

ББК 31.32  
Я 79  
УДК 536.581

Рецензент *Б. Н. Олейник*

**Ярышев Н. А., Андреева Л. Б.**

**Я 79** Тепловой расчет термостатов.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984.— 176 с., ил.

В пер.: 85 к.

В книге рассматриваются теоретические основы термостатирования и управления тепловыми режимами объектов приборостроения. Проводится анализ температурных полей объекта термостатирования и элементов термостата при одновременном влиянии на них нескольких тепловых воздействий. Рассматриваются вопросы расчета пассивных и активных систем термостатирования различных типов. Приводятся примеры конкретных численных расчетов.

Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, а также может быть использована студентами старших курсов вузов энергетических и приборостроительных специальностей.

Я  $\frac{2303020000-106}{051(01)-84}$  179—84

ББК 31.32  
6П2.2

© Энергоатомиздат, 1984

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Надежное функционирование различных приборов и технических устройств возможно при соблюдении определенных условий их эксплуатации. Объем требований, предъявляемых к современной аппаратуре, непрерывно возрастает; ужесточаются условия работы приборов. Вместе с тем физические явления и процессы, на которых основано действие того или иного узла, устройства или прибора в целом, во многих случаях оказываются весьма чувствительными к изменению параметров окружающей среды, что мешает получению надежных данных.

К числу таких дестабилизирующих факторов относится и тепловое воздействие окружающей среды. Вызываемое им изменение температуры прибора меняет физико-химические свойства всех веществ и материалов и, следовательно, в той или иной степени влияет на процессы, заложенные в основу прибора, искажает его первоначальные конструктивные параметры.

Поддержание во времени и в определенных объемах требуемой температуры среды, окружающей объект, привело к созданию многочисленных вариантов систем тепловой защиты объектов — термостатирующих устройств, или термостатов, снабженных различными системами автоматической стабилизации температуры и работающих на разных физических принципах.

Созданием термостатов заняты многие лаборатории и отделы обеспечения надежности различных предприятий.

В периодической печати имеется большое число публикаций, в которых изложены принципы работы и особенности конструкций термостатов различного назначения. Большинство авторов основное внимание уделяют описанию отдельных схем регулирования температуры и выбору конструкции регулятора, рассматривают специфику работы конкретных типов термостатов. В последнее десятилетие появились публикации, отражающие опыт проектирования термостатирующих устройств специализированного назначения [10, 26, 34, 49].

Существует, однако, необходимость в анализе и систематизации работы различных типов термостатов и в создании методов их теплового расчета независимо от того, какие функции выполняют подлежащие термостатированию устройства. В предлагаемой книге сделана попытка такой систематизации. В ее основу положены

результаты работы авторов по проблеме термостатирования, а также опыт чтения в Ленинградском институте точной механики и оптики специализированного лекционного курса «Регулирование тепловых процессов и термостатирование приборов».

Авторы признательны за оказанную поддержку д-ру техн. наук, проф. Г. Н. Дульневу и канд. техн. наук Л. П. Грабому при организации на кафедре теплофизики ЛИТМО исследований по термостатированию, на различных этапах выполнения которых принимали участие и внесли весомый вклад ученики и коллеги авторов С. Ц. Манжикова, Н. Н. Заровная, А. С. Столяров, С. М. Горохов.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу: 191041, Ленинград, Марсово поле, д.1, Ленинградское отделение Энергоатомиздата.

*Авторы*

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ И ЗАДАЧИ ТЕПЛООВОГО РАСЧЕТА ТЕРМОСТАТОВ

#### 1-1. КАЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Потребность в защите от нежелательных тепловых воздействий возникает для многих приборов и устройств, номенклатура и типы которых весьма разнообразны. Приведем несколько поясняющих примеров.

Результаты точного контроля линейных и угловых размеров изделий зависят от теплового состояния в момент измерений, так как коэффициенты линейного и объемного расширения вещества изделий и измерительного инструмента зависят от температуры.

Фактор температурных возмущений всегда учитывается при проведении исследований в метрологии. В отдельных случаях применяется тепловая защита вплоть до создания специальных помещений с контролируемой температурой. При уникальных эталонных работах оператор-метролог не допускается в помещение, а процесс измерений проводится дистанционно, так как собственные тепловыделения человека искажают результаты измерений.

Тепловая защита применяется при изготовлении многих оптических и радиоэлектронных изделий, например при получении дифракционных решеток, элементов микроэлектроники и т. п.

Размеры помещений, в которых проводятся соответствующие работы, колеблются от долей кубического сантиметра до многих кубических метров (цеха и лаборатории, снабженные весьма сложными системами теплового регулирования). В широких пределах варьируется масса объектов — от долей грамма (элементы микроэлектроники, микропорции исследуемых веществ) до многих сотен и тысяч тонн (передвижные и стационарные станции наблюдения, ЭВМ, оптические телескопы).

В практических задачах, с которыми чаще всего приходится встречаться инженеру-приборостроителю, защищаемым объектом является конструкция в целом или жизненно важный ее узел. Ими могут быть элементы или отдельные блоки вычислительной техники в ЭВМ; детали оптики или вся схема в оптико-электронных приборах, квантовых генераторах; чувствительные элементы гироскопических устройств; кварцевые пластины в генераторах частоты, являющиеся основными элементами высокоточных кварцевых часов и генераторов радиоволн строго определенной длины и т. п.

Условимся в дальнейшем реальный прибор или отдельный узел независимо от его принципа работы и конструктивного оформления называть объектом управления. В зависимости от целевого назначения в основу функционирования прибора могут быть положены различные процессы. При теплофизических исследованиях в первую очередь исследуют реакцию этого прибора на различные тепловые возмущения, т. е. поведение его как теплового объекта.

Изменение теплового состояния объекта управления вызывается внешними или внутренними причинами, в конечном итоге создающими тепловые возмущения в объекте, т. е. изменяющими ранее существовавший температурный режим. Поскольку предметом исследования является тепловой (температурный) режим объекта, условимся называть все виды воздействий, приводящих к изменению его внутренней (тепловой) энергии и температуры, тепловыми воздействиями.

Воздействия, проявляющие себя как помехи, т. е. искажающие нормальную работу объекта, будем называть возмущающими тепловыми воздействиями. Физическая природа их может быть разной. Возмущающим воздействием является, например, изменение во времени  $\tau$  температуры среды  $t(\tau)$ , в которой находится объект исследования, или изменение полного  $Q(\tau)$  или удельного  $q(\tau)$  теплового потока, поступающего к границам объекта от окружающих его тел. Такой тепловой поток может создаваться в результате поглощения электромагнитного (теплого) излучения от внешних источников или аэродинамического нагрева, если объект находится в высокоскоростном потоке газа.

Температуру внешней среды и поступающий в объект извне тепловой поток условимся называть внешними возмущающими тепловыми воздействиями. Помимо них, источники тепловых возмущений могут располагаться непосредственно в объекте. К таким внутренним источникам относятся элементы объекта, через которые пропускается электрический ток и в которых выделяется джоулева теплота. Не исключается прохождение внутри объекта химических реакций, сопровождаемых экзо- или эндотермическим эффектом. В биологических объектах источниками внутреннего разогрева являются биохимические реакции расщепления продуктов питания, работа мышечного аппарата и т. д. Конечным результатом действия внутренних источников тепла, называемых внутренними возмущающими тепловыми воздействиями, является выделение или поглощение в единицу времени некоторого количества теплоты. Удельную мощность тепловыделений или теплопоглощений в расчете на единицу объема объекта условимся обозначать  $\omega(\tau)$ .

Тепловые объекты, в которых внутренние тепловые воздействия отсутствуют или ощущают себя не проявляют, называют пассивными объектами. В противном случае объекты называют активными или объектами с тепловыделением.

Для управления температурным режимом объекта, изменяемым внешними и внутренними воздействиями, требуется дополнительный ввод или изъятие тепла из объекта. Эта задача решается с по-

мощью введения дополнительных источников (стоков) тепла, выполняемых в виде различного рода нагревателей, холодильников, жидких и газовых сред. Мощности управляющих тепловыделений  $Q_y(\tau)$ ,  $q_y(\tau)$ ,  $W_y(\tau)$ ,  $\omega_y(\tau)$  источников теплоты и температуры сред  $t_y(\tau)$  могут регулироваться вручную или автоматически в соответствии с требованиями к температуре объекта управления. Такие регулируемые воздействия называют в зависимости от их расположения в пространстве внутренними или внешними управляющими тепловыми воздействиями.

Закономерность изменения во времени возмущающих тепловых воздействий может быть заранее определена или предположительно задана в виде некоторой функциональной (аналитической) или табличной (числовой) зависимости. Такие возмущающие воздействия принято называть детерминированными тепловыми воздействиями, их значение может быть найдено (конечно, с определенной погрешностью) для любого момента времени. Например, известны среднесуточные или сезонные графики изменения температуры воздуха или воды в зоне расположения прибора.

Во многих случаях характер воздействия не поддается строгому количественному описанию, так как формируется группой трудно учитываемых факторов (турбулентные пульсации температуры атмосферы, влияние случайных тепловых помех, эпизодическое нерегулярное подключение источников электрической энергии и т. п.). Такого рода воздействия называют недетерминированными или случайными (стохастическими) возмущающими тепловыми воздействиями. Для их количественного описания требуется математический аппарат теории вероятностей (теории случайных процессов). Аналогичные замечания справедливы и для управляющих тепловых воздействий.

В дальнейшем будут рассматриваться только детерминированные тепловые воздействия.

Вопросы о том, какие воздействия являются определяющими (значительными) для данного объекта, каковы их количественные характеристики и их изменение во времени, решаются с учетом конкретных особенностей объекта и условий его эксплуатации.

## **1-2. ТРЕБОВАНИЯ К ТОЧНОСТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ОБЪЕКТОВ**

Требования к точности обеспечения нормального температурного режима работы объектов варьируются в широких пределах для разных групп приборов и аппаратов. Условно можно выделить следующие характерные случаи.

Объект работает при сравнительно больших изменениях температуры внешней среды в интервале 30—40 К, т. е. его элементы мало чувствительны к изменению температуры. В этих случаях тепловая защита обеспечивается мерами, принятыми при разработке конструкции объекта в целом. Примерами таких объектов являются бытовые

радиоприемники и телевизоры, большая группа электро- и радиоизмерительных приборов. Удачная компоновка элементов на шасси, наличие перфорационных отверстий создают естественную вентиляцию тепловыделяющих элементов и предохраняют их от опасных перегревов. Обычно временное изменение температуры окружающей прибор внешней среды происходит медленно (стабильность внешних возмущающих воздействий) и соответствует изменениям температуры внутри жилого или лабораторного помещения.

Объект работает при значительном изменении внешних возмущающих воздействий, имеющих импульсный характер (тепловые помехи небольшой длительности) или регулярный периодический характер. В таких случаях применяются различные способы так называемой пассивной тепловой защиты:

а) используется тепловая изоляция из плохо проводящего теплоту материала, играющая роль теплового фильтра. Тепловые импульсы гасятся, т. е. происходит задержка передачи теплоты в объект и его теплоаккумуляция в теплозащитной оболочке;

б) в качестве тепловой защиты выбирают вещества со специально подобранной температурой плавления и относительно высокой теплотой плавления. Энергия внешних тепловых воздействий тратится на плавление части вещества тепловой защиты и не проникает в объект. Так как температура плавления — стабильный параметр, то конструкции такой защиты часто называют кристаллическими термостатами. Их применение оказывается наиболее успешным при условии, что температурные возмущения (внешние или внутренние) имеют периодический характер относительно некоторого среднего значения, а количество теплоты, передаваемое за полупериод изменения возмущения, не способно полностью расплавить вещество тепловой защиты. Защитный слой находится в двух агрегатных состояниях — твердом и жидком; граница раздела фаз испытывает периодические перемещения в соответствии с изменением мощности возмущающих тепловых воздействий;

в) для объектов с внутренним тепловыделением в качестве тепловой защиты используется жидкость, которая вступает в контакт с объектом и превращается в пар, т. е. применяется принцип испарительного охлаждения. Интенсивность отвода тепла от объекта при испарении значительно увеличивается;

г) следующей разновидностью тепловой защиты объектов является использование плохо проводящих теплоту материалов, которые частично разрушаются под воздействием внешних тепловых и механических нагрузок, сублимируя, т. е. переходя в газообразное состояние, или оплавляясь. Такая «жертвенная» изоляция применяется для тепловой защиты объектов космической техники при их входе в плотные слои атмосферы Земли или других планет; ее действие однократное и кратковременное (несколько десятков секунд). Сложный процесс взаимодействия вещества защиты с атмосферой называют абляцией, а сами материалы — абляционными теплозащитными материалами. В большинстве случаев это компо-

зиционные материалы, основа которых состоит из волокон стекла или кварца, армированных смолами с высокой теплоаккумулирующей способностью (теплотой абляции).

Перечисленные способы и средства тепловой защиты носят единое название пассивных, так как они основаны на использовании собственно теплофизических свойств материалов и на применении теплозащитных веществ. Регулируемые управляющие тепловые воздействия при пассивной теплозащите не применяются, что является одним из достоинств указанных способов.

Температурный режим приборов должен поддерживаться в жестких пределах. Допустимое отклонение температуры объекта от заданного постоянного или переменного во времени значения может изменяться только на несколько градусов или даже на сотые и тысячные доли градуса при возмущающих воздействиях, способных вызвать колебания температуры незащищенного объекта в несколько десятков или сотен градусов. Время работы прибора длительное.

В этих условиях ранее рассмотренные способы пассивной защиты, как правило, оказываются непригодными. Необходимо активно противостоять возмущающим тепловым воздействиям. При заданных требованиях используются активные средства тепловой защиты, реализуемые на основе теории и технических средств автоматического регулирования.

Объект совместно с блоками управления представляет собой систему автоматического регулирования температуры. Системы автоматического регулирования температуры (САРТ) являются частным случаем систем автоматического регулирования (САР).

### 1-3. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ. ТЕРМОСТАТИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Структурная схема САРТ (рис. 1-1) поясняет, как это общепринято [6], принцип действия системы и состоит из следующих основных блоков: 1 — регулируемый тепловой объект; 2 — измерительный преобразователь температуры (термоприемник), чувствительный элемент которого регистрирует температуру в зоне расположения объекта; 3 — схема сравнения; 4 — задающее устройство, определяющее требуемый закон изменения температуры объекта во времени; 5 — регулирующий орган, осуществляющий подачу управляющего воздействия на объект; 6 — усилительно-преобразовательное устройство, усиливающее сигнал от термоприемника.

Температура объекта  $t(\tau)$  преобразуется с помощью термоприемника в сигнал  $U(\tau)$ , который сравнивается в схеме сравнения с сигналом  $U_3(\tau)$  задающего (программного) устройства. Сигнал рассогласования  $U_p(\tau) = U(\tau) - U_3(\tau)$ , определяющий отклонение температуры объекта от требуемого значения, подается в усилительный блок, преобразуясь в мощное воздействие  $U_w(\tau)$ , которое управляет регулирующим органом. Воздействие  $W(\tau)$  от регулирующего органа подается на объект, изменяя его температуру  $t(\tau)$  и уменьшая рассогласование  $U_p(\tau) = U(\tau) - U_3(\tau)$  до минимально возможного для данной САРТ значения.

Таким образом, в основе рассмотренной системы автоматического регулирования температуры лежит замкнутый контур воздействий  $t(\tau)$ ,  $U(\tau)$ ,

$U_p(\tau)$ ,  $U_w(\tau)$ ,  $W(\tau)$ , которые называют внутренними воздействиями. На каждую САР оказывают влияние внешние воздействия, к которым относятся: задаваемый регулируемый параметр (требуемая температура объекта)  $U_s(\tau)$ ; энергия источников питания  $P(\tau)$ , подаваемая на усилительно-преобразовательное устройство; возмущающие воздействия  $z(\tau)$  на объект регулирования (изменение температуры окружающей среды, колебания мощности тепловыделений в объекте, изменение расхода жидкости или газа в объектах с проточной вентиляцией и пр.) и другие второстепенные воздействия.

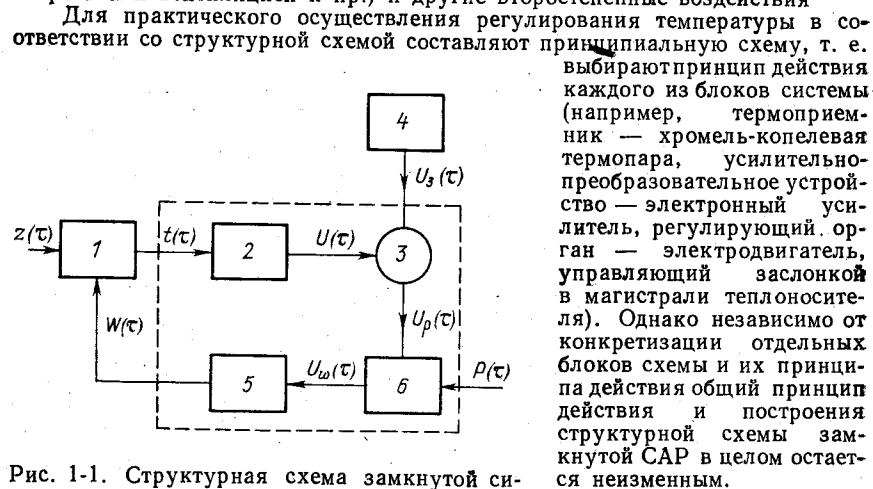


Рис. 1-1. Структурная схема замкнутой системы автоматического регулирования температуры объекта

- а) системы программного регулирования, в которых осуществляют изменение регулируемой величины  $t(\tau)$  по определенному заданному закону;  
б) системы автоматической стабилизации, поддерживающие постоянной в известных пределах температуру объекта  $t$ .

Системы, обладающие способностью сохранять заданную температуру объекта, называют системами термостабилизации. В них сравниваются параметры, зависящие от температуры, а получающаяся при этом разность используется для управления источниками (стоками) энергии.

Системы автоматической стабилизации температуры, которые обеспечивают защиту объектов от влияния переменных возмущающих воздействий, называют также системами термостатирования объектов, или термостатами. Слово «термостат» в первичном его значении относится к любому устройству, служащему для поддержания заданной температуры в некотором объеме пространства, куда помещается исследуемый объект. За системами, предназначенными для поддержания объекта при низких, отрицательных по столбчатой шкале температурах, исторически закрепилось название криостаты.

Применяемые в приборостроении термостаты часто конструктивно оформляются в виде единого комплекса, включающего термостатируемый объем, объект и автоматический регулятор температуры с задающим устройством и регулируемыми элементами нагрева и охлаждения объекта.

В отличие от пассивных термостатирующих систем, в которых тепловая защита объекта осуществляется без регулятора, системы автоматической стабилизации температуры иногда называют активными термостатами. Выбор типа регулятора (закона регулирования температуры) определяется конкретным техническим заданием. В практике термостатирования чаще используют пропорциональные и релейные регуляторы температуры.

Общая теория и методы анализа и синтеза САР в настоящее время детально разработаны. Однако необходимо отметить ряд особенностей, присущих управлению тепловыми режимами объектов.

Системы термостабилизации в приборостроении и других областях техники выполняют вспомогательную роль, поэтому их приходится создавать или приспособлять с учетом специфики каждого термостатируемого прибора, не нарушая его функций и конструкции. Объект термостатирования связан с внешней средой системой коммуникаций для передачи электроэнергии, газа, жидкости; каналами наблюдения и съема информации (пропускание электромагнитных волн в радио- и световых диапазонах); рычагами механических передач и т. п. Объект, как правило, является многоэлементным, его температурное поле из-за внутренних тепловыделений может обладать значительной пространственной неоднородностью.

Указанные причины (а их много) осложняют математическое описание объекта как динамического звена системы регулирования. Поэтому одной из центральных задач теории и методов расчета САР температуры является получение динамических соотношений (уравнений передачи теплоты) в объекте и элементах термостата. Только после решения этой задачи возможно решить задачу синтеза всей системы термостабилизации объекта с привлечением общих методов расчета САР.

В периодической литературе описано громадное число конструкций автоматических регуляторов, предлагаемых для решения конкретных задач регулирования температуры. Это подтверждает важность термостабилизации объектов. Однако при этом существует множество частных подходов и отсутствует обобщенный метод расчета и проектирования термостатов.

В последующих главах будут изложены приемы анализа важнейших элементов и систем термостатирования, которые, как представляется, должны служить ориентиром в практической деятельности инженеров, сталкивающихся с проблемой термостабилизации разнообразных объектов.

Интересно отметить, что широко применяемые приемы и патентованные средства тепловой защиты объектов почти в полной мере присущи биологическим системам. Длительная эволюция растений выработала, по-видимому, оптимальный для каждого их класса режим приспособления к местным климатическим условиям. Форма и размеры листьев растения, общая площадь его зеленого покрова находятся в соответствии с водно-радиационным балансом, необходимым для нормального хода биологических процессов. Сезонное изменение температуры окружающей среды, изменение потока теплоты от Солнца, движение окружающего воздуха вызывают ответные компенсирующие действия (изменение площади, ориентации листьев и всего растения по отношению к Солнцу и т. п.).

Значительно большей приспособляемостью к изменениям климатических условий обладают высшие теплокровные животные. У них можно выявить различные принципы тепловой защиты:

- а) пассивная теплоизоляция — наличие развитого волосяного покрова сложной структуры (пух, подшерсток, ость); плохо проводящий теплоту жировой слой, особенно внушительный у лишенных шерсти китообразных;  
б) активно действующая в жаркую погоду испарительная терморегуляция через кожный покров;  
в) тонко регулируемое кровообращение между глубинными и периферийными областями тела (аналогом его в технике является проточное —

жидкостное и газовое — терморегулирование), позволяющее выводить из организма избыточную теплоту;

г) локальные системы отвода внутренней теплоты из организма («тепловые мосты»), которые включаются в действие в тех случаях, когда пассивная (волосая или жировая) защита становится помехой (например, язык у собаки; снабженные мощной системой кровообращения ласты у китообразных и т. п.).

Внимательное наблюдение живой природы, эволюция которой насчитывает сотни миллионов лет, позволяет выявить много интересных идей, которые с успехом могут быть использованы при решении различных научно-технических проблем, включая задачи терморегулирования.

#### 1.4. ТЕПЛОВЫЕ МОДЕЛИ ТЕРМОСТАТОВ

Современный термостат — это достаточно сложная система, автоматически поддерживающая необходимый уровень температуры в зоне расположения объекта термостатирования, для которого

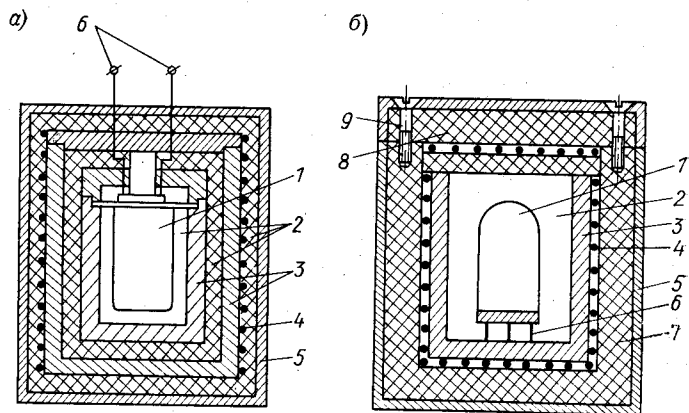


Рис. 1-2. Типовая конструкция подогревного термостата  
 а — 1 — объект термостатирования; 2 — изоляционная прослойка; 3 — камера термостата; 4 — нагреватель; 5 — кожух; 6 — тепловые связи (электрические провода от объекта); б — 1 — объект; 2 — прослойка между объектом и камерой; 3 — камера термостата; 4 — нагреватель; 5 — кожух; 6 — тепловые связи (крепежные винты и стойки объекта); 7 — основная теплоизоляция; 8 — крышка термостата; 9 — тепловые связи (крепежные винты)

создаются комфортные тепловые условия его функционирования. Как правило, создаваемый термостат должен отвечать техническим условиям, из которых важнейшими являются: требуемый уровень температуры (температура рабочего объема или температура объекта); допуск на изменение температуры во времени (точность термостабилизации); неравномерность распределения температуры в объекте (в рабочем объеме); диапазон изменения внешних тепловых воздействий; допустимая мощность тепловых источников (стоков), обеспечивающих заданный тепловой режим; время выхода на заданный режим работы (теплоинерционные характеристики термостата); масса и объем термостата; особенности применяемого

регулятора температуры, а также ряд других дополнительных условий.

В настоящее время нет единого обоснованного способа, удовлетворяющего указанным выше требованиям, к тому же часто противоречивым. Конструирование термостата практически базируется на отдельных расчетных

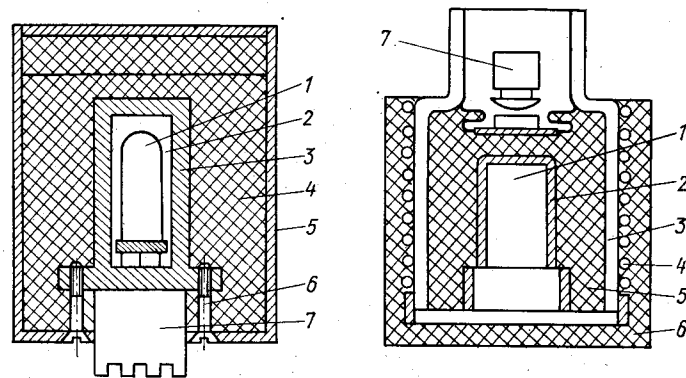


Рис. 1-3. Типовая конструкция полупроводникового термостата

1 — объект термостатирования; 2 — изоляционная прослойка между объектом и камерой 3; 3 — камера термостата; 4 — основная теплоизоляция; 5 — кожух; 6 — тепловые связи; 7 — термобатарея

Рис. 1-4. Типовая конструкция дифференциального термостата

1 — объем термостатирования; 2 — внутренняя камера; 3 — внешняя камера; 4 — нагреватель; 5 — теплоноситель; 6 — теплоизоляция; 7 — чувствительный элемент манометрического типа

оценках теплового режима сильно упрощенной тепловой модели термостата, а вся тяжесть работы переносится на макетирование, экспериментальную доводку и подгонку.

Можно указать причины, объясняющие сложившееся положение. Во многих случаях конструирование термостатов проводили не специалисты в области теплофизики, при этом необоснованно важная роль отводилась выбору регулятора и исследованию режимов его работы. Последующие контакты со специалистами, занимающимися тепловыми режимами, также не всегда приводили к успеху, так как существующие расчетные

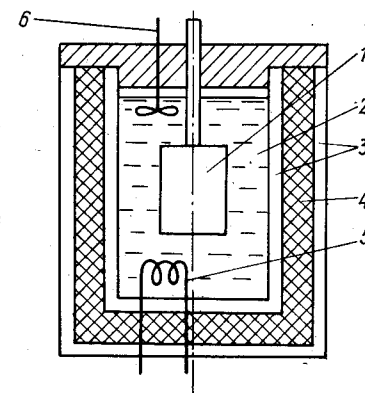


Рис. 1-5. Типовая конструкция жидкостного термостата

1 — объект термостатирования; 2 — жидкость; 3 — фарфоровый котел; 4 — теплоизоляция; 5 — нагреватель; 6 — мешалка

методы теории теплопроводности слабо приспособлены к решению поставленных задач, к тому же являются громоздкими и неэффективными при описании реальных конструкций термостатов. Все это, в конечном итоге, приводило к проектированию по старому, но испытанному методу — методу проб и ошибок.

Только в последнее десятилетие появились обобщающие работы и начала складываться методология тепловой защиты аппаратов и теплового расчета термостатов [9—11, 26, 33, 34, 49, 52].

В периодической литературе описано множество конструкций термостатов и регуляторов температуры [1, 4, 5, 8, 13, 14, 43, 47, 72—75]. Некоторые распространенные схемы конструктивного оформления термостатов различного принципа действия, применяемых в приборостроении, показаны на рис. 1-2 — 1-5.

При всем многообразии конструктивного выполнения термостатов различного назначения (технологические, медицинские, биологические, для физико-механических исследований, радиоэлектронных и полупроводниковых устройств, оптических систем, гироскопических и геофизических приборов и т. д.) можно выделить основные узлы, которые характерны для большинства термостатов.

1. Камера термостата, ограничивающая объект (объем) термостатирования и выравнивающая поле температур в рабочей зоне термостата за счет:

а) изготовления камеры из материала с высокой теплопроводностью (медь, сталь, алюминий и его сплавы) с надежным тепловым контактом между отдельными деталями;

б) создания внутри или снаружи камеры теплообменной проточной среды с постоянной температурой;

в) применения снаружи камеры теплоносителя с постоянной температурой плавления;

г) равномерного размещения около стенок камеры нагревателя или холодильника.

2. Объект термостатирования, размещаемый в камере.

3. Теплоизоляционная прослойка между камерой и наружной средой, которая уменьшает влияние внешних тепловых воздействий.

4. Наружный кожух.

5. Активный элемент (нагреватель или холодильник), который вместе с системой автоматического регулирования обеспечивает заданный уровень температуры.

6. Чувствительный элемент системы терморегулирования.

7. Тепловые связи (регулируемые стержни, установочные опоры, соединительные провода, разъемы и т. п.) между объектом, камерой и окружающей средой, которые приводят к нарушению равномерности температурных полей элементов термостата.

В зависимости от особенностей конструкции число элементов термостата может меняться, однако их принципиальное назначение сохраняется.

Термостат разрабатывается на основе имеющегося опыта проектирования и сведений, приводимых в ведомственных руководящих технических материалах и технической литературе. Выбираются форма термостата, число оболочек, материал и размеры отдельных элементов [5, 26, 34, 72], тип и конструкция нагревателя [12, 26, 34], вид и место расположения чувствительного элемента [26, 51, 58] и др. При разработке термостата можно руководствоваться некоторыми общими рекомендациями.

1. Для многосоставного объекта с внутренним тепловыделением, требующего одинаковой точности термостатирования всех элементов, следует, по возможности, на этапе проектирования объекта обеспечить равномерное по объему распределение источников энергии.

2. Для уменьшения подвода (отвода) тепла к объекту по тепловым связям выводы от объекта должны иметь большое тепловое сопротивление и располагаться предпочтительно на изотермических поверхностях. В некоторых случаях следует применять тепловые компенсаторы [12].

3. При конструировании камеры термостата необходимо стремиться к тому, чтобы соотношение всех ее размеров возможно меньше отличалось от единицы. Между деталями камеры следует обеспечить надежный тепловой контакт, линии сопряжения отдельных поверхностей желательнее сгладить. Толщина стенок и выбор материала камеры зависят от требований технического задания. Для выравнивания поля температур в камере и уменьшения колебаний температуры в процессе регулирования стенки камеры должны быть массивными и выполнены из материала с высокой теплопроводностью и теплоемкостью. Однако для сокращения времени установления рабочей температуры теплоемкость камеры должна быть минимальна, поэтому для удовлетворения обоих условий необходимо выбирать металл с высоким коэффициентом температуропроводности (алюминий, медь, латунь и др.).

4. Конструкция нагревателя должна обеспечить равномерное температурное поле в объекте (камере) термостата. Мощность нагревателя определяется на основе теплового расчета термостата и является исходной для выбора электрических параметров.

5. Электроизоляция между нагревателем и другими элементами термостата должна быть, с одной стороны, достаточно тонкой, чтобы не уменьшать тепловой поток от нагревателя (обычно электроизоляционные материалы обладают малой теплопроводностью), но, с другой стороны, должна обеспечить электрическую прочность. Температура разрушения электроизоляции должна превышать максимально возможную температуру нагревателя или смежного с ней элемента термостата.

6. Теплоизоляция должна выполняться из материала с малой теплопроводностью (например, пенопласт, фетр, стекловолокно, войлок и др.) или представлять собой вакуумную прослойку. Толщина стенок теплоизоляции зависит от технических условий на термостат и должна быть рассчитана для конкретной конструкции [26, 34].

7. Для уменьшения теплообмена излучением термостат целесообразно помещать в кожух, выполненный из тонкого листового металла с малым коэффициентом излучения и с соответствующей обработкой поверхности (например, полировкой) или с покрытием.

На основе анализа разнообразных по своему назначению и конструктивному оформлению термостатов (термоэлектрических, с кристаллическими теплоносителями, электронагревательных с плоскими, проволочными, транзисторными нагревателями и др.) можно предложить обобщенную тепловую модель термостата, которая схематически изображена на рис. 1-6.

Обобщенная тепловая модель термостата представляет собой систему, состоящую из  $k$  оболочек произвольной формы (твердых, жидких или газообразных) с центральным ядром (объектом термостатирования) и местными (локальными) тепловыми связями («тепловыми мостами») элементов термостата с внешней средой и другими элементами. К элементам модели термостата относятся объект термостатирования, камера (корпус) термостата, воздушные и жидкостные прослойки, теплоноситель с постоянной температурой плавления, электроизоляция, нагреватели, теплоизоляция, кожух и т. д. Каждый элемент характеризуется объемом  $V_j$ , внутренней  $S_{j1}$  и наружной  $S_{j2}$  поверхностями и находится в тесном тепловом контакте с соседними элементами и связями, поэтому  $S_{j1} = S_{j-1,2}$ ;

$S_{j_2} = S_{j+1,1}$ ;  $V_j = V_{j_2} - V_{j_1}$ . Центральное тело имеет объем  $V_1$  и наружную поверхность  $S_{12}$ .

В общем случае любой элемент системы подвержен воздействию следующих факторов:

внутреннего, равномерно распределенного по объему  $V_j$  источника теплоты, характеризующегося  $\omega_j(\tau)$ ;

среды с температурой  $t_{пр j}(\tau)$ , проходящей через объем  $V_j$ , интенсивность теплообмена которой в расчете на единицу объема составляет  $\alpha_{пр j}$ ;

равномерно распределенных по поверхностям  $S_{j_1}$  и  $S_{j_2}$  источников теплоты с удельной плотностью  $q_{i-1,j}(\tau)$  и  $q_{j,i+1}(\tau)$ ;

локальных источников (стоков) энергии, обусловленных притоком (оттоком) теплоты по тепловым связям.

Система тел находится в теплообмене с внешней средой, температурой  $t_c(\tau)$  которой может изменяться во времени.

Строгое решение задачи теплообмена для обобщенной модели термостата (см. рис. 1-6) методами аналитической теории теплопроводности сопряжено со значительными трудностями, так как даже для тел простейшей формы необходимы сложные расчеты, причем структура решения в сильной степени зависит от формы тела. Точность решений, получаемых методами непосредственного интегрирования системы уравнений, является во многих случаях условной. Это обусловлено тем, что при формулировке задачи обычно делаются существенные допущения относительно формы, размеров и особенностей теплообмена рассматриваемой системы тел.

В частных случаях модели термостата (см. рис. 1-6) можно составить систему уравнений, решаемую на ЭВМ. Однако машинный способ решения требует фиксированных значений внешних воздействий и четкого задания граничных условий, которые в реальных системах термостабилизации могут меняться от задачи к задаче. В результате этого оценка влияния отдельных физических и конструктивных факторов, необходимая на этапе предварительного расчета и проектирования, значительно усложняется.

В частных случаях модели термостата (см. рис. 1-6) можно составить систему уравнений, решаемую на ЭВМ. Однако машинный способ решения требует фиксированных значений внешних воздействий и четкого задания граничных условий, которые в реальных системах термостабилизации могут меняться от задачи к задаче. В результате этого оценка влияния отдельных физических и конструктивных факторов, необходимая на этапе предварительного расчета и проектирования, значительно усложняется.

### 1-5. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООВОГО РАСЧЕТА ТЕРМОСТАТОВ

Анализ работ по исследованию тепловых режимов термостатирующих устройств позволил наметить программу и сформулировать перечень основных задач, решение которых должно служить основой для построения методов теплового расчета термостатов

и оптимизации конструкции термостатирующих устройств. К таким задачам можно отнести следующие.

1. Расчет стационарного теплового режима термостата, позволяющий произвести выбор значений конструктивных (габаритных) и теплофизических параметров элементов термостата и установить взаимосвязь между температурой отдельных элементов и тепловыми воздействиями (мощность нагревателя, температура окружающей среды, мощность тепловыделения в объекте и др.).

2. Оценка неравномерности температурного поля внутри объекта термостатирования или в элементе, окружающем объект термостатирования (в камере), которая устанавливает соотношения, связывающие распределение источников (стоков) тепла с коэффициентами теплопередачи между отдельными участками объекта или камеры термостата и внешней средой.

3. Анализ стационарного и нестационарного теплового режима объекта термостатирования по отношению к камере и внешней среде, который выявляет влияние внутренних тепловыделений и тепловых связей объекта термостатирования на характер его температурного поля и дает возможность принять действенные конструктивные меры по уменьшению или ликвидации так называемых статических ошибок термостата.

4. Расчет нестационарного теплового режима термостата, позволяющий:

оценивать теплоинерционные свойства объекта, отдельных элементов и термостата в целом;

определять переходный (пусковой) процесс;

оценивать влияние изменения внешних условий (температурные возмущения, внешние тепловые потоки) на точность термостатирования;

получать уравнения динамики термостата, объекта термостатирования, термоприемника (датчика), регулятора температуры как элементов системы автоматического регулирования.

5. Анализ работы системы автоматической стабилизации температуры, на основе которого выявляются точностные возможности различных законов регулирования и регуляторов для типовых термостатов и объектов термостатирования.

6. Разработка расчетно-экспериментальных методов исследования геометрических и теплообменных параметров, а также статических и временных характеристик термостатирующих устройств, повышающих точность приближенных аналитических методов расчета, создающих рациональную основу постановки опытов и сокращающих объем экспериментальных работ.

7. Оптимизация на основе разработанной теории теплового расчета типовых конструкций термостатирующих устройств общего или специализированного назначения, т. е. решение с известными ограничениями задачи синтеза термостатирующих устройств.

Для решения поставленных задач необходимо прежде всего выбрать метод расчета, который должен удовлетворять следующим требованиям: быть простым по форме, но в то же время обладать

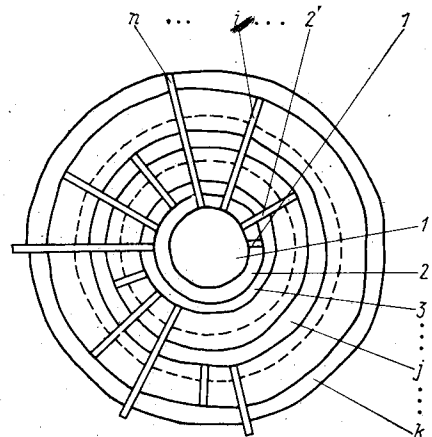


Рис. 1-6. Обобщенная тепловая модель термостата

1 — сплошное тело; 2, ..., j, ..., k — облоочки; l', ..., l, ..., n — местные тепловые связи



достаточной общностью, т. е. давать возможность в единой функциональной зависимости учитывать изменение конструкции отдельных элементов и различные виды тепловых воздействий; позволять проводить при необходимости серию последовательно усложняющихся расчетов, увеличивая их точность; соответствовать методу, используемому в смежных областях знаний.

Анализ обобщенной тепловой модели показал, что решение задачи теплообмена значительно упрощается, если провести его последовательно в два этапа:

- а) исследовать тепловой режим термостата при равномерных тепловых воздействиях;
- б) исследовать локальные эффекты, вызванные действием тепловых связей, и оценить влияние неравномерного распределения источников теплоты.

На первом этапе воздействия от внутренних и поверхностных источников энергии элементов, внутренней и внешней среды принимаются равномерными. Коэффициенты теплообмена и теплофизические параметры элементов считаются постоянными.

Совокупность решений задач первого и второго этапов позволяет провести оценочные расчеты и дать приближенную аналитическую картину теплового режима термостатирующих устройств. Такой подход является правомочным, так как при решении задач теплообмена систем термостатирования одно из основных технических требований сводится к обеспечению равномерного температурного поля в термостатируемом объеме.

Отрицательное действие локальных тепловых связей в большинстве случаев стремятся свести к минимуму или скомпенсировать.

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ

#### 2-1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА И ТЕРМОСТАТА

Конструктивное выполнение активных термостатов крайне разнообразно. Схематически устройство простейшего типового термостата показано на рис. 2-1. Термостат включает объект 1, располагаемый в камере 3 термостата, выполняющей роль изотермической оболочки. Равномерность распределения температуры по поверхности камеры обеспечивается источниками (стоками) теплоты 4, находящимися внутри камеры или вблизи от нее. Между объектом 1 и камерой 3 имеется среда 2. Для уменьшения мощности управляющих воздействий и частичной защиты от внешних возмущающих воздействий камера закрывается слоем теплоизоляционного ма-

териала 5, огражденного от внешней среды наружным кожухом 6. Измерительный преобразователь 7 (термопара, термометр сопротивления и т. п.) совместно с усилительно-преобразовательным 8 и исполнительным 9 органами выполняет функции регулятора температуры камеры и термостатируемого объема, внутри которого находится объект. Элементы 3, 4, 5, 6 образуют собственно термостат. Объект и камера имеют информационные каналы связи и управления объектом, играющие роль локальных тепловых связей 10 с внешней средой и другими элементами термостата.

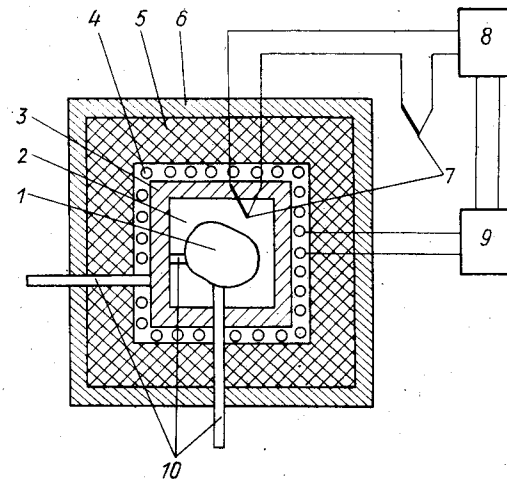


Рис. 2-1. Схематическое устройство простейшего термостата

1 — объект термостатирования; 2 — прослойка между объектом и камерой; 3 — камера термостата; 4 — источник (сток) теплоты; 5 — теплоизоляция; 6 — кожух; 7 — измерительный преобразователь; 8 — усилительно-преобразовательное устройство; 9 — исполнительный орган; 10 — локальные тепловые связи

Проектирование системы тепловой защиты объектов включает несколько основных этапов:

- а) исследование объекта регулирования, определение его характеристик, параметров, условий его работы и воздействий, которые он испытывает;
- б) формулировка требований к системе защиты;
- в) выбор метода тепловой защиты и первоначальной структурной схемы;
- г) выбор элементов схемы (разработка принципиальной схемы);
- д) уточнение структурной схемы, выбор и расчет элементов и параметров системы на основе требований к статическим и динамическим свойствам системы;
- е) экспериментальные исследования системы тепловой защиты (или отдельных ее частей) в лабораторных условиях и внесение необходимых поправок;

ж) конструирование, изготовление и монтаж системы (совместно с автоматическим регулятором температуры для активных систем);

з) наладку системы регулирования в реальных условиях;

и) опытную эксплуатацию всей системы.

Для сложных объектов полное выполнение перечня указанных работ, как правило, требует участия специалистов разного профиля. Начальная стадия — это изучение объекта тепловой защиты, и здесь определяющая роль отводится специалисту по теплофизике.

Для определения основных характеристик целесообразно рассмотреть упрощенную постановку задачи управления тепловым режимом объекта в термостате.

Простейшие физические и математические модели объекта и термостата строятся при следующих допущениях:

а) вне зависимости от истинной структуры реальный объект заменяется телом, имеющим объем  $V$  и отделенным от окружающей среды (или камеры термостата) поверхностью раздела  $S$  (наружная поверхность тела);

б) теплофизические параметры объекта  $1$  и камеры  $3$  термостата (рис. 2-1) определяются их полными теплоемкостями  $C_{об}$  и  $C_{к}$ ;

в) распределение температуры по всему объему тела равномерное и в любой момент времени  $\tau$  определяется единственным мгновенным значением температуры  $t_{об}(\tau)$ . Это же допущение делается для камеры;

г) объект находится в теплообмене с камерой термостата, имеющей температуру  $t_{к}(\tau)$ , и с внешней средой, возмущающее тепловое воздействие которой характеризуется ее температурой  $t_{с}(\tau)$ ;

д) на поверхности или внутри объекта и камеры имеются возмущающие или управляющие тепловые воздействия, полная мощность которых соответственно составляет  $W_{об}(\tau)$  и  $W_{к}(\tau)$ ;

е) внутри объекта может быть организована система проточного теплообмена, охватывающая весь объект. Температура проточной среды (теплоносителя или хладагента) обозначается:  $t_{пр. вх}(\tau)$  — на входе,  $t_{пр. вых}(\tau)$  — на выходе и  $t_{пр} = 0,5(t_{пр. вх} + t_{пр. вых})$  — средняя. Интенсивность проточного теплообмена постоянна и численно характеризуется коэффициентом объемной теплоотдачи  $\alpha_{пр}$ , который измеряется в ваттах на кубический метр-кельвин;

ж) предполагается, что среда  $2$  между объектом и камерой имеет пренебрежимо малую теплоемкость по сравнению с теплоемкостями объекта  $1$ , камеры  $3$  и внешней теплоизоляции  $5$ , т. е. в процессах теплопередачи она выступает как безынерционный элемент, характеризуемый только ее суммарным тепловым сопротивлением или обратной ему величиной — полной тепловой проводимостью прослойки  $2$ , обозначаемой  $\Lambda_{об.к}$ ;

з) теплоемкость внешней теплоизоляции  $5$  суммируется с теплоемкостью камеры, тем самым  $C_{к}$  является эффективным параметром для элементов  $3$  и  $5$  (рис. 2-1). В отличие от камеры, изготавливаемой из материала с высокой теплопроводностью, защитные свойства

теплоизоляции  $5$  количественно определяются полной тепловой проводимостью  $\Lambda_{пз}$ ;

и) локальные тепловые связи  $10$  (рис. 2-1) предполагаются малотеплоемкими по сравнению с камерой и объектом; их действие характеризуется значениями тепловых проводимостей  $\Lambda_{об.с}$  (между объектом и средой) или суммарно учитывается в тепловых проводимостях  $\Lambda_{об.к}$  между объектом и камерой или  $\Lambda_{к.с}$  между камерой и средой;

к) для количественного описания суммарного теплообмена тела с внешней и проточной средами используется закон Ньютона.

Математическая модель теплообмена объекта выводится на основе закона сохранения энергии: выделяемая в объекте внутренними источниками энергии теплота аккумулируется объектом, уносится проточной средой, передается камере и через локальные связи во внешнюю среду. Расшифровав составляющие уравнения теплового баланса, получаем дифференциальное уравнение теплообмена объекта, находящегося внутри камеры термостата:

$$W_{об}(\tau) = C_{об} \frac{dt_{об}(\tau)}{d\tau} + \Lambda_{пр} [t_{об}(\tau) - t_{пр}(\tau)] + \Lambda_{об.к} [t_{об}(\tau) - t_{к}(\tau)] + \Lambda_{об.с} [t_{об}(\tau) - t_{с}(\tau)]. \quad (2-1)$$

Здесь, в дополнение к ранее принятым обозначениям, введена полная тепловая проводимость объекта по отношению к проходящей через него (проточной) среде:

$$\Lambda_{пр} = \alpha_{пр} V. \quad (2-2)$$

Уравнение, определяющее особенности теплообмена камеры термостата (выделяемая внутри камеры теплота совместно с теплотой, получаемой от объекта, частично аккумулируется камерой, а остальное передается во внешнюю среду), записывается так:

$$W_{к}(\tau) + \Lambda_{об.к} [t_{об}(\tau) - t_{к}(\tau)] = C_{к} \frac{dt_{к}(\tau)}{d\tau} + \Lambda_{к.с} [t_{к}(\tau) - t_{с}(\tau)]. \quad (2-3)$$

Уравнения (2-1) и (2-3) совместно с начальными условиями

$$t_{об}(\tau)|_{\tau=0} = t_{об.н}; \quad t_{к}(\tau)|_{\tau=0} = t_{к.н} \quad (2-4)$$

формулируют простейшую математическую модель активного термостата и связывают две неизвестные (искомые) величины — температуру объекта  $t_{об}(\tau)$  и камеры  $t_{к}(\tau)$  с воздействиями  $W_{об}(\tau)$ ,  $W_{к}(\tau)$ ,  $t_{пр}(\tau)$ ,  $t_{с}(\tau)$ . Если теплофизические и теплообменные характеристики зависят от температуры, то математическая модель является нелинейной. Уравнения (2-3) и (2-4) в их линеаризованной форме (независимость коэффициентов от температуры) и в частных модификациях многократно применялись для первичной оценки тепловых процессов и в расчетах тепловой защиты объектов. Несмотря на сильные ограничения исходной формулировки задачи, целесообразно подробнее рассмотреть эту модель.

## 2-2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗИ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЪЕКТА И КАМЕРЫ ТЕРМОСТАТА

Решение системы (2-1), (2-3), (2-4) можно получить различными методами, однако здесь, как и далее, будет применяться операционный метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа [20, 40]

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau) d\tau, \quad (2-5)$$

где  $f(\tau)$  — исходная функция (оригинал);  $F(s)$  — ее изображение;  $s$  — параметр преобразования.

Применяя преобразование (2-5) или непосредственно используя таблицы операционных соответствий, взамен уравнений (2-1), (2-3) с учетом (2-4) получаем следующие уравнения для изображений  $T_{об}(s)$  и  $T_{к}(s)$  искомых температур объекта  $t_{об}(\tau)$  и камеры  $t_{к}(\tau)$ :

$$T_{об}(s) = Y_{об} \left[ \frac{1}{\Lambda_{об}} W_{об}(s) + \eta_{об.к} T_{к}(s) + \eta_{об.с} T_{с}(s) + \eta_{пр} T_{пр}(s) + \varepsilon_{об} t_{об.н} \right]; \quad (2-6)$$

$$T_{к}(s) = Y_{к} \left[ \frac{1}{\Lambda_{к}} W_{к}(s) + \varkappa_{к.об} T_{об}(s) + \varkappa_{к.с} T_{с}(s) + \varepsilon_{к} t_{к.н} \right], \quad (2-7)$$

где символами  $T_{с}(s)$ ,  $W_{об}(s)$ ,  $W_{к}(s)$  обозначены изображения температуры среды  $t_{с}(\tau)$  и полных мощностей объекта  $W_{об}(\tau)$  и камеры  $W_{к}(\tau)$ .

Коэффициенты  $\Lambda_{к}$  и  $\Lambda_{об}$  можно определить как полные тепловые проводимости объекта и камеры; их взаимосвязь с ранее введенными тепловыми проводимостями такова:

$$\Lambda_{об} = \Lambda_{об.к} + \Lambda_{об.с} + \Lambda_{пр}; \quad (2-8)$$

$$\Lambda_{к} = \Lambda_{об.к} + \Lambda_{к.с}. \quad (2-9)$$

Безразмерные коэффициенты  $\eta$  и  $\varkappa$  определяют отношения между тепловыми проводимостями:

$$\eta_{об.к} = \frac{\Lambda_{об.к}}{\Lambda_{об}}; \quad \eta_{об.с} = \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_{об}}; \quad \eta_{пр} = \frac{\Lambda_{пр}}{\Lambda_{об}}; \quad (2-10)$$

$$\varkappa_{об.к} = \frac{\Lambda_{об.к}}{\Lambda_{к}}; \quad \varkappa_{к.с} = \frac{\Lambda_{к.с}}{\Lambda_{к}}, \quad (2-11)$$

причем

$$\eta_{об.к} + \eta_{об.с} + \eta_{пр} = 1; \quad \varkappa_{об.к} + \varkappa_{к.с} = 1. \quad (2-12)$$

Тепловые проводимости  $\Lambda_{об.к}$  оболочек (стенок) неправильной формы можно определять по формулам, предложенным в работе [70]:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{L} \frac{2S_1 S_2}{S_1 + S_2}; \quad (2-13a)$$

$$\Lambda = \lambda \frac{S_1 S_2 + 2S_*^2}{3V}; \quad S_* = \frac{3}{2} \left[ \frac{V}{L} - \frac{1}{6} (S_1 + S_2) \right], \quad (2-13b)$$

где  $\Lambda$  — тепловая проводимость оболочки (стенки);  $S_1$  и  $S_2$  — внутренняя и наружная поверхности оболочки;  $V$  — объем оболочки;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности материала оболочки.

Определяющий размер  $L$  (толщина оболочки) оценивается по формуле

$$L = 2V / (S_1 + S_2). \quad (2-14)$$

Расчет тепловых проводимостей  $\Lambda_{об.с}$ ,  $\Lambda_{к.с}$ ,  $\Lambda_{пр}$  будет рассмотрен на отдельных примерах.

Входящие в уравнения (2-6) и (2-7) переменные  $Y_{об}$  и  $Y_{к}$  имеют следующую структуру:

$$Y_{об} = \frac{1}{\varepsilon_{об} s + 1}; \quad Y_{к} = \frac{1}{\varepsilon_{к} s + 1}, \quad (2-15)$$

в которых величины  $\varepsilon_{об}$  и  $\varepsilon_{к}$  имеют размерность времени и рассчитываются по формулам:

$$\varepsilon_{об} = \frac{C_{об}}{\Lambda_{об}} = C_{об} / (\Lambda_{об.к} + \Lambda_{об.с} + \Lambda_{пр}); \quad (2-16)$$

$$\varepsilon_{к} = \frac{C_{к}}{\Lambda_{к}} = C_{к} / (\Lambda_{об.к} + \Lambda_{к.с}). \quad (2-17)$$

Решив систему уравнений (2-6) и (2-7) относительно изображений  $T_{об}(s)$  и  $T_{к}(s)$ , находим

$$T_{об}(s) = Y_{об} w_{об} \Lambda_{об}^{-1} W_{об}(s) + Y_{об.с} T_{с}(s) + Y_{об.пр} T_{пр}(s) + Y_{об} w_{к} \Lambda_{к}^{-1} W_{к}(s) + Y_{об.н.об} t_{об.н} + Y_{об.н.к} t_{к.н}; \quad (2-18)$$

$$T_{к}(s) = Y_{к w_{об}} \Lambda_{об}^{-1} W_{об}(s) + Y_{к.с} T_{с}(s) + Y_{к.пр} T_{пр}(s) + Y_{к w_{к}} \Lambda_{к}^{-1} W_{к}(s) + Y_{к.н.об} t_{об.н} + Y_{к.н.к} t_{к.н}. \quad (2-19)$$

Уравнения (2-18) и (2-19) определяют взаимосвязь между изображениями температур объекта и камеры термостата и изображениями воздействий через передаточные функции по отношению к соответствующему воздействию. Выражения этих передаточных функций для объекта и камеры приведены в табл. 2-1, в которой использованы следующие обозначения:

$$\Delta = \varepsilon_{об} \varepsilon_{к} s^2 + (\varepsilon_{об} + \varepsilon_{к}) s + 1 - \eta_{об.к} \varkappa_{об.к} = K^{-1} (\varepsilon_1 s + 1) (\varepsilon_2 s + 1); \quad (2-20)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon_{об} \varepsilon_{к}}{(1-\nu)\varepsilon_{об} + (1+\nu)\varepsilon_{к}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon_{об} \varepsilon_{к}}{(1+\nu)\varepsilon_{об} + (1-\nu)\varepsilon_{к}}; \quad (2-21)$$

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{4\eta_{об.к} \varkappa_{об.к} \varepsilon_{об} \varepsilon_{к}}{(\varepsilon_{об} - \varepsilon_{к})^2}}; \quad (2-22)$$

$$K = (1 - \eta_{об.к} \varkappa_{об.к})^{-1}; \quad (2-23)$$

$$\Phi_{об.с} = \eta_{об.с} + \eta_{об.к} \varkappa_{к.с}; \quad \Phi_{к.с} = \varkappa_{к.с} + \eta_{об.с} \varkappa_{об.к}; \quad (2-24)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{об.с} &= \varepsilon_k \left( 1 + \frac{\eta_{об.к}}{\eta_{об.с}} \kappa_{к.с} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon_k \eta_{об.с}}{\Phi_{об.с}}; \\ b_{к.с} &= \varepsilon_{об} \left( 1 + \frac{\kappa_{об.к}}{\kappa_{к.с}} \eta_{об.с} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon_{об} \kappa_{к.с}}{\Phi_{к.с}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

Величины  $\varepsilon_{об}$  и  $\varepsilon_k$  находятся по формулам (2-16), (2-17), а коэффициенты  $\eta$ ,  $\kappa$  — по формулам (2-10), (2-11).

Таблица 2-1

Передаточные функции для температуры объекта и камеры

Объект	Камера
$Y_{об\omega_{об}} = \frac{\varepsilon_k s + 1}{\Delta}$	$Y_{к\omega_{об}} = \kappa_{к.об} \frac{1}{\Delta}$
$Y_{об.с} = \Phi_{об.с} \frac{b_{об.с} s + 1}{\Delta}$	$Y_{к.с} = \Phi_{к.с} \frac{b_{к.с} s + 1}{\Delta}$
$Y_{об.пр} = \eta_{пр} \frac{\varepsilon_k s + 1}{\Delta}$	$Y_{к.пр} = \kappa_{об.к} \eta_{пр} \frac{1}{\Delta}$
$Y_{об\omega_k} = \eta_{об.к} \frac{1}{\Delta}$	$Y_{к\omega_k} = \frac{\varepsilon_{об} s + 1}{\Delta}$
$Y_{об.н_{об}} = \varepsilon_{об} \frac{\varepsilon_k s + 1}{\Delta}$	$Y_{к.н_{об}} = \kappa_{к.об} \varepsilon_{об} \frac{1}{\Delta}$
$Y_{об.н_k} = \eta_{об.к} \varepsilon_k \frac{1}{\Delta}$	$Y_{к.н_k} = \varepsilon_k \frac{\varepsilon_{об} s + 1}{\Delta}$

Выполнив обратный переход от (2-18) и (2-19), можно найти дифференциальные уравнения взаимосвязи между оригиналами температур объекта, камеры (корпуса) и воздействий:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{об} \varepsilon_k \frac{d^2 t_{об}(\tau)}{d\tau^2} + (\varepsilon_{об} + \varepsilon_k) \frac{dt_{об}(\tau)}{d\tau} + (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) t_{об}(\tau) = \\ = \frac{1}{\Lambda_{об}} \left[ \varepsilon_k \frac{dW_{об}(\tau)}{d\tau} + W_{об}(\tau) \right] + \Phi_{об.с} \left[ b_{об.с} \frac{dt_c(\tau)}{d\tau} + t_c(\tau) \right] + \\ + \eta_{пр} \left[ \varepsilon_k \frac{dt_{пр}(\tau)}{d\tau} + t_{пр}(\tau) \right] + \frac{\eta_{об.к}}{\Lambda_k} W_k(\tau); \quad (2-26) \\ \varepsilon_{об} \varepsilon_k \frac{d^2 t_k(\tau)}{d\tau^2} + (\varepsilon_{об} + \varepsilon_k) \frac{dt_k(\tau)}{d\tau} + (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) t_k(\tau) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{\kappa_{об.к}}{\Lambda_{об}} W_{об}(\tau) + \Phi_{к.с} \left[ b_{к.с} \frac{dt_c(\tau)}{d\tau} + t_c(\tau) \right] + \kappa_{об.к} \eta_{пр} \frac{dt_{пр}(\tau)}{d\tau} + \\ + \frac{1}{\Lambda_k} \left[ \varepsilon_{об} \frac{dW_k(\tau)}{d\tau} + W_k(\tau) \right], \quad (2-27) \end{aligned}$$

которые при необходимости должны решаться с учетом начальных условий, включая (2-4).

Выражения (2-18), (2-19) или (2-26), (2-27) являются базовыми соотношениями элементарной теории термостатирования, они определяют динамику теплообмена объекта и термостата в целом.

**Пример 2-1.** Для стабилизации температуры холодных спаев термопар и проверки электрических термометров сопротивления стержневого типа предлагается микротермостат, упрощенная схема которого показана на рис. 2-2. Основной термостат (собственно объектом) являются алюминиевый цилиндрический блок 1 диаметром 50 мм и общей высотой 80 мм. Параллельно оси блока высверлены отверстия 7, куда закладываются термостатируемые «холодные спаи» термопар или исследуемые термометры сопротивления. Часть отверстий совместно с верхней и нижней крышками образуют канал 8, через который может поступать извне жидкость (хладагент) или воздух. На наружной поверхности блока 1 закреплена обмотка ленточного электронагревателя, условно показанная на схеме позицией 2.

Блок 1 расположен в алюминиевой камере 4, представляющей собою цилиндр диаметром 90 мм, высотой 120 мм с внутренней цилиндрической полостью диаметром 70 мм и высотой 100 мм.

Камера термостата размещается внутри тонкослойного металлического кожуха 6 размерами 110 × 110 × 140 мм. Пространство между камерой и кожухом заполнено пористым теплоизолятором 5. Прослойка между блоками и внутренней поверхностью камеры толщиной  $\delta = 10$  мм заполнена теплоизолятором из стекловаты 3. Для доступа внутрь блока 1 и размещения термостатируемых объектов (термопары, термометры сопротивления) в верхней части термостата предусмотрены отверстия, соосные с отверстиями в блоке 1.

Исходные конструктивные и теплофизические характеристики следующие: масса блока совместно с термостатируемыми элементами  $m_{об} = 0,35$  кг, его наружная поверхность  $S_{об} = 1,65 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>, удельная теплоемкость алюминия  $c_{об} = 0,92 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К). По расчетам объем изоляции 3 между блоком и камерой  $V_{из} = 2,28 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>, внутренняя поверхность камеры (наружная поверхность изоляционной прослойки)  $S_{к.внутр} = 2,97 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>, наружная поверхность камеры  $S_{к.нар} = 4,67 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>, объем камеры  $V_k = 3,79 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup> и масса камеры  $m_k = 1,04$  кг. Поверхность внешней теплоизоляции 5 (наружной теплоизоляции камеры)  $S_{из.нар} = 8,58 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>, объем теплоизоляции  $V_{из.нар} = 9,31 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>. Принимая ее плотность  $\gamma_{из.нар} = 400$  кг/м<sup>3</sup>, получаем массу  $m_{из.нар} = 0,37$  кг. Таким образом, общая масса камеры и наружной теплозащиты принимается равной  $m_k + m_{из.нар} \approx 1,41$  кг.

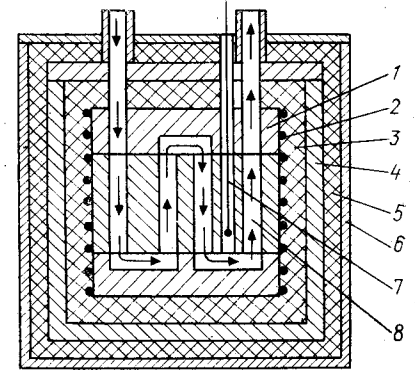


Рис. 2-2. Схематическое устройство микротермостата

1 — блок; 2 — электронагреватель; 3 — прослойка из стекловаты; 4 — камера; 5 — теплоизоляция; 6 — кожух; 7 — отверстия; 8 — каналы

В соответствии с упрощенной математической моделью будем принимать полную теплоемкость объекта равной теплоемкости блока  $C_{об} = c_{об}m_{об} = 0,32 \cdot 10^3$  Дж/К.

Теплоемкость собственно камеры  $C_k = 0,92 \cdot 10^3 \cdot 1,04 = 0,957 \cdot 10^3$  Дж/К. Удельная и полная теплоемкости наружной изоляции  $c_{из. нар} = 0,80 \times 10^3$  Дж/(кг·К),  $C_{из. нар} = 0,80 \cdot 10^3 \cdot 0,37 = 0,296 \cdot 10^3$  Дж/К.

Полная расчетная (эффективная) теплоемкость камеры с учетом теплоемкости изоляции принимается равной

$$C = C_k + C_{из. нар} = 1,25 \cdot 10^3 \text{ Дж/К.}$$

Переходим к оценке тепловых проводимостей  $\Lambda_{об.}$ ,  $\Lambda_k$ , определяемых по (2-8) и (2-9). Принимая теплопроводность стекловаты  $\lambda_{из} = 0,045$  Вт/(м·К), по (2-13а) определяем тепловую проводимость  $\Lambda_{об. к}$  между объектом и корпусом термостата

$$\Lambda_{об. к} = \frac{0,045}{10 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2 \cdot 1,65 \cdot 10^{-2} \cdot 2,97 \cdot 10^{-2}}{(1,65 + 2,97) \cdot 10^{-2}} = 9,55 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/К.}$$

Расчет по уточненной формуле (2-13б) дает  $\Lambda_{об. к} = 9,97 \cdot 10^{-2}$  Вт/К. Разница в значениях  $\Lambda_{об. к}$  не превосходит 5%.

Оценка местных тепловых проводимостей  $\Lambda_{об. с}$  практически всегда сопряжена со значительными трудностями и погрешностями. Пусть, например, термостатируются спаянные десяти хромель-алюмелевые термопары (число термоэлектродов  $n = 20$ ) диаметром 0,5 мм. Принимая длину термоэлектродов на участке их выхода из термостата равной  $L = 5 \cdot 10^{-2}$  м, а теплопроводность электродов  $\lambda \approx 50$  Вт/(м·К), по формуле для проводимости плоской стенки находим

$$\Lambda_{об. с} = \lambda n \frac{\pi d^2}{4L} = 50 \cdot 20 \cdot \frac{3,14 \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 0,39 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/К.}$$

Тепловая проводимость объекта по отношению к проточной среде  $\Lambda_{пр}$  (см. формулу 2-2) может изменяться в широких пределах в зависимости от хладагента (вода, воздух и др.) и скорости его прокачки. Ориентировочно  $\Lambda_{пр}$  равно  $1 \div 20$  Вт/К.

В последующих численных расчетах предполагается, что проточный теплообмен отсутствует, т. е. принимается  $\Lambda_{пр} = 0$ . С учетом сделанных оценок по (2-8) находим

$$\Lambda_{об} = (9,97 + 0,39) \cdot 10^{-2} = 0,104 \text{ Вт/К}$$

и по формулам (2-10)  $\eta_{об. к} \approx 0,96$ ,  $\eta_{об. с} \approx 0,04$ ,  $\eta_{пр} = 0$ . По (2-16) показатель тепловой инерции объекта  $\varepsilon_{об} = 0,32 \cdot 10^3 / 0,104 \approx 3,1 \cdot 10^3$  с.

Тепловая проводимость  $\Lambda_{к. с}$  между наружной поверхностью камеры и внешней средой определяется двумя составляющими: тепловой проводимостью наружной теплоизоляции  $\Lambda_{из. нар}$  и тепловой проводимостью  $\Lambda_c$  между изоляцией и средой:

$$\Lambda_{к. с} = \Lambda_{из. нар} \Lambda_c / (\Lambda_{из. нар} + \Lambda_c).$$

Величина  $\Lambda_{из. нар}$  находится по (2-13а) или (2-13б). Из (2-14) определяющий размер  $L_{из. нар} = 2,931 \cdot 10^{-4} / [(4,67 + 8,58) \cdot 10^{-2}] = 1,41 \cdot 10^{-2}$  м.

Принимая теплопроводность  $\lambda_{из. нар} = 0,07$  Вт/(м·К), по (2-13а) находим  $\Lambda_{из. нар} = 0,301$  Вт/К. Уточненное по (2-13б) значение  $\Lambda_{из. нар} = 0,318$  Вт/К.

Коэффициент конвективно-лучистого теплообмена между кожухом термостата и средой  $\alpha_c \approx 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Тепловая проводимость между поверхностью изоляции и окружающей средой

$$\Lambda_c = \alpha_c S_{из. нар} = 10 \cdot 8,58 \cdot 10^{-2} = 0,858 \text{ Вт/К;}$$

$$\Lambda_{к. с} = 0,318 \cdot 0,858 / (0,318 + 0,858) = 0,232 \text{ Вт/К.}$$

Полная тепловая проводимость камеры находится по (2-9)  $\Lambda_k = 0,232 + 9,55 \cdot 10^{-2} = 0,328$  Вт/К  $\approx 0,33$  Вт/К. Из (3-11) следует, что  $\kappa_{об. к} \approx 0,29$ ,

$\kappa_{к. с} \approx 0,71$ . По (3-17) показатель тепловой инерции камеры  $\varepsilon_k = 1,25 \times 10^3 / 0,33 \approx 3,8 \cdot 10^3$  с. Найденные значения параметров являются исходными данными для оценки тепловых режимов термостата.

