

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

---

ОРДЕНА ЛЕНИНА АРКТИЧЕСКИЙ И АНТАРКТИЧЕСКИЙ  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ

Ю. П. ДОРОНИН

ТЕПЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ  
В АРКТИКЕ

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук  
Е. П. БОРИСЕНКОВА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАД • 1969

УДК 551.465.7(98)

986000

2-9-7  
39-69

Ленинградский  
Гидрометеорологический институт  
БИБЛИОТЕКА  
Л-д 100100, Малый пр., 98

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава I. Турбулентный теплообмен между поверхностью моря и атмосферой</b> . . . . .	<b>9</b>
§ 1. Существующие представления о методах расчета турбулентного потока тепла по осредненным значениям метеорологических элементов . . . . .	—
§ 2. Соотношение коэффициентов турбулентной теплопроводности, вязкости и диффузии . . . . .	17
§ 3. Шероховатость подстилающей поверхности в Арктике . . . . .	21
§ 4. Вертикальный профиль метеорологических элементов в Арктике и методика расчета турбулентного потока тепла . . . . .	27
§ 5. Теплообмен при испарении и конденсации влаги . . . . .	38
<b>Глава II. Радиационный баланс подстилающей поверхности</b> . . . . .	<b>42</b>
§ 1. Уравнение радиационного баланса . . . . .	—
§ 2. Определение суммарной радиации над морем . . . . .	44
§ 3. Отражение и поглощение суммарной радиации в Арктике . . . . .	49
§ 4. Расчет противоизлучения атмосферы и эффективного излучения подстилающей поверхности . . . . .	57
<b>Глава III. Вертикальный теплообмен в море</b> . . . . .	<b>67</b>
§ 1. Понятие об устойчивости и характере перемешивания воды . . . . .	—
§ 2. Коэффициент вертикального турбулентного перемешивания . . . . .	69
§ 3. Конвективное перемешивание . . . . .	80
<b>Глава IV. Нарастание льда и теплообмен через него</b> . . . . .	<b>91</b>
§ 1. Теплофизические характеристики морского льда . . . . .	—
§ 2. Методы расчета нарастания толщины льда . . . . .	97
§ 3. Влияние снега на нарастание толщины льда . . . . .	108
§ 4. Теплообмен через лед . . . . .	124
<b>Глава V. Влияние теплообмена с атмосферой на весенне-летние термические процессы в поверхностном слое моря</b> . . . . .	<b>131</b>
§ 1. Температура льда . . . . .	—
§ 2. Изменения толщины льда под воздействием солнечного и атмосферного тепла . . . . .	—
§ 3. Прогрев воды и таяние льда в массивах . . . . .	152
§ 4. Прогрев поверхностного слоя моря . . . . .	164

✓	<b>Глава VI. Развитие гидрологических процессов в поверхностном слое моря под влиянием атмосферных воздействий в осенне-зимний период</b>	170
§ 1.	Метод расчета некоторых элементов гидрологического режима верхнего слоя моря	—
§ 2.	Расчетная схема и сопоставление результатов расчета с опытными данными	179
§ 3.	Влияние метеорологических факторов на сроки ледообразования	187
§ 4.	Метод расчета развития осенне-зимнего гидрологического процесса на большой акватории	199
§ 5.	Анализ результатов расчета	207
✓	<b>Глава VII. Влияние Северного Ледовитого океана на температуру и барическое поле атмосферы</b>	216
§ 1.	Термическая трансформация воздуха над морем	—
§ 2.	Термическая трансформация воздуха над льдом	225
§ 3.	Модель строения пограничных слоев атмосферы и моря	235
§ 4.	Влияние теплообмена с океаном на барическое поле атмосферы. Модель для численного эксперимента	239
§ 5.	Результаты экспериментов по оценке влияния океана на температуру и барическое поле атмосферы	254
	<b>Глава VIII. Использование радиации и теплозапаса воды для уничтожения льда</b>	264
§ 1.	Ускорение стаивания льда при искусственном изменении его альбедо	—
§ 2.	Использование теплозапаса воды для создания незамерзающих акваторий	267
§ 3.	Проблема уничтожения арктического льда	275
	Литература	284

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблеме взаимодействия океана и атмосферы с давних пор уделяется большое внимание как океанологами, так и метеорологами. В связи с запросами практики к метеорологическим и гидрологическим прогнозам интерес к этой проблеме в последнее время еще более возрос. Во многих докладах, сделанных на Международном симпозиуме по динамике крупномасштабных атмосферных процессов и на Втором океанографическом конгрессе в 1965 и в 1966 гг., рассматривались различные аспекты взаимодействия атмосферы и гидросферы и отмечалась необходимость всестороннего изучения данной проблемы как с целью исследования режимных особенностей этих соприкасающихся сред, так и для успешного решения задач гидрометеорологического прогноза, особенно долгосрочного.

Успехи в изучении взаимного влияния атмосферы и гидросферы в Арктике в первую очередь связаны с именами В. Ю. Визе, Н. Н. Зубова, В. В. Шулейкина, Д. А. Дрогайцева. Полученные ими важные результаты по оценке влияния атмосферы на развитие гидрологических, и в частности ледовых процессов в Северном Ледовитом океане и его морях, и обратной зависимости термического и барического полей атмосферы от теплообмена с океаном во многом способствовали развитию представлений о режиме гидросферы и климате Арктики.

В настоящей монографии излагаются современные представления о характере теплового взаимодействия между атмосферой и гидросферой в Арктике, о процессах, развивающихся в этих средах под влиянием теплообмена, и даются способы их количественной оценки. В связи с тем что ледяной покров играет большую роль в теплообмене и сам является его продуктом, в связи с необходимостью для нужд мореплавания знать условия образования, нарастания и разрушения льда этим вопросам в книге уделяется большое внимание.

Внедрение в практику гидрометеорологических расчетов быстродействующих электронных вычислительных машин позволило по-новому, более точно подойти к определению элементов

конвективного перемешивания в море, расчету сроков ледообразования, нарастания и таяния льда, влиянию теплообмена с океаном на температуру и барическое поле атмосферы и решению других задач. В составлении программ и проведении вычислений с помощью ЭЦВМ, кроме автора, приняли участие сотрудники Арктического и антарктического института А. С. Грушкина, Ю. Н. Колтаков, И. В. Семенова и Е. К. Соколова.

*Арктический и антарктический  
научно-исследовательский институт*

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы в атмосфере и гидросфере Арктики, как и на всем земном шаре, зависят не только от притока солнечной энергии, длинноволнового излучения в межпланетное пространство, внешних гравитационных сил, но и от перераспределения энергии, которое определяется особенностями взаимодействия этих соприкасающихся сред. Сущность этого взаимодействия заключается в том, что метеорологические условия оказывают определенное влияние на некоторые физические явления, наблюдающиеся в Северном Ледовитом океане и его морях, а состояние последних определенным образом воздействует на характер атмосферных процессов. Таким образом устанавливается непрерывная взаимосвязь между атмосферой и океаном. Особенно она заметна в явлениях, протекающих в пограничных слоях моря и воздуха.

Так, в результате термического взаимодействия с прилегающими слоями воздуха и лучистого теплообмена формируется термический режим поверхностного слоя моря. Осадки и испарение влаги приводят к изменению солености поверхностных вод, что очень сильно влияет на интенсивность вертикального перемешивания и перенос различных свойств как в глубинные слои, так и к поверхности моря. Динамическое воздействие атмосферы наиболее ярко проявляется в дрейфовых течениях, волнах, изменении уровня моря и в других явлениях.

Очень ярким примером термодинамического воздействия атмосферы на гидрологические процессы в верхнем слое моря является изменение ледовых условий в Арктике. В весенне-летний период под влиянием солнечной энергии и теплообмена с атмосферой происходит интенсивное таяние льдов и их перераспределение по акватории моря, вызванное действием ветра. Преобладание оттока тепла в атмосферу над притоком в осенне-зимний период приводит к выхолаживанию моря; температура воды понижается вплоть до температуры замерзания и происходит образование льда.

Следовательно, приток тепла к поверхности моря приводит не только к количественным изменениям величин некоторых гидрологических характеристик, но и к изменению качественного состояния поверхности моря.

Ледяной покров Северного Ледовитого океана, являясь продуктом взаимодействия атмосферы и гидросферы, в свою очередь оказывает на него существенное влияние. Исследуя тепловой баланс северных морей, В. В. Шулейкин [272] показал, что потери тепла морем в зимний период достигли бы очень больших значений, если бы не существовала такая тепловая защита, как ледяной покров. Но в теплое время года ледяной покров играет обратную роль, препятствуя прогреву моря. Таким образом, лед является специфическим терморегулятором.

Теплофизические свойства льда, мощность льда, сказываясь на тепловых потоках между морем и атмосферой, влияют на термический режим атмосферы, особенно в нижних слоях. Характер поверхности льда сказывается на профиле ветра вблизи нее, тем самым влияя на тепло- и влагообмен между льдом и воздухом. Процессы же ледообразования и разрушения и переносы льда в свою очередь тесно связаны с термическим и динамическим состоянием атмосферы и моря. Тепловой баланс и условия дрейфа льдов являются основными характеристиками, определяющими ледовый режим Северного Ледовитого океана. Закономерности теплообмена вблизи деятельной поверхности моря и особенности дрейфа льдов являются той физической базой, на которой строятся современные методы прогноза ледовитости.

Чрезвычайно большая теплоемкость воды по сравнению с воздухом и интенсивное перемешивание в верхних слоях океана приводят к тому, что он активно участвует в теплообмене с атмосферой. Поэтому уже на ранних этапах развития метеорологии делались попытки связать погодные условия с состоянием поверхности океана. В результате тепло- и влагообмена с морем происходит трансформация воздушной массы, в первую очередь ее нижнего слоя. При длительном воздействии океана на атмосферу меняются не только влажность и термический режим, но и характер крупномасштабной циркуляции. Учтя различие в перераспределении энергии между атмосферой и океаном, атмосферой и материками, Е. Н. Блинова [13] более двух десятков лет тому назад теоретически получила распределение центров действия атмосферы.

В последние годы развернулись крупные исследования общей циркуляции атмосферы и теории климата, исходящие из учета закономерностей перераспределения энергии. Несомненно, что изменение ледовой обстановки в Арктике, приводящее к изменению составляющих теплового баланса, должно в какой-то мере повлиять на атмосферные процессы.



Развитие математических методов прогноза погоды ставит все более жесткие требования к оценке факторов, влияющих на погоду, и установлению зависимостей, которые позволили бы учесть эти факторы. В связи с этим Г. И. Марчук [153] определяет круг исследований по физике атмосферы и океана, имеющих большое значение для развития теории прогноза погоды. В первую очередь он отмечает необходимость исследований механизма обмена энергией между подстилающей поверхностью и атмосферой. Если для краткосрочных прогнозов удастся использовать адиабатические модели, то уже при прогнозе на несколько дней необходимо учитывать влияние подстилающей поверхности. И здесь проявляется роль океана как среды с довольно консервативными термическими свойствами. Но для прогноза погоды большой заблаговременности поверхностный слой океана часто нельзя считать термически неизменным. Возникает задача совместного исследования термодинамики этих сред, являющаяся основой прогноза на длительный срок.

К настоящему времени исследованиями В. Ю. Визе, В. В. Шулейкина, Д. А. Дрогайцева, Х. П. Погосяна, В. Г. Семёнова и многих других советских и зарубежных ученых установлена взаимосвязь многих явлений в океане и атмосфере как для процессов глобальных масштабов, так и в локальных районах океанов и морей. Однако сам механизм взаимодействия этих сред во многом еще остается неясным, и поэтому для развития как метеорологических прогнозов, так и гидрологических требуются дальнейшие исследования по проблеме взаимодействия океана и атмосферы. Вследствие этого в последнее время проводится интенсификация теоретических и экспериментальных работ в данном направлении. Для того чтобы комплексно решать эту важную проблему, необходимо объединить усилия ученых многих стран. В связи с этим на Втором международном океанографическом конгрессе в 1966 г. В. В. Тимоновым [223] был поставлен доклад с предложениями об определении рациональных рамок, направлений и формы исследований по данной проблеме.

В Арктическом и антарктическом научно-исследовательском институте (АНИИ) в течение многих лет проводятся работы, в той или иной мере связанные с вопросами взаимодействия атмосферы и океана. Особенно большую роль в изучении термического и динамического взаимодействия этих сред сыграли организованные во льдах Арктики дрейфующие станции. На некоторых из них проводились специальные исследования закономерностей тепло- и влагообмена как между соприкасающимися средами, так и внутри них, велись наблюдения над термикой и динамикой льда, определялись составляющие теплового баланса и т. д. К настоящему времени имеются определенные достижения как в изучении закономерностей взаимодействия атмосферы и гидросферы в Арктике, так и в определении элементов

теплового и водного балансов. В связи со спецификой задач, выдвинутых практикой, наиболее обширные исследования проводились в направлениях изучения воздействия атмосферы на океанические процессы и особенно на ледовый режим Арктического бассейна и его морей, где получены наиболее полные результаты. В меньшей степени изучено обратное влияние состояния океана на арктическую атмосферу. Очень большая работа проведена по исследованию радиационного климата Арктики.

Накопленный к настоящему времени фактический материал и внедрение в практику гидрометеорологических исследований быстродействующих электронных вычислительных машин позволили сделать следующий шаг к познанию взаимодействия атмосферы и гидросферы в Арктике. В данной работе излагаются вопросы лишь теплового взаимодействия этих сред и проявления его в различных гидрометеорологических процессах. Динамика привлекается только в той мере, в какой она необходима для исследования термических воздействий. Вследствие климатических особенностей Арктики и малого числа специальных наблюдений необходимо было предварительное рассмотрение закономерностей теплообмена и получение зависимостей, использующих в качестве аргументов стандартные гидрометеорологические данные. Этими обстоятельствами объясняется построение работы, в которой сначала излагаются закономерности теплообмена, а затем влияние атмосферы на гидрологические процессы и обратное воздействие. Некоторым зависимостям гидрологических процессов от атмосферных удалось придать прогностический характер, и они используются в настоящее время в оперативной практике ААНИИ.

## Глава I. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ТЕПЛОБМЕН МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЬЮ МОРЯ И АТМОСФЕРОЙ

### § 1. Существующие представления о методах расчета турбулентного потока тепла по осредненным значениям метеорологических элементов

Обычно существующее в природных условиях турбулентное перемешивание воздуха и контрасты температуры и влаги между подстилающей поверхностью и нижним слоем воздуха создают между последними потоки тепла и влаги. Определение этих турбулентных потоков как путем непосредственных измерений, так и на основании различных расчетных методов обычно представляет наибольшие трудности по сравнению с определением других членов теплового баланса.

Широкое распространение в настоящее время получили так называемые расчетные методы определения турбулентных потоков тепла и влаги. Сюда относятся методы определения потоков по измеренным пульсациям температуры  $T'$ , влажности  $q'$  и вертикальной скорости ветра  $W'$ , определение потоков тепла и влаги из уравнений теплового и водного балансов при известных величинах остальных компонентов, расчет потоков тепла и влаги по данным «градиентных» наблюдений.

Первый из перечисленных расчетных методов базируется на выражении, полученном при осреднении уравнений притока тепла или влаги согласно основным идеям Рейнольдса [137]

$$\Phi = \overline{W'S'},$$

где  $\Phi$  — турбулентный поток субстанции  $S$ .

Измерение пульсаций вертикальной скорости ветра и пульсаций субстанции  $S'$ , получение и осреднение их произведений производятся при помощи довольно сложной аппаратуры, а потому применимость этого метода обычно ограничена кратковременными специальными исследованиями.

В противоположность этому методу определение потоков тепла и влаги из уравнений теплового и водного балансов

наиболее применимо при получении потоков за длительные промежутки времени, обеспечивая при этом достаточно высокую точность [24, 29].

Основным недостатком балансового метода является невозможность расчета потока тепла без наличия данных по всем другим компонентам баланса. Кроме того, турбулентный поток тепла здесь определяется как остаточный член уравнения баланса, поэтому все погрешности автоматически входят в вычисляемую компоненту.

Очень большое признание в настоящее время имеет метод расчета потоков тепла и влаги по данным «градиентных» наблюдений средних величин скорости ветра  $V$ , температуры  $T$  и удельной влажности воздуха  $q$ , благодаря простоте расчетных формул и небольшому количеству параметров, для получения которых не требуется тонкой аппаратуры. Однако при выводе формул, позволяющих рассчитывать вертикальные потоки субстанций по осредненным характеристикам элементов, используются некоторые гипотезы, обосновываемые в большей или меньшей степени экспериментальными данными. Поэтому теоретические работы в этом направлении известны под названием полуэмпирических. Обзор этих теорий дан в монографии А. С. Монина и А. М. Яглома [161]. Там же показано, что многие выводы полуэмпирических теорий могут быть обоснованы теорией универсального стационарного статистического режима мелкомасштабной турбулентности, базирующейся на гипотезах подобия, предложенных А. Н. Колмогоровым.

Отсутствие в большинстве случаев в Арктике исходных данных, необходимых для определения потоков тепла и влаги по первым двум «прямым» методам, заставляет применять полуэмпирические формулы. Основной гипотезой, используемой в полуэмпирических теориях турбулентного переноса субстанции, является принимаемая формальная аналогия между закономерностями турбулентной и молекулярной диффузии в неоднородной среде. При некоторых условиях эта аналогия более или менее справедлива.

Известно, что особенностью турбулентной диффузии является многомасштабность турбулентных движений, т. е. перенос субстанции осуществляется возмущениями различных масштабов. При этом оказывается можно выделить некоторый характерный масштаб возмущения ( $\zeta$ ) и некоторое характерное время жизни возмущений ( $\xi$ ), за счет которых в основном и происходит диффузия. Так, например, проведенные А. С. Гурвичем и Л. Р. Цвангом [55, 236] измерения турбулентных потоков тепла и спектров пульсаций вертикальной скорости и температуры воздуха с частотами 0,01; 0,1; 1,0 и 10 гц позволили установить, что основной вклад в турбулентный поток тепла между подстилающей поверхностью и воздухом дают возмущения с ха-

рактерным масштабом длины в несколько метров и с характерной частотой 0,1—1,0 *гц*.

А. С. Гурвич [52] определил, что основная доля энергии турбулентности в пограничном слое атмосферы сосредоточена в области частот, соответствующих масштабу высоты, на которой проводятся наблюдения. С увеличением высоты характерный масштаб этих возмущений растет, и на высоте 300 *м* основной вклад в турбулентный поток тепла дают возмущения с характерными размерами около 300 *м*. Роль неоднородностей размерами несколько метров в переносе тепла на этой высоте мала.

Таким образом, масштабы молекулярных и турбулентных процессов отличаются в тысячи раз. Поэтому при описании турбулентной диффузии аналогия с молекулярной оправдана лишь в тех случаях, когда период осреднения турбулентных процессов велик по сравнению с приведенными значениями размеров возмущений и их частотой.

Кроме того, из-за сравнительно малой скорости турбулентных возмущений по сравнению со скоростью движения молекул в атмосфере аналогия с молекулярной теорией диффузии возможна лишь при условии, если турбулентный процесс стационарен или меняется во времени много медленнее, чем происходит пульсация отмеченных выше энергетически значимых возмущений. Проведенное Л. Р. Цвангом [236] исследование по определению необходимого периода осреднения результатов измерений пульсаций  $W'$  и  $T'$  для получения устойчивых значений турбулентного потока тепла показало, что устойчивость достигается при величине осреднения в пределах 10 *мин*. При меньшем периоде осреднения величина потока тепла  $\Phi$  пульсирует. К таким же результатам пришел А. С. Гурвич [53], проводя осреднение измеренных при помощи турбулентного динамометра значений напряжения трения. При этом связь с характеристиками, рассчитанными на основании градиентных наблюдений, получилась хорошей. На такой же порядок величины периода осреднения указывается в работе [254].

Исходя из приведенной оценки порядка величины интервала осреднения, можно заключить, что аналогия с молекулярной диффузией возможна при условии, что турбулентный процесс в течение отмеченного периода осреднения остается практически стационарным.

Турбулентные переносы тепла, влаги и количества движения между подстилающей поверхностью и атмосферой обычно удовлетворяют перечисленным условиям. Поэтому использование в различных полуэмпирических теориях турбулентной диффузии положения о пропорциональности между потоком субстанции и градиентом ее концентрации, строго говоря, справедливого при описании молекулярной диффузии, в общем приводит к реальным результатам. При этом коэффициент турбулентного обмена

понимается как коэффициент пропорциональности между средним турбулентным потоком  $\Phi$  субстанции  $S$  и градиентом ее осредненной концентрации  $\frac{\partial S}{\partial z}$

$$\Phi = -k\rho \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (1.1)^*$$

где  $\rho$  — плотность воздуха.

Основная трудность, встречающаяся при расчетах потоков по формуле (1.1), заключается в определении коэффициента турбулентного обмена  $k$ . Из существующих методов наиболее широко в оперативной практике используются способы определения  $k$  по осредненным величинам метеорологических элементов с использованием некоторых предпосылок.

Известно, что по мере удаления от подстилающей поверхности непосредственное влияние ее на атмосферные процессы ослабевает [133]. Но в некотором тонком слое вблизи подстилающей поверхности турбулентные потоки тепла, влаги и количества движения практически не зависят от высоты. Указанный слой обычно принято называть приземным или пограничным подслоем. Имеющиеся оценки определяют высоту этого подслоя в 20—40 м [137]. Рядом авторов [9, 23, 61, 132] обосновывается, что распределение метеорологических элементов в пограничном подслое в основном обуславливается турбулентным обменом между атмосферой и подстилающей поверхностью. Отсюда следует, что по вертикальному распределению метеорологических характеристик при использовании положения о неизменности с высотой в пограничном подслое турбулентных потоков можно судить об интенсивности турбулентного перемешивания. В других исследованиях доказывается, что на вертикальный профиль метеорологических элементов оказывает влияние не только турбулентный поток. В частности, существует мнение, что на вертикальный профиль температуры может заметное влияние оказывать лучистый поток тепла [43, 267, 294]. В таком случае коэффициент турбулентной теплопроводности, определенный по данным о распределении температуры воздуха, учитывает не только эффект турбулентного перемешивания, но и воздействие радиационных потоков. При определении коэффициента турбулентного обмена количеством движения часто принято исходить из полуэмпирической теории турбулентности Прандтля [161]. Согласно этой теории  $k$  определяется через «длину пути смешения»  $xz$  и вертикальный градиент горизонтальной скорости ветра  $\frac{\partial V}{\partial z}$

$$k = (xz)^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.1)$$

\* В скобках везде 1-я цифра означает номер формул, 2-я — номер главы.

При условии постоянства потока количества движения в пограничном подслое на основании формул (1.1) и (2.1) определяется профиль скорости ветра, что дает возможность рассчитывать коэффициент лишь по данным скорости ветра

$$V = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}; \quad (3.1)$$

$$k = \frac{\kappa^2 V_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} z = k' z, \quad (4.1)$$

где  $\kappa$  — постоянная Кармана;  
 $z_0$  — шероховатость подстилающей поверхности;

$$v_* = \sqrt{\frac{\Phi}{\rho}} \text{ — динамическая скорость;}$$

$V_1$  — скорость ветра, измеренная на высоте  $z_1$ .

Такие же выражения для определения коэффициента турбулентного обмена и профиля скорости ветра получаются при использовании соображений подобия и размерностей [160], а не гипотезы Прандтля.

Проверка соответствия рассчитанного профиля скорости ветра по формуле (3.1) с наблюдаемым в природных условиях показала, что при существовании значительных градиентов температуры вертикальный профиль ветра отличается от логарифмического. Поэтому производится учет влияния стратификации на турбулентность введением поправки либо непосредственно к коэффициенту турбулентной вязкости [82, 224], либо к длине пути смешения [22, 131, 287, 293].

В получившихся большое признание схемах, определяющих вертикальные профили скорости ветра, температуры и влажности воздуха, а также коэффициент турбулентного обмена в пограничном подслое, исходя из соображения подобия и размерностей, влияние стратификации на интенсивность обмена учитывается вводом некоторых безразмерных параметров [160, 311, 318].

А. Р. Константинов [122] считает, что турбулентные потоки при неустойчивой стратификации возрастают, в основном не за счет роста коэффициента турбулентного обмена, а за счет выборочности обмена, при котором вверх поднимаются массы воздуха преимущественно более теплые, а опускаются более холодные, чем массы воздуха со средней температурой на заданном уровне. Поэтому поправка, учитывающая влияние стратификации на обмен, должна, в принципе, вноситься к градиенту переносимой субстанции.

В настоящее время известны попытки получения более общих выражений для определения коэффициента турбулентного обмена и профиля метеорологических элементов, из которых

бы как частные случаи получались схемы М. И. Будыко, Д. Л. Лайхтмана, А. С. Моница и А. М. Обухова [125, 191].

Согласно работе [125], коэффициент турбулентного обмена и диссипация энергии турбулентности ( $D$ ) из соображений теории подобия и размерностей могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} k &= v_* \kappa z f_1 \left( \frac{\kappa z}{L_*} \right); \\ D &= \frac{v_*^3}{\kappa z} f_2 \left( \frac{k}{v_* \kappa z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $L_* = \frac{v_*^3 c_p \rho \overline{T_a}}{g \Phi_T}$  — масштаб длины, согласно [160];

$\overline{T_a}$  — температура воздуха в °К, осредненная в квазистационарном слое;

$f_1, f_2$  — универсальные функции.

Е. А. Ридель [191] так представляет функцию  $f_2$

$$f_2 = C_1 \left( \frac{k}{v_* \kappa z} \right)^n, \quad (6.1)$$

где  $C_1$  и  $n$  — безразмерные коэффициенты, зависящие от стратификации.

Поскольку во вторую формулу (5.1) при термической конвекции не должно входить  $v_*$ , а при глубокой инверсии —  $z$ , то параметр  $n$  должен быть равен 3 в первом случае и  $n = -1$  — во втором. При нейтральной стратификации  $n = 0$  и  $C_1 = 1$ . Следовательно,  $3 \geq n \geq -1$ . Для получения выражений коэффициента турбулентного обмена и профилей метеорологических элементов в приземном слое привлекается уравнение баланса турбулентной энергии, которое в случае квазистационарного режима записывается в виде

$$\frac{v_*^4}{k} + \frac{g}{T_a} \cdot \frac{\Phi_T}{c_p \rho} = D. \quad (7.1)$$

Здесь принято

$$\left. \begin{aligned} \Phi_T &= -c_p \rho \eta k \frac{\partial T}{\partial z}, \\ v_*^2 &= k \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

$\eta = \frac{a}{k}$  — соотношение между коэффициентом турбулентного обмена теплом и количеством движения.



Из формул (5.1) и (7.1) находятся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{v_*}{L_*} \cdot \frac{1}{\eta^2 Ri}, \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{T_*}{L_*} \cdot \frac{1}{\eta^2 Ri}, \\ \eta Ri &= C_1^{-\frac{1}{1+n}} \cdot \frac{\kappa z}{L_*} (1 - \eta Ri)^{\frac{1}{1+n}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где 
$$T_* = -\frac{1}{v_*} \cdot \frac{\Phi_T}{c_p \rho};$$

$Ri$  — число Ричардсона.

Задавая различные значения  $n$ , Е. А. Ридель получает ряд формул для коэффициента турбулентной вязкости, справедливых при определенных условиях стратификации. В частности, при линейно растущем с высотой в приземном слое (до  $z = \hat{h}$ ) параметре  $Ri$  и при  $n=1$ ,  $C_1=1$  из (8.1) и (9.1) получается формула М. И. Будыко [23]

$$k = v_* \kappa z \left[ -\frac{\kappa \hat{h}}{2L_*} + \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa \hat{h}}{2L_*} \right)^2} \right]. \quad (10.1)$$

Принятые ограничения указывают, что эта формула справедлива при средних по величине сверхадиабатических градиентах.

Если в выражении (9.1) для высот  $z < \frac{|L_*|}{\kappa}$  представить  $\eta Ri$  в виде степенного ряда, ограничиваясь членами второго порядка, то при  $C_1=1$  получается формула

$$k = v_* \kappa z \left( 1 - \frac{1}{1+n} \cdot \frac{\kappa z}{L_*} \right), \quad (11a.1)$$

которая в общем аналогична формуле А. С. Мони́на и А. М. Обухова [160] при  $\frac{1}{1+n} = \rho$

$$k = \frac{v_* \kappa z}{1 + \beta \frac{\kappa z}{L_*}}. \quad (11.1)$$

Безразмерная константа  $\beta=0,6$ , как принято в работе [160], не является постоянной, а меняется в зависимости от стратификации атмосферы. Это обстоятельство, в частности, отмечалось также в работе [125] при исследовании профиля ветра в приземном слое. Имеется и еще ряд экспериментальных определений параметра  $\beta$ , по которым он оказывается не равным 0,6.

В частности, Р. Тейлор [222, 324], используя экспериментальные данные различных авторов, показал, что  $\beta$  меняется в широком диапазоне. По его расчетам, при стратификации атмосферы, мало отличающейся от безразличной,  $\beta \approx 4$ . Такая же оценка параметра  $\beta$  дается А. Б. Казанским [100] для инверсионных условий.

Если формулу для диссипации энергии турбулентности представить в виде

$$D = C_2 \frac{v_*^3}{xz} \cdot \left( \frac{xz}{L_*} \right)^m,$$

то на основании выражений (7.1) и (9.1) можно получить

$$\eta Ri = \frac{1}{C_2} \left( \frac{xz}{L_*} \right)^{1-m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{C_2} \left( \frac{xz}{L_*} \right)^{1-m}}.$$

В таком случае при  $C_2 = 1$  будем иметь

$$k = v_* xz \left( \frac{xz}{L_*} \right)^{-m} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{xz}{L_*} \right)^{1-m}}. \quad (12.1)$$

Без последнего множителя эта формула аналогична формуле Д. Л. Лайхтмана [137]. Таким образом, принципиальных различий между перечисленными схемами не имеется, но наибольшее распространение получили формулы (11.1) и (12.1).

М. И. Будыко и Л. С. Гандин [31], проанализировав зависимость коэффициента турбулентного обмена от стратификации в формулах Лайхтмана, Мони́на-Обухова при  $\beta = 4,5$ , Будыко и Тимофеева, пришли к выводу, что она примерно одинакова.

Для нестационарного процесса в уравнении баланса энергии турбулентности сохраняется член, учитывающий изменение кинетической энергии турбулентного движения. Учет нестационарности приводит к тому, что в формулах для определения коэффициента турбулентного обмена и профилей скорости ветра, температуры и влажности воздуха появляется производная по времени от динамической скорости [86]. При этом можно, например, в формуле (11.1) вместо  $\beta = \frac{1}{1+n}$  записать

$$\beta' = \frac{1}{1+n} + \frac{L_*}{v_* t_*},$$

где  $t_* = v_* \left( 2\kappa C_0 \frac{dv_*}{dt} \right)^{-1}$  — характерный для рассматриваемого процесса масштаб времени.

Принимается, что безразмерный параметр  $C_0 \approx 4$  [86]. В нестационарных условиях учет параметра  $t_*$  приводит к лучшему

согласованию вертикальных потоков, рассчитанных по градиентам и пульсационным измерениям температуры и скорости ветра [86].

При решении некоторых задач требуется знание коэффициента турбулентного обмена на уровне подстилающей поверхности. Для этого используются различные схемы изменения  $k(z)$  при малых  $z$ .

Вид их обычно следующий

$$k = k''(z_0 + z); \quad (13.1)$$

$$k = \kappa_0 + k'z, \quad (14.1)$$

где  $\kappa_0$  — молекулярный коэффициент обмена количеством движения, теплом или водяным паром.

Иногда при использовании схем (13.1) или (14.1) предполагается, что у поверхности имеется тонкий ламинарный слой, в пределах которого диффузия имеет молекулярный характер. Подстилающая поверхность атмосферы практически всегда является вполне динамически шероховатой. Поэтому течение воздуха в непосредственной близости от нее состоит из совокупности вихрей и ламинарный слой здесь не существует [161]. В работах С. А. Китайгородского и Ю. А. Волкова [108, 109] высказано предположение о существовании над морем в ложбинах волн тонкого слоя воздуха, в котором преобладает молекулярное перемешивание. Однако какого-либо экспериментального подтверждения этого положения пока не получено.

М. И. Будыко [23] на основании данных градиентных метеорологических наблюдений Свердруп над снежным покровом [321] показал, что над снежной поверхностью изменение коэффициента турбулентного обмена с высотой достаточно хорошо согласуется с моделью (14.1). При вычислениях коэффициента обмена для некоторой высоты  $z \gg z_0$  параметры  $k''z_0$  и  $\kappa_0$  могут не приниматься во внимание из-за их малости.

## § 2. Соотношение коэффициентов турбулентной теплопроводности, вязкости и диффузии

При расчетах потоков тепла, влаги и количества движения по формулам полуэмпирической теории типа (1.1) обычно используется в качестве коэффициента пропорциональности между потоком субстанции и градиентом ее средней величины коэффициент турбулентного обмена для количества движения, а не коэффициенты теплопроводности и диффузии. Поэтому важно знать соотношение этих коэффициентов, которое может

216 Заказ № 555

Гидрометеорологический ин-т

СПИСОК

Л-л 188196. Малосухтецкий пр. 02

быть выражено через турбулентные аналоги числа Прандтля  $Pr$  и Шмидта  $Sc$

$$Pr = \frac{k}{a} ; Sc = \frac{k}{a_1}$$

где  $a$  — коэффициент турбулентной теплопроводности;  
 $a_1$  — коэффициент турбулентной диффузии.

В отличие от молекулярных чисел Прандтля и Шмидта, зависящих от свойств вещества, турбулентные числа  $Pr$  и  $Sc$  являются гидродинамическими характеристиками и меньше зависят от физических свойств вещества. Попытка теоретического определения турбулентного числа Прандтля проделана И. Огурой [174]. Он нашел, что отношение коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности равно молекулярному числу Прандтля.

Однако большое количество экспериментальных исследований, обзор которых приведен в работах И. О. Хинца [235] и И. Л. Сендерихиной [210], не подтверждает вывода И. Огура. Опыты показали, что, несмотря на большое различие молекулярных значений числа Прандтля для смесей газов и жидкостей, величины турбулентных значений числа  $Pr$  оказались примерно одинаковыми. Так, для смесей газов, имеющих молекулярное  $Pr_m$  от 0,34 до 1,96, величина  $Pr$  колеблется в пределах от 0,63 до 0,77. И. Л. Сендерихина [210], обработав экспериментальные данные некоторых исследователей, измерявших пульсации температуры и скорости ветра, профили средних величин температуры, влажности воздуха и скорости ветра в приземном слое атмосферы, получила величины чисел  $Pr$  и  $Sc$ , близкие к отмеченным. Она рекомендует при расчетах использовать  $Pr = 0,70$  и  $Sc = 0,85$ . К таким же результатам пришел Франкенбергер [300]. Он делает вывод, что коэффициент турбулентного перемешивания для количества движения в среднем на 25% меньше, чем для тепла и вещества. Опыты с более вязкими жидкостями привели к таким же результатам. Даже для масла при молекулярных числах  $Pr_m$  порядка  $10^3$ — $10^4$  величина турбулентного числа Прандтля получилась равной 0,7—0,75 [203, 210].

Возможно, что причина такого несоответствия теоретических выводов с данными экспериментов заключается в том, что И. Огура использовал уравнения, описывающие вырождение изотропных пульсаций скорости и температуры, в которых велика роль молекулярной вязкости и теплопроводности. Поэтому, вероятно, результаты И. Огура справедливы лишь для вырождающейся турбулентности.

В отношении турбулентной диффузии вещества Хинце отмечает, что многочисленные опыты с нагретыми струями воздуха и

опыты по исследованию трассирования газа в изотермических струях показали отсутствие различий в распространении тепла и вещества. Если распространение этих субстанций описывать с помощью коэффициента турбулентности, то величина последнего для тепла и вещества оказывается одинаковой.

Турбулентные числа Шмидта и Прандтля оказались примерно одинаковыми и в экспериментах по диффузии вещества в воде. Опыты Форстолла и Гейлорда [235] по исследованию распространения поваренной соли из затопленной водяной струи дали значение  $Sc$  0,83—0,77.

Хинце отмечает, что молекулярные числа  $Pg_m$  и  $Sc_m$  все же влияют на турбулентные  $Pg$  и  $Sc$ . Коэффициент вихревой диффузии, согласно Хинцу, зависит от интенсивности обмена, по крайней мере молекулярного, между вихрями и окружающей средой. В зависимости от того, что является переносимой субстанцией — количество движения, тепло или вещество, интенсивность обмена может несколько изменяться.

При очень больших величинах  $Pg_m$  молекулярный перенос тепла практически не происходит, и коэффициент турбулентной теплопроводности приближается к коэффициенту диффузии вихрей. Так как турбулентный коэффициент вязкости меньше коэффициента диффузии вихрей, хотя бы из-за молекулярного переноса количества движения, то при больших  $Pg_m$  турбулентное число  $Pg$  всегда должно быть меньше единицы.

При очень малых  $Pg_m$  между вихрями происходит интенсивный теплообмен, вследствие чего коэффициент теплопроводности по отношению к коэффициенту турбулентной вязкости и величина  $Pg$  могут оказаться даже больше единицы. Этот эффект проявляется сильнее с ослаблением турбулентного перемешивания. При развитой турбулентности роль молекулярных процессов уменьшается и физические свойства жидкостей слабо влияют на величины  $Pg$  и  $Sc$ .

Вообще по вопросу о зависимости чисел  $Pg$  и  $Sc$  от устойчивости еще меньше сведений, чем о величинах этих чисел при нейтральной стратификации. Существуют сходные мнения лишь в том, что рост устойчивости должен приводить к росту чисел  $Pg$  и  $Sc$ , так как можно ожидать ослабления турбулентной диффузии и теплообмена по сравнению с переносом количества движения, хотя бы из-за пульсаций давления.

А. Р. Константинов [122] получил экспериментальные данные, позволяющие определить соотношение коэффициентов турбулентного обмена тепла, влаги и количества движения при различной стратификации атмосферы в предположении их равенства в нейтральных условиях. На основании аппроксимационных формул Константинова, характеризующих зависимость коэффициентов обмена упомянутых субстанций от  $Ri$  получаются

следующие выражения для  $P_r$  и  $Sc$ :

$$\left. \begin{aligned} P_r &= 0,3 + \frac{0,7}{\sqrt{1 - 28 \frac{z_0}{z_{00}} Ri}}; \\ Sc &= \frac{0,7 + 0,3 \sqrt{1 - 28 \frac{z_0}{z_{00}} Ri}}{0,28 + 0,72 \sqrt{1 - 28 \frac{z_0}{z_{00}} Ri}}, \end{aligned} \right\} (15.1)$$

где  $z_{00} = 1$  см.

Вряд ли эту зависимость можно распространять на большие положительные и отрицательные числа  $Ri$ , так как могут получиться несоответствия с представлениями о физике процессов. Однако при небольших величинах этих чисел характер зависимости  $P_r$  и  $Sc$  от  $Ri$  соответствует существующим представлениям. Как видно из этих формул, на зависимость  $P_r$  и  $Sc$  от устойчивости влияет шероховатость подстилающей поверхности. При малых  $z_0$ , которые имеют вода, снег и лед,  $P_r$  и  $Sc$  от  $Ri$  зависят слабо.

Если в выражении для  $P_r$  положить величину шероховатости  $z_0 = 0,1$  см, то полученные числа  $P_r$  по порядку величины будут согласоваться с приводимыми Е. Л. Диконю данными  $P_r$  [57]. По измерениям Тейлора, в диапазоне значений  $Ri$  от  $-0,05$  до  $-0,9$  среднее значение  $P_r = 0,76$ . Однако из-за большого разброса индивидуальных значений сколько-нибудь заметную зависимость  $P_r$  от  $Ri$  установить не удалось.

Увеличение числа  $P_r$  с увеличением устойчивости отмечается и другими авторами [313]. В монографии С. Пристли [187] приводится полученное Суинбенком отношение  $a/k$  в зависимости от  $Rf$  ( $Rf$  — число Ричардсона, выраженное через потоки тепла и количества движения) на высоте  $1,5$  м. Несмотря на значительный разброс индивидуальных значений, физическая реальность существования зависимости  $a/k$  от устойчивости вне сомнения

(коэффициент корреляции между  $\lg \frac{a}{k}$  и величинами  $Rf$  и  $Ri$  соответственно равен  $-0,81$  и  $-0,52$ ). По приведенному в монографии рисунку приближенно ее можно выразить в диапазоне  $-0,5 < Rf < 0,1$  соотношением

$$\lg \frac{a}{k} = -0,12 - 0,102 Rf. \quad (16.1)$$

Отсюда видно, что с ростом неустойчивости  $P_r$  уменьшается. Однако при нейтральной стратификации  $P_r \approx 1,31$ , что не соответствует отмеченным ранее исследованиям. Возможно, это определяется погрешностями эксперимента.

В докладе, прочитанном на Международном симпозиуме в Канберре, Суинбенк [220] отметил, что одновременные измерения профилей метеорологических элементов и потоков тепла, пара и количества движения при разных характеристиках устойчивости дали ему возможность установить соотношение между коэффициентами турбулентного обмена для этих субстанций. Из его доклада следует, что при нейтральной стратификации  $Pr \approx Sc \approx 1$ . При средней неустойчивости коэффициент турбулентной теплопроводности на высоте 2 м примерно в 2 раза больше  $k$  и  $a_1$ . При инверсионной стратификации коэффициенты турбулентного обмена для количества движения и водяного пара превышают величину  $a$ . То, что коэффициенты турбулентного обмена для количества движения и водяного пара близки между собой, отмечалось и в совместном докладе Суинбенка и Дикона [58].

Проводя оценку соотношения между коэффициентами турбулентной диффузии и вязкости, Пристли использовал данные различных авторов по наблюдаемому и вычисленному испарению влаги. Оказывается, что при допущении  $k = a_1$  в условиях умеренной неустойчивости наблюдаемая и вычисленная величины испарения воды близки между собой, т. е. число  $Sc$  оказывается несколько большим, чем отмеченное ранее. К такому же выводу относительно соотношения коэффициентов  $k$  и  $a_1$  пришел М. П. Тимофеев [227]. Вычисленные потоки тепла и водяного пара при использовании  $k = a = a_1$  оказались близкими к измеренным и рассчитанным по методу теплового баланса.

Из приведенного обзора следует, что для получения коэффициентов турбулентной теплопроводности и диффузии можно ограничиться вычислением по градиентным наблюдениям наиболее легко определяемого коэффициента турбулентного обмена количества движения, а затем делением на турбулентные числа Прандтля и Шмидта получить соответствующие коэффициенты.

### § 3. Шероховатость подстилающей поверхности в Арктике

В формулы вертикального профиля скорости ветра и коэффициента турбулентного обмена входит параметр шероховатости подстилающей поверхности. Под этим параметром понимается некоторая характеристика, определяющая влияние подстилающей поверхности на турбулентный обмен в прилегающих слоях воздуха. Обычно  $z_0$  связывается с геометрическими размерами неровностей поверхности, их аэродинамическими свойствами и стратификацией воздушного потока. Предполагается, что  $z_0$  является уровнем, на котором средняя скорость ветра обращается

в нуль, а температура и влажность воздуха равны температуре и влажности подстилающей поверхности [137].

А. Р. Константинов [122], предположив, что  $z_0$  для температуры и влажности такая же, как и для ветра, проэкстраполировал эти метеорологические элементы, измеренные в пограничном подслое до уровня  $z_0$ . Полученные величины оказались отличными от их значений для подстилающей поверхности. В частности, разница между температурой воздуха на высоте 2 м и температурой поверхности снега и воды  $T_{\Pi}$  в 2 раза больше, чем перепад температур воздуха на уровнях 2 м и  $z_0$ . Такое же соотношение оказалось и для влажности воздуха.

$$\frac{T_0 - T_2}{T_{\Pi} - T_2} = \frac{e_0 - e_2}{e_{\Pi} - e_2} = \varepsilon = 0,5 \quad (17.1)$$

Таким образом, по данным А. Р. Константинова, в слое от подстилающей поверхности до  $z_0$  происходит скачок температуры и влажности воздуха.

По материалам градиентных наблюдений Г. Н. Яковлева [275], в Центральной Арктике над снежно-ледяным покровом лишь при сверхадиабатических градиентах параметр  $\varepsilon = 0,6$ . В остальных случаях он возрастает и в инверсионных условиях становится равным единице, т. е. скачок температуры над снежно-ледяной поверхностью обычно мал или вообще отсутствует.

Различные мнения имеются и по вопросу о зависимости  $z_0$  от метеорологических условий. Согласно одним исследованиям, шероховатость подстилающей поверхности не зависит от стратификации атмосферы [160], по другим данным, параметр шероховатости растет с возрастанием неустойчивости атмосферы [131, 137, 172], по третьим,  $z_0$  оказывается убывающей при росте неустойчивости [122].

По исследованиям А. Р. Константинова,  $z_0$  оказывается зависящей еще и от скорости ветра даже для поверхностей, рельеф которых в общем не меняется с изменением скорости ветра. Согласно его данным, с увеличением скорости ветра параметр шероховатости уменьшается. Некоторое возрастание  $z_0$  снежно-ледяной поверхности в Арктике при ослаблении ветра отмечается Г. Н. Яковлевым [275], хотя полученные им данные представляются сильно завышенными. Последующие определения  $z_0$  снежно-ледяного покрова в Арктике дали значения, близкие к величине шероховатости установившегося снежного покрова других широт. Чтобы свести к минимуму погрешности в определении скорости ветра, которые могут сказаться на величине  $z_0$ , были использованы результаты наблюдения за скоростью ветра на пяти уровнях над снежно-ледяной поверхностью при безразличной стратификации атмосферы. По этим данным строился график профиля скорости ветра, с которого снимались значения



скорости ветра на двух высотах. Расчет  $z_0$  производился по формуле, полученной из выражения (3.1).

$$\ln z_0 = \frac{\ln z_2 - \frac{V_2}{V_1} \ln z_1}{1 - \frac{V_2}{V_1}}. \quad (18.1)$$

Величина параметра шероховатости, определенная по данным 54 серий наблюдений над скоростью ветра по часовым осреднениям в течение ноября 1955 г. на дрейфующей станции «Северный полюс-5», получилась равной 0,67 мм. Среднее отклонение составило 47% от этой величины. Объяснить такое отклонение  $z_0$  от средней величины можно не только погрешностью измерений скорости ветра, но и некоторым изменением состояния поверхности снега в результате снегопадов и действия ветра.

Очевидно, что найденное значение  $z_0$  зимой не должно претерпевать значительных изменений, так как характер снежного покрова в основном сохраняется в течение всей зимы. Даже летом шероховатость снежного покрова не сильно отличается от зимней. Так, по данным 65 серий наблюдений над скоростью ветра, осредненной в часовом интервале, в течение июля—августа 1956 г. шероховатость снежно-ледяного покрова на дрейфующей станции «Северный полюс-4» оказалась равной 0,43 мм. Полученные значения  $z_0$  согласуются с данными П. П. Кузьмина [129] и Т. А. Огневой [172] по шероховатости установившегося снежного покрова толщиной 10—15 см, а также близки к данным шероховатости льда на американской станции Альфа [328].

Необходимость использования параметра шероховатости поверхности моря в расчетах, связанных с термодинамическим взаимодействием атмосферы и гидросферы, обусловило многочисленные исследования по вычислению  $z_0$ , обзор которых приведен в ряде работ [16, 95, 128]. Определение шероховатости морской поверхности осложняется тем, что характер неровностей, зависящий от волнения, меняется с изменением ветра. Поэтому в большинстве исследований отмечается зависимость  $z_0$  от скорости ветра, хотя, по данным различных авторов, она неоднозначная. Одни исследователи [95, 138, 173] отмечают увеличение  $z_0$  с возрастанием скорости ветра, другие [49, 128, 216, 221] — уменьшение. По некоторым профильным измерениям скорости ветра, как отмечает О. А. Кузнецов [128], вообще не устанавливается какой-либо зависимости  $z_0$  от скорости ветра. Даже при одной и той же скорости, как видно из табл. 1, заимствованной из работы Б. А. Кагана [95], величины  $z_0$ , вычисленные различными исследователями, сильно отличаются.

По арктическим морям определения шероховатости проводились лишь В. В. Пановым [178] (Карское море) и В. М. Климовичем [110] (бухта Диксон). Приведенные в работе [178]  $z_0$ ,

Таблица 1

## Шероховатость поверхности моря по данным различных исследований

Автор	Район исследований	Скорость ветра (м/сек)	$z_0$ (см)
П. П. Кузьмин	Белое море	4,5—8,2	2,5—0,64
А. И. Соркина и В. П. Грачева	Каспийское море	6,1—10,6	0,72—0,22
	Каспийское море	2,5—12,0	14,0—0,00
	Цимлянское водохранилище	1,0—8,0	9,0—0,00
Н. П. Гонтарев Г. Нейман Брокс	Каспийское море	5,0—20,0	0,11—0,01
	Ботнический залив	1,0—25,0	11,0—0,10
	Балтийское море, Атлантический и Тихий океаны	2,0—12,0	10 <sup>-4</sup> —1,0
Хэй Вагнер	Побережье Англии	5,0—10,0	0,03—0,27
	Мексиканский залив	3,0—8,0	5·10 <sup>-4</sup> —51,0

вычисленные по отдельным профильным измерениям скорости ветра, чрезвычайно сильно различаются между собой (от 10<sup>-15</sup> см до 50 см). Осреднение О. А. Кузнецовым этих данных позволило установить их зависимость от скорости ветра  $v$  на высоте 1 м.

$v$ (м/сек)	$z$ (см)
меньше 2	18,5
2,1—4,0	2,5
4,1—6,0	1,5

Несколько меньший диапазон изменений  $z_0$  отмечен в работе В. М. Климовича. Согласно его данным, этот параметр в бухте Диксон изменяется от 9,44 до 0,003 см при ветре от 1,6 до 10 м/сек.

Вычисленные И. Л. Диконом и И. К. Уэббом [162]  $z_0$  из профилей ветра, полученных различными исследователями для почти нейтральных условий, не имеют достаточно четко выраженной зависимости от скорости ветра. Величины  $z_0$  находятся в пределах 0,01—0,1 см с некоторой тенденцией к росту с усилением ветра. В диапазоне скоростей ветра от 4 до 12 м/сек можно принять  $z_0 = 0,05$  см.

Н. Н. Гонтарев [50] показал, что параметр шероховатости поверхности моря очень сильно меняется не только с изменением скорости ветра, но и с переменной его направления. Это же отмечается и в работе [110]. Лишь при достижении некоторого установившегося состояния как воздушным потоком, так и волнением  $z_0$  становится более или менее постоянным. В связи с этим Н. П. Гонтарев полагает, что использование средней величины параметра шероховатости в различного рода расчетах допустимо лишь при больших масштабах осреднения с учетом особенностей режима ветра и волнения в рассматриваемом районе. Пока же при использовании градиентных методов расчета потоков тепла

и влаги с водной поверхности наиболее часто полагается  $0(z_0) \sim 10^{-4} \text{ м}$  [227].

Имеются теоретические определения параметра шероховатости в зависимости от тех или иных характеристик. Основываясь на идее Д. Л. Лайхтмана, что параметр шероховатости представляет собой сложную функцию и является результатом взаимодействия взволнованной морской поверхности с ветровым потоком, Б. А. Каган [95] попытался получить аналитическую зависимость  $z_0$  от определяющих факторов. Он предположил, что  $z_0 = f[V - \bar{W}, \bar{h}, \bar{\lambda}, \frac{g}{T_a} (\Gamma_a - \Gamma)]$ . В этом случае, согласно теории размерностей, можно представить

$$z_0 = K \bar{\delta} \frac{V - \bar{W}}{\sqrt{\frac{g}{T_a} (\Gamma_a - \Gamma)}}, \quad (19.1)$$

где  $\bar{W}$  — фазовая скорость волны;

$\bar{\delta}$  — крутизна волн;

$\Gamma_a - \Gamma$  — отклонение вертикального градиента температуры от адиабатического в пограничном слое атмосферы над морем;

$K = 0,001$  — эмпирический параметр.

Из формулы (19.1) следует, что  $z_0$  увеличивается с ростом скорости ветра и крутизны волн, а также с ростом неустойчивости атмосферы. В исходном положении Б. А. Каган не учитывал периода волны, который является важнейшей характеристикой, определяющей состояние взволнованной поверхности. Возможно, что учет этого параметра привел бы к другой зависимости скорости ветра, чем представлено формулой (19.1).

Еще одна аналитическая зависимость параметра шероховатости от внешних условий на границах пограничных слоев атмосферы и моря получена Д. Л. Лайхтманом [138]. Он исходил из предположения, что  $z_0$  растет с увеличением динамической скорости. Естественно, что такая гипотеза приводит к росту  $z_0$  с усилением ветра.

Можно, например, использовать следующий подход к установлению связи между параметром шероховатости и ветром [292]. Известно, что скорость поверхностного дрейфового установившегося течения  $V_0$  может быть представлена в зависимости от касательного напряжения  $G$ , оказываемого ветром, и коэффициента турбулентного обмена в воде ( $\bar{k}$ ) следующим образом [139]:

$$V_0 = \frac{G}{\gamma \sqrt{2\omega_2 \bar{k}}}, \quad (20.1)$$

где  $\gamma$  — плотность воды;

$\omega_2 = \omega \sin \varphi$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

Поскольку при безразличной стратификации атмосферы

$$G = \frac{\alpha^2 \rho V_1^2}{\left(\ln \frac{z_1}{z_0}\right)^2},$$

то

$$V_0 = \frac{\alpha^2 \rho V_1^2}{\gamma \left(\ln \frac{z_1}{z_0}\right)^2 \sqrt{2\omega_z \bar{k}}}, \quad (21.1)$$

Коэффициент турбулентного обмена для количества движения, как будет ниже показано, может быть представлен в виде

$$\bar{k} = \frac{\gamma \omega_z V_0^2 Sc}{\pi g \frac{d\gamma}{dz}} \quad (22.1)$$

Подставив это выражение в формулу (21.1), получим

$$V_0 = \frac{\alpha V_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \sqrt{\frac{\rho}{\gamma \omega_z} \sqrt{\frac{\pi g}{2\gamma Sc} \frac{d\gamma}{dz}}},$$

откуда легко находится

$$z_0 = z_1 \exp\left(-\alpha \frac{V_1}{V_0} \sqrt{\frac{\rho}{\gamma \omega_z} \sqrt{\frac{\pi g}{2\gamma Sc} \frac{d\gamma}{dz}}}\right). \quad (23.1)$$

Имеющиеся в настоящее время эмпирические и теоретические исследования [169] отмечают, что с ростом скорости ветра увеличивается отношение  $V_1/V_0$ . Следовательно,  $z_0$  с ростом скорости ветра должна убывать. Ветровое волнение и течение взаимосвязаны, поэтому нельзя на основании формулы (23.1) делать заключение о независимости  $z_0$  от характеристик волнения. В работе [169] показано, что отношение  $V_0/V_1$  меняется и с изменением скорости ветра и с изменением возраста волн. Кроме того, степень шероховатости морской поверхности оказывается связанной и с характеристикой устойчивости поверхностного слоя моря. Поскольку перечисленные параметры входят в показатель экспоненты, то даже их небольшое изменение приводит к большим изменениям  $z_0$ , что и имеет место в природных условиях.

С. А. Китайгородский и Ю. А. Волков [108] проанализировали большой экспериментальный материал и показали, что однозначной связи между  $z_0$  моря и ветром нет. Лишь с вероят-

ностью 50% можно для каждой скорости ветра определить параметр  $z_0$ , меняющийся не больше, чем на один порядок величины. Более тесной получается связь между  $z_0$  и ветром, если учитывать элементы волнения. Но согласно исследованию упомянутых авторов, шероховатость моря возрастает с увеличением скорости ветра.

В настоящее время имеется очень мало фактического материала, позволившего бы установить зависимость параметра шероховатости от стратификации атмосферы. Полагается, что  $z_0$  несколько растет с возрастанием неустойчивости атмосферы [50], однако эти изменения не превосходят ошибок определения  $z_0$  в зависимости от ветра и волнения. Поэтому на данной стадии изученности вопроса вряд ли стоит в расчетных формулах учитывать эти изменения.

#### § 4. Вертикальный профиль метеорологических элементов в Арктике и методика расчета турбулентного потока тепла

Исследование особенностей режима ветра, температуры и влажности пограничного подслоя атмосферы в Арктике [64, 178] приводит к заключению, что в преобладающем большинстве случаев можно не учитывать не только поправку на нестационарность процесса, но и отклонение стратификации от безразличного состояния. Наблюдения в Арктике за вертикальным профилем скорости ветра над льдом показывают, что как зимой, так и летом в общем он достаточно близок к логарифмическому (рис. 1). Также близок к логарифмическому и профиль температуры воздуха над льдом (рис. 2). Это отмечается и другими исследованиями [275].

Высота слоя, в пределах которого изменение метеорологических элементов происходит в общем пропорционально логарифму высоты, может быть различной для каждого метеорологического элемента. В частности, некоторое представление о его толщине  $h$  в Арктике можно получить из рис. 2. Анализ наблюдений показывает, что как для летнего, так и для зимнего периодов времени  $h$  составляет в среднем 50—100 м. Летом  $h$  несколько ближе к 100 м, зимой — к 50, что объясняется некоторым, хотя и слабым, влиянием термической стратификации на турбулентный обмен.

Скорость ветра заметного воздействия на величину  $h$  не оказывает, что согласуется с выводами М. И. Будыко [23]. Стратификация атмосферы в пределах пограничного подслоя над льдом в летний период в большинстве случаев характеризуется понижением температуры с высотой. Перепад температуры на первых 10 м составляет 0,3—0,6°. При этом выше пограничного подслоя стратификация атмосферы может быть инверсионной. Падение

0. ~ 0 мин  
10 м при вете

температуры с высотой вблизи поверхности льда отмечается только при облачном небе. Во время ясной погоды достаточно быстро наступает инверсионное состояние с перепадом температуры в  $1-3^{\circ}$  на первых 10 м.

Зимой стратификация пограничного слоя инверсионная с величинами градиентов такого же порядка, как и летом при инвер-

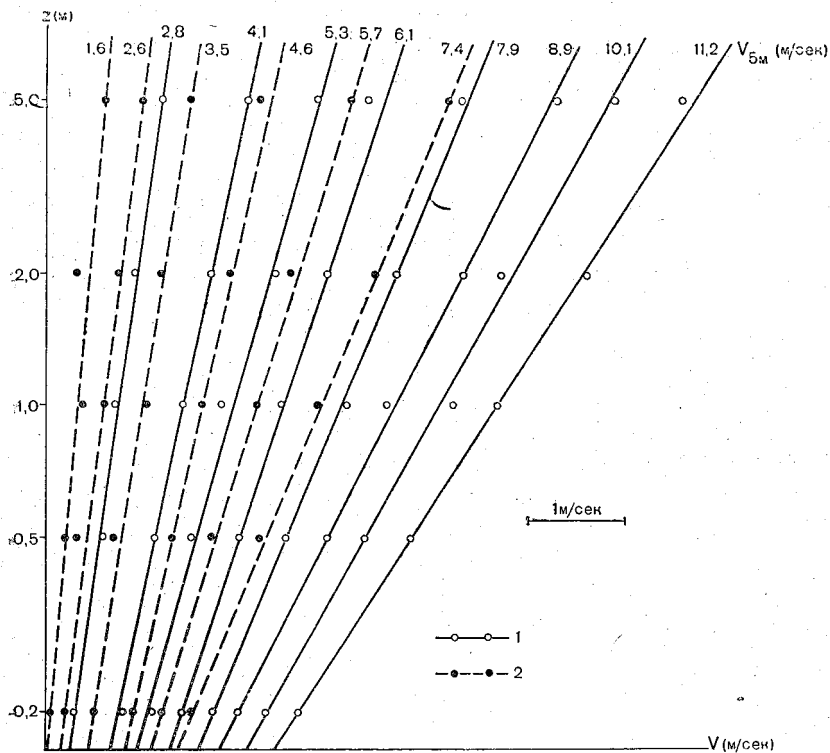


Рис. 1. Вертикальный профиль ветра над снежно-ледяной поверхностью.

1 — «Северный полюс-5», зима 1955 г.; 2 — «Северный полюс-4», лето 1956 г.

сионных условиях. Лишь как исключение наблюдаются случаи понижения температуры с высотой. В зимнее время они могут отмечаться при положительном радиационном балансе, который иногда наблюдается из-за мощных инверсий.

М. Е. Берлянд [9] показал, что при резкой смене погодных условий уже через 1—3 ч в пограничном подслое наступает квазистационарность режима. Наблюдения подтверждают этот факт. Так, 25 августа 1956 г. на дрейфующей станции «Северный полюс-4» в течение 2 ч произошла резкая смена погодных условий. Изменилась и стратификация нижнего слоя атмосферы,

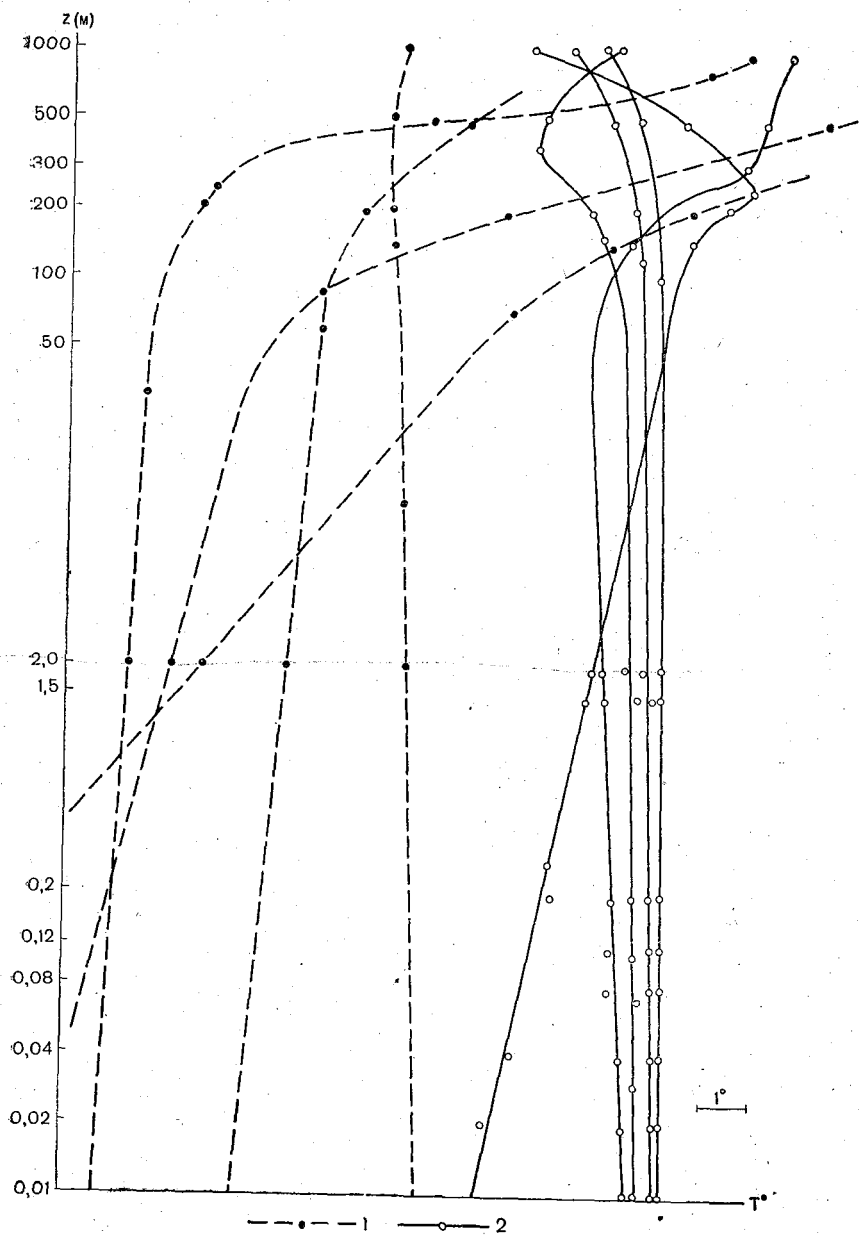


Рис. 2. Вертикальный профиль температуры воздуха над снежно-ледяной поверхностью.

1 — «Северный полюс-5», зима 1955 г.; 2 — «Северный полюс-4», лето 1956 г.

но профили температуры воздуха остались логарифмическими (рис. 3). Оценка порядка величины поправки на нестационарность процесса показывает, что ее роль заметна только для самого момента прохождения фронта. В остальное время в Арктике она мала.

Над морем в Арктике нет таких детальных измерений вертикального распределения метеорологических элементов, как над льдом. Но и те отдельные сведения о проведенных наблюдениях профиля скорости ветра и температуры свидетельствуют

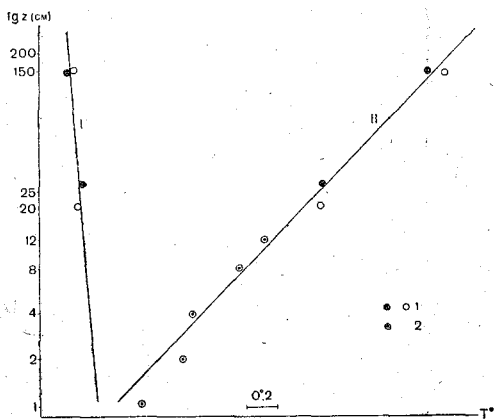


Рис. 3. Изменение температуры воздуха над снежно-ледяной поверхностью (25 августа 1956 г. в 5—6 ч (I) и в 8 ч (II) «Северный полюс-4».

I — данные по психрометрам; 2 — данные по термометрам.

о том, что и над морем профили метеорологических элементов близки к логарифмическим [110, 178].

Часто для описания распределения скорости ветра и температуры вблизи подстилающей поверхности используется логарифмический закон независимо от термической стратификации атмосферы. При этом в пределах нижнего 5—10-метрового слоя воздуха согласованность наблюдаемых значений метеорологических элементов с рассчитанными обычно бывает удовлетворительной. Как показано А. М. Обуховым и А. С. Мониным [160], это объясняется тем, что вертикальное распределение метеорологических элементов в пограничном подслое атмосферы определяется совокупным действием динамических и термических факторов. Вблизи подстилающей поверхности определяющими являются скорость ветра и шероховатость, а роль термических



факторов незначительна по сравнению с динамическими. С высотой влияние подстилающей поверхности ослабевает, а роль термических факторов усиливается. Поэтому при существовании больших вертикальных градиентов температуры отклонение фактического профиля от логарифмического с высотой возрастает. В таком случае наиболее подходящей формулой для коэффициента турбулентного обмена будет выражение (11.1). Согласно этому выражению, с уменьшением высоты влияние термических факторов на интенсивность турбулентного перемешивания убывает. Величина второго слагаемого в знаменателе формулы (11.1) при использовании наблюдений с корабля, по подсчетам В. Г. Снопкова [215], оказалась равной 0,05—0,1. Не превышает указанной величины это слагаемое знаменателя обычно и для условий Арктики из-за отсутствия больших градиентов температуры.

Обобщив результаты наблюдений, М. И. Будыко и Л. С. Гандин пришли к выводу, что над морем стратификация атмосферы играет малую роль. Согласно их данным, учет ее изменяет интенсивность турбулентного обмена зимой примерно на 5%, а летом на 2% [31].

Учитывая близость профилей ветра и температуры воздуха около подстилающей поверхности к логарифмическим и малость второго члена, формуле (11а,1) можно придать более удобный вид для использования в расчетах

$$k = v_* \kappa z \left[ 1 - \frac{1}{1+n} \cdot \frac{gz \left( \ln \frac{z_1}{z_0} \right)^2}{\bar{T}_a \ln \frac{z_3}{z_2}} \cdot \frac{T_3 - T_2}{V_1^2} \right]. \quad (24.1)$$

Это выражение сходно с формулами, полученными по эмпирическим данным О. П. Виноградовой [39], М. П. Тимофеевым [227], С. Е. Мостаховым [163], но множитель, стоящий здесь перед

$\frac{T_3 - T_2}{V_1^2}$  зависит от стратификации атмосферы и несколько

меньше множителей в эмпирических формулах при той же высоте измерений температуры и скорости ветра. Однако, если

иметь в виду, что по некоторым данным [324]  $\frac{1}{1+n}$  может

в несколько раз превосходить величину, определенную из экспериментов А. С. Мониным и А. М. Обуховым, то согласованность выражения (24.1) с формулами упомянутых авторов будет более тесной.

Для условий, близких к термической конвекции и часто отмечающихся в Арктике зимой над разводьями при слабом ветре,

можно принять, как считает Е. А. Ридель,  $n=3$ . Тогда из уравнений (7.1) — (9.1) получается при  $C_1=1$

$$k = v_* \kappa z \sqrt[4]{1 - \eta Ri}. \quad (25.1)$$

Как уже отмечалось, турбулентный поток тепла  $\Phi_T$  между подстилающей поверхностью и прилегающими слоями воздуха при известном значении коэффициента обмена легко определяется по градиенту осредненной температуры

$$\Phi_T = -c_p \rho (x_0 + \eta k) \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (26.1)^1$$

где  $x_0$  — коэффициент молекулярной теплопроводности.

Имея в виду неизменность  $\Phi_T$  с высотой в пограничном подслое атмосферы и полагая, что зависимость  $k$  от высоты представляется выражением (II.1), можно формулу (26.1) преобразовать к следующему виду:

$$\Phi_T = -c_p \rho \frac{(v' + x_0 \beta') [T(z) - T_0]}{\left(1 - \frac{x_0 \beta'}{v' + x_0 \beta'}\right) \ln \frac{x_0 + (v' + x_0 \beta') z}{x_0} + \beta' z}, \quad (27.1)$$

где

$$v' = \kappa \eta v_*; \quad \beta' = \frac{\kappa}{L_*} \cdot \frac{1}{1+n};$$

$$T_0 = T|_{z=0}.$$

При измерениях скорости ветра на одном уровне ( $z_1$ ) для определения динамической скорости получается выражение

$$v_* = \frac{\kappa V_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \varepsilon, \quad (28.1)$$

где  $\varepsilon = \left(1 + \frac{\beta' z_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}}\right)^{-1}$  — поправка, учитывающая влияние стратификации атмосферы.

<sup>1</sup> При расчетах турбулентного потока тепла, исходя из формулы (26.1), под  $T$  следует понимать потенциальную температуру. Поскольку в пограничном подслое градиенты абсолютной и потенциальной температуры обычно очень близки между собой, то их часто отождествляют.

Подставим полученное выражение для  $v_*$  в формулу (27.1), и, учитывая, что  $\kappa_0 \beta' \ll v'$  и  $\frac{v'z}{\kappa_0} \gg 1$ , будем иметь

$$\Phi_T = \Phi_0 \left[ 1 + \frac{\ln \varepsilon + \beta' z}{\ln \left( 1 + \frac{v'z}{\varepsilon \kappa_0} \right)} \right]^{-1} \varepsilon. \quad (29.1)$$

$$\Phi_0 = -c_p \rho \frac{\kappa^2 \eta V_1 (T - T_0)}{\ln \frac{z_1}{z_0} \cdot \ln \left( 1 + \frac{\kappa \eta v_* z}{\kappa_0} \right)}, \quad (30.1)$$

где  $\Phi_0$  — турбулентный поток тепла при логарифмическом вертикальном профиле метеорологических элементов;

$T$  — температура, измеренная на высоте  $z$ .

Формулу (27.1) можно записать в виде, наиболее часто используемом при расчетах турбулентного потока тепла

$$\Phi_T = c_p \rho \alpha_1 V_1 (T_0 - T_2), \quad (31.1)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\kappa^2 \eta \varepsilon}{\ln \frac{z_1}{z_0} \cdot \left[ \ln \left( 1 + \frac{v' z_2}{\kappa_0} \right) + \beta' z_2 \right]},$$

$T_2$  — температура, измеренная на высоте  $z = z_2 = 2$  м;

$V_1$  — модуль скорости ветра на высоте  $z_1$ .

Коэффициент  $\alpha_1$  в этой формуле оказывается зависимым от скорости ветра, стратификации атмосферы и характера подстилающей поверхности. Проведенный в работе [109] анализ экспериментального материала показал, что отношение  $\Phi_T / c_p \rho V (T - T_0)$  действительно не остается постоянным, а зависит и от скорости, и от характеристик волнения. Для отмеченной величины  $z_0$  с погрешностью, не превышающей 6%, зависимость  $\alpha_1$  от скорости ветра и устойчивости можно представить в виде графика (рис. 4). С ростом неустойчивости параметр  $\alpha_1$  возрастает, для инверсионных условий — уменьшается. При небольших значениях  $n$  такое изменение  $\alpha_1$  в общем согласуется с годовым ходом и величиной аналогичного коэффициента, приведенных в работе [98], и коэффициентами трения морской поверхности для почти нейтральных условий [162].

Для получения более подробных сведений о величине параметра  $n$  сравним наиболее широко используемые формулы для расчета коэффициентов турбулентного обмена с выражением (11.1) и (24.1). В настоящее время для расчета турбулентного потока тепла при не очень больших градиентах температуры рекомендуется пользоваться коэффициентом турбулентного обмена в форме, аналогичной выражению (24.1), где коэффициент при  $\Delta T / V^2$  равен 7,5 [196]. Отсюда следует, что  $n \approx -0,8$ . Такой же величина  $n$  оказывается и в том случае, когда используется

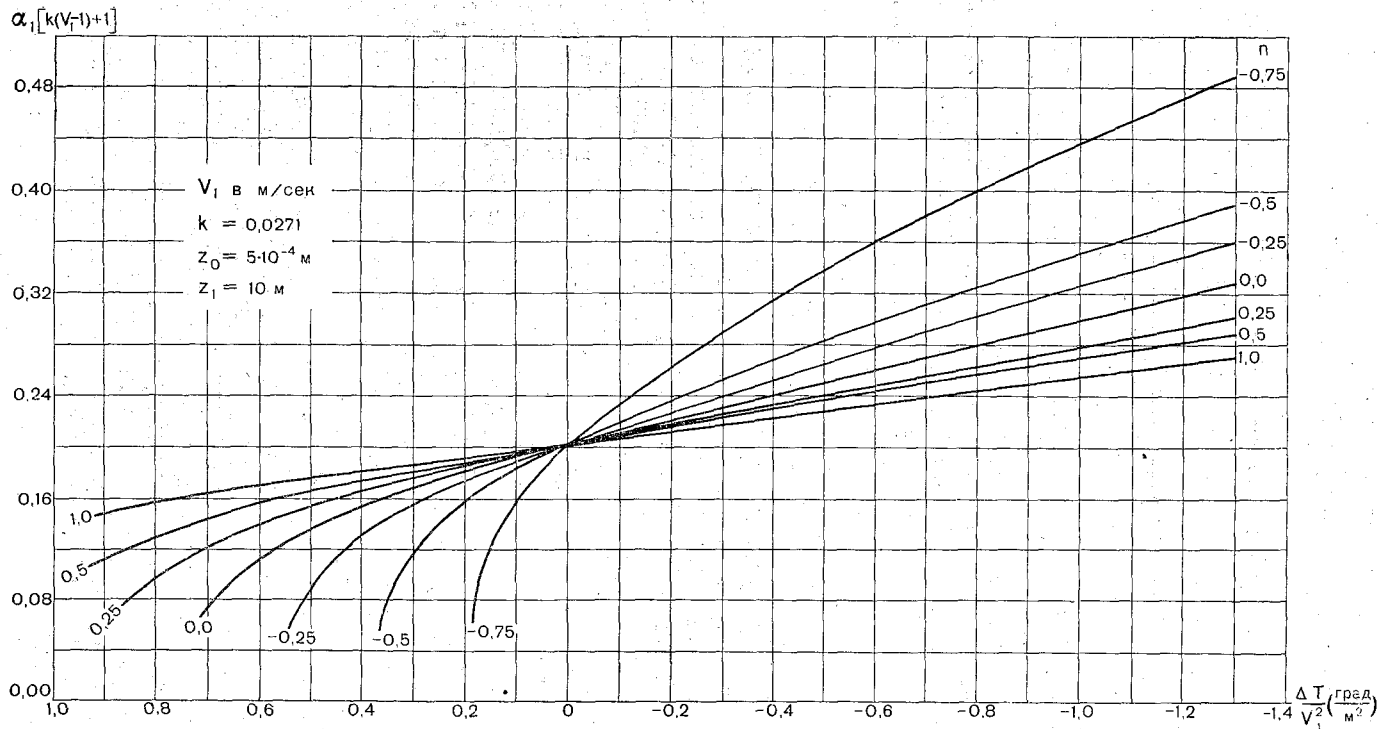


Рис. 4.

рекомендуемое Диконом [289] значение параметра  $3 < \beta < 4$  по данным вертикальных профилей ветра над морем. Несколько меньше параметр  $n$ , но тоже отрицателен ( $n \approx -0,6$ ) по эмпирической формуле С. Е. Мостахова [163].

Если исходить из величины эмпирического параметра А. С. Мони́на и А. М. Обухова  $\beta = 0,6$ , то окажется, что  $n \approx 0,7$ . Возможно, что такие различия в величинах  $n$  объясняются специфическими условиями экспериментов, в которых определялись данные, необходимые для расчета эмпирических параметров. Имея в виду отмеченный характер стратификации атмосферы в пограничном подслое в Арктике, можно предполагать, что величина  $n$  для арктических условий должна быть близкой к нулю. Исключение, конечно, составляют закономерности теплообмена над участками открытой воды в холодное время года.

Для того чтобы производить расчеты потока тепла над разводьями в зимний период, т. е. в условиях очень сильной неустойчивости атмосферы, нужно, согласно Е. А. Ридель [191], в формулах (29.1—31.1) положить  $n = 3$ . При этом измерения температуры и скорости ветра, как показали А. Б. Казанский и А. С. Монин [101], должны производиться в пределах подслоя динамической турбулентности. Высота этого подслоя определяется условием

$$z < \eta L_* Ri_* . \quad (32.1)$$

Здесь  $Ri_*$  обозначает некоторое критическое значение  $Ri$ , при котором происходит переход от вынужденной конвекции к свободной. В среднем, по данным А. В. Перепелкиной [181], этот переход происходит при  $-0,05 < Ri < -0,02$ . На такой же порядок величины  $Ri_*$  указывают А. С. Гурвич [54] и Пристли [187]. Если границу перехода к свободной конвекции определять через аналог  $Ri \frac{T_0 - T_2}{V_1^2}$ , то при  $z_1 = 10$  м и  $z_2 = 2$  м указанные

критерии нужно увеличить примерно вдвое.

На высотах  $z > \eta L Ri_*$  [101] профиль температуры воздуха и коэффициент турбулентности не зависят от скорости ветра и определяются формулами, справедливыми для условий свободной конвекции и получающихся, в частности, из выражений (5.1—8.1) при  $v_* = 0$

$$k(z) = C_1^{-\frac{1}{3}} (\kappa z)^{\frac{4}{3}} \left( \frac{g}{T_a} \cdot \frac{\Phi_1}{c_p \rho} \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (33.1)$$

После подстановки  $k(z)$ , определенного из формулы (33.1), в выражение турбулентного потока тепла (8.1) и интегрирования по  $z$  получается известная формула, определяющая поток тепла в условиях свободной конвекции через разность температур

на двух уровнях

$$\frac{\Phi_T}{c_{p\rho}} = \chi^2 \left[ \frac{\eta}{3 \left( \sqrt[3]{\frac{z_2}{z_3}} - 1 \right)} \right]^3 \sqrt{\frac{gz_2}{C_1 \bar{T}_a} (T_3 - T_2)^3} \quad (34.1)$$

В большинстве случаев в Арктике бывает известна лишь температура воды в разводье и температура воздуха на одном некотором уровне. Этих данных недостаточно для расчетов  $\Phi_T$  по формуле (34.1). Но, если отождествить уровень  $z_2$  с высотой подслоя динамической турбулентности, для которого справедливо выражение (31.1), то, исключив из формул (31.1) и (34.1) температуру воздуха  $T_2$ , получим выражение, связывающее турбулентный поток тепла с температурами воды и воздуха на одном уровне

$$T_0 - T_3 = \frac{\Phi_T}{c_{p\rho\alpha_1 V_1}} \cdot \left\{ 1 + \frac{3\alpha_1 V_1}{\eta \chi^{4/3}} \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{z_2}{z_3}} \right) \left( \frac{C_1 \bar{T}_a c_{p\rho}}{gz_2 \Phi_T} \right)^{1/3} \right\} \quad (35.1)$$

Естественно, уровень  $z_1$ , на котором задана скорость  $V_1$ , не должен превышать высоту подслоя динамической турбулентности. Последняя же может быть определена из условия (32.1), если в нем знак неравенства заменить равенством.

Для облегчения расчетов турбулентного потока тепла формула (35.1) представлена в виде номограммы (рис. 5). Исходными данными при вхождении в номограмму служат разность температур воды и воздуха на высоте 2 м и скорость ветра на уровне 5 см. Другие параметры полагались постоянными  $\eta = 1,4$ ;  $\bar{T}_a = 260^\circ$ ,  $\chi = 0,4$ ,  $z_0 = 0,5$  мм,  $n = 3$  и, согласно работам [54, 181],  $C_1 = 3,55$ .

При малых скоростях ветра (до 1—2 м/сек) толщина подслоя динамической турбулентности очень мала. Очевидно, не будет большой ошибки, если в этом случае распространить коэффициент турбулентности (33.1) до поверхности воды и определить турбулентный поток тепла по формуле (26.1). Интегрирование полученного выражения по  $z$  от 0 до  $z_2$  позволяет перейти от градиента температуры воздуха к разности температур вода—воздух

$$T_0 - T_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}\chi} \sqrt[4]{\frac{C_1 \bar{T}_a}{\chi_0 g \tau^3}} \left( \frac{\Phi_T}{c_{p\rho}} \right)^{3/4} \times \\ \times \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{z_2^{2/3} - \nu z_2^{1/3} \sqrt{2} + \nu^2}{z_2^{2/3} + \nu z_2^{1/3} \sqrt{2} + \nu^2} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt[3]{z_2}}{\nu} \sqrt{2} - 1 \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt[3]{z_2}}{\nu} \sqrt{2} + 1 \right) \right], \quad (35a.1)$$

где 
$$\nu = \sqrt[4]{\frac{\chi_0}{\eta}} \left( \frac{C_1 \bar{T}_a}{g} \right)^{1/12} \left( \frac{\Phi_T}{c_{p\rho}} \right)^{-1/12} \chi^{-1/3}.$$

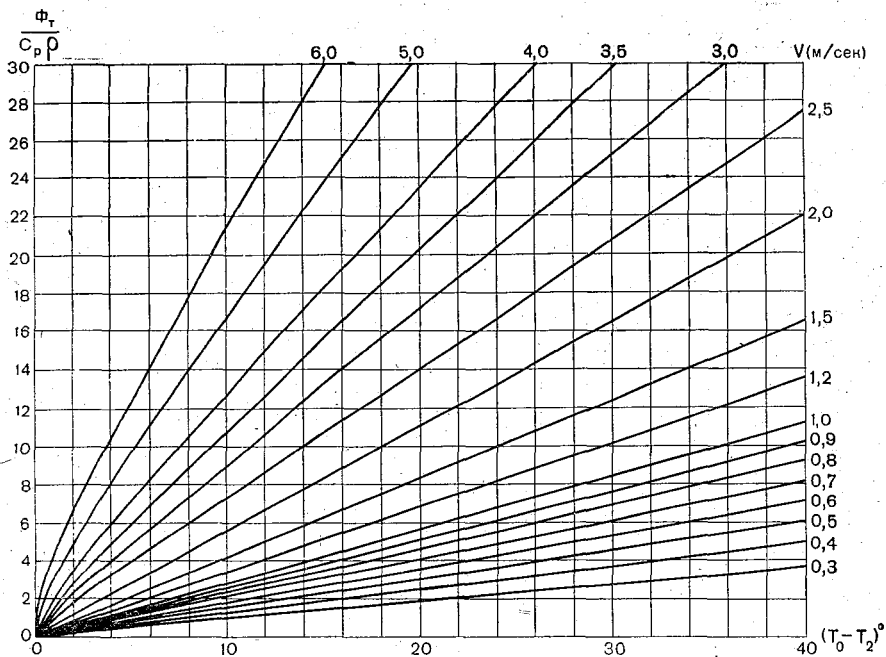


Рис. 5. Номограмма для расчета турбулентного потока тепла при сверхadiaбатических условиях.

При использовании отмеченных числовых значений параметров, входящих в формулу (35a.1), выражение в квадратных скобках меняется очень слабо и для  $0,1 < \frac{\Phi_T}{c_p \rho} < 10$  с погрешностью, не превышающей 3%, может быть принято постоянной величиной 2,8. В таком случае турбулентный поток тепла определяется соотношением

$$\Phi_T = c_p \rho \left( \frac{V\sqrt{2}}{4,2} \right)^4 \times \frac{4}{3} \eta \left( \frac{C_1 \bar{T}_a}{\alpha_0 g} \right)^{-\frac{1}{3}} (T_0 - T_2)^{\frac{4}{3}}. \quad (36.1)$$

После подстановки числовых значений параметров формула (36.1) принимает вид, аналогичный предложенному в работе [101] выражению для расчета потока тепла при свободной конвекции

$$\Phi_T = 1,6 \cdot 10^{-3} (T_0 - T_2)^{\frac{4}{3}} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}}, \quad (37.1)$$

Из-за того что в последней формуле  $T_0$  относится к другому уровню, чем в работе [101], коэффициент и показатель степени

отличаются от аналогичных величин, полученных А. Б. Казанским и А. С. Мониным.

Расчеты турбулентного потока тепла по выражению (31.1) при слабой неустойчивости приводят к большим величинам  $\Phi_T$ , чем расчеты по формуле (37.1). При больших перепадах температуры и слабом ветре поток тепла, вычисленный по этой формуле, больше рассчитанного по выражению (31.1).

Если исходить из предположения о справедливости приведенных закономерностей теплообмена только для уровней выше  $z_0$  и существовании скачка температуры между подстилающей поверхностью и уровнем  $z_0$ , то для расчета потока тепла можно использовать те же формулы (27.1), (30.1) и (31.1). В них лишь необходимо вместо  $T_0$  подставить  $T(z_0)$  и отсчет высоты вести не от подстилающей поверхности, а от уровня  $z_0$ , т. е.  $z$  заменить  $(z - z_0)$ . При этом формулы для расчета потока тепла при сверхadiaбатических условиях имеют такой же вид, как и в работе [101].

### § 5. Теплообмен при испарении и конденсации влаги

Вследствие большой величины удельной теплоты испарения даже небольшое количество испарившейся влаги с поверхности моря приводит к значительным потерям тепла. Хотя в Арктике из-за большой относительной влажности воздуха и низких температур испарение влаги с поверхности снежно-ледяного покрова и водной поверхности в общем невелико, в тепловом балансе эта компонента вполне сравнима с турбулентным теплообменом. Изучению процесса испарения с естественных поверхностей уже давно уделяется большое внимание. В монографиях М. И. Будыко [23], В. С. Самойленко [204] и А. Р. Константинова [122] сделан подробный анализ многочисленных исследований в области испарения с поверхности суши и моря. Уже первые экспериментальные и теоретические работы позволили установить [227] некоторые фундаментальные положения в закономерностях испарения с водной поверхности:

а) испарение прямо пропорционально разности максимальной влажности, соответствующей температуре поверхности воды, и влажности воздуха на некоторой высоте над водой.

б) испарение зависит от скорости ветра: при усилении последнего оно увеличивается, а при штиле — во много раз меньше, чем при ветре.

Используемые в настоящее время эмпирические формулы по расчету испарения в основном имеют структуру, согласующуюся с этими двумя положениями, и записываются в виде

$$d = B(1 + DV_z)(e_0 - e_z), \quad (38.1)$$

где  $d$  — скорость испарения;

$e$  — упругость водяных паров.



Величины эмпирических параметров  $B$  и  $D$  в формулах различных авторов неодинаковы и оказываются зависимыми не только от высоты, на которой производятся измерения скорости ветра и влажности воздуха, но и от конструктивных особенностей испарителей и испарительных бассейнов, а также от объема экспериментального материала и его обработки [226, 227]. Согласно этим формулам, величина испарения при штиле составляет значительную долю испарения при ветре. Но отдельные наблюдения в лабораторных и в природных условиях показывают, что испарение при отсутствии ветра очень мало по сравнению с его величиной при ветре. М. П. Тимофеев отмечает, что относительно большая величина испарения при штиле, характерная для некоторых эмпирических формул, по-видимому, является следствием неточного измерения малых скоростей ветра. Поэтому часто используется выражение

$$d = B_1 V_z (e_0 - e_z). \quad (39.1)$$

Наиболее универсальными соотношениями, позволяющими определять испарение и связанные с ними затраты тепла, являются уравнения водного и теплового балансов. Как и при расчете турбулентного потока тепла, балансовый метод наиболее эффективен при определении потоков тепла и влаги за длительный промежуток времени при известных значениях остальных компонентов уравнения баланса.

В настоящее время для расчета испарения и затрат тепла на испарение широко применяется диффузионный метод, базирующийся на тех же положениях, которые используются при определении турбулентного теплообмена. Для него требуется знание величины и характера изменения коэффициента турбулентной диффузии и закономерностей распределения влажности в пограничном подслое атмосферы.

Ранее нами рассматривались соотношения коэффициентов турбулентного обмена различными субстанциями, в том числе и коэффициент диффузии, их изменение с высотой и зависимость от стратификации. Теперь же отметим лишь некоторые режимные характеристики распределения влажности в Арктике вблизи подстилающей поверхности, учитываемые при расчетах испарения.

