial \psi / \partial \rho \right|_{\rho=1-0} = \left. \partial \psi / \partial \rho \right|_{\rho=1+0}. \quad (3.3.25)$$

Условие исчезновения возмущений на бесконечности с учетом (3.3.23) дает  $\kappa^2 = \beta / U_0$ . Переходя к сферическим координатам с помощью соотношений  $\xi = \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\zeta = \rho \cos \theta$ , ищем решения уравнений (3.3.22) и (3.3.23) в виде

$$\psi = [F(\lambda \rho) / \sqrt{\rho} - (\beta + \lambda^2 U_0) \rho / \lambda^2] \sin \theta \sin \varphi, \quad \rho < 1, \quad \psi = [G(\kappa \rho) / \sqrt{\rho}] \sin \theta \sin \varphi, \quad \rho > 1.$$



Учитывая, что  $\Delta_3 \psi = \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]$ , для  $F(t)$  и  $G(t)$  получаем уравнения цилиндрических функций  $Z'' + Z'/t - [(3/2)^2/t^2 \mp 1]Z = 0$ , где верхний знак относится к  $F$ , а нижний - к  $G$ . Требуя ограниченности решений, окончательно получим

$$\psi = \begin{cases} \left[ \frac{A}{\sqrt{\rho}} J_{3/2}(\nu \rho) - \frac{B + \nu^2 U_0}{\nu^2} \rho \right] \sin \theta \sin \varphi, & \rho < 1, \\ \frac{B}{\sqrt{\rho}} K_{3/2}(\nu \rho) \sin \theta \sin \varphi, & \rho > 1. \end{cases} \quad (3.3.26)$$

Для определения трех постоянных  $A$ ,  $B$  и  $\nu$  имеются три условия (3.3.24), (3.3.25), из которых легко находим

$$A = \frac{B}{\sqrt{2} J_{3/2}(\nu)}, \quad B = -\frac{B}{\nu^2 K_{3/2}(\nu \epsilon)}, \quad \frac{J'_{3/2}(\nu)}{\sqrt{2} J_{3/2}(\nu)} - \frac{3}{2\nu^2} = \frac{3}{2\nu^2 \epsilon^2} - \frac{K'_{3/2}(\nu \epsilon)}{\nu K_{3/2}(\nu \epsilon)}.$$

Последнее соотношение можно переписать в эквивалентной форме (ср. с § 2.2)

$$f(\nu) \equiv -\frac{J_{5/2}(\nu)}{\sqrt{2} J_{3/2}(\nu)} = \frac{K_{5/2}(\nu \epsilon)}{\nu K_{3/2}(\nu \epsilon)} \equiv g(\nu \epsilon). \quad (3.3.27)$$

Так как цилиндрические функции полуцелого порядка выражаются через элементарные, нетрудно получить

$$f(\nu) = \frac{\sin \nu}{\sin \nu - \nu \cos \nu} - \frac{3}{\nu^2}, \quad g(\nu \epsilon) = \frac{3}{\nu \epsilon^2} + \frac{1}{1 + \nu \epsilon}.$$

Простой анализ показывает, что при изменении  $U_0$  от 0 до  $+\infty$  функция  $g(\nu \epsilon)$  монотонно меняется от 0 до  $+\infty$ , а  $\nu \epsilon$  - от  $\infty$  до 0. При любом заданном  $\nu \epsilon$ ,  $0 < \nu \epsilon < \infty$ , уравнение (3.3.27) имеет бесчисленное множество корней  $\nu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , которые соответственно стремятся к нулям функции  $J_{3/2}(\nu)$  при  $U_0 \rightarrow \infty$  и к нулям функции  $J_{5/2}(\nu)$  при  $U_0 \rightarrow 0$ .

При  $U_0 > 0$  построенные решения в точности не удовлетворяют граничным условиям на поверхности и на дне, однако невязка тем меньше, чем меньше абсолютный размер ядра (область  $\rho < 1$  вихревого образования (3.3.26), поскольку вне его решение затухает экспоненциально. При  $U_0 = 0$  (3.3.26) переходит в

$$\psi = \frac{B}{\sqrt{\nu^2}} \begin{cases} \left[ \frac{J_{5/2}(\nu^* \rho)}{J_{3/2}(\nu^*)} - \rho \right] \sin \theta \sin \varphi, & \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1, \end{cases}$$

где  $\nu^*$  - любой положительный корень уравнения  $J_{5/2}(\nu) = 0$ . Эти решения аналогичны модонам Стерна (2.2.21), с тем отличием, что теперь они представляют изолированные стационарные трехмерные вихревые образования. Граничные условия на поверхности и на дне (3.3.1) и (3.3.2) удовлетворяются автоматически, если выполняется одно из неравенств:

1)  $1/B \leq z_0 \leq 1 - 1/B$ ; 2)  $z_0 = 0$ ,  $1/B \leq 1$ ; 3)  $z_0 = 1$ ,  $1/B \leq 1$ . В первом случае модон в форме эллипсоида вращения целиком погружен в океан; в двух остальных он занимает только половину объема такого эллипсоида и своей горизонтальной гранью примыкает либо к поверхности (случай 2), либо ко дну (случай 3). Оценим максимальный горизонтальный размер трехмерного модона, полностью погруженного в океан. Очевидно, для этого должно быть  $B \geq 2$ , т.е.  $L^* \leq H^* N^* / 2\Omega^*$ ; при  $H^* = 4$  км,  $N^* = 2 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$  и  $\Omega^* = 10^{-4} \text{с}^{-1}$  получаем в качестве максимального значения для большой полуоси эллипсоида  $L_{\text{max}}^* = 40$  км. В случае приповерхностного или придонного вихря эта оценка вдвое больше.

Двухмерные и трехмерные солитоны представляют существенно нелинейные образования на бета-плоскости: при  $\beta = 0$  такие решения не существуют [3, 4].

Структура трехмерного вихря определяется номером корня  $\sqrt{}$ . В простейшем случае наименьшего положительного корня солитон состоит из двух вихрей разных знаков на каждом из горизонтов, пересекающих его ядро.

Рассмотренные выше примеры показывают, что в стратифицированной среде, как и в однородной, возможны решения типа бегущих волн, распространяющихся как на запад (пример 1), так и на восток (пример 2), однако совершенно различной структуры. Вопрос об устойчивости таких образований остается пока открытым.

### 3.4. Стационарные бароклинные потоки

В настоящем параграфе мы изложим общую схему решения стационарных бароклинных задач в безграничном океане при отсутствии ветра и придонного трения, но для произвольных вертикальных стратификаций и финитном рельефе дна. При указанных допущениях исходные уравнения (3.3.1) - (3.3.3) имеют интеграл

$$\Delta p + (\rho_z / B^2 N^2)_z + \beta y = F(p, z), \quad (3.4.1)$$

$$\rho_z / B^2 N^2 = F_0(p), \quad z = 0, \quad (3.4.2)$$

$$\rho_z / B^2 N^2 - \beta h = F_1(p), \quad z = 1, \quad (3.4.3)$$

где функции  $F(p, z)$ ,  $F_0(p)$  и  $F_1(p)$  предполагаются однозначными. Как уже неоднократно отмечалось выше, вид таких функций определяется характером стационарирования. Чтобы иметь возможность применить методы линейного анализа, мы будем рассматривать только функции вида

$$F(p, z) = C(z)p + D(z), \quad (3.4.4)$$

$$F_{0,1}(p) = C_{0,1}p + D_{0,1}, \quad (3.4.5)$$

где  $C(z)$  и  $D(z)$  зависят только от вертикальной координаты, а  $C_{0,1}$  и  $D_{0,1}$  - некоторые постоянные. Установим теперь, какие возможные типы вер-

тикальных и поперечных профилей набегающих потоков совместимы с (3.4.1)–(3.4.5), считая при этом, что на бесконечности ( $x \rightarrow \infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ ) скорость набегающего потока везде сохраняет знак, причем в соответствующем пределе  $p \rightarrow P(y, z)$ . С учетом (3.4.4.) – (3.4.5) из соотношений (3.4.1) – (3.4.3) находим

$$P_{yy} + (P_z/B^2 N^2)_z + \delta y = C(z)P + D(z), \quad (3.4.6)$$

$$P_z/B^2 N^2 = C_0 P + D_0, \quad z = 0, \quad (3.4.7)$$

$$P_z/B^2 N^2 = C_1 P + D_1, \quad z = 1, \quad (3.4.8)$$

При заданных  $C$  и  $D$  эта задача легко решается методом Фурье аналогично тому, как это описано в § 3.3. Пусть  $\lambda_n$  и  $Z_n$  – собственные числа и функции спектральной задачи

$$(Z'/N^2)' - B^2 C(z)Z = -\lambda Z, \quad (3.4.9)$$

$$Z'/N^2 - B^2 C_{0,1} Z = 0, \quad z = 0, 1. \quad (3.4.10)$$

Из общей теории [47] устанавливается ортонормированность собственных функций и неограниченное возрастание собственных чисел, из которых неположительных может быть лишь конечное число. Из (3.4.9) для произвольного  $n$  нетрудно получить полезное тождество

$$\lambda_n = B^2 \int_0^1 C(z) Z_n^2 dz + \int_0^1 \frac{Z_n'^2}{N^2} dz + B^2 [C_0 Z_n^2(0) - C_1 Z_n^2(1)],$$

из которого следует, что при  $C \geq 0$ ,  $C_0 > 0$ ,  $C_1 \leq 0$  всегда  $\lambda_n > 0$ .

Пологая

$$P(y, z) = \sum P_n(y) Z_n(z), \quad (3.4.11)$$

из (3.4.6) – (3.4.10) стандартным методом получим

$$P_n'' = \lambda_n P_n/B^2 = \gamma_n - \delta_n \delta y, \quad (3.4.12)$$

где обозначено

$$\gamma_n = \tilde{D}_n + D_0 Z_n(0) - D_1 Z_n(1), \quad \delta_n = \int_0^1 Z_n dz, \quad \tilde{D}_n = \int_0^1 D(z) Z_n dz.$$

Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений (3.4.12) находятся стандартными методами. Таким образом, при любых заданных  $C$  и  $D$  распределение давления в набегающем потоке определяется по формуле (3.4.11). С помощью геострофического соотношения  $U(y, z) = -P_y$  находим профиль скорости.

Дифференцируя (3.4.6) - (3.4.8) по  $y$ , можно непосредственно получить задачу для  $U$ :

$$U_{yy} + (U_z/B^2 N^2)_z - \beta = C(z)U, \quad (3.4.13)$$

$$U_z/B^2 N^2 = C_{0,1}U, \quad z=0,1. \quad (3.4.14)$$

Эти соотношения показывают, что структура набегающего потока не зависит от вида функции  $D(z)$  и постоянных  $D_0$  и  $D_1$ , поэтому в дальнейшем мы будем полагать  $D \equiv D_0 = D_1 = 0$ . Если, например, распределение скорости в набегающем потоке зависит только от  $z$ , т.е.  $U = U(z)$ , из (3.4.13) и (3.4.14) сразу однозначно определяются функция  $C(z)$  и постоянные  $C_0$  и  $C_1$ :

$$C(z) = [(U'/B^2 N^2)' - \beta] / U, \quad (3.4.15)$$

$$C_0 = U'(0)/B^2 N^2(0)U(0), \quad C_1 = U'(1)/B^2 N^2(1)U(1). \quad (3.4.16)$$

Заметим, что при  $\beta = 0$   $U(z)$  всегда является собственной функцией спектральной задачи (3.4.9) - (3.4.10), которой соответствует нулевое собственное число  $\lambda_0 = 0$ .

Вернемся к построению решения задачи (3.4.1) - (3.4.3). Полагая  $p = P(y, z) + \delta\psi(x, y, z)$  и учитывая (3.4.4) и (3.4.5), получим для топографического возмущения поля давления задачу

$$\Delta\psi + (\psi_z/B^2 N^2)_z - C(z)\psi = 0; \quad \psi_z/B^2 N^2 - C_0\psi = 0, \quad z=0;$$

$$\psi_z/B^2 N^2 - C_1\psi = h(x, y), \quad z=1,$$

решение которой также удобно искать в виде (3.4.11):

$$\psi(x, y, z) = \sum \psi_n(x, y) Z_n(z).$$

Для коэффициентов разложения находим

$$\Delta\psi_n - \lambda_n\psi_n/B^2 = -Z_n(1)h(x, y), \quad \psi_n \rightarrow 0 \quad \text{на бесконечности,}$$

что совпадает со стандартной задачей для баротропного случая. Как и в предыдущем параграфе, окончательно получаем

$$\psi = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, y-\eta; z) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где, например, для восточного потока

$$G(x, y, z) = \sum g_n(x, y) Z_n(1) Z_n(z),$$

$$g_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{B} r\right), & \lambda_n > 0, \\ -\frac{1}{4} Y_0\left(\frac{\sqrt{-\lambda_n}}{B} r\right) - \frac{1}{\pi} S\left(\frac{\sqrt{-\lambda_n}}{B} r, \theta\right), & \lambda_n < 0 \end{cases}$$

причем  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Этим завершается формальное построение решения.

Мы видели выше, что основная трудность при решении задач рассматриваемого класса связана с построением собственных функций и определением соответствующих собственных чисел вспомогательной спектральной задачи (3.4.9) – (3.4.10). Ограничиваясь для простоты случаем, когда  $U = U(z)$ , укажем условия, при которых уравнение (3.4.9) заведомо интегрируется в элементарных функциях. Учитывая (3.4.15) и (3.4.16), перепишем задачу (3.4.9) – (3.4.10) в виде

$$(Z'/N^2)' + \{ [B^2 \delta - (U'/N^2)'] / U + \lambda \} Z = 0, \quad (3.4.17)$$

$$Z' - U'Z/U = 0, \quad z = 0; 1. \quad (3.4.18)$$

Рассмотрим класс стратификаций  $N^2(z) = (1 + \gamma z)^{-2}$ ,

где  $\gamma$  – некоторый постоянный неотрицательный параметр. Можно показать, что в безразмерных переменных такой закон отвечает невозмущенному распределению плотности вида

$$\rho^{(0)}(z) = \exp[-B^2 \alpha^2 (1-z)/(1+\gamma z)]. \quad (3.4.19)$$

Так как  $\alpha^2 \ll 1$  (см. § 1.2), для умеренных стратификаций с высокой точностью имеем  $\rho^{(0)}(z) = \rho_\infty - \delta_0 / (1 + \gamma z)$ , где  $\rho_\infty = 1 + B^2 \alpha^2 / \gamma$  и  $\delta_0 = B^2 \alpha^2 (1 + \gamma) / \gamma$ . Это – так называемая гиперболическая модель плотности [19]; здесь  $\rho_\infty$  имеет смысл асимптотического значения плотности на больших глубинах, а  $\delta_0$  есть возмущение плотности на поверхности. При  $\gamma = 0$  из (3.4.19) следует экспоненциальный закон распределения плотности, для которого  $N^2 = 1$ .

Пусть далее  $C(z) \equiv C \equiv \text{const}$ . Это порождает класс профилей скорости набегающего потока, которые должны определяться из уравнения

$$(U'/N^2)' - CB^2U = \delta B^2.$$

Общее решение имеет вид

$$U = A_1(1 + \gamma z)^{\mu_1} + A_2(1 + \gamma z)^{\mu_2} - \delta / C, \quad (3.4.20)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – произвольные постоянные, а  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – корни уравнения  $\mu^2 + \mu - CB^2/\gamma^2 = 0$ . При  $C = 0$  получаем

$$U = (\delta B^2 / \gamma^2) \ln(1 + \gamma z) + A_1 + A_2 / (1 + \gamma z). \quad (3.4.21)$$

Обратимся теперь к построению собственных функций. Уравнение (3.4.17) переходит в  $[(1 + \gamma z)^2 Z']' + (\lambda - CB^2)Z = 0$ . Его общее решение имеет вид

$$Z(z) = \alpha_1(1 + \gamma z)^{S_1} + \alpha_2(1 + \gamma z)^{S_2}, \quad (3.4.22)$$

где  $S_{1,2}$  суть корни уравнения  $S^2 + S + (\lambda - CB^2)/\gamma = 0$ . Для опреде-

ления собственных чисел и постоянных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с точностью до произвольного постоянного множителя служат граничные условия (3.4.18), которые приводят в общем случае к достаточно громоздким уравнениям. Мы рассмотрим два конкретных примера, когда такой расчет сравнительно прост.

**Пример 1.** Пусть в (3.4.20)  $A_1 = A_2 = 0$ ,  $C = -\delta/U_0$ , т.е. скорость набегающего потока постоянна,  $U = U_0$ . В этом случае

$$S_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(\lambda + 6\delta^2/U_0)/\gamma^2}, \quad S_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(\lambda + 6\delta^2/U_0)/\gamma^2},$$

где фиксируется ветвь корня с неотрицательной вещественной частью. Подставляя (3.4.22) в граничные условия (3.4.18), получим однородную систему  $S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 = 0$ ,  $S_1(1+\gamma)^{S_1}\alpha_1 + S_2(1+\gamma)^{S_2}\alpha_2 = 0$ .

Условие существования нетривиальных решений дает характеристическое уравнение  $S_1 S_2 [(1+\gamma)^{S_2-S_1} - 1] = 0$ , где всегда  $S_1 \neq 0$ . Если  $S_2 = 0$ , то  $\lambda = \lambda_0 = -6\delta^2/U_0$ , причем в этом случае  $\alpha_1 = 0$ ,  $S_1 = -1$  и  $Z = \alpha_2 = \text{const}$ , что соответствует баротропной моде. Если  $(1+\gamma)^{S_2-S_1} = 1$ , то  $S_2 - S_1 = 2n\pi i / \ln(1+\gamma)$ ; при  $n=0$  имеем  $S_1 = S_2 = -1/2$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  и  $Z \equiv 0$  не является собственной функцией. Таким образом,  $n \neq 0$ , причем  $S_1 = -1/2 - n\pi i / \ln(1+\gamma)$ ,  $S_2 = -1/2 + n\pi i / \ln(1+\gamma)$  и  $\alpha_1 = \alpha S_2$ ,  $\alpha_2 = -\alpha S_1$ , где  $\alpha$  - произвольная постоянная. Нормируя собственные функции, окончательно получим.

$$Z_0(z) \equiv 1, \quad \lambda_0 = -6\delta^2/U_0,$$

$$Z_n(z) = \sqrt{\frac{2\gamma}{(1/4 + \delta_n^2)\ln(1+\gamma)}} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma z}} \left\{ \frac{1}{2} \sin[\delta_n \ln(1+\gamma z)] + \delta_n \cos[\delta_n \ln(1+\gamma z)] \right\} \quad (3.4.23)$$

$$\delta_n = n\pi / \ln(1+\gamma), \quad n=1,2,\dots, \quad \lambda_n = -6\delta^2/U_0 + \gamma^2(1/4 + \delta_n^2).$$

При  $\gamma = 0$ , раскрывая неопределенности, находим

$$Z_n(z) = \sqrt{2} \cos n\pi z, \quad n=1,2,\dots, \quad \lambda_n = -6\delta^2/U_0 + (n\pi)^2.$$

**Пример 2.** Пусть  $C=0$  и  $\delta=0$ ; так как в этом случае  $U(z)$  всегда является собственной функцией, ее удобно пронормировать (это возможно за счет выбора масштаба  $U^*$ ), и мы получаем из (3.4.21)

$$U(z) \equiv Z_0(z) = A_1 + A_2/(1+\gamma z), \quad \lambda_0 = 0,$$

где

$$A_1^2 + (2A_1 A_2 / \gamma) \ln(1+\gamma) + A_2^2 / (1+\gamma) = 1.$$

Все остальные собственные функции определяются по формуле (3.4.22), где теперь

$$S_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4\lambda/\gamma^2}, \quad S_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4\lambda/\gamma^2}.$$

Из граничных условий (3.4.18) нетрудно построить трансцендентное характеристическое уравнение для определения собственных чисел. Здесь мы ограничимся частным случаем, когда это уравнение упрощается, и его корни находятся в явном виде. Примем  $A_1 = 0$ ; тогда  $A_2 = \sqrt{1+\gamma}$  и граничные условия (3.4.18) дадут однородную линейную систему

$$(S_1+1)\alpha_1 + (S_2+1)\alpha_2 = 0, \quad (S_1+1)(1+\gamma)^{S_1}\alpha_1 + (S_2+1)(1+\gamma)^{S_2}\alpha_2 = 0$$

с характеристическим уравнением  $(s_1+1)(s_2+1)[(1+\gamma)^{s_2-s_1}-1] = 0$ .

Так как случай  $\lambda=0$  уже рассмотрен, теперь  $(s_1+1)(s_2+1) \neq 0$ , поэтому  $s_2 - s_1 = 2n\pi i / \ln(1+\gamma)$ ,  $h \geq 1$  и  $\alpha_1 = \alpha(s_2+1)$ ,  $\alpha_2 = -\alpha(s_1+1)$ , где постоянная  $\alpha$  определяется из условия нормировки. Окончательно получим

$$Z_0(z) \equiv U(z) \frac{\sqrt{1+\gamma}}{1+\gamma z}, \quad \lambda_0 = 0,$$

$$Z_n(z) = \sqrt{\frac{2\gamma}{(1/4 + \delta_n^2)\ln(1+\gamma)}} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma z}} \left\{ \delta_n \cos[\delta_n \ln(1+\gamma z)] - \frac{1}{2} \sin[\delta_n \ln(1+\gamma z)] \right\}, \quad \lambda_n = \gamma^2(1/4 + \delta_n), \quad n=1,2,\dots,$$

где  $\delta_n$  по-прежнему определяется формулой (3.4.23).

В предельном случае  $\gamma=0$  находим

$$Z_0 \equiv U = 1, \quad \lambda_0 = 0, \quad Z_n = \sqrt{2} \cos n\pi z, \quad h=1,2,\dots, \quad \lambda_n = (n\pi)^2,$$

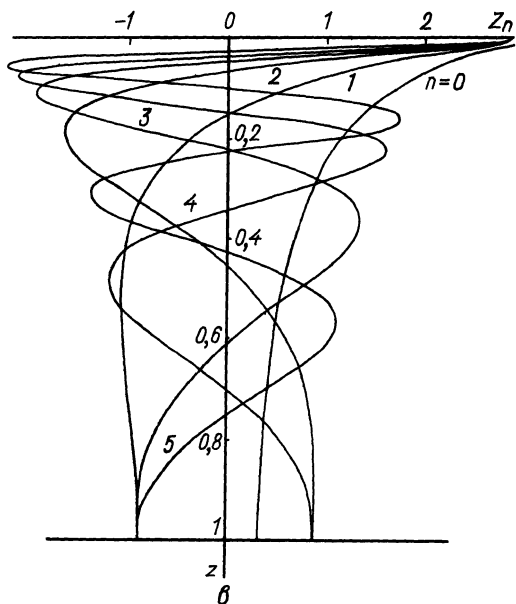
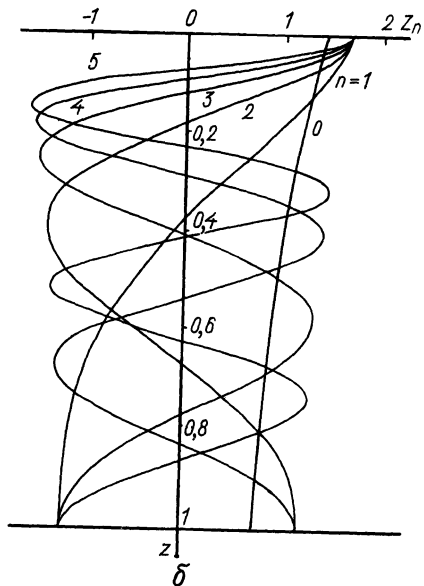
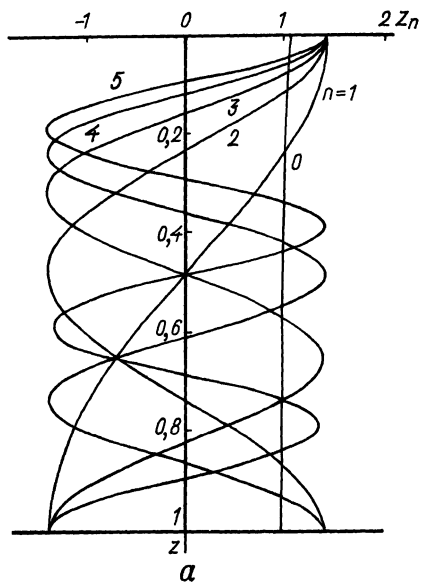
что совпадает с результатами примера I при  $\beta=0$ .

Отметим, что, если в (3.4.21) принять  $\beta = A'_2 \gamma / B^2$ ,  $A_1 + A_2 = A'_1$  и затем перейти к пределу при  $\gamma \rightarrow 0$ , мы получим линейный профиль скорости  $U(z) = A'_1 + A'_2 z$  с условием нормировки  $A'_1{}^2 + A'_1 A'_2 + A'_2{}^2 / 3 = 1$ . Собственные функции для такой задачи построены в работе [106], при этом для определения собственных чисел получается трансцендентное уравнение.

На рис. 32 для иллюстрации приведены графики первых шести ( $n=0,1,\dots,5$ ) из построенных выше в примере 2 собственных функций для значений параметра  $\gamma = 0, 1, 1$  и  $10$ .