### 2-3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕПЛООБМЕНА

Для объектов и термостатов стационарные условия теплообмена не являются характерными, поскольку и возмущающие, и управляющие воздействия изменяются с течением времени. Однако анализ стационарных режимов необходим, так как позволяет получить количественные взаимосвязи между теплообменными и конструктивными параметрами объекта и термостата в зависимости от тех или иных воздействий.

В стационарном режиме воздействия  $t_c$ ,  $t_{пр}$ ,  $W_{об}$ ,  $W_k$  постоянны, поэтому из уравнений (2-1), (2-18), (2-19) или из уравнений (2-26), (2-27) получаются следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} t_{об. ст} &= \Lambda_{об}^{-1} W_{об} + \eta_{пр} t_{пр} + \eta_{об. с} t_c + \eta_{об. к} t_k; \\ t_{к. ст} &= \Lambda_k^{-1} W_k + \kappa_{к. с} t_c + \kappa_{об. к} t_{об}; \end{aligned} \right\} (2-28)$$

$$t_{об. ст} = K [\Lambda_{об}^{-1} W_{об} + \eta_{об. к} \Lambda_k^{-1} W_k + \eta_{пр} t_{пр} + \Phi_{об. с} t_c]; (2-29)$$

$$t_{к. ст} = K [\kappa_{об. к} \Lambda_{об}^{-1} W_{об} + \Lambda_k^{-1} W_k + \eta_{пр} \kappa_{об. к} t_{пр} + \Phi_{к. с} t_c]. (2-30)$$

Уравнения (2-28) устанавливают взаимосвязь между температурой объекта и корпуса, а из (2-29) и (2-30) непосредственно находятся  $t_{об. ст}$ ,  $t_{к. ст}$  при стабильных (стационарных) значениях воздействий  $t_{пр}$ ,  $t_c$ ,  $W_{об}$ ,  $W_k$ . Напомним, что  $t_{пр}$  и  $t_c$  — это температура проточной и внешней среды соответственно, а  $W_{об}$  и  $W_k$  — соответственно полная мощность тепловыделений в активном объекте и в камере термостата. Для пассивного объекта  $W_{об} = 0$ , а при отсутствии проточного термостатирования  $\eta_{пр} = 0$ , т. е.  $\Lambda_{пр} = 0$ .

Из (2-29) и (2-30) полезно определить перепады температуры между объектом, камерой и внешней средой:

$$\Delta t_{об. к} = t_{об. ст} - t_{к. ст} = K [\kappa_{к. с} W_{об} \Lambda_{об}^{-1} + \Lambda_k^{-1} (\eta_{об. к} - 1) W_k + \eta_{пр} \kappa_{к. с} (t_{пр} - t_c)]; (2-31)$$

$$\Delta t_{об. с} = t_{об. ст} - t_c = K [\Lambda_{об}^{-1} W_{об} + \eta_{об. к} \Lambda_k^{-1} W_k + \eta_{пр} (t_{пр} - t_c)]; (2-32)$$

$$\Delta t_{к. с} = t_{к. ст} - t_c = K [\kappa_{об. к} W_{об} \Lambda_{об}^{-1} + \Lambda_k^{-1} W_k + \eta_{пр} \kappa_{об. к} (t_{пр} - t_c)]. (2-33)$$

Выражения (2-28) — (2-33) могут использоваться для оценочных расчетов на начальной стадии проектирования термостата.

1. Из первого уравнения (2-28) можно определить, на сколько изменится температура объекта (температура статирования)  $dt_{об}$  в зависимости от изменения одного из возмущающих  $t_c$ ,  $W_{об}$  или управляющих  $t_{пр}$ ,  $t_k$  воздействий при сохранении постоянства

всех остальных воздействий. Выражения для «факторной чувствительности» имеют следующий вид:

$$dt_{об} = \eta_{об.с} dt_c; \quad dt_{об} = \Lambda_{об}^{-1} dW_{об}; \quad (2-34)$$

$$dt_{об} = \eta_{об.к} dt_k; \quad dt_{об} = \eta_{пр} dt_{пр}. \quad (2-35)$$

Из (2-34) и (2-35) следует, что помехоустойчивость объекта тем лучше, чем меньше коэффициенты пропорциональности в этих взаимосвязях:  $\eta_{об.с}$ ,  $\Lambda_{об}^{-1}$ ,  $\eta_{об.к}$  или  $\eta_{пр}$ .

2. Нежелательное влияние одного из факторов (при медленном, квазистационарном его изменении) в принципе может быть скомпенсировано или ослаблено соответствующим изменением другого или нескольких факторов. Количественно это определится дифференцированием первого уравнения (2-28):

$$dt_{об} = \Lambda_{об}^{-1} dW_{об} + \eta_{пр} dt_{пр} + \eta_{об.с} dt_c + \eta_{об.к} dt_k = 0. \quad (2-36)$$

Из (2-36) могут быть получены различные частные соотношения. Пусть, например,  $\eta_{пр} = 0$  (нет проточной среды), а объект пассивный ( $W_{об} = 0$ ), тогда из (2-36) следует

$$dt_k = - \frac{\eta_{об.с}}{\eta_{об.к}} dt_c = - \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_{об.к}} dt_c, \quad (2-37)$$

т. е. изменение (увеличение) температуры среды на  $dt_c$  можно скомпенсировать изменением (уменьшением) температуры камеры на  $dt_k$  в соответствии с (2-37). При этом температура объекта остается неизменной ( $dt_{об} = 0$ ).

Медленное во времени изменение мощности  $W_{об}$  в активном объекте также можно скомпенсировать изменением температуры камеры. Из (2-36) при  $\eta_{пр} = 0$  и  $t_c = \text{const}$  находим

$$dt_k = - \frac{1}{\Lambda_{об} \eta_{об.к}} dW_{об} = - \frac{1}{\Lambda_{об.к}} dW_{об}. \quad (2-38)$$

В отдельных случаях соотношения (2-37) и (2-38) можно практически реализовать, хотя подбор коэффициентов и схемотехническое решение не всегда оказывается просто выполнимым.

3. Минимально необходимая постоянная мощность нагревателя камеры термостата оценивается при заданных минимальных значениях температуры разных сред  $t_{пр}$  и  $t_c$ , мощности тепловыделения объекта  $W_{об}$  и требуемой температуре стабилизации (температуре камеры  $t_k$ ) по формуле, полученной из (2-28):

$$W_k = \Lambda_k [(1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) (t_k - t_c) - \eta_{пр} \kappa_{об.к} (t_{пр} - t_c) - \kappa_{об.к} \Lambda_{об}^{-1} W_{об}]. \quad (2-39)$$

Если проточного охлаждения нет ( $\eta_{пр} = 0$ ), из (2-39) имеем

$$W_k = \Lambda_k [(1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) (t_k - t_c) - \kappa_{об.к} \Lambda_{об}^{-1} W_{об}]. \quad (2-40)$$

Для пассивного (нетепловыделяющего) объекта  $W_{об} = 0$  и последнее слагаемое в (2-40) отсутствует.

Наконец, при условиях  $\eta_{пр} = 0$ ,  $W_{об} = 0$  и отсутствии локальной связи между объектом и внешней средой, т. е. при  $\Lambda_{об.с} = 0$ , из (2-39) и (2-40) с учетом обозначений (2-10) — (2-13) получаем простейшую формулу для оценки мощности нагревательной обмотки камеры термостата:

$$W_k = \Lambda_{к.с} (t_k - t_c). \quad (2-41)$$

Разница в температуре объекта и камеры оценивается по уравнению (2-31).

Пассивный объект ( $W_{об} = 0$ ) без проточного охлаждения ( $\eta_{пр} = 0$ ) и при отсутствии локальных связей ( $\Lambda_{об.с} = 0$ ) имеет температуру камеры, т. е.  $\Delta t_{об.к} = 0$ .

**Пример 2-2.** Определить минимально необходимую мощность  $W_k$  нагревателя термостата, описанного в примере 2-1, и температуру объекта  $t_{об}$ , если по заданию  $t_k = 60^\circ\text{C}$ ,  $t_{с\text{ min}} = -10^\circ\text{C}$ . Оценить, на сколько изменятся температуры  $t_{об}$  и  $t_k$ , если температура среды увеличится до  $t_{с\text{ max}} = 20^\circ\text{C}$ .

Расчет мощности  $W_k$  проводится по формуле (2-40), в которой полагаем  $W_{об} = 0$  (пассивный объект) и  $\eta_{пр} = 0$  (нет проточной среды):

$$W_k = 0,33 (1 - 0,96 \cdot 0,29) [60 - (-10)] = 16,7 \text{ Вт.}$$

Температура объекта рассчитывается по (2-28):

$$t_{об} = \eta_{об.с} t_c + \eta_{об.к} t_k = 0,04 \cdot (-10) + 0,96 \cdot 60 = 57,2^\circ\text{C},$$

следовательно, из-за наличия локального теплоотвода ( $\eta_{об.с} = 0,04$ ) температура объекта ниже температуры камеры на 2,8 К.

Изменение  $t_{об}$  и  $t_k$  при изменении температуры среды на  $\Delta t_c = t_{с\text{ max}} - t_{с\text{ min}} = 30 \text{ К}$  и при  $W_k = \text{const}$  определяется по формулам (2-29) и (2-30), из которых с учетом того, что в данном случае при  $\eta_{пр} = 0$  имеем  $K_{Фоб.с} = 1$  и  $K_{Фк.с} = 1$ , следует:  $\Delta t_{об} = \Delta t_k = \Delta t_c = 30 \text{ К}$ . Таким образом, прирост температуры объекта и камеры равен увеличению температуры внешней среды.

Предположим, что мощностью нагревателя управляет регулятор, поддерживая температуру камеры на уровне  $t_k \approx 60^\circ\text{C}$ . Определим изменение температуры объекта в этом случае, если  $\Delta t_c = 30 \text{ К}$ .

Изменение температуры объекта при включенном регуляторе находится по первому из соотношений (2-28) или (2-34):

$$dt_{об} = \eta_{об.с} dt_c = 0,04 \cdot 30 = 1,2 \text{ К.}$$

Из сравнения  $dt_{об} = 1,2 \text{ К}$  и  $\Delta t_{об} = 30 \text{ К}$  отчетливо видна роль регулятора как стабилизирующего фактора. Вместе с тем наличие локального теплообмена объекта со средой не позволяет добиться идеальной стабилизации  $dt_{об} = 0$ , выполняемой при условии  $\eta_{об.с} = 0$ .

**Пример 2-3.** В блоке термостата производится градуировка двух термометров сопротивления, у которых  $R_0 = 100 \text{ Ом}$ . Определить, на сколько изменится температура объекта и камеры, если измерительный ток  $I = 10 \text{ мА}$ , а процесс измерений длительный. Конструктивные и теплофизические параметры термостата те же, что и в примерах 2-1 и 2-2.

Выделяемая в объекте мощность  $W_{об} = 2 I^2 R = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$ . По формулам (2-31) — (2-33) при условии  $W_k = 0$  и  $\eta_{пр} = 0$  находим

$$\Delta t_{к.с} = K \frac{\kappa_{об.к}}{\Lambda_{об}} W_{об} = 1,386 \cdot \frac{0,29}{0,104} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0,08 \text{ К;}$$

$$\Delta t_{об.с} = \frac{K}{\Lambda_{об}} W_{об} = \frac{1,386}{0,104} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0,27 \text{ К;} \quad \Delta t_{об.к} = 0,19 \text{ К.}$$

Найденные значения перепадов температуры составляют доли градуса, однако, при точных измерениях и жестких требованиях к поддержанию постоянства температуры влияние активных тепловыделений внутри объекта необходимо учитывать.

#### 2-4. ПЕРЕХОДНЫЕ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОБЪЕКТЕ И В КАМЕРЕ ТЕРМОСТАТА

Анализ переходных процессов на основе элементарной математической модели позволяет выявить закономерности и параметры, определяющие динамику теплообмена отдельных элементов системы термостабилизации.

1. Пусть термостат снабжен регулятором температуры, который, управляя подачей мощности  $W_k$  камеры, поддерживает температуру объекта на некотором заданном начальном уровне  $t_{об.н}$ . При стабильных значениях температуры среды  $t_{пр.н}$ ,  $t_{с.н}$  и мощности в объекте  $W_{об.н}$  температура камеры при работающем регуляторе колеблется около среднего значения  $t_{к.н}$ . Если система термостабилизации рассчитана и настроена хорошо, то изменение температуры камеры и объекта при постоянстве величин  $t_{пр.н}$ ,  $t_{с.н}$ ,  $W_{об.н}$  незначительно. Можно сказать, что система термостабилизации работает в установившемся (квазистационарном) режиме, при котором выполняется соотношение (2-28):

$$t_{об.н} = \Lambda_{об}^{-1} W_{об.н} + \eta_{пр} t_{пр.н} + \eta_{об.с} t_{с.н} + \eta_{об.к} t_{к.н} \quad (2-42)$$

Представляет интерес анализ переходного процесса (изменения температуры объекта), вызванного при  $\tau = 0$  внезапным (скачкообразным) изменением одного или нескольких режимных величин  $W_{об}$ ,  $t_{пр}$ ,  $t_{с}$ ,  $t_{к}$  от начальных значений до других стационарных значений, обозначаемых далее  $W_{об.ст}$ ,  $t_{пр.ст}$ ,  $t_{с.ст}$ ,  $t_{к.ст}$ .

Аналогично (2-28) и (2-42) новое стационарное значение температуры объекта  $t_{об.ст}$  определится так:

$$t_{об.ст} = \Lambda_{об}^{-1} W_{об.ст} + \eta_{пр} t_{пр.ст} + \eta_{об.с} t_{с.ст} + \eta_{об.к} t_{к.ст} \quad (2-43)$$

Изменение же температуры объекта  $t_{об}(\tau)$  от начального до конечного значений определяется из уравнения (2-6) и может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{[t_{об.ст} - t_{об}(\tau)]}{(t_{об.ст} - t_{об.н})} = \exp(-\tau/\epsilon_{об}), \quad (2-44)$$

$$\frac{[t_{об}(\tau) - t_{об.н}]}{(t_{об.ст} - t_{об.н})} = 1 - \exp(-\tau/\epsilon_{об}), \quad (2-45)$$

где  $\epsilon_{об}$  находится по формуле (2-16), а  $t_{об.н}$  и  $t_{об.ст}$  — по (2-42) и (2-43).

Полученные уравнения (2-44) или (2-45) описывают переходный процесс изменения температуры объекта, находящегося в камере термостата с работающим регулятором.

Общая длительность переходного процесса или времени установления  $\tau_{уст}$  при 5%-ном недоходе до стационарного состояния, т. е. при

$$\frac{[t_{об}(\tau_{уст}) - t_{об.н}]}{(t_{об.ст} - t_{об.н})} = 0,05, \quad (2-46)$$

составляет  $\tau_{уст} \approx 3 \epsilon_{об}$ .

Величину  $\epsilon_{об}$  можно рассматривать как показатель тепловой инерции объекта по отношению к камере и внешней среде.

С помощью (2-45) рассчитываются частные случаи изменения температуры  $t_{об}(\tau)$  в зависимости от изменения любого из четырех факторов  $W_{об}$ ,  $t_{к}$ ,  $t_{с}$ ,  $t_{пр}$  при неизменном значении остальных трех факторов:

- а) мгновенном изменении температуры среды  $t_{с}$  от  $t_{с.н}$  до  $t_{с.ст}$ ;
- б) изменении температуры камеры от  $t_{к.н}$  до  $t_{к.ст}$ ;
- в) изменении температуры проточной среды от  $t_{пр.н}$  до  $t_{пр.ст}$ ;
- г) мгновенном изменении мощности в объекте от  $W_{об.н}$  до  $W_{об.ст}$ .

Отметим, что уравнения (2-44) или (2-45) справедливы только в тех условиях, когда действующие факторы независимы друг от друга, т. е. изменение одного из них не вызывает изменения остальных факторов.

2. Предположим, что температура объекта каким-либо образом (например, с помощью проточного тепло- или хладоносителя) стабилизирована на некотором уровне  $t_{об.н}$ , температура среды равна  $t_{с.н}$ , а на нагреватель камеры подана мощность  $W_{к.н}$ . При таких стабильных во времени значениях параметров камера входит в стационарный режим, и в соответствии со вторым из уравнений (2-28) ее температура  $t_{к}$  принимает значение

$$t_{к.н} = \Lambda_{к}^{-1} W_{к.н} + \eta_{к.с} t_{с.н} + \eta_{об.к} t_{об.н} \quad (2-47)$$

Любые изменения режимных факторов  $W_{к}$ ,  $t_{с}$ ,  $t_{об}$  вызывают изменение температуры камеры.

Пусть в момент времени  $\tau = 0$  произошло скачкообразное изменение этих факторов до новых стационарных значений  $W_{к.ст}$ ,  $t_{с.ст}$ ,  $t_{об.ст}$ . Тогда изменение температуры камеры  $t_{к}(\tau)$  в переходном процессе от начального  $t_{к.н}$  до нового стационарного значения  $t_{к.ст}$  будет выражаться следующим уравнением:

$$\frac{[t_{к}(\tau) - t_{к.н}]}{(t_{к.ст} - t_{к.н})} = 1 - \exp(-\tau/\epsilon_{к}), \quad (2-48)$$

в котором

$$t_{к.ст} = \frac{1}{\Lambda_{к}} W_{к.ст} + \eta_{к.с} t_{с.ст} + \eta_{об.к} t_{об.ст}, \quad (2-49)$$

а  $\epsilon_{к}$  находится по формуле (2-17). Подобно  $\epsilon_{об}$ , параметр  $\epsilon_{к}$  характеризует тепловую инерционность камеры по отношению к объекту и внешней среде и может быть назван показателем тепловой инерции камеры.

Уравнение (2-48) и его частные случаи справедливы только при взаимной независимости режимных факторов  $W_k$ ,  $t_c$  и  $t_{об}$ .

Расчет влияния нерегулярных (хаотических) воздействий на изменение температуры элементов термостата в общем случае является трудоемкой задачей, требующей специального рассмотрения. Ограничимся элементарными оценками, задавая воздействия в виде периодических (гармонических) функций времени, имеющих амплитуду  $a_i$  и частоту  $\omega$  или период  $T$ , где  $i$  — символ соответствующего воздействия. Уравнения (2-6) и (2-7) совместно с (2-15) позволяют получить полное решение. Однако ответ на главный вопрос (каковы будут амплитуды колебаний температуры объекта  $a_{об i}$  и камеры  $a_{к i}$ , если амплитуда  $i$ -го воздействия  $a_i$  задана?) можно дать непосредственно, зная структуру передаточных функций (2-15) и учитывая линейный и независимый характер изменения влияющих воздействий. В соответствии с (2-6) и (2-15) амплитудно-частотная характеристика для температуры объекта имеет следующий вид:

$$\frac{a_{об i}}{a_i} = k_{об i} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_{об}^2 \omega^2}}, \quad (2-50)$$

где  $k_{об i}$  — коэффициент пропорциональности для  $i$ -го воздействия;  $a_i$  — амплитуда колебаний  $i$ -го воздействия;  $a_{об i}$  — амплитуда изменения температуры объекта в зависимости от  $i$ -го периодического воздействия;  $\omega$  — частота воздействия,  $\omega = 2\pi/T$ .

Коэффициенты  $k_{об i}$  для разных воздействий имеют следующий вид:

Воздействие $i$ . . . . .	$W_{об}(\tau)$	$t_k(\tau)$	$t_c(\tau)$	$t_{пр}(\tau)$
Коэффициент $k_{об i}$ . . . . .	$1/\Lambda_{об}$	$\eta_{об.к}$	$\eta_{об.с}$	$\eta_{пр}$

Аналогично на основе уравнения (2-7) и передаточной функции (2-15) находится амплитудно-частотная характеристика для температуры камеры:

$$\frac{a_{к i}}{a_i} = k_{к i} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_k^2 \omega^2}}, \quad (2-51)$$

где  $a_{к i}$  — амплитуда изменения температуры камеры от  $i$ -го периодического воздействия;  $\varepsilon_k$  — показатель тепловой инерции камеры, определяемый по формуле (2-17).

Коэффициенты  $k_{к i}$  для разных воздействий имеют следующий вид:

Воздействие $i$ . . . . .	$W_k(\tau)$	$t_{об}(\tau)$	$t_c(\tau)$
Коэффициент $k_{к i}$ . . . . .	$1/\Lambda_k$	$\kappa_{об.к}$	$\kappa_{к.с}$

**Пример 2-4.** Колебания температуры камеры термостата (рис. 2-2) при включенном регуляторе происходят с периодом  $T = 20$  с. Амплитуда колебаний оценивается величиной  $a_{t_k} = 2$  К. Определить амплитуду колебаний температуры объекта  $a_{об t_k}$ .

Расчет  $a_{об t_k}$  проводится по формуле (2-50) с учетом найденных ранее значений параметров  $\eta_{об.к}$  и  $\varepsilon_{об}$ :

$$a_{об t_k} = 2 \cdot 0,96 \left[ 1 + \left( 3,1 \cdot 10^3 \cdot \frac{2\pi}{20} \right)^2 \right]^{-1/2} \approx 0,002 \text{ К.}$$

## 2-5. ДИНАМИКА ТЕПЛООБМЕНА РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕРМОРЕГУЛИРОВАНИЯ

Динамика теплообмена термостата без регулятора (разомкнутой системы терморегулирования) определяется решениями уравнений (2-18) и (2-19). В эти уравнения входят изображения всех

независимых воздействий  $W_{об}(\tau)$ ,  $W_k(\tau)$ ,  $t_c(\tau)$ ,  $t_{пр}(\tau)$ , а также начальные значения температур объекта  $t_{об.н}$  и корпуса  $t_{к.н}$ . Задавая закономерности изменения во времени этих воздействий и решая уравнения (2-18) и (2-19), можно получить выражения для оценки температуры объекта  $t_{об}(\tau)$  и камеры термостата  $t_k(\tau)$ .

**Переходный процесс теплообмена термостата.** Как и в § 2-4, принимаем, что до момента времени  $\tau = 0$  режимные факторы имели постоянные значения  $W_{об.н}$ ,  $W_{к.н}$ ,  $t_{с.н}$ ,  $t_{пр.н}$ ; им соответствовали начальные значения температуры объекта  $t_{об.н}$  и камеры  $t_{к.н}$ . Переходный процесс вызван скачкообразным изменением режимных факторов до значений  $W_{об.ст}$ ,  $W_{к.ст}$ ,  $t_{с.ст}$ ,  $t_{пр.ст}$ . Проводя необходимые операции, т. е. подставляя изображения скачкообразных функций каждого из режимных воздействий в уравнение (2-18) и используя табл. 2-1 передаточных функций, после обратного преобразования Лапласа (2-18) находим уравнение, определяющее изменение температуры объекта  $t_{об}(\tau)$  в переходном процессе. Обобщенно оно записывается в следующем виде:

$$t_{об}(\tau) = K \sum_{i=1}^6 t_i k_i f_i(\tau), \quad (2-52)$$

где при  $i = 1, 2, 3$  и  $4$

$$f_i(\tau) = 1 + \frac{b_i - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_1}\right) - \frac{b_i - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_2}\right), \quad (2-53)$$

а при  $i = 5$  и  $6$

$$f_i(\tau) = \frac{(b_i/\varepsilon_2) + 1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_1}\right) - \frac{(b_i/\varepsilon_1) + 1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_2}\right). \quad (2-54)$$

Здесь символом  $i$  обозначен номер воздействия (режимного фактора).

В табл. 2-2 согласно (2-18) приведены обозначения каждого фактора  $i$ , соответствующей ему передаточной функции  $Y_i$ , а также сомножителей  $t_i$ ,  $k_i$  и  $b_i$ , входящих в уравнения (2-52) — (2-53). Значения коэффициентов  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $K$ ,  $\varepsilon_{об}$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\kappa$ ,  $\eta$  находятся согласно (2-21), (2-23), (2-16), (2-13), (2-12).

Таблица 2-2

Коэффициенты уравнения (2-52) переходного процесса объекта

Коэффициент	Номер фактора $i$					
	1	2	3	4	5	6
$Y_i$	$Y_{об\omega_{об}}$	$Y_{об.с}$	$Y_{об.пр}$	$Y_{об\omega_k}$	$Y_{об.ноб}$	$Y_{об.нк}$
$t_i$	$W_{об.ст}$	$t_{с.ст}$	$t_{пр.ст}$	$W_{к.ст}$	$t_{об.н}$	$t_{к.н}$
$k_i$	$1/\Lambda_{об}$	$\Phi_{об.с}$	$\eta_{пр}$	$\eta_{об.к}/\Lambda_k$	$\varepsilon_{об}$	$\varepsilon_k \eta_{об.к}$
$b_i$	$\varepsilon_k$	$b_{об.с}$	$\varepsilon_k$	0	$\varepsilon_k$	0



Температура камеры  $t_k(\tau)$  в переходном процессе находится аналогичным образом на основе уравнения (2-19) и передаточных функций из табл. 2-1 и определяется по уравнению

$$t_k(\tau) = K \sum_{i=1}^6 t_i k_i f_i(\tau), \quad (2-55)$$

в котором функции  $f_i(\tau)$  выбираются при  $i = 1, 2, 3, 4$  согласно (2-53), а при  $i = 5, 6$  — по (2-54).

В табл. 2-3 даны значения коэффициентов  $k_i, t_i, b_i$ , входящих в (2-55), (2-53), (2-54).

Таблица 2-3

Коэффициенты уравнения (2-55) переходного процесса камеры термостата

Коэффициент	Номер фактора $i$					
	1	2	3	4	5	6
$Y_i$	$Y_{к.об.к}$	$Y_{к.с}$	$Y_{к.пр}$	$Y_{к.ш.к}$	$Y_{к.об.н}$	$Y_{к.н.к}$
$t_i$	$W_{об.ст}$	$t_{с.ст}$	$t_{пр.ст}$	$W_{к.ст}$	$t_{об.н}$	$t_{к.н}$
$k_i$	$\eta_{об.к}/\Lambda_{об}$	$\Phi_{к.с}$	$\eta_{пр.к.об.к}$	$1/\Lambda_{к}$	$\epsilon_{об.к.об.к}$	$\epsilon_{к}$
$b_i$	0	$b_{к.с}$	0	$\epsilon_{об}$	0	$\epsilon_{об}$

При  $\tau \rightarrow \infty$  наступает стационарный режим. Получаемые из (2-52) и (2-55) формулы для стационарных температур  $t_{об.ст}$  и  $t_{к.ст}$  тождественны выражениям (2-29) и (2-30).

Уравнения (2-52) — (2-55) определяют обобщенные переходные процессы объекта и термостата при комплексном воздействии всей совокупности режимных факторов. Ниже рассмотрены отдельно два характерных частных случая переходного теплообмена.

**Разогрев объекта и камеры термостата при включении нагревателя камеры.** Внутри камеры располагается пассивный объект ( $W_{об} = 0$ ). Начальные температуры камеры и объекта одинаковы и совпадают с температурами сред, принимаемыми за начало отсчета температуры. Таким образом,  $t_{об.н} = t_{к.н} = t_c = t_{пр} = 0$ .

В момент  $\tau = 0$  включается нагреватель камеры мощностью  $W_{к.ст}$ . Требуется определить закономерности изменения температуры объекта  $t_{об}(\tau)$  и камеры  $t_k(\tau)$ .

Из уравнения (2-52)  $t_{об}(\tau) = K t_4 k_4 f_4(\tau)$  и далее на основе данных табл. 2-2 и уравнения (2-53) запишем

$$\Theta_{об}(\tau) = \frac{t_{об}(\tau)}{t_{об.ст}} = 1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_1}\right) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_2}\right); \quad (2-56)$$

$$t_{об.ст} = \eta_{об.к} \Lambda_{к}^{-1} K W_{к.ст}, \quad (2-57)$$

что соответствует уравнению (2-29).

Для температуры  $t_k(\tau)$  камеры термостата из (2-55) находим

$$t_k(\tau) = K t_4 k_4 f_4(\tau)$$

и из (2-53) и табл. 2-3 получаем

$$\Theta_k(\tau) = \frac{t_k(\tau)}{t_{к.ст}} = 1 + \frac{\epsilon_{об} - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_1}\right) - \frac{\epsilon_{об} - \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_2}\right), \quad (2-58)$$

где стационарное значение температуры камеры [см. формулу (2-30)]

$$t_{к.ст} = K \Lambda_{к}^{-1} W_{к.ст} \quad (2-59)$$

Для оценки длительности нагрева объекта до заданного значения температуры уравнения (2-56) и (2-57) неудобны.

Для завершающей стадии переходного процесса можно получить приближенные расчетные зависимости, предварительно упростив передаточные функции  $Y_{об.ш.к}$  и  $Y_{к.ш.к}$ , приведенные в табл. 2-1:

$$Y_{об.ш.к} \approx \frac{\eta_{об.к} K}{1 + \epsilon_{об.1} s}; \quad Y_{к.ш.к} \approx \frac{K}{1 + \epsilon_{к.1} s}, \quad (2-60)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{об.1} &= \epsilon_1 + \epsilon_2 = K(\epsilon_{об} + \epsilon_k); \\ \epsilon_{к.1} &= \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_{об} = K\epsilon_k + (K-1)\epsilon_{об}. \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

Подставляя (2-60) в уравнение (2-18) и (2-19), после обратного преобразования получаем искомые приближенные выражения

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{об}(\tau) &= \frac{t_{об}(\tau)}{t_{об.ст}} \approx 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_{об.1}}\right); \\ \Theta_k(\tau) &= \frac{t_k(\tau)}{t_{к.ст}} \approx 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_{к.1}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2-62)$$

откуда непосредственно находятся времена  $\tau_{об}$  и  $\tau_k$ , при которых температуры объекта и камеры принимают заданные значения  $t_{об}(\tau_{об})$  и  $t_k(\tau_k)$ .

**Нагрев термостата с пассивным объектом во внешней среде.** Начальные условия  $W_{об} = W_k = 0, t_{об.н} = t_{к.н} = t_{пр} = t_c = 0$ . В момент  $\tau = 0$  температура среды мгновенно увеличивается до значения  $t_{с.ст}$ , которое затем поддерживается постоянным (иными словам, термостат с объектом переносится из среды с нулевой температурой в среду с температурой  $t_{с.ст}$ ). Требуется определить ход разогрева объекта и камеры термостата.

Из выражения (2-52)  $t_{об}(\tau) = K t_2 k_2 f_2(\tau)$  и далее с учетом (2-53) и данных табл. 2-2

$$\Theta_{об}(\tau) = \frac{t_{об}(\tau)}{t_{об.ст}} = 1 + \frac{b_{об.с} - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_1}\right) - \frac{b_{об.с} - \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon_2}\right); \quad (2-63)$$

$$t_{об.ст} = K \Phi_{об.с} t_{с.ст} = (1 - \eta_{пр} K) t_{с.ст}. \quad (2-64)$$

Аналогично с помощью (2-55), (2-53) и табл. 2-3 имеем

$$\Theta_k(\tau) = \frac{t_k(\tau)}{t_{k.ст}} = 1 + \frac{b_{к.с} - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_1}\right) - \frac{b_{к.с} - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_2}\right); \quad (2-65)$$

$$t_{к.ст} = K\varphi_{к.с} t_{с.ст} = (1 - K\chi_{об.к}\eta_{пр}) t_{с.ст}, \quad (2-66)$$

коэффициенты уравнений (2-63) — (2-66) находятся по формулам (2-21) — (2-25).

При отсутствии проточной среды ( $\eta_{пр} = 0$ ), как это следует из (2-64) и (2-66), стационарные температуры объекта и камеры совпадут с температурой среды.

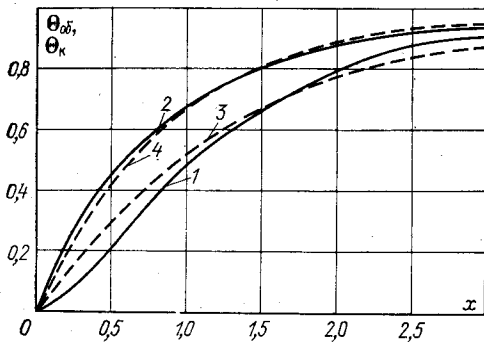


Рис. 2-3. Изменение относительных температур  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  в переходном процессе

Упрощая передаточные функции  $Y_{об.с}$  и  $Y_{к.с}$ , приведенные в табл. 2-1, взамен (2-63) и (2-65) можно получить приближенные выражения для оценки температуры  $t_{об}(\tau)$ ,  $t_{к}(\tau)$  и длительности разогрева объекта и камеры до требуемого предела. Расчеты дают соотношения

$$\Theta_{об}(\tau) = \frac{t_{об}(\tau)}{t_{об.ст}} \approx 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_{об2}}\right);$$

$$\Theta_{к}(\tau) = \frac{t_{к}(\tau)}{t_{к.ст}} \approx 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_{к2}}\right), \quad (2-67)$$

где

$$\varepsilon_{об2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - b_{об.с}; \quad \varepsilon_{к2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - b_{к.с}; \quad (2-68)$$

$t_{об.ст}$ ,  $t_{к.ст}$  определяются по (2-64) и (2-66).

**Пример 2-5.** Рассчитать переходный процесс изменения температуры объекта и корпуса термостата, обусловленный подачей на нагреватель камеры постоянной мощности  $W_{к} = 16,7$  Вт.

При условии сохранения исходных параметров термостата (см. примеры 2-1 — 2-5) температуры  $t_{об}(\tau)$  и  $t_{к}(\tau)$  определяются по (2-56) и (2-58) соответственно. Стационарные значения температур  $t_{об.ст}$  и  $t_{к.ст}$  те же, что и в примере 2-2. Предварительно по уравнениям (2-22) и (2-21) находим  $\nu = 5,27$ ;  $\varepsilon_1 = 2,23 \cdot 10^3$  с;  $\varepsilon_2 = 7,34 \cdot 10^3$  с; по (2-23) находим  $K = 1,386$  и, подставляя в (2-56) и (2-58), получаем выражения для расчета относительных температур  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  в переходном процессе:  $\Theta_{об}(x) = 1 - 1,436 \exp(-x) + 0,436 \exp(-3,29x)$ ,  $\Theta_{к}(x) = 1 - 0,834 \exp(-x) - 0,166 \exp(-3,29x)$ , где  $x = \tau/\varepsilon_2 = \tau/7,34 \cdot 10^3$ .

Графики функций  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  (кривые переходного процесса 1 и 2 соответственно) приведены на рис. 2-3. На этом же рисунке представлены результаты расчета переходного процесса (кривые 3 и 4) по приближенным формулам  $\Theta_{об}(x) = 1 - \exp(-0,767x)$ ,  $\Theta_{к}(x) = 1 - \exp(-1,131x)$ , получаемым на основе выражений (2-62).

Из рис. 2-3 следует, что изменение температуры корпуса происходит по регулярному закону, близкому к экспоненциальному, как это видно из сравнения кривых 2 и 4. Изменение температуры объекта (кривая 1) в начальной стадии ( $0 < x < 0,6$ ) нерегулярное, затем при  $x > 0,7$  температура объекта будет практически определяться одной из экспонент (2-56):  $\Theta_{об}(x) \approx 1 - 1,44 \exp(-x)$ .

На всей стадии разогрева существует значительная разница в температуре объекта и камеры. При  $x > 4$  практически наступает стационарный режим:  $\Theta_{об}(4) = 0,974$ ;  $\Theta_{к}(4) = 0,989$ .

**Пример 2-6.** Исследовать динамику разогрева пассивного термостата ( $W_{об} = W_{к} = 0$ ,  $t_{об.н} = t_{к.н} = 0$ ,  $\eta_{пр} = 0$ ) при изменении температуры внешней среды от  $t_{с.н} = 0$  до  $t_{с.ст}$ . Необходимые численные значения параметров взять из предыдущих примеров.

Стационарные значения температуры объекта и камеры определяются по формулам (2-64) и (2-65) и при отсутствии проточной среды ( $\eta_{пр} = 0$ ) будут равны температуре среды  $t_{с.ст}$ . Для расчета переходного процесса воспользуемся уравнениями (2-63) и (2-65). Предварительно найдем по (2-24) и (2-25):  $\varphi_{об.с} = 0,722$ ;  $\varphi_{к.с} = 0,722$ ;  $b_{об.с} = 0,210 \cdot 10^3$  с,  $b_{к.с} = 3,03 \times 10^3$  с. Из (2-63) и (2-65) получаем

$$\Theta_{об}(x) = 1 - 1,395 \exp(-x) + 0,395 \exp(-3,29x);$$

$$\Theta_{к}(x) = 1 - 0,843 \exp(-x) - 0,157 \exp(-3,29x).$$

Графики изменения температуры  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  приведены на рис. 2-4 (кривые 1 и 2 соответственно). Там же показаны результаты расчета по приближенным (одноэкспоненциальным) зависимостям (кривые изменения температуры 3 и 4)

$$\Theta_{об}(x) = 1 - \exp(-0,784x);$$

$$\Theta_{к}(x) = 1 - \exp(-1,122x),$$

найденным из (2-67).

Как и в примере 2-5, разница в значениях температуры  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  сохраняется на всей стадии разогрева (см. рис. 2-4, кривые 1 и 2). Общий ход изменения кривых  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  во времени, как следует из сопоставления соответствующих графиков на рис. 2-3 и 2-4, оказывается весьма близким и слабо зависящим от места приложения возмущающего воздействия (нагреватель камеры или температура внешней среды).

При  $x = 4$  расчеты по (2-63) и (2-65) дают  $\Theta_{об}(4) = 0,974$ ,  $\Theta_{к}(4) = 0,985$ .

## 2-6. ПРОХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОСТАТА

В этом параграфе будет дана лишь количественная оценка уменьшения амплитуды температурных волн, создаваемых периодически действующими источниками этих волн.

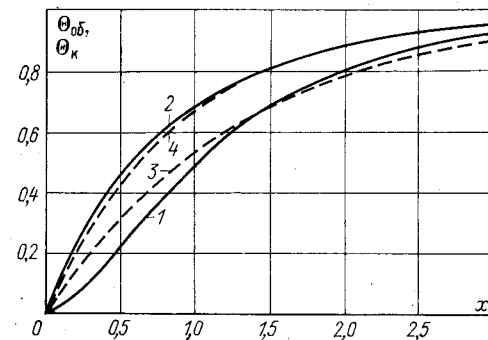


Рис. 2-4. Изменение температур  $\Theta_{об}(x)$  и  $\Theta_{к}(x)$  в переходном процессе при изменении температуры внешней среды

Пусть каждый из независимых режимных факторов  $W_k(\tau)$ ,  $W_{об}(\tau)$ ,  $t_{пр}(\tau)$ ,  $t_c(\tau)$  гармонически изменяет свою интенсивность с частотой  $\omega$  около некоторого среднего (для упрощения — нулевого) значения с амплитудой  $a_j$ , где  $j$  — символ воздействия ( $j = об, к, t_{пр}$  или  $t_c$ ). Тогда амплитуда ( $a_{эj}$ ) изменения температуры объекта ( $э = об$ ) или корпуса ( $э = к$ ) определяется с помощью амплитудно-частотной характеристики  $A_{эj}(\omega)$  для  $j$ -го воздействия:

$$A_{эj}(\omega) = \frac{a_{эj}}{a_j} = \text{mod } Y_{эj}(s) \Big|_{s=i\omega}, \quad (2-69)$$

где  $Y_{эj}(s)$  — передаточная функция для одного из четырех воздействий  $W_{об}(\tau)$ ,  $W_k(\tau)$ ,  $t_{пр}(\tau)$  или  $t_c(\tau)$ , выбираемая из табл. 2-1. В обобщенной записи передаточные функции табл. 2-1 имеют вид

$$Y_{эj}(s) = \frac{k_j(1 + b_j s)}{\Delta} = K k_j \frac{1 + b_j s}{(1 + \varepsilon_{1s})(1 + \varepsilon_{2s})}, \quad (2-70)$$

где коэффициенты  $k_j$  и  $b_j$  для объекта и корпуса выбираются в соответствии с воздействием (см. § 2-4).

Подставляя (2-70) в (2-69) и определяя модуль  $Y_{эj}(i\omega)$ , получаем уравнения амплитудно-частотных характеристик

$$A_{эj}(\omega) = \frac{a_{эj}}{a_j} = K k_j \sqrt{\frac{1 + b_j^2 \omega^2}{(1 + \varepsilon_1^2 \omega^2)(1 + \varepsilon_2^2 \omega^2)}}. \quad (2-71)$$

**Изменение мощности.** Пусть в результате периодического переключения реле регулятора с частотой  $\omega$  амплитуда изменения мощности  $W_k(\tau)$  в камере оценивается величиной  $a_{\omega_k}$ . Определить амплитуды изменения температуры камеры  $a_{к\omega_k}$  и объекта  $a_{об\omega_k}$ .

С помощью выражения (2-71) и табл. 2-3 находим

$$A_{к\omega_k} = \frac{a_{к\omega_k}}{a_{\omega_k}} = \frac{K}{\Lambda_k} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_{об}^2 \omega^2}{(1 + \varepsilon_1^2 \omega^2)(1 + \varepsilon_2^2 \omega^2)}}. \quad (2-72)$$

Аналогично из (2-71) и табл. 2-2 для амплитуды колебаний температуры объекта имеем

$$A_{об\omega_k} = \frac{a_{об\omega_k}}{a_{\omega_k}} = \frac{K \eta_{об.к}}{\Lambda_k} \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_1^2 \omega^2)(1 + \varepsilon_2^2 \omega^2)}}. \quad (2-73)$$

**Пример 2-7.** Управление процессом термостатирования в квазиустойчивом режиме работы термостата производится циклическим изменением мощности камеры с периодом  $T = 20$  с и амплитудой  $a_{\omega_k} = 20$  Вт. Определить размах колебаний температуры корпуса и объекта, предполагая для упрощения, что режим изменения мощности камеры подчиняется простому гармоническому закону.

С учетом сделанной предпосылки для расчета амплитуд температуры корпуса  $a_{к\omega_k}$  и объекта  $a_{об\omega_k}$  можно воспользоваться формулами (2-72) и (2-73). При  $T = 20$  с,  $\omega = 0,314$  с<sup>-1</sup>, и, выбирая из предыдущих примеров значения входящих в (2-72) и (2-73) параметров, находим  $a_{к\omega_k} = 0,05$  К,  $a_{об\omega_k} \approx 5 \cdot 10^{-5}$  К; таким образом, данный режим работы регулятора не влияет на температуру объекта.

При этих условиях для оценки амплитуды  $a_{к\omega_k}$  можно взамен (2-72) использовать простую зависимость (2-51), из которой находим  $a_{к\omega_k} = 0,05$  К.

**Изменение температуры.** Температура внешней среды  $t_c(\tau)$  пульсирует относительно некоторого среднего значения с амплитудой  $a_{t_c}$ . Требуется оценить амплитуды колебаний температуры объекта и корпуса.

Из (2-71) и табл. 2-2 имеем

$$A_{обt_c} = \frac{a_{обt_c}}{a_{t_c}} = K \Phi_{об.с} \sqrt{\frac{1 + b_{об.с}^2 \omega^2}{(1 + \varepsilon_1^2 \omega^2)(1 + \varepsilon_2^2 \omega^2)}}, \quad (2-74)$$

и из (2-71) и табл. 2-3

$$A_{ктc} = \frac{a_{ктc}}{a_{t_c}} = K \Phi_{к.с} \sqrt{\frac{1 + b_{к.с}^2 \omega^2}{(1 + \varepsilon_1^2 \omega^2)(1 + \varepsilon_2^2 \omega^2)}}. \quad (2-75)$$

Сравнивая (2-74) и (2-75), находим отношение амплитуд колебаний объекта и корпуса:

$$\frac{a_{обt_c}}{a_{ктc}} = \frac{\Phi_{об.с}}{\Phi_{к.с}} \sqrt{\frac{1 + b_{об.с}^2 \omega^2}{1 + b_{к.с}^2 \omega^2}}. \quad (2-76)$$

Выражения (2-74) — (2-76) могут быть использованы для оценки гашения температурных волн по мере их прохождения из внешней среды внутрь термостата.

**Пример 2-8.** Оценить возможность прохождения температурных волн, вызванных суточным ( $T = 24$  ч) ходом изменения температуры внешней среды, через пассивный (без регулятора) термостат, предполагая гармоническое ее изменение с амплитудой  $a_{t_c} = 10$  К. Необходимые параметры взять из предыдущих примеров.

Амплитуды изменения температуры объекта и корпуса находятся из выражений (2-74) и (2-75). Расчеты дают  $a_{обt_c} = 8,7$  К,  $a_{ктc} = 8,9$  К, откуда следует, что без активного управления рассчитывать на сколько-нибудь удовлетворительную защиту от теплового воздействия внешней среды не приходится.

## МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА ОДНОРОДНОГО ОБЪЕКТА

### 3-1. ВЫБОР МОДЕЛИ

Для обеспечения тепловой надежности различных объектов нужно последовательно решить три задачи:

1) определить температурное поле объекта или значения температуры в некоторых выбранных его точках;

2) изменить температуру путем новых конструктивных решений в объекте, т. е. изменений его теплофизических и геометрических свойств;

3) обеспечить управление тепловым режимом объекта путем дозировки тепловых воздействий с помощью автоматических систем регулирования.

Решение этих задач на стадии проектирования объекта требует разработки тепловых моделей, адекватно отражающих его структуру и условия теплообмена.

Существуют различные формулировки понятия модели. П. Эйхофф [63], например, определяет модель как изображение существенных сторон реальной или конструируемой системы, в удобной форме отражающее информацию о системе. В понятие системы включается совокупность различных объектов, выделенных из многообразия окружающего мира. Система характеризуется связями между входными и выходными воздействиями (сигналами). Тип связей зависит от многих причин: структуры системы, свойств среды и т. п.

Модели бывают разные: концептуальные (феноменологические), физические (эмпирические) и математические (аналитические). Концептуальные модели вырабатывают систему понятий и определений, позволяющих проводить последующие исследования явления или объекта наблюдений. Модели физические раскрывают структуру объекта и дают качественное объяснение явлений, истолкование результатов опытов. Математические модели дают количественную оценку явлений, прогнозируя их ход и развитие.

Объект, для которого вырабатывается модель, может реально существовать или проектироваться. В инженерной практике знание модели на стадии проектирования является особенно ценным. Для одного и того же объекта может быть предложено несколько моделей (физических или математических) в зависимости от целей конкретного исследования.

В дальнейшем в конкретных задачах будем говорить о моделях системы тепловой защиты и ее составляющих частях: защищаемый от теплового влияния объект, элементы термостата, автоматический регулятор, измеритель температуры и др.

Объект исследования (прибор, устройство, агрегат) обладает множеством характеристик, в нем могут происходить различные

физические явления, однако наибольший интерес представляют явления тепловые, поскольку решается задача управления его температурным полем. Следовательно, для рассмотрения возможностей тепловой защиты должна разрабатываться тепловая физическая модель объекта и предложен путь количественного описания процессов теплопередачи как математической модели теплового объекта.

В инженерной практике очень важна выработка некоторой оптимальной математической модели. Попытка учесть все взаимосвязи и особенности строения объекта приводит к громоздкой модели. Из-за сложности анализа такой математической модели ее полезность становится сомнительной. Скрупулезно исследуя процессы теплопередачи в объекте, можно не получить ожидаемого практического результата в виде готовой конструкции системы терморегулирования. Упрощая модель, сталкиваясь с опасностью утраты ее реальных свойств, что впоследствии приводит к грубым просчетам. Созданная на основе сильной схематизации объекта система защиты при ее реальном испытании не даст ожидаемых результатов или вообще может вывести объект из строя.

К сожалению, для реальных многоэлементных объектов трудно предложить четкую стратегию получения оптимальной модели, совмещающей простоту математического описания и высокую точность количественных результатов. Во многих прикладных задачах успешное их решение определяется сочетанием строгости научного подхода с инженерным искусством.

Можно отметить несколько сложившихся подходов к выбору и разработке тепловых моделей объектов.

1. Одноэлементная модель. Эта простейшая математическая модель теплообмена объекта была рассмотрена в гл. 2. Реальный объект вне зависимости от структуры и свойств заменяется телом определенной формы и размеров (рис. 3-1, а), вещество которого имеет бесконечно высокую теплопроводность и полную теплоемкость, равную, как правило, суммарной теплоемкости реального объекта. Возможности применения одноэлементной модели ограничены допущением о равномерности поля температур по объему объекта.

Детализация структуры объекта приводит к более точным количественным формулировкам процессов его теплообмена.

2. Многоэлементная модель с сосредоточенными параметрами (рис. 3-1, б). При таком подходе объект разделяется на  $m$  составных элементов, каждый из которых имеет определенную теплоемкость  $C_m$  и характеризуется собственным значением температуры  $t_m(\tau)$ , единственным для каждого элемента (рис. 3-1, б). Теплообмен такого элемента с окружающей средой или соседними элементами характеризуется дифференциальным уравнением первого порядка, а теплообмен объекта в целом — системой  $m$  уравнений первого порядка, содержащей искомые температуры всех  $m$  элементов, температуры внешних и внутренних сред, источников или стоков тепла.

Многоэлементная модель обладает значительно ббльшей информационной возможностью по сравнению с элементарной одноэлементной моделью. Результативность использования такой модели во многом зависит от того, насколько верно разделен реальный объект на элементы, заданы теплофизические параметры для каждого элемента и, особенно, значение тепловых проводимостей между элементами. Оценка этих сосредоточенных параметров (теплоемкость, тепловые проводимости) по существу является самостоятельной и, пожалуй, главной задачей при разработке многоэлементной модели.

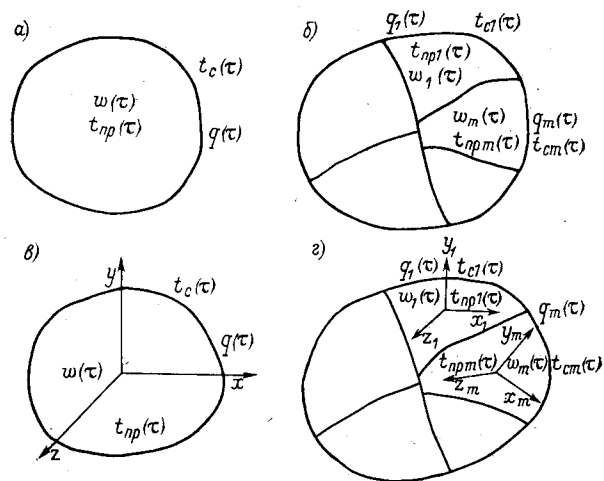


Рис. 3-1. Модели объекта: а — одноэлементная; б — многоэлементная с сосредоточенными параметрами; в — модель квазиоднородного объекта; г — многоэлементная с распределенными параметрами

Методы и примеры построения математических тепловых моделей радиоэлектронных аппаратов подробно рассмотрены в монографиях [21, 22].

3. Модель квазиоднородного объекта (рис. 3-1, в). Если реальный объект представляет тесную совокупность многих элементов с близкими значениями теплофизических свойств, то становится обоснованным отображение объекта как некоторого однородного тела с заданными истинными или эффективными значениями его теплофизических параметров. Математической моделью такого однородного тела является дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных (уравнение Фурье), решая которое, можно найти нестационарное трехмерное поле температур внутри объекта  $t(x, y, z, \tau)$  при заданных граничных и начальных условиях теплообмена. Методы и примеры решения подобных задач изложены в курсах по теории теплопроводности [27, 32, 40].

В литературе по управлению процессами математические модели, представляемые в виде уравнений в частных производных, часто называют моделями с распределенными параметрами [7, 49].

Если специфика исследуемого объекта и условий его теплообмена такова, что удастся подобрать готовую модель однородного объекта, т. е. использовать уже имеющееся решение или модифицировать его, то такой выбор дает ряд преимуществ по сравнению с предыдущими моделями: возможность изучения пространственно-временных особенностей поля температур в объекте, получение приближенных соотношений, обоснование перехода к простым моделям и т. п. Однако использование моделей объектов с распределенными параметрами (получение нестационарных аналитических решений двух- и трехмерных уравнений теплопроводности для объектов сложной формы) практически наталкивается на серьезные математические трудности. Преодоление их возможно при использовании средств дискретной или аналоговой вычислительной техники, что, как правило, сопровождается предварительным переходом от моделей с распределенными параметрами к моделям с сосредоточенными параметрами.

4. Многоэлементные модели с распределенными параметрами являются логическим обобщением названных выше упрощенных моделей. Исходя из реальной структуры объекта, формулируются уравнения теплопроводности Фурье для каждого физически однородного элемента и записываются граничные и начальные условия теплообмена (рис. 3-1, г). Постановка задачи и формальная запись соответствующих уравнений занимает немного времени. Значительно сложнее оценить эффективность использования этих моделей. Действительно, возможности аналитического решения системы многомерных уравнений в частных производных жестко ограничены, а численные приемы анализа, как отмечалось выше, означают отказ от исходных обобщенных моделей и их замену более простыми многоэлементными моделями с сосредоточенными параметрами. Вместе с тем, при ряде упрощающих обстоятельств (малое число элементов, одномерность процессов и др.) строгий анализ процессов теплопроводности позволяет получать эффективные параметрические и численные оценки на отдельных этапах расчета полей температур в исследуемом объекте.

### 3-2. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА ОБЪЕКТА ПРИ КОМПЛЕКСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Широкое применение в технике систем автоматического управления тепловыми режимами, а также развитие систем автоматического проектирования объектов ставят задачу унификации приемов, применяемых при разработке тепловых моделей объектов и их обобщенном представлении, которые удовлетворяли бы ряду требований:

а) одна модель охватывает объекты различной формы и свойств;

б) пригодность модели для описания тепловых режимов при комплексном тепловом нагружении объекта, т. е. при учете одновременного воздействия нескольких режимных факторов, различным образом изменяющихся во времени;

в) использование тепловой модели для анализа систем автоматического управления или построения более сложных и информативных моделей теплообмена;

г) возможность использования одномерной модели для оценки характерных температур объектов с неоднородным полем температуры.

Сформулированные требования являются достаточно жесткими и могут быть удовлетворены при ряде упрощающих ограничений и некоторой потере точности предлагаемых решений. Опыт построения линейных тепловых моделей объектов с преимущественно одномерным распределением поля температуры изложен в работах [40, 55].

Одномерное уравнение теплопроводности содержит одну пространственную  $r$  и временную  $\tau$  координаты и определяет температурное поле объекта функциональной зависимостью  $t(r, \tau)$ . Такая закономерность строго выполняется для сравнительно простых однородных по составу объектов правильной формы, обладающих центром, осью или плоскостью симметрии при условии равномерности распределения (по поверхности или объему) тепловых воздействий, определяющих теплообмен рассматриваемого объекта. Отклонение от названных условий усложняет характер процесса, приводя к отступлениям от одномерного распределения температуры  $t(r, \tau)$ . Несмотря на эти ограничения, одномерные модели могут быть использованы для приближенной оценки характерных температур — центральной  $t_n(\tau)$ , среднеповерхностной  $t_s(\tau)$  и среднеобъемной  $t_v(\tau)$  — объектов различной формы, хотя реальное распределение температуры в них и будет отличаться от одномерного.

Итак, пусть объект представляет собой некоторое однородное (или близкое к однородному) тело, имеющее полный объем  $V$  и наружную поверхность  $S$ . Теплофизические свойства вещества тела определяются его теплопроводностью  $\lambda$ , коэффициентом температуропроводности  $a$ , плотностью  $\gamma$  и удельной теплоемкостью  $c$ . Теплофизические свойства вещества тела не меняются со временем и не зависят от температуры.

Рассматриваемое тело не имеет сильных искажений формы (большие вмятины, наросты, лучи, внутренние полости), т. е. относится к классу выпуклых многогранников [64].

Будем предполагать, что тепловое состояние тела определяется четырьмя следующими тепловыми воздействиями (рис. 3-2):

- 1) температурой  $t_c(\tau)$  внешней среды;
- 2) температурой  $t_{np}(\tau)$  среды, проходящей сквозь тело;
- 3) внутренними источниками (стоками) теплоты, равномерно

распределенными по объему  $V$ , плотность которых в расчете на единицу объема  $\omega(\tau)$ ;

4) внешними источниками теплоты, равномерно распределенными по поверхности  $S$  тела, плотность которых в расчете на единицу поверхности есть  $q(\tau)$ .

Наличие среды с температурой  $t_{np}(\tau)$ , проходящей сквозь тело, означает, что тело в основе своей представляет некоторую упорядоченную структуру с открытыми взаимно сообщающимися порами, т. е. тело должно рассматриваться как некоторая упорядоченная изотропная структура с эффективными значениями коэффициентов  $a, \lambda, c, \gamma$ , которые зависят от физических особенностей основы (скелета) тела и свойство пронизывающей его среды.

Интенсивность теплообмена тела с внешней средой характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_c$ , который сохраняет неизменное значение для всех участков поверхности тела. Интенсивность теплообмена с внутренней средой определяется объемным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_{np}$ , который также остается постоянным для всех элементов объема тела.

При сделанных предпосылках задача теплопроводности является линейной.

Как известно, постановка любой физической задачи требует предварительного описания геометрических свойств объекта. Количественные отображения этих свойств (характерные размеры, уравнения поверхности или объема, различные дифференциальные геометрические параметры) находятся после выбора определенной системы координат, например, декартовой  $x, y, z$ . Причем для каждого реального тела эти операции выполняются индивидуально.

Для упрощения описания геометрических свойств выберем иной, более простой, путь. С этой целью возьмем одну координату  $r$  с началом отсчета в точке 0 (рис. 3-2) и введем некоторую образующую поверхность  $\sigma(r)$ , однозначно зависящую от координаты  $r$ . Потребуем, чтобы при  $r = 0$  эта поверхность стягивалась в точку 0, т. е.

$$\sigma(r)|_{r=0} = 0, \quad (3-1)$$

а с ростом  $r$  образовывала некоторое тело, причем при определенном значении  $r = L$  площадь поверхности этого тела (модели) чис-

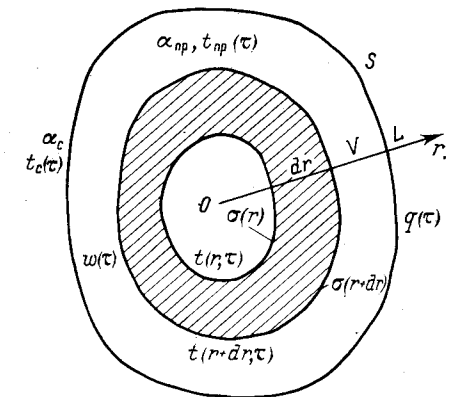


Рис. 3-2. Одномерная модель объекта термостатирования

ленно равнялась бы площади поверхности  $S$  реального объекта:

$$\sigma(r)|_{r=L} = S. \quad (3-2)$$

Изменению координаты  $r$  тела на  $dr$  соответствует изменение объема на  $dv$ , равное

$$dv = \sigma(r) dr. \quad (3-3)$$

Потребуем дополнительно, чтобы полный объем модели был равен объему реального объекта, т. е. выполнялось условие

$$V = \int_0^L dv = \int_0^L \sigma(r) dr. \quad (3-4)$$

Таким образом, поверхность  $\sigma(r)$ , развиваясь (увеличиваясь) с ростом координаты  $r$  в соответствии с условиями (3-1) — (3-4), создает тело. Чтобы форма тела точнее передавала геометрические свойства реального объекта, нужно позаботиться особо о виде функции  $\sigma(r)$ .

Характерный линейный отрезок  $L$  условимся называть определяющим размером геометрической модели объекта или определяющим размером тела.

Необходимо пояснить, что координата  $r$  тела непосредственно не связана с обычными (например, декартовыми) координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  реального тела; ее начало соответствует такой точке внутри тела, где градиент температур равен нулю. Для тел правильной формы, имеющих оси или плоскости симметрии, местоположение точки  $0$  координаты  $r$  совпадает с центром тяжести тела.

Из условия одномерности процесса теплопроводности следует, что поверхности  $\sigma(r)$  являются изотермическими поверхностями тела (модели).

Таким образом, переход от реального объекта и процесса к модели означает:

1) принятие одномерности распределения температуры  $t(r, \tau)$  в реальном объекте;

2) замену объекта моделью при сохранении его интегральных геометрических свойств объема  $V$  и поверхности  $S$ .

Значения теплофизических ( $a$ ,  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\gamma$ ) и теплообменных ( $\alpha_c$ ,  $\alpha_{np}$ ) характеристик объекта и модели остаются одинаковыми.

Согласование значений температуры в объекте и модели взаимосвязано с выбором определяющего размера  $L$  и образующей поверхности  $\sigma(r)$ . Рекомендации по выбору  $\sigma(r)$  и нахождению  $L$  будут даны ниже.

Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности, определяющее поле температуры  $t(r, \tau)$  для модели объекта (рис. 3-2), выводится методом теплового баланса и имеет следующий вид [64]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\alpha_{np}}{\lambda} t_c \right] + \frac{1}{c\gamma} \omega + \frac{\alpha_{np}}{c\gamma} t_{np}. \quad (3-5)$$

Из условия экстремума температуры в центральной области тела следует, что

$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (3-6)$$

Теплообмен на поверхности  $S$  тела происходит по закону Ньютона, поэтому

$$\left( \lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_c t \right) \Big|_{r=L} = q + \alpha_c t_c. \quad (3-7)$$

В начальный момент времени

$$t(r, \tau) \Big|_{\tau=0} = t_n(r). \quad (3-8)$$

Одномерное уравнение теплопроводности (3-5) совместно с граничными условиями (3-6), (3-7) и начальным условием (3-8) является исходной записью математической модели однородного объекта, которая в дифференциальной форме устанавливает взаимосвязь между входными воздействиями на объект:  $t_c(\tau)$ ,  $t_{np}(\tau)$ ,  $q(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$  и выходным воздействием — температурой  $t_c(r, \tau)$  на любой из поверхностей  $\sigma(r)$  модели.

Дифференциальному уравнению теплообмена (3-5) соответствует интегральное уравнение теплообмена, имеющее следующий вид:

$$\frac{dt_v}{d\tau} + \frac{\alpha_{np}}{c\gamma} t_v + \frac{\alpha_c S}{c\gamma V} t_s = \frac{\alpha_c S}{c\gamma V} \left( t_c + \frac{1}{\alpha_c} q \right) + \frac{\alpha_{np}}{c\gamma} \times \left( t_{np} + \frac{1}{\alpha_{np}} \omega \right). \quad (3-9)$$

Уравнение (3-9) устанавливает взаимосвязь между среднеобъемной  $t_v(\tau)$  и среднеповерхностной  $t_s(\tau)$  температурами тела и тепловыми воздействиями  $t_c(\tau)$ ,  $t_{np}(\tau)$ ,  $q(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$ .

Системы уравнений (3-5) — (3-8) или (3-9), (3-8) являются линейными тепловыми моделями одномерных (или близких к ним) процессов теплообмена различных объектов. Получение конкретных зависимостей определяется выбором метода решения.

### 3-3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА ПРИ ОБОБЩЕННЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В линейной теории регулирования широко используется понятие передаточной функции объекта, связывающей величины на входе и выходе объекта со структурой объекта, т. е. устанавливающей динамические закономерности между входным и выходным сигналами.

Применяя к (3-5) — (3-8) интегральное преобразование Лапласа [20, 40], можно найти общее соотношение, связывающее изображение  $T(\rho, s)$  температуры  $t(\rho, \tau)$  с тепловыми воздействиями [64], имеющее вид

$$T(\rho, s) = Y_e(\rho, s) Z_e(s) + Y_i(\rho, s) [Z_i(s) + z_n]. \quad (3-10)$$

Здесь

$$Z_e(s) = T_c(s) + \alpha_c^{-1} Q(s); \quad Z_i(s) = T_{np}(s) + \alpha_{np}^{-1} W(s) \quad (3-11)$$

являются изображениями переменных

$$z_e(\tau) = t_c(\tau) + \alpha_c^{-1} q(\tau); \quad z_i(\tau) = t_{np}(\tau) + \alpha_{np}^{-1} w(\tau); \quad (3-12)$$

$$z_n = c\gamma_{nv}^t / \alpha_{np}, \quad (3-13)$$

где  $t_{nv}$  — среднее по объему тела значение начальной температуры  $t_n(\tau)$ ;  $\rho = r/L$  — относительная координата;  $s$  — параметр преобразования Лапласа.

Индексы  $e$  и  $i$  соответственно относятся к внешнему (*environment*) и внутреннему (*inner*) воздействиям.

Функцию  $z_e(\tau)$  и ее лапласовское изображение  $Z_e(s)$ , определяющие теплообмен тела при суммарном воздействии температуры внешней среды и источников теплоты на поверхности, будем называть обобщенным внешним тепловым воздействием. Функцию  $z_i(\tau)$  и ее изображение  $Z_i(s)$ , отражающие суммарное влияние внутренних энергетических факторов, по аналогии назовем обобщенным внутренним тепловым воздействием.

Комплекс  $z_n$  отражает влияние начального теплового состояния тела (начального распределения температуры) на его теплообмен при  $\tau > 0$ .

Изображения воздействий связаны с изображением температуры тела посредством функций  $Y_e(\rho, s)$  и  $Y_i(\rho, s)$ , которые являются передаточными функциями для температуры тела по отношению к внешнему и внутреннему тепловым воздействиям. Особенность этих функций состоит в том, что они определяются только собственными параметрами тела (размеры, форма, теплофизические свойства, коэффициенты теплообмена) и не зависят от закона изменения режимных факторов и их значений. Исследуемое тело можно рассматривать как тепловую систему, преобразующую входные воздействия  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$  в выходную величину — температуру тела  $t(\rho, \tau)$ .

На основе соотношения (3-10) можно получить уравнения для определения изображений центральной  $T_n(s)$ , среднеповерхностной  $T_S(s)$  и среднеобъемной  $T_V(s)$  температур тела:

$$\left. \begin{aligned} T_n(s) &= Y_{en}(s) Z_e(s) + Y_{in}(s) [Z_i(s) + z_n], \\ T_S(s) &= Y_{eS}(s) Z_e(s) + Y_{iS}(s) [Z_i(s) + z_n], \\ T_V(s) &= Y_{eV}(s) Z_e(s) + Y_{iV}(s) [Z_i(s) + z_n], \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

которые находятся из (3-10) соответственно при  $\rho = 0$ ,  $\rho = 1$  и в результате интегрирования по объему тела с учетом соотношений (3-3), (3-4).

Структура передаточных функций определяется в процессе решения системы (3-5) — (3-8). Возможности получения строгих аналитических решений жестко ограничены выбором функций  $\sigma(r)$ .

Для сплошных тел остановимся на следующей зависимости:

$$\sigma(\rho) = S \left( \frac{r}{L} \right)^n = S\rho^n. \quad (3-15)$$

Формула (3-15) имеет простой вид, что облегчает интегрирование уравнения (3-5), поскольку множитель, учитывающий в (3-5) влияние формы объекта, определяется единственным коэффициентом  $n$ :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} = \frac{n}{r}. \quad (3-16)$$

Функция (3-15) совместно с (3-3) и (3-4) точно воспроизводит геометрические свойства тел канонической формы (шар, неограниченный цилиндр и пластина), что нетрудно проверить, полагая последовательно  $n = 2$ ; 1 и 0.

Поскольку распределение температуры в этих телах одномерное, уравнение (3-5) с учетом (3-16) является для них точной формулировкой задачи теплопроводности.

Подставляя (3-15) в соотношения (3-2) — (3-4), находим взаимосвязь между геометрическими параметрами  $L$ ,  $S$ ,  $V$  и коэффициентом  $n$ :

$$V/S = L/(n+1). \quad (3-17)$$

Коэффициент  $n$  будем называть фактором формы тела.

Вопрос о выборе определяющего размера  $L$  для тела сложной формы не имеет единственного решения. В качестве определяющего размера реального объекта может быть выбран радиус или половина толщины равновеликого ему по поверхности основного тела (шар, цилиндр или пластина):

$$L = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}; \quad L = \frac{fS}{2\pi h}; \quad L = 0,5h \quad (S/S_{оч}). \quad (3-18)$$

Формулы (3-18) записаны для случаев, когда реальное тело относится соответственно к классу тел шаровой, цилиндрической или пластинчатой формы, где  $h$  — высота или толщина реального тела. Если основные размеры реального тела (длина, ширина и высота) одного и того же порядка и возникают сомнения относительно выбора той или иной из формул (3-18), определяющий размер тела  $L$  может быть найден по формуле

$$\frac{2}{L} = \frac{1}{L_{\min}} + \frac{1}{L_{\max}}, \quad (3-19)$$

где  $L_{\min}$  и  $L_{\max}$  — минимальный и максимальный размеры тела от центра до его поверхности.