Влагосодержание воздуха, так же как и градиент влажности, в основном близко следует за распределением температуры и температурных градиентов: более высоким температурам воздуха и его градиентам соответствуют большие упругости паров и их градиенты. Объясняется это тем, что в результате турбулентного перемешивания влагосодержание воздуха в пределах, по крайней мере пограничного подслоя, над снежно-ледяной и водной поверхностями, близко к насыщенному, а в слое воздуха, непосредственно примыкающего к снежно-ледяной и водной

поверхности, равно насыщенному. Поэтому изменение температуры подстилающей поверхности вызывает соответствующее изменение упругости насыщения в непосредственной близости к этой поверхности. Вследствие турбулентного перемешивания изменения температуры подстилающей поверхности постепенно передаются вышележащим слоям воздуха. Аналогично происходит передача соответствующих изменений влагосодержания. Следовательно, ход и величина изменений температуры подстилающей поверхности, которые, в частности, определяют температурные градиенты в пограничном подслое, определяют и соответствующие ход и величину влагосодержания в этом подслое. Подтверждением данной закономерности является известный факт сравнительно небольших изменений относительной влажности даже при больших изменениях температуры.

Подобие в вертикальном изменении метеорологических элементов над льдом вполне согласуется с выводами относительно подобия профилей метеорологических элементов в приземном слое, полученными сотрудниками Главной геофизической обсерватории для других районов [180]. Подобие профилей метеорологических элементов подтверждает, что механизм передачи количества движения, тепла и влаги подчиняется одним и тем же законам, а также позволяет вместо измерения профилей всех элементов при производстве градиентных наблюдений измерять профиль только одного какого-либо элемента; для остальных же элементов ограничиваться измерениями только на двух уровнях.

Определение величины испарения влаги с подстилающей поверхности или конденсации (сублимации) на этой поверхности, а также потоков тепла, связанных с этими процессами, представляет в Арктике, особенно в осенне-зимний период, трудную задачу. Объясняется это тем, что в настоящее время еще нет аппаратуры, позволившей бы достаточно быстро и надежно определять то малое влагосодержание и градиенты влаги, которые отмечаются в Арктике при низких температурах. Поскольку полагается, что механизм турбулентного переноса тепла и влаги одинаков, то для расчета испарения и затрат тепла на него можно использовать те же формулы, что и для расчета турбулентного потока тепла. Для этого в формулах (30, 31, 36, 37.1) нужно вместо коэффициента турбулентной теплопроводности ставить  $a_1$ , величину  $T$  в первом случае заменить на  $q/c_p$ , а во втором на  $Lq/c_p$  ( $q$  — удельная влажность,  $L$  — удельная теплота испарения).

Ранее отмечалось, что разница между величинами коэффициентов турбулентности  $a$  и  $a_1$  в общем невелика. А. Р. Константинов [122] полагает, что она составляет 5—15%, т. е. находится в пределах точности расчета. Поэтому в большинстве случаев коэффициенты  $a$  и  $a_1$  принимаются одинаковыми.

Используя известное соотношение между удельной влажностью и упругостью водяных паров или относительной влажностью ( $r$ )

$$q = 0,622 \frac{e}{P} = 0,622 \frac{E_0}{P} \cdot r e^{\alpha T}; \quad (40.1)$$

где  $P$  — атмосферное давление;

$E_0$  — насыщающая упругость водяных паров при  $T=0^\circ$ ;

$$\alpha = \frac{L}{\gamma R_{\text{п}} \cdot 273 (273 + T)} \approx 0,086 \frac{1}{\text{град}};$$

$\gamma$  — термический эквивалент работы;

$R_{\text{п}}$  — газовая постоянная для водяного пара,

можно получить формулы в виде, наиболее часто применяющемся для расчета испарения. В частности, формула (31.1) приводится к виду

$$\Phi_{\text{и}} = 0,622 \rho \alpha_1 V_1 \frac{L}{P} (e_0 - e_2), \quad (41.1)$$

где  $\Phi_{\text{и}}$  — затраты тепла на испарение.

По своему выражению она согласуется с эмпирической формулой для расчета испарения (39.1), если последнюю умножить на  $L$ . Для нейтральных условий величина параметра  $\alpha_1$  оказывается близкой к значению 0,155, приведенному в книге [162]. А. Р. Константинов провел большие расчеты испарения с водной поверхности по формуле типа (41.1) и получил удовлетворительные результаты [122]. Это позволяет считать, что и расчеты затрат тепла на испарение по формуле (41.1) должны быть также удовлетворительными. Естественно, при расчетах испарения с полей и разводий зимой нужно исходить из формулы (37.1), проведя отмеченную замену  $T$ . В ряде случаев целесообразно бывает перейти от упругости водяных паров к относительной влажности и температуре. Такой переход позволяет преобразовать выражение (41.1) к виду

$$\Phi_{\text{и}} = 0,622 \rho \alpha_1 V_1 \frac{E_0 L}{P} e^{\alpha T_0} [1 - r_2 e^{\alpha (T_2 - T_0)}].$$

Здесь предполагается, что  $r = 1$  для  $z = 0$ .

Поскольку  $\alpha (T_2 - T_0)$  — величина обычно малая, то последний член в скобках можно представить в виде ряда, ограничиваясь его двумя первыми членами.

$$\Phi_{\text{и}} = 0,622 \rho \alpha_1 V_1 \frac{E_0 L}{P} e^{\alpha T_0} [1 - r_2 - \alpha r_2 (T_2 - T_0)]. \quad (42.1)$$

Этим выражением удобно пользоваться для приближенной оценки затрат тепла на испарение в Арктике, поскольку там относительная влажность воздуха слабо меняется во времени и обычно порядок ее величины бывает известен. В таком случае по данным  $T_2$ ,  $T_0$  и  $V_1$  можно произвести оценку  $\Phi_{\text{и}}$ .

## Глава II. РАДИАЦИОННЫЙ БАЛАНС ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

### § 1. Уравнение радиационного баланса

Под притоком тепла на подстилающую поверхность за счет лучистых потоков принято понимать приход—расход лучистой энергии, поступающей на эту поверхность и уходящей от нее в атмосферу, т. е. радиационный баланс подстилающей поверхности  $B$ . Следует отметить, что термин «баланс» в выражениях «радиационный баланс» и «тепловой баланс» имеет различное содержание: в первом случае под ним понимают соотношение приходной и расходной части радиационной энергии, которое может быть положительным, нулевым или отрицательным, во втором — равенство приходной части теплового баланса и расходной. М. И. Будыко [24] отметил, что при совместном использовании обоих выражений различное определение этого термина является не совсем удачным.

Приходную часть радиационного баланса на подстилающей поверхности составляют суммарная коротковолновая радиация ( $Q$  — прямая солнечная и рассеянная) и противозлучение атмосферы ( $G$ ). Расходная часть определяется отраженной коротковолновой и длинноволновой радиацией и потерей тепла за счет собственного теплового излучения подстилающей поверхности ( $B$ ). Доля отраженной длинноволновой радиации незначительна по сравнению с основными компонентами баланса и не выходит за пределы точности их определений. Поэтому обычно в уравнение радиационного баланса она не включается

$$B = Q(1 - A) + F, \quad (1.2)$$

где  $F = G - B$  — эффективное излучение;

$A$  — альbedo подстилающей поверхности (отношение отраженной радиации к поступающей).

Радиационный баланс подстилающей поверхности в Арктике является одним из основных климатообразующих факторов, определяющих состояние верхнего слоя гидросферы. Достаточно отметить, что во время весенне-летнего таяния льда в арктических

морях на долю радиации в июне приходится более  $\frac{2}{3}$ , а в июле — более  $\frac{1}{2}$  от общего количества тепла, идущего на стаивание льда сверху [71]. Длительная потеря тепла излучением в период полярной ночи приводит к значительному выхолаживанию подстилающей поверхности и влияет на нарастание льда.

В Арктике актинометрические наблюдения проводятся в основном над сушей и наблюдаемые величины радиационного баланса могут сильно отличаться от фактических величин над морем. Особенно сильно этот факт может сказаться в весенне-летний период, когда на суше могут быть участки оголенной от снега почвы или вообще нет снега. В этом случае альbedo суши отличается от альbedo моря, а это приводит к различию в величинах поглощенной коротковолновой радиации даже при одинаковой суммарной. Могут также существовать различия в величинах эффективного излучения за счет температуры и характера подстилающей поверхности и в величинах суммарной радиации за счет отраженной.

Рассмотрим, как влияет изменение отдельных составляющих на общую величину  $B$ . Из формулы (1.2) имеем

$$dB = Qd(1 - A) + (1 - A)dQ + dF, \quad (2.2)$$

где  $d$  — отклонение стоящей за ней характеристики от средней многолетней.

Примем, что  $dQ$  составляет около 10% от среднемесячной многолетней  $Q$ ,  $dF$  — 20% от среднемесячной многолетней  $F$  и изменение альbedo — примерно 0,05. Величины колебаний перечисленных составляющих радиационного баланса в Арктике в весенне-летний период в среднем имеют такое же значение. В этом случае оказывается, что при больших значениях альbedo (0,70—0,80) первый член правой части формулы (2.2) больше второго и третьего членов. С уменьшением альbedo возрастает роль второго члена и при  $A \approx 0,50$  первый и второй члены становятся примерно одинаковыми. Следовательно, весной и в начале лета, когда значения альbedo велики, точность определения радиационного баланса зависит в основном от точности определения альbedo. Колебания суммарной радиации в этот период не повлияют сильно на величину  $B$ . В разгаре лета, когда альbedo уменьшается, возрастает роль  $dQ$  в общей величине  $dB$ .

Эффективное излучение подстилающей поверхности входит в радиационный баланс как самостоятельная составляющая. Поэтому изменение  $F$  непосредственно приведет к такому же изменению величины  $B$ . Радиационный баланс подстилающей поверхности Арктики в осенне-зимний период практически равен величине эффективного излучения [248, 249]. Так, например, для Карского моря в октябре величина поглощенной морем коротковолновой радиации составляет лишь около 8% от величины эффективного излучения. Для последующих зимних месяцев доля

коротковолновой радиации в радиационном балансе убывает до нуля. Таким образом, при определении радиационного баланса оценка его составляющих может быть различной в зависимости от времени года. В ряде случаев отдельные его компоненты, полученные по наблюдениям на полярной станции, могут быть не репрезентативными даже для прилегающих районов моря. Это обстоятельство нужно иметь в виду при использовании в океанологических расчетах данных наблюдений полярных станций.

## § 2. Определение суммарной радиации над морем

Отсутствие в большинстве случаев непосредственно измеренных величин суммарной радиации для моря, а также всех исходных параметров, позволивших бы использовать известные теоретические формулы [119] для вычисления этой компоненты, заставляет рассмотреть возможность распространения данных наблюдений полярных станций на прилегающие районы моря. При этом наибольший интерес во многих задачах, связанных с теплообменом море—атмосфера, представляют не интенсивность суммарной радиации, а ее суммы за сравнительно продолжительные интервалы времени: сутки, декада, месяц.

Как известно, предельной величиной суммарной радиации являются суммы возможной радиации ( $Q_0$ ), т. е. суммарная радиация при безоблачном небе. По своему определению возможная радиация зависит от высоты Солнца, определяемой широтой места и временем, прозрачности атмосферы и альбедо подстилающей поверхности. Наиболее полно учет этих факторов произведен в работах М. С. Маршуновой [154] и Б. М. Гальперин [45]. В первой работе приведены месячные суммы возможной радиации для районов полярных и дрейфующих станций, во второй — зависимость возможных суточных сумм коротковолновой радиации от географической широты на 15-е число каждого месяца (рис. 6). Из этого графика видно, что возможная радиация в течение осени—весны сильно зависит от географической широты. В это время значения альбедо как суши, покрытой снегом, так и моря высоки и почти одинаковы по всей Арктике. Поэтому при распространении возможной радиации для этого времени на другие районы достаточно учесть разницу в широте. Но уже с мая по сентябрь за счет различий в альбедо и вторичного рассеяния происходит увеличение возможной радиации над снежной поверхностью по сравнению с сушей на 10—15% [154]. Это отражено и на графике, где для летнего периода верхние кривые относятся к океаническим условиям, а нижние — к суше.

Поскольку прозрачность атмосферы в Арктике сравнительно слабо меняется как во времени, так и в пространстве [45, 155, 251] и мало отличается от средней многолетней, то при экстрапо-

ляции возможной радиации можно ограничиться учетом изменения альbedo подстилающей поверхности и географической широты. А в течение мая—июля, как видно из рис. 6, даже изменение широты можно не принимать во внимание. Это объясняется тем, что в этот период уменьшение к северу высоты Солнца в дневные часы компенсируется увеличением ее в ночные часы. Как известно, фактическая величина коротковолновой радиа-

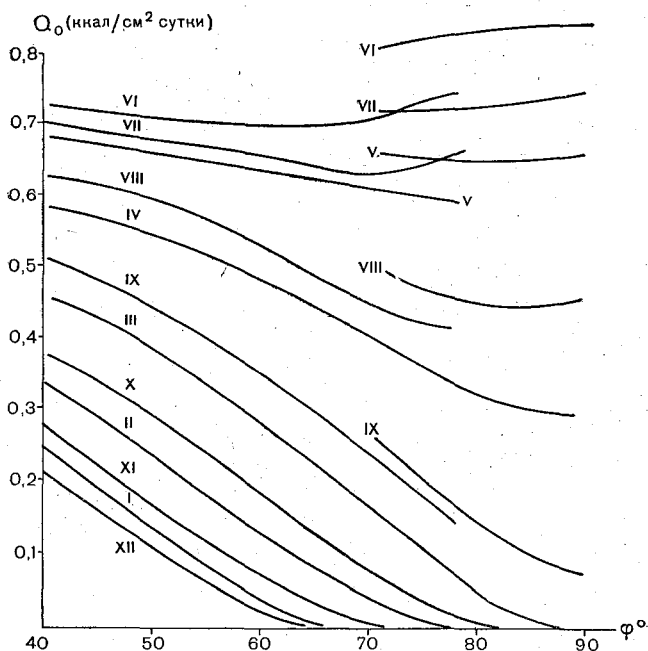


Рис. 6. Зависимость возможной радиации от географической широты.

ции, достигающей уровня моря, из-за влияния облаков отличается от возможной. При этом эффект вторичного рассеяния отраженной подстилающей поверхностью и облаками радиации настолько существенен, что даже при неизменной облачности данные по суммарной и рассеянной радиации на береговых и островных станциях летом в Арктике нельзя экстраполировать на океанические районы [45]. В холодный период года, когда альbedo подстилающей поверхности практически неизменно в пространстве, достаточно учесть изменение облачности. При этом можно принять во внимание то обстоятельство, что облака нижнего и среднего ярусов (St, Sc, Ns, As, Ac) обладают примерно одинаковой отражательной способностью и вызывают одно и то же изменение потока рассеянной радиации [253]. Как

известно, изменение величины суммарной радиации в результате многократного рассеяния можно учесть формулой

$$Q = \frac{Q'}{1 - AA_0}, \quad (3.2)$$

где  $Q'$  — суммарная радиация при отсутствии многократного рассеяния;

$A_0$  — альbedo облаков.

Если предположить, что над некоторым районом характер облачности не меняется, а существуют различия лишь в альbedo подстилающей поверхности, то на основании формулы (3.2) можно определить величину суммарной радиации при различных альbedo подстилающей поверхности

$$Q_2 = Q_1 \frac{1 - A_0 A_1}{1 - A_0 A_2}, \quad (4.2)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — суммарная радиация в пунктах с альbedo подстилающей поверхности  $A_1$  и  $A_2$  соответственно.

При получении этой формулы полагалось, что  $Q_0$  в обоих случаях одно и то же.

Используя формулу (4.2) при известных значениях альbedo облаков и подстилающей поверхности, можно провести уточнение величины суммарной радиации в море по данным  $Q$ , полученным на полярных станциях.

Для оценки отражательной способности облаков воспользуемся результатами расчетов И. В. Семеновской (табл. 2), вычислившей альbedo облаков различных ярусов по формуле, полученной из выражения (4.2)

$$A_0 = \frac{Q_2 - Q_1}{A_2 Q_2 - A_1 Q_1}. \quad (5.2)$$

Таблица 2

Среднесуточные альbedo облаков при различной высоте Солнца в полдень

Облачность	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
Ясно	0,35	0,35	0,32	0,28	0,23	0,23	0,21	
10/0 С1, Сs	0,22	0,28	0,30	0,30	0,29	0,28	0,27	
10/0 Ас, Аs	0,28	0,38	0,48	0,53	0,57	0,58	0,59	0,59
10/10 St, Sc	0,32	0,45	0,58	0,64	0,66	0,68	0,68	0,68

В качестве исходных данных она использовала средние многолетние данные наблюдений радиации на дрейфующих льдах и полярных станциях за июль—август, приведенные в работе [253]. Альbedo снежно-ледяной поверхности полагалось равным 0,655, а альbedo суши, по данным полярных станций, — 0,17.



С помощью графиков зависимости  $Q$  от высоты Солнца были вычислены суммы радиации для суток с различной высотой Солнца, полагая, что

$$Q = 2 \int_0^{h_{\odot}} Q(h_{\odot}) dh_{\odot}.$$

В случае ясной погоды атмосфера считалась мутным слоем, отражающим радиацию подобно облакам.

И. В. Семенова отмечает, что полученные величины альbedo облаков при малой высоте Солнца в полдень (5—15°) следует считать ориентировочными из-за больших относительных ошибок  $Q$ . Отражательную способность частично облачного неба М. С. Аверкиев [2] рекомендует определять независимо от типа облачности формулой

$$A_0 = 0,2 + 0,5N, \quad (6.2)$$

где  $N$  — облачность в долях единицы.

Результаты расчетов по этой формуле для сплошной облачности и ясной погоды хорошо согласуются со значениями альbedo в табл. 2 для облачности нижнего яруса и безоблачного неба при высоте Солнца не ниже 25—30°.

Получающееся по формуле (4.2) возрастание суммарной радиации над снежно-ледяной поверхностью при высоте Солнца не ниже 25—30° и альbedo  $A_1 = 0,17$  и  $A_2 = 0,655$  хорошо согласуется с результатами других исследований. Так, например, согласно Б. М. Гальперин [45], с мая по сентябрь возможные суммы радиации на дрейфующих льдах на 9—10% выше, чем на полярных станциях; по данным М. С. Маршуновой [154], это возрастание составляет 15—18%. С появлением облачности разница в величинах суммарной радиации над льдами и сушей летом возрастает. Особенно заметным это увеличение становится при облаках нижнего яруса с большими значениями альbedo. В работе [45] отмечается, что в июле—августе различие в величинах суммарной радиации на полярных и дрейфующих станциях при облачности  $^{10}/_{10}$  St или Sc достигает максимальной величины 60—70%. К такому же значению приходим на основании формулы (4.2):

Вопросом влияния альbedo на изменение суммарной радиации в результате многократного рассеяния занимался Б. А. Пятенков [190]. Согласно его выводам, подтвержденным большим эмпирическим материалом, величина изменения возможной суммарной радиации в Арктике при разных альbedo подстилающей поверхности в среднем составляет 10—20% в зависимости от высоты Солнца. При наличии слоистых облаков рассеянная радиация над снежной поверхностью примерно в 1,5 раза больше, чем над поверхностями с малыми альbedo (тундра, вода).

Эффект многократного рассеяния может привести к тому, что при появлении облачности суммарная радиация не уменьшится, а возрастет, хотя в среднем облачность и уменьшает ее.

Для облаков верхнего яруса уменьшение является незначительным и меняется в пределах 1—15% в зависимости от высоты Солнца. Для сплошной облачности нижнего яруса это уменьшение достигает 40—60% [253].

Вычисление месячных значений суммарной радиации очень часто производится по эмпирической формуле Савинова—Онгстрема, учитывающей изменение суммарной радиации от облачности

$$Q = Q_0 [1 - (1 - C)N], \quad (7.2)$$

где  $C$  — коэффициент, выражающий отношение фактической коротковолновой радиации при сплошной облачности к возможной.

В ряде случаев эта формула считается неудовлетворительной, поэтому и проводится учет влияния облачности различных ярусов [119].

В связи с преобладанием в Арктике облаков нижнего и среднего ярусов можно ограничиться учетом лишь среднего балла облачности и рассчитать коэффициенты  $C$  [42]. Впоследствии эти коэффициенты были несколько уточнены М. С. Маршуновой (табл. 3).

Таблица 3

Значение коэффициента  $C$  для расчета суммарной радиации [154] по месяцам

Пункт	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Дрейфующие станции . . . . .	0,85	0,75	0,75	0,70	0,50	0,50	0,70	0,70	—
Бухта Тихая . . . . .	0,80	0,65	0,60	0,55	0,40	0,35	0,40	0,50	—
Остров Уединения . . . . .	0,85	0,75	0,70	0,60	0,50	0,40	0,40	0,50	—
Остров Диксон . . . . .	0,85	0,75	0,70	0,55	0,50	0,45	0,45	0,50	—
Мыс Челюскин . . . . .	0,85	0,75	0,75	0,65	0,50	0,45	0,45	0,50	—
Бухта Тикси . . . . .	0,85	0,80	0,75	0,60	0,50	0,50	0,45	0,45	0,50
Мыс Шмидта . . . . .	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	0,50	0,45	0,45	0,50

Таким образом, изменение суммарной радиации для определенного пункта зависит главным образом от колебаний облачности и альбедо. Следовательно, при известном альбедо подстилающей поверхности по состоянию облачности можно получить более или менее верное представление о величине суммарной радиации. Отклонение среднемесячных величин облачности от среднемесячных многолетних можно объяснить, очевидно, преобладанием определенных воздушных потоков. В работе [68] была проделана попытка выяснения связей между направлением

воздушных переносов и количеством облачности, а также величиной суммарной радиации для некоторых пунктов Арктики (табл. 4, 5). Табл. 4 составлена по данным облачности и повторяемости направлений ветра для мая, июня и июля в среднем за 20 лет (1937—1957 гг.). В ней обозначено  $n = N/\bar{N}$  (где  $N$  — среднемесячная общая облачность;  $\bar{N} = \frac{1}{i} \sum_{(i)} N_i$  — среднемесячное многолетнее количество облаков);  $y = x/\bar{x}$ ;  $\bar{x} = \frac{1}{i} \sum_{(i)} x_i$ ;

$x$  — параметр, характеризующий повторяемость ветров определенных румбов (С — северных, В — восточных, Ю — южных и т. д.);

$m$  — общее число случаев ветров по восьми румбам за месяц при четырех сроках наблюдений в сутки;

$ш$  — число штилей за месяц;

$k$  — коэффициент корреляции.

При расчетах  $x$  все направления ветров разбивались на группы: 1) с наибольшей облачностью; 2) с наименьшей облачностью; 3) с облачностью, близкой к средней. Затем составлялось для каждого года отношение числа случаев в месяц направлений ветра, сопровождавшихся большой облачностью, к ветрам с малой облачностью. Если для каждого месяца иметь средние многолетние значения облачности по румбам направлений ветра и расчет  $y$  вести с учетом средневзвешенных  $x$ , то, возможно, связи получились бы более тесными. В данном случае не было возможности для проведения таких расчетов.

В табл. 5  $z = Q/\bar{Q}$  — отношение суммарной радиации за месяц к ее среднемноголетней величине  $\bar{Q}$  за данный месяц. В общем, как видно из табл. 5, коэффициент корреляции между величиной суммарной радиации и направлением ветра оказался лишь немного выше 0,5. Причем для летних месяцев эта зависимость оказалась несколько более тесной, чем для весенних, и лучшей для береговых пунктов, чем для открытого моря. В целом полученные связи недостаточно хорошие, чтобы ими воспользоваться для расчета облачности и суммарной радиации по данным повторяемости направлений воздушных переносов. Но судить о тенденции изменения этих элементов можно.

### § 3. Отражение и поглощение суммарной радиации в Арктике

Как известно, роль альbedo подстилающей поверхности как одной из характеристик радиационного баланса чрезвычайно велика. Поэтому большое количество исследований посвящено определению отражательных свойств как отдельных объектов,

Зависимость облачности от

Пункт	Уравнение регрессии	k	V	
Остров Диксон	$n = 1,236 - 0,236 y$	-0,56	$\frac{1}{M} (CB + B + IOB + IO)$	
Остров Уединения	$n = 0,816 + 0,184 y$	0,53	$3 + C3 + C + CB$	
Мыс Челюскин	$n = 0,770 + 0,230 y$	0,54	$3 + C3 + C + CB + \frac{1}{2} B$	
Остров Мостах	$n = 0,680 + 0,320 y$	0,45	$\frac{1}{M-B} (CB + C + C3 + IO3)$	
Мыс Шмидта	$n = 0,724 + 0,276 y$	0,56	$\frac{CB + C + C3}{CB + C + C3 + IO3 + 3 + ш}$	

Зависимость суммарной радиации от

Пункт	Среднее для	
	уравнение регрессии	
Остров Диксон	$z = 0,73 + 0,27 y$	
Остров Уединения	$z = 0,84 + 0,16 y$	
Мыс Челюскин	$z = 1,35 - 0,35 y$	
Остров Мостах	$z = 1,54 - 0,54 y$	
Мыс Шмидта	$z = 1,28 - 0,28 y$	

Таблица 4

повторяемости направлений ветра

x		$\bar{x}/\bar{N}$		
		V	VI	VII
VI	VII			
$\frac{1}{M} (CB + B + ЮВ + Ю)$	$\frac{1}{M} (CB + B + ЮВ + Ю)$	0,564 0,870	0,491 0,870	0,492 0,826
$\frac{1}{2} 3 + C3 + C + \frac{1}{2} CB + ш$	$Ю3 + 3 + C3 + \frac{1}{2} C + ш$	64 0,870	50 0,876	63,8 0,876
$3 + C3 + C + CB$	$Ю3 + 3 + C3 + C + CB$	63 0,838	51 0,837	71,8 0,843
$\frac{Ю3 + 3 + C3 + 0,5 CB}{M - B + ш - 0,5(C + CB)}$	$\frac{3 + C3 + 0,5 C + ш}{Ю + Ю3 + 3 + C3 + ш}$	0,650 0,796	0,555 0,833	0,585 0,796
$\frac{3 + C3 + C}{M - CB - ЮВ + ш}$	$3 + C3 + C + ЮВ$	0,638 0,800	0,520 0,760	80 0,820

Таблица 5

повторяемости направлений ветра

мая—июля	Среднее для июня—июля	
k	уравнение регрессии	k
0,62	$z = 0,70 + 0,30 y$	0,69
0,34	$z = 0,77 + 0,23 y$	0,40
-0,52	$z = 1,39 - 0,39 y$	-0,52
-0,50	$z = 1,92 - 0,92 y$	-0,57
-0,45	$z = 1,36 - 0,36 y$	-0,50

так и средних значений по некоторым площадям. Диапазон изменений альbedo подстилающей поверхности в Арктике чрезвычайно широк: от 0,08—0,10 (для воды) до 0,98 (для свежевыпавшего снега). Если в холодный период года, когда таяние отсутствует и подстилающей поверхностью почти повсеместно является снег, альbedo более или менее одинаково, то в период таяния альbedo даже того же снежного покрова меняется в зависимости от стадии таяния.

Исследования радиационных свойств снежно-ледяного покрова в Арктике Н. Н. Брызгиным [21] и Н. Т. Черниговским [252] показали, что величина отражательной способности льдин не зависит от их географического положения. Основной причиной в колебании альbedo является изменение состояния подстилающей поверхности. В среднем альbedo снежного покрова весной и осенью составляет 0,77; 0,88 соответственно для плотного и свежевыпавшего снега с величиной колебаний примерно 10%. Н. Т. Черниговский отмечает, что эти колебания альbedo снежного покрова во времени связаны главным образом с изменением физических свойств снега и рельефа под действием метеорологических факторов. Выпадение снега, перенос его ветром, образование на поверхности снега наста способствует увеличению отражательной способности снега. Уплотнение снега и образование фирна, появление теней от неровностей при низкой высоте Солнца приводят к уменьшению альbedo.

При отсутствии данных по фактическому значению альbedo снежного покрова приходится использовать какую-то наиболее вероятную величину, характеризующую отражательную способность снега. Из работы [252] следует, что такой величиной для зимы и весны будет  $A=0,82$  для Центральной Арктики и  $A=0,86$  для районов полярных станций. Увеличение  $A$  на побережье арктических морей объясняется более частым выпадением снега.

Осенью альbedo снежного покрова везде примерно одинаково и в среднем равно 0,85. Весной, даже до начала интенсивного таяния снега характер поверхности чистого снежного покрова зависит, очевидно, от термического состояния снега, которое в сильной степени связано с температурой прилегающего слоя воздуха. По данным Н. Т. Черниговского, для бухты Диксон за 1944—1956 гг. в работе [68] была получена связь между альbedo чистого снежного покрова и температурой воздуха на уровне метеорологической будки  $T_2$

$$A = 0,725 - 0,0154T_2. \quad (8.2)$$

Полученный коэффициент корреляции для этого уравнения равен  $-0,87$ .

Уравнением (8.2) можно пользоваться, если температура воздуха не ниже  $-9, -10^\circ$ . При более низких температурах зависимость характера поверхности снега от термического состояния

снега и прилегающего слоя воздуха затухает и альbedo меняется слабо. Также неприменима эта формула и для тающего снега, поскольку состояние его поверхности зависит не только от общего количества тепла, поступающего к его внешним границам, но и от миграции воды при таянии снега, от характера таяния и ряда других факторов. Конечно, в пределах границ применимости формула (8.2) определяет альbedo в зависимости от среднего фона температуры. Отдельные резкие колебания температуры могут не повлиять на общую величину альbedo. Использование в таком случае уравнения (8.2) приведет к искаженным результатам.

В период интенсивного таяния отражательные свойства ледяного покрова становятся чрезвычайно изменчивыми как во времени, так и в пространстве. И снег и лед на разных этапах таяния обладают различной способностью отражать коротковолновую радиацию. Если в первый период таяния снег становится плотным, влажным, серовато-белого цвета и имеет альbedo примерно 0,70, то в период интенсивного таяния альbedo пропитанной водой снега понижается до 0,35 [21]. Это же самое относится ко льду. В зависимости от оттенка его поверхности и стадии таяния альbedo может меняться от 0,70 до 0,40. В процессе таяния на ледяном покрове образуется много снежиц различной глубины, ледяные бугры, местами остается тающий снег, поэтому среднее альbedo с какой-то площади зависит от относительной доли этих объектов. Особенно большое влияние на среднее альbedo оказывают снежицы, обладающие сравнительно малой отражательной способностью (0,36—0,13).

Некоторое представление о средних величинах альbedo тающего снега и льда может дать табл. 6, составленная на основании данных Н. Т. Черниговского.

В последней графе таблицы приведены альbedo тающего льда, рассчитанные с помощью номограммы А. А. Дмитриева [60]. Данные двух последних граф хорошо согласуются между собой. Это может служить некоторым критерием реальности приведенных величин альbedo. Позднее аналогичная связь между разрушенностью льда и альbedo была получена по наблюдениям с самолета [32]. При одинаковой разрушенности льда это альbedo оказалось в среднем на 5% выше, чем в табл. 6. Возможно, что в данном случае некоторое увеличение отражательной способности подстилающей поверхности могло произойти за счет добавочного отражения радиации атмосферой.

Особый интерес представляет средняя величина альbedo по некоторой площади, занятой льдами различной сплоченности. В этом случае, как показал А. П. Коптев [123], достаточно достоверные результаты получаются на основании средневзвешенных значений альbedo открытого моря и ледяного покрова.

По его наблюдениям с самолета, альbedo открытого моря

Среднее альbedo ледяного покрова в период таяния<sup>1</sup>

Характер поверхности	Разрушенность поверхности (%)	A	A*
Снег, начало устойчивого таяния . . . . .	0	0,67	0,67
Интенсивно тающий снег, местами белый лед . . . . .	10	0,62	0,62
Интенсивно тающий снег и тающий белый лед . . . . .	20	0,56	0,56
Тающий лед с белой поверхностью . . . . .	30	0,51	0,51
Тающий белый лед со слабо развитыми снежниками . . . . .	40	0,47	0,46
Тающий лед со снежниками . . . . .	50	0,41	0,40
Интенсивно тающий лед . . . . .	60	0,39	0,35
Лед с озерами . . . . .	70	0,33	0,30

<sup>1</sup> Для молодых форм льда  $A$  меньше из-за уменьшения рассеянной радиации в толще льда [218, 263, 265].

при наличии облачности составляет 0,09, а в ясную погоду — 0,15. Такое увеличение  $A$  в ясную погоду А. П. Коптев объясняет наличием бликов на поверхности моря и зависимостью альbedo воды от высоты Солнца, поскольку наблюдения проводились в конце августа и в сентябре при низких высотах.

Согласно Н. Т. Черниговскому [253], альbedo открытой воды в морях Чукотском, Баренцевом, Карском и Гренландском в среднем составляет величину около 0,11. Зависимость между средним альbedo ( $A_c$ ) и сплоченностью льда ( $N$ ), как показано в работе [123], примерно линейная и, следовательно, может быть представлена формулой

$$A_c = A_{\text{л}}N + A_{\text{в}}(1 - N), \quad (9.2)$$

где  $A_{\text{л}}$  и  $A_{\text{в}}$  — альbedo льда и воды.

Как известно, суммарная радиация поглощается не самым тонким поверхностным слоем снега, льда и воды, а в зависимости от их прозрачности проникает до некоторой глубины, оказывая влияние на термический режим этих сред. В частности, большая проницаемость снега для коротковолновой радиации по сравнению с длинноволновой приводит к «парниковому эффекту», в результате чего происходит его таяние при сравнительно низких температурах воздуха.

По сравнению со льдом и водой снег обладает наибольшей поглощательной способностью. Исследованиями Н. Т. Черниговского [252] установлено, что до начала таяния слой снега тол-



щиной 5 см в среднем пропускает не более 8—10% радиации. С началом таяния, как отмечается в упомянутой работе, изменяется структура снега: он приобретает зернистое строение. Почти прозрачные зерна лучше пропускают суммарную радиацию, и в июле слой снега толщиной 20—25 см пропускает столько же радиации, сколько проходит весной через 5-сантиметровый слой. Увеличение глубины проникновения радиации в мокрый снег отмечается также в работе [124]. Это противоречит выводам П. П. Кузьмина [130], который отмечает, что с увеличением влажности снега его поглощательная способность увеличивается. Возможно, что в данном случае такое противоречие объясняется

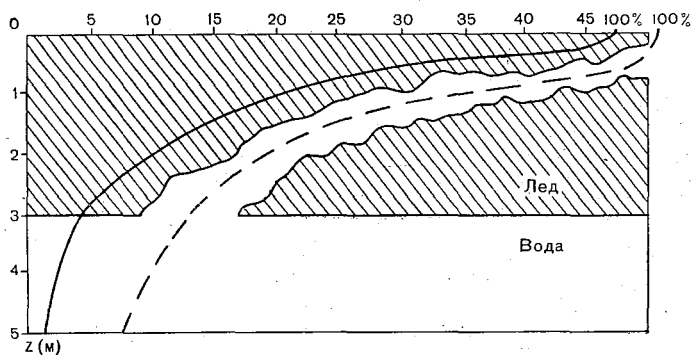


Рис. 7. Проникновение радиации сквозь лед (в процентах к радиации на поверхности льда).

особенностями процесса таяния снега в Арктике, в результате которого изменение структуры приводит к большему эффекту, чем повышение влагосодержания снега.

Лед оптически более однороден, чем снег, и обладает большей прозрачностью по отношению к коротковолновой радиации. Экспериментальные исследования пропускания суммарной радиации паковым льдом показали, что даже сквозь 3-метровый лед в некоторых случаях проходит до 13% радиации. Естественно, интенсивность поглощения радиации во льду зависит от его солёности, количества пузырьков воздуха и других примесей в нем. Поэтому происходящее в результате таяния уменьшение оптической однородности верхнего слоя льда очень сильно сказывается на величине пропускания радиации.

На рис. 7, заимствованном из работы [252], приведены осредненные данные, характеризующие величину суммарной радиации, проникающей в паковый лед, по наблюдениям на дрейфующих станциях. Такое проникновение радиации в толщу льда, несомненно, влияет на его термический режим. Однако при оценке влияния поглощенной радиации на таяние льда следует

иметь в виду отмеченное увеличение «мутности» поверхностного слоя, приводящее к интенсивному поглощению суммарной радиации в самом верхнем слое. В работе [253] отмечается, что летом в период таяния до глубины 5 см доходит в среднем лишь 24% радиации, а до глубины 50 см — 10%, т. е. проникновение суммарной радиации в лед летом отличается от приведенного на рис. 7 более чем в 2 раза.

В работе [124] по результатам инструментальных измерений получена эмпирическая формула, определяющая величину поглощенной снегом и льдом радиации на различной глубине от поверхности

$$Q(z) = Q(1 - A)(1 - \mu e^{-\nu z^i}). \quad (10.2)$$

Параметры  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $i$  зависят от физических свойств снега и льда и характера приходящей радиации. Их величины, согласно исследований авторов работы [124], приведены в табл. 7. Очевидно, что формулу (10.2) нельзя экстраполировать до поверхности снега или льда ( $z=0$ ), так как из-за приведенных эмпирических значений параметра  $\mu$  она в этом случае теряет физический смысл. Унтерштейнер [327], по данным наблюдений на американской дрейфующей станции, определил, что в самом тонком поверхностном слое льда поглощается примерно 62% радиации, т. е.  $\mu=0,38$ . Далее с глубиной величина проникающей коротковолновой радиации убывает по экспоненте с коэффициентом  $\nu=0,015$  1/см при  $i=1$ .

Таблица 7

Зависимость параметров  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $i$  от состояния снега и льда

Состояние снега и льда	Состояние неба	$\mu$	$\nu$	$i$
Снег мокрый	☉ <sup>2</sup>	1,19	0,40	1/2
Снег сухой, мелкокристаллический	☐ <sup>2</sup>	1,23	0,32	1/2
	☉ <sup>2</sup>	1,05	0,85	1/2
Лед параллельноволокнистой структуры	☐ <sup>2</sup>	1,16	0,65	1/2
	☉ <sup>2</sup>	1,21	0,57	1/3
Лед пресный, голубой	☐ <sup>2</sup>	1,21	0,52	1/3
Лед загрязненный	☉ <sup>2</sup>	1,21	0,36	1/3
	☉ <sup>2</sup>	1,04	1,07	1/3

Наиболее оптически прозрачной средой является вода, в которую суммарная радиация проникает до глубины 20—25 м. При этом большое влияние на проникновение радиации кроме различных примесей, содержащихся в воде, оказывают льды. По данным Н. Т. Черниговского [253], составлена табл. 8 проникновения радиации на различную глубину  $z$  в зависимости от ширины развода.

Проникновение суммарной радиации в воду  
(в процентах)

Ширина развода	z (м)											
	0	1	2	3	4	5	10	15	20	25	35	
Июнь 1962 г. «Северный полюс-10»												
2—10 м . . . . .	100	4	4	4	3	3	2	1	1	1		
100—200 м . . . . .	100	11	11	11	10	8	5	4	3	2		
Чукотское море . . . . .	100	41	30	26	21	19	9	5	3	2	0,5	

Из табл. 8 видно, что с увеличением сплоченности льда интегральный поток проникающей радиации уменьшается. Даже в случае больших участков открытой воды доля радиации на некоторой глубине меньше, чем на том же уровне в открытом море. Очевидно, здесь сказывается экранирующая роль ледяного покрова.

#### § 4. Расчет противоизлучения атмосферы и эффективного излучения подстилающей поверхности

Исследованию переноса длинноволновой радиации в атмосфере и определению эффективного излучения посвящено большое количество работ [120, 269]. Сложный вид большинства расчетных формул заставляет представлять их в виде радиационных номограмм, из которых номограмма Ф. Н. Шехтер [266] считается в настоящее время наиболее удобной для использования и обеспечивающей хорошую согласованность с данными наблюдений [154].

Из теоретических формул, предложенных для определения эффективного излучения, достаточно простыми и удобными для расчетов являются приближенные формулы М. Е. Берлянда, Т. Г. Берлянд [10] и К. Я. Кондратьева [120]. Исходным материалом для расчетов длинноволновых потоков как по теоретическим формулам, так и графическими способами является вертикальное распределение температуры и влажности воздуха. Эти данные не всегда и не везде имеются, поэтому при определениях эффективного излучения в этих случаях приходится прибегать к использованию формул, определяющих  $F$  через значения температуры и влажности воздуха вблизи от подстилающей поверхности. В большинстве случаев эти формулы эмпирические.

Используя то обстоятельство, что стратификация средней и верхней тропосферы не очень сильно влияет на величину эффективного излучения подстилающей поверхности и что между

температурой и влажностью воздуха существует корреляционная связь, М. Е. Берлянд и Т. Г. Берлянд [10] задались средним значением стратификации и получили теоретические формулы для расчета эффективного излучения поверхности по наземным данным температуры и влажности воздуха. При этом оказалось возможным придать полученной зависимости вид формулы Брента

$$F_0 = \sigma T_a^4 (s \sqrt{e} - \tau), \quad (11.2)$$

что позволило выяснить физический смысл эмпирических параметров  $s$  и  $\tau$ .

Пользуясь отмеченными положениями, эти авторы построили также график для определения эффективного излучения земли по данным температуры и влажности воздуха на высоте метеорологической будки. М. Е. Берлянд [9] отмечает, что этот график обладает точностью, не уступающей точности единичных экспериментальных определений эффективного излучения. Совершенно очевидно, что при значительном отклонении стратификации атмосферы от средней использование для расчета эффективного излучения или противоизлучения атмосферы формул, в которых переменными являются наземные данные, требует поправки на стратификацию.

М. С. Маршунова [154] вычислила для ряда пунктов в Арктике значения эмпирических параметров в формуле для определения противоизлучения атмосферы

$$G_0 = \sigma T_a^4 (\tau_1 + s \sqrt{e}), \quad (12.2)$$

которая связана с выражением (11.2) соотношением

$$F_0 = \delta (G_0 - \sigma T_a^4) - (1 - \delta) G_0 \quad (13.2)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;

$\delta$  — излучательная способность подстилающей поверхности. Параметры  $\tau_1$  и  $s$  получены путем сопоставления атмосферного излучения, рассчитанного по среднемесячным данным температуры и влажности воздуха с помощью номограммы Шехтер и формулы (12.2). Эти данные приведены в табл. 9.

Проведенное сравнение расчетных величин противоизлучения атмосферы, полученных по формуле (12.2) с коэффициентами из табл. 9, с результатами инструментальных наблюдений, показало вполне удовлетворительную согласованность. Относительная ошибка в среднем составила 10% [154].

Особенно важен учет стратификации в инверсионных условиях при наличии облачности, преобладающих зимой в Арктике. В этих случаях с повышением нижней границы облаков увеличивается их собственное излучение из-за повышения температуры, и в то же время радиация от облаков у земли уменьшается из-за роста поглощения в промежуточном слое. В результате таких

Значения коэффициента  $C$  для расчета противозлучения атмосферы по месяцам

Пункт	$r_1$	$s$	I	II	III	IV	V	VI
Бухта Тихая . . . . .	0,610	0,073	0,28	0,29	0,29	0,24	0,24	0,22
Мыс Желания . . . . .	0,610	0,073	0,29	0,29	0,29	0,24	0,24	0,22
Амдерма . . . . .	0,615	0,075	0,29	0,29	0,29	0,22	0,27	0,25
Остров Диксон . . . . .	0,655	0,055	0,30	0,30	0,30	0,27	0,24	0,21
Мыс Челюскин . . . . .	0,660	0,053	0,31	0,31	0,31	0,28	0,25	0,22
Бухта Тикси . . . . .	0,670	0,050	0,31	0,31	0,29	0,23	0,23	0,22
Остров Котельный . . . . .	0,680	0,057	0,28	0,26	0,26	0,23	0,24	0,22
Остров Четырехстолбовой . . . . .	0,690	0,047	0,27	0,27	0,25	0,24	0,22	0,19
Мыс Шмидта . . . . .	0,690	0,047	0,25	0,25	0,20	0,25	0,24	0,18
Уэллен . . . . .	0,650	0,058	0,28	0,28	0,27	0,26	0,22	0,17
Бухта Провидения . . . . .	0,605	0,078	0,26	0,27	0,27	0,24	0,22	0,17
Центральная Арктика . . . . .	0,670	0,050	0,30	0,30	0,30	0,28	0,27	0,24

Пункт	$r_1$	$s$	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Бухта Тихая . . . . .	0,610	0,073	0,19	0,19	0,21	0,25	0,26	0,28
Мыс Желания . . . . .	0,610	0,073	0,19	0,18	0,21	0,22	0,26	0,28
Амдерма . . . . .	0,615	0,075	0,16	0,16	0,18	0,22	0,27	0,28
Остров Диксон . . . . .	0,655	0,055	0,17	0,18	0,21	0,24	0,28	0,30
Мыс Челюскин . . . . .	0,660	0,053	0,19	0,21	0,24	0,27	0,30	0,32
Бухта Тикси . . . . .	0,670	0,050	0,17	0,17	0,20	0,24	0,26	0,31
Остров Котельный . . . . .	0,680	0,057	0,18	0,20	0,23	0,26	0,27	0,29
Остров Четырехстолбовой . . . . .	0,690	0,047	0,16	0,19	0,22	0,25	0,25	0,27
Мыс Шмидта . . . . .	0,690	0,047	0,16	0,19	0,22	0,25	0,27	0,26
Уэллен . . . . .	0,650	0,058	0,17	0,16	0,21	0,23	0,28	0,29
Бухта Провидения . . . . .	0,605	0,078	0,17	0,15	0,21	0,23	0,28	0,27
Центральная Арктика . . . . .	0,670	0,050	0,22	0,23	0,27	0,29	0,30	0,30

противоположных эффектов зависимость атмосферного излучения от высоты облаков у подстилающей поверхности не имеет монотонного характера. Д. Л. Лайхтман показал, что существует некоторый экстремальный уровень, на котором облака в наибольшей степени повышают радиационный баланс [135]. Преобладание в Арктике значительной облачности нижнего яруса позволяет упростить учет влияния облаков на величину противоизлучения атмосферы и эффективного излучения. В частности, как показано в работе [253], можно учитывать влияние облачности введением множителя, линейно зависящего от общего количества облаков,

$$G = G_0(1 + CN), \quad (14.2)$$

где  $G_0$  — атмосферное излучение при ясном небе;

$C$  — облачный коэффициент.

Средние месячные значения  $C$  для некоторых пунктов Арктики, заимствованные из работы [154], приведены в табл. 9. Годовой ход облачных коэффициентов в этой работе объясняется особенностями стратификации атмосферы и высотой облаков.

Особенно большое влияние на величину эффективного излучения оказывает стратификация атмосферы вблизи подстилающей поверхности. Именно поэтому при расчетах эффективного излучения стараются наиболее точно учесть вертикальное распределение температуры вблизи подстилающей поверхности [9, 120]. Такой учет особенно необходим при вычислениях эффективного излучения разводий в зимний период и вообще при вычислении эффективного излучения открытого моря осенью и зимой, когда атмосферное излучение воздуха, трансформирующегося под влиянием теплой поверхности моря, сильно меняется.

Определим изменение эффективного излучения подстилающей поверхности, происходящее при термической трансформации воздушной массы за счет теплообмена с морем при условии, что до начала трансформации противоизлучение атмосферы и эффективное излучение подстилающей поверхности были известны. При определении противоизлучения атмосферы будем исходить из уравнения переноса длинноволновой радиации по схеме К. Я. Кондратьева [118]

$$\frac{dG}{dz} = \sum_{(j)} \alpha_j \rho_n [G_j(z) - p_j \sigma T_a^4], \quad (15.2)$$

где  $j$  — индекс, показывающий, к какой совокупности участков спектра относится рассматриваемая величина;

$\alpha_j$  — коэффициент поглощения длинноволновой радиации;

$p_j$  — доля абсолютно черного излучения, приходящаяся на  $j$ -тую совокупность участков спектра,  $\sum_{(j)} p_j = 1$ ;

$\rho_n$  — плотность водяного пара.

Величина противоизлучения атмосферы зависит от состояния облачности, поэтому целесообразно рассмотреть ряд случаев.  
 а. Небо безоблачное. Граничным условием для уравнения (15.2) в данном случае будет

$$G|_{z=\infty} = 0$$

Противоизлучение атмосферы на уровне подстилающей поверхности при ясном небе находится решением уравнения (15.2) с граничным условием

$$G_0 = \sum_{(j)} \alpha_j p_j \int_0^{m_\infty} \sigma T_a^4 e^{-\alpha_j \eta} d\eta, \quad (16.2)$$

где  $m_\infty = \int_0^\infty \rho_{\text{п}}(z) dz$ .

Найдем изменение  $G$  и  $F$  в зависимости от изменения  $T_a$ . Представим  $T_a^4 = (\bar{T} + T)^4$ , где  $T$  — изменение температуры при трансформации воздушной массы. Так как  $T \ll \bar{T}$ , то, раскладывая  $(\bar{T} + T)^4$  в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами, получим  $T_a^4 \approx \bar{T}^4 + 4\bar{T}^3 T$ . Подставляя это выражение в уравнение (16.2), будем иметь

$$G_0 = G'_0 + 4 \sum_{(j)} \alpha_j p_j \int_0^{m_\infty} \sigma \bar{T}^3 T e^{-\alpha_j \eta} d\eta, \quad (17.2)$$

где  $G'_0$  — значение  $G_0$  при  $T_a = \bar{T}$ .

Е. Д. Ковалева [111] отмечает, что колебания температуры 5—10° в слое атмосферы выше 1 км практически не сказываются на величине противоизлучения атмосферы. Поэтому, представив  $\bar{T}^3(\eta) = \bar{T}_0^3 e^{-\epsilon \eta}$ , что наиболее точно должно выполняться в пределах нижнего километра атмосферы, получим

$$G_0 = G'_0 + 4 \sum_{(j)} \alpha_j p_j \int_0^{m_\infty} \sigma \bar{T}_0^3 T e^{-(\alpha_j + \epsilon) \eta} d\eta. \quad (17.2a)$$

Проведем интегрирование (17.2a) по частям. При этом будем иметь в виду, что при трансформации воздушной массы за счет

теплообмена с подстилающей поверхностью  $T(m_\infty)=0$ . В таком случае

$$G_0 = G_0' + 4 \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \varepsilon} \sigma \bar{T}_0^3 T_0 +$$

$$+ 4 \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \varepsilon} \sigma \bar{T}_0^3 \int_0^{m_\infty} e^{-(\alpha_j + \varepsilon)\eta} \frac{dT}{d\eta} d\eta, \quad (18.2)$$

$$T_0 = T|_{z=0}.$$

Вычислим значение  $J = \int_0^{m_\infty} e^{-(\alpha_j + \varepsilon)\eta} \frac{dT}{d\eta} d\eta$ .

Представим  $J$  в виде суммы двух интегралов

$$J = \int_0^{m_h} e^{-(\alpha_j + \varepsilon)\eta} \frac{dT}{d\eta} d\eta + \int_{m_h}^{m_\infty} e^{-(\alpha_j + \varepsilon)\eta} \frac{dT}{d\eta} d\eta = J_1 + J_2, \quad (19.2)$$

где  $m_h = \int_0^h \rho_\pi(z) dz$  ( $h$  — высота квазистационарного подслоя).

Предполагая, что в пределах квазистационарного подслоя выполняется логарифмическое распределение температуры с высотой и, принимая, как это обычно делается [9, 120],  $m = \rho_0 z$ , получим

$$J_1 = \frac{z_0}{k'} e^{\frac{\rho_0 z_0}{k'} (\alpha_j + \varepsilon)} \times$$

$$\times \frac{dT_0}{dz} \left\{ \text{Ei} \left[ -\frac{\rho_0 k_2}{k'} (\alpha_j + \varepsilon) \right] - \text{Ei} \left[ -\frac{\rho_0 z_0}{k'} (\alpha_j + \varepsilon) \right] \right\}, \quad (20.2)$$

где

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^t \frac{dt}{t};$$

$$\rho_0 = \rho_\pi|_{z=0}.$$

При вычислении  $J_2$  примем величину  $\frac{dT}{d\eta}$  независимой от высоты

и равной  $\left. \frac{dT}{dm} \right|_{z=h}$ . Ошибка в величине противоизлучения атмосферы за счет такого предположения не может быть существенной. Объяснить это можно следующим. Изменение с высотой функции  $\frac{dT}{dm} = \frac{1}{\rho_\pi} \cdot \frac{dT}{dz}$  определяется изменением градиента  $T$  и плотности водяных паров. Выше квазистационарного подслоя обе величины медленно меняются и обычно в одну сторону. Поэтому для небольших высот можно считать  $\frac{dT}{dm} \approx \left. \frac{dT}{dm} \right|_{z=h}$ . Из ха-



рактера подынтегральной функции видно, что основной вклад в противоизлучение атмосферы за счет  $J_2$  дают нижние слои воздуха. Отсюда следует, что если  $\frac{dT}{dm}$  и будет на большой высоте (обычно величинах порядка 1 км и выше) значительно отличаться от  $\left. \frac{dT}{dm} \right|_{z=\bar{h}}$ , то это не может сильно сказаться на общей величине  $J_2$ .

Более точное значение  $J_2$  можно получить в том случае, если в слое  $z > \bar{h}$  известно значение  $\rho_{\text{п}}(z)$  и  $\frac{dT}{dz}$ . Итак, принимая  $\frac{dT}{dm} \approx \frac{dT}{dm} \Big|_{z=\bar{h}}$ , имеем

$$J_2 = \frac{1}{\alpha_j + \varepsilon} \left[ e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_{\bar{h}}} - e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_{\infty}} \right] \cdot \frac{dT}{dm} \Big|_{z=\bar{h}} \quad (21.2)$$

Или, имея в виду логарифмичность профиля температуры воздуха в квазистационарном подслое,

$$J_2 = \frac{x_0}{\rho_0 k_2 (\alpha_j + \varepsilon)} \left[ e^{-(\alpha_j + \varepsilon) \rho_0 \bar{h}} - e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_{\infty}} \right] \cdot \frac{dT_0}{dz}. \quad (21.2a)$$

Окончательно получим

$$G_0 = G'_0 + 4\sigma \bar{T}_0^3 \left[ T_0 \cdot \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \varepsilon} + \frac{x_0}{k'} \Delta_1 \cdot \frac{dT_0}{dz} \right]; \quad (22.2)$$

$$F = F'_0 - 4\sigma \bar{T}_0^3 \left[ T_0 \sum_{(j)} \frac{\varepsilon p_j}{\alpha_j + \varepsilon} - \frac{x_0 \Delta_1}{k'} \cdot \frac{dT_0}{dz} \right], \quad (23.2)$$

где

$$\Delta_1 = \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \varepsilon} \left\{ \text{Ei} \left[ -\frac{\rho_0 k_2}{k'} (\alpha_j + \varepsilon) \right] - \right. \\ \left. - \text{Ei} \left[ -\frac{\rho_0 x_0}{k'} (\alpha_j + \varepsilon) \right] \right\} e^{\frac{\rho_0 x_0}{k'} (\alpha_j + \varepsilon)} + \\ + \frac{k'}{k_2 \rho_0} \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{(\alpha_j + \varepsilon)^2} \left[ e^{-(\alpha_j + \varepsilon) \rho_0 \bar{h}} - e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_{\infty}} \right];$$

$$F'_0 = F_0 \Big|_{T_a = \bar{T}}.$$

Из формулы (23.2) видно, что изменение  $F$  при термической трансформации воздушной массы за счет теплообмена с подстилающей поверхностью определяется через изменение температуры этой поверхности и градиента температуры воздуха у подстилающей поверхности.

б. Небо полностью покрыто облаками. Согласно исследованиям М. С. Маршуновой [154], тепловое излучение облаков в Арктике можно отождествлять с излучением абсолютно черного тела при положительных температурах. С понижением температуры излучение облака становится меньше излучения абсолютно черного тела. Поэтому граничное условие в этом случае запишется в виде

$$G = G_n = \delta_0 \sigma \bar{T}_H^4, \quad (24.2)$$

где  $H$  — высота облаков;

$\bar{T}_H^4$  — абсолютная температура нижней границы облака ( $H$ ).

Решением уравнения (13.2) для  $z=0$  при условии (24.2) будет

$$G_N = \delta_0 \sigma \bar{T}_H^4 \sum_{(j)} p_j e^{-\alpha_j m_H} + \sum_{(j)} \alpha_j p_j \int_0^{m_H} \sigma T_a^4 e^{-\alpha_j \eta} d\eta, \quad (25.2)$$

где 
$$m_H = \int_0^H \rho_n(z) dz.$$

При определении зависимости  $G$  от изменения температуры будем исходить из тех же положений, что и при ясном небе. Тогда в случае  $H \leq \bar{h}$  будем иметь:

$$G_N = G'_N + 4\sigma \bar{T}_0^3 \left\{ T_0 \sum_{(j)} \left[ \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \varepsilon} + \frac{\varepsilon p_j}{\alpha_j + \varepsilon} e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_H} \right] + \frac{x_0 \Delta_2}{k'} \cdot \frac{dT_0}{dz} \right\}, \quad (26.2)$$

$$F_N = F'_N - 4\sigma \bar{T}_0^3 \left\{ T_0 \sum_{(j)} \frac{\varepsilon p_j}{\alpha_j + \varepsilon} \left[ 1 - e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_H} \right] - \frac{x_0 \Delta_2}{k'} \cdot \frac{dT_0}{dz} \right\}, \quad (27.2)$$

где 
$$\Delta_2 = \sum_{(j)} \left\{ \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \varepsilon} \left[ \text{Ei} \left( -\frac{\rho_0 k_H}{k'} (\alpha_j + \varepsilon) \right) - \text{Ei} \left( -\frac{\rho_0 x_0}{k'} (\alpha_j + \varepsilon) \right) \right] e^{(\alpha_j + \varepsilon) \frac{\rho_0 x_0}{k'}} - \frac{\varepsilon p_j}{\alpha_j + \varepsilon} e^{-(\alpha_j + \varepsilon) m_H} \cdot \ln \frac{k_H}{x_0} \right\},$$

$k_H$  — коэффициент турбулентного обмена на высоте  $z=H$ .

В случае  $H > \hbar$

$$G_N = G'_N + 4\sigma T_0^3 \left\{ \delta_0 T_H \sum_{(j)} \frac{\epsilon p_j}{\alpha_j + \epsilon} e^{-(\alpha_j + \epsilon) m_H} + \right. \\ \left. + T_0 \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \epsilon} + \frac{\alpha_0 \Delta_3}{k'} \cdot \frac{dT_0}{dz} \right\}; \quad (28.2)$$

$$F_N = F'_N - 4\sigma T_0^3 \left\{ \sum_{(j)} \frac{\epsilon p_j}{\alpha_j + \epsilon} \left[ T_0 - \delta_0 T_H e^{-(\alpha_j + \epsilon) m_H} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_0 \Delta_3}{k'} \cdot \frac{dT_0}{dz} \right\}, \quad (29.2)$$

где

$$\Delta_3 = \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{\alpha_j + \epsilon} \left\{ \text{Ei} \left[ -\frac{\rho_0 k_2}{k'} (\alpha_j + \epsilon) \right] - \right. \\ \left. - \text{Ei} \left[ -\frac{\rho_0 \alpha_0}{k'} (\alpha_j + \epsilon) \right] \right\} e^{\frac{\rho_0 \alpha_0}{k'} (\alpha_j + \epsilon)} + \\ + \frac{k'}{k_2 \rho_0} \sum_{(j)} \frac{\alpha_j p_j}{(\alpha_j + \epsilon)^2} \left[ e^{-(\alpha_j + \epsilon) m_H} - e^{-(\alpha_j + \epsilon) m_H} \right].$$

Из формул (26.2) — (29.2) можно определить влияние изменения высоты и температуры облаков в процессе трансформации воздушной массы на противоизлучение атмосферы и эффективное излучение. Очевидно, наиболее заметно это влияние скажется при изменении высоты и температуры низких облаков. Изменение температуры и высоты высоких облаков не скажется существенно на величинах  $G$  и  $F$ . Это видно, в частности, из характера поведения  $\exp [-(\alpha_j + \epsilon) m_H]$  в зависимости от величины показателя, а также из того, что член формул (26.2) — (29.2), в который входит эта функция, становится малым по сравнению с остальными, если высота облаков, а следовательно, и  $m_H$  достаточно большая. Поэтому при большой высоте облаков даже значительные изменения их высоты не могут существенно повлиять на величины  $G$  и  $F$ .

в. *Частично облачное небо.* Расчеты противоизлучения атмосферы при частично облачном небе теоретическим путем оказываются очень сложными. Только в некоторых частных случаях можно получить более или менее простые формулы. К ним, например, можно отнести случай равномерного распределения облачности по небосводу. Если принять изотропность тепловых потоков, что, как показал К. Я. Кондратьев [120], не вызывает существенных ошибок, то противоизлучение атмосферы на уровне подстилающей поверхности запишется в виде

$$G = (1 - N) G_0 + N G_N. \quad (30.2)$$

При этих же условиях является законным широко используемое в практике расчетов противоизлучения атмосферы соотношение

$$G = G_0(1 + CN). \quad (31.2)$$

Из формул (30.2) и (31.2) легко получить значение облачного коэффициента ( $C$ ):

$$C = \frac{G}{G_0} - 1 \quad (32.2)$$

или

$$C = \frac{G' + \Delta G}{G'_0 + \Delta G_0} - 1, \quad (32.2a)$$

где

$$\Delta G = G - G';$$

$$\Delta G_0 = G_0 - G'_0.$$

Величины  $\Delta G$  и  $\Delta G_0$  примерно одинаковые и при трансформации воздушной массы за счет теплообмена с подстилающей поверхностью меняются в одну сторону. Учитывая также, что при этом изменения величин  $\Delta G$  и  $\Delta G_0$  в Арктике (если не происходит изменения облачности) не превышают 10—15% от основных членов, то можно считать, что в процессе трансформации воздушной массы  $C \approx \text{const}$ . В таком случае для определения величины противоизлучения атмосферы при трансформации воздушной массы можно пользоваться формулой (31.2), где облачный коэффициент считается постоянной величиной и  $G_0$  определяется по формуле (22.2). Для определения изменения величины эффективного излучения при частичной облачности  $F$  будем иметь

$$F = F' - 4\sigma\bar{T}_0^3 \left\{ T_0 \left[ 1 - (1 + CN) \sum_{(j)} \frac{\alpha_j P_j}{\alpha_j + \varepsilon} \right] - \frac{\kappa_0 \Delta_1}{k'} (1 + CN) \frac{dT_0}{dz} \right\}. \quad (33.2)$$

При отсутствии облаков эта формула становится тождественной выражению (23.2), определяющему эффективное излучение подстилающей поверхности при ясном небе.

## Глава III. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В МОРЕ

### § 1. Понятие об устойчивости и характере перемешивания воды

В механизме переноса тепла между поверхностью и нижележащими слоями моря очень много общего с вертикальным перемешиванием в атмосфере. Как и в атмосфере, вертикальная теплопередача в море осуществляется посредством турбулентного перемешивания воды и упорядоченных вертикальных потоков, роль которых по мере приближения к поверхности убывает. Молекулярное перемешивание много меньше турбулентного и обычно в расчет не принимается. Как и в атмосфере, в море можно выделить два типа турбулентного перемешивания и преобладание того или иного типа определяется характером устойчивости воды.

Устойчивость водных слоев в настоящее время принято характеризовать критерием Хесселберга  $E$ , зависящим от вертикального градиента плотности [90]

$$E = \frac{g}{\gamma} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial \Phi} \left( \frac{d\Phi}{dz} - \Gamma \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial S} \frac{dS}{dz} \right], \quad (1.3)$$

где  $\gamma$  — плотность воды;

$\Phi$  — температура;

$S$  — соленость;

$\Gamma$  — вертикальный градиент потенциальной температуры (адиабатическая поправка).

В отличие от устойчивости воздуха, определяемой главным образом градиентом температуры, в Арктике для морской воды в формуле (1.3) основная роль принадлежит второму члену, зависящему от градиента солености.

Адиабатическая поправка мала, и ее рекомендуется учитывать лишь в тех случаях, когда градиент солености меньше 0,03‰ на 100 м [90]. Н. П. Булгаков [36] отмечает, что параметр  $E$  характеризует только одну сторону статической устойчивости водных слоев, являясь показателем сопротивления, которое возникает при вынужденном перемещении элементарной массы жидкости под действием внешних динамических причин без предварительного изменения ее температуры. Для того чтобы точнее

учесть влияние термических причин на характеристику устойчивости водных масс и оценить возможность развития чисто термической конвекции, он предложил ввести поправку к критерию Хесселберга. Эта поправка учитывает изменение сжимаемости морской воды, происходящее при изменении ее температуры, и пропорциональна разности частных производных плотности по давлению, взятых при первоначальной и последующей температурах. Автор отмечает, что сжимаемость воды может сыграть заметную роль при развитии конвективного перемешивания на глубинах, превышающих 200—300 м. Там, где критическая глубина конвекции, определенная без учета сжимаемости, изменяется в пределах 0—200 м, введение предложенной поправки обычно практически не влияет на величину  $E$ .

С параметром устойчивости тесно связан критерий Ричардсона, характеризующий степень развития турбулентности.

$$Ri = E \left/ \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right.,$$

где  $V$  — модуль скорости течения.

Как отмечалось, при  $Ri > 0$  атмосфера находится в устойчивом состоянии, при отрицательных  $Ri$  — в неустойчивом, а при  $Ri = -0,02, -0,05$  наступает процесс термической конвекции. Для моря нет оценок величины  $E$ , при котором начинается конвективное перемешивание. При  $E > 0$  слои воды относительно друг друга находятся в устойчивом состоянии, и турбулентное перемешивание может возникнуть лишь в том случае, если будут существовать вертикальные и горизонтальные градиенты скорости течения. В море всегда существуют факторы, создающие градиенты скорости (волнение, течения, приливо-отливные явления и др.), поэтому всегда существует турбулентное перемешивание. Н. Н. Зубов [87] такой вид перемешивания называл фрикционным.

Для вычисления переноса субстанции в результате такого перемешивания обычно используется, как и в метеорологии, пропорциональность потока субстанции градиенту ее осредненной величины, т. е. зависимость (1.1), и коэффициент пропорциональности принимается как коэффициент турбулентного теплообмена, диффузии или вязкости. Естественно, при этом возникают те же самые трудности с определением коэффициентов турбулентности и масштабов пространственного и временного осреднения, что и в метеорологии.

При  $E = 0$  слои воды в море находятся в безразличном состоянии и конвекция еще не наступает. Предполагается, что она начинается сразу же при наступлении неустойчивости. Н. Н. Зубов [87] определяет конвекцию как перемешивание слоев воды, вызванное вертикальными токами, возникающими или в результате увеличения плотности поверхностных слоев моря, или в резуль-

тате уменьшения плотности глубинных слоев воды. Главным отличием конвективного перемешивания от фрикционного является то, что первое происходит только в вертикальном направлении и не зависит от наличия градиента скорости. Таким образом, при наличии градиента скорости течения и существовании фрикционного перемешивания конвекции может и не быть, но в случае конвективного перемешивания всегда возникают градиенты скорости и фрикционное перемешивание. При этом интенсивность перемешивания воды становится настолько большой, что в слое конвекции, обычно, изменения температуры и солености по вертикали не заметны, т. е. отмечается гомохалинность и гомотермия.

В дальнейшем под турбулентным перемешиванием будет пониматься всегда существующее в море перемешивание, обусловленное наличием градиента скорости, а под конвекцией — перемешивание водных масс, происходящее с бесконечно большой скоростью и обусловленное как вертикальными токами, так и существующим при этом фрикционным перемешиванием.

## § 2. Коэффициент вертикального турбулентного перемешивания

Как уже отмечалось, в море, так же как и в атмосфере, распространение по вертикали температуры, солености, течений и различных примесей в значительной степени зависит от интенсивности турбулентного перемешивания. В закономерностях турбулентного обмена в воде и в воздухе много общего. Поэтому при определении характеристик турбулентности в море очень часто используются те же гипотезы и приемы, что и для атмосферы.

Единственно надежным методом определения характеристик турбулентности, как отмечает А. Г. Колесников [115], является прямой метод, основанный на статистической обработке турбулентных пульсаций элементов. Вследствие того что величина пульсаций скорости течения и температуры в море много меньше, чем в атмосфере, требуется особенно малоинерционная и высокочастотная аппаратура. Этим объясняется незначительное число прямых исследований структуры турбулентности в море и связи структуры турбулентности с осредненными величинами гидрологических элементов. Поэтому для получения представления об интенсивности турбулентного переноса различных субстанций по осредненным данным в настоящее время широко используются практически те же полуэмпирические теории турбулентности, что и для атмосферы. Обзор некоторых из них и условия их применимости приведены в работах Р. В. Озмидова [175, 176] и С. А. Китайгородского [106]. В основе этих теорий лежит гипотеза о том, что в море, как и в атмосфере, между закономерностями турбулентной и молекулярной диффузии существует формальная аналогия. Естественно, что и здесь встают те же

трудности в определении границ, в которых эта аналогия допустима, в определении интервалов временного и пространственного осреднения.

Если диффузия субстанции в море происходит в основном за счет мелкомасштабной турбулентности, то аналогия с молекулярной диффузией допустима, и вертикальный турбулентный перенос можно рассматривать в рамках полуэмпирических теорий. К этому выводу приходит С. А. Китайгородский при рассмотрении вертикального турбулентного перемешивания в море, охваченном ветровым волнением [106, 107]. Объясняется данный факт тем, что масштаб пульсаций значительно меньше размеров области, охваченной ветровым волнением, а скорости этих пульсаций значительно меньше скоростей движения частиц в самих ветровых волнах.

Полагая, что коэффициент интегрального турбулентного обмена для количества движения  $\bar{k}$  зависит лишь от элементов волны, С. А. Китайгородский, применив соображения теории размерности, получил функциональную зависимость  $\bar{k}$  от волнения. Но для определения некоторых параметров пришлось использовать дополнительные гипотезы о масштабе турбулентности. При этом оказалось, что наилучшая согласованность с эмпирическими результатами получается, если используется в отношении длины пути смещения гипотеза Прандтля—Кармана. В таком случае

$$\bar{k} = B \bar{\delta} b^3 \frac{V^3}{g}, \quad (2.3)$$

где  $\bar{\delta} = \bar{h}/\bar{\lambda}$  — крутизна волны;

$b = c/V$  — возраст волнения;

$V$  — скорость ветра;

$\bar{h}$  — высота волны;

$\bar{\lambda}$  — длина волны;

$c$  — скорость распространения волны,  $B = 0,002$  безразмерный параметр.

В тех случаях, когда необходимо задать изменение  $k$  с глубиной предлагается использовать гипотезу Прандтля, а для определения градиента средней скорости жидкости в волне — пользоваться классической теорией волнения. Тогда оказывается, что

$$k(z) = 8\alpha^2 (z + a\bar{h})^2 \frac{\bar{\delta}}{\tau} e^{-\frac{2\pi z}{\bar{\lambda}}}, \quad (3.3)$$

где  $a = 0,2$  — безразмерный параметр;

$\alpha = 0,4$  — безразмерный параметр;

$\tau$  — период волны.



Ранее выражение для коэффициента турбулентного обмена в верхнем слое моря было получено С. В. Доброклонским [81], использовавшим кармановскую гипотезу. При определении градиента средней скорости он исходил из теории трохоиальных волн. Если, пользуясь выводами С. В. Доброклонского, рассчитать коэффициент  $k$ , то, как показал С. А. Китайгородский, показатель степени при  $\bar{\delta}$  и безразмерный параметр  $B$  по величине будут отличаться от приведенных в формуле (3.3) и несколько хуже согласовываться с экспериментальными данными, которые приводятся в работе [106]. Хотя, вообще говоря, С. Г. Богуславский [17] отмечает, что теория С. В. Доброклонского подтверждается некоторыми экспериментами.

Развитием теории С. В. Доброклонского является исследование турбулентного обмена, обусловленного ветровым волнением в мелководном море, выполненное О. Д. Шебалиным [258]. При определении градиентов средней скорости он исходил из уравнений теории волн на конечной глубине.

В перечисленных исследованиях не рассматривается влияние на интенсивность турбулентного перемешивания дрейфового течения, возникающего одновременно с волнением. Между тем, как отмечает В. В. Шулейкин [273], турбулентные явления в потоках дрейфового течения значительно интенсивнее, чем в волнах.

Используя для вычисления  $k$  формулу Кармана, градиенты скорости в которой находились из уравнений дрейфового течения Экмана, он получил

$$k = \frac{x^4 V_0^2}{2\omega z} e^{-2(i+1)z} \sqrt{\frac{\omega z}{k}}, \quad (4.3)$$

где  $V_0$  — скорость поверхностного течения;  
 $\omega$  — угловая скорость вращения Земли;

$$\omega_z = \omega \sin \varphi;$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Рассчитанные по этой формуле значения коэффициента турбулентного обмена  $k$  В. В. Шулейкин сравнил со значениями, вычисленными по формуле С. В. Доброклонского [81]. Оказалось, что коэффициент турбулентного обмена на уровне поверхности моря в первом случае почти на два порядка больше, чем во втором. Поэтому при наличии дрейфового течения вряд ли целесообразно принимать во внимание увеличение интенсивности турбулентного перемешивания волнением.

Следует отметить, что параметр Кармана  $x$  в естественных условиях, согласно оценке В. В. Шулейкина, отличается от величин, полученных в лабораторных условиях, и оказывается примерно равным 0,1.

С. А. Китайгородский [106] придерживается мнения, что у поверхности моря величина коэффициента турбулентного обмена в чисто дрейфовом течении одного порядка, что и в ветровом волнении. Хотя, если вместо кармановской гипотезы о длине пути смешения для определения  $\bar{k}$  исходить из теории Экмана, то, по крайней мере для ветра скоростью не выше 6 м/сек, коэффициент турбулентного обмена в дрейфовом течении оказывается на порядок больше, чем за счет одного волнения.

В некоторых исследованиях при определении коэффициентов турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии используются не гипотезы Кармана и Прандтля относительно длины пути смешения, а зависимость вертикального профиля осредненной величины диффундируемой субстанции от интенсивности турбулентного перемешивания. Впервые по такому пути пошел В. Шмидт [315]. Он исходил из предположения, что распространение тепла от поверхности моря в глубину происходит посредством турбулентного перемешивания. Поэтому, решая уравнение теплопроводности для бесконечно глубокого моря

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad (5.3)$$

при периодическом ходе температуры на поверхности и принимая коэффициент турбулентной теплопроводности  $a$  не зависящим от глубины, по изменению амплитуды тепловой волны или сдвигу фазы можно получить формулу для определения средней в слое величины  $\bar{a}$ . Такую же задачу, но не задаваясь какой-либо гипотезой относительно изменения  $k$  с глубиной, решил и Фьельдстад [297].

В. Б. Штокман [271] детально проанализировал величины  $a$  и  $k$ , найденные по методам Шмидта и Фьельдстада, и показал, что для верхней половины слоя ( $Z$ ), до которого распространяются температурные волны, они удовлетворительно согласуются друг с другом. Однако, как отметил В. Б. Штокман, точность определения  $a$  и  $k$  по этим методам невелика, так как вычисление амплитуд температурных волн и сдвига фаз сопряжено со значительными ошибками.

Для нахождения  $a$  В. Б. Штокман предлагает использовать уравнение теплопроводности (5.3), записанное в конечных разностях

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = a(z) \frac{\Delta^2 \vartheta}{(\Delta z)^2}. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3), по мнению В. Б. Штокмана, имеет преимущество в том, что не требует каких-либо краевых условий и гипотез относительно  $a(z)$ . Очевидно, что при малых  $\Delta \vartheta$  и  $\Delta^2 \vartheta$  величина  $a$  из формулы (6.3) будет определяться с большими ошибками.

Из уравнения теплопроводности при вычислении  $a$  исходит и В. А. Цикунов [241]. Он считает, что распределение температуры в поверхностном слое интенсивного перемешивания квазистационарно и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ a \frac{\partial \theta}{\partial z} - Q e^{-\nu z} \right] = 0, \quad (7.3)$$

где  $Q$  — интенсивность коротковолновой радиации;

$\nu$  — коэффициент поглощения солнечной радиации водой.

Краевым условием для формулы (7.3) В. А. Цикунов принимает уравнение теплового баланса на поверхности моря. В таком случае для определения среднего в слое ( $z_2 - z_1$ ) коэффициента теплопроводности

$$\bar{a} = \frac{\left\{ J + Q \left[ 1 + \frac{e^{-\nu z_2} - e^{-\nu z_1}}{\nu (z_2 - z_1)} \right] \right\}}{\frac{\theta_2 - \theta_1}{z_2 - z_1}} \quad (8.3)$$

требуется знание целого комплекса метеорологических и гидрологических характеристик ( $J$  — сумма радиационного баланса, турбулентного потока тепла между поверхностью моря и воздухом, затрат тепла на испарение). Недостатком метода является и тот факт, что при изотермии в поверхностном слое моря  $\bar{a} = \infty$ , причем распределение плотности в то же время может характеризовать хорошую устойчивость.

Ряд других методов определения  $k$  основан на изучении изменения плотности воды при перемешивании или профиля скорости течения. К ним относится графический метод Якобсона [272]. В основе своей этот метод исходит из гипотезы, что изменение распределения плотности на какой-либо гидрологической станции обусловлено только вертикальным перемешиванием. Обычно изменения распределения плотности в море происходят довольно медленно, поэтому, чтобы получить заметную разницу в распределении плотности, требуется значительный промежуток времени, в течение которого воздействие других факторов (кроме перемешивания) на плотность может быть значительным.

На зависимости профиля скорости течения от коэффициента турбулентного обмена строит свой метод определения величины  $k$  А. И. Фельзенбаум [233]. Пользуясь теорией размерностей, он получил  $k$  для мелкого моря глубиной  $Z$

$$k = \iota V Z \varphi(z), \quad (9.3)$$

где  $V$  — скорость ветра;

$\varphi(z)$  — функция, определяющая закон изменения  $k(z)$ ;

$\iota$  — постоянная, характеризующая зависимость между скоростью ветра и скоростью поверхностного течения.

Рассматривая течение как результат действия ветра, А. И. Фельзенбаум по характеру профиля скорости определяет вид  $\varphi(z)$  и показывает, что наилучшая согласованность с опытными данными получается при задании  $\varphi(z)$  в виде

$$\varphi(z) = \sqrt{1 - \frac{z}{Z}}. \quad (10.3)$$

Очевидно, этот метод применим к установившемуся состоянию и слабой расслоенности моря, т. е. к случаю, когда роль устойчивости мала.

Из зависимости профиля скорости течения от коэффициента турбулентного обмена исходил и Фьельдстад [298], выводя формулу для определения  $k$  в случае чисто дрейфового течения в безграничном море.

Решая уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} &= -2\omega_z v; \\ \frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} &= 2\omega_z u \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

при краевых условиях

$$\left. \begin{aligned} z=0 \quad k\gamma \frac{du}{dz} &= -G_{0x}, \quad k\gamma \frac{dv}{dz} = -G_{0y}; \\ z=\infty \quad u=v &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Фьельдстад получил

$$k = \frac{\int_0^z 2\omega_z I^2 d\zeta}{I^2 \cdot \frac{d\varphi}{dz}}, \quad (13.3)$$

где

$$u + iv = Ie^{i\varphi}.$$

Вычисление  $k$  по формуле (13.3) сопряжено с большими трудностями.

А. А. Сперанская при определении коэффициента турбулентного обмена в пресном водоеме попыталась учесть роль устойчивости [217]. Она исходила из предположения, что изменение кинетической энергии пульсаций пропорционально работе против сил тяжести при вертикальном перемещении вихрей в стратифицированной жидкости. Используя полуэмпирическое соотношение для определения длины пути смешения, она получила формулу

$$k = \frac{\beta_2 V^2}{(1 + \beta' E) \frac{\partial V}{\partial z}}, \quad (14.3)$$

где параметры  $\beta' = 0,4$  и  $\beta_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$  были определены экспериментально. Вывод А. А. Сперанской можно распространить и на море, учитывая роль солености. Естественно, коэффициенты  $\beta$  в этом случае могут быть по величине другими.

Достаточно простое выражение для коэффициента турбулентного обмена можно получить при использовании уравнения баланса энергии турбулентности, как это приведено в работе [139].

Как известно, при установившейся турбулентности в слое (0—Z), если не учитывать диссипацию энергии турбулентности в тепло, уравнение баланса кинетической энергии турбулентности таково:

$$\int_0^z k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \eta_1 \int_0^z k \frac{g}{\gamma} \frac{d\gamma}{dz} dz = 0, \quad (15.3)$$

где  $\eta_1 = \frac{a_1}{k}$ ;

$a_1$  — коэффициент турбулентной диффузии.

Если из системы уравнений (11.3) определить  $\frac{du}{dz}$  и  $\frac{dv}{dz}$ , то, зная распределение плотности воды с глубиной, из уравнения (15.3) можно найти  $k$ . Будем считать, что  $k$  с глубиной не меняется. Такое предположение, как показал В. Б. Штокман [271], для поверхностного слоя не создает больших ошибок, т. е. заметное уменьшение  $k(z)$  начинается с достаточно больших глубин.

Если  $k = \bar{k} = \text{const}$ , ось  $x$  ориентирована по направлению ветра, то уравнения (11.3) и (12.3) приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} \bar{k} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\omega_z v &= 0; \\ \bar{k} \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\omega_z u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.3')$$

и

$$\left. \begin{aligned} z = 0 \quad \bar{k}\gamma \frac{du}{dz} &= -G_0; \quad \bar{k}\gamma \frac{dv}{dz} = 0 \\ z = \infty \quad u = v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.3')$$

Решение системы уравнений (11.3') при краевых условиях (12.3') будет

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{G_0}{2\bar{k}\gamma\mu} (\cos \mu z - \sin \mu z) e^{-\mu z}; \\ v &= -\frac{G_0}{2\bar{k}\gamma\mu} (\cos \mu z + \sin \mu z) e^{-\mu z}, \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega_z}{\bar{k}}}.$$

Определяя из уравнений (16.3)  $\frac{du}{dz}$  и  $\frac{dv}{dz}$  и подставляя найденные значения в уравнение (15.3), а также принимая во внимание, что при  $z=0$

$$u^2 + v^2 = V_0^2 = \frac{G_0^2}{2\bar{k}^2 \gamma^2 \mu^2},$$

будем иметь

$$-\mu V_0^2 (e^{-2\mu z} - 1) - \eta_1 \cdot g \ln \frac{\gamma_z}{\gamma_0} = 0. \quad (17.3)$$

Если за  $Z$  принять «глубину трения» [272], тогда  $\mu Z = \pi$  и  $e^{-2\mu z} \ll 1$ . Поскольку можно приближенно представить

$$\ln \frac{\gamma_z}{\gamma_0} = \frac{Z}{\gamma_0} \cdot \frac{d\gamma}{dz},$$

то

$$\mu^2 V_0^2 = \frac{\pi g \eta_1}{\gamma_0} \cdot \frac{d\gamma}{dz}. \quad (18.3)$$

Однако, так как  $\mu^2 = \frac{\omega_z}{\bar{k}}$ , то из уравнения (18.3) находим среднюю величину коэффициента турбулентного обмена для слоя  $Z$

$$\bar{k} = \frac{\omega_z \gamma_0 V_0^2}{\eta_1 g \pi \frac{d\gamma}{dz}}. \quad (19.3)$$

Очевидно, что по формуле (19.3) можно производить определения  $\bar{k}$  и подо льдом, если  $V_0$  — скорость дрейфа льда.

Чтобы оценить порядок величин  $\bar{k}$ , были произведены расчеты по данным четырех гидрологических станций, полученным на станции «Северный полюс-4» в 1956 г. (30 июля, 4, 7, 15 августа). При  $\eta_1 = 1$  средняя величина  $\bar{k}$  оказалась равной  $20 \text{ см}^2/\text{сек}$ .

Производилась оценка величины  $\bar{k}$  для моря, не покрытого льдом. Так, для Чукотского моря, если считать, что течения в его средней и северной частях в основном дрейфовые, на основании многолетних данных для августа  $\bar{k}$  в центральной части моря оказалось равным  $10-20 \text{ см}^2/\text{сек}$ , к северу величина его постепенно понизилась до  $0,1-1 \text{ см}^2/\text{сек}$ . Такие малые величины  $\bar{k}$  на севере Чукотского моря в летний период объясняются малыми скоростями течений и большой устойчивостью вследствие притока пресных вод за счет таяния льдов.

В выражении (19.3) зависимость коэффициента турбулентного обмена от плотностной стратификации учитывается. Точнее, формулой (19.3) определяется коэффициент турбулентной диффузии

$$\bar{a}_1 = \bar{k}\eta_1,$$

так как коэффициент турбулентного обмена количеством движения может быть получен лишь при известной величине  $\eta_1$ . Как уже отмечалось (глава I), этот параметр в настоящее время рекомендуется принимать при нейтральной устойчивости равным

$$\eta_1 = \frac{1}{Sc} = \frac{1}{0,85} \approx 1,18.$$

В 1957 г. Эллисон предложил теорию, определяющую зависимость отношения коэффициентов турбулентного обмена тепла и количества движения в жидкостях от  $Ri$  [295]. Используя уравнения движения, неразрывности и диффузии вместе с некоторыми предположениями относительно разрушения флюктуаций скорости и плотности, он получил уравнение

$$\frac{a}{k} = \frac{1 - \frac{Rf}{Rf_k}}{Pr_0(1 - Rf)^2}, \quad (20.3)$$

где  $Pr_0 = \frac{k}{a}$  при нейтральной устойчивости;

$$Rf = Ri \frac{a}{k};$$

$Rf_k$  — критическое значение  $Rf$ , при котором турбулентный обмен тепла прекращается.

Если полагать, что  $a = a_1$ , то результаты расчетов по этой формуле удовлетворительно согласуются с опытными, полученными в экспериментах по диффузии солей в лотке с движущейся водой [296]. При больших  $Ri$  величины  $a_1/k$  близки, как отмечают авторы этой работы, к оценкам  $a_1/k$ , сделанным Праудменом для естественных условий. По измерениям в Каттегате для  $Ri$ , находящихся в пределах от 4 до 10, Праудмен получил, что  $0,03 \leq a_1/k \leq 0,05$ . На рис. 8, заимствованном из работы [296], представлено отношение  $a_1/k$  как функция локального числа  $Ri$  при  $a_1/k = 1,4$  для нейтральных условий. Наилучшая согласованность теоретической кривой с экспериментальными данными получается при  $Rf_k = 0,10$ .

Два десятилетия тому назад Манк и Андерсен [162] предложили учитывать влияние устойчивости на интенсивность

турбулентного обмена для тепла и количества движения зависимостями типа

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 (1 + \beta_T Ri)^{-3/2}, \\ k &= k_0 (1 + \beta_V Ri)^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

где  $a_0 = k_0$  при  $Ri = 0$ ;

$\beta_T = 3,33$ ,  $\beta_V = 10$  — подобраны экспериментально.

Рассчитанное по формулам (21.3) отношение  $a/k$ , хотя и убывает с увеличением устойчивости воды, согласуется с кривыми рис. 8 лишь при больших значениях  $Ri$ .

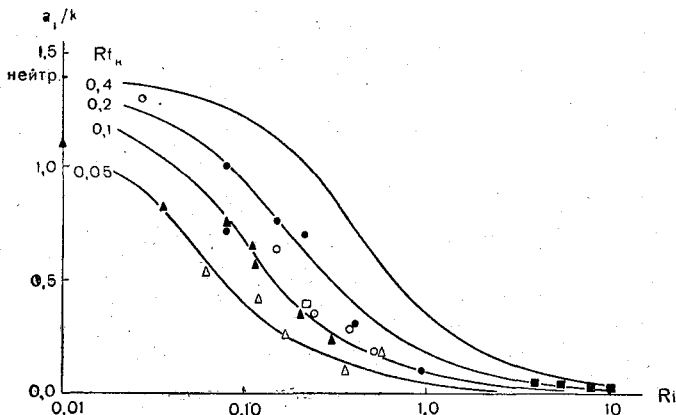


Рис. 8. Зависимость  $a_1/k$  от устойчивости. Сплошные линии — расчет по формуле (20.3) при различных  $Ri_k$ ; значки — по результатам экспериментов.

О. И. Мамаев [151] предлагает учитывать изменение интенсивности турбулентного перемешивания в море от устойчивости зависимостью типа

$$\frac{dk}{d Ri} = -m(Ri) k.$$

В простейшем случае, когда  $m = \text{const}$ , интегрированием находится

$$k = k_0 e^{-m Ri}. \quad (22a.3)$$

Аналогично зависимость коэффициента температуропроводности от  $Ri$  задается формулой

$$a = a_0 e^{-n Ri}. \quad (22б.3)$$

В таком случае для определения  $a/k$  будем иметь

$$\frac{a}{k} = \frac{1}{Pr} e^{(m-n) Ri}. \quad (23.3)$$



При предложенных Мамаевым величинах параметров  $m$  и  $n$  ( $m=0,4$ ;  $n=0,8$ ) вычисленные значения  $a/k$  значительно превышают экспериментальные величины, представленные на рис. 8. В принципе можно подобрать зависимость  $m$  и  $n$  от  $Re$  таким образом, чтобы получаемые  $a/k$  были ближе к приведенным на рис. 8. К сожалению, прямых экспериментальных определений зависимости  $a/k$  от устойчивости очень мало, чтобы дать более точную оценку и формуле (23.3) и параметрам  $m$  и  $n$ .