### 3.5. "Конусы" Тэйлора-Хогга

Выше была развита общая схема решения стационарных задач для бароклинных потоков, в которых потенциальный вихрь является линейной функцией давления на каждом горизонте. Искомое поле давления представля-



Р и с. 32. Собственные функции ( $n = 0, 1, \dots, 5$ ) спектральной задачи из примера 2 (§ 3.4) для различных значений параметра  $\gamma$   
 $a - \gamma = 0, I, \delta - I,$   
 $v - IO$



лось в виде ряда по зависящим от вертикальной координаты собственным функциям некоторой вспомогательной спектральной задачи. Такие ряды обычно неудобны для исследования из-за медленной сходимости (особенно возле дна  $z = 1$ ), поэтому представляет интерес рассмотрение некоторых частных случаев, когда функция Грина выражается в конечном виде. Один из примеров указанного типа приводится ниже.

Движение предполагается установившимся, действием ветра и придонного трения пренебрегаем, бета-эффект не учитывается. Перепишем интегралы (3.4.1) - (3.4.2) в виде

$$\Delta p + (\rho_z / B^2 N^2)_z = F(p, z), \quad (3.5.1)$$

$$\rho_z / B^2 N^2 = F_0(p), \quad z = 0, \quad (3.5.2)$$

$$\rho_z / B^2 N^2 = \delta h + F_1(p), \quad z = 1. \quad (3.5.3)$$

Пусть в набегающем потоке при  $|x| \rightarrow \infty$  распределение давления имеет вид  $P(y, z) = -U(z)(\gamma_0 y + \gamma_1 y^2 / 2)$ , которому при произвольных постоянных  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  отвечает профиль скорости  $U(y, z) = U(z)(\gamma_0 + \gamma_1 y)$  с произвольным вертикальным и линейным поперечным сдвигом. Примем, что вид функций  $F$ ,  $F_0$  и  $F_1$  полностью определяется условиями на бесконечности. Переходя в (3.5.1) - (3.5.3) к пределу, получим функциональные уравнения, разрешая которые, найдем

$$F(t, z) = -U(z)\gamma_1 + (U'/B^2 N^2)'(t/U), \quad (3.5.4)$$

$$F_{0,1}(t) = U't/B^2 N^2 U, \quad z = 0; 1. \quad (3.5.5)$$

Полагая, как обычно,  $p = P(y, z) + \delta\psi(x, y, z)$  и учитывая (3.5.4) и (3.5.5), приходим к стандартной задаче

$$\Delta\psi + (\psi_z / B^2 N^2)_z - (U'/N^2)'(\psi/B^2 U) = 0, \quad (3.5.6)$$

$$\psi_z - U'(0)\psi/U(0) = 0, \quad z = 0, \quad (3.5.7)$$

$$\psi_z - U'(1)\psi/U(1) = B^2 N^2 h(x, y), \quad z = 1, \quad (3.5.8)$$

$$\psi \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем осесимметричных препятствий вида  $h = h(r)$ . Тогда  $\psi = \psi(r, z)$  и для построения решения удобно воспользоваться интегральным преобразованием Фурье-Бесселя [66]

$$\bar{\psi}(t, z) = \int_0^\infty \psi(r, z) r J_0(tr) dr, \quad \psi(r, z) = \int_0^\infty \bar{\psi}(t, z) t J_0(rt) dt.$$

Умножая (3.5.6) - (3.5.8) на  $r J_0(tr)$  и интегрируя результаты по  $r$  в пределах от 0 до  $\infty$ , с учетом свойств функции Бесселя получим

$$(\bar{\psi}_z / N^2)_z - [(U'/N^2)' / U + B^2 t^2] \bar{\psi} = 0, \quad (3.5.9)$$

$$\bar{\psi}_z - U'(0)\bar{\psi}/U(0) = 0, \quad z = 0, \quad (3.5.10)$$

$$\bar{\psi}_z - U'(1)\bar{\psi}/U(1) = B^2 N^2(1)\bar{h}, \quad z = 1. \quad (3.5.11)$$

Эта задача заведомо имеет единственное решение, если выполнены условия  $U'(1)/U(1) \leq 0$ ,  $U'(0)/U(0) \geq 0$ ,  $(U'/N^2)/U \geq 0$ . Например, так будет всегда при  $U = U_0 = \text{const}$ ; не умаляя общности, можно принять  $U_0 = 1$ . Если к тому же  $N^2(z) = (1 + \gamma z)^{-2}$ , решение выписывается в явном виде

$$\bar{\psi} = \bar{h}(t) g(z, t) / t^2, \quad (3.5.12)$$

где

$$g(z, t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(1+\gamma)(1+\gamma z)}} \frac{\omega \operatorname{ch}[\omega \ell n(1+\gamma z)] + \frac{1}{2} \operatorname{sh}[\omega \ell n(1+\gamma z)]}{\operatorname{sh}[\omega \ell n(1+\gamma)]} \quad (3.5.13)$$

и  $\omega = \sqrt{1/4 + B^2 t^2 / \gamma^2} > 0$ . В частном случае  $\gamma = 0$  ( $N^2 \equiv 1$ ) из (3.5.13) получаем

$$g(z, t) = B t \operatorname{ch} B t z / \operatorname{sh} B t. \quad (3.5.14)$$

По формуле обращения

$$\psi(\tau, z) = \int_0^\infty \frac{g(z, t)}{t} J_0(\tau t) \bar{h}(t) dt. \quad (3.5.15)$$

Можно показать, что (3.5.13) удовлетворяет при всех  $\gamma \geq 0$  условию  $g_z \geq 0$ , причем равенство достигается только при  $z = 0$ . Это означает, что в окрестности дна влияние рельефа сказывается наиболее сильно, что вполне естественно.

Примем теперь для простоты  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0$  (отсутствует поперечный сдвиг скорости в набегающем потоке) и рассмотрим вопрос о критических точках результирующего течения  $p = -\psi + b\psi(\tau, z)$ . Как и в § 2.4, для произвольного горизонта  $z$  получаем условие существования критических точек

$$b > [\max_{\tau} |\psi_{\tau}|]^{-1} = \min_{\tau} \mathcal{F}(\tau, z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (3.5.16)$$

где согласно (3.5.15)

$$\mathcal{F}(\tau, z) = \left[ \int_0^\infty g(z, t) J_1(\tau t) \bar{h}(t) dt \right]^{-1}. \quad (3.5.17)$$

Так как  $g$  растет с глубиной, для выполнения (3.5.16) необходимо

$$b > b_{\text{кр}} = \min_{\tau} \mathcal{F}(\tau, 1), \quad (3.5.18)$$

где с учетом (3.5.17) имеем

$$\mathcal{F}(\tau, 1) = 1/I(\tau, 1), \quad (3.5.19)$$

$$I(r, t) = \frac{\gamma}{\gamma+1} \left| \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} + \omega \operatorname{cth}(\omega \ln(1+\gamma)) \right] h(t) J_1(tr) dt \right|. \quad (3.5.20)$$

В частности, при  $\gamma = 0$  находим выражение

$$I(r, t) = B \int_0^{\infty} \bar{h}(t) J_1(tr) t \operatorname{cth} Bt dt,$$

установленное Хаппертом /ИЮ/. Из (3.5.19) следует, что с ростом параметра  $B$  величина  $\mathcal{F}(r, t)$  убывает, т.е. усиление стратификации способствует более раннему возникновению критических точек. Поскольку  $\min_r \mathcal{F}(r, z)$  с уменьшением глубины возрастает, может случиться так, что выше некоторого горизонта  $z^*$  застойных точек уже нет. Это означает, что трехмерная область замкнутых линий тока представляет колоколообразную полость, несколько смещенную вправо по отношению к препятствию, если смотреть в направлении набегающего потока (так называемый "конус" Тейлора-Хогга). Условие, при котором эта область выходит на поверхность, имеет вид  $\delta > \min_r \mathcal{F}(r, 0)$ .

Вернемся к интегралу (3.5.20) и исследуем его поведение в зависимости от степени гладкости функции  $h(r)$ . Подынтегральная функция

$$f(t) = \gamma(1+\gamma)^{-1} \left[ 1/2 + \omega \operatorname{cth}(\omega \ln(1+\gamma)) \right] \bar{h}(t) J_1(tr)$$

при малых и больших значениях аргумента имеет асимптотическое представление

$$f(t) \sim \begin{cases} \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} \left[ 1 + \operatorname{cth} \left( \frac{1}{2} \ln(1+\gamma) \right) \right] \bar{h}(0) \frac{tr}{2} \rightarrow 0, & t \rightarrow 0, \\ \frac{Bt}{1+\gamma} \bar{h}(t) J_1(tr), & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Здесь мы использовали тот факт, что при малых  $t$  приближенно  $\bar{h}(t) \approx \bar{h}(0) = \int_0^{\infty} h(r) r J_0(0) dr = V/2\pi$ , где  $V$  — конечный объем препятствия.

Таким образом, для установления сходимости интеграла (3.5.20) достаточно изучить поведение  $\bar{h}(t)$  при больших значениях аргумента. Предположим, что  $h(r)$  в некоторой точке  $r_0 > 0$  имеет разрыв (препятствие с вертикальной стенкой), в окрестности которого справедливо представление

$$h(r) = \begin{cases} h_-(r_0) + O \left[ (r-r_0)^{\mu_-} \right], & r \rightarrow r_0 - 0, \mu_- > 0, \\ h_+(r_0) + O \left[ (r-r_0)^{\mu_+} \right], & r \rightarrow r_0 + 0, \mu_+ > 0. \end{cases}$$

Полагая  $\bar{h}(t) = \int_0^{r_0} h(r) J_0(rt) r dr + \int_{r_0}^{\infty} h(r) J_0(rt) r dr$ , воспользуемся

свойством  $J_0(rt) = (1/rt) d(r J_1(rt))/dr$ . Интегрируя по частям, получим

$$\bar{h}(t) = \frac{r_0}{t} J_1(r_0 t) [h_-(r_0) - h_+(r_0)] - \frac{1}{t} \int_0^{\infty} r J_1(rt) h'(r) dr.$$

Последний интеграл сходится, так как

$$h'(r) = \begin{cases} 0 [(r-r_0)^{M-1}], & r \rightarrow r_0 - 0, \\ 0 [(r-r_0)^{M+1}], & r \rightarrow r_0 + 0 \end{cases}$$

имеет интегрируемую особенность. Таким образом,

$$f(t) \approx B r_0 (1+\gamma)^{-1} J_1(r_0 t) [h(r_0) - h_+(r_0)] J_1(rt), \quad t \rightarrow \infty.$$

С помощью асимптотических представлений для цилиндрических функций при больших значениях аргумента (см. § 2.6) имеем

$$J_1(r_0 t) J_1(rt) \approx (\pi t \sqrt{rr_0})^{-1} [\cos(r-r_0)t + \sin(r+r_0)t], \quad t \rightarrow \infty,$$

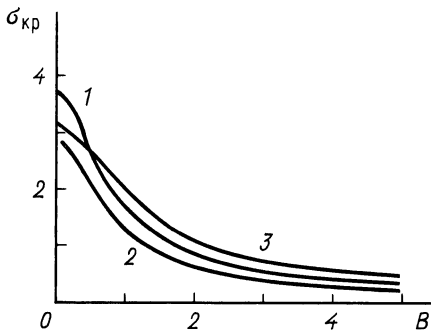
откуда, в частности, следует  $J_1^2(r_0 t) \approx (1 + \sin 2r_0 t) / \pi t r_0$ , т.е.  $I(r, 1)$  расходится при  $r = r_0$  благодаря медленному затуханию подынтегральной функции на бесконечности. Но это означает, что  $b_{кр} = \mathcal{F}(r_0, 1) = 0$  и условие (3.5.18) выполнено при любом  $b > 0$ . Мы пришли к выводу [110], что при наличии у подводного препятствия вертикальных стенок критические точки на дне появляются при любой высоте препятствия, какой бы малой она ни была. В этом состоит принципиальное отличие бароклинного случая от баротропного, где даже для цилиндра  $b_{кр} > 0$ . Физическое объяснение установленного факта состоит в том, что в стратифицированном потоке появляется характерный вертикальный масштаб  $\ell \Omega^* / N^*$  влияния изменений рельефа дна на горизонтальной протяженности  $\ell$ , который стремится к нулю при  $\ell \rightarrow 0$  [110].

Для непрерывных невозрастающих и финитных функций  $h(r)$  интегралы  $I(r, 1)$  сходятся и  $\min_r \mathcal{F}(r, 1) > 0$ . Приведем несколько примеров  $\bar{h}(t)$  для простых модельных препятствий из числа рассмотренных в § 2.4, но нормированных условием  $h(0) = 1$ . Все интегралы Фурье-Бесселя при этом вычисляются в конечном виде (см. [8], с. 696, 726, 731, 754) и представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

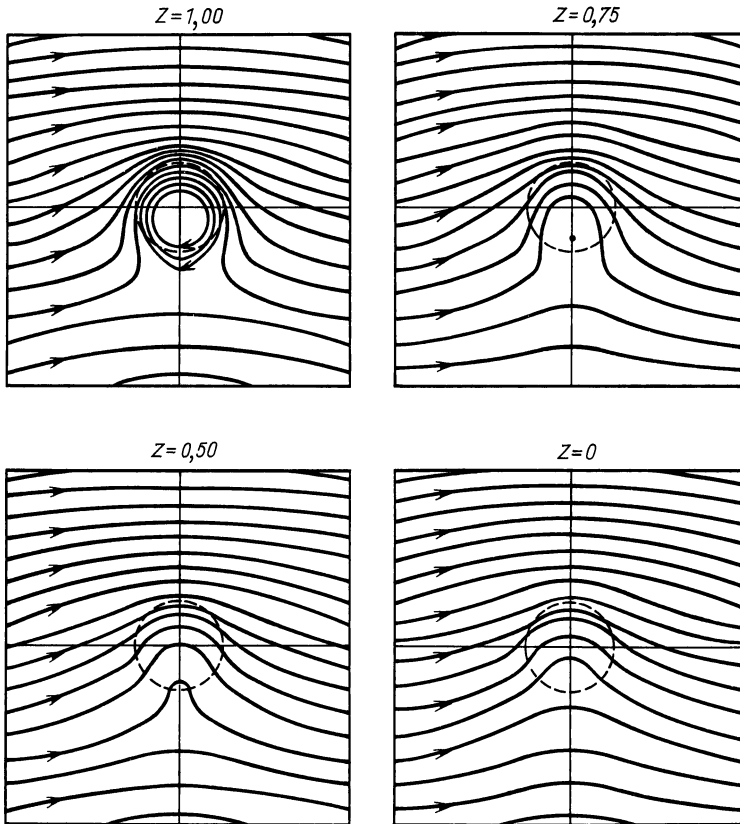
Преобразования Фурье-Бесселя для некоторых простейших форм осесимметричных подводных препятствий

Форма препятствия	$h(r)$	$\bar{h}(t)$
Параболоид вращения	$\theta(1-r)(1-r^2)$	$\frac{\theta}{t^2} J_2(t)$
Полусфера	$\theta(1-r)(1-r^2)^{1/2}$	$1/t^2 (\text{sint}/t - \text{cost})$
Поверхность вращения гауссовой формы	$e^{-r^2}$	$\frac{1}{2} e^{-t^2/4}$
Поверхность вращения с острием	$e^{-r}$	$(1+t^2)^{-3/2}$
Поверхность вращения колоколообразной формы	$(1+r^2)^{-3/2}$	$e^{-t}$



Р и с. 33. Зависимость  $\sigma_{кр}$  от числа Бургера  $B$  в случае осесимметричных препятствий (по Хапперту [110])

1 - параболоид вращения,  
2 - полусфера, 3 - поверхность вращения гауссовой формы



Р и с. 34. Структура конуса Тэйлора-Хогга при  $N^2 = 1$ ,  $B = \sigma = 2$  и линейном вертикальном профиле скорости для цилиндрического препятствия (по Хоггу [108])

В каждом из этих случаев функции  $F(r,1)$  можно найти с помощью численных квадратур и, в частности, определить  $\sigma_{кр} = \min F(r,1)$  в зависимости от параметров  $B$  и  $\gamma$ . При  $\gamma=0$  в случаях параболоида вращения и поверхности вращения гауссовой формы это было сделано Хашпертом [110]; соответствующие результаты представлены на рис. 33, который показывает, как быстро убывает критическое значение  $\sigma$  с ростом стратификации.

В рамках рассматриваемого метода нетрудно учесть вертикальный сдвиг скорости набегающего потока. Пусть, например,  $U(z) = A_0 + A_1 z$ , где  $A_0 > 0$ ,  $A_0 + A_1 > 0$  (скорость не меняет знака по глубине), причем  $A_0^2 + A_1 A_0 + A_1^2/3 = 1$  (условие нормировки  $\int_0^1 U^2(z) dz = 1$ ). Тогда задача (3.5.9) - (3.5.11) также имеет единственное решение  $\bar{\psi} = \chi(t)\bar{h}(t)/t$ ,

где

$$\chi(t) = \frac{(A_0 + A_1)B^2 t (A_0 \operatorname{Vt} \operatorname{ch} Btz + A_1 \operatorname{sh} Btz)}{A_1^2 \operatorname{Vt} \operatorname{ch} Bt + [A_0(A_0 + A_1)B^2 t^2 - A_1^2] \operatorname{sh} Bt}.$$

В частном случае течения без сдвига, когда  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = 0$ , откуда получаем  $\chi(t) = \operatorname{Vch} Btz / \operatorname{sh} Bt$  в полном соответствии с (3.5.12) и (3.5.14).

Результирующее решение имеет вид

$$p = -(A_0 + A_1 z) \left( \gamma_0 y - \frac{\gamma_1}{2} y^2 \right) + \sigma \int_0^\infty \chi(t) \bar{h}(t) J_0(\alpha t) dt$$

и позволяет моделировать достаточно широкий класс интересных ситуаций в окрестности различных осесимметричных подводных гор. При  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0$  для случая препятствия цилиндрической формы решение такой задачи, представленное в виде ряда Фурье, было построено Хоггом [106]. На рис. 34 приведены рассчитанные им [108] картины линий тока на отдельных горизонтах, которые дают представление о пространственной структуре конуса Тэйлора-Хогга. Были приняты следующие значения определяющих параметров:  $B = 6 = 2$ ,  $A_0 = 1,54$  и  $A_1 = -1,20$ . Как видно из рисунка, на дне над препятствием образовалась замкнутая антициклоническая циркуляция. На горизонте  $z = 0,75$  "конус" практически уже не наблюдается, однако на поверхности  $z = 0$  еще чувствуется влияние подводного возмущения.

Решение задачи о вихре Тэйлора в потоке с гиперболической стратификацией и с учетом бета-эффекта дано в работе [14].

### 3.6. Россбиевский волновой след в стратифицированном потоке

Некоторые проявления бета-эффекта в стационарном баротропном потоке были рассмотрены в §§ 2.6, 2.7. Наличие даже сравнительно небольшого подводного препятствия вынуждает поток меандрировать на "подветренной" стороне. Особенно хорошо это видно в случае обтекания круглого острова, когда картина линий тока, помимо меандров, может включать также систему вихрей, образующихся по обе стороны от осевой линии. В настоящем параграфе мы исследуем изменения, которые приносятся стратификацией, причем для построения формальных решений будем использовать результаты § 3.4. Рассмотрим отдельно случаи подводного препятствия и круглого острова.

1. Подводная гора. Пусть кинематически однородный зональный поток  $U = U_0 = \text{const}$  встречает на своем пути финитное возмущение рельефа дна  $h(x, y)$ ; для простоты здесь предполагается  $N^2(z) \equiv 1$ . Тогда, как следует из примера I в § 3.4 для  $\psi = 0$ , собственные функции и собственные числа вспомогательной спектральной задачи легко находятся:  $Z_0(z) \equiv 1$ ,  $Z_n(z) = \sqrt{2} \cos n\pi z$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_n = -\beta B^2/U_0 + (n\pi)^2$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Теперь решение можно представить в стандартной форме  $p = -U_0 y + b\psi(x, y, z)$ , где создаваемое подводным препятствием нормированное возмущение поля давления выражается через функцию Грина в виде

$$\psi = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, y-\eta, z) h(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.6.1)$$

где

$$G(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x, y) Z_n(1) Z_n(z),$$

а  $g_n$  приведены в § 3.4. В западном потоке  $U_0 = -1$  всегда  $\lambda_n < 0$ , поэтому  $g_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\mu_n r)$ , где  $\mu_n = \sqrt{\beta + (n\pi/B)^2}$  и  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , и мы имеем

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \left[ K_0(\mu_0 r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n r) (-1)^n \cos n\pi z \right]. \quad (3.6.2)$$

При  $z > 0$  функция  $K_0(z)$  является монотонно убывающей с экспоненциальной асимптотикой  $K_0(z) \sim \sqrt{\pi/2z} e^{-z}$  при больших значениях аргумента. Отметим очевидные свойства функции  $G$ : она осесимметрична, экспоненциально затухает с ростом  $r$ ,  $G(x, y, 0) < G(x, y, 1)$ , т.е. влияние рельефа с глубиной растет.

Ряд (3.6.2) можно просуммировать и представить результат в виде интеграла. Для этой цели воспользуемся преобразованием Фурье-Бесселя

$$\bar{G}(t, z) = \int_0^{\infty} G(r, z) J_0(rt) r dr. \quad \text{Так как (8/7, с. 686)} \int_0^{\infty} K_0(\mu r) J_0(rt) r dr = 1/(t^2 + \mu^2), \text{ из (3.6.2) следует}$$

$$\bar{G} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{t^2 + \mu_0^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi z}{t^2 + \mu_n^2} \right].$$

С другой стороны, известно, что (8/7, с. 54)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi z}{\alpha^2 + n^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\text{ch} \alpha \pi z}{\text{sh} \alpha \pi} - \frac{1}{2\alpha^2}, \quad |z| \leq 1,$$

поэтому  $\bar{G} = \frac{B}{2\pi \sqrt{t^2 + \beta}} \frac{\text{ch}(B\sqrt{t^2 + \beta} z)}{\text{sh}(B\sqrt{t^2 + \beta})}$ , откуда по формуле обращения

ни окончательно находим

$$G(r, z) = \frac{B}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(B\sqrt{t^2 + \beta} z)}{\text{sh}(B\sqrt{t^2 + \beta})} \frac{J_0(rt) t dt}{\sqrt{t^2 + \beta}}. \quad (3.6.3)$$

Обратимся теперь к более интересному случаю восточного потока  $U_0 = 1$ , когда среди  $\lambda_n = -\beta B^2 + (n\pi)^2$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , может быть конечное число отрицательных собственных значений. Пусть  $M$  — наибольшее из  $n$ , для

которых  $\lambda_n < 0$ . Тогда, переходя к полярным координатам с помощью соотношений  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , имеем

$$g_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0(\alpha_n r), & n \geq M+1, \\ -\frac{1}{4} Y_0(\beta_n r) - \frac{1}{\pi} S(\beta_n r, \theta), & n \leq M, \end{cases}$$

где  $\alpha_n = \sqrt{-\delta + (n\pi/B)^2}$ ,  $n \geq M+1$  и  $\beta_n = \sqrt{\delta - (n\pi/B)^2}$ ,  $n \leq M$ . Функция Грина принимает вид  $G(x, y, z) = \hat{G}(r, z) + g(x, y, z)$ , где выделено осесимметричное слагаемое

$$\hat{G}(r, z) = -\frac{1}{4} Y_0(\beta_0 r) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M Y_0(\beta_n r) (-1)^n \cos n\pi z + \frac{1}{\pi} \sum_{n=M+1}^{\infty} K_0(\alpha_n r) (-1)^n \cos n\pi z \quad (3.6.4)$$

и кососимметрическая (относительно меридиана  $x = 0$ ) часть

$$g(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \left[ S(\beta_0 r, \theta) + 2 \sum_{n=1}^M S(\beta_n r, \theta) (-1)^n \cos n\pi z \right]. \quad (3.6.5)$$

Функцию  $\hat{G}(r, z)$  также можно представить в виде интеграла

$$\hat{G}(r, z) = \frac{B}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(B\sqrt{t^2 - B^2} z)}{\text{sh}(B\sqrt{t^2 - B^2})} \frac{J_0(rt) t dt}{\sqrt{t^2 - B^2}}, \quad (3.6.6)$$

который следует понимать в смысле главного значения по Коши. В отличие от (3.6.3) интеграл (3.6.6) представляет осциллирующую функцию радиальной координаты, что особенно хорошо видно из разложения (3.6.4). Это — стационарные волны Россби; при  $B < \pi\sqrt{\delta}$  всегда  $M = 0$  и в (3.6.4) присутствует только одно осциллирующее слагаемое, отвечающее баротропной моде. В общем случае число возбужденных бароклинных мод равно целой части числа  $\sqrt{\delta} B/\pi$  и растет с увеличением параметра стратификации. Конечная сумма (3.6.5) нейтрализует волны перед препятствием и усиливает их с подветренной стороны, формируя волновой след, наличие которого создает сопротивление, действующее на препятствие. Можно показать [127], что при  $\delta \geq 4$  в стратифицированных потоках присутствует гораздо более сильный след, чем в просто баротропных.

В случае осесимметричных препятствий  $h = h(r)$  интеграл (3.6.1) для восточного потока в полярных координатах  $r, \theta$  можно преобразовать к виду

$$\psi(r, \theta, z) = B \int_0^{\infty} \bar{h}(t) \frac{\text{ch}(B\sqrt{t^2 - B^2} z)}{\text{sh}(B\sqrt{t^2 - B^2})} \frac{J_0(rt) t dt}{\sqrt{t^2 - B^2}} - 2 \left[ S(\beta_0 r, \theta) \bar{h}(\beta_0) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^M (-1)^n \cos n\pi z S(\beta_n r, \theta) \bar{h}(\beta_n) \right],$$

где  $\bar{h}(t) = \int_0^{\infty} h(r) J_0(rt) r dr$ .

