



В. А. Арутюнов  
В. В. Бухмиров  
С. А. Крупенников

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕПЛОВОЙ  
РАБОТЫ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ  
ПЕЧЕЙ**

В. А. Арутюнов  
В. В. Бухмиров  
С. А. Крупенников

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ РАБОТЫ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПЕЧЕЙ

Под научной редакцией  
проф. докт. техн. наук В. А. Арутюнова

Допущено Государственным комитетом СССР  
по народному образованию в качестве учебника  
для студентов вузов, обучающихся по специальности  
"Теплофизика, автоматизация и экология  
тепловых агрегатов в металлургии"



МОСКВА  
"МЕТАЛЛУРГИЯ"  
1990

*Отсканировано  
11.11.2011  
[Signature]*

УДК 669.041:536.2.001.573.(075.8)

Рецензенты: кафедра металлургических печей УПИ  
и проф. докт. техн. наук *В.И.Губинский*

УДК 669.041:536.2.001.573(075.8)

**Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: Учебник для вузов.** Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А. — М.: Металлургия, 1990. 239 с.

В книге освещены вопросы математического моделирования процессов теплообмена в промышленных печах. Рассмотрены проблемы, возникающие при решении внутренней, внешней и сопряженной задач теплообмена. Изложение сопровождается примерами математических моделей, реализованных в виде программ для ЭВМ.

Учебник предназначен для студентов металлургических и политехнических вузов. Ил. 67. Табл. 7. Библиогр. список: 14 назв.

А  $\frac{2603000000 - 188}{040(01) - 90}$  18 - 90

ISBN 5-229-00476-2

© Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А.,  
издательство "Металлургия", 1990



Предисловие .....	4
Глава I. Основные сведения о методах математического моделирования .....	6
Глава II. Промышленные печи как объекты математического моделирования .....	10
Глава III. Задачи внутреннего теплообмена .....	14
1. Постановка задачи .....	14
2. Применение метода конечных разностей для численного решения задачи теплопроводности .....	15
3. Особенности решения нелинейных задач теплопроводности .....	44
4. Учет движения межфазной границы .....	54
5. Применение метода конечных разностей для решения двухмерной задачи теплопроводности .....	62
Глава IV. Задачи внешнего теплообмена .....	73
1. Применение классического зонального метода для расчета радиационного теплообмена .....	74
2. Резольвентный зональный метод .....	96
3. Учет селективности излучения при расчете радиационного теплообмена .....	104
4. Методы приближенного расчета угловых коэффициентов излучения .....	110
5. Конвективный теплообмен в пограничном слое .....	124
6. Расчет сложного теплообмена зональным методом .....	155
Глава V. Задачи сопряженного теплообмена .....	164
1. Постановка и алгоритмы решения задач сопряженного теплообмена .....	164
2. Расчет нагрева стальной ленты в протяжной электрической печи сопротивления .....	167
3. Охлаждение движущейся стальной ленты .....	174
4. Нагрев сыпучего материала в обжиговой вращающейся печи .....	180
5. Нагрев металла в толкательной методической печи .....	198
Приложения .....	216
Рекомендательный библиографический список .....	238



Математическое моделирование тепловых процессов, происходящих в промышленных печах, т.е. исследование этих процессов, основанное на их математическом описании, давно и в широких масштабах используется в металлургической теплотехнике.

Однако, начиная с конца шестидесятых – начала семидесятых годов, само содержание этого понятия, возможности математического моделирования и актуальность проблемы создания математических моделей претерпели коренные изменения. Это связано, прежде всего, со стремительным прогрессом вычислительной техники, с широким распространением цифровых ЭВМ и, как следствие, с возможностью реализации сложных, подробных, а потому весьма точных и содержательных математических моделей, позволяющих получать расчетным путем обширную информацию о различных тепловых процессах, протекающих в металлургических агрегатах.

Действительно, еще двадцать лет назад от разработчика расчетных методов (т.е. математических моделей) требовалось получение простых формул, для использования которых проектанты и работники заводских теплотехнических служб могли довольствоваться такой примитивной вычислительной техникой, как логарифмическая линейка и механический, либо электрический арифмометр. Понятно, что в такой ситуации одним из самых существенных требований, предъявляемых к математическим моделям, была их простота, что неизбежно приводило к необходимости жертвовать точностью ради удобства.

В настоящее время в связи с широкой доступностью мощных ЭВМ главными качествами разрабатываемых математических моделей становятся их достаточно высокая точность и объем информации, которую они позволяют получить. Что же касается сложности, то она не является больше препятствием для их практического применения.

Применение высококачественных математических моделей приносит значительный экономический эффект. Они позволяют проводить исследования процессов, происходящих в металлургических агрегатах, при неизмеримо меньших затратах, чем натурные исследования на реальных агрегатах, на стендах или на физических моделях. С помощью математических моделей можно еще на стадии проектирования найти оптимальное конструктивное оформление агрегата и выбрать оптимальные режимные параметры его работы. Наконец, банк математических моделей составляет основу систем автоматизированного проектирования (САПР) металлургических тепловых агрегатов. Таким образом, в металлургической теплотехнике создалась сегодня такая

ситуация, когда становится справедливым утверждение о том, что нет ничего практичнее хорошей теории.

Актуальность проблемы разработки и использования математических моделей в практике исследования, совершенствования и проектирования металлургических тепловых агрегатов привела к необходимости создания специального учебного курса, в котором изучаются наиболее распространенные методы численного моделирования с помощью ЭВМ различных процессов теплообмена, составляющих основу тепловой работы металлургических печей, методы математического моделирования комплекса теплообменных процессов, протекающих в печах, способы применения математических моделей для оптимизации параметров тепловых агрегатов.

Данный учебник соответствует программе этого курса. В нем приведены лишь наиболее простые и наглядные численные методы решения задач на ЭВМ, в частности, при решении уравнения теплопроводности — различные модификации метода конечных разностей. Для ознакомления с более сложными численными методами (метод конечных элементов, метод частиц в ячейках и др.) читатель должен обратиться к специальной литературе.

Тексты простейших программ, приведенные в приложении, следует рассматривать, главным образом, как иллюстрации, предназначенные помочь читателю при самостоятельном решении соответствующих задач. Значительно более сложные и имеющие гораздо больший объем программы комплексного расчета тепловой работы печей (имеются в виду задачи, рассмотренные в гл. V) не приводятся. Авторы, однако, готовы предоставить эти программы заинтересованным лицам.

Учебник написан на основе опыта преподавания соответствующего курса на кафедре теплофизики и теплоэнергетики металлургического производства Московского института стали и сплавов.

Различные разделы учебника написаны следующими авторами: предисловие, гл. I и II — В.А.Арутюновым; п. 5 гл. IV и пп. 3, 4 гл. V — В.А.Арутюновым и В.В.Бухмировым; гл. III, пп. 1 — 4, 6 гл. IV, пп. 1, 2, 5 гл. V — С.А.Крупенниковым.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам — проф. докт. техн. наук В.И.Губинскому и коллегам — преподавателям кафедры металлургических печей Уральского политехнического института за полезные замечания, способствующие улучшению содержания учебника.

Авторы будут благодарны всем читателям, которые пришлют отзывы о содержании учебника по адресам: 119857, ГСП Москва, Г-34, 2-й Обыденский пер., д. 14, издательство "Металлургия", либо 117936, Москва, ГСП-1, Ленинский проспект, д. 4, Московский институт стали и сплавов.



Как известно, моделью называется некоторый объект, который используется для воспроизведения и изучения существенных свойств какого-либо процесса или явления, часто называемого натурным образцом или объектом. Моделью может являться не только материальный, но и мысленный объект. Таковы, например, *концептуальные или словесные модели* (иногда называемые *физическими*), которые описывают натурный образец на уровне качественных представлений. К этому же типу относятся и математические модели.

Математическая модель формулируется в виде формулы, уравнения или системы уравнений, которые могут быть алгебраическими, дифференциальными, интегро-дифференциальными, либо интегральными, но в любом случае она с той или иной степенью приближения и подробности описывает натурный образец, его свойства и поведение.

Уровень математической модели соответствует иерархическому уровню системы или подсистемы, которую она описывает. Например, математическая модель может описывать отдельный процесс, происходящий в образце, либо весь комплекс существенных процессов. Она может описывать взаимодействие различных элементов (объектов) в какой-либо системе, например взаимодействие агрегатов данного участка, отделения, цеха и т.д.

Ниже рассматриваются лишь модели, описывающие отдельные тепловые процессы в промышленных печах, а также комплексы этих процессов, которые и составляют существо тепловой работы этих агрегатов.

В зависимости от способа получения различают *функциональные* (иначе, *стохастические*), *детерминированные* математические модели и модели *смешанного типа*, сочетающие свойства двух предыдущих.

Функциональные или стохастические математические модели получают в результате экспериментальных исследований натурального образца. При этом исследуют лишь реакцию системы на подаваемые на вход возмущения, а результаты обрабатывают методами математической статистики. Часто такие экспериментальные исследования организуют на основе методов планирования эксперимента, получая в результате регрессионные уравнения.

Важным достоинством функциональных моделей является их простота, что позволяет широко применять такие модели в системах автоматизированного управления различными объектами. Однако эти модели имеют и существенные недостатки. Прежде всего, функциональные модели недостаточно содержательны. В рамках этих моделей



не вскрываются свойственные объекту глубокие причинно-следственные связи, а потому не учитывается все многообразие проявлений процессов, протекающих в объекте, влияние различных внешних факторов на эти процессы. В результате существенно ограниченной оказывается универсальность таких моделей. Строго говоря, не только для группы однотипных объектов, но и для каждого индивидуального объекта приходится строить свою функциональную модель.

Наиболее универсальными являются так называемые детерминированные модели. Модели этого типа строятся на основе дифференциальных, интегральных либо интегро-дифференциальных уравнений, описывающих каждый из существенных для данного натурального образца процессов и полученных в рамках теории соответствующего процесса. Понятно, что с точки зрения содержательности детерминированные модели значительно превосходят функциональные, поскольку в них заложены не формальные связи между входными и выходными переменными и параметрами, а глубоко содержательная информация о физических механизмах соответствующих процессов, отражающая важнейшие причинно-следственные связи. Именно эти свойства рассматриваемых моделей обеспечивают их универсальность, т.е. возможность их использования для различных объектов одного типа, поскольку специфические черты этих различных объектов могут быть учтены в моделях с достаточной степенью подробности.

Недостатком детерминированных моделей является их большая сложность. Современные достаточно подробные и обладающие высокой точностью детерминированные модели промышленных печей требуют для своей реализации значительных ресурсов ЭВМ: памяти и времени счета. Это приводит к тому, что применение таких моделей для целей управления объектами, как правило, невозможно.

Промежуточное положение между двумя рассмотренными видами математических моделей занимают модели *смешанного типа*. Они строятся, как правило, на основе одного уравнения или небольшого числа уравнений, описывающих механизм лишь наиболее существенных для данного натурального образца процессов. Влияние всех других процессов учитывается в такой модели с помощью некоторых параметров, называемых иногда *настроечными коэффициентами*. Значения этих параметров определяют с помощью процедуры, которая, в общих чертах, заключается в том, что расчетные результаты, полученные с использованием математической модели, сопоставляют с результатами измерений, выполненных на образце. Из условия совпадения расчетных и экспериментальных результатов и находят значения настроечных коэффициентов. Процедуры такого рода называют *адаптацией* или *параметрической идентификацией* математической модели. Степень универсальности моделей рассматриваемого типа также занимает



промежуточное положение между стохастическими и детерминированными моделями. Структура такой модели оказывается общей для всех однотипных натуральных образцов, однако настроечные коэффициенты для каждого образца принимают свои специфические значения. Поэтому прежде чем применять модель смешанного типа для данного образца, необходимо выполнить процедуру адаптации.

В соответствии с замыслом и целями излагаемого здесь учебного курса ниже рассматриваются лишь детерминированные математические модели различных теплообменных процессов и промышленных печей. Применение этих моделей не требует предварительной адаптации, а потому способы выполнения этой процедуры не приводятся.

Как уже было сказано выше, современные достаточно сложные, подробные и точные детерминированные математические модели требуют для своей реализации использования мощных ЭВМ и, как правило, не могут применяться в системах управления работой металлургических агрегатов. Эти математические модели могут использоваться для следующих целей:

исследования путем проведения численных расчетов влияния различных переменных и параметров на протекание процессов в образце;

расчета конструктивных и режимных параметров агрегата на стадии его проектирования;

многовариантных расчетов агрегата с целью проверки различных способов его конструктивного оформления и различных режимов работы;

численных экспериментов (например, планируемых) с последующей обработкой результатов методами теории подобия или статистическими методами с целью построения упрощенных (например, регрессионных) математических моделей, пригодных для использования в автоматизированных системах управления;

в какой-либо процедуре оптимизации с целью определения оптимальных значений конструктивных, либо режимных (или и тех и других) параметров;

включения в банк моделей системы автоматизированного проектирования (САПР) агрегатов; при этом модель может использоваться как для однократного либо многовариантного расчета, так и для оптимизации параметров;

создания на их основе (с использованием ЭВМ) тренажеров для обучения персонала методам правильной эксплуатации агрегатов.

Процесс разработки детерминированной математической модели, численно реализуемой на ЭВМ, включает несколько этапов, которые одновременно представляют собой составляющие структуры модели.

Вначале составляют концептуальную, или физическую модель исследуемого процесса или явления, представляющую словесный образ

натурного объекта, описывающий его на уровне качественных, физических представлений.

Затем результаты этого качественного анализа представляют в виде *математической формулировки задачи*, т.е. в виде системы уравнений. Обычно это дифференциальные, интегральные, либо интегро-дифференциальные уравнения. При этом часто исходную сложную систему уравнений упрощают на основе обоснованных допущений о характере протекания процесса (или процессов). В математическую формулировку задачи входят кроме того краевые, т.е. начальные и граничные условия, а также геометрические и физические параметры задачи.

Следующий, необходимый для численного решения этап состоит в том, что исходные уравнения представляют в виде, удобном для применения численных методов, т.е. в виде *системы алгебраических уравнений*. Для этого используется какой-либо метод *дискретизации*, т.е. замены непрерывных изменений аргументов и функций множествами их дискретных значений. Краевые условия при этом также записываются в виде алгебраических соотношений.

Получив таким образом систему алгебраических уравнений, выбирают метод ее решения. Если система оказывается нелинейной, в процессе ее решения приходится использовать какой-либо *итерационный метод*, т.е. метод последовательных приближений, реализуемый в программе в виде цикла. Два последних этапа как раз и представляют собой, по существу, выбор и применение *численного метода решения задачи*, т.е. ее численную реализацию.

На основе численного метода решения составляют *алгоритм решения задачи на ЭВМ*, который обычно представляют в виде структурной схемы, после чего составляют *программу* на одном из алгоритмических языков. Если в процессе реализации алгоритма необходимо выполнить стандартные вычисления, запрограммированные в математическом обеспечении ЭВМ, в программу включают обращение к соответствующей стандартной подпрограмме с последующим возвращением к основной программе, реализующей разработанный алгоритм.

Этот последний этап, завершающийся отладкой и тестированием программы, называют *программной реализацией* математической модели. В настоящем учебнике все программы написаны на наиболее широко применяемом в последнее время для технических расчетов алгоритмическом языке ФОРТРАН.

Иногда некоторые из указанных этапов опускают. Например, при расчетах внешнего теплообмена в печах (радиационного или сложного радиационно-кондуктивного) обычно, минуя второй этап, после разбиения исследуемой области на зоны записывают баланс энергии для каждой зоны, в результате чего и получают систему алгебраических уравнений, пригодную для последующего численного решения.



После того, как разработка модели закончена, проверяют ее качество, т.е. выполняют проверку адекватности модели путем сопоставления расчетных результатов либо с экспериментальными данными, либо с результатами точного аналитического решения простой задачи, называемой *модельной*. Если результаты такого сопоставления оказываются неудовлетворительными, это означает, что либо несправедливы принятые допущения, либо имеются ошибки в численном методе решения. Последовательно изменяя либо формулировку задачи, либо процедуру численного решения, добиваются адекватности разработанной математической модели.

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит преимущество детерминированных математических моделей по сравнению с функциональными?
2. Что такое настроечные коэффициенты?
3. В чем заключается процедура адаптации математической модели?
4. Для каких целей используются детерминированные математические модели?
5. Из каких этапов состоит процесс разработки детерминированной математической модели?

## Глава II. ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПЕЧИ КАК ОБЪЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Комплекс процессов, происходящих в рабочем пространстве промышленной печи, подверженных влиянию окружающей среды и приводящих, в конечном счете, к изменению энтальпии обрабатываемого материала, часто обозначают термином *"тепловая работа печи"*. В указанный комплекс входят в зависимости от типа печи различные процессы: движение газов и жидкостей, горение топлива либо другие процессы теплогенерации, процессы внешнего теплообмена в рабочем пространстве печи и на поверхности обрабатываемого материала, процессы внутреннего теплообмена в этом материале, различные виды массообмена. Все перечисленные процессы теснейшим образом взаимосвязаны и подвержены взаимному влиянию, что и определяет сложность проблемы комплексного расчета тепловой работы промышленной печи, т.е. проблемы разработки ее математической модели.

В рамках металлургической теплотехники *внутренним теплообменом* обычно называют процесс распространения тепла в подвергнутом тепловой обработке материале. Поскольку в нагревательных и термических печах таким материалом является твердый металл, задача внутреннего теплообмена для них формулируется в виде уравнения

теплопроводности с соответствующими краевыми (начальными и граничными) условиями. Встречающиеся на практике задачи нестационарной теплопроводности могут быть решены аналитическим путем лишь при использовании весьма грубых и приводящих к значительным ошибкам упрощающих допущений, а потому требуют численного решения. Численные методы решения задач нестационарной теплопроводности разработаны весьма подробно. Наиболее часто применяют различные модификации метода конечных разностей, а в последнее время — метод конечных элементов, удобный в случае задач теплопроводности для тел сложной формы.