В частности, измерения пульсаций температуры и скорости течения в поверхностном слое Тихого океана в районе Антарктики при стратификации, близкой к нейтральной, позволили определить коэффициенты  $a$  и  $k$ . А. Г. Колесников [116] отмечает, что по порядку величины  $a$  и  $k$  оказались близкими, а кривые изменения  $a$  и  $k$  с глубиной почти повторяют друг друга.

С увеличением устойчивости отношение  $a/k$  убывает и по данным подледных измерений пульсаций температуры и скорости течения. Так, в озере Байкал при большой устойчивости поверхностных слоев воды было получено отношение  $a/k$  порядка 0,05—0,02. Таким образом, отдельные экспериментальные определенные значения  $a/k$  в общем согласуются с теоретическими, получающимися по формуле (20.3).

Знание зависимости коэффициентов турбулентного обмена для тепла, количества движения и других субстанций от осредненных значений некоторых гидрологических элементов позволяет при известных градиентах температуры, скорости, солёности воды и т. д. довольно просто вычислять по формуле (1.1) вертикальные турбулентные потоки этих субстанций. Обычно в некотором слое моря вертикальный профиль температуры и солёности с достаточно большой точностью можно принимать линейным. В этом случае градиенты определяются легко, и вертикальные потоки тепла и солей могут быть вычислены по формуле

$$\Phi_v = \frac{c\gamma_0^2 V_0^2 Sc}{\pi g Pr} \cdot \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\gamma_1 - \gamma_2}. \quad (24.3)$$

В этой формуле индексы при  $\gamma$  и  $\vartheta$  обозначают верхний и нижний уровень слоя, в пределах которого изменение  $\gamma$  и  $\vartheta$  по вертикали полагалось линейным. Для вычисления потока солей по формуле (24.3) нужно предварительно заменить в ней  $\vartheta$ ,  $Pr$  и  $c$  на  $S$ ,  $Sc$  и  $l$  соответственно.

Использование для расчета вертикального потока субстанции осредненной величины коэффициента турбулентного обмена на основе формулы (1.1) приводит к некоторой ошибке. Однако при вычислении потоков субстанции за длительный промежуток времени (порядка нескольких суток и более) ошибка из-за схематизации вертикального профиля коэффициента турбулентности при его небольших изменениях будет невелика [69], поэтому

допустимо использование формулы (24.3). К выводу о возможности упрощения в ряде случаев схемы вертикального профиля коэффициента турбулентного обмена пришла З. С. Иванова [89]. Такой вывод она сделала на основании вычислений распространения температурных волн по вертикали при различных схемах задания  $a(z)$ . При этом оказалось, что ход температуры поверхности воды меняется очень слабо, если схемы  $a(z)$  не очень сильно различаются, а величина  $a$  не очень мала.

При учете вертикального профиля коэффициента турбулентного обмена следует иметь в виду, что приведенные выше закономерности изменения  $k$  в зависимости от глубины весьма схематичны и не учитывают влияния на перемешивание такого важного фактора, как устойчивость. Приведенные в монографии [228] примеры вертикального профиля коэффициента теплопроводности, рассчитанного по формуле (6.3) для некоторых районов Карского моря, оказываются, в общем, зеркальным отображением профиля устойчивости. Поэтому при значительных изменениях величины устойчивости в зависимости от глубины при вычислениях турбулентных потоков более целесообразно использовать среднее значение коэффициента турбулентного обмена в некотором слое по формуле (19.3), в какой-то степени учитывающей фактор устойчивости.

### § 3. Конвективное перемешивание

В тех случаях, когда под воздействием того или иного фактора плотность верхних слоев моря становится больше плотности нижележащих, т. е. наступает неустойчивое состояние ( $E < 0$ ), возникает конвективное перемешивание этих слоев. Теоретически при отсутствии турбулентного перемешивания равновесие слоев, как замечает Н. Н. Зубов [87], может существовать и при небольших отрицательных величинах  $E$ . Но в поверхностных слоях моря турбулентность обычно бывает довольно интенсивной, поэтому здесь неустойчивое состояние долго сохраняться не может.

В большинстве районов Арктики процесс конвективного перемешивания поверхностных слоев гидросферы в осенне-зимний период настолько ярко выражен и своеобразен, что Н. Н. Зубов назвал его вертикальной зимней циркуляцией. Разработанный им метод расчета элементов этой циркуляции получил широкое применение в практике океанологических исследований. Основным недостатком этого метода является некоторая идеализация условий в море и то, что в схеме Н. Н. Зубова конвекция в море непосредственно не связана с атмосферным воздействием. Вычисленные при этом изменения теплосодержания воды в слое конвекции и толщина образовавшегося льда являются возможными

при достижении конвекцией некоторой заданной глубины. Поэтому элементы зимней циркуляции вычисляются не на заданную дату, а на тот момент, когда изменение теплосодержания воды в слое конвективного перемешивания становится равным величине теплоотдачи в атмосферу. Поскольку последняя зависит не только от атмосферных условий, но и от температуры поверхности моря, то вычисление теплоотдачи в атмосферу и привязка ко времени элементов зимней циркуляции происходит с некоторым приближением.

В настоящее время известны исследования, уточняющие схему Н. Н. Зубова и упрощающие методику расчета [33—35, 198, 199 и др.], но не решающие вопросов учета адвекции тепла и солей и не связывающие принципиальным образом гидрологические процессы с атмосферными.

Используя физическую модель процесса конвекции по Н. Н. Зубову, В. А. Цикунов предложил математическую схему этого процесса [242], впоследствии несколько уточненную учетом изменения толщины слоя конвекции за счет испарения и осадков [243]. В своей теории конвективного перемешивания в верхних слоях моря В. А. Цикунов предположил, что процесс выхолаживания монотонный, т. е. охлаждение не прерывается периодами нагревания. Как и у Н. Н. Зубова, полагалось, что перемешивание в слое конвекции бывает настолько интенсивным, что градиенты солености и температуры в нем становятся очень малыми и слой можно считать практически однородным. Обычно в слое конвективного перемешивания в Арктике однородность наблюдается, поэтому упрощение реального процесса в этом отношении не является грубым.

В схеме В. А. Цикунова пренебрегается теплообменом и потоком солей в слой конвекции из нижележащих слоев воды, что в ряде случаев также является обоснованным. Но, несмотря на некоторую идеализацию процесса, неоспоримым достоинством данной теоретической схемы является аналитическая связь гидрологического процесса с потоком тепла и солей в атмосферу (под последним понимается осолонение вследствие испарения или опреснения воды с поверхности). Решение полученной В. А. Цикуновым системы уравнений позволяет, в принципе, по известному ходу во времени теплообмена и влагообмена с атмосферой и величинам адвекции тепла и солей вычислить на любой момент времени глубину распространения конвекции, а также температуру и соленость воды в слое конвективного перемешивания. Но практически было предложено проводить вычисление элементов конвекции графическим путем для случая, когда адвекция тепла и солей отсутствует.

Использование быстродействующих электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) в практике океанологических расчетов позволяет преодолевать громоздкость получающегося

решения данной задачи и доводить его до оперативного использования.

В работе автора [74] приближенная теория конвективного перемешивания В. А. Цикунова распространена на случай наличия льда. При этом можно определять такие важные гидрологические характеристики, как срок ледообразования и толщину льда. А возможность реализации полученной системы уравнений на ЭЦВМ позволила снять такое ограничение, как предположение монотонности осеннего выхолаживания. Кроме того, вместо потоков тепла и влаги в атмосферу задавались значения температуры, влажности и ветра на некоторой высоте, а также радиационный баланс подстилающей поверхности, т. е. значения метеорологических элементов, не требующие предварительных расчетов.

Впоследствии удалось проводить учет адвекции тепла, солей и потоки этих субстанций между слоем конвективного перемешивания и нижележащими [77].

Составим, следуя работе В. А. Цикунова [242], уравнения баланса тепла и солей в слое конвективного перемешивания при отсутствии адвекции

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_a(t) dt = c \left[ \int_0^{\tilde{h}_i} \gamma_i \vartheta_i dz + \int_{\tilde{h}_i}^{\tilde{h}_{i+1}} \gamma_i \vartheta_i dz - \int_0^{\tilde{h}_{i+1}} \gamma_{i+1} \vartheta_{i+1} dz + \gamma \int_{t_i}^{t_{i+1}} a \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} dt \right], \quad (25.3)$$

где  $\tilde{h}$  — глубина, до которой распространяется конвективное перемешивание;

$\Phi_a$  — тепловой поток между морем и атмосферой;

$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial z}$  — градиент температуры на глубине  $z = \tilde{h}$ .

Первый член правой части этого уравнения характеризует теплозапас слоя конвективного перемешивания толщиной  $\tilde{h}_i$  в момент времени  $t_i$ , второй — увеличение теплозапаса за счет увеличения толщины слоя конвекции до  $\tilde{h}_{i+1}$ , третий — теплозапас слоя конвекции в момент времени  $t_{i+1}$  и четвертый член определяет поток тепла за счет турбулентного перемешивания между слоем конвекции и нижележащими слоями воды за интервал времени  $\tau = t_{i+1} - t_i$ .

В уравнении (25.3) не принимается во внимание зависимость теплоемкости воды от температуры, что не вызывает заметной

погрешности. Аналогично уравнение баланса солей в слое конвективного перемешивания может быть записано в виде

$$\int_0^{\tilde{h}_{i+1}} \gamma_{i+1} S_{i+1} dz = \int_0^{\tilde{h}_i} \gamma_i S_i dz + \int_{\tilde{h}_i}^{\tilde{h}_{i+1}} \gamma_i S_i dz + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S dt, \quad (26.3)$$

где  $\Phi_S$  — приток солей в слой конвекции.

В уравнениях (25.3) и (26.3) индекс  $i$  обозначает момент времени, в который задана соответствующая характеристика.

Глубина конвективного перемешивания определяется на основании соотношения плотностей в слоях конвекции  $\gamma_{i+1}$  и нижележащем  $\gamma(\tilde{h}_{i+1})$

$$\gamma_{i+1} \leq \gamma(\tilde{h}_{i+1}). \quad (27.3)$$

Зависимость плотности воды от температуры, солености и давления известна и с различной степенью точности определена в работах [88, 145, 152]. В частности, довольно простая формула предложена П. С. Линейкиным [145]

$$\gamma = 1 + 10^{-3} (\varepsilon_1 S + \varepsilon_2 \vartheta - \varepsilon_3 S \vartheta - \varepsilon_4 \vartheta^2 + \varepsilon_5 P), \quad (28.3)$$

где  $\varepsilon_1 = 0,82$ ;  $\varepsilon_2 = 6,89 \cdot 10^{-2}$ ;  $\varepsilon_3 = 3,90 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_4 = 9,18 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_5 = 5 \cdot 10^{-8}$ .

Последний член этой формулы для данной задачи мал по сравнению с остальными и его можно не учитывать.

В случае вынужденной конвекции за счет ветрового перемешивания, когда толщина верхнего гомогенного слоя изменяется от  $\tilde{h}_i$  до  $\tilde{h}_{i+1}$ , температура и соленость этого слоя описывается теми же уравнениями, что и при свободной конвекции. Глубина же  $\tilde{h}_{i+1}$  в данном случае зависит не только от соотношения плотностей выше- и нижележащих слоев, но и от механического воздействия ветра. Для определения глубины ветрового перемешивания можно воспользоваться известными соотношениями для стационарного случая, например формулой С. А. Китайгородского [106]

$$\tilde{h} = 0,16 V^2, \quad (29.3)$$

где  $V$  — скорость ветра в м/сек.

Итак, если полагать потоки тепла и солей к слою конвективного перемешивания известными, то система уравнений (25.3) — (28.3) полностью определяет задачу конвективного перемешивания до начала ледообразования. При решении ее будем считать, что слой конвективного перемешивания гомогенный. В уравнениях (25.3) и (26.3) без особого ущерба для точности можно принять  $\gamma_i = \gamma_{i+1} = \gamma$ . Если полагать интервал времени

$\tau = t_{i+1} - t_i$  таким, чтобы  $\Delta \bar{h} = \bar{h}_{i+1} - \bar{h}_i$  было достаточно малым и позволило бы представить интегралы вторых членов правой части этих уравнений приближенно в виде

$$\int_{\bar{h}_i}^{\bar{h}_{i+1}} \gamma_i \vartheta_i dz = 0,5\gamma [\vartheta_i + \vartheta_i(\bar{h}_{i+1})] (\bar{h}_{i+1} - \bar{h}_i);$$

$$\int_{\bar{h}_i}^{\bar{h}_{i+1}} \gamma_i S_i dz = 0,5\gamma [S_i + S_i(\bar{h}_{i+1})] (\bar{h}_{i+1} - \bar{h}_i),$$

то после учета всех упрощений получаются следующие уравнения для определения температуры  $\vartheta_{i+1}$  и солёности  $S_{i+1}$  в слое конвекции в момент времени  $t_{i+1}$ :

$$\vartheta_{i+1} = 0,5 \left[ \vartheta_i \left( 1 + \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) + \vartheta'_i \left( 1 - \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) \right] - \frac{J}{\bar{h}_{i+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} dt; \quad (30.3)$$

$$S_{i+1} = 0,5 \left[ S_i \left( 1 + \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) + S'_i \left( 1 - \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma \bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S dt, \quad (31.3)$$

где  $\vartheta'_i = \vartheta_i(\bar{h}_{i+1})$ ,  $S'_i = S_i(\bar{h}_{i+1})$  — температура и солёность воды на глубине  $\bar{h}_{i+1}$  на  $t_i$  момент времени;

$$J = \frac{1}{c\gamma} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_a(t) dt.$$

Определим последние члены формул (30.3) и (31.3). Осолонение поверхностного слоя воды за счет испарения легко вычисляется по данным о солёности, толщине испарившегося слоя воды, которая находится по соответствующим формулам главы I. Если  $d$  — скорость испарения, то увеличение солёности в слое конвекции произойдет на величину

$$\Delta S_1 = \frac{1}{\gamma \bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S \cdot d \cdot dt. \quad (32.3)$$

При небольших интервалах времени соленость воды достаточно точно определяется по данным на момент времени  $t_i$ , и тогда формула (32.3) приобретает вид

$$\Delta S_1 = \frac{S_i \bar{d}}{\gamma \bar{h}_{i+1}}, \quad (32.3')$$

где  $\bar{d}$  — испарение за интервал времени  $\tau = t_{i+1} - t_i$ .

Теплообмен и поток солей к слою конвективного перемешивания от нижележащих слоев воды может быть определен более или менее просто при предположении, что перенос этот осуществляется посредством турбулентного перемешивания, что глубина проникновения конвекции в течение интервала времени  $\tau$  не меняется и, если момент времени  $t_i$  принять за начало отсчета, то вертикальное распределение температуры и солености ниже слоя конвекции на этот момент времени известно. В таком случае для определения потока тепла и солей можно использовать уравнение диффузии

$$\frac{\partial S}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad h \leq z < \infty \quad (33.3)$$

с краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} z = h_i = h \quad S = S_0; \\ z = \infty \quad S \neq \infty; \\ t = t_i = 0 \quad S_i(z) = \varphi(z). \end{aligned} \right\} \quad (34.3)$$

В действительности  $h$  является функцией времени, но для небольших  $\tau$  это изменение  $h$  обычно невелико и его можно не учитывать.

Применив преобразование Лапласа-Карсона [59] по формулам типа

$$\bar{S}(\gamma, z) = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} S(t, z) dt, \quad (35.3)$$

получим решение уравнения (33.3) в изображениях

$$\begin{aligned} \bar{S}(\gamma, z) = & \bar{S}_0 \exp \left[ (h - z) \sqrt{\frac{\gamma}{a_1}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{a_1}} \left\{ \int_h^z \varphi(\zeta) e^{(\zeta - z) \sqrt{\frac{\gamma}{a_1}}} d\zeta + \right. \\ & \left. + \int_z^{\infty} \varphi(\zeta) e^{(z - \zeta) \sqrt{\frac{\gamma}{a_1}}} d\zeta - \int_h^{\infty} \varphi(\zeta) e^{(2h - z - \zeta) \sqrt{\frac{\gamma}{a_1}}} d\zeta \right\}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\left. \frac{d\bar{S}}{dz} \right|_{z=\bar{h}} = \frac{r}{a_1} \int_{\bar{h}}^{\infty} \dot{\varphi}(\zeta) e^{(\bar{h}-\zeta)} \sqrt{\frac{r}{a_1}} d\zeta - \bar{S}_0 \sqrt{\frac{r}{a_1}}.$$

В принципе можно получить общие формулы для оригиналов этих выражений. Однако для получения расчетных формул удобнее предварительно провести некоторые упрощения. В частности, удобно заменить  $\varphi(\zeta)$  ломаной линией и вычислить интегралы, а затем находить оригиналы. Выделим на кривой начальной стратификации  $m$  произвольных отрезков, для каждого из которых  $\varphi(\zeta)$  представима линейной функцией глубины

$$\varphi_{j+1}(\zeta) = \varphi_j(z_j) + b_{j+1}(\zeta - z_j) \quad z_j \leq \zeta \leq z_{j+1},$$

причем  $z_0 = \bar{h}$ ,  $\varphi_0 = S_0|_{t=0}$ .

Если  $\tau$  выбрано небольшим, то в первом приближении для этого интервала времени зависимость  $S_0$  от  $t$  можно полагать линейной. В таком случае на конец интервала  $\tau$  будем иметь

$$\begin{aligned} S(\tau, z) = & S_{i+1} \operatorname{erfc} \frac{z - \bar{h}}{2\sqrt{a_1\tau}} + \\ & + (S_{i+1} - S_i) \left[ \frac{(z - \bar{h})^2}{2a_1\tau} \operatorname{erfc} \frac{z - \bar{h}}{2\sqrt{a_1\tau}} - \frac{z - \bar{h}}{2\sqrt{\pi a_1\tau}} e^{-\frac{(z - \bar{h})^2}{4a_1\tau}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^N \psi_n(z - z_n) - \sum_{j=N+1}^m \chi_j(z_j - z) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m \chi_k(z_k + z - 2\bar{h}) \right], \end{aligned} \quad (36.3)$$

где

$$\psi_n(\alpha_n) = J'_n(\alpha_n) + J''_n(\alpha_n) - J'''_n(\alpha_n);$$

$$\chi_j(\alpha_j) = J'_j(\alpha_j) + J''_j(\alpha_j) + J'''_j(\alpha_j);$$

$$J'_r(\alpha_r) = \varphi_{r-1} \left( \operatorname{erfc} \frac{\alpha_r}{2\sqrt{a_1\tau}} - \operatorname{erfc} \frac{\alpha_{r-1}}{2\sqrt{a_1\tau}} \right);$$

$$J''_r(\alpha_r) = b_r(z_r - z_{r-1}) \operatorname{erfc} \frac{\alpha_r}{2\sqrt{a_1\tau}};$$

$$\begin{aligned} J'''_r(\alpha_r) = & b_r \sqrt{a_1} \left[ 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left( e^{-\frac{\alpha_r^2}{4a_1\tau}} - e^{-\frac{\alpha_{r-1}^2}{4a_1\tau}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_r}{\sqrt{a_1}} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_r}{2\sqrt{a_1\tau}} + \frac{\alpha_{r-1}}{\sqrt{a_1}} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_{r-1}}{2\sqrt{a_1\tau}} \right]. \end{aligned}$$



Для определения изменения солёности в слое конвекции за интервал времени  $\tau$  при неизменном коэффициенте диффузии получим

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= \frac{1}{\gamma \bar{h}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S dt = \frac{a_1}{\bar{h}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=\bar{h}} dt = \\ &= \frac{4a_1}{3\bar{h}} \sqrt{\frac{\tau}{\pi a_1}} (S_i - S_{i+1}) + \frac{a_1 \tau}{\bar{h}} \sum_{k=1}^M b_k \left\{ \left[ 1 + \frac{(z_{k-1} - \bar{h})^2}{2a_1 \tau} \right] \times \right. \\ &\times \operatorname{erfc} \frac{z_{k-1} - \bar{h}}{2\sqrt{a_1 \tau}} - \left[ 1 + \frac{(z_k - \bar{h})^2}{2a_1 \tau} \right] \operatorname{erfc} \frac{z_k - \bar{h}}{2\sqrt{a_1 \tau}} + \\ &\left. + \frac{z_k - \bar{h}}{\sqrt{\pi a_1 \tau}} e^{-\frac{(z_k - \bar{h})^2}{4a_1 \tau}} - \frac{z_{k-1} - \bar{h}}{\sqrt{\pi a_1 \tau}} e^{-\frac{(z_{k-1} - \bar{h})^2}{4a_1 \tau}} \right\}. \quad (37.3) \end{aligned}$$

В выражениях (36.3) — (37.3) должно выполняться условие  $\bar{h} \leq z_n \leq z, z \leq z_j < \infty, \bar{h} \leq z_k < \infty$ .

Определение теплообмена и изменения температуры как в слое конвективного перемешивания, так и в нижележащих производится по формулам (36.3) и (37.3), если заменить в них  $a_1$  на  $a$  и  $S$  на  $\vartheta$ .

Решение уравнений (30.3) и (31.3) при условии, что последние члены правой части их известны, будем проводить следующим образом. Если выбрать некоторую величину  $\delta \bar{h}$  таким образом, чтобы в его пределах можно было бы находить  $\vartheta'_i$  и  $S'_i$  с помощью линейной интерполяции типа

$$\vartheta' = \vartheta_2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1) \frac{z_2 - \bar{h}}{z_2 - z_1}, \quad (38.3)$$

где  $z_1 \leq \bar{h} \leq z_2$ ;  $\vartheta_2 = \vartheta(z_2)$ ;  $\vartheta_1 = \vartheta(z_1)$ ,

тогда  $\Delta \bar{h}^{(n)} = n \delta \bar{h}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Первоначально полагается  $n = 0$  и вычисляются  $\Delta \bar{h}^{(n)}$ ;  $\bar{h}_{i+1}^{(n)} = \bar{h}_i + \Delta \bar{h}^{(n)}$ ;  $\vartheta'_i$ ;  $S'_i$  и условная плотность  $\sigma'_i$  по формуле, полученной из выражения (28.3),

$$\sigma'_i = \varepsilon_1 S'_i + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3 S'_i - \varepsilon_4 \vartheta'_i) \vartheta'_i. \quad (28a.3)$$

Затем определяется теплообмен с атмосферой и по формулам (30.3), (31.3) — температура и солёность слоя конвекции. Поскольку теплообмен с атмосферой является функцией

температуры поверхности воды, то для вычисления  $J$  может быть применен метод последовательных приближений

$$\left. \begin{aligned} J^{(m+1)} &= f(\vartheta_i, \Delta\vartheta^{(m)}); \\ \vartheta_{i+1}^{(m+1)} &= 0,5 \left[ \vartheta_i \left( 1 + \frac{\tilde{h}_i}{\tilde{h}_{i+1}} \right) + \vartheta'_i \left( 1 - \frac{\tilde{h}_i}{\tilde{h}_{i+1}} \right) \right] - \frac{J^{(m+1)}}{\tilde{h}_{i+1}} + \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} dt; \\ \Delta\vartheta^{(m+1)} &= \vartheta_{i+1}^{(m+1)} - \vartheta_i; \end{aligned} \right\} (39.3)$$

где  $m$  — номер итерации.

Если учесть, что изменение температуры воды из-за большой теплоемкости происходит медленно, то при небольших  $\tau$  величина  $\Delta\vartheta$  малая и процесс итераций очень быстро сходится. Если же брать  $\tau$  порядка суток, то при расчетах  $J$  можно вообще не учитывать изменения температуры воды за это время.

После определения температуры и солёности рассчитывается условная плотность воды в слое конвективного перемешивания

$$\sigma_{i+1} = \varepsilon_1 S_{i+1} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3 S_{i+1} - \varepsilon_4 \vartheta_{i+1}) \vartheta_{i+1}. \quad (28б.3)$$

Если окажется, что условие

$$\sigma_{i+1} \leq \sigma'_1, \quad (27a.3)$$

равносильное условию (27.3), не выполняется, то  $n$  увеличивается на единицу, снова вычисляются новые значения  $\Delta\tilde{h}^{(n)}$  и  $\tilde{h}_{i+1}$ , и процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие (27a.3). Полученные значения  $\tilde{h}_{i+1}$ ,  $\vartheta_{i+1}$ ,  $S_{i+1}$  являются исходными при расчете на следующий интервал времени  $\tau$ .

Очевидно, что приведенной системой уравнений можно пользоваться до тех пор, пока температура поверхности воды не станет равна температуре замерзания  $\theta$  данной солёности [88].

$$\theta = -0,01 \{ 0,3 + S_{i+1} [5,27 + 4 \cdot 10^{-3} S_{i+1} (1 + 0,01 S_{i+1})] \}. \quad (40.3)$$

После этого необходимо производить учет осолонения воды в слое конвективного перемешивания, вызванного выделением солей при образовании морского льда солёностью  $S_{л}$ . В этом случае  $\Delta S_1$  примет вид

$$\Delta S_1 = \frac{1}{\tilde{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( S \frac{\rho}{\gamma} - S_{л} \right) \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (41.3)$$

где  $\rho$  и  $H$  — плотность и толщина льда.

Момент времени, когда выполняется условие

$$\vartheta_{i+1} \leq \theta$$

может фиксироваться и по нему определяется дата ледообразования. Поток тепла к нижней поверхности льда в данном случае уже не зависит от атмосферных условий и вычисляется из уравнения (30.3) при известных значениях других параметров

$$J_1 = 0,5 [(\theta_i - \vartheta'_i) h_i + (\theta_i + \vartheta'_i - 2\theta_{i+1}) h_{i+1}] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} a \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} dt. \quad (42.3)$$

Большое влияние на развитие конвективного перемешивания оказывают адвективные изменения температуры и солёности при горизонтальных переносах тепла и солей, вызванных ветровым дрейфом. Стационарные течения, как правило, являются менее интенсивными, чем ветровые. Кроме того, распределение температуры и солёности в море, обусловленное этими течениями за промежуток времени в несколько месяцев не меняется сильно, а поэтому в какой-то мере учитываются заданием начальных условий. Ветровые же течения за сравнительно короткий промежуток времени могут резко изменить температуру и солёность в данной точке. Особенно большие изменения обычно наблюдаются в поверхностных слоях моря. Это не может не сказаться на конвективном перемешивании. Действительно, принос менее плотных вод затрудняет конвективное перемешивание, а принос более солёных, плотных вод может привести к увеличению глубины плотностного перемешивания, даже при отсутствии выхолаживания.

Согласно классической схеме элементы установившегося ветрового дрейфа для глубокого моря определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} u &= V_0 e^{-\mu z} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \mu z\right); \\ v &= V_0 e^{-\mu z} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \mu z\right), \end{aligned} \right\} \quad (43.3)$$

где  $V_0$  — скорость поверхностного течения.

Известно, что направление поверхностного течения, составляющее с направлением ветра в этой схеме угол  $45^\circ$ , в зависимости от глубины меняется, и на глубине

$$Z_d = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{\omega z}}$$

составляет угол  $90^\circ$  с направлением поверхностного течения. Ниже этой глубины скорость течения очень мала по величине и направлена в противоположную сторону от переноса

на поверхности. Поэтому за глубину распространения ветрового дрейфового течения грубо можно принять  $Z_D$ .

Из формул (43.3) следует, что проекция модуля скорости течения на глубине на направление поверхностного течения определится выражением

$$V(z) = V_0 e^{-\mu z} \cos \mu z. \quad (44.3)$$

Эта формула позволяет определить скорость адвекции в данную точку моря, если известна интенсивность турбулентного перемешивания. При этом изменения температуры  $\Delta \vartheta_a$  и солёности  $\Delta S_a$  в слое конвекции за счет адвекции тепла и солей находятся из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vartheta_a &= \frac{1}{h_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{h(t)} V(z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} dz dt; \\ \Delta S_a &= \frac{1}{h_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{h(t)} V(z) \frac{\partial S}{\partial x_j} dz dt, \end{aligned} \right\} \quad (45.3)$$

где  $x_j$  — направление скорости течения  $V(z)$ .

Обычно в течение небольших интервалов времени  $\tau$  скорость дрейфа практически не меняется и ее можно считать известной по данным скорости ветра или атмосферного давления. Горизонтальные градиенты температуры воды и солёности вычисляются при помощи итерационного процесса, в котором в качестве нулевого приближения используются значения температуры и солёности на  $i$  момент времени. При  $\tau=1$  суткам можно ограничиться нулевым приближением, так как последующие уточнения обычно меньше ошибок в определении скорости и направления дрейфа.

## Глава IV. НАРАСТАНИЕ ЛЬДА И ТЕПЛООБМЕН ЧЕРЕЗ НЕГО

### § 1. Теплофизические характеристики морского льда

Исследование термического режима ледяного покрова, теплообмена между морем и атмосферой при наличии льда, нарастания и таяния льда требует знания его теплофизических характеристик: теплоемкости, теплопроводности и теплоты плавления. Как известно, морской лед отличается от других природных льдов главным образом тем, что кроме пресного льда и включений воздуха он содержит некоторое количество твердых солей и рассола. Содержание жидкой, твердой и газообразных фаз зависит от температуры, поэтому с ее изменением меняются и теплофизические характеристики льда. Особенно большое влияние на термический режим льда оказывают фазовые изменения в случае образования чистого льда из раствора при понижении температуры или плавлении льда при ее повышении.

Первые исследования влияния фазового состава морского льда на его теплофизические характеристики проводились Ф. Мальмгреном [150]. Сведения о теплофизических характеристиках с учетом некоторых добавочных исследований тепловых свойств льда в наиболее полном виде представлены в монографиях Н. Н. Зубова [87] и В. В. Шулейкина [272]. Позднее появились новые сведения об изменении концентрации рассола во льду и характере выделения солей при вымораживании морской воды, что позволило Б. А. Савельеву [200, 202] и Ю. Л. Назинцеву [166, 167] провести уточнение некоторых теплофизических характеристик морского льда.

Согласно работе [167], теплоемкость морского льда представляется как средневзвешенная величина суммы теплоемкостей компонентов морского льда с учетом теплоты фазовых преобразований рассола

$$C = c_n \left( 1 - \frac{S_l}{A_T} \right) + c_p \frac{S_l}{B_T} + l_n \frac{S_l}{A_T^2} \frac{dA_T}{d\theta} + l_c S_l \frac{dS_c}{d\theta}, \quad (1.4)$$

где  $c_n$  и  $c_p$  — теплоемкости пресного льда и рассола;

$l_{\text{л}}$  и  $l_{\text{с}}$  — теплота плавления льда и фазового перехода солей;

$S_{\text{л}}$  и  $S_{\text{с}}$  — соленость льда и количество твердых солей во льду;

$A_{\text{т}}$  и  $B_{\text{т}}$  — некоторые параметры, зависящие от количества рассола во льду.

Числовые значения параметров  $A_{\text{т}}$  и  $B_{\text{т}}$ , согласно работе [167], представлены в табл. 10. Первые два члена формулы

Таблица 10

Значения коэффициентов  $A_{\text{т}}$  и  $B_{\text{т}}$  при разных температурах

$\theta$	$A_{\text{т}}$	$B_{\text{т}}$	$\frac{dA_{\text{т}}}{d\theta}$	$\theta$	$A_{\text{т}}$	$B_{\text{т}}$	$\frac{dA_{\text{т}}}{d\theta}$
-1°	19,0	19,0	18,0	-18°	221,4	227,5	10,1
-2	36,4	36,4	17,1	-20	242,0	251,1	10,3
-4	69,5	69,5	16,0	-22	261,9	274,9	9,7
-6	100,2	100,2	14,3	-24	371,9	459,7	57,6
-8	126,1	126,4	12,3	-26	464,2	675,5	33,2
-10	149,3	150,7	10,6	-28	513,2	819,3	20,0
-12	168,4	170,8	8,5	-30	548,9	939,2	16,2
-14	184,7	188,1	8,3	-32	578,7	1054,1	14,0
-16	202,0	206,2	9,2	-34	600,0	1162,0	12,3

(1.4) характеризуют вклад теплоемкостей чистого льда и рассола, остальные два — тепло фазовых переходов при кристаллизации или плавлении воды и солей рассола. Последний член этой формулы значительно меньше суммы остальных, а потому его обычно не учитывают. Если в параметрах  $A_{\text{т}}$  и  $B_{\text{т}}$  не принимать во внимание  $S_{\text{с}}$ , то они становятся одинаковыми и равны концентрации рассола во льду ( $S_{\text{п}}$ ), а формула (1.4) приобретает вид выражения для определения  $C$ , приведенного у Н. Н. Зубова [87]. При необходимости учет тепла фазовых переходов солей может быть произведен по данным табл. 11, заимствованной из работы [167].

Таблица 11

Изменение количества твердых солей  $dS_{\text{с}}/d\theta$  в 1 г льда соленостью 10‰ с понижением температуры на 1° и соответствующее количество теплоты кристаллизации  $\Phi'$

$\theta$	$\frac{dS_{\text{с}}}{d\theta}$ (мг/град)	$\Phi'$ (кал/град)	$\theta$	$\frac{dS_{\text{с}}}{d\theta}$ (мг/град)	$\Phi'$ (кал/град)	$\theta$	$\frac{dS_{\text{с}}}{d\theta}$ (мг/град)	$\Phi'$ (кал/град)
-8°	0,33	0,013	-17°	0,10	0,004	-24°	1,36	0,089
-10	0,15	0,006	-18	0,15	0,006	-26	0,54	0,035
-12	0,08	0,003	-20	0,15	0,006	-28	0,27	0,018
-14	0,04	0,002	-22	0,15	0,006	-30	0,12	0,008
-16	0,03	0,001	-23	2,87	0,186	-32	0,06	0,004

Таким образом, коэффициент  $C$ , часто называемый эффективной теплоемкостью морского льда, учитывает не только тепло, затрачиваемое на изменение температуры льда, но и на теплоту плавления. Последняя выделяется за счет вымерзания воды из рассола при понижении температуры или расходуется при плавлении некоторого количества льда с тем, чтобы по концентрации

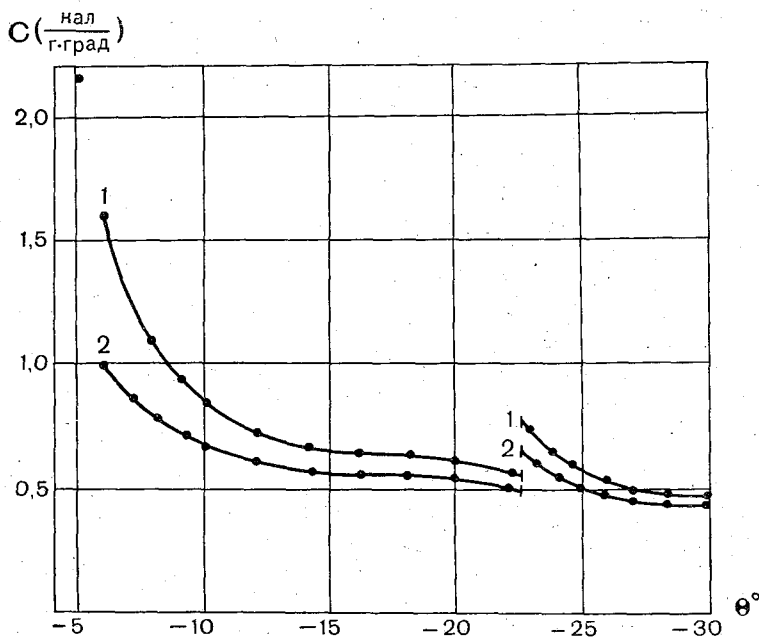


Рис. 9. Изменение эффективной теплоемкости морского льда в зависимости от его температуры.

1 —  $S_d = 10\text{‰}$ ; 2 —  $S_d = 5\text{‰}$ .

рассол снова оказался на точке замерзания. Теплота плавления играет существенную роль при относительно высоких температурах, близких к температуре замерзания морской воды. С понижением температуры льда большая часть рассола вымерзает, и  $C$  приближается по величине к теплоемкости пресного льда. При температуре  $-22,4^{\circ}$  происходит скачкообразное увеличение  $C$ , обусловленное образованием кристаллогидрата хлористого натрия [167]. В качестве примера зависимости  $C$  от температуры льда приведен рис. 9, заимствованный из работы [167]. Из рисунка видно, что зависимость  $C$  от температуры льда  $\Theta$  возрастает с повышением солёности льда. Наличие связи между температурой льда и концентрацией солей в рассоле позволило

Швердтфегеру [316] приближенно выразить  $C$  через соленость льда и его температуру

$$C = c_n - \frac{S_{лп}}{\delta\theta^2} + \frac{S_{л}}{\delta\theta} (c - c_n), \quad (2.4)$$

где  $c$  — теплоемкость воды.

Согласно работе [316], параметр  $\delta = -0,0182$  г/град. Если не учитывать последний член этой формулы, который в общем значительно меньше суммы двух остальных членов, то формула (2.4) приобретает вид, предложенный автором ранее [62],

$$C = c_n + \frac{\delta_1 S_{лп}}{\theta^2} \quad (3.4)$$

при  $\delta_1 = 50^\circ$ , т. е.  $\delta_1 \approx 1/\delta$ .

Поскольку в двух последних формулах все параметры слабо зависят от изменения температуры, то этими формулами обычно удобно пользоваться при исследовании термического режима морского льда с учетом внутренних источников тепла, нарастания толщины льда и т. д.

Следующей важнейшей теплофизической характеристикой морского льда является теплота плавления. Как отмечалось, плавление и кристаллизация морского льда происходят не при какой-то одной температуре, как у пресного льда, а непрерывно от температуры замерзания морской воды до температуры, при которой весь рассол вымерзает. Впервые это было отмечено Мальмгренем, который предложил вместо теплоты плавления использовать некоторое эффективное тепло, потребное на расплавление единицы массы морского льда, взятого при некоторой температуре  $\Theta$  (табл. 12). Приближенно величину этого эффективного тепла можно определить, если проинтегрировать по  $\Theta$  выражение (2.4) от температуры  $\Theta$  до температуры  $\Theta_{л} = S_{л}/\delta$ , при котором весь лед растает,

$$Q = (l_n - c_n\Theta) \left(1 - \frac{S_{л}}{\delta\Theta}\right) + \frac{S_{л}(c - c_n)}{\delta} \ln \frac{S_{л}}{\delta\Theta}. \quad (4.4)$$

Таблица 12

Количество тепла, потребное для плавления 1 г морского льда  
(в калориях)

$\theta$	$S_{л}$ (%)					
	0	1	2	4	6	8
-0,5°	79,92	71,11	62,43	44,85	26,77	9,63
-1,0	80,15	75,79	71,39	62,70	53,64	45,08
-2,0	80,63	78,50	76,43	71,94	67,52	63,25



Проведенные в работе [316] расчеты по этой формуле дали величины  $Q_{л}$ , весьма близкие к результатам Мальмгрена, приведенным у Н. Н. Зубова [87].

Поскольку теплота кристаллизации морского льда частично учитывается параметром теплоемкости, то в ряде случаев вместо величины  $Q_{л}$  удобнее пользоваться теплотой, потребной для протавления чистого льда в единице массы морского льда при температуре замерзания морской воды, которую обычно и принимают за теплоту плавления морского льда ( $l$ ),

$$l = l_{п} \left( 1 - S_{с} - \frac{S_{л}}{B_{т}} \right). \quad (5.4)$$

При температуре замерзания морской воды твердые соли во льду практически отсутствуют, и параметр  $B_{т}$  равен концентрации рассола. Приняв существование линейной зависимости между концентрацией рассола и температурой, вместо выражения (5.4) можно записать

$$l = l_{п} \left( 1 - \frac{S_{л}}{\delta\theta} \right). \quad (6.4)$$

Как теплоемкость и теплота плавления, так и теплопроводность морского льда  $\Lambda$  отличается от теплопроводности пресного льда. Вследствие различия теплопроводностей чистого льда, рассола, солей и воздушных включений  $\Lambda$  изменяется. Поскольку наименьшей теплопроводностью обладает воздух, то с увеличением пористости льда его  $\Lambda$  уменьшается. Обобщив данные различных исследователей, Ю. Л. Назинцев [167] получил эмпирическую зависимость  $\Lambda$  от пористости льда ( $\pi$ )

$$\Lambda = \lambda_{п} (0,582e^{-5,4\pi} + 0,418), \quad (7.4)$$

где  $\pi$  — относительная величина объема льда, занятая воздушными включениями.

Обычно в большей степени бывает известна не пористость льда, а плотность ( $\rho$ ); между ними, как показано в работе [316], существует зависимость

$$\pi = 1 - \rho \left( \frac{1 - S_{л}}{0,917} + \frac{4,98S_{л}}{\theta} \right) \approx 1 - \frac{\rho}{0,917}. \quad (8.4)$$

В таком случае при неизвестной величине  $\pi$  приближенная оценка  $\Lambda$  производится на основании формулы

$$\Lambda = \lambda_{п} [0,582e^{5,6\rho - 5,4} + 0,418]. \quad (9.4)$$

Вследствие того что теплопроводность чистого льда больше теплопроводности рассола, присутствие последнего в морском льду влияет и на эту теплофизическую характеристику.

Предполагая, что рассол распределяется во льду равномерно в виде вертикальных цилиндриков, Швердтфегер [316] получил зависимость теплопроводности морского льда от его солёности

$$\Lambda = \lambda_n - (\lambda_n - \lambda_p) \frac{\rho S_{\text{л}}}{\gamma S_p}, \quad (10.4)$$

где  $\lambda_p$  — теплопроводность рассола.

До тех пор, пока концентрация рассола не превышает 150‰, Швердтфегер предлагает определять  $\lambda_p$  зависимостью

$$\lambda_p = (1,25 + 0,030\theta + 0,00014\theta^2) \cdot 10^{-3} \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}. \quad (11.4)$$

Вычисленное по этой формуле уменьшение теплопроводности льда с увеличением солёности несколько меньше, чем получено в экспериментах Ю. Л. Назинцевым [167]. Результаты этих экспериментов представлены им в виде эмпирической формулы

$$\Lambda = \lambda_n(1 - 1,3b), \quad (12.4)$$

где  $b$  — относительный объём, занятый рассолом.

Б. А. Савельев [202] предполагает, что на величину коэффициента теплопроводности влияет не столько теплопроводность рассола, сколько изменение контактов между кристаллами при наличии жидкой фазы во льду.

Приведенной зависимостью теплопроводности льда от пористости и солёности, очевидно, и объясняется некоторое уменьшение  $\Lambda$  верхних и нижних слоев ледяного покрова. По данным измерений на дрейфующих станциях, обычно несколько повышенная пористость верхних слоев приводит к уменьшению  $\Lambda$  до  $4,5 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ . Такова же величина  $\Lambda$  и в нижних слоях из-за повышенной солёности. Наибольших значений ( $5 \cdot 10^{-3} - 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ ) теплопроводность достигает в средних слоях ледяного покрова [167]. Такие же числовые значения коэффициента теплопроводности и их зависимость от глубины получены Д. С. Ипатовым [92] для припайных льдов моря Лаптевых. По его вычислениям средняя величина  $\Lambda$  оказалась равной  $5,05 \cdot 10^{-3} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ .

Несколько меньшие величины теплопроводности слабо соленого льда ( $3,80 \cdot 10^{-3} - 4,83 \cdot 10^{-3} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$  для льда солёностью примерно 1‰) получены Б. А. Савельевым по измерениям в Карском море [201]. По другим его вычислениям, основанным на распространении температурных волн в ледяном покрове в районе о. Уединения,  $\Lambda = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ . Но в этом случае Б. А. Савельев принимал теплоемкость льда равной  $0,5 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$ . Если учесть, что для морского льда  $C$  будет несколько выше, то и вычисленная  $\Lambda$  должна быть несколько выше указанной величины.

Судя по приведенным величинам, хотя теплопроводность морского льда и изменяется в больших пределах, чем пресного, по данным большинства исследований для средних условий можно принять с погрешностью около 10%  $\Lambda = 5 \times 10^{-3}$  кал/см · сек · град.

## § 2. Методы расчета нарастания толщины льда

После того как на поверхности моря образуется ледяной покров, дальнейшее изменение его толщины определяется условиями теплового баланса на нижней поверхности льда. При этом поток тепла из воды ( $\Phi_B$ ) принимается обычно не зависящим от продвижения границы замерзания. Это допущение не является сколько-нибудь связывающим, поскольку в условиях турбулентного перемешивания в море продвижение границы замерзания со скоростью максимум несколько сантиметров в сутки не будет оказывать заметного влияния на величину градиента температуры в слое воды непосредственно подо льдом, так как этот слой непрерывно перемешивается с нижележащими. В таком случае, если поток тепла определен каким-либо известным способом, для расчета нарастания льда достаточно знать величину градиента температуры на нижней границе льда.

Это допущение является грубым для условий зимней подледной конвекции, когда осолонение воды при нарастании льда приводит к увеличению глубины распространения конвективного перемешивания и может существенно изменить величину  $\Phi_B$ . Учет такого явления может быть произведен совместным решением уравнений, описывающих развитие конвекции и изменения толщины льда (это будет проведено в главе VI).

При вычислении распределения температуры во льду, а следовательно, и градиентов температуры исходят из дифференциального уравнения теплопроводности для льда и уравнения баланса тепла в качестве граничного условия

$$c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

$$0 \leq z \leq H(t); \quad (13.4)$$

$$l_p \frac{dH}{dt} = \Lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=H} - \Phi_B \Big|_{z=H}. \quad (14.4)$$

Решение уравнения (13.4) сопряжено с большими трудностями в связи с тем, что толщина льда меняется во времени. Изменение толщины льда сопровождается выделением теплоты плавления, причем для морского льда источники тепла находятся

не только на поверхностях льда, но и во всей толще, поскольку, как отмечалось выше, превращение морской воды в лед происходит при широком спектре температур.

Уравнения типа (13.4) и (14.4) используются при многочисленных исследованиях по промерзанию грунта, нарастанию толщины льда, плавлению тел и решению других задач, связанных с изменением агрегатного состояния тела. Существование и единственность решения уравнения (13.4) как с постоянными, так и с переменными теплофизическими коэффициентами для среды с подвижной границей показаны в работах Л. И. Рубинштейна [194, 195], А. Фридмана [301], В. Кинера [305] и ряде других. Однако получаемые точные решения сложны и неудобны для практического использования. Это заставляет искать приближенные решения данной задачи. Обычно при этом теплофизические характеристики каждой среды принимаются постоянными. Кроме того, в некоторых работах задается еще и характер движения границы раздела фаз, например линейный во времени [40] или пропорциональный корню квадратному из времени [263].

Впервые решение системы уравнений (13.4) и (14.4) с известной температурой на поверхности было получено в 1831 г. членами Российской Академии наук Ляме и Клапейроном [149]. Позднее в 1899 г. Стефан дал решение этой задачи как без учета притока тепла из воды, т. е. задачи, решенной Ляме и Клапейроном, так и с учетом притока тепла из воды.

А. А. Шепелевский [259], исследуя решения, полученные Стефаном, показал, что достаточно точными окончательными формулами являются те, где Стефан не учитывает притока тепла из воды, например

$$H = \left[ H_0^2 - \frac{2\lambda}{lp} \left( \int_0^t \Theta_0(\xi) d\xi - \theta t \right) \right]^{1/2}, \quad (15.4)$$

где

$$H_0 = H|_{t=0};$$

$\Theta_0, \theta$  — температура верхней и нижней поверхности льда.

При определении нарастания толщины льда с учетом тепла  $\Phi_b$  Стефан, как показал А. А. Шепелевский, делает исходные предположки, весьма далекие от природных условий, поэтому полученные им окончательные формулы имеют лишь теоретический интерес.

Полагая поток тепла к нижней поверхности льда от воды постоянным и задаваясь известным ходом температуры на поверхности льда  $\Theta_0(t)$ , А. А. Шепелевский использовал для оп-

ределения толщины пресного льда дифференциальное уравнение, полученное Тамурой,

$$\Theta_0(t) = \frac{\Phi_B}{\lambda_{\Pi}} \left[ H + \frac{d}{dt} \left( \frac{H^3}{k \cdot 3!} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{H^5}{k^2 \cdot 5!} \right) + \dots \right] + \frac{l_{\Pi} p}{\lambda_{\Pi}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{H^2}{2!} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{H^4}{k \cdot 3!} \right) + \frac{d^3}{dt^3} \left( \frac{H^6}{k^2 \cdot 6!} \right) + \dots \right], \quad (16.4)$$

где  $k = \frac{\lambda_{\Pi}}{c_{\Pi} p}$ .

Ограничиваясь в рядах (16.4) первым членом и интегрируя полученное уравнение, А. А. Шепелевский нашел во втором приближении

$$H = \left\{ \frac{2\lambda_{\Pi}}{l_{\Pi} p} \int_0^t \left[ -\Theta_0(\xi) + \frac{\Phi_B}{\lambda_{\Pi}} \varepsilon \right] d\xi \right\}^{1/2}, \quad (17.4)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{-\frac{2\lambda_{\Pi}}{l_{\Pi} p} \int_0^t \Theta_0(\xi) d\xi}$ .

Выражение для определения  $H$  в виде формулы (17.4) можно получить, если считать вертикальный профиль температуры льда линейным, т. е. использовать уравнение баланса тепла (14.4), записанное в виде

$$l p \frac{dH}{dt} = -\Lambda \frac{\theta}{H} - \Phi_B. \quad (18.4)$$

Это уравнение из-за сравнительной простоты и удовлетворительности получаемых результатов очень часто используется для вычисления нарастания молодого льда [197, 288]. Таким образом, первый член рядов (16.4) характеризует стационарность процесса. Для учета нестационарности нужно брать следующие члены рядов. Но даже при использовании только двух первых членов этих рядов выражение для определения  $H$  становится громоздким и не очень удобным для практического использования.

При постоянных теплофизических параметрах и известной величине теплообмена между льдом и атмосферой  $\Phi_{\Pi}(t)$  решение уравнения (13.4) может быть получено в форме, предложенной в работе [67],

$$\Theta(t, z) = \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} P_n \exp \left( -k \int_0^t v_n^2 d\xi \right) \cos v_n z + \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \cos v_n z \int_0^t (B - k\Gamma_1) \exp \left( -k \int_{\xi}^t v_n^2 d\sigma \right) d\xi + \theta, \quad (19.4)$$

где

$$v_n = \frac{\pi(2n-1)}{2H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$B = \int_0^H (\Theta - \theta) \frac{\partial}{\partial t} (\cos v_n z) \cdot dz;$$

$$P_n = \int_0^H (\Theta - \theta) \cos v_n z \cdot dz |_{t=0};$$

$$\Gamma_1 = \frac{\Phi_{\lambda}}{\Lambda}.$$

Определив из формулы (19.4) градиент температуры при  $z=H$  и подставив его в уравнение баланса тепла (14.4), получим уравнение для определения скорости изменения толщины льда

$$\begin{aligned} \frac{dH^2}{dt} = & \frac{4\Lambda}{l_p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n P_n e^{-k \int_0^t v_n^2 d\xi} - \\ & - \frac{4\Lambda}{l_p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \int_0^t (B - k\Gamma_1) \exp\left(-k \int_{\xi}^t v_n^2 d\sigma\right) d\xi - \frac{2\Phi_{\lambda} H}{l_p}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Выражения (19.4) и (20.4) удобно использовать для анализа влияния некоторых гидрометеорологических условий на температуру льда и изменение его толщины. Но для непосредственных расчетов  $\Theta$  и  $H$  они не очень удобны, так как метод последовательных приближений, с помощью которого можно проводить вычисления по этим формулам, довольно трудоемок, несмотря на сравнительно быструю сходимость итерационного процесса.

В случаях, когда лед толстый, при определении градиента температуры на его нижней поверхности иногда не учитывают изменение толщины льда. При большой толщине льда, как можно видеть из выражения (19.4), некоторая неточность в определении  $H$  не приведет к существенной ошибке в рассчитанном градиенте температуры. Поэтому при вычислении величины нарастания льда за небольшие отрезки времени можно по начальной толщине льда определить градиент температуры и, подставив его в уравнение баланса тепла (14.4), получить прирост льда. Так, в частности, рассчитывалось изменение толщины льда в работах А. Г. Колесникова [112], Т. Фукутоми [302], Л. Р. Орленко и З. М. Утиной [177]. Вычисленные этим способом величины прироста  $H$  оказываются несколько завышенными, так как в данном случае не учитывается уменьшение градиента температуры за счет увеличения толщины льда в пределах выбранного интервала времени.

При определении профиля температуры и нарастания морских льдов следует иметь в виду внутренние источники тепла, т. е. тепло, выделяемое или поглощаемое в толще льда при фазовых переходах рассола. П. Швердтфегер [317] приблизительно учитывает его множителем к параметру теплоты плавления льда. А. Г. Колесников [113] предложил схему более точного учета тепла, выделяемого при фазовых переходах тепла в толще мерзлого грунта. В этом случае теплофизические характеристики (теплоемкость и теплопроводность) среды оказались зависимыми от количества воды, переходящей в лед при данной температуре. Основываясь на идеях этой работы и последующего исследования А. Г. Колесникова и Г. А. Мартынова [117], в работе [72] была сформулирована задача об изменении толщины морского льда под действием термических факторов. При этом имелось в виду, что при образовании морского льда часть воды замерзает сразу же при температуре  $\Theta = \theta$ , зависящей от солености воды, а оставшаяся — постепенно при понижении температуры. Таким образом, теплота кристаллизации выделяется как на границе лед — вода, так и в объеме. Количество выделяемого тепла зависит от солености и температуры льда. Ранее отмечалось, что теплопроводность льда не сильно меняется с изменением температуры и солености льда, поэтому она в данной задаче полагалась постоянной.

В результате учета внутренних источников тепла уравнение теплопроводности для льда приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (c' p \Theta - l \gamma_1) = \Lambda \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \quad (21.4)$$

$$0 \leq z \leq H(t),$$

где  $c' = \frac{1}{W} \sum_{(i)} c_i W_i$  — средневесовая теплоемкость морского льда;

$c_i$  и  $W_i$  — теплоемкость и объемы входящих в лед компонентов пресного льда, воды, солей и т. д.;

$\gamma_1$  — распределение источников тепла в морском льду, в данном случае — содержание в единичном объеме способной замерзнуть воды.

Из уравнения (21.4) может быть получено краевое условие на границе  $z = H$ , для чего нужно проинтегрировать его от  $H - \epsilon$  до  $H + \epsilon$ , где  $\epsilon$  не зависит от  $t$ . Левая часть уравнения представляется в виде

$$\int_{H-\epsilon}^{H+\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} (c' p \Theta - l \gamma_1) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H-\epsilon}^{H+\epsilon} (c' p \Theta - l \gamma_1) dz -$$

$$- (c' p \Theta - l \gamma_1) |_{H+\epsilon} \frac{d(H+\epsilon)}{dt} + (c' p \Theta - l \gamma_1) |_{H-\epsilon} \frac{d(H-\epsilon)}{dt}.$$

При переходе к  $\varepsilon=0$  интеграл становится равным нулю. В таком случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{H-\varepsilon}^{H+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (c' p \Theta - l \gamma_1) dz = [\theta (c' p - c \gamma) - l \gamma_1] \frac{dH}{dt},$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(H + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(H - \varepsilon) = \theta;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(H + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(H - \varepsilon) = l;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_1(H + \varepsilon) = 0;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_1(H - \varepsilon) = \gamma_1(\theta, H);$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (c' p \Theta - l \gamma_1)|_{H+\varepsilon} = c \gamma \theta;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (c' p \Theta - l \gamma_1)|_{H-\varepsilon} = (c' p \theta - l \gamma_1)|_H.$$

В окончательном виде краевое условие для границы лед — вода запишется следующим образом:

$$l' \frac{dH}{dt} = \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H} - \Phi_B, \quad (22.4)$$

где

$$l' = [l \gamma_1 + \theta (c \gamma - c' p)]_{z=H};$$

$\Phi_B$  — поток тепла из воды ко льду.

В выражении для  $l'$  второе слагаемое много меньше первого, поэтому обычно ограничиваются учетом только первого слагаемого. В этом выражении параметр  $\gamma_1$  на основании формулы (6.4) можно принять равным

$$\gamma_1 = p \left( 1 - \frac{S_n}{\delta \theta} \right). \quad (23.4)$$

Следовательно, для пресного льда краевое условие (22.4) переходит в условие Стефана.

Преобразуем левую часть уравнения (21.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} (c' p \Theta - l \gamma_1) = \frac{\partial}{\partial \theta} (c' p \Theta - l \gamma_1) \frac{\partial \theta}{\partial t} = f(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Здесь наиболее ощутимо зависит от температуры величина  $\gamma_1$ . Остальные параметры от  $\theta$  зависят слабо, и их можно принять постоянными. В таком случае

$$f(\theta) = c' p \left( 1 - \frac{l S_n}{c' \delta \theta^2} \right).$$



и уравнение теплопроводности (21.4) представляется в виде

$$\left(\frac{1}{k'} + \frac{S'}{\theta^2}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad 0 \leq z \leq H(t) \quad (24.4)$$

где  $k' = \frac{\Lambda}{c'p} \approx k$ ;

$S' = -\frac{lpS_{\pi}}{\delta\Lambda}$  — параметр, зависящий от солености льда.

В работе [63] дается приближенное решение этого уравнения при известных значениях температуры поверхности льда  $\Theta_0$  и температуры замерзания  $\theta$ . В некоторых исследованиях [7, 103] отмечается, что температура на границе раздела лед—вода (температура фронта кристаллизации) отлична от температуры стабильного равновесия между водой и льдом и зависит от скорости, с которой происходит изменение толщины льда. Но эти изменения  $\theta$  в природных условиях, согласно упомянутым работам, составляют сотые и тысячные доли градуса и не могут оказать заметного влияния на процесс изменения толщины льда.

Полагая процесс распространения температуры во льду квазистационарным, что обычно соответствует действительности для молодого льда, можно приводить решение уравнения (24.4) методом последовательных приближений, примененным М. Е. Швецом для определения нарастания пресного льда [255]. По этому методу сначала ищется решение уравнения (24.4) без левой части при известных температурах на поверхностях льда. Полученное значение температуры подставляется в левую часть уравнения (24.4), и снова проводится решение при тех же краевых условиях и т. д. Ограничившись вторым приближением, можно получить выражение для определения  $\Theta$  в виде

$$\begin{aligned} \Theta(t, z) = & \Theta_0 - \frac{z}{H} (\Theta_0 - \theta) + H \frac{d\Theta_0}{dt} \left\{ \frac{z}{6k} \left( 3 \frac{z}{H} - \frac{z^2}{H^2} - 2 \right) + \right. \\ & + \frac{S'H}{(\Theta_0 - \theta)^2} \left( \frac{\Theta_0 + \theta}{\Theta_0 - \theta} - \frac{z}{H} \right) \ln \left[ \frac{\Theta_0}{\theta} \left( 1 - \frac{z}{H} \right) + \frac{z}{H} \right] - \frac{S'H}{(\Theta_0 - \theta)^2} \times \\ & \times \frac{\Theta_0 + \theta}{\Theta_0 - \theta} \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \ln \frac{\Theta_0}{\theta} \left. \right\} + \frac{dH}{dt} \left\{ \frac{\Theta_0 - \theta}{6k} \left( \frac{z^2}{H^2} - 1 \right) z - \right. \\ & - \frac{S'H}{\Theta_0 - \theta} \left( \frac{2\Theta_0}{\Theta_0 - \theta} - \frac{z}{H} \right) \ln \left[ \frac{\Theta_0}{\theta} \left( 1 - \frac{z}{H} \right) + \frac{z}{H} \right] + \\ & \left. + \frac{2S'H\Theta_0}{(\Theta_0 - \theta)^2} \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \ln \frac{\Theta_0}{\theta} \right\}. \quad (25.4) \end{aligned}$$

Из формулы (25.4) легко получается выражение градиента температуры на нижней поверхности льда, подстановка которого в уравнение баланса тепла (22.4) приводит к дифференциальному уравнению для определения изменения толщины льда следующего вида:

$$\frac{dH^2}{dt} = \frac{2\Lambda}{l^*\gamma_1} \left[ \theta - \Theta_0 + H^2\psi \frac{d\theta_0}{dt} - \frac{\Phi_B H}{\Lambda} \right], \quad (26.4)$$

где

$$l^* = l \left\{ 1 - \frac{\Lambda(\Theta_0 - \theta)}{3kl\gamma_1} - \frac{S'\Lambda}{l\gamma_1} \left[ \frac{\Theta_0 + \theta}{\theta(\Theta_0 - \theta)} - \frac{2\Theta_0}{(\Theta_0 - \theta)^2} \ln \frac{\Theta_0}{\theta} \right] \right\};$$

$$\psi = \frac{1}{6k} + \frac{S'}{(\Theta_0 - \theta)^2} \left[ \frac{\Theta_0 + \theta}{\Theta_0 - \theta} \ln \frac{\Theta_0}{\theta} - 2 \right].$$

Здесь предполагалось, что  $l' = l\gamma_1$ . Если принять в этом уравнении  $S_{\pi} = 0$ , т. е.  $S' = 0$  и  $\gamma_1 = \rho$ , то оно превращается в уравнение для определения нарастания пресного льда, полученное М. Е. Швецом [255].

Можно показать, что в уравнении (26.4) член, содержащий  $\frac{d\theta_0}{dt}$ , при обычно встречающихся природных условиях и расчетах на сравнительно большой промежуток времени не является основным по величине, особенно для молодого льда. Поэтому часто применяемые на практике расчеты толщины льда, исходящие из условий установившегося потока тепла во льду, дают удовлетворительные результаты. Кстати, если в формуле (26.4) без учета нестационарного члена положить  $\Phi_B = 0$ , то из получающегося выражения легко найти формулу для определения  $H$ , аналогичную формуле Стефана (15.4).

Получить решение уравнения (26.4) в общем виде не удастся. Однако если промежуток времени ( $0 < t \leq t_1$ ), за который нужно определить изменение толщины льда, не слишком велик и в течение его можно считать скорость изменения толщины льда величиной постоянной

$$H(t) = H_0 + vt, \quad (27.4)$$

то уравнение (26.4) можно решить приближенно. Подставив в уравнение (26.4) вместо  $H$  его значение по формуле (27.4) и

проинтегрировав полученное выражение по  $t$  от 0 до  $t_1$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 v^2 t_1^2 + 2H_0 v t_1 \left[ 1 + \frac{1}{H_0 t_1} \int_0^{t_1} \frac{\Phi_B}{l^* \gamma_1} t dt \right] = \\
 = 2 \int_0^{t_1} \frac{\Delta}{l^* \gamma_1} \left[ \theta - \Theta_0 - \frac{\Phi_B H_0}{\Delta} \right] dt + \\
 + 2 \int_0^{t_1} \frac{\Delta}{l^* \gamma_1} (H_0 + vt)^2 \psi \cdot \frac{d\Theta_0}{dt} dt. \quad (28.4)
 \end{aligned}$$

Из этого квадратного уравнения находится выражение для определения  $v$ . Если заменить  $l^*(t)$  и  $\psi(t)$  их средними значениями для указанного промежутка времени, то интегралы вычисляются достаточно просто. Формула для определения  $v$  сильно упростится в тех случаях, когда в последнем члене можно пренебречь величиной  $vt$  по сравнению с  $H_0$ . С учетом отмеченных упрощений выражение для  $v$  принимает вид

$$\begin{aligned}
 v = -\frac{H_0}{t_1} - \frac{1}{l^* t_1^2 \gamma_1} \int_0^{t_1} \Phi_B t dt + \\
 + \frac{H_0}{t_1} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{l^* \gamma_1 H_0 t_1} \int_0^{t_1} \Phi_B t dt \right]^2 + \right. \\
 \left. + \frac{2\Delta}{l^* \gamma_1 H_0^2} \int_0^{t_1} \left( \theta - \Theta_0 - \frac{\Phi_B H_0}{\Delta} \right) dt + \frac{2\Delta \psi}{l^* \gamma_1} [\Theta_0(t_1) - \Theta_0(0)] \right\}^{1/2}. \quad (29.4)
 \end{aligned}$$

Последний член подкоренного выражения учитывает нестационарность процесса, и при расчетах  $v$  на промежутки времени около декады и более он становится много меньше второго, основного слагаемого. Действительно, в течение больших интервалов времени даже большие повышения и понижения температуры поверхности льда в некоторой степени компенсируют друг друга, и их суммарный эффект оказывается не таким уж заметным.

Поскольку  $l^* \gamma_1$  несколько меньше, чем  $lp$ , то, как следует из формулы, морской лед должен нарастать быстрее пресного при той же температуре его поверхности. Это можно объяснить тем, что при образовании единицы объема морского льда замерзает только часть воды, а не вся, как при образовании пресного

льда. Поэтому для компенсации оттока какого-то количества тепла в атмосферу должен образоваться больший объем морского льда, чем пресного. Но общее количество замерзшей воды, т. е. образовавшегося чистого льда, в обоих случаях должно быть примерно одинаковым. Здесь употреблен термин «примерно» из-за неучета разницы в теплопроводности пресного и морского льда и теплоты кристаллизации солей. Если учесть, что теплопроводность морского льда несколько меньше теплопроводности пресного, то увеличение скорости роста морского льда по сравнению с пресным должно быть небольшим. Анализ опытных данных, проведенный Б. А. Савельевым [202], подтверждает факт некоторого увеличения прироста льда с ростом его солёности. Противоположный вывод, сделанный в работе [63], объясняется неправильным учетом массы пресного льда, образующегося в единице объема морского льда у его нижней поверхности.

Исходя из величины двух последних членов подкоренного выражения формулы (29.4), можно определить влияние потока тепла из воды ко льду ( $\Phi_v$ ) на скорость роста толщины льда. Из формулы следует, что с увеличением толщины льда роль члена, в который входит  $\Phi_v$ , возрастает. Может наступить такое состояние, когда член, содержащий  $\Phi_v$ , станет равным сумме остальных слагаемых. В этом случае не будет происходить нарастания льда, несмотря на рост числа градусодней мороза. Приравняв сумму последних двух членов нулю, можно найти такую критическую толщину льда, при которой  $v=0$ . Если температура поверхности льда не меняется, то

$$H = \frac{\Lambda(\theta - \theta_0)}{\Phi_v}. \quad (30.4)$$

В природных условиях чаще бывает известна температура воздуха на некоторой высоте, чем температура поверхности льда. Поэтому целесообразно проанализировать, насколько существенно влияет замена температуры поверхности льда температурой воздуха на скорость нарастания льда. Такой анализ был проделан в работе [63]. Используя логарифмичность вертикального профиля метеорологических элементов вблизи ледяного покрова, были определены градиенты температуры и влажности через температуру и влажность на некоторой высоте и на поверхности льда. Эти выражения градиентов были подставлены в уравнение теплового баланса поверхности льда, в результате чего удалось выразить температуру поверхности льда через температуру и относительную влажность воздуха, радиационный баланс и некоторые другие характеристики. После замены температуры поверхности льда в уравнении (28.4) полученным выражением и некоторых упрощений была получена формула для определения

скорости нарастания льда, которая в обозначениях данной работы запишется в таком виде:

$$v = -\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 + \frac{2\Delta}{l^* \gamma_1 t_1^2} \left\{ \int_0^{t_1} \left[ \theta - MT - \frac{B}{m_1} - \left( \frac{1}{m_1} + \frac{H_0}{\Delta} \right) \Phi_B + \beta \right] dt + \int_0^{t_1} EH \frac{d\theta_0}{dt} dt \right\}}, \quad (31.4)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{H_0}{t_1} \left( 1 + \frac{\Delta}{m_1 H_0} + \frac{1}{l^* \gamma_1 H_0 t_1} \int_0^{t_1} \Phi_B t dt \right);$$

$$m = \frac{c_p \rho a'}{\ln \frac{a(z)}{x_0}}; \quad a(z) = x_0 + a'z;$$

$$m_1 = m \left( 1 + 0,622 \frac{LE_0 \alpha}{c_p P} \zeta \right);$$

$$M = \frac{c_p P + 0,622 LE_0 r \alpha \zeta}{c_p P + 0,622 LE_0 \alpha \zeta};$$

$$\beta = \frac{0,622 LE_0 (1-r) \xi}{c_p P + 0,622 LE_0 \alpha \zeta};$$

$$E = \frac{\Delta}{m_1} \left[ \frac{1}{k} + \frac{S'}{(\Theta_0 + \theta)^2} \left( \ln \frac{\Theta_0}{\theta} + \frac{\theta}{\Theta_0} - 1 \right) \right] + H\psi.$$

Параметры  $\alpha$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  получены от представления удельной влажности приближенной зависимостью, справедливой для некоторого диапазона температур

$$\tilde{q} \approx 0,622 \frac{rE_0}{P} (\xi + \alpha \zeta T).$$

В выражении (31.4) член, учитывающий нестационарность, обычно на один-два порядка меньше остальных. Поэтому без особого ущерба для точности в определении  $v$  в нем можно провести упрощения, аналогичные проведенным в формуле (29.4), а также заменить  $\Theta_0$  на  $T$ .

Если в формуле (31.4)  $z \rightarrow 0$ , то  $m_1 \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \Theta_0$  и она в пределе перейдет в формулу (29.4). Из формулы (31.4) можно легко определить роль радиационного баланса в образовании льда. Поскольку параметр  $m$  пропорционален скорости ветра, то

роль  $B$  с увеличением скорости ветра падает и возрастает с его ослаблением. Обычно же перемешивание воздуха вблизи ледяного покрова происходит интенсивно, поэтому  $\Theta_0$  близка к  $T$  на уровне метеорологической будки, и роль члена, содержащего  $B$ , мала. Учет этих обстоятельств и позволяет часто пользоваться вместо формулы (31.4) формулой (29.4) с заменой  $\Theta_0$  на  $T$ .

В последние годы широкое применение электронно-вычислительных машин для производства гидрометеорологических расчетов позволяет в гораздо меньшей степени опасаться трудностей решения данной проблемы. При этом оказывается возможным полнее производить учет взаимодействующих факторов и, используя численные методы, решать задачи без особых упрощений. Так, В. Г. Меламед [159] классическую задачу Стефана свел к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволило получить численное решение ее с любой степенью точности. Развитием данного исследования явилась работа И. В. Фрязинова [234], распространившего метод В. Г. Меламеда на случай термических параметров, меняющихся по толщине. Довольно простой метод решения задачи Стефана предложил Ф. П. Васильев [38], заменивший дифференциальные уравнения системой конечноразностных уравнений по неявной схеме. Метод конечных разностей использовал М. Лоткин [306] для решения задачи стаивания при меняющихся теплофизических параметрах таящего тела. Основываясь на некоторых идеях М. Лоткина, в работе [72] предложен метод численного расчета толщины морского льда при наличии на нем снежного покрова.

Естественно, что реализация численных схем решения задачи Стефана может быть осуществлена практически только на электронной вычислительной машине.

### § 3. Влияние снега на нарастание толщины льда

В природных условиях лед почти всегда покрыт слоем снега. Являясь плохим проводником тепла, снег сильно влияет на температуру льда и прирост его толщины. Поэтому учет снежного покрова на льду для правильной оценки величины его нарастания совершенно необходим.

Если считать в пределах интервала времени, для которого ищется изменение  $H$  льда, толщину слоя снега ( $h$ ) и его теплофизические характеристики постоянными, то температура снега ( $\Theta_c$ ) может быть легко определена из уравнения теплопроводности. При линейном вертикальном профиле температуры снега в начальный момент и произвольной зависимости от времени температуры поверхности снега и градиента температуры на гра-

нице снег—лед решение уравнения теплопроводности было получено в работе [65] в виде:

$$\Theta_c(t, z) = \int_0^t \varphi(t - \xi) dG_1(\xi) + \int_0^t T_0(t - \xi) dG_2(\xi) + T_0(0) [1 - G_2(t, z)] + \varphi_0 [z - G_1(t, z)] \quad 0 \leq z \leq h, \quad (32.4)$$

где 
$$\varphi(t) = \left. \frac{\partial \Theta_c}{\partial z} \right|_{z=h};$$

$$T_0(t) = \Theta_c(t, 0);$$

$$G_1(t, z) = z - \frac{2}{h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{\mu_j^2} e^{-k_c \mu_j^2 t} \sin \mu_j z;$$

$$G_2(t, z) = 1 - \frac{2}{h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} e^{-k_c \mu_j^2 t} \sin \mu_j z;$$

$$\mu_j = \frac{\pi(2j-1)}{2h} \quad j = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\varphi_0 = \varphi(0);$$

$k_c$  — коэффициент теплопроводности снега.

Вертикальный профиль температуры не очень толстого льда под снегом сравнительно близок к линейному [62, 304], поэтому для определения выражения неизвестной пока функции  $\varphi(t)$  может быть использовано полученное выше квазистационарное решение.

Из формулы (25.4) определяется градиент температуры льда на границе раздела снег—лед через градиент температуры на нижней поверхности льда и нестационарные члены, зависящие от скорости изменения толщины и температуры льда

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=H} - \delta(t) - \frac{dH}{dt} \left[ \frac{\theta_0 - \theta}{2k} - \frac{S'}{\theta_0 - \theta} \ln \frac{\theta_0}{\theta} + \frac{S'}{\theta} \right],$$

где 
$$\delta(t) = H \frac{d\theta_0}{dt} \left[ \frac{1}{2k} + \frac{S'}{(\theta_0 - \theta)^2} \ln \frac{\theta_0}{\theta} - \frac{S'}{\theta_0(\theta_0 - \theta)} \right].$$

Если заменить  $\frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=h}$  его выражением из уравнения баланса тепла (22.4), в котором полагается  $l' = l\gamma_1$ , и учесть условие непрерывности потока тепла на границе снег—лед

$$\lambda_c \varphi = \Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

то  $\varphi$  будет определено зависимостью

$$\varphi = \frac{1}{\lambda_c} \left[ l_1 \gamma_1 \frac{dH}{dt} - \Lambda \delta(t) + \Phi_B \right], \quad (33.4)$$

где  $l_1 = l \left[ 1 - \frac{\Lambda}{l\gamma_1} \left( \frac{\Theta_0 - \theta}{2k} - \frac{S'}{\Theta_0 - \theta} \ln \frac{\Theta_0}{\theta} + \frac{S'}{\theta} \right) \right]$ ;

$\lambda_c$  — теплопроводность снега.

После постановки значения  $\varphi$  в формулу (32.4) при  $z=h$  будет получено выражение температуры поверхности льда под снегом через температуру поверхности снега, его толщину, скорость изменения толщины льда и ряд других параметров

$$\begin{aligned} \Theta_0(t) = & \int_0^t \frac{l_1 \gamma_1}{\lambda_c} \frac{dH(t-\xi)}{d\xi} dG'_1(\xi) + \\ & + \frac{\Lambda}{\lambda_c} \int_0^t \left[ \frac{\Phi_B(t-\xi)}{\Lambda} - \delta(t-\xi) \right] dG'_1(\xi) + \\ & + \int_0^t T_0(t-\xi) dG'_2(\xi) + T_0(0) [1 - G'_2(t)] + \varphi_0 [h - G'_1(t)], \quad (34.4) \end{aligned}$$

где  $G'_1(t) = G_1(t, h)$ ,  $G'_2(t) = G_2(t, h)$ .

Если в приведенных ранее формулах, определяющих величину нарастания льда, заменить  $\Theta_0(t)$  выражением (33.4), то изменение толщины льда будет зависеть от температуры поверхности снега, его толщины и теплофизических свойств. Однако эти формулы имеют сложный вид, поэтому для получения выражений, удобных при оперативном использовании, обычно приходится проводить некоторые упрощения.

Поскольку температура поверхности льда под слоем снега изменяется медленно, то функцией  $\delta(t)$  в формуле (33.4) в первом приближении обычно пренебрегается. Если потребуется уточнение, что  $\delta(t)$  можно определить по первому приближению и проводить второе. Будем считать, что в течение периода времени  $0 < t \leq t_1$  изменение толщины льда можно полагать, как и ранее, линейной функцией времени по формуле (27.4). Если еще заменить для указанного интервала времени функцию  $l_1$  ее



средним значением, то с учетом перечисленных упрощений выражение (34.4) приводится к виду

$$\Theta_0(t) = \frac{l_1 \gamma_1}{\lambda_c} G_1'(t) v + F(t), \quad (35.4)$$

где

$$F(t) = \frac{1}{\lambda_c} \int_0^t \Phi_B(t - \xi) dG_1'(\xi) + \int_0^t T_0(t - \xi) dG_2'(\xi) + T_0(0) [1 - G_2'(t)] + \varphi_0 [h - G_1'(t)].$$

Подставив значение  $\Theta_0$  из формулы (35.4) в уравнение (28.4) и решив затем его относительно  $v$ , учитывая при этом перечисленные упрощения, будем иметь

$$v = -\Delta_2 + \sqrt{\Delta_2^2 + \frac{2\Delta}{l^* \gamma_1 t_1^2} \left\{ \int_0^{t_1} \left[ \theta - F(t) - \frac{\Phi_B H_0}{\Lambda} \right] dt + \phi H_0^2 [F(t_1) - \Theta_0(0)] \right\}}, \quad (36.4)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{H_0}{t_1} \left\{ 1 + \frac{1}{l^* \gamma_1 H_0 t_1} \int_0^{t_1} \Phi_B t dt + \frac{l_1 \Lambda}{l^* \lambda_c t_1} \left[ \frac{1}{H_0} \int_0^{t_1} G_1'(t) dt - H_0 G_1'(t_1) \psi \right] \right\}.$$

На рис. 10 приведены в качестве примера результаты расчета по формулам (36.4) и (27.4) нарастания толщины льда. При расчете вместо  $T_0$  бралась температура воздуха на высоте метеорологической будки и интегралы заменялись конечной суммой.

Если производить учет основных членов, а малые отбросить, то при  $t = t_1$  из формул (36.4) и (27.4) можно получить выражение для определения толщины льда, близкое по форме к эмпирической формуле Н. Н. Зубова

$$H = - \left( \frac{\int_0^{t_1} \Phi_B t dt}{l^* \gamma_1 t_1} + \frac{\Lambda h}{\lambda_c} \right) + \left\{ \left( \frac{\int_0^{t_1} \Phi_B t dt}{l^* \gamma_1 t_1} + \frac{\Lambda h}{\lambda_c} + H_0 \right)^2 + \frac{2\Delta}{l^* \gamma_1} \int_0^{t_1} \left[ \theta - T_0 - \frac{\Phi_B}{\Lambda} \left( H_0 + \frac{\Lambda h}{\lambda_c} \right) \right] dt \right\}^{1/2}. \quad (37.4)$$

Эмпирическая формула Н. Н. Зубова [87] имеет вид

$$H = -25 + \sqrt{(25 + H_0)^2 + 8 \sum T}$$

Из сравнения этих двух формул можно получить представление о физическом смысле эмпирических коэффициентов.

Такой же вид и многих других известных эмпирических связей между толщиной льда и температурой воздуха [4, 85, 143, 245]. В. Л. Цуриков [245], проводивший сравнение расчетных ве-

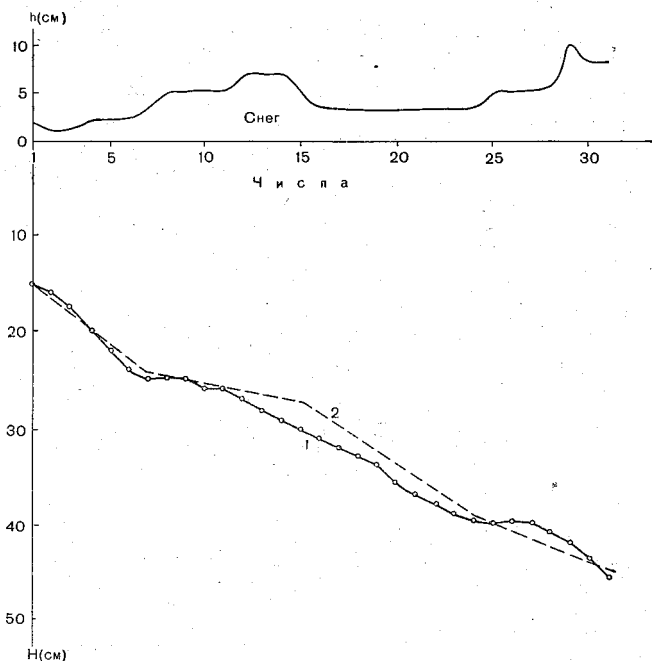


Рис. 10. Нарастание толщины льда  $H$  под слоем снега за октябрь.

1 — измеренная; 2 — расчетная.

личин толщины льда по теоретическим и эмпирическим формулам с фактическими отмечает, что эмпирические формулы дают лучшие результаты, чем теоретические. Очевидно, это может быть связано с неполным учетом теорией ряда факторов, которые учитываются эмпирическими коэффициентами.

Ранее отмечалось, что при некотором сочетании метеорологических условий и потока тепла  $\Phi_B$  лед достигает предельной толщины и больше не нарастает. Аналогично для определения предельной толщины покрытого снегом льда достаточно в формуле (36.4) приравнять нулю выражение в фигурных скобках под

корнем и решить его относительно  $H_0$ . В частности, при постоянных  $\Phi_B$ ,  $T_0$  и  $h$  величину  $H_0$  легко получить из формулы (37.4) в виде

$$H_0 = \frac{\Delta}{\Phi_B} (\theta - T_0) - \frac{h\Delta}{\lambda_c}.$$

Сравнение полученного выражения с (30.4) показывает, что под слоем снега лед быстрее достигает предельной толщины. На основании фактических данных В. С. Антонов [4] нашел, что нарастание льда в прибрежной зоне арктических морей зимой прекращается при  $h \approx 50$  см.

Для облегчения расчетов нарастания толщины льда по формуле (37.4) она при  $\Phi_B = 0$  представлена в виде номограммы (рис. 11). На горизонтальной оси этой номограммы отложены значения сумм градусодней мороза, уменьшенных на величину  $\theta t_1$ , и толщина льда.

Вычисления производятся следующим образом. От значения  $\sum(\theta - T_0)$  нужно двигаться вертикально вверх до линии  $f$  и на оси ординат прочесть соответствующий отсчет  $\alpha_1$ . Затем от начальной толщины льда нужно двигаться вверх до линии, указывающей толщину снега на льду на расчетный промежуток времени, и на оси ординат прочесть отсчет  $\alpha_2$ . От точки  $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$  вертикальной оси нужно по горизонтали двигаться до отмеченной кривой, указывающей толщину снега, и на оси абсцисс прочесть соответствующий отсчет новой толщины льда. При составлении этой номограммы принималось, что соленость льда равна 5‰, теплопроводность снега толщиной до 10 см составляет  $6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$ , от 10 до 25 см —  $7 \cdot 10^{-4}$  для большей толщины снега —  $7,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$ .

Как уже отмечалось, на практике обычно чаще бывает известна температура воздуха, чем температура подстилающей поверхности. В предыдущем параграфе было показано, что отождествление этих температур в расчетных формулах часто не вносит существенных ошибок в результат. В еще большей степени это справедливо при наличии на льду слоя снега. Грубую оценку соотношения между температурами воздуха и поверхности снега можно получить, исходя из следующих соображений. В осенне-зимний период в среднем вертикальный профиль температуры снега и льда близок к линейному. Следовательно, температура поверхности льда может быть приближенно определена формулой

$$\theta_0 = \frac{T_0 + \frac{\Delta h}{\lambda_c H} \theta}{1 + \frac{\Delta h}{\lambda_c H}}. \quad (38.4)$$

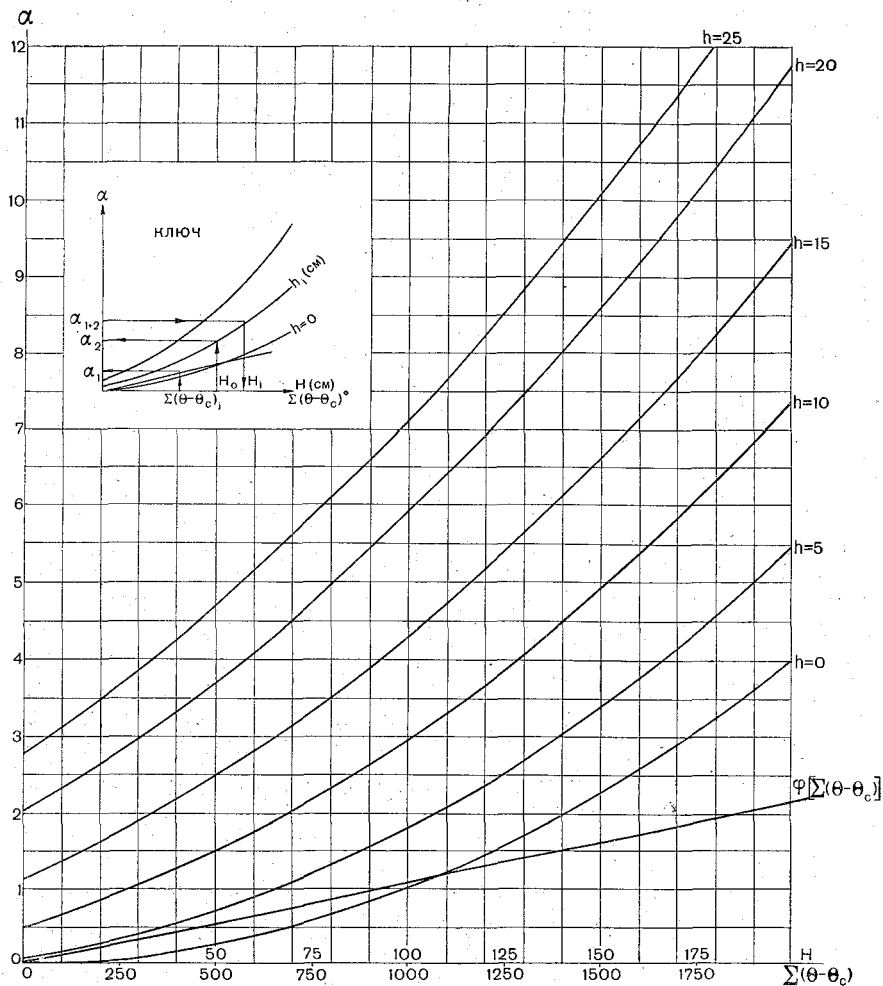


Рис. 11. Номограмма для расчета нарастания толщины льда.

При этом поток тепла к поверхности снега будет выражен

$$\Phi_c = \lambda_c \frac{\theta_0 - T_0}{h} = \frac{\theta - T_0}{H'}$$

где

$$H' = \frac{H}{\Lambda} + \frac{h}{\lambda_c}$$

Градиенты температуры и влажности воздуха на уровне поверхности снега легко определяются через температуру и влаж-

ность воздуха на некоторой высоте и уровне подстилающей поверхности. Определив их, исходя из условия логарифмичности профилей метеорологических элементов в пограничном подслое атмосферы, и подставив найденные выражения в уравнение баланса тепла на поверхности снега, получаем формулу, из которой находится температура поверхности снега, в виде

$$T_0 = \frac{mH'}{1 + NH'} \cdot \left\{ \frac{\theta}{mH'} + \frac{B}{m} + \left[ \frac{N}{m} T + 0,622 \frac{LE_0}{c_p P} (r - 1) e^{\alpha T} \right] \right\}, \quad (39.4)$$

где

$$N = m \left( 1 + 0,622 \frac{LE_0 \alpha}{c_p P} e^{\alpha T} \right).$$

При получении этой формулы удельная влажность представлялась зависимостью

$$\begin{aligned} q(t, z) - q(t, 0) &= 0,622 \frac{E_0}{P} e^{\alpha T} [r - e^{\alpha(T_0 - T)}] \approx \\ &\approx 0,622 \frac{E_0}{P} e^{\alpha T} [r - 1 - \alpha(T_0 - T)]. \end{aligned}$$

Принималось также  $r|_{z=0} = 1$ .

На рис. 12 приведены результаты расчета температуры поверхности снега при  $B = -2 \frac{\text{ккал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мес}}$ ,  $\theta = -1,5^\circ$  и  $a' = 10 \text{ см/сек}$  в зависимости от температуры воздуха на высоте 2 м и для различных толщин снега и льда. При расчете принималось, что на льду толщиной до 5 см снег отсутствует, толщиной до 20 см полагалось, что  $h/H = 0,05$  м, а для более толстого льда  $-h/H = 0,1$  при  $\lambda_c/\Lambda = 0,1$ . Из рисунка видно, что температура поверхности снега в общем близка к температуре воздуха на уровне метеорологической будки в том случае, если малым абсолютным значениям температуры воздуха соответствуют сравнительно малые величины толщины льда и низким температурам воздуха — большие толщины льда.

Аналогичное соотношение между  $T_0$  и  $T$  получено для Антарктики [262]. Практика использования формулы (37.4) для расчетов нарастания льда в осенне-зимний период в Арктике с заменой в ней  $T_0$  на  $T_{2 \text{ м}}$  показала, что в общем результаты вычислений оказываются удовлетворительными.

Естественно, что в тех случаях, когда требуется более точное определение изменения толщины льда под влиянием термических факторов, то возможен лишь путь численного решения задачи с использованием ЭЦВМ. Один из методов численного расчета толщины и температуры морского льда при самых общих граничных условиях излагается далее, согласно работе [72].