Найденное по формулам (3-18) или (3-19) значение  $L$  подставляется в формулу (3-17), из которой определяется фактор формы тела  $n$ . При этом необходимо помнить, что объем  $V$  и поверхность  $S$  математической модели равны объему и поверхности реального тела.

Более общий способ определения  $L$  и  $n$  для сплошного тела различной формы предполагает сравнение реального тела с трехосным эллипсоидом, эллиптическим цилиндром или пластиной и описан в работе [54].

Структура передаточных функций, входящих в выражения (3-10) и (3-14), при выборе  $\sigma(\rho)$  по выражению (3-15) определена в работе [64] и представлена в табл. 3-1, где введены следующие обозначения:

$$\beta = \mu L; \quad \mu = \sqrt{\frac{\alpha_{np}}{\lambda} + \frac{s}{a}}; \quad (3-20)$$



$$\nu = \frac{(n-1)}{2}; \quad \zeta = \frac{\alpha_c L}{\lambda}; \quad (3-21)$$

$$G(s) = \beta^{-\nu} [\zeta I_\nu(\beta) + \beta I_{\nu+1}(\beta)]; \quad (3-22)$$

$\Gamma(\nu)$  — гамма-функция произвольного вещественного аргумента  $\nu$ ;  $I_\nu$  — модифицированные функции Бесселя с произвольным вещественным индексом  $\nu$ .

Таблица 3-1

Передаточные функции для температуры объекта

Температура	$Y_e$	$Y_i$
Локальная $t(\rho, \tau)$	$Y_e(\rho, s) = \frac{\zeta(\beta\rho)^{-\nu} I_\nu(\beta\rho)}{G(s)}$	$Y_i(\rho, s) = \frac{\alpha_{np}}{\lambda\mu^2} [1 - Y_e(\rho, s)]$
Центра $t_{ц}(\tau)$	$Y_{eц}(s) = \frac{\zeta^{-1} 2^\nu \Gamma(1+\nu)}{G(s)}$	$Y_{iц}(s) = \frac{\alpha_{np}}{\lambda\mu^2} [1 - Y_{eц}(s)]$
Среднеповерхностная $t_S(\tau)$	$Y_{eS}(s) = \frac{\zeta\beta^{-\nu} I_\nu(\beta)}{G(s)}$	$Y_{iS}(s) = \frac{\alpha_{np}}{\lambda\mu^2} [1 - Y_{eS}(s)]$
Среднеобъемная $t_V(\tau)$	$Y_{eV}(s) = \frac{2(\nu+1)\zeta\beta^{-(\nu+1)} I_{\nu+1}(\beta)}{G(s)}$	$Y_{iV}(s) = \frac{\alpha_{np}}{\lambda\mu^2} [1 - Y_{eV}(s)]$

Если внутренние (конвективные) стоки теплоты в теле отсутствуют, т. е.  $\alpha_{np} = 0$ , то формулы (3-20) упрощаются:

$$|\beta| = \mu L = \sqrt{\frac{s}{a}} L. \quad (3-23)$$

Тепловое воздействие  $z_i(\tau)$  и его изображение  $Z_i(s)$  определяются соотношениями

$$z_i(\tau) = L^2 w(\tau)/\lambda; \quad Z_i(s) = L^2 W(s)/\lambda. \quad (3-24)$$

Форма записи для передаточной функции  $Y_e$  и ее частных случаев с учетом (3-23) остается прежней (табл. 3-1), а функция  $Y_i$  находится из уравнения

$$Y_i(\rho, s) = \frac{1}{\beta^2} [1 - Y_e(\rho, s)] = \frac{1}{\beta^2} \left[ 1 - \rho^{-\nu} \frac{\zeta I_\nu(\beta)}{\zeta I_\nu(\beta) + \beta I_{\nu+1}(\beta)} \right]. \quad (3-25)$$

При значениях индекса  $\nu = -0,5; 0$  и  $0,5$ , т. е. значениях фактора формы  $n = 0; 1; 2$ , из выражений (3-10) и (3-14) получаются строгие решения задач теплопроводности для тел канонической формы (пластина, цилиндр, шар). Передаточные функции  $Y_e$  и  $Y_i$  соответственно переходят в точные

передаточные функции для пластины, цилиндра и шара [40]. При этом используются следующие формулы взаимосвязи между цилиндрическими и гиперболическими функциями:

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} z; \quad I_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} z;$$

$$I_{\frac{3}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} (\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z/z). \quad (3-26)$$

Формальный переход от решения (3-10) к истинным значениям температуры  $t(\rho, \tau)$  при непрерывно изменяющихся тепловых воздействиях  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$  может быть выполнен на основе теоремы Дюамеля или теоремы о свертке функций [64]

$$t(\rho, \tau) = \int_0^\tau y_e(\rho, \theta) z_e(\tau - \theta) d\theta + \int_0^\tau y_i(\rho, \theta) z_i(\tau - \theta) d\theta + z_{ni}(\rho, \tau), \quad (3-27)$$

где  $y_e(\rho, \tau) = L^{-1} [Y_e(\rho, s)]$ ,  $y_i(\rho, \tau) = L^{-1} [Y_i(\rho, s)]$  — оригиналы соответствующих передаточных функций  $Y_e(\rho, s)$ ,  $Y_i(\rho, s)$ ;  $L^{-1}$  — операция обратного преобразования Лапласа;  $\theta$  — переменная, по которой производится интегрирование.

Заметим, что в теории линейных динамических систем функции  $y_e$  и  $y_i$  принято называть импульсными или весовыми переходными функциями системы, что соответствует специальному виду воздействий, задаваемых как единичные импульсные функции или  $\delta$ -функции Дирака.

Обратим внимание на особенности передаточных функций  $Y_e(\rho, s)$  и  $Y_i(\rho, s)$  исследуемого теплового объекта (см. табл. 3-1). На входе объекта имеются обобщенные тепловые воздействия  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$  и начальное воздействие  $z_n$ . Объект преобразует эти сигналы в температуру  $t(\rho, \tau)$ . Поскольку функция  $t(\rho, \tau)$  определяет поле температур в объекте, то сигналов на выходе объекта бесконечное множество. Такими качествами обладают любые динамические системы (не обязательно тепловые), если происходящие в них процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Часто говорят, что объекты (системы) такого рода являются объектами с распределенными параметрами, в отличие от объектов с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями различного порядка [7].

#### 3-4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ ОБЪЕКТА И ТЕПЛОВЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Если тепловые воздействия  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$  изменяются во времени, то, несмотря на использование одномерного уравнения теплопроводности (3-5), переход от уравнений (3-10) и (3-14) к выражениям для действительных температур оказывается все же достаточно сложным, а полученные решения не всегда удобны для практического анализа. Одним из возможных путей упрощения такой задачи является замена передаточных функций (табл. 3-1) приближенными выражениями, которые должны быть просты по форме,

допускать обратный переход к оригиналу в основном с помощью имеющихся таблиц операционных соответствий и учитывать наиболее существенные свойства исходных (точных) передаточных функций.

Существуют различные приемы получения приближенных передаточных функций:

а) упрощение структуры точных выражений передаточных функций, например путем разложения их в степенные ряды и представления в виде полинома различной степени;

б) нахождение приближенных передаточных функций путем приближенного интегрирования исходной системы уравнений (3-5) — (3-8) или (3-8) — (3-9) при навязке некоторого профиля температуры в объекте.

**Частный случай теплообмена.** При этом отсутствует среда, проходящая через объект, т. е. нет внутреннего (объемного) конвективного теплообмена ( $\alpha_{np} = 0$ ).

Представим передаточные функции  $Y_e(\rho, s)$  и  $Y_i(\rho, s)$  (см. табл. 3-1) в виде отношения двух функций  $\Phi(\rho, s)$  и  $G(s)$ , каждая из которых не имеет особых точек (полюсов) и может быть разложена в степенной ряд по параметру  $s$  [20, 64, 66]:

$$Y_e(\rho, s) = \frac{\Phi_e(\rho, s)}{G(s)}; \quad Y_i(\rho, s) = \frac{\Phi_i(\rho, s)}{G(s)}. \quad (3-28)$$

Если при разложении числителя и знаменателя (3-28) в степенной ряд ограничиться несколькими членами, то вместо исходных функций  $Y_e$  и  $Y_i$  получим их приближенные выражения, являющиеся отношением двух степенных полиномов, т. е. обычными дробно-рациональными функциями параметра  $s$ :

$$Y(\rho, s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}, \quad (3-29)$$

причем из условия существования оригинала, т. е. температуры  $t(\rho, \tau)$ , должно выполняться условие  $m \leq n$ .

В выражении (3-29)  $a_k$  и  $b_k$  — коэффициенты разложения передаточных функций по степеням параметра  $s$  преобразования Лапласа.

Чем больше слагаемых сохраняется в разложении (3-29), тем точнее аппроксимация передаточных функций, тем шире временная область распространения решений в сторону малых значений времени  $\tau$ . Результаты численных сопоставлений для различных приближений показали, что при решении многих технических задач допустимо ограничивать значения  $m$  и  $n$  в выражении (3-29) до двух.

Для анализируемого частного случая ( $\alpha_{np} = 0$ ) приближенные соотношения для  $Y_e$  и  $Y_i$ , полученные из выражения (3-29), принимают вид

$$Y_e(\rho, s) = \frac{1 + \sum_{k=1}^m b_k s^k}{1 + \sum_{k=1}^n a_k s^k}; \quad (3-30)$$

$$Y_i(\rho, s) = \frac{a}{L^2} \cdot \frac{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k) s^{k-1}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k s^k}, \quad (3-31)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, m, \dots, n$ , причем  $m \leq n$ .

Коэффициенты разложения передаточных функций (3-30) и (3-31) для локальной температуры тела  $t(\rho, \tau)$  находятся по формулам

$$a_k = \frac{\Gamma(v+1)}{2^{2k-1} \Gamma(k) \Gamma(k+v+1)} \cdot \frac{1 + \frac{\zeta}{2k}}{\zeta} \cdot \left(\frac{L^2}{a}\right)^k, \quad (3-32)$$

$$b_k = \frac{\Gamma(v+1)}{2^{2k} k \Gamma(k) \Gamma(k+v+1)} \left(\frac{L^2 \rho^2}{a}\right)^k, \quad (3-33)$$

$$a_k - b_k = \frac{\Gamma(v+1)}{2^{2k-1} \Gamma(k) \Gamma(k+v+1)} \cdot \frac{1 + \frac{\zeta}{2k} (1 - \rho^{2k})}{\zeta} \cdot \left(\frac{L^2}{a}\right)^k, \quad (3-34)$$

где  $v$  — вещественный индекс, определяемый по соотношениям (3-21), (3-17);  $\Gamma$  — гамма-функция от соответствующего вещественного аргумента;  $\rho = r/L$  — относительная координата;  $\zeta$  — критерий Био, определяемый по формуле (3-21).

Замена передаточных функций (см. табл. 3-1) их приближенными выражениями (3-30) и (3-31) дает возможность для перехода от дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Пусть начальные значения  $t(\rho, \tau)$ ,  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$  вместе со своими производными по времени (до порядков  $m$  и  $n$  включительно) равны нулю. Тогда, используя известное операционное соответствие между производной функции и ее изображением

$$\frac{d^{(n)}f}{d\tau^n} = L^{-1} [s^n F(s)],$$

в результате обратного преобразования уравнения (3-10) с учетом (3-30) и (3-31) для случая  $\alpha_{np} = 0$  получаем

$$t(\rho, \tau) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k t(\rho, \tau)}{d\tau^k} = z_e(\tau) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k z_e(\tau)}{d\tau^k} +$$

$$+ \frac{a}{L^2} (a_1 - b_1) z_i(\tau) + \frac{a}{L^2} \sum_{k=2}^m (a_k - b_k) \frac{d^{k-1} z_i(\tau)}{d\tau^{k-1}}, \quad (3-35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z_e(\tau) &= t_c(\tau) + \alpha_c^{-1} q(\tau); \\ z_i(\tau) &= L^2 \lambda^{-1} \omega(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

а коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  находятся по формулам (3-32), (3-33). В отличие от  $b_k$  коэффициенты  $a_k$  не зависят от координаты  $\rho$ .

Аналогичные уравнения могут быть получены из выражений (3-14) для характерных температур тела  $t_u(\tau)$ ,  $t_S(\tau)$ ,  $t_V(\tau)$ . При этом коэффициенты  $b_k$  заменяются на  $b_{ku}$ ,  $b_{kS}$  или  $b_{kV}$ , которые вычисляются по формуле (3-33) в соответствующих точках  $\rho = 0$ ,  $\rho = 1$ , а для  $t_V(\tau)$  осредняются по объему тела:

$$b_{kV} = V^{-1} \int_V b_k(\rho, s) dv.$$

Значения первых двух коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_{1S}$ ,  $b_{2S}$ ,  $b_{1V}$ ,  $b_{2V}$  в разложениях (3-30), (3-31) приведены в табл. 3-2. Для центральной температуры  $t_u(\tau)$  имеем  $b_1 = b_2 = 0$ .

В зависимости от требований практической точности число членов разложения может меняться. Если в выражениях (3-30) и (3-31) ограничиться  $m = 2$ ,  $n = 2$ , то получаем второе приближение. В этом случае передаточные функции для температуры тела  $t(\rho, \tau)$  при  $\alpha_{np} = 0$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y_e(\rho, s) &= \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2}; \\ Y_i(\rho, s) &= \frac{a}{L^2} \cdot \frac{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) s}{1 + a_1 s + a_2 s^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

Соотношение (3-35) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} t(\rho, \tau) + a_1 \frac{dt(\rho, \tau)}{d\tau} + a_2 \frac{d^2 t(\rho, \tau)}{d\tau^2} &= z_e(\tau) + b_1 \frac{dz_e(\tau)}{d\tau} + \\ + b_2 \frac{d^2 z_e(\tau)}{d\tau^2} + aL^{-2}(a_1 - b_1) z_i(\tau) + aL^{-2}(a_2 - b_2) \frac{dz_i(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3-38)$$

При относительно небольших градиентах температуры внутри тела или для проведения оценочных расчетов можно использовать первое приближение передаточных функций, которое получается при отбрасывании членов, начиная с  $s^2$ , в выражениях (3-30) и (3-31). В этом приближении  $m = 1$ ,  $n = 1$  и передаточные функции для температуры имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y_e(\rho, s) &= \frac{1 + b_1 s}{1 + a_1 s}; \\ Y_i(\rho, s) &= \frac{a}{L^2} \cdot \frac{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) s}{1 + a_1 s}. \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

Коэффициенты передаточных функций

Коэффициент	Фактор формы тела	
	$v$	$n$
$a_1$	$\frac{L^2}{2(1+v)a} \quad 1 + \frac{1}{2} \zeta$ $\zeta$	$\frac{L^2}{(1+n)a} \quad 1 + \frac{1}{2} \zeta$ $\zeta$
$a_2$	$\frac{L^4}{8(1+v)(2+v)a^2} \quad 1 + \frac{1}{4} \zeta$ $\zeta$	$\frac{L^4}{2(1+n)(3+n)a^2} \quad 1 + \frac{1}{4} \zeta$ $\zeta$
$b_1$	$\frac{L^2 \rho^2}{4(1+v)a}$	$\frac{L^2 \rho^2}{2(1+n)a}$
$b_{1S}$	$\frac{L^2}{4(1+v)a}$	$\frac{L^2}{2(1+n)a}$
$b_{1V}$	$\frac{L^2}{4(2+v)a}$	$\frac{L^2}{2(3+n)a}$
$b_2$	$\frac{L^4 \rho^4}{32(1+v)(2+v)a^2}$	$\frac{L^4 \rho^4}{8(1+n)(3+n)a^2}$
$b_{2S}$	$\frac{L^4}{32(1+v)(2+v)a^2}$	$\frac{L^4}{8(1+n)(3+n)a^2}$
$b_{2V}$	$\frac{L^4}{32(1+v)(3+v)a^2}$	$\frac{L^4}{8(3+n)(5+n)a^2}$

Уравнение взаимосвязи между искомой температурой и воздействиями в первом приближении:

$$\begin{aligned} t(\rho, \tau) + a_1 \frac{dt(\rho, \tau)}{d\tau} &= z_e(\tau) + b_1 \frac{dz_e(\tau)}{d\tau} + aL^{-2}(a_1 - b_1) z_i(\tau) + \\ + aL^{-2}(a_2 - b_2) \frac{dz_i(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3-40)$$

Таким образом, задача расчета температуры модели сплошного тела в первом приближении существенно упрощается и сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (3-40).

В соответствии с терминологией теории автоматического регулирования передаточные функции вида (3-39) характеризуют объект как инерционное звено первого порядка с дифференцирующими воздействиями. Величина  $a_1$  может в первом приближении истолковываться как показатель тепловой инерции (постоянная времени) этого объекта:

$$a_1 = \frac{L^2}{(1+n)a} \cdot \frac{1+0,5\zeta}{\zeta} \quad (3-41)$$

Влияние дифференцирующих воздействий определяется значением коэффициента  $b_1$ . Для различных значений координаты р дифференцирующее воздействие звеньев будет различным. Показатель тепловой инерции  $a_1$  сохраняет свое значение неизменным для всех точек тела.

Возможны иные варианты получения приближенных функций на основе выражений вида (3-30), (3-31) [30]. Так, соотношения (3-37) можно заменить передаточными функциями с «чистым» запаздыванием [53].

**Общий случай.** В объекте происходит внутренний теплообмен с проточной средой ( $\alpha_{пр} \neq 0$ ), при этом разложение передаточных функций (см. табл. 3-1) в степенные ряды приводит к громоздким зависимостям. Поэтому целесообразно использовать приближенное решение интегрального уравнения теплового баланса (3-9), основанное на выборе функции  $\sigma(\rho)$ , как и ранее, в виде (3-15) и предположении, что поле температур в объекте подчиняется следующей параболической зависимости:

$$T(\rho, s) = M(s) + P(s)\rho^2 \quad (3-42)$$

Применяя к (3-9), (3-6) — (3-8) преобразование Лапласа, с учетом (3-42) получаем решение вида (3-10) для изображения  $T(\rho, s)$  температуры объекта  $T(\rho, s) = Y_e(\rho, s)Z_e(s) + Y_i(\rho, s)[Z_i(s) + z_n]$ , где  $Z_e(s)$ ,  $Z_i(s)$  — изображения (3-11) воздействий (3-12);  $z_n$  — находится по формуле (3-13).

Передаточные функции  $Y_e(\rho, s)$  и  $Y_i(\rho, s)$ , в отличие от заданных в табл. 3-1, определяются следующими приближенными выражениями

$$Y_e(\rho, s) = \frac{C_0 + C_1 s}{1 + \varepsilon s}; \quad Y_i(\rho, s) = \frac{D_0}{1 + \varepsilon s} \quad (3-43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{m_S}{m} - \frac{f_n - \rho^2}{1 - f_n + 2\zeta^{-1}} \cdot \frac{m_V}{m}, \\ C_1 &= -\frac{1}{m} \cdot \frac{f_n - \rho^2}{1 - f_n + 2\zeta^{-1}}, \\ D_0 &= \frac{1 + 2\zeta^{-1} - \rho^2}{1 - f_n + 2\zeta^{-1}} \cdot \frac{m_V}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (3-44)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{m} = \left[ \frac{\alpha_{пр}}{c_V} + \frac{a}{L^2} \cdot \frac{2(n+1)}{1 - f_n + 2\zeta^{-1}} \right]^{-1} \quad (3-45)$$

Входящие в выражения (3-44), (3-45) коэффициенты имеют следующую структуру:

$$\left. \begin{aligned} m &= m_V + m_S; \\ m_V &= \frac{\alpha_{пр}}{c_V}; \quad m_S = \frac{1}{\varepsilon_S} = \frac{a}{L^2} \cdot \frac{2(n+1)}{1 - f_n + 2\zeta^{-1}}; \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

$$\zeta = \frac{\alpha_c L}{\lambda}; \quad f_n = \frac{(n+1)}{(n+3)}; \quad \rho = \frac{r}{L} \quad (3-47)$$

Коэффициент  $\varepsilon$  приближенно характеризует показатель тепловой инерционности объекта.

При отсутствии проточной среды  $m_V = 0$  и выражения (3-44), (3-45) упрощаются.

Для нахождения температуры в центре  $T_u(s)$  и на поверхности  $T_S(s)$  объекта в формулах (3-44) необходимо принять  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ .

Для среднеобъемной температуры тела  $T_V(s)$  коэффициенты  $C_0$ ,  $C_1$  и  $D_0$  упрощаются:

$$C_{0V} = \frac{m_S}{m}; \quad C_{1V} = 0; \quad D_{0V} = \frac{m_V}{m} \quad (3-48)$$

Определяющий размер  $L$  тела находится по рекомендациям, данным в § 3-3 [см. выражения (3-18), (3-19)].

С учетом (3-43) дифференциальное уравнение (3-35), связывающее температуру объекта  $t(\rho, \tau)$  с воздействиями  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$ , перепишется в виде

$$t(\rho, \tau) + \varepsilon dt(\rho, \tau)/d\tau = C_0 z_e(\tau) + C_1 dz_e(\tau)/d\tau + D_0 z_i(\tau) \quad (3-49)$$

**Частный случай.** Нет проточной среды, т. е.  $\alpha_{пр} = 0$  ( $m_V = 0$ ), при этом уравнение (3-10) принимает вид

$$T(\rho, s) = Y_e(\rho, s)Z_e(s) + Y_i(\rho, s)[Z_i(s) + L^2 a^{-1} t_{пр}], \quad (3-50)$$

а передаточные функции (3-43) упрощаются так:

$$Y_e(\rho, s) = (1 + C_1 s)/(1 + \varepsilon_S s); \quad Y_i(\rho, s) = D_0/(1 + \varepsilon_S s), \quad (3-51)$$

где

$$C_1 = -\frac{1}{m_S} \cdot \frac{f_n - \rho^2}{1 - f_n + 2\zeta^{-1}}; \quad D_0 = \frac{1 + 2\zeta^{-1} - \rho^2}{2(n+1)} \quad (3-52)$$

Воздействие  $Z_e(s)$  сохраняет вид (3-11), а  $Z_i(s)$  заменяется согласно (3-24). Показатель инерции  $\varepsilon_S$  рассчитывается по (3-46).

При значениях

$$0 < \rho \leq \rho_* = \sqrt{f_n} = \sqrt{\frac{(n+1)}{(n+3)}} \quad (3-53)$$

коэффициент  $C_1$  отрицателен, поэтому допустима замена передаточной функции  $Y_e(\rho, s)$ , определяемой по (3-51), на функцию

$$Y_e(\rho, s) = \frac{\Gamma(1 + C_1 s)}{(1 + \varepsilon_S s)} \approx \frac{1}{(1 + \varepsilon_S s)(1 - C_1 s)} \quad (3-54)$$

Приближенные передаточные функции вида (3-30), (3-31), (3-37), (3-39) получены в результате разложения исходных точных функций (см. табл. 3-1) по степеням малости параметра  $s$ . Поэтому точность аппроксимации оказывается наиболее высокой при малых  $s$ , ухудшаясь по мере его увеличения. Рассмотрим это на конкретном примере.

Пусть конвективные стоки теплоты в теле отсутствуют ( $\alpha_{пр} = 0$ ), т. е. нет воздействия  $t_{пр}(\tau)$ , мощность источников теплоты постоянна ( $q = \text{const}$ ,  $w = \text{const}$ ). Тогда точная передаточная функция для температуры тела от внешнего воздействия имеет следующий вид (см. табл. 3-1):

$$Y_e(\rho, s) = \frac{\zeta (\beta\rho)^{-\nu} I_\nu(\beta\rho)}{\beta^{-\nu} [\zeta I_\nu(\beta) + \beta I_{\nu+1}(\beta)]} \quad (3-55)$$

Для тела в форме пластины ( $\nu = 0,5$ ), используя взаимосвязь между цилиндрическими и гиперболическими функциями (3-26), получаем

$$Y_e(\rho, s) = \frac{\zeta \text{ch } \beta\rho}{\zeta \text{ch } \beta + \beta \text{sh } \beta} \quad (3-56)$$

где  $\beta = L\sqrt{s/a}$ ,  $\rho = r/L$ . При малых значениях  $s$  (малые  $\beta$ )

$$\lim_{s \rightarrow 0} Y_e(\rho, s) = 1. \quad (3-57)$$

Поведение функции  $Y_e(\rho, s)$  при больших  $s$  (большие  $\beta$ ) определяется следующим соотношением:

$$Y_e(\rho, s) \approx \frac{\zeta e^{\beta\rho}}{\zeta e^\beta + \beta e^\beta} = \frac{\zeta}{(\zeta + \beta)} \exp[-\beta(1-\rho)], \quad (3-58)$$

из которого следует, что при  $\beta \rightarrow \infty \lim_{s \rightarrow \infty} Y_e(\rho, s) \rightarrow 0$ .

Все предложенные выше аппроксимации функции (3-56), т. е. первые выражения в системах (3-37), (3-39), удовлетворяют условию (3-57). Однако эти функции при больших  $s$  могут существенно отличаться от точного асимптотического представления вида (3-58). В частности, во втором приближении из (3-37) получаем  $\lim_{s \rightarrow \infty} Y_e(\rho, s) = b_2/a_2$ , что не равно нулю, исключая

$\rho = 0$ .

Аналогично в первом приближении из (3-39) находим  $\lim_{s \rightarrow \infty} Y_e(\rho, s) = b_1/a_1$ , что также отлично от нуля во всех точках пластины за исключением  $\rho = 0$ .

Высказанные соображения подтверждают тот общий факт, что отход от строгого анализа и упрощения на различных стадиях решения задачи приводят к потере точности. Заранее трудно сказать, каковы погрешности от тех или иных упрощений. Поэтому всегда оказываются полезными различного рода оценки, сопоставления со строгими решениями (если таковые имеются), проверка результатов с помощью приближений более высокого порядка и т. п.

Не давая количественных сопоставлений, заметим, что даже в наиболее неблагоприятном варианте, т. е. при представлении передаточных функций объекта в виде простейших соотношений (3-39), (3-43) можно получить дифференциальные уравнения вида (3-40) и (3-49), имеющие значительно большую общность по сравнению с уравнением (2-1) для простейшей модели теплового объекта (см. § 2-1).

### 3-5. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛОБМЕНА ОБЪЕКТА

Значения тепловых воздействий постоянны  $z_e = \text{const}$ ,  $z_i = \text{const}$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} t_c = t_{c.ст} = \text{const}; & \quad t_{пр} = t_{пр.ст} = \text{const}; \\ q = q_{ст} = \text{const}; & \quad w = w_{ст} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (3-59)$$

и по прошествии некоторого времени (теоретически при  $\tau \rightarrow \infty$ ) наступает стационарный режим теплообмена. Распределение температур в теле  $t_{ст}(\rho)$  может быть найдено из уравнения (3-10), если воспользоваться теоремой Таубера о предельном соответствии между изображением  $F(s)$  функции  $f(\tau)$  и ее оригиналом [20, 40]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]. \quad (3-60)$$

Применив эту теорему к выражению (3-10), получаем следующее уравнение для расчета температуры  $t_{ст}(\rho)$  тела в стационарном режиме теплообмена

$$t_{ст}(\rho) = y_{e.ст}(\rho) z_{e.ст} + [1 - y_{e.ст}(\rho)] z_{i.ст}, \quad (3-61)$$

в котором стационарные значения внешнего и внутреннего тепловых воздействий определяются по формулам

$$z_{e.ст} = t_{c.ст} + q_{ст}/\alpha_c; \quad z_{i.ст} = t_{пр.ст} + w_{ст}/\alpha_{пр}. \quad (3-62)$$

Предельное значение  $y_{e.ст}(\rho)$  передаточной функции  $Y_e(\rho, s)$  равно

$$y_{e.ст}(\rho) = Y_e(\rho, s)|_{s=0} = \rho^{-\nu} \frac{\zeta I_\nu(\beta_0\rho)}{\zeta I_\nu(\beta_0) + \beta_0 I_{\nu+1}(\beta_0)}, \quad (3-63)$$

$$\beta_0 = \beta|_{s=0} = \sqrt{\frac{\alpha_{пр}}{\lambda}} L. \quad (3-64)$$

Уравнение (3-61) определяет поле температур  $t_{ст}(\rho)$  в сплошном теле при комплексных воздействиях  $z_{e.ст}$  и  $z_{i.ст}$ . Используя терминологию теории управления динамическими системами, функции  $y_{e.ст}(\rho)$  и  $y_{i.ст}(\rho)$  можно назвать передаточными коэффициентами по отношению к воздействиям  $z_{e.ст}$  и  $z_{i.ст}$ . Следует, однако, помнить, что эти коэффициенты зависят от координаты  $\rho$ .

**Воздействие внутренней среды отсутствует**, т. е.  $\alpha_{пр} = 0$ . В этом случае воздействие  $z_{e.ст}$  остается без изменений, а  $z_{i.ст}$  упрощается:

$$z_{i.ст} = L^2 w_{ст}/\lambda. \quad (3-65)$$

Уравнение (3-61) для температуры тела принимает простой вид:

$$t_{ст}(\rho) = z_{e.ст} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1+0,5\zeta(1-\rho^2)}{\zeta} z_{i.ст}. \quad (3-66)$$

В частном случае, при  $\zeta = \infty$  с учетом (3-62) из (3-66) находим

$$t_{ст\infty}(\rho) = t_{c.ст} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\rho^2}{n+1} \cdot \frac{L^2}{\lambda} w_{ст}. \quad (3-67)$$

Для практических расчетов представляет интерес оценка соотношений между центральной  $t_{ц}$ , среднеповерхностной  $t_{с}$  и среднеемкной  $t_{в}$  температурами. С помощью решения (3-66) можно найти следующие характеристики неравномерности поля температур:

$$\Psi_{ст} = \frac{z_e - t_s}{z_e - t_v} = \frac{t_s - t_{c.ст} - \alpha_c^{-1} q_{ст}}{t_v - t_{c.ст} - \alpha_c^{-1} q_{ст}} = \frac{1}{1 + \zeta(n+3)^{-1}} = \frac{1}{1 + H_2}, \quad (3-68)$$

где

$$H_2 = \frac{\zeta}{n+3} = \frac{\alpha_c L}{(n+3)\lambda}; \quad (3-69)$$

$$\frac{z_e - t_S}{z_e - t_{\text{ц}}} = \frac{t_S - t_{\text{с. ст}} - \alpha_c^{-1} q_{\text{ст}}}{t_{\text{ц}} - t_{\text{с. ст}} - \alpha_c^{-1} q_{\text{ст}}} = \frac{1}{1 + 0,5\zeta}; \quad (3-70)$$

$$\frac{t_V - t_S}{t_{\text{ц}} - t_S} = \frac{1}{2 + \nu} = \frac{2}{n+3}. \quad (3-71)$$

Уравнения (3-68), (3-69) обобщают ранее полученную критериальную зависимость  $\psi(H)$  при действии поверхностных источников теплоты [66]. Выражение (3-71) показывает, что отношение среднеобъемной и центральной избыточных температур, отсчитываемых от температуры поверхности тела, не зависит от действующих источников  $q$  и  $w$ , теплообменного критерия и определяется только геометрическими особенностями тела — его фактором формы  $n$ .

Перегрев поверхности тела над средой рассчитывается по формуле

$$t_S - t_{\text{с. ст}} = \frac{(q_{\text{ст}} S + w_{\text{ст}} V)}{\alpha_c S}, \quad (3-72)$$

которая строго справедлива для любых тел.

Разности между температурами  $t_{\text{ц}}$ ,  $t_V$  и  $t_S$  при условиях  $\alpha_{\text{пр}} = 0$  и  $0 < \zeta < \infty$  оцениваются по уравнениям

$$t_{\text{ц}} - t_S = \frac{1}{2(n+1)} z_{i \text{ ст}} = \frac{LV}{2\lambda S} w_{\text{ст}}; \quad (3-73)$$

$$t_V - t_S = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \cdot \frac{L^2}{\lambda} w_{\text{ст}}. \quad (3-74)$$

Более полный анализ стационарного теплового режима для однородных тел дан в [65].

### 3-6. ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС

**Переходный процесс, вызванный ступенчатым изменением во времени тепловых воздействий.** Пусть до некоторого момента времени  $\tau = 0$ , принимаемого за начальный, все тепловые воздействия отсутствовали, а температура во всем объеме тела была равномерной и равной  $t_n$ . В момент времени  $\tau = 0$  тепловые воздействия  $t_c(\tau)$ ,  $t_{\text{пр}}(\tau)$ ,  $q(\tau)$  и  $w(\tau)$  мгновенно изменяются от нулевых до некоторых значений  $t_{\text{с. ст}}$ ,  $t_{\text{пр. ст}}$ ,  $q_{\text{ст}}$  и  $w_{\text{ст}}$ , которые затем поддерживаются постоянными (рис. 3-3, а—е). С течением времени температура  $t(\rho, \tau)$  различных точек тела будет изменяться от начального  $t_n$  до соответствующего стационарного значения  $t_{\text{ст}}(\rho)$  (рис. 3-4). Условимся вести отсчет температур от  $t_n$ , т. е. примем нулевое начальное условие  $t(\rho, \tau)|_{\tau=0} = 0$ .

Задача анализа такого переходного процесса сводится к решению уравнения теплопроводности (3-5) при условиях вида (3-6) — (3-7). При этом изображение  $T(\rho, s)$  температуры  $t(\rho, \tau)$  в переходном процессе находится из общего решения (3-10), в котором обоб-

щенные тепловые воздействия  $Z_e(s)$  и  $Z_i(s)$  с учетом специфики их изменения во времени (рис. 3-3) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} Z_e(s) &= \frac{z_{e \text{ ст}}}{s} = \frac{t_{\text{с. ст}}}{s} + \frac{1}{\alpha_c} \cdot \frac{q_{\text{ст}}}{s}; \\ Z_i(s) &= \frac{z_{i \text{ ст}}}{s} = \frac{t_{\text{пр. ст}}}{s} + \frac{1}{\alpha_{\text{пр}}} \cdot \frac{w_{\text{ст}}}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (3-75)$$

Выражение, стоящее в знаменателе передаточных функций  $Y_e(\rho, s)$ ,  $Y_i(\rho, s)$  (см. табл. 3-1), является обобщенным полиномом относительно  $s$ , поэтому, используя теоремы затухания и разложения, после обратного преобразования Лапласа выражения (3-10) можно получить решение, определяющее закономерности изменения температуры тела  $t(\rho, \tau)$  в переходном процессе. Приемы перехода от уравнения в изображениях к уравнению в оригиналах подробно изложены в курсах операционного исчисления [20, 40].

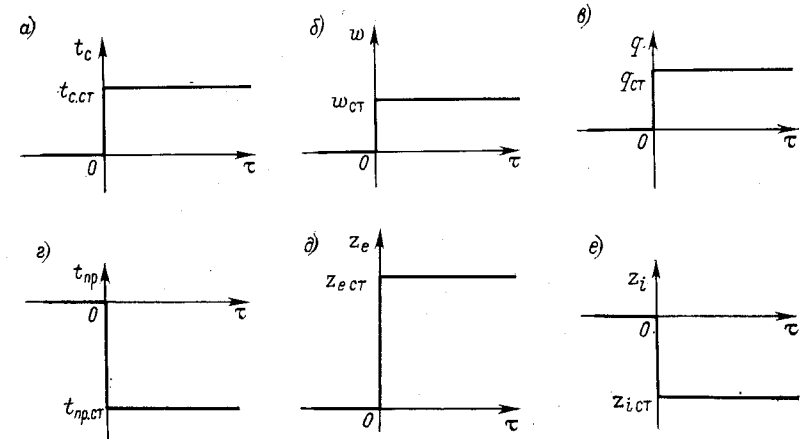


Рис. 3-3. Изменение тепловых воздействий в переходном процессе: а, б, в, г — воздействия  $t(\tau)$ ,  $w(\tau)$ ,  $q(\tau)$ ,  $t_{\text{пр}}(\tau)$ ; д, е — обобщенные воздействия  $z_e(\tau)$ ,  $z_i(\tau)$

**Уравнение переходного процесса.** Строгое обратное преобразование Лапласа выражения (3-10) приводит к следующему уравнению переходного процесса [64]:

$$t_{\text{ст}}(\rho) - t(\rho, \tau) = \rho^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \kappa_k} z_{e \text{ ст}} + \frac{\kappa_k}{1 + \kappa_k} z_{i \text{ ст}} - t_n \right) A_k J_{\nu}(\mu_k \rho) \exp(-m_k \tau). \quad (3-76)$$

В выражении (3-76) коэффициенты  $A_k$ ,  $\kappa_k$ ,  $m_k$  определяются зависимостями

$$A_k = \frac{2\zeta}{[\zeta(\zeta - 2\nu) + \mu_k^2] J_{\nu}(\mu_k)}; \quad (3-77)$$

$$\kappa_k = \left( \frac{\beta}{\mu_k} \right)^2; \quad \beta = \sqrt{\frac{\alpha_{пр}}{\lambda}} L; \quad (3-78)$$

$$m_k = \frac{\alpha_{пр}}{c\gamma} + \frac{a\mu_k^2}{L^2}; \quad \zeta = \frac{\alpha_c L}{\lambda}. \quad (3-79)$$

Значения собственных чисел  $\mu_k$  являются решениями (корнями) трансцендентного уравнения

$$\zeta J_\nu(\mu) = \mu J_{\nu+1}(\mu). \quad (3-80)$$

Корни  $\mu_k$  уравнения (3-80) образуют возрастающую последовательность, поэтому ряд (3-76) обладает хорошей сходимостью. Суммирование в (3-76) проводится по всем целым положительным числам  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

При значениях времени  $\tau \rightarrow \infty$  температура тела  $t(\rho, \tau)$  стремится к предельному стационарному значению  $t_{ст}(\rho)$ , определяемому по (3-61).

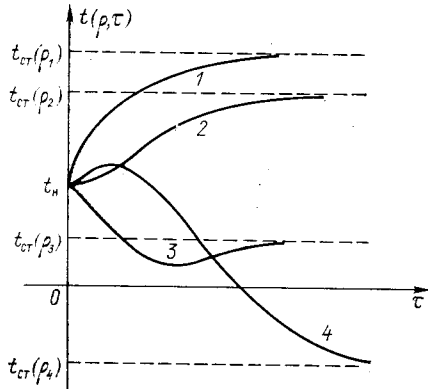
Решение (3-76) позволяет исследовать закономерности переходного процесса теплопроводности различных тел при одновременном учете нескольких режимных факторов: температур  $t_{с. ст.}$ ,  $t_{пр. ст.}$ , источников тепла  $q_{ст.}$ ,  $w_{ст.}$ .

**Внутренний конвективный теплообмен в теле отсутствует** ( $\alpha_{пр} = 0$ ). Уравнение (3-76) упрощается и принимает при  $t_n \neq 0$  следующий вид:

$$t_{ст}(\rho) - t(\rho, \tau) = \rho^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left( t_{с. ст.} + \frac{1}{\alpha_c} q_{ст.} + \frac{1}{\mu_k^2} \cdot \frac{L^2}{\lambda} w_{ст.} - t_n \right) A_k J_\nu(\mu_k \rho) \exp(-m_k \tau). \quad (3-81)$$

Рис. 3-4. Изменение температуры тела в переходном процессе

1, 2, 3, 4 — изменение температуры для точек тела с координатами  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$



Значение стационарной температуры находится по формуле (3-66), которую можно переписать так:

$$t_{ст}(\rho) = t_{с. ст.} + \frac{1}{\alpha_c} q_{ст.} + \frac{1}{2(\nu+1)\zeta} \times \left[ 1 + \frac{1}{2} \zeta(1-\rho^2) \right] \frac{L^2}{\lambda} w_{ст.} \quad (3-82)$$

В тех случаях, когда значения индекса  $\nu$  равны  $-0,5; 0; 0,5$ , выражения (3-81), (3-82) дают точные решения, характеризующие распределение температуры в переходном и стационарном режимах в телах канонической формы (неограниченные пластины, цилиндр и шар). Строгие решения задач нестационарной теплопроводности для этих тел при раздельном учете воздействий  $t_{с.}$ ,  $q$ ,  $w$  приведены в [40]. Соответствующие решения этих задач в обычной

форме могут быть получены из уравнения (3-81) при использовании известных соотношений:

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z; \quad J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z; \\ J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \frac{\sin z}{z} - \cos z \right).$$

Уравнение (3-76) и его частный случай (3-81) позволяют исследовать влияние отдельных тепловых факторов на закономерности переходного процесса. Общая длительность переходного процесса определяется значениями корней  $\mu_k$  и коэффициентами  $A_k$  рядов (3-76) и (3-81).

При решении прикладных задач желательно получить более простые зависимости, нежели решение (3-76). Приемы построения приближенных уравнений переходного процесса (см. § 3-3) основаны на замене передаточных функций для температуры тела различными приближенными выражениями [53].

### 3-7. АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА

При анализе системы регулирования часто требуется определить закономерности прохождения периодических сигналов через отдельные звенья системы. Эта задача решается с помощью частотных характеристик звена, которые для линейных звеньев находятся по их передаточным функциям.

Рассмотрим реакцию объекта на тепловые воздействия, которые являются некоторыми периодическими функциями времени, например, изменяются по простым гармоническим законам следующего вида:

$$t_c(\tau) = t_{с. ст.} + a_{t_c} \cos \omega \tau; \\ t_{пр}(\tau) = t_{пр. ст.} + a_{t_{пр}} \cos \omega \tau; \\ q(\tau) = q_{ст.} + a_q \cos \omega \tau; \\ w(\tau) = w_{ст.} + a_w \cos \omega \tau, \quad (3-83)$$

где  $\omega$  — частота колебаний;  $a_{t_c}$ ,  $a_{t_{пр}}$ ,  $a_q$ ,  $a_w$  — амплитуды колебаний соответствующих тепловых воздействий.

Полная задача исследования периодического процесса теплопроводности сводится к решению уравнения (3-5) при условиях (3-6) — (3-8), (3-83), т. е. к установлению закономерности прохождения суммы постоянных и периодических сигналов вида (3-83) через линейную систему (изучаемый объект).

Можно показать, что в квазиустановившемся режиме (для тепловых процессов иногда называемом регулярным режимом третьего рода), когда действие начальных условий перестало сказываться, изображение  $T(\rho, s)$  температуры тела  $t(\rho, \tau)$  определится из (3-10) в виде

$$T(\rho, s) = Y_e(\rho, s) Z_e(s) + Y_i(\rho, s) Z_i(s), \quad (3-84)$$

в котором передаточные функции  $Y_e(\rho, s)$  и  $Y_i(\rho, s)$  находятся по уравнениям (см. табл. 3-1).

Функции  $Z_e(s)$  и  $Z_i(s)$  являются изображениями обобщенных тепловых воздействий (3-12), которые с учетом (3-83) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} z_e(\tau) &= z_{e ст.} + a_{z_e} \cos \omega \tau; \\ z_i(\tau) &= z_{i ст.} + a_{z_i} \cos \omega \tau. \end{aligned} \right\} \quad (3-85)$$

В выражениях (3-85) в соответствии с (3-83)

$$z_{e\text{ ст}} = t_{c.\text{ ст}} + q_{c\text{ ст}}/\alpha_c; \quad z_{i\text{ ст}} = t_{\text{пр. ст}} + w_{c\text{ ст}}/\alpha_{\text{пр}}; \quad (3-86)$$

$$a_{z_e} = a_{t_c} + a_{q_c}/\alpha_c; \quad a_{z_i} = a_{t_{\text{пр}}} + a_{w_c}/\alpha_{\text{пр}}. \quad (3-87)$$

Обратное преобразование уравнения (3-84) для квазиустановившегося процесса приводит к следующей зависимости для температуры тела:

$$t(\rho, \tau) = t_{c\text{ ст}}(\rho) + a_{t_e} \cos(\omega\tau + \varphi_e) + a_{t_i} \cos(\omega\tau + \varphi_i), \quad (3-88)$$

где  $t_{c\text{ ст}}(\rho)$  — стационарная составляющая температуры тела, обусловленная постоянными воздействиями (3-86);  $a_{t_e}, \varphi_e$  — амплитуда и фазовый сдвиг периодической составляющей воздействия  $z_e(\tau)$ ;  $a_{t_i}, \varphi_i$  — амплитуда и фазовый сдвиг периодической составляющей воздействия  $z_i(\tau)$ .

Амплитуды  $a_{t_e}, a_{t_i}$  и фазовые сдвиги  $\varphi_e$  и  $\varphi_i$  для разных точек тела можно определить по известным передаточным функциям  $Y_e(\rho, s)$  и  $Y_i(\rho, s)$ , основываясь на линейности процесса теплопроводности и заменяя параметр  $s$  в этих функциях на  $i\omega$  ( $i$  — мнимая единица).

Комплексные функции  $Y_e(\rho, i\omega)$  и  $Y_i(\rho, i\omega)$  называются амплитудно-фазовыми частотными характеристиками объекта. Зная их, можно определить взаимосвязь между амплитудами (фазами) изменения температуры тела  $t(\rho, \tau)$  и входных воздействий  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$ .

Отношение амплитуд  $a_{t_e}/a_{z_e}$  и  $a_{t_i}/a_{z_i}$  равно абсолютному значению соответствующих передаточных функций, а фазовый сдвиг определяется как аргумент этих функций:

$$\left. \begin{aligned} A_e(\omega) &= a_{t_e}/a_{z_e} = \text{mod } Y_e(\rho, i\omega) = |Y_e(\rho, i\omega)|; \\ A_i(\omega) &= a_{t_i}/a_{z_i} = \text{mod } Y_i(\rho, i\omega) = |Y_i(\rho, i\omega)|; \end{aligned} \right\} \quad (3-89)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_e(\omega) &= \arg Y_e(\rho, i\omega); \\ \varphi_i(\omega) &= \arg Y_i(\rho, i\omega). \end{aligned} \right\} \quad (3-90)$$

Выражения  $A_e(\omega)$  и  $A_i(\omega)$ , определяющие относительные амплитуды колебаний от воздействий  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$ , будем называть амплитудными частотными характеристиками температуры тела для этих воздействий. Соответственно выражения  $\varphi_e(\omega)$  и  $\varphi_i(\omega)$  будем называть фазовыми частотными характеристиками температуры тела.

Уравнения частотных характеристик (3-89), (3-90), полученные на основе точных значений передаточных функций, имеют сложную структуру [40, 66].

### 3-8. ТЕПЛОВЫЕ ПОТОКИ В ОБЪЕКТЕ

Значения удельных тепловых потоков  $q_\lambda(\rho, \tau)$  в объекте находятся в соответствии с гипотезой Фурье

$$q_\lambda(\rho, \tau) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = -\frac{\lambda}{L} \cdot \frac{\partial t}{\partial \rho}. \quad (3-91)$$

Используя для (3-91) преобразование Лапласа и дифференцируя (3-10) по  $\rho$ , получаем общее соотношение, определяющее поле тепловых потоков в объекте:

$$Q_\lambda(\rho, s) = -\frac{\lambda}{L} \cdot \frac{dT}{d\rho} = -\frac{\lambda}{L} \{Y'_e Z_e(s) + Y'_i [Z_i(s) + z_n]\}. \quad (3-92)$$

Степень приближения уравнения (3-92) зависит от выбора передаточных функций  $Y_e$  и  $Y_i$  (см. § 3-3, 3-4).

Выберем в качестве  $Y_e$  и  $Y_i$  выражения (3-43), тогда после их дифференцирования по координате  $\rho$  и подстановки в (3-92) получим

$$Q_\lambda(\rho, s) = -\frac{\lambda}{L} \left\{ \frac{C'_0 + C'_1 s}{1 + \varepsilon s} Z_e(s) + \frac{D'_0}{1 + \varepsilon s} [Z_i(s) + z_n] \right\}, \quad (3-93)$$

где в соответствии с (3-44)

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= -D'_0 = \frac{m\nu}{m} \cdot \frac{2\rho}{1 - f_n + 2\xi^{-1}}; \\ C'_1 &= \frac{1}{m} \cdot \frac{2\rho}{1 - f_n + 2\xi^{-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-94)$$

С учетом (3-94) уравнение (3-93) преобразуется к следующему виду:

$$Q_\lambda(\rho, s) = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon s} \{C'_0 [Z_i(s) + z_n - Z_e(s)] - C'_1 s Z_e(s)\}. \quad (3-95)$$

При нулевых начальных значениях  $q_\lambda(\rho, \tau)$ ,  $z_e(\tau)$  и  $z_n = 0$  из (3-95) можно получить дифференциальное уравнение связи между удельным тепловым потоком  $q_\lambda(\rho, \tau)$  и воздействиями  $z_e(\tau)$  и  $z_i(\tau)$ :

$$\varepsilon \frac{dq_\lambda(\rho, \tau)}{d\tau} + q_\lambda(\rho, \tau) = \frac{\lambda}{L} \left\{ C'_0 [z_i(\tau) - z_e(\tau)] - C'_1 \frac{dz_e(\tau)}{d\tau} \right\}. \quad (3-96)$$

**Частный случай.** Внутренний конвективный теплообмен отсутствует, т. е.  $\alpha_{\text{пр}} = 0$  или  $m\nu = 0$ . При этих условиях после преобразований из (3-93) или (3-95) находим

$$Q_\lambda(\rho, s) = \frac{\rho}{S(1 + \varepsilon_S s)} \{VW(s) - C[sZ_e(s) - t_{\text{нв}}]\}, \quad (3-97)$$

где  $C = c\gamma V$  — полная теплоемкость объекта;  $t_{\text{нв}}$  — его начальная среднеобъемная температура;  $W(s)$  — изображение функции  $w(\tau)$  для удельного источника теплоты;  $\varepsilon_S$  — показатель тепловой инерции объекта, определяемый по (3-46).

Переход от изображений (3-97) к оригиналам при условиях  $q_\lambda(\rho, 0) = 0$ ,  $z_e(0) = 0$  и  $t_{\text{нв}} = 0$  приводит к уравнению

$$\varepsilon_S \frac{dq_\lambda(\rho, \tau)}{d\tau} + q_\lambda(\rho, \tau) = \frac{\rho}{S} \left[ Vw(\tau) - C \frac{dz_e}{d\tau} \right]. \quad (3-98)$$

При медленных временных изменениях воздействий вместо (3-95) — (3-98) можно получить упрощенные соотношения для оценки теплового потока. Полагая

$$1/(1 + \varepsilon s) \approx 1 - \varepsilon s, \quad (3-99)$$

взамен (3-95) имеем

$$Q_\lambda(\rho, s) \approx \frac{\lambda}{L} (1 - \varepsilon s) \{C'_0 [Z_i(s) + z_n - Z_e(s)] - C'_1 s Z_e(s)\}, \quad (3-100)$$



откуда, переходя к оригиналу  $q_\lambda(\rho, \tau)$ , получаем

$$q_\lambda(\rho, \tau) \approx -\frac{\lambda}{L} C_0' \left\{ z_e(\tau) + \left( \frac{C_1'}{C_0'} - \varepsilon \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{dz_e(\tau)}{d\tau} - z_i(\tau) + \varepsilon \frac{dz_i(\tau)}{d\tau} \right\}. \quad (3-101)$$

Аналогично с учетом (3-99) из (3-97) находим

$$Q_\lambda(\rho, s) \approx \frac{\rho}{S} (1 - \varepsilon_S s) \{ VW(s) - C [sZ_e(s) - t_{нв}] \} \quad (3-102)$$

и после обратного перехода

$$q_\lambda(\rho, \tau) \approx \frac{\rho}{S} \left\{ V \left[ w(\tau) - \varepsilon_S \frac{dw}{d\tau} \right] - C \frac{dz_e}{d\tau} \right\}. \quad (3-103)$$

Значение удельного теплового потока  $q_\lambda(1, \tau)$  на границе  $S$  объекта определится, если в полученных выше уравнениях принять  $\rho = 1$ .

В заключение можно сказать, что в результате исследования процесса теплообмена сплошного тела (объекта термостатирования) на основе одномерного уравнения теплопроводности получены важнейшие динамические характеристики объекта: передаточные функции для температуры и тепловых потоков с различной степенью приближения; дифференциальные соотношения между температурами различных точек объекта и независимыми тепловыми воздействиями; уравнения для температуры тела в стационарном режиме теплообмена; функциональные зависимости изменения температуры в переходном процессе; частотные характеристики объекта.

Полученные соотношения позволяют анализировать теплообмен объекта при комплексных тепловых воздействиях и включают, как частные случаи, различные одномерные задачи, рассматриваемые в теории теплопроводности [32, 40, 55].

#### ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ

#### 4-1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕНА ОБОЛОЧКИ ТЕРМОСТАТА

Система тепловой защиты приборов (активная или пассивная) содержит (см. гл. 1) различные элементы (прослойки, нагревательные устройства, токовводы и пр.), в той или иной степени влияющие на тепловой режим объекта. Для анализа работы системы необходимо учитывать влияние каждого из элементов, поэтому воз-

никает задача математического описания процессов теплопроводности в этих элементах. Поскольку конструкции их разнообразны, желательно выбирать такие физические и математические модели, которые по возможности были бы пригодны для количественной оценки теплообмена элементов различной формы.

Рассмотрение различных вариантов конструктивного оформления систем тепловой защиты показывает, что одним из основных ее элементов являются оболочки (криволинейные стенки, прослойки).

Оболочки могут быть однородными или состоять из отдельных частей, изготовленных из различных материалов. Они могут выполняться сплошными, пористыми или иметь внутренние каналы, через которые пропускается тепло- или хладоноситель. Кроме того, оболочки являются пассивными теплоизоляторами или имеют источники теплоты (камера с нагревателем).

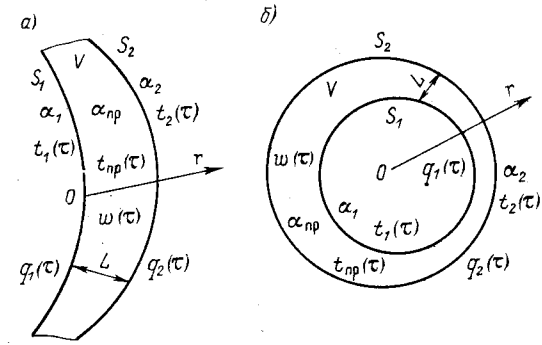


Рис. 4-1. Схема тепловых воздействий

Так же, как и для объекта, описание процесса теплопередачи в элементах конструкции тепловой защиты в общем случае оказывается задачей непростой ввиду сложности геометрической формы, наличия трехмерного поля температур, зависимости теплофизических свойств от температуры. Поэтому при разработке физической и геометрической моделей делаются допущения:

1. Геометрической моделью реальной оболочки является криволинейная стенка, ограниченная двумя (замкнутыми или разомкнутыми) внутренней  $S_1$  и внешней  $S_2$  поверхностями (рис. 4-1, а, б).

2. Оболочка однородна, т. е. состоит из однородного материала с известными значениями теплофизических характеристик ( $a, \lambda, c, \gamma$ ).

3. Температурное поле в модели является одномерным, что соответствует изменению температуры в реальной оболочке преимущественно по ее толщине.

4. Модель оболочки (как и реальный элемент) подвержена внешним или внутренним тепловым воздействиям, которые принимаются равномерно распределенными по ограничивающим поверхностям или по объему модели.

На основе вышесказанного геометрический образ реальной оболочки создается некоторой образующей поверхностью  $\sigma(r)$ , где  $r$  — обобщенная координата (рис. 4-1), причем выполняются следующие условия при значениях  $r = r_1$  и  $r = r_2$

$$\sigma(r)|_{r=r_1} = S_1; \quad \sigma(r)|_{r=r_2} = S_2, \quad (4-1)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — площади внутренней и внешней поверхности модели, численно равные площадям внутренней и внешней поверхности реальной оболочки.

Элементарный объем модели (см. гл. 3) определяется по формуле

$$dv = \sigma(r) dr, \quad (4-2)$$

причем выполняется условие

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \sigma(r) dr, \quad (4-3)$$

где  $V$  — объем модели, равный полному объему реальной оболочки. Условимся называть величину

$$L = r_2 - r_1 \quad (4-4)$$

определяющим размером оболочки.

Замкнутую оболочку (рис. 4-1, б) можно рассматривать как некоторое сплошное тело объема  $V_2$ , из которого вырезана его сердцевина объемом  $V_1$ , так что

$$V = V_2 - V_1. \quad (4-5)$$

В этом случае начало отсчета координаты  $r$  располагается в центре симметрии или центре тяжести тела.

Однако начало отсчета координаты  $r$  можно располагать и на поверхности  $S_1$  оболочки, соответственно подобрав вид образующей поверхности  $\sigma(r)$ .

Оболочка подвержена воздействию следующих режимных факторов:

жидких (газовых) сред с температурами  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ , контактирующих соответственно с поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ , интенсивность теплообмена которых  $\alpha_{c1}$  и  $\alpha_{c2}$ ;

источников теплоты, равномерно распределенных на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ , плотность которых соответственно равна  $q_1(\tau)$  и  $q_2(\tau)$ ;

внутреннего источника (стока) теплоты, равномерно распределенного в объеме  $V$ , с удельной мощностью  $\omega(\tau)$ ;

внутренней (проточной) среды, имеющей температуру  $t_{np}(\tau)$ , удельная интенсивность теплообмена которой составляет  $\alpha_{np}$ .

Предполагается, что теплофизические свойства тела и коэффициенты теплообмена со всеми средами постоянны.

Поле температур в оболочке  $t(r, \tau)$  одномерное и определяется решением одномерного уравнения теплопроводности (3-5).

На основе закона сохранения энергии условия теплообмена на границах имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_1} + q_1 &= \alpha_{c1} (t|_{r=r_1} - t_{c1}); \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_2} + q_2 &= \alpha_{c2} (t|_{r=r_2} - t_{c2}). \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

Начальное распределение температур в оболочке принимается равномерным, т. е.

$$t(r, \tau)|_{\tau=0} = t_n. \quad (4-7)$$

Уравнение (3-5) совместно с (4-6) и (4-7) является при сделанных выше допущениях исходной формулировкой математической модели оболочки как основного элемента системы тепловой защиты приборов.

Общее решение задачи теплопроводности (3-5), (4-6), (4-7), записанное в изображениях Лапласа, имеет вид

$$T(\rho, s) = Y_1(\rho, s) Z_1(s) + Y_2(\rho, s) Z_2(s) + Y_3(\rho, s) [Z_3(s) + z_n]. \quad (4-8)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Z_1(s) &= T_{c1}(s) + \alpha_{c1}^{-1} Q_1(s); \\ Z_2(s) &= T_{c2}(s) + \alpha_{c2}^{-1} Q_2(s); \\ Z_3(s) &= T_{np}(s) + \alpha_{np}^{-1} W(s) \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

являются лапласовскими изображениями следующих обобщенных тепловых воздействий:

$$\left. \begin{aligned} z_1(\tau) &= t_{c1}(\tau) + \alpha_{c1}^{-1} q_1(\tau); \\ z_2(\tau) &= t_{c2}(\tau) + \alpha_{c2}^{-1} q_2(\tau); \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

$$z_3(\tau) = t_{np}(\tau) + \alpha_{np}^{-1} \omega(\tau); \quad (4-11)$$

$$z_n = c\gamma \alpha_{np}^{-1} t_n; \quad (4-12)$$

$\rho = r/L$  — относительная координата;  $Y_1, Y_2, Y_3$  — передаточные функции для температуры оболочки по отношению к внешним  $z_1(\tau), z_2(\tau)$ , внутреннему  $z_3(\tau)$  и начальному  $z_n$  тепловым воздействиям.

Структура передаточных функций зависит от выбора образующей поверхности  $\sigma(r)$  в уравнении (3-5).

Случай, когда  $\sigma(r)$  описывается степенной функцией

$$\sigma(r) = Ar^n, \quad (4-13)$$

где  $A$  и  $n$  — некоторые постоянные, рассмотрен в работе [3], в которой получено строгое решение системы (3-5), (4-6), (4-7) при  $t_n = 0$ . При постановке общей задачи вид функций  $Y_1, Y_2, Y_3$  весьма сложный, поэтому для частного случая, когда  $\alpha_{np} = 0$ , предложены приближенные выражения для передаточных функций,

получены формулы для расчета коэффициентов разложения [3, 67] и даны приближенные дифференциальные уравнения взаимосвязи между температурой  $t(\rho, \tau)$  оболочки и системой тепловых воздействий  $z_1(\tau)$ ,  $z_2(\tau)$ ,  $z_3(\tau)$ . Задача выбора определяющего размера  $L$ , фактора формы  $n$  и полного термического сопротивления оболочки при условии (4-13) подробно рассмотрена в работе [68].

Необходимо отметить, что постановка и решение задачи теплообмена оболочки включают, как частный случай, рассмотренные в § 3-4 решения для объекта, так как геометрическая модель оболочки при  $\sigma(r)|_{r=r_1}=0$  превращается в сплошное тело.

#### 4-2. ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛООБМЕНА И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТенок И ПОЛЫХ ТЕЛ

Рассмотрим приближенный прием анализа нестационарного теплообмена оболочек, позволяющий одновременно учитывать геометрические особенности рассматриваемых элементов и влияние различных видов тепловых воздействий [41]. Дополнительно к сформулированному в § 4-1 допущениям добавим еще два.

Будем предполагать, что геометрическая модель (образ) реальной оболочки или стенки создается образующей поверхностью

$$\sigma(\rho) = \tilde{a} + \tilde{b}\rho + \tilde{d}\rho^2, \quad (4-14)$$

где  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{d}$  — коэффициенты, зависящие от формы оболочки.

Относительная координата  $\rho = r/L$  отсчитывается от одной из поверхностей стенки, например, от внутренней (рис. 4-2). Коэффициенты  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{d}$  параболического уравнения (4-14) могут быть найдены при удовлетворении условий (4-1) в точках  $r = 0$  и  $r = L$ , т. е.

$$\sigma(\rho)|_{\rho=0} = S_1 = \tilde{a}; \quad \sigma(\rho)|_{\rho=1} = S_2 = \tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{d}, \quad (4-15)$$

и дополнительного условия, определяющего значения  $\sigma(\rho)$  в какой-то промежуточной (внутренней) точке  $0 < \rho_{\text{вн}} < 1$ ,

$$\sigma(\rho)|_{\rho=\rho_{\text{вн}}} = S_{\text{вн}}, \quad (4-16)$$

где, например, оболочка имеет экстремальное (минимальное или максимальное) значение внутренней поверхности  $S_{\text{вн}}$  (рис. 4-2, а).

Если образующая поверхность  $\sigma(\rho)$  с ростом  $\rho$  монотонно возрастает или уменьшается (рис. 4-2, б, в), взамен условия (4-16) может быть предложено более простое интегральное соотношение

$$V = L \int_0^1 \sigma(\rho) d\rho = L \left( \tilde{a} + \frac{1}{2} \tilde{b} + \frac{1}{3} \tilde{d} \right), \quad (4-17)$$

где  $V$  — полный объем оболочки.

В дальнейших рассуждениях (если не будут оговорены дополнительные условия) использоваться будут только условия (4-15)

и (4-17), что соответствует форме стенок или оболочек, представленных на рис. 4-2, в.

После преобразования уравнений (4-15) и (4-17) получаем следующие соотношения:

$$\sigma(\rho) = S_1 + 6VL^{-1}(b\rho - d\rho^2); \quad (4-18)$$

$$b = 1 - \frac{2}{3}\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2; \quad d = 1 - 0,5(\varphi_1 + \varphi_2); \quad (4-19)$$

$$\varphi_1 = LS_1/V; \quad \varphi_2 = LS_2/V. \quad (4-20)$$

В частности, для оболочек канонической формы зависимость (4-18) является математически строгой:

для пластины

$$b = d = 0; \quad \sigma(\rho) = S_1 = \text{const}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 1; \quad (4-21)$$

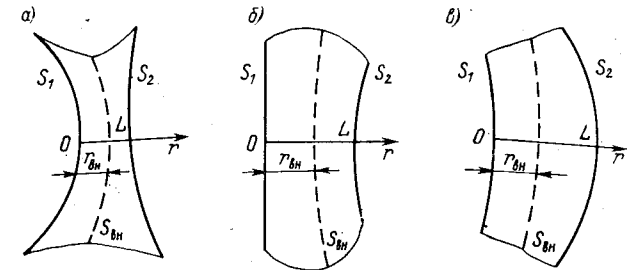


Рис. 4-2. Определение коэффициентов задающей поверхности  $\sigma(r)$

для цилиндрической стенки

$$\left. \begin{aligned} b &= 1 - \frac{L}{3V}(2S_1 + S_2); & d &= 0; \\ \varphi_1 &= \frac{2R_1}{(R_1 + R_2)}; & \varphi_2 &= \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)}; \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

для шаровой стенки

$$\varphi_1 = \frac{3R_1^2}{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}; \quad \varphi_2 = \frac{3R_2^2}{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}, \quad (4-23)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и внешний радиусы цилиндрической и сферической оболочек.

Определяющий размер  $L$  у канонических тел совпадает с реальной толщиной стенки. Для оболочек иной конфигурации размер  $L$  может быть приближенно оценен [41, 70] по формуле

$$L = 2V/(S_1 + S_2) \quad \text{при} \quad \frac{1}{4} < \frac{S_2}{S_1} < 4. \quad (4-24)$$

Второе дополнительное предположение определяет профиль поля для изображения  $T(\rho, s)$  температуры  $t(\rho, \tau)$  в оболочке

в виде полинома второго порядка относительно координаты  $\rho$  (параболическая аппроксимация):

$$T(\rho, s) = M(s) + N(s)\rho + P(s)\rho^2. \quad (4-25)$$

Естественно, что функция (4-25) не может в точности удовлетворить уравнению (3-5) и при соответствующем подборе коэффициентов  $M$ ,  $N$  и  $P$  является лишь его приближенным решением.

Для определения коэффициентов уравнения (4-25) потребуем, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям (4-6), которые с учетом соотношения (4-14) принимают вид

$$\frac{\lambda}{L} \cdot \frac{\partial t}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} S_1 + q_1 S_1 = \alpha_{c1} S_1 [t|_{\rho=0} - t_{c1}], \quad (4-26)$$

$$-\frac{\lambda}{L} \cdot \frac{\partial t}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} S_2 + q_2 S_2 = \alpha_{c2} S_2 [t|_{\rho=1} - t_{c2}]. \quad (4-27)$$

Третьим условием для определения трех неизвестных коэффициентов, взамен уравнения (3-5), является интегральное уравнение теплового баланса оболочки:

$$\omega V + q_1 S_1 + q_2 S_2 = c\gamma V \frac{dt_v}{d\tau} + \alpha_{c1} S_1 [t|_{\rho=0} - t_{c1}] + \alpha_{c2} S_2 \times \\ \times [t|_{\rho=1} - t_{c2}] + \alpha_{np} V (t_v - t_{np}), \quad (4-28)$$

где  $t_v$  — среднеобъемная температура оболочки, равная

$$t_v(\tau) = \frac{1}{V} \int_V t(\rho, \tau) dv. \quad (4-29)$$

**Приближенное решение задачи теплообмена оболочки.** Применяя к уравнениям (4-26) — (4-29) преобразование Лапласа и подставляя в них (4-25), можно найти значения коэффициентов  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и изображение  $T(\rho, s)$  температуры оболочки  $t(\rho, \tau)$ . Приближенное решение имеет тот же общий вид, что и точное, т. е. определяется выражениями (4-8) — (4-12).