Особый класс задач внутреннего теплообмена составляют задачи теплопроводности с движущейся границей. Сюда относятся в частности процессы плавления и затвердевания металла. Численные методы решения этих существенно нелинейных задач также подробно разработаны.

Термином "внешний теплообмен" в металлургической теплотехнике обозначают процессы переноса тепла, происходящие в рабочем пространстве печи и приводящие, в конечном итоге, к поступлению тепла на поверхность нагреваемого материала или к отводу тепла от этой поверхности в случае охлаждения.

Если речь идет о высокотемпературном процессе, а среда, заполняющая рабочее пространство печи, диатермична (это случай электрических нагревательных печей: сопротивления либо печей с радиационными трубами), основным, а часто практически единственным видом теплопереноса, является радиационный теплообмен. Задача при этом формулируется в виде интегрального уравнения, однако, как правило, это уравнение не используют, а подлежащую численному решению систему алгебраических уравнений получают сразу путем использования какой-либо модификации зонального метода.

Полезно однако отдавать себе отчет в том, что указанная система не является точной формулировкой задачи, но представляет собой дискретную аппроксимацию интегральных уравнений радиационного теплообмена. Искомой величиной при этом является обычно поток результирующего излучения на поверхности нагреваемого материала. Очень часто образующие систему радиационного теплообмена поверхности, т.е. поверхности нагреваемого материала, нагревателей (или радиационных труб) считают серыми, пренебрегая зависимостью степени черноты от длины волны и полагая, что она равна поглощательной способности для каждой из поверхностей. Такое предположение не является слишком грубым и оказывается приемлемым, когда система близка к термодинамическому равновесию, т.е. когда температуры поверхностей, составляющих систему, не слишком различаются. Понятно, что такая ситуация реализуется на заключительных стадиях



нагрева материала. В других случаях приходится учитывать реальный характер излучения, что естественно существенно усложняет задачу.

Математическая модель внешнего теплообмена в высокотемпературных печах также значительно усложняется, когда рабочее пространство заполнено излучающим и поглощающим движущимся газом. Такая ситуация имеет место в пламенных печах, где теплогенерация осуществляется за счет сжигания топлива (в большинстве случаев газового). Сложность таких задач обусловлена не только наличием излучения и поглощения энергии в газовой среде, но и необходимостью учета тепловыделения за счет горения, а также весьма существенной ролью конвективного переноса тепла движущимся газом, хотя теплоотдача к нагреваемому материалу и в этих случаях осуществляется, главным образом, за счет радиационного теплообмена. Конвективный перенос тепла в высокотемпературных пламенных печах влияет на теплоотдачу к материалу косвенно, в результате воздействия на формирование температурного поля в газовом потоке, на которое также влияет и тепловыделение, обусловленное горением.

Таким образом, математическая модель внешнего теплообмена в рассматриваемых случаях должна включать в себя, в принципе, помимо описания совместного радиационно-конвективного переноса тепла (называемого сложным теплообменом), математическое описание турбулентного движения газов и горения в турбулентном потоке. Однако последняя задача сама по себе уже связана с чрезвычайно большими трудностями. Такие модели в настоящее время только создаются, при этом описание турбулентного потока с горением базируется, как правило, на современных полуэмпирических моделях турбулентности (см. гл. IV). Обычно же движение газа и выгорание топлива описывают с помощью весьма упрощенных, часто эмпирических методов.

Что касается собственно процесса сложного радиационно-конвективного теплообмена, то для его математического моделирования также чаще всего применяют зональные методы. Объем рабочего пространства печи, а также поверхности футеровки и нагреваемого материала разбивают на объемные и поверхностные зоны. При этом для каждой зоны записывают уравнения теплового баланса, учитывающие для объемных зон радиационный и конвективный перенос тепла, конвективную теплоотдачу к поверхности и тепловыделение за счет горения, а для поверхностных зон — радиационную и конвективную теплоотдачу. В результате получают систему нелинейных алгебраических уравнений, которая и подлежит численному решению. Получаемая таким образом система, по существу, аппроксимирует интегро-дифференциальное уравнение с источниками тепла, описывающее радиационно-конвективный теплообмен с тепловыделением, обусловленным



горением. Искомой величиной при этом также является результирующий тепловой поток на поверхности нагреваемого материала.

Значительно более простой случай радиационно-конвективного теплообмена реализуется в различных средне- и низкотемпературных термических печах, в которых нагрев либо охлаждение металла происходит в диатермичной среде, например в защитной атмосфере. В таких агрегатах перенос тепла в движущемся газе происходит за счет конвективного теплообмена, а обмен между газом и поверхностями, в том числе и поверхностью обрабатываемого металла, — за счет конвективной теплоотдачи. Эта задача формулируется в виде уравнений движения и энергии (без источников) с использованием полуэмпирических моделей турбулентности, а для получения системы алгебраических уравнений обычно применяется метод конечных разностей. Пример задачи такого типа рассмотрен в гл. IV.

В связи с диатермичностью среды радиационный теплообмен в таких печах осуществляется лишь между твердыми поверхностями, и для его расчета применяются зональные методы. Искомой величиной является суммарный результирующий тепловой поток на поверхности обрабатываемого металла.

Наибольшее практическое значение имеют комплексные математические модели тепловой работы промышленных печей, объединяющие задачи как внутреннего, так и внешнего теплообмена. Соответствующие задачи называются *сопряженными задачами теплообмена* и требуют одновременного, совместного численного расчета внутреннего и внешнего теплообмена. Именно эти модели позволяют получить наиболее достоверную и подробную информацию о тепловой работе агрегатов и должны использоваться для их исследования, многовариантных расчетов и оптимизации (см. гл. V).

Для решения сопряженной задачи теплообмена могут использоваться два различных итерационных алгоритма. Первый и наиболее часто применяемый заключается в следующем. Вначале задают температуру (точнее, ее распределение) на поверхности обрабатываемого в печи материала, например нагреваемого металла. Затем эту температуру используют в качестве граничного условия для решения задачи внешнего теплообмена, и в результате получают плотность теплового потока на этой поверхности. После этого решают задачу внутреннего теплообмена, задавая на поверхности полученную величину плотности теплового потока, что позволяет найти новое значение температуры на поверхности, которое сравнивают с заданным. Если расхождение превышает некоторую допустимую величину, вновь решают задачу внешнего теплообмена, используя новое значение температуры на поверхности. Этот итерационный процесс продолжают до тех пор, пока

разность между значениями температуры поверхности для двух последовательных итераций не окажется приемлемой.

Второй вариант итерационного алгоритма отличается от предыдущего тем, что сопряжение внутренней и внешней задач производят не по температуре, а по плотности теплового потока на поверхности. При этом задачу внешнего теплообмена решают при задании на поверхности металла последней величины, а найденное в результате значение температуры на поверхности используют в качестве граничного условия для решения внутренней задачи. Полученное в результате этого решения значение плотности теплового потока на поверхности сопоставляют с тем, которое использовали на предыдущей итерации, добиваясь, в конце концов, приемлемого расхождения этих величин.

### Контрольные вопросы

1. Какой смысл заключен в термине "тепловая работа печи"?
2. Что такое внутренний теплообмен?
3. Что такое внешний теплообмен?
4. Что означает термин "сопряженная задача теплообмена"?
5. Опишите два возможных алгоритма решения сопряженной задачи теплообмена.

## Глава III. ЗАДАЧИ ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛООБМЕНА

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим наиболее простую постановку внутренней задачи теплообмена, возникающую при расчете распространения тепла в твердых непрозрачных телах. Для простоты будем считать, что тело является однородным и изотропным, характеризуемым постоянными во всей расчетной области значениями удельной объемной теплоемкости  $c'$  [Дж/(м<sup>3</sup>·К)] и коэффициента теплопроводности  $\lambda$  [Вт/(м·К)].

В основе математической формулировки рассматриваемой задачи лежит закон сохранения энергии, выражаемый уравнением

$$c'(\partial T/\partial t) = -\operatorname{div} \vec{q}, \quad M \in G, \quad (3.1)$$

где  $T(M, t)$ , К и  $\vec{q}(M, t)$ , Вт/м<sup>2</sup> – температура и плотность теплового потока в точке  $M = \{x, y, z\}$  в момент времени  $t$ ;  $G$  – расчетная область пространства. Учитывая указанные выше допущения и применяя закон Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (3.2)$$



получим уравнение теплопроводности, описывающее изменение температурного поля во времени

$$c'(\partial T/\partial t) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T). \quad (3.3)$$

При постановке краевых условий для уравнения теплопроводности (3.3) следует указать распределение температуры в начальный момент времени  $T_n(M)$

$$T(M, 0) = T_n(M), \quad M \in G \quad (3.4)$$

и сформулировать граничное условие, выражающее особенности теплообмена на поверхности нагрева  $\Gamma$ , отделяющей область  $G$  от окружающей среды. При этом предполагается, что заданным по условию является температурное поле поверхности тела  $T_w(M, t)$ ,  $M \in \Gamma$  (граничное условие I рода), распределение плотности теплового потока на этой поверхности  $q_w(M, t)$ ,  $M \in \Gamma$  (граничное условие II рода) или определенное соотношение между температурой  $T_w(M, t)$  и плотностью потока  $q_w(M, t)$  (граничное условие III рода)

$$q_w = f(T_w). \quad (3.5)$$

В более сложных случаях зависимость (3.5) может быть заранее неизвестна, и для ее определения требуется совместное решение внутренней и внешней задач теплообмена.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрение способов построения и основных свойств разностных схем начнем с задачи теплопроводности, возникающей при расчете симметричного нагрева бесконечной пластины толщиной  $2\delta$ . В этом случае в каждый момент времени изменение температуры в пространстве  $T(y, t)$  происходит лишь в направлении оси  $y$ , перпендикулярной поверхности пластины. Используя свойство симметрии температурного поля, поместим начало координат  $y = 0$  в точку, лежащую в средней плоскости пластины, и выберем в качестве расчетной области  $G$  интервал  $0 < y < \delta$ , соответствующий половине толщины пластины. Тогда уравнение теплопроводности (3.3), описывающее нагрев пластины, принимает вид

$$c' \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad 0 < y < \delta. \quad (3.6)$$

Предполагая, что в начальный момент времени тело является равномерно прогретым до температуры  $T_n$ , запишем начальное условие

$$T(y, 0) = T_n, \quad 0 \leq y \leq \delta. \quad (3.7)$$



Граничное условие при  $y = 0$  является следствием симметрии температурного поля

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.8)$$

На поверхности пластины будем считать заданными:  
либо температуру  $T_w$  (граничное условие I рода)

$$T \Big|_{y=0} = T_w; \quad (3.9)$$

либо плотность теплового потока, абсолютную величину которой обозначим через  $q_w$  (граничное условие II рода)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = q_w; \quad (3.10)$$

либо линейное граничное условие III рода, соответствующее постоянной температуре окружающей среды  $T_0$  и постоянному, не зависящему от температуры, коэффициенту теплоотдачи  $\alpha$  ( $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ )

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \alpha(T_0 - T \Big|_{y=\delta}). \quad (3.11)$$

При записи двух последних соотношений учтено, что при нагреве тела внешний тепловой поток имеет направление противоположное оси  $y$ .

Рассмотрим сначала применение метода конечных разностей для решения линейной задачи теплопроводности, предполагая, что теплофизические характеристики тела  $c'$  и  $\lambda$  не зависят от температуры. В этом случае уравнение (3.6) упрощается и принимает следующий вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \delta, \quad (3.12)$$

где  $a = \lambda/c'$  — коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Линейная одномерная задача теплопроводности (3.12), (3.7), (3.8) с одним из граничных условий (3.9), (3.10) или (3.11) имеет известное аналитическое решение, поэтому применение численных методов для ее решения, конечно, не является необходимым. Выбор этого наиболее простого примера объясняется только тем, что наличие точного аналитического решения позволяет произвести прямую оценку погрешности приближенных численных методов. Вместе с тем, на этом примере можно наглядно продемонстрировать некоторые специфические проблемы, возникающие при реализации метода конечных разностей, и сделать выводы, имеющие общий характер.

Основная идея метода конечных разностей (метода сеток) заключается в том, что непрерывная область изменения пространственной переменной  $0 \leq y \leq \delta$  заменяется конечной совокупностью дискретно расположенных узловых точек  $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ . При равномерном расположении этих точек на отрезке  $[0, \delta]$  их координаты равны  $y_i = (i-1)\Delta y$  при  $i = 1, \dots, n+1$ , где расстояние между соседними точками (шаг по координате)  $\Delta y = \delta/n$ . Аналогичным образом, вместо непрерывного изменения температурного поля во времени рассматриваются значения температуры в фиксированные моменты времени  $t_k = k\Delta t, k = 1, 2, \dots$ , где  $\Delta t$  — интервал между двумя последовательными моментами времени (шаг по времени).

В плоскости  $(y, t)$  совокупность узловых точек с координатами  $(y_i, t_k)$  образует прямоугольную сетку, изображенную на рис. 1, и расчет температурного поля  $T(y, t)$  сводится к отысканию сеточной функции  $T_i^k$ , приближенно характеризующей температуру тела в узловых точках. Для иллюстрации на рис. 2 изображены дискретные температурные поля  $T_i^k$  и  $T_i^{k+1}$ , соответствующие двум последовательным моментам времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ .

При замене непрерывной функции  $T(y, t)$  дискретной сеточной функцией  $T_i^k$  необходимо заменить дифференциальное уравнение теплопроводности с соответствующими краевыми условиями системой

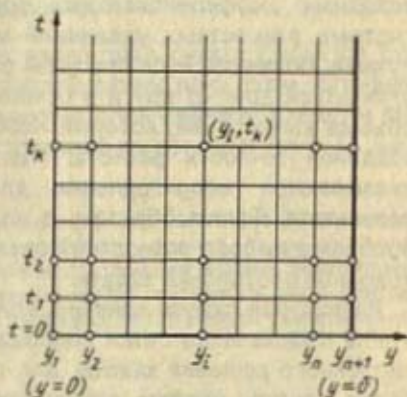


Рис. 1. Прямоугольная сетка в плоскости  $(y, t)$

\* Ллевому граничному узлу (при  $y = 0$ ) присвоен номер 1, а не 0, так как при программировании совокупность сеточных значений температуры на каждом шаге по времени удобно представлять в виде массива, а нумерация элементов массива в Фортране начинается с 1.



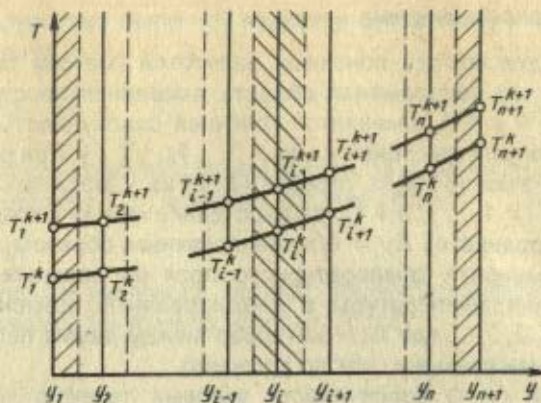


Рис. 2. Распределения сеточной функции  $T_i^k$  по толщине пластины для двух последовательных моментов времени

алгебраических (разностных) уравнений, связывающих значения сеточной функции в соседних узловых точках. Такая система алгебраических уравнений, являющаяся приближенной математической моделью процесса теплопроводности, называется *разностной схемой* решения исходной краевой задачи. Как будет показано в дальнейшем, переход от исходных дифференциальных соотношений к соответствующей им системе разностных уравнений может быть произведен различными путями. Получающиеся при этом разностные схемы могут значительно отличаться друг от друга в отношении точности и эффективности, т.е. объема вычислений, который необходимо произвести для достижения заданной точности расчета. Некоторые разностные схемы вообще оказываются непригодными для получения удовлетворительного результата. Таким образом, в каждом конкретном случае возникает проблема выбора разностной схемы, наилучшим образом отвечающей исходной постановке задачи.

Разностная схема, конечно, должна быть построена таким образом, чтобы измельчение сетки сопровождалось уменьшением погрешности численного решения задачи. Для того чтобы выразить это требование более строго, введем количественную характеристику погрешности расчета  $\varepsilon_i^k$ , выразив ее в каждой точке в виде разности между значением сеточной функции  $T_i^k$  и точным значением температуры  $T(y_i, t_k)$

$$\varepsilon_i^k = | T_i^k - T(y_i, t_k) | .$$

Погрешность расчета температуры в  $k$ -тый момент времени  $\varepsilon^k$  естественно определить как максимальное значение  $\varepsilon_j^k$

$$\varepsilon^k = \max_j \varepsilon_j^k,$$

а общую погрешность  $\varepsilon$ , характеризующую качество всего численного решения задачи, как

$$\varepsilon = \max_k \varepsilon^k = \max_{l, k} \varepsilon_j^k.$$

Подчеркивая зависимость погрешности расчета от величины шагов по координате и времени, запишем  $\varepsilon = \varepsilon(\Delta y, \Delta t)$ . Тогда для правильно построенной разностной схемы должно выполняться предельное соотношение

$$\varepsilon(\Delta y, \Delta t) \rightarrow 0, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

В этом случае говорят, что численное решение сходится к точному решению исходной краевой задачи, а сама разностная схема называется *сходящейся*. С помощью сходящихся разностных схем численное решение задачи теплопроводности может быть получено — при выборе достаточно мелкой сетки — с любой наперед заданной точностью<sup>1</sup>.

Для более детальной характеристики сходимости введем понятие *порядка точности* разностной схемы. Будем говорить, что разностная схема имеет  $l$ -тый порядок точности по координате и  $m$ -тый порядок точности по времени, если для достаточно малых  $\Delta y$  и  $\Delta t$

$$\varepsilon(\Delta y, \Delta t) \leq C(\Delta y^l + \Delta t^m), \text{ где } C = \text{const} > 0. \quad (3.14)$$

В этом случае также говорят, что разностная схема сходится со скоростью  $O(\Delta y^l + \Delta t^m)$ . Так, большинство разностных схем, которые будут рассмотрены в дальнейшем, имеют второй порядок точности по координате ( $l = 2$ ) и первый порядок точности по времени ( $m = 1$ ), т.е. сходятся со скоростью  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ .

Знание порядка точности разностной схемы позволяет не только качественно описать предельное поведение погрешности численного решения задачи, но также произвести практическую оценку этой погрешности при выполнении конкретных расчетов. Для этого применяют так называемый метод вторичного счета (метод Рунге), основанный на допущении о том, что погрешности  $\varepsilon_j^k$  в каждой узловой точке могут быть приближенно представлены в виде

$$\varepsilon_j^k(\Delta y, \Delta t) \approx A_j^k \Delta y^l + B_j^k \Delta t^m, \quad (3.15)$$

<sup>1</sup> Здесь не учитывается дополнительная погрешность, неизбежно возникающая при расчетах на ЭВМ, обусловленная ошибками округления.



где  $A_i^k$  и  $B_i^k$  — положительные коэффициенты, не зависящие от  $\Delta y$  и  $\Delta t$ . Рассмотрим сущность этого метода на примере разностной схемы, сходящейся со скоростью  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ .

Пусть  $T(y_i, t_k)$  — значение температуры в точке  $y_i$  в момент времени  $t_k$ , определенное точным решением задачи теплопроводности, а  $T_i^k(\Delta y, \Delta t)$  — соответствующее решение разностной задачи, полученное при значениях шагов по координате и времени, равных  $\Delta y$  и  $\Delta t$ . Предположим для определенности, что  $T_i^k(\Delta y, \Delta t) > T(y_i, t_k)$ . Тогда согласно соотношению (3.15)

$$T_i^k(\Delta y, \Delta t) - T(y_i, t_k) \approx A_i^k \Delta y^2 + B_i^k \Delta t, \quad (3.16)$$

Проведем повторное решение задачи, уменьшив шаг по координате в два раза, а шаг по времени — в четыре раза. В результате получим уточненные значения температуры  $T_i^k(\Delta y/2, \Delta t/4)$ , при этом погрешность расчета в точке  $(y_i, t_k)$  станет равной

$$T_i^k(\Delta y/2, \Delta t/4) - T(y_i, t_k) \approx \frac{1}{4}(A_i^k \Delta y^2 + B_i^k \Delta t), \quad (3.17)$$

т.е. уменьшится в четыре раза. Исключая из уравнений (3.16) и (3.17) неизвестное значение температуры  $T(y_i, t_k)$ , получим

$$T_i^k(\Delta y, \Delta t) - T_i^k(\Delta y/2, \Delta t/4) \approx \frac{3}{4}(A_i^k \Delta y^2 + B_i^k \Delta t),$$

откуда, учитывая соотношение (3.15), найдем

$$\epsilon_i^k(\Delta y, \Delta t) \approx \frac{4}{3} [T_i^k(\Delta y, \Delta t) - T_i^k(\Delta y/2, \Delta t/4)].$$

Выберем узловую точку  $(y_i, t_k)$ , в которой полученное выражение принимает наибольшее значение. Тогда

$$\epsilon(\Delta y, \Delta t) \approx \frac{4}{3} \max_{i,k} [T_i^k(\Delta y, \Delta t) - T_i^k(\Delta y/2, \Delta t/4)].$$

В общем случае в правой части последнего соотношения будет фигурировать абсолютная величина разности сеточных значений температур, т.е.

$$\epsilon(\Delta y, \Delta t) \approx \frac{4}{3} \max_{i,k} |T_i^k(\Delta y, \Delta t) - T_i^k(\Delta y/2, \Delta t/4)|. \quad (3.18)$$

Возможность применения описанного метода для оценки погрешности численного решения задачи теплопроводности будет продемонстрирована в примере 3.1.

Построение разностных схем производят обычно путем некоторого преобразования исходной дифференциальной задачи теплопроводности. Это преобразование может быть выполнено двумя основными способами.

Первый способ, называемый *методом разностной аппроксимации*, заключается в приближенной замене производных, фигурирующих в уравнении теплопроводности и граничных условиях, их разностными аналогами, т.е. выражениями, зависящими от разностей значений температур в соседних узловых точках. Чтобы произвести такую замену, следует разложить функцию  $T(y, t)$  в окрестности каждой узло-

вой точки в ряд Тейлора и ограничиться конечным числом членов разложения.

Второй способ, называемый *методом баланса*, заключается в составлении уравнений теплового баланса для каждой элементарной ячейки сеточной области. Эти уравнения выводятся путем интегрирования уравнения теплопроводности по координате и времени в пределах элементарной ячейки с последующей заменой получающихся интегралов приближенными разностными выражениями.

Сходимость построенных таким образом разностных схем, однако, не обеспечивается автоматически. Дело заключается в том, что при переходе от дифференциальной задачи теплопроводности к соответствующей ей разностной схеме может происходить нарушение физических законов, лежащих в основе математического описания процесса теплопроводности: закона сохранения энергии и второго начала термодинамики.

При нарушении закона сохранения энергии получаются так называемые неконсервативные разностные схемы, решение которых может не иметь никакого физического смысла<sup>1</sup>. Недостатком метода разностной аппроксимации является как раз то, что формальная замена производных разностными выражениями не гарантирует соблюдения закона сохранения энергии, поэтому при неудачной аппроксимации дифференциальных операторов разностные схемы, построенные этим способом, могут оказаться неконсервативными. Метод баланса, напротив, обеспечивает построение консервативных разностных схем, так как закон сохранения энергии в этом случае определяет физическое содержание каждого разностного уравнения.

Одной из основных характеристик разностной схемы является степень ее близости к исходной дифференциальной задаче теплопроводности. Для получения количественной оценки этой характеристики подставим в разностные уравнения точное решение исходной задачи  $T(y, t)$ . Поскольку описание процесса теплопроводности разностной схемой является приближенным, тождественного равенства при этом получено не будет. Обозначим через  $\gamma_i^k$  величину невязки, т.е. модуля разности между левой и правой частями разностного уравнения, соответствующего  $i$ -тому узлу и переходу от  $k$ -того к  $k + 1$ -му моменту времени.

Максимальное значение невязок во всей рассматриваемой сеточной области

---

<sup>1</sup> Строго говоря, консервативность разностной схемы не является необходимым условием ее сходимости: существуют сходящиеся разностные схемы, для которых законы сохранения не выполняются, но величина дисбаланса стремится к нулю при измельчении сетки.



$$\gamma = \max_{i, k} \gamma_i^k, \quad (3.19)$$

характеризующее степень близости разностной схемы к исходной дифференциальной задаче теплопроводности, называется *погрешностью аппроксимации*. Подчеркивая зависимость погрешности аппроксимации от величины шагов по координате и времени, запишем  $\gamma = \gamma(\Delta y, \Delta t)$ . Очевидно, что для правильно построенной разностной схемы при измельчении сетки погрешность аппроксимации должна уменьшаться, т.е.

$$\gamma(\Delta y, \Delta t) \rightarrow 0, \quad \Delta y, \Delta t \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

В этом случае говорят, что разностная схема *аппроксимирует* исходную задачу теплопроводности.

Для более детальной характеристики соответствия разностной схемы исходной дифференциальной задаче введем понятие *порядка аппроксимации*. Будем говорить, что порядок аппроксимации по координате равен  $l$  и по времени  $m$ , если для достаточно малых  $\Delta y$  и  $\Delta t$

$$\gamma(\Delta y, \Delta t) \leq C(\Delta y^l + \Delta t^m), \quad \text{где } C = \text{const} > 0. \quad (3.21)$$

В символическом виде это соотношение записывают так:  $\gamma(\Delta y, \Delta t) = O(\Delta y^l + \Delta t^m)$ .

Наличие погрешности аппроксимации приводит, естественно, к тому, что решение системы разностных уравнений оказывается приближенным, характеризуемым на каждом шаге по времени погрешностью численного решения задачи  $\varepsilon^k$ . Величина этой погрешности в процессе счета (при увеличении  $k$ ) может увеличиваться: если в первый момент времени (при  $k = 1$ ) она обусловлена только погрешностью аппроксимации<sup>1</sup>, то при переходе к последующим моментам  $k = 2, 3, \dots$  на ее величине начинают сказываться также неточности определения значений температур, являющихся исходными для каждого очередного шага по времени. Для правильно построенной разностной схемы погрешность  $\varepsilon^k$  в процессе счета должна если не убывать, то, по крайней мере, оставаться ограниченной. Такие схемы называются *устойчивыми*. Для неустойчивых разностных схем погрешность расчета неограниченно возрастает по ходу вычислений, в результате чего численное решение перестает соответствовать физическому содержанию исходной задачи. Это объясняется тем, что при неправильном выборе параметров разностной схемы, в частности отношения между величинами шагов по

<sup>1</sup> Здесь, как и ранее, не учитываются ошибки округления, так как при тех значениях  $\Delta y$  и  $\Delta t$ , которые обычно используются при решении практических задач, основной причиной погрешности расчета является погрешность аппроксимации.

времени и координате, происходит нарушение одного из фундаментальных физических законов, лежащих в основе математического описания процесса теплопроводности, а именно, второго начала термодинамики.

Таким образом, для обеспечения сходимости разностной схемы требуется, чтобы она не только аппроксимировала исходную дифференциальную задачу, но и являлась устойчивой. Строгое доказательство этого положения приводится в литературе по численным методам и обычно кратко формулируется следующим образом: *из аппроксимации и устойчивости следует сходимость*; при этом порядок сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

Итак, при разработке дискретного аналога исходной дифференциальной задачи теплопроводности необходимо следующее:

выбрать сетку, задав значения шагов по координате и времени;

построить разностную схему, т.е. записать систему уравнений относительно сеточных значений температур;

определить погрешность, с которой разностная схема аппроксимирует исходную задачу;

проверить устойчивость разностной схемы;

сделать вывод о сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи теплопроводности.

Перейдем к построению разностных схем для линейной одномерной задачи теплопроводности (3.7) – (3.12). Используем для этого метод баланса, причем будем исходить не из готовых дифференциальных соотношений, а непосредственно из законов сохранения энергии и переноса тепла, примененных к дискретному температурному полю.

Рассмотрим элементарный слой  $y_{i-\frac{1}{2}} < y < y_{i+\frac{1}{2}}$  толщиной  $\Delta y$ ,

соответствующий некоторому  $i$ -тому внутреннему узлу (на рис. 2 этот слой заштрихован), и запишем для него уравнение теплового баланса при переходе от  $k$ -того к  $k+1$ -му моменту времени. В расчете на единицу площади поперечного сечения пластины получим

$$c' \Delta y (T_i^{k+1} - T_i^k) = -\left(q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}}\right) \Delta t, \quad i=2, \dots, n, \quad (3.22)$$

где  $q_{i+\frac{1}{2}}$  – плотность теплового потока, входящего в  $i$ -тый слой со

стороны соседнего правого узла, а  $q_{i-\frac{1}{2}}$  – плотность теплового по-

тока, выходящего из  $i$ -того слоя и передаваемого соседнему левому узлу. Правая часть уравнения (3.22) выражает количество тепла, аккумулированного  $i$ -тым элементарным слоем ( $i$ -тым узлом) в течение



интервала времени  $\Delta t$ . Левая часть выражает изменение энтальпии элементарного слоя при изменении его температуры от  $T_i^k$  до  $T_i^{k+1}$ .

Для получения замкнутой системы разностных уравнений относительно сеточных значений температур нужно связать плотности тепловых потоков  $q_{i+\frac{1}{2}}$  и  $q_{i-\frac{1}{2}}$  с температурами в соответствующих

узловых точках. Для этого используем дискретный аналог закона Фурье

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta y}, \quad q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta y}. \quad (3.23)$$

При конкретизации выражений (3.23) следует указать, какому моменту времени соответствуют температуры  $T_{i-1}$ ,  $T_i$  и  $T_{i+1}$ . Возможность различных ответов на этот вопрос и является главной причиной многообразия разностных схем решения исходной задачи теплопроводности.

Если плотности тепловых потоков вычисляются по температурам в предыдущий,  $k$ -тый момент времени, т.е.

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta y}, \quad q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta y}, \quad (3.24)$$

то в результате получается так называемая *явная* разностная схема. Если в выражениях (3.23) фигурируют температуры в последующий,  $k+1$ -ый момент времени, т.е.

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta y}, \quad q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{\Delta y}, \quad (3.25)$$

то получающаяся разностная схема называется *чисто неявной*. В общем случае можно считать, что плотности тепловых потоков определяются некоторыми средними значениями температур  $\bar{T} = (1 - \mu)T^k + \mu T^{k+1}$  при  $0 \leq \mu \leq 1$ , т.е.

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i}{\Delta y}, \quad q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{\bar{T}_i - \bar{T}_{i-1}}{\Delta y}, \quad (3.26)$$

или

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \left[ (1 - \mu) \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta y} + \mu \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta y} \right],$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \left[ (1 - \mu) \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta y} + \mu \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{\Delta y} \right]. \quad (3.26)$$

Здесь параметр  $\mu$  характеризует относительный вклад температур, соответствующих последующему,  $k + 1$ -му моменту времени, в величину плотности теплового потока. Разностная схема, основанная на соотношениях (3.26), называется *нелвной схемой* с весом  $\mu$ . При  $\mu = 0$  получаем явную, а при  $\mu = 1$  — чисто нелвную схему.

#### Явная разностная схема

Подставим выражения (3.24) в уравнения (3.22) для внутренних узлов и введем обозначение  $f = a \Delta t / \Delta y^2$ , где  $a$  — коэффициент температуропроводности. После элементарных преобразований получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta y^2}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (3.27)$$

являющуюся разностным аналогом дифференциального уравнения теплопроводности (3.12). Из приведенных уравнений следует, что

$$T_i^{k+1} = fT_{i-1}^k + (1 - 2f)T_i^k + fT_{i+1}^k, \quad i = 2, \dots, n, \quad (3.27')$$

т.е. в каждый  $k + 1$ -ый момент времени новые значения температуры  $T_i^{k+1}$  определяются тремя ее значениями  $T_{i-1}^k$ ,  $T_i^k$  и  $T_{i+1}^k$  в предыдущий,  $k$ -тый момент времени. Это положение иллюстрируется шаблоном, изображенным на рис. 3, который указывает совокупность точек  $(i, k)$ , используемых при записи разностных уравнений во внутренних узлах.

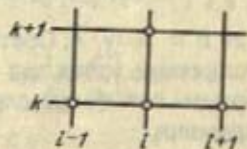


Рис. 3. Четырехточечный шаблон, соответствующий явной разностной схеме

Разностное уравнение для левого граничного узла ( $i = 1$ ), соответствующее граничному условию в центре пластины (3.8), получим, записав уравнение теплового баланса для крайнего левого элементарного слоя толщиной  $\Delta y/2$  (см. рис. 2)

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_1^{k+1} - T_1^k}{\Delta t} = \lambda \frac{T_2^k - T_1^k}{\Delta y}, \quad (3.28)$$

или

$$T_1^{k+1} = (1 - 2f)T_1^k + 2fT_2^k. \quad (3.28')$$



Для правого граничного узла ( $i = n + 1$ ) следует записать разностное уравнение, соответствующее одному из граничных условий на поверхности пластины (3.9), (3.10) или (3.11). При граничном условии I рода имеем

$$T_{n+1}^{k+1} = T_w.$$

При граничном условии II или III рода используем уравнение теплового баланса для крайнего правого элементарного слоя толщиной  $\Delta y/2$ . Записывая разностный аналог уравнения (3.9), получим

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k}{\Delta t} = q_w - \lambda \frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{\Delta y} \quad (3.30)$$

или

$$T_{n+1}^{k+1} = (1 - 2f)T_{n+1}^k + 2f(T_n^k + \Delta T), \quad (3.30')$$

где  $\Delta T = q_w \Delta y / \lambda$ .

При записи разностного уравнения, соответствующего граничному условию (3.11), учтем, что плотность внешнего теплового потока на  $k$ -том шаге по времени равна  $\alpha(T_0 - T_{n+1}^k)$ , получим

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k}{\Delta t} = \alpha(T_0 - T_{n+1}^k) - \lambda \frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{\Delta y} \quad (3.31)$$

или

$$T_{n+1}^{k+1} = 2fT_n^k + [1 - 2f(1 + b)]T_{n+1}^k + 2fbT_0, \quad (3.31')$$

где  $b = \alpha \Delta y / \lambda$ . Соотношения (3.28'), (3.30') и (3.31') показывают, что в граничных узлах так же, как и во внутренних, новые значения температуры полностью определяются ее значениями в предыдущий момент времени.

Таким образом, зная исходное распределение температуры (при  $k = 0$ ), вытекающее из начального условия (3.7)

$$T_i^0 = T_w, \quad i = 1, \dots, n + 1, \quad (3.32)$$

и используя приведенные разностные уравнения, можно, последовательно переходя от  $k$ -того к  $k + 1$ -му моменту времени, произвести расчет дискретного температурного поля. Отметим, что особенностью полученной явной разностной схемы является то, что она распадается на отдельные уравнения, решение которых производится независимо друг от друга, причем вычисление новых значений температур в каждый момент времени производится по явным формулам.

Перейдем к рассмотрению основных свойств явной разностной схемы. Прежде всего оценим степень ее близости к исходной диффе-

ренциальной задаче теплопроводности, т.е. определим для нее порядок аппроксимации. Для конкретности будем рассматривать задачу теплопроводности с граничным условием III рода.