2. Ц и л и н д р и ч е с к и й о с т р о в. По аналогии с § 2.7 рассмотрим теперь задачу о возмущении зонального стратифицированного знакопостоянного потока  $U(z)$  создаваемого островом в форме прямого кругового цилиндра единичного радиуса. Представляя решение в виде

$$\rho = -U(z)y + \psi(r, \theta, z) = -U(z)r \sin \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(r, \theta) Z_n(z), \quad (3.6.7)$$



получим  $\Delta\psi_n - \lambda_n\psi_n/B^2 = 0$ ,  $1 < r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Здесь  $\lambda_n$  и  $Z_n$  — собственные числа и функции спектральной задачи (3.4.17) — (3.4.18). Условимся рассматривать только такие западные потоки, для которых собственные числа всегда строго положительны (так, например, будет при  $U_0 = -1$ ). На поверхности цилиндра  $r=1$  должна обращаться в нуль радиальная скорость  $V_r = -p_\theta/r$ , т.е.  $\psi_\theta = U(z)\cos\theta$  при  $r=1$ , откуда следует условие  $\psi = U(z)\sin\theta + Q(z)$  при  $r=1$  с произвольной функцией  $Q(z)$ . Учитывая разложение (3.6.7), получим  $\psi_n = u_n\sin\theta + q_n$  при  $r=1$  для всех  $n \geq 0$ , где  $u_n = \int_0^1 U(z)Z_n(z)dz$ ,  $q_n = \int_0^1 Q(z)Z_n(z)dz$ .

На бесконечности условия принимают следующий вид:  $\psi_n \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $n \geq 0$ . Рассмотрим теперь стандартную краевую задачу

$$\Delta f - \lambda f/B^2 = 0, \quad r > 1, \quad (3.6.8)$$

$$f = u\sin\theta + q, \quad r = 1, \quad (3.6.9)$$

$$f \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.6.10)$$

где  $\lambda$ ,  $B$ ,  $u$ ,  $q$  — некоторые заданные постоянные, и будем искать ее решение в виде ряда Фурье  $f = A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r)\cos m\theta + B_m(r)\sin m\theta]$ . Подстановка этой функции  $f$  в (3.6.8) — (3.6.10) приводит к односторонним уравнениям для  $A_m$  и  $B_m$  вида  $F_m'' + F_m'/r - (\lambda/B^2 + m^2/r^2)F_m = 0$  и следующим граничным условиям:

$$A_m(1) = \delta_{m0}q, \quad B_m(1) = \delta_{m1}u, \quad (3.6.11)$$

$$A_m(\infty) = B_m(\infty) = 0. \quad (3.6.12)$$

Предполагая для простоты, что все собственные числа отличны от нуля, отдельно рассмотрим два случая.

С л у ч а й I ( $\lambda < 0$ ). Полагая  $\nu = \sqrt{-\lambda}/B$ , получим

$$A_m(r) = \alpha_m Y_m(\nu r) + \alpha_m J_m(\nu r), \quad m \geq 0, \quad B_m(r) = \beta_m Y_m(\nu r) + \beta_m J_m(\nu r), \quad m \geq 1,$$

причем условия на бесконечности (3.6.12) удовлетворены тождественно. Граничные условия на поверхности цилиндра (3.6.11) дают

$$\alpha_m Y_m(\nu) + \alpha_m J_m(\nu) = \delta_{m0}q, \quad m \geq 0, \quad (3.6.13)$$

$$\beta_m Y_m(\nu) + \beta_m J_m(\nu) = \delta_{m1}u, \quad m \geq 1. \quad (3.6.14)$$

Этих соотношений недостаточно для определения всех произвольных постоянных, поэтому, как и в баротропном случае, мы должны воспользоваться условием излучения. Это порождает дополнительную бесконечную систему (2.7.10) — (2.7.15), совместный анализ которой с (3.6.13) приводит к заключению, что  $\alpha_m = \alpha_m = 0$  для всех  $m \geq 0$ , причем  $q = 0$ . Для определения остальных постоянных  $\beta_m, \beta_m$  служат уравнения (2.7.14), (2.7.15) и (3.6.14) или им эквивалентные (см. § 2.7).

Таким образом, удовлетворяющее условию излучения решение задачи (3.6.8) - (3.6.10) имеет вид  $f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [\beta_m Y_m(\nu r) + \beta_m Y_m(\nu r)] \sin m \theta$ .

С л у ч а й 2 ( $\lambda > 0$ ). Полагая  $\varkappa = \sqrt{\lambda}/B$  получим с учетом граничных условий (3.6.12)

$$A_m(r) = \alpha_m K_m(\varkappa r), \quad m \geq 0, \quad B_m(r) = \beta_m K_m(\varkappa r), \quad m \geq 1.$$

Из граничных условий (3.6.11) находим  $\alpha_m = \delta_{m0} q / K_m(\varkappa)$ ,  $\beta_m = \delta_{m1} u / K_m(\varkappa)$ ,  $m \geq 0$ . Таким образом,  $f(r, \theta) = q K_0(\varkappa r) / K_0(\varkappa) + u \sin \theta K_1(\varkappa r) / K_1(\varkappa)$ . Из соображений симметрии циркуляционную часть решения мы должны отбросить, т.е. положить  $q = 0$ . Тогда окончательно  $f(r, \theta) = u \sin \theta K_1(\varkappa r) / K_1(\varkappa)$ .

Теперь легко построить общее решение задачи. Введем стандартные функции

$$\Psi(r, \theta, \nu) = \sum_{m=1}^{\infty} [\beta_m Y_m(\nu r) + \beta_m J_m(\nu r)] \sin m \theta,$$

$$\Phi(r, \theta, \nu) = \sin \theta \cdot K_1(\varkappa r) / K_1(\varkappa),$$

где коэффициенты  $\beta_m(\nu)$  и  $\beta_m(\nu)$  для каждого заданного  $\nu$  определяются из бесконечной системы уравнений вида (см. § 2.7)

$$\beta_m Y_m(\nu) + \beta_m J_m(\nu) = \delta_{m1} u, \quad m \geq 1, \quad \frac{\pi}{8k} \beta_{2k} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2 - 4k^2} \beta_{2s+1} = 0, \quad k \geq 1,$$

$$\frac{\pi}{8k} \beta_{2k} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2 - 4k^2} \beta_{2s+1} = 0, \quad k \geq 1$$

или ей эквивалентной. Пусть число отрицательных собственных чисел спектральной задачи (3.4.17) - (3.4.18) равно  $M+1$ . Тогда результирующее решение задачи имеет вид

$$p = -U(z) r \sin \theta + \sum_{m=0}^M u_m \Psi(r, \theta, \nu_m) Z_m(z) + \sum_{m=M+1}^{\infty} u_m \Phi(r, \theta, \varkappa_m) Z_m(z), \quad (3.6.15)$$

где  $\nu_n = \sqrt{-\lambda_n}/B$ ,  $n = \overline{0, M}$  и  $\varkappa_n = \sqrt{\lambda_n}/B$ ,  $n \geq M+1$ .

Картина линий тока будет симметрична относительно оси  $Ox$ , поэтому (3.6.15) одновременно решает задачу об обтекании полуострова. В западном потоке в соответствии со сделанным предположением о характере функций  $U(z)$  и  $N(z)$  волновые моды всегда отсутствуют. В восточном потоке, в зависимости от параметра стратификации  $B$ , может присутствовать конечное число волновых мод, порождающих волновой след за островом и приводящих при определенных условиях к появлению вихрей по обе стороны от острова.

Если  $U(z) \equiv 1$ , то, как легко убедиться,  $\lambda_0 = -\beta B^2$  и  $Z_0(z) \equiv 1$ . Но тогда  $u_n = \delta_{n0}$  для всех  $n$ , и (3.6.15) принимает вид  $p = -u + \Psi(r, \theta, \sqrt{\beta})$ , что соответствует баротропному движению. Таким образом, для возбуждения бароклининых мод необходимо наличие вертикального сдвига в набегающем потоке. Если рассмотреть остров, хотя бы слабо отличающийся по форме от прямого цилиндра (как это, например, сделал Хогг [105] для усеченного конуса), даже при отсутствии вертикального сдвига будут возбуждаться все бароклинные моды.

Рассмотренные выше примеры показывают, что в бароклиных потоках структура возмущенного поля течений является существенно трехмерной. Наличие параметра  $\beta$  порождает в восточном потоке rossбиевские волны, ответственные за образование подгетренного мезандрирующего следа за препятствием.

### 3.7. Нестационарный зональный поток над бесконечными хребтами

Как мы уже видели в § 2.13, при цилиндрической форме возмущения рельефа дна  $h = h(\xi) = h(x \cos \alpha - y \sin \alpha)$  баротропное уравнение потенциального вихря сводится к линейному, что позволяет эффективно применять для его решения средства классического анализа. Аналогичная ситуация имеет место и в бароклинном случае, хотя соответствующее уравнение становится более сложным благодаря зависимости от вертикальной координаты. Рассмотрим этот вопрос подробнее с целью изучения особенностей, которые вносит в задачу учет стратификации.

Полагая  $p = -U(t)y + \beta\psi(\xi, z, t)$  и  $T = 0$  (ветер отсутствует), из (3.3.1) - (3.3.3) получим

$$D[\psi_{\xi\xi} + (\psi_z/B^2N^2)_z] + \beta \cos \alpha \cdot \psi_{\xi} = 0, \quad (3.7.1)$$

$$D(\psi_z/B^2N^2) = 0, \quad z = 0, \quad (3.7.2)$$

$$D(\psi_z/B^2N^2) - k\psi_{\xi\xi} = U\bar{h}' \cos \alpha, \quad z = 1, \quad (3.7.3)$$

где введен дифференциальный оператор адвекции  $D = \partial/\partial t + U \cos \alpha \partial/\partial \xi$ .

По переменной  $\xi$  удобно использовать преобразование Фурье

$$\bar{\psi}(\omega, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, z, t) e^{i\omega\xi} d\xi,$$

применение которого к (3.7.1) - (3.7.3) приводит к задаче

$$\bar{D}[(\bar{\psi}_z/B^2N^2)_z - \omega^2 \bar{\psi}] - i\omega \beta \cos \alpha \cdot \bar{\psi} = 0, \quad (3.7.4)$$

$$\bar{D}(\bar{\psi}_z/B^2N^2) = 0, \quad z = 0, \quad (3.7.5)$$

$$\bar{D}(\bar{\psi}_z/B^2N^2) + k\omega^2 \bar{\psi} = -i\omega U \bar{h}' \cos \alpha, \quad z = 1, \quad (3.7.6)$$

где теперь  $\bar{D} = \partial/\partial t - i\omega U \cos \alpha$ . Дальнейший ход решения определяется дополнительными предположениями о характере задачи, однако в любом случае целесообразно выразить решение через функцию Грина в виде

$$\psi(\xi, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \xi', z, t) h(\xi') d\xi',$$

где фурье-образ  $\bar{G}(\omega, z, t)$  удовлетворяет системе (3.7.4) - (3.7.6) с заменой  $\bar{h}$  на  $1/\sqrt{2\pi}$ .

Мы отдельно рассмотрим стационарный режим и задачу с начальными данными.

Стационарная задача. Пусть  $U = U_0 = \text{const}$ , причем рассматривается установившееся движение. При этом, очевидно,  $\bar{D} = -i\omega U_0 \cos \alpha$ . Примем простейшую стратификацию, для которой  $N^2 \equiv 1$ . Полагая в (3.7.4) - (3.7.6)  $\bar{\psi} \equiv \bar{G}$  и  $\bar{h} = 1/\sqrt{2\pi}$  и решая краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, находим  $\bar{G}$ , а затем по формуле обращения получаем

$$G(\xi, z) = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi} \text{ch} BRz d\omega}{R \text{sh} BR + \frac{i\omega kB}{U_0 \cos \alpha} \text{ch} BR}, \quad (3.7.7)$$

где  $R = \sqrt{\omega^2 - \beta/U_0}$ .

Этот интеграл в общем случае можно вычислить с помощью теории вычетов и представить результат в виде бесконечного ряда. Нетрудно показать, что для малых  $k$  простые полюсы подынтегральной функции расположены в точках

$$\omega_n^{\pm} = \pm i\sqrt{(n\pi/B)^2 - \beta/U_0} - iBk/U_0 \cos \alpha + O(k^2), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.7.8)$$

Эти выражения позволяют правильно выбрать контур интегрирования в предельном случае исчезающего трения ( $k \rightarrow 0$ ), анализом которого мы ограничимся. При  $k = 0$  функция Грина (3.7.7) принимает вид

$$G(\xi, z) = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi} \text{ch} BRz d\omega}{R \text{sh} BR}, \quad (3.7.9)$$

причем теперь  $\omega_n^{\pm} = \pm i\sqrt{(n\pi/B)^2 - \beta/U_0}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Для западного потока  $U_0 = -1$  все полюсы расположены на мнимой оси плоскости комплексного переменного  $\omega$ . Применяя лемму Жордана и теорему о вычетах, получим

$$G_w(\xi, z) = \frac{e^{-\sqrt{\beta}|\xi|}}{2\sqrt{\beta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-|\xi|\sqrt{(n\pi/B)^2 + \beta})}{\sqrt{(n\pi/B)^2 + \beta}} (-1)^n \cos n\pi z. \quad (3.7.10)$$

Первое слагаемое представляет баротропную моду, а все остальные - бароклинные. Функция Грина является четной функцией  $\xi$ ; она экспоненциально убывает с ростом  $|\xi|$ , причем быстрее всего уменьшаются бароклинные составляющие; с уменьшением  $B$  вклад бароклинных мод убывает, а с глубиной влияние бароклиности растет. При достаточно слабой стратификации, когда  $B \ll \pi/\sqrt{\beta}$ , радикалы можно приближенно заменить на  $n\pi/B$ . Так как ([8], с.55).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \cos n\pi}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha \cos \alpha + \alpha^2), \quad |\alpha| \leq 1,$$

суммируя в (3.7.10) ряд, получим

$$G_w(\xi, z) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} e^{-\sqrt{\beta}|\xi|} - \frac{B}{2\pi} \ln(1 + 2e^{-\frac{\pi}{B}|\xi|} \cos \pi z + e^{-\frac{2\pi}{B}|\xi|}). \quad (3.7.11)$$

В рассмотренном предельном случае бета-эффект и стратификация действуют аддитивно.

В случае восточного потока  $U_0 = 1$  имеется  $2(M+1)$  вещественных полюсов, расположенных симметрично относительно начала координат. Здесь  $M$  есть наибольшее  $h$ , для которого еще выполнено условие  $\delta > (n\pi/B)^2$  при  $\delta < (\pi/B)^2$  всегда  $M=0$ . При  $n > M$  все остальные полюсы являются чисто мнимыми.

Из выражений (3.7.8) следует, что в интеграле (3.7.9) все вещественные полюсы должны обходиться сверху, т.е. они будут давать вклад в интеграл только при  $\xi > 0$  (волновые моды, появляющиеся за препятствием). Функция Грина в этом случае принимает вид

$$G_{\xi}(\xi, z) = -\frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\delta}} \sin(\sqrt{\delta}\xi) - 2\theta(\xi) \sum_{n=1}^M \frac{\sin(\xi\sqrt{\delta - (n\pi/B)^2})}{\sqrt{\delta - (n\pi/B)^2}} (-1)^n \cos n\pi z + \\ + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\exp(-|\xi|\sqrt{(n\pi/B)^2 - \delta})}{\sqrt{(n\pi/B)^2 - \delta}} (-1)^n \cos n\pi z. \quad (3.7.12)$$

В пределе  $\delta \rightarrow 0$  отсюда получаем

$$G_{\xi}(\xi, z) = -\theta(\xi)\xi - \frac{\delta}{2\pi} \ln(1 + 2e^{-\frac{\pi}{\delta}|\xi|} \cos \pi z + e^{-\frac{2\pi}{\delta}|\xi|}) = \\ = -\frac{1}{2} \left\{ \xi + \frac{\delta}{\pi} \ln[2(\operatorname{ch}(\pi\xi/B) + \cos \pi z)] \right\}. \quad (3.7.13)$$

Интересно отметить, что в западном потоке аналогичного конечного предела не существует, как это видно из (3.7.10).

Таким образом, в восточном потоке с усилением стратификации число волновых мод растет; бароклинные волновые моды появляются лишь при условии  $B > \pi/\sqrt{\delta}$  в противном случае имеется только баротропная волновая мода. Мы видим, что стратификация способствует меандрированию бароклинного потока. Заметим, что  $G_{\xi}(\xi, z)$  терпит разрыв при  $B = n\pi/\sqrt{\delta}$ ,  $n \geq 1$ , причем предел справа по параметру  $B$  остается конечным, а слева он равен бесконечности. Это - резонансные случаи, когда ограниченных вниз по течению решений не существует.

**З а д а ч а К о ш и.** Теперь изучим случай, когда в системе отсутствует трение ( $k=0$ ),  $U(t)$  - произвольная знакопостоянная функция и при  $t=0$  поток невозмущен. Требуется изучить эволюцию течения при  $t > 0$ .

Для решения задачи воспользуемся системой собственных функций  $\{Z_n(z)\}$ , удовлетворяющих уравнениям  $(Z_n'/N^2)' = \lambda_n Z_n$  и граничным условиям  $Z_n' = 0$  при  $z = 0, 1$ . Напомним (см. § 3.3), что здесь всегда  $Z_0 \equiv 1$ ,  $\lambda_0 = 0$  и  $\lambda_n > 0$  при  $n \geq 1$ . Представляя фурье-образ функции Грина в виде ряда  $\bar{G}(\omega, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n(\omega, t) Z_n(z)$ , находим, что коэффициенты разложения удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\bar{G}_n' + i\omega \cos \alpha \left[ \frac{\delta}{\lambda_n/B + \omega^2} - U(t) \right] \bar{G}_n = -\frac{i\omega \cos \alpha Z_n(1)U(t)}{\sqrt{2\pi^2}(\lambda_n/B^2 + \omega^2)}$$

с нулевыми начальными данными. Интегрируя эти уравнения, получим

$$\bar{G} = -\frac{i\omega \cos \alpha Z_n(1)}{\sqrt{2\pi}(\lambda_n/B^2 + \omega^2)} \int_0^t U(\tau) \exp\left\{i\omega \cos \alpha [S(t) - S(\tau) - \frac{\beta(t-\tau)}{\lambda_n/B^2 + \omega^2}]\right\} d\tau. \quad (3.7.14)$$

По формулам обращения Фурье находим

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\xi, t) Z_n(z), \quad (3.7.15)$$

где 
$$G_n = \int_0^t U(\tau) g_n(\xi, t, \tau) d\tau,$$

причем теперь

$$g_n(\xi, t, \tau) = -\frac{i \cos \alpha Z_n(1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + \lambda_n/B^2} \exp\left[-i\left(A\omega + \frac{C\omega}{\omega^2 + \lambda_n/B^2}\right)\right] \quad (3.7.16)$$

и введены обозначения  $A = \xi + [S(\tau) - S(t)] \cos \alpha$ ,  $C = \beta(t - \tau) \cos \alpha$ .

Для баротропной моды  $n=0$  после вычисления получаем (см. § 2.13):

$$g_0(\xi, t, \tau) = -\cos \alpha \cdot \theta(A) J_0(2\sqrt{AC}). \quad (3.7.17)$$

В случае бароклиных мод ( $n \geq 1$ ) в (3.7.16) удобно перейти к новой переменной интегрирования  $\sigma$  по формуле  $\omega = \sqrt{\lambda_n} \sigma / B$ . Тогда

$$g_n(\xi, t, \tau) = -\cos \alpha \cdot Z_n(1) F\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{B} A, \frac{CB}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \quad (3.7.18)$$

где 
$$F(q, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma d\sigma}{1 + \sigma^2} \sin\left(q\sigma + \frac{r\sigma}{1 + \sigma^2}\right).$$

Используя аналитичность этого интеграла по параметру  $r$ , представим его в виде

$$F(q, r) = \text{sign } q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} S_m(|q|) r^{2m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} C_m(|q|) r^{2m+1}, \quad (3.7.19)$$

где функции  $S_m(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma}{1 + \sigma^2}\right)^{2m+1} \sin q \sigma d\sigma$ ,  $C_m(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma}{1 + \sigma^2}\right)^{2m+2} \cos q \sigma d\sigma$

выражаются через полиномы  $P$  и  $Q$  указанных ниже степеней по формулам  $S_m(q) = e^{-q} P_{2m}(q)$ ,  $C_m(q) = e^{-q} Q_{2m+1}(q)$ .

В частности,  $S_0(q) = \frac{1}{2} e^{-q}$ ,  $C_0(q) = \frac{1}{4} (1-q) e^{-q}$ .

Справедливы оценки  $|S_m| \leq 2^{-2m-1}$ ,  $|C_m| \leq 2^{-2m-2}$ , поэтому ряды в (3.7.19) сходятся равномерно относительно  $q$  и  $r$  в любой области  $0 \leq q \leq \infty$ ,  $0 \leq r \leq r_0 < \infty$ . Представлением (3.7.19) удобно пользоваться для малых  $t$ ; оно показывает, что бета-эффект на начальном этапе развития процесса дает вклад в  $G$  лишь второго порядка малости по времени. Интересно поэтому рассмотреть предельный случай  $\beta = 0$ , когда исчезает механизм волн Россби. При этих условиях  $C \equiv 0$  и формулы (3.7.17) и (3.7.18) дают  $q_0 = -\theta(A) \cos \alpha$ ,  $q_n = -\frac{1}{2} Z_n(1) \text{sign } A \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} |A|/B} \cos \alpha$ ,

а функция Грина принимает вид

$$G^{(0)}(\xi, z, t) = -\cos\alpha \int_0^t U(\tau) \left[ \theta(A) + \frac{1}{2} \operatorname{sign} A \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) Z_n(z) e^{-\sqrt{\lambda_n} |A|/B} \right] d\tau.$$

В частном случае  $N^2 \equiv 1$  имеем  $\lambda_n = (n\pi)^2$ ,  $Z_n(z) = \sqrt{2} \cos n\pi z$ , поэтому ряд суммируется. Учитывая, что ( $\delta$ , с.54)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \alpha + \alpha^2} - 1 \right], \quad |\alpha| < 1,$$

получим  $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) Z_n(z) e^{-n\pi |A|/B} = \operatorname{sh}(\pi |A|/B) [\operatorname{ch}(\pi |A|/B) + \cos \pi z]^{-1} - 1$ ,

$$\text{откуда } G^{(0)}(\xi, z, t) = -\frac{\cos\alpha}{2} \int_0^t U(\tau) \left[ 1 + \frac{\operatorname{sh}(\pi A/B)}{\operatorname{ch}(\pi A/B) + \cos \pi z} \right] d\tau.$$

Так как  $dA = U(\tau) \cos\alpha d\tau$ , выполняя квадратуру, окончательно найдем

$$G^{(0)}(\xi, z, t) = \chi(\xi - S(t) \cos\alpha, z) - \chi(\xi, z), \quad (3.7.20)$$

где введена функция  $\chi(\xi, z) = \frac{1}{2} \left\{ \xi + \frac{B}{\pi} \operatorname{erfc} [2(\operatorname{ch}(\pi \xi/B) + \cos \pi z)] \right\}$ .

Соотношение (3.7.20) показывает, что возникшее в начальный момент времени возмущение распадается на стационарную часть  $-\chi(\xi, z)$  захваченную топографией, и бегущую волну  $\chi(\xi - S(t) \cos\alpha, z)$ , т.е. переносимое потоком возмущение обратного знака (ср. с (2.12.6)). Так как при  $|\xi| \gg 1$  асимптотически  $\chi(\xi, z) \sim \frac{1}{2} (|\xi| + \xi)$  для восточного потока  $U_0 \equiv 1$  при  $t \rightarrow \infty$  получаем функцию Грина стационарной задачи  $G_{\omega}^{(0)}(\xi, z, \infty) = -\chi(\xi, z)$ , совпадающую с (3.7.13) и которая при  $\xi \rightarrow \infty$  неограниченно растет по абсолютной величине. Это следствие отсутствия в системе диссипативных факторов. Для западного потока ( $U_0 = -1$ ) при больших значениях  $t$  приближенно имеем  $G_{\omega}^{(0)}(\xi, z, t) \approx \xi + t \cos\alpha - \chi(\xi, z)$ , откуда следует, что при каждом фиксированном  $\xi$  полученное решение неограниченно растет со временем. Поскольку при отсутствии бета-эффекта понятия "восточный" и "западный" теряют смысл, функции (3.7.20) при  $U = U_0$  разных знаков представляют два решения, одно из которых стремится к неограниченно растущему вниз по течению стационарному виду, а другое везде неограниченно растет со временем, однако неравномерно относительно  $\xi$ .

Вернемся теперь к случаю  $\beta > 0$  и в предположении  $U = U_0 = \text{const}$  изучим поведение решения при больших  $t$ , т.е. процесс установления. Так как  $S(t) = U_0 t$ , в (3.7.14) можно выполнить квадратуру по времени:

$$G_n(\xi, t) = [I_n(\xi, t) - I_n(\xi, 0)] Z_n(1), \quad (3.7.21)$$

где  $I_n(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\beta/U_0 - \lambda_n/B^2 - \omega^2} \exp \left[ -i\omega \left( \xi - U_0 t \cos\alpha - \frac{\beta t \cos\alpha}{\omega^2 + \lambda_n/B} \right) \right]$ .

При наличии вещественных полюсов они обходятся сверху.