Как показано в работах [3, 41, 67, 70], приближенные выражения передаточных функций, характеризующих реакцию криволинейной оболочки на тепловые воздействия, имеют следующую структуру:

$$Y_1(\rho, s) = \frac{B_0 + B_1 s}{1 + \varepsilon s}; \quad Y_2(\rho, s) = \frac{C_0 + C_1 s}{1 + \varepsilon s}; \quad (4-30)$$

$$Y_3(\rho, s) = D_0 / (1 + \varepsilon s). \quad (4-31)$$

Коэффициенты передаточных функций вычисляются по формулам, приведенным в работе [41]:

$$B_0 = E^{-1} \{ \varphi_1 (1 + 2\xi_2^{-1}) + \varphi_2 + [(f_1 - f_2) + (2f_1 - f_2) \xi_2^{-1}] \xi_3 - \\ - [2\varphi_2 + (1 - f_2 + 2\xi_2^{-1}) \xi_3] \rho + [(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ + (1 - f_1 + \xi_2^{-1}) \xi_3] \rho^2 \}; \quad (4-32)$$

$$B_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{L^2}{a} \left\{ [(f_1 - f_2) + \frac{2f_1 - f_2}{\xi_2}] - (1 - f_2 + 2\xi_2^{-1}) \rho + \right. \\ \left. + (1 - f_1 + \xi_2^{-1}) \rho^2 \right\}; \quad (4-33)$$

$$C_0 = \frac{1}{E} \left\{ (2\varphi_2 - f_2 \xi_3) \frac{1}{\xi_1} + (2\varphi_2 - f_2 \xi_3) \rho + [(\varphi_1 - \varphi_2) + \right. \\ \left. + (f_1 + \xi_1^{-1}) \xi_3] \rho^2 \right\}; \quad (4-34)$$

$$C_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{L^2}{a} \left[ -\frac{f_2}{\xi_1} - f_2 \rho + \left( f_1 + \frac{1}{\xi_1} \right) \rho^2 \right]; \quad (4-35)$$

$$D_0 = \frac{\xi_3}{E} \left[ \left( 1 + \frac{2}{\xi_2} \right) \frac{1}{\xi_1} + \left( 1 + \frac{2}{\xi_2} \right) \rho - \left( 1 + \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} \right) \rho^2 \right]; \quad (4-36)$$

$$E = \{ [\varphi_1 (1 + 2\xi_2^{-1}) + \varphi_2 (1 + 2\xi_1^{-1})] + [(f_1 - f_2) + (1 - f_2) \xi_1^{-1} + \\ + (2f_1 - f_2) \xi_2^{-1} + 2\xi_1^{-1} \xi_2^{-1}] \xi_3 \}; \quad (4-37)$$

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]; \quad f_2 = \frac{3}{10} \left( 1 - \frac{2}{9} \varphi_1 + \frac{1}{3} \varphi_2 \right). \quad (4-38)$$

Коэффициенты  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  являются аналогом критериев Био по отношению к соответствующим средам:

$$\xi_1 = \alpha_{c1} L / \lambda; \quad \xi_2 = \alpha_{c2} L / \lambda; \quad \xi_3 = \alpha_{np} L^2 / \lambda. \quad (4-39)$$

Величина  $\varepsilon$  может приближенно рассматриваться как показатель тепловой инерции оболочки:

$$\varepsilon = \frac{L^2}{a} \left[ \xi_3 + \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2\varphi_2}{\xi_1} + \frac{2\varphi_1}{\xi_2}}{(f_1 - f_2) + \frac{1 - f_2}{\xi_1} + \frac{2f_1 - f_2}{\xi_2} + \frac{2}{\xi_1 \xi_2}} \right]^{-1}, \quad (4-40)$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности вещества оболочки.

Как следует из (4-40), темп теплообмена оболочки, участвующей одновременно в поверхностном (наружном) и объемном (внутреннем) конвективном теплообмене, является величиной аддитивной, т. е.

$$m = \frac{1}{\varepsilon} = m_S + m_V, \quad (4-41)$$

при этом составляющая

$$m_S = \frac{a}{L^2} \cdot \frac{(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{2\varphi_2}{\xi_1} + \frac{2\varphi_1}{\xi_2}}{(f_1 - f_2) + \frac{1 - f_2}{\xi_1} + \frac{2f_1 - f_2}{\xi_2} + \frac{2}{\xi_1 \xi_2}} = \frac{1}{\varepsilon_S} \quad (4-42)$$

определяет темп теплообмена оболочки, обусловленный ее теплообменом с внешними средами через поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , а составляющая

$$m_V = \frac{a \xi_3}{L^2} = \frac{\alpha_{np}}{c\gamma} \quad (4-43)$$

характеризует темп теплообмена по отношению к среде, проходящей через весь объем  $V$  оболочки (внутренний объемный теплообмен).

Применяя к уравнению (4-8) совместно с (4-30), (4-31) и (4-9) обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных значениях ( $\tau = 0$ ) функций  $t(\rho, \tau)$ ,  $z_1(\tau)$ ,  $z_2(\tau)$ ,  $z_3(\tau)$  и их первых производных, получим искомое приближенное уравнение взаимосвязи между температурой  $t(\rho, \tau)$  оболочки (криволинейной стенки) и воздействиями  $z_1(\tau)$ ,  $z_2(\tau)$ ,  $z_3(\tau)$ :

$$\varepsilon \frac{dt}{d\tau} + t = \left( B_1 \frac{dz_1}{d\tau} + B_0 z_1 \right) + \left( C_1 \frac{dz_2}{d\tau} + C_0 z_2 \right) + D_0 z_3. \quad (4-44)$$

Из уравнения (4-44) с учетом формул (4-30) — (4-43) можно найти необходимые для инженерных расчетов значения характерных температур оболочки: среднеповерхностных  $t_{S_1}(\tau)$  и  $t_{S_2}(\tau)$  при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$  соответственно; среднеобъемной температуры  $t_V(\tau)$ , для которой передаточные функции определяются согласно выражению:

$$Y_{V_j} = \frac{1}{V} \int_V Y_j(\rho, s) dv, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4-45)$$

При этом  $B_{1V} = C_{1V} = 0$ ,  $E$  и  $\varepsilon$  не меняются, а

$$B_{0V} = E^{-1} [\varphi_1(1-f_2) + \varphi_2(1-2f_1+f_2) + 2\varphi_1 \zeta_2^{-1}]; \quad (4-46)$$

$$C_{0V} = E^{-1} [\varphi_1 f_2 + \varphi_2(2f_1-f_2) + 2\varphi_2 \zeta_1^{-1}]; \quad (4-47)$$

$$D_{0V} = \zeta_3 E^{-1} [(f_1-f_2) + (1-f_2) \zeta_1^{-1} + (2f_1-f_2) \zeta_2^{-1} + 2\zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1}]. \quad (4-48)$$

**Внутренние стоки тепла отсутствуют.** Во многих практических случаях криволинейная стенка, как элемент термостата, не имеет внутренних стоков тепла. Поэтому в расчетных формулах (4-32) — (4-38), (4-40), (4-46), (4-47) следует принять  $\zeta_3 = 0$ .

Коэффициенты  $D_0$ ,  $D_{0V}$  преобразуются к виду

$$D_0 = \frac{1}{E} \left[ \left(1 + \frac{2}{\zeta_2}\right) \frac{1}{\zeta_1} + \left(1 + \frac{2}{\zeta_2}\right) \rho - \left(1 + \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2}\right) \rho^2 \right], \quad (4-49)$$

$$D_{0V} = \frac{1}{E} \left[ (f_1-f_2) + \frac{1-f_2}{\zeta_1} + \frac{2f_1-f_2}{\zeta_2} + \frac{2}{\zeta_1 \zeta_2} \right]. \quad (4-50)$$

При  $\zeta_3 = 0$  поверхностные воздействия  $z_1(\tau)$  и  $z_2(\tau)$  сохраняют свою структуру (4-10), а внутреннее тепловое воздействие состоит только из равномерно распределенного по объему оболочки источника энергии, т. е.

$$z_3(\tau) = L^2 \omega(\tau) \lambda^{-1}. \quad (4-51)$$

**Частный случай** теплообмена (коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_{c_1} \rightarrow \infty$  и  $\alpha_{c_2} \rightarrow \infty$ ). Как следует из (4-9) и (4-10), при этих предельных условиях теплообмена ( $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ ) температуры поверхностей оболочки будут совпадать с температурами сред.

Коэффициенты передаточных функций (4-30) и (4-31) упрощаются и рассчитываются по формулам

$$B_0 = 1 - \left[ \frac{1-f_2}{f_1-f_2} \cdot \frac{m_V}{m} + 2 \frac{m_{S_2}}{m} \right] \rho + \left[ \frac{1-f_1}{f_1-f_2} \cdot \frac{m_V}{m} - \frac{m_{S_1}}{m} + \frac{m_{S_2}}{m} \right] \rho^2; \quad (4-52)$$

$$B_1 = \varepsilon \left( 1 - \frac{1-f_2}{f_1-f_2} \rho + \frac{1-f_1}{f_1-f_2} \rho^2 \right); \quad (4-53)$$

$$C_0 = \left( 2 \frac{m_{S_2}}{m} - \frac{f_2}{f_1-f_2} \cdot \frac{m_V}{m} \right) \rho + \left( \frac{f_1}{f_1-f_2} \cdot \frac{m_V}{m} + \frac{m_{S_1}}{m} - \frac{m_{S_2}}{m} \right) \rho^2; \quad (4-54)$$

$$C_1 = \varepsilon - \left( -\frac{f_2}{f_1-f_2} \rho + \frac{f_1}{f_1-f_2} \rho^2 \right); \quad (4-55)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{m} = \frac{L^2}{a} \left[ \zeta_3 + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{f_1-f_2} \right]^{-1}; \quad (4-56)$$

$$D_0 = \frac{m_V}{m} \cdot \frac{\rho(1-\rho)}{f_1-f_2}, \quad (4-57)$$

где  $m_V$  находится по (4-43), а

$$m_S = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{S_1 + S_2}{c_V V (f_1-f_2)} = \frac{a}{L} \cdot \frac{S_1 + S_2}{(f_1-f_2) V}, \quad (4-58)$$

причем

$$m = \frac{1}{\varepsilon} = m_V + m_S = m_V + m_{S_1} + m_{S_2}, \quad (4-59)$$

$$m_{S_1} = \frac{aS_1}{(f_1-f_2) LV}; \quad m_{S_2} = \frac{aS_2}{(f_1-f_2) LV}. \quad (4-60)$$

По физическому смыслу величины  $m_V$ ,  $m_S$ ,  $m_{S_1}$ ,  $m_{S_2}$ ,  $m$  приближенно определяют темпы теплообмена рассматриваемого тела относительно различных сред:  $m_V$  — по отношению к внутренней среде с температурой  $t_{np}(\tau)$ ;  $m_S$  — по отношению к поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ , температуры которых совпадают с температурами  $t_{c_1}(\tau)$  и  $t_{c_2}(\tau)$  внешних сред;  $m_{S_1}$ ,  $m_{S_2}$  — по отношению к каждой из поверхностей (внешних сред) отдельно.

Полный темп  $m$  характеризует теплообмен при одновременном комплексном воздействии сред, а  $\varepsilon$  характеризует теплоинерционные свойства тела в целом.

Если  $\zeta_3 = 0$ , то  $m_V = 0$ , а  $m_S$  приближенно определяет максимально возможный темп теплообмена криволинейной оболочки (стенки) при теплообмене с двумя средами ( $\zeta_1 = \infty$ ,  $\zeta_2 = \infty$ ).

По теореме Г. М. Кондратьева максимальный темп теплообмена тела  $m_\infty$  связан с коэффициентом температуропроводности  $a$  соотношением [35]

$$a = Km_\infty. \quad (4-61)$$

Сравнивая выражения для (4-58) и (4-61), получаем формулу для оценки коэффициента формы  $K$  криволинейной стенки или полого тела:

$$K = (f_1 - f_2) LV / (S_1 + S_2). \quad (4-62)$$

**Сплошное тело.** Из выражений (4-8) — (4-11), (4-30) в результате выполнения соответствующих предельных переходов могут быть получены приближенные формулы для расчета температуры сплошного тела. Переход от криволинейной стенки к сплошному телу осуществляется при  $S_1 = 0$  или  $\varphi_1 = 0$ , что означает стягивание внутренней поверхности стенки в линию или точку. Физически переход к сплошному телу происходит при условии  $\zeta_1 \rightarrow 0$ . Совместно с геометрическим условием  $S_1 = 0$  это означает, что  $Y_1(\rho, s) = 0$  и решение (4-8) принимает вид (3-10).

Предпочтительнее, однако, для расчета температуры сплошных тел пользоваться формулами, полученными в гл. 3, в частности, для приближенной оценки применять передаточные функции (3-44) — (3-46), так как эти результаты получены на основе соотношений (3-15), (3-17) и позволяют выбирать определяющий размер  $L$  и фактор формы тела  $n$ .

**Стержни постоянного сечения.** Решение (4-8) совместно с (4-30) и (4-31) описывает теплообмен стержней постоянного сечения (рис. 4-3).

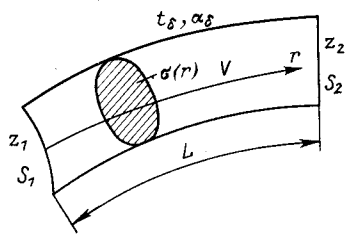


Рис. 4-3. Модель стержня постоянного сечения

Обозначим площадь поперечного сечения стержня  $S$ , а длину  $L$ . Пусть, как в случае криволинейной стенки, тепловыми воздействиями  $z_1$  и  $z_2$  с торца  $S_1 = S$  является среда с температурой  $t_{c1}(\tau)$ , а с торца  $S_2 = S$  — среда с температурой  $t_{c2}(\tau)$ . Боковая поверхность стержня обменивается теплотой со средой, имеющей температуру  $t_\delta(\tau)$ . Коэффициент теплообмена с этой средой равен  $\alpha_\delta$ . Так как распределение температуры

в стержне в каждом из его поперечных сечений  $S$  равномерное, то поле температур зависит только от координаты  $\rho = r/L$ , т. е.  $t = t(\rho, \tau)$ . Нетрудно показать, что для расчета температуры стержня могут быть использованы приведенные выше выражения, причем роль внутренней среды  $t_{np}(\tau)$  выполняет внешняя среда с температурой  $t_\delta(\tau)$ . Коэффициент теплообмена  $\alpha_\delta$  с боковой поверхности стержня предварительно пересчитывается на  $\alpha_{np}$  по формуле

$$\alpha_{np} = \rho \alpha_\delta / S, \quad (4-63)$$

где  $\rho$  — периметр поперечного сечения стержня. В частности, для стержней круглого сечения

$$\alpha_{np} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} \alpha_\delta = \frac{2}{R} \alpha_\delta, \quad (4-64)$$

где  $R$  — радиус цилиндрического стержня.

#### 4-3. ТЕПЛОВЫЕ ПОТОКИ В ОБОЛОЧКАХ И СТЕРЖНЯХ

Удельный тепловой поток  $q_\lambda(r, \tau)$ , проходящий через единичную площадку поверхности  $\sigma(r)$ , определяется по закону Фурье:

$$q_\lambda(r, \tau) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}; \quad q_\lambda(\rho, \tau) = -\frac{\lambda}{L} \frac{\partial t}{\partial \rho}, \quad (4-65)$$

а его лапласовское изображение с учетом дифференцирования по  $\rho$  решения (4-8) записывается так:

$$Q_\lambda(\rho, s) = -\frac{\lambda}{L} \frac{dT}{d\rho} = -\frac{\lambda}{L} [Y'_1 Z_1 + Y'_2 Z_2 + Y'_3 (Z_3 + z_n)]. \quad (4-66)$$

Из уравнений (4-30) и (4-31) имеем

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{B'_0 + B'_1 s}{1 + \varepsilon s} Z_1 + \frac{C'_0 + C'_1 s}{1 + \varepsilon s} Z_2 + \frac{D'_0}{1 + \varepsilon s} (Z_3 + z_n). \quad (4-67)$$

Подставляя (4-67) в (4-66), получаем изображение  $Q_\lambda(\rho, s)$ , удельного теплового потока  $q_\lambda(\rho, \tau)$  в элементе, имеющем однородное температурное поле:

$$Q_\lambda(\rho, s) = -\frac{\lambda}{L} \frac{1}{1 + \varepsilon s} \left[ B'_0 \left( 1 + \frac{B'_1}{B'_0} s \right) Z_1 + C'_0 \left( 1 + \frac{C'_1}{C'_0} s \right) Z_2 + D'_0 (Z_3 + z_n) \right]. \quad (4-68)$$

Переходя от изображения  $Q_\lambda(\rho, s)$  к оригиналу, находим приближенное дифференциальное уравнение связи между тепловыми воздействиями  $z_1(\tau)$ ,  $z_2(\tau)$ ,  $z_3(\tau)$  и  $z_n$  и тепловыми потоками  $q_\lambda(\rho, \tau)$

$$\varepsilon \frac{dq_\lambda(\rho, \tau)}{d\tau} + q_\lambda(\rho, \tau) = -\frac{\lambda}{L} \left\{ B'_0 \left[ z_1(\tau) + \left( 1 + \frac{B'_1}{B'_0} \right) \frac{dz_1}{d\tau} \right] + C'_0 \times \right. \\ \left. \times \left[ z_2(\tau) + \left( 1 + \frac{C'_1}{C'_0} \right) \frac{dz_2}{d\tau} \right] + D'_0 z_3(\tau) \right\}. \quad (4-69)$$

Отметим, что переход от (4-68) к (4-69) возможен при нулевых начальных условиях ( $z_1, z_2, z_n, q_\lambda$  равны нулю при  $\tau = 0$ ). Символ «штрих» во всех предыдущих выражениях означает операцию дифференцирования по координате  $\rho$ .

Производные коэффициентов передаточных функций находятся по формулам (4-32) — (4-36):

$$\left. \begin{aligned}
 B'_0(\rho) &= -E^{-1} \left\{ -[2\varphi_2 + (1-f_2 + 2\zeta_2^{-1}) \zeta_3] + 2[(\varphi_2 - \varphi_1) + (1-f_1 + \zeta_2^{-1}) \zeta_3] \rho \right\}; \\
 B'_1(\rho) &= \frac{1}{E} \cdot \frac{L^2}{a} \left\{ -\left[1-f_2 + \frac{2}{\zeta_2}\right] + 2\left[1-f_1 + \frac{1}{\zeta_2}\right] \rho \right\}; \\
 C'_0(\rho) &= E^{-1} \left\{ (2\varphi_2 - f_2 \zeta_3) + 2[(\varphi_1 - \varphi_2) + (f_1 + \zeta_1^{-1}) \zeta_3] \rho \right\}; \\
 C'_1(\rho) &= \frac{1}{E} \cdot \frac{L^2}{a} \left[ -f_2 + 2\left(f_1 + \frac{1}{\zeta_1}\right) \rho \right]; \\
 D'_0(\rho) &= \frac{\zeta_3}{E} \left[ \left(1 + \frac{2}{\zeta_2}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2}\right) \rho \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (4-70)$$

Входящие в (4-70) параметры определяются согласно уравнениям (4-20), (4-37) — (4-40).

**Оценочное уравнение.** Если тепловые воздействия  $z_1(\tau)$ ,  $z_2(\tau)$  и  $z_3(\tau)$  являются медленно изменяющимися функциями времени, то взамен (4-68), используя выражение (3-99), можно применять более грубое приближение [70]:

$$Q_\lambda(\rho, s) \approx -\lambda L^{-1} \left\{ B'_0 [1 + b(\rho) s] Z_1 + C'_0 [1 + c(\rho) s] Z_2 + D'_0 (1 - \varepsilon s) Z_3 + D'_0 \frac{z_H}{(1 + \varepsilon s)} \right\}. \quad (4-71)$$

Переходя от изображения функции к ее оригиналу, получаем оценочное приближенное уравнение для расчета удельного теплового потока  $q_\lambda(\rho, \tau)$ :

$$\begin{aligned}
 q_\lambda(\rho, \tau) \approx & -\frac{\lambda}{L} \left\{ B'_0 \left[ z_1(\tau) + b(\rho) \frac{dz_1(\tau)}{d\tau} \right] + \right. \\
 & + C'_0 \left[ z_2(\tau) + c(\rho) \frac{dz_2(\tau)}{d\tau} \right] + D'_0 [z_3(\tau) - \\
 & \left. - \varepsilon \frac{dz_3(\tau)}{d\tau} \right] + D'_0 \frac{1}{\varepsilon} z_H \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \left. \right\}. \quad (4-72)
 \end{aligned}$$

В выражениях (4-71) и (4-72) введены обозначения

$$b(\rho) = \left( \frac{B'_1}{B'_0} \right) - \varepsilon; \quad c(\rho) = \left( \frac{C'_1}{C'_0} \right) - \varepsilon. \quad (4-73)$$

**Тепловые потоки на границах смежных элементов.** При расчете температурных полей в системах тел, состоящих из соприкасающихся элементов (оболочки, стержни), используются граничные условия четвертого рода, т. е. приравниваются значения температур и тепловых потоков на границе раздела двух смежных элементов.

Тепловые потоки на границах стенки  $q_\lambda(0, \tau)$  и  $q_\lambda(1, \tau)$  находятся по уравнениям (4-67), (4-68), (4-71) и (4-72), в которые под-

ставляются значения коэффициентов, определяемые по формулам (4-70), (4-73) соответственно при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ .

Рассмотрим случай, когда  $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$ . Это условие выполняется, например, при плотном тепловом контакте поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  криволинейной стенки с другими элементами многосоставной тепловой модели. При таких условиях внешние воздействия  $z_1(\tau)$  и  $z_2(\tau)$  непосредственно равны температурам тела  $t_{S_1}(\tau)$  и  $t_{S_2}(\tau)$  на границах  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\left. \begin{aligned}
 z_1(\tau) &= t_{c_1}(\tau) = t(0, \tau) = t_{S_1}(\tau); \\
 z_2(\tau) &= t_{c_2}(\tau) = t(1, \tau) = t_{S_2}(\tau).
 \end{aligned} \right\} \quad (4-74)$$

Уравнения (4-68) и (4-71) с учетом (4-74) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
 Q_\lambda(\rho, s) = & -\frac{\lambda}{L} \frac{1}{1 + \varepsilon s} \left\{ \left[ B'_0 \left( 1 + \frac{B'_1}{B'_0} s \right) \right] T_{S_1}(s) + \right. \\
 & \left. + \left[ C'_0 \left( 1 + \frac{C'_1}{C'_0} s \right) \right] T_{S_2}(s) + D'_0 [Z_3(s) + z_H] \right\}; \quad (4-75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_\lambda(\rho, s) \approx & -\frac{\lambda}{L} \left\{ B'_0 [1 + b(\rho) s] T_{S_1}(s) + \right. \\
 & \left. + C'_0 [1 + c(\rho) s] T_{S_2}(s) + D'_0 (1 - \varepsilon s) Z_3(s) + D'_0 \frac{z_H}{1 + \varepsilon s} \right\}. \quad (4-76)
 \end{aligned}$$

Аналогичные замены в соответствии с (4-74) делаются и в уравнениях (4-69), (4-72).

Коэффициенты  $B'_0$ ,  $B'_1$ ,  $C'_0$ ,  $C'_1$ ,  $D'_0$  в уравнениях (4-75) и (4-76) с учетом  $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$  находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 B'_0 &= -\left( \frac{1-f_2}{f_1-f_2} \frac{mV}{m} + 2 \frac{mS_2}{m} \right) + \\
 & + 2 \left( \frac{1-f_1}{f_1-f_2} \frac{mV}{m} - \frac{mS_1}{m} + \frac{mS_2}{m} \right) \rho; \\
 B'_1 &= \varepsilon \left( -\frac{1-f_2}{f_1-f_2} + 2 \frac{1-f_1}{f_1-f_2} \rho \right); \\
 C'_0 &= \left( 2 \frac{mS_2}{m} - \frac{f_2}{f_1-f_2} \frac{mV}{m} \right) + \\
 & + 2 \left( \frac{f_1}{f_1-f_2} \frac{mV}{m} + \frac{mS_1}{m} - \frac{mS_2}{m} \right) \rho; \\
 C'_1 &= \varepsilon \left( -\frac{f_2}{f_1-f_2} + 2 \frac{f_1}{f_1-f_2} \rho \right); \\
 D'_0 &= \frac{1-2\rho}{f_1-f_2} \frac{mV}{m}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4-77)$$

Полагая в этих формулах  $\rho = 0$ , получаем

$$\left. \begin{aligned}
 B'_0(0) &= -\left(\frac{1-f_2}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m} + 2 \frac{m_{S_2}}{m}\right); \\
 \frac{B'_1(0)}{B'_0(0)} &= \frac{1}{m_V + 2 \frac{f_1-f_2}{1-f_2} m_{S_2}}; \\
 C'_0(0) &= 2 \frac{m_{S_2}}{m} - \frac{f_2}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m}; \\
 \frac{C'_1(0)}{C'_0(0)} &= -\frac{\frac{1}{m} \frac{f_2}{f_1-f_2}}{2 \frac{m_{S_2}}{m} - \frac{f_2}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m}}; \\
 D'_0(0) &= \frac{1}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m}.
 \end{aligned} \right\} (4-78)$$

При  $\rho = 1$  из (4-77) получаем

$$\left. \begin{aligned}
 B'_0(1) &= -\left(2 \frac{m_{S_1}}{m} + \frac{2f_1-f_2-1}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m}\right); \\
 \frac{B'_1(1)}{B'_0(1)} &= \frac{1}{m_V + 2 \frac{f_1-f_2}{2f_1-f_2-1} m_{S_1}}; \\
 C'_0(1) &= \frac{2f_1-f_2}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m} + 2 \frac{m_{S_1}}{m}; \\
 \frac{C'_1(1)}{C'_0(1)} &= \frac{1}{m_V + 2 \frac{f_1-f_2}{2f_1-f_2} m_{S_1}}; \\
 D'_0(1) &= -\frac{1}{f_1-f_2} \frac{m_V}{m}.
 \end{aligned} \right\} (4-79)$$

Коэффициенты  $m_{S_1}$ ,  $m_{S_2}$ ,  $m_S$ ,  $m_V$  и  $m$  находятся по формулам (4-60), (4-58), (4-43), (4-59).

#### 4-4. СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК

Значения тепловых потоков  $q_{\lambda}(\rho)$  в стационарном режиме теплообмена при комплексном воздействии сред могут быть найдены из уравнения (4-69) или (4-72).

$$q_{\lambda \text{ ст}}(\rho) = -\frac{\lambda}{L} [B'_0(\rho) z_{1\text{ст}} + C'_0(\rho) z_{2\text{ст}} + D'_0(\rho) z_{3\text{ст}}]. \quad (4-80)$$

В частном случае, когда  $\xi_1 = \xi_2 = \infty$ , для определения  $q_{\lambda \text{ ст}}(\rho)$  имеем

$$q_{\lambda \text{ ст}}(\rho) = -\frac{\lambda}{L} [B'_0(\rho) t_{S_1 \text{ ст}} + C'_0(\rho) t_{S_2 \text{ ст}} + D'_0(\rho) z_{3\text{ст}}], \quad (4-81)$$

где  $t_{S_1 \text{ ст}}$  и  $t_{S_2 \text{ ст}}$  — значения температуры поверхностей в стационарном режиме.

При отсутствии внутреннего воздействия ( $\xi_3 = 0$ ) из (4-81) получаем

$$q_{\lambda \text{ ст}}(\rho) = -\frac{\lambda}{L} [B'_0(\rho) t_{S_1 \text{ ст}} + C'_0(\rho) t_{S_2 \text{ ст}}]. \quad (4-82)$$

Из формул (4-77) находим (при  $m_V = 0$ )

$$B'_0(\rho) = -C'_0(\rho) = -2 \left[ \frac{m_{S_2}}{m} + \frac{m_{S_1} - m_{S_2}}{m} \rho \right], \quad (4-83)$$

откуда

$$q_{\lambda \text{ ст}}(\rho) = 2 \frac{\lambda}{L} \left[ \frac{m_{S_2}}{m} + \frac{m_{S_1} - m_{S_2}}{m} \rho \right] (t_{S_1 \text{ ст}} - t_{S_2 \text{ ст}}). \quad (4-84)$$

Полный тепловой поток через любую поверхность  $\sigma(\rho)$  определится в виде

$$Q_{\lambda \text{ поля}}(\rho) = q_{\lambda \text{ ст}}(\rho) \sigma(\rho). \quad (4-85)$$

В стационарном режиме полный поток  $Q_{\lambda \text{ ст}}$ , передаваемый за счет теплопроводности через стенку при выполнении условий  $\alpha_{\text{пр}} = 0$ ,  $\omega = 0$  может быть найден по формуле

$$Q_{\lambda \text{ ст}} = \Lambda |t_{S_1 \text{ ст}} - t_{S_2 \text{ ст}}| = |t_{S_1 \text{ ст}} - t_{S_2 \text{ ст}}| / R. \quad (4-86)$$

где  $\Lambda$  — полная тепловая проводимость стенки, Вт/К;  $R$  — полное термическое сопротивление криволинейной стенки, К/Вт.

В первом приближении из сравнения тепловых потоков  $Q_{\lambda \text{ поля}}(\rho)$  при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$  по (4-85) и  $Q_{\lambda \text{ ст}}$  по (4-86) получаем

$$R = \frac{L}{\lambda} \frac{S_1 + S_2}{2S_1 S_2} = \frac{1}{\Lambda} \quad (4-87)$$

или с учетом (4-24)

$$R = \frac{1}{\Lambda} \approx \frac{V}{\lambda S_1 S_2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{4} < \frac{S_2}{S_1} < 4. \quad (4-88)$$

Возможны иные, более строгие варианты определения  $[Q_{\lambda \text{ ст}}$  и  $R$ , некоторые из них изложены в работах [68, 70].

При использовании, например, параболической аппроксимации температуры (4-25) формула для расчета термического сопротивления оболочки принимает следующий вид:

$$R = \frac{L^2}{\lambda V} \frac{1}{F}, \quad (4-89)$$

где

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{\Phi_1 + \Phi_2} \left[ \Phi_1^2 (\Phi_1 + \Phi_2) + 8\Phi_1 b \left( \Phi_1 + \frac{\Phi_2}{2} \right) + \right. \\
 &+ 18 \left( b^2 - \frac{\Phi_1}{3} d \right) \left( \Phi_1 + \frac{\Phi_2}{3} \right) - \frac{144}{5} b d \left( \Phi_1 + \frac{\Phi_2}{4} \right) + 12d^2 \left( \Phi_1 + \frac{\Phi_2}{5} \right) \left. \right]
 \end{aligned}$$

и характеризует геометрические особенности тела; коэффициенты  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $b$  и  $d$  определяются из ранее полученных формул (4-19), (4-20).

Выражение (4-89) существенно упрощается, если при определении полного стационарного теплового потока  $Q_{\lambda \text{ поля}}(\rho)$ , проходящего через обо-



лочку, применить приближенное интегрирование по методу Симпсона, разбив промежуток интегрирования от  $\rho = 0$  до  $\rho = 1$  на два равных отрезка  $L/2$ . Тогда

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{3V}{S_1 S_2 + 2S_*^2}; \quad S_* = \frac{3}{2} \left[ \frac{V}{L} - \frac{1}{6} (S_1 + S_2) \right]. \quad (4-90)$$

Сопоставление значений  $R$ , полученных по (4-90), с данными работ [21, 38, 42] показало, что для цилиндрических и сферических оболочек с отношением  $S_2/S_1 < 8$  и для криволинейных стенок, образованных «круглой трубой в квадратной изоляции» и «многогранником в многограннике» с  $S_2/S_1 < 3$ , а также для тел иных форм и размеров с определенным соотношением  $S_2$  и  $S_1$  погрешность расчета  $R$  по формуле (4-90) не превышает 5 %.

#### 4-5. ОСОБЕННОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При выводе основного соотношения (4-8) между изображениями температуры стенки и воздействий реальное распределение температуры в стенке было заменено параболической зависимостью (4-25). При определении коэффициентов  $M$ ,  $N$ ,  $P$  в выражении (4-25) одномерное уравнение теплопроводности (3-5) не использовалось. Значения этих коэффициентов, а следовательно, и структура передаточных функций  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ , находились из интегрального уравнения теплового баланса (4-28) с учетом (4-26), (4-27).

Поскольку выражения (4-8) и (4-25) являются приближенными решениями во всем диапазоне  $0 \leq \rho \leq 1$  и  $0 \leq \tau < \infty$ , следует сказать о том, как решение (4-8) и передаточные функции (4-30), (4-31) отражают истинное тепловое состояние стенки в характерных режимах ее теплообмена.

Для удобства проведения последующих рассуждений рассмотрим предельный случай внешних тепловых воздействий, когда коэффициенты  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  максимально велики, т. е.  $\zeta_1 = \infty$  и  $\zeta_2 = \infty$ .

При этих условиях согласно (4-74) воздействия  $z_1$  и  $z_2$  соответственно переходят в температуры  $t_{S_1}(\tau)$  и  $t_{S_2}(\tau)$  границ стенки ( $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ ) и общее решение (4-8) переписывается в виде

$$T(\rho, s) = \frac{B_0 + B_1 s}{1 + \epsilon s} T_{S_1} + \frac{C_0 + C_1 s}{1 + \epsilon s} T_{S_2} + \frac{D_0}{1 + \epsilon s} [Z_3 + z_H]. \quad (4-91)$$

**Стационарное тепловое состояние.** Если воздействия  $t_{S_1}$ ,  $t_{S_2}$  и  $z_3$  постоянны, то при  $\tau \rightarrow \infty$  температурное поле стенки стабилизируется, т. е. наступает стационарный режим теплообмена. После предельного перехода из (4-8) или из (4-44) получаем

$$t_{ct}(\rho) = t_{ct1}(\rho) + t_{ct2}(\rho) + t_{пр.ст}(\rho) = B_0 t_{S_1 ct} + C_0 t_{S_2 ct} + D_0 z_{3ct}. \quad (4-92)$$

где функции  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$  определяются по формулам (4-52), (4-54) и (4-57).

Смысловое значение функций  $B_0$ ,  $C_0$  и  $D_0$  следующее: каждая из них определяет стационарное распределение температуры в стенке при соответствующем «собственном» воздействии и остальных воздействиях, равных нулю. Например,  $B_0(\rho)$  характеризует распределение температуры, которое наблюдалось бы в стенке при  $t_{S_1 ct} > 0$ ,  $t_{S_2 ct} = 0$ ,  $z_{3ct} = 0$ . При  $\rho = 0$  имеем  $B_0(0) = 1$ . Из уравнения (4-92)  $t_{ct}(0) = t_{S_1 ct}$ , а при  $\rho = 1$  получим  $B_0(1) = 0$  и  $t_{ct}(1) = 0$ . Во всех промежуточных точках  $0 < \rho < 1$  функция  $B_0(\rho)$ , умноженная на  $t_{S_1 ct}$ , дает значение температуры для заданной координаты  $\rho$ .

Аналогичное заключение может быть сделано в отношении  $C_0(\rho)$  и  $D_0(\rho)$ . Распределение температуры в стенке показано на рис. 4-4, а.

Из физических соображений следует, что при  $t_{S_2 ct} = 0$ ,  $z_{3ct} = 0$  и

$t_{S_1 ct} > 0$  температура стенки изменяется в пределах  $t_{S_1 ct} \geq t_{ct} \geq 0$ , т. е. функция  $B_0(\rho)$  всегда положительна.

Аналогично при  $t_{S_1 ct} = 0$ ,  $z_{3ct} = 0$  и  $t_{S_2 ct} > 0$  имеем  $0 \leq t_{ct}(\rho) \leq t_{S_2 ct}$ , т. е.  $C_0(\rho) > 0$ . При  $t_{S_1 ct} = 0$ ,  $t_{S_2 ct} = 0$  и  $z_{3ct} > 0$  функция  $D_0(\rho)$  должна быть положительной, т. е.  $t_{пр.ст}(\rho)$  во всем диапазоне изменения  $0 \leq \rho \leq 1$  тоже положительна. Функция  $D_0(\rho)$  не может также превышать значений, больших единицы, так как это приводило бы к тому, что при нулевых внешних воздействиях ( $t_{S_1 ct} = t_{S_2 ct} = 0$ ) значение температуры  $t_{пр.ст}(\rho)$  было бы больше самого воздействия  $z_{3ct}$ . Это физически невозможно. Действительно, при  $w_{ct} = 0$  имеем  $z_{3ct} = t_{пр.ст}$  и если бы  $D_0(\rho) > 1$ , то  $t_{ct}(\rho) > t_{пр.ст}$ ; т. е. температура  $t_{ct}$  в какой-то области стенки была бы выше температуры среды.

Следовательно, проведенный выше анализ позволяет сделать вывод о том, что необходимо ограничить значения величин, получаемых из формул (4-52), (4-54) и (4-57):

$$0 \leq B_0(\rho) \leq 1; \quad 0 \leq C_0(\rho) \leq 1; \quad 0 \leq D_0(\rho) \leq 1. \quad (4-93)$$

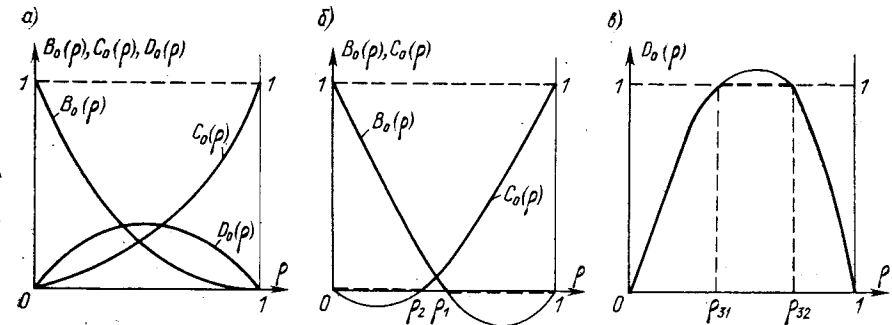


Рис. 4-4. Распределение температуры в оболочке

Значение температуры  $t_{ct}(\rho)$  находится в результате сложения  $t_{ct1}(\rho)$ ,  $t_{ct2}(\rho)$ ,  $t_{пр.ст}(\rho)$  по уравнению (4-92) с учетом требований (4-93).

Условия (4-93) выполняются не всегда. Начиная с некоторых значений критерия  $\zeta_3$ , т. е. при определенной степени интенсивности внутреннего воздействия  $z_{3ct}$ , функции  $B_0(\rho)$  и  $C_0(\rho)$  становятся знакопеременными (см. рис. 4-4, б). Причина аномального поведения функций  $B_0$ ,  $C_0$  и  $D_0$  является следствием приближенного решения (4-92). Чем выше интенсивность воздействия сред, т. е. больше значения критериев  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ , тем «труднее» с помощью параболической зависимости (4-25) передать реальное распределение температуры в стенке. При определенных соотношениях коэффициентов  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  и  $\zeta_3$  параболическая аппроксимация (4-25) приводит к неправильным результатам. Устранить их можно, вводя на участках, отмеченных на рис. 4-4, б, в пунктиром, ограничения (4-93), т. е. заменяя непрерывные зависимости, получаемые по формулам (4-52), (4-54) и (4-57), кусочно-непрерывными.

Невыполнение требований (4-93) для функций  $B_0(\rho)$ ,  $C_0(\rho)$  и  $D_0(\rho)$  можно пояснить так: из-за сильного влияния внутреннего  $z_{3ct}$  и внешнего  $t_{S_2 ct}$  воздействий тепловое влияние от воздействия  $t_{S_1 ct}$  распространяется не на всю толщину оболочки, а только на прилегающую к воздействию  $t_{S_1 ct}$  часть, ограниченную значениями  $0 \leq \rho \leq \rho_1$ . В области  $\rho_1 \leq \rho \leq 1$  тепловое воздействие  $t_{S_1 ct}$  практически не участвует в формировании температурного поля  $t_{ct}(\rho)$ , т. е.  $B_0(\rho) = 0$  при  $\rho_1 \leq \rho \leq 1$  (рис. 4-4, б). По тем же причинам для воздействия  $t_{S_2 ct}$  зона влияния также ограничена  $\rho_2 \leq \rho \leq 1$ . В области  $\rho_{31} \leq \rho \leq \rho_{32}$  интенсивность воздействия  $z_{3ct}$  настолько велика,

что оно подавляет влияние воздействий  $t_{S_1ст}$  и  $t_{S_2ст}$ ; их участие соответственно ограничено диапазонами  $0 \leq \rho \leq \rho_{31}$  и  $\rho_{32} \leq \rho \leq 1$  (рис. 4-4, в).

Сказанное выше справедливо при любых значениях критериев теплообмена  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ . В общем случае стационарного теплообмена, определяемом уравнением (4-92), требования (4-93) частного случая  $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$  заменяются следующими ограничениями при численном расчете коэффициентов  $B_0, C_0$  и  $D_0$  по общим формулам (4-32), (4-34), (4-36), (4-37):

$$B_0(\rho) \geq 0; C_0(\rho) \geq 0; 0 \leq D_0(\rho) \leq 1. \quad (4-94)$$

Отметим, что при  $\zeta_3 = 0$  коэффициенты  $B_0(\rho)$  и  $C_0(\rho)$  положительны при любых значениях критериев  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , т. е. при  $\zeta_3 = 0$  формулы (4-32) и (4-34) действительны во всем диапазоне значений  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Можно было бы провести подробный анализ поведения функций  $B_0, C_0, D_0$  для разных значений критериев  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  и различных форм оболочек, определить характерные значения координат  $\rho_1, \rho_2, \rho_{31}, \rho_{32}$  и т. п., однако, при расчетах коэффициентов  $B_0, C_0, D_0$  достаточно выполнять требования (4-94).

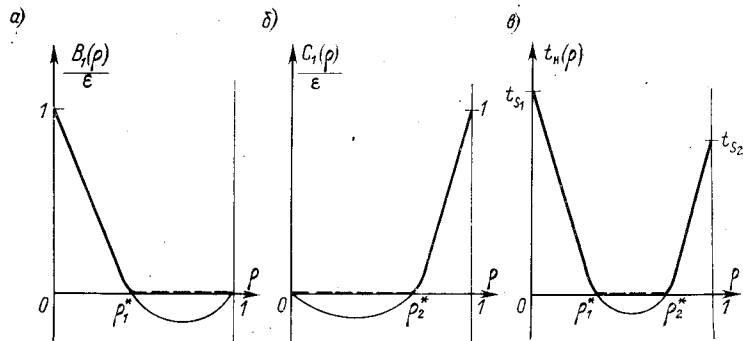


Рис. 4-5. Начальное распределение температур в оболочке

**Начальное тепловое состояние оболочки.** В приближенном решении задачи теплопроводности начальное распределение температуры в оболочке принималось равным  $t_n$ . Посмотрим, как удовлетворяется это условие.

Используя в решении (4-8) предельный переход  $t(\rho, \tau)|_{\tau=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} sT(\rho, s)$ , с учетом (4-30) получаем

$$t(\rho, \tau)|_{\tau=0} = \frac{B_1}{\epsilon} z_{1ст} + \frac{C_1}{\epsilon} z_{2ст} + \frac{D_0}{\epsilon} z_n \neq t_n, \quad (4-95)$$

где  $z_{1ст}$  и  $z_{2ст}$  — стационарные значения воздействий  $z_1(\tau)$  и  $z_2(\tau)$ .

Из (4-95) следует, что в общем случае при любых  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) требование  $t(\rho, \tau)|_{\tau=0} = t_n(\rho)$  не выполняется.

В частном предельном случае при условиях  $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty, z_n = 0$  выражение (4-95) в соответствии с (4-74) преобразуется к виду

$$t(\rho, \tau)|_{\tau=0} = \frac{B_1}{\epsilon} t_{S1ст} + \frac{C_1}{\epsilon} t_{S2ст}, \quad (4-96)$$

что также не удовлетворяет начальному условию  $t(\rho, \tau)|_{\tau=0} = 0$ .

Так как показатель тепловой инерции  $\epsilon$  стенки всегда положителен, то профиль температуры при  $\tau = 0$  в стенке определяется значениями коэффициентов  $B_1, C_1$  и  $D_0$ .

В частном предельном случае  $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty, z_n = 0$  коэффициенты  $B_1$  и  $C_1$ , входящие в (4-96), находятся по формулам (4-53) и (4-55). Качественный ход изменения  $B_1(\rho)$  и  $C_1(\rho)$  показан на рис. 4-5.

Как видно из рис. 4-5 и формул (4-53) и (4-55), при  $\rho = 0$   $B_1(0)/\epsilon = 1, C_1(0)/\epsilon = 0$ ; при  $\rho = 1$   $B_1(1)/\epsilon = 0, C_1(1)/\epsilon = 1$ . При некоторых значениях  $\rho_1^*, \rho_2^*$  функции  $B_1(\rho)$  и  $C_1(\rho)$  меняют свой знак. Таким образом, начальное тепловое состояние  $t_n = 0$  при параболической аппроксимации (впрочем, как и в большинстве приближенных решений) передается неточно, поскольку параболическая аппроксимация не может передать состояние  $t_n(\rho) = 0$ .

Можно потребовать, чтобы в диапазоне значений  $\rho_1^* \leq \rho \leq 1$  выполнялось условие  $B_1(\rho) = 0$  и соответственно при  $0 \leq \rho \leq \rho_2^*$  имеем  $C_1(\rho) = 0$  (пунктирные участки на рис. 4-5, а и б). Однако и тогда начальный профиль температуры  $t_n = 0$  в областях, прилегающих к границам  $S_1$  и  $S_2$  стенки, все равно будет не нулевым (рис. 4-5, в).

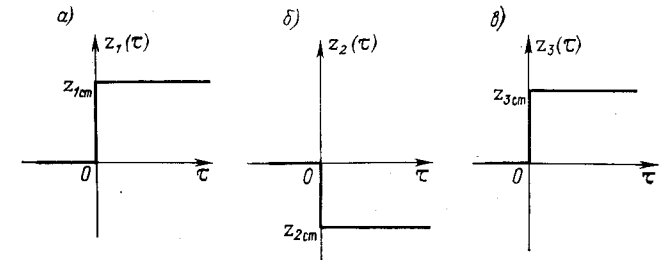


Рис. 4-6. Виды тепловых воздействий

Сказанное выше означает, что в начальные моменты времени (если ставится задача расчета температурного поля во всем диапазоне времени  $0 < \tau < \infty$ ) наблюдается несоответствие расчетных и реальных значений температур для большинства вариантов приближенных решений. Как показывают расчеты, при параболической аппроксимации профиля температур этот начальный период, как правило, составляет незначительную часть общего времени процесса теплопроводности.

Формально требование  $t_n = 0$  можно удовлетворить, если изменить структуру исходных функций (4-30), например, преобразовав их к виду

$$Y_1 = B_0 \frac{1}{1 + (\epsilon - B_1/B_0)s}; Y_2 = C_0 \frac{1}{1 + (\epsilon - C_1/C_0)s}, \quad (4-97)$$

но тогда увеличиваются погрешности расчета температуры в основных нестационарных стадиях теплообмена.

Не приводя подробных обоснований, отметим, что снижение интенсивности теплообмена, т. е. уменьшение критериев  $\zeta_1, \zeta_2$  и  $\zeta_3$ , приводит к значительному сокращению длительности начальной стадии и к более точному отображению уравнением (4-95) начального теплового состояния. Случай  $\zeta_1 = \infty$  и  $\zeta_2 = \infty$  является максимально неблагоприятным.

**Переходный процесс теплообмена.** Пусть воздействия  $z_1(\tau), z_2(\tau), z_3(\tau)$  изменяются во времени скачкообразно до некоторых стационарных значений  $z_{1ст}, z_{2ст}, z_{3ст}$ , как показано на рис. 4-6, а, б, в. Подставляя изображения воздействий в уравнение (4-91), получаем

$$T(\rho, s) = \frac{B_0 + B_1 s}{1 + \epsilon s} \frac{z_{1ст}}{s} + \frac{C_0 + C_1 s}{1 + \epsilon s} \frac{z_{2ст}}{s} + \frac{D_0}{1 + \epsilon s} \left( \frac{z_{3ст}}{s} + z_n \right). \quad (4-98)$$

Обратное преобразование выражения (4-98) определяет уравнение переходного процесса изменения температуры  $t(\rho, \tau)$  криволинейной оболочки

$$\begin{aligned} t(\rho, \tau) &= t_1(\rho, \tau) + t_2(\rho, \tau) + t_3(\rho, \tau) + t_4(\rho, \tau) = \\ &= B_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{B_1}{B_0 \varepsilon} \right) \exp(-\tau/\varepsilon) \right] z_{1\text{ст}} + \\ &+ C_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{C_1}{C_0 \varepsilon} \right) \exp(-\tau/\varepsilon) \right] z_{2\text{ст}} + \\ &+ D_0 [1 - \exp(-\tau/\varepsilon)] z_{3\text{ст}} + \frac{D_0}{\varepsilon} z_{\text{н}} \exp(-\tau/\varepsilon). \end{aligned} \quad (4-99)$$

Из этого уравнения, как частные случаи, получаем при  $\tau \rightarrow \infty$  выражение (4-92) для стационарного процесса и при  $\tau = 0$  соотношение (4-95), отражающее начальное тепловое состояние.

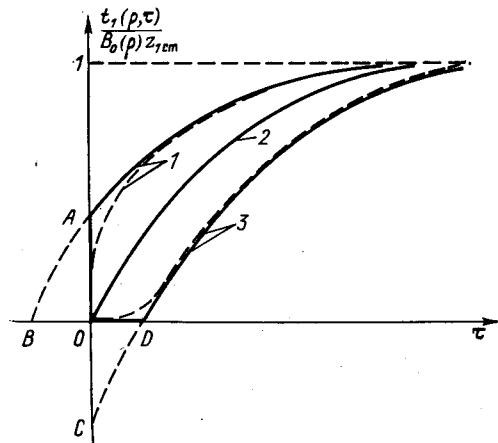


Рис. 4-7. Кривые переходного процесса изменения температуры для характерных областей оболочки

1 —  $\rho_1 \approx 0$ ; 2 —  $\rho_2 \approx 0,5$ ; 3 —  $\rho_3 \approx 1$

$$t_1(\rho, \tau) = B_0(\rho) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{B_1}{B_0 \varepsilon} \right) \exp(-\tau/\varepsilon) \right] z_{1\text{ст}} \quad (4-100)$$

от ступенчатого воздействия  $z_1(\tau)$  для трех характерных областей оболочки:  $\rho_1 \approx 0$  (зона расположена вблизи от поверхности  $S_1$ , которая испытывает воздействие  $z_1$ ),  $\rho_2 \approx 1/2$  (средняя область) и  $\rho_3 \approx 1$  (зона, примыкающая к поверхности  $S_2$ , наиболее удаленной от воздействия  $z_1$ ).

Для удобства сравнения на рис. 4-7 по оси ординат отложены значения температуры  $t_1(\rho, \tau)/B_0(\rho) z_{1\text{ст}}$ .

Температура  $t_1(\rho_2, \tau)$  средней части оболочки (кривая 2) изменяется, принимая во времени все значения температуры от близких к нулю (при  $\tau \approx 0$ ) до стационарного значения  $t_{1\text{ст}}(\rho)$ .

Расчет температур  $t_1(\rho_1, \tau)$  по уравнению (4-100) при  $\tau = 0$  дает значение температуры  $t_1(\rho_1, 0) = B_1(\rho_1)/\varepsilon$ , что соответствует точке A кривой 1. С ростом  $\tau$  температура  $t_1(\rho_1, \tau)$  в зоне координаты  $\rho_1 \approx 0$ , изменяясь по

экспоненте (верхний участок кривой 1), стремится к стационарному значению. Если кривую  $t_1(\rho_1, \tau)$  определить в области отрицательных  $\tau$  (штриховой участок AB), то она пересечет ось времени в некоторой точке B.

Решение уравнения (4-100) при  $\tau = 0$  для  $\rho_3 \approx 1$  дает отрицательное значение начальной температуры (точка C). С ростом  $\tau$  экспонента  $t_1(\rho_3, \tau)$  пересекает ось  $\tau$  (точка D) и только после этого значения температура  $t_1(\rho_3, \tau)$  становится положительной, стремясь к  $t_{1\text{ст}}(\rho_3)$  (сплошная кривая 3).

Выявленные особенности изменения температуры  $t_1(\rho, \tau)$  в переходном процессе, как и ранее, являются следствием приближенного решения задачи и могут быть скорректированы следующим образом. Область  $\rho_1$  оболочки, расположенная в непосредственной близости от воздействия  $z_1(\tau)$ , уже в начальной стадии нагрева реагирует на это воздействие, резко повышая свою температуру  $t_1(\rho_1, \tau)$ . По этой причине температура поверхности слоя оболочки в зоне  $\rho_1$  мгновенно возрастает от нуля (начальное состояние) до  $t_1(\rho_1, 0)$  (точка A на рис. 4-7) и затем изменяется по экспоненте. Таким образом, для участка пластины  $\rho_1 \approx 0$  кривая изменения температуры  $t_1(\rho_1, \tau)$  во всем диапазоне  $0 \leq \tau \leq \infty$  состоит из вертикального участка OA и экспоненты (сплошная кривая 1). Строгое решение задачи изменения температуры  $t_1(\rho_1, \tau)$  не дает резкого излома (отсутствует точка A) и соответствует верхнему участку кривой 1.

Для зоны  $\rho_3 \approx 1$ , удаленной от воздействия  $z_1(\tau)$ , в силу начального нулевого состояния отрицательные значения температуры  $t_1(\rho_3, \tau)$  (участок CD на рис. 4-7) не должны приниматься во внимание. В начальной стадии переходного процесса (участок OD на оси  $\tau$ ) тепловое воздействие  $z_1(\tau)$  не успевает распространиться в область  $\rho_3 \approx 1$ ; на этой стадии температура  $t_1(\rho_3, \tau)$  практически равна нулю (горизонтальный участок OD). Затем воздействие  $z_1(\tau)$  вызывает активный рост температуры  $t_1(\rho_3, \tau)$ . Следовательно, удаленные от воздействия  $z_1(\tau)$  участки пластины изменяют свою температуру в соответствии с кривой 3, имеющей горизонтальный участок OD и экспоненциальный участок. Точное изменение температуры  $t_1(\rho_3, \tau)$  показано штриховой кривой 3. Участок OD на оси  $\tau$  приближенно определяет длительность иррегулярной стадии теплообмена для области  $\rho_3 \approx 1$  оболочки.

Кривая 2 особых пояснений не требует, она определяет переходный процесс внутренних областей оболочки.

Можно подвести итоги сказанному выше: в уравнении переходного процесса (4-100) выражения, заключенные в квадратные скобки, могут быть только положительными или равняться нулю; стоящие перед квадратными скобками множители  $B_0$ ,  $C_0$  и  $D_0$  должны удовлетворять требованиям (4-94) при любых значениях критериев теплообмена  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ .

**Тепловые потоки.** Расчет тепловых потоков  $q_\lambda(0, \tau)$  и  $q_\lambda(1, \tau)$  на границах объекта проводится по общему уравнению (4-72).

Значения коэффициентов  $b(\rho)$  и  $c(\rho)$  находятся по формулам (4-73), (4-70) или (4-77) и в зависимости от значения  $\rho$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Коэффициенты  $B_0(\rho)$  и  $C_0(\rho)$ , стоящие множителями перед квадратными скобками равенства (4-72), должны удовлетворять следующему требованию

$$B_0'(\rho) \leq 0; \quad C_0'(\rho) \geq 0, \quad (4-101)$$

что является следствием (4-94).

Тепловой поток — векторная величина. Полученные в § 4-3 соотношения приведены в скалярной записи, поэтому в зависимости от значений воздействий  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  или температуры  $t_{S_1}$ ,  $t_{S_2}$  и скоростей их изменения во времени значения тепловых потоков могут быть как положительными, так и отрицательными.

В формулах (4-72) или (4-76) считаем положительными значениями потоков  $q_\lambda(0, \tau)$  и  $q_\lambda(1, \tau)$  те значения, которые совпадают по направлению с направлением оси  $\rho$ . Это необходимо учитывать, записывая граничные условия для потоков при решении задач теплопроводности в многосоставных телах.

ПАССИВНЫЕ ТЕРМОСТАТЫ

5-1. СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТЕРМОСТАТЕ

При пассивной системе тепловой защиты необходимо ослабить влияние внешних возмущающих воздействий в течение некоторого времени работы прибора. Никаких компенсирующих (регулирующих) тепловых воздействий такая система не предусматривает. Основными элементами пассивной тепловой защиты являются:

- а) теплоизоляционные оболочки с низкой теплопроводностью;
- б) прослойки из веществ, имеющих большую теплоту фазового перехода (плавления и затвердевания);
- в) покрытия с большой теплотой сублимации или разрушения — абляционные теплозащитные материалы.

Обобщающие сведения по расчету абляционных теплозащитных материалов, применяемых в космической технике, приведены в работах [23, 28].

Основная цель данной главы — анализ тепловой защиты с применением оболочек, имеющих низкое значение теплопроводности. Конструктивное оформление теплозащитных оболочек, гасящих внешние тепловые воздействия, может быть разным. В наиболее простых случаях такой теплозащитной оболочкой является массивный металлический блок, который за счет собственной теплоемкости принимает на себя тепловой удар со стороны среды. Чаще, однако, тепловая защита — это плохо проводящая теплоту прослойка, окружающая объект. Благодаря высокому тепловому сопротивлению внешние тепловые импульсы или непрерывные воздействия задерживаются изоляционной прослойкой и достигают объекта защиты уже значительно ослабленными. Теплоизоляционные оболочки выполняются из материалов с низким значением коэффициента теплопроводности (порошковые или пористые материалы с  $\lambda < 0,1$  Вт/(м·К); вакуумная теплоизоляция; сосуды Дьюара и т. п.).

Типовая физическая модель пассивного термостата показана на рис. 5-1 и включает следующие элементы: 1 — объект защиты (прибор), составляющий центральную часть — ядро пассивного термостата; 3 — теплоизоляционную оболочку, обычно отделенную от объекта защиты воздушной прослойкой 2; наружная поверхность теплоизоляционной оболочки находится в непосредственном тепловом контакте с внешней средой 4. Обычно термостат содержит дополнительные элементы, но их роль в процессе тепловой защиты не является определяющей.

Физико-геометрическими характеристиками объекта являются его объем  $V_{об}$ , поверхность  $S_{об}$ , определяющий размер  $L_{об}$  и теплофизические параметры  $a_{об}$ ,  $\lambda_{об}$ ,  $c_{об}$ ,  $\gamma_{об}$ . Для теплоизоляцион-

ной оболочки аналогичные величины соответственно обозначены  $U_{из}$ ,  $L_{из}$ ,  $a_{из}$ ,  $\lambda_{из}$ ,  $c_{из}$ ,  $\gamma_{из}$ . Внутренняя и наружная поверхности изоляции равны  $S_{из}(0)$  и  $S_{из}(1)$ .

Относительная координата оболочки  $\rho_{из} = r/L_{из}$  отсчитывается от внутренней поверхности ( $\rho_{из} = 0$ ); начало обобщенной координаты объекта  $\rho_{об}$  помещено в его центральной части (рис. 5-1).

Воздушная прослойка 2 ограничена поверхностями  $S_{об}$  и  $S_{из}(0)$ , имеет определяющий размер  $L_{в}$  и характеризуется эквивалентной теплопроводностью  $\lambda_{в}$ , учитывающей влияние конвекции и лучистого теплообмена внутри прослойки.

Возмущающие воздействия определяются температурой среды  $t_c(\tau)$  и плотностью теплового (например, лучистого) потока  $q_c(\tau)$ , одинакового для всех элементов поверхности  $S_{из}(1)$ . Индексы 0 и 1 при  $S_{из}$  введены для обозначения ее внутренней ( $\rho_{из} = 0$ ) и внешней ( $\rho_{из} = 1$ ) поверхностей. Интенсивность теплообмена наружной поверхности изоляции с внешней средой задается коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_c$ .

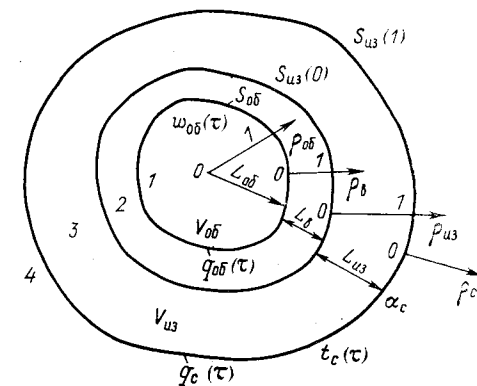


Рис. 5-1. Физическая модель пассивного термостата

Если объект выделяет теплоту, то появляется дополнительный фактор тепловых помех, который можно в первом приближении учесть, вводя плотность внутренних тепловыделений  $\omega_{об}(\tau)$ , одинаковую для всех элементов объекта.

Для выведения объекта на заданный уровень температуры в модели предусмотрен источник теплоты  $q_{об}(\tau)$ , равномерно распределенный, например, по поверхности  $S_{об}$  объекта или вблизи от него. Мощность этого источника (если он есть) в пассивных термостатах управляют обычно вручную.

Сущность математического описания работы пассивных термостатов заключается в установлении взаимосвязи между температурой объекта  $t_{об}(\rho_{об}, \tau)$  и воздействиями  $t_c(\tau)$ ,  $q_c(\tau)$ ,  $q_{об}(\tau)$ ,  $\omega_{об}(\tau)$ . Для физической модели, показанной на рис. 5-1, строгое решение соответствующей задачи не найдено. Возможны три различных варианта ее решения в одномерном приближении, т. е. при допущении, что поле температур в каждом из элементов системы зависит от одной пространственной координаты  $\rho$  и времени  $\tau$ :

$$t_{об} = t_{об}(\rho_{об}, \tau); \quad t_{в} = t_{в}(\rho_{в}, \tau); \quad t_{из} = t_{из}(\rho_{из}, \tau).$$

1. Наиболее полный классический подход состоит в формулировке одномерных уравнений теплопроводности вида (3-5) для всех

элементов системы — объекта 1, воздушной прослойки 2 и теплоизоляции 3. Затем выписывается система граничных условий (равенство температур и баланс тепловых потоков соответственно между элементами 1 и 2, 2 и 3, 3 и внешней средой 4).

Формальное решение, даже при условии некоторых упрощений, оказывается крайне громоздким. Количественные результаты могут быть получены, по-видимому, только с помощью ЭВМ.

2. Приближенный прием основан на использовании соотношений вида (3-95) — (3-98), (3-100) — (3-103), (4-68), (4-69), (4-71), (4-75), (4-76) для тепловых потоков на границах. Обозначим эти удельные граничные потоки так:  $q_{об\lambda}(1, \tau)$  — поток, выходящий из объекта через его поверхность  $S_{об}$ ;  $q_{в\lambda}(0, \tau)$ ,  $q_{в\lambda}(1, \tau)$  — потоки, проходящие через поверхности  $S_{об}$  и  $S_{из}(0)$  прослойки 2;  $q_{из\lambda}(0, \tau)$  и  $q_{из\lambda}(1, \tau)$  — потоки, проходящие через границы  $S_{из}(0)$  и  $S_{из}(1)$  элемента 3;  $q_{с\lambda}(0, \tau)$  — тепловой поток, поступающий в среду 4 через поверхность  $S_{из}(1)$  (нельзя путать с плотностью внешнего потока  $q_c(\tau)$ !).

Каждый из потоков, как видно из уравнений гл. 3 и 4, выражается через значения соответствующей температуры границ и скоростей их изменения во времени.

Уравнения баланса удельных тепловых потоков следующие: на границе раздела элементов 1 и 2

$$q_{об\lambda}(1, \tau) + q_{об}(\tau) = q_{в\lambda}(0, \tau); \quad (5-1)$$

на границе раздела элементов 2 и 3

$$q_{в\lambda}(1, \tau) = q_{из\lambda}(0, \tau); \quad (5-2)$$

на границе раздела элемента 3 и внешней среды 4

$$q_{из\lambda}(1, \tau) + q_c(\tau) = q_{с\lambda}(0, \tau). \quad (5-3)$$

Расшифровывая с помощью уравнений гл. 3 и 4 выражения для теплового баланса (5-1) — (5-3), получаем систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных температур границ  $t_{об}(1, \tau)$ ,  $t_{из}(0, \tau)$ ,  $t_{из}(1, \tau)$  и их производных по времени. Напомним, что по условию равенства температур

$$t_{об}(1, \tau) = t_{в}(0, \tau) \text{ и } t_{в}(1, \tau) = t_{из}(0, \tau). \quad (5-4)$$

В эти уравнения входят четыре независимых тепловых воздействия  $w_{об}(\tau)$ ,  $q_{об}(\tau)$ ,  $q_c(\tau)$ ,  $t_c(\tau)$ .

Попытка аналитического решения такой системы также оказалась неудачной из-за громоздких вычислительных операций, обусловленных многообразием сочетаний физико-геометрических параметров элементов системы.

3. Два последующих приближенных приема основаны на том допущении, что прослойка 2 (обычно газовая или вакуумная) имеет незначительную теплоемкость и в тепловом отношении подобна оболочке, оказывающей только тепловое сопротивление проходящим через нее тепловым потокам; ее собственная теплоаккумулирующая способность принимается равной нулю.

Дополнительным условием, упрощающим дальнейшее решение задачи, является отказ от определения температуры всех границ раздела. Например, можно ограничиться поиском температур  $t_{об}(1, \tau)$  и  $t_{из}(0, \tau)$  или разыскивать только температуру поверхности объекта  $t_{об}(1, \tau)$  как наиболее интересную.

В этих вариантах число уравнений теплового баланса соответственно сокращается до двух или одного, однако, структура каждого из составляющих тепловых потоков должна быть предварительно определена.

## 5-2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЪЕКТА В ПАССИВНОМ ТЕРМОСТАТЕ

Приближенный анализ работы пассивных термостатов основывается на решении уравнений (5-1) — (5-3). С учетом замечаний, сделанных в § 5-1, вместо трех уравнений для тепловых потоков воспользуемся уравнением, связывающим потоки на границах элементов 1 и 2:

$$q_{об\lambda}(1, \tau) S_{об} + q_{об}(\tau) S_{об} = q_{из\lambda}(0, \tau) S_{из}(0), \quad (5-5)$$

которое для изображений этих функций записывается в виде

$$Q_{об\lambda}(1, s) S_{об} + Q_{об}(s) S_{об} = Q_{из\lambda}(0, s) S_{из}(0). \quad (5-6)$$

Изображение теплового потока  $Q_{об\lambda}(1, s)$  на границе объекта находится по уравнению (3-97), в котором  $Z_e(\tau)$  для данного случая — это температура поверхности объекта  $t_{об}(1, \tau)$ , т. е.  $Z_e(s) = T_{об}(1, s)$ .

Пусть в начальный момент времени температура всех элементов термостата, включая объект, одинакова и выбрана за начало отсчета температуры, т. е.

$$t_{об}(\rho_{об}, 0) = 0; \quad t_{из}(\rho_{из}, 0) = 0, \quad (5-7)$$

тогда, полагая в (3-97)  $\rho = 1$ , с учетом (5-7) и принятых выше обозначений имеем

$$Q_{об\lambda}(1, s) = \frac{1}{S_{об}(1 + \epsilon_{об}s)} [V_{об}W_{об}(s) - C_{об}sT_{об}(1, s)], \quad (5-8)$$

где показатель тепловой инерции объекта  $\epsilon_{об}$  по отношению к его поверхности находится по второй из формул (3-46), в которой необходимо принять  $\zeta = \infty$ :

$$\epsilon_{об} = \frac{L_{об}^2(1 - f_n)}{2a_{об}(n + 1)} = \frac{L_{об}^2}{a_{об}(n + 1)(n + 3)}. \quad (5-9)$$

Для определения теплового потока  $Q_{из\lambda}(0, s)$  воспользуемся уравнением (4-68). В решаемой задаче воздействием  $z_1(\tau)$  для изоляционной оболочки является температура поверхности объекта  $t_{об}(1, \tau)$ . Воздействие  $z_2(\tau)$  отражает влияние на термостат тем-

пературы  $t_c(\tau)$  внешней среды и теплового потока  $q_c(\tau)$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} z_1(\tau) &= t_{o6}(1, \tau); & Z_1(s) &= T_{o6}(1, s); \\ z_2(\tau) &= t_c(\tau) + \alpha_c^{-1} q_c(\tau); \\ Z_2(s) &= T_c(s) + \alpha_c^{-1} Q_c(s). \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

Внутреннее воздействие в изоляционной оболочке отсутствует, поэтому в (4-68) необходимо принять  $z_3 = 0$  и  $\alpha_{np} = 0$ , т. е.  $m_V = 0$ . С учетом условия (5-7) имеем  $z_n = 0$ .

Учитывая условия (5-7) и (5-10) и полагая  $\rho = 0$ , из (4-68) находим

$$Q_{изл}(0, s) = -\frac{\lambda_{из}}{L_{из}} \frac{1}{1 + \varepsilon_{из} s} \left[ B'_0(1 + \frac{B'_1}{B'_0} s) T_{o6}(1, s) + C'_0 \left( 1 + \frac{C'_1}{C'_0} s \right) Z_2(s) \right]. \quad (5-11)$$

Показатель тепловой инерции  $\varepsilon_{из}$  теплоизоляционной оболочки по отношению к поверхности объекта и внешней среде рассчитывается по формуле (4-42):

$$\varepsilon_{из} = \varepsilon_S = \frac{L_{из}^2}{\alpha_{из}} \frac{(f_1 - f_2) + \zeta_1^{-1}(1 - f_2) + (2f_1 - f_2)\zeta_2^{-1} + 2\zeta_1^{-1}\zeta_2^{-1}}{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_2\zeta_1^{-1} + 2\varphi_1\zeta_2^{-1}}, \quad (5-12)$$

где

$$\zeta_1 = \alpha_1 L_{из} / \lambda_{из}; \quad \zeta_2 = \alpha_c L_{из} / \lambda_{из}; \quad (5-13)$$

$\varphi_1, \varphi_2, f_1, f_2$  — коэффициенты, которые находятся по (4-20) и (4-38). Входящий в  $\zeta_1$  коэффициент  $\alpha_1$  характеризует теплопередачу воздушной прослойки, отделяющей объект от теплоизоляции. Полная тепловая проводимость прослойки может быть оценена по формулам (4-87), (4-88):

$$\Lambda_B = \alpha_1 S_{из}(0) \approx \lambda_B S_{o6} S_{из}(0) / V_B, \quad (5-14)$$

откуда критерий

$$\zeta_1 = \frac{\Lambda_B}{S_{из}(0)} \frac{L_{из}}{\lambda_{из}}. \quad (5-15)$$

Входящие в уравнение (5-11) коэффициенты  $B'_0, B'_1, C'_0$  и  $C'_1$  находятся по формулам (4-70), в которых необходимо принять  $\zeta_3 = 0$  и  $\rho = 0$ . Так как коэффициент  $C'_1(0)$  отрицательный, то в соответствии с ограничением (4-101) необходимо принять  $C'_1(0) = 0$  и учесть это в дальнейших расчетах.