Подставим точное решение исходной задачи  $T(y, t)$  в уравнения (3.27), (3.28), (3.31) и найдем значения невязок  $\gamma_i^k$ . Для внутренних узлов ( $i = 2, \dots, n$ ), используя уравнения (3.27), получим

$$\gamma_i^k = \left| \frac{T(y_i, t_k + 1) - T(y_i, t_k)}{\Delta t} - a \frac{T(y_{i+1}, t_k) - 2T(y_i, t_k) + T(y_{i-1}, t_k))}{\Delta y^2} \right|. \quad (3.33)$$

Для граничных узлов аналогичные выражения для невязок  $\gamma_1^k$  и  $\gamma_{n+1}^k$  вытекают из соотношений (3.28) и (3.31):

$$\gamma_1^k = \left| \frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T(y_1, t_k + 1) - T(y_1, t_k)}{\Delta t} - \lambda \frac{T(y_2, t_k) - T(y_1, t_k)}{\Delta y} \right|; \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}^k = & \left| \frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T(y_{n+1}, t_k + 1) - T(y_{n+1}, t_k)}{\Delta t} - \alpha [T_0 - T(y_{n+1}, t_k)] + \right. \\ & \left. + \lambda \frac{T(y_{n+1}, t_k) - T(y_n, t_k)}{\Delta y} \right|. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Преобразуем выражение (3.33), используя разложение функции  $T(y, t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(y_i, t_k)$ :

$$T(y_i, t_k + 1) = T(y_i, t_k) + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3);$$

$$\begin{aligned} T(y_{i+1}, t_k) = & T(y_i, t_k) + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Delta y^3 + \\ & + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} \Delta y^4 + O(\Delta y^5); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(y_{i-1}, t_k) = & T(y_i, t_k) - \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Delta y^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Delta y^3 + \\ & + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} \Delta y^4 + O(\Delta y^5) \end{aligned}$$

После алгебраических преобразований, которые читателю предлагается провести самостоятельно, получим

$$\gamma_i^k = \left| \frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \Delta t + \frac{a}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} \Delta y^2 + \dots \right|,$$

или, учитывая справедливость уравнения теплопроводности (3.12),



$$\gamma_i^k = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \Delta t + \frac{a}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} \Delta y^2 + \dots \right|.$$

Здесь многоточие заменяет члены более высокого порядка малости. Из последнего соотношения нетрудно сделать вывод о том, что

$$\gamma_i^k = O(\Delta y^2 + \Delta t), \quad i=2, \dots, n. \quad (3.36)$$

Значения невязок разностных уравнений для граничных узлов оценим, проведя аналогичные преобразования выражений (3.34) и (3.35). Используя уравнение теплопроводности (3.12) и граничные условия (3.8) и (3.11), получим:

$$\gamma_1^k = \left| \frac{1}{4} c' \frac{\partial^2 T}{\partial T^2} \Delta y \Delta t - \frac{1}{6} \lambda \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Delta y^2 + \dots \right|;$$

$$\gamma_{n+1}^k = \left| \frac{1}{4} c' \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \Delta y \Delta t + \frac{1}{6} \lambda \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Delta y^2 + \dots \right|.$$

Используя очевидное неравенство  $|\Delta y \Delta t| \leq \frac{1}{2} (\Delta y^2 + \Delta t^2)$ , нетрудно убедиться в том, что невязки  $\gamma_1^k$  и  $\gamma_{n+1}^k$  имеют второй порядок малости по  $\Delta y$  и  $\Delta t$ , т.е.

$$\gamma_1^k = O(\Delta y^2 + \Delta t^2) \text{ и } \gamma_{n+1}^k = O(\Delta y^2 + \Delta t^2). \quad (3.37)$$

Из соотношений (3.36) и (3.37) следует, что погрешность аппроксимации всей разностной схемы (3.27), (3.28), (3.31) равна  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ , т.е. имеет второй порядок по координате и первый порядок по времени.

Оценка порядка аппроксимации позволит сделать некоторые априорные заключения о точности той или иной разностной схемы. Например, при аппроксимации граничных условий (3.8) и (3.11) путем непосредственной замены производных их разностными аналогами вместо (3.28) и (3.31) получим

$$(T_2^k - T_1^k) / \Delta y = 0 \quad (3.38)$$

и

$$\lambda \frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{\Delta y} = \alpha (T_0 - T_{n+1}^k). \quad (3.39)$$

Легко показать, что в этом случае имеют место следующие соотношения:  $\gamma_1^k = O(\Delta y)$  и  $\gamma_{n+1}^k = O(\Delta y)$ , т.е. невязки разностных граничных условий имеют первый порядок по координате. Это влечет за собой понижение порядка аппроксимации всей разностной схемы, погрешность которой становится равной  $O(\Delta y + \Delta t)$ . При такой несогласованной аппроксимации граничных условий следует ожидать су-

щественного увеличения погрешности численного решения задачи (см. пример 3.1). Из сравнения разностных уравнений (3.38), (3.39) и (3.28), (3.31) следует, что физической причиной ухудшения точности расчета в данном случае является пренебрежение изменением энтальпии граничных полуслоев.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости явной разностной схемы, т.е. о том, при каких условиях для нее может оказаться нарушенным второе начало термодинамики.

Вернемся к уравнениям элементарного теплового баланса (3.22) и предположим для определенности, что происходит нагрев тела. Тогда абсолютная величина плотности теплового потока, поступающего в  $i$ -тый элементарный слой со стороны соседнего правого узла будет больше плотности теплового потока, выходящего из этого слоя и передаваемого соседнему левому узлу:  $|q_{i+\frac{1}{2}}| > |q_{i-\frac{1}{2}}|$ . С учетом

приближенного выражения закона Фурье в форме (3.24) получим

$$\lambda \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta y} > \lambda \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta y}$$

или

$$T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k > 0. \quad (3.40)$$

Возрастание температуры  $i$ -того слоя в течение шага по времени  $\Delta t_i = T_i^{k+1} - T_i^k$  найдем из разностного уравнения (3.27'), которое перепишем в следующем виде

$$\Delta T_i = f(T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k). \quad (3.41)$$

При записи уравнения (3.41) пока не было введено никаких ограничений на величину  $f = a \Delta t / \Delta y^2$ , в значительной степени определяющую свойства явной разностной схемы. Поскольку закон сохранения энергии, выражаемый балансовым уравнением (3.41), соблюдается при произвольных значениях  $f$ , ограничения на величину этого параметра могут вытекать лишь из требований, предъявляемых к разностному решению вторым началом термодинамики.

Действительно, в основе явной разностной схемы лежит допущение о том, что в течение промежутка времени  $\Delta t$ , разделяющего два последовательных дискретных момента времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , плотности тепловых потоков  $q_{i+\frac{1}{2}}$  и  $q_{i-\frac{1}{2}}$  для  $i$ -того внутреннего узла опреде-

ляются температурами в соседних узлах  $T_{i-1}^k$  и  $T_{i+1}^k$  в предыдущий,  $k$ -тый момент времени. Но в соответствии со вторым началом термо-



динамики при фиксированных значениях  $T_{i-1}^k$  и  $T_{i+1}^k$  температура  $i$ -того слоя не может в течение шага по времени превысить величины, равной

$$T_i^* = \frac{1}{2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k), \quad (3.42)$$

характеризующей стационарное, равновесное состояние этого слоя (рис. 4, а). Таким образом, возможное изменение температуры в течение шага по времени  $\Delta T_i$  оказывается ограниченным:  $\Delta T_i \leq T_i^* - T_i^k$ . Подставив в это неравенство выражения (3.41) и (3.42), получим

$$f(T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) \leq \frac{1}{2}(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) - T_i^k,$$

откуда, с учетом (3.40), следует ограничение на величину  $f$

$$f \leq \frac{1}{2}. \quad (3.43)$$

Для левого граничного узла максимально возможное значение температуры в  $k+1$ -й момент времени (рис. 4, б)  $T_1^* = T_2$ , т.е. должно выполняться неравенство  $\Delta T_1 \leq T_2^k - T_1^k$ . Отсюда, используя разностное уравнение (3.28), получим такое же условие как и для внутренних узлов:

$$f \leq \frac{1}{2}.$$

Для правого граничного узла ситуация несколько отличается от рассмотренной выше, так как значение  $T_{n+1}^*$ , соответствующее стационарному состоянию, определяется равенством плотности внешне-

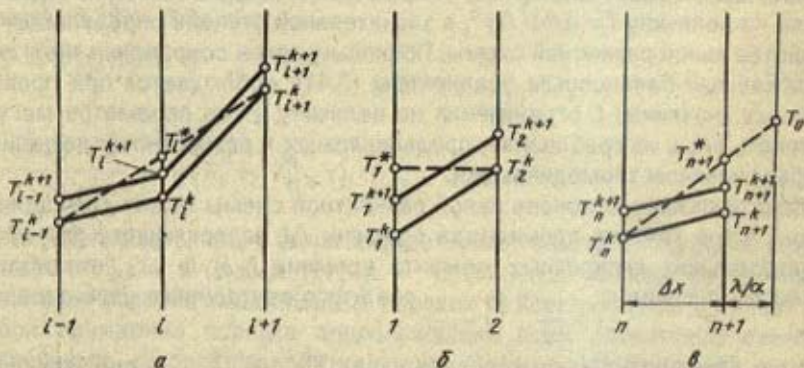


Рис. 4. К выводу условия устойчивости явной разностной схемы

го теплового потока и плотностью теплового потока, отводимого от поверхности нагрева внутрь тела,

$$\alpha(T_0 - T_{n+1}^*) = \lambda \frac{T_{n+1}^* - T_n^k}{\Delta y}$$

или  $\frac{T_0 - T_{n+1}^*}{\lambda/\alpha} = \frac{T_{n+1}^* - T_n^k}{\Delta y}$ .

Иллюстрацией последнего равенства может служить рис. 4, в. Таким образом  $T_{n+1}^* = (T_n^k + bT_0)/(1 + b)$ , где  $b = \alpha\Delta y/\lambda$ , и максимально допустимое изменение температуры правого граничного узла

$$T_{n+1}^* - T_{n+1}^k = \frac{T_n^k - (1+b)T_{n+1}^k + bT_0}{1+b}.$$

Учитывая, что в соответствии с уравнением (3.31')

$$\Delta T_{n+1} = 2f[T_n^k - (1+b)T_{n+1}^k + bT_0],$$

из соотношения

$$\Delta T_{n+1} \leq T_{n+1}^* - T_{n+1}^k$$

получим следующее неравенство

$$f \leq 1/[2(1+b)], \quad (3.44)$$

являющееся более сильным, чем соответствующее ограничение для внутренних узлов. Соотношение (3.44) выражает условие, при котором вся разностная схема удовлетворяет второму началу термодинамики, что обеспечивает ее устойчивость.

Поскольку, как показано выше, явная разностная схема аппроксимирует исходную задачу теплопроводности, выполнение условий устойчивости (3.44) гарантирует ее сходимость, при этом порядок сходимости совпадает с порядком аппроксимации. Таким образом, при выполнении условия (3.44) явная разностная схема сходится со скоростью  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ .

В заключение отметим основной недостаток явной разностной схемы, связанный с ограничением (3.44) на величину параметра  $f = \alpha\Delta t/\Delta y^2$ : выбор достаточно малого шага  $\Delta y$ , обусловленный необходимостью детального описания температурного поля, требует для обеспечения устойчивости разностной схемы задания столь мелкого шага  $\Delta t$ , что затраты времени на решение задачи обычно становятся неоправданно большими. Отметим к тому же, что, поскольку максимально допустимая величина шага  $\Delta t$  уменьшается при возрастании параметра  $b = \alpha\Delta y/\lambda$ , ограничение (3.44) становится особенно обре-



менительным при описании процессов, характеризующихся высокой интенсивностью внешней теплоотдачи.

Пример 3.1. Рассчитать распределение температуры по сечению слэба, нагреваемого в течение 480 с в печи скоростного конвективного нагрева. Половина толщины слэба  $\delta = 0,08$  м, начальная температура  $T_0 = 1100$  К. Температура газа  $T_g = 2000$  К, коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 350$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали соответственно равны:  $\lambda = 28$  Вт/(м·К) и  $a = 6,4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

В данном случае задача теплопроводности описывается уравнениями (3.12), (3.7), (3.8) и (3.11). Для прямой оценки точности расчета будем использовать известное аналитическое решение этой задачи, которое может быть получено, например методом разделения переменных:

$$T(y, t) = T_0 - (T_0 - T_H) \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp\left(-\mu_m^2 \frac{at}{\delta^2}\right) \cos\left(\mu_m \frac{y}{\delta}\right), \quad (3.45)$$

где  $C_m = 2 \sin \mu_m / (\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m)$ ,  $\mu_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) представляют собой характеристические числа, удовлетворяющие уравнению  $\operatorname{ctg} \mu = \mu / \text{Bi}$ , а  $\text{Bi} = \alpha \delta / \lambda$  — критерий Био. При указанных в условии задачи значениях определяющих параметров  $\text{Bi} = 1$ , при этом  $\mu_1 = 0,8603$ ,  $\mu_2 = 3,4256, \dots$

Применяя выражение (3.45) для расчета "точных" значений температур, ограничимся двумя первыми слагаемыми. При  $t = 480$  с это обеспечивает абсолютную погрешность расчета  $\sim 0,1$  К, вполне достаточную для того, чтобы использовать найденные значения при оценке погрешности численного решения. Распределение температуры по сечению слэба в указанный момент времени, найденное по формуле (3.45), приведено в первой строке табл. 1.

Применив для решения рассматриваемой задачи явную разностную схему, составим программу расчета, текст которой приведен в приложении 1. Программа предусматривает ввод значений  $\Delta y$  и  $\Delta t$ , проведение вычислений по явным формулам (3.27'), (3.28'), (3.31') и вывод на экран дисплея значений температур, соответствующих заданному моменту времени.

В первом варианте расчета выберем сетку, имеющую 6 узловых точек ( $n = 5$ ); при этом  $\Delta y = 0,016$  м и  $b = \alpha \Delta y / \lambda = \text{Bi} / n = 0,2$ . Шаг по времени выберем, исходя из условия устойчивости (3.44)

$$f = a \Delta t / \Delta y^2 \leq 1 / [2(1 + b)] = 0,417,$$

Таблица 1. Результаты расчета температуры пластины по явной разностной схеме

Вариант	Температура, К,					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Точное решение	1294,4	1297,0	1304,8	1317,6	1335,4	1358,2
1	1295,0	—	1305,4	—	1336,3	—
2	1294,6	1297,2	1304,9	1317,8	1335,6	1358,5
3	1324,6	1324,6	1330,1	1341,0	1357,3	1378,8

причем таким образом, чтобы заданный момент времени  $t = 480$  с соответствовал целому числу шагов  $\Delta t$ . Положим  $\Delta t = 16$  с, тогда  $f = 0,4$ . Результаты расчета приведены в табл. 1 (см. вариант 1). Отметим, что явная схема дает несколько завышенные значения температуры нагреваемого тела. Это объясняется тем, что в рамках явной разностной схемы плотность внешнего теплового потока  $\alpha (T_0 - T_{n+1}^k)$  определяется температурой поверхности  $T_{n+1}^k$  в предшествующей  $k$ -тый момент времени, поэтому при расчете нагрева тела эта величина на каждом шаге по времени получает завышенное значение.

Для того чтобы продемонстрировать влияние величины шагов по координате и времени на точность расчета, уменьшим шаг по координате в два раза, т.е. положим  $n = 10$ ,  $\Delta y = 0,008$  м. В соответствии с оценкой  $\epsilon = O(\Delta y^2; \Delta t)$  одновременно в четыре раза уменьшим шаг по времени, т.е. возьмем  $\Delta t = 4$  с. Значения температур, полученные для уточненного варианта, приведены в табл. 1 (см. вариант 2). Как видно, измельчение сетки действительно сопровождается увеличением точности расчета, причем фактическое уменьшение погрешности приближенно соответствует соотношению  $\epsilon = O(\Delta y^2 + \Delta t)$ .

При отсутствии точного решения задачи для оценки погрешности расчета можно применить метод Рунге. В рассматриваемом примере для этого нужно выбрать узел, для которого разность между решениями, найденными в первом и втором вариантах, имеет наибольшее значение, и применить для него формулу (3.18). Для узла, расположенного на поверхности сляба, получим  $\epsilon \approx 4/3 (1540,6 - 1539,5) \approx 1,5$  К. Найденная таким образом оценка практически совпадает с фактической погрешностью первого варианта расчета.

Для иллюстрации последствий, к которым приводит несогласованная аппроксимация граничных условий, проведем решение задачи по разностной схеме, составленной из уравнений (3.27), (3.38) и (3.39) и имеющей погрешность аппроксимации (а следовательно, и скорость сходимости), равную  $O(\Delta y + \Delta t)$ . При этом следует несколько изменить текст программы, приведя выражения, по которым производится вычисление граничных значений температур, в соответствии с уравнениями (3.38) и (3.39). Полученные результаты (см. вариант 3 табл. 1) свидетельствуют о том, что понижение порядка сходимости разностной схемы, вызванное неудачной аппроксимацией граничных условий, действительно сопровождается существенным ухудшением точности численного решения задачи.

Посмотрим теперь, как отражается на численном решении нарушение условия устойчивости явной разностной схемы. Положим  $\Delta y = 0,016$  м и увеличим шаг по времени до  $\Delta t = 20$  с. При этом  $f = 0,5$ , что соответствует границе устойчивости для

при $u/\delta$					Максимальная погрешность, К
0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
1385,8	1417,8	1454,2	1494,7	1539,0	—
1386,7	—	1455,5	—	1540,6	1,6
1386,0	1418,1	1454,6	1495,1	1539,5	0,5
1405,3	1436,7	1472,7	1513,0	1557,3	30,2



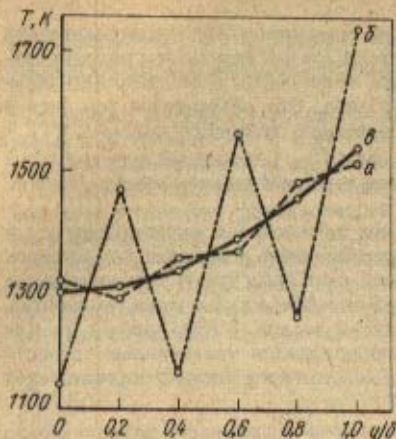


Рис. 5. Результаты расчета по явной разностной схеме при нарушении условия устойчивости:

а — численное решение при  $f = 0,5$ ; б — то же, при  $f > 0,5$ ; в — точное решение

внутренних и левого граничного узлов, но нарушает условие (3.44) для правого граничного узла. Результаты расчета, представленные на рис. 5, показывают, что погрешность численного решения в этом случае значительно возрастает, причем изменение температуры относительно точного решения приобретает колебательный характер. При более существенном нарушении условия устойчивости, происходящем, например, при  $\Delta t = 21$  с ( $f > 0,5$ ), численное решение, показанное на рис. 5, вообще теряет всякий физический смысл.