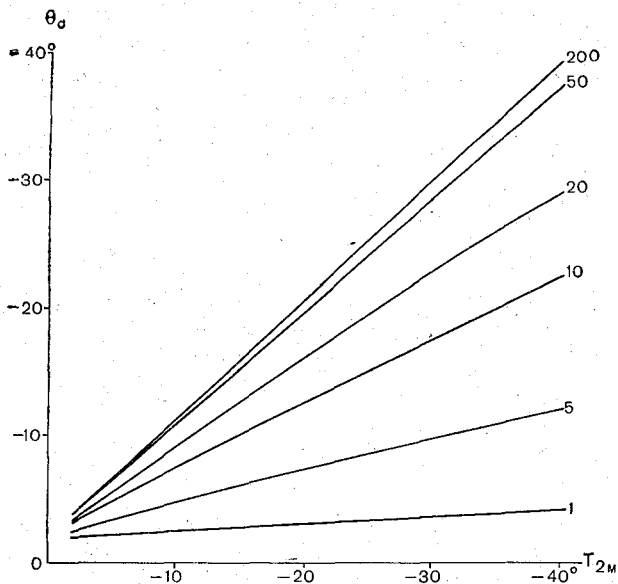


Рис. 12. Температура снежно-ледяной поверхности в зависимости от толщины льда  $H$  (в сантиметрах).

Дифференциальное уравнение теплопроводности для морского льда (24.4) перепишем в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad 0 \leq z \leq H(t),$$

где

$$K = \frac{\Lambda}{c' p \left( 1 + \frac{l \theta_{1l} S_l}{c' \theta^2} \right)}.$$

На границе лед—вода выполняется условие Стефана (22.4) и

$$\Theta(t, H) = \theta.$$

На поверхности льда зададим условия баланса тепла

$$\Pi(t) = N(t) \Theta_0 - \Lambda \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + l \frac{dM}{dt},$$

где  $M$  — масса стаявшего льда;

$\Theta_0$  — температура поверхности льда.

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

$\Pi(t)$  можно выразить через радиационный баланс, температуру и влажность воздуха, скорость ветра так же, как сделано, например, в работе [66].

Если на льду находится слой снега толщиной  $h$ , то уравнение баланса тепла сохраняет свою форму, но  $M$  обозначает уже массу стаявшего снега; теплопроводность и температура льда заменяется теплопроводностью  $\lambda_c$  и температурой  $\Theta_c$  снега. На границе раздела снег—лед задаются условия склейки.

Итак, при наличии снега на льду задача формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta_c}{\partial t} &= a_c \frac{\partial^2 \Theta_c}{\partial z_1^2} & 0 \leq z_1 \leq h(t), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} & 0 \leq z \leq H(t); \end{aligned} \right\} \quad (40.4)$$

$$z_1 = 0 \quad \Pi(t) - N\Theta_{c0} + \lambda_c \frac{\partial \Theta_{c0}}{\partial z_1} = -l\rho_c \dot{h}; \quad (41.4)$$

$$z = 0 \quad \Theta_c(t, h) = \Theta(t, 0) = \Theta_0; \quad (42.4)$$

$$z = 0 \quad \lambda_c \frac{\partial \Theta_{c1}}{\partial z_1} = \Lambda \frac{\partial \Theta_0}{\partial z}; \quad (43.4)$$

$$z = H \quad l\dot{H} = \Lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} - \Phi_B, \quad (44.4)$$

$$z = H \quad \Theta(t, H) = \theta; \quad (45.4)$$

$$\begin{aligned} t = 0 \quad \Theta_c(0, z_1) &= \varphi_c(z_1), \\ \Theta(0, z) &= \varphi(z), \end{aligned} \quad (46.4)$$

где  $a_c$  — температуропроводность снега;

$\dot{H}$  и  $\dot{h}$  — производные по времени этих величин;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_{c1}}{\partial z_1} &= \frac{\partial \Theta_c}{\partial z_1} \Big|_{z=h}; \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} &= \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=H}. \end{aligned}$$

До начала таяния ( $\Theta_{c0} < 0$ ) в уравнении баланса тепла (41.4)

должен отсутствовать член, содержащий  $\dot{h}$ , так как изменения  $h$  в это время происходят за счет снегопадов, переносов и прочих явлений, а не за счет термических факторов.

Уравнения (40.4) относятся к средам с подвижными границами. Преобразованиями  $\xi = \frac{z_1}{h}$  и  $x = \frac{z}{H}$  избавимся

от подвижных границ, и до начала таяния система (40.4)—(46.4) принимает вид:

$$\Theta_c(t, z_1) = \Theta'(t, \xi); \quad \Theta(t, z) = \Theta^*(t, x);$$

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} = \frac{a_c}{h^2} \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{h} \dot{h} \frac{\partial \Theta'}{\partial \xi} \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad (40.4a)$$

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{K}{H^2} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} + \frac{x}{H} \dot{H} \frac{\partial \Theta^*}{\partial x} \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (40.4b)$$

$$\xi = 0 \quad \Pi(t) = N(t) \Theta'_0 - \frac{\lambda_c}{h} \frac{\partial \Theta'_0}{\partial \xi}; \quad (41.4a)$$

$$\xi = 1 \quad \Theta'(t, 1) = \Theta^*(t, 0) = \Theta^*_0; \quad (42.4a)$$

$$\frac{\lambda_c}{h} \frac{\partial \Theta'_1}{\partial \xi} = \frac{\Lambda}{H} \frac{\partial \Theta^*_0}{\partial x}; \quad (43.4a)$$

$$x = 1 \quad l' \dot{H} = \frac{\Lambda}{H} \frac{\partial \Theta^*_1}{\partial x} - \Phi_B; \quad (44.4a)$$

$$\Theta^*(t, 1) = \theta; \quad (45.4a)$$

$$t = 0 \quad \Theta'(0, \xi) = \varphi', \quad \Theta^*(0, x) = \varphi^*. \quad (46.4a)$$

После начала таяния снега ( $t=t_c$ ,  $\Theta'_0=0$ ) уравнение теплового баланса (41.4 а) имеет форму

$$\xi = 0 \quad l_c \rho_c \dot{h} = -\Pi(t) - \frac{\lambda_c}{h} \frac{\partial \Theta'_0}{\partial \xi}; \quad (41.4b)$$

$$h(t_c) = h_0 \quad (47.4)$$

С началом таяния льда ( $t=t_n$ ,  $h=0$ ,  $\Theta^*_0=0$ ) уравнение (40.4 а) не имеет места и изменение толщины льда определяется формулой

$$\dot{H} = \frac{\Lambda}{l'H} \left( \frac{\partial \Theta^*_1}{\partial x} - \frac{l'}{l_p} \frac{\partial \Theta^*_0}{\partial x} \right) - \frac{\Phi_B}{l'} - \frac{\Pi}{l_p} \quad (48.4)$$

(в дальнейшем звездочки при обозначении  $\Theta^*$  ради сокращения записи ставиться не будут).

Разобьем  $\xi$  на  $n+1$  частей ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ) и  $x$  на  $N+1$  частей ( $j=0, 1, 2, \dots, N$ ), т. е.  $\xi_0=0$ ,  $\xi_k$ ,  $\xi_n=1$ ;  $x_0=0$ ,  $x_j$ ,  $x_N=1$ . Положим  $\tau=t_i-t_{i-1}$  для  $i=1, 2, \dots$ ;  $t_0=0$ :

$$y = \xi_k - \xi_{k-1}; \quad \zeta = x_j - x_{j-1}.$$



Соответствующие разностные уравнения будем искать через соотношения:

$$\left(\frac{\partial\theta'}{\partial t}\right)_{ik} = \frac{\theta'_{ik} - \theta'_{i-1,k}}{\tau} + \tau C_1; \quad (49.4)$$

$$\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\xi}\right)_{ik} = \frac{\theta'_{ik+1} - \theta'_{ik}}{y} - \frac{y}{2} \left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial\xi^2}\right)_{ik} - y^2 C_2; \quad (50.4)$$

$$\left(\frac{\partial\theta'}{\partial\xi}\right)_{ik} = \frac{\theta'_{ik} - \theta'_{ik-1}}{y} + \frac{y}{2} \left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial\xi^2}\right)_{ik} - y^2 C_3; \quad (51.4)$$

$$\left(\frac{\partial^2\theta'}{\partial\xi^2}\right)_{ik} = \frac{\theta'_{ik+1} - 2\theta'_{ik} + \theta'_{ik-1}}{y^2} + y^2 C_4. \quad (52.4)$$

Аналогичными будут соотношения, заменяющие дифференциальное уравнение для льда.

Итак, уравнение (40.4 а) заменим разностным уравнением

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{y^2 h_i^2}{a_i \tau}\right) \theta'_{ik} - \left(1 + \frac{\xi_k y h_i h_i}{2a_i}\right) \theta'_{ik+1} - \left(1 - \frac{\xi_k y h_i h_i}{2a_i}\right) \theta'_{ik-1} = \\ = \frac{y^2 h_i^2}{a_i \tau} \theta'_{i-1,k} + y^4 R_1, \end{aligned} \quad (53.4)$$

где  $a_i = a_c |_{t=t_i}$ ;

$$R_1 = C_4 + \frac{\xi_k h_i h_i}{a_i} C_5 - \frac{\tau h_i^2}{a_i y} C_1.$$

При получении уравнения (53.4) из (40.4 а)  $\frac{\partial\theta'}{\partial\xi}$  заменялась центральной разностной аппроксимацией — средней из формул (50.4) и (51.4) и  $C_5 = 0,5(C_2 + C_3)$ .

Из уравнений (40.4 а) и (41.4 а) при помощи соотношений (49.4) и (50.4) получим для  $\xi=0$  выражение

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{y^2 h_i^2}{2a_i \tau} + \frac{h_i y N_i}{\lambda_i}\right) \theta'_{i0} - \theta'_{i1} = \\ = \frac{h_i^2 y^2}{2a_i \tau} \theta'_{i-1,0} + \frac{y h_i}{\lambda_i} \Pi_i - y^2 R_2, \end{aligned} \quad (54.4)$$

где  $\lambda_i = \lambda_c |_{t=t_i}$ ;

$$R_2 = y C_2 + \frac{\tau h_i^2}{2a_i} C_1.$$

Для  $\xi=1$  из уравнения (40.4 а) при помощи соотношений (49.4) и (51.4) находим

$$\left(1 + \frac{\dot{h}_i h_i y}{2a_i}\right) \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \xi}\right)_{in} = \left(\frac{h_i^2 y}{2a_i \tau} + \frac{1}{y}\right) \Theta'_{in} - \frac{\Theta'_{i, n-1}}{y} - \frac{h_i^2 y}{2a_i \tau} \Theta'_{i-1, n} + \frac{h_i^2 \tau y}{2a_i} C_1 - y^2 C_3.$$

Аналогично из уравнения (40.4 б) получаем для  $x=0$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{i0} = \frac{\Theta_{i1}}{\zeta} - \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta H_i^2}{2K_{i0} \tau}\right) \Theta_{i0} + \frac{\zeta H_i^2}{2K_{i0} \tau} \Theta_{i-1, 0} - \zeta^2 C'_2.$$

(здесь и далее штрихи над остаточными членами рядов Тейлора  $C'$  и их комбинациями  $R'$  будут обозначать, что  $C$  и  $R$  содержат параметры льда).

Используя разностные выражения градиентов температуры на границе лед—снег, получаем условие склейки (43.4 а) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta'_{i, n-1}}{y \left(1 + \frac{h_i y \dot{h}_i}{2a_i}\right)} - \left[ \frac{h_i^2 y^2 + 2a_i \tau}{(2a_i + h_i \dot{h}_i y) y \tau} + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta h_i}{\lambda_i H_i} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta H_i^2}{2K_{i0} \tau}\right) \right] \Theta'_{in} + \frac{\Delta h_i}{\lambda_i H_i \zeta} \Theta_{i1} = \\ & = - \left[ \frac{h_i^2 y}{2a_i \tau \left(1 + \frac{h_i \dot{h}_i y}{2a_i}\right)} + \frac{\Delta h_i H_i \zeta}{2\lambda_i K_{i0} \tau} \right] \Theta'_{i-1, n} + R_3, \end{aligned} \quad (55.4)$$

где 
$$R_3 = \frac{\Delta h_i \zeta^2}{\lambda_i H_i} C'_2 + \frac{h_i^2 y \tau C_1 - 2a_i y^2 C_3}{2a_i + h_i y \dot{h}_i}.$$

Для  $x=1$  находим

$$\Theta_{iN} = 0, \quad (56.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_i &= \frac{\Lambda}{\nu \zeta H_i} \cdot \frac{\theta - \Theta_{iN-1}}{\left(1 + \frac{\zeta H_i \dot{H}_i}{2K_{iN}}\right)} - \frac{\Phi_{Bi}}{\nu} - \\ & - \frac{\Lambda}{\nu H_i} \cdot \frac{\zeta^2 C'_3}{\left(1 + \frac{\zeta \dot{H}_i H_i}{2K_{iN}}\right)}. \end{aligned} \quad (57.4)$$

Разностное уравнение для определения  $\Theta_{ij}$  будет аналогично уравнению (53.4) при соответствующих параметрах.

После начала таяния снега ( $\Theta'_{i0} = 0$ ) изменение толщины снега определяется разностным уравнением, полученным из уравнений (40.4 а) и (41.4 б),

$$\dot{h}_i = - \frac{1}{l c \rho c_i} \left[ \Pi_i + \frac{\lambda_i}{h_i y} \Theta'_{i1} + \frac{h_i \lambda_i y}{2 a_i \tau} \Theta'_{i-1,0} - \frac{y \lambda_i}{h_i} R_2 \right]. \quad (58.4)$$

Уравнение для определения скорости стаивания льда при условии, что температура его поверхности при этом нулевая  $\Theta_{i0} = 0$ , будет аналогичным уравнению (58.4). В таком случае общее изменение толщины льда выразится уравнением

$$\dot{H}_i = \frac{\Lambda}{l' \zeta H_i} \left[ \frac{\theta - \Theta_{iN-1}}{1 + \frac{\zeta H_i H_i}{2 K_{iN}}} - \frac{l' \left( \Theta_{i1} + \frac{\zeta^2 H_i^2}{2 K_{i0} \tau} \Theta_{i-1,0} + \frac{H_i \Pi_i \zeta}{\Lambda} \right) - \frac{\Phi_{vi} H_i \zeta}{\Lambda}}{\Lambda} \right] + R_4, \quad (59.4)$$

где

$$R_4 = \frac{\zeta \Lambda R'_2}{l' p H_i} - \frac{2 \Lambda \zeta^2 K_{iN} C'_3}{l' H_i (2 K_{iN} + \zeta H_i \dot{H}_i)}.$$

При использовании уравнений (57.4) — (59.4) будем также иметь в виду соотношения

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{h_i - h_{i-1}}{\tau} + 0(\tau); \\ \dot{H}_i &= \frac{H_i - H_{i-1}}{\tau} + 0(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (60.4)$$

Итак, с погрешностью аппроксимации 0 ( $\tau + y^2 + \zeta^2$ ) система дифференциальных уравнений заменяется системой разностных уравнений, имеющих вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_i &= \frac{\Lambda}{l' \zeta H_i} \cdot \frac{\theta - \Theta_{iN-1}}{\left( 1 + \frac{\zeta H_i \dot{H}_i}{2 K_{iN}} \right)} - \frac{\Phi_{vi}}{l'}; \\ H_i &= H_{i-1} + \dot{H}_i \tau, \end{aligned} \right\} \quad (61.4)$$

$$K_{ij} = \frac{\Lambda}{c' p \left( 1 + \frac{l \delta_1 S_{\Pi}}{c' \Theta_{ij}^2} \right)}, \quad (62.4)$$

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + \frac{h_i^2 y^2}{2a_i \tau} + \frac{h_i y N_i}{\lambda_i} \right) \Theta'_{i0} - \Theta'_{i1} = \\
& \quad = \frac{h_i^2 y^2}{2a_i \tau} \Theta'_{i-1,0} + \frac{h_i y}{\lambda_i} \Pi_i; \\
& \left( \frac{\xi_k h_i \dot{h}_i y}{2a_i} - 1 \right) \Theta'_{ik-1} + \left( 2 + \frac{h_i^2 y^2}{a_i \tau} \right) \Theta'_{ik} - \\
& \quad - \left( \frac{\xi_k h_i \dot{h}_i y}{2a_i} + 1 \right) \Theta'_{ik+1} = \frac{h_i^2 y^2}{a_i \tau} \Theta'_{i-1,k}; \\
& \frac{\Theta'_{in-1}}{y \left( 1 + \frac{h_i \dot{h}_i y}{2a_i} \right)} - \left[ \frac{h_i^2 y^2 + 2a_i \tau}{(2a_i + h_i \dot{h}_i y) y \tau} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Delta h_i}{\lambda_i H_i} \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta H_i^2}{2K_{i0} \tau} \right) \right] \Theta'_{in} + \frac{\Delta h_i}{\lambda_i \zeta H_i} \Theta_{i1} = \\
& = - \left[ \frac{h_i^2 y}{(2a_i + h_i \dot{h}_i y) \tau} + \frac{\Delta h_i \zeta H_i}{2K_{i0} \lambda_i \tau} \right] \Theta'_{i-1,n}; \\
& \left( \frac{x_j \zeta H_i \dot{H}_i}{2K_{ij}} - 1 \right) \Theta'_{ij-1} + \left( 2 + \frac{\zeta^2 H_i^2}{K_{ij} \tau} \right) \Theta'_{ij} - \\
& \quad - \left( \frac{x_j \zeta H_i \dot{H}_i}{2K_{ij}} + 1 \right) \Theta'_{ij+1} = \frac{\zeta^2 H_i^2}{K_{ij} \tau} \Theta_{i-1,j} \\
& \Theta_{iN} = 0, \\
& \quad i=0 \quad \Theta'_{0k} = \varphi'_k; \quad \Theta_{0j} = \varphi_j^*.
\end{aligned} \tag{63.4}$$

Значения величин  $h_i$  и  $\dot{h}_i$  при этом считаются известными. С началом таяния снега к системе (61.4)—(63.4) для определения  $\dot{h}_i$  добавляется уравнение (58.4) без члена, содержащего  $R_2$ . После наступления момента таяния льда первое уравнение системы (61.4) заменяется на (59.4) без  $R_4$ , в системе (63.4) пропадают три первых уравнения и на их место ставится

$$\Theta_{i0} = 0. \tag{65.4}$$

Численное решение уравнений (61.4)—(64.4) может быть выполнено итерациями, в которых за нулевое приближение принимается значение функции на предыдущем шаге по времени.

Обозначим

$$\frac{\Delta}{\zeta'} (\theta - \Theta_{iN-1}) = b, \quad \frac{1}{2K_{iN}} = r,$$

$$\dot{H}_i = \dot{Z} \quad H_i = Z.$$

тогда первое уравнение системы (61.4) будет

$$\dot{Z}_{n+1} = \frac{b}{Z_n (1 + \gamma Z_n \dot{Z}_n)}.$$

Представим эту формулу следующим образом:

$$\dot{Z}_{n+1} = \frac{b}{(H_{i-1} + \dot{Z}_n \tau) (1 + \gamma H_{i-1} \dot{Z}_n + \gamma \dot{Z}_n^2 \tau)} = \varphi(\dot{Z}_n).$$

Легко показать, что сходимость этой последовательности существует [56], если

$$|\dot{\varphi}(\dot{Z})| = \frac{b\tau}{(1 + \gamma Z \dot{Z}) Z^2} + \frac{b\gamma(2Z - H_{i-1})}{Z(1 + \gamma Z \dot{Z})^2} \leq q < 1. \quad (66.4)$$

Эти условия обычно удовлетворяются на практике. Действительно, в естественных условиях  $\gamma Z \dot{Z}$  имеет обычно порядок  $\zeta$ .

Следовательно,  $0(1 + \gamma Z \dot{Z}) \sim 1$  и второй член выражения (66.4) будет иметь порядок  $(\theta - \Theta_{N-1}) \cdot 10^{-2}$ .

Если на первый член формулы (66.4) наложить условие

$$\frac{b\tau}{Z^2} \leq 0,5,$$

то, приняв  $\tau = 1$  сутки, для определения порядка  $\zeta$  получим формулу

$$0(\zeta) \geq 0\left(\frac{10(\theta - \Theta_{N-1})}{Z^2}\right).$$

Обычно  $0(\theta - \Theta_{N-1}) \sim 10^{-1}$ , и в таком случае  $0(\zeta) \geq 0\left(\frac{1}{Z^2}\right)$ , где  $Z$  дается в сантиметрах. Аналогично для определения порядка  $y$  из уравнения (58.4) находим

$$0(y) \geq 0\left(\frac{4\theta'_{i1}}{h^2}\right),$$

где  $\theta'$  выражена в градусах,  $h$  — в сантиметрах. Сходится итерационный процесс и для системы (63.4), так как в матрице, составленной из коэффициентов при неизвестных  $\theta'_{ik}$  и  $\Theta_{ij}$ , модули диагональных членов для каждого уравнения системы больше суммы модулей остальных членов строки матрицы. Однако сходимость итераций медленная, поэтому при решении системы (64.4) лучше использовать метод «прогонки» [8].

Предлагается следующий порядок решения полученной си-

стемы уравнений. По значениям  $H_0, \dot{H}_0, \Theta_{0N-1}, \Phi_{в1}$  вычисляются  $H_1^{(0)}$  и  $\dot{H}_1^{(0)}$ , затем по  $\Theta_{0j}$  вычисляется  $K_{1j}^{(0)}$ . Для получения нулевых приближений  $\Theta'_{1k}^{(0)}$  и  $\Theta_{1j}^{(0)}$  используются нулевые приближения  $H_1^{(0)}, \dot{H}_1^{(0)}, K_{1j}^{(0)}$ . Первые приближения  $H_1^{(1)}, \dot{H}_1^{(1)}$  и  $K_{1j}^{(1)}$  находятся при использовании  $H_1^{(0)}, \dot{H}_1^{(0)}$  и  $\Theta_{1j}^{(0)}$  и т. д. Переход к следующему шагу по времени происходит после выполнения

$$|H_i^{(m+1)} - H_i^{(m)}| \leq \varepsilon_1. \quad (67.4)$$

Этот процесс повторяется до тех пор, пока  $\Theta'_{i0} < 0$ . Если окажется, что  $\Theta'_{i0} \geq 0$ , то решение повторяется для этого же  $t=t_i$ , но первое уравнение из системы (63.4) заменяется на  $\Theta'_{i0}=0$  и вводится уравнение для определения  $h_i$ , нулевое приближение которого находится по  $\dot{h}_{i-1}$ . Для перехода к следующему шагу по времени условие (67.4) нужно дополнить выражением

$$|h_i^{(m+1)} - h_i^{(m)}| \leq \varepsilon_2.$$

В случае, когда при расчете по формуле (58.4) окажется  $\dot{h}_i > 0$ , операция повторяется для того же  $t=t_i$  при использовании первоначальной системы (61.4) — (63.4).

Аналогичные операции должны производиться при наступлении или прекращении таяния льда с поверхности при отсутствии на нем снега.

#### § 4. Теплообмен через лед

Ледяной покров Арктики, как известно, играет большую роль в тепловом балансе этого бассейна. В результате отдачи тепла в атмосферу понижение температуры воды происходит лишь до определенного предела, после чего отток тепла компенсируется теплом, выделяющимся при фазовом переходе воды в лед. Прогрев покрытого льдом моря за счет атмосферного и солнечного тепла в основном осуществляется лишь после того, как определенная часть тепла затратится на то, чтобы растопить лед. Таким образом, лед является как бы терморегулятором моря.

С момента образования ледяного покрова проявляется его защитная роль по отношению к тепловым потерям нижележащих слоев воды. Она заключается в том, что температура воды подо льдом остается практически постоянной, каковы бы ни были термическое состояние атмосферы и толщина льда. Однако поток тепла в атмосферу от поверхности льда, как и вообще потоки тепла во льду, зависит и от термического состояния атмосферы

и от толщины льда. Источниками этого тепла являются теплозапас льда и тепло, выделяющееся при фазовых переходах воды как в толще льда, так и на его нижней поверхности, частично компенсируемое притоком тепла из глубинных слоев моря.

Влияние теплоты фазовых переходов воды в толще льда на поле температуры и теплообмен с атмосферой легко проследить по приближенной формуле (25.4). В этой формуле члены, содержащие множитель  $S'$ , характеризуют влияние тепла внутренних источников на температуру льда. Эти члены становятся равными нулю только в том случае, когда не происходит изменения температуры и толщины льда. Действительно, при стационарном термическом состоянии льда устанавливается определенное соотношение между жидкой и твердой фазами в соответствии с эвтектическим законом. Поскольку переход воды из одной фазы в другую отсутствует, то нет и источников тепла. Если происходят изменения температуры льда, то они сопровождаются новыми соотношениями между фазами воды, при установлении которых происходят определенные преобразования энергии. Количество выделяемой или поглощаемой энергии пропорционально скорости изменения температуры и толщины льда.

На основании формулы (25.4) можно выявить распределение по вертикали тепла, выделяемого при вымерзании рассола или поглощаемого при обратном процессе. В общем оказывается, что изменение температуры льда за счет тепла фазовых преобразований невелико и обычно составляет долю градуса. Лишь при больших изменениях температуры  $\left(0 \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial t}\right) \sim 10 \text{ град/сутки}\right)$  льда большой солености ( $0(S_{\text{л}}) \sim 10\%$ ) эти изменения температуры могут достигать величины порядка  $1^\circ$ . Наибольшие изменения температуры за счет тепла фазовых преобразований в среднем имеют место в нижней половине ледяного слоя с максимумом ближе к середине. Объяснить это можно тем, что температура льда в среднем понижается к его верхней границе, вместе с этим понижается количество жидкой фазы на единицу льда и уменьшается количество воды, переходящей из рассола в лед (или обратно) при изменении температуры на каждый градус. Поэтому, хотя вблизи поверхности льда и происходят наибольшие изменения температуры, сопровождаются они выделением (поглощением) небольшого количества тепла. Вблизи же нижней границы льда в фазовых процессах участвуют относительно большие массы воды, но изменения температуры здесь обычно малы, поэтому и величина фазовых процессов мала. Существует какой-то оптимальный уровень, где совокупное значение массы рассола, участвующего в фазовых процессах, и изменений температуры больше, чем на остальных уровнях. Здесь и происходят наибольшие фазовые преобразования, а следовательно и энергетические.

Приближенная формула (25.4) позволяет легко определить изменение теплосодержания льда  $\Phi_a$  за счет фазовых преобразований. Действительно,  $\Phi_a$  определяется разницей входящих и выходящих потоков тепла из толщи льда, пропорциональных градиентам температуры на его границах. Эти градиенты легко находятся дифференцированием выражения (25.4). В таком случае  $\Phi_a$  при постоянном  $\Lambda$  равно

$$d\Phi_a = \Lambda \left\{ H \frac{d\theta_0}{dt} \left[ \frac{1}{2k} + \frac{S'}{\theta_0 - \theta} \left( \frac{1}{\theta_0 - \theta} \ln \frac{\theta_0}{\theta} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{dH}{dt} \left[ \frac{\theta_0 - \theta}{2k} + S' \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_0 - \theta} \ln \frac{\theta_0}{\theta} \right) \right] \right\}. \quad (69.4)$$

В этой формуле члены, содержащие параметр  $S'$ , характеризуют изменение теплосодержания льда за счет тепла фазовых преобразований. В общем величина этого изменения невелика.

Таким образом, анализ формул, учитывающих влияние тепла фазовых преобразований в толще льда на его температуру и изменение толщины показывает, что в ряде практических задач можно не принимать во внимание влияние этих внутренних источников тепла. Но вообще теплосодержание льда необходимо учитывать при решении некоторых вопросов, связанных с температурой, нарастанием и таянием льда. В частности, большой интерес представляет изменение со временем зимнего «запаса холода» во льду, так как от этого зависит и изменение его прочностных характеристик в весенний период. Характер этого изменения легко определить из формулы (19.4), первый член правой части которой зависит от начального распределения температуры льда, т. е. от «запаса холода» на какой-то момент времени. С течением времени величина этого члена убывает со скоростью, пропорциональной температуропроводности льда и обратно пропорциональной его толщине. На рис. 13 для разных толщин льда представлены примерные промежутки времени (отсчитанные от начального момента), в течение которых этот член формулы (19.4) убывает до 50, 20 и 10% от первоначального значения.

В ряде эмпирических формул для расчета средней температуры льда используется ее зависимость от температуры воздуха, осредненной за некоторый предшествующий промежуток времени. Очевидно, его величина определяется соотношением первого и второго членов формулы. При малом интервале может оказаться значительной роль начального теплосодержания. Однако нецелесообразно брать и большой интервал времени, поскольку во втором члене формулы подынтегральное выражение входит с весом, зависящим от  $(t - \xi)$  так же, как представлено на рис. 13. Поэтому при больших значениях  $(t - \xi)$  подынтеграль-



ная функция будет малой величиной и роль ее становится незначительной.

Поскольку влияние начального теплозапаса льда на формирование его температурного поля с течением времени ослабевает, то при расчетах последнего для больших интервалов времени начальное распределение температуры льда можно задавать с небольшой точностью (например, полагать его линейным). А в ряде случаев можно пренебрегать и изменением толщины

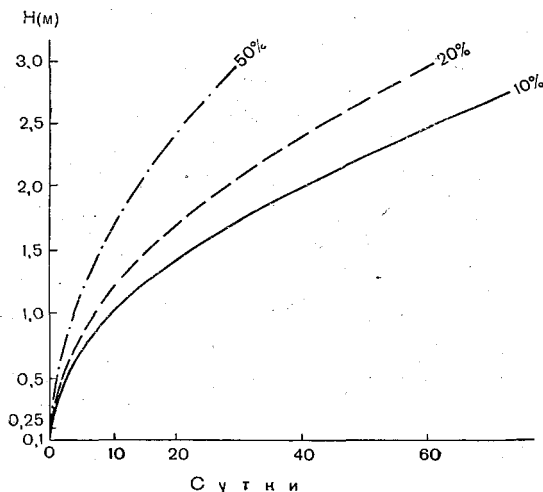


Рис. 13. Убывание начального теплозапаса льда.

льда за рассматриваемый промежуток времени. При этих упрощениях формула (19.4) приводится к виду

$$\Theta(t, z) = \theta + b[z - H - G(t, z)] + \int_0^t \Gamma_1(t - \xi) dG, \quad (70.4)$$

где

$$\Theta(0, z) = \theta(0, 0) + bz,$$

$$G(t, z) = z - H + \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos v_n z}{v_n^2} e^{-kv_n^2 t}.$$

Решив это интегральное уравнение при  $z=0$  относительно  $\Gamma_1$  и умножив полученный результат на теплопроводность льда, можно получить выражение для определения теплообмена

с атмосферой по известным значениям толщины и температуры поверхности льда

$$\Phi_a = \Lambda [b + (bH + \theta) G''(t) + \int_0^t \Theta_0(t - \xi) dG''(\xi)], \quad (71.4)$$

где 
$$G''(t) = -\frac{1}{2H} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 kt}{4H^2}\right) \right].$$

При постоянной температуре поверхности льда и  $t \rightarrow \infty$  из этого уравнения получается обычный стационарный случай, т. е. поток тепла в атмосферу прямо пропорционален разности температур нижней и верхней поверхности льда и обратно пропорционален его толщине.

Формула (71.4), позволяющая вычислять теплообмен с атмосферой льда постоянной толщины, не дает возможности определить источники тепла. Более удобной в этом отношении является формула (33.4), на основании которой теплообмен с атмосферой определится выражением

$$\Phi_a = L_1 \dot{\gamma}_1 \frac{dH}{dt} - \Lambda \delta(t) + \Phi_b. \quad (72.4)$$

Первый член этого выражения характеризует вклад в поток тепла теплоты кристаллизации воды на нижней поверхности льда, второй член определяет вклад в теплообмен теплозапаса льда и третий — участие притока тепла из воды ко льду. С увеличением толщины льда первый член формулы уменьшается из-за уменьшения скорости роста льда и растет второй. Но если рассматривать теплообмен за некоторый промежуток времени  $\tau = t_{i+1} - t_i$ , то даже для толстого льда зачастую первый член бывает больше второго, так как понижения и повышения температуры в течение этого интервала времени могут взаимно компенсироваться, а это приведет к относительному уменьшению второго члена.

Легко получить выражение для определения теплообмена с атмосферой при наличии на льду слоя снега. Для этого достаточно продифференцировать уравнение (32.4) по  $z$ , положить затем  $z=0$  и умножить результат на теплопроводность снега  $\lambda_c$

$$\Phi'_a = \int_0^t \Phi_a(t - \xi) dg'(\xi) + \lambda_c \left\{ \int_0^t T_0(t - \xi) dg''(\xi) - T_0(0)g''(t) + \varphi_0 [1 - g'(t)] \right\}, \quad (73.4)$$

где 
$$g'(t) = \frac{dG_1}{dz} \Big|_{z=0};$$

$$g''(t) = \frac{dG_2}{dz} \Big|_{z=0}.$$

Влияние теплозапаса снега на теплообмен определяется членами формулы, содержащими  $h$ . При сравнительно небольшой толщине слоя снега на льду в Арктике роль этих членов в общей величине  $\Phi'_a$  невелика и обычно в расчетах может не приниматься во внимание. В таком случае основными источниками тепла будут являться уже перечисленные теплота кристаллизации воды, теплозапас льда и приток тепла из воды. Но интенсивность этих источников тепла будет уже иная. Вследствие изолирующего влияния снега нарастание льда и изменение его температуры под снегом происходят медленнее, чем бесснежного льда. Поэтому первый и второй члены выражения  $\Phi_a$  в этом случае будут меньше, чем при отсутствии снега. Меньше может быть и величина  $\Phi_b$  из-за уменьшения осолонения и более слабого конвективного перемешивания. Все это приводит к уменьшению потока тепла в атмосферу. Грубая оценка влияния снежного покрова на теплообмен между океаном и атмосферой дана в статье Д. П. Беспалова [12]. Он принял вертикальные профили температуры льда и снега линейными, т. е. пренебрег теплосодержанием снега и льда, в результате чего поток тепла в атмосферу определяется формулой

$$\Phi'_a = \Lambda \frac{T_0 - \theta}{H + \frac{\Lambda}{\lambda_c} h}. \quad (74.4)$$

Хотя это выражение и является грубым, оно наглядно показывает влияние толщины снега и льда на поток тепла. Поскольку  $\frac{\Lambda}{\lambda_c} \sim 7-10$ , а для свежеснежавшего рыхлого снега еще больше [4], то увеличение толщины снега на единицу приводит к такому же изменению потока тепла, как и изменение толщины льда на 7-10 единиц.

В табл. 13 в качестве примера приведены оценки вклада отдельных составляющих в теплообмен между морем и атмосферой, полученные по средним многолетним значениям метеорологических элементов для о. Уединения. При определении нарастания толщины льда использовалась формула (37.4). Из табл. 13 видно, что теплосодержание льда играет заметную роль лишь в осенний и весенний периоды, когда происходит заметные изменения температуры. Естественно, эта роль возрастает с увеличением толщины льда, и у многолетнего льда в осенний и весенний период теплообмен с атмосферой происходит в значительной степени за счет изменения его теплосодержания, а не теплоты кристаллизации воды. Последнее отмечается и в работе А. В. Янеса [276].

Зимой, когда нет устойчивого изменения температуры в какую-либо сторону, термический режим льда в среднем близок к стационарному, и теплообмен с атмосферой осуществляется

Теплообмен океана с атмосферой по месяцам  
(в кал/см<sup>2</sup> · мес)

Составляющие теплообмена	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	Примечание
$\Phi_{кр}^*$	910	1680	1540	1400	1260	1120	770	280	$H_o = 0$ $\Phi_B = 0$
$\Phi_э$	3	15	28	22	24	20	-62	-117	
$\Phi_a$	913	1695	1568	1422	1284	1140	708	163	
$\Phi^{**}$	907	1665	1570	1365	1242	1150	743	291	
$\Phi_{кр}$	380	970	1085	1030	987	938	637	238	$H_o = 100 \text{ см}$ $\Phi_B = 0$
$\Phi_э$	104	126	63	22	21	19	-135	-224	
$\Phi_a$	484	1096	1148	1052	1008	957	502	14	
$\Phi$	374	935	1050	1000	960	920	625	241	
$\Phi_{кр}$	231	637	777	777	763	750	518	196	$H_o = 200 \text{ см}$ $\Phi_B = 0$
$\Phi_э$	230	304	137	31	27	20	-236	-376	
$\Phi_a$	461	941	914	808	790	770	282	-180	
$\Phi$	233	630	763	763	750	738	513	198	
$\Phi_{кр}$	80	685	820	770	735	693	380	-38	$H_o = 100 \text{ см}$
$\Phi_э$	101	117	53	17	16	10	-109	-178	
$\Phi_B$	300	300	300	300	300	300	300	300	
$\Phi_a$	481	1102	1173	1087	1051	1003	571	84	

\*  $\Phi_{кр}$  — тепло, выделяемое при кристаллизации воды;\*\*  $\Phi$  — поток тепла, определенный по формуле (74.4).

за счет теплоты кристаллизации воды при нарастании льда. Поток тепла из воды ко льду хотя и входит в общую величину теплообмена как отдельное слагаемое, влияет главным образом на нарастание льда и теплоту кристаллизации. Величина теплообмена с атмосферой, вычисленная с учетом океанического тепла, поступающего ко льду, примерно такова же, как и без этого учета. Это следует и из данных табл. 13. Некоторая разница в теплообмене обуславливается различием в толщине льда, которое приводит к несколько отличным изменениям теплосодержания и нарастания льда. Поэтому при отсутствии данных по потоку океанического тепла теплообмен с атмосферой без особой погрешности можно определять предполагая, что  $\Phi_B = 0$ . При этом отсутствие потока океанического тепла компенсируется увеличением скорости роста льда и соответствующим приростом теплоты кристаллизации.

Из табл. 13 видно, что с увеличением толщины льда теплообмен с атмосферой ослабевает. Поэтому даже небольшие площади молодого льда, покрытые более тонким слоем снега, чем многолетние, играют существенную роль в тепловом режиме Арктики.

## Глава V. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА С АТМОСФЕРОЙ НА ВЕСЕННЕ-ЛЕТНИЕ ТЕРМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ МОРЯ

### § 1. Температура льда

Температура льда в весенне-летний период может быть вычислена изложенным в предыдущей главе методом, реализуемым на ЭЦВМ. Но в ряде случаев целесообразно применять упрощенные способы расчета, позволяющие без применения электронных вычислительных машин получать результаты, удовлетворяющие запросы практики. Учет особенностей режима льда в весенне-летний период дает возможность провести некоторые упрощения как в постановке задачи, так и в ее решении. В частности, в весенне-летний период соленость льдов значительно уменьшается за счет процессов миграции солей. В монографии Б. А. Савельева [202] приведены результаты определений солености льда в Арктике, проведенных различными исследователями. Из этих данных следует, что в весенне-летний период соленость однолетнего льда составляет величину 4—1‰, с небольшим максимумом в нижних слоях, соленость многолетних льдов — еще меньше. Вследствие малого содержания солей влияние внутренних источников тепла, связанных с фазовыми преобразованиями рассола, на термический режим льда невелико и может не приниматься во внимание. Второй особенностью ледяного покрова в весенний период является сравнительно слабая относительная изменчивость его толщины до начала таяния. Использование условия  $H = \text{const}$  намного облегчает решение уравнения теплопроводности для льда и упрощает получающуюся при этом расчетную формулу.

В весенне-летний период из-за возрастания величины радиационного баланса температуру поверхности льда уже нельзя отождествлять, как зимой, с температурой воздуха. Поэтому в качестве граничного условия на снежно-ледяной поверхности следует использовать уравнение теплового баланса

$$-\kappa_0 \rho \left( c_p \frac{\partial T_0}{\partial z} + L \frac{\partial q_0}{\partial z} \right) - \Lambda \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + l p \frac{dH}{dt} = B, \quad (1.5)$$

где последний член левой части определяет количество тепла, идущее на таяние льда.

Учитывая логарифмичность профиля температуры и удельной влажности, а также соотношение между относительной влажностью, температурой воздуха и удельной влажностью, можно градиенты температуры и влажности представить через значения этих величин на некоторой высоте и на уровне подстилающей поверхности. При этом, как отмечалось выше, уравнение теплового баланса (1.5) приводится к виду

$$\Lambda \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = N\theta_0 - \Pi + l\rho \frac{dH}{dt} - B, \quad (2.5)$$

где

$$\Pi = NT - 0,622 \frac{LE_0 \alpha}{c_p P} (1 - r) e^{\alpha T}.$$

Обычно при расчетах температуры и таяния льда полагается, что вся лучистая энергия, поступающая на снежно-ледяную поверхность, поглощается очень тонким поверхностным слоем. В этом случае в уравнение теплопроводности не входит составляющая, учитывающая изменение температуры за счет поглощенной коротковолновой радиации, и радиационный баланс представляется формулой (1.2). Решение уравнения теплопроводности при отмеченных упрощениях было получено в работе [66].

Если учитывать проникновение коротковолновой радиации в толщу льда, то радиационный баланс, входящий в уравнение теплового баланса (1.5), должен иметь выражение

$$B = Q(1 - A)(1 - w) - F \quad (3.5)$$

В этой формуле множитель  $(1 - w)$  учитывает долю коротковолновой радиации, поглощенной некоторым тонким слоем льда и отождествляемой с поглощением самой ледяной поверхностью. Остальная часть радиации проникает в толщу льда, ослабевая с глубиной, как было показано в главе II, примерно по экспоненциальному закону. В этом случае уравнение (1.3.4) должно учитывать изменение температуры за счет поглощения проникающей в толщу льда радиации

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{C_p} \frac{\partial}{\partial z} \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} + I e^{-\nu z}, \quad (4.5)$$

где

$$I = \frac{Q(1 - A)}{C_p} \nu w.$$

Решение этого уравнения при постоянных теплофизических характеристиках и неизменной толщине льда может быть полу-

чено в виде

$$\begin{aligned} \Theta(t, z) = & \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} P_n e^{-k v_n^2 t} \cos v_n z + \frac{2k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \cos v_n z \times \\ & \times \int_0^t e^{-k v_n^2 (t-\xi)} \left\{ \theta v_n (-1)^{n-1} + \frac{1}{\Lambda} \left[ \Pi(\xi) - N \Theta_0(\xi) - l p \frac{\partial H}{\partial \xi} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{B(\xi)}{\Lambda} + \frac{I(\xi)}{k(v^2 + v_n^2)} \left[ \nu + v_n (-1)^{n-1} e^{-\nu H} \right] \right\} d\xi. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Обозначения в этом выражении те же самые, что и в формуле (19.4), лишь  $P_n$  представляется в несколько иной форме:

$$P_n = \int_0^H \Theta(0, z) \cos v_n z dz.$$

Непосредственную оценку изменения температуры льда при различных значениях параметра  $\omega$  провести по формуле (5.5) нельзя из-за того, что от характера поглощения радиации зависит и температура поверхности льда. Полагая в выражении (5.5)  $z=0$ , путем решения полученного при этом уравнения Вольтерра относительно  $\Theta_0$ , предварительно переведя все функции с помощью операционного соотношения в изображения, находится функция-изображение температуры поверхности льда ( $\bar{\Theta}_0$ ). В частности, при линейном профиле температуры льда в начальный момент

$$f(z) = \Theta_1 + \frac{\theta - \Theta_1}{H} z, \quad \text{и} \quad N = \text{const.}$$

$\bar{\Theta}_0$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_0(r) = & \frac{\Lambda}{N \sqrt{k} + \Lambda \sqrt{\Gamma} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{\Gamma}{k}}} \left\{ \frac{(\theta - \Theta_1) \sqrt{k}}{H} + \right. \\ & + \frac{\sqrt{k}}{\Lambda} \left[ \bar{\Pi} - N \Theta_1 - \bar{M} - F + Q(1-A) \left( 1 - \omega + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{H} \nu \omega \sqrt{k} \Gamma \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{\Gamma}{k}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu + v_n (-1)^{n-1}}{\Gamma + k v_n^2} \cdot \frac{e^{-\nu H}}{\nu^2 + v_n^2} \right) \right] \right\} + \Theta_1. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{M}$  является изображением функции, учитывающей затраты тепла на таяние льда. Естественно, до тех пор пока таяние не происходит,  $\bar{M}=0$ .

Для того чтобы получить представление о влиянии проникающей в лед радиации на температуру поверхности льда, достаточно получить оригинал множителя для функции  $\overline{Q(1-A)}$ . Обозначив этот множитель  $\bar{J}$  с помощью теоремы свертки и известных операционных соотношений [59], можно легко получить

$$\begin{aligned} \bar{J} \doteq 1 - \omega \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^2 + \nu \nu_n (-1)^{n-1} e^{-\nu H}}{(2n-1)^2 (\nu^2 + \nu_n^2)} \left[ 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-k\nu_n^2 t} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2 - 4i^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2 - 4i^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 k i^2 t}{H^2}\right) \right] \right\}. \quad (7.5) \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках этого соотношения убывает от 1 при  $t=0$  до величины порядка 0,3 для больших значений  $t$  и  $0(H) \sim 2$  м. Следовательно, при  $\omega$ , отличной от нуля,  $J < 1$ , т. е. проникновение коротковолновой радиации в толщу льда приводит к более низкой температуре поверхности льда, чем в случае поглощения ее только поверхностью льда. Наиболее просто при помощи теоремы свертки получается выражение, определяющее радиационное изменение температуры, для постоянной величины поглощенной коротковолновой радиации

$$\Delta\theta_0 = Q(1-A) \int_0^t J(t-\xi) f_1(\xi) d\xi.$$

Приближенное значение оригинала  $f_1(\xi)$ , как следует из работы [66], может быть представлено выражением

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\gamma}{N\sqrt{k} + \Delta\sqrt{\gamma} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{\gamma}{k}}} \doteq f_1(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} - \\ - \frac{N\sqrt{k}}{\Delta} e^{\frac{N^2 k}{\Delta^2} \xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{N\sqrt{k\xi}}{\Delta}\right). \end{aligned}$$



Но температура нижележащих слоев льда при этом будет более высокой. Оценки показывают, что это повышение в среднем составляет доли градуса, что совпадает с результатами расчетов Унтерштейнера [326], проводившего численное решение уравнения (4.5) с переменными теплофизическими характеристиками льда. Чтобы оценить степень влияния внутренних источников тепла на температурное поле льда, фактический поток радиации им был увеличен вдвое. Но это привело к изменению температуры льда в июле и в августе примерно лишь на  $0,2^\circ$  с максимумом, достигающим до  $0,4^\circ$  на глубине 50—70 см. С понижением температуры льда величина ее изменения за счет проникновения радиации в толщу льда несколько возрастает. Такой характер влияния коротковолновой радиации на температуру льда Унтерштейнер объясняет тем, что вблизи точки плавления повышается эффективная теплоемкость льда, в результате чего температура возрастает слабо.

В своей задаче Унтерштейнер принимал известной температуру поверхности льда и полагал, что вся коротковолновая радиация проникает в лед, т. е. принимал  $\omega=1$ . Если же на основании его более ранней работы [327] считать  $\omega \approx 0,38$ , что получено по измерениям на американской дрейфующей станции, то радиационные изменения температуры льда будут очень невелики. Поэтому без особого ущерба в требуемой для многих практических целей точности рассчитываемой температуре льда обычно считается, что вся коротковолновая радиация поглощается на самой снежно-ледяной подстилающей поверхности. В этом случае уравнения для определения температуры льда (5.5) и (6.5) могут быть приведены к выражениям, полученным в работе [66]. В частности, чтобы параметр  $N$ , входящий в эти формулы, не зависел от температуры, экспоненциальная зависимость удельной влажности на уровне подстилающей поверхности от температуры задавалась в приведенной работе в виде двух первых членов степенного ряда. При этом уравнение теплового баланса (2.5) имело вид

$$m [(1 + \alpha\eta)\theta_0 - T_0 + \eta] + l\rho \frac{dH}{dt} - B = \Lambda \frac{\partial\theta_0}{\partial z}, \quad (8.5)$$

где  $T_0$  — эквивалентная температура;

$$\eta = 0,622 \frac{LE_0}{c_p P}.$$

Параметр  $m$  имеет то же выражение, что в главе IV. Очевидно, что ограничиваться двумя первыми членами ряда зависимости  $q(T)$  допустимо при температуре, не превышающей величину порядка  $\pm 5^\circ$ . За пределами этой величины заметную роль

играют следующие члены ряда, поэтому вместо уравнения (8.5) следует использовать уравнение баланса тепла (2.5). Температура поверхности льда определяется формулой

$$\Theta_0(t) \approx \frac{\sqrt{k}}{\Lambda} \int_0^t [B(t-\xi) + mT_0(t-\xi)] \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} - \sigma e^{\sigma^2\xi} \operatorname{erfc} \sigma \sqrt{\xi} \right] d\xi + \frac{\sqrt{k}}{\sigma} \left( \frac{\theta - \theta_1}{H} - \frac{m\eta}{\Lambda} \right) \left( 1 - e^{\sigma^2 t} \operatorname{erfc} \sigma \sqrt{t} \right) + \theta_1 e^{\sigma^2 t} \operatorname{erfc} \sigma \sqrt{t}, \quad (9.5)$$

где

$$\sigma = \frac{m(1 + \alpha\eta)}{\Lambda} \sqrt{k}.$$

Принимаемый постоянным параметр  $m$  в действительности зависит от скорости ветра, которая может меняться во времени. Но, так как скорость ветра входит в этот параметр и в числитель и в знаменатель, то  $m$  будет меняться во времени слабее, чем  $V$ , а в некотором интервале времени можно вообще провести осреднение и принять  $m$  постоянной.

В естественных условиях лед практически всегда покрыт слоем снега, который оказывает большое влияние на термический режим льда. Поскольку толщина снега на льду в общем невелика, то при исследовании термического режима льда без особой погрешности можно полагать вертикальное распределение температуры снега линейным. Лишь резкие колебания теплообмена на поверхности снега могут вызвать существенные отклонения профиля температуры от линейного. Однако при небольшой толщине снега его теплозапас невелик и быстро расходуется, в результате чего вертикальный профиль его температуры снова становится близким к линейному. При этом условии уравнение теплового баланса (8.5) принимает вид

$$m[(1 + \alpha\eta)T_0 - T_0 + \eta] - \lambda_c(\Theta_0 - T_0) \frac{1}{h} + l\rho_c \frac{dh}{dt} = B, \quad (10.5)$$

где  $T_0$  — температура поверхности снега.

Ранее отмечалось, что коротковолновая радиация поглощается снегом более интенсивно, чем льдом, поэтому допущение положения о поглощении всей радиации поверхностью снега в данном случае вносит меньшие ошибки и более приемлемо, чем при отсутствии снега на льду. Решение уравнения теплопроводности льда при отмеченном условии и постоянной толщине и теплофизических характеристиках льда получено в работе [66].

В изображениях это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(r) = & \frac{(\bar{B} + m\bar{T}_s - m\eta - \bar{M}) \left(1 + \frac{\Delta h}{\lambda_c} \sqrt{\frac{r}{k}} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{r}{k}}\right)}{\left[m(1 + \alpha\eta) + \frac{\lambda_c}{h}\right] \left(1 + \frac{\Delta h}{\lambda_c} \sqrt{\frac{r}{k}} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{r}{k}}\right) - \frac{\lambda_c}{h}} + \\ & \frac{\left[\theta + \sqrt{\frac{r}{k}} \int_0^H f(\zeta) \operatorname{sh}(H - \zeta) \sqrt{\frac{r}{k}} \cdot d\zeta\right] \frac{\lambda_c \sqrt{r}}{\operatorname{sh} H \sqrt{\frac{r}{k}}}}{\left[m(1 + \alpha\eta) + \lambda_c\right] \left(\sigma_1 + \sqrt{r} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{r}{k}}\right)}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(r, z) = & \frac{1}{\operatorname{sh} H \sqrt{\frac{r}{k}}} \left\{ \bar{\Theta}_0 \operatorname{sh}(H - z) \sqrt{\frac{r}{k}} + \theta \operatorname{sh} z \sqrt{\frac{r}{k}} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{k}} \left[ \int_0^z f(\zeta) \operatorname{ch}(H + \zeta - z) \sqrt{\frac{r}{k}} d\zeta + \right. \\ & + \int_z^H f(\zeta) \operatorname{ch}(H + z - \zeta) \sqrt{\frac{r}{k}} d\zeta - \\ & \left. \left. - \int_0^H f(\zeta) \operatorname{ch}(H - z - \zeta) \sqrt{\frac{r}{k}} d\zeta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_0(r) = & \frac{\bar{B} + m\bar{T}_s - m\eta - \bar{M}}{\left[\frac{\Delta h m}{\lambda_c \sqrt{k}} (1 + \alpha\eta) + \frac{\Delta}{\sqrt{k}}\right] \left(\sigma_1 + \sqrt{r} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{r}{k}}\right)} + \\ & \frac{\sqrt{r} \left[\theta + \sqrt{\frac{r}{k}} \int_0^H f(\zeta) \operatorname{sh}(H - \zeta) \sqrt{\frac{r}{k}} d\zeta\right]}{\left(\sigma_1 + \sqrt{r} \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{r}{k}}\right) \operatorname{sh} H \sqrt{\frac{r}{k}}}, \\ & \sigma_1 = \frac{m(1 + \alpha\eta) \lambda_c \sqrt{k}}{[m(1 + \alpha\eta) h + \lambda_c] \Delta}. \end{aligned}$$

В этих формулах через  $f(\zeta)$  обозначен начальный профиль температуры льда. При  $h=0$  функции-изображения  $\bar{T}_0(r)$  и  $\bar{\Theta}_0(r)$  становятся одинаковыми и соответствуют изображению

температуры поверхности бесснежного льда. Здесь, как и ранее, до начала таяния льда функция  $\bar{M}$  должна отсутствовать. Реализация приведенных выражений представляет значительные трудности, но, как показано в работе [66], использование некоторых упрощений позволяет получить довольно простые оригиналы. Расчеты показывают, что даже при слое снега толщиной 50 см и толщине льда 1—2 м принятие упрощения

$$\frac{1}{\sigma_1 + V\Gamma \operatorname{cth} H \sqrt{\frac{\Gamma}{k}}} \approx \frac{1}{\sigma_1 + V\Gamma}$$

для промежутка времени, на который производится расчет, в две декады создает погрешность около 10%. При меньшей толщине слоя снега и меньших промежутках времени ошибка за счет применения этого упрощения уменьшается. При реализации первого члена правой части выражения (11.5) следует иметь в виду то обстоятельство, что второй член знаменателя обычно не превышает 5% от первого и его можно не учитывать. Если принять вертикальное распределение температуры льда в начальный момент линейным, то с учетом перечисленных упрощений температура поверхности снега на льду до начала таяния определится формулой

$$T_0(t) = \frac{1}{m(1 + \alpha\eta) + \frac{\lambda_c}{h}} \left\{ B + m(T_s - \eta) + \frac{\lambda_c}{h} \left[ \frac{d_2 \sqrt{k}}{\sigma_1} + \left( d_1 - d_2 \frac{\sqrt{k}}{\sigma_1} \right) e^{\sigma_1^2 t} \operatorname{erfc} \sigma_1 \sqrt{t} \right] \right\}, \quad (13.5)$$

где

$$d_1 = \frac{\lambda_c H T_{00} + \Delta h \theta}{\lambda_c H + \Delta h};$$

$$d_2 = \frac{\theta - T_{00}}{H + \frac{\Delta}{\lambda_c} h}; \quad T_{00} = T_0(0).$$

Оригинал температуры поверхности льда при этих же условиях имеет тот же вид, что и формула (9.5), если в ней вместо параметров  $\Lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\Theta_1$  и  $\frac{\theta - \Theta_1}{H}$  поставить соответственно  $\Lambda' =$

$$= \Lambda \left[ 1 + \frac{\Delta h}{\lambda_c} (1 + \alpha\eta) \right], \quad \sigma_1, \quad d_1 \quad \text{и} \quad d_2. \quad \text{Определение вертикального}$$

профиля температуры льда при известной температуре его поверхности трудностей уже не представляет. Для этого при реализации изображений в формуле (12.5) достаточно воспользоваться известными операционными соотношениями [59] и теоремой свертки. При линейном профиле температуры льда в на-

чальный момент и отмеченных упрощениях температура льда может быть определена выражением

$$\Theta(t, z) = \frac{\sqrt{k}}{\Lambda'} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [B(t-\xi) + mT_0(t-\xi)] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} \left( e^{-\frac{\alpha_1^2}{4\xi}} - e^{-\frac{\alpha_2^2}{4\xi}} \right) - \sigma_1 [\chi(\alpha_1, \xi) - \chi(\alpha_2, \xi)] \right\} d\xi + \\ + \left[ \frac{\Lambda' d_2}{m(1+\alpha\eta)} - d_1 - \frac{\eta}{(1+\alpha\eta)} \right] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \operatorname{erfc} \frac{\alpha_1}{2\sqrt{t}} - \right. \\ \left. - \operatorname{erfc} \frac{\alpha_2}{2\sqrt{t}} - \chi(\alpha_1, t) + \chi(\alpha_2, t) \right] + d_1 + d_2 z, \quad (14.5)$$

где  $\chi(\alpha, t) = e^{\sigma_1^2(\alpha+t)} \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + \sigma_1 \sqrt{t} \right);$

$$\alpha_1 = \frac{2nH - 2H + z}{\sqrt{k}};$$

$$\alpha_2 = \frac{2nH - z}{\sqrt{k}}.$$

Хотя ряды в этой формуле быстро сходятся, трудоемкость расчетов по ней столь же велика, как и по другим известным формулам, например приведенным в монографии Б. А. Савельева [202]. Лишь при известной температуре поверхности льда расчетная формула приобретает более или менее простой вид.

Как видно из приведенных формул, температура снега и льда зависит от толщины и теплофизических характеристик снега и льда, начального теплозапаса и теплообмена с окружающей средой. На основании климатических данных для мыса Челюскин по формуле (13.5) произведен подсчет влияния основных факторов на формирование температуры поверхности снега с 10 мая по 10 июня (рис. 14). Видно, что основное влияние на величину  $T_0$  оказывают лучистые потоки тепла, турбулентный теплообмен и теплота испарения. Соотношение между величинами радиационного баланса и турбулентного теплообмена, как следует из формулы (13.5), зависит от скорости ветра. Чем больше скорость ветра, тем больше вторая составляющая по сравнению с первой.

От скорости ветра зависит и интенсивность ослабления роли начального теплозапаса: с увеличением скорости ветра затухание роли начальных условий происходит быстрее. Очевидно, в данном случае причиной является усиление теплообмена между льдом и атмосферой. Но вообще роль начального теплозапаса

льда невелика, и при расчетах на промежуток времени продолжительностью более 4—5 дней его часто можно не учитывать. Температура поверхности снега в общем отличается от температуры воздуха на высоте метеорологической будки. Близки они могут быть только при низкой температуре воздуха, когда роль испарения (конденсации) невелика, и малых величинах радиационного баланса.

Одним из важнейших элементов ледового режима являются сроки начала устойчивых процессов таяния снега и льда. Определение этого срока необходимо потому, что начиная с него про-

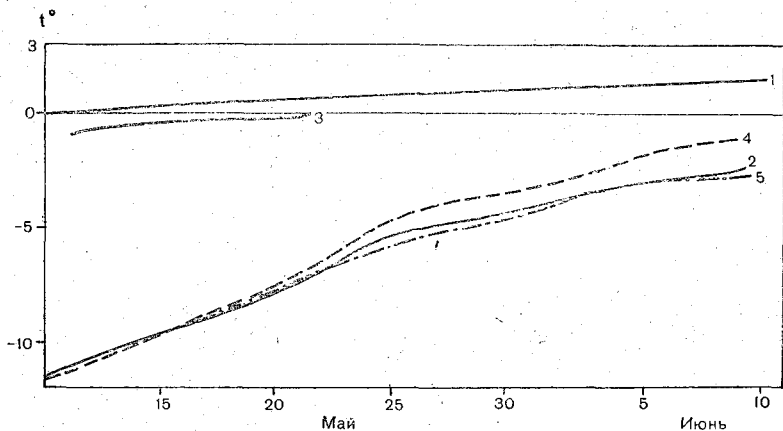


Рис. 14. Роль основных факторов в формировании температуры поверхности снега на льду.

1 — радиационный баланс; 2 — турбулентный теплообмен и испарение; 3 — начальный теплозапас льда; 4 — температура поверхности снега; 5 — температура воздуха на высоте 2 м.

исходит интенсивное уничтожение льда. Конечно, и до этого момента происходит уменьшение толщины льда за счет испарения, но роль этого фактора обычно невелика.

Многочисленными наблюдениями установлено, что таяние сверху льда в Арктике начинается уже при отрицательных температурах воздуха. Поэтому часто в эмпирических формулах дата начала устойчивого таяния льда сверху связывается с датой наступления некоторой отрицательной температуры воздуха. Данный факт не означает, конечно, что температура таяния льда отрицательная. Поскольку соленость поверхностного слоя льда в весенний период обычно незначительна [87], то температура таяния близка к нулевой, а для снега на льду — вообще равна нулю градусов. Но из-за лучистого притока тепла температура поверхности снега, как видно из рис. 14, несколько выше температуры воздуха. Такой же вывод можно получить для бесснежного льда на основании формулы (9.5).

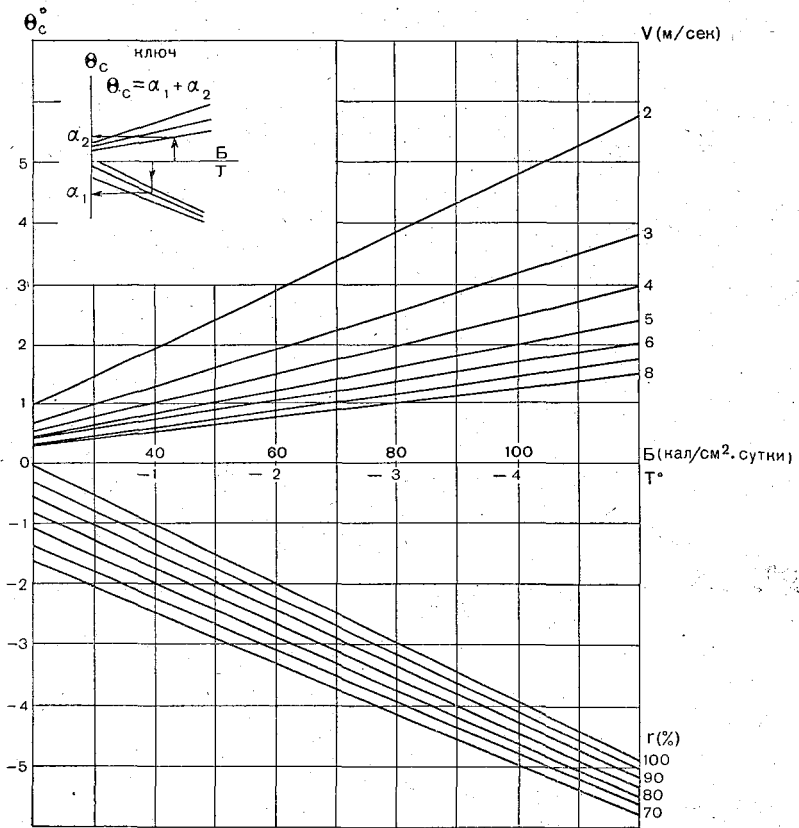


Рис. 15. Номограмма для расчета температуры поверхности снега.

Таблица 14

Средние значения температуры воздуха, при которых начинается устойчивое таяние снега на льду

Пункт	Температура воздуха
Остров Диксон . . . . .	-1,2°
Остров Уединения . . . . .	-1,2
Мыс Челюскин . . . . .	-1,1
Остров Мостах . . . . .	-1,3
Бухта Тикси . . . . .	-1,3
Мыс Шмидта . . . . .	-1,2

В табл. 14 для ряда пунктов в Арктике представлена рассчитанная с помощью формулы (13.5) средняя температура воздуха на высоте 2 м, при которой начинается устойчивое таяние на льду, т. е.  $T_0=0^\circ$ . Исходными данными при расчетах были климатические значения элементов. Эти расчетные значения температуры воздуха согласуются с экспериментальными, в среднем равными  $-1,2^\circ$  [85].

Для облегчения расчетов температуры поверхности снега и даты начала таяния формула (13.5) была упрощена и представлена в виде номограммы (рис. 15). При построении этой номограммы не учитывалось влияние начальных условий, что, как видно из рис. 14, оказывает малое влияние при  $t > 4-5$  суток. Не принят во внимание также второй член знаменателя, который при толщине снега, превышающей 10 см, на порядок меньше первого члена знаменателя.

Выше оси абсцисс на номограмме нанесены линии для разных скоростей ветра  $V$  на высоте флюгера, ниже оси абсцисс — линии для разной относительной влажности  $r$  на уровне метеорологической будки. Средняя суточная температура поверхности снега получается как сумма значений  $T_0$ , найденных по суточному значению  $B$  для соответствующей скорости ветра и по средней суточной температуре воздуха для соответствующего значения относительной влажности воздуха.

## § 2. Изменение толщины льда под воздействием солнечного и атмосферного тепла

Вопрос определения изменений толщины льда в весенне-летний период является одним из основных в практике ледовых прогнозов. Толщина стаявшего слоя льда, сроки вскрытия, зависящие в какой-то степени от толщины льда, определяют начало навигации. Поэтому возможность расчета стаивания льда имеет большое практическое значение.

Если пренебречь потоком тепла, идущим на прогрев внутренних слоев льда, то для определения величины стаивания льда или снега достаточно проинтегрировать по времени уравнение теплового баланса снежно-ледяной поверхности (2.5), (8.5) или (10.5). На основании рис. 13 можно заключить, что «запас холода» во льдах толщиной до 1—1,5 м довольно быстро исчезает, поэтому сделанное допущение о пренебрежении затратами тепла на прогрев льда в этом случае будет в какой-то мере справедливым. Проникновение в лед коротковолновой радиации способствует ускорению прогрева льда и уменьшению градиента температуры во льду, а следовательно уменьшению потока тепла в лед от его поверхности посредством теплопроводности.



Для того чтобы провести оценку влияния на стаивание льда «запаса холода» во льду и проникновения коротковолновой радиации в его толщу, следует исходить не из уравнения баланса тепла, а из уравнения (5.5). Если положить в нем  $z=0$  и за начальный момент принять дату начала таяния льда, то для последующих моментов времени можно принять  $\Theta_0(t)=0$ , так как температура поверхности тающего морского льда из-за низкой солености очень близка к нулевой. Решив получающееся при этом интегральное уравнение Вольтерра относительно  $\frac{dH}{dt}$  и проинтегрировав по  $t$  полученный результат, можно получить формулу для определения стаивания льда сверху ( $\Delta H$ ) в виде

$$\Delta H = \frac{1}{l\rho} \left\{ \int_0^t [\Pi(\xi) - F(\xi) + I'(\xi) J(t - \xi)] d\xi + \right. \\ \left. + \frac{8\Delta}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} P_n f_n(t) + \frac{\theta\Delta}{H} \left[ t + \frac{H^2}{3k} - \frac{2H^2}{\pi^2 k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} e^{-\frac{\pi^2 i^2 kt}{H^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{16H^2}{\pi^3 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} f_n(t) \right] \right\}, \quad (15.5)$$

где

$$I' = Q(1 - A); \\ f_n = \frac{1 - e^{-k\nu_n^2 t}}{(2n-1)^2} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-k\nu_n^2 t} - e^{-\frac{\pi^2 i^2 kt}{H^2}}}{4i^2 - (2n-1)^2}.$$

В этой формуле последние два члена учитывают уменьшение величины стаивания льда за счет затраты тепла на его прогрев и отток тепла к нижней границе льда вследствие отлчия  $\theta$  от  $0^\circ$ . Если не учитывать эти члены, то, как видно из формулы, величина  $\Delta H$  оказывается несколько преувеличенной. Легко вычислить, что для льда толщиной до 2 м вклад как второго, так и третьего членов формулы составляет величины порядка 1—2 см за месяц. Для многолетнего льда толщиной 3—4 м расходование тепла на его прогрев и отток тепла к нижней границе льда приводит к уменьшению стаивания на 6—8 см за месяц, т. е. за счет большего «запаса холода», на ликвидацию которого тратится некоторая часть поступающего тепла, многолетние льды стаивают несколько медленнее, чем однолетние. С течением времени

из-за повышения температуры  $\theta$  разница в скоростях стаивания льда различной толщины убывает.

Величина стаявшего слоя льда, как видно из формулы (15.5), зависит также и от проникновения радиации в лед. Если принять, что вся коротковолновая радиация поглощается поверхностью льда, т. е.  $\omega=0$  и  $J=1$ , то  $\Delta H$  будет максимальным. В действительности, как уже отмечалось, величина  $\omega$  отлична от нуля. Это приводит к тому, что функция  $J < 1$  и толщина стаявшего слоя льда уменьшается.

Из работы [253] следует, что в период таяния верхний 5-сантиметровый слой поглощает в среднем 76% коротковолновой радиации, т. е.  $\omega=0,24$ . Несколько больше  $\omega$  по данным Унтерштейнера [327] ( $\omega=0,38$ ). Произведенные оценки показывают, что при  $\omega=0,3$  для льда толщиной 2 м стаивание за счет тепла коротковолновой радиации при учете ее проникновения в толщу льда будет за месяц примерно на 10% меньше, чем при полном поглощении радиации поверхностным слоем. Однако фактическая разница должна быть меньше из-за того, что поглощенная толщей льда радиация приводит не только к повышению температуры, но и к локальному таянию льда. В результате вытаивания и миграции солей плотность поверхностных слоев льда летом, как известно, понижается на 4—5% [87, 202], что формулой (15.5) не учитывается. Если учесть это уменьшение, то разница между стаиванием с учетом проникновения радиации в лед и стаиванием без учета его и уменьшения плотности становится очень малой. Поскольку во многих случаях ошибки в задании исходных параметров велики и приводят к погрешностям в определении стаивания, превышающим изменения величины стаивания за счет проникновения радиации в лед, за счет начального теплозапаса и оттока тепла к нижней поверхности льда, то часто формулу (15.5) можно упростить, отбросив два последних члена и не приняв во внимание проникновение коротковолновой радиации в толщу льда.

При наличии на льду слоя снега проникновение радиации в толщу снега и льда значительно ослабевает, поэтому в данном случае можно ожидать еще меньшего изменения величины стаивания за счет этого фактора, чем при отсутствии снега. Незначительно могут измениться и затраты тепла на прогрев льда, так как в общем-то «запасы холода» в снеге невелики, а порядок величины теплозапаса льда такой же, как и при отсутствии снега.

Таким образом, предположение, что все поступающее сверху тепло расходуется на таяние снежно-ледяного покрова, не приводит к существенным погрешностям в расчете. Достижимая точность удовлетворяет многие запросы практики, поэтому в большинстве вычислений это упрощение принимается [73, 87, 262 и др.]. Для облегчения расчетов толщины стаявшего льда ряд

параметров в формуле из работы [73] был заменен их числовыми значениями, а интегралы представлены в виде суммы

$$\Delta H = 0,0139 \sum_{i=1}^N B_i + 0,12 \sum_{i=1}^N (1 + 0,81r_i) \varphi T_i - \\ - 1,13 \sum_{i=1}^N (1 - r_i) \varphi - h \frac{\rho c}{p}, \quad (16.5)$$

где  $\Delta H$  — толщина льда, стаявшего сверху за  $N$  суток;  
 $B_i$  — радиационный баланс подстилающей поверхности за  $i$  сутки;  
 $\varphi = 0,4 + 0,48V$ ;  
 $V$  — скорость ветра на высоте флюгера в м/сек;  
 $T_i, r_i$  — температура и влажность воздуха на уровне метеорологической будки в течение  $i$  суток.

Последний член формулы характеризует преувеличение толщины льда за счет находящегося на нем снега. Если расчет стаивания производится с момента, когда на льду еще находится снег, то, естественно, часть тепла расходуется на его таяние, вследствие чего  $\Delta H$  уменьшается, что и учитывается последним членом формулы.

Основное количество тепла, идущего на стаивание льда в Арктическом бассейне, поступает из атмосферы посредством лучистых потоков. На рис. 16 представлены для ряда пунктов Арктики отношения радиационного баланса снежно-ледяной поверхности к сумме потоков тепла за счет турбулентного теплообмена, процессов испарения и конденсации и лучистого теплообмена ( $B + \Sigma\Phi$ ), вычисленных по климатическим данным для июня и июля. При  $\frac{B}{B + \Sigma\Phi} > 1$  только часть лучистого потока тепла затрачивается на таяние льда, а остальное тепло расходуется на турбулентный теплообмен и компенсацию затрат тепла на испарение. При  $\frac{B}{B + \Sigma\Phi} < 1$  тепло, расходуемое на таяние льда, поставляется частично лучистыми потоками, а частично турбулентным теплообменом.

Из рис. 16 видно, что чем дальше к северу от материка, тем большая роль в таянии принадлежит лучистым потокам тепла. Поэтому при расчете стаивания льда особое внимание должно уделяться определению радиационного баланса снежно-ледяной поверхности. Это обстоятельство и обусловливает тот факт, что и в эмпирических формулах стаивание льда в Центральной Арктике определяется зависимостью от радиационного баланса или суммарной радиации и температуры воздуха [277]. Ближе

к материку большую роль в таянии играет турбулентный теплообмен. Это позволяет искать зависимость стаивания льда только от температуры воздуха, а радиационный баланс и другие составляющие теплового баланса неявно учитываются постоянным параметром [230, 284].

Для облегчения расчетов по формуле (16.5) предлагаются две номограммы (рис. 17), одна из которых является вспомога-

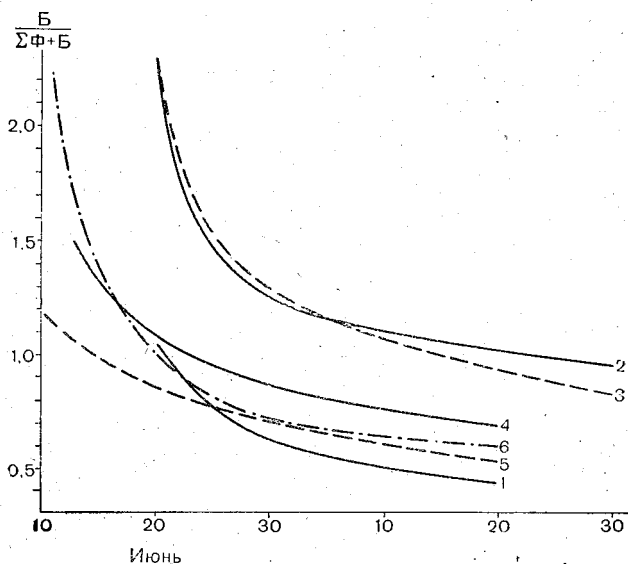


Рис. 16. Отношение радиационного баланса ко всей величине теплообмена между льдом и атмосферой.

1 — о. Диксон; 2 — о. Уединения; 3 — мыс Челюскин; 4 — о. Мостах; 5 — бухта Тикси; 6 — мыс Шмидта.

тельной. Расчеты с использованием этих номограмм производятся следующим образом. По средним для периода расчета скорости ветра и относительной влажности воздуха (см. рис. 17, а) находятся вспомогательные параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Затем по номограмме на рис. 17, б находится толщина стаявшего льда за интервал времени  $t$  суток. Для этого от точки абсциссы, соответствующей радиационному балансу за указанный интервал времени, необходимо подняться до линии Б и на ординате прочесть отсчет, соответствующий стаиванию льда за счет лучистого притока тепла  $\Delta H(B)$ . От точки абсциссы, соответствующей сумме градусо-дней тепла, подняться до линии ранее определенной  $\alpha_1$  и на ординате сделать отсчет  $\Delta H(T)$ . Аналогично от точек абсциссы, соответствующих числу дней интервала, для которого рас-

считывается величина стаивания льда, и толщина снега на начало интервала, нужно опуститься до линий  $\alpha_2$  и  $h$  и получить на ординате отсчеты  $\Delta H(t)$  и  $\Delta H(h)$ . Алгебраическая сумма полученных  $\Delta H$  составляет общую толщину стаявшего слоя льда за данный промежуток времени.

На рис. 18 представлены вычисленные по предложенной методике средние величины стаивания льда по районам ряда полярных станций, наиболее освещенных наблюдениями за толщиной льда. Исходные данные толщины льда и снега выбирались на 1 мая. При расчете использовались фактические значения температуры и скорости ветра. Радиационный баланс рассчитывался согласно методике, изложенной в главе III.

Дата начала таяния определялась на основании формулы (13.5) по значению  $t$ , при котором происходил переход от отрицательных значений  $T_0$  к положительным. Вычислялись ежедневные величины стаивания, которые затем осреднялись. Всего осреднены были ежедневные данные примерно за 10 лет по каждому району.

Начиная с 1960 г. в ААНИИ для прогноза потенциальной сопротивляемости льдов на март—август по изложенной в предыдущей и настоящей главе методике проводятся расчеты температуры льда, а также его нарастания и стаивания по районам ряда полярных станций. В качестве исходных данных при расчетах используются начальные значения толщины льда и снега и аномалии температуры воздуха, скорости ветра и толщины снежного покрова на период расчета, которые определяются на основании синоптического прогноза. Аномалия толщины снежного покрова вычисляется по отклонению от его климатического значения на начальный момент. Поскольку изменения толщины снежного покрова за счет снегопадов, переносов и других нетермических факторов пока еще не прогнозируются, то на практике аномалия  $h$  на начальный момент не меняется до тех пор, пока снег не растает.

Изменение толщины льда в весенне-летний период происходит не только за счет стаивания сверху, но и при таянии и нарастании снизу. К началу таяния во льду остается еще некоторый «запас холода», на ликвидацию которого расходуется тепло, поступающее как сверху, так и снизу, если температура в толще льда ниже, чем на его границах. В тех случаях, когда отток тепла от нижней поверхности льда кверху превышает приток тепла от воды, может происходить нарастание льда, если даже сверху он стаивает. На это обстоятельство обратил внимание Н. Н. Зубов [87] и попытался оценить возможный прирост льда за счет этого «запаса холода». При этом он использовал предположение о том, что поток тепла из воды ко льду отсутствует и все тепло, затрачиваемое на прогрев льда, выделяется при нарастании льда снизу. Следовательно, если  $\Theta$  — средняя

температура льда на момент начала его таяния сверху, то, согласно перечисленным предположениям,

$$(\theta - \tilde{\theta}) H \rho C = l \rho \Delta H. \quad (17.5)$$

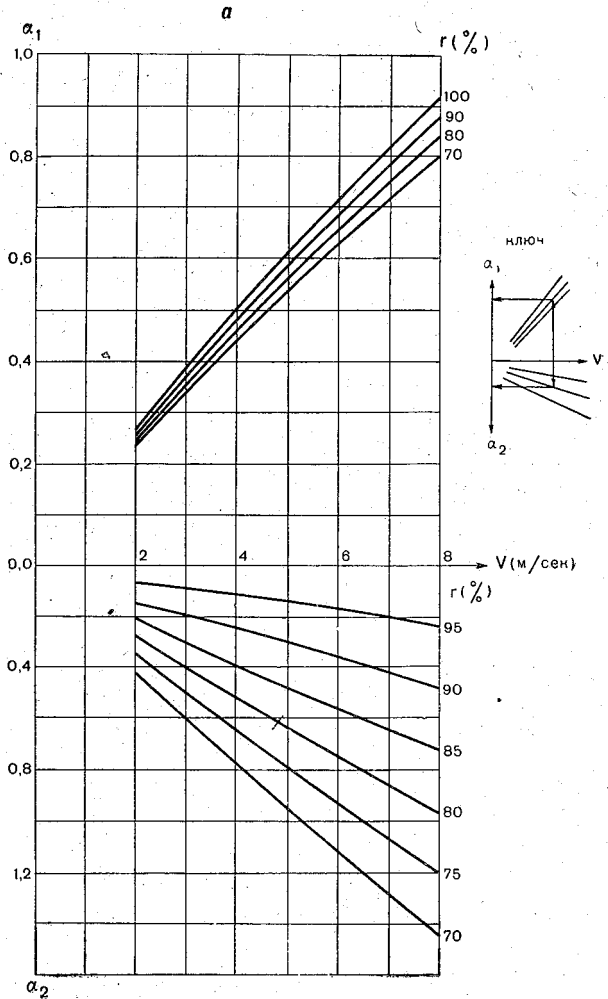
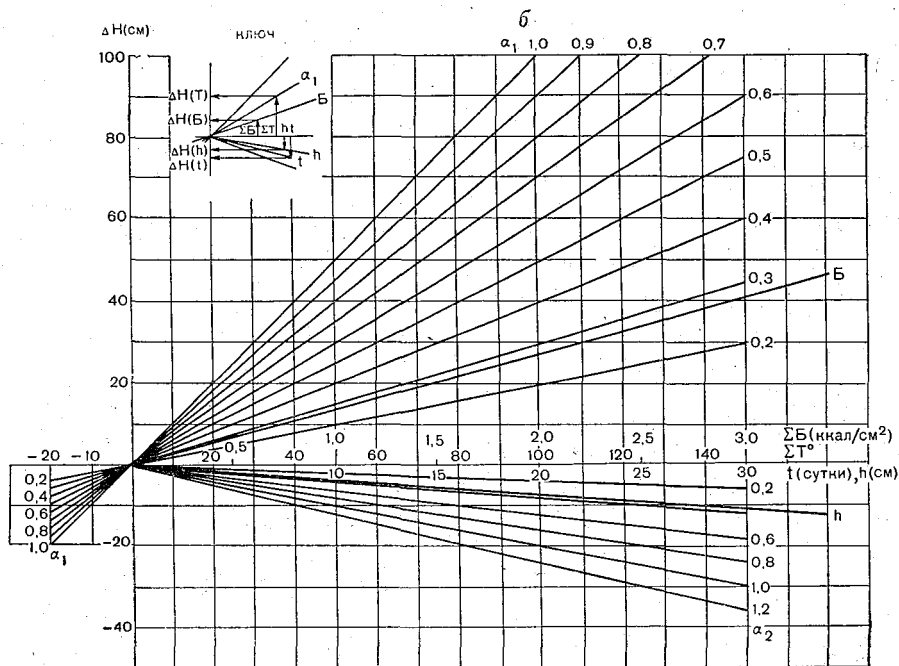


Рис. 17. Номограммы для расчета стаивания льда вспомога

Н. Н. Зубов принял, что средняя температура льда равна полусумме температур его верхней и нижней поверхности и провел расчеты при отрицательных величинах температуры поверхности льда, т. е. до начала его таяния. Но и в этом случае оказалось,

что за счет внутренних запасов холода толщина льда не может увеличиться больше чем на 5—10%. В. Л. Цуриков [244] попытался получить более точные оценки весеннего нарастания морского льда. Он предложил разбить процесс прогрева на четыре фазы, границы между которыми определяются вертикальными профилями температуры льда: 1) линейным; 2) до половины толщины льда изотермическим, а ниже прежним; 3) некоторым профилем, принимаемым льдом, когда температура поверхности льда становится равной  $0^{\circ}$ , а в толще меняется со скоростью, линейно уменьшающейся с глубиной; 4) линейным от  $0^{\circ}$  на поверхности до температуры замерзания на его нижней границе. Такая схематизация процесса позволяет вычислить градиент температуры и рассчитать нарастание льда. Однако первую фазу, когда градиент температуры льда у его поверхности еще положительный и тепло расходуется в атмосферу, вряд ли



дельная (а) и основная (б) при  $\Delta H = \Delta H(B) + \Delta H(T) + \Delta H(t) + \Delta H(h)$ .

законно включать в процесс весеннего прогрева. При интегрировании уравнений, определяющих прирост толщины льда в зависимости от температуры, В. Л. Цуриков без каких-либо пояснений отбрасывает члены, содержащие множители  $\ln 0$ . Поэтому

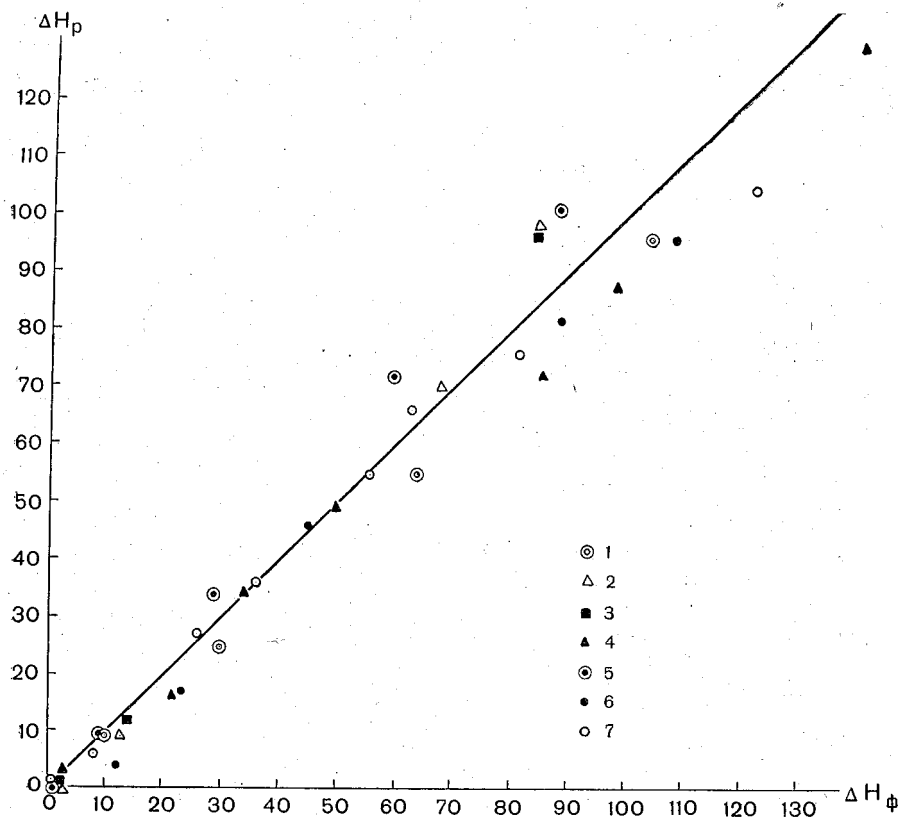


Рис. 18. Средние величины стаивания льда по районам полярных станций.  
 1 — о. Диксон; 2 — мыс Стерлегова; 3 — о. Русский; 4 — о. Преображения; 5 — о. Мостак;  
 6 — мыс Валькаркай; 7 — мыс Шмидта.

справедливость расчетных формул и вычисленных по ним изменений толщины льда вряд ли можно полагать обоснованной.

Оценку величины весеннего нарастания льда легко получить из уравнения (20.4). Если за начало процесса принять момент перехода  $\Gamma_1(\xi)$  через 0 и ради упрощения расчетов считать  $\Phi_B = 0$  и  $v_n(t) = \text{const}$ , то получающееся при этом уравнение легко интегрируется и приводится к виду

$$\begin{aligned}
 H^2 = H_0^2 + \frac{4\Lambda}{lp} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{kv_n^2} P_n (1 - e^{-kv_n^2 t}) + \right. \\
 \left. + \frac{k}{\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \int_0^t \int_0^{\xi} \Phi_n(\sigma) e^{-kv_n^2 (\xi - \sigma)} d\sigma d\xi \right]. \quad (18.5)
 \end{aligned}$$



Здесь  $P_n$  и  $v_n$  определяются по профилю температуры и толщине льда на момент перехода  $\Phi_{л}(\xi)$  через 0, т. е. на момент, когда теплообмен льда с атмосферой из отрицательного становится положительным. Предельное значение изменения  $H$  получится в том случае, если положить  $\Phi_{л}=0$ , т. е. считать, что поток тепла из атмосферы в лед не поступает и его прогрев осуществляется лишь за счет теплоты кристаллизации. Выразив  $P_n$  через некоторый «запас холода», определяемый разницей между средней температурой льда и температурой замерзания ( $\bar{\theta} - \theta$ ), легко получить относительную величину весеннего прироста льда (табл. 15).

Таблица 15

Предельная величина относительного весеннего прироста льда  
(в процентах)

$\frac{\Delta H}{H_0}$	$(\bar{\theta} - \theta)^\circ$						
	1	2	3	4	5	6	7
Пресного льда	0,6	1,3	1,9	2,5	3,2	4,4	6,3
Морского льда	4,0	6,2	7,8	9,2	10,4	12,6	15,5

Данные первой строки табл. 15 полностью согласуются с оценкой весеннего прироста льда, приведенной в монографии Н. Н. Зубова [87]. Если же принять во внимание прогрев льда за счет тепла, поступающего сверху, то эти цифры окажутся еще меньше.

Приведенные оценки величины нарастания льда весной, в том числе и у Н. Н. Зубова, касаются пресного льда. Если учесть зависимость теплоемкости и теплоты плавления морского льда от температуры, то максимально возможный прирост толщины льда, согласно формуле (17.5), может быть представлен

$$\ln \frac{H}{H_0} = \frac{1}{t} \int_{\theta_0}^{\theta} C d\theta. \quad (19.5)$$

Вычисленный по этой формуле прирост льда соленостью 2‰, а в нижнем слое 5‰ при  $\theta = -1,5^\circ$  дан в нижней строке табл. 15. Вследствие того, что значительная часть поступающего в толщу морского льда тепла расходуется на его плавление, фактический «запас холода» в нем оказывается больше, чем при одинаковых условиях в пресном льду. Кроме того, масса чистого льда в единице объема морского льда меньше, чем у пресного. Эти два обстоятельства и обуславливают больший прирост морского льда. Естественно, что из-за прогрева сверху фактический прирост толщины льда будет значительно меньше приведенных цифр.