Интегралы  $I_n(\xi, 0)$  для баротропной ( $n=0$ ) и бароклининой ( $n \geq 1$ ) мод соответственно равны

$$I_0(\xi, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-\beta/U_0}} \exp(-\sqrt{-\beta/U_0} |\xi|), & U_0 < 0, \\ \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\beta/U_0}} \sin(\sqrt{\beta/U_0} \xi), & U_0 > 0; \end{cases}$$

$$I_n(\xi, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n/B^2 - \beta/U_0}} \exp(-|\xi| \sqrt{\lambda_n/B^2 - \beta/U_0}), & \lambda_n > B^2 \beta/U_0, \\ \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\beta/U_0 - \lambda_n/B^2}} \sin(\xi \sqrt{\beta/U_0 - \lambda_n/B^2}), & \lambda_n < B^2 \beta/U_0. \end{cases}$$

Изучим теперь поведение интеграла  $I_0(\xi, t)$  при больших значениях  $t$ :

$$I_0(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\beta/U_0 - \omega^2} \exp\left\{-i \left[ \omega(\xi - U_0 t \cos \alpha) + \frac{\beta t \cos \alpha}{\omega} \right]\right\}.$$

При  $U_0 > 0$  (восточный поток) контур интегрирования можно деформировать в прямую  $\omega = \sigma + i\gamma$  при произвольном положительном  $\gamma$ . Тогда

$$I_0(\xi, t) = \frac{1}{\pi} e^{\gamma(\xi - U_0 t \cos \alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\beta t \gamma \cos \alpha}{\sigma^2 + \gamma^2}\right)}{(\beta/U_0 + \gamma^2 - \sigma^2)^2 + 4\gamma^2 \sigma^2} \left\{ (\beta/U_0 - \sigma^2 + \gamma^2) \cos\left[\xi - U_0 t \cos \alpha\right] \sigma + \frac{\beta t \sigma \cos \alpha}{\sigma^2 + \gamma^2} \right\} + 2\gamma \sigma \sin\left[\left(\xi - U_0 t \cos \alpha\right) \sigma - \frac{\beta t \sigma \cos \alpha}{\sigma^2 + \gamma^2}\right] d\sigma. \quad (3.7.22)$$

При  $\gamma^2 > \beta/U_0$  имеем оценку

$$\begin{aligned} |I_0(\xi, t)| &\leq \frac{2}{\pi} e^{\gamma(\xi - U_0 t \cos \alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\sqrt{(\gamma^2 + \beta/U_0 - \sigma^2)^2 + 4\gamma^2 \sigma^2}} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} e^{\gamma(\xi - U_0 t \cos \alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\gamma^2 - \beta/U_0 + \sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \beta/U_0}} e^{\gamma(\xi - U_0 t \cos \alpha)}, \end{aligned}$$

откуда для  $\xi - U_0 t \cos \alpha < 0$  следует  $I_0(\xi, t) = 0$ . Это означает, что в указанной области изменения переменных  $\xi, t$  функция  $G_n$  не зависит от времени, т.е. совпадает со стационарным решением.

При  $U_0 < 0$  (западный поток) в (3.7.22) можно принять  $\gamma = 0$ , поэтому

$$I_0(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\beta/U_0 - \sigma^2} \cos\left[\left(\xi - U_0 t \cos \alpha\right) \sigma - \frac{\beta t \cos \alpha}{\sigma}\right]. \quad (3.7.23)$$

При  $\xi - U_0 t \cos \alpha < 0$  этот интеграл вычисляется следующим образом ([8], с. 484):

$$I_0(\xi, t) = -\frac{1}{2\sqrt{-\beta/U_0}} \exp(\xi \sqrt{-\beta/U_0}) = I_0(\xi, 0),$$



откуда следует  $G_0 \equiv 0$ . При  $\xi - U_0 t \cos \alpha > 0$  асимптотика интеграла (3.7.23) легко устанавливается с помощью метода стационарной фазы [60]:

$$I_0(\xi, t) \sim \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi i \beta t} \sqrt{-U_0/\beta} \right)^{1/2} \sin \left[ \sqrt{-\beta/U_0} (\xi - 2U_0 \cos \alpha \cdot t) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Таким образом, при  $U_0 \neq 0$  всегда  $I_0(\xi, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. баротропная мода стремится к своему стационарному значению, определяемому по формуле  $G_0(\xi, \infty) = -I_0(\xi, 0)$ .

Асимптотические представления для бароклинных мод удобно получить методом перевала [43]; соответствующие выражения построены в работе [34]. Их анализ показывает, что при  $U_0/\lambda_n/\beta B^2 \neq \pm 1, -1/8$  при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $I_n(\xi, t) \rightarrow 0$ , т.е. все бароклинные моды стремятся к своим предельным стационарным значениям. С помощью (3.7.15) и (3.7.21) теперь легко выписывается функция Грина стационарной задачи. Как и выше, введем целое число  $M \geq 0$ , равное номеру  $n$  последней бароклинной моды, для которой еще выполнено условие  $\beta B^2 > U_0 \lambda_n$ . Тогда для восточного потока ( $U_0 > 0$ ) получаем

$$G_E(\xi, z, \infty) = -\frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\beta/U_0}} \sin(\xi \sqrt{\beta/U_0}) - \sum_{n=1}^M \frac{\theta(\xi) Z_n(1) Z_n(z)}{\sqrt{\beta/U_0 - \lambda_n/\beta B^2}} \times \\ \times \sin(\xi \sqrt{\beta/U_0 - \lambda_n/\beta B^2}) + \frac{1}{2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{Z_n(1) Z_n(z)}{\sqrt{\lambda_n/\beta B^2 - \beta/U_0}} \exp(-|\xi| \sqrt{\lambda_n/\beta B^2 - \beta/U_0}). \quad (3.7.24)$$

Условие отсутствия волновых мод вниз по течению имеет вид  $U_0 > \beta B^2/\lambda_1$ , где  $\lambda_1$  - первое бароклинное собственное число. Решения вида (3.7.24) при указанном условии были получены Яновичем [120].

Для западных потоков ( $U_0 < 0$ ) волновые моды всегда отсутствуют, поэтому стационарное решение принимает вид

$$G_w(\xi, z, \infty) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(1) Z_n(z)}{\sqrt{\lambda_n/\beta B^2 - \beta/U_0}} \exp(-|\xi| \sqrt{\lambda_n/\beta B^2 - \beta/U_0}). \quad (3.7.25)$$

При  $N^2 \equiv 1$  и  $U_0 = \pm 1$  формулы (3.7.24) и (3.7.25) переходят соответственно в (3.7.12) и (3.7.10).

В заключение отметим, что по аналогии с § 2.13 можно также решить задачу о периодических возмущениях, индуцируемых бесконечным хребтом в периодическом потоке  $U(t)$ .

## Глава 4

### КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

#### 4.1. Взаимное приспособление полей масс и течений к рельефу дна в бароклинном океане

В предыдущих двух главах изучалась ставшая уже классической квази-геострофическая модель, пригодная для описания динамических процессов с характерными горизонтальными масштабами порядка  $L^* = 100$  км (геострофические движения первого типа). При таких условиях в уравнении потенциального вихря вклады относительной и планетарной завихренностей соизмеримы. Если горизонтальная протяженность особенностей рельефа дна значительно больше, приближаясь к планетарной ( $L^* \sim 1000$  км и более), роль индуцируемой относительной завихренности становится малой и на первое место в формировании динамического режима выступают планетарно-топографические факторы (геострофические движения второго типа). Такой режим мы условились называть просто геострофическим.

Основные соотношения геострофической модели, установленные асимптотическим методом, даны в § 1.4. Это – уравнения адвекции плотности (1.4.32) и неразрывности (1.4.33). Горизонтальные скорости и возмущение плотности определены по формулам (1.4.36) и (1.4.37).

Глубинные воды, как известно, отличаются большой однородностью. Поэтому, если не оговорено противное, мы будем далее предполагать, что дно является одновременно изопикнической поверхностью, на которой возмущение плотности принимается равным нулю, т.е.

$$p_z = 0, \quad z = D. \quad (4.1.1)$$

Вся настоящая глава будет посвящена изучению задачи (1.4.32) – (1.4.35), (4.1.1), дополненной в зависимости от обстоятельств теми или иными граничными и начальными данными.

Мы начнем с анализа некоторых общих свойств стационарного взаимного приспособления полей плотности и течений к рельефу дна, описываемых системой (1.4.32) – (1.4.35), (4.1.1), причем в изложении материала будем в основном придерживаться работы [21].

Как и в квазигеострофической модели, в качестве главной искомой функции примем аномалию давления  $p$ . Исключая из (1.4.32) и (1.4.33) вертикальную скорость, получим основное уравнение геострофической модели

$$\Omega^2 p_{zz}^2 (p_{zt} / p_{zz})_z + p_{zz} J(p, \Omega p_{zz}) - \Omega p_{zz} J(p, p_z) = 0. \quad (4.1.2)$$

Граничные условия на поверхности и на дне (I.4.34) и (I.4.35) переходят в соотношения

$$J(p, p_z) + \Omega p_{zt} = 0, \quad z = 0, \quad (4.1.3)$$

$$p_{zz} J(p, D) + J(p, p_z) + \Omega p_{zt} = 0, \quad z = D. \quad (4.1.4)$$

В стационарном случае (4.1.2) - (4.1.4) упрощаются:

$$p_{zz} J(p, \Omega p_{zz}) - \Omega p_{zz} J(p, p_{zz}) = 0, \quad (4.1.5)$$

$$J(p, p_z) = 0, \quad z = 0, \quad (4.1.6)$$

$$p_{zz} J(p, D) + J(p, p_z) = 0, \quad z = D. \quad (4.1.7)$$

В стационарной теории общей океанической циркуляции важное значение имеют три вспомогательные функции - поверхностное давление (или приведенный уровень)  $p^{(0)}(x, y) = p(x, y, 0)$ , придонное давление  $p^{(D)}(x, y) = p(x, y, D)$  и интегральная функция тока (функция полных потоков)  $\Psi(x, y)$ . Эти функции, являясь интегральными динамическими характеристиками, связаны между собой и полем плотности рядом соотношений, которые мы сейчас установим.

Введем в рассмотрение две интегральные характеристики поля плотности - потенциальную энергию столба жидкости

$$\Pi = - \int_0^D \rho z dz = \int_0^D p dz - p^{(D)} D \quad (4.1.8)$$

и "дефицит массосодержания"

$$\chi = - \int_0^D \rho dz = p^{(0)} - p^{(D)}. \quad (4.1.9)$$

Проинтегрируем уравнение (I.4.33) по вертикали с учетом граничных условий (I.4.34) и (I.4.35). Так как в силу (4.1.1)  $(\nabla p)_{z=D} = \nabla p^{(D)}$ , после простых преобразований получим

$$J(D/\Omega, p^{(D)}) + J(1/\Omega, \Pi) = 0. \quad (4.1.10)$$

С помощью (4.1.9) отсюда находим

$$J(D/\Omega, p^{(0)}) + J(1/\Omega, \Pi) - J(D/\Omega, \chi) = 0. \quad (4.1.11)$$

Соотношение (4.1.10) можно переписать в виде  $[(D\rho_y^{(D)} + \Pi_y)/\Omega]_x - [(\rho_x^{(D)} + \Pi_x)/\Omega]_y = 0$ . Отсюда следует существование такой функции  $\Psi(x, y)$ , что

$$\Psi_x = (D\rho_x^{(D)} + \Pi_x)/\Omega, \quad \Psi_y = (D\rho_y^{(D)} + \Pi_y)/\Omega. \quad (4.1.12)$$

Легко убедиться, что  $\Psi$  есть интегральная функция тока, связанная с полными потоками геострофической скорости (I.4.36) соотношениями  $S^{(x)} =$

$= \int_0^D u dz = -\Psi_y, \quad S^{(4)} = \int_0^D v dz = \Psi_x$ . Исключая из (4.1.12) придонное давление  $p^{(2)}$ , получим

$$J(\Omega/D, \Psi) - J(1/D, \Pi) = 0. \quad (4.1.13)$$

В соотношениях (4.1.10), (4.1.11) и (4.1.13) влияние бароклинности описывается последними членами. Так как  $J(D/\Omega, \chi) = DJ(1/\Omega, \chi) + J(D, \chi)/\Omega$ , везде функции бароклинности  $\Pi$  и  $\chi$  действуют совместно либо с изменением глубины океана (совместный эффект бароклинности и рельефа  $\equiv$  СЭБИР [64]), либо с изменением параметра Кориолиса (бароклиный бета-эффект ББЭ [65]). Таким образом, распределение придонного давления в основном определяется ББЭ (уравнение (4.1.10)), функции полных потоков - СЭБИР (уравнение (4.1.13)) и поверхностного давления - ББЭ и СЭБИР (уравнение (4.1.11)).

Вернемся к уравнению (4.1.5) и попытаемся выделить классы его частных решений, удовлетворяющих граничным условиям (4.1.6), (4.1.7) и (4.1.1) и обращающих в нуль последние члены в одном из уравнений (4.1.10), (4.1.11) или (4.1.13), но при произвольном рельефе дна  $D(x, y)$ . Отдельно рассмотрим три возникающие задачи.

**Задача I.** Исследуем сначала условия исчезновения ББЭ в уравнении для придонного давления (4.1.10). Из требования  $J(1/\Omega, \Pi) \equiv 0$  находим интеграл  $\Pi = G(\Omega)$  при произвольной функции  $G$ . Это соотношение будет иметь место при произвольно меняющейся глубине океана, если поле давления имеет структуру  $p = R(\Omega, z/D)/D + B(x, y)$ . Подстановка последнего выражения в (4.1.5) дает для функции  $R(\Omega, \zeta)$  уравнение

$$\left\{ \frac{\Omega R_\Omega^2}{R_{\zeta\zeta}} \left[ \frac{(\zeta R)_\zeta}{R_\Omega} \right]_{\zeta} - \zeta R \right\}_{\zeta} + \frac{D^2 J(\Omega, B)}{J(\Omega, D)} \left\{ 1 + \left[ \frac{\Omega R_{\zeta\Omega}}{R_{\zeta\zeta}} \right]_{\zeta} \right\} - \frac{\Omega DJ(D, B) [(\zeta R)_{\zeta\zeta}]_{\zeta}}{J(\Omega, D) [R_{\zeta\zeta}]_{\zeta}} = 0. \quad (4.1.14)$$

Очевидно, должно быть

$$\frac{DJ(D, B)}{J(\Omega, D)} = \alpha(\Omega), \quad \frac{D^2 J(\Omega, B)}{J(\Omega, D)} = \beta(\Omega). \quad (4.1.15)$$

Нетрудно показать, что единственная функция  $B$ , одновременно удовлетворяющая обоим условиям (4.1.15), имеет вид  $B = -\beta(\Omega)/D + \gamma$ , где  $\gamma$  - постоянная, а  $\alpha = \beta'(\Omega)$ . Но в таком виде эта функция может быть включена в  $R$ , поэтому дальше можно считать  $B \equiv 0$ . Уравнение (4.1.14) принимает вид

$$\left\{ \frac{\Omega R_\Omega^2}{R_{\zeta\zeta}} \left[ \frac{(\zeta R)_\zeta}{R_\Omega} \right]_{\zeta} - \zeta R \right\}_{\zeta} = 0. \quad (4.1.16)$$

Граничное условие (4.1.7) дает

$$\left[ \frac{(\zeta R)_\zeta}{R_\Omega} \right]_{\zeta} - \frac{R_{\zeta\zeta}}{R_\Omega} = 0, \quad \zeta = 1. \quad (4.1.17)$$

Так как теперь

$$p^{(2)} = R(\Omega, 1)/D, \quad (4.1.18)$$

подстановка этого выражения в (4.1.10) приводит к условию  $\Omega R_{\Omega} - R = 0$  при  $\zeta = 1$ , откуда

$$R = k \Omega, \quad \zeta = 1, \quad (4.1.19)$$

где  $k$  - некоторая постоянная.

Интегрируя (4.1.16) при условиях (4.1.17) и (4.1.19), получим

$$\frac{\Omega R_{\Omega}^2}{R_{\zeta\zeta}} \left[ \frac{(\zeta R)_{\zeta}}{R_{\Omega}} \right]_{\zeta} - \zeta R = 0. \quad (4.1.20)$$

Из граничных условий (4.1.6) и (4.1.1) следует

$$R\zeta = 0, \quad \zeta = 1, \quad (4.1.21)$$

$$(R_{\Omega}/R)_{\zeta} = 0, \quad \zeta = 0. \quad (4.1.22)$$

Таким образом, определение функции  $R(\Omega, \zeta)$  и постоянной  $k$  свелось к решению уравнения (4.1.20) при условиях (4.1.19), (4.1.21) и (4.1.22); условие (4.1.17) при этом выполняется автоматически. Заметим, что интерес представляют только нетривиальные решения, для которых  $R_{\zeta\zeta} > 0$  (устойчивая стратификация). Полагая в уравнении (4.1.20)  $\zeta = 1$  и используя условие (4.1.19), получим соотношение  $2kR_{\zeta} - (R_{\zeta} + k\Omega)R_{\Omega\zeta} = 0$  при  $\zeta = 1$ , которое представляет обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $R_{\zeta}(\Omega, 1)$  и имеет интеграл вида

$$k\Omega / \sqrt{-R_{\zeta}} + \sqrt{-R_{\zeta}} = c, \quad \zeta = 1. \quad (4.1.23)$$

Это соотношение согласуется с условием (4.1.21) лишь при  $k = c = 0$ , поэтому (4.1.19) принимает вид

$$R = 0, \quad \zeta = 1. \quad (4.1.24)$$

Покажем, что уравнение (4.1.20) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям (4.1.21), (4.1.22) и (4.1.24), т.е. сформулированная задача является математически содержательной. Воспользуемся методом разделения переменных и будем искать частные решения вида  $R = F(\Omega)\Phi(\zeta)$ . Подстановка в (4.1.20) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{\Omega F'}{F} = \mu, \quad \frac{\mu\Phi}{\Phi''} \left( \frac{\zeta\Phi'}{\Phi} \right) - \zeta = 0,$$

где  $\mu$  - постоянная разделения. Функция  $F$  имеет вид  $F = A\Omega^{\mu}$ , где  $A$  - новая произвольная постоянная. Граничное условие (4.1.22) удовлетворяется тождественно, а из условий (4.1.21) и (4.1.24) следует  $\Phi(1) = \Phi'(1) = 0$ . Очевидно, в силу однородности уравнения и граничных условий функция  $\Phi$  определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Не умаляя общности, можно принять  $\Phi(0) = 1$ .

Перепишем уравнение для  $\Phi$  в виде  $(\mu-1)\Phi''/\Phi' + \mu(1/\zeta - \Phi'/\Phi) = 0$ , мы замечаем, что и здесь происходит разделение переменных, приводящее к общему решению  $\Phi = C_1(1+C_2\zeta^{1/m})^m$ , где  $m = 1/(1-\mu)$ . Удовлетворяя всем граничным условиям, получим  $\Phi(\zeta) = (1-\zeta^{1/m})^m$ , где  $m > 1$ , т.е.  $0 < \mu < 1$ .

Собирая результаты, запишем окончательно

$$R = A \Omega^{1-1/m} (1-\zeta^{1/m})^m, \quad m > 1,$$

откуда следует  $|R_\zeta| \rightarrow \infty$  при  $\zeta \rightarrow 0$ , т.е. возмущение плотности неограниченно возрастает с приближением к поверхности, в чем и состоит "нефизичность" построенного решения.

Если допустить существование других решений уравнения (4.1.20) с ограниченными производными, то интересно установить соответствующие следствия.

Из (4.1.18) и (4.1.24) находим  $\rho^{(D)} = 0$ , а из (4.1.9) получаем в этом случае известную формулу П.С.Линейкина для поверхностного давления (приведенного уровня) [48]

$$\rho^{(0)} = \chi = - \int_0^D \rho dz. \quad (4.1.25)$$

Таким образом, исчезновение БЭ приводит к обращению в нуль придонного давления и делает справедливой формулу (4.1.25). В чисто зональной задаче БЭ всегда равен нулю, и, следовательно, поверхностное давление определяется формулой (4.1.25); этот факт был установлен в работе [63].

Отметим еще один интересный результат, который следует из уравнения (4.1.20) при  $\zeta = 0$ . Имеем  $2R_\zeta R_\Omega - R R_{\Omega\zeta} = 0$ ,  $\zeta = 0$ , откуда интегрированием легко находим соотношение  $m^2 R_\zeta + R^2 = 0$ ,  $\zeta = 0$ , где  $m$  - некоторая положительная постоянная. Полученный результат можно переписать в форме  $\rho^{(0)} = m \sqrt{-\rho^{(0)}}$ . Для данного класса решений эта формула дает простое выражение для приведенного уровня через возмущение плотности на поверхности.

**З а д а ч а 2.** Изучим теперь вопрос о существовании таких распределений плотности, при которых в случае произвольного рельефа дна в уравнении (4.1.13) тождественно исчезает СЭБИР, т.е.  $J(D, \Pi) \equiv 0$ . Из последнего уравнения следует

$$\rho = Q(D, z) + B(x, y). \quad (4.1.26)$$

Подставляя это соотношение в (4.1.5), получим

$$\frac{\Omega J(D, B)}{J(\Omega, D)} \left( \frac{Q_{zD}}{Q_{zz}} \right)_z + \frac{J(\Omega, B)}{J(\Omega, D)} + Q_D = 0. \quad (4.1.27)$$

Ясно, что содержащиеся якобианы коэффициенты должны зависеть только от  $D$ :  $\frac{\Omega J(D, B)}{J(\Omega, D)} = \alpha(D)$ ,  $\frac{J(\Omega, B)}{J(\Omega, D)} = \beta(D)$ . (4.1.28)

Из второго соотношения следует

$$B = M(D) + N(\Omega), \quad (4.1.29)$$

где  $M$  и  $N$  – произвольные функции своих аргументов, причем теперь  $\delta = M'(D)$  и можно считать  $M \equiv 0$ . Подставляя (4.1.29) в первое из соотношений (4.1.28), получим  $-\Omega N'(\Omega) = \alpha(D)$ , откуда с точностью до незначительной аддитивной постоянной

$$B = -\alpha \ln \Omega, \quad \alpha = \text{const.} \quad (4.1.30)$$

Из (4.1.26), (4.1.27) и (4.1.30) теперь следует

$$p = Q(D, z) - \alpha \ln \Omega, \quad (4.1.31)$$

где  $Q$  удовлетворяет уравнению

$$\alpha \left( \frac{Q_{zD}}{Q_{zz}} \right)_z + Q_D = 0. \quad (4.1.32)$$

При  $\alpha = 0$  из (4.1.31) и (4.1.32) получаем  $p = Q(z)$ , что соответствует состоянию покоя; при  $\alpha \neq 0$  функция  $Q(D, z)$  представляет поправку к чисто зональному движению со скоростью  $u = \alpha \Omega_y / \Omega^2$ .

Сформулируем граничные условия для уравнения (4.1.32). Из (4.1.1), (4.1.6) и (4.1.7) следует

$$Q_{zD} = 0, \quad z = 0, \quad (4.1.33)$$

$$Q_z = 0, \quad z = D, \quad (4.1.34)$$

$$Q_{zz} + Q_{zD} = 0, \quad z = D \quad (4.1.35)$$

(заметим, что (4.1.35) является следствием (4.1.34)).

Построение нетривиального решения уравнения (4.1.32) при условиях (4.1.33) и (4.1.34) представляет интерес с точки зрения установления вертикальной структуры поля плотности. Для нас более важным является выраженный условием (4.1.33) факт постоянства плотности на поверхности. В самом деле, из этого соотношения следует  $\rho^{(0)} = \text{const}$ . Покажем, что постоянная тождественно равна нулю.

Интегрируя (4.1.32) по  $z$  от 0 до  $D$  и учитывая граничные условия (4.1.33) и (4.1.35), получим соотношение  $\int_0^D Q_D dz - \alpha = 0$ , которое должно быть по предположению справедливым при любых  $D$ , но это в свою очередь означает  $Q = \alpha \Phi(\zeta)$ ,  $\zeta = z/D$ . Так как теперь  $Q_z = \alpha \Phi'/D$  и  $Q_{zD} = -(\Phi' + \zeta \Phi'')/D^2$ , из условия (4.1.33) следует  $\Phi'(0) = 0$ , но тогда  $\rho^{(0)} = \Phi'(0)/D = 0$ , что эквивалентно неустойчивости стратификации.

Суммируя полученные результаты, можно утверждать, что в масштабах океанической циркуляции СЭБИР практически "неистребим"; в бароклинном океане он может исчезнуть лишь в нереальных случаях горизонтального

дна или горизонтальной однородности плотности на поверхности, причем при неустойчивой стратификации по вертикали.