Подводя итог, можно сделать вывод о том, что правильно построенная явная разностная схема обеспечивает высокую точность решения задачи теплопроводности. Это достигается конечно за счет выбора достаточно малого шага по времени и соответствующего возрастания объема вычислений. К сожалению, если постановкой задачи допускается меньшая точность расчета, и результат мог бы быть получен с меньшими вычислительными затратами, этого нельзя достичь путем увеличения шага по времени, так как его величина ограничена условием устойчивости. В таких случаях использование явной разностной схемы становится нецелесообразным, и более эффективными оказываются неявные схемы, свободные от ограничений на выбор шага по времени.

#### Неявная четырехточечная разностная схема

Построение неявной четырехточечной (чисто неявной) разностной схемы произведем путем подстановки в балансовые уравнения (3.22) плотностей тепловых потоков, выраженных через температуры в последующий,  $k + 1$ -й момент времени. С учетом соотношений (3.25) для каждого внутреннего узла запишем уравнение

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \quad (3.46)$$

или

$$-T_{i-1}^{k+1} + (1 + 2f)T_i^{k+1} - fT_{i+1}^{k+1} = T_i^k, i = 2, \dots, n. \quad (3.46')$$

Структура полученной разностной схемы иллюстрируется четырехточечным шаблоном, изображенным на рис. 6. Для граничных узлов запишем уравнения теплового баланса, аналогичные соотношениям (3.28) – (3.31), с той лишь разницей, что в выражениях для плоскостей тепловых потоков будут фигурировать теперь температуры в  $k + 1$ -й момент времени:

при  $i = 1$

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_1^{k+1} - T_1^k}{\Delta t} = \lambda \frac{T_2^{k+1} - T_1^{k+1}}{\Delta y} \quad (3.47)$$

или

$$(1 + 2f)T_1^{k+1} - 2fT_2^{k+1} = T_1^k; \quad (3.47')$$

при  $i = n + 1$  и граничном условии I рода

$$T_{n+1}^{k+1} = T_w; \quad (3.48)$$

при  $i = n + 1$  и граничном условии II рода

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k}{\Delta t} = q_w - \lambda \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_n^{k+1}}{\Delta y} \quad (3.49)$$

$$\text{или } -2fT_n^{k+1} + (1 + 2f)T_{n+1}^{k+1} = T_{n+1}^k + 2f\Delta T, \quad (3.49')$$

где  $\Delta T = q_w \Delta y / \lambda$ ;

при  $i = n + 1$  и граничном условии III рода

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k}{\Delta t} = \alpha (T_o - T_{n+1}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_n^{k+1}}{\Delta y} \quad (3.50)$$

$$\text{или } -2fT_n^{k+1} + [1 + 2f(1 + b)]T_{n+1}^{k+1} = T_{n+1}^k + 2fbT_o, \quad (3.50')$$

где  $b = \alpha \Delta y / \lambda$ .

В данном случае в отличие от явной разностной схемы зависимость искомых значений температуры в  $k + 1$ -й момент времени от ее значений в предыдущий,  $k$ -тый момент времени определяется разностными уравнениями неявным образом, поэтому для расчета дискретного температурного поля на каждом шаге по времени необходимо их совместное решение.

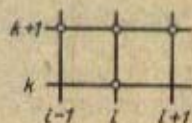


Рис. 6. Четырехточечный шаблон, соответствующий чисто неявной разностной схеме



Приведенная система разностных уравнений представляют собой систему  $n + 1$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных температур  $T_i^{k+1}, i = 1, \dots, n + 1$ , которую в матричном виде можно записать следующим образом:

$$AT^{k+1} = B,$$

где  $A$  – матрица коэффициентов, входящих в левые части уравнений;  $B$  – столбец свободных членов, определяемых температурами в предыдущий момент времени;  $T^{k+1} \equiv \{ T_i^{k+1} \}$  – столбец искоемых значений температур в последующий момент времени. Для решения этой системы могут быть применены различные методы решения систем линейных уравнений – как прямые, так и итерационные. Наиболее эффективным, однако, оказывается использование так называемого метода прогонки, учитывающего характерную особенность матрицы  $A$ , а именно то, что отличными от нуля являются лишь те ее элементы, которые располагаются на трех диагоналях: главной и двух к ней прилежащих.

Сущность метода прогонки заключается в том, что решение системы разностных уравнений (3.46') – (3.50') представляется в виде

$$T_i^{k+1} = \alpha_i T_{i+1}^{k+1} + \beta_i, i = 1, \dots, n, \quad (3.51)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – некоторые вспомогательные коэффициенты, и на каждом шаге по времени задача сводится к определению величин  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ .

При  $i = 1$  значения  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  найдем из левого граничного условия (3.47'), представив его в форме (3.51)

$$T_1^{k+1} = \frac{2f}{1+2f} T_2^{k+1} + \frac{T_1^k}{1+2f}.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \frac{2f}{1+2f}; \quad \beta_1 = \frac{T_1^k}{1+2f}. \quad (3.52)$$

Для нахождения остальных коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  приведем к виду (3.51) уравнения (3.46'), заменив в них  $T_{i-1}^{k+1}$  на  $\alpha_{i-1} T_i^{k+1} + \beta_{i-1}$ . После элементарных преобразований получим

$$T_i^{k+1} = \frac{f}{1+f(2-\alpha_{i-1})} T_{i+1}^{k+1} + \frac{T_i^k + f\beta_{i-1}}{1+f(2-\alpha_{i-1})}. \quad (3.53)$$

Из сопоставления уравнений (3.51) и (3.53) следует, что

$$\alpha_i = \frac{f}{1+f(2-\alpha_{i-1})}; \quad \beta_i = \frac{T_i^k + f\beta_{i-1}}{1+f(2-\alpha_{i-1})}. \quad (3.54)$$

Отметим, что температуры  $T_i^k$ , входящие в выражения для  $\beta_i$ , для каждого шага по времени являются известными величинами: при  $k = 0$  они задаются начальным условием (3.32), а для каждого последующего момента времени определяются результатами предшествующего расчета. Таким образом, вычислив значения  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  по формулам (3.52) и используя рекуррентные соотношения (3.54), можно последовательно найти все остальные значения  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  при  $i = 2, \dots, n$ .

Теперь, для того чтобы можно было начать применение формулы (3.51), необходимо определить температуру  $T_{n+1}^{k+1}$  в правом граничном узле. При граничном условии I рода, выражаемом соотношением (3.48), эта температура задана по условию. При граничном условии II рода для определения значения  $T_{n+1}^{k+1}$  необходимо использовать разностное уравнение (3.49'), заменив в нем  $T_n^{k+1}$  на  $\alpha_n T_{n+1}^{k+1} + \beta_n$ . Проведя элементарные преобразования, получим

$$T_{n+1}^{k+1} = \frac{T_n^k + 2f(\Delta T + \beta_n)}{1 + 2f(1 - \alpha_n)}. \quad (3.55)$$

При граничном условии III рода аналогичным образом из уравнения (3.50') получим

$$T_{n+1}^{k+1} = \frac{T_{n+1}^k + 2f(bT_0 + \beta_n)}{1 + 2f(1 + b - \alpha_n)}. \quad (3.56)$$

После этого, применяя формулу (3.51), последовательно найдем все остальные значения  $T_i^{k+1}$  при  $i = n, \dots, 1$ .

Итак, решение системы неявных разностных уравнений проводится в следующей последовательности. Сначала, перемещаясь по сетке слева направо, по формулам (3.52) и (3.54) вычисляем значения коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  (прямая прогонка). Затем, после нахождения температуры в правом граничном узле, перемещаясь по сетке справа налево, по формуле (3.51) определяем искомые значения температур  $T_i^{k+1}$  (обратная прогонка). После этого производится переход к очередному шагу по времени, и вся описанная процедура повторяется. Отметим, что при реализации метода прогонки значения коэффициентов  $\beta_i$  необходимо пересчитывать на каждом шаге по времени в соответствии с изменением температур  $T_i^k$ , а коэффициенты  $\alpha_i$ , остающиеся неизменными в течение всего расчета, могут быть вычислены заранее.

Рассмотрим кратко основные свойства неявной разностной схемы. Нетрудно показать так же, как это было сделано при исследовании явной схемы, что погрешность аппроксимации неявной четырехточечной разностной схемы равна  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ . Для обеспечения второго порядка аппроксимации по координате так же, как и в случае явной



разностной схемы, следует обращать внимание на согласованную аппроксимацию граничных условий.

Принципиально иная ситуация имеет место в отношении устойчивости неявной разностной схемы. Действительно, при построении этой схемы было использовано допущение о том, что в течение промежутка времени  $\Delta t$ , разделяющего два последовательных дискретных момента времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , плотности тепловых потоков определяются температурами в последующий,  $k+1$ -й момент времени. Отсюда следует, что, например, для некоторого внутреннего узла  $i$  максимально возможное значение температуры, характеризующее стационарное состояние  $i$ -того слоя, равно (рис. 7)

$$T_i^* = \frac{1}{2}(T_{i-1}^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}).$$

Понятно, что всегда  $T_i^{k+1} \leq T_i^*$ , поэтому второе начало термодинамики в данном случае не накладывает никаких ограничений на выбор

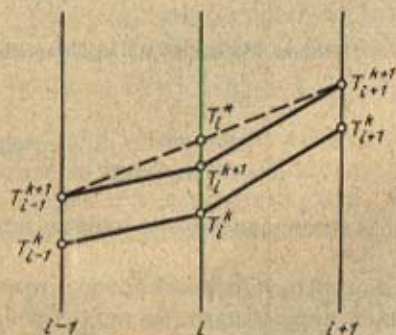


Рис. 7. К определению устойчивости чисто неявной разностной схемы

параметров разностной схемы. Другими словами, неявная четырехточечная разностная схема оказывается безусловно устойчивой, т.е. устойчивой при произвольных значениях шагов по координате и времени<sup>1</sup>.

Итак, поскольку неявная разностная схема аппроксимирует исходную задачу теплопроводности и является устойчивой, она сходится, причем скорость ее сходимости равна  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ .

В безусловной устойчивости неявных разностных схем заключается весьма существенное их преимущество перед явной схемой. Пос-

<sup>1</sup>Как будет показано ниже, запас устойчивости неявных разностных схем является гораздо большим: безусловно устойчивыми оказываются неявные схемы с весом  $\mu$  при  $1/2 < \mu < 1$ .

кольку при заданном шаге по координате выбор шага по времени определяется теперь только соображениями допустимой погрешности расчета, при решении многих практических задач его величина может иметь гораздо большее значение, чем при использовании явной разностной схемы. Поэтому, несмотря на усложнение алгоритма расчета и возрастание числа арифметических операций при просчете каждого шага по времени, общий объем вычислений обычно оказывается значительно меньшим, а применение неявных разностных схем — более эффективным.

**Пример 3.2.** Применим неявную четырехточечную разностную схему для решения задачи, сформулированной в предыдущем примере. Для этого составим программу, текст которой приведен в приложении 2. Программа предусматривает ввод значений  $\Delta y$  и  $\Delta t$ , реализацию метода прогонки в соответствии с формулами (3.51), (3.52), (3.54), (3.56) и вывод на экран дисплея значений температур в заданный момент времени.

Результаты нескольких вариантов расчета приведены в табл. 2 — 4.

Данные, представленные в табл. 2, свидетельствуют о том, что неявная четырехточечная и явная разностные схемы при равных значениях параметров обеспечивают примерно одинаковую точность численного решения задачи. Отметим, что расчет нагрева тела по неявной четырехточечной разностной схеме приводит к несколько заниженным значениям температуры. Это объясняется тем, что в данном случае плотность внешнего теплового потока  $\alpha (T_0 - T_{n+1}^k)$  определяется темпе-

**Таблица 2.** Сопоставление результатов расчета по явной (вариант 1) и неявной четырехточечной (вариант 2) разностным схемам при  $\Delta y = 0,016$  м,  $\Delta t = 16$  с с точным решением задачи (вариант 3)

Вариант	Температура, К, при $y/\delta$						Максимальная погрешность, К
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
1	1295,0	1305,4	1336,3	1386,7	1455,5	1540,6	1,6
2	1292,6	1303,0	1333,6	1383,9	1452,6	1538,0	1,9
3	1294,4	1304,8	1335,4	1385,8	1454,2	1539,0	—

**Таблица 3.** Результаты расчета по неявной четырехточечной разностной схеме при  $\Delta y = 0,016$  м и различных значениях  $\Delta t$

$\Delta t$ , с	Температура, К, при $y/\delta$						Максимальная погрешность, К
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
20	1292,3	1302,6	1333,2	1383,5	1452,3	1537,7	2,3
40	1291,1	1301,2	1331,7	1381,7	1450,4	1536,1	4,1
80	1288,8	1298,8	1328,5	1378,0	1446,4	1532,5	7,8



Таблица 4. Уточнение расчета по неявной четырехточечной разностной схеме при измельчении сетки

Вариант	Температура, К, при $y/\delta$						Максимальная погрешность, К
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
1*	1288,8	1298,8	1328,5	1378,0	1446,4	1532,5	7,8
2**	1292,9	1303,1	1333,6	1383,9	1452,4	1537,4	1,9

\*  $\Delta y = 0,016$  мм,  $\Delta t = 80$  с.

\*\*  $\Delta y = 0,008$  м,  $\Delta t = 20$  с.

ратуры поверхности в последующий,  $k + 1$ -й момент времени, поэтому при расчете нагрева тела эта величина на каждом шаге по времени получает заниженное значение.

Результаты, приведенные в табл. 3, демонстрируют возможность увеличения шага по времени до величины, обеспечивающей допустимую погрешность расчета. Уточнение решения при измельчении сетки иллюстрируют данные, представленные в табл. 4. Так же, как и в случае явной схемы, фактическое уменьшение погрешности соответствует оценке  $O(\Delta y^2 + \Delta t)$ .

Приведенные в табл. 4 значения температур позволяют – при отсутствии точного решения – произвести оценку погрешности расчета по формуле Рунге. Максимальное расхождение между исходным и уточненным вариантами решения задачи в данном случае имеет место при  $y = 0,8\delta$ , таким образом

$$\epsilon \approx 4/3 (1452,4 - 1446,4) = 8 \text{ К.}$$

Найденная оценка практически совпадает с фактической погрешностью исходного варианта расчета.

### Неявная шеститочечная разностная схема

Как было отмечено при рассмотрении примеров 3.1 и 3.2, численное решение задачи теплопроводности по явной разностной схеме дает для температуры нагреваемого тела приближение к истинному решению сверху, а по чисто неявной – снизу. Это позволяет надеяться на то, что в промежуточном случае, а именно, при использовании неявной схемы с весом, может быть достигнуто существенное повышение точности расчета.

Составим уравнения неявной разностной схемы с весом  $\Pi$ , соответствующей исходной задаче теплопроводности с граничным условием III рода. За основу возьмем приведенные выше уравнения элементар-

ного теплового баланса, выразив входящие в них плотности тепловых потоков в соответствии с соотношениями (3.26). Получим

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \frac{\bar{T}_{i-1} - 2\bar{T}_i + \bar{T}_{i+1}}{\Delta y^2}, \quad i = 2, \dots, n; \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \lambda \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{\Delta y}; \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k}{\Delta t} = \alpha(T_0 - \bar{T}_{n+1}) - \lambda \frac{\bar{T}_{n+1} - \bar{T}_n}{\Delta y}, \quad (3.59)$$

где  $\bar{T}_i = (1 - \mu)T_i^k + \mu T_i^{k+1}$  при  $0 \leq \mu \leq 1$ . Приведенным разностным уравнением соответствует шеститочечный шаблон, показанный на рис. 8.

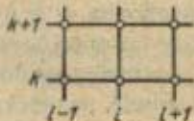


Рис. 8. Шаблон, соответствующий неявной шеститочечной разностной схеме

При преобразовании разностных уравнений (3.57) – (3.59) в общем виде получаются достаточно громоздкие выражения. Поэтому проведем дальнейшие выкладки для наиболее распространенного случая  $\mu = 0,5$ . Получающаяся при этом симметричная шеститочечная неявная схема называется схемой Кранка – Николсона. Итак, положив  $\mu = 0,5$ , приведем уравнения (3.57) – (3.59) к следующему виду:

$$-0,5fT_{i-1}^{k+1} + (1+f)T_i^{k+1} - 0,5fT_{i+1}^{k+1} = 0,5fT_{i-1}^k + (1-f)T_i^k + 0,5fT_{i+1}^k, \quad i = 2, \dots, n; \quad (3.57')$$

$$(1+f)T_1^{k+1} - fT_2^{k+1} = (1+f)T_1^k + fT_2^k; \quad (3.58')$$

$$-fT_n^{k+1} + [1 + f(1+b)]T_{n+1}^{k+1} = fT_n^k + [1 - f(1+b)]T_{n+1}^k + 2fbT_0. \quad (3.59')$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.57') – (3.59'), как и в случае чисто неявной схемы, решается методом прогонки. Приведем без вывода формулы для расчета прогоночных коэффициентов и температуры правого граничного узла:

$$\alpha_1 = \frac{f}{1+f}; \quad \beta_1 = \frac{(1+f)T_1^k + fT_2^k}{1+f}; \quad (3.60)$$

$$\alpha_i = \frac{0,5f}{1 + 0,5f(2 - \alpha_{i-1})};$$



$$\beta_i = \frac{0,5fT_{i-1}^k + (1-f)T_i^k + 0,5fT_{i+1}^k + 0,5f\beta_{i-1}}{1 + 0,5f(2 - \alpha_{i-1})}; \quad (3.61)$$

$$T_{n+1}^{k+1} = \frac{[1 - f(1+b)]T_{n+1}^k + f(T_n^k + 2bT_0 + \beta_n)}{1 + f(1+b - \alpha_n)}. \quad (3.62)$$

Для оценки погрешности аппроксимации схемы Кранка – Николсона, так же, как и в предыдущих случаях, запишем выражения для невязок разностных уравнений (3.57) – (3.59), подставив в эти уравнения точное решение исходной задачи  $T(y, t)$ . При дальнейших преобразованиях используем разложение функции  $T(y, t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(y_i, t_k + \Delta t/2)$ , соответствующей центру шаблона. Опуская промежуточные результаты, получим  $\gamma = O(\Delta y^2 + \Delta t^2)$ , т.е. схема Кранка – Николсона – в отличие от рассмотренных выше разностных схем – имеет второй порядок аппроксимации по времени.