### § 3. Прогрев воды и таяние льда в массивах

Известно, что участки чистой воды в массивах льда играют большую роль при таянии. В летний период эти участки получают из атмосферы значительно больше тепла, чем лед, так как вследствие малой отражательной способности вода аккумулирует много больше лучистой энергии, чем лед. Поглощенное водой тепло частично расходуется на таяние льда как сбоку, так и снизу. Кроме того, лед получает тепло и при теплообмене непосредственно с атмосферой, в результате чего происходит его стайвание сверху. Н. Н. Зубов [87] произвел оценку изменения сплоченности льда в массиве при его таянии за счет этих двух потоков тепла. При определении величины таяния льдов в результате теплового воздействия воды им было сделано предположение, что поглощенное водой тепло полностью сразу же расходуется на боковое таяние льдин. В таком случае, приравнявая тепло, поступающее на всю площадь водной поверхности в массиве за время  $dt$

$$\Phi_a(1 - N)dt,$$

количеству тепла, необходимого на плавление льдов площадью  $dN$

$$\text{и толщиной подводной части } \frac{\rho}{\gamma} H \\ - \frac{l\rho^2}{\gamma} H dN,$$

получаем уравнение для определения изменения сплоченности льда

$$\frac{dN}{1 - N} = \frac{\Phi_a \gamma}{l\rho^2 H} dt.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к формуле

$$N = 1 - (1 - N_0) \exp\left(\frac{\gamma}{l\rho^2} \int_0^t \frac{\Phi_a}{H} dt\right), \quad (20.5)$$

где  $N_0$  — сплоченность льдов в начальный момент.

Выражение (20.5) отличается от приведенного в монографии Н. Н. Зубова множителем  $\gamma/\rho$  в экспоненте из-за того, что там ошибочно принимается во внимание общая толщина льда, а не только его подводной части. Учет этого множителя приводит к более быстрому уменьшению сплоченности льда, чем дано Н. Н. Зубовым.

Предположение о расходовании всего тепла, поглощенного водой, на таяние льда более или менее соответствует действительности лишь при значительной сплоченности льда. С увеличением пространства чистой воды растет доля тепла, идущего на

повышение ее температуры и на прогрев более глубоких слоев. Поэтому действительное изменение балльности льда за счет термических факторов будет отличаться от рассчитанного по приведенной схеме.

Пренебрегая процессами таяния льда, Ю. В. Николаев [170] попытался получить приближенные оценки соотношения потоков тепла, приходящихся на боковую и нижнюю поверхность льдины. Однако при выводе формул у него вкратились ошибки, поэтому приведенные в работе соотношения потоков тепла к боковой и нижней поверхности льда неточны. Кроме того, он не учитывал расхода тепла на прогрев воды.

Для оценки перераспределения тепла, поступающего из атмосферы и поглощаемого в полыньях и разводьях, была решена поставленная Ю. В. Николаевым задача при тех же граничных условиях для стационарного случая. При этом потоки тепла, приходящиеся на боковую поверхность льдины единичной ширины  $q_6$  и полосу нижней поверхности льдины единичной ширины и длиной от края до ее центра  $q_n$ , могут быть представлены формулами:

$$q_6 = \frac{8\Phi_a X}{\pi^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} a_1 H - 1}{(2m-1)^2 \operatorname{ch} a_1 H} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \operatorname{th} a_1 H}{(2m-1)^2} \sqrt{\frac{a_x}{a_z}} W \right]; \quad (21.5)$$

$$q_n = \frac{32(\zeta - H)a_x}{\pi^4 a_z} \Phi_a W \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} a_2 X - 1}{\operatorname{sh} a_2 X [\operatorname{cth} a_2 X - \operatorname{cth} a_2 (X_1 - X)] (2n-1)}, \quad (22.5)$$

$$\text{где } W = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 \operatorname{ch} a_1 H}}{\frac{4}{\pi^2} \sqrt{\frac{a_x}{a_z}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \operatorname{th} a_1 H}{(2m-1)^2} + \frac{4a_x(\zeta - H)}{\pi^2 a_z X} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} a_2 X - 1}{(2n-1)^2 \operatorname{sh} a_2 X [\operatorname{cth} a_2 X - \operatorname{cth} a_2 (X_1 - X)]};$$

$$a_1 = \frac{\pi(2m-1)}{2X} \sqrt{\frac{a_x}{a_z}};$$

$$a_2 = \frac{\pi(2n-1)}{2(\zeta - H)} \sqrt{\frac{a_z}{a_x}};$$

$\Phi_a$  — приток тепла из атмосферы на единицу площади разводья;

$2X$  — ширина разводья;

$H$  — толщина подводной части льдины;

$\zeta$  — глубина, на которой вертикальный градиент температуры воды принят равным нулю;

$X_1$  — расстояние от середины разводья до середины льдины.

Как и следовало ожидать, при большой сплоченности льда значительная часть тепла, поступающего в воду из атмосферы, расходуется на таяние льда сбоку. С увеличением ширины разводья все большая часть тепла передается в глубинные слои моря, под лед, и поступает к нижней поверхности льдины, приводя к таянию ее снизу. В табл. 16 в качестве примера приведено вычисленное по формулам (21.5) и (22.5) распределение тепла в воде в процентах от поступившего из атмосферы при  $a_x/a_z=10$  и  $X_1=100$  м. На распределение потоков тепла в воде очень сильно влияет соотношение коэффициентов горизонтального и вертикального турбулентного теплообмена. Увеличение этого соотношения приводит к уменьшению проникновения тепла в более глубокие слои моря, и возрастает доля тепла, идущего на боковое таяние льда.

Таблица 16

Распределение тепла, поглощенного разводьем  
(в % от  $\Phi_a$ )

$X$ (м)	$q_b$	$q_n$	Поглощается водой
5	90	8	2
10	73	24	3
25	31	19	50
50	13	12	75

Приведенные оценки распределения тепла, поступающего в разводье, и влияния открытых участков воды на таяние льдов из-за многих упрощений в приведенной задаче имеют ориентировочный характер. Более точное определение влияния тепла, поглощаемого открытыми участками воды, на таяние льда в массивах дано в работе [75]. В этом исследовании предполагалось, что лед общей площадью  $f$  равномерно распределен на площади  $s$ , т. е. сплоченность льда в массиве составляет  $\bar{N} = \frac{f}{s}$ . Предполагалось также, что массив состоит из  $n$  льдин, имеющих форму многоугольника средней площадью  $F$  с периметром  $L_1$ . Если ширина разводья между льдинами составляет в среднем  $2X$ , то периметр фигуры площадью  $s/n$ , ограниченной линией, которая

проходит на расстоянии  $X$  от льдины, будет  $L_2$ . В таком случае на каждую льдину в среднем приходится пространство чистой воды площадью

$$\frac{1}{2}(L_1 + L_2)X = \frac{s-f}{n}.$$

Полагая, что между периметром и площадью льдины существует соотношение

$$L_1 = \kappa \sqrt{F}, \quad L_2 = \kappa \sqrt{\frac{s}{n}},$$

можно получить зависимость между средней шириной разводья в массиве и сплоченностью

$$\begin{aligned} X &= \frac{2(s-f)}{\kappa n \left( \sqrt{F} + \sqrt{\frac{s}{n}} \right)} = \frac{2s(1-N)}{\kappa n \left( \sqrt{\frac{f}{n}} + \sqrt{\frac{s}{n}} \right)} = \\ &= \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{s}{n}} \cdot \frac{1-N}{1+\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Если площадь массива и количество льдин в нем не меняются, тогда  $\sqrt{s/n}$  определяется из начальных условий

$$\sqrt{\frac{s}{n}} = \sqrt{\frac{F_0}{N_0}}.$$

Итак, соотношение между шириной разводья и сплоченностью льда в массиве принимает вид

$$X = \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{F_0}{N_0}} (1 - \sqrt{N})$$

или

$$N = (1 - \beta X)^2, \quad (23.5)$$

где

$$\beta = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{N_0}{F_0}}.$$

Следовательно, зная начальные характеристики массива и увеличение ширины разводья за счет стаивания льдины, можно по формуле (23.5) определить изменение сплоченности льда в массиве. В данном случае предполагается, что динамическое воздействие на льды отсутствует и изменение ширины разводья происходит лишь в результате таяния льда. Величину бокового стаивания льда можно легко вычислить, если известна температура воды в разводьях. В наиболее простом случае, когда

адвекция тепла отсутствует, температура воды определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z_1^2} + a_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},$$

где  $a_z$  и  $a_x$  — коэффициенты вертикальной и горизонтальной теплопроводности.

В работе [75] рассматриваемая область ограничена, как и у Ю. В. Николаева, серединой разводья и серединой льдины (рис. 19) и также принимается, что градиент температуры воды на этих границах равен нулю, т. е. здесь температура воды достигает своих максимальных и минимальных значений.

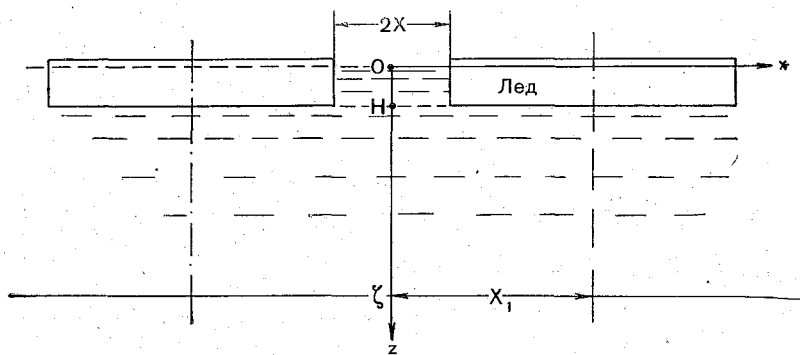


Рис. 19. Схема выделения области распространения задачи.

Температура воды на границе раздела лед—вода полагается постоянной и равной  $\vartheta$  и температура воды на глубине  $\zeta$  равной  $\Theta_1$ . На поверхности воды задано условие баланса тепла, записанное в виде

$$\Pi(t) = N(t) \vartheta - \lambda_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial z_1^2}.$$

Изменение ширины разводья и толщины льдины за счет таяния задается в виде

$$\dot{X} = - \frac{\lambda_2}{l\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=X};$$

$$\dot{H} = - \frac{\lambda_1}{l\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial z_1} \Big|_{z=H},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — коэффициенты вертикальной и горизонтальной теплопроводности воды.

Если считать, что все характеристики в начальный момент известны, то задача получается полностью определенной.

Рассматриваемый участок воды разбивается на два слоя:

$$0 \leq x \leq X, 0 \leq z_1 \leq H \text{ и } 0 \leq x \leq X_1, H \leq z_1 \leq \zeta_1.$$

На границе этих слоев задаются условия склейки, т. е. равенство температур и потоков тепла соприкасающихся сред. В уравнениях первого слоя делается переход к новым переменным:

$$\xi = \frac{z_1}{H(t)}, \quad y = \frac{x}{X(t)},$$

в уравнениях второго слоя — к переменным  $z = z_1 - H$ . Обычно  $H \ll \zeta_1$ , поэтому изменения  $H$  во времени практически не скажутся на величине  $\zeta_1$  и можно считать, что второй слой будет иметь постоянную толщину  $\xi = \zeta_1 - H$ .

В новых переменных исходные уравнения и краевые условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\dot{H}\xi}{H} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \frac{a_z}{H^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{y\dot{X}}{X} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \\ + \frac{a_x}{X^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1; \end{array} \end{aligned} \quad (24.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = \bar{a}_z \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial z^2} + \bar{a}_x \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial x^2} \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq \zeta, \\ 0 \leq x \leq X_1; \end{array} \quad (25.5)$$

$$\Pi(t) = N(t)\vartheta - \frac{\lambda_1}{H} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \quad \begin{array}{l} \xi = 0, \\ 0 \leq y \leq 1; \end{array} \quad (26.5)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq 1, \\ y = 0; \end{array} \quad (27.5)$$

$$\vartheta = \theta, \quad \dot{X} = -\frac{\lambda_2}{lpX} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq 1, \\ y = 1; \end{array} \quad (28.5)$$

$$\vartheta = \bar{\vartheta}, \quad \frac{1}{H} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} \quad \begin{array}{l} \xi = 1, z = 0, \\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq X; \end{array} \quad (29.5)$$

$$\bar{\vartheta} = \theta, \quad \dot{H} = -\frac{\lambda_1}{lp} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} \quad \begin{array}{l} z = 0, \\ X \leq x \leq X_1; \end{array} \quad (30.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq \zeta, \\ x = 0; \end{array} \quad (31a.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq \zeta, \\ x = X_1; \end{array} \quad (31b.5)$$

$$\bar{\vartheta} = \psi(t, \zeta, x) \quad \begin{array}{l} z = \zeta, \\ 0 \leq x \leq X_1; \end{array} \quad (32.5)$$

$$\vartheta = \vartheta(0, \xi, y), \quad \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(0, z, x) \quad t = 0. \quad (33.5)$$

Для получения разностных аналогов этих уравнений производится разбиение  $\xi$  на  $n$  частей ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ) с шагом  $\Delta = \frac{1}{n}$  и  $X$  на  $m$  частей ( $j=0, 1, 2, \dots, m$ ) с шагом  $\nabla = \frac{1}{m}$ , т. е.  $\xi_0=0, \xi_k=k\Delta, \xi_n=1; x_0=0, x_j=j\nabla, x_m=1$ . Аналогично во втором слое  $\zeta$  разбивается на  $n_1$  частей и  $X_1$  на  $m_1$  частей. Причем величина  $m_1$  находилась из соотношения

$$m_1 = \frac{X_1}{X\mu\nabla} \quad (\mu = 1, 2, \dots). \quad (34.5)$$

Эта величина может оказаться дробной, поэтому производится округление до целой по обычным правилам. Такой метод определения  $m_1$  позволяет разделить отрезок  $X_1$  второго слоя на целое число шагов первого слоя, что облегчает переход от первого ко второму слою. В то же время ошибка определения расстояния, на котором выполняется условие (31.5), возникающая за счет округления  $m_1$  до целого числа, не превышает половины горизонтального шага второго слоя и не может быть существенной из-за очень слабого изменения температуры воды по горизонтали у середины льдины. Таким образом, шаги по горизонтали и по вертикали во втором слое будут  $x = \mu\nabla X$  и  $z = \frac{r}{n_1}$ .

Обычно эти шаги более крупные, чем в первом слое, из-за слабой пространственной изменчивости температуры воды во втором слое. Полагалось  $\tau = t_i - t_{i-1}$  для  $i=1, 2, \dots; t_0=0$ .

Разностные уравнения строились через соотношения того же типа, как и в главе IV:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{ijk} = \frac{\vartheta_{ijk} - \vartheta_{i-1,jk}}{\tau}; \quad (35a.5)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_{ij0} = \frac{\vartheta_{ij1} - \vartheta_{ij0}}{\Delta} - \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}\right)_{ij0}; \quad (35б.5)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_{ijn} = \frac{\vartheta_{ijn} - \vartheta_{ijn-1}}{\Delta} + \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}\right)_{ijn}; \quad (35в.5)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_{ijk} = \frac{\vartheta_{ijk+1} - \vartheta_{ijk-1}}{2\Delta}; \quad (35г.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}\right)_{ijk} = \frac{\vartheta_{ijk+1} - 2\vartheta_{ijk} + \vartheta_{ijk-1}}{\Delta^2}. \quad (35д.5)$$



Из уравнения (24.5) для  $\xi=0$  при использовании соотношений (35а.5) и (35б.5) получается

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij0} - \vartheta_{i-1, j0} = & \left( \frac{2a_z \tau}{\Delta^2 H^2} \right)_{i, r, 0} \left[ \vartheta_{ij1} - \vartheta_{ij0} - \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{ij0} \right] + \\ & + \left( \frac{y \dot{X} \tau}{2X \nabla} \right)_{ij0} (\vartheta_{ij+1, 0} - \vartheta_{ij-1, 0}) + \\ & + \left( \frac{a_x \tau}{X^2 \nabla^2} \right)_{ij0} (\vartheta_{ij+1, 0} - 2\vartheta_{ij0} + \vartheta_{ij-1, 0}). \end{aligned}$$

После подстановки в полученное выражение вместо градиента температуры его значения из уравнения баланса тепла (26.5) находится

$$[1 + 2(a' + b)] \vartheta_{ij0} = \varepsilon_i \vartheta_{ij1} + g''_{ij0} \vartheta_{ij+1, 0} + g'_{ij0} \vartheta_{ij-1, 0} + B_i - \vartheta_{i-1, j0}, \quad (36.5)$$

где

$$a' = \frac{N_i \tau a_z}{H_{im} \lambda_1 \Delta}; \quad \varepsilon = \frac{2a_z \tau}{H_{im}^2 \Delta^2};$$

$$g'' = \frac{a_x \tau}{X^2 \nabla^2} + \frac{y \dot{X} \tau}{2X \nabla};$$

$$g' = \frac{a_x \tau}{X^2 \nabla^2} - \frac{y \dot{X} \tau}{2X \nabla}; \quad b = \frac{a_z \tau}{H_{im}^2 \Delta^2} + \frac{a_x \tau}{X^2 \nabla^2};$$

$$B_i = \frac{2\Pi_i \tau a_z}{H \lambda_1 \Delta},$$

причем  $B_i = B[t_0 + (i - 0,5)\tau]$ .

Представление уравнения (24.5) для  $\xi=1$  по разностной схеме при помощи соотношений (35а.5) и (35в.5) дает градиент температуры

$$\frac{1}{H_{im}} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{ijn} = \left( \frac{1}{\dot{H} \tau + \frac{2a_z \tau}{H \Delta}} \right)_{imn} \times$$

$$\times \{ (1 + 2b_{in}) \vartheta_{ijn} - g''_{ijn} \vartheta_{ij+1, n} - g'_{ijn} \vartheta_{ij-1, n} - \varepsilon_i \vartheta_{ij, n-1} - \vartheta_{i-1, jn} \}.$$

Из уравнения теплопроводности второго слоя (25.5) при помощи разностных соотношений типа (35а.5) и (35б.5) аналогично получается выражение градиента температуры на границе раздела слоев

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_{ij0} = & \frac{\bar{\vartheta}_{ij1}}{\bar{z}} - \left( \frac{1}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{2\bar{a}_z \tau} + \frac{\bar{a}_x \bar{z}}{\bar{a}_z \bar{x}^2} \right)_i \bar{\vartheta}_{ij0} + \\ & + \left( \frac{\bar{a}_x \bar{z}}{2\bar{a}_z \bar{x}^2} \right)_i (\bar{\vartheta}_{ij+1, 0} - \bar{\vartheta}_{ij-1, 0}) + \left( \frac{\bar{z}}{2\bar{a}_z \tau} \right)_i \bar{\vartheta}_{i-1, j0}. \end{aligned}$$

При этом следует иметь в виду, что нумерация  $j, k$  для параметров второго слоя будет иная, чем для первого, а именно:  $j=0, 1, 2, \dots, m_1$  и  $k=0, 1, 2, \dots, n_1$ .

Приравняв последние два выражения на основании (29.5), находим температуру на границе раздела слоев

$$\vartheta_{ijn} = \frac{1}{\beta_{ijn}^{IV}} \left[ \beta_{ijn}'' \vartheta_{ij+1, n} + \beta_{ijn}''' \vartheta_{ij-1, n} + \beta_{ijn}' \vartheta_{ijn-1} + \frac{1}{z} \bar{\vartheta}_{ij1} + \beta_{ijn}^V \vartheta_{i-1, jn} \right], \quad (37.5)$$

где

$$\beta' = \frac{\varepsilon}{H_{m\tau} + \varepsilon H_m \Delta}; \quad \beta'' = \frac{\bar{a}_x \bar{z}}{2\bar{a}_z x^2} + \frac{g}{\varepsilon} \beta';$$

$$\beta''' = \frac{\bar{a}_x \bar{z}}{2\bar{a}_z x^2} + \frac{g'}{\varepsilon} \beta'; \quad \beta^{IV} = \frac{1+2b}{\varepsilon} \beta' + \frac{1}{z} + \frac{\bar{z}}{2\bar{a}_z \tau} + \frac{\bar{z} \bar{a}_x}{\bar{a}_z x^2};$$

$$\beta^V = \frac{\bar{z}}{2\bar{a}_z \tau} + \frac{\beta'}{\varepsilon}.$$

При составлении разностных схем уравнений (24.5) и (25.5) для остальных уровней были использованы представления производных посредством центральных разностей (35г.5) и (35д.5). Окончательный вид разностной схемы уравнений следующий:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{ijo} &= \frac{1}{1+2(a'+b)_i} \left[ \varepsilon_i \vartheta_{ij1} + g_{ijo}'' \vartheta_{ij+1,0} + g_{ijo}' \vartheta_{ij-1,0} + B_i + \vartheta_{i-1, j0} \right]; \\ \vartheta_{ijk} &= \frac{1}{1+2b_i} \left[ r_{ik} \vartheta_{ijk+1} + r'_{ik} \vartheta_{ijk-1} + g_{ijk}'' \vartheta_{ij+1, k} + g'_{ijk} \vartheta_{ij-1, k} + \vartheta_{i-1, jk} \right]; \\ \vartheta_{ijn} &= \frac{1}{\beta_{ijn}^{IV}} \left[ \beta_{ijn}'' \vartheta_{ij+1, n} + \beta_{ijn}''' \vartheta_{ij-1, n} + \beta_{ijn}' \vartheta_{ijn-1} + \frac{\bar{\vartheta}_{ij1}}{z} + \beta_{ijn}^V \vartheta_{i-1, jn} \right]; \\ \bar{\vartheta}_{ijk} &= \left( \frac{\bar{a}_z \tau}{z^2 \chi} \right)_i (\bar{\vartheta}_{ijk+1} + \bar{\vartheta}_{ijk-1}) + \left( \frac{\bar{a}_z \tau}{x^2 \chi} \right)_i (\bar{\vartheta}_{ij+1, k} + \bar{\vartheta}_{ij-1, k}) + \frac{\bar{\vartheta}_{i-1, jk}}{\chi_i}; \\ \bar{\vartheta}_{ink} &= \psi_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (38.5)$$

где

$$\begin{aligned} r_{ik} &= \frac{a_z \tau}{H_{im}^2 \Delta^2} + \xi \frac{\dot{H}_{lm} \tau}{2H_{im} \Delta}; \\ r'_{ik} &= \frac{a_z \tau}{H_{im}^2 \Delta^2} - \xi \frac{\dot{H}_{lm} \tau}{2H_{im} \Delta}; \\ \chi &= 1 + \frac{2\bar{a}_z \tau}{z^2} + \frac{2\bar{a}_x \tau}{x^2}. \end{aligned}$$

В соответствии с условиями симметрии (27.5) и (31.5) на правой и левой границе рассматриваемого участка принимается для каждого уровня

$$\vartheta_{-1} = \vartheta_1, \quad \bar{\vartheta}_{-1} = \bar{\vartheta}_1, \quad \bar{\vartheta}_{m-1} = \bar{\vartheta}_{m+1}. \quad (39.5)$$

Значения  $\dot{X}$ ,  $\dot{H}$ ,  $X$  и  $H$  находятся из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\dot{X})_{ik}^{(r+1)} &= -\frac{\lambda_2}{l_p X^{(r)}} (\vartheta_{ij-1, k} - \Theta_{imk}); \\ (\dot{H})_{ij} &= -\frac{\lambda_1}{l_p} (\bar{\vartheta}_{ij1} - \Theta_{ij0}); \\ X_{ik} &= X_{i-1, k} + \dot{X}_{ik} \tau; \\ H_{ij} &= H_{i-1, j} + \dot{H}_{ij} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (40.5)$$

Первые два уравнения этой системы являются разностными аналогами формул (28.5) и (30.5). Расчеты температуры воды и таяния льда по приведенной системе уравнений проводились на ЭЦВМ по программе, составленной А. С. Грушкиной.

Решение системы уравнений (38.5) проводилось итерациями с использованием метода Либмана [205], применительно к которому система (38.5) записывается в виде

$$\varphi_{ijk}^{(r+1)} = \varphi_{ijk}^{(r)} - d [\varphi_{ijk}^{(r)} - F]. \quad (41.5)$$

Здесь ради краткости записи через  $\varphi$  обозначена левая часть уравнений системы (38.5) и через  $F$  — правая;  $1 < d < 2$  — коэффициент, подбираемый опытным путем исходя из условий сходимости. Через  $r$  обозначен номер итерации, причем в  $F$  для точек справа и сверху от искомой берется  $(r+1)$  приближение, а для точек, расположенных слева и снизу от искомой, берется  $r$  приближение, т. е. решение проводится начиная с правого верхнего угла каждой области в сторону меньших  $j$  и больших  $k$ . Сходимость итерационного процесса определяется по максимальной величине разности  $|\varphi^{(r+1)} - \varphi^{(r)}|$ .

Решение системы уравнений (40.5) проводится каждый раз перед решением уравнений (41.5), причем при каждой итерации системы (41.5) первое уравнение (40.5) решается до полной сходимости итерационного процесса этого уравнения. Легко показать, что этот процесс быстро сходится, и обычно уже двух-трех итераций бывает достаточно для получения точности порядка  $10^{-2}$  м/сутки.

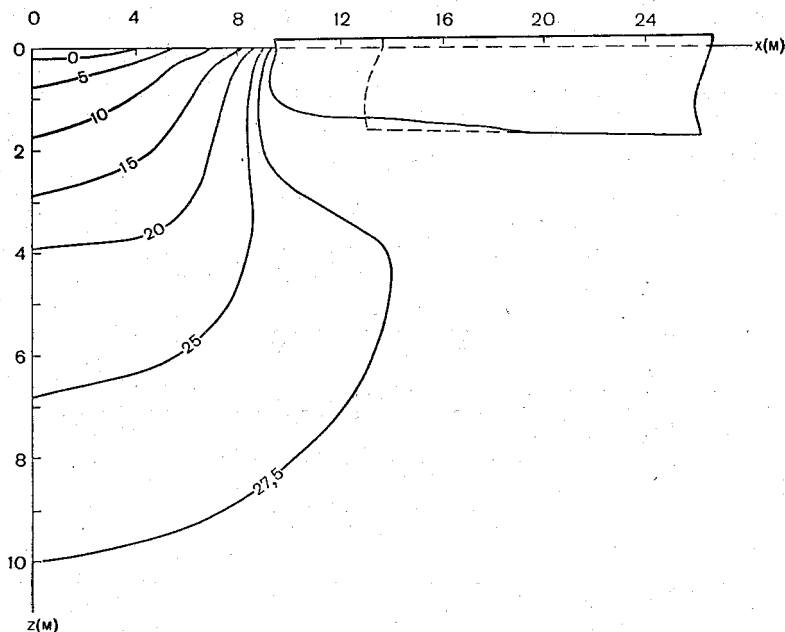


Рис. 20. Характер изменения температуры воды в разводье и толщины льда. На изотермах указаны  $\Delta\theta$  ( $\theta = -1,57 - \Delta\theta \cdot 10^{-3}$ ).

При решении уравнения (41.5) было определено, что для  $d=1,5$  достаточно провести около десяти итераций, как максимальная величина разности  $|\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}|$  становится менее заданной невязки  $0,005^\circ$ , т. е. и в этом случае процесс быстро сходится.

Просчитанные на ЭЦВМ «Урал-2» примеры позволяют сделать некоторые выводы относительно процесса таяния льда в массиве. Полученная в результате расчета картина температурного поля в воде и характера таяния льдины соответствует сложившимся физическим представлениям и наблюдениям (рис. 20). В качестве исходных метеорологических данных для этого примера брались климатические значения метеорологических элементов по полярной станции мыс Шмидта.

Тепло, поглощаемое открытыми участками воды, распространяется посредством турбулентного перемешивания под льдину. Вследствие этого таяние льдины происходит не только сбоку, но и снизу. Интенсивность бокового таяния льдины зависит от ее толщины, размеров прилегающего участка чистой воды и величины турбулентного перемешивания воды. С ростом турбулентного перемешивания прогрев охватывает более глубокие слои и дальше распространяется подо льдом, но температура воды в разводье повышается медленнее. Поэтому в данном случае будет расти скорость таяния льдины снизу и уменьшаться вели-

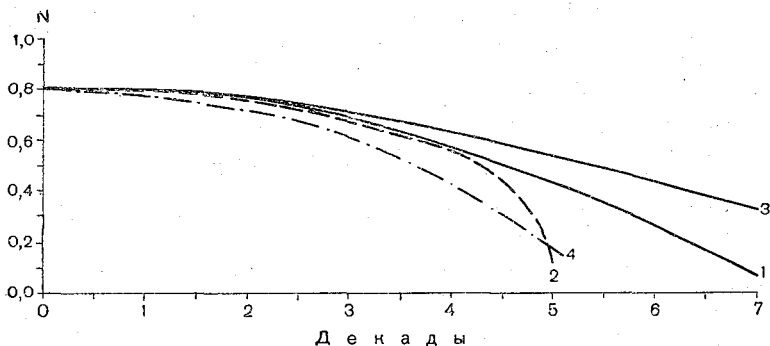


Рис. 21. Изменение сплоченности льда.

1 —  $H=2,0$  м,  $F_0=10^4$  м<sup>2</sup>; 2 —  $H=2,0$  м,  $F_0=25 \cdot 10^4$  м<sup>2</sup>; 3 —  $H=3,0$  м,  $F_0=10^4$  м<sup>2</sup>;  
4 —  $H=2,0$  м (по схеме Н. Н. Зубова).

чина бокового стаивания. Это видно из рис. 20, на котором пунктиром показаны контуры льдины для  $a_z=10$  см<sup>2</sup>/сек, а сплошной линией для  $a_z=40$  см<sup>2</sup>/сек.

Поскольку часть тепла, поглощенного разводьем, идет на прогрев воды, что не учитывается схемой Н. Н. Зубова, то изменение сплоченности льда за счет термических факторов будет в действительности меньше, чем дано у Н. Н. Зубова (рис. 21). Можно подобрать такие малые величины коэффициента вертикальной теплопроводности, что практически не будет теплопередачи в более глубокие слои воды, тогда изменение сплоченности льда по данной схеме будет совпадать с результатами Зубова. При вычислениях сплоченности льда, представленной на рис. 21, теплообмен между водой и атмосферой в обеих схемах принимался одинаковым, не учитывалось стаивание льда сверху и предполагалось, что массив состоит из одинаковых льдин простейшей формы с  $\beta=4$  (квадраты). Качественная картина изменения сплоченности льда от его толщины такая же, как и у Зубова, т. е. с увеличением толщины льда интенсивность

уменьшения сплоченности замедляется. Однако в количественном отношении роль толщины льда несколько меньше, чем в схеме Зубова.

Величина бокового стаивания льдины зависит от размеров разводий, увеличиваясь с их ростом. Разводья при одной и той же сплоченности льда определяются величиной льдин, возрастая с увеличением их площади. Однако, как видно из рис. 21, изменение сплоченности льда при одной и той же его начальной балльности вначале не зависит от размеров льдин, хотя в массиве, состоящем из крупных льдин, боковое стаивание каждой из них будет большим, чем в массиве, стоящем из малых льдин. Это объясняется тем, что с увеличением ширины разводья растет количество тепла, идущего на прогрев воды и таяние льда снизу. Начиная с некоторого момента лед становится настолько тонким, что изменение горизонтальных размеров льдины происходит за счет таяния как сбоку, так и снизу. При этом происходит резкое уменьшение сплоченности, что хорошо видно на рисунке. Для льдин большей толщины (порядка 3 м) или при меньших потоках тепла из атмосферы такого заметного явления не будет наблюдаться. В таком случае можно не учитывать спектр площадей льдин, а достаточно знать их средние размеры в начальный момент.

#### § 4. Прогрев поверхностного слоя моря

Как известно, прогрев поверхностного слоя моря зависит не только от величины поступающего из атмосферы тепла, но и от перераспределения его в вертикальном и горизонтальном направлении. Вполне очевидно, что чем выше интенсивность вертикального турбулентного перемешивания, тем больше отток тепла в глубь моря и меньше повышается температура верхних слоев воды. Перемешивание в горизонтальном направлении приводит к выравниванию температуры на больших площадях. Это хорошо показано В. В. Пановым [179], проанализировавшим на примере решения стационарного уравнения теплопроводности вклад вертикальной и горизонтальной турбулентности и течений в изменение температуры воды Карского моря. Согласно его решению, течения и горизонтальное перемешивание создают как бы фон температурного поля, на которое накладываются изменения, вызванные переносами тепла по вертикали. Это будет тем справедливее, чем короче интервал времени, за который определяется  $\Delta\theta$ . Такой же вывод можно сделать и из работы Л. И. Скриптуновой [213], где показана преобладающая роль теплообмена с атмосферой по сравнению с адвекцией в формировании изменений температуры поверхностного слоя воды в Северной Атлантике.

При оценке переноса тепла вглубь посредством вертикальной турбулентности следует принимать во внимание большую интенсивность перемешивания в слое волнового воздействия и быстрое затухание перемешивания глубже этого слоя. Это приводит к характерному в летний период медленному изменению температуры воды в слое волнового перемешивания и к резкому увеличению вертикальных градиентов температуры на границе этого слоя. Делаются попытки объяснить такой профиль температуры особенностями поглощения коротковолновой радиации в верхнем слое, что приводит к накоплению тепла [47]. Однако и другие элементы, не зависящие от радиации, например соленость воды, имеют в летний период скачок примерно на той же глубине, что и температура. Поэтому вряд ли можно объяснить характерный температурный профиль в летний период объемным поглощением радиации. А зависимость толщины верхнего слоя воды с малыми градиентами температуры от широты можно попытаться объяснить, как показал С. А. Китайгородский [106], влиянием силы Кориолиса. Да и сами авторы этой работы [47] в практических целях рекомендуют принимать глубину залегания слоя скачка температуры равной половине длины волны.

Величина прогрева воды зависит не только от притока тепла, но и от толщины слоя волнового перемешивания. Из-за слабого перемешивания ниже этого слоя отток тепла вглубь происходит слабо, и основное количество тепла остается в верхнем слое. Если он толстый, то произойдет небольшое повышение температуры, при малой же толщине слоя повышение температуры будет большим.

Поэтому при исследованиях термического режима верхнего слоя моря, и в частности при определении величины прогрева, всегда стараются учесть эту особенность в характере вертикального перемешивания, задавая либо модель коэффициента турбулентной теплопроводности с быстрым убыванием  $a_z$  на некоторой глубине [89, 106], либо просто задавая глубину слоя скачка и решая двухслойную задачу [48, 93, 94]. Таким образом, возникают трудности, сопряженные не только с определением интенсивности вертикального турбулентного перемешивания, но и с определением глубины, на которой происходит резкое изменение турбулентного перемешивания.

Обычно глубина залегания слоя скачка в летний период связывается с ветровым волнением или просто со скоростью ветра [282, 322], иногда учитывается влияние стратификации воды, потоков тепла и т. д. Так, Н. Ф. Кудрявцев [127] полагает, что толщина верхнего слоя определяется в основном волновым перемешиванием и устойчивостью. Он принял, что последняя в слое скачка достигает величин, характеризующихся числами  $Ri \geq 0,5$ . Выразив  $Ri$  через градиенты плотности и скорость

орбитального движения волны, можно определить глубину расположения верхней границы слоя скачка

$$\bar{h} \geq \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \ln \left( \frac{2\pi^4 \gamma}{g} \cdot \frac{\bar{h}^2}{\bar{\lambda}^2 \pi^2 \frac{d\gamma}{dz}} \right), \quad (42.5)$$

где  $\frac{d\gamma}{dz}$  — градиент плотности воды в слое скачка

Проведенная им проверка этой формулы на фактическом материале дала удовлетворительные результаты. Это показывает, что основные факторы, определяющие глубину залегания слоя скачка, учтены правильно. Но для расчетов толщины гомогенного слоя эта формула не годится, так как требует предварительного измерения градиента плотности в слое скачка, а следовательно, и искомой глубины.

С. А. Китайгородский [106] определяет толщину слоя интенсивного волнового перемешивания по глубине, на которой градиент температуры достигает минимума. Для этого используется выражение градиента температуры через известные величины потока тепла и коэффициент теплопроводности. В тех случаях, когда последний определяется только ветровым волнением, для вычисления  $\bar{h}$  получается простое выражение

$$\bar{h} \approx 2\bar{\beta}^2 \frac{V^2}{g}, \quad (43.5)$$

где  $\bar{\beta}$  — возраст волнения.

На вертикальный профиль температуры воды и величину  $\bar{h}$  оказывает влияние, согласно исследованиям С. А. Китайгородского, не только стратификация воды, но и сила Кориолиса и объемное поглощение коротковолновой радиации водой. Повышение устойчивости и увеличение силы Кориолиса приводят к более резкому переходу от однородного слоя к слою скачка и уменьшению  $\bar{h}$ , а увеличение прозрачности и ослабление поглощения радиации — к менее резкому переходу и увеличению  $\bar{h}$ . Но в среднем для грубой оценки расположения верхней границы слоя скачка летом в арктических морях можно использовать формулу (43.5) при  $\bar{\beta} \approx 0,9$ .

Верхний слой интенсивного волнового перемешивания в арктических морях в весенне-летний период обычно хорошо выражен из-за распреснения от таяния льдов и стока рек. Вследствие перемешивания температура и соленость в этом слое практически не меняются по вертикали, т. е. его можно считать гомогенным. В таком случае, если не учитывать адвекцию тепла, изменение температуры воды ( $\Delta\theta$ ) этого слоя за интервал времени  $\tau$  пропорционально разности потоков тепла на его верхней и нижней границе.



Представив уравнение баланса тепла для поверхности моря в виде

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0} = N\vartheta - \Pi,$$

будем иметь

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{c\gamma\bar{h}} \int_0^{\tau} \left[ \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=\bar{h}} - N\vartheta + \Pi \right] dt. \quad (44.5)$$

Если полагать изменение температуры воды в гомогенном слое в течение интервала времени  $\tau$  линейным, то для определения теплообмена через слой скачка можно воспользоваться формулой (37.3), в которой  $S$  заменяется на  $\vartheta$ . В результате приходим к выражению, позволяющему вычислять величину прогрева через начальную температуру воды и метеорологические характеристики,

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta = & \frac{1}{c\gamma\bar{h} \left(1 + \frac{4}{3\bar{h}} \sqrt{\frac{a\tau}{\pi} + \frac{\bar{N}\tau}{c\gamma\bar{h}}}\right)} \left\{ \int_0^{\tau} \Pi dt - \bar{N}\tau\vartheta_0 + \right. \\ & + \tau c\gamma a \sum_{k=1}^M b_k \left[ \left(1 + \frac{(z_{k-1} - \bar{h})^2}{2a\tau}\right) \operatorname{erfc} \frac{z_{k-1} - \bar{h}}{2\sqrt{a\tau}} - \right. \\ & - \left. \left(1 + \frac{(z_k - \bar{h})^2}{2a\tau}\right) \operatorname{erfc} \frac{z_k - \bar{h}}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{z_k - \bar{h}}{\sqrt{a\pi\tau}} e^{-\frac{(z_k - \bar{h})^2}{4a\tau}} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{z_{k-1} - \bar{h}}{\sqrt{a\pi\tau}} e^{-\frac{(z_{k-1} - \bar{h})^2}{4a\tau}} \right] \right\}, \quad (45.5) \end{aligned}$$

где  $\bar{N}$  — осредненная в интервале  $\tau$  величина  $N$ ;

$b_k$  — градиент температуры на отрезке  $\delta z_k$ ;

$\vartheta_0$  — температура гомогенного слоя в начальный момент (остальные обозначения прежние).

Изменение температуры на глубине  $z > \bar{h}$  при этом определяется формулой (36.3) при соответствующей замене  $S$  и  $a_1$  на  $\vartheta$  и  $a$ .

При получении формулы (45.5) полагалось, что коротковолновая радиация поглощается поверхностью моря. А. А. Пивоваров [184], оценивая влияние объемного поглощения радиации на формирование температуры воды, показал, что при интенсивном турбулентном перемешивании совершенно несущест-

венно, где происходит это поглощение. Поскольку основная часть потока радиации поглощается в слое интенсивного волнового перемешивания, то схематизация поглощения приводит примерно к таким же результатам, что и учет проникновения ее вглубь. Поэтому такая схематизация процесса поглощения коротковолновой радиации, приводящая к более простому решению, используется в большинстве исследований по расчету температуры воды.

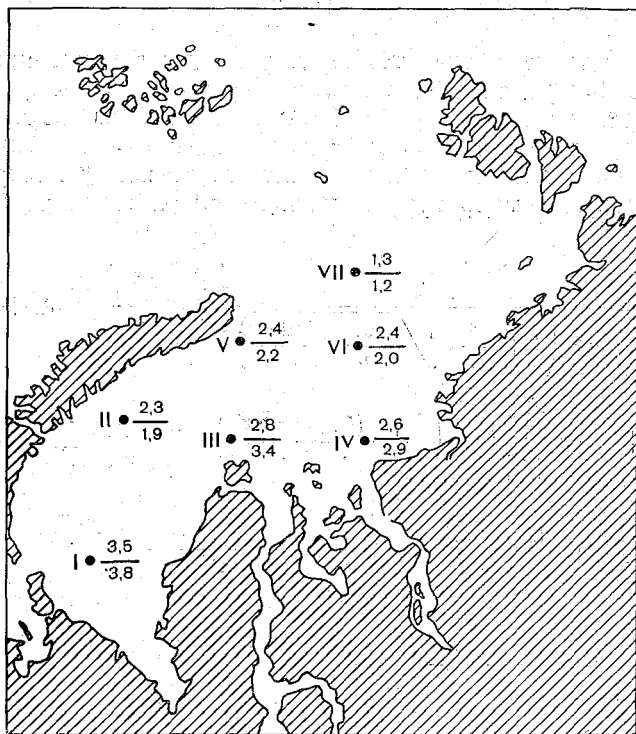


Рис. 22. Величина прогрева гомогенного слоя моря по районам (в градусах).

Числитель — расчетные величины, знаменатель — фактические.

Полученные по формуле (45.5) результаты вычислений изменений температуры гомогенного слоя воды за месяц в ряде районов Карского моря приведены на рис. 22. Исходными данными при этих расчетах были средние многолетние значения метеорологических элементов и средняя многолетняя температура поверхностного слоя воды во вторую декаду июля. Вследствие того, что в районах II и VII в середине июля еще бывает

лед и часть поступающего в воду тепла расходуется на его таяние, здесь рассматривались изменения температуры с третьей декады июля до середины августа.

При расчетах толщина однородного слоя бралась по фактическим данным, коэффициент турбулентной теплопроводности принимался равным  $1 \text{ см}^2/\text{сек}$  и градиент температуры ниже гомогенного слоя  $b_k$  считался неизменным по глубине и равным  $-0,1 \text{ град/м}$ .

Из приведенных данных видно, что расчетные величины прогрева воды, в общем, близки к фактическим. При этом в районах II, V, VI, VII, где в июле еще часто бывают льды, фактические изменения температуры воды меньше вычисленных. Возможно, что здесь часть тепла расходуется на таяние льда, что не учитывается формулой (45.5). В более южных районах фактический прогрев несколько больше вычисленного. В этих районах наиболее существенно проявляется адвекция тепла, и, может быть, эти различия величин  $\Delta\theta$  объясняются неучтенной адвекцией тепла баренцевоморских и речных теплых вод.

Если не учитывать оттока тепла от однородного слоя вглубь, то в зависимости от его толщины произошло бы повышение температуры поверхностного слоя воды приблизительно на  $0,5^\circ$  на севере и на  $1^\circ$  в более южных районах моря. При этом чем толще гомогенный слой, тем меньшие изменения температуры вызовет такая схематизация процесса прогрева. По-видимому, отчасти это обстоятельство и обуславливает возможность вычисления изменений температуры воды однородного слоя моря только по тепловому балансу на его поверхности или по тепловому балансу и адвекции [5, 260 и др.].

## **Глава VI. РАЗВИТИЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ МОРЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ АТМОСФЕРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ОСЕННЕ-ЗИМНИЙ ПЕРИОД**

### **§ 1. Метод расчета некоторых элементов гидрологического режима верхнего слоя моря**

Преобладание в осенне-зимний период оттока тепла в атмосферу над притоком приводит к выхолаживанию моря: температура воды понижается вплоть до температуры замерзания и происходит образование льда.

Следовательно, приток тепла к поверхности моря приводит не только к количественным изменениям величин некоторых гидрологических элементов, но и к изменению качественного состояния поверхности моря. Последнее чрезвычайно важно учитывать в период навигации. В частности, практические запросы навигации в арктических морях требуют знания характера развития осенних гидрологических процессов и определения количественных значений некоторых элементов гидрологического режима. Очень важно определение сроков окончания навигации, обусловленных наступлением устойчивого ледообразования, оптимальных условий навигации осенью для судов безледокольного и ледокольного типа в зависимости от интенсивности нарастания льда на тех или иных участках арктической трассы и т. д.

В настоящее время для решения некоторых из перечисленных задач широко применяются эмпирические связи гидрологических характеристик с показателями отдельных метеорологических и гидрологических процессов [85]. Однако эти методы расчета в большинстве случаев далеко не полностью вскрывают механизм развития гидрологического процесса и поэтому не всегда точно учитывают факторы, определяющие рассчитываемую характеристику. В этом отношении применение методов, представляющих физический процесс в виде аналитических уравнений, имеет определенное преимущество. Несмотря на определенную схематизацию, при формулировке задач можно учесть многообразие взаимодействующих факторов, получить ко-

личественные соотношения между ними и выявить наиболее существенные.

Первые наиболее детальные аналитические исследования термического режима моря в период осеннего охлаждения проведены А. Г. Колесниковым, П. С. Линейкиным и С. В. Лутковским. А. Г. Колесников [114] рассмотрел формирование температуры моря в период от момента достижения морем максимального прогрева до начала замерзания. Предполагалось, что изменение температуры воды происходит за счет теплообмена с атмосферой и адвекции. При этом принималось, что адвекция тепла течениями задана, поэтому задача фактически являлась одномерной.

Близкими по характеру постановки задачи являются работы П. С. Линейкина [144] и С. В. Лутковского [146]. П. С. Линейкин дал решение одномерного уравнения теплопроводности с произвольным характером изменения коэффициента турбулентной теплопроводности от глубины. На нижней границе деятельного слоя принималось условие отсутствия теплообмена с нижележащими слоями. Задача об учете адвективных членов в уравнении теплопроводности рассмотрена им в самых общих чертах. С. В. Лутковский при решении одномерного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности учел поток тепла от грунта.

Л. А. Жуков в своих исследованиях охлаждения поверхностного слоя океана [83, 84] уравнение теплопроводности дополняет уравнениями движения, что позволяет учитывать горизонтальный перенос изменений температуры.

Во всех этих работах не принимался во внимание тот важный факт, что в период охлаждения в море обычно развивается конвекция, в результате которой происходит интенсивное перемешивание воды с соответствующей теплоотдачей в атмосферу. При этом интенсивность перемешивания в слое конвекции и в нижележащих слоях различна. Верхний слой становится практически гомогенным, и толщина его с течением времени растет. Поскольку уплотнение верхних слоев воды происходит не только за счет выхода жидкостей, но и за счет притока солей, то для определения температуры воды и глубины проникновения конвективного перемешивания уже недостаточно одного уравнения теплопроводности, а нужно учитывать и приток солей.

В какой-то степени глубина перемешивания учитывается в предложенном шведским ученым Родэ [192, 193] способе расчета образования льда в Балтийском море. Он исходит из предположения, что изменение температуры поверхности моря пропорционально разности температур воды и воздуха. Коэффициент пропорциональности зависит от глубины моря и определяется по имеющимся характеристикам сроков ледообразования и теплообмена. Сходная с этим способом методика вычисления даты

ледообразования разработана группой японских ученых [246]. Они учитывают среднюю глубину распространения конвективного перемешивания и в зависимости от ее величины определяют запаздывание даты ледообразования относительно момента перехода температуры воды через точку замерзания. Ход температуры воды определяется по ходу температуры воздуха, но с меньшей амплитудой и некоторым запаздыванием по фазе. Оба эти способа расчета образования льда можно отнести к категории полупырических методов, которые с той или иной точностью позволяют определить одну характеристику гидрологического режима.

Разработанная В. А. Цикуновым на основе решения уравнений баланса тепла и солей теория конвективного перемешивания, как уже отмечалось, позволяет определять несколько элементов гидрологического режима при монотонном выхолаживании моря. Основы этой теории были использованы автором при разработке методики расчета на ЭЦВМ значений гидрологических элементов в осенне-зимний период [77].

В основу этой методики расчета заложено положение, высказанное еще Н. Н. Зубовым [87], об определяющей роли конвективного перемешивания в верхних слоях моря при формировании осеннего термического и ледового режима. При этом полагается, что конвекция возникает в результате уплотнения верхних слоев воды либо за счет выхолаживания при теплообмене с атмосферой, либо за счет осолонения при испарении воды и ледообразовании, либо за счет адвекции более плотных вод. Естественно, все перечисленные факторы могут действовать одновременно.

До тех пор пока конвекция отсутствует, изменение температуры и солености может быть описано обычными уравнениями диффузии. Но самый верхний слой толщиной  $h$ , который подвержен интенсивному волновому перемешиванию, предполагается гомогенным. В соответствии с этим для одномерного случая можно записать

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad h \leq z < \infty. \quad (1.6)$$

Изменение температуры верхнего гомогенного слоя происходит за счет теплообмена с атмосферой ( $\Phi_B$ ) и нижележащими слоями воды:

$$c \gamma h \frac{\partial \vartheta_0}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} - \Phi_B, \quad (2.6)$$

где

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=h+\varepsilon};$$

$\vartheta_0$  — температура гомогенного слоя воды.

Предполагается, что на поверхности моря выполняется условие баланса тепла, которое, как отмечалось, может быть представлено в виде

$$\Phi_B = N\vartheta_0 - \Pi. \quad (3.6)$$

В уравнениях (2.6) и (3.6) принято, что поток тепла  $\Phi_B$  положителен в тех случаях, когда он направлен вверх (охлаждение воды), и отрицателен при его направлении вниз (прогрев воды). Таким образом, согласно уравнениям (2.6) и (3.6), на уровне  $z = \bar{h}$  выполняется условие

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \left( c\gamma \bar{h} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial t} + N\vartheta_0 - \Pi \right) = \frac{\Psi}{\lambda}. \quad (4.6)$$

Выбрав вторым граничным условием  $\vartheta \neq \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ , можно получить решение уравнения (1.6) тем же способом, который использовался в главе III при определении притока солей в слой конвективного перемешивания снизу:

$$\begin{aligned} \vartheta(t, z) = & \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^N f_n(z - z_n) - \sum_{j=M+1}^N \chi_j(z_j - z) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^M \chi_k(z_k + z - 2\bar{h}) \right] - \frac{\sqrt{a}}{\lambda} \int_0^t \Psi(t - \xi) \times \\ & \times \frac{\exp \left[ -\frac{(z - \bar{h})^2}{4a\xi} \right]}{\sqrt{\pi\xi}} d\xi \quad \bar{h} \leq z < \infty. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Функции  $f$  и  $\chi$  имеют тот же вид, что и в главе III, и зависят от начального распределения температуры воды по глубине и интенсивности вертикального турбулентного теплообмена. Так же должно выполняться условие  $\bar{h} \leq z_n \leq z$ ,  $z \leq z_j < \infty$ ,  $\bar{h} \leq z_k < \infty$ . Для того чтобы получить формулу, позволяющую вычислять температуру гомогенного слоя, нужно в выражении (5.6) положить  $z = \bar{h}$ . Тогда

$$\vartheta_0(t) = - \sum_{k=1}^M \chi_k(z_k - \bar{h}) - \frac{\sqrt{a}}{\lambda} \int_0^t \frac{\Psi(t - \xi)}{\sqrt{\pi\xi}} d\xi. \quad (6.6)$$

Расчеты температуры воды по формулам (5.6) и (6.6) удобно проводить для малых отрезков времени  $t = \tau$ , в течение которых можно было бы принять входящие в  $\Psi$  величины постоянными

(равными, например, их среднесуточным значениям  $\tilde{\psi}$  при  $\tau = 1$  суткам). Тогда

$$\vartheta_0(\tau) = - \sum_{k=1}^M \chi_k (z_k - \bar{h}) - \frac{2\tilde{\Psi}}{\lambda} \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}}. \quad (7.6)$$

Легко вычисляется интеграл и в выражении (5.6) при  $\psi = \tilde{\psi} = \text{const}$ .

Поскольку входящая в  $\psi$  температура воды заранее не известна, то ее вычисление производится с использованием метода итераций. По исходному значению температуры воды вычисляется нулевое приближение  $\tilde{\psi}^{(0)}$ , по которому определяется первое приближение  $\vartheta_0^{(1)}$ . На основании полученной  $\vartheta_0^{(1)}$  вычисляется первое приближение  $\psi^{(1)}$ , дающее возможность получить второе приближение  $\vartheta_0^{(2)}$ , и т. д. При малых значениях шага  $\tau$  изменения  $\vartheta_0(t)$  невелики и обычно одной-двух итераций бывает достаточно для получения нужной для практических целей точности.

Для районов, в которых осеннее выхолаживание моря сравнительно редко прерывается периодами прогревов, повышение температуры воды за период прогрева оказывается возможным определять по более грубой схеме. Это, в частности, касается и тех случаев, когда нет сведений о коэффициенте вертикальной теплопроводности. Грубая оценка величины прогрева может быть получена исходя из предположения о том, что прогрев распространяется лишь до глубины  $Z_1$  и от горизонта  $\bar{h}$  до  $Z_1$  изменение температуры воды меняется линейно в зависимости от глубины. В таком случае, если за интервал времени  $\tau$  изменение температуры воды гомогенного слоя при прогреве произошло на величину  $\Delta\vartheta$ , то

$$- \int_0^{\tau} \Phi_B(t) dt = 0,5c\tau(\bar{h} + Z_1)\Delta\vartheta. \quad (8.6)$$

Из этого выражения находится  $\Delta\vartheta$ . Поскольку  $\Phi_B$  зависит от искомой температуры воды, то вычисление  $\Delta\vartheta$  производят методом последовательных приближений, выбирая в качестве нулевого приближения температуру на предыдущем шаге по времени:

$$\Delta\vartheta_{i+1}^{(m+1)} = \frac{2}{c\tau(Z_1 + \bar{h})} \left[ \tilde{N}\tau(\vartheta_i + 0,5\Delta\vartheta_{i+1}^{(m)}) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Pi(t) dt \right], \quad (9.6)$$

где  $\vartheta_i$  — температура воды гомогенного слоя на  $i$  шаге по времени;

$\Delta\vartheta_{i+1}$  — величина прогрева гомогенного слоя воды за  $(i+1)$  шаг по времени;

$\tilde{N}$  — среднее значение  $N$  за период  $\tau$ ;

$m$  — номер итерации.



Приближенное значение  $Z_1$  можно получить либо по многолетним характеристикам режима моря, либо по формуле (5.6) как глубину, на которой  $\Delta\vartheta$  не превосходит некоторую заданную величину.

Изменение температуры воды на горизонтах  $\bar{h} \leq z_j \leq Z_1$  при прогреве в данном случае определяется формулой

$$\Delta\vartheta(z_j) = \Delta\vartheta_{i+1} \left( 1 + \frac{z_j - \bar{h}}{\bar{h} - Z_1} \right), \quad (10.6)$$

которая имеет смысл до тех пор, пока выражение в скобках положительно. Осолонение поверхностного слоя воды при испарении влаги и диффузии солей снизу за интервал времени  $\tau$  определяется по формулам, приведенным в главе III.

В тех случаях, когда теплообмен с атмосферой и приток солей приведут к возрастанию плотности поверхностного слоя воды до такой величины, что она окажется больше плотности нижележащих слоев воды, наступает конвекция. В главе III приведены выражения, позволяющие вычислять температуру, соленость и глубину залегания слоя конвективного перемешивания, и изложена методика расчетов. Здесь эти выражения записаны с добавлением адвективных членов в той последовательности и форме, в какой они были использованы при составлении программы на ЭЦВМ:

$$\left. \begin{aligned} J^{(m+1)} &= \frac{1}{c\gamma} \left[ \tilde{N} (\vartheta_i + 0,5 \Delta\vartheta_{i+1}^{(m)}) \tau - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Pi(t) dt \right]; \\ \vartheta_{i+1}^{(m+1)} &= 0,5 \left[ \vartheta_i \left( 1 + \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) + \vartheta'_i \left( 1 - \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) \right] + \\ &+ \frac{J^{(m+1)}}{\bar{h}_{i+1}} + \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a \frac{\partial \vartheta_0^{(m)}}{\partial z} dt + \\ &+ \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{\bar{h}(t)} V \frac{\partial \vartheta^{(m)}}{\partial x} dz dt; \\ S_{i+1}^{(m+1)} &= 0,5 \left[ S_i \left( 1 + \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) + S'_i \left( 1 - \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\gamma \bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S^{(m)} dt + \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{\bar{h}(t)} V \frac{\partial S^{(m)}}{\partial x} dz dt; \\ \Delta\vartheta_{i+1}^{(m)} &= \vartheta_{i+1}^{(m)} - \vartheta_i; \\ \sigma_{i+1} &\leq \sigma'_i. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

В адвективных членах уравнений (11.6)  $x$  обозначает направление, по которому происходит перенос тепла и солей. В третьем уравнении членом, содержащим  $\Phi_s$ , учитывается осолонение воды в слое конвекции как за счет испарения, так и за счет притока солей снизу.

Метод решения системы уравнений (11.6) уже изложен в главе III. Здесь следует подчеркнуть, что для каждого  $n$  при определении

$$\bar{h}_{i+1}^{(n)} = \bar{h}_i + n\delta h \quad (12.6)$$

итерационный процесс по  $m$  проводится до тех пор, пока невязки  $|\Phi_{i+1}^{(m+1)} - \Phi_{i+1}^{(m)}|$  и  $|S_{i+1}^{(m+1)} - S_{i+1}^{(m)}|$  не будут меньше некоторых заданных величин.

При малом шаге  $\tau$  изменения температуры и солёности в слое конвективного перемешивания невелики и обычно бывает достаточно одной-двух итераций для достижения необходимой точности. А при  $\tau \leq 1$  суткам можно вообще не проводить итерационного процесса по  $m$ , так как испытания схемы на ЭЦВМ показали, что расчеты адвекции и притоков тепла и солей к слою конвективного перемешивания сверху и снизу по данным на начало интервала  $t_i$  и уточненным в результате итерации практически одинаковы. Во всяком случае возникающая при этом погрешность за счет неточностей в определениях интенсивности турбулентного перемешивания и скорости течения не меньше невязки между двумя первыми итерациями.

Как уже отмечалось, полученной системой уравнений можно пользоваться до тех пор, пока температура поверхностного слоя воды не достигнет температуры замерзания  $\theta$ . При этом предполагается, что на поверхности моря сразу же появляется лед. Теплообмен моря с атмосферой происходит уже через лед, толщина которого меняется. Поскольку вертикальный профиль температуры тонкого льда можно полагать линейным, то изменение толщины льда определяется из уравнения баланса тепла на его нижней поверхности, которое при этом записывается в виде

$$lp \frac{dH}{dt} = \Lambda \frac{\theta - \Theta_0}{H} - \Phi'_B,$$

где  $\Theta_0$  — температура поверхности льда.

Решение этого уравнения представляется выражением

$$H_{i+1} = \sqrt{H_i^2 + \frac{2\Lambda}{lp} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\theta - \Theta_0) dt - \frac{2}{lp} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi'_B H dt}.$$

В естественных условиях лед всегда покрыт слоем снега, поэтому необходимо выразить  $\Theta_0$  через температуру поверхности снега  $\Theta_c$ , которую, как ранее отмечалось, в большей или меньшей степени можно отождествлять с температурой воздуха. При линейном вертикальном профиле температуры снега это соотношение легко получается. В целях упрощения подкоренного выражения можно учесть, что температура воды подо льдом меняется во времени сравнительно слабо, поэтому без особой погрешности она может быть представлена ее средней величиной за промежутки времени  $\tau$ . При этих условиях

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Theta_0 dt = \Xi = \frac{2}{1 + \varepsilon} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Theta_c(t) dt + 0,5\tau\varepsilon(\theta_i + \theta_{i+1}) \right],$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{\lambda_c H}.$$

В последнем члене подкоренного выражения ради облегчения вычислений  $H$  заменяется средним значением в указанном интервале времени и выносится из-под знака интеграла. Поток тепла к нижней поверхности льда в данном случае уже не зависит от атмосферных условий и вычисляется из второго уравнения системы (11.6). С увеличением толщины льда линейность вертикального профиля температуры в нем выполняется в меньшей степени. В этом случае для определения величины нарастания его следует использовать более точные формулы, приведенные в главе IV.

При образовании морского льда часть солей выделяется в воду, приводя к увеличению ее солености, что может привести к возрастанию толщины слоя конвекции. Этот приток солей зависит, как известно, от солености воды и образовавшегося льда, а также от скорости нарастания толщины льда. Осолонение воды в слое конвективного перемешивания при этом было определено формулой (41.3), которую нужно в качестве одного из слагаемых добавить в правую часть третьего уравнения системы (11.6). Естественно, параметр  $\Phi_S$  в данном случае характеризует только приток солей снизу, так как из-за отсутствия испарения воды нет и соответствующего осолонения.

Температура воды в слое конвективного перемешивания принимается равной температуре замерзания и зависит от солености воды. Принимая во внимание изложенное, система уравнений, определяющая элементы гидрологического режима после образования льда, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\theta_{i+1}^{(m+1)} &= -10^{-2} \{ 0,3 + S_{i+1}^{(m)} [5,27 + 4 \cdot 10^{-3} S_{i+1}^{(m)} (1 + \\
&\quad + 0,01 S_{i+1}^{(m)})] \}; \\
\Xi_{i+1}^{(m+1)} &= \frac{2}{1+\varepsilon} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Theta_c(t) dt + 0,5\tau\varepsilon (\theta_i + \theta_{i+1}^{(m+1)}) \right]; \\
J_1^{(m+1)} &= \frac{1}{c\gamma} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi'_B dt = 0,5 \{ (\theta_i - \vartheta'_i) \bar{h}_i + \\
&\quad + [\theta_i + \vartheta'_i - 2\theta_{i+1}^{(m+1)}] \bar{h}_{i+1} \} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} a \frac{\partial \vartheta_0^{(m)}}{\partial z} dz + \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{\lambda(t)} V \frac{\partial \vartheta_0^{(m)}}{\partial x} dz dt; \\
H_{i+1}^{(m+1)} &= \sqrt{H_i^2 + \frac{\Lambda}{lP} [\tau (\theta_i + \theta_{i+1}^{(m+1)}) - \Xi_{i+1}^{(m+1)}] - \dots} \\
&\quad \leftarrow \dots - \frac{c\gamma}{lP} (H_i + H_{i+1}^{(m)}) J_1^{(m+1)}; \\
S_{i+1}^{(m+1)} &= \left( \frac{p}{\gamma} S_{i+1}^{(m)} - S_n \right) (H_{i+1}^{(m+1)} - H_i) \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} + S_i \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} + \\
&\quad + 0,5 (S_i + S'_i) \left( 1 - \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} \right) + \frac{1}{\gamma \bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S^{(m)} dt + \\
&\quad + \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{\lambda(t)} V \frac{\partial S^{(m)}}{\partial x} dz dt; \\
\sigma_{i+1} &\leq \sigma'_i.
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Порядок решения системы уравнений (13.6) и определения глубины распространения слоя конвективного перемешивания здесь таков же, как и при определении элементов конвекции до начала ледообразования. Наибольшей величиной изменения в итерациях от шага к шагу по  $m$  в данной системе уравнений обладает  $H$ . Поэтому оказалось возможным определять сходимость итерационного процесса по невязке лишь этого элемента. При небольшом шаге  $\tau$  величина  $J_1$  невелика, и итерационный процесс сходится быстро.

Адвективный перенос и приток тепла и солей в слой конвекции сверху и снизу, записанные в уравнениях (11.6) и (13.6) в общем виде, вычисляются по соответствующим формулам главы III.

## § 2. Расчетная схема и сопоставление результатов расчета с опытными данными

Изложенная в предыдущем параграфе задача была запрограммирована для ее реализации на ЭЦВМ «Урал-2». В качестве исходного материала использовалось распределение температуры и солености в зависимости от глубины по данным глубоководной гидрологической станции. Для расчетов адвекции тепла и солей по восьми румбам на некоторых расстояниях  $x_j$  от этой станции задавались осенние температура и соленость поверхностного слоя воды, принимавшиеся неизменными во времени. При расположении станции около берега температура и соленость воды на направлениях на берег задавались не по поверхностному слою, а по данным некоторой глубины, что позволяло в какой-то степени учесть сгон и подъем глубинных вод. Выбор отмеченного горизонта производился эмпирически.

Метеорологическая информация (температура воздуха, радиационный баланс, скорость и направление ветра) задавалась в виде среднедекадных величин. Средние суточные значения температуры воздуха, радиационного баланса и скорости ветра для  $k$  декады определялись по формуле

$$f = A + Bt + Ct^2, \quad (14.6)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  на каждую декаду вычислялись из нижеследующей системы уравнений, полученной в предположении параболического характера изменения элемента  $f$  во времени:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_{k-1} &= A - 5B + 25C; \\ \bar{f}_k &= A + 5B + 25C; \\ \bar{f}_{k+1} &= A + 15B + 225C; \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

здесь  $\bar{f}$  — среднедекадная величина метеорологического элемента. Шаг времени  $\tau$  был выбран равным одним суткам.

Последовательность операций при счете следующая. По средней суточной величине скорости ветра по формуле (29.3) вычислялась глубина ветрового перемешивания, и если она оказывалась больше  $\bar{h}_i$ , то использовалась в качестве  $\bar{h}_i$ . В соответствии со скоростью и направлением ветра определялась скорость и направление дрейфового течения. Затем решалась система

уравнений (11.6) и вычислялось изменение глубины перемешивания по формуле (12.6) до тех пор, пока плотность гомогенного слоя воды не становилась равной или меньшей плотности нижележащих слоев воды. Причем если оказывалось  $J < 0$ , то вместо  $J/\bar{h}_{i+1}$  во второе уравнение системы (11.6) подставлялось выражение (9.6) и изменение температуры воды ниже уровня  $\bar{h}_{i+1}$  определялось по формуле (10.6). По вычисленной солености воды в гомогенном слое рассчитывалась, согласно формуле (40.3), температура замерзания, с которой сравнивалась полученная величина  $\Phi_{i+1}$ . Если она оказывалась выше температуры замерзания, то происходил переход к вычислению гидрологических элементов для следующего шага  $\tau$ , а уже рассчитанные  $\Phi$ ,  $S$ ,  $\bar{h}$  использовались в качестве исходных.

Если же  $\Phi_{i+1}$  оказывалась равной или ниже температуры замерзания, то фиксировался номер шага  $\tau$ , позволяющий вычислить дату ледообразования, и дальнейшие расчеты величин гидрологических элементов проводились на основании уравнений (12.6) и (13.6).

Первоначально в уравнении (12.6) полагалось  $n=0$  и решались уравнения (13.6) до тех пор, пока итерационный процесс не сходил. Затем проверялась выполнимость условия

$$\sigma_{i+1} \leq \sigma'_i.$$

Если это условие не выполнялось, то  $n$  в формуле (12.6) увеличивалось на 1, рассчитывалось новое  $\bar{h}_{i+1}$  и снова решались уравнения (13.6). Так происходило до тех пор, пока плотность воды в слое конвективного перемешивания не становилась равной или меньше плотности нижележащих слоев воды. После этого осуществлялся переход к расчету гидрологических элементов для следующего шага  $\tau$ .

В том случае, когда за счет тепла глубинных вод и горизонтальной адвекции лед полностью стаивал, снова счет производился по первоначальной системе уравнений до нового появления льда. При этом фиксировался номер шага и этого, второго, появления льда.

Поскольку заранее не известна ни толщина снега на льду, ни его теплопроводность, то параметр  $\epsilon$ , входящий во второе уравнение системы (13.6), определялся на основании среднемноголетних данных, и величина его принималась постоянной для осеннего периода.

Испытание изложенного метода расчета элементов осеннего гидрологического режима в верхнем слое моря проводилось более чем для 400 гидрологических станций, выполненных в различных районах Карского моря за период десять—пятнадцать лет в июле—октябре. Выбор этих районов определялся, во-первых, наличием необходимого комплекса наблюдений, на основе которых производился расчет, во-вторых, тем, чтобы методику

расчета проверить в районах с различными гидрометеорологическими особенностями режима.

Наибольший объем фактического материала имелся по срокам ледообразования, поэтому и наиболее детальная проверка методики расчета проведена по сопоставлению вычисленных и фактических дат ледообразования [77], результаты которой приведены на рис. 23. По координатным осям на этих графиках отложена продолжительность периода в сутках от начального момента, за который принималась дата выполнения гидрологической станции, до даты устойчивого ледообразования. Линиями ограничено поле, в котором рассчитанные даты не выходят за пределы  $\pm 20\%$  амплитуды сроков устойчивого ледообразования за многолетний период.

Как видно из рис. 23, наиболее хорошее совпадение сравниваемых величин получено для района *в*. Здесь в 75% случаев вычисленные величины отличаются от фактических не более чем на 4 суток. Для района *д* большинство вычисленных сроков ледообразования хотя и находится в пределах  $\pm 20\%$  амплитуды, смещено в сторону более раннего ледообразования по сравнению с фактическим. Вероятно, причиной таких отклонений может служить неучтенный схемой приток тепла постоянными течениями. При расчете адвекции тепла и солей дрейфовыми течениями для этих двух районов оказалось возможным использование средних многолетних данных температуры и солености воды. Но уже для районов *б* учет аномалий солености воды за данный год приводит к нескольким лучшим результатам. Для района *а* положительные результаты получаются только при учете в расчетах адвекции ежегодных аномалий солености. Поскольку в этом районе нельзя было использовать неизменную температуру поверхности воды для расчета адвекции тепла, то здесь производился учет только адвекции солей.

Роль адвекции в формировании гидрологического режима и, в частности, сроков ледообразования во всех этих районах различная. Если в районах *в* и *д* учет адвекции приводит к изменению сроков ледообразования на 1—2 суток, то для района *б* — до 6—7 суток, а в районе *а* адвекция солей сдвигает ледообразование в сторону более поздних сроков в среднем на 2 недели (в отдельные же годы сдвиг составляет больше месяца). Этим и объясняется необходимая корректность в выборе исходных данных для расчета адвекции. В центральной части моря горизонтальные градиенты солености и температуры воды невелики, поэтому здесь можно не учитывать адвекцию водных масс.

Различная роль адвекции в формировании осеннего гидрологического режима объясняется ее влиянием на толщину слоя конвективного перемешивания, так как при вовлечении в конвективное перемешивание более глубоких слоев воды их теплозапас влияет на температуру поверхностного слоя воды, а тем

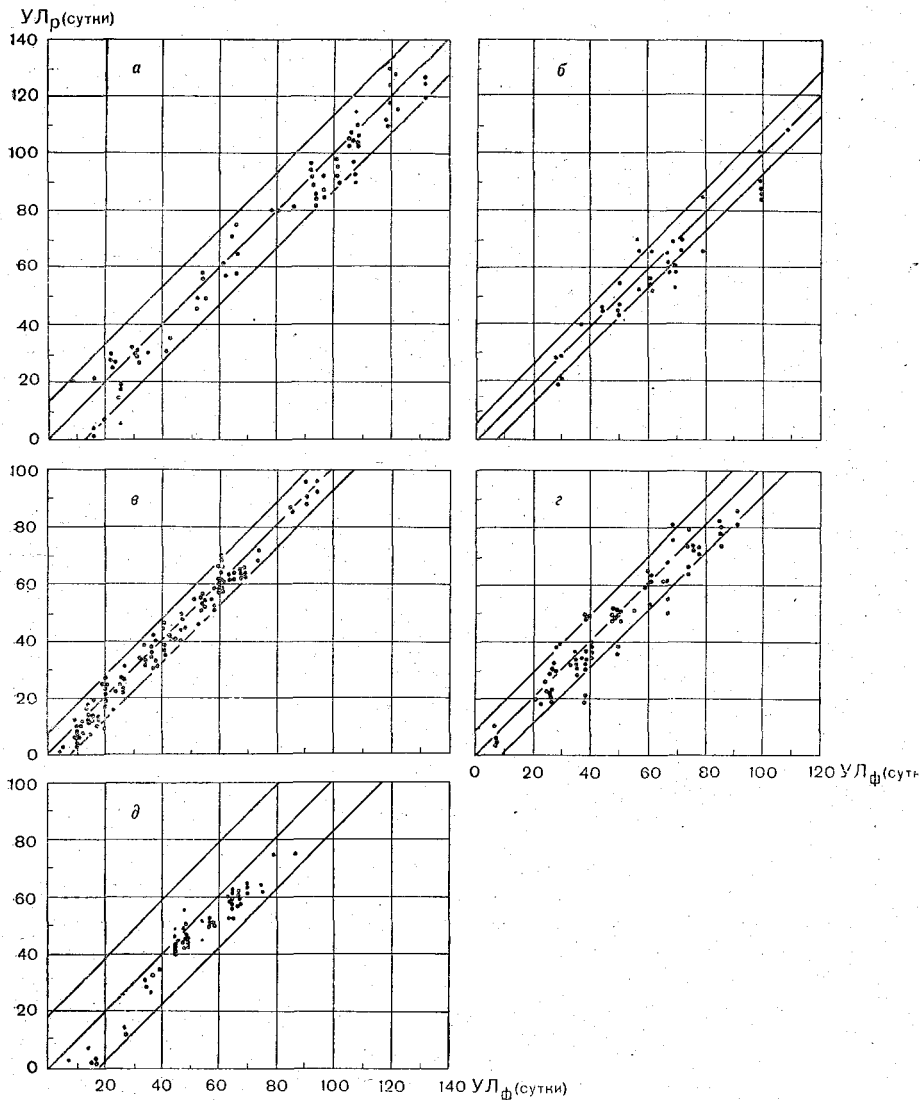


Рис. 23. Сопоставление сроков устойчивого ледообразования расчетных ( $УЛ_r$ ) с фактическими ( $УЛ_ф$ ) по районам *а*, *б*, *в*, *г*, *д* [77].



самым и на сроки ледообразования. Обычно к началу осеннего выхолаживания моря летний прогрев распространяется на глубину 20—50 м. Поэтому если вовлекается в конвективное перемешивание большая толща воды, то теплоотдача осуществляется сразу большой массой воды, и понижение температуры воды будет меньше, чем при малой толщине слоя конвекции. Из-за этого при прочих одинаковых условиях ледообразование должно происходить тем позднее, чем больше глубина слоя конвективного перемешивания. На рис. 24 показана глубина проникновения конвективного перемешивания на дату ледообразования. Этот рисунок построен на основании результатов расчета по данным 83 гидрологических станций за 18 лет для района *a*.

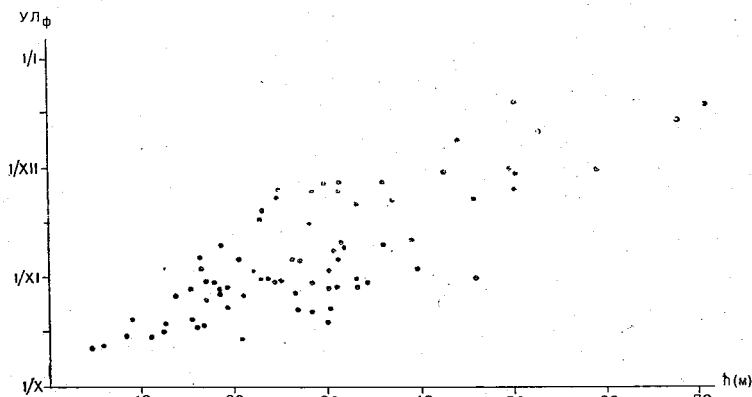


Рис. 24. Зависимость сроков устойчивого ледообразования УЛФ от глубины распространения конвекции.

Несмотря на то что величина прогрева и стратификация на каждой станции могут быть различными, несмотря на своеобразный характер метеорологических условий в осенний период, в целом на рисунке видна связь между сроками ледообразования и глубиной распространения конвекции. Естественно, из-за разнородных метеорологических и гидрологических условий для приведенного пункта рис. 24 носит иллюстративный характер, однако ясно видно, что при малой толщине слоя конвективного перемешивания ледообразование бывает преимущественно ранним, при распространении конвекции до большой глубины ледообразование преимущественно позднее. Это положение в общем справедливо и для других районов моря.

Изложенное заставляет полагать, что помимо теплозапаса моря к моменту осеннего выхолаживания и характеристик теплообмена его с атмосферой, большую роль в определении сроков ледообразования играет плотностная стратификация воды, поскольку именно она определяет глубину проникновения конвективного перемешивания. Так как плотность воды в основном

определяется ее соленостью, то по распределению последней в предосенний период можно получить представление о возможной интенсивности конвекции. Действительно, при значительных вертикальных градиентах солености в поверхностном слое воды по всей акватории моря вряд ли можно ожидать позднего ледообразования даже при большом теплоспасе моря. При малых же градиентах солености больше вероятности, что конвективное перемешивание охватит большую массу воды и охлаждение поверхностного слоя будет происходить медленнее, чем в первом случае. Поэтому во втором случае может ожидаться более позднее ледообразование.

Следует заметить, что этот факт может быть одной из причин разброса точек на графиках статистических связей устойчивого ледообразования с характеристиками атмосферных процессов, которые были получены различными авторами [102, 126, 206 и др.]. Эти связи устанавливают корреляционное соотношение между сроками устойчивого ледообразования и характеристиками температуры воздуха в летний и осенний периоды, ледовитостью моря и разностями давления на различных створах, индексами циркуляции и т. д. Состояние водной массы: стратификация по плотности, перенос водных масс, влияющий на плотностную стратификацию, либо учитывалось постоянным эмпирическим параметром, либо вообще не учитывалось. Вместе с тем, в некоторые годы учет этого фактора, по-видимому, позволил бы объяснить, почему начало ледообразования не соответствует развитию атмосферных процессов.

Фактического материала по другим элементам (величина которых вычислялась изложенным методом) имелось меньше, чем по срокам ледообразования. Так, например, сопоставление вычисленных толщин слоя конвекции с фактическими можно было проводить только в том случае, если в одном и том же пункте глубоководные гидрологические наблюдения производились по крайней мере дважды в течение летне-осеннего периода. Таких случаев, к сожалению, оказалось немного (табл. 17).

Как известно, большое влияние на нарастание толщины льда оказывает снежный покров. В настоящее время, к сожалению, толщина снега на льду не прогнозируется. Поэтому расчет величины нарастания льда выполнялся в предположении, что снег на льду составляет 0,1 толщины последнего. Такое соотношение между ними было выбрано на основании средних многолетних толщин снега и льда по центральной части Карского моря и оно оставалось неизменным при расчетах по всем пяти районам. Сопоставление расчетных величин с результатами наблюдений в районах полярных станций (рис. 25) позволяет сделать заключение о реальности вычисленных толщин льда. Во всех приведенных на рис. 25 случаях начальный момент выбирался еще до начала ледообразования, и промежутки времени, на который

Таблица 17

**Расчетные и фактические толщины слоя конвективного перемешивания**

Район	Дата выполнения станций		Толщина слоя конвекции (м)	
	первой	повторной	расчетная	фактическая
в	18/VIII 1955	10/X	11	15
	8/VIII 1954	27/XI	8	12
	6/VIII 1964	5/XI	8	10
	16/VIII 1952	10/X	11	12
	16/VIII 1952	10/X	12	13
	16/VIII 1952	10/X	13	12
	16/VIII 1952	10/X	11	10
	23/VIII 1952	2/X	10	10
а	16/VIII 1962	13/X	20	20
	16/VIII 1962	13/X	30	30—35
д	25/VIII 1947	24/XI	12	14

производился расчет толщины льда, составлял не менее месяца.

Толщина льда зависит не только от атмосферных условий и слоя снега, но и от температуры и плотностной стратификации

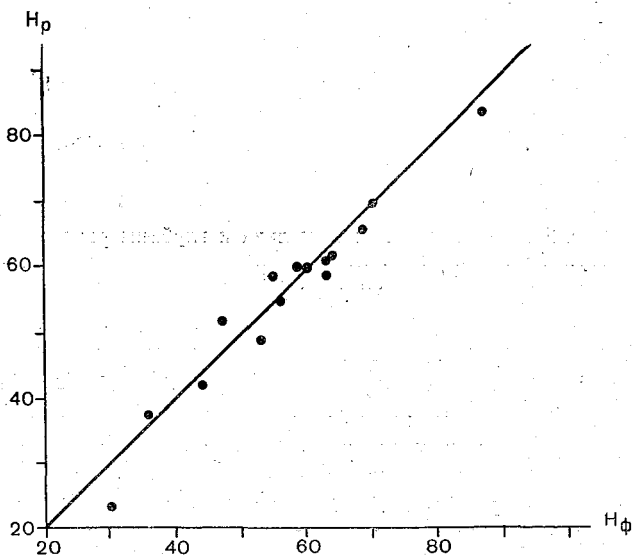


Рис. 25. Сопоставление расчетной толщины молодого льда  $H_p$  с фактической  $H_ф$ .

водной массы. И в тех случаях, когда вертикальные градиенты плотности воды таковы, что конвективное перемешивание распространяется до большой глубины, увеличение толщины льда

замедляется или даже происходит уменьшение ее. В качестве примера на рис. 26 приведено изменение глубины распространения конвективного перемешивания и толщины льда в районах выполнения двух гидрологических станций в центральной части Карского моря. Метеорологические условия в обоих пунктах одинаковы. Толщина слоя конвекции на момент ледообразования и сами даты ледообразования одни и те же. Но в районе станции

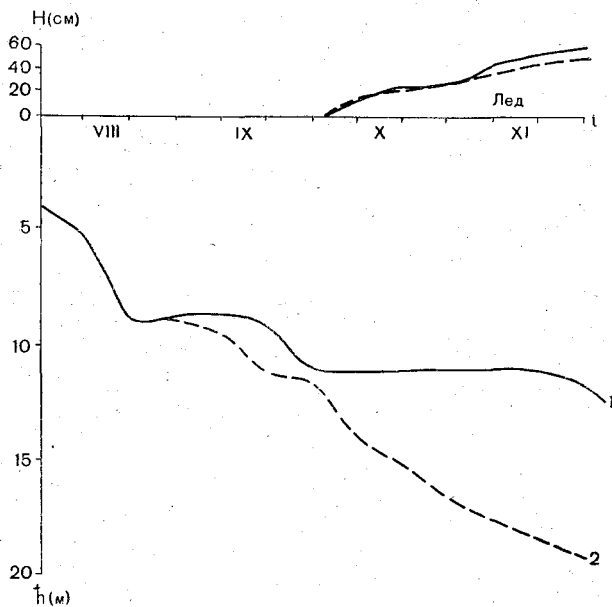


Рис. 26. Изменение толщины льда и глубины распространения конвекции по гидрологическим станциям № 1 и № 2

№ 1 на нижней границе слоя конвекции сформировался больший градиент плотности, чем в районе станции № 2. Поэтому в первом случае осолонение при нарастании льда оказалось недостаточным, чтобы конвекция распространилась до больших глубин и вызвала подток тепла ко льду. В районе второй станции вертикальный градиент плотности был меньше, поэтому осолонение воды в результате ледообразования привело к большей толщине слоя конвективного перемешивания и большему подтоку тепла, что повлияло на нарастание льда.

Таким образом, различие в плотностной стратификации моря по его акватории в период нарастания льда является одной из причин неравномерной толщины льда, особенно в тех районах, где невелики вертикальные градиенты плотности.

Рассмотренный метод расчета характеристик осеннего гидрологического процесса с 1964 г. проверяется в ААНИИ на предмет использования его в качестве прогностического. Исходными данными служат результаты глубоководных гидрологических станций, выполненных в августе, и прогностические значения температуры воздуха и направления ветра. Величины остальных метеорологических элементов принимаются равными их климатическим нормам. Первая проверка данного метода в качестве прогностического, производившиеся по ряду районов Карского моря, дала обнадеживающие результаты. Отклонения вычисленных дат ледообразования от фактических не превышали принятых допустимых величин.

### § 3. Влияние метеорологических факторов на сроки ледообразования

Предвычисление сроков ледообразования по изложенной методике предполагает знание на период предвычисления величин следующих метеорологических элементов: температуры и влажности воздуха, радиационного баланса, скорости и направления ветра. Естественно, прогноз метеорологических элементов осуществляется с погрешностью, а некоторые элементы в настоящее время вообще не прогнозируются. Поэтому встает задача выяснить влияние погрешностей метеорологического прогноза на определение сроков ледообразования.

Для этой цели необходимо оценить роль каждого элемента, входящего в расчетную систему уравнений (глава VI, § 1). Эту оценку можно выполнить двумя способами: во-первых, задаваясь изменчивостью каждого элемента, рассчитать изменение сроков ледообразования; во-вторых, упростив решение системы, найти аналитическую зависимость сроков ледообразования от определяющих факторов.

В первом случае необходимо выполнить очень большой объем вычислений по всем районам, для которых дается прогноз. Во втором случае аналитическую зависимость срока ледообразования  $\tau$  от упомянутых метеорологических элементов можно получить лишь при некоторой схематизации как самого процесса развития конвекции, так и реальной изменчивости во времени метеорологических элементов и начальной стратификации. Однако характер взаимодействия атмосферы и гидросферы и порядок полученных величин должен быть правильным.

Здесь будет рассматриваться второй случай с использованием результатов, изложенных в работе [76]. Возможность упрощения расчетной схемы для оценки влияния гидрометеорологических факторов на сроки ледообразования обусловлена тем, что при прогнозировании используются данные метеорологического

прогноза на сентябрь—октябрь, т. е. на период, когда преобладает монотонное охлаждение моря и приближенно можно считать, что метеорологические элементы в этот период имеют линейный ход во времени.

Таким образом, решение было выполнено при условии, что процесс охлаждения монотонный, изменение температуры воздуха и радиационного баланса происходит линейно во времени. Температура и соленость верхнего гомогенного слоя определяются уравнениями баланса тепла и солей, ниже этого слоя они линейно меняются с глубиной и их градиент не зависит от времени. При таких условиях уравнения § 1 можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{i+1} &= \vartheta_i \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} + \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{\bar{h}_i}^{\bar{h}_{i+1}} \vartheta_i dz - \frac{J}{\bar{h}_{i+1}}; \\ S_{i+1} &= S_i \frac{\bar{h}_i}{\bar{h}_{i+1}} + \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \int_{\bar{h}_i}^{\bar{h}_{i+1}} S_i dz + \\ &+ \frac{1}{\gamma \bar{h}_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S dt; \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_i(z) &= \vartheta_i + (z - \bar{h}_i)\Gamma; \\ S_i(z) &= S_i + (z - \bar{h}_i)\Gamma', \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

где  $\vartheta_i, \vartheta_{i+1}$  — температура воды в начальный ( $t_i$ ) и конечный ( $t_{i+1}$ ) момент времени;

$\bar{h}_i, \bar{h}_{i+1}$  — глубина конвекции в те же сроки;

$S_i, S_{i+1}$  — соленость воды в слое конвекции в начальный и конечный момент времени;

$\Gamma, \Gamma'$  — вертикальные градиенты температуры и солености воды ниже слоя конвективного перемешивания.

Подставив выражения (17.6) в уравнения (16.6), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{i+1} &= \vartheta_i + \frac{\Gamma}{2} \left( \bar{h}_{i+1} - 2\bar{h}_i + \frac{\bar{h}_i^2}{\bar{h}_{i+1}} \right) - \frac{J}{\bar{h}_{i+1}}; \\ S_{i+1} &= S_i + \frac{\Gamma'}{2} \left( \bar{h}_{i+1} - 2\bar{h}_i + \frac{\bar{h}_i^2}{\bar{h}_{i+1}} \right) + \frac{\bar{\Phi}}{\gamma \bar{h}_{i+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

где

$$\bar{\Phi} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_S dt.$$

Поскольку предполагается, что теплообмен с атмосферой и приток солей известны, то в двух уравнениях (18.6) содержится три неизвестных:  $\vartheta_{i+1}$ ,  $S_{i+1}$  и  $h_{i+1}$ . Для замыкания системы воспользуемся уравнением состояния. Имея в виду, что зависимость плотности воды от температуры гораздо слабее, чем от солёности, можно приближенно положить, что  $\gamma = f(S)$ . В таком случае в качестве третьего уравнения к системе (18.6) присоединим выражение соотношения плотностей слоев конвекции и нижележащих в виде соотношения солёностей этих слоев

$$S_{i+1} \leq S_i + (h_{i+1} - h_i) \Gamma'. \quad (19.6)$$

Чем больше градиент солёности, тем правильнее будет формула (19.6), так как при этом изменение плотности воды при понижении температуры не приведет к заметному увеличению глубины плотностного перемешивания. Естественно, при малых градиентах солёности этой формулой пользоваться нельзя. В осенний период в большинстве районов арктических морей вертикальные градиенты солёности довольно велики, поэтому использование формулы (19.6) вполне допустимо. В дальнейшем в ней будет учитываться только знак равенства, так как им определяется предельная величина  $h_{i+1}$ .