Подставляя в уравнение (5-6) выражения (5-8) и (5-11) и решая его относительно искомой температуры объекта  $T_{o6}(1, s)$ , после преобразования получаем

$$T_{o6}(1, s) = Y_q Z_q(s) + Y_w Z_w(s) + Y_c Z_c(s). \quad (5-16)$$

В уравнении (5-16)  $Z_q(s), Z_w(s)$  и  $Z_c(s)$  являются изображениями следующих воздействий:

$$\left. \begin{aligned} z_q(\tau) &= S_{o6} q_{o6}(\tau) / \Lambda_{п}; & z_w(\tau) &= V_{o6} \omega_{o6}(\tau) / \Lambda_{п}; \\ z_c(\tau) &= t_c(\tau) + q_c(\tau) / \alpha_c, \end{aligned} \right\} \quad (5-17)$$

а  $Y_q, Y_w$  и  $Y_c$  — передаточные функции температуры поверхности объекта в пассивном термостате по отношению к соответствующему воздействию.

Структура этих передаточных функций такова:

$$Y_q = \frac{(1 + \varepsilon_{o6} s)(1 + \varepsilon_{из} s)}{\Phi(s)}; \quad Y_w = \frac{1 + \varepsilon_{из} s}{\Phi(s)}; \quad (5-18)$$

$$Y_c = \frac{1 + \varepsilon_{o6} s}{\Phi(s)}; \quad (5-19)$$

$$\Phi(s) = 1 + [\varepsilon_{o6} + \varepsilon_{o6}(0) + \varepsilon_{из}(0, \zeta_2)] s + [\varepsilon_{o6} \varepsilon_{из}(0, \zeta_2) + \varepsilon_{o6}(0) \varepsilon_{из}] s^2. \quad (5-20)$$

Показатели инерционности  $\varepsilon_{o6}$  и  $\varepsilon_{из}$  находятся по (5-9), (5-12); показатели  $\varepsilon_{o6}(0)$  и  $\varepsilon_{из}(0, \zeta_2)$  рассчитываются по следующим формулам:

$$\varepsilon_{o6}(0) = C_{o6} / \Lambda_{п} = c_{o6} \gamma_{o6} V_{o6} / \Lambda_{п}; \quad (5-21)$$

$$\varepsilon_{из}(0, \zeta_2) = \frac{L_{из}^2}{\alpha_{из}} \frac{1 - f_2 + 2\zeta_2^{-1}}{2\varphi_2}. \quad (5-22)$$

Входящий в (5-17) и (5-21) параметр  $\Lambda_{п}$  определяет полную тепловую проводимость между наружной поверхностью объекта и внешней средой, учитывающую тепловые проводимости воздушной прослойки  $\Lambda_B$ , внешней среды  $\Lambda_c$  и собственно теплоизоляционной оболочки  $\Lambda_{из}$ :

$$\Lambda_{п} = \left( \frac{1}{\Lambda_B} + \frac{1}{\Lambda_{из}} + \frac{1}{\Lambda_c} \right)^{-1}. \quad (5-23)$$

Тепловая проводимость  $\Lambda_B$  оценивается по (5-14),  $\Lambda_{из}$  — по аналогичной формуле

$$\Lambda_{из} = \frac{2\lambda_{из} S_{из}(0) S_{из}(1)}{L_{из} [S_{из}(0) + S_{из}(1)]} = \frac{\lambda_{из} S_{из}(0) S_{из}(1)}{V_{из}}, \quad (5-24)$$

а тепловая проводимость внешней среды

$$\Lambda_c = \alpha_c S_{из}(1). \quad (5-25)$$

Показатель  $\varepsilon_{o6}(0)$  характеризует, как следует из (5-21), тепловую инерционность объекта с равномерным по его объему  $V_{o6}$  полем температуры при охлаждении его в среде с эффективным значением тепловой проводимости, равным  $\Lambda_{п}$ . Показатель  $\varepsilon_{из}(0, \zeta_2)$  определяет тепловую инерционность теплоизоляции по отношению к внешней среде при условии, что внутренняя поверхность  $S_{из}(0)$  адиабатически изолирована ( $\zeta_1 = 0$ ).

Температура в центре объекта  $T_{об}(0, s)$  находится по уравнению (3-50). Полагая в (3-50) и в выражениях для коэффициентов передаточных функций, определяемых по (3-51),  $\rho = 0$  и  $\xi = \infty$ , а также учитывая (3-11), (3-24), (5-7) и (3-51), получаем

$$T_{об}(0, s) = \frac{1}{1 + \varepsilon_{об} s} \left[ \frac{1}{1 + \tau_{об} s} T_{об}(1, s) + \frac{V_{об}}{\Lambda_{об}} W_{об}(s) \right], \quad (5-26)$$

где

$$\tau_{об} = -C_1 \Big|_{\xi = \infty} = (n+1) \varepsilon_{об} / 2; \quad (5-27)$$

$$\lambda_{об} = 2\lambda_{об} S_{об} / L_{об}. \quad (5-28)$$

Подставляя в (5-26) решение (5-16), после преобразований находим уравнение, определяющее температуру в центре объекта, находящегося в пассивном термостате:

$$T_{об}(0, s) = Y_{qu} Z_q(s) + Y_{wu} Z_w(s) + Y_{c.u} Z_c(s). \quad (5-29)$$

Передаточные функции в (5-29) определяются так:

$$Y_{qu}(s) = \frac{1}{\Phi(s)} \frac{1 + \varepsilon_{из} s}{1 + \tau_{об} s}; \quad (5-30)$$

$$Y_{wu}(s) = \frac{1}{1 + \varepsilon_{об} s} \left[ \frac{\Lambda_{п}}{\Lambda_{об}} + \frac{1}{\Phi(s)} \frac{1 + \varepsilon_{из} s}{1 + \tau_{об} s} \right]; \quad (5-31)$$

$$Y_{c.u}(s) = \frac{1}{\Phi(s)} \frac{1}{1 + \tau_{об} s}, \quad (5-32)$$

а воздействия находятся в соответствии с (5-17).

Уравнения (5-16) и (5-29) служат основой для количественных оценок эффективности действия пассивных термостатов.

В качестве первого приближения, более грубого по сравнению с (5-18) и (5-19), в уравнении (5-16) могут быть использованы передаточные функции следующего вида:

$$Y_q = \frac{1}{1 + \varepsilon_{\tau} s}; \quad Y_w = \frac{1 - \varepsilon_{об} s}{1 + \varepsilon_{\tau} s}; \quad (5-33)$$

$$Y_c = \frac{1 - \varepsilon_{из} s}{1 + \varepsilon_{\tau} s}, \quad (5-34)$$

где

$$\varepsilon_{\tau} = \varepsilon_{об}(0) + \varepsilon_{из}(0, \xi_2) - \varepsilon_{из}. \quad (5-35)$$

Элементы формулы (5-35) находятся по (5-21), (5-22), (5-12), а  $\varepsilon_{об}$  — по формуле (5-9).

В соответствии с уравнением (3-54)  $Y_w$  и  $Y_c$  можно переписать в виде

$$Y_w \approx [(1 + \varepsilon_{\tau} s)(1 + \varepsilon_{об} s)]^{-1}; \quad (5-36)$$

$$Y_c \approx [(1 + \varepsilon_{\tau} s)(1 + \varepsilon_{из} s)]^{-1}. \quad (5-37)$$

Передаточные функции (5-33), (5-34) получены при решении уравнения (5-6) путем подстановки в него выражений для тепловых потоков объекта и изоляции, которые записываются с помощью приближенных выражений (3-102) и (4-76) с учетом особенностей и обозначений анализируемой задачи.

### 5-3. ПРОХОЖДЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЧЕРЕЗ ПАССИВНЫЙ ТЕРМОСТАТ

Для оценки качества работы пассивных термостатов может быть предложено несколько критериев, получаемых в результате анализа изменения их температуры при различных видах тепловых воздействий. Допустимое время надежной работы термостата оценивается при изучении прохождения через термостат внешних или внутренних возмущений специальной формы — в виде единичного скачка, линейного гармонического или импульсного возмущения.

Необходимые расчетные соотношения для температуры термостата с различной степенью приближения могут быть получены при решении (5-16), (5-29) с помощью таблиц обратного преобразования Лапласа.

**Воздействие в виде единичного скачка.** Объект термостатирования без внутренних тепловыделений ( $w_{об} = 0$ ) и дополнительного нагрева ( $\dot{q}_{об} = 0$ ) длительное время находился в тепловом равновесии с внешней средой. В момент времени  $\tau = 0$  температура  $t_c(\tau)$  этой среды внезапно изменилась от нуля до  $t_{c.ст}$ . Требуется определить характер изменения температуры объекта  $t_{об}(\rho, \tau)$  и время  $\tau_{доп}$ , в течение которого эта температура не превысит допустимого значения  $t_{доп}$ .

Для определения температуры поверхности объекта  $t_{об}(1, \tau)$  возьмем уравнение (5-16), которое с учетом исходных условий упрощается:

$$T_{об}(1, s) = Y_c T_c(s) = Y_c \frac{t_{c.ст}}{s}. \quad (5-38)$$

Выбирая для  $Y_c$  выражение (5-19), после обратного перехода получаем

$$\Theta_{об}(1, \tau) = \frac{t_{об}(1, \tau)}{t_{c.ст}} = 1 + \frac{\varepsilon_{об} - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp(-\tau/\varepsilon_1) - \frac{\varepsilon_{об} - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \exp(-\tau/\varepsilon_2). \quad (5-39)$$

В уравнении (5-39), определяющем переходный процесс изменения поверхностной температуры объекта, имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right); \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right); \quad (5-40)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \varepsilon_{об} + \varepsilon_{об}(0) + \varepsilon_{из}(0, \xi_2); \\ a_2 &= \varepsilon_{об} \varepsilon_{из}(0, \xi_2) + \varepsilon_{об}(0) \varepsilon_{из}. \end{aligned} \right\} \quad (5-41)$$

В моменты времени, близкие к начальному, т. е. при  $s \rightarrow \infty$ ,

$$Y_c = \frac{1 + \varepsilon_{об} s}{\Phi(s)} \approx \frac{1}{a_2} \left\{ \varepsilon_{об} \frac{1}{s} + \left( 1 - \varepsilon_{об} \frac{a_1}{a_2} \right) \frac{1}{s^2} - \frac{1}{a_2} \left[ a_1 - \varepsilon_{об} \left( \frac{a_1^2}{a_2} - 1 \right) \right] \frac{1}{s^3} \right\}. \quad (5-42)$$

Подставляя (5-42) в (5-38), после преобразований получаем приближенное уравнение для расчета температуры  $t_{об}(1, \tau)$  в начальной стадии переходного процесса:

$$\theta_{об}(1, \tau) = \frac{t_{об}(1, \tau)}{t_{с. ст}} \approx \frac{1}{a_2} \left\{ \varepsilon_{об} \tau + \frac{1}{2} \left( 1 - \varepsilon_{об} \frac{a_1}{a_2} \right) \tau^2 - \frac{1}{6a_2} \left[ a_1 - \varepsilon_{об} \left( \frac{a_1^2}{a_2} - 1 \right) \right] \tau^3 \right\}. \quad (5-43)$$

Расчетные соотношения (5-39), (5-42), (5-43) могут быть использованы и в том случае, если в качестве  $Y_c$  выбрана передаточная функция (5-37). С учетом обозначений, принятых в выражениях (5-39), (5-42) и (5-43), необходимо заменить  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  на  $\varepsilon_T$  и  $\varepsilon_{из}$  соответственно и принять  $\varepsilon_{об} = 0$ .

Оценить характер изменения температуры можно при выборе первого приближения  $Y_c$  по (5-34):

$$\theta_{об}(1, \tau) = \frac{t_{об}(1, \tau)}{t_{с. ст}} \approx 1 - \left( 1 + \frac{\varepsilon_{из}}{\varepsilon_T} \right) \exp \left( -\frac{\tau}{\varepsilon_T} \right). \quad (5-44)$$

Время  $\tau_{доп}$ , в течение которого температура  $t_{об}(1, \tau)$  не превысит  $t_{доп}$ , находится по (5-44) и составляет

$$\tau_{доп} \leq \varepsilon_T \ln \frac{1 + \varepsilon_{из}/\varepsilon_T}{1 - t_{доп}/t_{с. ст}}. \quad (5-45)$$

Поскольку решение (5-44) приближенное (см. § 4-5), полезно определить такой промежуток времени  $\tau_0$ , начиная с которого приближенное решение (5-44) положительно. Из уравнения (5-44) следует, что

$$\tau_0 = \varepsilon_T \ln (1 + \varepsilon_{из}/\varepsilon_T). \quad (5-46)$$

Найденные по (5-44) — (5-46) значения  $\tau_{доп}$  и изменения температуры  $t_{об}(1, \tau)$  во времени целесообразно уточнить по уравнениям (5-39) и (5-43) второго приближения.

#### 5.4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА В ТЕРМОСТАТЕ

Наиболее успешно система пассивного термостатирования может использоваться в случае, если возмущающий внешний сигнал регулярно или случайным образом изменяется относительно некоторого среднего стабильного уровня. Теплоизоляционная оболочка термостата служит своеобразным тепловым фильтром, задерживающим прохождение высокочастотных составляющих сложного сигнала.

Для определения эффективности пропускания периодических составляющих сигнала воспользуемся частотными характеристиками пассивного термостата, которые с учетом структуры передаточных функций (5-18) и (5-37) могут быть найдены по уравнению (2-72):

$$A_{об}(1, \omega) = \frac{a_{об}(1)}{a_c} = \left[ \frac{1 + \varepsilon_{об}^2 \omega^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2) \omega^2 + a_2^2 \omega^4} \right]^{1/2}. \quad (5-47)$$

Здесь  $a_{об}(1)$  и  $a_c$  — соответственно амплитуды колебаний температуры поверхности объекта и внешней среды;  $\omega$  — частота колебаний температуры среды. Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  находятся по (5-41).

При выборе передаточной функции (5-37) для расчета амплитудно-частотной характеристики  $A_{об}(1, \omega)$  можно взять уравнение (2-72), приняв  $K/\Lambda_k = 1$ ,  $\varepsilon_{об} = 0$  и заменив  $\varepsilon_1$  на  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_2$  на  $\varepsilon_{из}$ .

Проникая к центру объекта, возмущающее воздействие все больше ослабевает. Используя передаточную функцию (5-32), по обычным правилам (см. работу [6]) получаем амплитудно-частотную характеристику  $A_{об}(0, \omega)$  для температуры центральной области объекта:

$$A_{об}(0, \omega) = \frac{a_{об}(0)}{a_c} = \left\{ (1 + \varepsilon_{об}^2 \omega^2) [1 + (a_1^2 - 2a_2) \omega^2 + a_2^2 \omega^4] \right\}^{-1/2}, \quad (5-48)$$

где  $a_{об}$  — амплитуда колебаний температуры в центре объекта.

**Пример 5-1.** Рассчитать эксплуатационные характеристики пассивного термостата, предназначенного для стабилизации температуры цилиндрического контейнера массой  $m_{об} = 15$  кг, диаметром  $D_{об} = 0,22$  м и высотой  $H_{об} = 0,4$  м. Эквивалентные значения теплофизических параметров содержимого контейнера таковы:  $\gamma_{об} = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{об} = 4 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К),  $\lambda = 0,5$  Вт/(м·К),  $a_{об} = 1,25 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Теплоизоляционная оболочка выполнена в виде пустотелого параллелепипеда, имеющего внутренние  $0,4 \times 0,4 \times 0,5$  м и внешние  $0,6 \times 0,6 \times 0,7$  м габаритные размеры. Теплоизолятором служит вещество, у которого  $\gamma_{из} = 50$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{из} = 1,3 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К),  $\lambda_{из} = 0,05$  Вт/(м·К),  $a_{из} = 7,7 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Стенки термостата, между которыми находится теплоизоляционная оболочка, изготовлены из тонкослойного листового материала, поэтому их теплоемкость в расчетах не учитывается. На рис. 5-1 представлена модель такого термостата.

По исходным данным вычисляем объем и площадь поверхности контейнера, а также объем, массу, полную теплоемкость, внутреннюю и наружную поверхности теплоизоляции. Расчеты дают:  $V_{об} = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>,  $S_{об} = 0,35$  м<sup>2</sup>;  $V_{из} = 0,17$  м<sup>3</sup>,  $m_{из} = 8,5$  кг,  $C_{из} = 1,1 \cdot 10^4$  Дж/К,  $S_{из}(0) = 1,12$  м<sup>2</sup>,  $S_{из}(1) = 2,40$  м<sup>2</sup>. По формуле (2-14) оценивается определяющий размер изоляции — ее толщина  $L_{из} \approx 0,1$  м. Определяющий размер  $L_{об}$  может быть рассчитан согласно (3-19) и составляет  $L_{об} \approx 0,14$  м. Расчет, проводимый по более общим формулам, представленным в работе [54], дает:  $L_{об} = 0,15$  м,  $n_{об} = 2,5$ . Используя эти данные, по формулам (5-9), (5-27) и (5-28) находим  $\varepsilon_{об} = 9,35 \cdot 10^3$  с,  $\Lambda_{об} = 2,33$  Вт/К,  $\tau_{об} = 1,63 \cdot 10^4$  с.

Определяемая по (5-24) полная тепловая проводимость изоляции  $\Lambda_{из} = 0,79$  Вт/К. Объем воздушной прослойки  $V_B = 6,5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>, а согласно (2-14) ее толщина  $L_B = 8,8 \cdot 10^{-2}$  м.

Последующие расчеты требуют определения эквивалентной теплопроводности  $\lambda_B$  воздушной прослойки или коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1$  [см. формулу (5-14)], который состоит из конвективно-кондуктивной  $\alpha_k$  и лучистой  $\alpha_l$  составляющих:  $\alpha_1 = \alpha_k + \alpha_l$ . Приемы расчета коэффициентов теплоотдачи изложены в работах [27, 42].

Конкретизируем в этом же примере исходные данные. Пусть требуется поддерживать температуру объекта на уровне  $t_{об}(1) = 5^\circ\text{C}$  при значении температуры внутренней поверхности изоляции  $t_{из}(0) = -5^\circ\text{C}$ . Найдем при этом коэффициент  $\alpha_l$  по формуле, приведенной в работе [66]:  $\alpha_l = \varepsilon_{пр} C_0 f(t_1, t_2)$ , где  $C_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $\varepsilon_{пр}$  — приведенный коэффициент черноты системы объект — внутренняя поверхность оболочки термостата;  $f(t_1, t_2)$  — температурная функция, для которой при  $t_1 = t_{об}(1) = 5^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = t_{из}(0) = -5^\circ\text{C}$  находим  $f(t_1, t_2) = 0,81$ . Принимая коэффициенты поглощения поверхностей объекта и изоляции равными  $A = 0,9$ , находим  $\varepsilon_{пр} = 0,87$  и окончательно для коэффициента теплообмена излучением с внутренней поверхности изоляции получаем  $\alpha_l = 1,24$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), откуда лучистая составляющая  $\Lambda_{в.л}$  тепловой проводимости воздушного зазора по (5-14) составит  $\Lambda_{в.л} = \alpha_l S_{из}(0) = 1,24 \cdot 1,12 = 1,39$  Вт/К.

При выбранных значениях температур теплопроводность воздуха в прослойке  $\lambda_B = 2,5 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), однако для оценки составляющей теплоотдачи  $\alpha_k$  необходимо учесть эквивалентное значение теплопроводности воздуха  $\lambda_{в.экв}$ , учитывающее явление конвекции в зазоре. Для нахождения коэффициента конвекции может быть использована формула, приведенная в работах [42, 66]:

$$\varepsilon_{конв} = \lambda_{в.экв} / \lambda_B = 0,18 (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{0,25}.$$



При выбранных значениях температур критерии Грасгофа  $G_r$  и Прандтля  $P_r$  имеют следующие численные значения:  $G_r = 1,38 \cdot 10^6$ ,  $P_r = 0,707$ . По приведенной формуле находим  $\epsilon_{\text{конв}} = 5,65$ ;  $\lambda_{\text{в. экв}} = 0,141$  Вт/(м·К) и далее по (5-14) определяем значение конвективно-кондуктивной тепловой проводимости зазора  $\lambda_{\text{в. конв}} = 0,85$  Вт/К. В соответствии с (5-14) имеем  $\alpha_k = 0,76$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\alpha_1 = 2,0$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\lambda_{\text{в}} = \lambda_{\text{в. конв}} + \lambda_{\text{в. луч}} = \alpha_1 S_{\text{из}}(0) = 2,24$  Вт/К.

Коэффициент теплообмена внешней поверхности оболочки принимаем равным  $\alpha_c = 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), что соответствует скорости ветра снаружи термостата около 3 м/с. По формулам (5-13) находим  $\zeta_1 = 4$ ,  $\zeta_2 = 20$ .

По уравнению (5-12) определяем показатель тепловой инерции оболочки  $\epsilon_{\text{из}} = 1,71 \cdot 10^3$  с, причем предварительно по (4-20) и (4-38) рассчитываются входящие в (5-12) коэффициенты  $\varphi_1 = 0,64$ ,  $\varphi_2 = 1,36$ ,  $f_1 = 0,56$ ,  $f_2 = 0,39$ .

Тепловые проводимости  $\Lambda_c$  и  $\Lambda_{\text{п}}$  определяются по соотношениям (5-25) и (5-23):  $\Lambda_c = 24$  Вт/К,  $\Lambda_{\text{п}} = 0,57$  Вт/К.

Динамические коэффициенты  $\epsilon_{\text{об}}(0)$ ,  $\epsilon_{\text{из}}(0, \zeta_2)$  и  $\epsilon_{\text{т}}$  находятся по (5-21), (5-22) и (5-35):  $\epsilon_{\text{об}}(0) = 1,05 \cdot 10^5$  с,  $\epsilon_{\text{из}}(0, \zeta_2) = 3,19 \cdot 10^3$  с,  $\epsilon_{\text{т}} = 1,07 \cdot 10^5$  с.

Полученные значения коэффициентов определяют конкретный вид передаточных функций (5-18), (5-19), (5-30) — (5-34) пассивного термостата.

**Пример 5-2.** Определить мощность нагревателя  $Q_{\text{нагр}}$ , необходимую для поддержания температуры объекта на уровне  $t_{\text{об}}(1) = 5^\circ\text{C}$  при температуре среды  $t_c = -15^\circ\text{C}$ . Оценить перепады температур на элементах пассивного термостата в стационарном режиме. Рассчитать переходную характеристику для температуры поверхности объекта, вызванную резким изменением температуры внешней среды.

Вспользуемся численными значениями параметров термостата, определенных в примере 5-1. Для стационарного режима теплообмена по уравнениям (5-16) — (5-20), учитывая, что  $w_{\text{об}}(\tau) = 0$  и  $q_c(\tau) = 0$ , получаем  $Q_{\text{нагр}} = q_{\text{об}} S_{\text{об}} = \Lambda_{\text{п}} [t_{\text{об}}(1) - t_c] = 0,57 \cdot [5 - (-15)] = 11,4$  Вт. Перепады температуры на элементах термостата рассчитываются по формулам

$$\frac{t_{\text{из}}(0) - t_{\text{из}}(1)}{t_{\text{об}}(1) - t_c} = \frac{\Lambda_{\text{п}}}{\Lambda_{\text{из}}}; \quad \frac{t_{\text{из}}(1) - t_c}{t_{\text{об}}(1) - t_c} = \frac{\Lambda_{\text{п}}}{\Lambda_c},$$

из которых находим  $t_{\text{из}}(0) = -0,1^\circ\text{C}$ ,  $t_{\text{из}}(1) = -14,5^\circ\text{C}$ . При оценке эквивалентного значения  $\lambda_{\text{в}}$  в примере 5-1 было принято  $t_{\text{из}}(0) = -5^\circ\text{C}$ , поэтому должно быть проведено уточнение значения  $\lambda_{\text{в}}$ .

Перерасчет дает:  $\lambda_{\text{в. конв}} = 0,72$  Вт/К,  $\lambda_{\text{в. луч}} = 1,43$  Вт/К,  $\lambda_{\text{в}} = 2,15$  Вт/К,  $\Lambda_{\text{п}} = 0,564$  Вт/К. С учетом новых значений  $\lambda_{\text{в}}$  и  $\Lambda_{\text{п}}$  находим  $Q_{\text{нагр}} = 11,3$  Вт,  $t_{\text{из}}(1) = -14,5^\circ\text{C}$ ,  $t_{\text{из}}(0) = -0,2^\circ\text{C}$ , что практически совпадает с ранее найденными значениями этих величин.

Переходная характеристика объекта рассчитывается по уравнению (5-39), коэффициенты которого находятся по формулам (5-40), (5-41):  $a_1 = 1,18 \cdot 10^5$  с;  $a_2 = 2,09 \cdot 10^8$  с<sup>2</sup>;  $\epsilon_1 = 1,16 \cdot 10^5$  с;  $\epsilon_2 = 1,80 \cdot 10^3$  с.

$$\Theta_{\text{об}}(1, \tau) = 1 - 0,934 \exp(-x) - 0,066 \exp(-64,4x), \quad (5-49)$$

где  $x = \tau/\epsilon_1 = 8,62 \cdot 10^{-6} \tau$ .

В первом приближении переходный процесс определится по (5-44):

$$\Theta_{\text{об}}(1, \tau) = 1 - 1,016 \exp(-1,08x). \quad (5-50)$$

Рассчитанные по уравнениям (5-49) и (5-50) графики изменения относительной температуры  $\Theta_{\text{об}}(1, \tau)$  (соответственно кривая 1 и кривая 2) приведены на рис. 5-2. Время установления (длительность переходного процесса) при  $t_{\text{доп}}/t_{\text{ст}} = 0,95$  находится по (5-45) и составляет  $\tau_{\text{доп}} \approx 3 \epsilon_{\text{т}} = 3,2 \cdot 10^5$  с.

Ярко выраженный на рис. 5-2 экспоненциальный характер переходного процесса объясняется значительной разницей в показателях термической

инерции объекта и теплоизоляции по отношению к среде:  $\epsilon_{\text{об}}(0)/\epsilon_{\text{из}} \approx 60$ . При выбранном масштабе измерения времени  $x = \tau/\epsilon_1$  переходный процесс в теплоизоляционной оболочке заканчивается при  $x \approx 0,02$ , что не заметно на графиках рис. 5-2. Этот вывод согласуется с оценкой времени  $\tau_0$  по уравнению (5-46):  $\tau_0 = 1,71 \cdot 10^3$  с, т. е.  $\tau_0 \approx \epsilon_{\text{из}}$ , откуда  $x_0 = \tau_0/\epsilon_1 = 0,015$ .

**Пример 5-3.** Оценить амплитуды  $a_{\text{об}}(1)$  и  $a_{\text{об}}(0)$  суточных изменений температуры поверхности и центра объекта, если колебания температуры среды составляют  $a_c = 10$  К относительно некоторого среднего значения.

Принимая суточный ход изменения температуры среды в виде гармонической функции времени, для расчета  $a_{\text{об}}(1)$  и  $a_{\text{об}}(0)$  можно воспользоваться выражениями (5-47) и (5-48) амплитудно-частотных характеристик пассивного термостата. Частота  $\omega = 2\pi/T = 7,27 \cdot 10^{-5}$  с. Подставляя в (5-47) ранее найденные параметры  $\epsilon_{\text{об}}$ ,  $a_1$  и  $a_2$ , находим  $A_{\text{об}}(1, \omega) = a_{\text{об}}(1)/a_c = 0,14$ , т. е. амплитуда суточного изменения температуры поверхности объекта  $a_{\text{об}}(1) = 0,14 \cdot 10 = 1,4$  К. Амплитуда колебания температуры в центре объекта  $a_{\text{об}}(0)$  оценивается по уравнению (5-48):  $A_{\text{об}}(0, \omega) = a_{\text{об}}(0)/a_c = 0,075$ , откуда  $a_{\text{об}}(0) = 0,75$  К.

**Пример 5-4.** Определить максимально возможный период колебаний  $T$  температуры среды  $t_c(\tau)$ , при котором изменение температуры внутри термостата при отсутствии в нем объекта не превышает заданного значения  $\delta$ .

Температура внутреннего пространства свободного термостата совпадает со значением температуры  $t_{\text{из}}(0, \tau)$  внутренней поверхности изоляции. Для ее расчета используем решения (4-8) и (4-30). Амплитудно-частотная характеристика  $A_{\text{из}}(0, \omega)$ , определяющая отношение амплитуды колебания температуры внутренней поверхности изоляции  $a_{\text{из}}(0)$  к амплитуде колебаний температуры среды  $a_c$ , находится по передаточной функции  $Y_2(p, s)$  [см. формулу (4-30)], в которой полагается  $\rho = 0$  и  $\zeta_1 = 0$ . Проводя необходимые выкладки и применяя преобразование вида (5-37), находим

$$A_{\text{из}}(0, \omega) = \frac{a_{\text{из}}(0)}{a_c} = \left\{ [1 + \epsilon^2(0, \zeta_2) \omega^2] [1 + \tau_{\text{из}}^2(0) \omega^2] \right\}^{-1/2}, \quad (5-51)$$

где  $\epsilon(0, \zeta_2)$  определяется по (5-22), а

$$\tau_{\text{из}}(0) = \frac{L_{\text{из}}^2}{a_{\text{из}}} \frac{f_2}{2\varphi_2}.$$

Задавая требуемые значения  $A_{\text{из}}(0, \omega)$  и решая уравнение (5-51), определяем минимально допустимое значение частоты и максимальное значение периода колебаний  $T$ . Полагая в (5-51)  $\delta = A_{\text{из}}(0, \omega) = 0,01$ , при  $\epsilon_{\text{из}}(0, \zeta_2) = 3,19 \cdot 10^3$  с и  $\tau_{\text{из}}(0) = 1,75 \cdot 10^3$  с получаем  $\omega = 4,2 \cdot 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>,  $T = 1,5 \cdot 10^3$  с  $\approx 25$  мин.

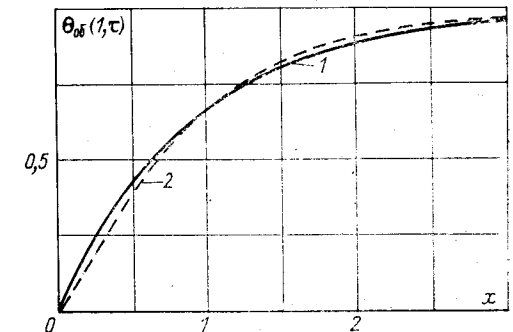


Рис. 5-2. Изменение относительной температуры  $\Theta_{\text{об}}(1, \tau)$  пассивного термостата в переходном процессе

**ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА АКТИВНЫХ ТЕРМОСТАТОВ**

**6.1. РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ СВЯЗЕЙ**

В исследуемой тепловой модели термостата (см. рис. 1-6) температурные поля всех элементов при равномерных тепловых воздействиях принимаются одномерными. Однако наличие тепловых связей у отдельных элементов приводит к нарушению этой одномерности и к местному или общему изменению их температуры. Значение возмущения температурных полей элементов может выйти за пределы допустимых отклонений, предъявляемых к термостату.

Многообразие форм возникновения и проявления тепловых связей не позволяет рекомендовать унифицированную методику анализа и затрудняет учет их действия.

Разработка математической модели для количественной оценки температурного возмущения от локальных тепловых связей включает несколько этапов:

- а) определение места действия и площади зоны контакта тепловой связи с элементами конструкций термостата;
- б) предварительное сравнение значений теплового потока, отводимого от зоны контакта при отсутствии и наличии тепловой связи, и количественную формулировку теплового потока, отводимого через тепловую связь;
- в) оценку области и значения температурного возмущения, возникающего в элементе термостата;
- г) выработку рекомендаций, уменьшающих или компенсирующих действие тепловых связей.

В зависимости от числа и интенсивности воздействия тепловых связей может наблюдаться местное изменение температуры, охватывающее какую-то область объекта или элемента термостата, или общее изменение их среднеобъемной температуры. При неблагоприятных условиях и неправильных конструктивных решениях может произойти существенное изменение статико-динамических характеристик элементов и даже термостата в целом. Наибольший интерес представляет анализ влияния локальных тепловых возмущений, вызываемых притоком или оттоком теплоты по связям, на изменение температурного поля объекта и камеры термостата.

Для упрощения анализа тепловую связь в первом приближении представляют в виде стержней ограниченной или бесконечной длины, контактирующих с объектом, элементами конструкций и внешней средой (рис. 6-1, а, б). При наличии нескольких источников локального возмущения результирующее температурное поле элемента приближенно определяется методом суперпозиции, поэтому ниже оценивается влияние только одиночной тепловой связи.

Динамика теплообмена тепловой связи 3 (рис. 6-2), соединяющей элементы 1 и 2 термостата, может быть исследована с помощью уравнений гл. 4. Удельный тепловой поток  $Q_{\lambda_{св}}(0, s)$ , отводимый стержнем 3 от исследуемого элемента 1, определится на основе уравнения (4-75), которое с учетом конкретных особенностей элемента связи запишется в виде

$$Q_{\lambda_{св}}(0, s) = -\frac{\lambda_{св}}{L_{св}} \frac{1}{1 + \varepsilon_{св} s} \left\{ B'_0(0) \left[ 1 + \frac{B'_1(0)}{B'_0(0)} s \right] T_{св}(0, s) + C'_0(0) T_{св}(1, s) + D'_0(0) T_6(s) \right\}. \quad (6-1)$$

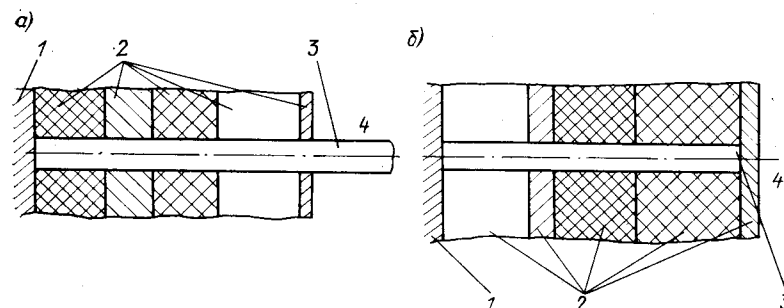


Рис. 6-1. Модель тепловой связи объекта с внешней средой или другим элементом термостата

1 — объект; 2 — элементы термостата; 3 — тепловая связь; 4 — внешняя среда

В выражении (6-1)  $T_{св}(0, s)$  и  $T_{св}(1, s)$  — изображения температуры торцовых сечений начала  $t_{св}(0, \tau)$  и конца  $t_{св}(1, \tau)$  стержня;  $T_6(s)$  — изображение температуры  $t_6(\tau)$  среды, с которой происходит теплообмен боковой поверхности стержня.

Коэффициенты уравнения (6-1) находятся по формулам (4-77) и (4-78):

$$\left. \begin{aligned} B'_0(0) &= -\frac{1 + \frac{1}{3} \eta}{1 + \frac{1}{12} \eta}; \\ \frac{B'_1(0)}{B'_0(0)} &= \frac{L_{св}^2}{3a_{св}} \left[ 1 + \frac{1}{3} \eta \right]^{-1}; \end{aligned} \right\} (6-2)$$

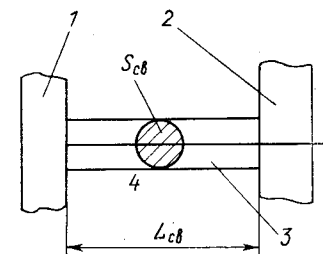


Рис. 6-2. Модель тепловой связи двух элементов термостата 1, 2 — элементы термостата; 3 — тепловая связь; 4 — внешняя среда

$$C'_0(0) = \frac{1 - \frac{1}{6} \eta}{1 + \frac{1}{12} \eta} \geq 0; \quad D'_0(0) = \frac{\frac{1}{2} \eta}{1 + \frac{1}{12} \eta}. \quad (6-3)$$

Так как коэффициент  $C'_1(0)$  отрицательный, отношение  $C'_1(0)/C'_0(0)$ , входящее в (4-75), принимается равным нулю и не входит в (6-1). Исходя из

физической реализуемости процесса теплопроводности (см. § 4-5) при

$$\eta = \frac{\alpha_6}{\lambda_{св}} \frac{\rho_{св} L_{св}^2}{S_{св}} > 6 \quad (6-4)$$

коэффициент  $C'_0(0)$  также приравнивается к нулю.

Динамической характеристикой теплообмена стержня является его показатель тепловой инерции  $\epsilon_{св}$ , определяемый по (4-56):

$$\epsilon_{св} = \frac{L_{св}^2}{12a_{св}} \left[ 1 + \frac{1}{12} \eta \right]^{-1}. \quad (6-5)$$

В выражениях (6-1) — (6-4)  $S_{св}$ ,  $\rho_{св}$  и  $L_{св}$  — площадь поперечного сечения, периметр и длина стержня соответственно;  $\alpha_6$  — коэффициент теплопередачи с боковой поверхности стержня; остальные обозначения сохраняются.

Если показатель тепловой инерции стержня  $\epsilon_{св}$  значительно превышает показатель тепловой инерции исследуемого элемента 1, можно считать, что передача теплоты от этого элемента по связи происходит в условиях, приближающихся к стационарным. С учетом этой особенности из (6-1) находим:

$$q_{\lambda_{св}}(0) \approx -\lambda_{св} L_{св}^{-1} [B'_0(0) t_{св}(0) + C'_0(0) t_{св}(1) + D'_0(0) t_6], \quad (6-6)$$

где  $t_6$ ,  $t_{св}(0)$  и  $t_{св}(1)$  — значения температуры среды и торцов стержня. Умножив выражение (6-6) на  $S_{св}$ , с учетом соотношения

$$B'_0(0) = -[C'_0(0) + D'_0(0)]$$

из (6-6) получаем уравнение для полного теплового потока  $Q_{св.полн}$ , отводимого от элемента 1 по стержню:

$$Q_{св.полн} = \Lambda_{св\lambda} [t_{св}(0) - t_{св}(1)] + \Lambda_{св\alpha} [t_{св}(0) - t_6]. \quad (6-7)$$

Первое слагаемое уравнения (6-7) определяет количество теплоты, переданное путем теплопроводности по стержню 3 к элементу 2 термостата, а второе — количество теплоты, рассеиваемое с боковой поверхности в окружающую стержень среду 4. Соответствующие полные тепловые проводимости  $\Lambda_{св\lambda}$  и  $\Lambda_{св\alpha}$  оцениваются по формулам

$$\Lambda_{св\lambda} = \frac{\lambda_{св} S_{св}}{L_{св}} C'_0(0) = \frac{\lambda_{св} S_{св}}{L_{св}} \left( 1 - \frac{1}{6} \eta \right) \left( 1 + \frac{1}{12} \eta \right)^{-1}; \quad (6-8)$$

$$\Lambda_{св\alpha} = \frac{\lambda_{св} S_{св}}{L_{св}} D'_0(0) = \frac{\lambda_{св} S_{св}}{L_{св}} \frac{1}{2} \eta \left( 1 + \frac{1}{12} \eta \right)^{-1}. \quad (6-9)$$

Отметим, что при реализации условия (6-4) необходимо положить  $\Lambda_{св\lambda} = 0$ . Это означает, что весь поток, отводимый по стержню, рассеивается в среду, не доходя до элемента 2 (рис. 6-2).

Выражая поток  $Q_{\lambda,полн}$  через разность температур  $t_{св}(0) - t_{св}(1)$  и вводя эквивалентную полную тепловую проводимость связи  $\Lambda_{св}$ , можно записать

$$Q_{св.полн} = \Lambda_{св} [t_{св}(0) - t_{св}(1)], \quad (6-10)$$

где

$$\Lambda_{св} = \Lambda_{св\lambda} + \Lambda_{св\alpha} \frac{t_{св}(0) - t_6}{t_{св}(0) - t_{св}(1)}. \quad (6-11)$$

При выполнении условия  $t_6 = t_{св}(1)$  из (6-7) — (6-9) и (6-11) при  $\eta < 6$  получаем

$$\Lambda_{св} = \Lambda_{св\lambda} + \Lambda_{св\alpha} = \frac{\lambda_{св} S_{св}}{L_{св}} \left( 1 + \frac{1}{3} \eta \right) \left( 1 + \frac{1}{12} \eta \right)^{-1}. \quad (6-12)$$

При изоляции боковой поверхности стержня ( $\alpha_6 = 0$ ) в соответствии с (6-4), (6-2) и (6-9) имеем  $\eta = 0$ ,  $D'_0(0) = 0$ ,  $B'_0(0) = -1$ ,  $C'_0(0) = 1$ , т. е. в уравнении для теплового потока (6-7) остается только первое слагаемое, в котором с учетом (6-8)

$$\Lambda_{св\lambda} = \lambda_{св} S_{св} / L_{св}. \quad (6-13)$$

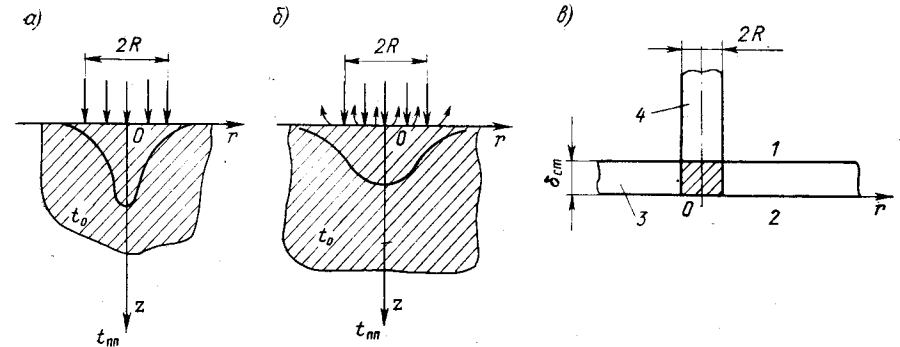


Рис. 6-3. Модели тепловых связей элементов термостата  
1, 2 — среда; 3 — элементы термостата; 4 — тепловая связь

Если стержень имеет бесконечную длину ( $L_{св} \rightarrow \infty$ ), то отводимый по нему поток  $Q_{\lambda,полн}$  рассеивается полностью в окружающую среду. Точное решение этой стационарной задачи приводит к уравнению

$$Q_{\lambda,полн} = \Lambda_{св\alpha} [t_{св}(0) - t_6], \quad (6-14)$$

в котором

$$\Lambda_{св\alpha} = (\alpha_6 \lambda_{св} \rho_{св} S_{св})^{1/2}. \quad (6-15)$$

В тех случаях, когда боковые участки стержня находятся в теплообмене с несколькими средами или элементами (рис. 6-1), оценка значения потока  $Q_{\lambda,полн}$  усложняется, но при необходимости может быть дана путем разбиения стержня на несколько частей с учетом особенностей теплообмена на каждом участке.

Методика расчета искажений температурного поля объекта зависит от его физико-геометрических свойств и условий теплообмена. В ряде случаев по отношению к тепловым связям объект рассматривается как полупространство, а тепловая связь — как стержневой элемент с одномерным полем температуры (рис. 6-3).

Принимая, что тепловой поток по связи значительно превышает тепловой поток через зону контакта  $S_{св}$  при отсутствии связи, можно считать объект (полупространство) всюду адиабатически изолированным, кроме участка поверхности  $S_{св}$ . Через этот участок отводится (или подводится) тепловой поток  $Q_{св.полн}$  (рис. 6-3, а).

Решение задачи о стационарном температурном поле  $t_{пп}(r, z)$  полупространства, сформированном действием кругового стока теплоты радиус-

сом  $R$  с постоянной удельной плотностью  $q = Q_{\text{св. полн}}/S_{\text{св}} = Q_{\text{св. полн}}/\pi R^2$ , известно:

$$\Theta\left(\frac{r}{R}, \frac{z}{R}\right) = \frac{[t_0 - t_{\text{пп}}(r, z)] \lambda_{\text{пп}}}{qR} = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\mu)}{\mu} J_0\left(\mu \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\mu \frac{z}{R}\right) d\mu, \quad (6-16)$$

где  $\Theta(r/R, z/R)$  — безразмерный параметр;  $t_0$  — начальная температура тела, одинаковая во всем его объеме при отсутствии источника;  $\mu$  — параметр интегрирования;  $J_0(\mu)$  и  $J_1(\mu)$  — функции Бесселя;  $\lambda_{\text{пп}}$  — теплопроводность полупространства.

Интеграл  $\Theta(r/R, z/R)$  табулирован. В центре поверхностного стока теплоты, т. е. при  $r/R = z/R = 0$

$$\Theta(0, 0) = \frac{[t_0 - t_{\text{пп}}(0, 0)] \lambda_{\text{пп}}}{qR} = 1, \quad (6-17)$$

а на поверхности полупространства (при  $z/R = 0$ )  $\Theta(r/R; 0)$  рассчитывается по формулам

$$\Theta\left(\frac{r}{R}, 0\right) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{3}{64}\left(\frac{r}{R}\right)^4 - \frac{5}{256}\left(\frac{r}{R}\right)^6 & (0 \leq \frac{r}{R} \leq 1); \\ \frac{1}{2} \frac{R}{r} \left[ 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{3}{64}\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{25}{1024}\left(\frac{R}{r}\right)^6 \right] & \left(\frac{r}{R} > 1\right), \end{cases} \quad (6-18)$$

причем при  $r/R = 1$  имеем  $\Theta(1, 0) = 2/\pi$ .

Начиная с  $r/R > 2$ , ошибка при отбрасывании всех слагаемых в (6-18), кроме первого, составляет не более 4%, поэтому

$$\Theta\left(\frac{r}{R}, 0\right) \approx \frac{1}{2} \frac{R}{r} \quad \text{при} \quad \frac{r}{R} > 2. \quad (6-19)$$

Среднее значение температуры на поверхности круга площадью  $S_{\text{св}}$  и радиуса  $R$

$$\Theta_S = \frac{(t_0 - t_{\text{ппс}}) \lambda_{\text{пп}}}{qR} = \frac{8}{3\pi}. \quad (6-20)$$

Распределение температуры по глубине  $z/R$  полупространства при  $r/R = 0$  определяется выражением

$$\Theta\left(0, \frac{z}{R}\right) = \sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 1} - \frac{z}{R}. \quad (6-21)$$

При глубине  $z/R > 2$  определяем с погрешностью не более 6%

$$\Theta\left(0, \frac{z}{R}\right) \approx \frac{1}{2} \frac{R}{z}. \quad (6-22)$$

Анализ полученного решения задачи позволяет определить глубину  $z/R$  и радиус  $r/R$ , на которых искажение температурного поля тела  $t_{\text{пп}}(r/R, z/R) - t_0$ , обусловленное действием локального поверхностного стока или источника теплоты, не превышает заданного значения  $\delta$  от максимального

температурного возмущения  $t_{\text{пп}}(0, 0) - t_0$ . Действительно, из (6-16) и (6-17) с учетом (6-19) и (6-22) находим

$$\Theta\left(\frac{r}{R}, \frac{z}{R}\right) = \frac{t_0 - t_{\text{пп}}(r/R, z/R)}{t_0 - t_{\text{пп}}(0, 0)} \approx \frac{1}{2} \frac{R}{r} \approx \frac{1}{2} \frac{R}{z} \leq \delta. \quad (6-23)$$

В частности, при  $\delta = 0,05$  из (6-23) получаем, что искажение температурного поля при  $r/R = 10$  и  $z/R = 10$  ослабевает по сравнению с максимальным искажением в 10 раз. Неравенство (6-23) может быть использовано для оценки размеров области искажения (с учетом заданной допускаемой пространственной неравномерности температуры) и служит критерием применимости выражений (6-16) — (6-22) к реальному объекту.

Тепловой поток  $Q_{\text{св. полн}}$ , отводимый от полупространства через площадку  $S_{\text{св}}$ , согласно (6-20) равен

$$Q_{\text{св. полн}} = qS_{\text{св}} = \Lambda_{\text{пп}}(t_0 - t_{\text{ппс}}), \quad (6-24)$$

где полная тепловая проводимость  $\Lambda_{\text{пп}}$  полупространства по отношению к площадке  $S_{\text{св}}$  рассчитывается по формуле

$$\Lambda_{\text{пп}} = 3\pi^2 \lambda_{\text{пп}} R/8. \quad (6-25)$$

Приравнявая значения тепловых потоков  $Q_{\text{св. полн}}$ , определяемых выражениями (6-25) и (6-10), находим соотношение между искажением поля температуры полупространства  $t_0 - t_{\text{ппс}}$ , перепадом температуры в тепловой связи  $[t_{\text{св}}(0) - t_{\text{св}}(1)]$  и тепловыми проводимостями тела и связи:

$$\frac{(t_0 - t_{\text{ппс}})}{[t_{\text{св}}(0) - t_{\text{св}}(1)]} = \frac{\Lambda_{\text{св}}}{\Lambda_{\text{пп}}}, \quad (6-26)$$

где  $\Lambda_{\text{пп}}$  находится по (6-25);  $\Lambda_{\text{св}}$  — по (6-11), (6-8), (6-9), а в частном случае — по (6-12).

Отметим, что по (6-20) и (6-17) отношение

$$\frac{t_0 - t_{\text{ппс}}}{t_0 - t_{\text{пп}}(0)} = \frac{8}{3\pi} = 0,849. \quad (6-27)$$

Рекомендации по уменьшению искажения температуры ( $t_0 - t_{\text{ппс}}$ ) сводятся к уменьшению отношения тепловых проводимостей  $\Lambda_{\text{св}}$  и  $\Lambda_{\text{пп}}$ , что в основном определяется возможностью регулировки (уменьшения) проводимости тепловой связи.

Зависимости (6-16) — (6-26) можно использовать при анализе искажения температурного поля стенки камеры (или других элементов) термостата, если соотношение геометрических и теплофизических параметров тепловой связи и камеры позволяют рассматривать последнюю как полупространство. Оценка размеров области искажения температурного поля камеры проводится на основе уравнения (6-23).

Если размеры объекта таковы, что искажение, вызванное локальной тепловой связью, охватывает незначительную область объекта и не влияет на его основные эксплуатационные характеристики, то действительно такой связи можно пренебречь.

Если область искажения соизмерима с размерами объекта, то это ведет к изменению его статических (отклонение температуры объекта от заданного значения) и динамических характеристик. Решение этой задачи требует специального рассмотрения.

В частном случае, если объект обладает высокой теплопроводностью (распределение температуры по его объему близко к равномерному), а тепловые связи «работают» как ограниченные или полуограниченные стержни, количественная оценка проводится по уравнениям, приведенным в гл. 2. Некоторые зависимости по изменению динамики теплообмена объекта приведены в работе [66].

В случае когда с поверхности полупространства происходит теплообмен в среду с постоянной температурой  $t_c$  (рис. 6-3, б), приближенное решение

для распределения температур в полупространстве (объекте) имеет вид

$$\Theta(r/R, z/R) = \frac{(t_0 - t_{пп}) \lambda_{пп}}{q_{рез} R} = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\mu)}{\mu} J_0\left(\mu \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\mu \frac{z}{R}\right) d\mu - \frac{\alpha}{q_{рез}} (t_c - t_0) \frac{z}{R}, \quad (6-28)$$

где  $t_0$  — начальная температура объекта;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи в среду;  $q_{рез} = \alpha (t_c - t_0) - q$  — удельная мощность результирующего источника (стока) энергии.

Оценка искажений температурного поля в тонкостенных элементах конструкции термостата выполняется на основе анализа задачи теплопроводности для неограниченной по длине и высоте стенки с равномерным по толщине распределением температуры, в объеме  $\delta_{ст} S_{св}$  или на поверхности  $S_{св}$  которой действует стационарный источник тепла (рис. 6-3, в). Стенка участвует в теплообмене со средами (или элементами) 1 и 2, имеющими температуры  $t_1$  и  $t_2$ . Интенсивность теплообмена определяется коэффициентами теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . При отсутствии источника теплоты равновесная температура стенки  $t_0$  находится по формуле

$$t_0 = \frac{(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}{(t_1 + t_2)}. \quad (6-29)$$

В стационарном состоянии под действием стока (или источника) теплоты распределение температуры  $t(r)$  в стенке будет зависеть от координаты  $r$  и находится из уравнения [66]

$$t_0 - t_{ст}(\rho) = \frac{Q_{св. полн}}{2\pi\lambda_{ст}\delta_{ст}\mu} \frac{K_0(\mu\rho)}{K_1(\mu)}. \quad (6-30)$$

В уравнении (6-30)  $\lambda_{ст}$  и  $\delta_{ст}$  — теплопроводность и толщина стенки;  $K_0(\mu\rho)$  и  $K_1(\mu)$  — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков;  $Q_{св. полн}$  — полный тепловой поток, отводимый от стенки по тепловой связи;  $\rho = r/R$  — относительная координата;  $R$  — радиус тепловой связи, определяемый по формуле

$$R = \sqrt{S_{св}}/\pi. \quad (6-31)$$

Комплекс  $\mu$  находится по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda_{ст}\delta_{ст}}} R. \quad (6-32)$$

Координата  $r$  изменяется в пределах от  $R$  до  $\infty$ , что соответствует  $1 \leq \rho \leq \infty$ . Предполагается [и это является ограничением решения (6-31)], что объем  $\delta_{ст} S_{св}$  имеет равномерное распределение температуры, равное

$$t_0 - t_{ст}(1) = \frac{Q_{св. полн}}{2\pi\lambda_{ст}\delta_{ст}\mu} \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}. \quad (6-33)$$

Вводя понятие полного теплового сопротивления стенки по отношению к площадке  $S_{св}$

$$\Lambda_{ст} = 2\pi\lambda_{ст}\delta_{ст}\mu K_1(\mu) K_0^{-1}(\mu), \quad (6-34)$$

уравнение (6-33) можно представить в виде

$$Q_{св. полн} = \Lambda_{ст} [t_0 - t_{ст}(1)]. \quad (6-35)$$

Максимальное возмущение  $t_0 - t_{ст}(1)$  температурного поля стенки тепловой связью определяется при сравнении (6-35) с (6-10), откуда аналогично (6-26) находим

$$\frac{t_0 - t_{ст}(1)}{t_{св}(0) - t_{св}(1)} = \frac{\Lambda_{св}}{\Lambda_{ст}}, \quad (6-36)$$

где  $\Lambda_{св}$  оценивается по (6-11), (6-8), (6-9) или (6-12).

## 6-2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ НАГРЕВА ОБОЛОЧЕК ТЕРМОСТАТА

Одним из основных требований, предъявляемых к малогабаритным термостатирующим устройствам, является обеспечение равномерного температурного поля камеры и других оболочек термостата, так как возможная неравномерность распределения температуры может вызвать в отдельных точках объекта, помещенного в камеру, отклонение температуры стабилизации от среднего значения выше допустимых пределов. Неравномерность температурного поля оболочки и камеры, помимо тепловых связей, обусловлена еще их конструкцией и формой, расположением нагревательных (охлаждающих) элементов, неравномерностью выделения мощности в нагревателе (холодильнике) и др.

Часто конструктивно не удается обеспечить равномерное распределение мощности нагревателя по всей камере термостата, поэтому при проектировании термостатирующих устройств появляется необходимость в предварительной оценке неравномерности ее температурного поля в зависимости от расположения и мощности источников (стоков) теплоты.

Наибольший интерес представляет исследование сравнительно тонкостенных оболочек, в которых условия для выравнивания температуры обычно хуже, чем в толстостенных. Будем называть оболочки тонкостенными, если градиентом температуры по их толщине можно пренебречь.

Рассмотрим несколько характерных задач по оценке неравномерности поля температуры в таких оболочках.

Оболочка является замкнутой и состоит из нескольких областей (частей, поясов). Каждая часть, исключая две полярные области, граничит только с двумя соседними (рис. 6-4, а). Различные части оболочки имеют заданную толщину  $\delta_j$  и изготовлены из материала с известным значением коэффициента теплопроводности  $\lambda_j$ . Предполагается, что каждая  $j$ -я часть оболочки может находиться в конвективно-лучистом теплообмене с окружающей ее  $j$ -й средой (внешней, внутренней или одновременно с двумя) заданной температуры  $t_{сj}$ . Коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_j$  считаются известными. Внутри каждой части размещается равномерно распределенный по объему источник (сток) теплоты, интенсивностью  $w_j$ , который может также заменяться равномерно распределенным по поверхности источником теплоты с удельной плотностью  $q_j$ .

Так как толщина каждой из частей оболочки много меньше соответствующего радиуса кривизны, то внутренняя  $F_{ij}$  и внешняя

$F_{ej}$  поверхности незначительно отличаются друг от друга, т. е.

$$F_{ij} \approx F_{ei} \approx F_j. \quad (6-37)$$

Объем  $j$ -й части оболочки

$$V_j = \delta_j F_j. \quad (6-38)$$

Взаимный пересчет поверхностных  $q_j$  и объемно-распределенных  $\omega_j$  источников теплоты может проводиться по формуле

$$q_j = \omega_j \delta_j. \quad (6-39)$$

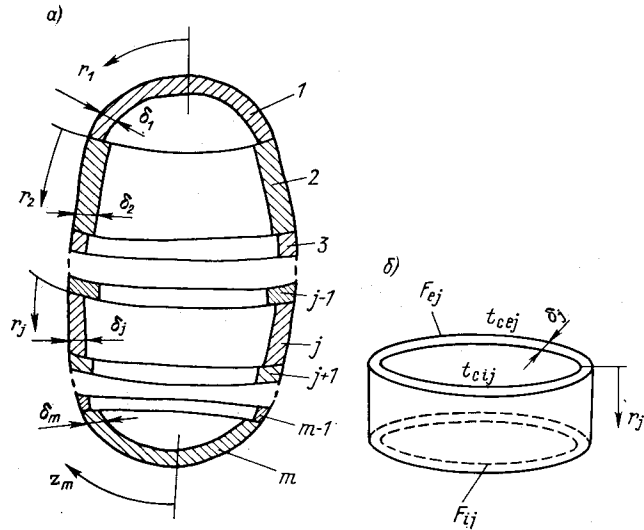


Рис. 6-4. Схематическое изображение оболочки: а — полная оболочка; б —  $j$ -я область оболочки  
1, 2, 3,  $j$ ,  $m$  — части оболочки

Предполагается, что температура каждой части оболочки  $t_j(r_j)$  не зависит от ее толщины и является функцией только одной координаты  $r_j$ , начало которой располагается или в точках оболочки с экстремальными значениями температуры (полярные области 1 и  $m$  на рис. 6-4, а) или на границах раздела областей (рис. 6-4, б).

Отдельные части оболочки могут быть покрыты слоем теплоизоляции, тепловая проводимость которой в направлении координаты  $r_j$  пренебрежимо мала по сравнению с проводимостью оболочки. При наличии теплоизоляции вместо коэффициента теплоотдачи  $\alpha_j$  задается значение коэффициента теплопередачи  $k_j$  для соответствующего участка оболочки.

В стационарном режиме тепловой баланс  $j$ -й части оболочки характеризуется [см. уравнение (2-5)] одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{d^2 t_j}{dr_j^2} + \frac{1}{\sigma_j} \frac{d\sigma_j}{dr_j} \frac{dt_j}{dr_j} - \frac{b_j}{\lambda_j} t_j = - \left( \frac{b_j}{\lambda_j} t_{cj} + \frac{\omega_j}{\lambda_j} \right), \quad (6-40)$$

где  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Комплекс  $b_j$ , равный

$$b_j = \frac{(k_{ij} + k_{ej}) S_i}{V_j} \approx \frac{k_{ij} + k_{ej}}{\delta_j}, \quad (6-41)$$

определяет интенсивность теплообмена  $j$ -й части оболочки с внутренней  $i$  и внешней  $e$  средами, соответственно имеющими температуры  $t_{cij}$  и  $t_{cej}$ .

Эффективная температура сред  $t_{cj}$  для  $j$ -й части оболочки находится по формуле

$$t_{cj} = \frac{k_{ij} t_{cij} + k_{ej} t_{cej}}{k_{ij} + k_{ej}}, \quad (6-42)$$

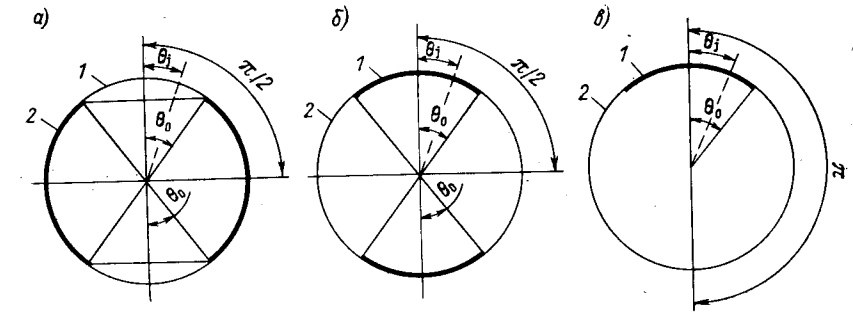


Рис. 6-5. Оболочки сферической формы  
1 — полярная; 2 — экваториальная область (жирными линиями показаны области, где расположены источники нагрева)

где  $k_{ij}$  и  $k_{ej}$  — коэффициенты теплопередачи между оболочкой и средами.

Входящая в уравнение (6-40)  $\sigma_j(r_j)$  является образующей поверхностью (поверхностью сечения)  $j$ -й части оболочки и может быть с учетом особенностей формы оболочки связана с координатами  $r_j$  функциональной зависимостью, например в виде уравнения (3-15) или (4-14). На границах раздела областей выполняются условия стыковки: равенство температур и полных тепловых потоков с учетом разницы площадей границ смежных участков, обусловленных, например, разнотолщинностью этих участков [69].

Для полярных областей, имеющих одну границу раздела (области 1 и  $m$  на рис. 6-4, а), одно из граничных условий заменяется условием экстремальности температуры в точке полюса области.

Анализировались различные варианты тонкостенных оболочек разной формы, состоящих из двух, трех, четырех и более частей. Наиболее часто на практике встречаются двухсоставные оболочки, для которых могут быть найдены замкнутые точные или приближенные решения системы уравнений (6-40).

**Оболочки сферической формы.** Можно показать, что для такого рода оболочек уравнение (6-40) при выполнении соотношения  $\delta_j \leq R_j$ , где  $R_j$  —

радиус  $j$ -й части оболочки, сводится к виду

$$(x_j^2 - 1) \frac{d^2 t_j}{dx_j^2} + 2x_j \frac{dt_j}{dx_j} + K_j t_j = K_j t_j + M_j, \quad (6-43)$$

допускающему точное интегрирование.

Здесь  $x_j$  — безразмерная координата, связанная с угловой координатой  $\theta_j$  (рис. 6-5) соотношением  $x_j = \cos \theta_j$ ;

$$K_j = \frac{b_j R_j^2}{\lambda_j} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta_j}{R_j}\right)^{-1}; \quad M_j = \frac{\omega_j R_j^2}{\lambda_j} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta_j}{R_j}\right)^{-1}. \quad (6-44)$$

Приводимые далее зависимости получены при условии, что оболочка состоит из двух частей (рис. 6-5, а) или трех частей, расположение двух из которых является симметричным (рис. 6-5, а, б). Оболочка имеет равномерную толщину  $\delta$  и находится в теплообмене с одной средой, имеющей температуру  $t_c$ . Отсчет температуры в оболочке производится от температуры среды, т. е.  $\vartheta_j(x) = t_j(x) - t_c$ .

В зависимости от наличия или отсутствия источников нагрева будем называть области соответственно активными или пассивными. Координата  $x_0$ , где

$$x_0 = \cos \theta_0, \quad (6-45)$$

определяет границы раздела активной и пассивной областей (рис. 6-5).

Решения для распределения температуры приведены в работе [69].

Относительную неравномерность нагрева оболочки можно характеризовать отношением

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_S} = \frac{\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}}{\vartheta_S}, \quad (6-46)$$

где  $\vartheta_{\max}$ ,  $\vartheta_{\min}$  — максимальная и минимальная температуры оболочки;  $\vartheta_S$  — средняя по всей поверхности  $S$  температура оболочки.

Если источник размещен в экваториальной области (рис. 6-5, а), то для этого случая

$$K_1 = K_2 = K; \quad M_1 = 0; \quad M_2 = M. \quad (6-47)$$

Максимальная температура  $\vartheta_{\max}$  соответствует точкам экваториальной области оболочки, а минимальная — полюсам оболочки. Для расчетов неравномерности получено следующее выражение [69]:

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_S} = \frac{\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}}{\vartheta_S} = \frac{1}{x_0} \left\{ 1 + \frac{P_v^1(x_0) [1 - 2P_v(0)] - P_v^1(-x_0)}{P_v(x_0) P_v^1(-x_0) + P_v(-x_0) P_v^1(x_0)} \right\}, \quad (6-48)$$

в котором  $P_v(x)$  и  $P_v^1(x)$  — сферические функции (присоединенные функции Лежандра первого рода). Индекс  $v$  сферических функций связан с ранее введенным параметром  $K_j = K$  соотношением

$$v = -\frac{1}{2} + \sqrt{0,25 - K}, \quad 0 < K < \infty. \quad (6-49)$$

Значения присоединенных функций Лежандра табулированы.

Средняя температура поверхности всей оболочки

$$\vartheta_S = t_S - t_c = \vartheta_0 x_0 = \vartheta_0 \cos \vartheta_0. \quad (6-50)$$

где

$$\vartheta_0 = M/K = \omega/b. \quad (6-51)$$

Вместо  $x_0$ , определяющего границу раздела областей, в расчетах удобнее пользоваться коэффициентом заполнения

$$k_{\text{зап}} = S_a/S_{\text{полн}} = S_a/4\pi R^2, \quad (6-52)$$

где  $S_a$  и  $S_{\text{полн}}$  — соответственно площадь активной части и полная площадь поверхности оболочки.

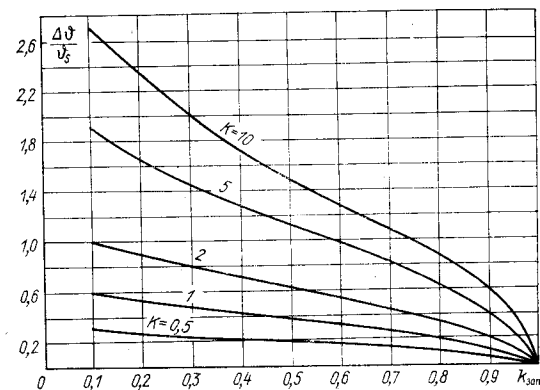


Рис. 6-6. Неравномерность распределения температуры в сферической оболочке при экваториальном расположении источников нагрева (см. рис. 6-5, а)

График зависимости критерия неравномерности температуры  $\Delta \vartheta/\vartheta_S$ , рассчитанный по уравнению (6-48) в зависимости от параметров  $K$  и  $k_{\text{зап}}$ , определяемых соотношениями (6-44) и (6-52), приводится на рис. 6-6.