Рассмотрим более подробно вопрос об устойчивости неявной шеститочечной разностной схемы. Для иллюстрации на рис. 9 изобразим распределение температуры в области, прилегающей к  $i$ -тому внутреннему элементарному слою, для двух последовательных дискретных моментов времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ . В рамках исследуемой схемы предполагается, что в течение интервала  $\Delta t$ , разделяющего моменты времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , плотности тепловых потоков определяются некоторыми средними значениями температур  $\bar{T}_{i-1}$ ,  $\bar{T}_i$  и  $\bar{T}_{i+1}$ , где  $\bar{T} = (1 - \mu)T^k + \mu T^{k+1}$ . Таким образом, для неявных схем дискретный характер изменения времени обуславливает неоднозначность задания температурного состояния элементарного слоя в течение шага по времени: его фактическая температура в  $k$ -тый момент времени равна  $T_i^k$ , а при вычислении плотностей тепловых потоков она полагается равной  $\bar{T}_i$ . Эту неоднозначность следует учитывать при анализе ограничений на параметры разностной схемы, вытекающих из второго начала термодинамики.

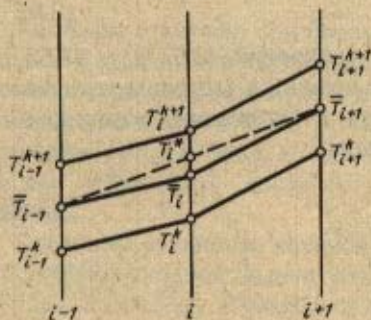


Рис. 9. К выводу условия устойчивости неявной шеститочечной разностной схемы

С одной стороны, при фиксированных в течение шага по времени значениях  $\bar{T}_{i-1}$  и  $\bar{T}_{i+1}$ , максимально возможная величина температуры  $i$ -того элементарного слоя, соответствующая его стационарному состоянию  $T_i^* = 1/2 (\bar{T}_{i-1} + \bar{T}_{i+1})$  и максимально допустимое изменение температуры будет равно  $T_i^* - T_i^k$ . С другой стороны, поскольку второе начало термодинамики определяет направление теплового потока, ограничению подлежит изменение температуры элементарного слоя относительно значения  $\bar{T}_i$ , т.е.

$$T_i^{k+1} - \bar{T}_i \leq T_i^* - T_i^k. \quad (3.63)$$

Обозначив через  $\Delta T_i$  фактическое изменение температуры элементарного слоя  $T_i^{k+1} - T_i^k$  перепишем неравенство (3.63) в следующем виде:  $\Delta T_i \leq T_i^* - \bar{T}_i + 2(\bar{T}_i - T_i^k)$ . Заменив  $T_i^*$  на  $1/2 (\bar{T}_{i-1} + \bar{T}_{i+1})$  и учитывая, что  $\bar{T}_i - T_i^k = \mu \Delta T_i$ , будем иметь  $(1 - 2\mu) \Delta T_i \leq 1/2 (\bar{T}_{i-1} - 2\bar{T}_i + \bar{T}_{i+1})$ . Отсюда, используя уравнение (3.57), которое представим в виде  $\Delta T_i = f(\bar{T}_{i-1} - 2\bar{T}_i + \bar{T}_{i+1})$ , окончательно получим искомое ограничение на значения параметров  $f$  и  $\mu$

$$(1 - 2\mu)f \leq 1/2. \quad (3.64)$$

Проведя аналогичные рассуждения для граничных элементарных слоев так же, как это было сделано при исследовании явной разностной схемы, получим для правого граничного узла более сильное неравенство

$$(1 - 2\mu)(1 + b)f \leq 1/2, \quad (3.65)$$

выражающее условие, при котором вся разностная схема удовлетворяет второму началу термодинамики, что обеспечивает ее устойчивость.

Решение неравенства (3.65) имеет следующий вид:

$$f \leq \frac{1}{2(1 - 2\mu)(1 + b)} \quad \text{при } 0 \leq \mu \leq 1/2, \quad (3.66)$$

а при  $1/2 \leq \mu \leq 1$  величина  $f$  может быть задана произвольно. Таким образом при  $1/2 \leq \mu \leq 1$  неявная шеститочечная разностная схема является безусловно устойчивой. В частности, безусловно устойчивой является схема Кранка - Николсона. При меньших значениях  $\mu$  неравенство (3.66) накладывает ограничение на выбор параметра  $f$ . Отметим, что для явной разностной схемы (при  $\mu = 0$ ) из неравенства (3.66) вытекает полученное ранее условие (3.44).

Вернемся к схеме Кранка - Николсона. Поскольку эта схема аппроксимирует исходную задачу теплопроводности и является безусловно устойчивой, она сходится, причем скорость ее сходимости рав-



на  $O(\Delta y^2 + \Delta t^2)$ . Отметим, что по сравнению с неявной четырехточечной разностной схемой схема Кранка – Николсона имеет более высокий порядок сходимости по времени, поэтому ее использование должно привести к повышению точности расчета.

Пример 3.3. Применим схему Кранка – Николсона для решения задачи, рассмотренной в предыдущих примерах. Для этого составим программу, текст которой приведен в приложении 3. Программа предусматривает ввод значений  $\Delta y$  и  $\Delta t$ , реализацию метода прогонки в соответствии с формулами (3.60) – (3.62) и вывод на экран дисплея значений температур в заданный момент времени.

Результаты трех вариантов расчета при  $\Delta y = 0,016$  м и различных значениях  $\Delta t$  приведены в табл. 5. Независимость полученных значений от шага по времени при его уменьшении от 40 до 20 с объясняется тем, что при достаточно малых значениях  $\Delta t$  погрешность расчета начинает определяться только величиной шага по координате.

Таблица 5. Результаты расчета по схеме Кранка – Николсона при различных значениях шага по времени ( $\Delta y = 0,016$  м)

$\Delta t, c$	Температура, К, при $y/\delta$						Максимальная погрешность, К
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
20	1293,8	1304,1	1334,9	1385,4	1454,2	1539,3	0,7
40	1293,8	1304,1	1334,9	1385,4	1454,2	1539,3	0,7
80	1293,7	1304,1	1334,9	1385,0	1455,5	1537,8	1,3
Точное решение	1294,4	1304,8	1335,4	1385,8	1454,2	1539,0	–

Сопоставление приведенных данных с результатами расчета по неявной четырехточечной разностной схеме, представленными в табл. 3, показывает, что схема Кранка – Николсона действительно обеспечивает существенное повышение точности численного решения задачи. Отметим, что это достигается без заметного усложнения расчетных формул и при практически неизменном объеме вычислений: увеличение числа арифметических операций по сравнению с чисто неявной схемой обусловлено лишь необходимостью расчета правых частей в соотношениях (3.57') – (3.59'). Таким образом, схема Кранка – Николсона по сравнению с чисто неявной схемой оказывается более эффективной.

### 3. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Допущение о независимости теплофизических характеристик тела и коэффициента теплоотдачи от температуры, обеспечивающее линейность задачи теплопроводности, редко соответствует условиям тепло-

обмена в реальных теплотехнических агрегатах. Поэтому задачи теплопроводности, представляющие практический интерес, обычно являются нелинейными. Это объясняется как влиянием температуры на теплофизические характеристики тела, так и нелинейной зависимостью плотности внешнего теплового потока от температуры поверхности тела.

Рассмотрим особенности применения метода конечных разностей для учета различных факторов, обуславливающих нелинейный характер задач теплопроводности.

### *Учет зависимости теплофизических характеристик от температуры*

Запишем уравнения математической модели, описывающей нагрев бесконечной пластины с учетом зависимости теплофизических характеристик тела – коэффициента теплопроводности и удельной объемной теплоемкости – от температуры. Уравнение теплопроводности в данном случае имеет вид (3.6)

$$c'(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right], \quad 0 < y < \delta. \quad (3.67)$$

Предположим для определенности, что начальное условие поперечному описывается соотношением (3.7)

$$T(y, 0) = T_n, \quad (3.68)$$

граничное условие при  $y = 0$  – соотношением (3.8)

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.69)$$

а на поверхности пластины задано граничное условие III рода (3.11)

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \alpha(T_0 - T|_{y=\delta}). \quad (3.70)$$

Для численного решения полученной таким образом нелинейной задачи теплопроводности наиболее целесообразным является использование неявных, безусловно устойчивых разностных схем. С целью упрощения выкладок проведем дальнейшее рассмотрение для неявной четырехточечной разностной схемы. При этом более подробно остановимся на выводе разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение теплопроводности, а для разностных граничных условий, получаемых аналогичным образом, укажем лишь окончательные результаты.

Построение разностной схемы, аппроксимирующей уравнение



теплопроводности (3.67) так же, как и в случае линейной задачи, произведем путем записи уравнения элементарного теплового баланса

$$c'(\bar{T}_i) \Delta y (T_i^{k+1} - T_i^k) = -\left(q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}}\right) \Delta t. \quad (3.71)$$

Здесь, в отличие от (3.22), удельная объемная теплоемкость является функцией температуры, поэтому ее конкретное значение, соответствующее переходу от  $k$ -того к  $k+1$ -му моменту времени, будем определять при некоторой средней температуре элементарного слоя  $\bar{T}_i (T_i^k \leq \bar{T}_i \leq T_i^{k+1})$ .

При записи разностного аналога закона Фурье, устанавливающего связь плотностей тепловых потоков  $q_{i+\frac{1}{2}}$  и  $q_{i-\frac{1}{2}}$  с температурами в

окрестности рассматриваемого  $i$ -того узла, следует учесть зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Для этого перепишем выражения (3.23) следующим образом:

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \left( T_{i+\frac{1}{2}} \right) \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta y}; \quad q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \left( T_{i-\frac{1}{2}} \right) \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta y},$$

где через  $T_{i+\frac{1}{2}}$  и  $T_{i-\frac{1}{2}}$  обозначены температуры на границах  $i$ -того элементарного слоя:

$$T_{i+\frac{1}{2}} = (T_i + T_{i+1})/2; \quad T_{i-\frac{1}{2}} = (T_{i-1} + T_i)/2.$$

Для чисто неявной разностной схемы, основанной на использовании соотношения (3.25), получим:

$$q_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda \left( \bar{T}_{i+\frac{1}{2}} \right) \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{\Delta y}; \quad q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda \left( \bar{T}_{i-\frac{1}{2}} \right) \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{\Delta y}. \quad (3.72)$$

Здесь так же, как и при вычислении величины  $c'$  в уравнениях (3.71), конкретные значения коэффициента теплопроводности для каждого шага по времени определяются при некоторых средних температурах на границах элементарного слоя  $\bar{T}_{i+\frac{1}{2}}$  и  $\bar{T}_{i-\frac{1}{2}}$  ( $T_i^k \leq \bar{T}_{i+\frac{1}{2}} \leq$

$$\leq T_i^{k+1}, T_i^k \leq \bar{T}_{i-\frac{1}{2}} \leq T_i^{k+1})$$

Наиболее простой вариант разностной схемы получится, если положить  $\bar{T} = T^k$ , т.е. на каждом шаге по времени вычислять значения тепло-

физических характеристик при температурах, соответствующих предыдущему  $k$ -тому моменту времени. Для сокращения записи введем обозначения

$$c'_i = c'(T_i^k); \lambda_i^+ = \lambda\left(T_{i+\frac{1}{2}}^k\right); \lambda_i^- = \lambda\left(T_{i-\frac{1}{2}}^k\right).$$

В этом случае, подставив выражения (3.72) в балансовые уравнения (3.71), приходим к следующей системе разностных уравнений (при  $i = 2, \dots, n$ ):

$$c'_i \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta y^2} [\lambda_i^+(T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}) - \lambda_i^-(T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1})],$$

которую, введя обозначения

$$f_i^+ = \lambda_i^+ \Delta t / (c'_i \Delta y^2) \text{ и } f_i^- = \lambda_i^- \Delta t / (c'_i \Delta y^2),$$

преобразуем к виду, аналогичному (3.46')

$$-f_i^- T_{i-1}^{k+1} + (1 + f_i^- + f_i^+) T_i^{k+1} - f_i^+ T_{i+1}^{k+1} = T_i^k. \quad (3.73)$$

Разностные граничные условия запишем аналогично уравнениям (3.47'), (3.50'):

$$(1 + 2f_1^+) T_1^{k+1} - 2f_1^+ T_2^{k+1} = T_1^k; \quad (3.74)$$

$$-2f_{n+1}^- T_n^{k+1} + [1 + 2f_{n+1}^- (1 + b)] T_{n+1}^{k+1} = T_{n+1}^k + 2bf_{n+1}^- T_0, \quad (3.75)$$

где  $b = \alpha \Delta y / \lambda_{n+1}^+$ .

Уравнения (3.73) – (3.75) образуют систему, имеющую следующий матричный вид:

$$AT^{k+1} = B, \quad (3.76)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов, входящих в левые части уравнений;  $B$  – столбец их правых частей;  $T^{k+1} \equiv \{ T_i^{k+1} \}$  – столбец искоемых значений температур.

Поскольку на каждом шаге по времени все элементы матрицы  $A$  имеют известные значения, система разностных уравнений (3.76) является линейной, и для ее решения может быть применен метод прогонки. Приведем без вывода формулы для расчета прогоночных коэффициентов и температуры в правом граничном узле:

$$\alpha_1 = \frac{2f_1^+}{1 + 2f_1^+}; \beta_1 = \frac{T_1^k}{1 + 2f_1^+}; \quad (3.77)$$

$$\alpha_i = \frac{f_i^+}{1 + f_i^+ + f_i^- (1 - \alpha_{i-1})}; \beta_i = \frac{T_i^k + f_i^- \beta_{i-1}}{1 + f_i^+ + f_i^- (1 - \alpha_{i-1})}; \quad (3.78)$$



$$T_{n+1}^{k+1} = \frac{T_{n+1}^k + 2f_{n+1}^-(bT_0 + \beta_n)}{1 + 2f_{n+1}^-(1+b-\alpha_n)} \quad (3.79)$$

Недостатком рассмотренной разностной схемы является существенное, значительно большее, чем при решении линейной задачи теплопроводности, возрастание погрешности расчета при увеличении шага по времени. Это становится особенно заметным при достаточно резкой зависимости теплофизических параметров от температуры и объясняется тем, что расчет значений этих параметров по температурам в предыдущий  $k$ -тый момент времени не обеспечивает их согласования на каждом шаге по времени с новыми значениями температур.

Рассмотрим другой вариант разностной схемы, полагая, что  $\bar{T} = T^{k+1}$ , т.е. что на каждом шаге по времени значения теплофизических параметров соответствуют температурам в последующий  $k+1$ -й момент времени. В этом случае, введя обозначения:

$$\tilde{c}_i = c(T_i^{k+1}); \quad \tilde{\lambda}_i^+ = \lambda \left( T_i^{k+1} \right); \quad \tilde{\lambda}_i^- = \lambda \left( T_i^{k+1} \right)$$

и

$$\tilde{f}_i^+ = \tilde{\lambda}_i^+ \Delta t / (\tilde{c}_i \Delta y^2); \quad \tilde{f}_i^- = \tilde{\lambda}_i^- \Delta t / (\tilde{c}_i \Delta y^2),$$

получим систему разностных уравнений

$$\tilde{A} T^{k+1} = \tilde{B}, \quad (3.80)$$

совпадающую по форме с системой (3.76) и отличающуюся от нее лишь тем, что в выражениях элементов матрицы  $\tilde{A}$  и последнего элемента столбца  $\tilde{B}$  вместо коэффициентов  $f_i$  фигурируют теперь коэффициенты  $\tilde{f}_i$ . Это отличие приводит, однако, к принципиальному изменению свойств системы разностных уравнений: поскольку элементы матрицы  $\tilde{A}$  определяются неизвестными температурами в последующий  $k+1$ -й момент времени, система (3.80) становится нелинейной, и для ее решения оказывается необходимым применение методов последовательных приближений.

Воспользуемся для решения системы (3.80) методом простой итерации, реализация которого в рассматриваемом случае производится следующим образом. На первом шаге итераций значения теплофизических параметров, входящих в выражения для коэффициентов системы (3.80), определяются по известным значениям температур  $T^k$ , т.е. в качестве первого приближения для искомых температур используется решение системы уравнений (3.76). На каждом последующем шаге теплофизические параметры вычисляются по приближенным значениям температур, найденным на предшествующем этапе. Ите-

рации продолжают до тех пор, пока разность между последовательными приближениями искомых температур не станет достаточно малой. При решении некоторых практических задач число итераций удобнее задавать заранее, определяя его путем проведения пробных расчетов: часто уже двух-трех итераций оказывается достаточно для заметного повышения точности решений.