Из уравнений (18.6) и (19.6) находим

$$\vartheta_{i+1} = \vartheta_i + \frac{\Gamma}{2 \sqrt{h_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\Gamma'}}} \cdot \left( \sqrt{h_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\Gamma'}} - h_i \right)^2 - \frac{J}{\sqrt{h_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\Gamma'}}}. \quad (20.6)$$

Раскроем содержание члена  $J$  и упростим его. Параметр  $N$ , входящий в  $J$ , при отрицательных температурах воздуха зависит в основном от скорости ветра. Температура воздуха сравнительно мало его меняет. Поэтому при оценке влияния метеорологических факторов на сроки ледообразования, когда требуется знание лишь порядка величин, можно в выражение для параметра  $\tilde{N}$  ввести некоторую среднюю температуру воздуха  $\tilde{T}$  для осеннего периода до начала замерзания моря. В таком случае

$$N = \tilde{N} = m a, \quad (21.6)$$

где

$$a = 1 + 0,622 \frac{LE_0 \alpha}{c_p P} e^{\alpha \tilde{T}} \approx 1,5;$$

$$m = \frac{c_{pp} a'}{\ln \left( 1 + \frac{a' z}{x_0} \right)}.$$

При логарифмическом профиле скорости ветра  $a'$  линейно зависит от  $V$ , поэтому ради упрощения выражения множитель  $m$  можно приближенно представить зависимостью

$$m = s + \nu V.$$

Учитывая условие (21.6), параметр  $\Pi$  запишется

$$\Pi = B + \tilde{N}T + 0,622 \frac{LE_0 m}{c_p P} (r - 1) e^{\alpha T}.$$

Из-за высокой относительной влажности воздуха в Арктике ( $r$  близко к 1) и низких температур воздуха последний член выражения для  $\Pi$  мал по сравнению с другими членами и может быть принят постоянным при некоторых средних значениях температуры воздуха и относительной влажности

$$0,622 \frac{LE_0 m}{c_p P} (r - 1) e^{\alpha T} = -mD.$$

Таким образом, приближенное выражение члена  $J$  будет

$$J = \frac{1}{c\gamma} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tilde{N}\vartheta_0 - B - \tilde{N}T + mD) dt.$$

При вычислении интеграла заменим температуру поверхности воды, входящую в подынтегральное выражение, ее средним значением для промежутка времени ( $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ )  $\vartheta_0 = 0,5(\vartheta_i + \vartheta_{i+1})$ . Кроме того, учтем предположенную линейность изменения во времени  $B$  и  $T$ . Если отсчет времени вести от момента  $t_i$  до даты ледообразования  $t_{i+1}$ , когда температура поверхности воды станет равной температуре замерзания  $\vartheta_{i+1} = \theta$ , то

$$J = 0,5\tau [2mD - B_i - \tilde{N}(T_i + T_{i+1}) - B_{i+1} + \tilde{N}(\vartheta_i + \theta)], \quad (22.6)$$

где  $\tau = t_{i+1} - t_i$  — период времени от начального момента до ледообразования.

Из выражений (20.6) и (22.6) можно определить интервал времени  $\tau$  до даты ледообразования как функцию гидрометеорологических характеристик

$$\tau = c\gamma \frac{(\vartheta_i - \theta) \sqrt{\tilde{h}_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\gamma \Gamma'}} + 0,5\Gamma \left[ \sqrt{\tilde{h}_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\gamma \Gamma'}} - \tilde{h}_i \right]^2}{mD + 0,5 \left[ \tilde{N}(\vartheta_i + \theta - T_i - T_{i+1}) - (B_i + B_{i+1}) \right]}. \quad (23.6)$$

Из-за проведенных упрощений эта формула, по крайней мере качественно позволяет оценить влияние гидрометеорологических условий на сроки ледообразования.



1. Влияние температуры воздуха на величину  $\tau$ . Запишем формулу (23.6) в виде

$$\tau_1 = \frac{A_1}{B_1 - (T_i + T_{i+1})}, \quad (24.6)$$

где

$$A_1 = c\gamma \frac{(\vartheta_i - \theta) \sqrt{\tilde{h}_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\gamma \Gamma'}} + 0,5\Gamma \left[ \sqrt{\tilde{h}_i^2 + 2 \frac{\Phi}{\gamma \Gamma'}} - \tilde{h}_i \right]^2}{0,5 \tilde{N}};$$

$$B_1 = \frac{mD - 0,5(B_i + B_{i+1})}{0,5 \tilde{N}} + \vartheta_i + \theta,$$

и построим по ней график (рис. 27) зависимости  $\tau$  от температуры воздуха.

При построении графика принято  $A_1 = 100$  и  $B_1 = 1,0; 1,5; 2,0$  и  $3,0$ . Такие значения параметров  $A_1$  и  $B_1$  получаются, если

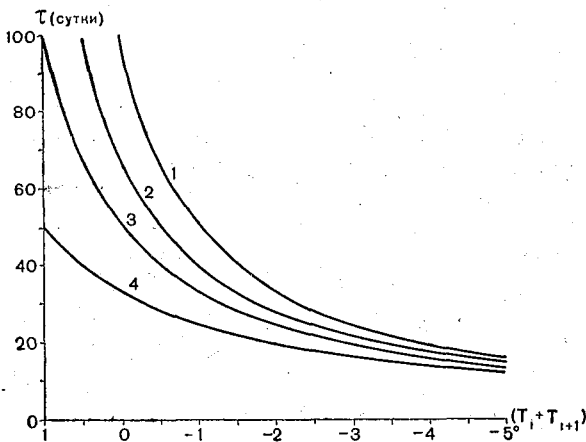


Рис. 27. Зависимость сроков ледообразования от температуры воздуха.

1, 2, 3, 4 —  $B_1$ , равное 1,0; 1,5; 2,0; 3,0 соответственно.

использовать при их вычислениях обычно наблюдающиеся в осенний период в Арктике величины гидрометеорологических элементов. Естественно, в конкретных условиях параметры  $A_1$  и  $B_1$  будут несколько отличаться от принятых, и непосредственный расчет сроков ледообразования не может производиться по формуле (23.6) или (24.6) из-за принятых упрощений, однако оценка

порядка величины изменения  $\tau$  при тех или иных погрешностях в определении  $T$ , очевидно, может быть получена.

Из графика видно, что, как и следовало ожидать, повышение температуры воздуха приводит к более поздним срокам ледообразования, а понижение — к ранним. Одинаковые погрешности в определении температуры воздуха приводят не к одинаковым изменениям  $\tau$  в зависимости от фона осенних температур. Если осень относительно теплая и замерзание моря происходит при сравнительно высоких температурах воздуха, то требуется большая точность в определении температуры воздуха, чем в случае холодной осени.

Влияние температуры воздуха на величину  $\tau$  зависит и от относительного веса других метеорологических элементов. С уменьшением относительной влажности воздуха, приводящей к увеличению затрат тепла на испарение, и с увеличением эффективного излучения возрастает параметр  $B_1$ . При этом, как видно из графика рис. 27, происходит уменьшение влияния изменений температуры воздуха на сроки ледообразования.

Глубина конвективного перемешивания, температура воды и адвекция солей, определяющие величину параметра  $A_1$  в формуле (24.6), влияют и на зависимость сроков ледообразования от температуры воздуха. Увеличение  $A_1$  приводит к большим отклонениям в сроках ледообразования, а уменьшение  $A_1$  — к меньшим при одних и тех же аномалиях температуры воздуха.

2. Влияние радиационного баланса подстилающей поверхности на срок ледообразования. Преобразуем формулу (23.6) к виду

$$\tau = \frac{A_2}{B_2 - 0,5(B_i + B_{i+1})}, \quad (25.6)$$

где

$$A_2 = c\gamma \left[ (\vartheta_i - \theta) \sqrt{\tilde{n}_i^2 + 2 \frac{\bar{\Phi}}{\gamma\Gamma r}} + 0,5\Gamma \left( \sqrt{\tilde{n}_i^2 + 2 \frac{\bar{\Phi}}{\gamma\Gamma r}} - \tilde{n}_i \right)^2 \right];$$

$$B_2 = mD + 0,5\tilde{N}(\vartheta_i + \theta - T_i - T_{i+1}).$$

По формуле (25.6) при  $A_2 = 10^3$  и некоторых значениях  $B_2$  построен график (рис. 28) зависимости  $\tau$  от  $B$ . Из графика видно, что изменение радиационного баланса в положительную сторону приводит к более поздним срокам ледообразования, а в отрицательную — к более ранним, что находится в полном соответствии с физическими представлениями о формировании температуры поверхностного слоя моря. Однако изменение  $B$

в положительную сторону сильнее сказывается на сроках ледообразования, чем при изменениях в отрицательную.

Увеличение турбулентной теплоотдачи воды в атмосферу и увеличение испарения, происходящее при повышении скорости ветра, понижении температуры воздуха и уменьшении относительной влажности воздуха, уменьшают относительную роль  $B$  в тепловом балансе. Вследствие этого одни и те же изменения  $B$  при больших значениях параметра  $B_2$  приводят к меньшим от-

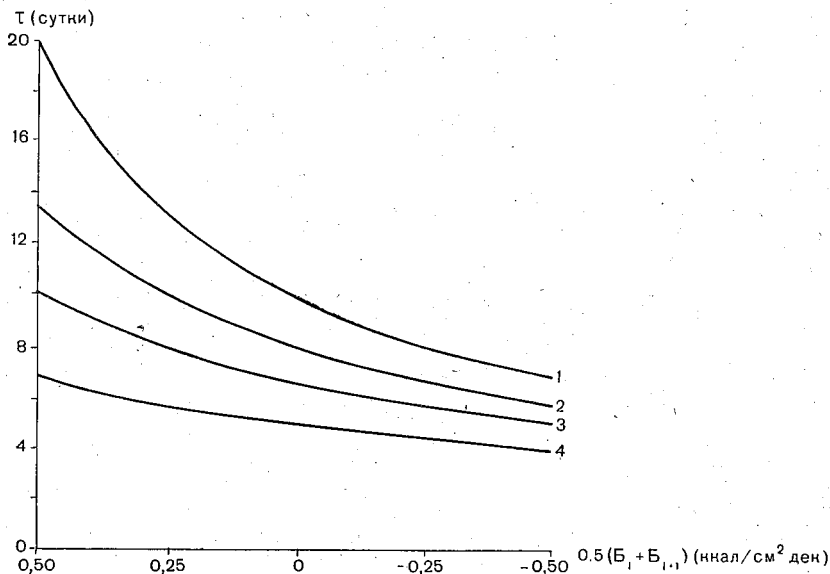


Рис. 28. Зависимость сроков ледообразования от радиационного баланса.

1, 2, 3, 4 —  $B_2$ , равное 100; 125; 150; 200 соответственно.

клонениям сроков ледообразования, чем при малых величинах  $B_2$ .

Увеличение глубины слоя конвекции и повышение температуры воды, приводящие к росту параметра  $A_2$ , вызывают и рост  $\tau$ . Поэтому одна и та же аномалия радиационного баланса при больших значениях параметра  $A_2$  вызывает большие изменения  $\tau$ , чем при малых. Но если аномалию радиационного баланса  $B$  принять равной среднему отклонению от многолетнего значения  $B$ , то она приводит к изменению  $\tau$  приблизительно на 2 суток. Поэтому, если не требуется особая точность в определении срока ледообразования, можно вместо фактических величин радиационного баланса использовать его среднемноголетние значения.

3. Влияние скорости ветра на срок ледообразования.

Преобразуем формулу (23.6) следующим образом:

$$\tau = \frac{A_3}{B_3 + V}, \quad (26.6)$$

где

$$A_3 = c\gamma \frac{(\vartheta_i - \theta) \sqrt{\bar{h}_i^2 + 2 \frac{\bar{\Phi}}{\gamma\Gamma'}} + 0,5\Gamma \left( \sqrt{\bar{h}_i^2 + 2 \frac{\bar{\Phi}}{\gamma\Gamma'}} - \bar{h}_i \right)^2}{D\nu + 0,5(\vartheta_i + \theta - T_i - T_{i+1})\nu a};$$

$$B_3 = \frac{sD + 0,5as(\vartheta_i + \theta - T_i - T_{i+1}) - 0,5(B_i + B_{i+1})}{D\nu + 0,5(\vartheta_i + \theta - T_i - T_{i+1})\nu a}.$$

На основании формулы (26.6) построен график (рис. 29) зависимости срока ледообразования от скорости ветра при сле-

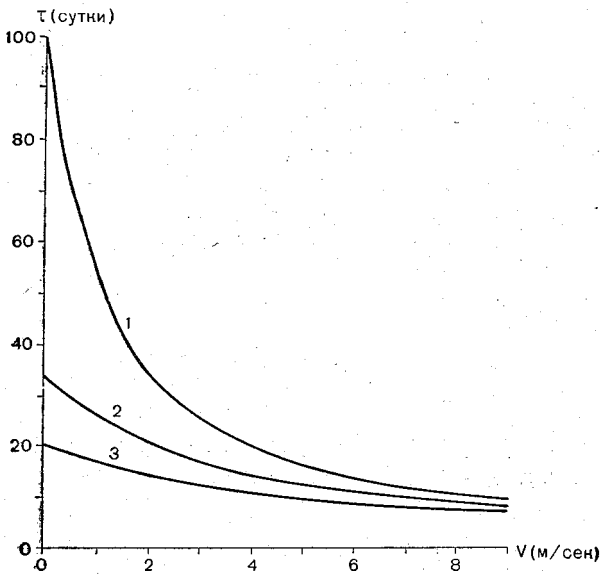


Рис. 29. Зависимость сроков ледообразования от скорости ветра.

1, 2, 3 —  $B_3$ , равное 1; 3; 5 соответственно.

дующих значениях исходных параметров:  $A_3=100$ ,  $B_3=1$ ; 3; 5. Адвекция тепла и солей здесь во внимание не принимается. Из графика видно, что увеличение скорости ветра приводит к более ранней дате ледообразования, а уменьшение — к более поздней. Это объясняется тем, что с ростом скорости ветра происходит увеличение теплоотдачи в атмосферу, а следовательно, более быстрое понижение температуры воды. Ослабление скорости

ветра способствует уменьшению теплоотдачи и замедляет понижение температуры воды.

Следует иметь в виду, что при малой толщине слоя конвекции в результате воздействия ветра динамическое перемешивание может привести к возрастанию  $\bar{h}$ , что увеличит параметр  $A_3$ . Если учитывать это обстоятельство, то увеличение скорости ветра приведет к более поздним срокам ледообразования. В данной формуле это может быть учтено лишь изменением величины  $\bar{h}$ .

Вообще при увеличении слоя конвективного перемешивания (за счет каких бы факторов оно ни происходило) и повышении температуры воды, что вызывает увеличение параметра  $A_3$ , а следовательно, и  $\tau$ , влияние аномалий скорости ветра на изменение сроков ледообразования возрастает из-за роста интервала времени  $\tau$ , в течение которого существуют эти аномалии. При уменьшении  $A_3$  уменьшается и отрезок времени  $\tau$ , поэтому те же самые аномалии скорости ветра могут оказать меньшее воздействие на гидрометеорологические процессы, т. е. приведут к меньшим изменениям  $\tau$ . Качественная картина такого двойственного характера влияния скорости ветра на ледообразование отмечалась С. В. Лутковским [147]. При этом большая роль отводится сгонно-нагонным явлениям.

В зависимости от скорости и направления ветра происходит адвекция солей, которая в формуле (23.6) учитывается членом  $\bar{\Phi}$ . Вследствие схематизации постановки задачи адвекция тепла течениями здесь не рассматривается. Производится учет лишь начальной термической стратификации параметром  $\Gamma$ .

Из формулы (23.6) следует, что увеличение температуры воды с глубиной ( $\Gamma > 0$ ) способствует позднему замерзанию, а понижение температуры воды с глубиной ( $\Gamma < 0$ ) приводит к более раннему сроку ледообразования. Но это влияние стратификации температуры воды имеет значение лишь при наличии адвекции солей и испарения, т. е. при  $\bar{\Phi} \neq 0$ . Это объясняется тем, что в данной постановке задачи изменение глубины проникновения плотностной конвекции происходит лишь при увеличении солености верхнего гомогенного слоя. Вообще же роль второго члена в числителе формулы (23.6) мала. По сравнению с первым он составляет величину около 5%, и его в дальнейшем не будем учитывать.

Запишем формулу (23.6) в виде

$$\tau = A_4 \sqrt{\bar{h}_i^2 + 2 \frac{\bar{\Phi}}{\gamma \Gamma}}, \quad (27.6)$$

$$\text{где } A_4 = c\gamma \frac{\vartheta_i - \theta}{mD + 0,5 \left[ \bar{N} (\vartheta_i + \theta - T_i - T_{i+1}) - B_i - B_{i+1} \right]}$$

и построим по ней график (рис. 30) при  $\bar{h}_i=5$  м и  $A_4=1; 2; 3; 4$  и 5. Из рис. 30 видно, что приток солей ( $\bar{\Phi}>0$ ) приводит к более поздним срокам ледообразования, а распределение верхнего гомогенного слоя ( $\bar{\Phi}<0$ ) — к ускорению ледообразования. В данной постановке задачи полагалось, что адвекция солей на всех горизонтах гомогенного слоя одинакова, поэтому чем больше толщина этого слоя, тем сильнее сказывается влияние адвекции на изменение сроков ледообразования.

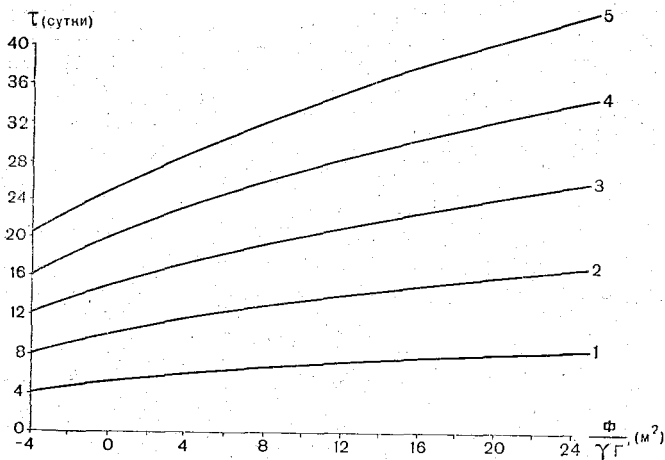


Рис. 30. Зависимость сроков ледообразования от адвекции солей.

1, 2, 3, 4, 5 —  $A_4$ , равное 1; 2; 3; 4; 5 соответственно.

Влияние адвекции солей на  $\tau$  зависит и от начальной стратификации солености: чем больше расслоенность воды, тем меньше влияние адвекции солей на срок ледообразования. Это вполне очевидно, так как большая расслоенность воды мешает проникновению конвекции до большой глубины и приводит к раннему ледообразованию.

Таким образом, анализ формулы (23.6) позволил отметить основные закономерности изменения сроков ледообразования в зависимости от метеорологических характеристик: температуры воздуха, радиационного баланса, скорости и направления ветра. Поскольку эта формула была выведена безотносительно к конкретным районам, то полученные общие закономерности должны быть справедливы для всех арктических морей. Различия могут быть только в числовых характеристиках, зависящих от местных особенностей и от диапазона изменчивости каждого элемента, характерного также для каждого района. От этого зависит выбор той или иной кривой и отрезка на ней, определяе-

мого изменчивостью заданных характеристик. Эти различия можно проследить на конкретных районах [76].

Естественно, прежде чем получить какие-то числовые характеристики на основании формулы (23.6), необходимо было проверить, насколько правильно она отражает реальный физический процесс в конкретных условиях. Для этого по среднемноголетним данным метеорологических и гидрологических элементов в осенний период А. В. Сметанниковой были рассчитаны по этой формуле среднемноголетние сроки первого появления льда в пяти районах Карского моря с различным гидрологическим режимом (табл. 18). Среднемноголетние характеристики были выбраны потому, что они более плавно меняются во времени, чем ежегодные. Поэтому проведенные при выводе этой формулы упрощения в данном случае будут более или менее оправданы.

Таблица 18

Среднемноголетние сроки первого появления льда по районам Карского моря

№ пункта	Дата ледообразования		$\tau_p - \tau_\phi$	
	расчетная $\tau_p$	фактическая $\tau_\phi$	сутки	% амплитуды
1	23/X	28/X	-5	7
2	7/XI	3/XI	4	10
3	5/X	8/X	-3	6
4	4/X	7/X	-3	8
5	25/IX	4/X	-9	12

В целом, как следует из табл. 18, формула (23.6) правильно отражает зависимость сроков ледообразования от гидрометеорологических факторов, поэтому по ней можно оценить влияние того или иного элемента на срок ледообразования в конкретных условиях. Такая работа была выполнена А. В. Сметанниковой по данным ряда наблюдений с 1934 по 1963 г. Сроки ледообразования вычислялись при изменении каждого анализируемого фактора в пределах его колебаний, характерных для выбранного района. При этом остальные элементы полагались постоянными и равными их среднемноголетним значениям.

В табл. 19 приведены вычисленные изменения сроков ледообразования в зависимости от аномалий температуры воздуха в осенний период, характерных для рассмотренных районов. Из табл. 19 видно, что сроки ледообразования, особенно по трем первым районам, меняются очень сильно с изменением температуры воздуха. Это обстоятельство нужно иметь в виду при использовании изложенной методики расчета как прогностической.

## Изменение сроков ледообразования (в сутках) в зависимости от аномалий температуры воздуха в осенний период

№ пункта	6°	5°	4°	3°	2°	1°	0°	-1°	-2°	-3°	-4°	-5°	-6°
1	71	45	30	19	10	4	0	-3	-7	-9	-11	-14	-15
2			41	24	11	6	0	-5	-9	-13	-15	-17	-19
3			52	28	11	6	0	-2	-6	-8	-9	-10	
4			22	13	7	3	0	-2	-4	-6	-7	-7	-8
5	13	11	8	5	3	1	0	-1	-2	-2	-3	-3	-4

В значительно меньшей степени влияет радиационный баланс на сроки ледообразования. Амплитуда радиационного баланса поверхности моря в осенний период составляет примерно 1,0—1,5 ккал/см<sup>2</sup>·мес. Вычисленная на основании этих данных погрешность, которая может быть внесена в расчеты при игнорировании межгодовых колебаний Б, не превышает для перечисленных районов 2—4 суток. Если же принять во внимание, что знак аномалий радиационного баланса часто не сохраняется в течение всего осеннего периода, то погрешность в определении срока ледообразования без учета колебаний Б становится еще меньше.

Аномалии осредненной скорости ветра для периода сентябрь—октябрь по всем упомянутым районам Карского моря имеют предельные значения  $\pm 2$  м/сек. Если учесть, что в 80% всех случаев величина этих аномалий не выходит за пределы  $\pm 1$  м/сек, то при характерных величинах средней скорости ветра 4—8 м/сек это соответствует изменению величины  $\tau$  примерно на 2 суток в большую или меньшую сторону. В данном случае направление скорости ветра не играет роли. Кроме влияния на интенсивность теплообмена и связанную с ним величину  $\tau$ , ветер определяет направление и скорость дрейфа. И здесь точность определения направления ветра в районах с большими горизонтальными градиентами солености играет значительную роль. В табл. 20 приведены изменения  $\tau$  в зависимости от горизонтальных градиентов солености поверхностного слоя, вычисленные при средних многолетних значениях остальных элементов. Наиболее существенно влияние адвекции в первых трех районах, указанных в табл. 20, и совсем невелико в районах 4 и 5. Это объясняется различием в вертикальном распределении солености. В последних двух районах из-за берегового стока пресной воды создаются очень большие вертикальные градиенты солености, препятствующие развитию конвекции даже при адвекции солей. Лишь при очень больших величинах адвекции солей в поверхностном слое конвективное перемешивание может охватить более глубокие слои воды и



Таблица 20

**Аномалия сроков ледообразования в зависимости от адвекции солей  
(в сутках)**

№ пункта	Горизонтальный градиент солености поверхностного слоя воды (‰ на 50 км)										
	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
1		-10	-7	-3	0	3	7				
2		-9	-5	-2	0	4	9	10	12		
3			-5	-2	0	2	4	7	10		
4	-2	-1	-1	-1	0	0	1	1	2	3	3
5	0	0	0	0	0	1	2	3	4	6	9

привести к запаздыванию ледообразования. Второй причиной, обуславливающей слабую зависимость  $\tau$  от адвекции солей в этих районах, являются небольшие глубины, определяющие максимально возможную толщину слоя конвекции. Таким образом, требуемая точность в направлении и скорости ветра для каждого района определяется не только характером распределения солености по площади вокруг пункта, для которого производится расчет  $\tau$ , но и местными особенностями: глубиной и вертикальной стратификацией солей.

#### § 4. Метод расчета развития осенне-зимнего гидрологического процесса на большой акватории

Полученные в предыдущих параграфах уравнения позволяют вычислять ряд элементов осеннего гидрологического процесса в каком-то пункте в предположении, что вокруг него распределение температуры и солености воды известно и постоянно во времени. В действительности лишь в редких случаях величины гидрологических элементов в осенний период не претерпевают больших изменений, так как в результате взаимодействия с атмосферой и окружающей водой в любой точке моря происходит и приток водных масс с соответствующими характеристиками, и их трансформация. Поэтому более точные результаты могут быть получены в том случае, если в изложенной в § 1 схеме полагать температуру и соленость воды вокруг выбранного пункта меняющимися. Но эти изменения определяются той же системой уравнений, которые описывают гидрологический процесс в центральном пункте.

Таким образом, для расчета элементов гидрологического процесса в какой-то точке моря необходимо знать развитие его на окружающей акватории. Естественно, решение такой задачи

может быть проведено только численным методом с помощью ЭЦВМ. В данном случае будут вычисляться элементы гидрологического процесса в узлах регулярной географической сетки на некоторой акватории моря. При этом предполагается, что величины необходимых метеорологических элементов в узлах сетки известны. Если нет непосредственных наблюдений, то они могут быть получены расчетным путем с учетом изложенной в предыдущем параграфе оценки влияния каждого элемента на гидрологический процесс. Причем не обязательно решать совместно задачу взаимодействия атмосферы и гидросферы. Если выбрать достаточно малые шаги по времени, то вследствие большой теплоемкости воды и интенсивного перемешивания температура ее поверхности в пределах одного шага меняется крайне незначительно. Поэтому трансформацию воздушной и водной массы можно рассматривать раздельно. По заданным начальным характеристикам поверхности моря определяется трансформация воздушной массы, затем по вычисленным значениям метеорологических элементов рассчитывается состояние моря. Для повышения точности эту последовательность в решении задачи взаимодействия атмосферы и гидросферы удобно представить итерационным процессом.

В излагаемой расчетной схеме метеорологический материал в виде среднедекадных величин задается только для метеорологических станций, а затем аппроксимируется в узлы сетки. В монографии Е. П. Борисенкова [18] показано, что при достаточно густой сетке станций на территории размером порядка  $10^3 \times 10^3 \text{ км}^2$  метеорологические поля можно аппроксимировать полиномами второй или третьей степени с вполне надежной точностью. Размеры акваторий морей, для которых проводились расчеты, не превышают отмеченную величину. Кроме того, среднедекадные поля метеорологических элементов являются более гладкими, чем неосредненные. На основании этих соображений и была выбрана для аппроксимации формула

$$P(\varphi, \lambda) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=0 \\ n=0}}^{n=2, m=2} a_{mn} \varphi^m \lambda^n, \quad (28.6)$$

где  $P$  — искомое значение элемента в узле;  
 $a_{mn}$  — коэффициенты, определяемые из этой же системы уравнений при заданных  $P, \varphi, \lambda$ ;  
 $\varphi, \lambda$  — широта и долгота.

Для определения коэффициентов  $a_{mn}$ , как следует из формулы (28.6), требуется знание интерполируемого элемента не менее чем в 9 пунктах. Но для обеспечения большей точности

желательно иметь значения  $P$  в несколько большем числе пунктов. В излагаемой схеме использовалось 12—15 метеорологических станций, в которых были известны интерполируемые данные. Их выбор осуществлялся в соответствии с рекомендациями работы [18] таким образом, чтобы они более или менее равномерно покрывали область. В ряде случаев вводились 1—2 фиктивных пункта, для которых данные снимались с карт. Поскольку число уравнений в этом случае превосходит количество неизвестных  $a_{mn}$ , то получается несовместная система уравнений, сведение которой к системе нормальных уравнений происходит по известным правилам. В матричной форме эта система представляется следующим образом:

$$AX = R,$$

где  $A = \|a_{mn}\|$  — вектор-строка коэффициентов;  
 $R = \|\varphi_i^m \lambda_i^n P_i\|$  — вектор-столбец;

$$X = \left\| \begin{array}{cccc} k & \dots & \dots & \sum_{i=1}^k \varphi_i^m \lambda_i^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^k \varphi_i^m \lambda_i^n & \dots & \dots & \sum_{i=1}^k \varphi_i^{2m} \lambda_i^{2n} \end{array} \right\|$$

$k$  — число метеорологических станций;

$m$  и  $n$  пробегает все значения от 0 до заданных.

Из теории матричного исчисления известно, что для определения вектор-строки  $A$  достаточно умножить справа последнее уравнение на обратную матрицу  $X^{-1}$ . Тогда получится уравнение

$$AE = RX^{-1}, \quad (29.6)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Поскольку матрица  $X^{-1}$  не зависит от интерполируемых элементов, а зависит только от координат метеорологических станций, то она рассчитывается заранее и остается постоянной до тех пор, пока не изменится число или координаты станций. Также постоянной является единичная матрица  $E$ . Поэтому при вычислении элементов вектора  $A$  для интерполяции какого-то метеорологического элемента в узлы сетки каждый раз вычисляется лишь вектор  $R$  и проводится решение уравнения (29.6).

После определения коэффициентов  $a_{mn}$  для каждого метеорологического элемента происходит их интерполяция в узлы сетки по формуле (28.6). Интерполируются температура воздуха, скорость ветра (по флюгеру), радиационный баланс

подстилающей поверхности и атмосферное давление ( $P$ ). По последнему определяются скорость и направление дрейфового течения:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \sqrt{u^2 + v^2}; \\ \alpha_0 &= \alpha' + \operatorname{arctg} \frac{v}{u}, \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

где

$$u = -\frac{1}{2\omega_z a_0 \rho \cos \varphi} \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda};$$

$$v = \frac{1}{2\omega_z \rho a_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi};$$

$V_0$  и  $\alpha_0$  — скорость и направление поверхностного течения;  
 $\alpha'$  — отклонение течения от направления ветра;  
 $\tau$  — соотношение между скоростями течения и ветра;  
 $\alpha_0$  — радиус Земли.

По  $V$  и  $\alpha$  дрейфового течения вычисляются координаты точки  $I$ , из которой в данный узел за интервал времени  $\tau$  происходит перенос воды с соответствующими характеристиками. Если координаты узла, для которого вычисляется адвекция элемента  $S$ , определить через  $jk$ , то по  $\alpha$  находятся три другие узла, оконтуривающие область, содержащую точку  $I$ . По исходным данным в этих четырех узлах производится интерполяция соответствующего элемента в точку  $I$  в предположении его линейного изменения в пределах выбранной области. Поэтому шаг сетки выбирался на основании режимных особенностей моря таким, чтобы более или менее удовлетворять этому условию.

Поскольку расстояние между узлами сетки по параллели с увеличением широты несколько изменяется, то при интерполяции за линейный шаг сетки по параллели принимается средняя величина шага для широт, между которыми находится точка  $I$ ,

$$x_\lambda = x_\varphi \cos(\varphi \pm 0,5\delta\varphi), \quad (31.6)$$

где  $x_\varphi$  — шаг сетки по меридиану;

$\delta\varphi$  — шаг сетки по меридиану в градусах (знак перед  $\delta\varphi$  определяется знаком  $\cos \alpha$ ).

Проекция отрезка  $x = V\tau$  на параллель и меридиан находятся по формулам:

$$\Delta\lambda = x \cos \alpha,$$

$$\Delta\varphi = x \sin \alpha.$$

Заменив таким образом элемент географической сетки прямоугольником, что при небольших шагах не вносит существенных

погрешностей, легко получить простую интерполяционную формулу

$$S_I = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{x_\varphi} - \frac{\Delta\lambda}{x_\lambda} + \frac{\Delta\varphi \Delta\lambda}{x_\varphi x_\lambda}\right) S_{jk} + \frac{\Delta\lambda}{x_\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{x_\varphi}\right) S_{j\pm 1, k} + \\ + \frac{\Delta\varphi}{x_\varphi} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{x_\lambda}\right) S_{j, k\pm 1} + \frac{\Delta\lambda \Delta\varphi}{x_\lambda x_\varphi} S_{j\pm 1, k\pm 1}. \quad (32.6)$$

Такая интерполяция исходных данных температуры и солености воды производится на каждом горизонте, вплоть до глубины трения, которая определяется по средним данным и принимается постоянной для всего района. При этом, как уже отмечалось в главе III, скорость и направление течения в слое конвективного перемешивания принимаются неизменными по глубине.

Если в каком-то из узлов глубина меньше, чем в  $jk$  узле, то при интерполяции производится восполнение отсутствующих элементов данными соответствующего горизонта  $jk$  узла. Далее полагается, что проинтерполированные в точку  $I$  температура и соленость воды, а также толщина гомогенного слоя  $h$  течения переносятся в узел  $jk$  и принимаются за исходные при расчете.

Особые трудности возникают при формулировке граничных условий. Если дрейфовый перенос воды в граничные узлы происходит изнутри области, то исходные данные рассчитываются вышеизложенным способом. В тех же случаях, когда дрейф в граничные узлы происходит с внешней стороны области, приходится заранее задавать некоторые характерные значения гидрологических элементов по соответствующим направлениям и учитывать их адвекцию. Таким же образом, как отмечалось в § 1, происходит учет сгонов и подъемов глубинных вод при ветре с берега, т. е. выбор граничных условий производится эмпирическим путем исходя из режимных особенностей данного района моря при соответствующих ветровых условиях.

При небольшой величине шага  $\tau$  расстояние  $x$ , проходимое водной массой за этот отрезок времени, обычно невелико. Поэтому значения таких метеорологических элементов, как температура и влажность воздуха, скорость ветра и радиационный баланс, на этом отрезке пути  $x$  можно полагать постоянными и равными их величинам в узле  $jk$ . Не составляет труда аппроксимировать эти метеорологические элементы в точку  $I$  по ее координатам, а затем учесть их изменение на отрезке от  $I$  до узла  $jk$ . Однако вследствие того, что обычно величина  $x$  не превышает нескольких километров, такое уточнение величин метеорологических элементов много меньше погрешностей, связанных с их аппроксимацией и получением среднесуточных значений. Поэтому проводить это уточнение нецелесообразно.

Подготовленные описанным способом метеорологические и гидрологические данные принимаются в качестве исходных для

расчета элементов гидрологического процесса в  $jk$  узле на конец интервала времени  $\tau$  по схеме, изложенной в § 1 этой главы. Но адвективные члены в выражениях (11.6 и 13.6) уже опускаются.

Как известно, большое влияние на ход осеннего гидрологического процесса оказывают старые льды. Во-первых, их таяние приводит к распреснению поверхностного слоя воды, что сказывается на интенсивности перемешивания и переноса тепла и солей в вертикальном направлении. Во-вторых, часть тепла, поступающего из атмосферы в воду, расходуется на таяние льда, что приводит к меньшему прогреву воды. В данной схеме стаивание льда сверху ( $\Delta H$ ) вычислялось по формулам главы V при средних значениях альбедо льда и эффективного излучения.

В предыдущей главе подробно рассмотрено боковое таяние льда и прогрев воды в массиве льда. Однако в данной задаче нельзя было использовать полученный в главе V алгоритм из-за технических возможностей ЭЦВМ «Урал-2», на которой происходила реализация всех задач, изложенных в настоящей работе. Поэтому для получения хотя и приближенного, но более простого способа расчета распределения тепла, поступающего из атмосферы в разводье, был использован вывод о том, что величина потока тепла, идущего на прогрев воды  $\Phi_{\text{п}}$ , примерно пропорциональна площади чистой воды и теплообмену с атмосферой

$$\Phi_{\text{п}} = (1 - N) \Phi_{\text{а}}. \quad (33.6)$$

Остальная часть поглощенного водой потока тепла расходуется на таяние льда. Предположив, что величина этого потока тепла в течение интервала времени  $\tau$  постоянна, легко определить по схеме Н. Н. Зубова изменение сплоченности льда в массиве за счет термических факторов

$$(N_i - N_{i+1}) = (1 - N_i) \left\{ \exp \left[ \frac{2N_i \Phi_{\text{а}} \tau}{l_p (H_i + H_{i+1})} \right] - 1 \right\}. \quad (34.6)$$

Таяние льда приводит к образованию слоя воды толщиной

$$\Delta \bar{h}_{\text{в}} = \frac{P}{2\gamma} [\Delta H (N_i + N_{i+1}) + (H_i + H_{i+1})(N_i - N_{i+1})]. \quad (35.6)$$

Если полагать, что соленость льда очень мала и талая вода пресная, то при распределении ее по всему гомогенному слою произойдет уменьшение солености на величину

$$\Delta S_i = -S_i \frac{\Delta \bar{h}_{\text{в}}}{\bar{h}_i + \Delta \bar{h}_{\text{в}}}. \quad (36.6)$$

Поправки, определяемые формулами (33.6) и (36.6), во многих случаях оказываются существенными, поэтому при наличии старых льдов вычисление величины прогрева  $J$  и солености воды

в  $jk$  узле проводится с учетом этих формул. При отрицательном теплообмене, когда лед не тает и происходит выхолаживание моря, поправка, определяемая формулой (36.6), принимается равной нулю, а величина теплообмена  $J$  вычисляется без учета сплоченности льда.

Последовательность операций при реализации изложенной схемы на ЭЦВМ «Урал-2» приводится на примере программы, составленной А. С. Грушкиной.

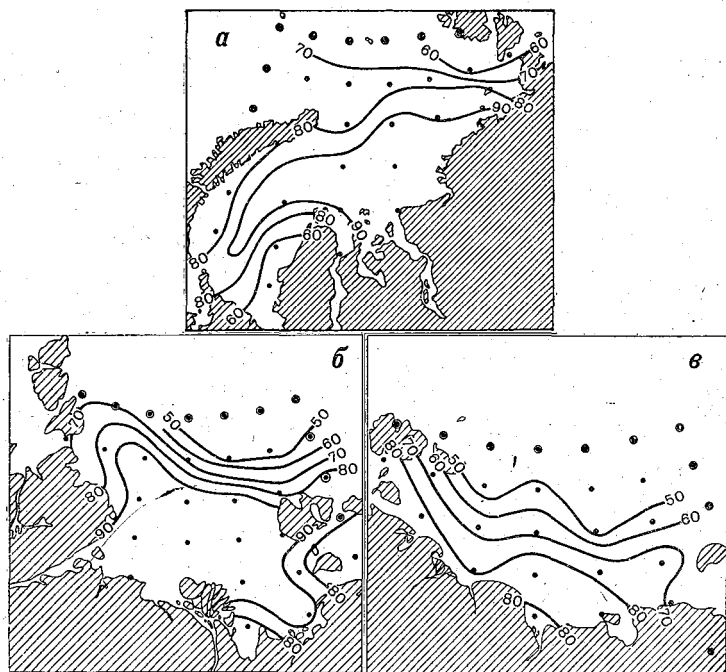


Рис. 31. Обеспеченность метода расчета сроков устойчивого ледообразования (процент числа случаев, находящихся в пределах  $\pm 0,2$  амплитуды).

*a* — Карское море; *б* — море Лаптевых; *в* — Восточно-Сибирское море.

В узлах регулярной сетки в море (рис. 31) задается на стандартных горизонтах температура и соленость воды, толщина и сплоченность старых льдов на конец лета или начало осени. Эти данные являются начальными. В граничных узлах добавочно задаются температура и соленость воды в соответствующих октантах за пределами выделенной области. Например, для граничного юго-западного узла в ВЮВ октанте Карского моря задавалась несколько меньшая соленость воды, чем на поверхностном горизонте в этом узле, в остальных октантах (ЮЮВ, ЮЮЗ,

ЗЮЗ, ЗСЗ и ССЗ) — несколько повышенная по отношению к солёности данного узла. Температура воды во всех отмеченных октантах принималась несколько выше, чем в поверхностном слое этого узла после ледообразования. Это обусловлено тем, что в настоящей схеме адвекция тепла из-за пределов области в любой граничный узел учитывалась только после образования в нем льда. Таким же образом, исходя из режимных особенностей моря в районах граничных узлов, определялись температура и солёность воды по каждому внешнему к данной области октанту.

В прибрежных узлах отмечаются горизонты, с которых при сгонных ветрах происходит подъем воды с соответствующими значениями температуры и солёности.

В соответствии с числом и координатами станций, по которым имеется информация среднедекадных величин температуры воздуха, скорости ветра, радиационного баланса и атмосферного давления, составляются единичная и обратная матрицы  $E$  и  $X^{-1}$ . Затем по формуле (29.6) вычисляются по каждому аппроксимируемому элементу для трех последовательных декад вектор-строки  $A$ . По этим данным рассчитываются коэффициенты, позволяющие по формуле (14.6) получить среднесуточные величины метеорологических элементов. Эти коэффициенты запоминаются для каждого узла вместе с гидрологической информацией.

После этой подготовительной работы находятся значения гидрологических элементов в каждом узле сетки. Сначала по формуле (14.6) вычисляются средние суточные величины метеорологических элементов для выбранного узла сетки. По ним, согласно формулам (30.6), определяются скорость и направление дрейфового течения, а также рассчитывается адвекция тепла и солей за интервал времени  $t$ . На основании выражения (37.3) проводится расчет притока солей к гомогенному слою снизу. В зависимости от температуры и влажности воздуха, радиационного баланса и скорости ветра определяется осолонение гомогенного слоя за счет испарения и распреснение его при таянии льда (формулы 32.3 и 36.6). Рассчитывается теплообмен моря с атмосферой, и, если  $\Phi_a < 0$ , прогрев гомогенного и нижележащих слоев воды вычисляется по формулам (7.6) — (10.6). По температуре и солёности воды определяется ее плотность. Если условие (27а.3) не выполняется, то происходит пересчет температуры, солёности слоя конвективного перемешивания и его толщины по уравнениям (11.6), в которых опущены адвективные члены. Такой же пересчет производится и в случае увеличения толщины гомогенного слоя при ветровом перемешивании (формула 29.3). По солёности поверхностного слоя находится температура замерзания, с которой сравнивается полученная температура гомогенного слоя воды. Если последняя окажется равной или ниже первой, то фиксируется номер шага и снова проводится пересчет расчи-



тываемых величин по уравнениям (13.6), в которых также опущены адвективные члены. В дальнейшем, пока в данном узле существует лед, расчеты проводятся по уравнениям (13.6).

После перечисленных операций следует переход к вычислениям величин гидрологических элементов в следующих узлах. Узлы, попавшие на сушу, имеют отличительные признаки и в счете не участвуют. Полученные значения гидрологических элементов во всех узлах сетки являются исходными при счете на следующем шаге т.

### § 5. Анализ результатов расчета

Проверка рассмотренного в предыдущем параграфе метода расчета элементов осенне-зимнего гидрологического режима проводилось на материалах метеорологических и гидрологических наблюдений, полученных в районах морей Карского, Лаптевых и Восточно-Сибирского. Среднедекадные значения метеорологических элементов с августа по декабрь получены по результатам наблюдений на полярных станциях. Исходные гидрологические данные определялись по результатам гидрологических станций, проведенных патрульными судами в течение августа, а данные ледовых условий преимущественно выбирались с карт ледовых разведок.

В некоторые годы наблюдения в отдельных районах морей не проводились. В таких случаях вместо недостающих данных брались значения соответствующего элемента из аналогичного по развитию процессов года. Таким образом, число случаев проверки метода по каждому морю определялось наличием гидрологического материала.

Граничные условия, учитывающие адвекцию тепла и солей в граничные узлы из-за пределов области, определялись для каждого узла в зависимости от направления переноса на основании средних многолетних данных и принимались одинаковыми для любого года. Интенсивность турбулентного перемешивания ниже гомогенного слоя полагалась неизменной по глубине и постоянной во времени. Величина ее для каждого узла подбиралась экспериментально.

Наиболее обширный фактический материал для сопоставления с результатами расчетов имелся по срокам ледообразования в морях, меньше данных по толщине льда и совсем мало по толщине, температуре и солености гомогенного слоя. Поэтому оценка эффективности данного метода расчета производилась по срокам устойчивого ледообразования. Фактические даты ледообразования в узлах сетки выбирались с карт изохрон, построенных по результатам ледовых разведок.

В ААНИИ оценка качества метода расчета какого-либо гидрологического элемента или метода прогноза производится по обеспеченности расчетных величин, не выходящих за пределы

заданной погрешности. За величину допустимой погрешности принимается  $\pm 20\%$  многолетней амплитуды вычисляемого элемента. А. В. Сметанникова провела такую оценку согласованности расчетных и фактических дат устойчивого ледообразования по всему имевшемуся материалу. Результаты этой проверки представлены на рис. 31. Наилучшая обеспеченность расчетных величин оказалась в морях Карском и Лаптевых, где отклонения рассчитанных сроков ледообразования от фактических почти для всей акватории морей в 80—90% всех случаев не выходят за пределы отмеченного допуска.

Наибольшие расхождения между расчетными и фактическими датами устойчивого ледообразования отмечаются в граничных узлах. Объяснить это можно рядом факторов. Во-первых, учет адвекции тепла и солей с внешней стороны акватории в граничные узлы производится довольно грубо. Во-вторых, в северных областях морей из-за ледовых условий глубоководные гидрологические наблюдения выполняются не каждый год. Да и сами остаточные льды, их толщина, сплоченность и дрейф определяются наблюдениями и учитываются схемой довольно приближенно. Между тем, от количества остаточных льдов и интенсивности их таяния зависит прогрев и распресненность поверхностного слоя воды в разводьях, что впоследствии сказывается на сроках ледообразования.

Поэтому при анализе согласованности расчетных данных с фактическими не принимались во внимание результаты, полученные в тех узлах, которые ограничивают область со стороны открытого моря. Кроме того, при анализе следует иметь в виду точность самих фактических данных, которая для некоторых районов открытой части моря весьма невысокая из-за отсутствия регулярных наблюдений. В частности, более низкая обеспеченность метода расчета сроков устойчивого ледообразования в Восточно-Сибирском море отчасти может быть объяснена отсутствием во многих случаях фактического исходного гидрологического материала.

Критерием эффективности метода расчета той или иной характеристики может служить разность между обеспеченностью метода и обеспеченностью нормы. На рис. 32 приведена эта оценка в отношении определения дат устойчивого ледообразования. Из рисунка следует, что почти повсюду расчет приводит к более реальным результатам, чем в случае использования среднемноголетних сроков. Причем наибольший эффект достигается в экстремальные годы. Это хорошо видно из табл. 21. Практически во всех экстремальных случаях, когда обеспеченность нормы оказывается низкой, расчет улавливает особенность развития процесса.

В 1965 г. была издана инструкция [91], которая рекомендует оценку метода проводить по отношению средней квадратической

погрешности рассчитываемого элемента ( $\varepsilon$ ) к среднему квадратическому отклонению его величины от нормы за многолетний ряд наблюдений ( $\sigma$ ). Для такой оценки была использована реко-

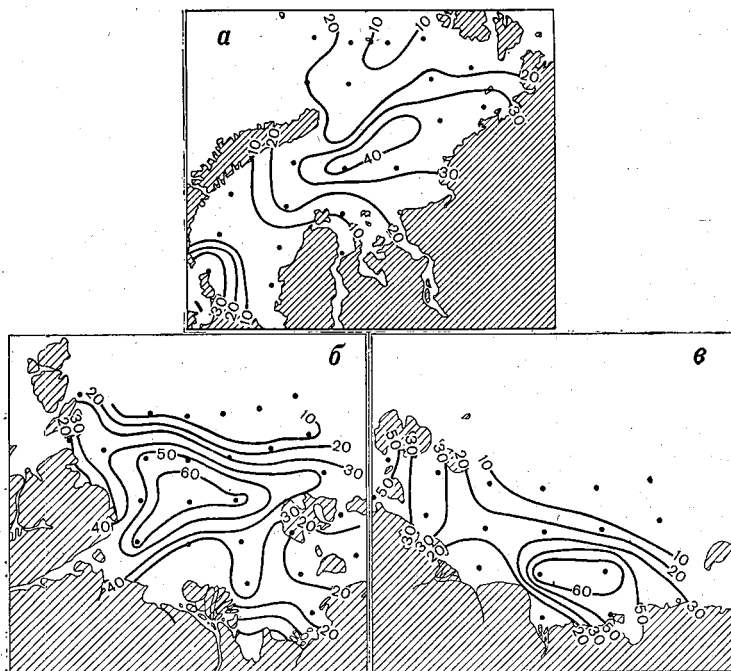


Рис. 32. Эффективность метода расчета сроков устойчивого ледообразования (в процентах).

*a* — Карское море; *б* — море Лаптевых; *в* — Восточно-Сибирское море.

мендованная инструкцией формула, связывающая это отношение с коэффициентом корреляции ( $k$ ),

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \sqrt{1 - k^2}.$$

Такая проверка эффективности метода расчета также была проведена, и результаты ее даны в табл. 21. Коэффициент корреляции при этом находился между полем вычисленных сроков устойчивого ледообразования в узлах сетки и полем фактических значений этой характеристики в этих же узлах.

Согласно инструкции, при том количестве членов ряда (узлов сетки), по которым определялась согласованность полей, метод считается приемлемым, если полученные  $\frac{\varepsilon}{\sigma} \leq 0,62$ . А если учесть,

Статистические характеристики сопоставления расчетных сроков  
устойчивого ледообразования с фактическими

Год	Карское море					Море Лаптевых					Восточно-Сибирское море				
	1	2	3	k	$\frac{\epsilon}{\sigma}$	1	2	3	k	$\frac{\epsilon}{\sigma}$	1	2	3	k	$\frac{\epsilon}{\sigma}$
1936	90	57	33	0,92	0,39										
1937	67	90	-23	0,93	0,37										
1940	81	71	10	0,79	0,61										
1946	81	62	19	0,72	0,70										
1947	100	52	48	0,85	0,53										
1948	81	38	43	0,76	0,65						47	56	-9	0,80	0,60
1949	86	62	24	0,91	0,41										
1950	76	67	9	0,88	0,48	78	87	-9	0,66	0,75					
1951	100	57	43	0,90	0,44										
1952	91	86	5	0,82	0,57	91	17	74	0,55	0,84	61	49	12	0,65	0,76
1953	81	86	-5	0,88	0,47	83	44	39	0,55	0,83	89	33	56	0,88	0,48
1954	67	43	23	0,88	0,47	78	83	-5	0,84	0,55					
1955	86	86	0	0,82	0,57	87	82	5	0,75	0,65					
1956	71	29	42	0,85	0,53	78	74	4	0,89	0,45					
1957	62	52	10	0,80	0,60						50	31	19	0,49	0,87
1958						83	35	48	0,90	0,42	83	83	0	0,92	0,37
1959	76	90	-14	0,89	0,46	87	17	60	0,70	0,72	56	39	17	0,67	0,75
1960	71	38	33	0,82	0,57	87	44	43	0,75	0,66	50	39	11	0,82	0,57
1961	86	95	-9	0,92	0,39	65	70	-5	0,62	0,75	83	61	22	0,92	0,39
1962	95	57	38	0,89	0,46	74	1	73	0,46	0,89	83	22	61	0,89	0,46
1963						96	2	94	0,86	0,50					

Примечание. Графы 1, 2, 3 — обеспеченность расчета в пределах 20% амплитуды, обеспеченность нормы, в пределах 20% амплитуды и эффективность метода расчета соответственно.

что в большинстве районов промежутков времени от начального момента до даты ледообразования превышает два месяца, допустимая величина отношения  $\frac{\varepsilon}{\sigma}$  увеличивается до 0,75—0,80.

В этом случае почти во все годы погрешности расчета ложатся в допустимые пределы.

Сравнение оценок метода расчета двумя изложенными способами показывает, что они не всегда однозначны. Так, если ледообразование происходит почти одновременно по всему морю, то коэффициент корреляции между расчетными и фактическими данными может оказаться низким, хотя их разность лежит в пределах  $+20\%$  амплитуды. Если же процесс ледообразования сильно растянут по времени, то даже при больших отклонениях вычисленных сроков от фактических коэффициент корреляции между этими полями оказывается высоким. Примером первого случая могут служить оценки эффективности расчета сроков устойчивого ледообразования в море Лаптевых в 1952 и 1962 гг., а второго случая — оценки 1956 г. в том же море. Аналогичные примеры имеются и по другим морям.

Большие трудности возникают при проверке согласованности вычисленных толщин льда с фактическими. Поскольку в открытой части моря наблюдения над толщиной льда в начале зимы отсутствуют, то реальность расчетных величин  $H$  можно было оценить только путем сопоставления их с результатами наблюдений на полярных станциях. Поэтому невозможно было вычислить обеспеченность расчета толщины льда для открытого моря. В тех районах, где узел сетки располагается вблизи полярной станции, согласованность вычисленных и наблюдаемых толщин молодого льда удовлетворительная. Коэффициент корреляции между этими характеристиками, взятыми на 10 декабря для двух лет с различными условиями ледообразования, составляет  $0,72$  и  $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 0,69$ .

К сожалению, чрезвычайно мало фактического материала имелось для проверки расчетных значений температуры, солености воды и глубины распространения конвекции. Это объясняется тем, что патрульные суда обычно не проводят повторных наблюдений. Косвенным критерием, характеризующим реальность вычисленных величин температуры и солености гомогенного слоя, может служить согласованность расчетных и фактических сроков ледообразования, так как они определяются температурой и соленостью воды.

При сравнении глубин распространения конвективного перемешивания, вычисленных по результатам наблюдений и данной схемой, А. В. Сметанникова использовала весь фактический материал в районах, прилегающих к соответствующим узлам сетки (рис. 33).

Таким образом, сопоставление расчетных характеристик с фактическими дает возможность считать изложенный метод расчета элементов гидрологического режима в осенний период вполне пригодным для практического использования. Поскольку метод учитывает воздействие всех основных факторов, обуславливающих развитие гидрологического процесса, то представляется возможность определить различные характеристики режима моря в осенний период и их взаимосвязь.

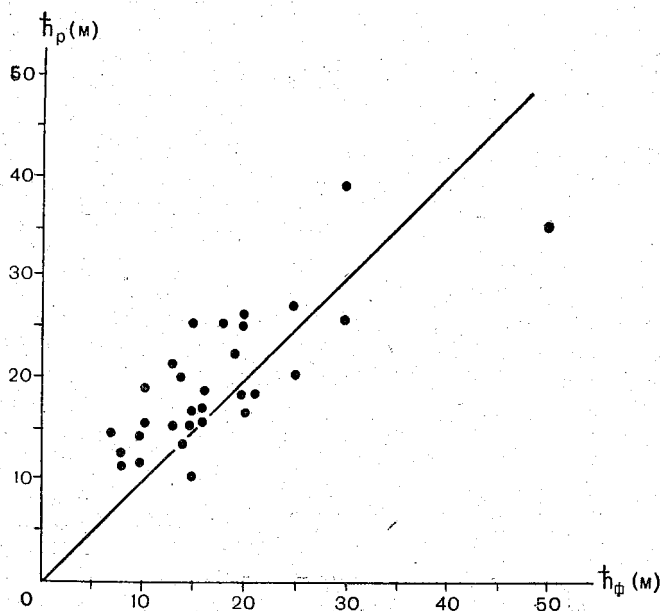


Рис. 33. Сопоставление расчетных глубин  $h_p$  распространения конвективного перемешивания в Карском море с фактическими  $h_\phi$ .

Зависимость характера развития процесса осенне-зимнего охлаждения моря от различных гидрометеорологических факторов такова же, как отмечено в § 3 при анализе процессов охлаждения по отдельным пунктам, т. е. термический режим поверхностного слоя моря, процессы ледообразования и нарастания льда зависят не только от интенсивности теплообмена с атмосферой и термического состояния водной массы, но и от ее плотностной стратификации.

Диффузия солей снизу вверх оказывает большое влияние на соленость гомогенного слоя и его толщину. Обычно она приводит к уменьшению плотностной расслоенности, увеличению глубины

распространения конвективного перемешивания и более поздним срокам ледообразования. Но какого-либо количественного соотношения между изменениями коэффициента диффузии и сроками ледообразования получить не удалось из-за влияния начальной плотностной стратификации в море и горизонтальных переносов. Стратификация солености играет чрезвычайно большую роль в формировании морских гидрологических процессов.

В прилегающих к материковому побережью районах моря, где сток пресных вод приводит к распреснению поверхностных

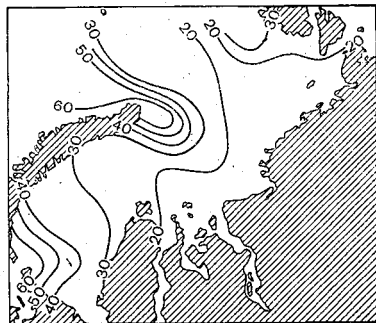


Рис. 34. Средняя расчетная толщина слоя конвективного перемешивания (в метрах) на момент устойчивого ледообразования.

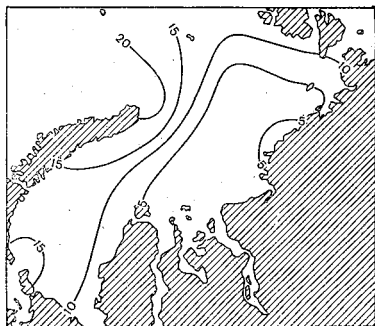


Рис. 35. Средняя разность между датой первого появления льда и датой устойчивого ледообразования (в сутках):

вод, толщина слоя конвекции значительно меньше, чем в областях адвекции соленых вод. От глубины распространения конвекции зависит, как было показано и подтверждено расчетами по всей акватории морей, скорость изменения температуры воды и срок ледообразования. В районах интенсивного развития осенне-зимнего конвективного перемешивания ледообразование, как правило, наступает позднее, и разница между первым появлением льда и устойчивым ледообразованием больше. В качестве примера на рис. 34 и 35 показаны глубина распространения конвективного перемешивания и разность между датой первого появления льда и датой устойчивого ледообразования. Из рисунков видно, что в районах наибольшей толщины слоя конвекции лед устанавливается не сразу. Это объясняется тем, что по мере охлаждения моря в результате интенсивного развития конвекции до значительных глубин к поверхности поступает тепло из более глубоких слоев, которое препятствует устойчивому установлению ледяного покрова. В годы, когда создается резко выраженная плотностная стратификация, конвекция развивается слабо. В этих случаях тепло из нижележащих слоев моря

поступает слабо, поэтому сразу же после образования лед устойчиво сохраняется. Основываясь на зависимости ледообразования от развития конвекции, можно сделать выводы прогностического

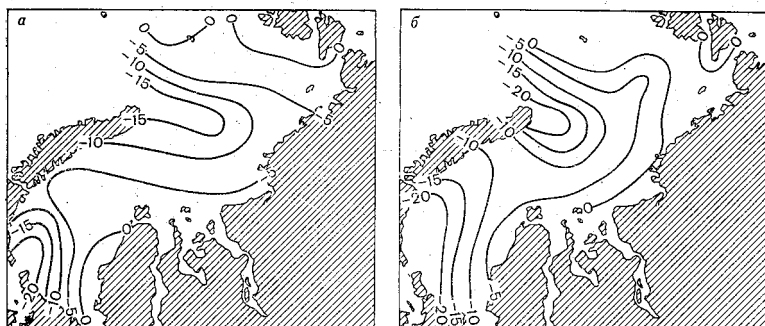


Рис. 36. Аномалии сроков устойчивого ледообразования в 1965 г. (в сутках).

*a* — прогностические; *b* — фактические.

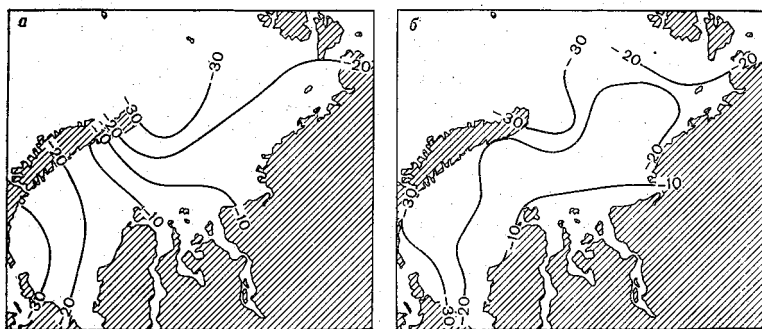


Рис. 37. Аномалии сроков устойчивого ледообразования в 1966 г. (в сутках).

*a* — прогностические; *b* — фактические.

характера о том, что при сильной распресненности поверхностного слоя воды в летний период больше вероятность раннего ледообразования и наоборот.

Изложенный метод был использован для прогнозирования сроков устойчивого ледообразования и нарастания льда в осенне-зимний период в морях Советской Арктики. Основой для разработки прогноза послужили полученные выводы о том, что наибольшую роль в изменчивости процессов ледообразования играют теплообмен с атмосферой и перераспределение водной массы по



акватории моря, которые определяются по температуре воздуха и атмосферному давлению. Величины скорости ветра и радиационного баланса, как было показано, можно взять средними многолетними. Таким образом, при составлении прогноза были использованы фактические данные глубоководных гидрологических наблюдений, выполненных в августе, метеорологических наблюдений, проведенных на полярных станциях в этом месяце, прогностические характеристики температуры воздуха и давления, а также средние многолетние значения скорости ветра и радиационного баланса на последующий период.

В качестве примера на рис. 36 и 37 приведены прогнозы сроков ледообразования. Прогноз был составлен в первой декаде сентября. В обоих случаях прогнозировались большие отрицательные аномалии сроков устойчивого ледообразования в районах крайней юго-западной части моря и мыса Желания (рис. 36, а и 37, а). На рисунках 36, б и 37, б представлены аномалии сроков образования льда по фактическим данным. Сопоставление прогностических дат с фактическими показывает хорошее совпадение этих данных.

## Глава VII. ВЛИЯНИЕ СЕВЕРНОГО ЛЕДОВИТОГО ОКЕАНА НА ТЕМПЕРАТУРУ И БАРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ АТМОСФЕРЫ

### § 1. Термическая трансформация воздуха над морем

Термическая трансформация воздуха под воздействием теплообмена с морем наиболее интенсивно протекает в Арктике в весенний и осенний период. В это время обычно наиболее велики контрасты температуры поверхности моря и поступающего в Арктику воздуха. Вследствие теплообмена эти контрасты температуры уменьшаются. При этом в наибольшей степени происходит изменение температуры воздуха из-за его малой теплоемкости по сравнению с водой.

Трансформацию воздуха под воздействием подстилающей поверхности необходимо учитывать не только при прогнозировании температуры, но и при расчетах тепла, влаги, при прогнозе туманов и т. д. Множество практических приложений проблемы трансформации воздушных масс привело к большому вниманию со стороны ученых разных стран. И к настоящему времени эта проблема довольно хорошо разработана.

В наиболее общей постановке задача решена М. Е. Берляндом [9]. Он дал теоретическую разработку нестационарной трансформации движущейся воздушной массы и показал, что из общего случая достаточно просто получаются частные случаи: трансформация малоподвижных воздушных масс и стационарная трансформация движущихся воздушных масс. Е. М. Фейгельсон [232] предложила систему уравнений, описывающую теплообмен и влагообмен не только в атмосфере, но и в почве, и в океане. В этих уравнениях учитываются не только турбулентный теплообмен, но и лучистые потоки тепла, осадки, испарение. В общих чертах она наметила схему решения, но из-за сложности полученных выражений практическая реализация решения без существенных упрощений, очевидно, будет невозможна.

В большинстве случаев при решении задачи трансформации используется лишь уравнение притока тепла или добавляется еще уравнение диффузии водяного пара. При этом обычно счи-

тается, что скорость переноса воздушной массы и интенсивность турбулентного перемешивания известны. Иногда производится учет трансформации профиля скорости ветра и коэффициента турбулентности [137]. В последнее десятилетие Д. Л. Лайхтманом и его учениками [142, 238, 239 и др.] разрабатывается теория строения пограничного слоя атмосферы, в которой скорость ветра задается лишь на верхней границе этого слоя, а коэффициент турбулентности вычисляется из задаваемой системы уравнений. Но решение такой задачи оказалось возможным при большом упрощении уравнений.

При изучении трансформации нижних слоев атмосферы под влиянием подстилающей поверхности обычно не принимается во внимание роль упорядоченных вертикальных токов из-за их малого влияния на изменение температуры по сравнению, например, с турбулентным теплообменом. Этот вывод был получен как теоретически Я. А. Сироткиным [211], так и экспериментально С. С. Гайгеровым и В. Г. Кастровым [44] на основании результатов наблюдений в полетах на свободных аэростатах.

Вследствие теплообмена изменяется температура не только воздуха, но и той среды, над которой он движется. Однако если воздух движется над морем, то из-за большой теплоемкости и турбулентного перемешивания температура воды меняется значительно слабее температуры воздуха. При этом, если принимать теплопроводность моря по вертикали одинаковой, изменение температуры поверхности моря очень сильно зависит от его глубины. Такой вывод, например, получен Ю. В. Николаевым [171]. В действительности сильная расслоенность воды в арктических морях и существование гомогенного слоя приводят к тому, что скорость изменения поверхностной температуры зависит от толщины этого слоя. Легко показать, что чем толще гомогенный слой, тем медленнее, по сравнению с воздухом, меняется его температура. Иллюстрировать отмеченное легче всего, рассматривая нестационарную трансформацию малоподвижной воздушной массы над морем, имеющим гомогенный слой толщиной  $h$ . Уравнения, описывающие изменение температуры воздуха ( $T$ ) и моря ( $\vartheta$ ), запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + Q & h' \leq z < \infty; \\ \frac{\partial}{\partial z} (x_0 + a'z) \frac{\partial T_1}{\partial z} &= 0 & 0 \leq z \leq h'; \\ h c \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=h} + \Phi_B & 0 \leq \zeta \leq h; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \zeta^2} & h \leq \zeta < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

где  $a_2$  и  $a$  — коэффициенты температуропроводности воздуха и воды;

$c\gamma$  — объемная теплоемкость воды;

$Q$  — приток тепла (адвективный, лучистый и т. д.);

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности воды.

В качестве краевых условий используются обычно употребляемые равенство температур соприкасающихся сред и уравнение баланса тепла на уровне  $z = \zeta = 0$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + \Phi_B = B, \quad (2.7)$$

условие склейки на уровне  $z = \bar{h}'$

$$T_1 = T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

и условие конечности температур.

Задается распределение температуры воздуха  $F(z)$  и воды  $\varphi(\zeta)$  в начальный момент времени.

В уравнениях (1.7) в соответствии с выводами М. Е. Берлянда и результатами, изложенными в главе I, введена квазистационарность прилегающего к поверхности моря слоя воздуха. В уравнении баланса тепла не участвуют в явном виде затраты тепла на испарение. Используя слабую изменчивость относительной влажности над морем, эту компоненту можно представить в виде добавок к турбулентному потоку тепла и известному радиационному балансу. Действительно, градиент удельной влажности представляется следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0,622 \frac{E_0}{P} e^{\sigma T} \left[ r\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial z} \right].$$

После умножения на соответствующий множитель первое слагаемое правой части добавляется к выражению турбулентного потока тепла, а второе — к радиационному балансу.

Используя операционный метод, легко получить решение системы уравнений (1.7) с перечисленными краевыми условиями. В частности, получаются следующие выражения, определяющие в изображениях температуру поверхности воды и прилегающего слоя воздуха:

$$\bar{\theta}_0(\Gamma) = \frac{\sqrt{\Gamma} (x_0 + n\sqrt{a_2\Gamma}) \left[ \bar{h}c\gamma\varphi_0 + \frac{\bar{B}}{\Gamma} + c\gamma \int_{(\bar{h})}^{\infty} \varphi(\eta) e^{(\bar{h}-\eta)} \sqrt{\frac{\Gamma}{a}} d\eta + \right.}{nc\gamma\bar{h}\Gamma\sqrt{a} + (\bar{h}'x_0 + n\sqrt{aa_2})c\gamma\sqrt{\Gamma} + c\gamma x_0\sqrt{a} + \left. + \frac{\lambda_1}{x_0 + n\sqrt{a_2\Gamma}} \int_{(\bar{h})}^{\infty} \bar{f}(\eta) e^{(\bar{h}'-\eta)} \sqrt{\frac{\Gamma}{a_2}} d\eta \right]}{+ \lambda_1\sqrt{a_2}}, \quad (3.7)$$

$$\bar{T}_1(\Gamma, z) = \frac{n_1 \Gamma}{x_0 + n \sqrt{a_2 \Gamma}} \int_{\hbar'}^{\infty} \bar{f}(\eta) e^{(\hbar' - \eta)} \sqrt{\frac{\Gamma}{a_2}} d\eta +$$

$$+ \frac{x_0 + (n - n_1) \sqrt{a_2 \Gamma}}{x_0 + n \sqrt{a_2 \Gamma}} \bar{\vartheta}_0(\Gamma), \quad (4.7)$$

где

$$\bar{\vartheta}_0 = \bar{\vartheta} \quad (0 \leq \zeta \leq \hbar);$$

$$\varphi_0 = \varphi(\hbar);$$

$$\bar{f}(\eta) = F(\eta) + \frac{\bar{Q}(\Gamma, \eta)}{\Gamma};$$

$$n_1 = \frac{x_0}{a'} \ln \frac{x_0 + a'z}{x_0};$$

$$n = n_1 \Big|_{z=\hbar'}.$$

При переходе от функций-изображений к оригиналам можно учесть то обстоятельство, что последний член знаменателя в формуле (3.7) на порядок меньше предпоследнего. Если это малое слагаемое отбросить, то получается довольно простой переход к оригиналу

$$\vartheta_0(t) = \varphi_0 \chi(\alpha_1 \sqrt{t}) + \frac{1}{c\gamma \hbar} \int_0^t B(t - \xi) \chi(\alpha_1 \sqrt{\xi}) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\hbar} \int_{\hbar}^{\infty} \varphi(\eta) \chi\left(\alpha_1 \sqrt{t}, \frac{\alpha_2}{\sqrt{t}}\right) d\eta +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{c\gamma x_0 \hbar \left(1 + \frac{n \sqrt{a_2 \Gamma}}{\hbar}\right)} \int_{\hbar'}^{\infty} \left\{ F(\eta) \left[ \chi\left(\alpha_1 \sqrt{t}, \frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}\right) - \right. \right.$$

$$\left. - \chi\left(\alpha_3 \sqrt{t}, \frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}\right) \right] + \int_0^t Q(t - \xi, \eta) \left[ \chi\left(\alpha_1 \sqrt{\xi}, \frac{\alpha_4}{\sqrt{\xi}}\right) - \right.$$

$$\left. - \chi\left(\alpha_3 \sqrt{\xi}, \frac{\alpha_4}{\sqrt{\xi}}\right) \right] d\xi \right\} d\eta, \quad (5.7)$$

где

$$\chi\left(\alpha_i \sqrt{t}, \frac{\alpha_j}{\sqrt{t}}\right) = e^{\alpha_i^2 t + 2\alpha_i \alpha_j} \operatorname{erfc}\left(\alpha_i \sqrt{t} + \frac{\alpha_j}{\sqrt{t}}\right);$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{a}}{\hbar}; \quad \alpha_2 = \frac{\eta - \hbar}{2\sqrt{a}};$$

$$\alpha_3 = \frac{x_0}{n\sqrt{a_2}}; \quad \alpha_4 = \frac{\eta - \hbar'}{2\sqrt{a_2}}.$$

Зная оригинал  $\bar{\theta}_0$ , легко реализовать и выражение (4.7)

$$\begin{aligned}
 T_1(t, z) = & \frac{n_1}{n \sqrt{a_2}} \int_{h'}^{\infty} \left\{ F(\eta) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a_2^2}{t}} - \right. \right. \\
 & - \alpha_3 \chi \left( \alpha_3 \sqrt{t}, \frac{a_4}{\sqrt{t}} \right) \left. \right] + \int_0^t Q(t-\xi, \eta) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi \xi}} e^{-\frac{a_2^2}{\xi}} - \right. \\
 & \left. - \alpha_3 \chi \left( \alpha_3 \sqrt{\xi}, \frac{a_4}{\sqrt{\xi}} \right) \right] d\xi \left. \right\} d\eta + \\
 & + \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{\theta}_0(t-\xi) \left[ 1 - \frac{n_1}{n} \chi \left( \alpha_3 \sqrt{\xi} \right) \right] d\xi. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

При анализе формулы (5.7) сразу же обнаруживается четкая зависимость температуры гомогенного слоя моря от его толщины. С увеличением  $h$  изменчивость  $\bar{\theta}_0$  во времени убывает. Но даже при  $h=5$  м температура поверхности моря меняется в зависимости от  $t$  настолько мало по сравнению с температурой воздуха, что в задачах трансформации воздуха над морем можно считать  $\bar{\theta}_0$  в течение нескольких суток неизменной. В качестве иллюстрации на рис. 38 приведено относительное изменение температуры воды и воздуха на высоте 2 м в зависимости от притока тепла  $Q$ . Все остальные члены полагались нулевыми. При расчетах принято  $Q$  постоянным по высоте и во времени,  $h'=100$  м,  $a=$   
 $= 1 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}, a_2=5 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}.$

Из рисунка видно, что источники тепла в атмосфере (адвективные, лучистые и т. д.), по крайней мере в первые несколько суток их действия, практически не изменяют температуры воды и заметно влияют на температуру воздуха.

Если бы не было никаких внешних источников тепла, а только происходила бы трансформация температуры воздуха и воды в результате теплообмена между этими средами, то и при этом изменения температуры воды по сравнению с температурой воздуха оказываются незначительными. На рис. 38 пунктиром представлен характер изменений  $\bar{\theta}_0$  и  $T$  (2 м) для гипотетического случая трансформации первоначально изотермических моря и атмосферы с начальной разностью температур  $10^\circ$ . При этом принималось  $B=Q=\varphi=0$ .

По формулам (5.7) и (6.7) можно произвести расчеты термической трансформации воды и воздуха для любого реального состояния этих сред, но вывод будет таким же: в результате теплообмена с атмосферой изменение температуры гомогенного слоя

воды составляет малую величину по сравнению с изменением температуры воздуха. Это хорошо известно из практики. Поэтому, рассматривая трансформацию воздуха над морем в течение нескольких суток, без особого ущерба для точности расчетов температуру воды можно полагать неизменной. Используя

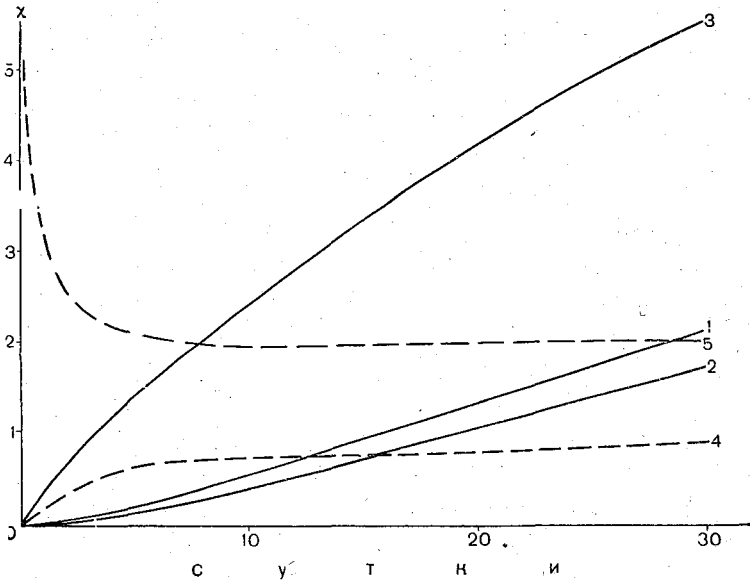


Рис. 38. Относительная изменчивость температуры воздуха и воды.

1 —  $h=5$  м,  $\chi = \frac{\delta\theta_0}{Q}$  (в сутках); 2 —  $h=10$  м,  $\chi = \frac{\delta\theta_0}{Q}$  (в сутках); 3 —  $h=5$  м,  $\chi = \frac{\delta T}{Q}$  (в сутках); 4 —  $h=5$  м,  $\chi = \theta_0$  (в градусах); 5 —  $h=5$  м,  $\chi = T_{2м}$  (в градусах).

условие неизменности температуры поверхности воды во времени, М. Е. Берлянд и Ким Зин Мун [11] решили задачу о нестационарной трансформации движущейся воздушной массы над

морем. Полученное решение оказалось различным для  $t < \frac{x}{u}$  и

для  $t > \frac{x}{u}$ . Если для первого случая изменение температуры

воздуха зависит от начальной стратификации, то для второго — полученное выражение  $T$  полностью совпадает с решением за-

дачи для стационарного случая  $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ .

Согласно этой работе, для  $t < \frac{x}{u}$

$$T_1(t, z) = \vartheta_0(x) - \frac{n_1}{n} \left[ \vartheta_0\left(\frac{x}{u} - t\right) \chi(\alpha_3 \sqrt{t}) + \int_{\frac{x}{u}-t}^{\frac{x}{u}} \chi\left(\alpha_3 \sqrt{\frac{x}{u} - \xi}\right) d\vartheta_0(\xi) - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_{\frac{x}{u}-t}^{\infty} F(x - ut, \eta) F_*(t, \eta) d\eta \right], \quad (7.7)$$

для  $t > \frac{x}{u}$

$$T_1\left(\frac{x}{u}, z\right) = \vartheta_0(x) - \frac{n_1}{n} \left[ \vartheta_0(0) \chi\left(\alpha_3 \sqrt{\frac{x}{u}}\right) + \int_0^{\frac{x}{u}} \chi\left(\alpha_3 \sqrt{\frac{x}{u} - \xi}\right) d\vartheta_0(\xi) - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_{\frac{x}{u}}^{\infty} F\left(t - \frac{x}{u}, \eta\right) F_*\left(\frac{x}{u}, \eta\right) d\eta \right], \quad (8.7)$$

где  $u$  — горизонтальная скорость движения воздушной массы по направлению  $x$ ;

$F(x, z)$  — стратификация воздушной массы в начальный момент;

$F'(t, z)$  — стратификация воздушной массы в начальном пункте;

$$F_*(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha_4^2}{t}} - \alpha_3 \chi\left(\alpha_3 \sqrt{t}, \frac{\alpha_4}{\sqrt{t}}\right).$$

Последняя формула удобна для изучения репрезентативности измеренных на береговых и островных станциях температур воздуха. Из нее следует, что температура воздуха зависит от его стратификации, интенсивности турбулентного перемешивания и



температуры поверхности, над которой он движется. При изменении температуры подстилающей поверхности в результате теплообмена происходит термическая трансформация воздушной массы. И она будет тем сильнее, чем больше перепад температур поступающей воздушной массы и подстилающей поверхности. На рис. 39 представлен, согласно формуле (8.7), характер изменения температуры воздуха, поступающего летом с материка на

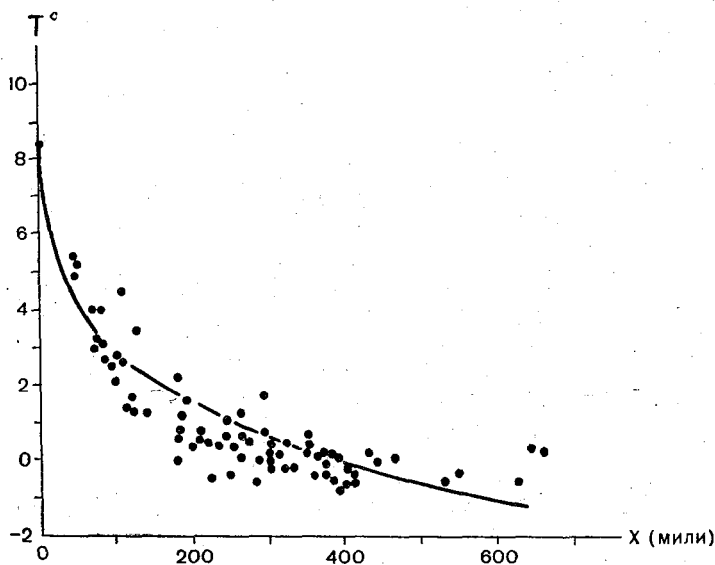


Рис. 39. Термическая трансформация воздуха над морем при  $z=2$  м в первой декаде июля.

покрытое льдом море. При использовании средних для этого периода времени значений исходных величин ( $u=5$  м/сек, вертикальный градиент 6 град/км, радиационное выхолаживание 2 град/сутки) теоретическая кривая трансформации воздуха довольно хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными А. Я. Николаевой и Н. П. Шестериковым<sup>1</sup>. Это свидетельствует о верном учете основных факторов, определяющих трансформацию.

Из рисунка видно, что температура нижнего слоя воздуха довольно быстро стремится к температуре подстилающей поверхности. Поэтому часто температура воздуха, измеренная на материковых полярных станциях, отличается от температуры воздуха над морем. Особенно велико это отличие при ветрах с материка

<sup>1</sup> Метод расчета толщин льда и положения кромки в море Лаптевых. Л., фонды Аркт. и антаркт. ин-та, 1965.

в начале лета и осенью. В первом случае прогретый воздух поступает на море, покрытое еще льдом, температура которого не может подняться выше  $0^\circ$ , и происходит очень быстрое выхолаживание нижних слоев воздуха. Во втором случае холодный воздух поступает на не замерзшее еще море и прогревается. Это обстоятельство необходимо учитывать при использовании данных материковых полярных станций для характеристики термического режима над морем и для различного рода расчетов, в которые входит в качестве исходных температура воздуха, в частности для расчетов таяния льда и замерзания моря. Но при ветре с моря температура воздуха, измеренная на береговых полярных станциях, близка к ее значению над прилегающими участками моря, так как в этом случае воздушная масса проходит очень небольшой участок суши и не успевает трансформироваться. Также репрезентативными для окружающей акватории оказываются данные температуры воздуха над небольшими островами, если, естественно, нет других микроклиматических особенностей. Этот вывод следует из формулы (8.7). Действительно, полагая, что температура подстилающей поверхности меняется скачком на границе раздела море—суша на величину  $\delta\theta_0$  и далее остается постоянной, из выражения (8.7) можно легко найти изменение температуры воздуха  $\delta T$

$$\frac{\delta T}{\delta\theta_0} = 1 - \frac{n_1}{n} \chi \left( \alpha_3 \sqrt{\frac{x}{u}} \right). \quad (9.7)$$

Из последней формулы следует, что наибольшие изменения температуры воздуха происходят у подстилающей поверхности, где  $n_1$  мало. С высотой  $\delta T$  убывает. Поскольку при малых  $\frac{x}{u}$  функция  $\chi$  близка к единице, то и  $\delta T/\delta\theta_0$  в этом случае мало уже на высоте 10—20 м. Но вблизи подстилающей поверхности даже недалеко от берега это отношение может составлять заметную величину. В частности, на высоте метеорологической будки  $0\left(\frac{\delta T}{\delta\theta_0}\right) \sim 0,2$ , несколько колеблясь в ту или другую сторону

в зависимости от скорости ветра. Такая величина вполне согласуется с экспериментальными данными А. Я. Николаевой и Н. П. Шестерикова. Они провели параллельные измерения температуры воздуха на высоте 2 м над льдом на расстоянии 200 м от берега и на полярной станции. Осреднив данные 15 случаев, эти авторы составили таблицу поправок для перехода от температуры воздуха на полярной станции к температуре воздуха на высоте 2 м над льдом (см. ниже).

Температура воздуха на полярной станции . . .	0	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	14,0
Поправка . . . . .	0	-0,3	-0,6	-1,0	-1,2	-1,4	-1,5	-1,6

Если полагать, что температура почвы на полярной станции близка к температуре воздуха, то данные верхней строки таблицы можно отождествить с  $\delta\Phi_0$  между сушей и тающим льдом. В этом случае расчетные значения  $\delta T$  близки к экспериментальным величинам, приведенным в нижней строке таблицы.

## § 2. Термическая трансформация воздуха над льдом

Трансформация воздушной массы над льдом отличается от трансформации над сушей тем, что в первом случае происходит изменение толщины льда, влияющее на величину теплообмена и температуру воздуха. При этом стационарное состояние может наступать лишь при неизменной толщине льда или во время его таяния, когда температура поверхности льда постоянна. В остальных случаях к используемым обычно в задачах по трансформации уравнениям необходимо добавлять еще одно, определяющее изменение толщины льда. Решение уравнения теплопроводности льда с условием Стефана на нижней границе позволяет определить теплообмен через лед в зависимости от его толщины и потоков тепла или температуры на его границах.

Теплообмен через лед, являющийся одной из составляющих теплового баланса, нужен для расчетов трансформации воздуха над льдом. Однако точное аналитическое выражение этой компоненты имеет сложный вид и практически не может быть использовано для дальнейшего решения задачи. Поэтому целесообразно использовать полученное ранее приближенное выражение потока тепла из толщи льда к его поверхности (72.4) и подставить в уравнение теплового баланса (2.7). При этом необходимо переменить знаки, так как положительное значение  $\Phi_v$  в (2.7) обозначает отток тепла.

В результате уравнение теплового баланса поверхности льда принимает вид

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - l_1 \gamma_1 \frac{dH}{dt} - \Phi_v + \Lambda \delta(t) = B, \quad (10.7)$$

где  $\Lambda$  — теплопроводность льда (остальные обозначения прежние).

Решение первых двух уравнений (1.7), описывающих изменение температуры воздуха, при тех же начальных и граничных условиях, за исключением уравнения баланса тепла, которое берется в виде выражения (10.7), получается довольно просто. Используя операцию преобразования Лапласа—Карсона,

можно получить формулу, определяющую температуру поверхности льда через функции изображения:

$$\bar{\Theta}_0 = \frac{n}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{\kappa_0}{n \sqrt{a_2 \Gamma}} \right) [\bar{B} + l_1 \gamma_1 \bar{v} + \bar{\Phi}_B - \Lambda \bar{\delta}] + \sqrt{\frac{\Gamma}{a_2}} \int_{h'}^{\infty} \bar{f}(\eta) e^{(\eta - h')} \sqrt{\frac{\Gamma}{a_2}} d\eta, \quad (11.7)$$

где

$$\bar{v} = \Gamma \int_0^{\infty} e^{-\Gamma t} \frac{dH}{dt} dt.$$

Параметры  $\lambda_1$ ,  $\Lambda$  и  $l_1$  слабо зависят от температуры, поэтому при переходе от оригиналов к изображениям они принимались постоянными.

Оригинал выражения (11.7) легко получить с помощью теоремы свертки и табличных операционных соотношений [59]

$$\begin{aligned} \Theta_0(t) = & \frac{n}{\lambda_1} [B + l_1 \gamma_1 v + \Phi_B - \Lambda \delta] + \\ & + \frac{\kappa_0}{\lambda_1 \sqrt{\pi a_2}} \int_0^t [B(\xi) + l_1 \gamma_1 v(\xi) + \Phi_B(\xi) - \\ & - \Lambda \delta(\xi)] (t - \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2}} \int_{h'}^{\infty} \left\{ \frac{F(\eta)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\eta - h')^2}{4a_2 t}} + \right. \\ & \left. + \int_0^t \frac{Q(\eta, t - \xi)}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{(\eta - h')^2}{4a_2 \xi}} d\xi \right\} d\eta, \quad (12.7) \end{aligned}$$

где

$$v = \frac{dH}{dt}.$$

Температура поверхности льда  $\Theta_0(t)$  находится из выражения (12.7) методом последовательных приближений. Если скорость изменения толщины льда  $v$  известна заранее, например, из наблюдений, то, полагая сначала  $\delta = 0$ , находится первое приближение  $\Theta_0$ . Затем вычисляется  $\delta$ , знание которой позволяет уточнить решение и получить второе приближение  $\Theta_0$ , и т. д. Сходимость получающихся при этом решений быстрая, особенно для тонкого льда.

Если  $v$  неизвестно, то его можно определить, используя формулу (29.4). Предположив, что в течение интервала времени

$t_1$ , в котором исследуется трансформация воздуха, изменение толщины льда происходит с постоянной скоростью, приведем выражение (12.7) к виду

$$\Theta_0(t) = \frac{l_1 \gamma_1 n}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{2x_0}{n} \sqrt{\frac{t}{\pi a_2}} \right) v + D, \quad (12a.7)$$

где  $D$  обозначает остальные члены выражения (12.7).

Подставив в формулу (29.4) вместо  $\Theta_0$  последнее выражение и решив получившееся при этом уравнение относительно  $v$ , будем иметь

$$v = -\frac{H_0}{t_1} A_1 + \frac{H_0}{t_1} \left\{ A_1^2 + \frac{-2\Lambda}{l^* \gamma_1} \left\{ \int_0^{t_1} \left[ \theta - D - \frac{H_0 \Phi_B}{\Lambda} \right] dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \psi [D(t_1) - \Theta_0(0)] \right\} \right\}^{1/2}, \quad (13.7)$$

где 
$$A_1 = 1 + \frac{1}{H_0 t_1} \int_0^{t_1} \frac{\Phi_B}{l^* \gamma_1} t dt + \frac{l_1 n \Lambda}{l^* H_0 \lambda_1} \left[ \left( 1 + \frac{4x_0 \sqrt{t_1}}{3n \sqrt{\pi a_2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{H_0^2 \psi}{t_1} \left( 1 + \frac{2x_0}{n} \sqrt{\frac{t_1}{\pi a_2}} \right) \right].$$

Вычисление  $v$ , как и  $\Theta_0$ , проводится методом последовательных приближений. Сначала находится скорость изменения толщины льда при  $\delta=0$ . Полученная величина  $v$  подставляется в формулу (12.7), что позволяет вычислить первое приближение  $\Theta_0$ . Затем находится второе приближение  $v$  с учетом  $\delta$ , которое рассчитано по первому приближению  $\Theta_0$ . Эта операция повторяется до получения  $v$  и  $\Theta_0$  с необходимой точностью.