**З а д а ч а 3.** Обратимся, наконец, к случаю, когда в уравнении для поверхностного давления (4.1.11) исчезает суммарное действие БЭ и СЭБИР. Легко показать справедливость равенства  $J(1/\Omega, \Pi) - J(D/\Omega, \chi) = \int_0^D J((D-z)/\Omega, \rho) dz$ . Требуя, чтобы этот интеграл обращался в нуль при произвольном  $D$ , получим  $J((D-z)/\Omega, \rho) = 0$ , откуда с учетом (1.4.37) находим  $\rho = \Omega F((D-z)/\Omega) + B(x, y)$ , где  $F$  и  $B$  — произвольные функции своих аргументов. Непосредственной проверкой можно убедиться, что (4.1.36) удовлетворяет уравнению (4.1.7) и условию (4.1.35) при произвольном  $D(x, y)$ . Чтобы было выполнено (4.1.1), необходимо принять  $F'(0) = 0$ . Из условия (4.1.6) получаем  $B = -\Omega F(D/\Omega) + G(D/\Omega)$ , где  $G$  — произвольная функция своего аргумента. Таким образом, окончательно находим

$$\rho = \Omega F\left(\frac{D-z}{\Omega}\right) - \Omega F\left(\frac{D}{\Omega}\right) + G\left(\frac{D}{\Omega}\right). \quad (4.1.36)$$

Не умаляя общности, можно считать  $F(0) = 0$ . Согласно (1.4.37) распределение плотности имеет вид

$$\rho = -F'\left(\frac{D-z}{\Omega}\right). \quad (4.1.37)$$

При условии устойчивой стратификации должно быть  $F'' > 0$ , но так как  $F(0) = F'(0) = 0$ , то  $F'(\xi) > 0$ ,  $F(\xi) > 0$ . Из (4.1.37) следует, что на поверхности

$$\rho^{(0)} = -F'(D/\Omega), \quad (4.1.38)$$

т.е. изопокические линии совпадают с изолиниями планетарно-топографической функции  $D/\Omega$ . Если  $|\nabla(D/\Omega)|$  ни в одной точке не обращается в нуль, то в соответствии с (4.1.38) горизонтальное распределение плотности на поверхности имеет монотонный характер. Как показывает (4.1.37), изопокические поверхности  $\rho = \text{const}$  наклонены в сторону экватора. Например, в Тихом океане качественно такую ситуацию мы наблюдаем в районах к северу от 25–30° с.ш. и к югу от 30° ю.ш. [7]. Вид функции  $F$  будет определен, если задать согласованное с законом (4.1.37) распределение плотности на поверхности и на дальней от экватора боковой квазизональной стенке. Этот факт наводит на мысль о том, что формирование океанического термоклина обусловлено процессами, происходящими в поверхностном слое и в субполярных водах.

Вычислим интегральную функцию тока. Из соотношений (4.1.12) находим  $d\Psi = (Ddp^{(0)} + d\Pi)/\Omega$ . Так как согласно (4.1.8)  $\Pi = \Omega^2 \int_0^{D/\Omega} F(\xi) d\xi$ , получаем  $d\Psi = (D/\Omega)G'(D/\Omega)d(D/\Omega) + d(\Omega M(D/\Omega))$ , где обозначено  $M(\xi) = 2 \int_0^\xi F(\xi) d\xi - \xi F(\xi)$ . Вводя еще одну функцию с помощью соотношения  $\Phi'(\xi) = \xi G'(\xi)$ , окончательно получим с точностью до несущественной аддитивной постоянной

$$\Psi = \Omega M(D/\Omega) + \Phi(D/\Omega). \quad (4.1.39)$$



Функцию  $\Phi$  в (4.1.39) можно определить, рассматривая безграничный океан с заданным распределением полного потока на бесконечности ( $x \rightarrow \pm \infty$ ), где  $D = D_0 = \text{const}$ . Примем для простоты  $\Omega = 1 + \beta y$  и пусть в невозмущенном зональном набегающем потоке  $\Psi = \Psi_0(y)$ , причем  $\Psi_0'(y)$  не меняет знака. Тогда на бесконечности (4.1.39) приводит к функциональному уравнению  $\Psi_0(y) = \Omega M(D_0/\Omega) + \Phi(D_0/\Omega)$ , решение которого имеет вид  $\Phi(\xi) = \Psi_0[(D_0/\xi - 1)/\beta] - D_0 M(\xi)/\xi$ . Таким образом,

$$\Psi = \Psi_0(y) + \Omega(1 - D_0/D) \left\{ M(D/\Omega) + \frac{\Psi_0[(D_0\Omega/D - 1)/\beta] - \Psi_0[(\Omega - 1)/\beta]}{\Omega(1 - D_0/D)} \right\}, \quad (4.1.40)$$

где второе слагаемое справа представляет возмущение функции полных потоков, создаваемое неровностями дна.

Используя связь между  $\Phi$  и  $G$ , имеем

$$G(\xi) = \Phi'(\xi)/\xi = (2D_0/\xi^3) \left( \int_0^\xi F d\xi - \xi F \right) + (D_0/\xi) F' - (D_0/\beta \xi^3) \Psi_0'[(D_0/\xi - 1)/\beta],$$

откуда интегрированием по частям получаем

$$G(\xi) = (D_0/\xi^2) (\xi F - \int_0^\xi F(\xi) d\xi) - (D_0/\beta) \int_{\infty}^{\xi} \Psi_0'[(D_0/\eta - 1)/\beta] \frac{d\eta}{\eta^3}.$$

Собирая результаты, запишем окончательно выражение для давления

$$p = \Omega \left[ F \left( \frac{D-z}{\Omega} \right) - F \left( \frac{D}{\Omega} \right) \left( 1 - \frac{D_0}{D} \right) - \frac{D_0 \Omega^2}{D^2} \int_0^{D/\Omega} F(\xi) d\xi - \frac{D_0}{\beta} \int_{\infty}^{D/\Omega} \Psi_0' \left[ \left( \frac{D_0}{\eta} - 1 \right) \frac{1}{\beta} \right] \frac{d\eta}{\eta^3} \right], \quad (4.1.41)$$

откуда, в частности, на бесконечности имеем

$$p_{\infty} = p_{\infty}(y, z) \equiv \Omega F \left( \frac{D_0 - z}{\Omega} \right) - \frac{\Omega^2}{D_0} \int_0^{D_0/\Omega} F(\xi) d\xi - \frac{D_0}{\beta} \int_{\infty}^{D_0/\Omega} \Psi_0' \left[ \left( \frac{D_0}{\eta} - 1 \right) \frac{1}{\beta} \right] \frac{d\eta}{\eta^3},$$

причем скорость набегающего потока

$$U(y, z) = -\frac{p_{\infty y}}{\Omega} = -\frac{1}{D_0} \Psi_0'(y) + \beta \left\{ \frac{2}{D_0} \int_0^{D_0/\Omega} F(\xi) d\xi + \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{D_0 - z}{\Omega} F' \left( \frac{D_0 - z}{\Omega} \right) - F \left( \frac{D_0 - z}{\Omega} \right) - F \left( \frac{D_0}{\Omega} \right) \right] \right\}.$$

Второе слагаемое в последнем соотношении определяет некоторое срединное течение с нулевым полным потоком.

Полученные формулы можно использовать для анализа различных модельных задач о движении стратифицированной жидкости над неровным дном. Рассмотрим два простых примера.

Пусть сначала  $\Psi_0 \equiv 0$ , что соответствует чисто термохалинной циркуляции. Формулы (4.1.40) и (4.1.41) упрощаются:

$$\Psi = \Omega \left( 1 - \frac{D_0}{D} \right) M \left( \frac{D}{\Omega} \right), \quad (4.1.42)$$

$$p = \Omega \left[ F \left( \frac{D-z}{\Omega} \right) - F \left( \frac{D}{\Omega} \right) \left( 1 - \frac{D_0}{D} \right) - \frac{D_0 \Omega^2}{D^2} \int_0^{D/\Omega} F(\xi) d\xi \right]. \quad (4.1.43)$$

Для поверхностного и придонного давления соответственно имеем:

$$p^{(0)} = B \left( \frac{D}{\Omega} \right) \equiv \frac{D_0 \Omega}{D} F \left( \frac{D}{\Omega} \right) - \frac{D_0 \Omega^2}{D^2} \int_0^{D/\Omega} F(\xi) d\xi. \quad (4.1.44)$$

$$p^{(D)} = -\Omega \left( 1 - \frac{D_0}{D} \right) F \left( \frac{D}{\Omega} \right) - \frac{D_0 \Omega^2}{D^2} \int_0^{D/\Omega} F(\xi) d\xi. \quad (4.1.45)$$

При  $\xi > 0$  легко устанавливаются следующие свойства функций  $M$  и  $B$ :  $M < 0$ ,  $M' < 0$ ,  $M'' < 0$  и  $B > 0$ ,  $B' > 0$ . Теперь нетрудно получить представление о качественном характере течений.

Так как  $M < 0$  из (4.1.42) следует, что над котловинообразным дном ( $D > D_0$ ) развивается циклоническая интегральная циркуляция. Наоборот, если дно представляет подводную возвышенность ( $D < D_0$ ) циркуляция имеет антициклонический характер. В случае горизонтального дна ( $D = D_0$ ) интегральная циркуляция исчезает; в этом смысле термохалинные течения представляют "внутреннюю" форму движения [67]. С помощью (4.1.42) можно показать, что на каждом участке с горизонтальным дном имеем чисто зональное интегральное движение, направленное на запад, если  $D > D_0$  и на восток - если  $D < D_0$ . В рассмотренном примере отсутствует западная интенсификация течений за счет бета-эффекта; это - результат специального приспособления поля плотности. Как видно из (4.1.42), интенсификация у любого крутого склона может иметь место благодаря особенностям рельефа.

Поведение поверхностных течений описывает функция  $p^{(0)}$ . Из (4.1.44) следует, что поверхностные градиенты течения направлены вдоль изолиний планетарно-топографической функции  $D/\Omega$ . Так как  $B' > 0$ , движение направлено влево по отношению к направлению возрастания этой функции. Картины поверхностных градиентных течений и интегральной циркуляции существенно отличаются друг от друга. Особенно ярко это видно в океане с горизонтальным дном, когда  $\Psi \equiv 0$ . В последнем случае чисто зонального движения мы сразу приходим к выводу о наличии направленных на запад глубинных течений, что можно непосредственно получить из (4.1.45) при  $D = D_0$ .

Интересно установить условия, при которых поверхностное давление будет постоянным, что эквивалентно исчезновению поверхностных градиентных течений. Полагая в (4.1.44)  $p^{(0)} = p^* = \text{const}$ , получим тождественно  $p^* \xi^2 / D_0 = \xi F(\xi) - \int_0^\xi F(\xi) d\xi$ , откуда дифференцированием находим  $F'(\xi) = 2p^* / D_0$ . Это означает однородность поля плотности, т.е. баротропность среды. Таким образом, в замкнутом океане с произвольным рельефом дна любая неоднородность поля плотности, вертикальная или горизонтальная, всегда вызывает поверхностные градиентные течения.

Теперь рассмотрим другой пример, когда в невозмущенном зональном набегающем потоке  $\Psi_0 = -U_0 D_0 y$ , где  $U_0$  - средняя по глубине скорость. Ограничимся анализом интегральной функции тока (4.1.40), которая теперь принимает вид

$$\Psi = -U_0 D_0 y + \Omega (1 - D_0/D) [M(D/\Omega) + U_0 D_0 / \beta]. \quad (4.1.46)$$

Так как  $M < 0$ , то в западном потоке ( $U_0 < 0$ ) над возвышенностью всегда возникает антициклоническое возмущение интегральной циркуляции, а над котловиной — циклоническое. В восточном потоке ситуация более сложная. Пусть  $\xi_{\min} = \min(D/\Omega)$  и  $\xi_{\max} = \max(D/\Omega)$  в области возвышенности. Если  $M(\xi_{\min}) < -U_0 D_0 / \beta$  (скорость достаточно велика), то качественный характер реакции интегральной циркуляции такой же, как и в западном потоке. Если  $M(\xi_{\max}) < -U_0 D_0 / \beta$ , имеет место обратная картина, когда над возвышенностью возникает циклоническая интегральная циркуляция в поле возмущений. Наконец, при  $M(\xi_{\max}) < -U_0 D_0 / \beta_0 < M(\xi_{\min})$  структура возмущения носит смешанный характер.

Интересно отметить, что при  $U_0 \rightarrow 0$  выражение (4.1.46) дает некоторое остаточное течение, объясняемое своим происхождением только рельефу дна и плотностной стратификации.

Выше с помощью выделенных классов точных решений были рассмотрены различные случаи взаимного приспособления течений и поля плотности к произвольному рельефу дна океана. Суммируем полученные результаты:

1) в случае исчезновения БЭ и возмущения плотности на дне поверхностное давление определяется формулой (4.1.24), которая заведомо верна в областях с чисто зональными характеристиками бароклинности и рельефа дна;

2) в реальном океане с неровным дном и горизонтальной неоднородностью плотности на поверхности СЭБИР всегда отличен от нуля и, следовательно, вызывает интегральную циркуляцию термохалинной природы;

3) бароклинность океана представляет достаточное условие возникновения поверхностных градиентных течений;

4) во всех рассмотренных случаях картины интегральной циркуляции и поверхностных градиентных течений принципиально отличаются друг от друга.

Таким образом, важная роль совместного эффекта бароклинности и рельефа дна в крупномасштабном циклогенезе не вызывает сомнений.

#### 4.2. Некоторые асимптотические решения

Приведенные в предыдущем параграфе построения были выполнены при дополнительном предположении об исчезновении СЭБИР, БЭ или некоторой их комбинации. Ниже развивается асимптотический метод решения, свободный от указанных ограничений [22].

Перейдем к новым независимым переменным с помощью соотношений

$$\xi = \ln D(x, y), \quad \eta = \ln \Omega(y), \quad \zeta = z/D(x, y). \quad (4.2.1)$$

В любой области, где  $D_x \neq 0$ , якобин  $\partial(\xi, \eta, \zeta) / \partial(x, y, z) = D_x \Omega y / \Omega D^2$  отличен от нуля, и поэтому здесь преобразование является взаимно однозначным. В поле давления можно представить в виде

$$p = Q(\xi, \eta, \zeta, t). \quad (4.2.2)$$

Мы будем строить решения указанного класса, предполагая, что они верны для любого рельефа дна.

Введем вспомогательную функцию

$$S = \int_0^{\zeta} (Q_{\xi} - \zeta Q_{\zeta}) d\zeta, \quad (4.2.3)$$

удовлетворяющую очередному условию

$$S = 0, \quad \zeta = 0. \quad (4.2.4)$$

Из соотношений (I.4.24) - (I.4.26) имеем

$$u = -(S_{\zeta} D_y / D + Q_{\eta} \Omega_y / \Omega) / \Omega, \quad (4.2.5)$$

$$v = S_{\zeta} D_x / D \Omega, \quad (4.2.6)$$

$$p = Q_{\zeta} / D. \quad (4.2.7)$$

Так как горизонтальная дивергенция скорости  $u_x + v_y = -v \Omega_y / \Omega = -\Omega_y D_x S_{\zeta} / \Omega^2 D$ , интегрируя (I.4.27) по вертикали при условии (I.4.29) и учитывая (4.2.4), получим

$$\omega = D_x \Omega_y S / \Omega^2. \quad (4.2.8)$$

Из (4.2.5) - (4.2.8) следует, что для рассматриваемого класса решений на любом участке с зональным рельефом дна ( $D_x \equiv 0$ ) течение также является чисто зональным ( $v = \omega = 0$ ).

Подстановка выражений (4.2.5) - (4.2.8) в (I.4.28) с учетом соотношений (4.2.3) дает

$$Q_{\zeta t} = \alpha(\xi, \eta) L(Q, S), \quad (4.2.9)$$

где  $\alpha(\xi, \eta) = D_x \Omega_y / D \Omega^2$ ,  $L(Q, S) \equiv Q_{\eta} S_{\zeta \zeta} - Q_{\zeta \zeta} S - Q_{\zeta \zeta} S$ .

Из (I.4.29) и (I.4.30) получаем граничные условия

$$S = -Q_{\eta}, \quad \zeta = 1, \quad (4.2.10)$$

$$Q_{\zeta} = 0, \quad \zeta = 1. \quad (4.2.11)$$

Таким образом, задача сводится к построению решений системы уравнений (4.2.3) и (4.2.9) при условиях (4.2.4), (4.2.10) и (4.2.11). Разумеется, эти соотношения еще не гарантируют единственность решения; дополнительные условия будут установлены ниже.

Формулы (4.2.5) и (4.2.6) позволяют понять различную топографическую реакцию геострофического стратифицированного потока в зависимости от его направления. Из структуры этих выражений следует, что горизонтальное движение складывается из двух компонент: пропорционального  $\Omega_y \equiv \beta$  планетарного зонального движения и пропорционального наклону

дна топографического движения вдоль изобат, причем последнее при  $S_{\zeta} > 0$  является циклоническим над возвышенностями и антициклоническим над котловинами. При смене знака  $S_{\zeta}$  направление топографического движения меняется на противоположное. Предположим, что  $S$  и  $Q$  суть монотонные функции всех своих аргументов. Тогда для западного набегающего потока  $Q_{\eta} > 0$  и благодаря (4.2.10) и (4.2.4) мы имеем  $S_{\zeta} < 0$ , т.е. топографическое движение над возвышенностью будет антициклоническим в соответствии с выводами квазигеострофической теории. Так как при этом  $S < 0$ , вертикальные движения на наветренной стороне ( $D_x > 0$ ) – восходящие, а на подветренной ( $D_x < 0$ ) – нисходящие. В восточном потоке  $Q_{\eta} < 0$ , поэтому из (4.2.4) и (4.2.10) следует  $S > 0$  и  $S_{\zeta} > 0$ , т.е. топографическое движение над возвышенностью будет циклоническим в противоположность результатам квазигеострофической теории, причем снова на наветренной стороне происходит подъем, а на подветренной – опускание. Если  $S_{\zeta}$  меняет знак по глубине, картина становится более сложной.

Заметим, что в баротропном потоке  $Q_{\zeta} = 0$ , т.е.  $Q = Q(\xi, \eta, t)$ . Но тогда из (4.2.9) при условиях (4.2.4) и (4.2.11) находим  $S = -Q_{\eta}\zeta$ , а соотношение (4.2.3) дает уравнение  $Q_{\xi} + Q_{\eta} = 0$  с решением  $Q = Q_0(\eta - \xi, t)$ , где  $Q_0(\eta, t)$  характеризует набегающий невозмущенный поток. В частности, для зонального потока со скоростью  $U(t)$  и при условии  $\Omega_y = \beta = \text{const}$  имеем  $Q_0(\eta, t) = -U(t)e^{2\eta}/2\beta$ , откуда окончательно

$$Q = -\frac{U(t)}{2\beta} \exp[2(\eta - \xi)] = -\frac{U(t)}{2\beta} \left(\frac{\Omega}{D}\right)^2. \quad (4.2.12)$$

Это соотношение, в частности, показывает, что линиями тока являются изолинии планетарно-топографической функции  $\Omega/D$ .

Далее в этом параграфе мы будем рассматривать только стационарные решения уравнения (4.2.9), принимающего более простую форму  $L(Q, S) = 0$ . Предположим, что оно допускает аналитические решения, которые можно представить в виде степенных рядов по отношению к одной из независимых переменных. Рассмотрим три соответствующие задачи с условными названиями "ξ", "η" и "ζ".

З а д а ч а " ξ ". Ищем решение в виде

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\eta, \zeta) \xi^n. \quad (4.2.13)$$

Подставляя это разложение в (4.2.9) и (4.2.3), получим

$$L(Q_0, S_n) = G_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.2.14)$$

где

$$S_n = \int_0^{\xi} [(n+1)Q_{n+1} - \zeta Q_{n\zeta}] d\zeta, \quad G_n = -\sum_{m=0}^{n-1} L(Q_{n-m}, S_m). \quad (4.2.15)$$

Граничные условия (4.2.4), (4.2.10) и (4.2.11) дают

$$S_n = 0, \quad \zeta = 0; \quad S_n = -Q_{n\eta}, \quad \zeta = 1; \quad (4.2.16)$$

$$Q_{n\zeta} = 0, \quad \zeta = 1. \quad (4.2.17)$$

Из (4.2.15) следует

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n+1} (S_{n\zeta} + \zeta Q_{n\zeta}). \quad (4.2.18)$$

Теперь алгоритм вычисления коэффициентов  $Q_n$  можно описать следующим образом. Задается функция  $Q_0(\eta, \zeta)$ , удовлетворяющая условию  $Q_{0\eta} \neq 0$ . Для каждого  $n$  она определяет коэффициенты уравнения (4.2.14), правая часть которого зависит лишь от  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ . Решая последовательно уравнения (4.2.14) относительно  $S_n$  при условиях (4.2.16), затем по формуле (4.2.18) находим  $Q_{n+1}$ . Граничное условие (4.2.17) будет при этом удовлетворено автоматически, если принять  $Q_{0\zeta} = 0$  при  $\zeta = 1$ . В самом деле, из (4.2.9) - (4.2.11) следует условие  $S_{\zeta\zeta} + Q_{\zeta\zeta} = 0$  при  $\zeta = 1$ , откуда получаем  $S_{n\zeta\zeta} + Q_{n\zeta\zeta} = 0$  при  $\zeta = 1$ . Учитывая последнее соотношение и дифференцируя (4.2.18) по  $\zeta$ , убеждаемся, что условия (4.2.17) выполнены для всех  $n$ .

Требование  $Q_{0\eta} \neq 0$  означает, что на бесконечности, где предполагается  $D \rightarrow 1$  и поток стремится к чисто зональному, скорость  $U = -\Omega_y Q_{0\eta} / \Omega^2 \neq 0$ , т.е. отсутствуют так называемые критические слои. Таким образом, для рассматриваемого класса решений естественным дополнительным краевым условием является

$$Q(0, \eta, \zeta) \equiv Q_0(\eta, \zeta) = \Phi(\eta, \zeta), \quad (4.2.19)$$

где функция  $\Phi(\eta, \zeta)$  определяет структуру полей плотности и скорости зонального потока на бесконечности.

Представим решение уравнения (4.2.14) через функцию Грина. Пусть  $M(\eta, \zeta)$  и  $N(\eta, \zeta)$  - частные решения однородного уравнения (4.2.14), удовлетворяющие краевым условиям  $M(\eta, 0) = 0$ ,  $M(\eta, 1) = 1$ ;  $N(\eta, 0) = 1$ ,  $N(\eta, 1) = 0$ . Определим функцию Грина

$$K(\eta, \zeta; \zeta') = \frac{1}{W(\eta, \zeta)} \begin{cases} M(\eta, \zeta) N(\eta, \zeta'), & \zeta \leq \zeta', \\ M(\eta, \zeta') N(\eta, \zeta), & \zeta \geq \zeta', \end{cases}$$

где введено обозначение для определителя Вронского  $W(\eta, \zeta) = MN_{\zeta} - M_{\zeta}N$ . Тогда решение задачи (4.2.14), (4.2.16) запишется в виде

$$S_n(\eta, \zeta) = -Q_{n\eta}(\eta, 1)M(\eta, \zeta) + \int_0^1 K(\eta, \zeta; \zeta') \frac{G_n}{Q_{0\eta}}(\eta, \zeta') d\zeta'. \quad (4.2.20)$$

Так как  $G_0 = 0$  из (4.2.20) следует  $S_0 = -Q_{0\eta}(\eta, 1)M(\eta, \zeta)$ , а (4.2.18) дает  $Q_1 = \zeta Q_{0\zeta} - Q_{0\eta}(\eta, 1)M_{\zeta}(\eta, \zeta)$ . Эти выражения можно использовать в качестве первого приближения к решению задачи. Не представляет труда вычисление интегральных характеристик потока; например, для интегральной функции тока имеем

$$\Psi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\eta) \xi^n, \quad (4.2.21)$$

где  $\Phi_0(\eta) = \int_0^{\eta} e^{-\eta} \left( \int_0^1 Q_{0\eta}(\eta, \zeta) d\zeta \right) d\eta + \text{const}$

$$\text{и } \Phi_{n+1}(\eta) = -\frac{e^{-\eta}}{n+1} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} Q_{n-m, \eta}(\eta, t), \quad n \geq 0.$$

З а д а ч а " \eta ". Представим решение в виде

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\xi, \zeta) \eta^n. \quad (4.2.22)$$

Подстановка в (4.2.9) приводит к системе уравнений

$$(Q_{n+1}/S_{0\zeta})_{\zeta} = G_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.2.23)$$

где при естественном ограничении  $S_{0\zeta} \neq 0$  обозначено

$$G_{n+1} = \frac{1}{(n+1)S_{0\zeta}} \left[ \sum_{m=1}^n (n-m+1)(Q_{n-m+1} S_{m\zeta\zeta} - Q_{n-m+1, \zeta} S_{m\zeta}) - \sum_{m=0}^n Q_{n-m, \zeta} S_m \right], \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$S_n = \int_0^{\zeta} (Q_{n\xi} - \zeta Q_{n\xi}) d\xi.$$

Граничное условие (4.2.10) дает

$$(n+1)Q_{n+1} + S_n = 0, \quad \zeta = 1, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (4.2.24)$$

Интегрируя (4.2.23) при условии (4.2.24), получим результат в квадратурах

$$Q_{n+1}(\xi, \zeta) = -S_{0\zeta}(\xi, \zeta) \left[ \int_{\xi}^1 G_{n+1} d\zeta + \frac{S_n(\xi, 1)}{(n+1)S_{0\zeta}(\xi, 1)} \right]. \quad (4.2.25)$$

При данном подходе дополнительным условием, выделяющим единственное решение, является

$$Q(\xi, 0, \zeta) \equiv Q_0(\xi, \zeta) = F(\xi, \zeta). \quad (4.2.26)$$

Из (4.2.11) следует, что  $Q_{0\zeta} = 0$  при  $\zeta = 1$ ; можно показать, что при этом условии (4.2.11) будет выполнено при любом  $n$ . Задавая функцию  $F$ , мы тем самым определяем плотность, вертикальную и меридиональную скорость на широте, где  $\Omega = 1$ . Условие  $S_{0\zeta} \neq 0$  означает, что в этом сечении меридиональная скорость нигде не меняет знака.