Структурная схема алгоритма решения системы разностных уравнений (3.80) для одного шага по времени приведена на рис. 10. Для сокращения записи через  $T'$  обозначена совокупность значений температур, по которым производится вычисление теплофизических параметров, а через  $f^+$  и  $f^-$  — совокупности соответствующих этим температурам значений коэффициентов  $f_i^+$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $f_i^-$  ( $i = 2, \dots, n + 1$ ). В начале расчета  $T' = T^k$ . Для осуществления итераций организован цикл, параметр которого  $L$  соответствует текущему номеру итераций, а величина  $M$  равна заданному числу итераций. После выполнения последней операции производится переход к следующему шагу по времени.

Несмотря на усложнение алгоритма расчета и увеличение числа арифметических операций на каждом шаге по времени по сравнению с линейной разностной схемой (3.76), применение нелинейной итерационной разностной схемы в ряде случаев (при резкой зависимости

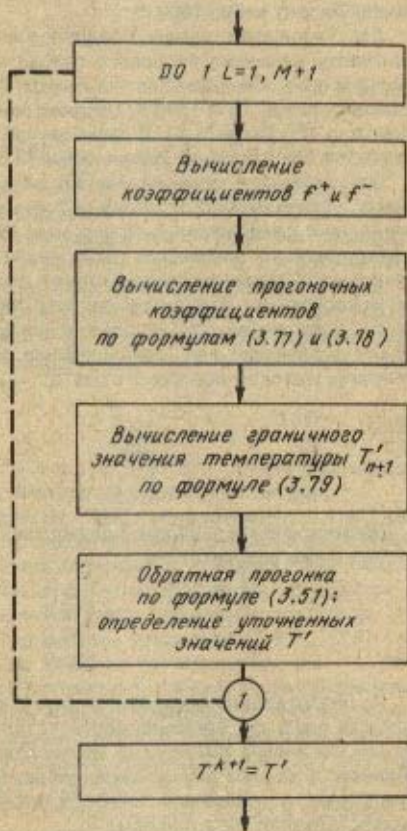


Рис. 10. Структурная схема алгоритма решения системы разностных уравнений (3.73) — (3.75)



теплофизических параметров от температуры) оказывается более эффективным. Это объясняется тем, что для обеспечения заданной точности расчета итерационная схема позволяет использовать более крупный шаг по времени, при этом общий объем вычислительной работы может значительно уменьшаться. Если же влияние температуры на величину теплофизических параметров является достаточно слабым, целесообразнее пользоваться более простой безытерационной разностной схемой. В каждом конкретном случае эффективность применения той или иной разностной схемы оценивается путем проведения пробных расчетов.

**Пример 3.4.** Рассчитать температуру центра и поверхности сляба в конце методической зоны нагревательной печи с двусторонним обогревом. Половина толщины сляба  $\delta = 0,1$  м, начальная температура  $T_H = 300$  К. Удельная объемная теплоемкость стали  $c' = 4 \cdot 10^5$  Дж/(м<sup>3</sup> · К), а зависимость коэффициента теплопроводности от температуры в диапазоне 300 – 1000 К выражается формулой  $\lambda(T) = 53,5 + 1,2 \cdot 10^{-3} T - 2,5 \cdot 10^{-5} T^2$ , Вт/(м · К). Время прохождения сляба через методическую зону равно 1800 с.

Для упрощения задачи предположим, что нагрев является симметричным, а плотность внешнего теплового потока на поверхности металла выражается следующим приближенным соотношением:  $q_w = \alpha(T_0 - T_w)$ , где средняя температура дымовых газов  $T_0 = 1400$  К, среднее значение суммарного коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 120$  Вт/(м<sup>2</sup> · К). В этом случае получим квазилинейную задачу теплопроводности, описываемую уравнениями (3.67) – (3.70).

Применим для решения данной задачи нелинейную итерационную разностную схему, организовав программу расчета в соответствии с рис. 10. Текст программы приведен в приложении 4. Программа предусматривает возможность ввода шагов по координате и времени, а также числа итераций  $M$ . При вводе значения  $M = 0$  получающееся решение соответствует безытерационной разностной схеме. Результаты нескольких вариантов расчета температуры центра  $T_C$  и поверхности  $T_W$  сляба, полученные при использовании безытерационной схемы при  $\Delta y = 0,02$  м, имеют следующий вид (приближенная оценка абсолютной погрешности расчета с получена методом повторного счета):

$\Delta t$ , с	$T_C$ , К	$T_W$ , К	$\epsilon$ , К
12	700,2	791,2	0,8
60	698,3	788,8	3,2
120	695,9	785,9	6,0

Применение итерационной разностной схемы, например при  $\Delta t = 120$  с, приводит к следующим результатам:

$M$	$T_C$ , К	$T_W$ , К
0	695,9	785,9
1	695,0	786,5
2	695,0	786,5

Из представленных данных следует, что введение итераций, обеспечивающее на каждом шаге по времени соответствие значений теплофизических параметров новым значениям температур, не приводит к заметному изменению решения. Таким образом, в данном случае целесообразно использовать безытерационную разностную схему, а требуемой точности расчета добиваться путем выбора достаточно малых значений шага по времени.

Особенности решения задачи теплопроводности с нелинейным граничным условием рассмотрим на примере нагрева сляба в сварочной зоне нагревательной печи. При этом для упрощения задачи примем следующие допущения: нагрев является симметричным; теплофизические характеристики стали не зависят от температуры; распределение температуры по сечению сляба в начале сварочной зоны является равномерным:  $T(y, 0) = T_H$ ; конвективной составляющей внешнего теплового потока можно пренебречь, а плотность потока результирующего излучения на поверхности металла приближенно выразить как  $\epsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_0^4 - T_w^4)$ , где  $T_0$  — температура сварочной зоны;  $\epsilon_{\text{пр}}$  — приведенная степень черноты;  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>) — постоянная Стефана — Больцмана. В этом случае нагрев сляба описывается линейным уравнением теплопроводности (3.12) с крайевыми условиями (3.68) и (3.69) и нелинейным граничным условием III рода на поверхности тела

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = q_w(T_w), \quad (3.81)$$

где плотность внешнего теплового потока  $q_w(T_w) = \epsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_0^4 - T_w^4)$ .

Пример 3.5. Рассчитать температуру поверхности сляба, нагреваемого в сварочной зоне в течение 1920 с. Половина толщины сляба  $\delta = 0,1$  м, начальная температура  $T_H = 750$  К. Коэффициент теплопроводности и удельная объемная теплоемкость стали равны соответственно  $\lambda = 30$  Вт/(м · К),  $c' = 4 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К). Температура сварочной зоны  $T_0 = 1600$  К, приведенная степень черноты  $\epsilon_{\text{пр}} = 0,6$ .

Применим для решения этой задачи неявную четырехточечную разностную схему, аппроксимировав уравнение теплопроводности и левое граничное условие разностными уравнениями (3.46') и (3.47'). Записав разностный аналог граничного условия (3.81), получим следующее уравнение:

$$-2fT_n^{k+1} + (1+2f)T_{n+1}^{k+1} = T_{n+1}^k + 2f\Delta\bar{T}, \quad (3.82)$$

в котором — в отличие от (3.49') — величина  $\Delta\bar{T} = q_w(T_{n+1}^{k+1}) \Delta y / \lambda$  будет изменяться по ходу счета в соответствии с изменением температуры поверхности тела.

В силу нелинейности разностного уравнения (3.82), обусловленного тем, что величина  $\Delta\bar{T}$  на каждом шаге по времени определяется неизвестной температурой  $T_{n+1}^{k+1}$ , для его решения необходимо использовать метод итераций. При этом в процессе итераций величина плотности внешнего теплового потока приводится в приближенное соответствие с новым значением температуры поверхности тела.

Структурная схема решения системы разностных уравнений (3.46'), (3.47') и (3.82) методом прогонки для одного шага по времени приведена на рис. 11. Для согласования значения плотности теплового потока с новым граничным значением температуры организован итерационный цикл, параметр которого  $L$  соответствует текущему номеру итерации, а величина  $M$  — заданному числу итераций. Промежуточная переменная  $T'$  выражает температуру правого граничного узла, по которой производится вычисление значения  $\Delta T' = q_w(T') \Delta y / \lambda$ .

Описанный алгоритм реализован в виде программы, текст которой приведен в приложении 5. Программа предусматривает возможность ввода шагов по координате



нате и времени, а также числа итераций  $M$ . Результаты нескольких вариантов расчета температуры поверхности сляба, полученные при использовании безытерационной разностной схемы при  $\Delta t = 0,02$  м, имеют следующий вид:

$\Delta t, \text{с}$	$T_w, \text{K}$	$\zeta, \text{K}$	$\Delta t, \text{с}$	$T_w, \text{K}$	$\zeta, \text{K}$
12	1459,1	1,2	80	1464,7	6,8
60	1463,1	5,2	120	1468,0	10,1

При этом оценка погрешности расчета  $\zeta$ , полученная методом повторного счета, позволяет установить действительное значение температуры поверхности, равное 1457,9 К.

Приведенные данные показывают, что при выборе достаточно малого шага по времени безытерационная разностная

схема обеспечивает возможность расчета с любой заданной точностью. В отличие от решения линейной задачи теплопроводности (см. пример 3.2) для данного случая характерно завышение расчетных значений температуры, так как плотность внешнего теплового потока  $q_w$ , определяемая температурой поверхности  $T_{\text{п}}^k + 1$  в предшествующий  $k$ -тый момент времени, на каждом шаге по времени получает завышенное значение.

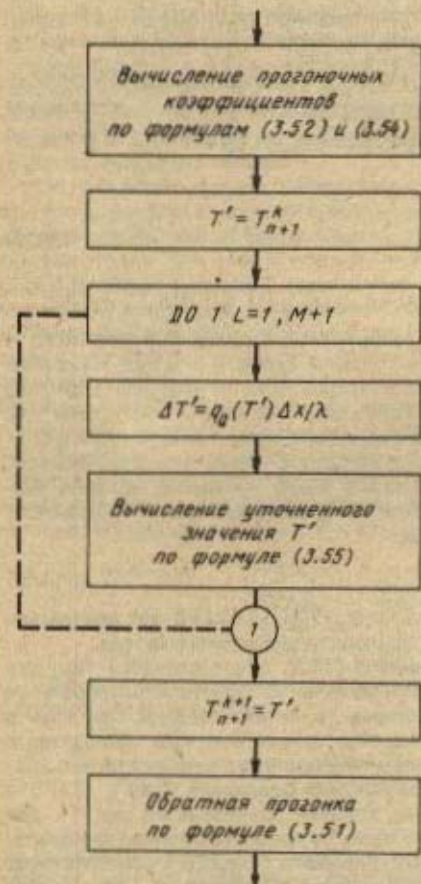


Рис. 11. Структурная схема реализации метода прогонки при нелинейном граничном условии на поверхности тела

Применение итерационной разностной схемы, например при  $\Delta t = 120$  с, приводит к следующим результатам:

M	$T_w, K$	$\varepsilon, K$	M	$T_w, K$	$\varepsilon, K$
0	1468,0	10,1	3	1450,6	7,3
1	1443,9	14,0	4	1451,7	6,2
2	1453,7	4,2	5	1451,3	6,6

Приведенные данные свидетельствуют о том, что введение итераций, устанавливающее на каждом шаге по времени соответствие плотности внешнего теплового потока новому значению температуры поверхности, сопровождается таким повышением точности расчета, которое при использовании безытерационной схемы может быть достигнуто лишь путем существенного уменьшения шага по времени. Одинаковая погрешность расчета обеспечивается, например итерационной схемой при  $\Delta t = 120$  с и безытерационной – при  $\Delta t = 80$  с. Поскольку введение итераций в данном случае сопровождается весьма незначительным возрастанием объема вычислений, итерационная схема оказывается более эффективной, так как позволяет использовать более крупный шаг по времени при сохранении неизменной погрешности расчета.

Представленные данные показывают также, что при возрастании числа итераций приближение расчетной величины температуры поверхности к точному значению имеет немонотонный характер. Это объясняется тем, что в зависимости от числа итераций плотность внешнего теплового потока  $q_w(T_w)$  на каждом шаге по времени вычисляется либо по заниженным (при четном  $M$ ), либо по завышенным (при нечетном  $M$ ) значениям температуры поверхности. При этом происходит завышение или занижение величины  $q_w$ , и при переходе к очередному моменту времени температура поверхности получает соответственно завышенное (при четном  $M$ ) или заниженное (при нечетном  $M$ ) значение.

Эффективность итерационной разностной схемы может быть еще более повышена путем улучшения сходимости итерационных последовательностей. Для этого можно применить следующий прием. Запишем уравнение (3.81) в форме нелинейного граничного условия III рода, представив выражение плотности внешнего теплового потока в виде

$$q_w(T_w) = \alpha(T_w)(T_0 - T_w),$$

где  $\alpha(T) = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_0^4 - T^4) / (T_0 - T)$  – коэффициент теплоотдачи излучением. Тогда вместо (3.82) получим разностный аналог нелинейного граничного условия III рода

$$-2\Gamma_n^{k+1} + [1 + 2f(1 + \tilde{b})] T_{n+1}^{k+1} = T_{n+1}^k + 2\tilde{f}\tilde{T}_0. \quad (3.83)$$

Здесь – в отличие от (3.50') – величина  $\tilde{b} = \alpha(T_{n+1}^{k+1}) \Delta y / \lambda$  будет изменяться по ходу счета в соответствии с изменением температуры поверхности тела.

Поскольку разностное уравнение (3.83) так же, как и рассмотренное выше уравнение (3.82), является нелинейным относительно температуры поверхности  $T_{n+1}^{k+1}$ , для его решения необходимо использовать метод итераций. При этом, в отличие от уравнения (3.82), в процессе итераций будет изменяться не вся величина плотности внешнего теплового потока, а лишь значение коэффициента теплоотдачи, зависимость которого от температуры является более слабой. По этой причине описываемая модификация алгоритма расчета должна приводить к увеличению скорости сходимости итераций.

Структурная схема решения системы разностных уравнений в данном случае отличается от приведенной на рис. 11 только тем, что внутри итерационного цикла производится вычисление коэффициента  $b' = \alpha(T) \Delta y / \lambda$ , а уточненное значение температуры  $T'$  определяется по формуле (3.56). Внеся соответствующие изменения в текст программы, приведенный в приложении 5, и выполнив расчет при  $\Delta y = 0,02$  м и  $\Delta t = 120$  с, получим следующие результаты:



M	$T_w, K$	$\varepsilon, K$	M	$T_w, K$	$\varepsilon, K$
0	1443,2	14,7	2	1451,3	6,6
1	1450,7	7,2	3	1451,4	6,5

Приведенные данные свидетельствуют о том, что переход к описанию теплообмена на поверхности тела в форме граничного условия III рода действительно приводит к улучшению сходимости итераций и, следовательно, к повышению эффективности вычислений<sup>1</sup>.

#### 4. УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ

Специфической причиной, приводящей к нелинейности задачи теплопроводности, является наличие фазовых превращений, сопровождающих нагрев или охлаждение тела, и связанная с этим необходимость учета движения межфазной границы.

В качестве иллюстрации применения метода конечных разностей для решения задач теплопроводности с движущейся границей рассмотрим расчет нагрева тела, погруженного в расплав. В зависимости от условий теплообмена на межфазной поверхности нагрев тела сопровождается либо его плавлением, либо затвердеванием расплава.

Предположим для простоты, что тело представляет собой бесконечную пластину, теплофизические характеристики тела и расплава одинаковы и не зависят от температуры, и фазовое превращение (плавление тела, затвердевание расплава) происходит при определенной температуре  $T_1$ . В процессе теплообмена толщина пластины  $\delta$  изменяется: уменьшается при ее плавлении и увеличивается при затвердевании расплава.

Особенность математического описания нагрева тела в данном случае заключается в том, что искомое температурное поле  $T(y, t)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\partial T / \partial t = a (\partial^2 T / \partial y^2) \quad (3.84)$$

в области с движущейся границей  $0 < y < \delta(t)$ , причем функция  $\delta(t)$ , описывающая движение границы раздела, заранее неизвестна, и сама подлежит определению в результате решения задачи.

В качестве начальных условий укажем исходное распределение температуры по сечению пластины  $T_n(y)$  и исходное значение ее толщины  $\delta_n$

$$T(y, 0) = T_n(y), \quad 0 \leq y \leq \delta_n, \quad \delta(0) = \delta_n. \quad (3.85)$$

<sup>1</sup> Эффективность разностной схемы может быть повышена в еще большей степени, если при решении уравнения (3.83) воспользоваться итерационным методом Ньютона.

Граничное условие при  $y = 0$  определяется характером теплообмена на левой поверхности пластины. Например, при фиксированном значении температуры этой поверхности, равном  $T_2$

$$T(0, t) = T_2. \quad (3.86)$$

Специфический вид имеют граничные условия на движущейся межфазной поверхности (при  $y = \delta(t)$ ). Первое условие отражает то обстоятельство, что фазовое превращение происходит при температуре  $T_1$

$$T|_{y=\delta(t)} = T_1. \quad (3.87)$$

Второе условие выражается уравнением теплового баланса на границе раздела твердое тело – расплав

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta(t)} + Q'v = -q_0,$$

$$\text{или } \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta(t)} = q_0 + Q'v, \quad (3.88)$$

где  $q_0$  – абсолютная величина плотности теплового потока, подводимого к межфазной поверхности от расплава;  $Q'$  – удельная (объемная) теплота фазового превращения (плавления тела, затвердевания расплава), Дж/м<sup>3</sup>;  $v$  – скорость перемещения межфазной поверхности, м/с.