Зная температуру поверхности льда, можно легко определить температуру воздуха в пределах квазистационарного подслоя. Для этого следует использовать уравнение баланса тепла (10.7) и решение второго уравнения из системы (1.7). В результате температура воздуха может быть представлена формулой

$$T_1(t, z) = \Theta_0(t) - \frac{n_1}{\lambda_1} (B + l_1 \gamma_1 v + \Phi_B - \delta). \quad (14.7)$$

В качестве примера на рис. 40 даны результаты расчетов температуры поверхности льда и величины изменения его толщины при следующих исходных данных:

$$T(0, h') = -20^\circ, \quad \theta = -1,8^\circ, \quad B = -110 \text{ кал/см}^2 \text{ сутки}, \\ \Gamma = 5 \text{ град/км}, \quad a_2 = 5 \text{ м}^2/\text{сек}, \quad \lambda_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}, \\ H_0 = 50 \text{ см}, \quad S_n = 4^0/00, \quad \Phi_B = Q = 0.$$

На этом рисунке представлены два первых приближения, третье совпадает со вторым. При выбранной толщине льда уточнение при втором приближении составляет величину порядка градуса. С уменьшением толщины льда нестационарность тепловых потоков во льду уменьшается, и уже для льда толщиной 25 см разница между первым и вторым приближениями составляет сотые доли градуса.

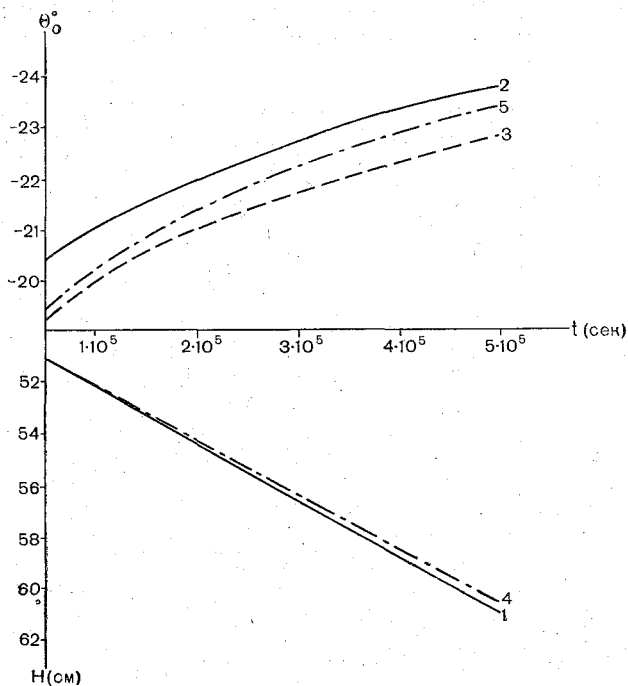


Рис. 40. Температура поверхности и толщина льда.

1, 2, 3 — первое приближение соответственно  $v$ ,  $\theta_0$  без членов, содержащих  $\delta$  и  $\theta_0$ ; 4, 5 — второе приближение соответственно  $v$  и  $\theta_0$ .

Нестационарность теплового потока через лед играет большую роль в тепловом балансе, если лед толстый. Но в этом случае относительные изменения толщины льда обычно невелики и их можно не учитывать, что значительно облегчает решение задачи о трансформации воздушной массы, сводя ее к виду, рассмотренному, например, в работе [171].

На основании формул (12.7) и (14.7) можно видеть, как влияют составляющие теплового баланса льда на температуру его поверхности и прилегающего слоя воздуха. Лучистый поток тепла, адвекция тепла и теплообмен между льдом и нижележа-

щими слоями воды понижают температуру воздуха и увеличивают нарастание льда, если они отрицательные, и вызывают противоположное изменение, если они положительные. При этом в первом случае происходит увеличение теплоты, выделяющейся при кристаллизации, во втором — уменьшение. Эти изменения в теплоте кристаллизации, противоположные по знаку внешним притокам тепла, уменьшают колебания температуры воздуха, вызванные первыми тремя компонентами баланса. Увеличение толщины льда приводит, как следует из формулы (13.7), к уменьшению скорости его прироста и уменьшению количества выделяющегося тепла. Поэтому в любом случае это способствует понижению температуры воздуха.

С удалением от поверхности льда влияние радиационного баланса и потока тепла, проходящего через лед, на температуру воздуха, т. е. термическое влияние подстилающей поверхности, ослабевает. Это хорошо видно из формулы (14.7). Полученные формулы позволяют оценить влияние различных слоев атмосферы на температуру льда и прилегающих слоев воздуха, а также на изменение толщины льда. Вклад верхних слоев тропосферы возрастает с увеличением интенсивности турбулентного перемешивания и интервала времени трансформации. Для периода времени около суток обычно бывает достаточным учесть начальную стратификацию слоя воздуха толщиной 2—3 км.

При движении воздуха над льдом различной толщины к нему будет поступать снизу различное количество тепла, что скажется на величине термической трансформации воздуха. Естественно, что и изменение толщины льда в каждой точке по пути движущегося воздуха окажется различным. Чтобы оценить трансформацию движущегося над льдом воздуха, нужно в уравнении теплопроводности сохранить адвективную составляющую и добавить граничное условие в начальном пункте. Остальные краевые условия могут быть аналогичными использованным.

При исследовании трансформации движущейся воздушной массы принято обычно считать известными траекторию и скорость перемещения воздуха  $u$ . Если направить ось  $x$  по траектории и принять условие квазистационарности прилегающего ко льду слоя воздуха, то исходные уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \\ \hbar' \leq z < \infty; \\ \frac{\partial}{\partial z} (x_0 + a'z) \frac{\partial T_1}{\partial z} &= 0 \\ 0 \leq z \leq \hbar'. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

Краевыми условиями будут:

$$\left. \begin{aligned} t=0 \quad T_2(0, x, z) &= F(x, z); \\ x=0 \quad T_2(t, 0, z) &= \varphi(t, z); \\ z=0 \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - l_1 \gamma_1 \bar{v} - \Phi_B + \Lambda \delta &= B; \\ z=h' \quad T_1 &= T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_2}{\partial z}; \\ z \rightarrow \infty \quad T_2 &\neq \infty. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

М. Е. Берлянд [9] показал, что скорость переноса воздушной массы можно принять неизменной по высоте, так как основной перенос тепла по горизонтали происходит в слое  $z > h'$ . Изменение температуры в квазистационарном подслое, где скорость ветра наиболее существенно меняется с высотой, осуществляется в основном за счет турбулентного обмена по вертикали, поэтому во второе уравнение (15.7) адвективный член не входит.

Поскольку в подобного рода задачах интервалы времени между началом и концом процесса обычно не превышают нескольких суток, хотя бы из-за изменений в динамике атмосферы, то ради упрощения решения целесообразно полагать приток тепла ко льду и изменение его толщины постоянными во времени. Для отыскания решения (15.7) при указанных начальных и граничных условиях, следуя работе [9], сначала переведем все функции в изображения согласно формуле

$$\bar{T}(\gamma, q, z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t - qx} T(t, x, z) dt dx. \quad (17.7)$$

При этом получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых позволяет получить функции-изображения искомых элементов. В частности, температура поверхности льда в изображениях определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_0 = \frac{n}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{z_0}{n \sqrt{a_2 \sigma}} \right) & \left[ \bar{B} - \Lambda \bar{\delta} + \frac{1}{\gamma} (l_1 \gamma_1 \bar{v} + \Phi_B) \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{a_2 \sigma}} \int_{h'}^{\infty} \bar{f} e^{(\lambda' - \eta)} \sqrt{\frac{\sigma}{a_2}} d\eta, \end{aligned} \quad (18.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{F}(q, z) + u \bar{\varphi}(\gamma, z); \\ \sigma &= \gamma + uq. \end{aligned}$$

При получении оригинала этого выражения следует иметь в виду важное обстоятельство, отмеченное М. Е. Берляндром.



Как уже отмечалось, он показал, что решения для  $t < \frac{x}{u}$  и  $t > \frac{x}{u}$  различны.

Используя приведенные в монографии [9] правила перехода от функций-изображений к оригиналам в случае двойного преобразования Лапласа, а также табличные выражения операционных соотношений [59], будем иметь:

для случая  $t < \frac{x}{u}$

$$\begin{aligned} \Theta_0(t, x) = & \frac{n}{\lambda_1} \left\{ \text{Б} - \Lambda \delta + L_1 \gamma_1 v + \Phi_B + \right. \\ & + \frac{x_0}{n \sqrt{a_2 \pi}} \int_{\frac{x}{u} - t}^{\frac{x}{u}} [\text{Б}(t, \xi) - \Lambda \delta(t, \xi) + L_1 \gamma_1 v(\xi) + \\ & \left. + \Phi_B(\xi)] \left( \frac{x}{u} - \xi \right)^{-1/2} d\xi \right\} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_{h'}^{\infty} J(t, \eta) F(x - ut, \eta) d\eta, \quad (19.7) \end{aligned}$$

для случая  $t > \frac{x}{u}$

$$\begin{aligned} \Theta_0(t, x) = & \frac{n}{\lambda_1} \left\{ \text{Б} - \Lambda \delta + L_1 \gamma_1 v + \Phi_B + \right. \\ & + \frac{x_0}{n \sqrt{a_2 \pi}} \int_0^{\frac{x}{u}} [\text{Б}(t, \xi) - \Lambda \delta(t, \xi) + L_1 \gamma_1 v(\xi) + \\ & \left. + \Phi_B(\xi)] \left( \frac{x}{u} - \xi \right)^{-1/2} d\xi \right\} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_{h'}^{\infty} J\left(\frac{x}{u}, \eta\right) \varphi\left(t - \frac{x}{u}, \eta\right) d\eta, \quad (20.7) \end{aligned}$$

где  $J(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\eta - h')^2}{4a_2 t}\right]$ .

В формулы (19.7) и (20.7) входят не известные пока  $v$  и  $\delta$ . Для их определения можно рекомендовать тот же способ, что и рассмотрен ранее, т. е. первоначально не учитывать нестационарность тепловых потоков во льду, полагая  $\delta = 0$ , а скорость изменения толщины льда находить из формулы (29.4),

подставляя туда вместо температуры поверхности льда ее значение по формулам (19.7) и (20.7). При этом интеграл от температуры следует разбить на два с пределами от 0 до  $x/u$  и от  $x/u$  до  $t_1$ . В первое подынтегральное выражение должна входить температура льда, определяемая формулой (19.7), а во второе — формулой (20.7). Если предположить, что  $v$  постоянна по направлению движения воздушной массы, то для ее расчета можно использовать формулу (13.7) с соответствующей заменой содержимого  $D$  для двух интервалов интегрирования. Уточнение полученного решения производится описанным методом последовательных приближений.

Температура движущегося воздуха в пределах квазистационарного подслоя может быть вычислена по формуле (14.7), в которую должна быть подставлена соответствующая температура поверхности льда. Сравнение формул (19.7), (20.7) и (12.7) позволяет отметить, что характер зависимости температуры движущейся и неподвижной воздушной массы от различных составляющих теплового баланса ледяного покрова одинаков. Различны лишь пределы интегрирования и начальные условия, но в случае замены  $x/u$  на  $t$  последние формулы полностью переходят в первую.

Анализ полученных выражений, определяющих трансформацию движущихся воздушных масс, дает возможность определить изменение температуры поступающего в Арктику воздуха как за счет теплового потока через лед вообще, так и за счет океанического тепла в частности. Поток тепла через лед приводит к повышению температуры воздуха. Чем тоньше лед и холоднее поступающий воздух, тем больше будет повышение, так как в данном случае быстрее происходит нарастание льда и выделяется большее количество теплоты кристаллизации ( $l_1 \gamma v$ ). Поскольку  $v$  зависит от толщины льда, уменьшаясь с увеличением последней, то на трансформацию воздушной массы оказывает влияние неравномерность толщины льда по пути движения воздуха. Переход воздушной массы с более тонкого льда на более толстый способствует ее выхолаживанию, и наоборот. С увеличением толщины льда влияние его неравномерности на изменение температуры воздуха ослабевает. Оценить порядок величины изменений температуры движущейся воздушной массы за счет теплообмена через лед можно на основании формул (20.7) и (14.7). Если предположить, что скорость изменения толщины льда и поток океанического тепла неизменны вдоль траектории, то получается простое выражение

$$\frac{\delta T(t, x, z)}{l_1 \gamma_1 v + \Phi_B - \Delta \delta} = \frac{n}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{n_1}{n} + \frac{2x_0}{n \sqrt{a_2 \pi}} \sqrt{\frac{x}{u}} \right). \quad (21.7)$$

Легко подсчитать, что при движении воздушной массы в течение суток над молодым льдом с  $v \approx 1$  см/сутки за счет тепло-

обмена через него произойдет прогрев нижних слоев воздуха на величину порядка  $4^\circ$ . Над многолетним льдом величина прогрева воздуха за счет этой компоненты теплового баланса падает до  $1-2^\circ$  в сутки.

Формула (21.7) позволяет оценить влияние океанического тепла на трансформацию воздуха. При средней величине  $\Phi_b = 300 \text{ кал/см}^2$  в месяц происходит прогрев нижних слоев воздуха на  $1-1,5^\circ$  в сутки. Наличие связи между величиной океанического тепла и температурой воздуха отмечается в работе [270]. Авторы провели корреляцию между величиной тепла, вносимого атлантическими водами в Арктический бассейн, и количеством градусодней мороза в ряде пунктов в последующие годы, учитывая время добегания. Оказалось, что с увеличением адвекции океанического тепла уменьшается сумма градусодней мороза в зимний период. Причем коэффициент корреляции в большинстве случаев составляет  $0,50-0,75$ .

Поток тепла через лед компенсирует значительную часть тепла, уходящего в верхние слои атмосферы посредством лучистых потоков и турбулентного перемешивания. Этим, в частности, объясняется отсутствие зимой в Арктике таких низких температур, какие бывают в Антарктиде.

Большое влияние на поток тепла через лед, а следовательно, и на термическую трансформацию воздуха оказывает находящийся на льду снег. Являясь плохим проводником тепла, он способствует ослаблению теплообмена, уменьшает нарастание льда и изменение температуры. Произвести оценку роли снежного покрова можно очень просто, если предполагать вертикальный профиль его температуры линейным. В этом случае вид уравнения баланса тепла не меняется, а приведенные формулы для расчета температуры поверхности льда будут определять температуру поверхности снега. Остается также в силе формула (14.7), определяющая температуру воздуха. Но скорость изменения толщины льда должна вычисляться уже не по формуле (13.7), а по другой, учитывающей наличие снега. Для этого достаточно выразить температуру на границе раздела снег—лед через ее значение на поверхности снега и поток тепла через лед и провести дальнейшие действия, аналогичные операциям при получении формулы (13.7).

При этом для температуры на границе раздела снег—лед получается выражение, аналогичное формуле (12а.7):

$$\Theta_0 = l_1 \gamma_1 \left[ \frac{n}{\lambda_1} \left( 1 + \frac{2x_0}{n} \sqrt{\frac{t}{a_2 \pi}} \right) + \frac{h}{\lambda_c} \right] v + D_1, \quad (22.7)$$

где 
$$D_1 = D + \frac{h}{\lambda_c} (\Phi_b - \Lambda \delta);$$

$h$  — толщина снега;

$\lambda_c$  — теплопроводность снега.

Формула для определения скорости изменения толщины льда будет отличаться от (13.7) лишь тем, что вместо  $D$  в нее будет входить  $D_1$ , а параметр  $A_1$  будет иметь вид

$$A_2 = 1 + \frac{1}{H_0 t_1} \int_0^{t_1} \frac{\Phi_B}{l^* \gamma_1} t dt + \frac{l_1 \Delta n}{l^* \lambda_1 H_0} \left[ 1 + \frac{h \lambda_1}{n \lambda_c} + \frac{4 x_0 \sqrt{t_1}}{3n \sqrt{a_2 \pi}} - \frac{H_0^2 \psi}{t_1} \left( 1 + \frac{2 x_0}{n} \sqrt{\frac{t_1}{a_2 \pi}} \right) \right].$$

Детальный анализ влияния снежного покрова на нарастание льда проведен в главе IV. В общем, оказывается, что при отсутствии притока тепла от глубинных вод слой снега, толщина которого составляет 10—15% от  $H$ , приводит к уменьшению  $v$  примерно вдвое. Поэтому на такую же величину убывает поток тепла через лед и прогрев за счет него прилегающих слоев воздуха.

Более точный учет влияния снежного покрова на термическую трансформацию воздуха над льдом может быть произведен, если принять во внимание нестационарность тепловых потоков в снеге. Для этого необходимо добавить к приведенным уравнениям еще уравнение теплопроводности, решение которого позволяет определять температуру снега и поток тепла через него в зависимости от условий на его границах. Нестационарность тепловых потоков в снеге учитывалась при определении скорости нарастания льда под снегом в главе IV. Получить формулу для расчета  $v$  в этом случае оказалось возможным лишь при некоторых упрощениях. Еще большие трудности возникают при нахождении оригиналов для функций-изображений температуры воздуха. Обращение их и получение расчетных формул достигается ценой значительных упрощений. В частности, при не очень малых  $t$  для определения температуры воздуха на уровне поверхности снега при постоянных  $B$ ,  $v$  и  $\Phi_B$  можно получить выражение

$$T_0(t) = \frac{n}{\lambda} \left\{ B \left( 1 + \frac{2x_0}{n} \sqrt{\frac{t}{\pi a_2}} \right) + (l_1 \gamma_1 v + \Phi_B) \cdot I(t) + \frac{2\lambda_c}{h} \left[ T_0(0) - \frac{2h\Gamma}{\pi} \right] \left[ e^{-\frac{x_0 \pi^2 t}{4n^2}} - \frac{2x_0 h}{\pi n \sqrt{a_2 \lambda_c}} e^{-\frac{\lambda_c \pi^2 t}{4h^2}} \times \right. \right. \\ \times i \operatorname{erf} \left( i \frac{\pi \sqrt{\lambda_c t}}{2h} \right) \left. \right] + \frac{\lambda_1}{n \sqrt{a_2 \pi}} \int_{h'}^{\infty} \int_0^t \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{(\zeta - h')^2}{4a_2 \xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{t - \xi}} d\zeta - \\ \left. - \Lambda \frac{d}{dt} \int_0^t \delta(t - \xi) I(\xi) d\xi \right\}, \quad (23.7)$$

где

$$I(t) = 1 + \frac{2x_0 \sqrt{t}}{n \sqrt{a_2 \pi}} - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{c c \pi^2 t}{4h^2}} \left[ 1 - \frac{2x_0 h}{n \pi \sqrt{a_2 \kappa_c}} i \operatorname{erf} \left( i \frac{\pi \sqrt{\kappa_c t}}{2h} \right) \right];$$
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{\lambda_1} \left[ 1 + (\mu - 1) e^{-\frac{\mu^2 \pi^2 \kappa_c \tau}{4h^2}} \right] d\tau;$$
$$\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \frac{2\lambda_c n}{h}};$$

$\kappa_c$  — температуропроводность снега;

$\Gamma$  — линейный градиент температуры снега в начальный момент.

Сравнение формул (23.7) и (12.7) при тех же условиях позволяет определить уточнение решения за счет учета нестационарности тепловых потоков в снеге. Появившиеся добавочные члены имеют множителем экспоненту с показателем, зависящим от температуропроводности, толщины снега и времени. Экспонента довольно быстро убывает с уменьшением  $h$  и увеличением  $t$ . Для слоя снега толщиной 10 см уже через 6 ч от начального момента эти члены составляют только 10% от первоначальной величины. При слое снега 20 см они до этого значения убывают примерно через сутки. Поэтому при расчетах трансформации на промежутки времени около суток оказывается возможным не учитывать нестационарность потоков тепла в снеге.

### § 3. Модель строения пограничных слоев атмосферы и моря

В рассмотренных методах расчета трансформации воздуха известной предполагалась динамика пограничного слоя атмосферы. Д. Л. Лайтман [135] предпринял попытку получить строение пограничного слоя, задаваясь только условиями на его внешних границах и закономерностями распределения метеорологических элементов внутри этого слоя. Решение этой задачи позволило по фиксированным внешним параметрам определять скорость ветра, температуру, влажность воздуха и коэффициент турбулентности в пограничном слое атмосферы. При такой постановке проблемы можно находить и трансформацию воздушной массы.

На первом этапе исследований Д. Л. Лайтман решал стационарную задачу о строении пограничного слоя атмосферы в Центральной Арктике при линейном вертикальном профиле влажности и температуры воздуха, льда и снега. Профиль скорости

ветра описывался моделью Экмана при постоянном коэффициенте турбулентного обмена:

$$\left. \begin{aligned} u &= V_g \left( 1 - e^{-z} \sqrt{\frac{\omega_z}{\kappa}} \cos z \sqrt{\frac{\omega_z}{\kappa}} \right); \\ v &= V_g e^{-z} \sqrt{\frac{\omega_z}{\kappa}} \cdot \sin z \sqrt{\frac{\omega_z}{\kappa}}, \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

где  $V_g$  — геострофический ветер.

Верхняя граница пограничного слоя  $\bar{h}$  находилась из условия

$$\frac{d}{dz} (u^2 + v^2) \Big|_{z=\bar{h}} = 0. \quad (25.7)$$

Уравнение баланса тепла поверхности льда при перечисленных предположениях представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} -\kappa\rho \left[ L \frac{q_1 - q_0}{\bar{h}} + c_p \frac{T_1 - T_0}{\bar{h}} \right] - \beta (\theta - T_0) = \\ = G + Q - \sigma T_1^4 - 4\sigma T_1^3 (T_0 - T_1), \end{aligned} \quad (26.7)$$

где

$$\beta = \frac{H}{\Lambda} + \frac{h}{\lambda_c};$$

$G$  — длинноволновое излучение атмосферы;

$Q$  — суммарная радиация, поглощенная деятельной поверхностью;

$\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;

$T_1, q_1$  — температура и влажность воздуха на верхней границе пограничного слоя.

В этом уравнении неизвестными являются температура  $T_0$ , удельная влажность  $q_0$  на уровне подстилающей поверхности, интенсивность турбулентного обмена и толщина пограничного слоя. Удельную влажность воздуха с помощью известных соотношений легко выразить через температуру воздуха и относительную влажность, которая в Арктике известна с достаточной точностью. В этом случае для определения трех неизвестных ( $T_0, \kappa, \bar{h}$ ) имеются только уравнения (25.7) и (26.7). Для замыкания системы Д. Л. Лайхтман использовал условие постоянства запасов энергии турбулентности во времени

$$\int_0^{\bar{h}} \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \int_0^{\bar{h}} \frac{g}{\bar{T}_a} \left( \frac{dT}{dz} + \Gamma_a \right) dz = 0, \quad (27.7)$$

где  $\bar{T}_a$  — средняя температура воздуха в пограничном слое, выраженная в абсолютной шкале.

Решение трех последних уравнений при всех перечисленных условиях приводит к формулам:

$$\left. \begin{aligned} V_g^2 \sqrt{\frac{\omega_z}{\kappa}} &= \frac{g}{\tilde{T}_a} (T_1 - T_0 + \Gamma_a \tilde{h}); \\ \tilde{h} \sqrt{\frac{\omega_z}{\kappa}} &= 2,28; \\ (T_0 - T_1) \left[ \frac{L\rho\kappa}{\tilde{h}} \frac{dq_H}{dT} \Big|_{T=T_1} + \frac{\kappa\rho c_p}{\tilde{h}} + \beta + 4\sigma T_1^3 \right] &= \\ &= G + Q - \sigma T_1^4 - \frac{L\rho\kappa}{\tilde{h}} q_H(T_1)(1 - r_1) + \beta(\theta - T_1), \end{aligned} \right\} (28.7)$$

где  $q_H(T_1)$  — насыщенная удельная влажность воздуха при температуре  $T_1$ ;

$r_1$  — относительная влажность воздуха на уровне  $\tilde{h}$ .

Из трех последних выражений получается для определения  $\tilde{h}$  уравнение третьей степени

$$\left( \tilde{h} - \frac{\zeta^2}{\tilde{h}} \right) (\tilde{h} + Y) = E, \quad (29.7)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{2,28 \tilde{T}_a}{g \Gamma_a} V_g^2; \\ Y &= \frac{5,2 (4\sigma T_1^3 + \beta)}{\omega_z c_p \rho \left( 1 + \frac{L}{c_p} \frac{dq_H}{dT} \Big|_{T=T_1} \right)}; \\ E &= \frac{Y \left[ G + Q - \sigma T_1^4 + \beta(\theta - T_1) - \frac{L\rho\omega_z \tilde{h}}{5,2} q_H(T_1)(1 - r_1) \right]}{\Gamma_a (4\sigma T_1^3 + \beta)}. \end{aligned}$$

Последний член числителя параметра  $E$  содержит еще не известную  $\tilde{h}$ . Но этот член мал по сравнению с остальными, и в первом приближении здесь  $\tilde{h}$  полагается равной некоторому климатическому значению. После определения  $\tilde{h}$  остальные неизвестные находятся элементарно. В частности,

$$\kappa = \frac{\omega_z \tilde{h}^2}{5,2}, \quad (30.7)$$

$$T_0 = T_1 + \Gamma_a \tilde{h} \left( 1 - \frac{\zeta^2}{\tilde{h}^2} \right). \quad (31.7)$$

Несмотря на сильную схематизацию закономерностей атмосферных процессов при такой постановке задачи, вычисленный

Д. Л. Лайхтманом годовой ход температуры и составляющих теплового баланса правильно отражает реальную картину, полученную по опытным данным.

Перспектива найти распределение метеорологических элементов в пограничном слое атмосферы по одним внешним параметрам чрезвычайно привлекательна. Поэтому предложенная Д. Л. Лайхтманом теоретическая схема продолжает разрабатываться. Основной упор в дальнейших исследованиях делается на различного рода уточнения исходных положений. В уравнении теплопроводности учитывается лучистый поток тепла в атмосфере, принимается во внимание диссипация энергии турбулентности в теплоту, задаются различные модели изменения коэффициента турбулентности с высотой [136, 142, 240]. В некоторых моделях делаются попытки учесть нестационарность. В частности, для определения потоков тепла в почве используется нестационарное уравнение теплопроводности [238, 239].

Схема Д. Л. Лайхтмана позволяет получить представление о взаимодействии атмосферы и моря. При этом предполагается, что в море существует пограничный слой, аналогичный атмосферному. Распределение в нем гидрологических элементов описывается теми же уравнениями, что и в атмосфере, лишь вместо удельной влажности принимается во внимание соленость воды. На нижней границе этого слоя полагаются известными значения температуры, солености, скорости течения. На границе раздела моря и атмосферы задаются условия склейки скоростей, потоков и уравнение теплового баланса. Совместное решение систем уравнений для атмосферы и моря дает возможность получить величины тепловых потоков между этими средами и значения температуры и скоростей движения воды и воздуха [97, 99]. Делаются попытки применить схему взаимодействия атмосферы и гидросферы для предвычисления гидрологических характеристик на поверхности моря [140]. Предполагается, что в свободной атмосфере и в море процессы определяются уравнениями гидродинамики, и их решения известны. В пограничных слоях этих сред выполняются условия квазистационарности. Но для описания температуры воды используется нестационарное уравнение теплопроводности. Взаимодействие пограничных слоев со свободной атмосферой предлагается учитывать, задавая непрерывность потоков тепла и количества движения на их совместной границе. В первом приближении уравнения гидродинамики решаются без учета воздействия пограничного слоя на свободную атмосферу, затем находится распределение метеорологических элементов в нижнем слое, потоки тепла и количества движения, учитываемые при новом решении уравнений для свободной атмосферы. Задавая соотношения между ветром и волнением, оказывается возможным предвычислить не только температуру поверхности воды и ветровое течение, но и элементы волнения.



Разработанная Д. Л. Лайхтманом теоретическая схема строения пограничного слоя над неподвижным льдом в Арктике в дальнейшем получила развитие применительно к случаю свободно плавающей льдины [96]. Для описания распределения гидрометеорологических элементов в пограничных слоях атмосферы и океана использовались уравнения, аналогичные приведенным. Делалась попытка учесть адвекцию тепла и солей, считая их заданными. Скорость движения льдины принималась пропорциональной касательным напряжениям на ее поверхностях и обратно пропорциональной ее массе. Автор работы [96] отмечает, что полученная в результате расчетов картина зависимости гидрометеорологических характеристик от внешних параметров качественно согласуется с природной. Но толщина квазистационарного пограничного слоя в океане в этой работе, да и в других, была более 1 км, в то время как, согласно опытным данным, ветровое течение распространяется до гораздо меньшей глубины. Возможно, что такое расхождение результатов происходит из-за большой схематизации гидрологических процессов. В частности, не принимается во внимание существование поверхностного гомогенного слоя в море и слоя скачка, которые играют чрезвычайно большую роль, особенно в Арктике, где они ярко выражены. Очевидно, дальнейшее развитие теоретических схем взаимодействия атмосферы и океана потребует учета особенностей развития процессов в океане. Необходимы коррективы к гипотезе квазистационарности пограничных слоев, так как она хорошо подтверждается опытными данными только для слоя воздуха толщиной несколько десятков метров и для воды — несколько метров.

В качестве краевых условий для уравнений диффузии тепла, влаги и солей, используемых во всех схемах, задаются известные значения соответствующих элементов на внешней границе пограничных слоев. Но толщина этих слоев — величина искомая. Поэтому невозможно заранее знать эти величины. В принципе их придется подбирать методом последовательных приближений, что значительно осложняет решение задачи. Но в целом исследование в данном направлении перспективно, так как позволяют получить полную картину взаимодействия моря и атмосферы и строение пограничных слоев этих сред по одним внешним параметрам.

#### **§ 4. Влияние теплообмена с океаном на барическое поле атмосферы. Модель для численного эксперимента**

Теплообмен с подстилающей поверхностью влияет не только на температуру атмосферы, но и на ее динамическое состояние и на другие погодные факторы. Это было отмечено давно и уже на самых ранних этапах развития метеорологии были сделаны

попытки связать характер подстилающей поверхности с погодными условиями. В результате появляется ряд работ статистического направления, связывающих либо просто качественно, либо через уравнения регрессии состояние подстилающей поверхности в одних районах с атмосферной циркуляцией и погодой — в других. К исследованиям этого направления относятся работы В. Ю. Визе, С. П. Хромова, Э. А. Исаева, В. Г. Семенова, Дж. Бьеркнеса и др. Чаще всего в таких исследованиях рассматриваются особенности циркуляции и погодные условия в зависимости от контрастов температур море — суша.

Известно, что распределение материков и океанов определяет некоторые черты общей циркуляции атмосферы. Х. П. Погосян [185, 186] произвел оценку изменений температуры в нижней половине тропосферы, вызванных теплообменом с подстилающей поверхностью, и, сопоставив полученные результаты с картами относительной и абсолютной топографии, пришел к выводу о существенном влиянии этого фактора на циркуляцию атмосферы. В соответствии с температурой материков и океанов зимой происходит формирование гребней тепла и абсолютной топографии над океанами и ложбин и очагов холода над континентами. Летом картина обратная. Но такие изменения барической топографии вызываются лишь очень крупными пространственными неоднородностями в распределении температуры. Х. П. Погосян отмечает, что морские бассейны размерами с Каспийское или Черное море влияют на температуру лишь самых нижних слоев проходящих над ними воздушных масс.

Делались попытки увязать зарождение и развитие барических образований лишь с одним термическим влиянием подстилающей поверхности. В ряде случаев это привело к положительному результату. Так, например, бесспорна большая роль температурных контрастов моря и суши при формировании бризов и муссонов. Эти циркуляции удалось описать достаточно простыми математическими моделями, принимавшими в качестве первоисточника движущей силы контраст температур между сушей и морем [272].

В некоторых исследованиях особенности атмосферной циркуляции ставятся в основном в зависимость от температурного состояния океана. Предполагается, что благодаря интенсивному перемещиванию в верхних слоях океана и большой теплоемкости воды он гораздо активнее участвует в теплообмене с атмосферой, чем суша [141]. В цикле исследований В. Г. Семенов [207—209] рассмотрел влияние термического состояния океана на особенности атмосферной циркуляции и получил эмпирические соотношения между аномалиями температуры воды поверхности океана и интенсивностью воздушных переносов с довольно высоким коэффициентом корреляции. К такому же выводу пришел Бьеркнес [285], получивший связь между аномалией темпера-

туры поверхностного слоя воды в океане и интенсивностью западного переноса в атмосфере. Причем оказалось, что какого-либо запаздывания во времени изменения западного переноса по сравнению с аномалиями океанического потока тепла нет.

О тесной связи между отклонениями средних температур воды и высот поверхности 1000 мб от средних широтных значений пишет Шерхаг [261]. В своей работе он приводит коэффициенты корреляции между этими величинами для семи широт южного полушария (см. ниже).

Широта . . . . .	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Коэффициент корреляции . . . . .	-0,64	-0,72	-0,51	-0,27	-0,24	0,66	0,72

На основании этих данных Шерхаг делает вывод о том, что в низких широтах южного полушария, где коэффициенты корреляции отрицательны, атмосферное давление в значительной степени определяется температурой морской поверхности. В районах с положительными значениями коэффициента — динамические факторы преобладают над термическими.

Известны попытки объяснить некоторые особенности циркуляции и в Арктике термическим состоянием ее поверхности. Так, в работе Дж. Немайеса [168] усиление весной высотных антициклонов в Арктике приписывается низкой температуре ледяных полей. Попытки количественного учета влияния на динамику атмосферы термического состояния моря при различном распределении на нем льда были предприняты Дрогайцевым монографии: «Взаимодействие арктических морей с атмосферой». В своей теории он исходил из статического состояния атмосферы и в зависимости от температуры подстилающей поверхности вычислил тенденции к изменению давления в ту или другую сторону. Но без учета взаимодействия с окружающей средой трудно сделать однозначный вывод об изменении атмосферной циркуляции, хотя бы в Арктике.

С развитием гидродинамических методов расчета атмосферных процессов и особенно с использованием в метеорологии быстродействующих ЭЦВМ появилась возможность более или менее полного анализа и количественной оценки влияния теплообмена с подстилающей поверхностью на атмосферные процессы.

Первым крупным исследованием, в котором наиболее полно учитывалось влияние термического состояния океанов и материков на температуру атмосферы и ее циркуляцию, явилась работа Е. Н. Блиновой [13]. При постановке задачи предполагалось, что термическое и динамическое состояние атмосферы и теплообмен с подстилающей поверхностью взаимосвязаны. Единственным внешним термодинамическим источником энергии является солнечное тепло, которое в основном поглощается океанами и материками, а затем в соответствии с уравнением

баланса тепла перераспределяется в окружающую среду. Иначе говоря, задача оформилась в виде полной системы уравнений термодинамики атмосферы, которая может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + w_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - v_\lambda \Omega + \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\lambda^2 + v_\theta^2}{2} \right) = \\ = - \frac{1}{a_0 \rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + 2\omega v_\lambda \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v_\theta}{\partial z}; \end{aligned} \quad (32.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + w_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + v_\theta \Omega + \frac{1}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v_\lambda^2 + v_\theta^2}{2} \right) = \\ = - \frac{1}{a_0 \rho \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - 2\omega v_\theta \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v_\lambda}{\partial z}; \end{aligned} \quad (33.7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g; \quad (34.7)$$

$$\frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} + \frac{\rho}{a_0 \sin \theta} \left[ \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right] = 0; \quad (35.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} - \frac{(c_p - c_v)}{c_p} \frac{T}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \lambda' \frac{\partial T}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a_0 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda'' \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda''}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) \right] + Q \right\}; \end{aligned} \quad (36.7)$$

$$P = \rho R T, \quad (37.7)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a_0} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + w_z \frac{\partial}{\partial z};$

$$\Omega = \frac{1}{a_0 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\lambda \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} \right]; \quad (38.7)$$

- $\lambda', \lambda''$  — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентной теплопроводности воздуха;  
 $w_z$  — вертикальная скорость;  
 $\theta$  — дополнение широты;  
 $Q = Q_{\text{п}} + Q_{\text{к}}$  — лучистый приток тепла ( $Q_{\text{п}}$ ) и приток тепла за счет фазовых преобразований влаги ( $Q_{\text{к}}$ );  
 $k$  — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости;  
 $a_0$  — радиус Земли;  
 $R$  — газовая постоянная.

В качестве граничных условий к этим уравнениям наиболее часто используются условия затухания изменений температуры и скорости ветра при бесконечно большом увеличении высоты,

условие прилипания на поверхности Земли и уравнение теплового баланса

$$-\lambda' \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda' \frac{L}{c_p} \frac{\partial q}{\partial z} - \Phi = B. \quad (39.7)$$

В приведенных уравнениях не учтены не только некоторые явно малые по величине члены, но и ряд других, малость которых не очевидна. В частности, к ним можно отнести горизонтальный турбулентный перенос количества движения, отсутствующий в первых двух уравнениях. Но и в таком виде уравнения для решения чрезвычайно сложны, поэтому проводятся добавочные упрощения в зависимости от конкретных требований к задаче. Е. Н. Блинова в своей работе предположила стационарность состояния, отсутствие вертикальных скоростей, вязких членов в уравнениях движения и адиабатического изменения температуры, определяемого вторым членом левой части уравнения (36.7). Не принималось во внимание тепло фазовых преобразований влаги. Таким образом, задача свелась к определению некоторого среднего состояния атмосферы, которое создается в результате поглощения атмосферой радиационного тепла и теплообмена с подстилающей поверхностью. Причем поток тепла в почву или в воду принимался пропорциональным их теплофизическим характеристикам и коротковолновой радиации.

В результате решения такой стационарной системы уравнений Е. Н. Блинова получила средние значения сезонного распределения температуры и давления в северном полушарии, которые оказались в прямой зависимости от величины теплообмена с подстилающей поверхностью. Наиболее сильно влияние теплообмена на температуру атмосферы проявляется на малых высотах. С увеличением высоты происходит затухание неazonальности в ходе температуры и давления, обусловленное различием в термическом состоянии материков и океанов. Причем мелкомасштабные термические возмущения затухают быстрее крупномасштабных. Эти полученные Е. Н. Блиновой выводы и расчетные распределения температуры и давления довольно хорошо согласуются с фактической картиной.

Таким образом, разработанная Е. Н. Блиновой теория климатического распределения температуры и давления при всей ее схематичности позволила провести оценку влияния некоторых неадиабатических источников тепла на крупномасштабные атмосферные процессы и механизма перераспределения этого тепла. Эти выводы имеют большое значение для разработки численных методов долгосрочных прогнозов, так как теория климата и общей циркуляции атмосферы позволяет выявить роль различных факторов в развитии крупномасштабных атмосферных процессов. В дальнейших исследованиях Е. Н. Блиновой и ее школой по проблеме гидродинамической теории климата и долгосрочного

прогноза погоды проводятся различного рода уточнения первоначальной схемы. В первую очередь эти уточнения касаются учета нестационарности процесса, упорядоченных восходящих потоков и теплообмена с подстилающей поверхностью. В частности, для определения потока тепла в почву или в воду привлекается одномерное уравнение теплопроводности, решение которого с той или иной степенью точности позволяет выразить поток тепла в подстилающую среду в зависимости от температуры на поверхности этой среды [14, 15, 156 и др.]. Специально вопрос влияния теплообмена с подстилающей поверхностью в этих исследованиях не рассматривался, поэтому анализ этого процесса освещен лишь в самых общих чертах, да и то не во всех работах. Так, в работе С. А. Машковича [157] отмечается, что в первоначальный момент развития процесса изменения температуры воздуха обусловлены главным образом турбулентным перемешиванием и радиацией. Эффект различия свойств подстилающей поверхности проявляется лишь в самом нижнем слое атмосферы. Спустя 5—10 ч возникающая циркуляция вносит существенные коррективы в развитие процесса. И лишь через сутки начинает прослеживаться искривление изотерм вблизи береговой линии. Причем разность температур над центральными частями материков и океанов прослеживается до верхней тропосферы. С. А. Машкович предполагает, что причину такого быстрого распространения температурных контрастов на большие высоты следует искать в особенностях циркуляции, возникающей над материками и океанами. Но, в конце концов, в данной модели эта циркуляция порождается турбулентным теплообменом с подстилающей поверхностью, следовательно, роль последнего в формировании климата и сезонности общей циркуляции атмосферы является определяющей.

В последнее время все шире пытаются проводить учет теплообмена с подстилающей поверхностью и в краткосрочных численных прогнозах. И. А. Кибель [105] показал, что при этом можно предварительно выделить в атмосфере пограничный слой, для которого решается одномерное уравнение теплопроводности в предположении, что условия на границах этого слоя известны. В свободной атмосфере неадиабатические эффекты не учитываются, но полученное решение для пограничного слоя привлекается в качестве граничного условия. Аналогичный метод используется и в ряде других работ [140, 158]. В большинстве исследований пограничный слой не выделяется.

Наибольшей общностью обладают решения, полученные Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком [37] и В. С. Пурганским [188, 189]. Они исходили из уравнений (32.7)—(39.7), преобразованных в прямоугольную систему координат. Полученные ими аналитические решения относительно производных высоты изобарической поверхности и температуры по времени содержат в под-

в интегральных выражениях турбулентные потоки тепла, в свою очередь зависящие от искомой температуры. Поэтому получить в чистом виде зависимость величины геопотенциала и температуры воздуха от потока тепла трудно, но некоторый анализ о влиянии неадиабатических факторов проведен. В частности, в первой работе проведен качественный анализ, а В. С. Пурганский [189] дал ряд количественных оценок. Он отметил, что в краткосрочном прогнозе неадиабатические факторы слабо влияют на высоту и температуру поверхности 850 мб. Наиболее заметна их роль при прогнозе приземного давления. Так, по оценке В. С. Пурганского, учет горизонтальной неоднородности температуры подстилающей поверхности в краткосрочном прогнозе может привести к изменению величины наземного давления на 1—2 мб. Еще слабее тепловое влияние подстилающей поверхности на изменение давления оказывается по оценкам А. П. Нагурного [165]. Он отмечает, что за счет этого фактора наземное давление меняется на величину 0,2—0,5 мб/сутки.

Большую роль неадиабатическим источникам тепла в краткосрочном прогнозе отводит И. З. Лутфулин [148]. Для того чтобы проанализировать влияние теплообмена с подстилающей поверхностью на циклогенез, он преобразовал уравнение притока тепла в уравнение термического вихря, которое позволило ему сделать ряд выводов прогностического характера. В частности, зависимость термического вихря от лапласиана притока тепла в атмосферу ( $\nabla\Phi_a$ ) позволяет объяснить тенденцию к образованию циклонического вихря в областях, где прогрев воздуха больше, чем в окружающих районах, или охлаждение меньше, чем на периферии области, т. е. там, где  $\nabla\Phi_a < 0$ . Тенденция к росту давления и антициклогенезу происходит в областях, где теплообмен приводит к  $\nabla\Phi_a > 0$ .

Оказалось также, что учет пространственной неоднородности величин теплообмена между атмосферой и подстилающей поверхностью в краткосрочном прогнозе уточняет траектории барических образований.

Большое внимание влиянию неадиабатических притоков тепла на состояние атмосферы уделяется и в исследованиях зарубежных ученых. В краткосрочных прогнозах турбулентный теплообмен с подстилающей поверхностью часто принимается пропорциональным скорости ветра и разности температур воздуха и подстилающей поверхности. Причем температура последней считается известной [291, 303, 307, 323].

В работе [291] было показано, что учет переноса тепла из океана в численных прогнозах на сутки дает более реальную картину упорядоченных вертикальных токов на уровне поверхности 600 мб, чем в чисто адиабатической модели. Н. Такаси [323] исследовал толщину слоя атмосферы, учет неадиабатических факторов в котором дает лучшие результаты. Он пришел

к выводу, что приток тепла нужно распространить практически на всю толщу тропосферы. К выводу о необходимости учитывать неадиабатические притоки тепла в бароклинических моделях пришел Д. Мартин [307]. Он вычислил величину нагрева, необходимую для того, чтобы ошибки в прогнозе толщины некоторого слоя атмосферы стали бы нулевыми. Она оказалась такого же порядка, как и суммарный приток тепла за счет турбулентного теплообмена, испарения и радиации.

Но в некоторых исследованиях делается вывод о невозможности заметных изменений в атмосферных процессах за счет изменений термического состояния океана. Термическое взаимодействие океана и атмосферы предлагается учитывать лишь в долгосрочных прогнозах [329]. Причем иногда для предвычисления средних температур воздуха за месяц, сезон или более длительные промежутки времени предлагается принимать во внимание только неадиабатический приток тепла, в том числе и океанический [278—280]. При этом предполагается, что пространственное распространение изменений температуры воздуха осуществляется только макротурбулентностью, а не упорядоченной адвекцией. Но, как следует из приведенного в работе [280] сопоставления прогностических и фактических аномалий температуры для северного полушария, согласованность этих данных пока невысокая. Очевидно, все же при таких расчетах следует учитывать динамическое состояние атмосферы более полно.

Попытка определить влияние теплообмена с подстилающей поверхностью на планетарный поток сделана в работе [291]. Решение уравнений термодинамики, переведенных в прямоугольную систему координат, проводится в ней для стационарного случая и зависит от предположений о вертикальном профиле средней зональной скорости ветра. Анализ результатов численного эксперимента, выполненного для области от  $35^\circ$  с. ш. до  $55^\circ$  с. ш., показал большое влияние этого источника тепла на изменение высоты изобарической поверхности не только вблизи поверхности земли, но и для  $H=500$  мб. Области повышенного и пониженного давления у поверхности земли сдвинуты несколько к востоку относительно центров холода и тепла. В средней тропосфере над областями холода и тепла картина распределения давления обратна наземной, но сдвиг остается примерно таким же. При неподвижной атмосфере изменения высоты геопотенциала за счет термических факторов, согласно расчетам, оказались примерно в 3 раза больше, т. е. атмосферные движения приводят к сглаживанию термических контрастов в атмосфере.

Весьма интересными в смысле оценки роли неадиабатических притоков тепла являются работы по моделированию атмосферных процессов, которые выполнены Чарни, Смагоринским, Минцем и др. Во всех этих исследованиях решается система



уравнений (32.7) — (37.7), предварительно в различной степени упрощенная, задается некоторый распределенный тепловой источник и рассматривается развитие под его воздействием атмосферных процессов из некоторого начального состояния. Но этот источник тепла чаще всего задается весьма схематично и не позволяет выявить собственно тепловое влияние подстилающей поверхности. Так, у Чарни [247] нагревание или охлаждение воздуха зависит от того, является ли его температура более высокой или более низкой, чем температура радиационного равновесия. Такое же предположение относительно учета неадиабатических факторов используют Аихара [281], Мацумото [308].

В последних моделях [309, 310, 319, 320] теплообмен с подстилающей поверхностью учитывается более точно. Обычно при этом считается, что на поверхности суши лучистые потоки тепла балансируются турбулентным теплообменом с атмосферой, а поток тепла в почву отсутствует. Теплоемкость океана принимается бесконечно большой, и теплообмен между поверхностью и нижележащими слоями океана определяется по данным адвекции тепла. Но уже в модели Б. Л. Гаврилина и А. С. Монины [41] учитывается изменение температуры воды.

Из краткого обзора следует, что проблема влияния океана на атмосферу привлекает внимание многих ученых. Статистические и гидродинамические методы исследования показали, что между аномалиями температуры океана и состоянием атмосферы существует определенная связь. Поэтому с теоретической и практической точки зрения интересно выяснить влияние состояния Северного Ледовитого океана на крупномасштабные атмосферные процессы. Решить эту задачу наиболее просто с помощью численного моделирования, используя для этой цели уравнения гидродинамики.

Численное решение уравнений (32.7) — (37.7), записанных в сферической системе координат, сопряжено с рядом трудностей, обусловленных необходимостью раскрытия особенностей у полюса и неравномерностью линейной величины шага сетки по параллели. Поэтому целесообразно спроектировать эти уравнения на плоскость и перевести в декартову систему координат. Используем исходные уравнения движения и притока тепла, предварительно переведенные в  $\zeta$ -координаты (первые взяты в форме уравнения вихря), и спроектируем на плоскость по соотношениям проекции Ламберта:

$$\left. \begin{aligned} r &= 2a_0\mu \sin \frac{\theta}{2}; \\ \lambda &= \psi, \end{aligned} \right\} \quad (40.7)$$

где  $\mu$  — масштаб карты.

Полученные уравнения переведем в декартову систему координат с центром в полюсе по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \psi; \\ y &= r \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (41.7)$$

В декартовой системе координат после замены составляющих скоростей геострофическими соотношениями уравнения вихря и притока тепла записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{g}{W} (H, \Omega) = \frac{W}{P_0} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{gk}{R^2 T_a^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}; \quad (42.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{g}{W} (H, T) = \frac{\kappa T_a}{P_0 \zeta} w + \frac{g^2 a}{R^2 T_a^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial T}{\partial \zeta} + K \nabla T, \quad (43.7)$$

где

$$W = 2\omega \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2a_0^2 \mu^2} \right);$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{a_0^2 \mu^2 g}{M^2 W} \left[ \nabla H + \frac{A}{a_0^2 \mu^2} \left( x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2a_0^2 \mu^2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8a_0^2 \mu^2} \right) \left( x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$M = a_0 \mu \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4a_0^2 \mu^2}};$$

$$A = \frac{\omega}{W} \left[ 2 - \frac{x^2 + y^2}{a_0^2 \mu^2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8a_0^2 \mu^2} \right) \right] + \frac{3(x^2 + y^2)}{16a_0^2 \mu^2} - 1;$$

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x};$$

$$\zeta = \frac{P}{P_0};$$

$$\kappa = \frac{R}{g} (\Gamma_a - \Gamma);$$

$T_a$  — среднее значение абсолютной температуры;

$k$  — коэффициент вертикального турбулентного переноса количества движения;

$a, K$  — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентной температуропроводности.

В правой части уравнения (42.7) не учтены малые по сравнению с остальными членами

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{P_0} \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{w}{P_0} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} + \frac{2\omega(xu + yv)}{a_0^2 \mu^2},$$

а в уравнении (43.7) приняты во внимание только притоки тепла за счет вертикального и горизонтального турбулентного перемешивания. Коэффициенты турбулентного перемешивания полагаются постоянными.

Сопоставляя полученное выражение вертикальной составляющей вихря скорости с обычно используемым в задачах прогноза по ограниченной области, видим, что первое отличается от второго рядом добавочных членов, играющих заметную роль при больших размерах области, для которой решается задача.

Уравнение теплового баланса (39.7), записанное в  $\zeta$ -координатах, и другие краевые условия для уравнений (42.7) и (43.7) задаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \zeta = 1 \quad & \frac{gk'}{RT_a} \left( \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} - \Phi = B', \\ & w_1 = \frac{P_0 g}{RT_a} \frac{\partial H_1}{\partial t}; \\ \text{при } \zeta = 0 \quad & w = 0, \quad \zeta \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (44.7)$$

Ради упрощения задачи предполагается, что затраты тепла на испарение известны и учтены в величине  $B'$ .

В данном случае ставится задача определить влияние теплообмена с подстилающей поверхностью на характер циркуляции атмосферы, представление о которой может быть получено по осредненным по всей толще атмосферы значениям элементов. Для этой цели подходит термотропная модель Томпсона и Гейтса [325], привлекающая своей относительной простотой и возможностью непосредственного учета потока тепла между атмосферой и подстилающей поверхностью. Л. Берковский [283] исследовал модель и отметил, что она лучше отражает реальную атмосферу, чем двухуровневая. С помощью термотропной модели прогноза погоды на сутки М. Е. Швецу, Б. Е. Шнеерову и Л. Ф. Колосковой [257] удалось учесть влияние поглощения радиации в атмосфере и теплообмена с подстилающей поверхностью и показать, что относительная ошибка в прогнозе средней температуры воздуха в неадиабатическом случае несколько меньше, чем в адиабатическом. Заметного изменения поля геопотенциала при этом не отмечено. Возможно, что увеличение продолжительности действия неадиабатических факторов и области, для которой проводится прогноз, приведет к большему эффекту этих факторов.

Для получения осредненных величин по всей толще атмосферы вихря и температуры проинтегрируем уравнение (42.7) по  $\zeta$  от 0 до 1, в результате чего будем иметь

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \frac{g}{W} (\overline{H, \Omega}) = \frac{W}{P_0} \omega_1 + \frac{g^2 \kappa}{R^2 T_a^2} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right)_1, \quad (45.7)$$

где

$$\begin{aligned} (\overline{\quad}) &= \int_0^1 (\quad) d\zeta; \\ \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right)_1 &= \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1}. \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение для определения средней температуры, нужно, проинтегрировав уравнение (42.7) по  $\zeta$  от 0 до 1, найти выражение для  $\omega$ , подставить его в уравнение (43.7) и проинтегрировать последнее по  $\zeta$  от 0 до 1. В результате этих операций получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{g}{W} (\overline{H, T}) + \frac{\kappa T_a}{W} \int_0^1 (\ln \zeta) \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{g}{W} (\overline{H, \Omega}) - \right. \\ \left. - \frac{g^2 k}{R^2 T_a^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right] d\zeta = \frac{g}{c_p P_0} (B' + \Phi) + K (\overline{\nabla T}). \quad (46.7) \end{aligned}$$

Прибавив к полученному выражению уравнение (45.7), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{g}{W} (\overline{H, T}) + \frac{\kappa T_a}{W} \left[ \overline{\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial t}} + \frac{g}{W} \overline{\varphi (H, \Omega)} - \right. \\ \left. - \frac{gk}{R^2 T_a^2} \overline{\varphi \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}} \right] = \frac{g}{c_p P_0} (B' + \Phi) + K (\overline{\nabla T}) + \frac{\kappa T_a}{P_0} \omega_1, \quad (47.7) \end{aligned}$$

где

$$\varphi = 1 + \ln \zeta.$$

Для дальнейшего решения нужно в уравнениях (45.7) и (47.7) от осредненных произведений перейти к произведению средних величин. Этот переход осуществляется с помощью гипотезы термотропности [325]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= F(\zeta) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}; \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= F(\zeta) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (48.7)$$

где  $F(\zeta)$  — некая функция, определяемая эмпирически.

Следуя И. А. Кибелю [105], представим якобиан  $(H, \Omega)$  в виде

$$(H, \Omega) = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\zeta(H, \Omega)] - \zeta \left( \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \Omega \right) - \zeta \left( H, \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right).$$

Заменив в двух последних членах этого выражения производные по  $\zeta$  через уравнение состояния и применив условие термотропности, будем иметь

$$(H, \Omega) = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\zeta(H, \Omega)] + \frac{RF}{g} [(\bar{T}, \bar{\Omega}) + (H, \bar{\Omega}')], \quad (49.7)$$

где  $\Omega'$  имеет тот же вид, что и  $\Omega$ , но аргументом является температура воздуха. Проинтегрировав затем выражение (49.7) по  $\zeta$  от 0 до 1 и проведя некоторые преобразования, получим

$$(\overline{H}, \overline{\Omega}) = (\overline{H}, \overline{\Omega}) + \frac{R^2}{g^2} (1 - 2\overline{F\psi})(\bar{T}, \bar{\Omega}'), \quad (50.7)$$

где

$$\psi = 1 - \int_{\zeta}^1 \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta.$$

Производную вихря по  $\zeta$  на уровне подстилающей поверхности можно выразить через значения вихря от геострофического ветра. Предположив, что в пограничном слое атмосферы профиль скорости ветра удовлетворяет модели Экмана, можно получить производные скорости ветра по вертикали. Подставив их в выражение производной вихря, будем иметь

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right)_1 = - \frac{RT_a \Omega_0}{g} \sqrt{\frac{W}{2k}}.$$

С учетом проведенных преобразований уравнение (45.7) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \frac{g}{W} (\overline{H}, \overline{\Omega}) + \frac{R^2}{gW} (1 - 2\overline{F\psi})(\bar{T}, \bar{\Omega}') = \frac{W}{P_0} \omega_1 - k_1 \Omega_0, \quad (51.7)$$

где

$$k_1 = \frac{g}{RT_a} \sqrt{\frac{Wk}{2}}.$$

Аналогичным образом преобразуется уравнение притока тепла. Использование условия термотропности приводит

К СООТНОШЕНИЯМ:

$$\begin{aligned}
 (\overline{H}, \overline{T}) &= (\overline{H}, \overline{T}); \\
 \left( \overline{\varphi} \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} \right) &= \overline{\varphi} \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} - \frac{R}{g} \overline{\varphi \psi} \frac{\partial \overline{\Omega}'}{\partial t}; \\
 \overline{\varphi(H, \Omega)} &= \overline{\varphi}(\overline{H}, \overline{\Omega}) + \frac{R^2}{g^2} \overline{\varphi \psi^2}(\overline{T}, \overline{\Omega}') - \\
 &\quad - \frac{R}{g} \overline{\varphi \psi}[(\overline{H}, \overline{\Omega}') + (\overline{T}, \overline{\Omega})]; \\
 \left( \overline{\varphi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \zeta} \right) &= \overline{\Omega} - \Omega_1 - \varphi_1 \frac{RT_a}{g} \sqrt{\frac{W}{2k}}; \\
 \Omega_1 &= \overline{\Omega} - \frac{R}{g} \overline{\Omega}'.
 \end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в уравнение (47.7), в результате чего после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} - \frac{\kappa RT_a}{Wg} \overline{\varphi \psi} \frac{\partial \overline{\Omega}'}{\partial t} &= \frac{g}{c_p P_0} (\overline{B}' + \Phi) + \frac{\kappa T_a}{W} \left\{ \frac{R \overline{\varphi \psi}}{W} [(\overline{H}, \overline{\Omega}') + \right. \\
 &\quad \left. + (\overline{T}, \overline{\Omega})] - \frac{R^2}{gW} \overline{\varphi \psi^2}(\overline{T}, \overline{\Omega}') + \frac{gk}{RT_a^2} \overline{\Omega}' - k_1 \Omega_0 \right\} - \frac{g}{W} (\overline{H}, \overline{T}) + \\
 &\quad + K \nabla \overline{T} + \frac{\kappa T_a}{P_0} \omega_1. \quad (52.7)
 \end{aligned}$$

Выразив производные по времени от  $\overline{\Omega}$  и  $\overline{\Omega}'$  через  $\overline{H}$  и  $\overline{T}$ , приведем уравнения (51.7) и (52.7) к виду

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= \frac{1}{a_0^2 \mu^2} \left\{ M^2 \left[ \frac{R^2}{g^2} (2\overline{F\psi} - 1) (\overline{T}, \overline{\Omega}') - (\overline{H}, \overline{\Omega}) + \frac{W^2 \omega_1}{P_0 g} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{k_1 W}{g} \Omega_0 \right] - A \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8a_0^2 \mu^2} \right) \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right\}; \quad (53.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla - \nu) s &= \frac{M^2 R}{a_0^2 \mu^2 g \overline{\varphi \psi}} \left\{ \overline{\varphi \psi^2}(\overline{T}, \overline{\Omega}') - \frac{g \overline{\varphi \psi}}{R} [(\overline{H}, \overline{\Omega}') + (\overline{T}, \overline{\Omega})] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g^2 k W}{R^3 T_a^2} \overline{\Omega}' + \frac{k_1 g W}{R^2} \Omega_0 \right\} + \nu \left[ \frac{g}{W} (\overline{H}, \overline{T}) - \frac{g}{c_p P_0} (\overline{B}' + \Phi) - \right. \\
 &\quad \left. - K \nabla \overline{T} - \frac{\kappa T_a}{P_0} \omega_1 \right] - \frac{1}{a_0^2 \mu^2} \left[ A \left( x \frac{\partial s}{\partial x} + y \frac{\partial s}{\partial y} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8a_0^2 \mu^2} \right) \left( x^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) \right], \quad (54.7)
 \end{aligned}$$

где 
$$f = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \quad s = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}; \quad v = \frac{M^2 W^2}{a_0^2 \mu^2 \kappa R T_a \varphi \psi}.$$

В правых частях этих уравнений пока еще не определены  $\omega_1$  и  $\Omega_0$ . Будем полагать, что  $\Omega_0 \approx \bar{\Omega}$ , так как основные изменения скорости ветра происходят в пограничном слое. Для определения входящей в  $\omega_1$  производной по времени от геопотенциала на уровне  $\xi=1$  достаточно проинтегрировать по всей толще атмосферы барометрическую формулу и полученный результат продифференцировать по  $t$ . Это приводит к выражению

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \frac{R}{g} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{P_0 g}{R T_a} \left( f - \frac{R}{g} s \right). \quad (55.7)$$

Теперь, если считать  $F(\xi)$  и компоненты теплового баланса на подстилающей поверхности известными, можно получить решение уравнений (53.7) и (54.7) численным способом, применяя метод итераций.

Представив производные в виде центральных разностей, легко получить разностные аналоги этих уравнений, из которых находятся значения искомых функций в  $ij$  точке следующим образом:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} = f^{(n)} + \beta \left\{ f^{(n)} - \frac{1}{4 - 2C(x^2 + y^2)} \left[ (1 + Bx - Cx^2) f_{i+1, j}^{(n)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - Bx - Cx^2) f_{i-1, j}^{(n+1)} + (1 + By - Cy^2) f_{i, j+1}^{(n)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - By - Cy^2) f_{i, j-1}^{(n+1)} - 0,5Cxy (f_{i+1, j+1}^{(n)} + f_{i-1, j-1}^{(n+1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - f_{i-1, j+1}^{(n)} - f_{i+1, j-1}^{(n+1)}) - \frac{M^2 d^2}{a_0^2 \mu^4} \left( \frac{R^2}{g^2} (2\bar{F}\psi - 1) (\bar{T}, \bar{\Omega}') - \right. \right. \\ \left. \left. - (\bar{H}, \bar{\Omega}) + \frac{W^2 \omega_1}{P_0 g} - \frac{k_1 W}{g} \bar{\Omega} \right) \right] \right\}; \quad (56.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^{(n+1)} = s^{(n)} + \beta \left\{ s^{(n)} - \frac{1}{4 + \frac{\nu d^2}{\mu^2} - 2C(x^2 + y^2)} \left[ (1 + Bx - \right. \right. \\ \left. \left. - Cx^2) s_{i+1, j}^{(n)} + (1 - Bx - Cx^2) s_{i-1, j}^{(n+1)} + (1 + By - Cy^2) s_{i, j+1}^{(n)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - By - Cy^2) s_{i, j-1}^{(n+1)} - 0,5Cxy (s_{i+1, j+1}^{(n)} + s_{i-1, j-1}^{(n+1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - s_{i-1, j+1}^{(n)} - s_{i+1, j-1}^{(n+1)}) - \frac{d^2}{\mu^2} \Phi \right] \right\}, \quad (57.7) \end{aligned}$$

где

$$B = \frac{Ad}{2a_0^2\mu^2}; \quad C = \frac{1}{a_0^2\mu^2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8a_0^2\mu^2} \right);$$

$$\Phi = \frac{M^2}{a_0^2\mu^2} \left[ \frac{R}{g} \frac{\overline{\varphi\psi^2}}{\varphi\psi} (\overline{T}, \overline{\Omega}') - (\overline{H}, \overline{\Omega}') - (\overline{T}, \overline{\Omega}) - \right.$$

$$\left. - \frac{kWg\overline{\Omega}'}{R^2T_a^2\varphi\psi} + \frac{k_1W}{R\varphi\psi} \overline{\Omega} \right] + \nu \left[ \frac{g}{W} (\overline{H}, \overline{T}) - \frac{g}{c_p P_0} (\overline{B}' + \Phi) - \right.$$

$$\left. - K \nabla \overline{T} - \frac{\kappa T_a}{P_0} \omega_1 \right];$$

$$\Omega = \frac{a_0^2\mu^4 g}{M^2 W d^2} \left[ (1 + Bx - Cx^2) H_{i+1, j} + (1 - Bx - Cx^2) H_{i-1, j} + \right.$$

$$\left. + (1 + By - Cy^2) H_{i, j+1} + (1 - By - Cy^2) H_{i, j-1} - \right.$$

$$\left. - (4 - 2Cx^2 - 2Cy^2) H_{ij} - 0,5Cxy (H_{i+1, j+1} + H_{i-1, j-1} - \right.$$

$$\left. - H_{i-1, j+1} - H_{i+1, j-1}) \right];$$

$\beta$  — параметр релаксации;

$d$  — шаг сетки;

$n$  — номер итерации.

Ради сокращения записи в приведенных разностных формулах даны индексы только элементам, не принадлежащим  $ij$  узлу, все остальные переменные следует считать принадлежащими ему.

Вычисленные по формулам (56.7) и (57.7)  $f$  и  $s$  позволяют получить значения геопотенциала и температуры на следующем шаге по времени с помощью экстраполяционных формул:

$$\left. \begin{aligned} \overline{H}(t + \tau) &= \overline{H}(t) + f\tau; \\ \overline{T}(t + \tau) &= \overline{T}(t) + s\tau. \end{aligned} \right\} \quad (58.7)$$

Новые  $\overline{H}$  и  $\overline{T}$  используются в качестве начальных данных для расчета на следующий шаг. На границах области примем, как это обычно делается, неизменность геопотенциала и температуры во времени, т. е.  $f=0$ ,  $s=0$ .

## § 5. Результаты экспериментов по оценке влияния океана на температуру и барическое поле атмосферы

Экспериментальная оценка влияния теплообмена с океаном на термодинамику атмосферы по приведенной выше модели была проделана для ограниченной территории, охватывающей Арктику, и для всего северного полушария. В первом случае в уравнениях (56.7) и (57.7) были отброшены члены, в которые входят отношения произведения координат или их квадратов к квадрату радиуса Земли. При этом получается система уравнений, в точ-



ности соответствующая той, которая получается, если в исходных дифференциальных уравнениях не учитывать сферичности Земли. В частности, если принять  $\mu=1$  и  $A = \frac{2\omega}{W}$ , то итерационные формулы могут быть приведены к виду

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} + \beta \left\{ f^{(n)} - \frac{1}{4} [f_{i+1,j}^{(n)} + f_{i-1,j}^{(n+1)} + f_{i,j+1}^{(n)} + f_{i,j-1}^{(n+1)}] + \frac{d^2}{4} \left[ \frac{R^2}{g^2} (2\overline{F\psi} - 1) (\overline{T}, \overline{\Omega}') - (\overline{H}, \overline{\Omega}) + \frac{W^2 w_1}{P_0 g} - \frac{k_1 W}{g} \overline{\Omega} + \frac{1}{W} (W_x f_x + W_y f_y) \right] \right\}; \quad (59.7)$$

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} + \beta \left\{ s^{(n)} - \frac{1}{4 + \nu d^2} [s_{i+1,j}^{(n)} + s_{i-1,j}^{(n+1)} + s_{i,j+1}^{(n)} + s_{i,j-1}^{(n+1)} - d^2 \Phi] \right\}, \quad (60.7)$$

где

$$\Phi = \frac{R \overline{\varphi \psi^2}}{g \overline{\varphi \psi}} (\overline{T}, \overline{\Omega}') - (\overline{H}, \overline{\Omega}') - (\overline{T}, \overline{\Omega}) - \frac{k g W \overline{\Omega}'}{R^2 T_a^2 \overline{\varphi \psi}} + \frac{k_1 W}{R \overline{\varphi \psi}} \overline{\Omega} + \frac{1}{W} (W_x s_x + W_y s_y) + \nu \left[ \frac{g}{W} (\overline{H}, \overline{T}) - \frac{g}{c_p P_0} (B' + \Phi) - K \nabla \overline{T} - \frac{\kappa T_a}{P_0} w_1 \right];$$

$$\Omega = \frac{g}{W} \left[ \nabla H - \frac{1}{W} (W_x H_x + W_y H_y) \right];$$

$$\nu = \frac{W^2}{\kappa R T_a \overline{\varphi \psi}};$$

$$b_s = \frac{\partial b}{\partial S}.$$

Отличие этих формул от (56.7) и (57.7) состоит в том, что ряд членов, зависящих от сферичности Земли, здесь не учитывался и производные от  $f$  и  $s$  по осям координат предполагались известными по данным предыдущего шага по времени. Это было сделано для ускорения сходимости итерационного процесса.

При определении теплообмена с подстилающей поверхностью полагалось, что над сушей известны радиационный баланс и поток тепла от нижележащих слоев к поверхности суши, а также предполагались заданными радиационный баланс, толщина льда и снега в Арктике и температура поверхности открытой воды. Применительно к этим условиям преобразовывался вид члена, содержащего  $(B' + \Phi)$ .

Для того чтобы не считать испарение заранее известным, была использована связь удельной влажности с относительной и температурой воздуха. В этом случае производную от удельной влажности можно представить таким же образом, как и в § 1. Подставив это значение градиента удельной влажности в уравнение теплового баланса (39.7), переведенное в  $\xi$ -координату, приходим примерно к такому же выражению, что и (44.7),

$$\frac{\lambda' g \xi}{RT_a} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_1 = B' + \Phi, \quad (61.7)$$

где

$$\xi = 1 + 0,622 \frac{LE_0}{c_p P_0} \alpha r_1 e^{\alpha T_1};$$

$$B' = B - 0,622 \frac{LE_0 g \lambda'}{T_a R c_p P_0} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)_1 e^{\alpha T_1}.$$

В Арктике относительная влажность меняется во времени мало и известна с довольно большой точностью. Поэтому уравнение (61.7) позволяет учитывать затраты тепла на испарение, не рассматривая изменений удельной влажности, что облегчает решение задачи.

После использования выражения (61.7) в знаменателе соответствующего члена уравнения (60.7) появляется параметр  $\xi$ , и он принимает вид  $\frac{g}{c_p P_0 \xi} (B' + \Phi)$ . Приняв для суши известные значения  $\Phi$ ,  $B$  и  $r$ , оказалось возможным учесть теплообмен между атмосферой и сушей. Теплообмен через лед вычислялся по формуле, полученной в предположении линейного вертикального профиля температуры льда и снега. При этом

$$B' + \Phi = B' - \frac{\theta - T_1}{\frac{H_{\lambda}}{\Lambda} + \frac{h_c}{\lambda_c}}, \quad (62.7)$$

где  $H_{\lambda}$ ,  $h$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda_c$  — толщина и теплопроводность льда и находящегося на нем снега;

$\theta$  — температура на границе раздела лед—вода.

Чтобы получить выражение, позволяющее учитывать теплообмен между открытой поверхностью воды и воздухом, задавался вертикальный профиль температуры воздуха над водой и  $T_1$  отождествлялось с температурой на уровне  $z_1 = 2$  м. Если считать профиль температуры в квазистационарном слое воздуха логарифмическим, то

$$B' + \Phi = \frac{a c_p P_0 \xi}{RT_a \bar{h}' \ln \frac{z_1}{z_0}} (\vartheta - T_1), \quad (63.7)$$

где  $\vartheta$  — температура воды;

$\bar{h}'$  — высота квазистационарного слоя атмосферы.

Расчеты геопотенциала и температуры воздуха по изложенной схеме для ограниченной территории были проведены Ю. Н. Колтаковым [78]. Область интегрирования охватывала полярный район размером  $19 \times 19$  узлов с центром в полюсе и шагом 350 км. Полагалось  $F(\xi) = 2\xi$ . Для того чтобы получить максимальные контрасты температур между морем и атмосферой, рассматривался зимний период.

Решение задачи происходило в следующем порядке. По известным начальным полям  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$ , за которые принимались данные поверхности 500 мб на 1 января 1960 г., вычислялись правые части уравнений (59.7) и (60.7). При этом  $\omega_1, f_x, f_y, s_x, s_y$ , входящие в правые части этих уравнений, для первого шага времени полагались нулевыми, а со второго шага времени определялись по предыдущему шагу. Затем вычислялись поля искомым функций  $f$  и  $s$  при условии, что на границах области  $f$  и  $s$  для любого момента времени равны нулю. Полученные по формулам (58.7) поля геопотенциала и температуры служили исходными для следующего шага времени, который принимался равным 1 ч.

Поскольку в данном случае определялась роль неадиабатического источника тепла, то ради упрощения задачи в расчетной схеме трение не учитывалось, т. е. полагалось  $k=0$ . Не принимался во внимание и горизонтальный турбулентный теплообмен. При решении сначала теплообмен определялся по фактическому состоянию подстилающей поверхности. Затем те же самые расчеты были проделаны без учета теплообмена. Сравнение полученных результатов показало, что при прогнозе на сутки этот источник тепла вносит крайне незначительные изменения полей  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$ . Приняв во внимание тот факт, что контрасты температур между покрытым льдом океаном, сушей и прилегающим слоем воздуха в зимнее время в Арктике сравнительно невелики, можно считать этот вывод в какой-то мере оправданным.

Для того чтобы определить влияние теплообмена с океаном на изменение полей  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$  при максимальных контрастах температур воды и воздуха, фактическая подстилающая поверхность была искусственно изменена: предполагалось, что льда в Северном Ледовитом океане нет и температура поверхности воды постоянна и равна  $0^\circ$ . При этом условии разница температур воды и воздуха в некоторых районах Арктики достигала  $40^\circ$ . Возникшие в результате увеличенного притока тепла от океана изменения полей  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$  в общем оказались более заметными, чем в предыдущем случае, и локализованными в районе максимальных контрастов температур.

На рис. 41, а показано повышение температуры и геопотенциала за 1 сутки, возникшее в результате увеличения притока тепла в атмосферу, вызванного изменением ледовых условий

в Арктике. На рис. 41, б дано изменение этих полей за 2 суток. Из этого рисунка видно, что максимальные изменения полей  $\bar{T}$  и  $\bar{H}$  за 2 суток составляют соответственно  $3^\circ$  и  $2 \text{ джм}$ . Естественно, в реальных условиях разница температур воды и воздуха, подобная

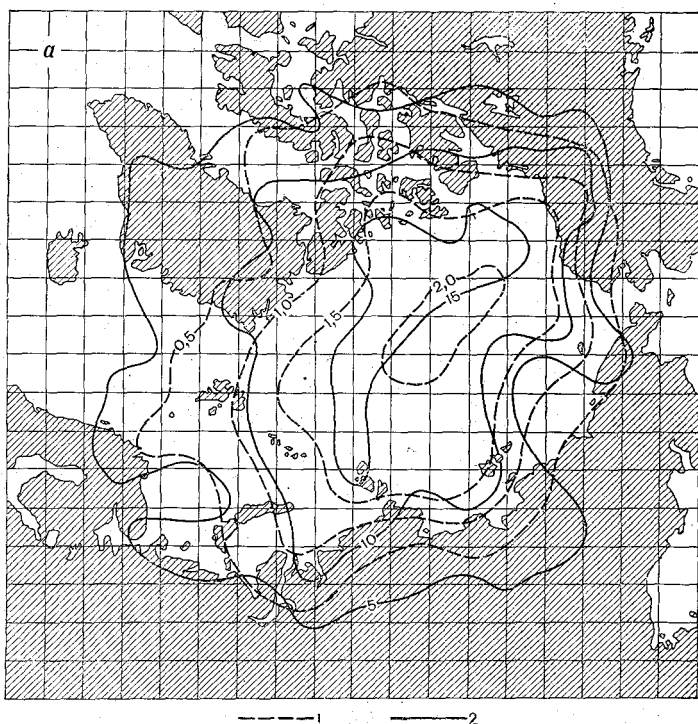


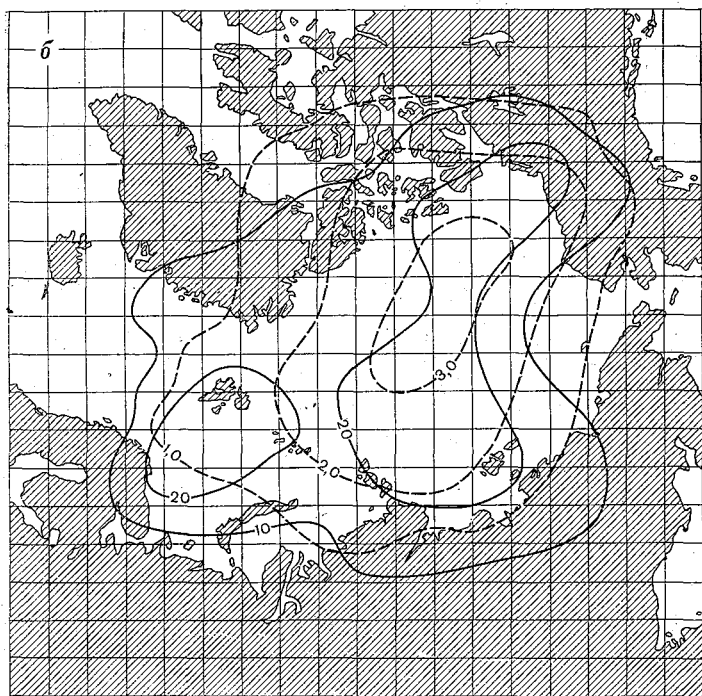
Рис. 41. Изменение  $\bar{T}$  (в градусах) 1 и  $\bar{H}$  (в метрах) 2, а — за 1 сутки;

принятой, в результате изменения ледовой обстановки может отмечаться лишь на значительно меньших площадях, чем в данном эксперименте. Поэтому увеличение суммарного потока тепла и изменение  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$  при этом не могут быть сколько-нибудь заметными.

При расчетах  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$  по полусфере использовались уравнения (56.7) — (58.7), причем теплообмен с подстилающей поверхностью, как и в первом случае, определялся формулами (61.7) — (63.7). Шаг сетки принимался равным  $2,4 \text{ см}$  при  $\mu = 4 \cdot 10^{-8}$  и шаг времени —  $4 \text{ ч}$ .

Как и в предыдущем случае, ставилась задача выяснить роль теплообмена с подстилающей поверхностью в формировании аномалий полей температуры и геопотенциала тропосферы, поэтому

в расчетной схеме трение не учитывалось. Известно, что учет горизонтального турбулентного перемешивания приводит к повышению устойчивости расчетной схемы [274]. Поэтому в данной модели горизонтальный перенос тепла во внимание принимался.



вызванное увеличением потока тепла от океана.

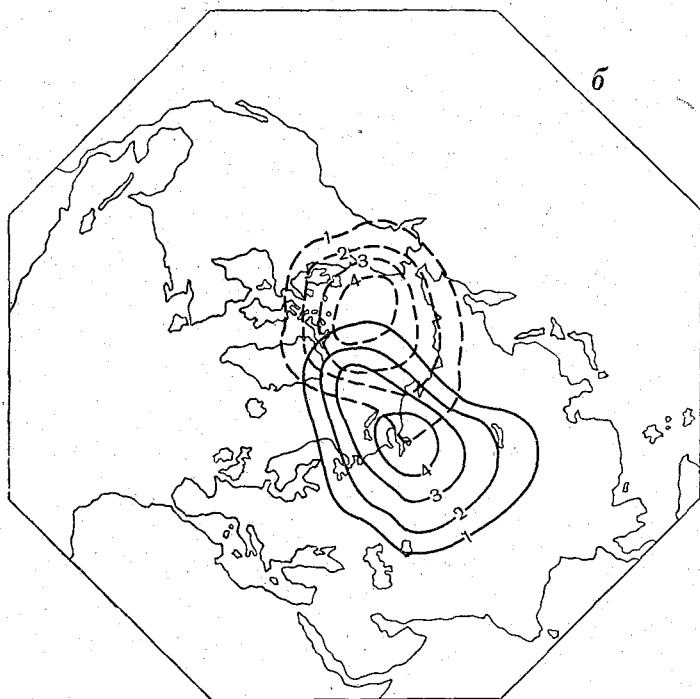
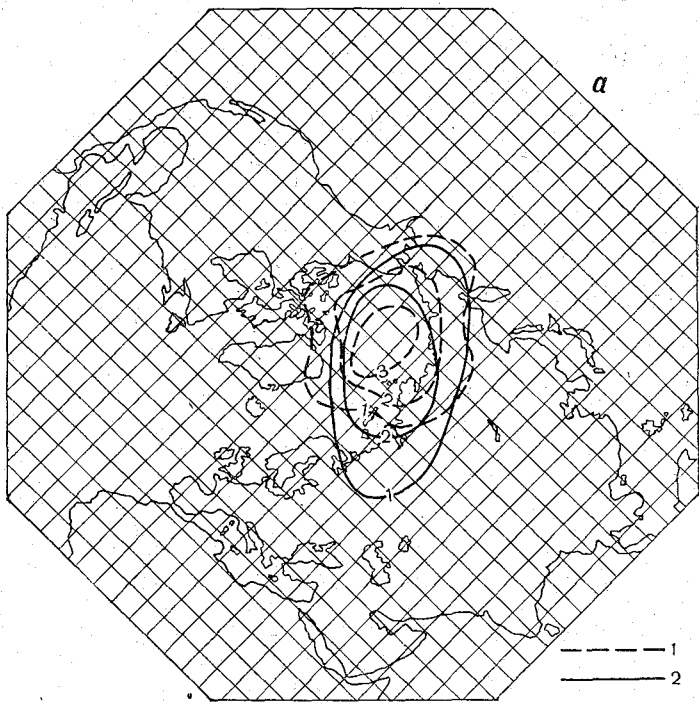
б — за 2 суток.

Однако учет этого члена с  $K = 5 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}$  в уравнении притока тепла не сказался заметным образом на устойчивости. Чтобы избавиться от возмущений, вызванных расчетной неустойчивостью схемы, был использован предложенный Аракавой метод вычисления якобиана по формуле

$$(a, b) = \frac{1}{3} (J_0 + J_1 + J_2), \quad (64.7)$$

где

$$J_0 = \frac{1}{4d^2} [(a_{i+1, j} - a_{i-1, j})(b_{i, j+1} - b_{i, j-1}) - (a_{i, j+1} - a_{i, j-1})(b_{i+1, j} - b_{i-1, j})];$$



$$J_1 = \frac{1}{4d^2} [(b_{i+1, j+1} - b_{i+1, j-1}) a_{i+1, j} - (b_{i-1, j+1} - b_{i+1, j-1}) a_{i-1, j} - (b_{i+1, j+1} - b_{i-1, j+1}) a_{i, j+1} + (b_{i+1, j-1} - b_{i-1, j-1}) a_{i, j-1}];$$

$$J_2 = \frac{1}{4d^2} [(b_{i, j+1} - b_{i+1, j}) a_{i+1, j+1} - (b_{i-1, j} - b_{i, j-1}) a_{i-1, j-1} + (b_{i-1, j} - b_{i, j+1}) a_{i-1, j+1} - (b_{i, j-1} - b_{i+1, j}) a_{i+1, j-1}].$$

В предыдущей расчетной схеме якобиан записывался в виде  $J_0$ . Использование формулы (64.7) приводит к более гладкому полю, чем в первом случае. Но и этого оказалось недостаточно для получения устойчивого решения на срок в несколько суток. Причем даже уменьшение шага  $\tau$  до 1 ч не дало желаемого эффекта.

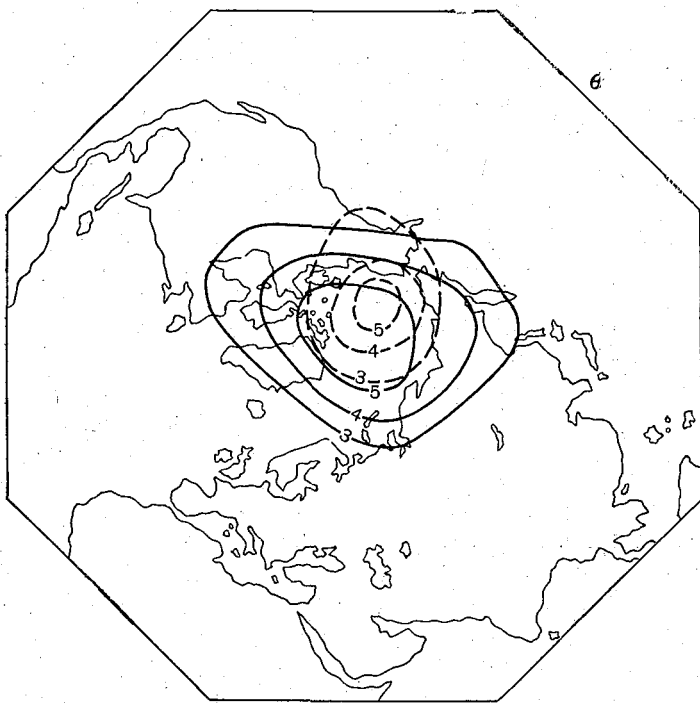


Рис. 42. Изменение  $\bar{T}$  (в градусах) 1 и  $\bar{H}$  (в декаметрах) 2, вызванное увеличением потока тепла от Северного Ледовитого океана.

$a$  — за 2 суток;  $b$  — за 4 суток;  $v$  — за  $\frac{4}{3}$  суток, ложбины и гребни начальных полей  $T$  и  $H$  сглажены.

Значительно повысило устойчивость решения применение сглаживания полей геопотенциала и температуры по формуле

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij} = & 0,4I_{ij} + 0,09(I_{i+1,j} + I_{i-1,j} + I_{i,j+1} + I_{i,j-1}) + \\ & + 0,06(I_{i+1,j+1} + I_{i-1,j+1} + I_{i+1,j-1} + I_{i-1,j-1}), \end{aligned} \quad (65.7)$$

где  $\bar{T}$  — сглаженное значение  $J$ .

Такое сглаживание проводилось после каждого шага счета. В отличие от предыдущего случая только параметр  $\omega_1$ , входящий в правую часть расчетных формул, полагался известным по данным решения предшествовавшего шага  $\tau$  и нулевым — для первого шага. Все остальные параметры и последовательность решения были такими же, как в схеме, использованной для ограниченной области, т. е. первоначально рассчитывались  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$  при фактическом состоянии подстилающей поверхности в Арктике, а затем — при отсутствии льдов в Северном Ледовитом океане. Разность вычисленных значений температуры и геопотенциала представлена на рис. 42, а и б.

В течение первых 2 суток расположение и величина аномалий  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$ , вызванных увеличением притока тепла от океана, примерно таковы, как и в ранее рассмотренном случае, хотя уже на вторые сутки заметна тенденция к смещению области роста геопотенциала в юго-восточном направлении, на Евразию. Через 4 суток центр этой области под действием общей циркуляции атмосферы еще больше сместился и оказался над материком, хотя область роста  $\bar{T}$  сохранила свое положение над океаном. Расчеты распределения аномалий температуры и геопотенциала проводились дважды: с учетом  $\omega_1$  и при  $\omega_1=0$ . В обоих случаях картина распределения аномалий  $\bar{T}$  и  $\bar{H}$  примерно одинакова.

Если ложбины и гребни начальных полей  $\bar{T}$  и  $\bar{H}$  сгладить, то циркуляция атмосферы принимает более или менее зональный характер и центр области роста геопотенциала из Арктики не смещается (рис. 42, в). Однако в результате воздействия макротурбулентной диффузии возникшие аномалии  $\bar{T}$  и  $\bar{H}$ , как и в первом случае, распространяются за пределы источника тепла.

С увеличением продолжительности действия источника тепла его роль становится все более и более заметной. И, как видно из рисунков, уже через 2 суток величины изменений  $\bar{T}$  и  $\bar{H}$  становятся настолько заметными, что их необходимо учитывать. Конечно, условия заданы гипотетическими, приток тепла принят очень большим и в естественных условиях он таким быть не может. В реальных условиях, как отмечалось выше, изменение



ледовой обстановки при краткосрочных прогнозах можно не учитывать. Однако устойчивое изменение температуры океана в реальных масштабах в течение длительного периода времени создает определенный фон в характере относительной и абсолютной топографии не только над источниками тепла на подстилающей поверхности, но и за пределами их действия. Поэтому определение изменений температуры и давления воздуха, а следовательно, и циркуляции атмосферы, вызванных крупными аномалиями в распределении температуры океана, является первоочередной задачей в исследовании крупномасштабного взаимодействия океана и атмосферы.

## Глава VIII. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАДИАЦИИ И ТЕПЛОЗАПАСА ВОДЫ ДЛЯ УНИЧТОЖЕНИЯ ЛЬДА

### § 1. Ускорение таяния льда при искусственном изменении его альbedo

У Естественная снежно-ледяная поверхность обладает большой отражательной способностью для коротковолновой радиации. Если каким-то образом ее уменьшить, то возрастает доля поглощенной радиации, что в соответствующих условиях может привести к ускоренному таянию снега и льда. Этот факт давно известен и претворяется в жизнь.

Уменьшение альbedo снежно-ледяной поверхности проводится путем распыления на ней угольной пыли, песка, шлака или окрашивания различными красителями. К настоящему времени проведены многочисленные опыты по выбору вещества, наиболее способствующего поглощению радиации, его оптимальной концентрации на единицу площади [164, 182, 212, 250]. В результате проведенных опытов большинство авторов приходят к выводу, что лучше всего использовать для этой цели мелкий угольный шлак, который практически не смывается водой и не сдувается ветром, с нормой посылки 0,3—0,4 кг/м<sup>2</sup>. При этом альbedo уменьшается до величины порядка 0,2, а таяние снега ускоряется в 2—3 раза и льда — на 50—150%. Было проведено несколько экспериментов по окрашиванию льда на водоемах в средней полосе и в Арктике с целью более раннего вскрытия бухт, проливов и образования каналов. Опыты показали, что искусственное уменьшение альbedo снежно-ледяной поверхности дает возможность открыть навигацию на 1—1,5 недели, а в благоприятных случаях — на 2—3 недели раньше естественных сроков.

Особенно эффективным такой метод ускорения таяния снега и льда оказывается там, где радиация является основным источником тепла. Проведенные в больших масштабах работы по созданию радиационных каналов в припайных льдах Арктики показали перспективность радиационного метода разрушения льда для навигационных целей, особенно в годы позднего естественного вскрытия припая.

Большую роль при изменении альbedo снежно-ледяной поверхности имеет выбор срока проведения этого мероприятия. Производить окрашивание снега на льду следует тогда, когда его температура  $[\Theta_c]$  на окрашенном участке будет близка к нулевой. При более низких значениях  $\Theta_c$  таяния происходить не будет, а возможные снегопады и метели могут засыпать эти участки. В случае позднего окрашивания эффективность метода снижается.