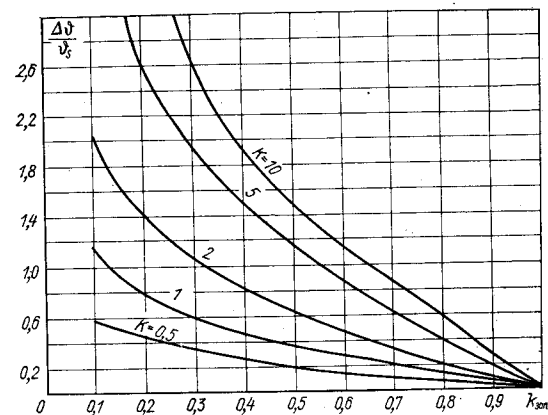


Рис. 6-7. Неравномерность распределения температуры в сферической оболочке при расположении источников нагрева в полярных областях (см. рис. 6-5, б)

Симметричное расположение источников нагрева по схеме рис. 6-5, б приводит при  $K_1 = K_2 = K$  к следующей зависимости:

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_S} = \frac{1}{1-x_0} \left\{ 1 + \frac{P_v^1(x_0) [1 - 2P_v(0)] - P_v^1(-x_0)}{P_v(x_0) P_v^1(-x_0) + P_v(-x_0) P_v^1(x_0)} \right\},$$

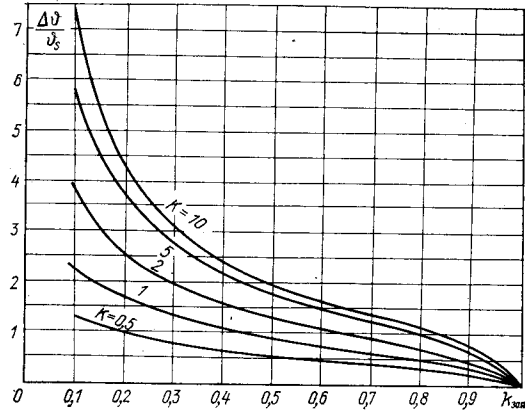


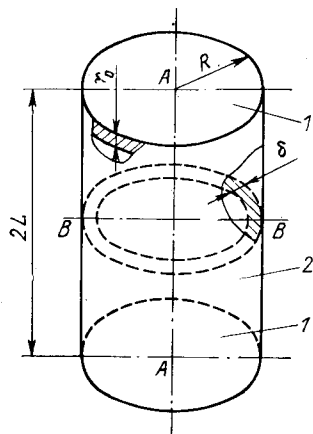
Рис. 6-8. Неравномерность распределения температуры в сферической оболочке при несимметричном расположении источника нагрева (рис. 6-5, в)

в которой  $x_0$  находится по (6-45) (см. рис. 6-5, б):

$$\vartheta_S = \vartheta_0 (1 - x_0) = \frac{M}{K} (1 - x_0) = \frac{\omega}{b} (1 - \cos \theta_0). \quad (6-54)$$

Графики зависимости  $\Delta \vartheta / \vartheta_S$  при разных коэффициентах заполнения  $k_{\text{зан}}$  и параметрах  $K$  [см. формулы (6-52) и (6-44)] приведены на рис. 6-7.

При несимметричном расположении источников нагрева по схеме рис. 6-5, в расчет приводит к следующей зависимости:



$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_S} = \frac{2}{1-x_0} \left[ 1 - \frac{P_v^1(-x_0) + P_v^1(x_0)}{P_v(-x_0) P_v^1(x_0) + P_v(x_0) P_v^1(-x_0)} \right], \quad (6-55)$$

где  $-1 \leq x_0 \leq 1$ ;

$$\begin{aligned} \vartheta_S &= \vartheta_0 \frac{1-x_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{M}{K} (1-x_0) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{b} (1 - \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (6-56)$$

Рис. 6-9. Оболочки цилиндрической формы

Результаты расчета неравномерности поля температуры по уравнению (6-56) представлены на рис. 6-8.

Более общие расчеты зависимости при  $K_1 \neq K_2$  для трех характерных случаев (см. рис. 6-5) приведены в работе [69].

**Оболочки цилиндрической формы.** Для оболочек в форме ограниченного цилиндра с расположением источников нагрева (рис. 6-9)  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно на торцах 1 и на образующей цилиндрической поверхности 2 получены точные решения системы (6-40). При этом предполагалось, что оболочки находятся в теплообмене со средой, имеющей температуру  $t_c$ , а коэффициенты теплопередачи  $K_1$  и  $K_2$  одинаковы для обеих областей, т. е. согласно (6-41)  $b_1 = b_2 = b$ .

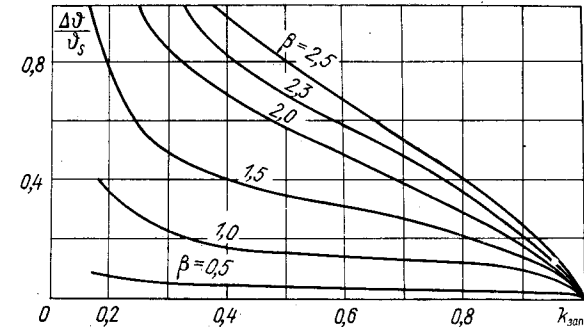


Рис. 6-10. Неравномерность распределения температуры в оболочке цилиндрической формы

Средние температуры на торцах и цилиндрической части оболочки соответственно равны

$$\vartheta_{S1} = \vartheta_{01} - (\vartheta_{01} - \vartheta_{02}) \frac{2}{\kappa \beta} \frac{I_1(\kappa \beta) \operatorname{sh} \beta (1 - \kappa)}{I_0(\kappa \beta) \operatorname{sh} \beta (1 - \kappa) + I_1(\kappa \beta) \operatorname{ch} \beta (1 - \kappa)}; \quad (6-57)$$

$$\vartheta_{S2} = \vartheta_{02} + (\vartheta_{01} - \vartheta_{S1}) \frac{\kappa}{2(1 - \kappa)}, \quad (6-58)$$

где  $I_1(x)$  и  $I_0(x)$  — модифицированные функции Бесселя;  $\kappa = R/L$ ;  $\beta = \mu L = \sqrt{K/\delta \lambda L}$ ;  $\vartheta_{01} = t_1 - t_c = \omega_1/b$ ;  $\vartheta_{02} = t_2 - t_c = \omega_2/b$ . Для оболочки в целом средняя температура  $\vartheta_S$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \vartheta_S &= \vartheta_{0S} - (\vartheta_{01} - \vartheta_{02}) \frac{k_{\text{зан}} (2 - \kappa) - \kappa}{\kappa \beta (1 - \kappa)} \times \\ &\times \frac{I_1(\kappa \beta) \operatorname{sh} \beta (1 - \kappa)}{I_0(\kappa \beta) \operatorname{sh} \beta (1 - \kappa) + I_1(\kappa \beta) \operatorname{ch} \beta (1 - \kappa)}, \end{aligned} \quad (6-59)$$

где  $\vartheta_{0S} = k_{\text{зан}} \vartheta_{01} + (1 - k_{\text{зан}}) \vartheta_{02}$ .

Неравномерность поля температур в цилиндрической оболочке определяется на основе соотношения (6-47) и представлена на рис. 6-10 в виде зависимости от коэффициента заполнения  $k_{\text{зан}}$  и параметра  $\beta$ .

### 6-3. ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОБОЛОЧКАХ

Приближенная оценка неравномерности распределения температуры в оболочках основана на решении интегральных уравнений теплового баланса и на предположении об одномерности поля тем-



температуры в каждом из рассматриваемых элементов камеры (оболочки). Такой подход является оправданным, когда необходимо получить минимальный градиент температуры по поверхности оболочек.

**Симметричное расположение источников теплоты по оболочке** (рис. 6-11, а). Уравнения теплового баланса, которые учитывают отдачу теплоты от оболочки в окружающие среды и кондуктивный теплообмен между элементами оболочки, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 V_1 &= \alpha_{e1} S_{e1} (t_{v1} - t_{e1}) + \\ &+ \alpha_{i1} S_{i1} (t_{v1} - t_{i1}) - \frac{\lambda_1}{L_1} F_1 \left. \frac{dt_1}{d\rho_1} \right|_{\rho_1=1}; \\ \omega_2 V_2 - \frac{\lambda_2}{L_2} F_{21} \left. \frac{dt_2}{d\rho_2} \right|_{\rho_2=0} &= \alpha_{i2} S_{i2} (t_{v2} - \\ &- t_{i2}) + \alpha_{e2} S_{e2} (t_{v2} - t_{e2}). \end{aligned} \right\} \quad (6-60)$$

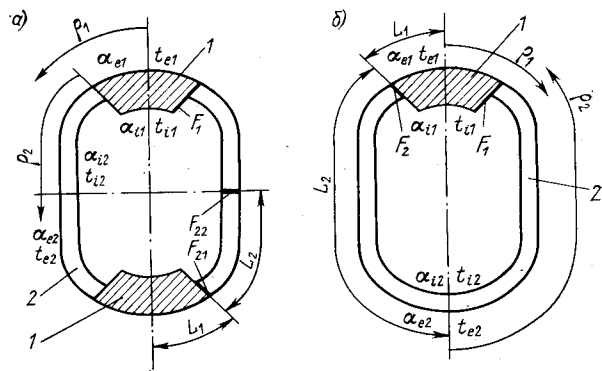


Рис. 6-11. Оболочки произвольной формы: а — с симметричным расположением нагревателей; б — с асимметричным расположением нагревателей  
1 и 2 — элементы оболочки

Условия теплообмена на стыке двух элементов в выбранных системах отсчета координат (рис. 6-11, а) записываются так: равенство тепловых потоков

$$\left. \frac{\lambda_1}{L_1} \frac{dt_1}{d\rho_1} \right|_{\rho_1=1} F_1 = \left. \frac{\lambda_2}{L_2} \frac{dt_2}{d\rho_2} \right|_{\rho_2=0} F_{21}; \quad (6-61)$$

равенство температур

$$t_1 \Big|_{\rho_1=1} = t_2 \Big|_{\rho_2=0} = t_{rp}; \quad (6-62)$$

условия экстремальности температурных полей для каждого элемента

$$\left. \frac{dt_1}{d\rho_1} \right|_{\rho_1=0} = 0; \quad \left. \frac{dt_2}{d\rho_2} \right|_{\rho_2=1} = 0. \quad (6-63)$$

При решении задачи предполагаем, что для распределения температуры в элементах допустимы следующие аппроксимации:

$$t_1(\rho_1) = A + B\rho_1^2; \quad t_2(\rho_2) = M + N\rho_2 + P\rho_2^2, \quad (6-64)$$

где  $\rho_1 = r/L_1$  и  $\rho_2 = r/L_2$  — безразмерные координаты.

Коэффициенты аппроксимирующих функций (6-64) определяются системой интегральных уравнений теплообмена (6-60) и граничными условиями (6-61) — (6-63).

Изменение поверхности  $\sigma_j(\rho_j)$  в пределах каждого из элементов оболочки характеризуется зависимостью

$$\sigma_j(\rho_j) = a_j + b_j\rho_j + d_j\rho_j^2, \quad j=1, 2. \quad (6-65)$$

Структура коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $d_j$  определяется условиями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \Big|_{\rho_1=0} &= 0; & \sigma_1 \Big|_{\rho_1=1} &= F_1; \\ \sigma_2 \Big|_{\rho_2=0} &= F_{21}; & \sigma_2 \Big|_{\rho_2=1} &= F_{22}; \end{aligned} \right\} \quad (6-66)$$

$$V_1 = L_1 \int_0^1 \sigma_1(\rho_1) d\rho_1; \quad V_2 = L_2 \int_0^1 \sigma_2(\rho_2) d\rho_2, \quad (6-67)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — объем первого и второго элементов оболочки соответственно. Поверхности  $F_1$ ,  $F_{21}$  и  $F_{22}$  показаны на рис. 6-11.

Решая совместно систему уравнений (6-60) — (6-63) с учетом (6-64), получаем следующие расчетные соотношения для экстремальных  $t_1(0)$ ,  $t_2(1)$  и среднеобъемных  $t_{v1}$ ,  $t_{v2}$  температур элементов 1 и 2 оболочки:

$$t_1(0) = \frac{1}{\Phi} \left\{ \left[ 1 + \kappa \left( 2f_{21} - f_{22} + \frac{2}{\zeta_2} \right) \right] z_1 + \left( -f_1 + \frac{2}{\zeta_1} \right) z_2 \right\}; \quad (6-68)$$

$$t_2(1) = \frac{1}{\Phi} \left\{ \kappa \left[ - (1 - 2f_{21} + f_{22}) + \frac{2}{\zeta_2} \right] z_1 + \left( 1 - f_1 + \kappa + \frac{2}{\zeta_1} \right) z_2 \right\}; \quad (6-69)$$

$$t_{v1} = \frac{1}{\Phi} \left\{ \left[ (1 - f_1) + \kappa \left( 2f_{21} - f_{22} + \frac{2}{\zeta_2} \right) \right] z_1 + \frac{2}{\zeta_1} z_2 \right\}; \quad (6-70)$$

$$t_{v2} = \frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{2\kappa}{\zeta_2} z_1 + \left[ (1 - f_1) + \kappa (2f_{21} - f_{22}) + \frac{2}{\zeta_1} \right] z_2 \right\}. \quad (6-71)$$

Температура  $t_{rp} = t_1(1) = t_2(0)$  границы раздела элементов 1 и 2

$$t_{rp} = \frac{1}{\Phi} \left\{ \kappa \left( 2f_{21} - f_{22} + \frac{2}{\zeta_2} \right) z_1 + \left( 1 - f_1 + \frac{2}{\zeta_1} \right) z_2 \right\}. \quad (6-72)$$

Среднеобъемная температура  $t_v$  оболочки в целом определяется выражением

$$t_v = \frac{1}{\Phi} \left\{ [(1-f_1) + \kappa(2f_{21} - f_{22})] [\eta z_1 + (1-\eta) z_2] + 2 \left( \frac{\kappa}{\zeta_2} z_1 - \frac{1}{\zeta_1} z_2 \right) \right\}. \quad (6-73)$$

В формулах (6-68) — (6-73) использованы следующие обозначения:

эффективные температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$  сред, с которыми находятся в теплообмене элементы оболочки (если  $S_{e1} \approx S_{i1} \approx S_j$ ):

$$t_{c1} = \frac{\alpha_{e1} t_{e1} + \alpha_{i1} t_{i1}}{\alpha_1}; \quad t_{c2} = \frac{\alpha_{e2} t_{e2} + \alpha_{i2} t_{i2}}{\alpha_2}; \quad (6-74)$$

суммарные коэффициенты теплообмена  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = \alpha_{e1} + \alpha_{i1}; \quad \alpha_2 = \alpha_{e2} + \alpha_{i2}; \quad (6-75)$$

объединенные тепловые воздействия  $z_1$  и  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{w_1 V_1}{|\alpha_1 S_1} + t_{c1}; \quad z_2 = \frac{w_2 V_2}{\alpha_2 S_2} + t_{c2}; \quad (6-76)$$

критерии теплообмена  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ :

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_1 F_1 L_1}{\lambda_1 S_1}; \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_2 F_2 L_2}{\lambda_2 S_{21}}; \quad (6-77)$$

величина  $\kappa$ , которая учитывает разницу теплопроводности элементов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соотношение их определяющих размеров  $L_1$  и  $L_2$  и контактирующих поверхностей  $F_1$  и  $F_{21}$ :

$$\kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{L_2}{L_1} \frac{F_1}{F_{21}}. \quad (6-78)$$

Входящая в (6-68) — (6-73) величина  $\Phi$  находится из уравнения

$$\Phi = \left( 1 - f_1 + \frac{2}{\zeta_1} \right) + \kappa \left( 2f_{21} - f_{22} + \frac{2}{\zeta_2} \right), \quad (6-79)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 0,3(1 - \varphi_1/3); \\ f_{21} &= 0,5[1 - (\varphi_{21} - \varphi_{22})/6]; \\ f_{22} &= 0,3[1 - (2\varphi_{21}/9) + \varphi_{22}/3]; \end{aligned} \right\} \quad (6-80)$$

$$\varphi_1 = L_1 F_1 / V_1; \quad \varphi_{21} = L_2 F_{21} / V_2; \quad \varphi_{22} = L_2 F_{22} / V_2; \quad (6-81)$$

$$\eta = V_1 / (V_1 + V_2) = V_1 / V, \quad (6-82)$$

где  $V$  — полный объем всей оболочки.

Абсолютная неравномерность поля температуры в оболочке

$$\Delta t = t_1(0) - t_2(1) = (1 + \kappa)(z_1 - z_2) / \Phi, \quad (6-83)$$

а относительная неравномерность по уравнениям (6-83) и (6-73) составляет

$$\frac{\Delta t}{t_v} = \left[ \frac{1 - f_1 + \kappa(2f_{21} - f_{22})}{1 + \kappa} \frac{\eta z_1 - (1 - \eta) z_2}{z_1 - z_2} + \frac{2}{1 + \kappa} \frac{\frac{\kappa}{\zeta_2} z_1 + \frac{1}{\zeta_1} z_2}{z_1 - z_2} \right]^{-1}. \quad (6-84)$$

Полученные расчетные формулы дают приближенное решение задачи для двухэлементной оболочки при симметричном распределении источников нагрева и учитывают параметры: форму и размеры оболочки; разнородность материалов составных частей оболочки; разницу в условиях теплообмена каждого из элементов с окружающими средами; наличие источников теплоты различной мощности в элементах оболочки и степень заполнения оболочки каждым из нагревателей; различную толщину стенок отдельных элементов.

Для однородных оболочек конкретной формы и при одинаковых условиях теплообмена различных участков поверхности оболочки со средой полученные решения существенно упрощаются.

**Несимметричное расположение источников теплоты.** При расположении источников нагрева в оболочке, состоящей из двух элементов (рис. 6-11, б), исходные уравнения (6-60) сохраняют свою силу, а граничные условия (6-61) — (6-63) переписываются с учетом изменения координаты  $\rho_2$  и правила знаков для тепловых потоков в зависимости от направления координаты (см. § 4-5).

Точность получаемых решений в значительной степени зависит от того, насколько приемлемой для конкретной задачи является представление функциональной зависимости  $\sigma_j(\rho_j)$  в виде уравнения (6-65). Если при условиях (6-66), (6-67) геометрические особенности элементов оболочки передаются неудовлетворительно, целесообразно выбрать помимо координат  $\rho_j = 0$  и  $\rho_j = 1$  промежуточную точку с координатой  $\rho_{пр}$  в характерной области изменения поверхности  $\sigma_j(\rho_j)$ . При этом условия (6-67) позволяют проверить правильность представления полного объема элемента такой трехточечной аппроксимацией.

Дальнейшее уточнение расчетных зависимостей может быть выполнено при разбиении оболочки не на два, а на большее число элементов, каждый из которых допускает применение параболических приближений (6-65) и условий (6-66), (6-67) для определения коэффициентов этих приближений.

Сопоставление точных и приближенных значений  $\Delta t/t_v$  для оболочек различной формы выявило следующее:

1) наиболее точно по приближенным формулам (6-68) — (6-73) рассчитываются поля температур с малыми неравномерностями ( $\Delta t/t_v < 0,2$ );

2) при  $K > 1$  и  $\eta < 0,3 \div 0,5$  [ $K = \alpha_j L_j^2 / \delta_j$ ,  $\eta = V_j / (V_1 + V_2)$ ], где  $j = 1, 2$ ] приближенные формулы для расчета относительной неравномерности дают ее максимальные (с запасом) предельные значения.

#### 6-4. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТЕПЛООБМЕНА АКТИВНОГО ТЕРМОСТАТА

Вывод уравнений динамики теплообмена термостатов является частным случаем формулировки задачи теплообмена системы тел.

Будем предполагать, что активный термостат представляет собой систему центрированных оболочек, во внутренней полости которых располагается объект термостатирования. Локальные тепловые связи здесь не рассматриваются, так как считается, что оценка их действия проведена и можно перейти к модели термостата с равномерными тепловыми воздействиями (рис. 6-12).

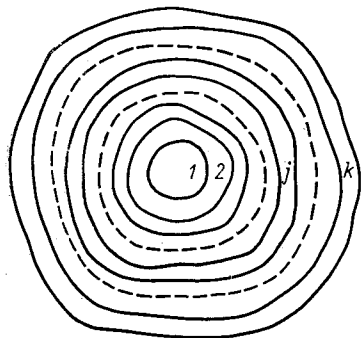


Рис. 6-12. Центрированная система тел

1 — сплошное тело; 2, ..., j, ..., k — элементы системы (оболочки, прослойки)

Ограничим задачу поиском среднеповерхностных температур на границах раздела элементов термостата. Для  $(k + 1)$  элемента необходимо иметь  $(k + 1)$  уравнение, чтобы найти  $(k + 1)$  среднеповерхностную температуру.

Вывод уравнений динамики термостата заключается в следующем:

выписываются уравнения тепловых потоков вида (4-75) для внутренних  $S_j(0)$  и внешних  $S_j(1)$  границ каждого  $j$ -го элемента; составляются уравнения теплового баланса для каждой из границ раздела элементов:

$$\text{на границе } S_j(0) \quad q_{j-1}(1, \tau) + q_{j-1,j}(\tau) = q_j(0, \tau); \quad (6-85)$$

$$\text{на границе } S_j(1) \quad q_j(1, \tau) + q_{j,j+1}(\tau) = q_{j+1}(0, \tau) \quad (6-86)$$

$$\text{и на границе раздела } k\text{-го элемента и внешней среды} \quad q_k(1, \tau) + q_c(\tau) = \alpha_c [t_k(1, \tau) - t_c(\tau)]. \quad (6-87)$$

Полученная система  $(k + 1)$  уравнений первого порядка используется для определения среднеповерхностных температур границ элементов. Структура коэффициентов, входящих в уравнения, приведена в гл. 3 и 4. Следует учесть, что при плотном тепловом

контакте между элементами  $\xi_{1j} = \infty$ ,  $\xi_{2j} = \infty$  и выражения для коэффициентов тепловых потоков упрощаются.

Однако при числе элементов термостата больше трех предложенный способ решения приводит к трудоемким операциям. Поэтому его можно рекомендовать только для решения задачи и анализа уравнений динамики на ЭВМ.

Практически всегда приходится рассчитывать конкретную конструкцию термостата, поэтому возможны (особенно, для оценочного анализа) упрощения формулировки задачи. Это в конечном итоге понижает число исходных уравнений и трудоемкость дальнейших исследований. Можно, например, упростить задачу, выделив «металлические элементы» с равномерным по объему распределением температуры («тепловые емкости» без сопротивления), а также выделить малотеплоемкие прослойки («чистые термические сопротивления»), в которых перестройка поля температуры идет быстро и можно ограничиться решениями для стационарных условий.

Рассмотрим модель термостата, состоящего из шести элементов (рис. 6-13). Если следовать рекомендациям (6-85) — (6-87), необходимо составить пять уравнений.

С учетом особенностей термостата введем ряд упрощений. Так как камера термостата 3 изготовлена из металла с высокой теплопроводностью, то поле температур в ней можно принять равномерным. Тонкослойный нагреватель 6 термически плотно контактирует с камерой, поэтому его можно «растворить» по всему объему камеры.

Наружный кожух термостата 5 изготовлен из тонкого листового материала, следовательно, его теплоемкостью допустимо пренебречь по сравнению с теплоемкостью теплоизоляционной оболочки. Тем самым влияние кожуха может сказываться лишь на значении лучистой составляющей коэффициента теплоотдачи термостата с внешней средой.

Воздушная прослойка 2 имеет очень незначительную теплоемкость и участвует в теплообмене как термическая проводимость с пренебрежимо малой по сравнению с остальными элементами инерционностью.

В расчетах наибольший интерес представляет собой температура центра  $t_{об}(0, \tau)$  и поверхности  $t_{об}(1, \tau)$  объекта и температура камеры  $t_k(\tau)$ . Температуру  $t_{об}(0, \tau)$  можно рассчитать на основе уравнений (3-10), (3-49), если известна температура поверхности  $t_{об}(1, \tau)$ . Поэтому ограничимся поиском температур  $t_{об}(1, \tau)$  и  $t_k(\tau)$ .

Тепловое состояние системы элементов определяется следующими тепловыми воздействиями:

- а) внутренним источником, равномерно распределяющим теплоту по объему объекта, удельная мощность которого  $w_{об}(\tau)$ ;
- б) внутренним источником (нагревателем), равномерно распределяющим теплоту по объему камеры, удельная мощность которого  $w_k(\tau)$ ;
- в) температурой  $t_c(\tau)$  внешней среды;
- г) внешним источником энергии, равномерно распределяющим теплоту по поверхности кожуха (теплоизоляции), плотность которого  $q_c(\tau)$ .

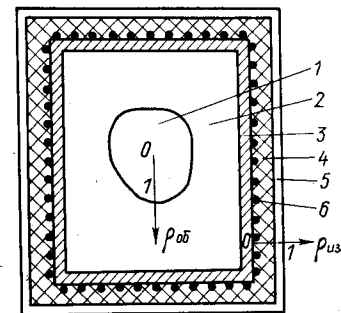


Рис. 6-13. Модель термостата  
1 — объект; 2 — воздушная прослойка; 3 — камера; 4 — изоляция; 5 — кожух; 6 — нагреватель

Воздействия  $t_c(\tau)$  и  $q_c(\tau)$  можно объединить в обобщенное воздействие  $z_c(\tau) = t_c(\tau) + q_c(\tau)/\alpha_c$ . Уравнение теплового баланса на поверхности объекта  $S_{об}$  имеет вид

$$q_{л.об}(1, \tau) S_{об} = \Lambda_B [t_{об}(1, \tau) - t_k(\tau)]. \quad (6-88)$$

При этом полная тепловая проводимость воздушной прослойки 2 толщиной  $L_B$

$$\Lambda_B = \frac{2\lambda_B S_{об} S_K}{[S_{об} + S_K] L_B}, \quad (6-89)$$

где  $S_K$  — площадь внутренней поверхности камеры;  $\lambda_B$  — эквивалентная (с учетом внутренней конвекции) теплопроводность воздушной прослойки;  $q_{л.об}(1, \tau)$  — удельный тепловой поток, подводимый изнутри объекта к его поверхности  $S_{об}$ .

Теплообмен камеры термостата определяется уравнением

$$\Lambda_B [t_{об}(1, \tau) - t_k(\tau)] + w_k(\tau) V_K = C_K \frac{dt_k}{d\tau} + q_{л.из}(0, \tau) S_{из}(0), \quad (6-90)$$

где  $V_K$  и  $C_K$  — полный объем и теплоемкость камеры;  $q_{л.из}(0, \tau)$  — удельный тепловой поток, отводимый теплопроводностью в глубь теплоизоляционной оболочки через ее внутреннюю поверхность  $S_{из}(0)$ .

Предполагается, что в начальный момент времени температуры объекта, камеры и изоляции неодинаковы и соответственно равны  $t_{об.н}$ ,  $t_{к.н}$ ,  $t_{из.н}$ .

Применяя к уравнениям (6-88) и (6-90) преобразование Лапласа и используя для расшифровки изображений тепловых потоков уравнения (3-93), (4-68), получаем систему уравнений относительно изображений  $T_{об}(1, s)$  и  $T_k(s)$  искомых температур  $t_{об}(1, \tau)$  и  $t_k(\tau)$ .

Результаты решения могут быть представлены в виде уравнений

$$T_{об}(1, s) = Y_{об.об} Z_{об}(s) + Y_{об.к} Z_k(s) + Z_{об.вн} Z_{вн}(s); \quad (6-91)$$

$$T_k(s) = Y_{к.об} Z_{об}(s) + Y_{к.к} Z_k(s) + Y_{к.вн} Z_{вн}(s), \quad (6-92)$$

включающих изображения обобщенных воздействий

$$Z_{об}(s) = \Lambda_{об.с}^{-1} [V_{об} W_{об}(s) + C_{об} t_{об.н}]; \quad (6-93)$$

$$Z_k(s) = \Lambda_{к.с}^{-1} [V_k W_k(s) + C_k t_{к.н}]; \quad (6-94)$$

$$Z_{вн}(s) = Z_c(s) + \Lambda_{из.с}^{-1} C_{из} t_{из.н} = T_c(s) + \alpha_c^{-1} Q_c(s) + \Lambda_{из.с}^{-1} C_{из} t_{из.н}. \quad (6-95)$$

В выражениях (6-93) — (6-95) обозначено:  $V_{об}$  и  $V_k$  — объемы объекта и камеры термостата;  $C_{об}$  и  $C_{из}$  — полные теплоемкости объекта и теплоизоляционной оболочки;  $\Lambda_{к.с}$ ,  $\Lambda_{об.с}$  и  $\Lambda_{из.с}$  — тепловые проводимости, определяемые по формулам

$$\Lambda_{к.с} = \left( \frac{1}{\Lambda_{из}} + \frac{1}{\Lambda_c} \right)^{-1}; \quad (6-96)$$

$$\Lambda_{об.с} = \left( \frac{1}{\Lambda_B} + \frac{1}{\Lambda_{из}} + \frac{1}{\Lambda_c} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{\Lambda_B} + \frac{1}{\Lambda_{к.с}} \right)^{-1}; \quad (6-97)$$

$$\Lambda_{из.с} = \left( \frac{1}{\Lambda_c} + \frac{1}{\Lambda_{из\infty}} \right)^{-1}. \quad (6-98)$$

Составляющие уравнений (6-96) — (6-98) таковы: тепловая проводимость воздушной прослойки  $\Lambda_B$ , рассчитываемая по формуле (6-89);

тепловая проводимость  $\Lambda_{из}$  теплоизоляционной оболочки термостата, имеющей толщину  $L_{из}$ , теплопроводность  $\lambda_{из}$  и ограниченной поверхностями  $S_{из}(0)$  и  $S_{из}(1)$ , равная

$$\Lambda_{из} = \frac{2\lambda_{из} S_{из}(0) S_{из}(1)}{[S_{из}(0) + S_{из}(1)] L_{из}}; \quad (6-99)$$

составляющая  $\Lambda_{из\infty}$  тепловой проводимости теплоизоляции термостата, равная

$$\Lambda_{из\infty} = \Lambda_{из} |_{S_{из}(0)=\infty} = \frac{2\lambda_{из} S_{из}(1)}{L_{из}}; \quad (6-100)$$

тепловая проводимость внешней среды

$$\Lambda_c = \alpha_c S_{из}(1). \quad (6-101)$$

Передаточные функции для температуры объекта

$$\left. \begin{aligned} Y_{об.об} &= \frac{\Delta_{об}}{\Delta}; & Y_{об.к} &= \frac{(1 + \epsilon_{об} s)(1 + \epsilon_{из} s)}{\Delta}; \\ Y_{об.вн} &= \frac{1 + \epsilon_{об} s}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (6-102)$$

для температуры камеры

$$Y_{к.об} = \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_{к.с}} \frac{1 + \epsilon_{из} C}{\Delta};$$

$$Y_{к.к} = (1 + \epsilon_{из} s) [1 + (\epsilon_{об} + C_{об}/\Lambda_B) s] \Delta^{-1}; \quad (6-103)$$

$$Y_{к.вн} = [1 + (\epsilon_{об} + C_{об}/\Lambda_B) s] \Delta^{-1}.$$

В выражениях (6-102), (6-103) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{об} &= 1 + \left[ \left( \epsilon_{из} + \frac{C_k}{\Lambda_B} \right) \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_{к.с}} + \epsilon_{из}(0, \zeta_2) \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_B} \right] s + \\ &+ \epsilon_{из} \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_{к.с}} \frac{C_k}{\Lambda_B} s^2 = 1 + B_1 s + B_2 s^2; \end{aligned} \quad (6-104)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 = 1 + \left[ \epsilon_{об} + \epsilon_{из}(0, \zeta_2) + \frac{C_{об}}{\Lambda_{об.с}} + \frac{C_k}{\Lambda_{к.с}} \right] s + \\ &+ \left\{ \epsilon_{из} \frac{C_k + C_{об}}{\Lambda_{к.с}} + \left( \epsilon_{об} + \frac{C_{об}}{\Lambda_B} \right) \left[ \frac{C_k}{\Lambda_{к.с}} + \epsilon_{из}(0, \zeta_2) \right] \right\} s^2 + \\ &+ \epsilon_{из} \left( \epsilon_{об} + \frac{C_{об}}{\Lambda_B} \right) \frac{C_k}{\Lambda_{к.с}} s^3. \end{aligned} \quad (6-105)$$

Показатели тепловой инерции объекта  $\epsilon_{об}$  и теплоизоляционной оболочки  $\epsilon_{из}$ ,  $\epsilon_{из}(0, \zeta_2)$  рассчитываются по формулам:

$$\epsilon_{об} = \frac{L_{об}^2 (1 - f_n)}{2a_{об} (n + 1)} = \frac{C_{об} L_{об}}{\lambda_{об} S_{об} (n + 3)}; \quad (6-106)$$

$$\epsilon_{из} = \frac{L_{из}^2 (f_1 - f_2) + (2f_1 - f_2)/\zeta_2}{a_{из} \Phi_1 + \Phi_2 (1 + 2/\zeta_2)}; \quad (6-107)$$

$$\epsilon_{из}(0, \zeta_2) = \frac{L_{из}^2 (1 - f_2 + 2/\zeta_2)}{a_{из} 2\Phi_2}. \quad (6-108)$$

Здесь  $\xi_2 = (\alpha_c L_{из})/\lambda_{из}$ ; коэффициенты  $n$  и  $f_n$  находятся по формулам (3-17), (3-47), а коэффициенты теплоизоляции  $\Phi_1, \Phi_2, f_1$  и  $f_2$  определяются по (4-20), (4-38).

Для приближенных оценок температур объекта и камеры с учетом специфики элементов термостата и численных значений коэффициентов передаточных функций (6-102), (6-103) возможно упрощение их структуры и понижение порядка.

**Стационарный режим.** В стационарном режиме теплообмена из уравнений (6-90) и (6-91) находим:

$$t_{об.ст} = \Lambda_{об.с}^{-1} V_{об} \omega_{об.ст} + \Lambda_{к.с}^{-1} V_k \omega_{к.ст} + z_{с.ст}, \quad (6-109)$$

$$t_{к.ст} = \Lambda_{к.с}^{-1} (V_{об} \omega_{об.ст} + V_k \omega_{к.ст}) + z_{с.ст}. \quad (6-110)$$

Перегрев объекта с тепловыделением по отношению к камере составляет

$$\Delta t_{об.к} = t_{об} - t_{к} = V_{об} \omega_{об.ст} / \Lambda_{в}. \quad (6-111)$$

Для поддержания температуры камеры на заданном уровне  $t_{стаб}$  с помощью уравнений (6-109), (6-110) можно определить минимально необходимую мощность нагревателя. Аналогично тому, как это сделано в гл. 2, из (6-110) находим

$$W_{к.полн} = \omega_k V_k = \Lambda_{к.с} (t_{стаб} - z_c) - \omega_{об} V_{об}. \quad (6-112)$$

Для пассивного объекта  $\omega_{об} = 0$  и при  $z_c = t_c$  формула (6-112) переходит в простейшую зависимость (2-41).

Чтобы обеспечить возможность управления системой термостатирования при конструировании термостата обычно предусматривают увеличение мощности нагревателя в 1,5—2 раза и более по сравнению с расчетной.

## 6-5. УПРОЩЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Получение динамических характеристик систем термостатирования при выбранном математическом методе исследования в конечном итоге связано с проведением обратного преобразования Лапласа. Трудоемкость преобразований снижается, если удастся использовать теоремы разложения изображений искомым зависимостей и таблицы операционных соответствий. Однако, если степень полиномов числителя и знаменателя передаточных функций относительно параметра преобразования  $s$  выше третьей, возможности аналитического исследования резко сужаются. Значения полюсов передаточных функций могут быть найдены только путем численного анализа.

Для получения приближенных оценок и расчетов представляют интерес методы преобразования структуры передаточных функций, основанные на предельных асимптотических соответствиях между оригиналами и изображениями функций [20, 30, 53].

В дополнение к рекомендациям, данным в § 3-3, рассмотрим несколько приемов упрощения передаточных функций на примере дробно-рациональной функции

$$Y(s) = \frac{1 + B_1(s) + B_2(s)^2}{1 + A_1(s) + A_2 s^2 + A_3 s^3}, \quad (6-113)$$

обобщающей выражения (6-102), (6-103).

Поведение функции  $Y(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  определяется в результате ее разложения по обратным (отрицательным) степеням параметра  $s$ . Проводя де-

ление знаменателя (6-113) на числитель, получаем искомое выражение:

$$Y(s) \approx \frac{B_2}{A_3} \frac{1}{s} \left\{ 1 + \left( \frac{B_1}{B_2} - \frac{A_2}{A_3} \right) \frac{1}{s} - \left[ \left( \frac{A_1}{A_3} - \frac{1}{B_2} \right) + \frac{A_2}{A_3} \left( \frac{B_1}{B_2} - \frac{A_2}{A_3} \right) \right] \frac{1}{s^2} \right\}. \quad (6-114)$$

При исследовании переходного процесса системы с передаточной функцией (6-113) приближенное выражение (6-114) позволяет получить начальный участок переходной характеристики.

Приближенное выражение передаточных функций вида (6-113) при  $s \rightarrow 0$  записывается в различных вариантах, результативность которых зависит от значения и знаков коэффициентов  $B_1, B_2, A_1, A_2, A_3$ .

Часто функцию  $Y(s)$  аппроксимируют в виде

$$Y(s) \approx \frac{1}{1 + as} \exp(-\tau_a s). \quad (6-115)$$

Этому предшествует замена функции (6-113) выражением

$$Y(s) \approx \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots}. \quad (6-116)$$

Коэффициенты функции (6-116) находятся путем деления знаменателя функции (6-113) на ее числитель:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A_1 - B_1; \\ a_2 &= A_2 - B_2 - B_1(A_1 - B_1); \\ a_3 &= A_3 - (A_1 - B_1)[A_2 - B_1(A_1 - B_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (6-117)$$

Коэффициенты функции (6-115) определяются по следующим формулам

$$a = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = \sqrt{A_1^2 - B_1^2 - 2(A_2 - B_2)} > 0; \quad (6-118)$$

$$\tau_a = a_1 - a = (A_1 - B_1) - \sqrt{A_1^2 - B_1^2 - 2(A_2 - B_2)}. \quad (6-119)$$

Из выражения (6-115), используя приближенное представление  $\exp(-\tau_a s) \approx 1 - \tau_a s$ , можно получить

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= \frac{1 - \tau_a s}{1 + as} \quad \text{при } \tau_a < 0; \\ Y(s) &\approx [(1 + as)(1 + \tau_a s)]^{-1} \quad \text{при } \tau_a > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-120)$$

Функции (6-115) и (6-120) получены путем преобразования выражения (6-116), в котором коэффициенты со степенями  $s^3$  и выше не учитываются ввиду предполагаемой их малости.

Возможно иное по сравнению с (6-115) преобразование уравнения (6-113), не требующее замены его выражением (6-116). Пренебрегая в (6-113) слагаемым  $A_3 s^3$  в соответствии с (6-115) и (6-116), можно записать

$$\left. \begin{aligned} 1 + A_1 s + A_2 s^2 &\approx (1 + \varepsilon_{пер} s) \exp(\tau_a s); \\ 1 + B_1 s + B_2 s^2 &\approx (1 + bs) \exp(\tau_B s), \end{aligned} \right\} \quad (6-121)$$

откуда

$$Y(s) = \frac{1 + B_1 s + B_2 s^2}{1 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3} \approx \frac{1 + bs}{1 + \varepsilon_{пер} s} \exp(-\tau_{пер} s), \quad (6-122)$$

где

$$\varepsilon_{\text{пер}} = \sqrt{A_1^2 - 2A_2}; \quad b = \sqrt{B_1^2 - 2B_2}; \quad (6-123)$$

$$\tau_{\text{пер}} = \tau_A - \tau_B = (A_1 - B_1) - (\varepsilon_{\text{пер}} - b). \quad (6-124)$$

При малых  $s$  принимаем  $\exp(-\tau_{\text{пер}}s) \approx 1$  и получаем

$$Y(s) \approx \frac{1 + bs}{1 + \varepsilon_{\text{пер}}s}, \quad (6-125)$$

которое наряду с (6-115) и (6-120) может быть использовано для анализа заключительной стадии ( $s \rightarrow \infty$ ) переходных процессов.

## 6-6. АНАЛИЗ ПУСКОВОГО РЕЖИМА ТЕРМОСТАТА

Анализ пускового режима предполагает определение интервала времени, по прошествии которого система термостатирования после ее включения входит в установившийся режим работы. В общем случае исследование этого

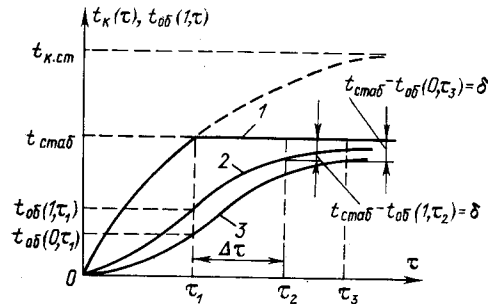


Рис. 6-14. Переходные характеристики объекта и камеры термостата

переходного периода представляет собой достаточно сложную задачу, приемы решения которой существенно зависят от конструктивных особенностей объекта, термостата, системы регулирования, датчика регулятора, требований к точности термостата. Рассмотрим упрощенную методику оценки длительности пускового периода на примере термостата, динамические характеристики которого определяются уравнениями (6-90) — (6-95), (6-102), (6-103). Предположим, что в начальный момент времени пассивный объект ( $\psi_{об} = 0$ ) и термостат находятся в тепловом равновесии с окружающей средой ( $t_c = \text{const}$ ). Чувствительный элемент регулятора вмонтирован в камеру термостата. Регулятор термостата настроен на поддержание заданной температуры камеры  $t_{стаб}$ . В момент  $\tau = 0$  включается регулятор и начинается выделение в камере мощности  $W_{к.полн} = \omega_k V_k$ . Под действием этой теплоты температура камеры  $t_k(\tau)$  и объекта  $t_{об}(\tau)$  будет возрастать, что схематически показано на рис. 6-14. При отсутствии регулятора и при постоянно включенном источнике энергии мощностью  $W_{к.полн}$  температура камеры возрастала бы до предельного значения  $t_{к.ст}$ . Однако этого не произойдет, так как в момент времени  $\tau_1$ , когда  $t_k(\tau_1) = t_{стаб}$ , произойдет отключение источника энергии, что будет препятствовать дальнейшему росту температуры. При качественной работе регулятора дальнейшее изменение температуры камеры (при  $\tau > \tau_1$ ) не должно значительно отклоняться от  $t_{стаб}$ , что приближенно показано на рис. 6-14 горизонтальным участком кривой 1. Из-за тепловой инерции объекта температура его поверхности  $t_{об}(1, \tau)$  (кривая 2 на рис. 6-14) будет отставать от  $t_k(\tau)$ . Начиная с момента времени  $\tau_1$ , процесс разогрева объекта вступает во вторую стадию и происходит в условиях теплообмена с камерой, поддерживаемой при температуре стабилизации  $t_{стаб}$ . В момент времени  $\tau_2$  от начала процесса температура объекта достигает значения  $t_{об}(1, \tau_2)$ , находящегося в пределах допуска  $\delta$ . Интервал времени

$$\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \quad (6-126)$$

может быть принят как минимальная оценка длительности пускового периода работы термостата.

Для пассивного объекта, эффективная теплопроводность которого низка, температура его центра  $t_{об}(0, \tau)$  будет изменяться так, как это показано на рис. 6-14 (кривая 3). Значение температуры центра объекта в заданном допуске  $\delta \leq t_{стаб} - t_{об}(\tau)$  будет достигнуто только спустя время  $\tau_3$  после начала процесса.

Анализ пускового периода можно провести по следующей схеме.

1. Находятся изображения функции температуры камеры  $T_k(s)$  и оболочек  $T_{об}(1, s)$ . При этом температура среды  $t_c$  (или  $z_c$  при  $q_c = 0$ ) принимается за начало отсчета всех задаваемых и исследуемых температур. С учетом принятых выше допущений из (6-95) — (6-99) получаем

$$T_k(s) = Y_{к.к} \frac{V_k W_k(s)}{\Lambda_{к.с}} = Y_{к.к} \frac{V_k}{\Lambda_{к.с}} \frac{\omega_k}{s}; \quad (6-127)$$

$$T_{об}(1, s) = Y_{об.к} \frac{V_k W_k(s)}{\Lambda_{к.с}} = Y_{об.к} \frac{V_k}{\Lambda_{к.с}} \frac{\omega_k}{s}, \quad (6-128)$$

где  $Y_{к.к}$  и  $Y_{об.к}$  определяются выражениями (6-102) и (6-103).

2. Определяются изображения температуры центра  $t_{об}(0, \tau)$  и среднеобъемной температуры  $t_{об}v(\tau)$  объекта на основе уравнений, приведенных в § 3-4:

$$T_{об}(0, s) = Y_e(0, s) T_{об}(1, s) = \frac{1}{(1 + \varepsilon_{об} s) [1 + 0,5(n + 1)\varepsilon_{об} s]}; \quad (6-129)$$

$$T_{об}v(s) = Y_{ев}(s) T_{об}(1, s) = \frac{1}{1 + \varepsilon_{об} s} T_{об}(1, s), \quad (6-130)$$

где  $\varepsilon_{об}$  находится из (3-45) при  $\zeta = \infty$ .

3. Определяются путем обратного преобразования Лапласа уравнений (6-127) — (6-130) временные характеристики температуры камеры  $t_k(\tau)$  и объекта  $t_{об}(1, \tau)$ ,  $t_{об}(0, \tau)$ ,  $t_{об}v(\tau)$ .

4. Решается уравнение

$$t_k(\tau) = t_{стаб}, \quad (6-131)$$

т.е. устанавливается момент времени  $\tau_1$ , по прошествии которого температура камеры достигает значения  $t_{стаб}$ .

5. Рассчитываются значения температуры объекта  $t_{об}(1, \tau_1)$ ,  $t_{об}(0, \tau_1)$ ,  $t_{об}v(\tau_1)$  к концу первого периода ( $0 - \tau_1$ ) пускового процесса (см. рис. 6-14).

6. Устанавливается на основе решений, приведенных в гл. 3, вид уравнений для изображения температур объекта  $T_{об}(1, s)$  и  $T_{об}(0, s)$  во втором периоде ( $\tau_1 - \tau_2$ ) пускового процесса

$$T_{об}(\rho, s) = Y_e \frac{t_{стаб}}{s} + Y_i \varepsilon_s t_{нв}, \quad (6-132)$$

где в соответствии с (3-51) и (3-52)

$$Y_e = \frac{1 + C_1 s}{1 + \varepsilon_s s}; \quad Y_i = \frac{1}{1 + \varepsilon_s s} \frac{1 + \frac{2}{\zeta} - \rho^2}{1 - f_n + \frac{2}{\zeta}}; \quad (6-133)$$

$$C_1 = - \frac{f_n - \rho^2}{1 - f_n + \frac{2}{\zeta}}; \quad D_0 = \frac{1 + \frac{2}{\zeta} - \rho^2}{1 - f_n + \frac{2}{\zeta}}; \quad (6-134)$$

$$\varepsilon_S = \frac{L^2 \left(1 - f_n + \frac{2}{\zeta}\right)}{2a(n+1)}; \quad \zeta = \frac{\alpha L_{об}}{\lambda_{об}} = \frac{L_{об}}{\lambda_{об}} \frac{\Lambda_B}{S_{об}}. \quad (6-135)$$

Тепловая проводимость  $\Lambda_B$  находится по (6-89).

Температура  $t_{нV}$  в (6-132) численно равна среднеобъемной температуре объекта  $t_{обV}(\tau_1)$ .

7. Производится обратное преобразование Лапласа уравнения (6-132). При  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$  находятся зависимости  $t_{об}(0, \Delta\tau)$  и  $t_{об}(1, \Delta\tau)$ , определяющие ход изменения температуры в центре и на поверхности объекта во втором периоде, причем отсчет времени  $\Delta\tau$  ведется от момента  $\tau_1$ , т. е.  $\Delta\tau = \tau - \tau_1$ .

8. Решаются трансцендентные уравнения

$$t_{стаб} - t_{об}(1, \Delta\tau) = \delta; \quad t_{стаб} - t_{об}(0, \Delta\tau) = \delta, \quad (6-136)$$

т. е. определяются временные интервалы  $\Delta\tau_S$  и  $\Delta\tau_{ц}$ , обращающие (6-136) в тождества.

9. Находятся искомые значения длительности пускового периода

$$\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau_S; \quad \tau_3 = \tau_1 + \Delta\tau_{ц}. \quad (6-137)$$

Трудоемкость перечисленных выше операций зависит от особенностей анализируемой системы и тех упрощений, которые могут быть сделаны при конкретном анализе.

Рассмотрим методику анализа пускового периода на примере термостата (см. рис. 6-13). Как правило, нагрев камеры термостата производится форсированно, т. е. при непрерывной подаче мощности  $w_K V_K$  стационарное значение температуры камеры  $t_{к.ст.}$ , определяемое по (6-110), превысило бы температуру стабилизации  $t_{стаб}$  в полтора-два раза и более. По этой причине на участке  $0 \leq \tau \leq \tau_1$  (рис. 6-14) допустимо взамен функций  $Y_{к.к.}$  и  $Y_{об.к.}$ , входящих в уравнения (6-127) и (6-134) и определяемых по (6-103) и (6-102), использовать их приближенные выражения (6-114). В результате преобразований получаем

$$T_K(s) = \frac{V_K w_K}{C_K} \frac{1}{s^2} \left(1 - \frac{g_K}{s}\right), \quad (6-138)$$

где

$$g_K = \frac{\Lambda_{к.с}}{C_K} \left[ \frac{\varepsilon_{из}(0, \zeta_2)}{\varepsilon_{из}} - \frac{C_K/\Lambda_{к.с}}{\varepsilon_{об} + C_{об}/\Lambda_B} \right]. \quad (6-139)$$

Проведем обратное преобразование Лапласа в уравнении (6-138) и получим

$$t_K(\tau) = V_K w_K C_K^{-1} \tau (1 - 0,5g_K \tau). \quad (6-140)$$

Заменяя в (6-140)  $t_K(\tau)$  на  $t_{стаб}$  и решая это уравнение, находим длительность первого периода (рис. 6-14)

$$\tau_1 = \frac{1}{g_K} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2g_K C_K}{V_K w_K} t_{стаб}}\right). \quad (6-141)$$

Используя для аппроксимации передаточной функции  $Y_{об.к}$  приближение (6-114), получаем с учетом решений (6-128) — (6-130) уравнения для расчета характерных температур объекта:

$$t_{об}(1, \tau) \approx g_{нач} \tau \left(1 - \frac{1}{2} g_{об} \tau\right); \quad (6-142)$$

$$t_{обV}(\tau) \approx 0,5 \frac{g_{нач}}{\varepsilon_{об}} \tau^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(g_{об} + \frac{1}{\varepsilon_{об}}\right) \tau\right]; \quad (6-143)$$

$$t_{об}(0, \tau) \approx \frac{1}{3(n+1)} \frac{g_{нач}}{\varepsilon_{об}^2} \tau^3 \left(1 - \frac{1}{4} g_{об} \tau\right), \quad (6-144)$$

в которых

$$g_{об} = \frac{A_2}{A_3} - \frac{B_{1об}}{B_{2об}}; \quad g_{нач} = \frac{V_K w_K}{C_K} \left(1 + \frac{C_{об}/\Lambda_B}{\varepsilon_{об}}\right)^{-1}; \quad (6-145)$$

$$B_{1об} = \varepsilon_{об} + \varepsilon_{из}; \quad B_{2об} = \varepsilon_{об} \varepsilon_{из},$$

коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  выбираются в соответствии с (6-105),  $\varepsilon_{об}$  рассчитывается по (6-106).

При  $\tau = \tau_1$  из уравнений (6-142) — (6-145) находятся значения температур объекта  $t_{об}(1, \tau_1)$ ,  $t_{обV}(\tau_1)$  и  $t_{об}(0, \tau_1)$  в конце первого периода (рис. 6-14).

Далее на основе (6-132) определяется конкретный вид уравнения для изображения  $T_{об}(\rho, s)$  температуры объекта на заключительной (второй) стадии пускового периода (рис. 6-14):

$$T_{об}(\rho, s) = t_{стаб} \frac{1 + c(\rho)s}{1 + \varepsilon_S s} \frac{1}{s}, \quad (6-146)$$

в котором с учетом (6-133) — (6-135)

$$c(\rho) = C_1 + D_0 \varepsilon_S \frac{t_{нV}}{t_{стаб}} = \frac{\varepsilon_S}{1 - f_n + 2/\zeta} \left[ \frac{t_{нV}}{t_{стаб}} \left(1 + \frac{2}{\zeta} - \rho^2\right) - (f_n - \rho^2) \right]. \quad (6-147)$$

Температура  $t_{нV}$  в соответствии с (6-143) принимается равной  $t_{обV}(\tau_1)$ . Переход от изображения функции к ее оригиналу позволяет записать

$$\frac{t_{об}(\rho, \Delta\tau)}{t_{стаб}} = 1 - \left[1 - \frac{c(\rho)}{\varepsilon_S}\right] \exp(-\Delta\tau/\varepsilon_S). \quad (6-148)$$

В этом равенстве, задавая согласно (6-136) требуемое значение отклонения  $\delta$  температуры объекта  $t_{об}(\rho, \tau)$  от  $t_{стаб}$ , находим длительность  $\Delta\tau$  переходного процесса во втором периоде (рис. 6-14):

$$\Delta\tau \geq \varepsilon_S \ln \left\{ \frac{t_{стаб}}{\delta} \left[1 - \frac{c(\rho)}{\varepsilon_S}\right] \right\}. \quad (6-149)$$

Из уравнения (6-149) при  $\rho = 1$  находится  $\Delta\tau_S = \tau_2 - \tau_1$ , а при  $\rho = 0$  оценивается  $\Delta\tau_{ц} = \tau_3 - \tau_1$  и в соответствии с (6-137) определяются длительности всего пускового периода  $\tau_2$  и  $\tau_3$ .

Отметим, что уравнение (6-148) при  $\Delta\tau = 0$  из-за принятых допущений, вытекающих из условия параболической аппроксимации температуры объекта (см. § 4-5), неточно передает начальные значения температур  $t_{об}(1, 0)$

и  $t_{об}(0, 0)$ . Начальные участки кривых  $t_{об}(1, \tau)$ ,  $t_{об}(0, \tau)$ , рассчитываемых по уравнению (6-148), необходимо экстраполировать к температурам  $t_{об}(1, \tau_1)$  и  $t_{об}(0, \tau_1)$ , определяя их значения по (6-142) и (6-143).

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ТЕМПЕРАТУРЫ

#### 7-1. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Измерительные преобразователи температуры в системах термостатирования используются двояким образом:

как измерители температуры (термоприемники) при пусконаладочных испытаниях термостатов или для постоянного контроля температуры объекта и иных элементов термостата в процессе его эксплуатации;

как измерительные преобразователи системы автоматического регулирования (стабилизации) температуры.

Общими требованиями, которым они должны удовлетворять, являются надежность, стабильность термометрических свойств, высокая чувствительность, малое значение случайных и систематических погрешностей измерений температуры. Не всегда этим требованиям удастся удовлетворить в должной мере. Поэтому используется лишь сравнительно узкая группа преобразователей температуры.

Перечислим их в порядке массовости применения: терморезисторные измерительные преобразователи (металлические или полупроводниковые термометры сопротивления); термоэлектрические преобразователи (термопары); манометрические и биметаллические преобразователи; транзисторные преобразователи (диоды и триоды); жидкостные (рутные) стеклянные термометры и термодатчики.

В активных системах термостатирования часто применяются медные (ТСМ) и платиновые (ТСП) малогабаритные термометры сопротивления типа ИС (пленочные), ТСП или ТСМ (цилиндрические) различных градуировок. Габаритные размеры термометров ТСП-138 (гр. 21) и ТСМ-148 (гр. 23) таковы: длина  $21 \cdot 10^{-3}$  м, внешний диаметр оболочки  $4 \cdot 10^{-3}$  м, диаметр проводов  $(0,05 \div 0,07) \cdot 10^{-3}$  м. Плоские (пластинчатые) сопротивления серии ИС (или им подобные) имеют длину и ширину в пределах  $(25 \div 10) \cdot 10^{-3}$  м и общую толщину  $(0,3 \div 0,1) \cdot 10^{-3}$  м (рис. 7-1). Их номинальное сопротивление (при  $0^\circ\text{C}$ ) может не соответствовать стандартным градуировкам, поэтому они снабжаются собственными градуировками.

В различных организациях при разработке термостатов могут применяться металлические термометры сопротивления индивидуального изготовления, непосредственно встраиваемые в корпус или наматываемые на отдельные элементы термостата.

Чувствительность термометров сопротивления (их термочувствительных элементов) определяется типом градуировки и термометрическим материалом [60]. Взаимосвязь между входным (температура) и выходным (электрическое сопротивление) воздействиями такого преобразователя зависит от схемы включения термометра сопротивления (мостовая, компенсационная

и др.) и вида вторичных информационно-измерительных преобразователей.

В качестве полупроводниковых термометров сопротивления (ПТС) чаще всего применяют малогабаритные или миниатюрные терморезисторы, например ММТ-6, СТ-17, СТ-19, СТЗ-14 и др. (рис. 7-2). Температурный коэффициент сопротивления ПТС составляет  $-3 \div -8$  1/К. Подробные технические характеристики ПТС приведены в работе [62]. Общим отрицательным качеством всех ПТС является необходимость их индивидуальной градуировки ввиду разброса значений исходных параметров  $A$  и  $B$  в функциональной связи сопротивления и температуры

$$R = A \exp(B/T).$$

В качестве термоэлектрических преобразователей могут использоваться все термопары с нормированными градуировочными характеристиками: платинородий-платина, хромель-алюмель, хромель-копель. Из нестандартных термопар часто, особенно для сравнительных испытаний и измерений, применяется медь-константановая термопара с индивидуальной градуировкой. Характеристики термоэлектродных материалов приведены в соответствующих ГОСТ и руководствах по термометрии [45, 46]. Изготовление и армирование термопар выполняются в зависимости от цели применения. Для

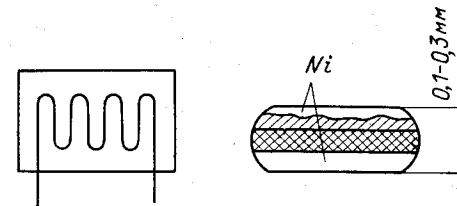


Рис. 7-1. Термометры сопротивления типа ИС

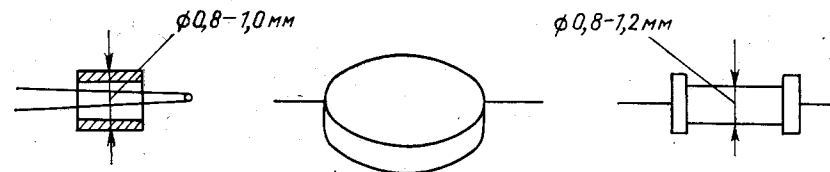


Рис. 7-2. Полупроводниковые термометры сопротивления

термостатов не рекомендуется использовать термоэлектроды диаметром более  $(0,2 \div 0,3) \cdot 10^{-3}$  м. Общий диаметр термопары в арматуре также не должен быть большим, не более  $(0,8 \div 1,5) \cdot 10^{-3}$  м, чтобы не вносить возмущения в процесс измерений. Термопары как чувствительные элементы в системах термостабилизации используются редко из-за низкой чувствительности, необходимости термостатирования свободных спаев термопар и стабилизированного источника (нормального элемента).

Манометрические и биметаллические преобразователи используются преимущественно в термостатах единичного или мелкосерийного производства. Обобщенные материалы по их характеристикам, расчету и применению в устройствах термостатирования отсутствуют.

В термостатах, предназначенных для выполнения научных исследований, в качестве первичных преобразователей температуры в системе регулирования в последние годы стали применять транзисторные преобразователи, использующие температурную зависимость свойств полупроводниковых диодов и триодов. Чаще всего в качестве термометрического свойства выбирается зависимость от температуры обратного тока коллектора транзисторов при постоянном напряжении эмиттер—база, т. е.  $I_k = f(T)$  при  $U_{э-б} = \text{const}$  и обратного тока диодов, так как  $I_{обр} = f(T)$ . Свойства, а также вопросы расчета и применения транзисторных преобразователей рассмотрены в [37].



Ртутно-стеклянные термометры в основном применяются при контроле и испытании термостатов. Они обладают высокой стабильностью и точностью измерений (до 0,01 К для метастатических термометров). В отдельных случаях малогабаритные ртутно-стеклянные термоконтакты выполняют роль термосигнализаторов и первичных преобразователей терморегуляторов. Мощность их невелика. Обычно термоконтакты используют на одно значение температуры или несколько. Более гибкими по диапазону температур являются термоконтакты с магнитной головкой. Подробное описание этого класса измерителей температуры дано в руководствах по термометрии [45].

Все измерительные преобразователи температуры, применяемые в системах термостабилизации, независимо от их типа и принципа действия вызывают в исследуемой области изменения ранее существовавшей там картины распределения температуры и тепловых потоков. Анализ взаимосвязей между измеренной температурой (показаниями измерительного преобразователя) и действительной температурой исследуемой области (температурой, которая существовала в области при отсутствии термодатчика) посвящены работы [35, 56, 66]. Провести этот анализ в форме, удобной для последующего инженерного расчета, удается лишь в некоторых случаях при ряде допущений относительно выбора тепловых моделей объекта и термодатчика. Однако качественные требования к термодатчику, направленные на уменьшение ошибки измерений, могут быть сформулированы так:

- объем и размеры термодатчика должны выбираться минимальными;
  - теплофизические свойства термодатчика, по возможности, должны быть близки к теплофизическим свойствам исследуемого тела;
  - измеритель должен располагаться в изотермической области, что особенно важно при исследовании температурного поля в непосредственной близости от границ тела.
- Ниже рассматриваются наиболее характерные для системы термостатирования случаи расположения термодатчиков внутри и на поверхности тела и дается оценка возможных погрешностей измерений температуры.

## 7-2. УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОБМЕНА ЛИНЕЙНЫХ (ПРОВОЛОЧНЫХ) ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Если измеритель температуры расположен достаточно далеко от поверхности исследуемого тела, то вносимые им температурные возмущения не достигают границ тела. Такое тело по отношению к термодатчику может рассматриваться как неограниченный массив (неограниченное пространство).

Пусть в теле существует некоторое заданное одномерное распределение температуры  $t_0(z)$ , для измерения которого используется цилиндрический термодатчик.

Принимая первоначальный градиент температуры  $\beta$  в теле постоянным

$$\frac{dt_0}{dz} = \beta; \quad t_0(z) = \beta z \quad (7-1)$$

и заменяя реальный термодатчик бесконечно длинным цилиндром радиуса  $R$ , ось которого параллельна изотермическим плоскостям, можно свести задачу оценки погрешностей к анализу температур в системе тел 1 и 2, условно изображенных на рис. 7-3.

Так как коэффициенты теплопроводности тела  $\lambda_0$  и измерителя  $\lambda_n$  различны, то распределение температур в массиве  $t(r, z)$  и измерителе  $t_n(z)$  будет отличаться от (7-1).

Возмущение поля температур  $t_0(z)$  определяется следующими зависимостями:

внутри измерителя

$$\Delta t(z) = t_0(z) - t_n(z) = (\lambda_n - \lambda_0) \beta z / (\lambda_n + \lambda_0), \quad (7-2)$$

вне измерителя при  $r \geq R$

$$\Delta t(r, z) = t_0(z) - t(r, z) = \frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_n + \lambda_0} \frac{R^2}{r^2} \beta z. \quad (7-3)$$

Расположение изотерм и линий теплового потока, а также зависимость  $\Delta t = f(z)$  вдоль оси  $z$  при  $\lambda_n < \lambda_0$  показана на рис. 7-3.

Из формул (7-2), (7-3) и рис. 7-3 следует, что при расположении чувствительного элемента в центре области 1 или равномерном его

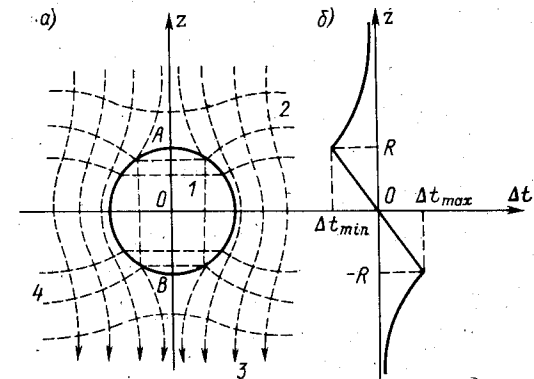


Рис. 7-3. Измерение температуры внутри массива: а — расположение термодатчика; б — зависимость  $\Delta t = f(z)$   
1 — термодатчик; 2 — массив; 3 — тепловой поток; 4 — изотермы

размещении по сечению цилиндрического термодатчика погрешность измерений температуры

$$\Delta t(0) = t_0(0) - t_n(0) = 0, \quad (7-4)$$

т. е. у такого измерителя температуры отсутствует статическая погрешность.

Если чувствительный элемент термодатчика (электроды термодатчика или нить термометра сопротивления) расположен в точках А и В на границах области 1, то погрешность измерений температуры  $t_0(\pm R)$  достигает максимума и соответственно будет

$$\Delta t_{\max} = \Delta t(\pm R) = t_0(\pm R) - t_n(\pm R) = \pm (\lambda_n - \lambda_0) \beta R / (\lambda_n + \lambda_0). \quad (7-5)$$

Зона возмущения температуры по оси  $z$  за пределами расположения термодатчика (вне области 1 на рис. 7-3, а) определяется

неравенством

$$z_0 \geq \frac{R}{\delta}, \quad \text{если} \quad \left| \frac{\Delta t(z_0)}{\Delta t_{\max}} \right| \leq \delta, \quad (7-6)$$

где  $\delta$  — заданное отношение разности температур (7-2) на расстоянии  $z_0$  от оси цилиндрического термоприемника и минимальной разности  $\Delta t_{\max}$ , рассчитываемой по формуле (7-5).

Взаимосвязь между нестационарными измеренной  $t_n(0, \tau)$  и действительной  $t_0(0, \tau)$  температурами, когда чувствительный элемент измерителя располагается в центре области 1 при  $z = 0$ , (рис. 7-3, а), приближенно описывается уравнениями (см. [56])

$$T_n(0, s) = Y_n T_0(0, s);$$

$$Y_n = \frac{1}{1 + \epsilon_n s}; \quad (7-7)$$

$$\Delta t(0, \tau) = t_0(0, \tau) - t_n(0, \tau) =$$

$$= \epsilon_n \frac{dt_n(0, \tau)}{d\tau}, \quad (7-8)$$

в которых параметр  $\epsilon_n$ , равный

$$\epsilon_n \approx \frac{R^2}{4} \left[ \frac{1}{a_n} \left( 1 + 2 \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \right) - \frac{3}{a_0} \right], \quad (7-9)$$

определяет тепловую инерционность измерителя по отношению к массиву.

В выражении (7-9)  $a_n, \lambda_n, a_0, \lambda_0$  — коэффициенты температуро- и теплопроводности измерителя и исследуемого тела.

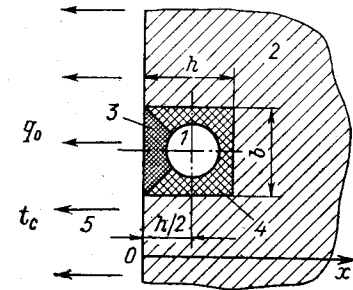


Рис. 7-4. Размещение цилиндрического термоприемника на поверхности тела  
1 — чувствительный элемент термоприемника; 2 — исследуемое тело; 3, 4 — замазка; 5 — среда

Точность оценки по уравнениям (7-7) — (7-9) увеличивается с ростом теплопроводности  $\lambda_0$  исследуемого тела. При  $a_n \approx a_0$  и  $\lambda_n \approx \lambda_0$  ошибка измерения  $\Delta t(0, \tau) \rightarrow 0$ .

Анализ погрешностей для термоприемников, имеющих более сложную структуру, и примеры численной оценки результатов измерения даны в работе [56].

**Термоприемник на поверхности тела.** Случай размещения термоприемников на поверхности тела или около нее весьма разнообразны. Рассмотрим характерный вариант расположения цилиндрического термоприемника в пазу на поверхности тела (рис. 7-4). Прямоугольный паз (длинная канавка), в котором располагается термоэлектрод или нить термометра сопротивления, заполняется клеем, пастой или цементом.

Систематическая погрешность измерений температуры поверхности будет определяться смещением чувствительного элемента на  $h/2$  от поверхности и перераспределением тепловых потоков в области паза, вызванным разницей в теплофизических свойствах тела и измерителя с заполнителем, а также геометрией паза — его глубиной  $h$  и шириной  $b$ .