З а д а ч а " \zeta ". Примем теперь

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\xi, \eta) \zeta^n. \quad (4.2.27)$$

Подставляя это разложение в (4.2.9), после несложных преобразований получим уравнение

$$\tilde{J}(\exp[-(n+1)\xi + n\eta] Q_{n+1}, Q_0) = G_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.2.28)$$

где  $\tilde{J}$  обозначает функциональный определитель по переменным  $\xi$ ,  $\eta$  и

$$G_{n+1} = \frac{\exp[-(n+1)\xi + n\eta]}{n+1} \sum_{m=1}^n (Q_{m\xi} - m Q_m) \left[ \frac{(n-m+1)(n-m)}{m+1} Q_{n-m+1} + (n-2m+1) Q_{n-m+1, \eta} \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

Нетрудно показать, что общее решение уравнения (4.2.28) имеет вид

$$Q_{n+1} = \exp[(n+1)\xi] \sum_{k=0}^n e^{-k\eta} P_{n+1,k}(Q_0), \quad (4.2.29)$$

где  $P_{n+1,n}$  - произвольные функции своего аргумента, а остальные  $P_{n+1,k}$  при  $0 \leq k \leq n-1$  определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$P_{n+1,k} = \sum_{m=1}^n \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)(n-k)} \left[ (k-s)(n-2m+1) - \frac{(n-m+1)(n-m)}{m+1} \right] P'_{m,s} P_{n-m+1,k-s}, \quad k=0, \dots, n-1.$$

Вид функций  $P_{n,n-1}$  устанавливается с помощью краевых условий (4.2.19) или (4.2.26). В первом случае в силу аналитического характера решения имеем  $\Phi(\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \zeta^n$ . Из (4.2.27) следует

$$Q_n(0, \eta) = \varphi_n(\eta), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.2.30)$$

откуда с помощью (4.2.29) имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\eta} P_{n,k} [Q_0(0, \eta)] = \varphi_n(\eta). \quad (4.2.31)$$

Пусть  $\varphi'_0(\eta) \neq 0$ ; обозначим через  $\eta = \psi(t)$  функцию, обратную по отношению к  $t = \varphi_0(\eta)$ . Тогда из (4.2.31) находим

$$P_{n,n-1}(t) = \exp[(n-1)\psi(t)] \varphi_n[\psi(t)] - \sum_{k=0}^{n-2} \exp[(n-k-1)\psi(t)] P_{n,k}(t).$$

Если воспользоваться условием (4.2.26), то, полагая  $F(\xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi) \zeta^n$ , находим

$$Q_n(\xi, 0) = f_n(\xi), \quad n = 0, 1, \dots. \quad (4.2.32)$$

Из (4.2.29) находим  $e^{n\xi} \sum_{k=0}^{n-1} P_{n,k} [Q_0(\xi, 0)] = f_n(\xi)$ , откуда, окончательно

$$P_{n,n-1}(t) = f_n[\chi(t)] e^{-n\chi(t)} - \sum_{k=0}^{n-2} P_{n,k}(t),$$

где  $\xi = \chi(t)$  - обратная по отношению к  $t = f_0(\xi)$  функция (предполагается, что  $f'_0(\xi) \neq 0$ ).

Для определения  $Q_0(\xi, \eta)$  используем граничное условие (4.2.10), которое с помощью (4.2.27) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} [Q_{n\eta} + (Q_{n\xi} - nQ_n)/(n+1)] = 0.$$

Подставляя в это соотношение выражения (4.2.29), получим

$$A(\xi, \eta, Q_0) Q_{0\xi} + B(\xi, \eta, Q_0) Q_{0\eta} + C(\xi, \eta, Q_0) = 0, \quad (4.2.33)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  формально выражаются через "производящую" функцию

$$L(\xi, \eta, Q_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\exp[(n+1)\xi - k\eta]}{n+1} P_{n,k}(Q_0)$$



по формулам  $A = \Delta_{\alpha_0}$ ,  $B = \Delta_{\alpha_0 \xi}$ ,  $C = \Delta_{\xi \eta}$ . Уравнение первого порядка (4.2.33) необходимо интегрировать при краевом условии вида (4.2.30) или (4.2.32) в зависимости от того, какого типа задачу мы решаем.

Вопрос о сходимости рядов (4.2.13), (4.2.21) и (4.2.27) в каждой из рассмотренных задач остается открытым и требует специального исследования, однако мы всегда можем эти разложения трактовать как асимптотические.

В заключение заметим, что для развитых выше алгоритмов условие (4.2.11) не является обязательным, поскольку оно выполняется автоматически, если в набегающем потоке плотность на дне постоянна.

#### 4.3. Влияние рельефа дна на геострофические стратифицированные течения

С точки зрения интересующей нас проблемы обтекания изолированных возмущений рельефа дна зональным на бесконечности потоком наиболее подходящей является задача "ξ", более детальному рассмотрению которой посвящен настоящий параграф.

В условии (4.2.19) примем

$$Q_0(\eta, \zeta) = \Phi(\eta, \zeta) = -\frac{e^{2\eta}}{2\beta} U_0 + \delta R(\zeta), \quad (4.3.1)$$

где  $\delta > 0$  и  $U_0$  - некоторые постоянные,  $\beta = \Omega_y = \text{const}$ ,  $R'(\zeta) > 0$ , причем в соответствии с (4.2.11) предполагается  $R'(1) = 0$ . Смысл постоянных  $\delta$ ,  $U_0$  и функции  $R(\zeta)$  легко устанавливается из соотношений (4.2.5) - (4.2.8), которые на бесконечности соответственно дают  $u = U_0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $\rho = \delta R'(z)$ , т.е. стратифицированный зональный поток со скоростью  $U_0$ . Очевидно, параметр  $\delta$  служит мерой стратификации.

Рассмотрим случай, когда фундаментальная система решений уравнения (4.2.14) может быть выражена через элементарные функции. Пусть

$$R(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma} \zeta - \frac{(1+\gamma)}{\gamma^2} \ln(1+\gamma\zeta), \quad (4.3.2)$$

где  $\gamma$  - некоторый неотрицательный параметр. Распределение аномалии плотности в невозмущенном потоке имеет "гиперболический" вид  $\rho = \delta(\zeta-1)/(1+\gamma\zeta)$ , причем на дне  $\rho=0$  и на поверхности  $\rho=-\delta$ . Однородное уравнение (4.2.13) переходит в уравнение типа Эйлера  $S_{\zeta\zeta} + (1+\gamma)k^2 S / (1+\gamma\zeta)^2 = 0$ , где обозначено  $k = e^{-\eta} \sqrt{\delta\beta / U_0}$ .

Фундаментальная система решений и вронскиан соответственно имеют вид [33]

$$M(\eta, \zeta) = \left( \frac{1+\gamma\zeta}{1+\gamma} \right)^{1/2} \frac{\sin[\omega \ln(1+\gamma\zeta)]}{\sin[\omega \ln(1+\gamma)]}, \quad (4.3.3)$$

$$N(\eta, \zeta) = (1+\gamma\zeta)^{1/2} \frac{\sin[\omega \ln((1+\gamma)/(1+\gamma\zeta))]}{\sin[\omega \ln(1+\gamma)]}, \quad (4.3.4)$$

$$w(\eta, \zeta) = - \frac{\gamma \omega}{(1+\gamma)^{1/2} \sin[\omega \ln(1+\gamma)]}, \quad (4.3.5)$$

$$\text{где } \omega = \frac{1}{\gamma} |k^2(1+\gamma) - \gamma^2/4|^{1/2}. \quad (4.3.6)$$

При  $k^2 < \gamma^2/4(1+\gamma)$  в формулах (4.3.3) – (4.3.5) следует заменить круговые синусы на гиперболические. Простой анализ показывает, что (4.3.3) – (4.3.5) являются непрерывными функциями параметра  $k^2$ , за исключением точек, в которых  $\omega \ln(1+\gamma) = n\pi$ ,  $n \geq 1$ , и решение не существует. Можно ожидать, что требованию  $Q_\eta \neq 0$  (коэффициент при старшей производной в уравнении (4.2.9)) будут удовлетворять лишь решения, полученные для  $-\infty < k^2 < \gamma^2(1+\gamma)^{-1} \{1/4 + \pi^2 [\ln(1+\gamma)]^{-2}\}^{1/2}$ . При  $\gamma \rightarrow 0$  это условие переходит в  $-\infty < k^2 < \pi^2$ , которое в квазигеострофическом приближении исключает подветренные волны Россби (см., например, § 3.7).

Для линейной стратификации ( $\gamma \rightarrow 0$ ) соотношения (4.3.2) – (4.3.5) соответственно переходят в

$$R(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta-1)^2, \quad M = \frac{\text{sink}\zeta}{\text{sink}}, \quad N = \frac{\text{sink}(1-\zeta)}{\text{sink}}, \quad W = -\frac{k}{\text{sink}}.$$

В этом случае по формулам (4.2.18) и (4.2.20) были найдены четыре первых члена разложения (4.2.13),

$$Q = \frac{1}{k^2} (q_0 + q_1 \xi + q_2 \xi^2 + q_3 \xi^3), \quad (4.3.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$q_0 = \frac{1}{2} [k^2(\zeta-1)^2 - 1], \quad q_1 = k^2 \zeta (\zeta-1) + c, \quad q_2 = k^2 \zeta (\zeta-1/2) - \alpha^2/2 - k^2 \zeta s + (1/2 - \beta)c,$$

$$q_3 = k^2 \zeta (2\zeta/3 - 1/6) + \alpha^2 \beta - \alpha^2/2 + k^2(\beta-1)\zeta s + [(\alpha^2 + \beta^2)/2 + 1/6 - \alpha]c - k^2 \zeta^2 c/2,$$

$$\alpha = \frac{k}{\text{sink}}, \quad \beta = \frac{k \cos k}{\text{sink}}, \quad s = \frac{\text{sink}\zeta}{\text{sink}}, \quad c = \frac{k \cos k \zeta}{\text{sink}}.$$

В предельном случае баротропного океана ( $\delta \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow 0$ )) из (4.3.7) получаем  $Q = (\Omega^2 U_0 / \beta) (-1/2 + \xi - \xi^2 + 2\xi^3/3)$ , что совпадает с соответствующими членами разложения точного решения (4.2.12).

Формула (4.3.7) позволяет вычислить все характеристики потока при произвольном заданном рельефе дна  $D(x, y)$ . В частности, для второго слагаемого  $\tilde{u}$  зональной скорости (4.3.5), не зависящего от локальных наклонов рельефа дна, а также для вертикальной скорости (4.2.8) имеем

$$\tilde{u}/U_0 = \omega_0 + \omega_1 \xi + \omega_2 \xi^2 + \omega_3 \xi^3, \quad (4.3.8)$$

$$\omega/\Upsilon_0 D_x = \mu_0 + \mu_1 \xi + \mu_2 \xi^2, \quad (4.3.9)$$

где  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = -k^2 \zeta s - (1 + \beta)c$ ,

$$\omega_2 = [\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)/2]c + \alpha^2 \beta + k^2 \zeta [(2\beta - 1/2)s - c\zeta],$$

$$\omega_3 = [3(\alpha^2 + \beta^2)/2 - (5\alpha^2 + 3^2)\beta/2 - (1 + \beta)/6]c + k^2 \zeta s [3\beta - 3(\alpha^2 + \beta^2)/2 - 1/\beta + 3k^2 \zeta^2 (\beta - 1)/2 + k^4 \zeta^3 s/2 + \alpha^2 \beta (2 - 3\beta) - k^2 \alpha], \quad \mu_0 = s, \quad \mu_1 = \zeta (c - \alpha^2) - 2\beta s,$$

$$\mu_2 = [3(\alpha^2 + \beta^2)/2 - \beta]s + (1/2 - 2\beta)\zeta c - k^2 \zeta^2 s/2 + 3\alpha^2 (\beta - 1/2)\zeta.$$

Представляя  $1/D = e^{-\xi}$  в виде ряда и удерживая члены до  $\xi^3$  включительно, из (4.2.7) получим

$$-\rho/\delta = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3, \quad (4.3.10)$$

где  $\alpha_0 = 1 - \zeta$ ,  $\alpha_1 = s - \zeta$ ,  $\alpha_2 = (1/2 - \beta)s + \zeta (c - 1/2)$ ,

$$\alpha_3 = [(\alpha^2 + \beta^2)/2 + 1/6 - \beta]s + c\zeta(1 - \beta) - \zeta/6 - k^2 \zeta^2 s/2.$$

Все приведенные выше формулы остаются справедливыми и при  $U_0 < 0$  (западный поток), необходимо лишь везде заменить  $k^2$  на  $-k^{*2}$ , где  $k^* = e^{-\eta} \sqrt{-\delta \beta / U_0}$ , причем теперь

$$\alpha = \frac{k^*}{\text{sh}k^*}, \quad \beta = \frac{k^* \text{ch}k^*}{\text{sh}k^*}, \quad s = \frac{\text{sh}k^* \zeta}{\text{sh}k^*}, \quad c = \frac{k^* \text{ch}k^* \zeta}{\text{sh}k^*}.$$

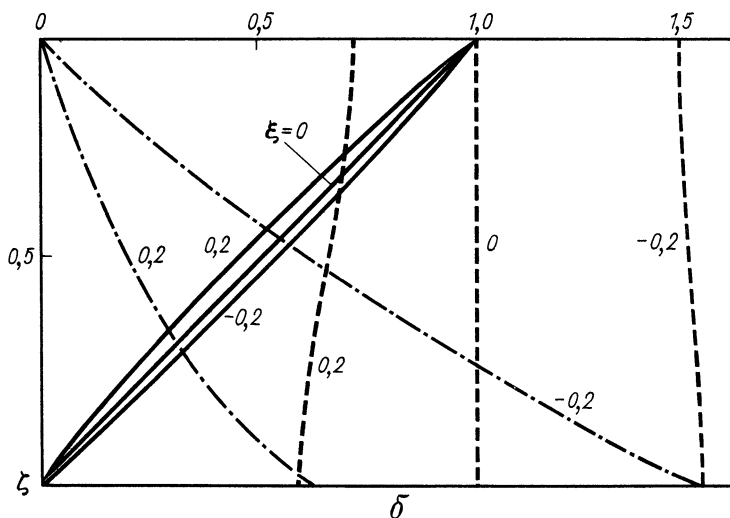
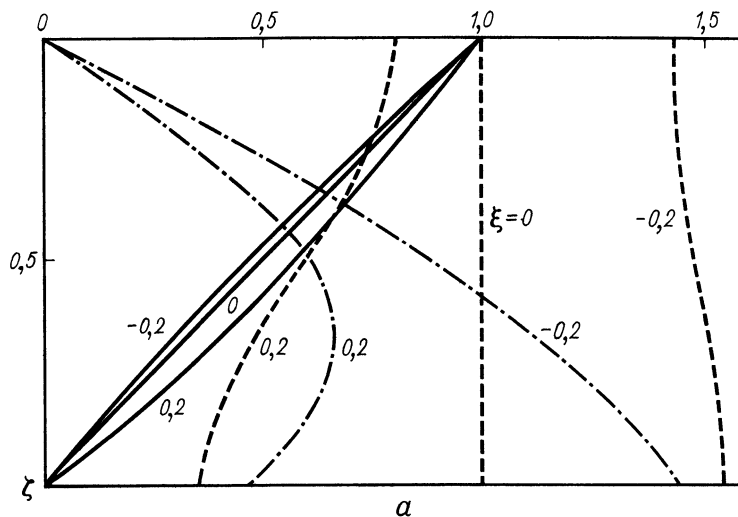
На рис. 35 приведены графики безразмерных функций (4.3.8) – (4.3.10) в зависимости от безразмерной глубины  $\zeta = z/D$ , построенные при  $k = k^*$  =  $\mathcal{H}/2$  для  $\xi = 0; 0,2$  и  $-0,2$  в случаях  $U_0 > 0$  и  $U_0 < 0$ . Ниже представлены максимальные абсолютные значения коэффициентов в формулах (4.3.8) – (4.3.10).

	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\mu_0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$U_0 > 0$	1,00	0,21	0,67	1,25	1,00	2,47	3,09	12,50	1,00	2,47	1,23
$U_0 < 0$	1,00	0,13	0,27	0,25	1,00	2,18	2,19	2,27	1,00	2,18	1,30

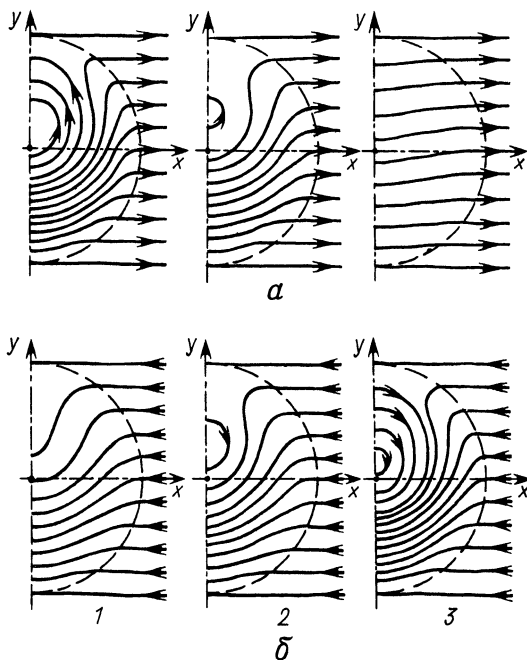
Из рис. 35 виден качественно различный характер реакции зонального стратифицированного потока на возмущения рельефа дна в зависимости от направления невозмущенного течения – восточного или западного. Особенно заметны эти различия в поведении вертикальных профилей плотности и вертикальной скорости.

Построенные выше функции были применены для модельного рельефа дна  $D(x, y) = 1 - \theta(1 - r)h(1 - r^2)^2$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $h$  – некоторый амплитудный параметр. При  $h > 0$  имеем осесимметричную подводную возвышенность с максимальной высотой  $h$ , а при  $h < 0$  – подводную котловину с полной глубиной в центре  $D = 1 - h$ . Иллюстративные расчеты были выполнены при значениях параметров  $\varphi^* = 30^\circ$ ,  $H^* = 4$  км,  $h = 0,025$ ,  $\sqrt{\delta \beta / |U_0|} = \mathcal{H}/2$ , что при  $L^* = 1000$  км и  $U^* = 10$  см/с соответствует возмущению плотности  $\delta^* = 1,66 \cdot 10^{-3}$  и числу Россби  $\mathcal{E} = 0,137 \cdot 10^{-2}$ .

На рис. 36,а приведены вычисленные линии тока (изобары) горизонтального движения на горизонтах  $z/H^* = 0; 0,6$  и  $1 - h$  для невозмущенного восточного потока ( $U_0 > 0$ ), причем в силу симметрии картин показана лишь правая половина поля давления. Хорошо видно, что возмущение рельефа сильнее всего проявляется на поверхности и очень слабо на уровне



Р и с. 35. Графики вертикального распределения безразмерных плотности  $-\rho/S$  (сплошные кривые), зональной скорости  $\tilde{u}/U$  (штриховая линия) и вертикальной скорости  $\omega/D_x U$  (штрих-пунктир) для  $\xi = 0, 0,2$  и  $-0,2$  (цифры у кривых) в случаях  $U > 0$  (а) и  $U < 0$  (б)



Р и с. 36. Линии тока восточного (а) и западного (б) потоков над осесимметричной подводной возвышенностью высоты  $h$  на различных безразмерных горизонтах  $1 - z = 0$ ,  $2 - z = 0,6$  и  $3 - z = 1 - h$

вершины подводной возвышенности. Над северным склоном формируется циклоническое вихревое образование, ослабевающее с глубиной и исчезающее на некотором промежуточном горизонте  $\bar{z}$  ( $\bar{z}/H^* > 0,6$ ). По аналогии со столбом Тэйлора в квазигеострофических моделях такую структуру можно назвать "чашей Тэйлора", причем она располагается в верхних слоях.

На рис. 36,б представлены картины изобар на тех же горизонтах в случае западного потока ( $U_0 < 0$ ). Здесь влияние рельефа и стратификации качественно имеют такой же характер, как и в квазигеострофической модели. Антициклонический вихрь над северным склоном имеет максимальное развитие у дна и, постепенно ослабевая к поверхности, исчезает при  $z/H^* < 0,4$ .

Характер интегральной циркуляции, определяемой формулой (4.2.21), в обоих случаях близок к соответствующим картинам горизонтальных течений на промежуточном горизонте  $z/H^* = 0,6$ .

Как показывает рис.35, при  $\xi < 0$  ( $D < 1$ ) и  $U_0 > 0$  величина  $S_\xi$  положительна и убывает с глубиной, а при  $U_0 < 0$  она становится отрицательной и по абсолютной величине с глубиной возрастает. Это означает, что интенсивность топографического движения в восточном набегающем потоке с глубиной ослабевает, а в западном — усиливается. Проявление

этого эффекта в суммарном поле течений мы и наблюдаем на рис. 36. Напомним, что в квазигеострофических моделях независимо от направления потока стратификация ослабляет возмущения с удалением от дна.

Таким образом, в результате воздействия локального возмущения глубины в геострофическом устойчиво стратифицированном потоке могут возникать трехмерные вихревые образования, интенсивность которых ослабевает (усиливается) с глубиной для восточного (западного) набегающего потока.

Рассмотренный выше приближенный метод решения (задача "ξ") используется в качестве основного малого параметра  $\xi = \ell n D$  и по существу близок к аналогичному подходу, когда малым параметром является относительное возвышение рельефа дна  $1 - D \approx \xi / 50\%$ . Однако применение переменной  $\xi$  представляется более удобным ввиду более медленного роста логарифмической функции. Тем не менее с ростом  $\xi$  требуется учет большего числа членов в разложениях для получения удовлетворительной точности, поэтому соответствующие выражения становятся все более громоздкими. Для слабых стратификаций можно предложить более эффективный приближенный метод, основанный на асимптотике по параметру  $\delta$  и приводящий к более обзорным результатам (см. § 4.4).

Приведенные выше примеры относились к случаю весьма стилизованного по кинематике набегающего потока с постоянной скоростью. Для функций  $\Phi(\eta, \zeta)$  более общего вида необходимо использовать численные методы решения задачи. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [18, 31].

#### 4.4. Квазистационарные слабо стратифицированные потоки

В этом параграфе мы вернемся к рассмотрению нестационарной задачи, описываемой уравнением (4.2.9). Как и в стационарном случае, зададим дополнительное краевое условие (см. (4.2.19))

$$Q = \Phi(\eta, \zeta, t; \delta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \Phi_n(\eta, \zeta, t), \quad (4.4.1)$$

определяющее набегающий поток в области с ровным дном ( $D \equiv 1$ ). Здесь пока формально введен некоторый малый параметр  $\delta$ , физический смысл которого определяется особенностями той или иной конкретной задачи.

Мы не будем формулировать начальные условия, предполагая, что процесс длится бесконечно долго.

Строго говоря, развязываемый ниже асимптотический алгоритм существенно опирается на предположение, что  $D_x \neq 0$  в рассматриваемой части физической плоскости  $(x, y)$ . Однако, как будет показано, построенное приближенное решение явно не зависит от  $D_x$  (точнее, коэффициента  $\alpha(\xi, \eta)$ ), что позволяет распространить его на случай произвольного рельефа дна.

Итак, требуется построить решение уравнения (4.2.9), удовлетворяющее условиям (4.2.10) и (4.4.1). Если для функции  $\Phi$  выполняется (4.2.11), то этому условию будет также удовлетворять решение  $Q(\xi, \eta, \zeta, t)$ .

Используя представление (4.4.1), будем искать асимптотическое решение

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Q_n(\xi, \eta, \zeta, t), \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(\xi, \eta, \zeta, t), \quad (4.4.2)$$

где, очевидно,

$$S_n = \int_0^{\zeta} (Q_{n\xi} - \zeta Q_{n\zeta}) d\zeta. \quad (4.4.3)$$

Подставляя разложения (4.4.2) в уравнение (4.2.9) и граничные условия (4.2.10) и (4.4.1), получим последовательность задач

$$Q_{0\zeta t} = \alpha L(Q_0, S_0), \quad (4.4.4)$$

$$Q_{n\zeta t} = \alpha [L(Q_0, S_n) + L(Q_n, S_0)] + \alpha G_n, \quad n \geq 1,$$

где  $G_1 = 0$ ,  $G_n = \sum_{m=1}^{n-1} L(Q_m, S_{n-m})$ ,  $n \geq 2$ ,

причем

$$S_n + Q_{n\eta} = 0, \quad \zeta = 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.4.5)$$

$$Q_n = \Phi_n(\eta, \zeta, t), \quad \xi = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.4.6)$$

Если наиболее трудная задача нулевого приближения ( $n=0$ ) каким-либо образом решена, то уравнения (4.4.4) становятся линейными с не зависящими от  $n$  коэффициентами и отличаются только свободными членами. Именно в этом преимуществе состоит целесообразность применения рассматриваемого метода возмущений.

Описанный выше алгоритм особенно просто выглядит в случае, когда задача нулевого приближения является баротропной [27]. Полагая, как и прежде,  $\Omega = 1 + \beta y$ , примем по аналогии с (4.3.1)

$$\Phi(\eta, \zeta, t; \delta) = -\frac{e^{2\eta}}{2\beta} U(t) + \delta R(\zeta), \quad (4.4.7)$$

где для определенности  $R'(1) = 0$  и  $R'(0) = -1$ . В рассматриваемом случае  $\Phi_0 = -e^{-2\eta} U(t) / 2\beta$ ,  $\Phi_1 \equiv R$  и  $\Phi_n \equiv 0$  при  $n \geq 2$ . Легко проверить (см. (4.2.12)), что решение задачи нулевого приближения имеет вид

$$Q_0 = -U(t) \exp[2(\eta - \xi)] / 2\beta, \quad (4.4.8)$$

$$S_0 = \zeta U(t) \exp[2(\eta - \xi)] / \beta,$$

поэтому вместо (4.4.4) получаем уравнения

$$Q_{n\zeta t} = -\frac{U(t)}{\beta} [Q_{n\xi\zeta} + Q_{n\eta\zeta} - Q_{n\zeta}] + \alpha G_n, \quad n \geq 1, \quad (4.4.9)$$

$$\beta = \beta \exp[2(\eta - \xi)] / \alpha = D^3 / D_x,$$

которые интегрируются методом характеристик [42].