Расчет температуры поверхности окрашенного снега и льда можно проводить по формулам главы V (13.5) и (9.5), подставив в них соответствующее значение радиационного баланса с учетом измененного альbedo. Заранее задавшись тем альbedo, которое поверхность будет иметь после окраски, и используя прогностические значения остальных необходимых метеорологических элементов, легко по упомянутым формулам рассчитать ход температуры поверхности снега или льда окрашенного участка. То значение  $t$ , при котором вычисленная температура переходит через  $0^\circ$ , используется для определения даты опыления или окрашивания льда. Это же значение  $t$  принимается как исходное при расчетах стаивания льда. Если образующаяся при таянии льда вода стекает, то величина стаявшего слоя льда на окрашенном участке может быть вычислена по полученной в работе [73] формуле

$$h + \Delta H = \frac{1}{l_{pc}} \int_0^{t_1} [B(\xi) + mT_s(\xi) - m\eta + \Phi_c(\xi)] d\xi + \frac{1}{l_p} \int_{t_1}^t [B(\xi) + mT_s(\xi) - m\eta + \Phi_n(\xi)] d\xi, \quad (1.8)$$

где  $t_1$  — время полного стаивания снега;  
 $\Phi_c, \Phi_n$  — потоки тепла, расходуемые на прогревание снега и льда, обычно из-за небольшой величины их не учитывают (остальные обозначения здесь те же, что и в главе V).

Для облегчения расчетов некоторые параметры в формуле (1.8) были заменены их числовыми значениями, а интегралы представлены в виде суммы, в результате чего она приняла вид формулы (16.5). Естественно, входящий в эти формулы радиационный баланс вычисляется с учетом измененного альbedo.

В том случае, когда вода остается на окрашенном участке льда, для поверхности воды уравнение теплового баланса может быть записано в виде, аналогичном выражению (8.5),

$$m [(1 + \alpha\eta)\vartheta + \eta - T_s] - \lambda_b \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=0} = B, \quad (2.8)$$

где  $\vartheta$  — температура поверхности воды;

$\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$  — градиент температуры воды;

$\lambda_{\text{в}}$  — теплопроводность воды.

На границе воды и тающего льда выполняется условие баланса тепла

$$lp \frac{dH}{dt} = \Lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \lambda_{\text{в}} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \quad (3.8)$$

В работе [71] отмечается, что во время экспедиции в устье Енисейского залива весной 1960 г. проводилась посыпка угольной пылью полосы льда шириной 17 м и длиной 260 м. Альbedo окрашенной полосы уменьшилось до 20—15%. В канале, образовавшемся при таянии льда на этой полосе, проводились измерения температуры воды. Оказалось, что вода в канале интенсивно перемешивается, и вертикальный профиль температуры ее можно считать линейным. Температура поверхности воды не поднималась выше 0,2°. Правда, и глубина воды в канале не превышала 20—30 см. Но даже и в больших снежницах, площадью до 1 км<sup>2</sup>, температура воды в штилевую погоду в послеполуденные часы редко превышала 0,5°. Достаточно же было слабого ветра, как в результате перемешивания температура воды понижалась.

Из изложенного следует, что практически все тепло, поступающее на поверхность воды, тратится на таяние льда. На прогрев воды расходуется крайне незначительная часть тепла, которую можно в практических расчетах не принимать во внимание. Поэтому из уравнений (2.8) и (3.8) будем иметь

$$lp \frac{dH}{dt} = \Lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + B + m [T_{\text{с}} - (1 + \alpha\eta)\vartheta - \eta]; \quad (4.8)$$

$$\Delta H = \frac{1}{lp} \int_0^t \{ B(\xi) + m [T_{\text{с}}(\xi) - \eta - (1 + \alpha\eta)\vartheta(\xi)] + \Phi_{\text{л}}(\xi) \} d\xi. \quad (5.8)$$

Если не учитывать тепло, расходуемое на прогрев воды, т. е. отбросить член, содержащий  $\vartheta$ , а также вести расчет стаявания от момента начала таяния льда  $t_1 = 0$ , то формулы (5.8) и (1.8) будут одинаковы.

На рис. 43 приведен расчет стаявания льда на окрашенной полосе по данным наблюдений в Енисейском заливе весной 1960 г. Шероховатость поверхности воды в канале принималась равной 10<sup>-5</sup> м и не учитывалось тепло, идущее на прогрев воды и льда. Исходными данными являлись радиационный баланс полосы, температура и влажность воздуха, а также скорость ветра, измеренные на одной высоте. Толщина стаявшего льда определялась по рейкам стаявания как средняя величина из отсчетов по пяти рейкам, расположенным поперек канала (см. рис. 43 2). Кроме

того, вытравивание термометров сопротивления из льда также показывало величину стаивания (кривая 3 на рис. 43). Стаивание снега определялось по рейке, установленной за полмесяца до начала таяния.

На рис. 43 видно хорошее совпадение рассчитанных и наблюдаемых величин стаивания. Со 2 по 5 июня произошло похолода-

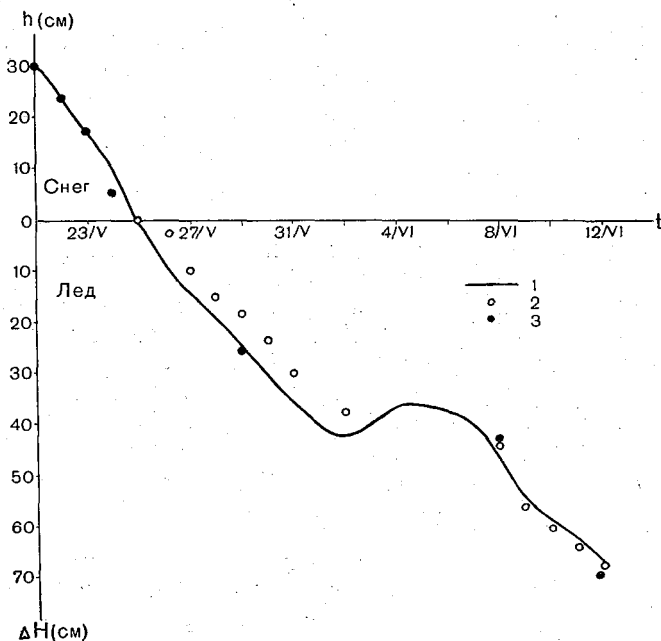


Рис. 43. Стаивание окрашенного снега и льда.

1 — расчетные величины стаивания; 2, 3 — наблюдаемые.

ние и в канале образовался лед толщиной 5,5 см. Эта величина удовлетворительно согласуется с расчетной, равной 4,4 см. Стаивание неокрашенного льда происходило значительно медленнее, чем окрашенного. За этот же период он стаял всего на величину 25—35 см, т. е. окраска льда ускорила его таяние в 2 раза, что согласуется с отмеченными ранее результатами отдельных опытов.

## § 2. Использование теплозапаса воды для создания незамерзающих акваторий

Температура открытой водной поверхности зимой бывает обычно много выше температуры воздуха. Поэтому вода теряет большое количество тепла вследствие интенсивной турбулентной теплоотдачи, испарения и излучения. Отдавая тепло, вода

охлаждается или, если ее температура равна температуре замерзания, замерзает, т. е. потери тепла компенсируются теплотой ледообразования. Чтобы не происходило образования и роста льда, нужно подводить к поверхности воды тепло, в количественном отношении не меньшее оттоку в атмосферу. Источником этого тепла может служить теплозапас глубинных слоев воды. В тех случаях, когда в осенне-зимний период ветровое или конвективное перемешивание не успевает распространиться до дна, температура воды ниже слоя перемешивания бывает обычно выше температуры замерзания. Если эту воду как-то образом поднять к поверхности, то одновременно произойдет и соответствующий перенос тепла, либо уменьшающий скорость нарастания льда, либо вообще препятствующий его образованию.

В настоящее время мероприятия по использованию тепла глубинных вод для борьбы со льдом проводятся в различных масштабах как в нашей стране, так и за рубежом [6, в183, 312]. Подъем теплой воды к поверхности осуществляется преимущественно с помощью потока воздуха, выходящего из проложенного на некоторой глубине ( $h$ ) трубопровода. При этом расход воздуха и мощность пневматической аппаратуры должны определяться температурной стратификацией воды и метеорологическими условиями района, где создается незамерзающая акватория. Применительно к этой задаче в работе [70] рассмотрен метод расчета теплопотерь с акватории и расхода воздуха, потребляемого для подъема необходимой массы глубинной воды.

В настоящее время известен ряд теоретических работ (Д. Л. Лайхмана, М. П. Тимофеева, Л. С. Гандина и др.), посвященных вопросам теплообмена на ограниченных водоемах. Проведенный в некоторых работах анализ решения показал, что при теплоотдаче и испарении с небольших водоемов существенную роль играет горизонтальное перемешивание воздуха, а при теплоотдаче и испарении с больших водоемов важно учитывать ветер, роль же горизонтальной диффузии незначительна. Д. Л. Лайхман [134] отмечает, что продольная диффузия существенна для нескольких метров от края водоема и пренебрежимо мала для нескольких десятков метров. Для водоемов, размеры которых не меньше нескольких десятков метров, можно пренебречь боковой диффузией.

По Г. Х. Цейтину [237], учет горизонтальной диффузии вносит существенную поправку в теплообмен для водоемов, линейные размеры которых  $X \ll 100$  м. Такие же размеры водоемов, для которых горизонтальная диффузия существенно влияет на теплообмен с атмосферой, у М. П. Тимофеева [225] и у Л. С. Гандина, Р. Э. Соловейчика [46]. Последние определяют, что для испарителя с линейными размерами 4—5 м погрешность, вызываемая учетом горизонтального перемешивания, при под-

счетах суммарного испарения составляет около 5%. С ростом неустойчивости атмосферы эта ошибка убывает.

Таким образом, при линейных размерах открытой водной поверхности в несколько десятков метров установившееся суммарное испарение и турбулентный поток можно определить из уравнения

$$V(z) \frac{\partial T_э}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ a(z) \frac{\partial T_э}{\partial z} \right] \quad (6.8)$$

при следующих условиях:

$$\left. \begin{aligned} x=0 & \quad T_э = \varphi(z); \\ z=0 & \quad T_э = \vartheta; \\ z=\infty & \quad T_э \neq \infty, \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

где  $T_э = T + \frac{L}{c_p} q$  — эквивалентная температура.

Как известно, вертикальный профиль метеорологических элементов, и в частности скорости ветра  $V$  и коэффициента турбулентного обмена  $a$ , зависит от стратификации атмосферы.

Вблизи подстилающей поверхности, где велика роль динамических факторов турбулентности, скорость ветра изменяется с высотой по закону, близкому к логарифмическому. Следовательно, и коэффициент турбулентного обмена изменяется примерно пропорционально высоте. Поскольку в данной задаче не требуется знания распределения метеорологических элементов, а представляет интерес только величина потоков на поверхности, то вполне можно полагать профиль скорости ветра логарифмическим, а коэффициент турбулентного обмена — линейным. Влияние стратификации на турбулентный обмен наиболее просто учесть, в соответствии с выражением (24.1), добавочным множителем

$$a = x_0 + a'z \left( 1 + B \frac{\Delta T}{V_1^2} \right) = x_0 + k_2 z,$$

$$V = V_1 \frac{\ln \left( 1 + \frac{k_2 z}{x_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{k_2 z_1}{x_0} \right)} = V' \ln \left( 1 + \frac{k_2 z}{x_0} \right),$$

где принято  $Rg=1$ .

В целях упрощения задачи будем искать не абсолютное значение эквивалентной температуры над открытой водой, а ее отклонение от значений над льдом или берегом, для чего примем

$$T_э = \varphi(z) + T'(x, z). \quad (8.8)$$

В таком случае для определения  $T'(x, z)$  получим уравнение

$$V' \ln \left( 1 + \frac{k_2 z}{\alpha_0} \right) \frac{\partial T'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_0 + k_2 z) \frac{\partial T'}{\partial z}. \quad (9.8)$$

Краевое условие для этого уравнения на поверхности воды

$$T'(z=0) = T_{\alpha_0} - \varphi(z=0) = T'_0.$$

Другие краевые условия будут нулевыми. Введем новые переменные

$$\zeta = \ln \left( 1 + \frac{k_2 z}{\alpha_0} \right), \quad \xi = \frac{k_2^2 x}{V' \alpha_0}.$$

В этих переменных уравнение (9.8) будет иметь вид

$$\zeta e^\zeta \frac{\partial T'}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T'}{\partial \zeta^2} \quad (10.8)$$

и краевые условия при  $\zeta=0$   $T'=T'_0$ ;

$$\zeta = \infty \quad T' = 0;$$

$$\xi = 0 \quad T' = 0;$$

При решении этого уравнения воспользуемся методом последовательных приближений М. Е. Швеца [256]. Условие на бесконечности заменяется в таком случае условиями на верхней границе «слоя проникновения тепла»  $\zeta_1$ :

$$\text{при } \zeta = \zeta_1(\xi) \quad T' = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial \zeta} = 0.$$

После двух приближений имеем

$$T' = T'_0 \left\{ \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_1} \right) + \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1^2} [(\zeta^2 + 4\zeta + 6) e^\zeta - 6 - 2\zeta] \right\} + T'_0 \frac{\zeta}{\zeta_1} \left\{ 1 - \frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} [(\zeta_1^2 - 2\zeta + 2) e^{\zeta_1} - 2] \right\}, \quad (11.8)$$

где 
$$\dot{\zeta}_1 = \frac{d\zeta_1}{d\xi}.$$

Для определения функции  $\zeta_1(\xi)$  имеем уравнение

$$1 = \left[ \left( \zeta_1 - 3 + \frac{6}{\zeta_1} - \frac{6}{\zeta_1^2} \right) e^{\zeta_1} + \frac{6}{\zeta_1^2} \right] \dot{\zeta}_1, \quad (12.8)$$

решением которого будет выражение

$$\xi = \left( \zeta_1 - 4 + \frac{6}{\zeta_1} \right) e^{\zeta_1} - \frac{6}{\zeta_1} - 2. \quad (13.8)$$



Для определения удельной величины потока  $\tilde{\Phi}$  субстанции  $T'$  получаем формулу

$$\tilde{\Phi} = \frac{c_p \rho k_2 T'_0}{X} \int_0^X \left[ 2/\zeta_1^2 - e^{\zeta_1} \left( 1 - \frac{2}{\zeta_1} + \frac{2}{\zeta_1^2} \right) \right] \zeta_1 dx,$$

где  $X$  — длина участка открытой воды по направлению ветра.

Сделав переход от переменной  $x$  к переменной  $\xi$  в подынтегральном выражении, получим

$$\tilde{\Phi} = \frac{c_p \rho \alpha_0 V' T'_0}{k_2 X} \int_0^{\bar{\xi}} [2 - e^{\zeta_1} (\zeta_1^2 - 2\zeta_1 + 2)] \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2}, \quad (14.8)$$

где  $\bar{\xi}$  находится из уравнения

$$\frac{k_2^2 X}{\alpha_0 V'} = \left( \bar{\xi} - 4 + \frac{6}{\bar{\xi}} \right) e^{\bar{\xi}} - \frac{6}{\bar{\xi}} - 2. \quad (15.8)$$

Интеграл в формуле (14.8) легко вычисляется, и в таком случае она приобретает вид

$$\tilde{\Phi} = c_p \rho k_2 T'_0 f(X), \quad (16.8)$$

где  $f(X) = \frac{V' \alpha_0}{k_2^2 X} \left[ 1 + \frac{2}{\bar{\xi}} + \left( 1 - \frac{2}{\bar{\xi}} \right) e^{\bar{\xi}} \right]$  табулируется (рис. 44).

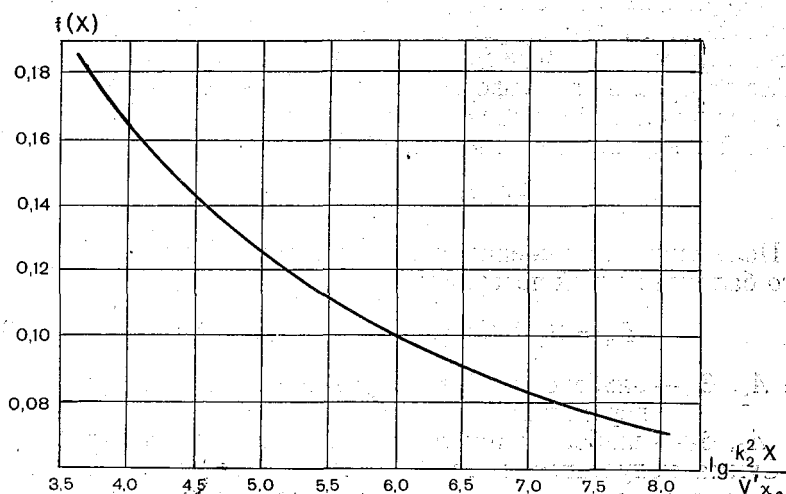


Рис. 44. Номограмма для определения  $f(X)$ .

Используя выражение (16.8), легко получить формулы для расчета испарения и турбулентной теплоотдачи. Если предположить, что профиль  $\varphi(z)$  логарифмический, т. е.

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{x_0}{k_2} \frac{\partial T_{\varphi 0}}{\partial z} \ln \left( 1 + \frac{k_2 z}{x_0} \right),$$

то величину  $\Phi$  можно представить в виде

$$\Phi = c_p \rho x_0 \frac{\partial T_{\varphi 0}}{\partial z} + \tilde{\Phi} = c_p \rho k_2 \left[ \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{\ln \left( 1 + \frac{k_2 z_2}{x_0} \right)} + f(X) (\varphi_0 - T_{\varphi 0}) \right]. \quad (17.8)$$

На основании выражения (17.8) записываются формулы для расчета турбулентной теплоотдачи  $\Phi_T$  и испарения  $\Phi_H$ :

$$\Phi_T = c_p \rho k_2 \left[ \frac{T_2 - T_0}{\ln \left( 1 + \frac{k_2 z_2}{x_0} \right)} + f(X) (T_0 - \vartheta) \right], \quad (18.8)$$

$$\Phi_H = L \rho k_2 \left[ \frac{q'_2 - q'_0}{\ln \left( 1 + \frac{k_2 z_2}{x_0} \right)} + f(X) (q'_0 - q_0) \right]. \quad (19.8)$$

В этих формулах  $T$  и  $q'$  обозначают температуру и удельную влажность над льдом, т. е. при  $x=0$ . Индексы при  $T$ ,  $q'$  и  $q$  обозначают соответствующие уровни над подстилающей поверхностью, причем индекс «0» отмечает данные, относящиеся к подстилающей поверхности.

Следующим элементом, подлежащим расчету, является радиационный баланс открытой водной поверхности. Здесь будем иметь в виду, что при небольших размерах участка чистой воды противозлучение атмосферы  $G$  можно принять таким же, как и на краю участка. Из уравнения радиационного баланса снежно-ледяной поверхности  $B_c$  находим

$$G = B_c - Q(1 - A_c) + \sigma \Theta_a^4.$$

Полученное выражение подставим в уравнение радиационного баланса водной поверхности  $B_B$ .

$$B_B = B_c + Q(A_c - A_B) - \sigma (\vartheta_a^4 - \Theta_a^4), \quad (20.8)$$

где  $A_c$ ,  $\Theta_a$  — альbedo и температура в  $^{\circ}\text{K}$  снежно-ледяной поверхности;

$A_B$ ,  $\vartheta_a$  — альbedo и температура в  $^{\circ}\text{K}$  поверхности воды.

Сумма полученных потоков тепла составляет величину общего теплообмена между открытой поверхностью воды и воздухом. Чтобы не происходило понижения температуры воды и ле-

дообразования, этот отток тепла должен компенсироваться подводом снизу не меньшего теплового потока, т. е.

$$\Phi_B = -(\Phi_T + \Phi_H + B). \quad (21.8)$$

Иногда бывает достаточно производить неполное очищение ото льда некоторой акватории, т. е. подводить ко льду такое количество тепла, чтобы толщина льда  $H$  не превышала некоторую наперед заданную величину. Обычно представляет интерес лед небольшой толщины, чтобы его легко преодолевали суда. Вертикальный профиль температуры такого льда можно считать линейным. В таком случае из уравнений балансов тепла для верхней и нижней поверхности льда находим

$$lp \frac{dH}{dt} + \Phi_T + \Phi_H + B + \Phi_B = 0.$$

Из этой формулы следует, что для того, чтобы не изменялась толщина льда, должно выполняться то же соотношение (21.8). Но величины составляющих теплового баланса при этом определяются для снежно-ледяной подстилающей поверхности. При отсутствии данных по  $\Phi_T$  и  $\Phi_H$  для определения  $\Phi_B$  можно воспользоваться формулой (31.4). Согласно этой формуле, толщина льда при постоянной температуре воздуха не будет изменяться в том случае, если приток тепла из воды ко льду равен

$$\Phi_B = \frac{\Lambda}{\Lambda + m_1 H_0} [m_1 (\theta - MT + \beta) - B]. \quad (22.8)$$

Вычисленные по приведенным формулам величины теплопотерь в атмосферу позволяют определить минимально допустимый расход воздуха  $U$ , который, усиливая перемешивание воды, приведет к необходимому увеличению притока тепла к поверхности.

И. М. Коновалов [121] получил приближенную зависимость между потоком воды  $W$ , увлекаемой пузырьками воздуха, и расходом воздуха

$$W = 1,46awz, \quad (23.8)$$

где  $w = \left[ \frac{gU(P_0 + \gamma h)}{0,64a\gamma h} \ln \frac{P_0 + \gamma h}{P_0} \right]^{1/3}$  — средняя скорость подъема

воды по оси потока;

$z$  — расстояние от трубопровода;

$\gamma$  — плотность воды;

$P_0$  — атмосферное давление;

$a$  — эмпирический коэффициент.

На основании опытных данных для плоской струи с развитой турбулентностью принято полагать  $a \approx 0,1$  [1]. Б. С. Бородин [20] отмечает, что вследствие приближенности теории скорость подъема воды  $w$  оказывается завышенной по сравнению с результатами экспериментов и при глубинах  $h > 0,84$  м следует вводить поправочный коэффициент  $n = 0,61$ . Зная вертикальный поток воды, легко определить и поток тепла.

Если температура воды вне поднимающейся струи  $\vartheta(z)$ , то каждый элементарный слой струи единичной длины получает тепло

$$d\Phi_B = c\gamma\vartheta(z) \frac{\partial W}{\partial z} dz. \quad (24.8)$$

Отсюда находим, что на уровень  $h$  поступает с поднимающейся водой поток тепла

$$\Phi_B = 1,46nawc\gamma \int_0^h \vartheta(z) dz. \quad (25.8)$$

Выражение (25.8) определяет величину потока тепла, приходящуюся на всю ширину струи единичной длины. Поэтому подставляемые в левую часть формулы теплопотери в атмосферу должны быть умножены на ширину струи, равную, по И. М. Коновалову,  $3,82a\bar{h}$ . В таком случае

$$U = \frac{11,5a\gamma\bar{h}^4\Phi_B^3}{\left[nc\gamma \int_0^h \vartheta(z) dz\right]^3 g(P_0 + \gamma\bar{h}) \ln\left(1 + \frac{\gamma\bar{h}}{P_0}\right)}. \quad (26.8)$$

Согласно этой формуле, расход воздуха быстро возрастает с ростом теплопотерь в атмосферу и убывает с увеличением теплозапаса воды. В качестве примера в табл. 22 приведены величины теплопотерь в атмосферу, вычисленные по климатическим данным для Ленинградского порта при  $X = 100$  м.

Из таблицы видно, что лед даже небольшой толщины резко сокращает теплопотери в атмосферу. Поэтому при наличии льда требуется меньший расход воздуха и меньшая мощность пневматической аппаратуры. Вторым обстоятельством, которое необходимо иметь в виду, является то, что данный метод можно применять лишь в том случае, когда теплозапас воды в бассейне над температурой замерзания превышает рассчитанную теплоотдачу в атмосферу. При ограниченном теплозапасе иногда можно лишь уменьшить толщину льда, но не поддерживать в течение заданного промежутка времени акваторию свободной ото льда.

Теплопотери с акватории в зависимости от состояния ее поверхности  
(в ккал/см<sup>2</sup> · мес)

H (см)	XI	XII	I	II	III
0	2,5	18,7	29,3	28,0	12,8
5	1,7	7,8	11,3	10,7	6,4
10	1,2	5,1	7,2	6,8	4,1

### § 3. Проблема уничтожения арктического льда

Геологические исследования показывают, что климат Арктики не всегда был суровым. Существовали периоды, когда масса дрейфующих льдов Северного Ледовитого океана существенно сокращалась или вообще исчезала. При этом происходило потепление климата на прилегающих материках.

Выдвигаются различные гипотезы о первопричинах крупных климатических изменений. Но в любом случае наиболее динамичными факторами, обуславливающими характер колебаний климата, являются процессы в атмосфере и гидросфере. Большая роль отводится и влиянию подстилающей поверхности.

Арктические льды оказывают существенное влияние на некоторые климатические характеристики бассейна и окружающей территории. Большая отражательная способность снежно-ледяной поверхности приводит к тому, что большая часть энергии Солнца отражается. В летний период значительная доля поглощенного льдом тепла расходуется не на нагревание океана, а на таяние льда. Это приводит к тому, что Арктический бассейн летом действует как огромный холодильник. Зимой лед препятствует охлаждению океана и ослабляет приток тепла от него в атмосферу.

Кроме таких климатических проявлений, лед отрицательно влияет и на хозяйственную деятельность человека, в частности на развитие судоходства в Арктике. В связи с этим вполне естественна постановка проблемы об уничтожении ледяного покрова Арктики. В настоящее время известны несколько предложений на эту тему. Наибольшую известность получили проекты уничтожения льда, предлагающие для этого использовать либо океаническое тепло [19], либо энергию Солнца [27].

При разработке таких проектов нужно иметь в виду два момента: возможность их осуществления и климатические изменения, которые могут возникнуть в результате их реализации. Существуют мнения как о возможности положительных для деятельности человека изменений климата [19], так и отрицательных

[80, 104]. Д. А. Дрогайцев и В. Н. Степанов [80, 219] отмечают, что повышение температуры воды в Северной Атлантике будет сопровождаться уменьшением осадков и увеличением континентальности климата материка. Флетчер [299] приходит к выводу, что уничтожение льда приведет в субарктических широтах к более холодному лету и теплой влажной зиме. Холодный полярный континентальный воздух зимой будет быстро трансформироваться в морской полярный с высоким содержанием влаги. Общая величина испарения с поверхности Северного Ледовитого океана, по его оценке, достигнет 30 см. Большая часть испаряющейся влаги поступит в атмосферу зимой и при переносах воздуха с моря выпадет в виде снега в гористых районах береговой полосы. При ослабленном таянии летом это приведет к быстрому развитию ледников.

В статье С. П. Качурина [104] высказывается опасение, что повышение температуры в Арктике приведет к таянию льдов вечной мерзлоты и ледников, в результате чего произойдет затопление низменных участков суши и развитие термокаста. Такие различные выводы относительно возможных изменений климата обусловлены степенью учета влияющих факторов при анализе проблемы.

На современном уровне развития гидрометеорологии трудно ожидать проведения количественных оценок возможных климатических изменений в результате искусственного уничтожения льда. Очевидно, основываясь на результатах палеоклиматических исследований, можно составить лишь качественное представление о характере климата. Однако количественные оценки совершенно необходимы при решении вопроса о возможности осуществления проекта.

При разработке своего проекта П. М. Борисов [19] исходил из того, что дрейфующие льды Арктики можно расплавить, повысив температуру атлантических вод, впадающих в Северный Ледовитый океан, и уничтожив поверхностные распресненные воды. Действительно, исследования показывают, что между притоком воды и тепла из Атлантического океана и ледовитостью некоторых арктических морей существует определенная связь: с увеличением притока тепла уменьшается ледовитость [270]. Очень большое влияние на передачу тепла от слоя атлантических вод вверх оказывают поверхностные арктические воды. Приводя к большой плотностной устойчивости, они ослабляют интенсивность турбулентного теплообмена между поверхностью и атлантическими водами, а также препятствуют развитию конвективного перемешивания. Ранее было показано, что в тех случаях, когда осенне-зимняя конвекция распространяется до большой глубины, ледообразование происходит позднее и толщина льда становится меньше. Кроме того, при устойчивой стратификации плотности верхнего слоя моря прогрев воды в летний период про-

исходит в основном лишь до слоя скачка, располагающегося неглубоко. Осенью это тепло быстро расходуется. При малых градиентах плотности воды летний прогрев распространяется глубоко и расходуется в холодный период медленно. Таким образом, наличие распресненного слоя воды способствует образованию и нарастанию льда.)

П. М. Борисов предлагает построить в Беринговом проливе плотину и перекачать поверхностные арктические воды в Берингово море. При этом он предполагает, что стока холодных вод в Атлантический океан не будет, ослабнет термическая трансформация Гольфстрима, в результате чего его температура в январе над порогом Нансена повысится до  $9^{\circ}$  вместо наблюдаемых  $2,5^{\circ}$ .

Проект П. М. Борисова приобрел, как отмечает Е. К. Федоров [231], незаслуженную известность, так как многие его стороны не обоснованы. Наиболее серьезные возражения встречает основное положение проекта о прямотоке атлантической воды через Арктический бассейн. Так, в статьях Д. А. Дрогайцева [80] и Л. Г. Топоркова [229] высказывается опасение, что откачиваться будут в основном холодные глубинные воды и лишь частично атлантические. Более того, Л. Г. Топорков считает, что характер дрейфа поверхностных вод и льдов сохранится, так как он определяется ветровым режимом, а приток атлантических вод является лишь компенсационным течением.

Действительно, проведенный на модели эксперимент [51] показал, что характер циркуляции вод и льдов Арктического бассейна и его водообмен с Атлантическим и Тихим океанами определяются главным образом ветровым режимом над Арктикой. Поэтому при перекачивании воды из Чукотского моря в Берингово поверхностные воды Арктического бассейна под действием тангенциальной силы трения ветра в общих чертах сохранят характер движения. В результате не может возникнуть какого-либо ослабления трансформации и повышения температуры атлантических вод, поступающих в Арктический бассейн. Здесь на глубине они также будут продвигаться к востоку.

Поскольку ветер будет препятствовать движению поверхностных вод к востоку, то дефицит воды, который возникнет в районе Берингова пролива при переброске воды, будет, как отмечается в статьях [80, 229], компенсироваться за счет глубинных вод. Возможно, что это и приведет к некоторому увеличению водообмена с Атлантическим океаном, чтобы компенсировать сток через пролив. Но при этом нужно иметь в виду, что известные в настоящее время колебания притока тепла с водами, составлявшие в последнее столетие 50—60% его величины, хотя и влияют на массу дрейфующих льдов, но не в такой степени, чтобы можно было наметить какую-либо тенденцию к их уничтожению. А так как характер и температура поверхности

Северного Ледовитого океана в общем не меняются, то нет оснований для ожидания какого-то направленного коренного изменения циркуляции атмосферы над Арктикой и изменения дрейфа вод и льдов.

Да и сам П. М. Борисов в своей работе отмечает, что изменения климата за последние 150—200 тыс. лет происходили синхронно по всему земному шару. Поэтому увеличение поступления атлантических вод в Арктический бассейн и исчезновение морских льдов, очевидно, является результатом климатических изменений на всем земном шаре и не может быть обусловлено локальными мероприятиями.

В цикле статей М. И. Будыко [25, 27, 28] выдвигает гипотезу о неустойчивости существующего ледяного покрова Арктики. Он считает, что, уменьшив альбедо дрейфующих льдов на 0,2, можно их в течение нескольких лет растопить, и в Арктике установится режим с теплыми климатическими условиями, который существовал в доледниковое время. К такому же результату может привести повышение температуры Гольфстрима, которое достигается увеличением суммарной радиации, посредством рассеивания облаков над Северной Атлантикой, а также уменьшением испарения путем распространения мономолекулярных пленок [26].

Свою гипотезу М. И. Будыко обосновывает расчетом возможных температур воды и воздуха в Центральной Арктике при акриогенных условиях. Для их определения он использует уравнение баланса тепла для поверхности моря

$$B = \Phi_T + \Phi_H + \Phi_B \quad (27.8)$$

и уравнение трансформации воздушной массы над морем, решение которого принимается им в виде

$$T_1 - T = \varepsilon(T_1 - \vartheta). \quad (28.8)$$

В более поздней работе [286] вместо уравнения (28.8) было использовано эмпирическое выражение, связывающее  $\Phi_T$  с разностью температур воздуха у экватора и на  $80^\circ$  с. ш. Затраты тепла на испарение, турбулентный теплообмен моря с атмосферой и поток тепла между поверхностью моря и нижележащими слоями воды определялись формулами:

$$\Phi_T = c_p \alpha_1 V(\vartheta - T); \quad (29.8)$$

$$\Phi_H = L \alpha_1 V(q_0 - q); \quad (30.8)$$

$$\Phi_B = a(\bar{\vartheta} - \vartheta), \quad (31.8)$$

где  $\bar{\vartheta}$  — средняя годовая температура поверхности воды.

Решение уравнений (27.8) — (31.8) позволяет получить выражения, определяющие температуру воды и воздуха в Арктике при



отсутствии льда в зависимости от измененной величины радиационного баланса и температуры воздуха на некоторой широте. В результате выполненного расчета М. И. Будыко нашел, что в Центральной Арктике средние годовые температуры воды и воздуха оказываются положительными. Даже в зимний период они выше нуля. Он отмечает, что льды будут образовываться зимой только вдоль побережья Азии и Америки в виде полосы шириной до нескольких сот километров. Но эти льды оказываются сравнительно тонкими и полностью тают весной, в результате чего их влияние на отражение коротковолновой радиации остается незначительным.

Вывод о возможности сохранения поверхности Северного Ледовитого океана свободной ото льда при одноразовом искусственном его удалении делает также Л. Р. Ракипова [314]. Она вычислила среднюю зональную температуру воздуха по заданным величинам солнечной постоянной, облачности, альбедо, влажности и вертикальному потоку тепла в океане. Для холодного периода года при отсутствии льда и потока тепла из океана, принятом в соответствии с данными для северной части Атлантического океана равным  $15 \text{ ккал/см}^2$ , температура прилегающего к воде воздуха, по ее расчетам, близка к нулевой (от  $-1^\circ$  на  $70^\circ$  с. ш. до  $-3^\circ$  у Северного полюса). В настоящее время, согласно табл. 4 ее работы, вертикальный поток тепла из океана в холодную половину года на широте  $80^\circ$  составляет  $2,7 \text{ ккал/см}^2$ . К сожалению, Л. Р. Ракипова в своей работе не рассматривает изменения теплозапаса и температуры океана, что позволило бы избежать априорного задания потока тепла из глубины к его поверхности.

В работах [290, 299] делается оценка величин компонентов теплового баланса как поверхности океана, так и системы океан—атмосфера в Арктике при существующих и измененных ледовых условиях. При этом оказывается, что увеличение радиационного баланса при отсутствии льда в Арктике не компенсируется теплопотерями в атмосферу за счет турбулентного теплообмена и испарения, вычисленных по данным Ян-Майена в первой работе. Во второй работе не указаны исходные данные и метод вычисления этих составляющих баланса. Но в обоих случаях они примерно одинаковы. Избыток прихода энергии над расходом должен компенсироваться либо за счет повышения температуры воды, тогда невозможно образование льда, либо, как отмечается в работе [290], турбулентный теплообмен и испарение должны быть больше, чем в настоящее время в центре Норвежского моря.

Таким образом, в оценках возможной температуры поверхности Северного Ледовитого океана при одноразовом уничтожении ледяного покрова не рассматривается влияние стратификации воды на характер вертикального теплообмена в океане. Между тем роль ее, как отмечалось выше, очень велика.

Дадим оценку температуры деятельного слоя океана, принимая во внимание особенность его строения. При этом воспользуемся предложенным М. И. Будыко способом, заменив только уравнение (31.8), которое в нестационарном случае неточно описывает теплообмен.

Действительно, согласно этой формуле, поток тепла направлен в глубь моря, пока температура поверхности воды ниже средней годовой. В естественных же условиях прогрев моря происходит и при отрицательной величине  $(\bar{\vartheta} - \vartheta)$  — в летний период. В осенне-зимний период, когда температура воды становится ниже средней годовой, в соответствии с формулой (31.8) должен происходить прогрев моря. На самом же деле из-за низкой температуры воздуха в этот период наиболее интенсивна отдача тепла океаном в атмосферу.

Будем считать, что все поглощенное морем тепло расходуется на прогрев поверхностного гомогенного слоя. В период охлаждения моря его теплоотдача в атмосферу происходит за счет теплопотерь этого же слоя. Ранее было показано, что такая картина теплообмена между морем и атмосферой более или менее соответствует действительности. При этом формула (31.8) заменяется выражением

$$\Phi_B = c\gamma\bar{h} \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (32.8)$$

уравнение (27.8) — уравнением теплового баланса гомогенного слоя воды толщиной  $\bar{h}$

$$c\gamma\bar{h} \frac{d\vartheta}{dt} = B - \Phi_T - \Phi_H. \quad (33.8)$$

Предполагается, что горизонтальной адвекции тепла не происходит.

Предположим также, что суммарная радиация  $Q$  известна, а противоизлучение атмосферы  $G$  можно представить эмпирическими формулами (12.2) и (14.2), т. е.

$$G = \sigma T_a^4 (r_1 + s\sqrt{e})(1 + CN). \quad (34.8)$$

В таком случае радиационный баланс может быть записан следующим образом

$$B = Q(1 - A) + \sigma\theta^4 \left[ (r_1 + s\sqrt{e})(1 + CN) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{4T}{\theta} \right) - 1 - \frac{4\vartheta}{\theta} \right], \quad (35.8)$$

где  $\theta = 273^\circ$ .

Далее представим удельную влажность воздуха через температуру и относительную влажность известным соотношением

$$q = 0,622 \frac{E_0}{P_0} r e^{\alpha T}. \quad (36.8)$$

На уровне поверхности моря полагается  $r=1$  и  $T=\vartheta$ . Температуру воздуха на периферии океана, согласно М. И. Будыко, зададим в виде

$$T_1 = 0,5(T_{10} + T), \quad (37.8)$$

где  $T_{10}$  — температура воздуха, пересекающего периферию океана с юга.

Подставим в правую часть уравнения (33.8) вместо составляющих баланса их выражения, заменив экспоненту в (36.8) степенным рядом и, ограничившись двумя его первыми членами, а также используя формулы (28.8) и (37.8), придем к дифференциальному уравнению, определяющему  $\vartheta(t)$

$$\frac{d\vartheta}{dt} + \nu \vartheta(t) = b(t), \quad (38.8)$$

где 
$$\nu = \frac{1}{c\gamma\bar{h}} \left\{ 4\sigma\Theta^3 \left[ 1 - (\gamma_1 + s\sqrt{e})(1 + CN) \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right] + \alpha L' + c_p \alpha_1 V - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} (\alpha r L' + c_p \alpha_1 V) \right\};$$

$$b = \frac{1}{c\gamma\bar{h}} \left\{ Q(1 - A) - L'(1 - r) + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} (\alpha r L' + c_p \alpha_1 V) T_{10} + \right. \\ \left. + \sigma\Theta^4 \left[ (\gamma_1 + s\sqrt{e})(1 + CN) \left( 1 + \frac{4}{\Theta} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} T_{10} \right) - 1 \right] \right\};$$

$$L' = 0,622 \frac{E_0}{P_0} \alpha_1 VL.$$

Решение этого уравнения при постоянном значении параметра  $\nu$  известно

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 e^{-\nu t} + \int_0^t b(\xi) e^{-\nu(t-\xi)} d\xi, \quad (39.8)$$

где

$$\vartheta_0 = \vartheta(0).$$

Расчеты температуры поверхностного слоя моря на основании выражения (39.8) приводились по средним месячным значениям  $Q$  для  $80^\circ$  с. ш., взятым из работы [253] и уменьшенным на 20% за счет ослабления эффектов вторичного рассеяния коротковолновой радиации над открытой водой. Параметры эмпирической формулы (34.8) принимались:  $\gamma_1=0,61$ ,  $s=0,06$  и  $C=0,18$ .

Данные  $T_{ю}$  были любезно предоставлены нам М. И. Будыко. Скорость ветра и облачность полагались постоянными и равными соответственно 6 м/сек и 8 баллам. Остальные параметры задавались такими же, как у М. И. Будыко. При расчетах предполагалось, что с апреля, когда для открытой поверхности воды происходит переход от отрицательного теплообмена с атмосферой к положительному, море уже свободно ото льда и гомогенный слой имеет нулевую температуру. С этого момента начинается его прогрев.

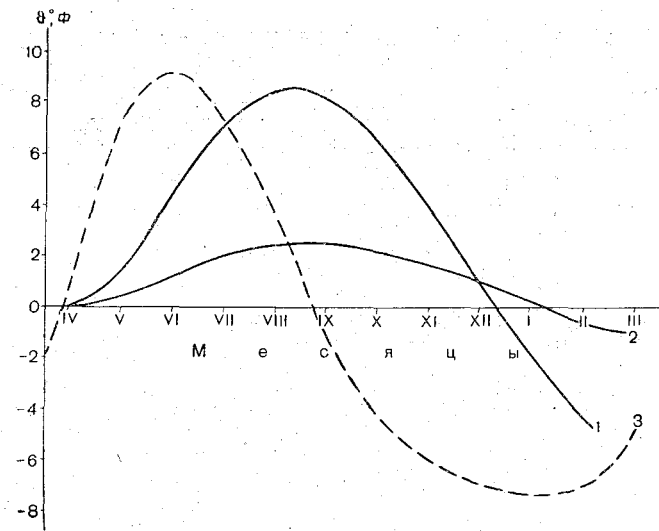


Рис. 45. Температура гомогенного слоя воды.

1 —  $\Phi^{\circ}$  при  $h=25$  м; 2 —  $\Phi^{\circ}$  при  $h=100$  м; 3 —  $\Phi = \text{вс} \eta \dot{h}$  ккал/см<sup>2</sup> · мес.

На рис. 45 приведен вычисленный ход температуры гомогенного слоя для двух случаев:  $h=25$  м и  $h=100$  м. В первом случае весь приобретенный за лето запас тепла к январю израсходуется на теплообмен с атмосферой, и температура воды будет отрицательной. При этом в тот или иной момент, в зависимости от солености, произойдет замерзание моря. Чтобы не происходило образования льда, необходим дополнительный приток тепла.

Во втором случае, когда толщина деятельного слоя большая, переход к отрицательным температурам воды происходит значительно позднее. Однако если рассматривать  $\Phi$  как отклонение от температуры замерзания, то и при  $h=100$  м ледообразование произойдет. Но здесь уже, для того чтобы лед не образовался, требуется меньший дополнительный приток тепла.

Не составляет трудности по температуре воды оценить изменение теплозапаса гомогенного слоя моря за счет летнего про-

грева. Величина его оказывается зависимой от  $h$ , возрастая с увеличением последнего. Но даже при  $h=100$  м солнечное и атмосферное тепло не могут создать в Северном Ледовитом океане такого запаса тепла, который мог бы компенсировать теплопотери в осенне-зимний период и воспрепятствовать образованию льда. Если ледяной покров возникает хотя бы на 2—3 месяца, то, растаяв, он приведет к увеличению распресненности поверхностного слоя моря, которое способствует, как было показано в главе VI, уменьшению  $h$  и более раннему ледообразованию. Поэтому, если не будет дополнительного адвективного притока тепла, то в конце концов в Северном Ледовитом океане и его морях должно наступить то же самое состояние ледового режима, что и в настоящее время.

Возможно, что ослабление водообмена с Атлантическим и Тихим океанами к концу палеогена и последующее распреснение поверхностного слоя Арктического бассейна сыграли не последнюю роль в образовании ледяного покрова Арктики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1948.
2. Аверкиев М. С. О величине района, среднее альbedo которого оказывает влияние на суммарную радиацию в данном пункте. Метеорол. и гидрол., 1964, № 8.
3. Антонов В. С. Влияние речного стока на замерзание устьев рек и прибрежной полосы моря Лаптевых. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 213. Л., 1961.
4. Антонов В. С. Влияние речного стока на ледяной покров арктических водоемов. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 268. Л., 1965.
5. Арсеньева Н. Я. Метод расчета температуры воды деятельного слоя Белого моря. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 86. М., 1965.
6. Баланин В. В., Бородкин Б. С., Мелкопян Г. И. Использование тепла глубинных вод водоемов. Л., «Транспорт», 1964.
7. Берг В. А. Уточнение методики расчета толщины льда на солоноватых и соленых водоемах. Тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та, вып. 10. Л., 1961.
8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
9. Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоздат, 1956.
10. Берлянд М. Е., Берлянд Т. Г. Определение эффективного излучения земли с учетом влияния облачности. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1952, № 1.
11. Берлянд М. Е., Ким Зин Мун. К теории трансформации воздушных масс над морем. Тр. Глав. геофиз. observ., вып. 94. Л., 1960.
12. Беспалов Д. П. О теплообмене между атмосферой и океаном в Центральной Арктике. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та и Глав. геофиз. observ., т. 226. Л., 1959.
13. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления и центров действия атмосферы. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 3.
14. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория климата и долгосрочного прогноза погоды. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 3.
15. Блинова Е. Н. Состояние и ближайшие задачи гидродинамической теории климата и долгосрочного прогноза погоды. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 1.
16. Богородский М. М. Исследование тангенциального трения, вертикального турбулентного теплообмена и испарения в условиях открытого океана. Океанология, 1964, т. IV, вып. 1.
17. Богуславский С. Г. Вертикальный турбулентный обмен в поверхностном слое моря. Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, т. 13. М., 1958.

18. Борисенков Е. П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеорологических полей. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 263. Л., 1963.

19. Борисов П. М. К проблеме коренного улучшения климата. Изв. Всесоюз. географ. о-ва, 1962, т. 94, вып. 4.

20. Бородкин Б. С. Лабораторное исследование кинематики подъема глубинных вод пузырьками воздуха. Тр. Ленингр. ин-та инж. водн. трансп., вып. 22. Л., 1955.

21. Брызгин Н. Н. К вопросу об альбедо поверхности дрейфующих льдов. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», № 1. Л., «Морской транспорт», 1959.

22. Будыко М. И. Турбулентный обмен в нижних слоях атмосферы. Метеорол. и гидрол., 1946, № 2.

23. Будыко М. И. Испарение в естественных условиях. Л., Гидрометеоздат, 1948.

24. Будыко М. И. Тепловой баланс земной поверхности. Л., Гидрометеоздат, 1956.

25. Будыко М. И. О термической зональности Земли. Метеорол. и гидрол., 1961, № 11.

26. Будыко М. И. Некоторые пути воздействия на климат. Метеорол. и гидрол., 1962, № 2.

27. Будыко М. И. Полярные льды и климат. Изв. АН СССР, сер. геогр., 1962, № 6.

28. Будыко М. И. Изменение климата и пути его преобразования. Вестн. АН СССР, 1962, № 7.

29. Будыко М. И. О климатологии теплового баланса. Изв. АН СССР, сер. геогр., 1964, № 1.

30. Будыко М. И., Лайхтман Д. Л., Тимофеев М. П. Определение коэффициента турбулентного обмена в приземном слое воздуха. Метеорол. и гидрол., 1953, № 3.

31. Будыко М. И., Гандин Л. С. Об определении турбулентного теплообмена между океаном и атмосферой. Метеорол. и гидрол., 1966, № 11.

32. Бузуев А. Я., Шестериков Н. П., Тимерев А. А. Альбедо льда в арктических морях по данным наблюдений с самолета. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 20. Л., Гидрометеоздат, 1965.

33. Булгаков Н. П. К вопросу об определении глубины плотностного перемешивания. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1961, № 2.

34. Булгаков Н. П. Исследование конвекции и процесса осеннего охлаждения. Тр. Ин-та океанол., т. 60. М., 1962.

35. Булгаков Н. П. Влияние сжимаемости морской воды на процесс термической конвекции. Вопр. геогр., вып. 62, 1963.

36. Булгаков Н. П. К вопросу о термической устойчивости водных слоев. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 12.

37. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных процессов. Тр. Ин-та физ. атм., т. 2. М., 1958.

38. Васильев Ф. П. О методе конечных разностей для решения однофазной задачи Стефана. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 5.

39. Виноградова О. П. Интенсивность турбулентного обмена и параметр шероховатости морской поверхности. Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, т. 20. М., 1960.

40. Волохонский Л. Ш. Теория промерзания грунта. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 19. Л., 1950.

41. Гаврилин Б. Л., Монин А. С. Модель долгосрочных взаимодействий океана и атмосферы. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 4.

42. Гаврилова М. К. Радиационный климат Арктики. Л., Гидрометеоздат, 1963.

43. Гаевская Г. Н., Кондратьев К. Я., Якушевская К. Е. Лучистый приток тепла и тепловой режим приземного слоя атмосферы. Тр. Всесоюз. науч. метеорол. совещ., т. 6. Л., 1963.

44. Гайгеров С. С., Кастров В. Г. Исследование термической трансформации движущегося воздуха по материалам полетов свободных аэростатов. Тр. Центр. аэролог. обсерв., вып. 6. М., 1952.

45. Гальперин Б. М. О суммарной и рассеянной радиации в Арктике. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 229. Л., 1961.

46. Гандин Л. С., Соловейчик Р. Э. К теории испарения при учете горизонтального перемешивания. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 69, 1957 и вып. 94, 1960.

47. Глаголева М. Г., Скриптунова Л. И. Установление зависимости для расчета и прогноза распределения температуры воды по вертикали. М., Гидрометеозиздат, 1964.

48. Голубева В. Н. Формирование температурного поля в переслоенном море. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 5.

49. Гоптарев Н. П. О влиянии динамических и термических факторов на скорость ветра над морем и на шероховатость морской поверхности. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 51. М., 1960.

50. Гоптарев Н. П. Вертикальное распределение скорости ветра в нижнем слое воздуха у поверхности океана. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 72. М., 1964.

51. Гудкович З. М., Никифоров Е. Г. Исследование природы циркуляции вод Арктического бассейна на модели. Океанология, 1965, т. 5, вып. 1.

52. Гурвич А. С. Спектры пульсаций вертикальной компоненты скорости ветра и их связи с микрометеорологическими условиями. Тр. Ин-та физ. атм., т. 4. М., 1962.

53. Гурвич А. С. Турбулентный поток количества движения при неустойчивой стратификации и условиях, близких к безразличному равновесию. Тр. Ин-та физ. атм., т. 4. М., 1962.

54. Гурвич А. С. Вертикальные профили температуры и скорости ветра в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 1.

55. Гурвич А. С., Цванг Л. Р. О спектральном составе турбулентного потока тепла. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 10.

56. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.

57. Дикон Е. Л. Измерение характеристик турбулентного обмена в нижней атмосфере. В сб.: «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха». М., Изд-во инстр. лит., 1962.

58. Дикон Е. Л., Суинбенк У. К. Соотношение между переносом количества движения и водяного пара. В сб.: «Климатология и микроклиматология». М., изд-во «Прогресс», 1964.

59. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

60. Дмитриев А. А. Опыт наблюдения альбедо в Арктике с привязного аэростата. Тр. Аркт. ин-та, т. 40. М., 1950.

61. Дмитриев А. А. Основные вопросы, возникающие при организации наблюдений на метеорологической вышке. В сб.: «Изучение пограничного слоя атмосферы с 300-метровой метеорологической башни». М., Изд-во АН СССР, 1963.

62. Доронин Ю. П. Трансформация воздушной массы, движущейся над ледяным покровом. В сб.: «Проблемы Арктики», вып. 6. Л., «Морской транспорт», 1959.

63. Доронин Ю. П. К вопросу о нарастании морского льда. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 1. Л., «Морской транспорт», 1959.

64. Доронин Ю. П. Турбулентный теплообмен между ледяным покровом и атмосферой. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та и Глав. геофиз. обсерв., вып. 226. Л., 1959.



65. Доронин Ю. П. О термической трансформации нижнего слоя атмосферы в Арктике. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та и Глав. геофиз. обсерв., вып. 226. Л., 1959.
66. Доронин Ю. П. К расчету весеннего ледотаяния. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та и Глав. геофиз. обсерв., вып. 226. Л., 1959.
67. Доронин Ю. П. Влияние начального теплозапаса льда на некоторые последующие процессы. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 8. Л., «Морской транспорт», 1961.
68. Доронин Ю. П. К методике расчета радиационного баланса снежно-ледяного покрова в Арктике. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 229. Л., 1961.
69. Доронин Ю. П. Турбулентный теплообмен между водой и ледяным покровом. Океанология, 1965, т. 1, вып. 5.
70. Доронин Ю. П. Расчет потоков тепла при создании незамерзающих майн. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 12. Л., «Морской транспорт», 1963.
71. Доронин Ю. П. Расчет стаяния льда при искусственном изменении альбедо. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 13. Л., «Морской транспорт», 1963.
72. Доронин Ю. П. Численный метод расчета толщины и температуры льда. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 14. Л., «Морской транспорт», 1963.
73. Доронин Ю. П. Методика расчета толщины и температуры льда. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 267. Л., 1964.
74. Доронин Ю. П. Приближенный расчет конвективного перемешивания в верхних слоях моря. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 271. Л., 1964.
75. Доронин Ю. П., Грушкина А. С. К учету влияния термических факторов на сплоченность льда в массивах. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 271. Л., 1964.
76. Доронин Ю. П., Сметанникова А. В. Влияние метеорологических факторов на сроки ледообразования. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 257. Л., 1967.
77. Доронин Ю. П., Сметанникова А. В. Метод расчета некоторых гидрологических элементов поверхностного слоя моря в осенний период. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 277. Л., 1966.
78. Доронин Ю. П., Колтаков Ю. Н. Влияние теплообмена с океаном на некоторые характеристики термодинамики атмосферы при краткосрочном прогнозе. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 281. Л., 1967.
79. Дрогайцев Д. А. Взаимодействие арктических морей с атмосферой. М.—Л., Гидрометеоздат, 1949.
80. Дрогайцев Д. А. Потеплеет ли Север? Природа, 1960, № 6.
81. Доброклонский С. В. Турбулентная вязкость в поверхностном слое моря и волнении. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 7.
82. Дубровин Л. В. Наиболее простой и точный способ расчета коэффициента турбулентности в приземном слое (сб. работ Куйбышевск. гидрометеорол. обсерв.), вып. 2. Л., 1965.
83. Жуков Л. А. Развитие охлаждения верхнего слоя Атлантического океана в осенние месяцы МГГ. В сб.: «Исследование северной части Атлантического океана». Тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та, вып. 16. Л., 1962.
84. Жуков Л. А. Расчет переноса вод и изменений температуры и солености верхнего слоя Атлантического океана в осенние месяцы МГГ. Мат-лы Второй конференции по проблеме: «Взаимодействие атмосферы и гидросферы в северной части Атлантического океана». Л., изд. Ленингр. гос. ун-та, 1964.
85. Зверев А. А. Морские гидрологические прогнозы. Л., «Морской транспорт», 1961.
86. Зилитинкевич С. С. Некоторые закономерности пространственно-временного распределения метеорологических элементов в приземном слое

- нестационарного воздушного потока. Тр. Глав. геофиз. обсерв. и Укр. науч.-исслед. гидрометеорол. ин-та, вып. 144/40. Л., 1963.
87. Зубов Н. Н. Льды Арктики. М., Изд-во Главсевморпути, 1945.
88. Зубов Н. Н. Океанологические таблицы. Л., Гидрометеоиздат, 1957.
89. Иванова З. С. Влияние изменения коэффициента турбулентного обмена на распространение температурных волн по вертикали в море. Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, т. 13. М., 1958.
90. Иванов-Францкевич Г. Н. Вертикальная устойчивость водных слоев как важная океанологическая характеристика. Тр. Ин-та океанол., т. 7. М., 1953.
91. Инструкция по оценке качества методов и оправдываемости морских гидрологических прогнозов. Л., Гидрометеоиздат, 1965.
92. Ипатьев Д. С. Результаты вычисления теплопроводности морского льда. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 9. Л., «Морской транспорт», 1961.
93. Каган Б. А. О методе расчета глубины слоя летнего прогревания в море. В сб.: «Исследование северной части Атлантического океана», вып. 1. Л., изд. Ленингр. гос. ун-та, 1961.
94. Каган Б. А. К теории расчета температуры деятельного слоя моря. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 107. Л., 1961.
95. Каган Б. А. К вопросу о параметре шероховатости морской поверхности. В сб.: «Исследование северной части Атлантического океана». Тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та, вып. 16, Л., 1962.
96. Каган Б. А. О термодинамическом взаимодействии в системе море—лед—атмосфера. Тр. Глав. геофиз. обсерв. и Укр. науч.-исслед. гидрометеорол. ин-та, вып. 144/40. Л., 1963.
97. Каган Б. А. Использование квазистационарной модели взаимодействия пограничных слоев атмосферы и океана для расчета воды и течений в Северной Атлантике. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 8.
98. Каган Б. А., Строкина Л. А. К вопросу о годовом ходе коэффициента, входящего в формулы для расчета испарения и теплообмена вода—воздух. В сб.: «Исследование северной части Атлантического океана». Тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та, вып. 16. Л., 1962.
99. Каган Б. А., Утина З. М. К теории гидродинамического взаимодействия моря и атмосферы. Океанология, 1963, № 2.
100. Казанский А. Б. О критическом числе Ричардсона. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана. 1965, т. 1, № 8.
101. Казанский А. Б., Монин А. С. О турбулентном режиме в приземном слое воздуха при неустойчивой стратификации. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1958, № 6.
102. Каракаш А. И. Предсказание сроков наступления весенних и осенних явлений в юго-восточной части Баренцева моря. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 76. М., 1958.
103. Качурин Л. Г. Расчет переохлаждения воды подо льдом и скорости роста льда в водоемах с учетом действительной температуры фронта кристаллизации. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 10.
104. Качурин С. П. Геологические загадки Арктики и вопрос об искусственном ее отоплении. Очерки по истории геологических знаний, т. 12. М., Изд-во АН СССР, 1963.
105. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М., Гостехиздат, 1957.
106. Китайгородский С. А. К теории турбулентного перемешивания в море в связи с расчетом толщины верхнего изотермического слоя. Тр. Ин-та океанол., т. 52. М., 1961.
107. Китайгородский С. А. О мелкомасштабной турбулентности в поверхностном слое моря. Тр. Ин-та океанол., т. 52. М., 1961.
108. Китайгородский С. А., Волков Ю. А. О параметре шероховатости морской поверхности и расчете турбулентных потоков количества

движения в приводном слое атмосферы. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 9.

109. Китайгородский С. А., Волков Ю. А. О расчете турбулентных потоков тепла и влаги в приводном слое атмосферы. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 12.

110. Климович В. М. Параметр шероховатости и коэффициент турбулентности над водной поверхностью бухты Диксон. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 8. Л., «Морской транспорт», 1961.

111. Ковалева Е. Д. О расчете эффективного излучения земной поверхности и противоизлучения атмосферы. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 27. Л., 1951.

112. Колесников А. Г. К теории нарастания льда на поверхности моря. Тр. Науч.-исслед. учрежд. ГУГМС, сер. V, вып. 12. Л., 1946.

113. Колесников А. Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта. Докл. АН СССР, 1952, т. 82, № 6.

114. Колесников А. Г. Формирование температуры моря в период осеннего охлаждения. Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, т. 4. М., 1954.

115. Колесников А. Г. Некоторые результаты прямого определения интенсивности турбулентного обмена в море. В сб.: «Некоторые пробл. и рез-ты океанол. исслед.». М., Изд-во АН СССР, 1959.

116. Колесников А. Г. Вертикальный турбулентный обмен в устойчиво стратифицированном море. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 11.

117. Колесников А. Г., Мартынов Г. А. О расчете глубины промерзания и оттаивания грунтов. Мат-лы по лаборат. исслед. мерзл. грунт., сб. 1. М., Изд-во АН СССР, 1953.

118. Кондратьев К. Я. Некоторые вопросы лучистого теплообмена. Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, сер. физ., вып. 7, 1949.

119. Кондратьев К. Я. Лучистая энергия солнца. Л., Гидрометеоздат, 1954.

120. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. Л., Гидрометеоздат, 1956.

121. Коновалов И. М. Приближенная теория подъема глубинных вод пузырьками воздуха. Тр. Ленингр. ин-та инж. водн. трансп., вып. 18. Л., 1951.

122. Константинов А. Р. Испарение в природе. Л., Гидрометеоздат, 1963.

123. Коптев А. П. Альbedo облаков, воды и снежно-ледяной поверхности. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 229. Л., 1961.

124. Коптев А. П., Пятненко Б. А. О поглощении и проникновении солнечной радиации в снег и лед в Арктике. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 10. Л., «Морской транспорт», 1962.

125. Кравченко И. М. О профиле ветра в приземном слое. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, № 3.

126. Кудрявая К. И. Морские гидрологические прогнозы. Л., Гидрометеоздат, 1951.

127. Кудрявцев Н. Ф. Ветровые волны и слой скачка плотности воды в Южном Ледовитом океане. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 21. Л., Гидрометеоздат, 1965.

128. Кузнецов О. А. К вопросу об аэродинамической шероховатости поверхности моря. Тр. Ин-та океанол., т. 72. М., 1963.

129. Кузьмин П. П. Исследование параметров формул снеготаяния. Тр. Гос. гидрол. ин-та, вып. 32. Л., 1951.

130. Кузьмин П. П. Физические свойства снежного покрова. Л., Гидрометеоздат, 1957.

131. Лайхтман Д. Л. Профиль ветра и обмен в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1944, т. 8, № 1.

132. Лайхтман Д. Л., Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. М., Гостехиздат, 1949.

133. Лайхтман Д. Л. Современное состояние и основные задачи физики приземного слоя. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 53. Л., 1955.
134. Лайхтман Д. Л. Определение суммарного испарения и теплоотдачи с небольших водоемов. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 53. Л., 1955.
135. Лайхтман Д. Л. Закономерности физических процессов пограничного слоя атмосферы в Арктике. В сб.: «Современные проблемы метеорологии приземного слоя воздуха». Л., Гидрометеоздат, 1958.
136. Лайхтман Д. Л. Постановка задачи о стационарном строении пограничного слоя атмосферы. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 94. Л., 1960.
137. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоздат, 1961.
138. Лайхтман Д. Л. Динамика пограничных слоев атмосферы и моря с учетом взаимодействия и нелинейных эффектов. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1966, т. 2, № 10.
139. Лайхтман Д. Л., Доронин Ю. П. Коэффициент турбулентного обмена в море и оценка потока тепла из океанических вод. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та и Глав. геофиз. обсерв., т. 226. Л., 1959.
140. Лайхтман Д. Л., Каган Б. А. Схема предвычисления гидрологических характеристик на поверхности моря. Метеорол. и гидрол., 1965, № 5.
141. Лайхтман Д. Л., Каган Б. А., Тимонов В. В. Пути изучения взаимодействия океана и атмосферы. Научная конференция по проблеме «Общая циркуляция атмосферы Земли». М., 1966.
142. Лайхтман Д. Л., Утина З. М. Влияние макрометеорологических условий на строение пограничного слоя в атмосфере. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 107. Л., 1961.
143. Лаппо С. С. Исследование эмпирических формул нарастания толщины льда. Океанология, 1962, т. 2, вып. 1.
144. Линейкин П. С. Теория расчета температуры воды в период охлаждения. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 21. М., 1952.
145. Линейкин П. С. Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря. Л., Гидрометеоздат, 1957.
146. Лутковский С. В. К вопросу о формировании температуры моря на мелководье в предледоставный период. Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, т. 7. М., 1956.
147. Лутковский С. В. Роль ветра в формировании ледового покрова в море. Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, т. 12. М., 1958.
148. Лутфулин И. З. Новые методы предвычисления метеорологических полей. Л., Гидрометеоздат, 1966.
149. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Гостехиздат, 1952.
150. Мальмгрен Ф. О свойствах морского льда (под ред. проф. В. В. Шулейкина). Л., Гидрометкомитет СССР, 1930.
151. Мамаев О. И. О влиянии стратификации на вертикальное турбулентное перемешивание в море. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1958, № 7.
152. Мамаев О. И. Упрощенная зависимость между плотностью, температурой и соленостью морской воды. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 2.
153. Марчук Г. И. О роли исследований физики атмосферы и океана для прогноза погоды. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 1.
154. Маршудова М. С. Основные закономерности радиационного баланса подстилающей поверхности и атмосферы в Арктике. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 229. Л., 1961.
155. Маршудова М. С., Черниговский Н. Т. Элементы радиационного режима Советской Арктики в период МГГ и МГС. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 266. Л., 1964.
156. Машкович С. А. Теоретическая модель для изучения формирования общей циркуляции атмосферы и климатических полей метеозлементов. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 78. Л., 1958.
157. Машкович С. А. К гидродинамической теории атмосферных макропроцессов. Тр. Центр. ин-та прогн. вып. 93. Л., 1960.

158. Машкович С. А. К учету неадиабатических воздействий при численном краткосрочном прогнозе давления. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 126. Л., 1963.

159. Меламед В. Г. Сведения задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1958, № 7.

160. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Тр. Геофиз. ин-та, вып. 24. М., 1954.

161. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I. Механика турбулентности. М., «Наука», 1965.

162. Морс. Развитие идей и наблюдений, связанных с изучением морей. Перев. с англ. Л., Гидрометеиздат, 1965.

163. Мостахов С. Е. К методике расчета турбулентного потока тепла. В сб.: «Тепло и массообмен в мерзлых почвах и горных породах». М., Изд-во АН СССР, 1961.

164. Мясников М. В. Опыт использования солнечной радиации для нужд водного транспорта. Тр. III Всесоюз. гидролог. съезда, т. 3. Л., Гидрометеиздат, 1959.

165. Нагурный А. П. Опыт определения приземного поля давления на ЭЦВМ «Урал-2» для полярного района. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 281. Л., 1967.

166. Назинцев Ю. Л. Экспериментальное определение теплоемкости и теплопроводности морского льда. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 1. Л., «Морской транспорт», 1959.

167. Назинцев Ю. Л. Некоторые данные к расчету тепловых свойств морского льда. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 267. Л., 1963.

168. Немайес Дж. Синоптические и климатические проблемы, связанные с общей циркуляцией над Арктикой, и общая циркуляция атмосферы. Сб. переводных статей. М., «Прогресс», 1964.

169. Никифоров Е. Г. Об определении вида волн конечной амплитуды по заданному давлению на их поверхности и некоторые результаты исследования связей ветровых волн и течений. В сб.: «Методика океанологических исследований». Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 210. Л., 1961.

170. Николаев Ю. В. К вопросу о таянии льдов в разводьях. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 12. Л., «Морской транспорт», 1963.

171. Николаев Ю. В. К теории трансформации воздушных масс над морем. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 13. Л., «Морской транспорт», 1963.

172. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Л., Гидрометеиздат, 1955.

173. Огнева Т. А. Особенности метеорологических условий приводного слоя воздуха. Тр. Всесоюз. науч. метеорол. совещ., т. 7. Л., 1963.

174. Огура И. Зависимость коэффициента турбулентной диффузии от числа Прандтля. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

175. Озмидов Р. В. Теория турбулентности и турбулентность в море. Тр. Ин-та океанол., т. 52. М., 1961.

176. Озмидов Р. В. О турбулентном теплообмене в устойчиво стратифицированном море. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 8.

177. Орленко Л. Р., Утина З. М. Расчет намерзания и таяния многолетнего льда. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 127. Л., 1962.

178. Панов В. В. Опыт определения параметра шероховатости поверхности моря и коэффициента турбулентного теплообмена над водной поверхностью. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 256. Л., 1961.

179. Панов В. В. Об анализе формирования температуры деятельного слоя в юго-западной части Карского моря методом приближенного расчета. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 248. Л., 1963.

180. Парфенова Л. В. К вопросу о подобии профилей метеорологических элементов. Тр. Глав. геофиз. observ., вып. 39. Л., 1953.
181. Перепелкина А. В. Об определении турбулентного потока тепла. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1959, № 7.
182. Песчанский И. С. Солнце и лед. Природа, 1960, № 7.
183. Песчанский И. С. Ледоведение и ледотехника. Л., Гидрометеоздат, 1967.
184. Пивоваров А. А. О влиянии проникающей в море солнечной радиации на формирование температуры воды. Океанол., 1963, т. 3, № 2.
185. Погосян Х. П. Общая циркуляция атмосферы. Л., Гидрометеоздат, 1959.
186. Погосян Х. П. Сезонные и внутрисезонные изменения температуры, геопотенциала и атмосферной циркуляции в стратосфере. Рез-ты исслед. по междунар. геофиз. проектам. Метеорол., 1965, № 10.
187. Пристли С. Х. Турбулентный перенос в приземном слое атмосферы. Перев. с англ. Л., Гидрометеоздат, 1964.
188. Пурганский В. С. К учету влияния неадиабатических факторов при краткосрочном прогнозе полей геопотенциала на нижних уровнях атмосферы. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 126. Л., 1963.
189. Пурганский В. С. Прогноз приземного давления и геопотенциала поверхности 850 мб по неадиабатической модели атмосферы. Метеорол. и гидрол., 1964, № 10.
190. Пятненко Б. А. Влияние альбедо на приход суммарной радиации в Арктике. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 217. Л., 1959.
191. Ридель Е. А. О коэффициенте обмена в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1959, № 4.
192. Родэ Б. Зависимость между температурой воздуха и образованием льда на Балтийском море. В сб.: «Исслед. мор. льда за рубежом». Л., Гидрометеоздат, 1962.
193. Родэ Б. Исследование связи между распространением льда, температурами воздуха и воды на поверхности моря в районе Аландских островов. В сб.: «Исслед. мор. льда за рубежом». Л., Гидрометеоздат, 1962.
194. Рубинштейн Л. И. К вопросу об единственности решения одномерной задачи Стефана в случае однофазного начального состояния теплопроводящей среды. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 3.
195. Рубинштейн Л. И. Об одном варианте задачи Стефана. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 3.
196. Руководство по градиентным наблюдениям и определению составляющих теплового баланса. Л., Гидрометеоздат, 1964.
197. Сабинин К. Д. К вопросу о влиянии снежного покрова и тепла воды на нарастание льда. Океанол., 1963, т. 3, вып. 1.
198. Сабинин К. Д. О чисто термической подледной конвекции и особенностях ее расчета. «Вопр. геогр.», сб. 62. М., Географгиз, 1963.
199. Сабинин К. Д., Кукса В. И. К вопросу о зимней вертикальной циркуляции в реальных условиях. Вест. Моск. гос. ун-та, сер. биол., почв., геолог., геогр., 1957, № 3.
200. Савельев Б. А. Теплоемкость и термическое расширение морского льда. Мат-лы совещ. по изуч. льда и снега. М., Изд-во АН СССР, 1951.
201. Савельев Б. А. Теплопроводность морского льда. Мат-лы совещ. по изуч. льда и снега. М., Изд-во АН СССР, 1951.
202. Савельев Б. А. Строение, состав и свойства ледяного покрова морских и пресных водоемов. М., изд-во Моск. гос. ун-та, 1963.
203. Сакипов З. Б. Об отношении коэффициента турбулентного обмена импульса и тепла в свободной турбулентной струе. Изв. АН Казах. ССР, сер. энерг., 1961, вып. 1 (19).
204. Самойленко В. С. Современная теория океанического испарения и ее практическое применение. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 21 (33). М., 1952.

205. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
206. Саускан Е. М. Прогноз осенних ледовых явлений на Беринговом море. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 76. М., 1958.
207. Семенов В. Г. Роль поверхности океана в формировании блокирующих антициклонов. Метеорол. и гидрол., 1960, № 6.
208. Семенов В. Г. Влияние Атлантического океана на режим температуры и осадков на ЕТС. М., Гидрометеиздат, 1960.
209. Семенов В. Г., Шушевская Г. М. Сезонное влияние подстилающей поверхности на атмосферу. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 115. М., 1962.
210. Сендерихина И. Л. О соотношениях между коэффициентами турбулентного переноса импульса тепла и вещества в приземном слое атмосферы. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 121. Л., 1961.
211. Сироткин Я. А. К трансформации движущихся воздушных масс. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 43. М., 1956.
212. Скорик И. Л. К вопросу об использовании некоторых веществ для ускорения разрушения льда. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 218. Л., 1960.
213. Скриптунова Л. И. О роли теплового баланса поверхности в режиме температуры воды в северной части Атлантического океана. Метеорол. и гидрол., 1957, № 7.
214. Сметанникова А. В. Теплообмен между океаном и атмосферой в Арктике в зимний период. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 229. Л., 1961.
215. Снопков В. Г. Определение коэффициента турбулентного перемешивания в приземном слое над морской поверхностью. Тр. Ин-та океанол. т. 72. М., 1963.
216. Сорокина А. И., Грачева В. П. Определение характеристик термического и турбулентного режима атмосферы над морем. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 38. М., 1957.
217. Сперанская А. А. О влиянии устойчивости на характеристики вертикального турбулентного обмена в пресном водоеме. Метеорол. и гидрол., 1966, № 8.
218. Спичкин В. А. Учет альбедо при расчетах таяния льда. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 269. Л., 1966.
219. Степанов В. Н. О возможности и целесообразности уничтожения арктических льдов. В сб.: «Проблемы Севера», вып. 7. М., Изд-во АН СССР, 1963.
220. Суинбенк У. К. Турбулентный обмен в нижних слоях атмосферы. В сб.: «Климатология и микроклиматология». М., «Прогресс», 1964.
221. Тараканов Г. Г. К вопросу об изменении скорости ветра при переходе с суши на водную поверхность. Тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та, вып. 8. Л., 1958.
222. Тейлор Р. Дж. Вид профиля ветра в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 12.
223. Тимонов В. В. О постановке исследований по проблеме океан—атмосфера. В сб.: «Второй междунар. океаногр. конгр. 1966 г.» (тез. докл.). М., «Наука», 1966.
224. Тимофеев М. П. О методике определения компонентов теплового баланса подстилающей поверхности. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 27. Л., 1951.
225. Тимофеев М. П. Тепловой баланс водоемов и методы определения испарения. В сб.: «Современная проблема метеорологии приземного слоя воздуха». Л., Гидрометеиздат, 1958.
226. Тимофеев М. П. Применение метода теплового баланса для определения испарения с поверхности водоемов. Тр. III Всесоюз. гидрол. съезда, т. 3. Л., Гидрометеиздат, 1959.
227. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Л., Гидрометеиздат, 1963.

228. Тимофеев В. Т., Панов В. В. Косвенные методы выделения и анализа водных масс. Л., Гидрометеоздат, 1962.
229. Топорков Л. Г. Можно ли уничтожить ледяной покров Северного Ледовитого океана? Природа, 1961, № 11.
230. Туранов И. М. Результаты наблюдений над стаиванием льда в бухте Диксон в 1957 г. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 248. Л., 1963.
231. Федоров Е. К. Активное воздействие на метеорологические процессы. Вест. АН СССР, 1962, вып. 9.
232. Фейгельсон Е. М. О некоторых возможностях исследования теплообмена и влагообмена в атмосфере. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 1.
233. Фельзенбаум А. И. Косвенный метод определения коэффициента турбулентного обмена в мелком море. Тр. Ин-та океанол., т. 19. М., 1956.
234. Фрязинов И. В. О задаче Стефана для неоднородных сред. Ж. вычисл. мат. и математ. физ., 1961, т. 1, № 5.
235. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
236. Цванг Л. Р. Измерения турбулентных потоков тепла и спектров температурных пульсаций. В сб.: «Атмосферная турбулентность». Тр. Ин-та физ. атм., т. 4. М., 1962.
237. Цейтин Г. Х. Некоторые вопросы трансформации воздушных масс и теории испарения. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 71. Л., 1957.
238. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы в нестационарных условиях. Ч. I. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 107, Л., 1961.
239. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы при нестационарных условиях, ч. II. Тр. Глав. геофиз. обсерв. и Укр. науч.-исслед. гидрометеорол. ин-та, вып. 144/40. Л., 1963.
240. Цейтин Г. Х., Орленко Л. Р. Стационарное распределение ветра, температуры и турбулентного обмена в пограничном слое атмосферы при различных состояниях устойчивости. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 94. Л., 1960.
241. Цикунов В. А. Об одном методе определения коэффициента турбулентного обмена в верхнем слое моря. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 33 (45). М., 1956.
242. Цикунов В. А. Упрощенная теория конвективного перемешивания в верхних слоях моря. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 42. М., Гидрометеоздат, 1958.
243. Цикунов В. А. О расчете вертикального распределения температуры и солености в период охлаждения моря. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 47. М., 1959.
244. Цуриков В. Л. Развитие идеи Н. Н. Зубова о весеннем нарастании морского льда. «Вопросы географии», сб. 62. М., Географгиз, 1963.
245. Цуриков В. Л. Анализ нарастания морского льда под снежным покровом. Океанология, 1963, т. 3, вып. 3.
246. Цуриков В. Л., Церерина М. И. Обзор иностранных исследований морского льда. Тр. Гос. океаногр. ин-та, вып. 76. М., 1964.
247. Чарни Ж. Об общей циркуляции атмосферы. В сб.: «Атмосфера и океан в движении». М., Изд-во иностр. лит., 1963.
248. Черниговский Н. Т. Опыт определения радиационного баланса Карского моря. Проблемы Арктики, 1940, № 3.
249. Черниговский Н. Т. Опыт определения радиационного баланса арктических морей. Проблемы Арктики, 1940, № 5.
250. Черниговский Н. Т. Опыт использования суммарной радиации в целях ускорения таяния снега и льда. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 62. Л. 1954.
251. Черниговский Н. Т. Некоторые характеристики радиационного климата Центральной Арктики. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 229. Л., 1961.
252. Черниговский Н. Т. Радиационные свойства ледяного покрова Центральной Арктики. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 253. Л., 1963.



253. Черниковский Н. Т., Маршунова М. С. Климат Советской Арктики (радиационный режим). Л., Гидрометеоздат, 1965.
254. Чжоу Мин-Юй. Оптимальные периоды осреднения при изменениях метеорологических полей. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, 1966, т. 2, № 5.
255. Швеец М. Е. Приближенная теория нарастания льда. Метеорол. и гидрол., 1949, № 5.
256. Швеец М. Е. О приближенном методе решения некоторых задач геофизики и аэрогидромеханики. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 19. Л., 1950.
257. Швеец М. Е., Шнееров Б. Е., Колоскова Л. Ф. Об использовании результатов радиационных измерений со спутников в модели крупномасштабных атмосферных движений. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 166. Л., 1964.
258. Шебалин О. Д. Турбулентная вязкость в мелководном море, обусловленная волнением. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 4.
259. Шепелевский А. А. Скорость нарастания пресного льда при заданной температуре верхней его поверхности. Проблемы Арктики, 1940, № 10.
260. Шереметевская О. И. Расчеты изменений температуры воды в теплую часть года. Тр. Центр. ин-та прогн., вып. 91. М., 1959.
261. Шерхаг Р. Проблемы общей циркуляции. В сб.: «Общая циркуляция атмосферы». М., «Прогресс», 1964.
262. Шестериков Н. П. Некоторые особенности нарастания припайного льда в районе Мирного. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 13. Л., «Морской транспорт», 1963.
263. Шестериков Н. П. О некоторых закономерностях изменения альbedo льда в летний период. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 14. Л., «Морской транспорт», 1963.
264. Шестериков Н. П. К методике расчета таяния льда. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 15. Л., «Транспорт», 1964.
265. Шестериков Н. П. Поглощение солнечной радиации морским льдом. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 257. Л., 1967.
266. Шехтер Ф. Н. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 22. Л., 1950.
267. Шехтер Ф. Н. Влияние радиационного теплообмена на температурный режим приземного слоя атмосферы. Тр. Всесоюз. науч. метеорол. совещ., т. 7. Л., Гидрометеоздат, 1963.
268. Шехтер Ф. Н., Цейтин Г. Х. Глубина промерзания и температура почвы в зимнее время. Тр. Глав. геофиз. обсерв., вып. 53. Л., 1955.
269. Шляхов В. И. Исследование баланса длинноволновой радиации в тропосфере. Л., Гидрометеоздат, 1956.
270. Шпайхер А. О., Янес А. В. К вопросу о проявлении взаимосвязи вод Северной Атлантики и макросиноптических процессов. Тр. Аркт. и антаркт. ин-та, т. 269. Л., 1966.
271. Штокман В. Б. Вертикальное распределение тепловых волн в море и косвенные методы определения коэффициента турбулентности. Тр. Ин-та океанол. АН СССР, т. 1. М., 1946.
272. Шулейкин В. В. Физика моря. М., Изд-во АН СССР, 1953.
273. Шулейкин В. В. Единая характеристика турбулентной вязкости для морских волн и течений. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 4.
274. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Л., Гидрометеоздат, 1963.
275. Яковлев Г. Н. Турбулентный теплообмен ледяного покрова с атмосферой в Центральной Арктике. В сб.: «Проблемы Арктики», вып. 2. Л., «Морской транспорт», 1957.
276. Янес А. В. О расчете тепловых потоков в ледяном покрове. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 1. Л., «Морской транспорт», 1959.
277. Янес А. В. Таяние снега и льда в Центральной Арктике. В сб.: «Проблемы Арктики и Антарктики», вып. 11. Л., «Морской транспорт», 1962.
278. A d e m J. On the theory of the general circulation of the atmosphere. Tellus, 1962, vol. 14, № 1.

279. Adem J. Preliminary computations on the maintenance and prediction of seasonal temperatures in the troposphere. *Month. Weath. Rev.*, 1963, vol. 91, № 8.
280. Adem J. On the physical basis for the numerical prediction of monthly and seasonal temperatures in the troposphere-ocean-continent system. *Month. Weath. Rev.*, 1964, vol. 92, № 3.
281. Aihara M. Growth of the baroclinic disturbance and asymptotic approach toward finite amplitude steady state. *J. Met. Soc. Japan*, 1964, vol. 42, № 3.
282. Akio M. On the variation of the vertical thermal structure. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 1965, vol. 20, № 6.
283. Berkofsky L. The mathematical equivalence of multilevel and vertically integrated numerical forecasting models. *Tellus*, 1963, vol. 15, № 4.
284. Bilello M. Formation growth and decay of sea — ice in Canadian Arctic archipelago. *Arctic*, 1961, vol. 14, № 1.
285. Bjerkness J. Atlantic air-sea interaction. *Advances Geophys.*, 1964, vol. 10.
286. Budyko M. I. Polar ice and climate. *Proceedings of the Symposium on the arctic heat budget and atmospheric circulation. California*, 1966.
287. Businger J. A generalization of the mixing length concept. *J. Meteorol.*, 1959, vol. 16, № 5.
288. Crary A. Arctic ice island and ice shelf studies. *Arctic*, 1960, vol. 13, № 1.
289. Deacon E. Aerodynam roughness of the sea. *J. Geophys. Res.*, 1962, vol. 67, № 8.
290. Donn W. L. and Shaw D. M. The heat budgets of an ice covered Arctic ocean. *J. Geophys. Res.*, 1966, vol. 71, № 4.
291. Döös B. The influence of exchange of sensible heat with the earth's surface on the planetary flow. *Tellus*, 1962, vol. 14, № 2.
292. Doronin Yu. P. Characteristics of the heat exchange. *Proceedings of the Symposium on the Arctic heat budget and atmospheric circulation. California*, 1966.
293. Elliott W. An hypothesis for the diabatic mixing length. *J. Meteorol.*, 1960, vol. 17, № 6.
294. Elliott W. The height variation of vertical heat flux near the ground. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 1964, vol. 90, № 385.
295. Ellison T. Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane. *J. Fluid Mech.*, 1957, vol. 2, pt. 5.
296. Ellison T. and Turner J. Mixing of dense fluid in a turbulent pipe flow. Part 2. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 2, pt. 4.
297. Fjeldstad J. Wärmeleitung in Meere. *Geophysik publ.*, 1933.
298. Fjeldstad J. Eddy viscosity, current and wind. *Astrophysika Norvegica*, 1955, vol. 5, № 5.
299. Fletcher J. O. The Arctic heat budget and atmospheric circulation. *Proceedings of the Symposium on the Arctic heat budget and atmospheric circulation. California*, 1966.
300. Frankenberger E. Der Austauschkoefizient über Land. *Beitr. Phys. Atmosph.*, 1958, Bd. 30, H. 2—3.
301. Friedman A. Free boundary problems for parabolic equations. I. Melting of solids. *J. Math. and Mech.*, 1959, vol. 8, № 4.
302. Fukutomi T. Study of sea — ice (The 10th report). On the relation between the increasing rate of ice-thickness in static fresh water and periodic change of air temperature. *Low Temperat. Sci.*, 1948, № 4.
303. Gambo K. The role of sensible and latent heat in the baroclinic atmosphere. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 1963, vol. 41, № 4.
304. Holtmark B. Insulating affect of a snow cover on the growth of young sea-ice. *Arctic*, 1955, vol. 8, № 1.
305. Kynner W. An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem. *J. Math. and Mech.*, 1959, vol. 8, № 4.

306. Lotkin M. The calculation of heat flow in melting solids. *Quart. Appl. Math.*, 1960, vol. 18, № 1.
307. Martin D. The relation between non-adiabatic heating and the errors of numerical forecasts. Proceedings of the International Symposium on numerical weather prediction in Tokyo, 1960, Meteorol. Soc. of Japan, Tokyo, 1962.
308. Matsumoto S. A numerical experiment using five-level geostrophic model. Proceedings of the International Symposium on numerical weather prediction in Tokyo 1960. Meteorol. Soc. of Japan, Tokyo, 1962.
309. Mintz Y. The seasonal variations in a numerical general circulation experiment. *Динамика крупномасштабных процессов. Тр. Междунар. симпоз. М., «Наука», 1965.*
310. Mintz Y. and Arakawa A. A numerical circulation experiment in a hemisphere with continents and oceans. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1963, vol. 44, № 1.
311. Panofsky H. An alternative derivation of the diabatic wind profile. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 1961, vol. 87, № 371.
312. "Polynya" may be key to year-round shipping in hitherto frozen waters and opening up of harbors along the fourth coast line. *Canadian Shipping and Marine Engineering News*, 1960, vol. 31, № 6.
313. Priestley C. Turbulent transfer in the lower atmosphere. Chicago Univ., 1959.
314. Rakupova L. R. The influence of the arctic ice cover on the zonal distribution of atmospheric temperature. Proceedings of the Symposium on the Arctic heat budget and atmospheric circulation. California, 1966.
315. Schmidt W. Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Hamburg, 1925.
316. Schwerdtfeger P. The thermal properties of sea ice. *J. Glaciol.*, 1963, vol. 4, № 36.
317. Schwerdtfeger P. The effect of finite heat content and thermal diffusion on the growth of a sea-ice cover. *J. Glaciol.*, 1964, vol. 5, № 39.
318. Shih Kung Kao. Turbulent transfer in the boundary layer of a stratified fluid. *J. Meteorol.*, 1959, vol. 16, № 5.
319. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *Month. Weath. Rev.*, 1963, vol. 91, № 3.
320. Smagorinsky J., Manabe S., J. Leith Holloway. Numerical results from a nine level general circulation model of the atmosphere. *Month. Weath. Rev.*, 1965, vol. 93, № 12.
321. Sverdrup H. The eddy conductivity of the air over a smooth snow field. *Geophys. Public*, 1937, vol. 11, № 7.
322. Tabata S., Boston N., Boyce J. The relation between wind speed and summer isothermal surface layer of water at ocean station P in the eastern subarctic Pacific Ocean. *J. Geophys. Res.*, 1965, vol. 70, № 16.
323. Takashi N. Some examples of numerical weather prediction with the special emphasis on the development and maintenance of relatively small scale cyclones. *J. Meteorol. Soc. Japan*, 1965, vol. 43, № 3.
324. Taylor R. Similarity theory in the relation between fluxes and gradients in the lowel atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 1960, vol. 86, № 367.
325. Thompson P., Gates W. A test of numerical prediction methods based on the barotropic and two parameter baroclinic models. *J. Meteorol.*, 1956, vol. 13, № 2.
326. Untersteiner N. Calculation of temperature regime and heat budget of sea-ice in the Central Arctic. *J. Geophys. Res.*, 1964, vol. 69, № 22.
327. Untersteiner N. On the mass and heat budget of Arctic sea-ice. *Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimatol. Ser. A*, 1961, Bd. 12, H. 2.
328. Untersteiner N. and Badgley F. The roughness parameters of sea-ice. *J. Geophys. Res.*, 1965, vol. 70, № 18.
329. Welander P. Couplin between sea and air. *Publ. Amer. Assoc. Advancement Sci.*, 1961, № 67.

**ДОРОНИН ЮРИЙ ПЕТРОВИЧ**

**Тепловое взаимодействие атмосферы  
и гидросферы в Арктике**

Редактор Т. П. Андреева  
Художник К. А. Карпошевич  
Художественный редактор Ю. Н. Васильев  
Технический редактор И. К. Пелипенко  
Корректоры: В. С. Игнатова  
и З. Т. Тимченко

---

Сдано в набор 27/VI 1969 г. Подписано к печати  
15/XII 1969 г. Бумага 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. л. 9,375.  
Печ. л. 18,75. Уч.-изд. л. 19,59. Тираж 900 экз.  
М-15973, Индекс МЛ-145.

Гидрометеорологическое издательство.  
Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23.  
Заказ № 555. Цена 1 р. 52 к.

---

Ленинградская типография № 8  
Главполиграфпрома Комитета по печати  
при Совете Министров СССР  
Ленинград, Прачечный пер., д. № 6.