Динамика теплообмена измерителя, располагаемого по схеме рис. 7-4, как показано в работе [56], в первом приближении подчиняется уравнению

$$\epsilon_n \frac{dt_n(\tau)}{d\tau} + t_n(\tau) = (1 - \eta_n) t_0(\tau) + \eta_n t_c(\tau) \quad (7-10)$$

или в преобразованном виде

$$T_n(s) = \frac{1 - \eta_n}{1 + \epsilon_n s} T_0(s) + \frac{\eta_n}{1 + \epsilon_n s} T_c(s). \quad (7-11)$$

В уравнениях (7-10), (7-11)  $t_n(\tau), t_0(\tau)$  — измеренная и действительная температура поверхности тела соответственно;  $t_c(\tau)$  — температура окружающей среды;  $T_n(s), T_0(s), T_c(s)$  — их лапласовские изображения.

Статический  $\eta_n$  и динамический  $\epsilon_n$  коэффициенты измерителя оцениваются по формулам

$$\eta_n = \frac{1 - \varphi \zeta_0 (1 + \kappa)}{1 + \mu (1 + \kappa)}; \quad \epsilon_n = \epsilon - \epsilon_0, \quad (7-12)$$

где

$$\mu = 1 + \frac{2h}{b}; \quad \varphi = 1 + \frac{h}{b}; \quad \zeta_0 = \frac{\alpha_c h}{\lambda_0};$$

$$\zeta_3 = \frac{\alpha_c h}{\lambda_3}; \quad (7-13)$$

$$\kappa = \frac{1 + \mu}{\mu} \frac{\varphi^2}{\zeta_3} \left[ 1 + \frac{\pi d}{2(b+h)} \right]^2 \left[ 1 - \frac{\pi d^2}{4bh} \right]^{-1}; \quad (7-14)$$

$$\epsilon = \frac{4}{\lambda_3} \left[ c_3 \gamma_3 + \frac{c_n \gamma_n}{(4bh/\pi d^2) - 1} \right] \left[ \frac{bh - \pi d^2/4}{2(b+h) + \pi d} \right]^2; \quad (7-15)$$

$$\epsilon_0 = \frac{(b+h)^2 c_0 \gamma_0}{8\pi^2 \lambda_0}. \quad (7-16)$$

В выражениях (7-12) — (7-16)  $c$  — удельная теплоемкость;  $\gamma$  — плотность;  $\lambda$  — теплопроводность вещества;  $d$  — диаметр термоприемника;  $\alpha_c$  — коэффициент теплоотдачи тела в окружающую среду.

Индексы «0», «н» и «из» соответственно относятся к объекту, чувствительному элементу измерителя и замазке (области 3 и 4 на рис. 7-4); остальные обозначения введены для краткости записи.

**Непрозрачные объекты.** Уравнения (7-10), (7-11) выведены в предположении, что  $\lambda_0 > \lambda_3$  и  $0 < \eta_n \leq 1$ . Для непрозрачных объектов с высокой степенью черноты излучения поверхности грубая

оценка статической погрешности измерений при  $\lambda_0 > \lambda_3$  и малых  $\alpha_c$  может быть дана по соотношению

$$\left| \frac{t_0 - t_n}{t_0 - t_c} \right| < \frac{\alpha_c h}{\lambda} \quad (7-17)$$

Численные примеры оценок погрешностей по предлагаемым выше зависимостям приведены в работе [56].

### 7-3. ДИНАМИКА ПЛАСТИНЧАТЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для измерения температуры нередко используются пластинчатые измерительные преобразователи, закрепляемые на поверхности камеры или иного элемента термостата. Поскольку толщина  $L_n$  таких преобразователей много меньше их длины и ширины, процесс теплопередачи в них близок к одномерному и может быть описан в соответствии со схемой рис. 7-5.

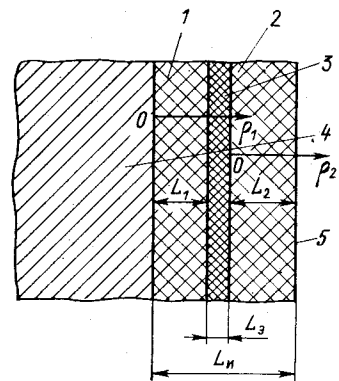


Рис. 7-5. Измерение температуры пластинчатым измерителем

1, 2 — электроизоляционные прослойки; 3 — чувствительный элемент измерителя; 4 — камера термостата; 5 — элемент термостата (среда)

Чувствительный элемент измерителя температуры 3 толщиной  $L_3$  заключен между электроизоляционными прослойками 1 и 2, имеющими толщины  $L_1$  и  $L_2$  и отделяющими его от камеры термостата 4 и соседнего с камерой элемента 5 (последним может служить среда с заданным значением температуры  $t_c$  ( $\tau$ )).

Ввиду высокой теплопроводности материала распределение температур в камере 4 и в чувствительном элементе измерителя 3 предполагается равномерным и характеризуется значениями  $t_k$  ( $\tau$ ),  $t_n$  ( $\tau$ ) и  $t_c$  ( $\tau$ ). В прослойках 1 и 2 температура неравномерна по их толщине. Такая же схема может быть принята в качестве тепловой

модели электронагревателей, конструктивно выполняемых в виде пластин, распределенных по площади обмоток. Элемент 3 является собственно нагревателем (активным сопротивлением), в котором при пропускании тока выделяется теплота с объемной плотностью  $w$  ( $\tau$ ).

Применяя методику описания процесса теплообмена, рассмотренную в гл. 3 и 6, получаем следующее соотношение, связывающее изображение  $T_n(s)$  искомой температуры  $t_n$  ( $\tau$ ) с изображениями  $W(s)$ ,  $T_k(s)$  и  $T_c(s)$  воздействий  $w$  ( $\tau$ ),  $t_k$  ( $\tau$ ) и  $t_c$  ( $\tau$ ):

$$T_n(s) = Y_w \frac{V_3}{\Lambda} W(s) + Y_k T_k(s) + Y_c T_c(s) \quad (7-18)$$

Передаточные функции  $Y_w$ ,  $Y_k$  и  $Y_c$  определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} Y_w &= \frac{(1 + \varepsilon_1 s)(1 + \varepsilon_2 s)}{\Delta}; \\ Y_k &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \frac{1 + \varepsilon_2 s}{\Delta}; \quad Y_c = \frac{\Lambda_{2c}}{\Lambda} \frac{1 + \varepsilon_1 s}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (7-19)$$

где

$$\Delta = 1 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3; \quad (7-20)$$

$$A_1 = \varepsilon_3 + \frac{\Lambda_1}{\Lambda} (\tau_1 + \varepsilon_2) + \frac{\Lambda_{2c}}{\Lambda} (\tau_2 + \varepsilon_1);$$

$$A_2 = \varepsilon_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \tau_1 \varepsilon_2 + \frac{\Lambda_{2c}}{\Lambda} \tau_2 \varepsilon_1;$$

$$A_3 = \varepsilon_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Параметры  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяют тепловые инерционности составных частей измерителя или нагревателя:

$$\varepsilon_3 = \frac{C_3}{\Lambda} = \frac{c_3 \gamma_3 L_3 S_3}{\Lambda}; \quad (7-22)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{L_1^2}{12a_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{L_2^2}{12a_2} \left(1 + \frac{4}{\zeta_2}\right) \left(1 + \frac{1}{\zeta_2}\right); \\ \tau_1 &= \frac{L_1^2}{3a_1}; \quad \tau_2 = \frac{L_2^2}{3a_2} \left(1 + \frac{3}{\zeta_2}\right); \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_c L_2}{\lambda_2}; \end{aligned} \right\} \quad (7-23)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\lambda_1}{L_1} S_3; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_2}{L_2} S_3; \quad \Lambda_c = \alpha_c S_3; \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_{2c}; \quad \Lambda_{2c} = \frac{\Lambda_2 \Lambda_c}{\Lambda_2 + \Lambda_c}. \end{aligned} \right\} \quad (7-24)$$

В зависимостях (7-21) — (7-24) индексы «1», «2», «3» при физических характеристиках  $a$ ,  $\lambda$ ,  $c$  и  $\gamma$  относятся к элементам 1, 2 и 3 (рис. 7-5):  $\alpha_c$  — коэффициент теплоотдачи между измерителем и элементом 5 (средой);  $S_3$  — площадь контакта измерителя (нагревателя) с камерой;  $V_3 = L_3 S_3$  — объем чувствительного элемента измерителя температуры (или нагревателя).

В большинстве случаев толщина прослоек  $L_1$  и  $L_2$  соизмерима или менее  $L_3$ , тепловая инерционность измерителя или нагревателя много меньше инерционности элементов 4 и 5 (рис. 7-5), поэтому возможно упрощение передаточных функций (7-19):

$$Y_w \approx \frac{1}{1 + \varepsilon_w s}; \quad Y_c = \frac{1}{1 + \varepsilon_c s}; \quad (7-25)$$

$$Y_k = \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \frac{1}{1 + \varepsilon_n s}; \quad (7-26)$$

где

$$\varepsilon_w = A_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2); \quad \varepsilon_c = A_1 - \varepsilon_1; \quad (7-27)$$

$$\varepsilon_n = A_1 - \varepsilon_2. \quad (7-28)$$

Для пластинчатого измерителя температуры, пренебрегая в (7-18) мощностью  $w(\tau)$  измерительного тока и принимая  $\varepsilon_c \approx \varepsilon_n$ , после перехода от изображений к оригиналам находим приближенное уравнение динамики

$$\varepsilon_n \frac{dt_n(\tau)}{d\tau} + t_n(\tau) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda} t_k(\tau) + \left(1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda}\right) t_c(\tau), \quad (7-29)$$

связывающее температуру измерителя  $t_n(\tau)$  с температурой камеры  $t_k(\tau)$  и температурой среды  $t_c(\tau)$  или смежного элемента 5 (рис. 7-5).

Уравнение (7-29) аналогично по структуре выражению (7-10), выведенному ранее для проволочного чувствительного элемента.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬНЫЕ И ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕРМОСТАТЫ

#### 8-1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Термостаты, температура в рабочей зоне которых поддерживается на заданном уровне путем автоматической регулировки мощности электронагревателей, часто называют электронагревательными термостатами. Их конструктивное оформление и назначение весьма разнообразно, что затрудняет разработку унифицированных методик расчета параметров и эксплуатационных характеристик термостата.

Для исследования режимов работы системы термостатирования формулируются уравнения динамики всех ее элементов (объект, корпус термостата, измеритель температуры, регулятор и пр.) с учетом их конструктивных и физических особенностей.

Уравнения динамики объекта и термостата, модель которого представлена на рис. 2-1, получены в гл. 2 [см. уравнения (2-6), (2-7), (2-18), (2-19) или (2-26) и (2-27)].

Вывод уравнений динамики для объектов с неравномерным полем температуры, размещаемых внутри одно- или многослойного термостата, проводится на основе рекомендаций, данных в гл. 6. В частности, для модели термостата (см. рис. 6-13) выражения, определяющие температуру поверхности объекта и корпуса, имеют вид (6-91), (6-92).

Уравнения теплообмена чувствительного элемента ИПТ (измерительный преобразователь температуры) для характерных случаев его размещения приведены в гл. 7. Более подробные сведения о динамике измерительных преобразователей температуры приведены в специальной литературе [56, 66].

Уравнения динамики регуляторов приводятся с учетом закона регулирования и конструктивных особенностей регуляторов в справочной литературе по автоматическому регулированию [6].

Естественно, что из-за особенностей объекта и ограничений в выборе средств его тепловой защиты часто требуется индивидуальный подход при формулировке уравнений динамики или обоснование использования типовых динамических моделей отдельных элементов системы термостатирования.

Как только система уравнений динамики определена, можно приступить к анализу основных задач теплового расчета термостатов. Перечень и предлагаемая последовательность их решения представлены в § 1-5.

**Простейшая модель термостата.** Проведем конкретный вывод уравнений динамики для простейшей модели термостата (см. рис. 2-1). Для упрощения примем начальную температуру объекта и всех элементов термостата равной температуре среды  $t_c$ , которая неизменна во времени. Объект пассивный, т. е.  $W_{об} = 0$ . Проточный теплосъем отсутствует, следовательно  $\alpha_{пр} = 0$  и  $\eta_{пр} = 0$ . При сделанных ограничениях уравнения (2-26) и (2-27) упрощаются. Для дальнейшего анализа их удобнее записать в отклонениях действительных температур  $t_{об}(\tau)$ ,  $t_k(\tau)$  и  $t_c$  от заданной температуры стабилизации объекта  $t_{стаб}$ , на которую настраивается чувствительный элемент регулятора температуры:

$$\vartheta_{об}(\tau) = t_{стаб} - t_{об}(\tau); \quad \vartheta_k(\tau) = t_{стаб} - t_k(\tau); \quad (8-1)$$
$$\vartheta_c = t_{стаб} - t_c.$$

С учетом (8-1) и принятых ограничений преобразуем (2-26) и (2-27)

$$D\vartheta_{об}(\tau) = (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) \vartheta_c - \eta_{об.к} \Lambda_k^{-1} W_k(\tau); \quad (8-2)$$

$$D\vartheta_k(\tau) = (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) \vartheta_c - \frac{1}{\Lambda_k} \left[ \varepsilon_{об} \frac{dW_k(\tau)}{d\tau} + W_k(\tau) \right], \quad (8-3)$$

где для краткости записи символом  $D$  обозначен оператор

$$D = \varepsilon_{об} \varepsilon_k \frac{d^2}{d\tau^2} + (\varepsilon_{об} + \varepsilon_k) \frac{d}{d\tau} + (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}). \quad (8-4)$$

Уравнение динамики чувствительного элемента, смонтированного в корпус термостата, выберем в виде (7-10), которое в отклонениях с учетом (8-1) и равенства

$$\vartheta_n(\tau) = t_{стаб} - t_n(\tau) \quad (8-5)$$

запишется так:

$$\varepsilon_n \frac{d\vartheta_n(\tau)}{d\tau} + \vartheta_n(\tau) = (1 - \eta_n) \vartheta_k(\tau) + \eta_n \vartheta_c. \quad (8-6)$$

Изменение электрической мощности  $W_k(\tau)$  нагревателя камеры термостата определяется отклонением температуры  $t_n(\tau)$  измерителя от заданной температуры стабилизации  $t_{стаб}$ , т. е. от величины рассогласования  $\vartheta_n(\tau)$ . Функциональная связь

$$W_k(\tau) = f_p[\vartheta_n(\tau)] \quad (8-7)$$

определяет динамику работы регулятора температуры.

Дифференциальное уравнение взаимосвязи непосредственно между  $\vartheta_n(\tau)$  и  $W_k(\tau)$  находится на основе выражений (8-3) и (8-6). После необходимых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{об} \varepsilon_k \varepsilon_n \frac{d^3 \vartheta_n}{d\tau^3} + (\varepsilon_{об} \varepsilon_k + \varepsilon_{об} \varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_k) \frac{d^2 \vartheta_n}{d\tau^2} + \\ + [\varepsilon_{об} + \varepsilon_k + \varepsilon_n (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к})] \frac{d\vartheta_n}{d\tau} + (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) \vartheta_n = \\ = (1 - \eta_{об.к} \kappa_{об.к}) \vartheta_c - \frac{1 - \eta_n}{\Lambda_k} \left[ \varepsilon_{об} \frac{dW_k(\tau)}{d\tau} + W_k(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (8-8)$$

Уравнение (8-8) с учетом (8-7) является уравнением замкнутой системы термостатирования объекта, сформулированным для температуры чувствительного элемента  $\vartheta_n(\tau)$ .

Выражения (8-8), (8-2), (8-3) и (8-7) образуют полную систему уравнений динамики нагревательного термостата, схема устройства которого показана на рис. 2-1.

**Модель термостата.** Уравнения динамики для модели термостата (см. рис. 6-13) находятся аналогичным образом. Принимая ограничения, использованные для простейшей модели (пассивный объект, постоянство температуры среды и начальное тепловое равновесие с нею), из уравнений (6-91), (6-92) после преобразований находим следующие дифференциальные уравнения для избыточных температур поверхности объекта  $\vartheta_{об}(1, \tau)$  и камеры  $\vartheta_k(\tau)$ :

$$\Delta \vartheta_{об}(1, \tau) = \vartheta_c - \frac{1}{\Lambda_{к.с}} \Delta_{об} W_k(\tau); \quad (8-9)$$

$$\Delta \vartheta_k(\tau) = \vartheta_c - \frac{1}{\Lambda_{к.с}} \Delta_k W_k(\tau), \quad (8-10)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{об}(1, \tau) &= t_{стаб} - t_{об}(1, \tau); \\ \vartheta_k(\tau) &= t_{стаб} - t_k(\tau); \quad \vartheta_c = t_{стаб} - t_c. \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

Символами  $\Delta$ ,  $\Delta_{об}$  в соответствии с (6-104), (6-105) обозначены дифференциальные операторы

$$\Delta = A_3 \frac{d^3}{d\tau^3} + A_2 \frac{d^2}{d\tau^2} + A_1 \frac{d}{d\tau} + 1; \quad (8-12)$$

$$\Delta_{об} = B_2 \frac{d^2}{d\tau^2} + B_1 \frac{d}{d\tau} + 1, \quad (8-13)$$

коэффициенты  $A$  и  $B$  которых находятся согласно (6-104) и (6-105);

$$\Delta_k = \varepsilon_{из} \left( \varepsilon_{об} + \frac{C_{об}}{\Lambda_b} \right) \frac{d^2}{d\tau^2} + \left( \varepsilon_{из} + \varepsilon_{об} + \frac{C_{об}}{\Lambda_b} \right) \frac{d}{d\tau} + 1. \quad (8-14)$$

Входящая в (8-9) и (8-10) величина

$$W_k(\tau) = V_k \omega(\tau) \quad (8-15)$$

определяет полную мощность нагревателя, размещаемого в камере термостата.

Принимая уравнение для ИПТ в виде (8-6), последовательно дифференцируя и подставляя его в (8-10), получаем уравнение замкнутой системы термостата (см. рис. 6-13), преобразованное относительно избыточной температуры  $\vartheta_n(\tau)$  измерительного преобразователя:

$$\begin{aligned} A_3 \varepsilon_{из} \frac{d^4 \vartheta_n}{d\tau^4} + (A_3 + A_2 \varepsilon_{из}) \frac{d^3 \vartheta_n}{d\tau^3} + (A_2 + A_1 \varepsilon_{из}) \frac{d^2 \vartheta_n}{d\tau^2} + \\ + (A_1 + \varepsilon_{из}) \frac{d\vartheta_n}{d\tau} + \vartheta_n = \vartheta_c - (1 - \eta_n) \frac{1}{\Lambda_{к.с}} \Delta_k W_k(\tau). \end{aligned} \quad (8-16)$$

Исследование динамики всех элементов модели (рис. 6-13) проводится в результате анализа системы уравнений (8-16), (8-9), (8-10) и (8-7).

## 8-2. СХЕМА РАСЧЕТА ТЕРМОСТАТА С РЕГУЛЯТОРАМИ РЕЛЕЙНОГО ТИПА

В термостатах, предназначенных для небольших объектов, широкое применение получили позиционные (релейные) регуляторы, позволяющие осуществлять стабилизацию температуры достаточно простыми средствами. Развитие полупроводниковой техники привело к созданию компактных, имеющих высокую чувствительность, двух- и трехпозиционных регуляторов, применяемых в различных конструкциях термостатов [34, 44, 49].

Типовые характеристики безынерционных релейных регуляторов температуры приведены на рис. 8-1, где в соответствии с уравнением (8-7) показано изменение мощности  $\Delta W$  регулятора в зависимости от температуры  $\vartheta_n$  измерителя. Значения  $\vartheta_3$ ,  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  определяют петлевые характеристики позиционных регуляторов, входная мощность которых скачкообразно изменяется от  $W_p$  до  $-W_p$  (рис. 8-1, а, б) или принимает значения  $W_p$ , 0,  $-W_p$  (рис. 8-1, в, г).

На рис. 8-2 показана схема термостабилизации модели термостата (см. рис. 6-13). Для термостата (см. рис. 2-1) воздействие  $t_c$  дополнительно будет приложено и к объекту, что отражает существование тепловой связи между объектом и средой.

На практике регулятор управляет не всей подаваемой на нагреватель мощностью  $W_k(\tau)$ , а только некоторой ее частью  $W_{упр}$ . По этой причине уравнение (8-7) переписывается в виде

$$W_k(\tau) = W_{ном} + W_{упр}[\vartheta_n(\tau)]. \quad (8-17)$$

Первое слагаемое (8-17) — это номинальное постоянное значение мощности нагревателя, выбираемое с учетом возможного диапазона изменения температуры среды  $t_c$ . Второе слагаемое  $W_{упр}[\vartheta_n(\tau)]$  определяется характеристикой выбранного релейного регулятора (рис. 8-1).

Из (9-17) следует, что максимальная мощность нагревателя  $W_{max} = W_{ном} + W_p$ , а минимальное значение мощности  $W_{min} = W_{ном} - W_p$ .

Отсюда следует, что  $W_p \leq W_{\text{ном}}$ . С учетом сказанного справедливы соотношения

$$W_{\text{ном}} = \frac{(W_{\text{max}} + W_{\text{min}})}{2}; \quad W_p = \frac{(W_{\text{max}} - W_{\text{min}})}{2}. \quad (8-18)$$

Мощность  $W_{\text{min}}$  выбирается такой, чтобы при максимально возможном значении температуры среды  $t_{c \text{ max}}$  температура корпуса  $t_k$  не превышала заданного значения  $t_{\text{стаб}}$ .

При отключенном регуляторе стационарные и переходные процессы в элементах системы термостабилизации рассчитываются по рекомендациям, изложенным в гл. 2 и 6. Анализ температурного поля термостата и объекта в активной системе термостабилизации (регулятор включен) должен прово-

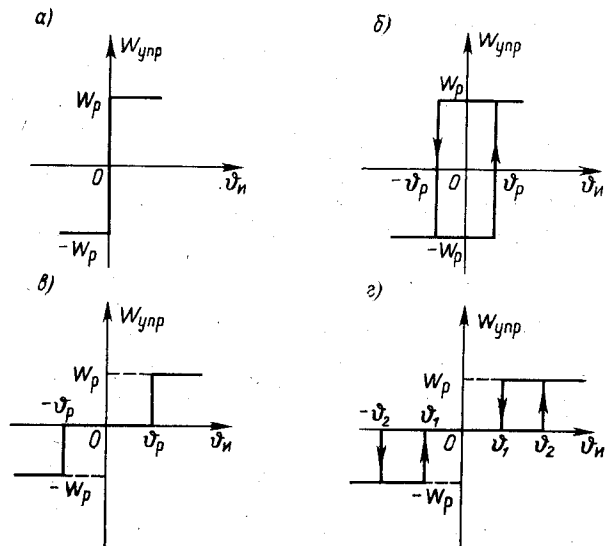


Рис. 8-1. Характеристики релейных регуляторов: а — идеальный двухпозиционный; б — то же, с гистерезисной петлей; в — идеальный трехпозиционный; г — то же, с гистерезисными петлями

дятся методами, разработанными в теории автоматического управления [6].

Наибольший практический интерес представляют две задачи:

- 1) исследование начального периода работы системы термостабилизации (пусковой режим работы термостата);
- 2) исследование квазистационарного режима системы, поскольку при использовании регуляторов релейного типа в системе могут возникнуть автоколебательные процессы, что является отличительной особенностью нелинейных систем автоматического регулирования.

Для нелинейных систем с релейными элементами может быть использован метод «припасовывания», заключающийся в поэтапном интегрировании уравнений динамики на каждом из участков между переключениями регулятора [6]. При порядке уравнений выше второго эффективными будут являться лишь машинные методы решения, позволяющие в совокупности дать решения обеих задач.

Результаты применения этого метода с помощью ЭВМ для расчета переходного и периодического процесса в системе термостатирования третьего порядка изложены в работе [48].

**Пусковой режим.** Изучение пускового периода необходимо для того, чтобы минимизировать длительность выхода системы термостабилизации на установившийся режим работы. Для относительно простых систем термостатирования (не выше третьего порядка) переходные процессы в термостатах и задачи их оптимизации исследовались в работах [15, 18, 39].

**Автоколебательный режим.** Изучение автоколебательных режимов позволяет оценить динамическую ошибку термостатирования, т. е. отклонение температуры объекта от заданной температуры стабилизации, обусловленное

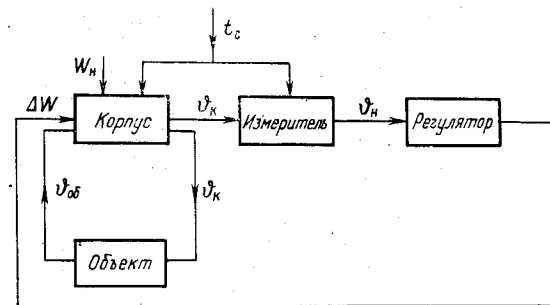


Рис. 8-2. Схема термостабилизации

нелинейностью выбранной системы регулирования. Характеристика точных и приближенных методов исследования автоколебательных режимов дана в [6]. Для систем регулирования второго порядка эффективным является метод фазовой плоскости. Широкое распространение для приближенной

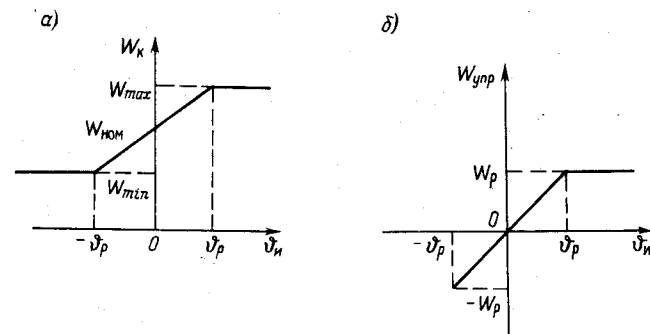


Рис. 8-3. Характеристики релейных регуляторов

оценки автоколебаний получил метод гармонической линеаризации уравнений, сущность которого состоит в замене нелинейной характеристики релейных звеньев (рис. 8-1) приближенными линеаризованными выражениями.

Следуя схеме, изложенной в руководстве [6], будем искать решение уравнений (8-8) или (8-16) в виде

$$\vartheta_n(\tau) = \vartheta_n^0 + \vartheta_n^*(\tau); \quad \vartheta_n^*(\tau) = a_n \sin \omega \tau, \quad (8-19)$$

где  $\vartheta_n^0$  — смещение уровня колебаний из-за неоднородности уравнений (8-8);  $\vartheta_n^*(\tau)$  — гармоническая составляющая автоколебательного режима, характеризующаяся амплитудой автоколебаний  $a_n$  и частотой  $\omega$ .

Нелинейное звено  $W_{упр} [\vartheta_n(\tau)]$  выражения (8-17) представляется в форме

$$W_{упр} [\vartheta_n(\tau)] \approx F^0 + q_n \vartheta_n^*(\tau) \frac{q_l}{\omega} \frac{d\vartheta_n^*(\tau)}{d\tau}, \quad (8-20)$$

где  $F^0$ ,  $q_n$  и  $q_l$  — коэффициенты гармонической линеаризации, каждый из которых зависит от трех неизвестных величин  $\vartheta_n^0$ ,  $a_n$  и  $\omega$ . Структура коэффициентов  $F^0$ ,  $q_n$  и  $q_l$  определяется видом релейной характеристики.

Подробное изложение метода гармонической линеаризации, его ограничения и примеры применения приведены в работе [6]. Расчет динамической ошибки термостата с двухпозиционным регулятором дан в [19].

В практике термостатирования возможно применение релейных регуляторов, характеристики которых (8-7) и (8-17) имеют вид, показанный на рис. 8-3. Входящие в выражение (8-20) коэффициенты их гармонической линеаризации находятся по формулам, приведенным в работе [6]:

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{W_p}{\pi \vartheta_p} \left[ a_n \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\vartheta_p + \vartheta_n^0}{a_n} \right)^2} - \sqrt{1 - \left( \frac{\vartheta_p - \vartheta_n^0}{a_n} \right)^2} \right) + (\vartheta_p + \vartheta_n^0) \arcsin \frac{\vartheta_p + \vartheta_n^0}{a_n} - \right. \\ &\quad \left. - (\vartheta_p - \vartheta_n^0) \arcsin \frac{\vartheta_p - \vartheta_n^0}{a_n} \right]; \quad q_l = 0; \\ q_n &= \frac{W_p}{\pi \vartheta_p} \left[ \arcsin \frac{\vartheta_p - \vartheta_n^0}{a_n} + \arcsin \frac{\vartheta_p + \vartheta_n^0}{a_n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vartheta_p - \vartheta_n^0}{a_n} \sqrt{1 - \left( \frac{\vartheta_p - \vartheta_n^0}{a_n} \right)^2} + \frac{\vartheta_p + \vartheta_n^0}{a_n} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{1 - \left( \frac{\vartheta_p + \vartheta_n^0}{a_n} \right)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

Эти формулы справедливы при выполнении условия  $a_n > \vartheta_p + |\vartheta_n^0|$ .

При  $a_n < \vartheta_p + |\vartheta_n^0|$

$$F^0 = 0; \quad q_n = \frac{W_p}{\vartheta_p} = \text{const}; \quad q_l = 0. \quad (8-22)$$

Это означает, что изменение мощности регулятора при его работе не выходит за уровни насыщения ( $-W_p < W_{упр} < W_p$ ), его характеристика (8-17) имеет строго линейный вид

$$W_k(\tau) = W_{ном} + W_p \vartheta_n(\tau) / \vartheta_p \quad (8-23)$$

и автоколебательных режимов в системе термостатирования не возникает.

Исследование динамики термостатов, снабженных пропорциональными регуляторами с характеристиками (8-23), выполняется на основе хорошо разработанных методов линейной теории автоматического регулирования.

### 8-3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТЕПЛОВОГО РАСЧЕТА ТЕРМОСТАТОВ

Расчет теплового режима термостата состоит из нескольких этапов. Последовательность теплового расчета термостата рассмотрим на модели активного термостата, которая представлена на рис. 2-1.

1. На основании исходных данных уточняются геометрические и теплофизические параметры объекта термостатирования: объем  $V_1$ , наружная поверхность  $S_{12}$ , ортогональные линейные размеры  $2L_1$ ,  $2L_2$ ,  $2L_3$ , эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda_1$ , средняя удельная теплоемкость  $C_1$  и средняя плотность  $\gamma_1$ .

2. Определяются геометрические и теплофизические параметры каждой из оболочек: внутренняя  $S_{j1}$  и наружная  $S_{j2}$  поверхности; объемы  $V_{j1}$  и  $V_{j2}$ , ограниченные соответственно поверхностями  $S_{j1}$  и  $S_{j2}$ ; объем оболочки  $V_j = V_{j2} - V_{j1}$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda_j$ , удельная теплоемкость  $c_j$ , плотность  $\gamma_j$ .

Величина  $\lambda_j$  для газообразных и жидких прослоек должна учитывать эффект конвекции и излучения [21, 42]. При расчете эффективного коэффициента теплопроводности  $\lambda_{j\text{эф}}$  необходимо предварительно найти эффективную толщину  $j$ -й прослойки

$$\delta_{j\text{эф}} = \frac{V_{j2}}{S_{j2}} (n_j + 1) \left( 1 - \frac{S_{j2}}{S_{j1}} \frac{V_{j2}}{V_{j1}} \right),$$

где

$$n_j = \frac{\lg \frac{S_{j2}}{S_{j1}}}{\lg \left( \frac{V_{j2}}{V_{j1}} \frac{S_{j2}}{S_{j1}} \right)}$$

Температуры стенок, ограничивающих  $j$ -ю прослойку, в первом приближении следует выбрать ориентировочно, а затем при последующем тепловом расчете термостата уточнить их и при необходимости повторить расчет методом последовательных приближений.

3. Определяются геометрические и теплофизические параметры тепловых связей: площадь поперечного сечения  $F_i$ , длина  $\delta_i$ , эквивалентный радиус  $r_i = \sqrt{F_i/\pi}$ , теплопроводность  $\lambda_i$ .

4. Находятся определяющие размеры  $L$  элементов термостата по формулам, приведенным в § 2-2 и 3-2. В частности, для объекта термостатирования  $L = 0,254 \sqrt{S_{12}}$  и для  $j$ -й оболочки  $L_j = 2V_j / (S_{j1} + S_{j2})$ .

5. Определяются геометрические характеристики элементов по формулам § 3-2:  $\varphi_1 = L_1 S_{12} / V_1$ ;  $f_1 = 0,3 (1 + \varphi_1/3)$ ;  $\varphi_{j1} = L_j S_{j1} / V_j$ ;  $\varphi_{j2} = L_j S_{j2} / V_j$ ;  $\eta_j = S_{j1} / (S_{j1} + S_{j2})$ ;  $f_{j1} = 0,5 [1 - (\varphi_{j1} - \varphi_{j2})/6]$ ;  $f_{j2} = 0,3 (1 - 2\varphi_{j1}/9 + \varphi_{j2}/3)$ .

6. Выявляются все тепловые воздействия, которым подвержена рассматриваемая система (источник внутреннего тепловыделения в объекте  $W_1$ , нагреватель мощностью  $W_n$ , температура внешней среды  $t_c$ , источник энергии  $q_c$ , распределенный по наружной поверхности термостата и др.).

7. Рассчитывается тепловая проводимость объект—среда

$$\Lambda_{об.с} = \frac{1}{R_{об.с}} = \left( \frac{1}{\Lambda_{в}} + \frac{1}{\Lambda_{из}} + \frac{1}{\Lambda_{с}} \right)^{-1},$$

где  $\Lambda_{в}$ ,  $\Lambda_{из}$ ,  $\Lambda_{с}$  соответственно являются полными тепловыми проводимостями воздушной прослойки между объектом и камерой, теплоизоляции и внешней среды. Последние находятся по формулам § 4-4 и 5-3:

$$\Lambda_{в} = \frac{2\lambda_{в}S_{12}S_{из1}}{L_{в}(S_{12} + S_{из1})};$$

$$\Lambda_{из} = \frac{2\lambda_{из}S_{из1}S_{из2}}{L_{из}(S_{из1} + S_{из2})}; \quad \Lambda_{с} = \alpha_{с}S_{из2}.$$

В последней формуле коэффициент теплообмена  $\alpha_{с}$  наружной поверхности термостата с окружающей средой вначале выбирается ориентировочно. При последующих расчетах, определив температуру наружной поверхности термостата, следует уточнить выбранное значение  $\alpha_{с}$  и при необходимости повторить расчет методом последовательных приближений для нового значения  $\alpha_{с}$ .

Проводимость объекта (см. § 5-3)

$$\Lambda_1 = 2\lambda_1 S_{12} / L_1.$$

8. Определяется по формулам (6-112) или (2-39) минимальная мощность нагревателя, которая обеспечит требуемый уровень стабилизации температуры в стационарном режиме при заданных тепловых воздействиях  $t_{с.ст}$ ,  $q_{с.ст}$ ,  $\omega_{1ст}$ .

Вид расчетной формулы зависит от того, температура какого элемента термостата должна быть стабилизирована.

Если в качестве температуры стабилизации  $t_{стаб}$  задана температура поверхности объекта  $t_{1S}$ , т. е.  $t_{стаб} = t_{1S}$ , то полная мощность нагревателя камеры равна

$$W_{н.полн} = \omega_{н.ст} V_{к} = \Lambda_{из} [t_{стаб} - t_{с.ст} - \alpha_{с}^{-1} q_{с.ст} - (1 - \Lambda_{из} \Lambda_{в}^{-1}) V_1 \Lambda_{из}^{-1} \omega_{1ст}].$$

Если в качестве температуры стабилизации задана температура  $t_{1ц}$  в центре объекта, т. е.  $t_{стаб} = t_{1ц}$ , то

$$W_{н.полн} = \Lambda_{из} [t_{стаб} - t_{с.ст} - \alpha_{с}^{-1} q_{с.ст} - (\Lambda_{из}^{-1} + \Lambda_{в}^{-1} + \Lambda_1^{-1}) V_1 \omega_{1ст}].$$

Если термостат должен поддерживать на заданном уровне  $t_{стаб}$  температуру камеры  $t_{к}$ , то

$$W_{н.полн} = \Lambda_{из} [t_{стаб} - t_{с.ст} - \alpha_{с}^{-1} q_{с.ст} - \Lambda_{из}^{-1} V_1 \omega_{1ст}].$$

При этом температура поверхности объекта будет выше температуры стабилизации (температуры камеры), причем

$$\Delta t_{об.к} = t_{1S} - t_{к} = V_1 \Lambda_{в}^{-1} \omega_{1ст}.$$

Температура в центре объекта находится по формуле

$$t_{1ц} = t_{1S} + V_1 \Lambda_{в}^{-1} \omega_{1ст}.$$

При конструировании термостата обычно предусматривают увеличение мощности нагревателя в полтора-два раза по сравнению с расчетной для возможности форсированного управления системой термостатирования.

9. Рассчитываются среднеповерхностные температуры элементов термостата в стационарном режиме по формулам (6-109) — (6-111) или (2-28) — (2-30):

для поверхности объекта

$$t_{1S ст} = \left( 1 + \frac{\Lambda_{из}}{\Lambda_{в}} \right) \frac{V_1}{\Lambda_{из}} \omega_{1ст} + \frac{V_{к}}{\Lambda_{из}} \omega_{н.ст} + t_{с.ст} + \frac{1}{\alpha_{с}} q_{с.ст};$$

для камеры

$$t_{к.ст} = \frac{V_1}{\Lambda_{из}} \omega_{1ст} + \frac{V_{к}}{\Lambda_{из}} \omega_{н.ст} + t_{с.ст} + \frac{1}{\alpha_{с}} q_{с.ст};$$

для наружной поверхности термостата

$$t_{из S 2 ст} = \frac{V_1}{\Lambda_{с}} \omega_{1ст} + \frac{V_{к}}{\Lambda_{с}} \omega_{н.ст} + \frac{1}{\alpha_{с}} q_{с.ст} + t_{с.ст}.$$

10. Оценивается влияние тепловых связей на распределение температур в элементах термостата для стационарного режима:

а) рассчитывается проводимость тепловых связей  $\Lambda_{св}$  по формулам (6-13) или (6-15);

б) определяется тепловой поток связи  $Q_{св.полн}$  при учете теплоотдачи с боковой поверхности по формулам, приведенным в § 6-1 или в работе [66] и при отсутствии теплоотдачи по формуле (6-14)

$$Q_{св.полн} = \Lambda_{св} [t_{св}(0) - t],$$

где  $t$  — температура внешней среды или поверхности элементов термостата, с которыми осуществляется тепловая связь;  $t_{св}$  — температура тепловой связи на границе раздела с элементом термостата;

в) находятся искажения температурных полей элементов от каждой тепловой связи в соответствии с выбранной тепловой моделью элемент термостата — тепловая связь (см. § 6-1);

г) по методу суперпозиции определяется результирующее искажающее влияние тепловых связей на температурные поля элементов.

Если влияние тепловых связей на распределение температур в элементах термостата приводит к тому, что в термостатируемом элементе (объекте или камере) неравномерность превышает допустимое отклонение от температуры стабилизации, то необходимо внести изменения в конструкцию термостата (например, увеличить термическое сопротивление тепловых связей за счет изменения их конструкции и материала; уменьшить перепад температур по связям введением различных тепловых компенсаторов; при наличии



нескольких связей разнести их за пределы искажающего действия каждой связи и т. п.) и повторить расчет.

11. Оценивается отклонение среднеповерхностной температуры объекта из-за наличия тепловых связей с камерой и окружающей средой в стационарном режиме:

а) рассчитывается среднеповерхностная температура объекта при наличии тепловых связей по формуле

$$t_{1S} = \frac{1}{\Lambda_{\text{полн}}} w_1 V_1 + kt_k + tt_c;$$

$$\Lambda_{\text{полн}} = \Lambda_B + \Lambda_{1K} + \Lambda_{1C};$$

$$k = \frac{(\Lambda_B + \Lambda_{1K})}{\Lambda_{\text{полн}}}; \quad l = \frac{\Lambda_{1C}}{\Lambda_{\text{полн}}},$$

где  $\Lambda_{1K} = 1/R_{1K}$ ,  $\Lambda_{1C} = 1/R_{1C}$  — тепловые проводимости связей объекта с камерой и окружающей средой соответственно;  $t_k$  — температура камеры, вычисленная без учета влияния тепловых связей;

б) сравниваются результаты расчета температуры  $t_{1S}$  с учетом влияния тепловых связей и без учета и определяется отклонение  $\Delta t_{1S}$ .

Если отклонение среднеповерхностной температуры объекта из-за наличия тепловых связей объекта с камерой и окружающей средой превышает допустимое отклонение от температуры стабилизации, то необходимо уменьшить его, например, за счет изменения конструкции и материала тепловых связей.

12. При необходимости оценить динамику теплообмена тепловых связей по соотношениям § 6-1, рассчитывается показатель тепловой инерции связи по формуле (6-5).

13. Оценивается неравномерность нагрева камеры термостата в зависимости от выбора расчетной модели (формы камеры и схемы расположения нагревателей) по соотношениям, данным в § 6-2, 6-3.

14. Проводится анализ нестационарного теплового режима термостата:

а) для этого нужно сформулировать нестационарные уравнения теплообмена элементов термостата и объекта (см. § 6-4), а также уравнение динамики регулятора температуры (гл. 7, § 8-1 — 8-3) для конкретной САРТ.

Решение системы динамических уравнений определяет все важнейшие нестационарные характеристики и режим работы термостата;

б) исследуется пусковой режим, определяется длительность переходного процесса;

в) рассматривается автоколебательный режим, оценивается динамическая ошибка термостатирования. Выбор характеристик регулятора и элементов термостата должен быть таким, чтобы амплитуда и частота автоколебаний в зоне объекта не превышали допустимых значений.

Пример расчета термостата для кварцевого резонатора.

Конструктивная схема термостата представлена на рис. 8-4, а его тепловая модель — на рис. 8-5. Число элементов термостата  $k = 5$ , число тепловых связей  $n = 1$ . Тепловые воздействия — окружающая среда и нагреватель (объект теплоты не выделяет).

1. Геометрические и теплофизические параметры макета объекта термостатирования, выполненного из стали (Ст. 10), равны  $V_1 = 5,75 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ,

$$S_{1,2} = 8,53 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, 2L_1 = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, 2L_2 = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, 2L_3 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\lambda_1 = 58,6 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, c_1 = 0,48 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \gamma_1 = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

2. Геометрические и теплофизические параметры оболочек (см. рис. 8-5):

для воздушной прослойки 2

$$S_{2,1} = 8,53 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, S_{2,2} = 20,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, V_{2,1} = 5,75 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_{2,2} = 18,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_2 = 13,2 \times 10^{-5} \text{ м}^3;$$

для камеры 3 из алюминиевого сплава Д1

$$S_{3,1} = 20,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, S_{3,2} = 28,4 \times 10^{-3} \text{ м}^2, V_{3,1} = 18,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_{3,2} =$$

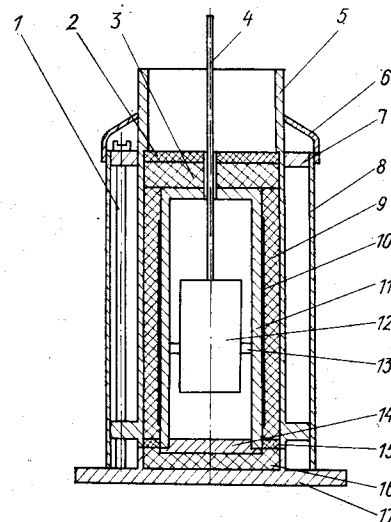


Рис. 8-4. Цилиндрический термостат

1 — стойка; 2 — плата; 3 — теплоизоляция; 4 — провод (тепловая связь со средой); 5 — корпус; 6 — крышка; 7 — кольцо; 8 — кожух; 9 — теплоизоляция; 10 — нагреватель; 11 — камера; 12 — объект; 13 — кольцо; 14 — дно камеры; 15 — резиновое кольцо; 16 — теплоизоляционная прокладка; 17 — основание

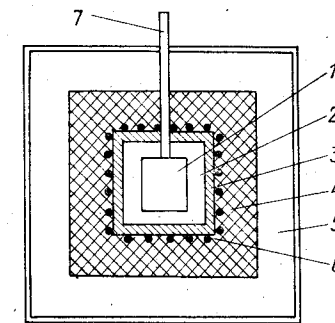


Рис. 8-5. Тепловая модель термостата

1 — объект термостатирования; 2 — воздушная прослойка; 3 — камера; 4 — теплоизоляция; 5 — воздушная прослойка; 6 — нагреватель; 7 — провод (тепловая связь)

$$= 32,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_3 = 13,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, \delta_{\text{торц}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \delta_{\text{бок}} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, 2h_3 = 140 \cdot 10^{-3} \text{ м}, R_3 = 27 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \lambda_3 = 180 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, c_3 = 880 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \gamma_3 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

для теплоизоляции 4 из пенопласта ФК-20

$$S_{4,1} = 28,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, S_{4,2} = 46,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, V_{4,1} = 32,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_{4,2} = 71,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_4 = 39,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, \lambda_4 = 0,06 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, c_4 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \gamma_4 = 0,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

для воздушной прослойки 5

$$S_{5,1} = 46,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, S_{5,2} = 77,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, V_{5,1} = 71,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_{5,2} = 162 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, V_5 = 90,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

В воздушных прослойках 2 и 5 необходимо учесть конвекцию и излучение. По формулам п. 2 § 7-3 находятся значения  $\delta_{2 \text{эф}}$  и  $\delta_{5 \text{эф}}$ :

$$V_{2,2}/V_{2,1} = 3,28, S_{2,2}/S_{2,1} = 2,39, n_2 = 2,74, \delta_{2 \text{эф}} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, V_{5,2}/V_{5,1} = 2,27, S_{5,2}/S_{5,1} = 1,66, n_5 = 1,62, \delta_{5 \text{эф}} = 14,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Для расчета  $\lambda_{2 \text{эф}}$  и  $\lambda_{5 \text{эф}}$  используются экспериментальные данные по определению температур элементов термостата или выбираются значения

этих температур ориентировочно. Пусть в рассматриваемом случае при  $t_c = 20^\circ\text{C}$  принято  $t_{12} = t_{21} = t_{\text{стаб}} = 70^\circ\text{C}$ ,  $t_{51} = 50^\circ\text{C}$ ,  $t_{52} = 30^\circ\text{C}$ . Тогда в результате вычислений по формулам, приведенным в работах [21, 42], получаем

$$\varepsilon_{2\text{к}} = 1, \lambda_{23\text{ф}} = \lambda_2 = 2,97 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \gamma_2 = 1,03 \text{ кг/м}^3, \chi_2 = 1000 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, \varepsilon_{5\text{к}} = 1,4, \lambda_{5\text{к}} = \varepsilon_{5\text{к}} \cdot \lambda_5 = 1,4 \cdot 2,76 \cdot 10^{-2} = 3,86 \times 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \alpha_{\text{пл}} = 4,67 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}, \lambda_{53\text{ф}} = \lambda_{53\text{к}} = \alpha_{\text{пл}} \delta_{53\text{ф}} = 3,86 \cdot 10^{-2} + 4,67 \cdot 1,42 \cdot 10^{-2} = 10,5 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \gamma_5 = 1,13 \text{ кг/м}^3, c_5 = 1000 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}.$$

3. Геометрические и теплофизические параметры тепловой связи:  
 $S_{\text{св}} = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, L_{\text{св}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, r_{\text{св}} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \lambda_{\text{св}} = 180 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$   
 (сплав Д1).

4. Определяющие размеры элементов термостата:  
 $L_1 = 0,254 \cdot \sqrt{8,53 \cdot 10^{-3}} = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ м}, L_2 = 2 \cdot 13,2 \cdot 10^{-5} / (8,5 + 20,4) \cdot 10^{-3} = 0,91 \cdot 10^{-2} \text{ м}, L_3 = 2 \cdot 13,2 \cdot 10^{-5} / (20,4 + 28,4) \cdot 10^{-3} = 0,54 \times 10^{-2} \text{ м}, L_4 = 2 \cdot 39,2 \cdot 10^{-5} / (28,4 + 46,8) \cdot 10^{-3} = 1,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}, L_5 = 2 \times 90,7 \cdot 10^{-5} / (46,8 + 77,7) \cdot 10^{-3} = 1,46 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

5. Геометрические характеристики элементов (по формулам § 3-2):  
 $\Phi_1 = 0,347, f_1 = 0,335; \Phi_{21} = 0,588, \Phi_{22} = 1,41, \eta_2 = 0,294, f_{21} = 0,57, f_{22} = 0,40, \Phi_{31} = 0,834, \Phi_{32} = 1,16, \eta_3 = 0,418, f_{31} = 0,53, f_{32} = 0,36, \Phi_{41} = 0,753, \Phi_{42} = 1,24, \eta_4 = 0,378, f_{41} = 0,54, f_{42} = 0,38, \Phi_{51} = 0,753, \Phi_{52} = 1,25, \eta_5 = 0,376, f_{51} = 0,54, f_{52} = 0,37.$

6. Тепловые проводимости элементов термостата (см. п. 7 § 8-3):  
 $\Lambda_2 = 2\lambda_{23\text{ф}}S_{21}S_{22}/L_2 (S_{21} + S_{22}) = 2 \cdot 2,97 \cdot 10^{-2} \cdot 8,53 \cdot 10^{-3} \cdot 20,4 \times 10^{-3} / 0,91 \cdot 10^{-2} (8,53 + 20,4) \cdot 10^{-3} = 0,39 \cdot 10^{-1} \text{ Вт/К}, \Lambda_4 = 2\lambda_4S_{41}S_{42}/L_4 \times (S_{41} + S_{42}) = 2 \cdot 0,06 \cdot 28,4 \cdot 10^{-3} \cdot 46,8 \cdot 10^{-3} / 1,04 \cdot 10^{-2} (28,4 + 46,8) \cdot 10^{-3} = 0,20 \text{ Вт/К}, \Lambda_5 = 2\lambda_{53\text{ф}}S_{51}S_{52}/L_5 (S_{51} + S_{52}) = 2 \cdot 10,5 \cdot 10^{-2} \cdot 46,8 \cdot 10^{-3} \times 90,7 \cdot 10^{-3} / 1,46 \cdot 10^{-2} (46,8 + 77,7) \cdot 10^{-3} = 0,42 \text{ Вт/К}.$

Принимается ориентировочно  $\alpha_c = 10 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , тогда  $\Lambda_c = \alpha_c S_{52} = 10 \cdot 77,7 \cdot 10^{-3} = 0,777 \text{ Вт/К}, \Lambda_{1\text{с}} = (1/\Lambda_2 + 1/\Lambda_4 + 1/\Lambda_5 + 1/\Lambda_c)^{-1} = (0,039^{-1} + 0,2^{-1} + 0,42^{-1} + 0,78^{-1})^{-1} = 0,029 \text{ Вт/К}.$

Собственная проводимость объекта  
 $\Lambda_1 = 2\lambda_1S_{12}/L_1 = 2 \cdot 58,6 \cdot 8,53 \cdot 10^{-3} / 2,35 \cdot 10^{-2} = 42,6 \text{ Вт/К}.$

7. Минимальная мощность нагревателя (см. п. 8 § 8-3):  
 при  $t_{\text{стаб}} = t_{1\text{с}}$  имеем  $W_{\text{н.полн}} = \Lambda_{1\text{с}} (t_{\text{стаб}} - t_{\text{с.ст}})$ ;  
 при  $t_{\text{стаб}} = 70^\circ\text{C}, t_{\text{с.ст}} = 20^\circ\text{C} - W_{\text{н.полн}} = 0,029 \cdot (70 - 20) = 1,45 \text{ Вт};$

при  $t_{\text{стаб}} = 70^\circ\text{C}, t_{\text{с.ст}} = -60^\circ\text{C} - W_{\text{н.полн}} = 0,029 \cdot (70 + 60) = 3,77 \text{ Вт};$

при  $t_{\text{стаб}} = t_3 - W_{\text{н.полн}} = (1/\Lambda_4 + 1/\Lambda_5 + 1/\Lambda_c)^{-1} \times (t_{\text{стаб}} - t_{\text{с.ст}})$ ;  
 при  $t_{\text{стаб}} = 70^\circ\text{C}, t_{\text{с.ст}} = 20^\circ\text{C} - W_{\text{н.полн}} = (0,2^{-1} + 0,42^{-1} + 0,78^{-1})^{-1} \cdot (70 - 20) = 5,8 \text{ Вт};$

при  $t_{\text{стаб}} = 70^\circ\text{C}, t_{\text{с.ст}} = -60^\circ\text{C} - W_{\text{н.полн}} = (0,2^{-1} + 0,42^{-1} + 0,78^{-1})^{-1} \cdot (70 + 60) = 15,0 \text{ Вт}.$

8. Среднеповерхностные температуры элементов термостата в стационарном режиме при  $t_{\text{с.ст}} = 20^\circ\text{C}, t_{\text{стаб}} = t_3 = 70^\circ\text{C}$  (см. п. 9 § 8-3):

для поверхности объекта  $t_{1\text{сст}} = 70^\circ\text{C};$   
 для наружной поверхности теплоизоляции 4  
 $t_{4\text{сст}} = W_{\text{н.полн}} / (\Lambda_5 + \Lambda_c) + t_{\text{с.ст}} = 5,8 \cdot (0,42^{-1} + 0,78)^{-1} + 20 = 41,2^\circ\text{C};$

для наружной поверхности термостата  
 $t_{5\text{сст}} = W_{\text{н.полн}} / \Lambda_c + t_{\text{с.ст}} = 5,8 / 0,78 + 20 = 27,4^\circ\text{C}.$

Рассчитывается коэффициент теплообмена кожуха термостата [21, 42]  
 $\alpha_c = \alpha_k + \alpha_l = 4,3 + 5,38 = 9,65 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$

Следовательно, выбор первоначального значения  $\alpha_c = 10 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$  сделан достаточно точно и повторения расчета не требуется.

Аналогично оцениваются допущения, принятые в п. 2 при расчете  $\lambda_5 \text{ экв}.$

9. Оценивается локальное влияние тепловой связи объекта с окружающей средой на распределение температур в объекте при  $t_{\text{с.ст}} = 20^\circ\text{C}, t_{\text{стаб}} = t_3 = 70^\circ\text{C}.$  Тепловая связь моделируется стержнем, боковая поверхность которого теплоизолирована. Объект условно представляется как

полупространство с адиабатической изоляцией поверхности. Тепловая проводимость связи  $\Lambda_{\text{св}} = \lambda_{\text{св}}S_{\text{св}}/L_{\text{св}} = 180 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6} / 5 \cdot 10^{-2} = 1,12 \times 10^{-2} \text{ Вт/К}.$

Тепловой поток  $Q_{\text{св.полн}} = 1,12 \cdot 10^{-2} (70 - 20) = 0,56 \text{ Вт},$  искажение температурного поля в центре соприкосновения тепловой связи и объекта  $t_{\text{пл}}(0, 0) - t_0 = Q_{\text{св}} / \pi r_{\text{св}} \lambda_1 = 0,56 / 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 58,6 = 3,04 \text{ К}$  (см. § 7-1). Для объекта, выполненного из сплава Д1,  $\lambda_1 = 180 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, t_{\text{пл}}(0, 0) - t_0 = 0,99 \text{ К}.$

Пусть требуемая точность термостатирования  $\pm 1 \text{ К}.$  Для уменьшения искажающего влияния тепловой связи можно уменьшить радиус тепловой связи ( $r_{\text{св}} = 0,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}, S_{\text{св}} = 0,348 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ) и повторить расчет:  $\Lambda_{\text{св}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/К}, Q_{\text{св}} = 0,062 \text{ Вт}, t_{\text{пл}}(0, 0) - t_0 = 1,02 \text{ К}.$  Возникающая в этом случае неравномерность практически не превышает допустимого отклонения от температуры термостатирования.

10. Оценивается отклонение среднеповерхностной температуры объекта при  $t_c = 20^\circ\text{C}, r_{\text{св}} = 0,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  (см. п. 11 § 8-3).

а)  $\Lambda_{\text{полн}} = \Lambda_2 + \Lambda_{\text{св}} = 3,90 \cdot 10^{-2} + 0,12 \cdot 10^{-2} \approx 0,04 \text{ Вт/К}, k = \Lambda_2 / \Lambda_{\text{полн}} = 0,039 / 0,040 = 0,975, l = \Lambda_{\text{св}} / \Lambda_{\text{полн}} = 0,030, t_{1\text{с}} = 0,975 \times (70 + 273) + 0,030 \cdot (20 + 273) = 343,2 \text{ К} = 70,2 \text{ К};$

б)  $\Delta t_{1\text{с}} = 70 - 70,2 = -0,2^\circ\text{C}.$   
 Отклонение от температуры стабилизации не превышает допустимого значения.

Анализ нестационарного теплового режима для рассматриваемого термостата проводится в соответствии с указаниями § 8-3.

#### 8-4. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕРМОСТАТЫ

В термоэлектрических термостатах в качестве активного управляющего воздействия тепловыми режимами используются термоэлектрические явления Пельтье и Томсона, энергетический (тепловой) эффект которых наиболее сильно выражен в полупроводниковых материалах. Использование этих обратимых явлений для решения задач термостатирования оправдано следующими причинами:

а) возможностью стабилизации температуры объекта на различных значениях (уровнях) температуры за счет реверсивного управления потоком теплоты при изменении направления и силы электрического тока через полупроводниковые элементы;

б) возможностью поддержания температуры в рабочей зоне термостата ниже температуры окружающей среды, что не удается получить в электронагревательных термостатах.

Применяемые в качестве средств управления полупроводниковые элементы или батареи целесообразно называть термоэлектрическими тепловыми насосами, так как с их помощью можно нагревать или охлаждать объект в зависимости от направления тока и окружающих условий [31]. Существует обширная литература, подытоживающая опыт конструирования, расчета и использования термоэлектрических устройств для управления тепловыми режимами различных объектов, включая задачи их термостатирования [9, 24, 25, 31]. Однако детальный анализ динамических процессов в термоэлектрических термостатах в указанных работах не проводится, что, по-видимому, обусловлено разнообразием конструкций термостатов и сложностью математического описания работы их тепловых моделей совместно с регуляторами температуры. Теоре-

тические основы теплового расчета собственно термоэлектрических насосов подробно рассмотрены лишь в монографии [31].

**Модель термоэлектрического термостата.** Рассмотрим простую модель термоэлектрического термостата, схема устройства которого показана на рис. 8-6. Объект термостатирования 1 помещен в корпус термостата 2, окруженный с трех сторон

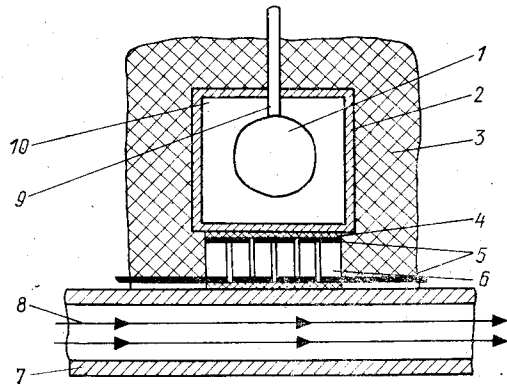


Рис. 8-6. Термоэлектрический термостат

1 — объект; 2 — корпус термостата; 3 — теплоизоляционная прослойка; 4 — электроизоляционная прослойка; 5 — коммутационные пластины; 6 — термоэлектрическая батарея (насос); 7 — трубопровод; 8 — теплоноситель; 9 — тепловая связь; 10 — внутренний объем термостата

прослойкой 3, ограничивающей термостат от внешней среды. Основание корпуса через электроизоляционную прокладку 4 объединяется с коммутационными пластинами 5 верхних («холодных») спаев термоэлектрического насоса 6. Нижние («горячие») спаи насоса через электроизоляционную прослойку 4 соединяются с трубопроводом 7, по которому проходит теплоноситель 8 (вода, воздух и пр.).

Объект имеет тепловую связь 9 с внешней средой.

При формулировке математической модели (уравнений теплообмена) термостата сделаем ряд допущений:

1) распределение температуры по корпусу термостата равномерное и характеризуется функцией  $T_k(\tau)$ , где  $T_k$  — абсолютная температура корпуса, К;  $\tau$  — время;

2) распределение температуры по объему объекта неравномерное, но в уравнение динамики теплообмена объекта входит лишь среднеповерхностная абсолютная температура объекта

$$T_{об}(\rho, \tau)|_{\rho=1} = T_{об}(\tau);$$

3) распределение температуры в каждой паре термоэлементов с  $p$  и  $n$  типами проводимости предполагаем одномерным (рис. 8-7), а их боковые поверхности — адиабатически изолированы;

4) влиянием теплоемкости коммутационных пластин и тепловыделением в них пренебрегаем.

Уравнение теплообмена объекта (см. гл. 2) имеет вид:

$$\omega_{об}(\tau)V_{об} = C_{об} \frac{dT_{об}(\tau)}{d\tau} + \Lambda_{об.к} [T_{об}(\tau) - T_k(\tau)] + \Lambda_{об.с} \times [T_{об}(\tau) - T_c(\tau)], \quad (8-24)$$

где  $\omega_{об}(\tau)$  — объемная плотность тепловыделений в объекте, Вт/м<sup>3</sup>;  $V_{об}$  и  $C_{об}$  — объем и полная теплоемкость объекта;  $\Lambda_{об.к}$

и  $\Lambda_{об.с}$  — полные тепловые проводимости соответственно между объектом и корпусом, объектом и внешней средой, Вт/К;  $T_{об}(\tau)$ ,  $T_k(\tau)$ ,  $T_c(\tau)$  — абсолютные температуры поверхности объекта, корпуса и среды.

Уравнение динамики корпуса термостата приближенно можно записать так:

$$\Lambda_{об.к} [T_{об}(\tau) - T_k(\tau)] = C_{к.эф} \frac{dT_k(\tau)}{d\tau} + \Lambda_{к.с} [T_k(\tau) - T_c(\tau)] + \Lambda_{к.н} [T_k(\tau) - T_n(0, \tau)], \quad (8-25)$$

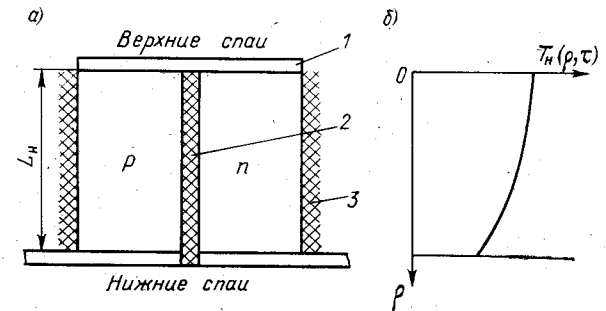


Рис. 8-7. Термоэлектрическая пара: а — схема устройства; б — распределение температуры по высоте каждого элемента

1 — коммутационные пластины; 2 — электроизоляционная прослойка; 3 — тепловая изоляция

где  $\Lambda_{об.к}$ ,  $\Lambda_{к.с}$  и  $\Lambda_{к.н}$  — полные тепловые проводимости между объектом и корпусом, корпусом и средой, корпусом и верхними спаями термоэлектрического насоса соответственно. Эффективная теплоемкость корпуса  $C_{к.эф}$  оценивается по приближенной формуле

$$C_{к.эф} \approx C_k + C_{из}/2, \quad (8-26)$$

где  $C_k$  и  $C_{из}$  — полные теплоемкости корпуса и теплоизоляции.

В уравнении (8-25) через  $T_n(0, \tau)$  обозначена абсолютная температура верхних спаев насоса:  $T_n(\rho, \tau)|_{\rho=0} = T_n(0, \tau)$  (рис. 8-7).

Уточненный вывод уравнения (8-25) может быть сделан с учетом рекомендаций, данных в § 6-4.

Следующим этапом является формулировка уравнений теплообмена теплового насоса во взаимосвязи с элементами, с которыми он находится в контакте. Эти уравнения отражают баланс тепловых потоков на верхних и нижних спаях насоса соответственно:

$$\left. \begin{aligned} Q_{к.н}(\tau) &= Q_{л}(0, \tau) + Q_{н.верх}(\tau); \\ Q_{н.в}(\tau) &= Q_{л}(1, \tau) + Q_{н.низ}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (8-27)$$

Здесь  $Q_{к.н}(\tau)$  — полный тепловой поток, передаваемый от корпуса к верхним спаям насоса;  $Q_{н.в}(\tau)$  — полный тепловой поток

от нижних спаев насоса к теплоносителю с температурой  $T_B(\tau)$  (см. рис. 8-6);  $Q_{н.верх}(\tau)$  и  $Q_{н.низ}(\tau)$  — полные мощности тепловых эффектов Пельтье (с учетом теплоты Томсона) на верхних и нижних спаях теплового насоса;  $Q_\lambda(\rho, \tau)$  — полный поток теплопроводности в тепловом насосе [положительное значение потока соответствует его направлению вдоль координаты  $\rho$  (рис. 8-7)].

Тепловые потоки  $Q_{к.н}(\tau)$  и  $Q_{н.в}(\tau)$  определяются следующими выражениями:

$$Q_{к.н}(\tau) = \Lambda_{к.н} [T_k(\tau) - T_H(0, \tau)]; \quad (8-28)$$

$$Q_{н.в}(\tau) = \Lambda_{н.в} [T_H(1, \tau) - T_B(\tau)], \quad (8-29)$$

в которых  $\Lambda_{к.н}$  и  $\Lambda_{н.в}$  — полные тепловые проводимости соответственно между корпусом и верхними спаями насоса, нижними спаями насоса и теплоносителем  $\delta$  (см. рис. 8-6);  $T_H(1, \tau)$  и  $T_B(1, \tau)$  — абсолютные температуры нижних спаев и теплоносителя.

Для определения теплового потока, проходящего через любое поперечное сечение теплового насоса, воспользуемся результатами, полученными в § 6-4. Принимая тепловой насос как некий однородный стержень с суммарной площадью поперечного сечения  $S_H = \text{const}$  и высотой (длиной)  $L_H$ , получаем

$$Q_\lambda(0, \tau) = \Lambda_H T_H(0, \tau) + 0,25C_H \frac{dT_H(0, \tau)}{d\tau} - \Lambda_H T_H(1, \tau) + 0,25C_H \frac{dT_H(1, \tau)}{d\tau} - 0,5W_H(\tau); \quad (8-30)$$

$$Q_\lambda(1, \tau) = \Lambda_H T_H(0, \tau) - 0,25C_H \frac{dT_H(0, \tau)}{d\tau} - \Lambda_H T_H(1, \tau) - 0,25C_H \frac{dT_H(1, \tau)}{d\tau} + 0,5W_H(\tau). \quad (8-31)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\Lambda_H$  и  $C_H$  — полные собственные тепловая проводимость и теплоемкость теплового насоса, равные

$$\Lambda_H = \lambda_n S_H / L_H; \quad C_H = c_n \gamma_n V_H = c_n \gamma_n L_H S_H; \quad (8-32)$$

$W_H(\tau)$  — полная мощность тепловыделений (джоулева теплота) в объеме всех элементов насоса, равная

$$W_H(\tau) = I^2(\tau) R_H, \quad (8-33)$$

где  $R_H$  — полное электрическое сопротивление насоса;  $I(\tau)$  — полный электрический ток, проходящий последовательно через каждый из элементов насоса.

Эффективные теплофизические и электрические характеристики насоса рассчитываются по формулам

$$R_H = R_p + R_n; \quad (8-34)$$

$$\lambda_H = \frac{\lambda_p S_p + \lambda_n R_n}{S_p + S_n}; \quad (8-35)$$

$$c_n \gamma_n = \frac{C_H}{V_H} = (C_p + C_n) / V_H, \quad (8-36)$$

где символы  $p$  и  $n$  относятся к соответствующим  $p$  и  $n$  ветвям элементов теплового насоса.

Тепловые эффекты в спаях

$$Q_{н.верх}(\tau) = eINT_H(0, \tau); \quad Q_{н.низ}(\tau) = eINT_H(1, \tau), \quad (8-37)$$

где  $e$  — термоэлектрический коэффициент  $p$ - $n$ -пары теплового насоса;  $N$  — число последовательно соединенных пар элементов.

После преобразований из (8-27), (8-30), (8-31) и (8-37), (8-28), (8-29) получаем два уравнения, определяющие динамику теплообмена теплового насоса

$$0,25C_H \frac{dT_H(0, \tau)}{d\tau} + [\Lambda_H + \Lambda_{к.н} + eNI] T_H(0, \tau) = \Lambda_H T_H(1, \tau) - 0,25C_H \frac{dT_H(1, \tau)}{d\tau} + \Lambda_{к.н} T_k(\tau) + 0,25W_H(\tau); \quad (8-38)$$

$$0,25C_H \frac{dT_H(1, \tau)}{d\tau} + [\Lambda_H + \Lambda_{н.в} - eNI] T_H(1, \tau) = \Lambda_H T_H(0, \tau) - 0,25C_H \frac{dT_H(0, \tau)}{d\tau} + \Lambda_{н.в} T_B(\tau) + 0,25W_H(\tau). \quad (8-39)$$

Система уравнений (8-24), (8-25), (8-38), (8-39) содержит четыре неизвестных  $T_{об}(\tau)$ ,  $T_k(\tau)$ ,  $T_H(0, \tau)$ ,  $T_H(1, \tau)$  и полностью определяет нестационарный теплообмен термостата без регулятора. Для замыкания системы к ней необходимо добавить уравнения динамики измерительного преобразователя и регулятора.