Дифференциальные уравнения характеристик  $d\eta/d\xi = 1$ ,  $dt/d\xi = \beta(\xi, \eta)/U(t)$  имеют интегралы

$$\eta - \xi = C_1, \quad \alpha(\xi, \eta, t) \equiv \int_0^t U(t') dt' - \int_0^\xi \beta(\xi', \xi' + \eta - \xi) d\xi' = C_2.$$

Уравнение (4.4.9) вдоль каждой характеристики можно записать в виде

$$\frac{d}{d\xi} (e^{-\xi} G_n \zeta) = \frac{\beta}{U(t)} e^{\xi - 2\eta} G_n(\xi, \eta, \zeta, t). \quad (4.4.10)$$

Пусть  $U(t)$  — знакопостоянная функция; тогда существует единственное решение  $t = \tau(\xi, C_1, C_2)$  уравнения

$$\int_0^t U(t') dt' - \int_0^\xi \beta(\xi', \xi' + C_1) d\xi' = C_2.$$

Интегрируя уравнение (4.4.10) вдоль характеристики и затем еще раз по переменной  $\zeta$ , окончательно получим общее решение

$$G_n = e^{\xi} F_n(\eta - \xi, \alpha(\xi, \eta, t), \zeta) + \Psi_n(\xi, \eta, t) + N(\xi, \eta, \zeta, t), \quad (4.4.11)$$

где известная функция

$$N_n = \beta e^{3\xi - 2\eta} \int_0^\zeta \int_0^\xi \frac{e^{-\xi'} G_n(\xi', \xi' + \eta - \xi, \zeta', \tau(\xi', \eta - \xi, \alpha))}{U(\tau(\xi', \eta - \xi, \alpha))} d\zeta' d\xi' \quad (4.4.12)$$

представляет удовлетворяющее очевидным условиям  $N_n(0, \eta, \zeta, t) = N_n(\xi, \eta, 1, t) = 0$  частное решение неоднородного уравнения (4.4.9), а  $F_n$  и  $\Psi_n$  — произвольные функции своих аргументов.

Граничное условие (4.4.6) дает функциональное уравнение

$$\Phi_n(\eta, \zeta, t) = F_n(\eta, \beta(t)\zeta) + \Psi_n(0, \eta, t), \quad (4.4.13)$$

где

$$\beta(t) = \alpha(0, \eta, t) = \int_0^t U(t') dt'$$

с обратной функцией  $t = T(\beta)$ . Из (4.4.13) находим

$$F_n(\eta, \beta, \zeta) = \Phi_n(\eta, \zeta, T(\beta)) - \Psi_n(0, \eta, T(\beta)),$$

и решение (4.4.11) можно переписать в виде

$$G_n = K_n(\xi, \eta, \zeta, t) + M_n(\xi, \eta, t), \quad (4.4.14)$$

где

$$K_n = e^{\xi} \Phi_n(\eta - \xi, \zeta, T(\beta)) + N_n(\xi, \eta, \zeta, t) \quad (4.4.15)$$

и введена новая неизвестная функция

$$M_n = \Psi_n(\xi, \eta, t) - e^{\xi} \Psi_n(0, \eta - \xi, T(\alpha)),$$

удовлетворяющая граничному условию

$$M_n = 0, \quad \xi = 0. \quad (4.4.16)$$



Для определения этой функции воспользуемся граничным условием (4.4.5), из которого следует

$$M_{n\xi} + M_{n\eta} = A_n(\xi, \eta, t), \quad (4.4.17)$$

где

$$A_n(\xi, \eta, t) = - \int_0^1 (K_{n\xi} - \zeta K_{n\zeta}) d\zeta, \quad n \geq 1. \quad (4.4.18)$$

Решение уравнения (4.4.17) при условии (4.4.16) имеет вид

$$M_n(\xi, \eta, t) = \int_0^{\xi} A_n(\xi', \xi' + \eta - \xi) d\xi'. \quad (4.4.19)$$

Формулы (4.4.14), (4.4.15), (4.4.12), (4.4.18) и (4.4.19) определяют решения уравнений (4.4.9) при всех  $n \geq 1$ , удовлетворяющие условиям (4.4.5) и (4.4.6). С их помощью последовательно находят  $Q_n$ ,  $n \geq 1$ .

Так как  $G_1 \equiv 0$  и, следовательно,  $N_1 \equiv 0$ , из (4.4.15) определяем  $K_1 = e^{\xi} R(\zeta)$ , а из (4.4.18) следует  $A_1 = -\alpha e^{\xi}$ , где введена постоянная

$$\alpha = \int_0^1 (R - \zeta R') d\zeta. \quad (4.4.20)$$

С помощью (4.4.14), (4.4.18) и (4.4.19) окончательно находим

$$Q_1 = e^{\xi} R(\zeta) + \alpha(1 - e^{\xi}), \quad (4.4.21)$$

$$S_1 = e^{\xi} g(\zeta),$$

где

$$g(\zeta) = \int_0^{\zeta} (R - \zeta R') d\zeta - \alpha \zeta. \quad (4.4.22)$$

Таким образом, функции  $Q_1$  и  $S_1$  не зависят ни от  $t$ , ни от  $\eta$ .

Тогда  $G_2 = -Q_1 \zeta S_1 = -e^{2\xi} \psi'(\zeta)$ , где  $\psi(\zeta) = \int_0^{\zeta} R''(\zeta) g(\zeta) d\zeta$ ,

и формулы (4.4.15) и (4.4.12) дают

$$K_2 \equiv N_2 = \beta e^{3\xi - 2\eta} [\psi(1) - \psi(\zeta)] \int_0^{\xi} \frac{e^{\xi'} d\xi'}{U(\tau(\xi', \eta - \xi, \alpha))}.$$

Вычислим последний интеграл приближенно. Пусть  $U(t) = U_0 + \varepsilon f(t)$ , где  $U_0 = \text{const}$  и  $0 \leq \varepsilon = O(\delta)$ . Можно записать  $V(\varepsilon) = U(\tau(\xi', \eta - \xi, \alpha(\xi, \eta, t))) = V(0) + O(\varepsilon)$ , но  $V(0) = U_0 = U(t) + O(\varepsilon)$ , поэтому  $1/V(\varepsilon) = 1/U(t) + O(\varepsilon)$  и с ошибкой  $O(\delta)$  получаем

$$K_2 = \frac{\beta}{U(t)} e^{3\xi - 2\eta} [\psi(\zeta) - \psi(1)] (1 - e^{\xi}).$$

Подставляя последнее соотношение в (4.4.18), с помощью (4.4.19) окончательно находим

$$Q_2 = \frac{\beta}{U(t)} e^{2\xi-2\eta} \left\{ e^{\xi} [\psi(\zeta) - \lambda] - e^{2\xi} [\psi(\zeta) - \nu] + \lambda - \nu \right\}, \quad S_2 = \frac{\beta}{U(t)} e^{2\xi-2\eta} \chi(\xi, \zeta), \quad (4.4.23)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \chi(\xi, \zeta) = & e^{\xi} \left[ 4 \int_0^{\zeta} \psi(\zeta) d\zeta - (3\lambda + \psi(\zeta)) \zeta \right] - e^{2\xi} \left[ 5 \int_0^{\zeta} \psi(\zeta) d\zeta - (4\nu + \psi(\zeta)) \zeta \right] + \\ & + 2(\lambda - \nu) \zeta, \quad \lambda = 4 \int_0^1 \psi(\zeta) d\zeta - 3\psi(1), \quad \nu = \frac{5}{2} \int_0^1 \psi(\zeta) d\zeta - \frac{3}{2} \psi(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$p = Q_0 + \delta Q_1 + \delta^2 Q_2 + O(\delta^3), \quad (4.4.24)$$

где функции  $Q_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , соответственно определяются по формулам (4.4.8), (4.4.21) и (4.4.23). С принятой точностью и при условии  $U'(t) = O(\delta)$ , построенное приближенное решение лишь параметрически зависит от скорости набегающего потока  $U(t)$  и пригодно для любого рельефа дна. Решение (4.4.24) можно использовать как для анализа различных модельных ситуаций, так и для непосредственного расчета полей скорости и плотности по данным о рельефе дна, взятым непосредственно из наблюдений. Здесь мы ограничимся качественным анализом решения, причем для простоты в выражениях для бароклининых составляющих будем учитывать члены только первого порядка относительно  $\delta$ . В таком приближении указанное выше ограничение на порядок производной  $U'(t)$  снимается.

Возвращаясь к физическим переменным, запишем выражения для полей давления, вертикальной скорости и возмущения плотности в виде

$$p = p^{(0)}(x, y, t) + p^{(\delta)}(x, y, z, t), \quad w = w^{(0)}(x, y, z, t) + w^{(\delta)}(x, y, z, t),$$

$\rho = \rho^{(\delta)}(x, y, z)$ , где величины с нулевым индексом

$$p^{(0)} = - \frac{U(t)}{2\beta} \left( \frac{\Omega}{D} \right)^2, \quad (4.4.25)$$

$$w^{(0)} = \frac{U(t) D_x}{D^2} \frac{z}{D} \quad (4.4.26)$$

относятся к баротропной части движения, а бароклинную определяют не зависящие от времени выражения

$$p^{(\delta)} = \delta \left[ DR \left( \frac{z}{D} \right) + \varkappa (1-D) \right], \quad (4.4.27)$$

$$w^{(\delta)} = \frac{\delta \beta D_x}{\Omega^2} Dq \left( \frac{z}{D} \right), \quad (4.4.28)$$

$$\rho^{(\delta)} = \delta R' \left( \frac{z}{D} \right). \quad (4.4.29)$$

Баротропные течения определяются функциями (4.4.25) и (4.4.26). Так как  $\nabla p^{(0)} = -(\nu(t)/\beta)(\Omega/D)\nabla(\Omega/D) = (\nu/\beta)(\Omega/D)^2\nabla(D/\Omega)$ , линии тока баротропной циркуляции совпадают с изолиниями планетарно-топографической функции  $D/\Omega$ , причем в восточном потоке ( $\nu > 0$ ) движение направлено влево в северном полушарии по отношению к вектору  $\nabla(D/\Omega)$ , а в западном ( $\nu < 0$ ) - вправо. Например, в некоторой области над достаточно высокой осесимметричной возвышенностью изолинии поля  $D/\Omega$  подобно изобатам, являются замкнутыми, причем их центр несколько смещен в приполярную сторону от вершины возвышенности. Поэтому в такой области в восточном потоке баротропная циркуляция является циклонической, а в западном - антициклонической. Знак вертикальной скорости, которая линейно меняется с глубиной, определяется знаком произведения  $D_x U$ ; в любом случае на "наветренной" стороне ( $D_x U < 0$ ) имеет место подъем, а на "подветренной" - опускание.

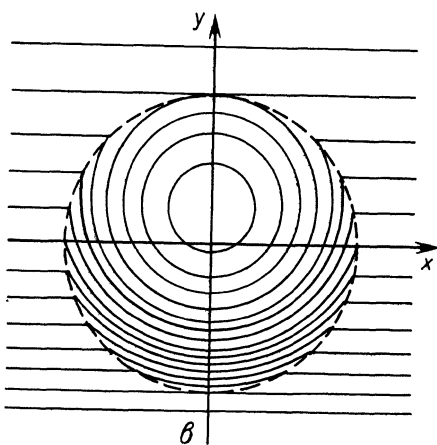
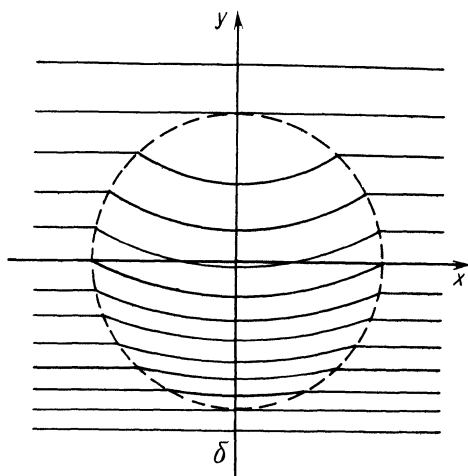
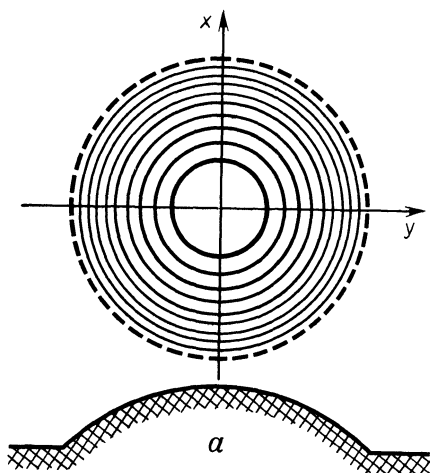
С помощью аналогичных рассуждений легко составить представление о характере баротропных течений над меридиональным подводным хребтом.

Проанализируем поле течений, описываемое функцией (4.4.27). Линии тока этой плотностной циркуляции параллельны изобатам, причем  $\nabla p^{(s)} = \delta q'(z/D)\nabla D$ . Так как согласно (4.4.20) и (4.4.21)  $q(0) = q(1) = 0$ , полный поток бароклиной циркуляции равен нулю. При некотором промежуточном значении  $\bar{\zeta}$  имеем  $q'(\bar{\zeta}) = 0$ . Для устойчивой стратификации  $q'' = -\zeta R'' < 0$ , поэтому  $q'(\zeta) > 0$  при  $0 \leq \zeta < \bar{\zeta}$  и  $q'(\zeta) < 0$  при  $\bar{\zeta} < \zeta \leq 1$ . Следовательно, выше поверхности  $z = \bar{\zeta} D$  термохалинные течения всегда направлены вдоль изобат таким образом, что глубина растет слева направо по отношению к направлению движения; ниже поверхности  $z = \bar{\zeta} D$  направление движения меняется на противоположное. Отсюда ясно, что над любой изолированной подродной возвышенностью плотностная циркуляция в верхних слоях является циклонической, а в нижних - антициклонической; над бесконечным хребтом или желобом должна существовать двухъярусная система плотностных течений, противоположно направленных по разные стороны от гребня и на разных ярусах. Эти выводы полностью согласуются с результатами Яновица [120], которые мы обсуждали в рамках квазигеострофического приближения в § 3.1 для слабо стратифицированных потоков над малыми возмущениями рельефа дна.

Так как  $q(\zeta) \geq 0$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$  (равенство достигается лишь на концах отрезка), знак вертикальной скорости (4.4.28) плотностной циркуляции совпадает со знаком  $D_x$ , т.е. на западных склонах возвышенности всегда имеет место подъем, а на восточных - опускание, причем максимальные по величине скорости достигаются на горизонте  $z = \zeta D$ .

Возмущение поля плотности в принятом приближении имеет автомодельный характер (4.4.29).

Теперь легко получить представление о качественном характере результирующего движения. Для определенности будем рассматривать осесимметричную подводную возвышенность с монотонно изменяющейся высотой. Из



Р и с. 37. Изобаты (а) и изолинии (б, в) планетарно-топографической функции  $D/\Omega$  для подводной возвышенности в форме параболоида вращения

$$б - h < h_{кр}, \quad в - h > h_{кр}.$$

Пунктиром показана граница препятствия

сказанного ясно, что в восточном потоке циклоническое вихревое образование над препятствием усиливается в верхних слоях и ослабевает в нижних, а в западном потоке, наоборот, антициклонический вихрь ослабевает на верхних горизонтах и усиливается на нижних, что характерно для "конусов Тейлора-Хогга" в квазигеострофическом приближении. В восточном потоке результирующее поле вертикальной скорости усиливается по сравнению с чисто баротропным случаем, а в западном - ослабевает. Полученные результаты объясняют особенности вертикальных структур и горизонтальных полей, рассчитанных для модельных примеров в §§ 4.2 и 4.3 иными методами.

Для иллюстрации примем простую подводную возвышенность в форме параболоида вращения, когда рельеф дна в полярных координатах задается по формуле  $D = 1 - h(1 - r^2)\theta(1 - r)$ , где  $h$  - амплитудный множитель. Картина изобат и осевое сечение через возвышенность изображены на рис. 37,а. При  $\Omega = 1 + \beta y$  изолиниями поля планетарно-топографической функции  $D/\Omega$  над препятствием являются дуги окружностей  $x^2 + (y - y_c)^2 = r_c^2$ , где  $y_c = C\beta/2h$ ,  $r_c = [1 + y_c^2 - (1 - C)/h]^{1/2}$  и  $C$  есть значение  $D/\Omega$  на соответствующей изолинии, причем  $1/(1 + \beta) \equiv C_{\min} \leq C \leq C_{\max} \equiv 1/(1 - \beta)$ . Нетрудно убедиться, что при  $h < h_{кр} \equiv \beta/2(1 + \beta)$  поле  $D/\Omega$  не имеет локальных экстремумов, и тогда картина изолиний имеет вид, изображенный на рис. 37,б, где для определенности принято  $\beta = 0,2$  (при  $L^* = 1000$  км это соответствует широте  $\varphi = 38^\circ$  в начале координат) и  $h = 1/20 < 1/12 = h_{кр}$ . При  $h > h_{кр}$  в поле функции  $D/\Omega$  имеется локальный минимум в точке  $(0, y^*)$  (здесь  $y^* = \{ [1 + \beta^2(1 - h)/h]^2 - 1 \} / \beta$ ), в некоторой окрестности которой изолинии представляют замкнутые эксцентрические окружности; этот случай показан на рис. 37,в при  $h = 3/10 > 1/12 = h_{кр}$ . Рис. 37,б,в дают представление о характере баротропных течений в до- и сверхкритическом режимах соответственно, тогда как рис. 37,а определяет геометрию бароклиных течений.

Рассмотренная модель была основана на предположении, что  $\delta \ll 1$ . Как известно, пределы применимости асимптотических методов часто оказываются более широкими, чем те, которые диктуются формальными критериями. Можно ожидать, что построенное выше приближенное решение (4.4.24) пригодено и при менее жестких ограничениях на характер стратификации. Об этом, в частности, свидетельствуют аналогичные результаты, полученные в §§ 4.2 и 4.3 при умеренной стратификации набегающего потока. С другой стороны, известно [49], что даже очень слабая стратификация глубинных вод существенно видоизменяет характер обтекания рельефа дна.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящей книге многочисленные примеры показывают, что в рамках принятых моделей удается решить ряд интересных задач о влиянии средне- и крупномасштабных особенностей рельефа дна на однородные и стратифицированные потоки вращающейся жидкости. В главных чертах устанавливается роль бета-эффекта, стратификации, высоты препятствия, направления набегающего потока и других факторов.

Стремление использовать аналитические методы исследования заставляет обращаться к весьма стилизованным ситуациям. Это вполне оправдано на первом этапе изучения различных сложных природных явлений. Например, известный специалист по геофизической гидродинамике Джозеф Педлоски пишет [148]: "Нынешнее состояние науки таково, что понимание планетарных движений требует изучения скорее отдельных задач, нежели развития самых общих теорий. Чаще всего это в высшей степени идеализированные модельные задачи".

Вопросы воздействия неровностей подстилающей поверхности на потоки воздушных масс стали предметом интенсивного изучения в динамической метеорологии значительно раньше, чем аналогичные проблемы в динамике океана [89]. Имеющаяся обширная литература насчитывает сотни названий, включая многие обзорные работы; среди недавних и наиболее полных обзоров отметим [164]. Поскольку океан и атмосфера представляют конкретные реализации систем, изучаемых в геофизической гидродинамике, общность основных законов (в частности, закона сохранения потенциального вихря) позволяет эффективно разработанные в динамической метеорологии методы переносить в океанологию. Эти возможности значительно расширятся благодаря имеющейся формальной эквивалентности математических уравнений, описывающих различные по своему физическому содержанию процессы в атмосфере и океане. Например, уже давно подмечена замечательная аналогия между движением устойчиво стратифицированной невращающейся жидкости в вертикальной плоскости и движением однородной вращающейся жидкости в горизонтальной плоскости (баротропная задача) [173-175]. Указанное обстоятельство широко использовалось при решении многих задач в главе 2.

В интересах логической замкнутости в настоящей книге исследовались лишь две модели; квазигеострофическая для возмущений рельефа дна малой высоты и геострофическая для случая крупномасштабных препятствий. Эти направления далеко не исчерпывают всего многообразия подходов к решению задач о воздействии различных форм рельефа дна на заданные потоки. Укажем на некоторые другие распространенные методы. Прежде всего сюда относится не использующий предположения о геострофичности метод возмущения по малому параметру, представляющему отношение характерной высо-

ты препятствия на дне к средней глубине океана [15, 79, 112, 113, 153]. При достаточно больших возмущениях рельефа иногда оказывается более удобным переход к новым независимым переменным, когда вместо обычной вертикальной координаты вводится плотность или температура [92, 117, 153], либо какой-нибудь иной адиабатический инвариант. В последние годы появился ряд исследований, основанных на так называемом геострофическом приближении количества движения в динамических уравнениях [109, 140]. Численные методы анализа применялись в работах [70, 111, 118, 171, 179].

Не исчерпаны до конца возможности и самой квазигеострофической модели. В частности, представляют интерес мало исследованные задачи о реакции нестационарных вихрей с вертикальным и горизонтальным сдвигом скорости на заданные возмущения рельефа дна. Рассмотрение режимов стационарирования особенно важно для решения проблемы единственности возможных установившихся состояний. Понимание основных закономерностей топографического циклогенеза может также оказаться полезным при исследовании синоптических вихрей открытого океана, поскольку последние характеризуются локальными деформациями изопикнических поверхностей, которые представляют своеобразные возмущения подстилающей поверхности для вышележащих слоев.

Весьма актуальным следует признать построение теории и разработку эффективных методов решения задач в случае подводных препятствий конечной высоты. Анализ некоторых решений для конечных топографий приводится в недавно опубликованных работах [70, 78, 92]. Задачи подобного рода важны для изучения условий формирования биологической продуктивности над высокими подводными горами (гайотами) в открытом океане. Сравнительно небольшие горизонтальные размеры гайотов и относительная крутизна боковых склонов делают необходимым учет агеострофических эффектов, связанных не только с усилением роли нелинейных членов, но и с проявлениями бокового турбулентного обмена.

Завершая сделанные выше замечания, еще раз подчеркнем, что выполненный с помощью аналитических построений анализ модельных задач, вскрывая главные механизмы изучаемого явления, одновременно создает надежную основу для последующего применения численных методов для более реальных объектов и условий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
2. Арнольд В.И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. - ДАН СССР, 1965, 162, № 5, с.975-978.
3. Берестов А.Л. Уединенные волны России. - Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, 15, № 6, с.648-654.
4. Берестов А.Л. Некоторые новые решения для солитонов России. - Там же, 1981, 17, № 1, с.82-87.
5. Бурков В.А., Павлова Ю.В. Поле синоптических вихрей в Курошио. - Океанология, 1979, 19, вып.4, с.584-592.
6. Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики. М.: Наука, 1966. Ч.2. 332с.
7. Гидрология Тихого океана. М.: Наука, 1968. 522с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100с.
9. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727с. .
10. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
11. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108с.
12. Зырянов В.Н., Фельзенбаум А.И. К теории ветровой циркуляции в однородном океане с островами и впадинами. - Океанология, 1976, 16, вып.5, с.776-781.
13. Зырянов В.Н. Топографическое меандрирование и области неустойчивости зоны взаимодействия вод моря Уэдделла и Антарктического циркумполярного течения. - Антарктика, 1979, № 18, с.123-133.
14. Зырянов В.Н. К теории вихрей Тэйлора в стратифицированном океане. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, 17, № 10, с.1072-1083.
15. Иванов Ю.А., Мельников В.А., Новицкий А.Г. Обтекание неровностей дна стратифицированным потоком. - Там же, 1977, 13, № 12, с.1278-1286.
16. Каменкович В.М. К теории Антарктического кругового течения. - Тр.Ин-та океанологии АН СССР, 1962, 56, с.241-293.
17. Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1973.
18. Каширихина Н.А., Соколовский М.А. О влиянии стратификации и сдвига скорости на топографическое движение в океане. - Б.кн.: Волновые процессы в краевых областях океана. Южно-Сахалинск, ДВНЦ АН СССР, 1978.
19. Козлов В.Ф. Применение однопараметрических моделей плотности к исследованию термохалинной циркуляции в океане конечной глубины. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1968, 4, № 6, с.622-632.