В частном случае, когда между нижними спаями насоса и теплоносителем существует интенсивный теплообмен, т. е.  $\Lambda_{н.в} \rightarrow \infty$ , приближенно выполняется условие

$$T_B(\tau) = T_H(1, \tau). \quad (8-40)$$

Если дополнительно к этому  $T_B = \text{const}$ , то и

$$T_H(1, \tau) = T_B = \text{const}. \quad (8-41)$$

При выполнении условия (8-40) или (8-41) число неизвестных и число уравнений сокращается до трех:

$$\epsilon_{об} \frac{dT_{об}(\tau)}{d\tau} + T_{об}(\tau) = V_{об} \omega_{об}(\tau) / \Lambda_{об} + k_{об.к} T_k(\tau) + k_{об.с} T_c(\tau); \quad (8-42)$$

$$\epsilon_k \frac{dT_k(\tau)}{d\tau} + T_k(\tau) = k_{к.об} T_{об}(\tau) + k_{к.н} T_H(\tau) + k_{к.с} T_c(\tau); \quad (8-43)$$

$$0,25C_H \frac{dT_H(\tau)}{d\tau} + [\Lambda_H + \Lambda_{к.н} + eNI] T_H(\tau) = \Lambda_H T_B(\tau) + \Lambda_{к.н} T_k(\tau) + 0,5W_H(\tau), \quad (8-44)$$

где  $T_H(0, \tau) = T_H(\tau)$ ;  $T_H(1, \tau) = T_B(\tau)$ . Температура  $T_B(\tau)$  теперь предполагается заданной, неизвестными величинами являются  $T_{об}(\tau)$ ,  $T_k(\tau)$  и  $T_H(\tau)$ .

Коэффициенты уравнений (8-42) — (8-44) находятся по следующим формулам:

$$\varepsilon_{об} = \frac{C_{об}}{\Lambda_{об}}; \quad \Lambda_{об} = \Lambda_{об.к} + \Lambda_{об.с}; \quad (8-45)$$

$$k_{об.к} = \frac{\Lambda_{об.к}}{\Lambda_{об}}; \quad k_{об.с} = \frac{\Lambda_{об.с}}{\Lambda_{об}}; \quad k_{об.к} + k_{об.с} = 1; \quad (8-46)$$

$$\varepsilon_{к} = \frac{C_{к.эф}}{\Lambda_{к}}; \quad \Lambda_{к} = \Lambda_{к.н} + \Lambda_{к.с} + \Lambda_{об.к}; \quad (8-47)$$

$$k_{к.об} = \frac{\Lambda_{об.к}}{\Lambda_{к}}; \quad k_{к.н} = \frac{\Lambda_{к.н}}{\Lambda_{к}}; \quad k_{к.с} = \frac{\Lambda_{к.с}}{\Lambda_{к}}. \quad (8-48)$$

Отметим, что  $k_{к.об} + k_{к.н} + k_{к.с} = 1$ , и, как следует из (8-48) и (8-46),  $k_{к.об} \neq k_{об.к}$ .

Методика теплового расчета термоэлектрических насосов и термостатов в стационарном режиме хорошо разработана и описана в работах [26, 31, 36]. В работе [25] изложены основные принципы проектирования термоэлектрических термостатирующих устройств и приведены численные примеры расчета. Поэтому здесь ограничимся лишь соотношениями, характерными для модели (рис. 8-6).

Предположим, что воздействия  $\omega_{об}$ ,  $T_{с}$ ,  $T_{в}$  неизменны во времени. Тогда из уравнений (8-42) — (8-44) находим стационарные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} T_{об.ст} &= V_{об}\omega_{об}/\Lambda_{об} + k_{об.к}T_{к.ст} + k_{об.с}T_{с}; \\ T_{к.ст} &= k_{к.об}T_{об.ст} + k_{к.н}T_{н.ст} + k_{к.с}T_{с}; \end{aligned} \right\} \quad (8-49)$$

$$[\Lambda_{н} + \Lambda_{к.н} + eNI] T_{н.ст} = \Lambda_{н}T_{в} + \Lambda_{к.н}T_{к.ст} + 0,5W_{н}. \quad (8-50)$$

Пусть температуру корпуса  $T_{к}$  требуется поддерживать на уровне  $T_{стаб}$  тогда при некоторой наиболее часто встречающейся на практике температуре внешней среды, обозначаемой  $T_{с.норм}$ , из (8-49), (8-50) можно определить требуемое значение электрического тока  $I_{норм}$  и соответствующую мощность тепловыделений  $W_{н}$  в насосе. Статическая ошибка термостатирования корпуса  $\vartheta_{к.ст}$  (стационарное отклонение температуры корпуса), вызванная изменением  $T_{с}$  и  $I$  от их значений  $T_{с.норм}$  и  $I_{норм}$ , может быть оценена по формуле

$$\vartheta_{к.ст} = T_{к.ст} - T_{стаб} = K_{с}\Delta t_{с} + K_{I}\Delta I, \quad (8-51)$$

где

$$\Delta t_{с} = T_{с} - T_{с.норм}; \quad (8-52)$$

$$\Delta I = I - I_{норм}; \quad (8-53)$$

$$K_{с} = A(k_{к.с} + k_{об.с}k_{к.об})\Lambda_{о.норм}; \quad (8-54)$$

$$K_{I} = A \{ eN [(k_{к.с} + k_{об.с}k_{к.об}) T_{с.норм} - (1 - k_{об.к}k_{к.об}) T_{стаб} + k_{к.об}V_{об}\omega_{об}/\Lambda_{об}] + k_{к.н}I_{норм}R_{н} \}. \quad (8-55)$$

В выражениях (8-54) — (8-55) обозначено

$$\Lambda_{о.норм} = \Lambda_{н} + \Lambda_{к.н} + eNI_{норм}, \quad (8-56)$$

$$A = [k_{к.н}\Lambda_{к.н} + (1 - k_{об.с}k_{к.об})\Lambda_{о.норм}]^{-1}. \quad (8-57)$$

Из (8-51) видно, что первое слагаемое определяет смещение температуры корпуса в результате изменения температуры среды, а второе — в результате изменения питающего тепловой насос электрического тока.

Для ликвидации смещения температуры корпуса, т. е. поддержания  $\vartheta_{к.ст} = 0$ , любому изменению  $\Delta t_{с}$  должно соответствовать компенсирующее изменение тока  $\Delta I$ . Полагая в (8-51)  $\vartheta_{к.ст} = 0$ , находим

$$\Delta I = -K_{с}\Delta t_{с}/K_{I}. \quad (8-58)$$

Выражение (8-58) определяет условие ручной регулировки термостата при стационарном режиме его теплообмена.

Отметим, что соотношения (8-51) — (8-58) должны корректироваться с учетом оптимизации работы термоэлектрических насосов по их холодопроизводительности [25, 36].

Для анализа замкнутой системы уравнения (8-24), (8-25), (8-38) и (8-39) следует записать в отклонениях

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{к}(\tau) &= T_{к}(\tau) - T_{стаб}; & \vartheta_{об}(\tau) &= T_{об}(\tau) - T_{стаб}; \\ \vartheta_{н}(\tau) &= T_{н}(\tau) - T_{стаб}; & \vartheta_{с}(\tau) &= T_{с}(\tau) - T_{стаб}; \\ \vartheta_{в}(\tau) &= T_{в}(\tau) - T_{стаб}. \end{aligned} \right\} \quad (8-59)$$

После подстановки получаем систему уравнений динамики термостата:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{об} \frac{d\vartheta_{об}}{d\tau} + \vartheta_{об} &= V_{об}\omega_{об}/\Lambda_{об} + k_{об.к}\vartheta_{к} + k_{об.с}\vartheta_{с}; \\ \varepsilon_{к} \frac{d\vartheta_{к}}{d\tau} + \vartheta_{к} &= k_{к.об}\vartheta_{об} + k_{к.н}\vartheta_{н} + k_{к.с}\vartheta_{с}; \\ \varepsilon_{н} \frac{d\vartheta_{н}}{d\tau} + \vartheta_{н} &= k_{к.о}\vartheta_{к} + k_{н.о}\vartheta_{в} - (K_{н} + k_{I}\Delta I), \end{aligned} \right\} \quad (8-60)$$

где

$$\varepsilon_{н} = 0,25C_{н}/\Lambda_{о.норм}; \quad (8-61)$$

$C_{н}$  — полная теплоемкость теплового насоса;

$$k_{к.о} = \Lambda_{к.н}/\Lambda_{о.норм}; \quad k_{н.о} = \Lambda_{н}/\Lambda_{о.норм}; \quad (8-62)$$

$$K_{н} = (eI_{норм}T_{стаб} - 0,5W_{норм})/\Lambda_{о.норм}; \quad (8-63)$$

$$k_{I} = (eT_{стаб} - I_{норм}R_{н})/\Lambda_{о.норм}. \quad (8-64)$$

Отметим, что по условиям работы теплового насоса с эффективной холодопроизводительностью коэффициент  $K_{н}$  всегда положителен. Коэффициент  $k_{I}$  может менять знак.

Для того чтобы система (8-60) была замкнутой, ее необходимо дополнить уравнениями измерительного преобразователя температуры и регулятора. Для упрощения анализа предполагаем, что измеритель температуры идеальный. В этом случае (например, при расположении измерителя в толще корпуса)  $T_{н}(\tau) = T_{к}(\tau)$  и уравнение измерителя (в отклонениях от  $T_{стаб}$ ) будет таково:

$$\vartheta_{н}(\tau) = \vartheta_{к}(\tau). \quad (8-65)$$

Считая пропорциональный регулятор температуры идеальным, имеем

$$\Delta I = k_{рег}\vartheta_{с}, \quad (8-66)$$

где  $\Delta I = I(\tau) - I_{норм}$ ,  $\vartheta_{с}(\tau) = T_{с}(\tau) - T_{стаб}$ . Отметим, что  $k_{рег} > 0$ , и любым  $\vartheta_{с} > 0$  отвечает  $\Delta I > 0$ .

Решая систему уравнений (8-60), (8-65), (8-66), можно определить закономерности изменения относительных температур  $\vartheta_{об}(\tau)$ ,  $\vartheta_k(\tau)$ ,  $\vartheta_n(\tau)$  и  $\vartheta_v(\tau)$  в зависимости от режимных факторов  $\omega_{об}(\tau)$ ,  $\vartheta_c(\tau)$  и  $I(\tau)$ .

Пусть в начальный момент времени все искомые температуры равны нулю, тогда, применяя к системе (8-60), (8-65) и (8-66) преобразование Лапласа для интересующей нас температуры  $\vartheta_k(\tau)$ , находим

$$\vartheta_k(s) = \Delta_k / \Delta, \quad (8-67)$$

где

$$\Delta = (\varepsilon_{об} s + 1) (\varepsilon_k s + 1) (\varepsilon_n s + 1) - k_{об.к} k_{к.об} (\varepsilon_n s + 1) - k_{к.н} (k_{к.о} - k_{i} k_{рег}) (\varepsilon_{об} s + 1); \quad (8-68)$$

$$\Delta_k = [k_{к.с} (\varepsilon_{об} s + 1) (\varepsilon_n s + 1) + k_{к.об} k_{об.с} (\varepsilon_n s + 1)] \vartheta_c(s) + k_{к.об} k_{об} (\varepsilon_n s + 1) \omega_{об}(s) - k_{к.н} (\varepsilon_{об} s + 1) K_{нс}^{-1} + k_{к.н} k_{н.о} \times (\varepsilon_{об} s + 1) \vartheta_v(s). \quad (8-69)$$

В выражениях (8-67), (8-69)  $\vartheta_k(s)$ ,  $\vartheta_c(s)$ ,  $\vartheta_v(s)$  и  $\omega_{об}(s)$  есть лапласовские изображения соответствующих режимных факторов,

Динамические особенности системы определяются корнями характеристического уравнения  $\Delta = 0$ , которое является алгебраическим уравнением третьей степени относительно параметра  $s$ :

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad (8-70)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 - k_{об.к} k_{к.об} - k_{к.н} k_{к.о} + k_{к.н} k_{i} k_{рег} > 0; \\ a_1 &= \varepsilon_n (1 + k_{об.к} k_{к.об}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{об} (1 - k_{к.н} k_{к.о} + k_{к.н} k_{i} k_{рег}) > 0; \\ a_2 &= \varepsilon_{об} \varepsilon_n + \varepsilon_k \varepsilon_n + \varepsilon_{об} \varepsilon_k > 0; \quad a_3 = \varepsilon_{об} \varepsilon_k \varepsilon_n > 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-71)$$

Из (8-71) следует, что все коэффициенты характеристического уравнения положительны, выполняется условие

$$a_1 a_2 \geq a_0 a_3, \quad (8-72)$$

поэтому система в целом является устойчивой.

Характер переходного процесса и оценка его длительности проводятся по схемам, изложенным в курсах автоматического регулирования.

Установившееся значение ошибки  $\vartheta_{к.уст}$  после завершения переходного процесса:

$$\begin{aligned} \vartheta_{к.уст} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \vartheta_k(s) = \\ &= \frac{(k_{к.с} + k_{к.об} k_{об.с}) \vartheta_c + k_{к.об} k_{об} \omega_{об} + k_{к.н} k_{н.о} \vartheta_v - k_{к.н} K_{нс}}{1 - k_{об.к} k_{к.об} - k_{к.н} k_{к.о} + k_{к.н} k_{i} k_{рег}}. \end{aligned} \quad (8-73)$$

Из (8-73) следует, что при  $k_{рег} \rightarrow \infty$   $\vartheta_{к.уст} \rightarrow 0$ .

При отсутствии регулятора ошибка  $\vartheta_{к.ст}$  значительно возрастает. Роль регулятора в уменьшении статической погрешности определится соотношением

$$\frac{\vartheta_{к.уст}}{\vartheta_{к.ст}} = \left( 1 + \frac{k_{к.н} k_{i}}{1 - k_{об.к} k_{к.об} - k_{к.н} k_{к.о}} k_{рег} \right)^{-1}.$$

Расчет термоэлектрического термостата с позиционным регулятором проводится аналогично расчету электроннагревательного термостата с таким же регулятором: к исходным уравнениям (8-60) добавляется взамен (8-66) уравнение позиционного регулятора и выполняется исследование динамики методами анализа нелинейных систем регулирования.

## 8-5. ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬНЫЕ ТЕРМОСТАТЫ С КОНВЕКТИВНЫМ ВНУТРЕННИМ ТЕПЛООБМЕНОМ

В жидкостных и газовых термостатах отвод теплоты от объекта осуществляется с помощью конвекции. При этом различают три основные группы термостатов:

- 1) термостаты с естественной конвекцией внутри рабочей камеры;
- 2) термостаты с перемешиванием теплоносителя;
- 3) термостаты с прокачкой теплоносителя через рабочую камеру.

К первой группе относятся термостаты, в которых теплоноситель заполняет рабочую камеру, аккумулирует теплоту от объекта термостатирования и частично передает ее стенкам камеры. Внутри камеры возникает естественная конвекция (рис. 8-8). К этой группе относятся сушильные шкафы, сушильные камеры, некоторые типы климатических камер. Рабочий диапазон температур таких устройств обычно составляет  $20 \div 300$  °С. Термостаты

подобного типа имеют относительно высокую неравномерность температурного поля по объему. Иногда они снабжаются регуляторами, а часто имеют секционные нагреватели, включение которых осуществляется вручную.

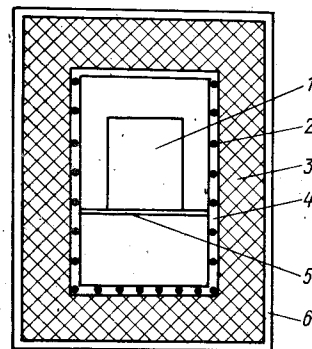


Рис. 8-8. Модель воздушного термостата с естественной конвекцией внутри рабочей камеры

1 — объект; 2 — секционный нагреватель; 3 — теплоизоляция; 4 — камера; 5 — подставка; 6 — наружный кожух

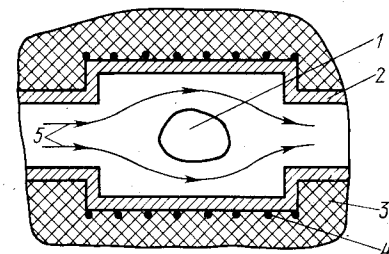


Рис. 8-9. Модель термостата с прокачиваемым через рабочую камеру теплоносителем

1 — объект; 2 — камера; 3 — теплоизоляция; 4 — нагреватель; 5 — теплоноситель

Тепловая модель и методика расчета таких термостатов аналогичны активным термостатам, рассмотренным в предыдущих главах.

В термостатах с перемешиваемым теплоносителем (см. рис. 1-5) внутри камеры располагается мешалка или вентилятор, которые интенсифицируют движение теплоносителя, выравнивая поле температур внутри рабочего объема. Скорость перемешивания равна 2—5 м/с. Термостаты такого типа работают, как правило, в нормальных стационарных условиях.

Перемешивание теплоносителя применяется в климатических барокамерах, испытательных камерах, лабораторных термостатах. Объем внутренней камеры колеблется от нескольких литров до сотен кубических метров. Для газовых термостатов точность поддержания температуры составляет  $\pm (2 \div 5)$  К, неравномерность по объему термостата —  $\pm (2 \div 5)$  К. В жидкостных термостатах при  $C_{об} \ll C_{жидк}$  равномерность поля температур внутри камеры обычно выше, так как влияние объекта сказывается меньше.

Жидкостные лабораторные термостаты имеют объем от 2 ÷ 3 л до 50 ÷ 100 л. Точность поддержания температуры составляет  $\pm (0,05 \div 0,02)$  К. Уровень термостатирования для водяных термостатов изменяется

в пределах  $(20 \pm 99)^\circ\text{C}$ . В качестве теплоносителя в жидкостных термоста-тах, кроме воды, часто применяют трансформаторное масло, органические соединения, водно-спиртовые смеси, этиловый и метиловый спирт и пр.

Если термостат должен работать при температуре  $t_{\text{стаб}}$  ниже температу-ры окружающей среды, то снаружи камеры припаивают змеевик. Через змеевик пропускают теплоноситель, который предварительно охлаждается в аккумуляторе холода. Обычно в жидкостных термостатах применяется система регулирования. Лабораторные термостаты часто имеют в системе регулирования ртутно-контактные термометры.

К третьей группе термостатов относятся такие, в которых теплоноси-тель принудительно прокачивается через рабочую камеру, так называемые «проточные» термостаты (рис. 8-9). Отличительной особенностью про-точных термостатов является:

а) возможность поддержания температуры стабилизации выше и ниже температуры окружающей среды;

б) обеспечение высокого ко-эффициента теплоотдачи с поверх-ности объекта, что определило применение подобных систем в ос-новном для охлаждения тепловы-деляющих объектов с большими плотностями тепловых потоков.

Для того чтобы температура объекта поддерживалась в опре-деленных пределах, теплоноси-тель должен иметь постоянную температуру на входе. С этой це-лью в термостатах применяется система регулирования, функцио-нальная схема которой приве-дена на рис. 8-10. Чувствитель-ный элемент (измеритель тем-пературы) может быть распо-ложен как на входе, так и на

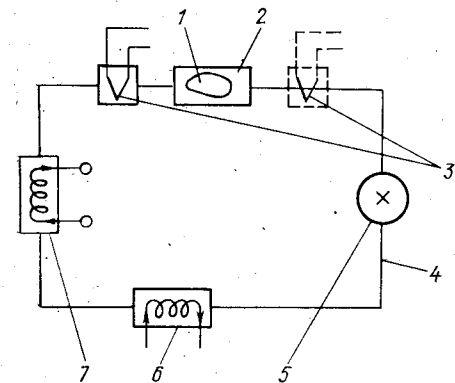


Рис. 8-10. Функциональная схема тер-мостата с прокачиваемым через рабочую камеру теплоносителем

1 — объект; 2 — рабочая камера; 3 — изме-ритель температуры; 4 — трубопровод; 5 — вентилятор; 6 — холодильник (теплообмен-ник); 7 — нагреватель

выходе теплоносителя из рабочей камеры. Он управляет работой нагрева-теля, обеспечивающего стабильную температуру теплоносителя. Сброс теп-лоты теплоносителем происходит в холодильнике, который представляет собой радиатор или (при большой теплоте) теплообменник в виде змеевика, охлаждаемого другим холодильником.

Для увеличения инерционных свойств системы в трубопровод с жидким теплоносителем иногда вводят тепловые емкости (баки, резервуары).

**Термостаты с перемешиваемым теплоносителем.** Примем, что температура теплоносителя при интенсивном перемешивании равномерна по его объему и равна  $t_{\text{ж}}(\tau)$ . Пусть  $W(\tau)$  — полная мощность нагревателя. Тогда для термостата, модель которого изображена на рис. 1-5, можно записать следующее уравнение теплового баланса:

$$W(\tau) = (C_{\text{ж}} + C_{\text{к}} + C_{\text{н}}) \frac{dt_{\text{ж}}(\tau)}{d\tau} + \Lambda_{\text{ж.с}} [t_{\text{ж}}(\tau) - t_{\text{с}}(\tau)] + \Lambda_{\text{ж.об}} \times [t_{\text{ж}}(\tau) - t_{\text{об}}(1, \tau)]. \quad (8-74)$$

Здесь  $C_{\text{ж}}$ ,  $C_{\text{к}}$ ,  $C_{\text{н}}$  — полные теплоемкости теплоносителя, камеры и на-гревателя соответственно;  $\Lambda_{\text{ж.с}}$  — полная тепловая проводимость от тепло-носителя к среде;  $\Lambda_{\text{ж.об}} = \alpha_{\text{ж.об}} S_{\text{об}}$  — полная тепловая проводимость от объекта к жидкости;  $t_{\text{об}}(1, \tau)$  — температура поверхности объекта;  $t_{\text{с}}(\tau)$  — температура окружающей среды;  $\alpha_{\text{ж.об}}$  — коэффициент теплоотдачи между жидкостью и поверхностью  $S_{\text{об}}$  объекта.

В уравнении (8-74) содержатся две неизвестные температуры  $t_{\text{ж}}(\tau)$  и  $t_{\text{об}}(1, \tau)$ . Однако в гл. 3 было получено уравнение, которое позволяет вы-разить изображение поверхностной температуры объекта  $T_{\text{об}}(1, s)$  через изображения температуры теплоносителя  $T_{\text{ж}}(s)$  и мощности, выделяющейся в объекте  $W_{\text{об}}(s)$ . Таким образом, в уравнении (8-74) останется одна неиз-вестная  $t_{\text{ж}}(\tau)$ . Воспользовавшись уравнением (8-74) и зависимостями, при-веденными в гл. 3 для температурного поля объекта, получаем уравнение динамики жидкостного термостата с перемешиваемым теплоносителем.

Основная сложность расчета заключается в определении коэффициен-тов теплоотдачи для объекта и элементов термостата, желательнее их опреде-лять экспериментально. Для оценок можно воспользоваться формулами, справедливыми для замкнутых объемов [27].

Для анализа замкнутой системы термостабилизации жидкостных термо-статов с перемешиваемым теплоносителем к уравнению динамики термостата (8-74) необходимо добавить уравнения динамики чувствительного элемента (измерителя температуры) и регулятора (см. гл. 7, 8).

Уравнения динамики измерительных преобразователей приведены в ра-ботах [56, 66]. Простейшее уравнение теплообмена чувствительного элемента имеет вид

$$C_{\text{и}} \frac{dt_{\text{и}}}{d\tau} = \alpha_{\text{и.ж}} S_{\text{и}} [t_{\text{и}}(\tau) - t_{\text{ж}}(\tau)], \quad (8-75)$$

в котором  $t_{\text{и}}(\tau)$ ,  $C_{\text{и}}$ ,  $S_{\text{и}}$ ,  $\alpha_{\text{и.ж}}$  соответственно означают температуру, пол-ную теплоемкость, поверхность теплообмена и коэффициент теплоотдачи из-мерительного преобразователя температуры. Дальнейшая последователь-ность расчета аналогична той, которая описана в § 8-1 — 8-3.

**Термостаты с прокачкой теплоносителя через рабочую камеру.** Для обес-печения нормального температурного режима объекта разработчику системы охлаждения необходимо прежде всего определить расход и температуру теплоносителя на входе системы в максимально нагруженном режиме. В на-стоящее время имеется ряд публикаций, в которых даны рекомендации по выбору этих величин в стационарном и динамическом режимах работы си-стемы [61].

Значительно более трудной задачей является полный анализ динамики проточных термостатов. С этой целью для каждого узла (элемента) системы охлаждения (см. рис. 8-10) формулируется уравнение динамики, а затем про-водится их совместное решение.

Проточные термостаты, предназначенные для термостабилизации объек-тов радиоаппаратостроения, исследованы Л. П. Грабым, С. В. Гороховым, Л. П. Ленской. Авторами предложены передаточные функции, описываю-щие динамику элементов функциональной схемы и принципы расчета нестационарных режимов системы проточной стабилизации [18, 19, 29]. Описание, характеристика и расчет систем охлаждения теплонагруженных радиоэлек-тронных приборов и комплексов даны в монографиях [10, 11].

Любая методика расчета и анализа проточной системы термостатирова-ния должна включать формулировку задачи совместного описания темпера-турных полей теплоносителя и тепловыделяющего объекта. Однако больш-инство существующих методик упрощенно решают задачу определения температурного поля теплоносителя без учета процесса теплопроводности в объекте, задавая на поверхности тела соответствующие граничные условия. Естественно, что полученные при этом результаты пригодны для тел, обла-дающих либо малой теплоемкостью, либо высокой теплопроводностью.

### 8-6. МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

Для более полного описания совместной задачи нестационарного теплообмена объект—среда необходима расширенная постановка одномерных задач теплопроводности с учетом неоднородности свойств объектов и условий их теплообмена со средами. В статье [17] одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности приближенно решено с использованием коллокационного метода. В работе [71] приведены результаты анализа обобщенной неоднородной тепловой модели, полученные путем приближенного решения ее интегрального уравнения теплообмена. Последовательно рассмотрим оба варианта решений.

**Дифференциальный метод.** Объект в виде криволинейной стенки или ее элемента (см. рис. 4-1, 4-2 и 4-3) ограничен двумя поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  и имеет определяющий размер  $L$ . Интегральные геометрические свойства объекта, как и в гл. 4, задаются образующей поверхностью  $\sigma(\rho)$  при выполнении следующих условий:

$$\sigma(\rho)|_{\rho=0} = S_1; \quad \sigma(\rho)|_{\rho=1} = S_2; \quad (8-76)$$

$$dv = L\sigma(\rho) d\rho; \quad V = L \int_0^1 \sigma(\rho) d\rho, \quad (8-77)$$

где  $\rho$  — относительная координата объекта ( $0 \leq \rho \leq 1$ ), начало которой расположено на поверхности  $S_1$ ;  $dv$  — элементарный, а  $V$  — полный объем рассматриваемого тела.

Объект неоднороден по составу и характеризуется заданными значениями теплопроводности  $\lambda$ , объемной теплоемкости  $c_v$  и коэффициента температуропроводности  $a$ :

$$\lambda = \lambda(\rho); \quad c_v = c(\rho)\gamma(\rho) = c_v(\rho); \quad a = \lambda(\rho)/c_v(\rho) = a(\rho), \quad (8-78)$$

где  $c(\rho)$  и  $\gamma(\rho)$  — удельная теплоемкость и плотность вещества тела.

Теплообмен объекта определяется комплексом из трех групп изменяющихся во времени  $\tau$  режимных факторов:

1) воздействиями со стороны поверхности  $S_1$  — среды с температурой  $t_{c1}(\tau)$  и равномерно распределенного по поверхности  $S_1$  источника теплоты  $q_1(\tau)$ ;

2) воздействиями со стороны поверхности  $S_2$  — среды с температурой  $t_{c2}(\tau)$  и равномерно распределенного по поверхности  $S_2$  источника теплоты  $q_2(\tau)$ ;

3) внутренними воздействиями — объемно распределенными источниками теплоты, плотность которых в расчете на единицу объема составляет  $w(\rho, \tau)$ , и средой с температурой  $t_{np}(\rho, \tau)$ , которая проходит через объект.

Интенсивность конвективно-лучистого теплообмена со средами 1 и 2 определяется численными значениями коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_{c1}$  и  $\alpha_{c2}$ ; интенсивность теплообмена с внутренней средой

характеризуется объемным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_{np}(\rho)$ , который является заданной функцией от координаты  $\rho$ .

Указанные тепловые воздействия формируют в объекте нестационарное температурное поле, которое предполагается близким к одномерному, следовательно, температура объекта  $t = t(\rho, \tau)$ .

На основе закона сохранения энергии уравнение теплопроводности объекта запишется в виде:

$$\frac{L^2}{a} \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} + \left[ \frac{1}{\sigma(\rho)} \frac{d\sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right] \times \\ \times \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \rho} - \zeta_3(\rho) t(\rho, \tau) + \zeta_3(\rho) \left[ t_{np}(\rho, \tau) + \frac{1}{\alpha_{np}(\rho)} w(\rho, \tau) \right], \quad (8-79)$$

где

$$\zeta_3(\rho) = \alpha_{np}(\rho) L^2 / \lambda(\rho) \quad (8-80)$$

является безразмерным комплексом (критерием Био), определяющим объемную интенсивность теплообмена объекта с внутренней проточной средой, имеющей температуру  $t_{np}(\rho, \tau)$ .

Условия теплообмена на границах  $S_1$  и  $S_2$  объекта следующие:

$$\left. \begin{aligned} \left[ t(\rho, \tau) - \frac{1}{\zeta_1(\rho)} \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right] \Big|_{\rho=0} &= t_{c1}(\tau) + \frac{1}{\alpha_{c1}} q_1(\tau); \\ \left[ t(\rho, \tau) + \frac{1}{\zeta_2(\rho)} \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right] \Big|_{\rho=1} &= t_{c2}(\tau) + \frac{1}{\alpha_{c2}} q_2(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (8-81)$$

где  $\zeta_1(\rho)$  и  $\zeta_2(\rho)$  — критерии Био по отношению к средам 1 и 2:

$$\zeta_1(\rho) = \frac{\alpha_{c1} L}{\lambda(\rho)}; \quad \zeta_2(\rho) = \frac{\alpha_{c2} L}{\lambda(\rho)}. \quad (8-82)$$

Частные значения этих критериев при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$  в дальнейшем обозначаются  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ :

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_{c1} L}{\lambda(0)}; \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_{c2} L}{\lambda(1)}. \quad (8-83)$$

В начальный момент времени распределение температур в объекте предполагается неравномерным, т. е.

$$t(\rho, \tau) \Big|_{\tau=0} = t_n(\rho). \quad (8-84)$$

Уравнение (8-79) совместно с условиями (8-81) и (8-84) определяет математическую модель процесса сложного теплообмена большой группы объектов. Применяя к (8-79), (8-81) и (8-84) преобра-



зование Лапласа, получаем трансформированную запись формулировки задачи:

$$\frac{d^2 T(\rho, s)}{d\rho^2} + \left[ \frac{1}{\sigma(\rho)} \frac{d\sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right] \frac{dT(\rho, s)}{d\rho} +$$

$$+ [\zeta_3(\rho) + \beta^2] T(\rho, s) = \zeta_3(\rho) \left[ T_{np}(\rho, s) + \frac{1}{\alpha_{np}} W(\rho, s) \right] -$$

$$- \frac{L^2}{a(\rho)} t_n(\rho); \quad (8-85)$$

$$\left[ T(\rho, s) - \frac{1}{\zeta_1(\rho)} \frac{dT(\rho, s)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=0} = T_{c1}(s) + \frac{1}{\alpha_{c1}} Q_1(s); \quad (8-86)$$

$$\left[ T(\rho, s) + \frac{1}{\zeta_2(\rho)} \frac{dT(\rho, s)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=1} = T_{c2}(s) + \frac{1}{\alpha_{c2}} Q_2(s); \quad (8-87)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{s}{a(\rho)}} L, \quad (8-88)$$

где  $T(\rho, s)$  — лапласово изображение температуры  $t(\rho, \tau)$ ;  $T_{c1}(s)$ ,  $T_{c2}(s)$ ,  $T_{np}(\rho, s)$ ,  $Q_1(s)$ ,  $Q_2(s)$  и  $W(\rho, s)$  — соответственно изображения воздействий  $t_{c1}(\tau)$ ,  $t_{c2}(\tau)$ ,  $t_{np}(\rho, \tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  и  $w(\rho, \tau)$ ;  $s$  — параметр преобразования Лапласа.

Конкретный вид зависимости  $\sigma(\rho)$  определяется выражением (4-14), коэффициенты  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  и  $\tilde{d}$  которого находятся из условий (4-15), (4-16) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a} &= S_1; \\ \tilde{b} &= \frac{1}{\rho_{вн}(1-\rho_{вн})} [S_{вн} - S_1(1-\rho_{вн}^2) - S_2\rho_{вн}^2]; \\ \tilde{d} &= \frac{1}{\rho_{вн}(\rho_{вн}-1)} [S_{вн} + S_1(\rho_{вн}-1) - S_2\rho_{вн}]. \end{aligned} \right\} \quad (8-89)$$

С помощью уравнения (4-14), как отмечалось в гл. 4, приближенно описываются геометрические свойства многих тел. В частности, из выражений (8-89) получаем для плоской стенки  $\tilde{b} = \tilde{d} = 0$ , для цилиндрической стенки  $\tilde{d} = 0$ ,  $\tilde{b} = S_2 - S_1$ , а для сферической стенки  $\tilde{b} = 0$ ,  $\tilde{d} = S_2 - S_1$ . В качестве точки  $\rho_{вн}$  можно рекомендовать выбор экстремальной точки, если функция  $\sigma(\rho)$  имеет максимум или минимум. Если функция  $\sigma(\rho)$  монотонная, рекомендуется использовать соотношение (4-17).

Приближенный способ интегрирования системы уравнений (8-85)—(8-87) основывается на возможности аппроксимации искомого поля температур в виде параболической зависимости (4-25) и коллокационного метода решения уравнения (8-85). Для нахождения коэффициентов  $M$ ,  $N$  и  $P$  необходимо, чтобы выражение (4-25) удовлетворяло граничным условиям (8-86) и (8-87) и локально, т. е. в любой точке  $\rho$  внутри интервала  $0 \leq \rho \leq 1$ , уравнению (8-85).

После выполнения необходимых преобразований находится приближенное решение задачи для изображения  $T(\rho, s)$  температуры  $t(\rho, \tau)$  объекта, которое имеет вид, аналогичный выражению (4-8):

$$T(\rho, s) = Y_1(\rho, s) Z_1(s) + Y_2(\rho, s) Z_2(s) + Y_3(\rho, s) [Z_3(s) + z_n(\rho)]. \quad (8-90)$$

Воздействия  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$  и их оригиналы  $z_1(\tau)$  и  $z_2(\tau)$  имеют прежнюю структуру и определяются по зависимостям (4-9), (4-10). Воздействие  $z_3(\tau)$  и его изображение  $Z_3(s)$  имеют вид

$$z_3(\rho, \tau) = t_{np}(\rho, \tau) + \frac{1}{\alpha_{np}} w(\rho, \tau);$$

$$Z_3(\rho, s) = T_{np}(\rho, s) + \frac{1}{\alpha_{np}} W(\rho, s). \quad (8-91)$$

Начальное тепловое воздействие, в отличие от (4-12), определяется по формуле

$$z_n(\rho) = \frac{1}{\zeta_3(\rho)} \frac{L^2}{a(\rho)} t_n(\rho) = \frac{c_0(\rho)}{\alpha_{np}} t_n(\rho). \quad (8-92)$$

Передаточные функции, определяющие вклад каждого из воздействий в формирование изображения  $T(\rho, s)$  температуры тела, имеют следующую структуру:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\rho, s) &= \frac{B_0(\rho)}{1 + \varepsilon_0(\rho)s}; & Y_2(\rho, s) &= \frac{[C_0(\rho)]}{1 + \varepsilon_0(\rho)s}; \\ Y_3(\rho, s) &= \frac{D_0(\rho)}{1 + \varepsilon_0(\rho)s}. \end{aligned} \right\} \quad (8-93)$$

Коэффициенты передаточных функций рассчитываются по формулам

$$B_0(\rho) = \frac{\zeta_1}{E(\rho)} \{ 2(1 + \zeta_2) - (2 + \zeta_2) K(\rho) +$$

$$+ 2[(1 + \zeta_2) K(\rho) - \zeta_2] \rho - \zeta_2 K(\rho) \rho^2 \}; \quad (8-94)$$

$$C_0(\rho) = \frac{\zeta_2}{E(\rho)} \{ 2 + 2[\zeta_1 + K(\rho)] \rho + \zeta_1 K(\rho) \rho^2 \}; \quad (8-95)$$

$$D_0(\rho) = \frac{\zeta_3(\rho)}{E(\rho)} \{ (2 + \zeta_2)(1 + \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2 \}; \quad (8-96)$$

$$\varepsilon_0(\rho) = \frac{L^2}{a(\rho)} \left\{ \zeta_3(\rho) + \frac{2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) [1 + K(\rho) \rho] - \zeta_1(2 + \zeta_2) K(\rho)}{(2 + \zeta_2)(\zeta_1 + \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2} \right\}^{-1}, \quad (8-97)$$

в которых

$$E(\rho) = \{2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) + (2 + \zeta_2)[\zeta_3(\rho) - \zeta_1 K(\rho)] + \\ + [2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) K(\rho) + \zeta_1 \zeta_3(\rho)(2 + \zeta_2)] \rho - \\ - \zeta_3(\rho)[\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2] \rho^2\}; \quad (8-98)$$

$$K(\rho) = \frac{1}{\sigma(\rho)} \frac{d\sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} = \\ = \frac{\tilde{b} + 2\tilde{d}\rho}{\tilde{a} + \tilde{b}\rho + \tilde{d}\rho^2} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho}. \quad (8-99)$$

Величина  $\varepsilon_0(\rho)$  по смысловому значению определяет показатель тепловой инерции локальной области тела с координатой  $\rho$ . Комплексы  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  и  $\zeta_3(\rho)$  находятся по соотношениям (8-83) и (8-80).

Укажем на некоторые следствия, вытекающие из общего решения (8-90).

1. Уравнению (8-90) динамики теплообмена объекта в изображениях соответствует приближенное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_0(\rho) \frac{dt(\rho, \tau)}{d\tau} + t(\rho, \tau) = B_0(\rho) z_1(\tau) + C_0(\rho) z_2(\tau) + D_0(\rho) z_3(\rho, \tau), \quad (8-100)$$

которое получается в результате обратного перехода из (8-90) — (8-97) и должно интегрироваться при условии (8-84).

2. Полученные результаты пригодны для определения температуры стержней переменного сечения, боковая поверхность которых находится в теплообмене со средой, имеющей температуру  $t_6(\rho, \tau)$ . При этом в уравнениях (8-79), (8-85), (8-90) и (8-100) производится замена  $t_{np}(\rho, \tau)$  на  $t_6(\rho, \tau)$  и перерасчет коэффициента теплоотдачи стержней  $\alpha_6(\rho)$  на  $\alpha_{np}(\rho)$ :

$$\alpha_{np}(\rho) = \alpha_6(\rho) \frac{p(\rho)}{\sigma(\rho)},$$

где  $p(\rho)$  и  $\sigma(\rho)$  — периметр и поперечное сечение стержня при заданном значении  $\rho$ .

3. В ряде практических задач воздействие  $t_{np}(\rho, \tau)$  отсутствует, что эквивалентно условию  $\zeta_3(\rho) = 0$ . Для этого распространенного частного случая вместо (8-97) получаем

$$z_3(\rho, \tau) = \frac{L^2}{\lambda(\rho)} \omega(\rho, \tau).$$

Структура передаточных функций (8-93) сохраняется, а их коэффициенты  $D_0(\rho)$  и  $E(\rho)$  взамен (8-96) и (8-98) находятся по формулам

$$D_0(\rho) = \frac{1}{E(\rho)} [(2 + \zeta_2)(1 + \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2];$$

$$E(\rho) = \{2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2)[1 + K(\rho) \rho^2] - \zeta_1(2 + \zeta_2) K(\rho)\},$$

а в выражении (8-97) необходимо принять  $\zeta_3(\rho) = 0$ .

Уравнение (8-79) было использовано в статье [16] при постановке и решении задачи нестационарного теплообмена неоднородного тела переменного сечения в потоке несжимаемой жидкости.

**Интегральный метод.** В отличие от предыдущего варианта объект формируется не только изменением образующей поверхности  $\sigma(\rho)$ , но также изменением его боковой поверхности, т. е. к условию (8-77) добавляется следующее:

$$dF = Lp(\rho) d\rho; \quad F = L \int_0^1 p(\rho) d\rho, \quad (8-101)$$

где  $dF$  — элементарная, а  $F$  — полная боковая поверхность тела;  $p(\rho)$  — периметр сечения  $\sigma(\rho)$ .

Величины  $L$ ,  $\sigma(\rho)$ ,  $p(\rho)$  определяются спецификой геометрии конкретного объекта с учетом соотношений (8-76), (8-77), (8-101) и рекомендаций, данных в гл. 3 и 4.

Неоднородность теплофизических свойств задается величинами  $\gamma(\rho)$ ,  $c(\rho)$ ,  $\lambda(\rho)$  и  $a(\rho)$ . К перечисленной выше системе тепловых воздействий добавляется воздействие через боковую поверхность  $F$  тела среды с температурой  $t_6(\rho, \tau)$  и источников теплоты с плотностью  $q_6(\rho, \tau)$ . Интенсивность теплообмена поверхности  $F$  со средой характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_6(\rho)$ .

При сделанных предположениях и одномерности искомого поля температур  $t(\rho, \tau)$  для объекта получаем следующее интегральное уравнение теплообмена [71]:

$$\frac{\alpha_{c1} S_1}{L} t(0, \tau) + \frac{\alpha_{c2} S_2}{L} t(1, \tau) + \int_0^1 [\alpha_{np}(\rho) \sigma(\rho) + \alpha_6(\rho) p(\rho)] \times \\ \times t(\rho, \tau) d\rho + \int_0^1 c(\rho) \gamma(\rho) \sigma(\rho) \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \tau} d\rho = \\ = \frac{\alpha_{c1} S_1}{L} t_{c1}(\tau) + \frac{\alpha_{c2} S_2}{L} t_{c2}(\tau) + \int_0^1 \alpha_{np}(\rho) \sigma(\rho) t_{np}(\rho, \tau) d\rho + \\ + \int_0^1 \alpha_6(\rho) p(\rho) t_6(\rho, \tau) d\rho + \frac{S_1}{L} q_1(\tau) + \frac{S_2}{L} q_2(\tau) + \\ + \int_0^1 p(\rho) q_6(\rho, \tau) d\rho + \int_0^1 \omega(\rho, \tau) \sigma(\rho) d\rho. \quad (8-102)$$

Теплообмен на границах  $S_1$  и  $S_2$  объекта отвечает условиям (8-81). Структура решения для изображения  $T(\rho, s)$  температуры объекта  $t(\rho, \tau)$  при параболической аппроксимации (4-25) имеет вид (8-90), где  $Z_1(s)$  и  $Z_2(s)$  находятся согласно (4-9),

$$Z_3(s) = \varphi_{np} T_{np}(s) + \varphi_6 T_6(s) + \varphi_w W(s) + \varphi_q Q_6(s); \quad (8-103)$$

$$z_n(\rho) = \varphi_n t_n(\rho), \quad (8-104)$$

а функции  $Y_i(\rho, s)$ , где  $i = 1, 2, 3$ , являются передаточными по отношению к соответствующему воздействию со структурой, определяемой выражениями (4-30) и (4-31).

Коэффициенты передаточных функций находятся из соотношений [71]:

$$B_0 = \frac{\zeta_1}{E} \{ [2\Lambda_1 + 2I_1 - I_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2 + I_1 - I_2) \zeta_2 - [2I_0 + (2\Lambda_2 + I_0 - I_2) \zeta_2] \rho + [I_0 + (\Lambda_2 - \Lambda_1 + I_0 - I_1) \zeta_2] \rho^2 \}; \quad (8-105)$$

$$B_1 = \frac{\zeta_1}{E} \{ [2J_1 - J_2 + (J_1 - J_2) \zeta_2] - [2J_0 + (J_0 - J_2) \zeta_2] \rho + [J_0 + (J_0 - J_1) \zeta_2] \rho^2 \}; \quad (8-106)$$

$$C_0 = \frac{\zeta_2}{E} \{ (2\Lambda_2 - I_2) (1 + \zeta_1 \rho) + [I_0 + (\Lambda_1 - \Lambda_2 + I_1) \zeta_1] \rho^2 \}; \quad (8-107)$$

$$C_1 = \frac{\zeta_2}{E} [-J_2 (1 + \zeta_1 \rho) + (J_0 + J_1 \zeta_1) \rho^2]; \quad (8-108)$$

$$D_0 = \frac{\Lambda_0}{E} \{ (2 + \zeta_2) (1 + \zeta_1 \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2 \}, \quad (8-109)$$

в которых комплекс

$$E = [2\Lambda_1 \zeta_1 + 2\Lambda_2 \zeta_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \zeta_1 \zeta_2] + [2I_0 + (2I_1 - I_2) \zeta_1 + (I_0 - I_2) \zeta_2 + (I_1 - I_2) \zeta_1 \zeta_2]. \quad (8-110)$$

Коэффициент  $\varepsilon$  и обратная ему величина  $m$  имеют смысл показателя тепловой инерции и соответственно темпа теплообмена объекта при комплексных тепловых воздействиях:

$$\varepsilon = \frac{1}{m} \frac{2J_0 + (2J_1 - J_2) \zeta_1 + (J_0 - J_2) \zeta_2 + (J_1 + J_2) \zeta_1 \zeta_2}{[2\Lambda_1 \zeta_1 + 2\Lambda_2 \zeta_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \zeta_1 \zeta_2] + [2I_0 + (2I_1 - I_2) \zeta_1 + (I_0 - I_2) \zeta_2 + (I_1 - I_2) \zeta_1 \zeta_2]}. \quad (8-111)$$

В выражениях (8-103), (8-104) — (8-111) для сокращения записи введены обозначения:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda(0) S_1}{L}; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda(1) S_2}{L}; \quad \Lambda_0 = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad (8-112)$$

$$J_0 = L_0 \int_0^1 \mu(\rho) d\rho; \quad J_1 = L \int_0^1 \mu(\rho) \rho d\rho; \quad J_2 = L \int_0^1 \mu(\rho) \rho^2 d\rho; \quad (8-113)$$

$$I_0 = L \int_0^1 v(\rho) d\rho; \quad I_1 = L \int_0^1 v(\rho) \rho d\rho; \quad I_2 = L \int_0^1 v(\rho) \rho^2 d\rho; \quad (8-114)$$

$$\mu(\rho) = c(\rho) \gamma(\rho) \sigma(\rho); \quad v(\rho) = \alpha_{np}(\rho) \sigma(\rho) + \alpha_6(\rho) p(\rho). \quad (8-115)$$

Ранее введенные, зависящие от  $\rho$ , тепловые воздействия и начальное распределение температуры в объекте  $t_h(\rho)$  целесообразно представить в виде произведений координатных  $f(\rho)$  и временных  $t(\tau)$  функций:

$$t_{np}(\rho, \tau) = f_{np}(\rho) t_{np}(\tau); \quad t_6(\rho, \tau) = f_6(\rho) t_6(\tau); \quad w(\rho, \tau) = f_w(\rho) w(\tau); \quad q_6(\rho, \tau) = f_q(\rho) q_6(\tau); \quad t_h(\rho) = f_h(\rho) t_h. \quad (8-116)$$

С учетом (8-116) коэффициенты воздействия  $Z_3(s)$  [см. (8-103)] имеют вид

$$\Phi_{np} = \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 \alpha_{np}(\rho) \sigma(\rho) f_{np}(\rho) d\rho; \quad \Phi_6 = \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 \alpha_6(\rho) p(\rho) f_6(\rho) d\rho; \quad \Phi_w = \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 \sigma(\rho) f_w(\rho) d\rho; \quad \Phi_q = \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 p(\rho) f_q(\rho) d\rho; \quad \Phi_h = \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 c(\rho) \gamma(\rho) \sigma(\rho) f_h(\rho) d\rho. \quad (8-117)$$

Приближенное уравнение взаимосвязи температуры объекта  $t(\rho, \tau)$  с воздействиями  $z_1(\tau)$ ,  $z_2(\tau)$  и  $z_3(\tau)$  сохраняется [см. выражение (4-44)], причем воздействие  $z_3(\tau)$  на основе (8-103) представится в виде

$$z_3(\tau) = \Phi_{np} t_{np}(\tau) + \Phi_6 t_6(\tau) + \Phi_w w(\tau) + \Phi_q q_6(\tau). \quad (8-118)$$

В отличие от выражений (8-100), (8-97) показатель тепловой инерции  $\varepsilon$  в формуле (8-111) не зависит от  $\rho$ . Динамика теплообмена выбранной точки внутри объекта определяется координатной зависимостью коэффициентов  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  и  $D_0$  в соотношениях (8-105) — (8-109).

Уравнения (8-90), (4-30) и (4-31) при использовании выражений (8-105) — (8-117) обобщают в пределах сделанных ограничений результаты, изложенные в гл. 3 и 4. При этом вид конкретных зависимостей сохраняется.

Например, в стационарном режиме из выражения (4-44) находим

$$t_{ст}(\rho) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} t(\rho, \tau) = B_0 z_{1ст} + C_0 z_{2ст} + D_0 z_{3ст}.$$

Амплитудные характеристики температуры объекта в соответствии с видом передаточных функций (4-30) находятся по обычным правилам:

$$A_1(\omega) = B_0 \sqrt{\frac{1 + [(B_1/B_0) \omega]^2}{1 + \varepsilon^2 \omega^2}}; \quad A_2(\omega) = C_0 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{C_1}{C_0} \omega\right)^2}{1 + \varepsilon^2 \omega^2}}; \quad A_3(\omega) = \frac{D_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^2}}.$$

Поле тепловых потоков и их значения на границах объекта оцениваются по рекомендациям, приведенным в § 4-3.

Детальный анализ динамики теплообмена проточных термостатов выходит за рамки объема данной книги.

1. Андрейченко В. Ф., Дьяков О. П., Сысоев Н. В. Регулятор системы термостатирования, обеспечивающий ускоренный выход на режим. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1970, вып. 3.
2. Андреева Л. Б., Ярышев Н. А. Стационарный тепловой режим системы термостатирования. — Известия вузов. Приборостроение, 1971, т. 14, № 11.
3. Андреева Л. Б., Ярышев Н. А. Передаточные функции для температуры криволинейных стенок и полых тел при обобщенных тепловых воздействиях. — Инженерно-физический журнал, 1970, т. 19, № 6.
4. Андрусак С. А. Термостат для стабилизации прецизионных измерительных систем. — Измерительная техника, 1974, № 7.
5. Башмаков В. В. Расчет основных характеристик радиотехнического термостата. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. III, 1959, вып. 3.
6. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1977.
7. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979.
8. Вайнер А. Л., Зайков В. П., Лукишкер Э. М. Термоэлектрический термостат для прецизионного кварцевого резонатора. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1973, вып. 2.
9. Венгеровский Л. В., Вайнштейн А. Х. Системы термостатирования в радиоэлектронике. — Л.: Энергия, 1969.
10. Володин Ю. Г., Малоков Г. В. Конструирование систем терморегулирования подвижных радиоэлектронных комплексов. — М.: Советское радио, 1977.
11. Волохов В. А., Хрычиков Э. Е., Киселев В. И. Системы охлаждения теплонагруженных радиоэлектронных приборов. — М.: Советское радио, 1975.
12. Гидалевич В. Б., Грабой Л. П., Лемберский В. Б. Расчет теплового компенсатора термостата для кварцевого резонатора. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1967, вып. 1.
13. Гладких В. Г. Термостаты с кристаллическим теплоносителем. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. X, 1963, вып. 2.
14. Горай И. Б., Смирнов А. И., Юдина Л. А. Полупроводниковые термостаты для элементов РЭА. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1974, вып. 1.
15. Горохов С. М. Оптимизация переходных режимов в системах термостабилизации РЭА. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1978, вып. 1.
16. Горохов С. М., Ярышев Н. А. Нестационарный теплообмен тела переменного сечения в потоке жидкости (газа). — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1977, вып. 2.
17. Горохов С. М., Ярышев Н. А. Нестационарная теплопроводность неоднородных объектов в условиях сложного теплообмена. — Известия вузов. Приборостроение, 1977, т. 20, № 12.
18. Грабой Л. П., Горохов С. М., Ленская Л. П. Расчет времени выхода в режим и статической ошибки регулирования в системах термостабилизации

ции тепловыделяющих объектов. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1976, вып. 1.

19. Грабой Л. П., Ленская Л. П., Могиляницкий В. Г. Исследование режима автоколебаний в системах термостатирования тепловыделяющих объектов. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1977, вып. 2.
20. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования: Пер. с нем. — М.: Наука, 1971.
21. Дульнев Г. Н., Семьяшкин Э. М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. — Л.: Энергия, 1968.
22. Дульнев Г. Н., Тарновский Н. Н. Тепловые режимы электронной аппаратуры. — Л.: Энергия, 1971.
23. Душин Ю. А. Работа теплозащитных материалов в горячих газовых потоках. — Л.: Химия, 1968.
24. Зорин И. В., Зорина З. Я. Термоэлектрические холодильники и генераторы. — Л.: Энергия, 1973.
25. Ильярский О. И., Удалов Н. П. Термоэлектрические элементы. — М.: Энергия, 1970.
26. Ингберман М. И., Фромберг Э. М., Грабой Л. П. Термостатирование в технике связи. — М.: Связь, 1979.
27. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. — 3-е изд. — М.: Энергия, 1975.
28. Испирян Р. А., Ярышев Н. А. Методы исследования процесса абляции материала. — Труды ЛИТМО, 1967, вып. 59.
29. Исследование динамических процессов в регулируемых системах термостабилизации тепловыделяющих объектов РЭА/Л. П. Грабой, С. М. Горохов, Л. П. Ленская, Л. П. Водинская. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1975, вып. 3.
30. Ицхоки Я. С. Приближенный метод анализа переходных процессов в сложных линейных цепях. — М.: Советское радио, 1969.
31. Каганов М. А., Привин М. Р. Термоэлектрические тепловые насосы. — Л.: Энергия, 1970.
32. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. Под ред. А. А. Померанцева. — М.: Наука, 1964.
33. Кеймах М. Я. Защита радиоэлектронной аппаратуры от тепловых воздействий. — М.: Советское радио, 1971.
34. Кейн В. М. Конструирование терморегуляторов. — М.: Советское радио, 1971.
35. Кондратьев Г. М. Тепловые измерения. — М.—Л.: Машгиз, 1957.
36. Краус А. Д. Охлаждение электронного оборудования. — Л.: Энергия, 1971.
37. Кривоносов А. И. Полупроводниковые датчики температуры. — М.: Энергия, 1974.
38. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. — Новосибирск: Наука, 1970.
39. Ленская Л. П. Термостаты с малым временем выхода в режим. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1968, вып. 1.
40. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967.
41. Манжикова С. Ц., Ярышев Н. А. Приближенное уравнение теплообмена и передаточные функции для криволинейных стенок и полых тел. — Известия вузов. Приборостроение, 1974, т. 17, № 3.
42. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. — М.: Энергия, 1977.
43. Петров Л. Х., Терзийски К. И., Попов Д. Н. Термостат для оптических и электрических измерений в интервале 77—500 К. — Приборы и техника эксперимента, 1973, № 5.
44. Петряков Б. И. К расчету статической температурной стабилизации двухпозиционного термостата. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1970, вып. 2.
45. Преображенский В. П. Теплотехнические измерения и приборы. — 3-е изд. — М.: Энергия, 1978.

46. Приборы для измерения температуры контактным способом: Справочник/Под ред. Р. В. Бычковского.— Львов: Вища школа, 1978.
47. Редько Ю. Ф., Демчук Б. Н. Термостат для микрокалориметрии.— Медицинская техника, 1974, № 6.
48. Рубановский М. Д., Фролова Е. А. К расчету систем термостатирования на ЭЦВМ.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1973, вып. 3.
49. Сергеев С. А. Двухпозиционное регулирование тепловых процессов с распределенными параметрами.— М.: Энергия, 1975.
50. Серов Е. П., Корольков Б. П. Динамика процессов в тепло- и массообменных аппаратах.— М.: Энергия, 1967.
51. Смирнов А. И. Учет конструктивных особенностей термостатов при расчете точности термостатирования.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1969, вып. 1.
52. Справочник конструктора РЭА: Общие принципы. Конструирование/Под ред. Р. Г. Варламова.— М.: Советское радио, 1980.
53. Столяров А. С., Ярышев Н. А. Обобщенный переходный процесс теплообмена однородного тела.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1973, вып. 1.
54. Столяров А. С., Ярышев Н. А. Определяющий размер и фактор формы для сплошного однородного тела.— Инженерно-физический журнал, 1973, т. 24, № 3.
55. Темкин А. Г. Обратные методы теплопроводности.— М.: Энергия, 1973.
56. Точность контактных методов измерения температуры/А. Н. Гордов, Я. В. Малков, Н. Н. Эргардт, Н. А. Ярышев.— М.: Изд-во стандартов, 1976.
57. Третьяков С. А. Методы инженерных расчетов динамики двухпозиционного регулирования тепловых процессов.— Известия вузов. Приборостроение, 1967, № 7.
58. Тулин В. А. Сравнительная оценка термостатов различного принципа действия.— М.: Труды института физики Земли АН СССР, 1963, № 29 (196).
59. Фромберг Э. М., Голиков А. Н. О расчете времени установления температуры в термостате.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1973, вып. 1.
60. Шашков А. Г. Терморезисторы и их применение.— М.: Энергия, 1967.
61. Шевяков А. А., Яковлева Р. В. Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов.— М.: Машиностроение, 1966.
62. Шефтель И. Т., Текстер-Проскуракова Г. Н. Основные характеристики и параметры промышленных терморезисторов — термометров сопротивления.— Приборы и системы управления, 1971, № 9.
63. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния: Пер. с англ. Под ред. Н. С. Райбмана.— М.: Мир, 1975.
64. Ярышев Н. А. Передаточные функции для температуры тела при обобщенных тепловых воздействиях.— Инженерно-физический журнал, 1970, т. 18, № 5.
65. Ярышев Н. А. Расчет температуры тел в стационарном режиме теплообмена.— Известия вузов. Приборостроение, 1970, т. 13, № 3.
66. Ярышев Н. А. Теоретические основы измерения нестационарных температур.— Л.: Энергия, 1967.
67. Ярышев Н. А., Андреева Л. Б. Передаточные функции элементов систем термостатирования.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1970, вып. № 1.
68. Ярышев Н. А., Андреева Л. Б. Расчет термических сопротивлений элементов термостатирующих устройств.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1970, вып. 2.
68. Ярышев Н. А., Андреева Л. Б., Манжикова С. Ц. Стационарные температурные поля в оболочках при неравномерном размещении источников нагрева.— Труды ЛИТМО, 1972, вып. 70.
70. Ярышев Н. А., Манжикова С. Ц., Заровная Н. Н. Тепловые потоки

в одномерном объекте при комплексных тепловых воздействиях.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, 1977, вып. 3.

71. Ярышев Н. А., Столяров А. С. Обобщенная одномерная модель нестационарного теплообмена объектов с распределенными параметрами.— Известия вузов. Приборостроение, 1982, т. 25, № 8.

72. Griffiths R. Thermostats and Temperature.— Regulating Instruments. London, 1943.

73. Hemminger W., Henio E.—T, Lukar H. L. The thermostat with electron regulation of temperature.— Prakt. Metallogr., 1973, 10, № 8.

74. Mohsin M. A. Water thermostat.— Res. and Ind, 1972, 17, № 2.

75. Webb R. E. G., Robinson H. T. The improved oil thermostat for thermometry.— J. Phus. E. Sci Instrum., 1973, 6, № 1.

Предисловие . . . . .	3
<b>ГЛАВА ПЕРВАЯ. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ И ЗАДАЧИ ТЕПЛООВОГО РАСЧЕТА ТЕРМОСТАТОВ</b> . . . . .	5
1-1. Качественная характеристика тепловых воздействий объекта управления . . . . .	—
1-2. Требования к точности обеспечения температурного режима объектов . . . . .	7
1-3. Структурная схема систем автоматического регулирования температуры. Термостатирующие системы . . . . .	9
1-4. Тепловые модели термостатов . . . . .	12
1-5. Основные задачи теплового расчета термостатов . . . . .	16
<b>ГЛАВА ВТОРАЯ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ</b> . . . . .	18
2-1. Математические модели объекта и термостата . . . . .	—
2-2. Передаточные функции и уравнения взаимосвязи для температуры объекта и камеры термостата . . . . .	22
2-3. Стационарные режимы теплообмена . . . . .	27
2-4. Переходные и циклические тепловые процессы в объекте и в камере термостата . . . . .	30
2-5. Динамика теплообмена разомкнутой системы терморегулирования . . . . .	32
2-6. Прохождение периодических сигналов через элементы термостата . . . . .	37
<b>ГЛАВА ТРЕТЬЯ. МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА ОДНОРОДНОГО ОБЪЕКТА</b> . . . . .	40
3-1. Выбор модели . . . . .	—
3-2. Одномерная модель нестационарного теплообмена объекта при комплексных тепловых воздействиях . . . . .	43
3-3. Передаточные функции для температуры тела при обобщенных тепловых воздействиях . . . . .	47
3-4. Приближенные передаточные функции. Дифференциальные уравнения взаимосвязи между температурой объекта и тепловыми воздействиями . . . . .	51
3-5. Стационарный режим теплообмена объекта . . . . .	58
3-6. Переходный процесс . . . . .	60
3-7. Амплитудные и фазовые частотные характеристики объекта . . . . .	63
3-8. Тепловые потоки в объекте . . . . .	64
<b>ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ</b> . . . . .	66
4-1. Математическая модель теплообмена оболочки термостата . . . . .	—
4-2. Приближенное уравнение теплообмена и передаточные функции для криволинейных стенок и полых тел . . . . .	70
4-3. Тепловые потоки в оболочках и стержнях . . . . .	77

4-4. Стационарный тепловой поток . . . . .	80
4-5. Особенности параболической аппроксимации температурного поля . . . . .	82
<b>ГЛАВА ПЯТАЯ. ПАССИВНЫЕ ТЕРМОСТАТЫ</b> . . . . .	88
5-1. Способы математического описания процесса теплопроводности в термостате . . . . .	—
5-2. Передаточные функции температуры объекта в пассивном термостате . . . . .	91
5-3. Прохождение температурных возмущений через пассивный термостат . . . . .	95
5-4. Частотные характеристики объекта в термостате . . . . .	96
<b>ГЛАВА ШЕСТАЯ. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА АКТИВНЫХ ТЕРМОСТАТОВ</b> . . . . .	100
6-1. Расчет влияния локальных тепловых связей . . . . .	—
6-2. Определение неравномерности нагрева оболочек термостата . . . . .	107
6-3. Приближенная оценка неравномерности распределения температуры в оболочках . . . . .	113
6-4. Уравнения динамики теплообмена активного термостата . . . . .	118
6-5. Упрощение структуры передаточных функций . . . . .	122
6-6. Анализ пускового режима термостата . . . . .	124
<b>ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ТЕМПЕРАТУРЫ</b> . . . . .	128
7-1. Краткая характеристика измерительных преобразователей . . . . .	—
7-2. Уравнения теплообмена линейных (проволочных) измерителей температуры . . . . .	130
7-3. Динамика пластинчатых измерителей температуры и электронагревательных элементов . . . . .	134
<b>ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬНЫЕ И ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕРМОСТАТЫ</b> . . . . .	136
8-1. Уравнения динамики элементов системы регулирования температуры . . . . .	—
8-2. Схема расчета термостата с регуляторами релейного типа . . . . .	139
8-3. Последовательность теплового расчета термостатов . . . . .	143
8-4. Термоэлектрические термостаты . . . . .	149
8-5. Электронагревательные термостаты с конвективным внутренним теплообменом . . . . .	157
8-6. Модели теплообмена неоднородных объектов . . . . .	160
Список литературы . . . . .	168



В магазине № 92 Ленкниги «Энергия» имеются в продаже следующие книги, выпущенные в 1975—1983 годах

1. Гейликман Т. Исследования по физике низких температур. 1979. Цена 2 р. 50 к.
2. Донской А. В., Рамм Г. С., Вигдорович Ю. Б. Высоко-частотные электротермические установки с ламповыми генераторами. Изд. 2-е. 1974. Цена 93 к.
3. Елизаров Д. П. Теплоэнергетические установки электростанций. 1982. Цена 1 р. 20 к.
4. Илюкович А. М. Техника электрометрии. 1976. Цена 1 р. 36 к.
5. Инструктивные материалы Госэнергонадзора. Изд. 2-е, перераб. и доп. 1983. Цена 1 р. 60 к.
6. Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е. Техническая термодинамика. Уч-к для вузов. Изд. 4-е, перераб. Цена 1 р. 60 к. 1983.
7. Литвинов В. С., Рохлин Г. Н. Тепловые источники оптического излучения. Теория и расчет. 1975. Цена 84 к.
8. Маргулова Т. Х. Атомные электрические станции. Уч-к для техникумов. 1982. Цена 70 к.
9. Метод дозиметрии и КС. 1977. Цена 1 р. 44 к.
10. Мирный атом в странах социализма. Сотрудничество стран СЭВ. 1979. Цена 8 р. 80 к.
11. Пособие для изучения «Правил технической эксплуатации электрических станций и сетей». В 3-х книгах. Книга 2. Раздел 4. Теплотехническое оборудование электростанций и тепловых сетей. Раздел 5. Специальное оборудование АЭС. 1980. Цена 2 р. 10 к.
12. Промышленная теплоэнергетика и теплотехника. Справочник. Под общей ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина. Теплоэнергетика и теплотехника. 1983. Цена 3 р. 40 к.
13. Руководящие технические материалы по сварке, термообработке и контролю трубных систем котлов и трубопроводов. 1982. Цена 70 к.
14. Справочник по монтажу тепловых электростанций. Технология монтажных работ. Под ред. В. П. Банника и Д. Я. Винницкого. Изд. 2-е, перераб. 1983. Цена 3 р. 60 к.
15. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент. Справочник. Под ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина. 1982. Цена 3 р. 20 к.

НИКОЛАЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ЯРЫШЕВ  
ЛЮДМИЛА БОРИСОВНА АНДРЕЕВА

#### ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ТЕРМОСТАТОВ

Редактор *С. П. Левкович*  
Художественный редактор *Д. Р. Стеванович*  
Технический редактор *Н. А. Минеева*  
Корректор *А. Н. Акимов*  
Переплет художника *Г. В. Смирнова*

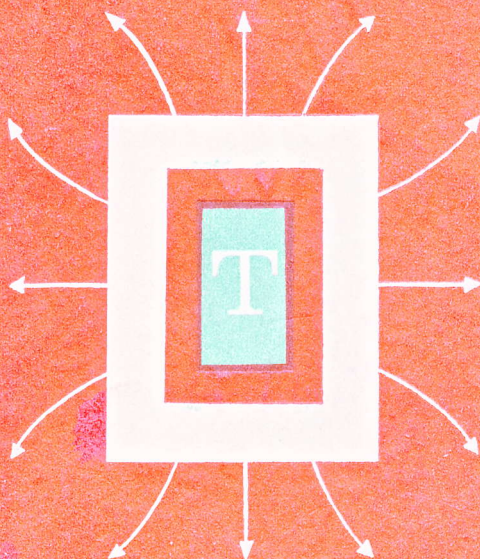
ИБ № 2519

Сдано в набор 22.09.83. Подписано в печать 11.01.84. М-20376.  
Формат 60×90<sup>1/8</sup>. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 11. Усл. кр.-отт. 11,25. Уч.-изд. л. 13,33. Тираж 2800 экз. Заказ 2036. Цена 85 к.

Ленинградское отделение Энергоатомиздата. 191041,  
Ленинград, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

Н. А. ЯРЫШЕВ  
Л. Б. АНДРЕЕВА



# ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ТЕРМОСТАТОВ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