20. Козлов В.Ф. Модель меандрирования инерционных течений в бароклинном океане. - Там же, 1970, 6, № 9, с.922-933.
21. Козлов В.Ф. К вопросу о взаимном приспособлении поля масс и течений к рельефу дна в бароклинном океане.- Там же, 1975, II, № I, с.43-52.
22. Козлов В.Ф. О геострофическом движении стратифицированной жидкости над неровным дном. - Там же, 1977, I3, № 9, с.961-970.
23. Козлов В.Ф. Формирование волны Россби в нестационарном баротропном океаническом потоке под действием возмущений. - Там же, 1980, I6, № 4, с.410-416.
24. Козлов В.Ф. Об одной стационарной задаче топографического циклогенеза в однородной вращающейся жидкости. - Там же, 1981, I7, № II, с.1184-1190.
25. Козлов В.Ф. О меандрировании нестационарных зональных потоков, пересекающих подводные хребты или желоба. - Тр.ДВНИИ, 1981, вып.83, с.44-57.
26. Козлов В.Ф. Влияние рельефа дна на глубинные течения в океане. Учеб.пособие. Владивосток: МВССО РСФСР, ДВГУ, 1981. 92с.
27. Козлов В.Ф. Квазистационарное геострофическое движение слабо стратифицированной жидкости в океане с произвольным рельефом дна. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1982, 18, № 7, с.744-750.
28. Козлов В.Ф., Дарницкий В.Б. Топографический циклогенез в океане.- Тр.ДВНИИ, 1981, вып.83, с.85-100.
29. Козлов В.Ф., Иванченко Е.В. К вопросу о меандрировании и вихреобразовании в зональных океанических потоках.- Метеорология и гидрология, 1980, № 8, с.69-77.
30. Козлов В.Ф., Иванченко Е.В. Стационарная баротропная модель меандрирования и вихреобразования в канале переменного сечения с неровным дном. - Тр.ДВНИИ, 1981, вып.83, с.71-84.
31. Козлов В.Ф., Кропинова Н.А., Соколовский М.А. О влиянии рельефа дна на геострофическое движение стратифицированного зонального потока. - Метеорология и гидрология, 1979, № 5, с.66-71.
32. Козлов В.Ф., Куракин А.Ю. Начальный этап эволюции изолированного вихря в слабо стратифицированном океане. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, I7, № 9, с.965-973.
33. Козлов В.Ф., Соколовский М.А. Стационарное движение стратифицированной жидкости над неровным дном (геострофическое приближение на бета-плоскости). - Океанология, 1978, 18, вып.4, с.581-586.
34. Козлов В.Ф., Соколовский М.А. Влияние цилиндрических топографических возмущений на нестационарный зональный поток стратифицированной жидкости на бета-плоскости.-Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, I6, № 8, с.834-845.
35. Козлов В.Ф., Соколовский М.А. Меандрирование баротропного зонального потока, пересекающего бесконечный подводный хребет (периодический режим). - Океанология, 1981, 21, вып.6, с.966-972.
36. Коротаяев Г.К. Асимптотический режим динамики изолированного баро-

- тропного синоптического вихря. - Мор.гидрофиз.исслед., 1980, № I, с.5-18.
37. Коротаев Г.К. Структура, динамика и энергетика синоптической изменчивости океана. Препринт № 7. Севастополь:изд.МТИ АН СССР,1980.64с.
  38. Корт В.Г. Водособмен Южного океана. - В кн.:Океанологические исследования. М.:Наука, 1963, вып.8, с.5-16.
  39. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.М.:Мир,1972.274с.
  40. Кошляков М.Н., Грачев Ю.М. Среднемасштабные течения на гидрофизическом полигоне в тропической Атлантике. - В кн.: Атлантический гидрофизический полигон-70. М.:Наука,1974, с.163-180.
  41. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.;Л.: Гостехиздат, 1951, Т.I. 476с.
  42. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.:Мир, 1964. 830с.
  43. Ларрентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.:Наука, 1973. 736с.
  44. Ламб Г. Гидродинамика. М.;Л.: Гостехиздат, 1947. 928с.
  45. Ларичев В.Д., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби.- ДАН СССР, 1976, 231, № 5, с.1077-1079.
  46. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.:Физматгиз, 1963. 358с.
  47. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию.М.:Наука, 1970. 622с.
  48. Линецкий П.С. Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря. Л.:Гидрометеоздат, 1957. 139с.
  49. Мадерич В.С. К теории абиссальной циркуляции. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1976,12, № 4, с.402-409.
  50. Маллик Д.Д. Влияние топографии дна на зональный геострофический поток в модели стратифицированного океана. - Там же, 1979, 15, № 10, с.III4-III8.
  51. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидромеханика.М.:Мир,1964.655с.
  52. Монин А.С. Об уравнениях геофизической гидродинамики. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, 10, № 2, с.118-126.
  53. Монин А.С., Каменкович В.М., Корт В.Г. Изменчивость Мирового океана. Л.:Гидрометеоздат, 1974. 261с.
  54. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы георетической физики. М.:Изд-во иностр. лит., 1958. Т.I. 930с.
  55. Найфе А. Методы возмущений. М.:Мир, 1976. 455с.
  56. Нелинейные системы гидродинамического типа. М.:Наука,1974. 160с.
  57. Немцыкий В.В., Степанов Б.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.:Гостехиздат, 1949. 550с.
  58. Обухов А.М. К вопросу о геострофическом ветре. - Изв.АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1949,13, № 4, с.281-306.
  59. Обухов А.М. О некоторых общих характеристиках уравнений динамики атмосферы. - Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1971,7, № 7.
  60. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.:Наука, 1978. 373с.

61. Резник Г.М. О классификации квазигеострофических движений первого рода. - *Океанология*, 1976, 16, вып.4, с.571-577.
62. Савченко В.Г., Эмери У.Дж., Борисов Б.Г., Романов М.Ю. Синоптическая изменчивость термической структуры вод верхнего слоя в австралийском секторе Южного океана. - *Тр.Аркт. и Антаркт.НИИ*, 1979,360.
63. Саркисян А.С. О недостатках баротропных моделей океанической циркуляции. - *Изв.АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1969, 5, № 8.
64. Саркисян А.С., Иванов В.Ф. Совместный эффект бароклинности и рельефа дна как важный фактор в динамике морских течений. - Там же, 1971, 7, № 2, с.173-188.
65. Саркисян А.С., Кочергин В.П., Климок В.И. Теоретическая модель и расчеты поля плотности в океане с произвольным рельефом дна. - Там же, 1972,8, № 7, с.740-751.
66. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.:Изд-во иностр.лит.,1955. 667с.
67. Стоммел Г. Гольфстрим. М.:Изд-во иностр.лит., 1963. 227с.
68. Тен Е.В. Стационарная задача о влиянии рельефа дна на меандрирование узких инерционных течений.-В кн.: *Гидрофизические исследования в северной части Тихого океана и дальневосточных морях. Владивосток:ДВНЦ АН СССР*, 1979, с.70-82.
69. Физика океана. М.:Наука, 1978. Т.1. Гидрофизика океана. 455с.; Т.2. Гидродинамика океана. 455с.
70. Bannon P.R. Rotating barotropic flow over finite isolated topography.-*J.Fluid Mech.*, 1980, 101, N 2, p.281-306.
71. Batchelor G.K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence.-*Phys.Fluids*, 1969, 12, Suppl. 2.
72. Beaumont D.N. Solitary waves on an unsymmetrical shear flow with applications to Jupiter's Great Red Spot.-*Icarus*,1980,41, N 3, p.400-409.
73. Boyer D.L. Rotating flow over a step.-*J.Fluid Mech.*, 1971,50,N 4, p.675-687.
74. Boyer D.L. Rotating flow over long shallow ridges.-*Geophys.Fluid Dyn.*, 1971,2, N 2, p.165-184.
75. Boyer D.L. Bottom topography effects on rotating flows.-In:*Proc. 10th Symp.Adv.Probl. and Meth. in Fluid Mech.Rynia.1971.Warshawa*, 1971,p.27-51.
76. Bretherton F.P., Haidvogel D.B. Two-dimensional turbulence above topography.-*J.Fluid Mech.*,1976,78,N 1,p.129-154.
77. Buzzi A., Illari L., Speranza A. Quasi-geostrophic baroclinic flow past isolated obstacles.-*Arch. Meteorol., Geophys. und Bioklimatol.*, A, 1980,29,N 3,p.269-277.
78. Buzzi A., Speranza A. Stationary flow of a quasigeostrophic stratified atmosphere past finite amplitude obstacles.-*Tellus*,1979,31, N 1,p.1-12.
79. Buzzi A., Tibaldi S. Inertial and frictional effects on rotating

- and stratified flow over topographies.-*Quart.J.Roy. Meteorol.Soc.*, 1977,103,N 435,p.135-150.
80. Callahan J.E. Velocity structure and flux of the Antarctic Circumpolar Current south of Australia.-*J.Geophys.Res.*,1971,76,N 24, p.5859-5864.
  81. Chao S.-Y., Janowitz G.S. The effect of a localized topographic irregularity on the flow of a boundary current along the continental margin.-*J.Phys.Oceanogr.*,1979,9,N 5,p.900-910.
  82. Charney J.G., De Vore J.G. Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking.-*J.Atmos. Sci.*, 1979,36, N 7, p.1205-1216.
  83. Clarke R.A., Fofonoff N.P. Oceanic flow over varying bottom topography.-*J.Mar.Res.*,1969,27,N 2,p.226-240.
  84. Davey M.K. Recycling flow over bottom topography in a rotating annulus.-*J.Fluid Mech.*,1978,87, N 3,p.497-520.
  85. Davey M.K. A quasi-linear theory for rotating flow over topography. Part 1. Steady beta-plane channel.-*Ibid.*,1980,99,N 2,p.267-292.
  86. Davies P.A. Experiments on Taylor columns in rotating stratified fluids.-*Ibid.*,1972,54. N 4,p.691-717.
  87. Defant A. *Physical oceanography*. N.Y.:Pergamon press,1961. Vol.1. 745p.
  88. Drazin P.G., Moore D.W. Steady two-dimensional flow of fluid of variable density over an obstacle.-*J.Fluid Mech.*,1967,28,N 2, p.353-370.
  89. *Dynamical meteorology*. Dordrecht.:D.Reidel Publ. Co,1973. 622p.
  90. Eide L.I. Evidence of a topographically trapped vortex on the Norwegian continental shelf.-*Deep-Sea Res.*,1979,26,N 6,p.601-621.
  91. Ekman V.W. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents.-*Ark. Mat., Astron.,Fys.*,1905,2, N 11,p.1-53.
  92. Eliassen A. Balanced motion of a stratified, rotating fluid induced by bottom topography.-*Tellus*,1980,32, N 6, p.537-547.
  93. Flierl G.R. The application of linear quasigeostrophic dynamics to Gulf Stream rings.-*J.Phys.Oceanogr.*,1977,7, N 3,p.365-379.
  94. Friedlander S. An introduction to the mathematical theory of geophysical fluid dynamics.Amsterdam etc.:North-Holland Publ.Co,1980. 272p.
  95. Fuglister F. Gulf Stream 60.-In :*Progress in oceanography*.Pergamon press, 1963. Vol.1. 363p.
  96. Gadgil S. Time-dependent topographic meandering of a baroclinic current.-*Dyn.Atmos.Oceans*,1976,1,N 2,p.127-161.
  97. Gill A.E. A linear model of the Antarctic circumpolar current.-*J. Fluid Mech.*,1968,32, N 3,p.465-488.
  98. Godfrey J.S., Robinson A.R. The East Australian current as a free inertial jet.-*J.Mar.Res.*,1971,29,N 3,p.256-280.
  99. Gordon A.L., Bye J.A.T. Surface dynamic topography of the Antarctic waters.-*J.Geophys.Res.*,1972,77, N 37,p.5993-5999.

100. Gould W.J., Hendry R., Huppert H.E. An abissal topographic experiment.-*Deep-Sea Res.*,1981,28,N 5,p.409-440.
101. Hart J.E. A note on quasi-geostrophic flow over topography in bounded basin.-*J.Fluid Mech.*,1977,79,N 4,p.657-668.
102. Hart J.E. Barotropic quasi-geostrophic flow over anisotropic mountains.-*J.Atmos.Sci.*,1979,36,N 9,p.1736-1746.
103. Hide R. Origin of Jupiter's Great Red Spot.-*Nature*,1961,190,N 4779, p.75-76.
104. Hide R., Ibbetson A. An experimental study of "Taylor columns".-*Icarus*,1966,5,N 3,p.279-290.
105. Hogg N.G. Steady flow past an island with application to Bermuda.-*Geophys.Fluid Dyn.*,1972,4,N 1,p.55-81.
106. Hogg N.G. On the stratified Taylor columns.-*J.Fluid Mech.*,1973,58, N 3,p.517-537.
107. Hogg N.G. The preconditioning phase of MEDOC-1969. 11.Topographic effects.-*Deep-Sea Res.*,1973,20,N 5,p.449-459.
108. Hogg N.G. Steady flow past isolated topography.-*MODE Hot Line News*,1973,N 30,p.1-3.
109. Hoskins B.J. The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations.-*J.Atmos.Sci.*,1975,32,N 2,p.233-242.
110. Huppert H.E. Some remarks on the initiation of inertial Taylor columns.-*J.Fluid Mech.*,1975,67,N 2,p.397-412.
111. Huppert H.E., Bryan K. Topographically generated eddies.-*Deep-Sea Res.*,1976,23,N 8,p.655-679.
112. Huppert H.E., Stern M.E. Ageostrophic effects in rotating stratified flow.-*J.Fluid Mech.*,1974,62,N 2,p.369-385.
113. Huppert H.E., Stern M.E. The effect of side walls on homogeneous rotating flow over two-dimensional obstacles.-*Ibid.*,1974,62,N 3, p.417-436.
114. Ingersoll A.P. Inertial Taylor columns and Jupiter's Great Red Spot.-*J.Atmos.Sci.*,1969,26,N 4,p.744-752.
115. Inoue O. Resonance of lee waves of a stratified flow over two barriers.-*J.Meteorol.Soc.Jap.*,1979,57,N 1,p.21-28.
116. Jacobs J.A. The Taylor columns problem.-*J.Fluid Mech.*,1964,20,N 4, p.581-591.
117. Jacobs S.J. On stratified flow over bottom topography.-*J.Mar.Res.*, 1964,22,N 3,p.223-235.
118. James I.N. The forces due to geostrophic flow over shallow topography.-*Geophys. and Astrophys.Fluid Dyn.*,1980,14,N 3,p.225-250.
119. Janowitz G.S. Line singularities in unbounded stratified flow.-*J.Fluid Mech.*,1974,66,N 3, p.455-464.
120. Janowitz G.S. The effect of bottom topography on a stratified flow in the beta plane.-*J.Geophys.Res.*,1975,80,N 30,p.4163-4168.
121. Janowitz G.S. The barotropic Rossby wave drag due to an isolated

- topography.-*J.Atmos.Sci.*,1977,34,N 5,p.802-805.
122. Janowitz G.S. The effects of compressibility on the stably stratified flow over a shallow topography in the beta-plane.-*Ibid.*, 1977,34,N 11,p.1707-1714.
  123. Johnson E.R. Stratified Taylor columns on a beta-plane.-*Geophys. and Astrophys.Fluid Dyn.*,1977,9,N 2,p.159-177.
  124. Johnson E.R. Topographically bound vortices.-*Ibid.*,1978,11, N 1/2, p.61-71.
  125. Johnson E.R. Quasigeostrophic flow above sloping boundaries.-*Deep-Sea Res.*,1978,25,N 11,p.1049-1071.
  126. Johnson E.R. Trapped vortices in rotating flow.-*J.Fluid Mech.*, 1978,86,N 2,p.209-224.
  127. Johnson E.R. Finite depth stratified flow over topography on a beta-plane.-*Geophys. and Astrophys.Fluid Dyn.*,1979,12,N 1/2, p.35-43.
  128. Jones O.K. The flow of a stratified fluid over a vertical step.-*Tellus*,1976,22,N 5,p.481-492.
  129. Kao T.W. The phenomenon of blocking in stratified flows.-*J.Geophys.Res.*,1965,70,N 4,p.815-822.
  130. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. 1.A theoretical investigation.-*Tellus*,1953,5,N 1,p.42-57.
  131. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids.3.Continuous density gradients.-*Ibid.*,1955,7,N 3,p.341-357.
  132. Longuet-Higgins M.S. The response of a stratified ocean to stationary or moving wind-systems.-*Deep-Sea Res.*,1965,12,N 6,p.923-973.
  133. Maxworthy T., Redekopp L.C. New theory of Great Red Spot from solitary waves in the Jovian atmosphere.-*Nature*,1976,260,N 5551, p.509-511.
  134. Maxworthy T., Redekopp L.C. A solitary wave theory of the Great Red Spot and other observed features in the Jovian atmosphere.-*Icarus*,1976,29,N 3,p.261-271.
  135. McCartney M.S. Inertial Taylor columns on a beta-plane.-*J.Fluid Mech.*, 1975,68,N 1,p.71-95.
  136. McCartney M.S. The interaction of zonal currents with topography with applications to the Southern Ocean.-*Deep-Sea Res.*,1976,23, N 5,p.413-427.
  137. McIntyre M.E. On stationary topography-induced Rossby-wave patterns in a barotropic zonal current.-*Dt.hydrogr.Ztschr.*,1968,21, N 5,p.203-214.
  138. McIntyre M.E. On Long's hypothesis of no upstream influence in uniformly stratified or rotating flow.-*J.Fluid Mech.*,1972,52,N 2, p.209-243.
  139. Meincke J. Observation of an anticyclonic vortex trapped above a seamount.-*J.Geophys.Res.*,1971,76,N 30,p.7432-7440.
  140. Merkin L.-O., Kalney-Rivas E. Rotating stratified flow over iso-

- lated topography.-*J.Atmos.,Sci.*,1976,33,N 6,p.908-922.
141. Miles J.W. Lee waves in a stratified flow. Pt 1. Thin barrier.-*J.Fluid Mech.*,1968,32, N 3, p.549-567.
  142. Miles J.W. Upstream influence of a dipole in rotating flow.-*Ibid.*,1972,54,N 2,p.369-383.
  143. Miles J.W., Huppert H.E. Lee waves in a stratified flow. Pt 2. Semi-circular obstacle.-*Ibid.*,1968,33,N 4,p.803-814.
  144. Niiler P.P., Robinson A.R. The theory of free inertial jets. 11. A numerical experiment for the path of the Gulf Stream.-*Tellus*, 1967,19,N 4,p.601-619.
  145. Owens W.B., Hogg N.C. Oceanic observation of stratified Taylor columns near a bump.-*Deep-Sea Res.*, 1980,27,N 12, p.1029-1045.
  146. Paegle J.N. The effect of topography on a Rossby wave.-*J.Atmos. Sci.*,1979,36,N 11,p.2267-2271.
  147. Pedlosky J. The stability of currents in the atmosphere and the ocean. Pt 1.-*Ibid.*,1964,21,N 2,p.201-219.
  148. Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics.-In:*Mathematical problems in the geophysical sciences*. Providence, pt 1,1971,p.1-60.
  149. Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics.N.Y.:Springer,1979.624p.
  150. Phillips N.A. Geostrophic motion.-*Rev.Geophys.*,1963,1,N 2,p.123-176.
  151. Porter G.H., Rattray M.,jun. The influence of variable depth on steady zonal barotropic flow.-*Dt.hydrogr.Ztschr.*,1964,17,N 4, p.164-174.
  152. Proudman J. On the motion of solid in a liquid possessing vorticity.-*Proc.Roy.Soc.London*,1916,92,N 675,p.408-424.
  153. Robinson A.R. On two-dimensional flow in a rotating stratified fluid.-*J.Fluid Mech.*,1960,9,N 3,p.321-332.
  154. Robinson A.R., Gadgil S. Time-dependent topographic meandering.-*Geophys.Fluid Dyn.*,1970,1,N 4,p.411-438.
  155. Robinson A.R., Luyten J.R., Flierl G. On the theory of thin rotating jets:a quasi-geostrophic time dependent model.-*Ibid.*,1975, 6,N 3,p.211-244.
  156. Robinson A.R., Niiler P.P. The theory of free inertial currents.1. Path and structure.-*Tellus*,1967,19,N 2,p.269-291.
  157. Robinson A.R., Taft B.A. A numerical experiment for the path of the Kuroshio.-*J.Mar.Res.*,1972,30,N 1,p.65-101.
  158. Rooney D.M., Janowits G.S. Flow over the Rocky and Andes mountains: application of an analytical model.-*J.Atmos.Sci.*,1979,36,N 4, p.549-558.
  159. Rotating fluids in geophysics. L.:Acad.press,1978.551p.
  160. Saint-Guily B. Les meandres des veines de courant dans les oceans.-*Bull.Inst. Oceanogr.*,1957,N 1108,p.1-11.
  161. Savchenko V.G., Emery W.J., Vladimirov O.A. A cyclone eddy in the Antarctic circumpolar current south of Australia:results of

- Soviet-American observations.-*J.Phys.Oceanogr.*,1979,9,N 5,p.825-837.
162. Segur H. A limitation on Long's model in stratified fluid flows.-*J.Fluid Mech.*,1971,48,N 1,p.161-179.
163. Smith R.B. Some aspects of the quasi-geostrophic flow over mountains.-*J.Atmos.Sci.*,1979,36,N 12,p.2385-2393.
164. Smith R.B. The influence of mountains on the atmosphere.-*Adv. Geophys.*,1979,vol.21,p.87-230.
165. Stern M.E. Ocean circulation physics. N.Y.etc.:Acad.press,1975.246p
166. Stern M.E. Minimal properties of planetary eddies.-*J. Mar.Res.*, 1975,33,N 1,p.1-13.
167. Taylor G.I. Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids.-*Proc.Roy.Soc.London*,1923,104,N 725,p.213-218.
168. Titman C.W., Davies P.A., Hilton P.M. Taylor columns in shear flow and Jupiter's Great Red Spot.-*Nature*,1975,255,N 5495, p.538-539.
169. Trevisan A., Buzzi A. Stationary response of barotropic weakly nonlinear Rossby waves to quasi-resonant orographic forcing.-*J. Atmos.Sci.*,1980,37,N 5,p.947-957.
170. Vastano A.C., Warren B.A. Perturbations to the Gulf Stream by Atlantis 11 Seamount.-*Deep-Sea Res.*,1976,23,N 8,p.681-694.
171. Vaziri A., Boyer D.L. Rotating flow over shallow topographies.-*J.Fluid Mech.*,1971,50,N 1,p.79-95.
172. Vaziri A., Boyer D.L. Topographically induced Rossby waves.-*Arch. Mech.*,1977,29,N 1,p.3-12.
173. Veronis G. Analogous behaviour of homogeneous, rotating fluids and stratified, non-rotating fluids.-*Tellus*,1967,19,N 2,p.326-335.
174. Veronis G. Analogous behaviour of rotating and stratified fluids.-*Ibid.*,1967,19,N 4,p.620-634.
175. Veronis G. The analogy between rotating and stratified fluids.-*Annu.Rev.Fluid Mech.*,1970,vol.2,p.37-66.
176. Vickroy J.G., Dutton J.A. Bifurcation and catastrophe in a simple, forced, dissipative quasi-geostrophic flow.-*J.Atmos.Sci.*,1979,36, N 1,p.42-52.
177. Warren B.A. Topographic influences on the path of the Gulf Stream.-1963,15,N 2,p.167-183.
178. White W.B. A Rossby wake due to an island in an eastward current.-*J.Phys.Oceanogr.*,1971,1,N 3,p.161-168.
179. White W.B., McCreary J.P. On the formation of the Kuroshio meander and its relationship to the large-scale ocean circulation.-*Deep-Sea Res.*, 1976,23,N 1,p.33-47.
180. Yih Chia-Shun. Exact solutions for steady two-dimensional flow of a stratified fluid.-*J.Fluid Mech.*,1960,9,N 2,p.161-174.
181. Yih Chia-Shun. Dynamics of nonhomogeneous fluids.N.Y.;L.,1965,306p



# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие .....	3
Введение .....	5
<b>Г л а в а I. Основные уравнения и формулировка задач .....</b>	<b>16</b>
I.1. Исходные уравнения и граничные условия по вертикали .....	16
I.2. Масштабирование .....	19
I.3. Метод возмущений (задачи первого типа) .....	22
I.4. Метод возмущений (задачи второго типа) .....	28
<b>Г л а в а 2. Однородный океан .....</b>	<b>32</b>
2.1. Баротропные потоки и некоторые их свойства .....	32
2.2. Свободные баротропные волны Россби .....	38
2.3. Стационарные задачи и вариационные принципы .....	45
2.4. Столбы Тэйлора .....	50
2.5. Стационарные конфигурации топографического и свободного вихрей .....	58
2.6. Россиевский волновой след .....	65
2.7. Круглый остров в зональном потоке .....	72
2.8. Баротропные течения в бесконечном канале .....	76
2.9. Ветровые течения в замкнутом зональном канале .....	81
2.10. Бесконечный канал переменного сечения .....	86
2.11. Тонкие инерционные струи .....	95
2.12. Нестационарная реакция зонального потока на слабое возмущение рельефа дна .....	100
2.13. Нестационарный зональный поток над бесконечными хребтами .....	104
2.14. Ветровые течения над анизотропным рельефом дна .....	113
<b>Г л а в а 3. Стратифицированный океан .....</b>	<b>122</b>
3.1. Слабая стратификация .....	122
3.2. Сильная стратификация .....	127
3.3. Некоторые общие свойства стратифицированных потоков .....	131
3.4. Стационарные бароклинные потоки .....	137
3.5. "Конусы" Тэйлора-Хогга .....	142
3.6. Россиевский волновой след в стратифицированном потоке ..	149
3.7. Нестационарный зональный поток над бесконечными хребтами .....	54
<b>Г л а в а 4. Крупномасштабные геострофические движения .....</b>	<b>61</b>
4.1. Взаимное приспособление полей масс и течений к рельефу дна в бароклинном океане .....	61
4.2. Некоторые асимптотические решения .....	70
4.3. Влияние рельефа дна на геострофические стратифицированные течения .....	176
4.4. Квазистационарные слабо стратифицированные потоки .....	181
Заключение .....	169
Литература .....	191