Для пояснения физического смысла уравнения (3.88) на рис. 12 схематически показаны соотношения между плотностью теплового потока  $q_0$  и плотностью теплового потока, равного по модулю  $q_1 = \lambda |\partial T/\partial y|_{y=\delta(t)}$ , отводимого от межфазной поверхности внутрь тела. Если тепловой поток, подводимый к поверхности тела от расплава, не может быть полностью отведен внутрь тела, т.е.  $q_1 < q_0$  (рис. 12, а), часть внешнего теплового потока поглощается на границе

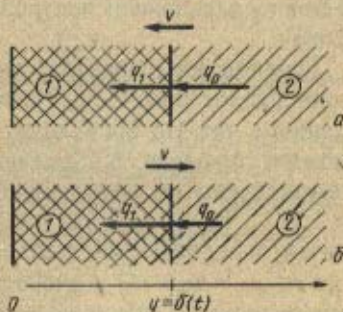


Рис. 12. Соотношения между плотностями тепловых потоков на границе раздела твердое тело (1) – расплав (2): а – при плавлении тела ( $q_1 < q_0$ ); б – при затвердевании расплава ( $q_1 > q_0$ )



раздела в процессе плавления тела ( $v < 0$ ). Если же для прогрева тела требуется тепловой поток, превышающий величину внешнего теплового потока, т.е.  $q_1 > q_0$  (рис. 12, б), происходит затвердевание расплава ( $v > 0$ ), при этом дефицит теплового потока покрывается за счет выделения на межфазной поверхности скрытой теплоты затвердевания.

Для того чтобы записать граничное условие (3.88) в окончательном виде, предположим, что интенсивность внешнего теплообмена характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ , т.е. плотность внешнего теплового потока  $q_0 = \alpha(T_0 - T_1)$ , где  $T_0$  — температура расплава;  $T_0 - T_1$  — перегрев расплава над температурой затвердевания. Кроме этого, учтем, что  $v = d\delta/dt$ . Получим

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta(t)} = \alpha(T_0 - T_1) + Q' \frac{d\delta}{dt}. \quad (3.89)$$

Уравнение (3.84) с крайевыми условиями (3.85) — (3.87), (3.89) выражает математическую постановку задачи теплопроводности с движущейся границей. Рассмотрим особенности применения метода конечных разностей для численного решения этой задачи.

Один из способов учета движения межфазной границы в рамках метода конечных разностей основан на использовании сетки с переменным числом узлов. Наиболее простой вариант разностной схемы получается, если считать, что в течение каждого шага по времени перемещение границы  $\Delta\delta$  равно одному шагу по координате  $\Delta y$ . В этом случае при переходе к очередному моменту времени число шагов по координате  $n_k$  изменяется на единицу: при затвердевании расплава  $\Delta\delta = \Delta y$  и  $n_{k+1} = n_k + 1$ , при плавлении  $\Delta\delta = -\Delta y$  и  $n_{k+1} = n_k - 1$ .

Особенность такого подхода заключается в том, что при заданном элементарном перемещении межфазной границы  $\Delta\delta = \pm \Delta y$  неизвестной, подлежащей определению, становится величина шага по времени  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ . По этой причине в данном случае целесообразно использовать безусловно устойчивые разностные схемы, сходимость которых не зависит от величины  $\Delta t_k$ . Для упрощения выкладок положим в основу дальнейших построений неявную четырехточечную разностную схему.

Предположим сначала, что плотность внешнего теплового потока превосходит плотность теплового потока, отводимого от межфазной границы, так что происходит плавление пластины. Пусть в некоторый момент времени  $t_k$  толщина пластины равна  $\delta_k$ , а распределение температуры по ее сечению описывается сеточной функцией  $T_n^k$ ,  $i = 1, \dots, n_k + 1$ , где  $n_k = \delta_k / \Delta y$ . Запишем систему разностных уравнений, определяющих температурное поле  $T_i^{k+1}$  ( $i = 1, \dots, n_k + 1 + 1$ , где  $n_{k+1} = n_k - 1$ ) в очередной  $k + 1$ -й момент времени. Для сокращения записи в дальнейшем индекс  $y$  величины  $n_{k+1}$  будем опускать.

Для внутренних узлов ( $i = 2, \dots, n$ ) используем уравнения (3.46)

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t_k} = a \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta y^2}. \quad (3.90)$$

Учитывая граничные условия (3.87) и (3.88), получим:

$$T_1^{k+1} = T_2; \quad (3.91)$$

$$T_{n+1}^{k+1} = T_1. \quad (3.92)$$

Для того чтобы получить разностный аналог граничного условия (3.89), запишем уравнение теплового баланса для нового граничного узла, соответствующего  $(n+1)$ -му элементарному слою (рис. 13),

$$c' \Delta y \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_{n+1}^k}{\Delta t_k} + Q' \frac{\Delta y}{\Delta t_k} = \alpha (T_0 - T_1) - \lambda \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_n^{k+1}}{\Delta y}. \quad (3.93)$$

Первое слагаемое в левой части приведенного уравнения соответствует плотности теплового потока, затраченного на догрев  $n+1$ -го элементарного слоя (заштрихованного на рис. 13) до температуры

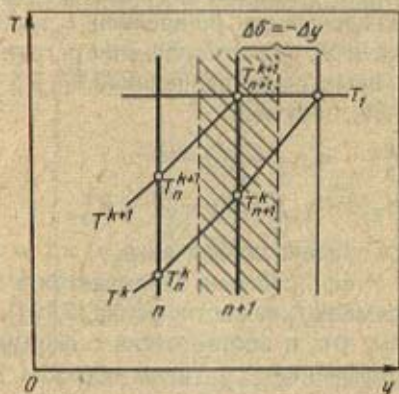


Рис. 13. К выводу разностного граничного условия на движущейся межфазной поверхности при плавлении тела

плавления, второе — на плавление элементарного слоя, расположенного правее нового граничного узла.

Перепишем систему разностных уравнений (3.90) — (3.93) в более компактной форме, введя относительную температуру  $\theta = (T - T_2)/(T_1 - T_2)$ , критерий Коссовича  $Ko = Q'/c' (T_1 - T_2)$ , безразмерный параметр  $d = \alpha (T_0 - T_1) \Delta y / \lambda (T_1 - T_2)$  и безразмерный шаг по времени  $f_k = a \Delta t_k' / \Delta y^2$ . Получим:

$$-f_k \theta_{i-1}^{k+1} + (1 + 2f_k) \theta_i^{k+1} - f_k \theta_{i+1}^{k+1} = \theta_i^k, \quad i = 2, \dots, n; \quad (3.94)$$



$$\theta_1^{k+1} = 0, \quad (3.95)$$

$$\theta_{n+1}^{k+1} = 1, \quad (3.96)$$

$$(\theta_{n+1}^{k+1} - \theta_{n+1}^k) + K_0 = f_k d - f_k (\theta_{n+1}^{k+1} - \theta_n^{k+1}). \quad (3.97)$$

Для решения приведенной системы разностных уравнений используем метод прогонки, описанный в п. 2. Прогоночные коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , соответствующие левому граничному узлу, найдем, записав формулу (3.51) для  $i = 1$

$$\theta_1^{k+1} = \alpha_1 \theta_2^{k+1} + \beta_1$$

и сопоставив ее с граничным условием (3.95), получим

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0. \quad (3.98)$$

Для нахождения остальных значений коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$  при  $i = 2, \dots, n$  используем рекуррентные соотношения (3.54):

$$\alpha_i = \frac{f_k}{1 + f_k(2 - \alpha_{i-1})}; \quad \beta_i = \frac{\theta_i^k + f_k \beta_{i-1}}{1 + f_k(2 - \alpha_{i-1})}. \quad (3.99)$$

Особенностью рассматриваемого алгоритма является то, что безразмерный шаг по времени  $f_k$  заранее неизвестен, и для его определения необходимо использовать граничные условия (3.96) и (3.97).

Заменим в уравнении (3.97)  $\theta_{n+1}^{k+1}$  на  $\alpha_n \theta_{n+1}^{k+1} + \beta_n$  и учтем условие (3.96), получим:

$$\theta_n^{k+1} = \alpha_n + \beta_n \quad (3.100)$$

$$\text{и } f_k(d - \gamma_n) = K_0 + (1 - \theta_{n+1}^k), \quad (3.101)$$

где введено обозначение  $\gamma_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$

Итак, проблема заключается в определении безразмерного шага по времени  $f_k$  из соотношения (3.101). Сложность этой задачи обусловлена тем, что, в соответствии с формулами (3.99), от величины  $f_k$  зависит коэффициент  $\gamma_n$ . Таким образом, относительно  $f_k$  соотношение (3.101) представляет собой нелинейное уравнение, решение которого может быть получено каким-либо численным методом, например методом итераций.

Для применения метода итераций преобразуем уравнение (3.101) к виду  $f_k^* = \varphi(f_k)$ , где  $f_k$  и  $f_k^*$  — предыдущее и последующее приближения для безразмерного шага по времени. Такое преобразование можно выполнить различными путями, получая уравнения, дающие различные итерационные последовательности. В каждом конкретном случае сходимость итераций проще всего установить путем пробных расчетов. Сходящуюся последовательность дает, например, формула

$$f_k^* = [\gamma_n f_k + K_0 + (1 - \theta_{n+1}^k)]/d, \quad (3.102)$$

при использовании которой для нахождения коэффициента  $\gamma_n$  на каждом шаге итераций следует подставить приближенное значение  $f_k$  в рекуррентные соотношения (3.99) и последовательно найти все прогностические коэффициенты вплоть до  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ . Условием окончания итераций может служить неравенство  $|1 - f_k^*/f_k| < \Delta$ , где  $\Delta$  — заданная величина, устанавливающая относительную погрешность расчета шага по времени.

После нахождения безразмерного шага по времени  $f_k$  и определения соответствующих ему значений коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , искомые значения температур  $\theta_i^{k+1}$  вычисляются по формулам обратной прогонки (3.51). Далее число узлов уменьшается на единицу, толщина пластины полагается равной  $\delta_{k+1} = \delta_k - \Delta y$ , и производится переход к очередному шагу по времени.

Рассмотрим теперь особенности разностной схемы, описывающей процесс затвердевания расплава. В этом случае переход от  $k$ -того к  $k+1$ -му моменту времени сопровождается затвердеванием нового граничного элементарного слоя и увеличением числа узлов на единицу;  $n_{k+1} = n_k + 1$  (в дальнейшем индекс  $y$  величины  $n_k + 1$  будем опускать).

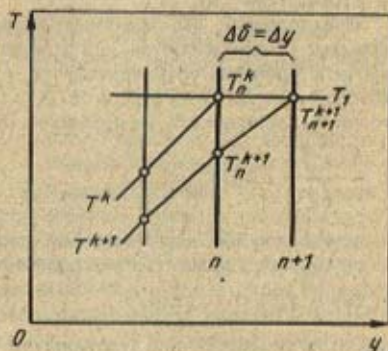


Рис. 14. К выводу разностного граничного условия на движущей межфазной поверхности при затвердевании расплава

Запись системы разностных уравнений и ее решение производится точно так же, как и в рассмотренном выше случае плавления тела. Отличие заключается лишь в том, что, составляя уравнение теплового баланса для нового граничного узла, вместо (3.93) получим соотношение (рис. 14).

$$Q' \frac{\Delta y}{\Delta t_k} = \lambda \frac{T_{n+1}^{k+1} - T_n^{k+1}}{\Delta y} - \alpha(T_0 - T_1), \quad (3.103)$$



левая часть которого выражает плотность теплового потока, выделяющегося при затвердевании нового граничного элементарного слоя. В безразмерной форме соотношение (3.103) принимает вид

$$K_0 = f_k(\theta_n^k + 1 - \theta_n^{k+1}) - f_k d. \quad (3.104)$$

Отсюда, с учетом условия (3.100), получаем уравнение

$$f_k(\gamma_n - d) = K_0, \quad (3.105)$$

при решении которого может быть использована следующая итерационная формула

$$f_k^* = (f_k d + K_0) / \gamma_n. \quad (3.106)$$

**Пример 3.6.** На водоохлаждаемых стенках плавильной печи, содержащей оксидный расплав, образуется плоский слой гарнисажа, толщина которого изменяется по ходу плавки в соответствии с изменением температуры расплава. Наружная поверхность гарнисажа поддерживается при постоянной температуре  $T_2 = 350$  К. Теплофизические характеристики расплава имеют следующие значения: коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1,5$  Вт/(м · К); удельная теплоемкость  $c = 1000$  Дж/(кг · К); плотность  $\rho = 3000$  кг/м<sup>3</sup> (удельная объемная теплоемкость  $c' = 3 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К), коэффициент температуропроводности  $a = 5 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с); температура плавления (затвердевания)  $T_1 = 1550$  К; удельная теплота плавления (затвердевания)  $Q = 2 \cdot 10^5$  Дж/кг ( $Q' = 6 \cdot 10^8$  Дж/м<sup>3</sup>). Коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 1000$  Вт/(м<sup>2</sup> · К).

Предположим, что температура расплава в течение достаточно длительного времени остается постоянной и равной  $T_{0H} = 1700$  К, так что к моменту начала отсчета времени устанавливается стационарный режим теплопроводности, при котором  $q_1 = \lambda(T_1 - T_2)/\delta$  и  $d\delta/dt = 0$ . Таким образом, для определения начальной толщины гарнисажа  $\delta_H$  из уравнения (3.89) получим

$$\lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta_H} = \alpha(T_{0H} - T_1),$$

откуда  $\delta_H = 0,012$  м. Начальное распределение температуры, соответствующее стационарному режиму, описывается линейной зависимостью

$$T_H(y) = T_2 + (T_1 - T_2)y/\delta_H,$$

при этом относительная температура  $\theta$  линейно возрастает от 0 при  $y = 0$  до 1 при  $y = \delta_H$ , т.е.

$$\theta_H(y) = y/\delta_H, \quad 0 \leq y \leq \delta_H. \quad (3.107)$$

Пусть в начальный момент времени температура расплава скачком повышается до значения  $T_0 = 2000$  К и после этого остается постоянной. Увеличение температуры расплава, сопровождающееся возрастанием плотности теплового потока, подводимого к поверхности гарнисажа, приводит к оплавлению гарнисажного слоя. При этом толщина гарнисажа стремится к величине  $\delta^*$ , соответствующей новому стационарному состоянию, для которого

$$\lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta^*} = \alpha(T_0 - T_1).$$

Для рассматриваемого варианта расчета  $\delta' = 0,004$  м.

Требуется оценить продолжительность периода, в течение которого происходит переход к новому стационарному состоянию.

Динамика плавления гарнисажного слоя определяется задачей теплопроводности с движущейся границей (3.84) – (3.89), которой соответствует разностная схема (3.94) – (3.97). Для того чтобы начать применение этой разностной схемы, выберем шаг по координате  $\Delta y$  и разобьем начальную толщину гарнисажа на  $n_H = \delta_H / \Delta y$  элементарных интервалов. В начале расчета, используя условие (3.107), зададим сеточные значения относительной температуры

$$\theta_i = (i - 1) / n_H, i = 1, \dots, n_H + 1, \quad (3.108)$$

а также выберем некоторое исходное значение шага по времени  $\Delta t_H$ , необходимое для того, чтобы начать решение уравнения (3.101) методом итераций. Дальнейшую последовательность действий поясняет структурная схема, изображенная на рис. 15. Цифрами обозначены следующие операции: 1 – присваивание значений исходных данных и параметров разностной схемы [теплофизических характеристик расплава  $\lambda, c', Q', T_1$ ; параметров, определяющих условия внешнего теплообмена,  $T_0, T_2, \alpha$ ; начальной толщины гарнисажа  $\delta_H$ ; параметров разностной схемы  $\Delta y, \Delta t_H, \Delta$  (для рассматриваемого варианта расчета  $\Delta y = 2 \cdot 10^{-4}$  м,  $\Delta t_H = 1$  с,  $\Delta = 0,001$ ); значений прогоночных коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  – по формулам (3.98)]; 2 – вычисление вспомогательных параметров ( $a = \lambda / c', Ko = Q' / c' (T_1 - T_2), d = \alpha (T_0 - T_1) \Delta y / \lambda (T_1 - T_2), n_H = \delta_H / \Delta y, f_H = a \Delta t_H / \Delta y^2$ ); 3 – задание начальных значений переменных величин [текущего времени  $t = 0$ , толщины гарнисажа  $\delta = \delta_H$ , числа элементарных интервалов  $n = n_H$ , безразмерного шага по времени  $f = f_H$ , распределения относительной температуры  $\theta_i, i = 1, \dots, n + 1$  – по формуле (3.108)]; 4 – вычисление прогоночных коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i, i = 2, \dots, n$  по формулам (3.99); 5 – вычисление уточненного значения  $f^*$  по формуле (3.102); 6 – проверка условия окончания итераций  $|1 - f/f^*| < \Delta$ ; 7 – присваивание  $f = f^*$ ; 8 – проверка неравенства  $f > f_{\max}$ ; 9 – обратная прогонка по формуле (3.51); 10 – вычисление текущих значений переменных величин ( $t = t + \Delta t$ , где  $\Delta t = f \Delta y^2 / a$ ;  $\delta = \delta - \Delta y$ ;  $n = n - 1$ ); 11 – вывод текущих значений  $t$  и  $\delta$ .

Окончание расчета производится на  $k'$ -том шаге по времени, для которого выполняется неравенство  $f_{k'} > f_{\max}$ , где  $f_{\max}$  – заданное максимальное значение безразмерного шага по времени. Выбор такого условия объясняется тем, что уменьшение скорости плавления гарнисажа в процессе перехода к новому стационарному состоянию сопровождается возрастанием шага по времени, в течение которого происходит оплавление одного элементарного слоя, поэтому при достаточно большом значении  $f_{\max}$  неравенство  $f_{k'} > f_{\max}$  будет выполнено в достаточной близости от нового стационарного состояния. Для рассматриваемого варианта расчета принято  $f_{\max} = 250$ , что при  $a = 5 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с и  $\Delta y = 2 \cdot 10^{-4}$  м соответствует максимальному шагу по времени  $\Delta t_{\max} = 20$  с.

Текст программы, реализующей описанный выше алгоритм, приведен в приложении 6. Кроме текущих значений времени и толщины гарнисажа на каждом шаге расчета предусмотрен вывод плотности теплового потока

$$q_2 = \lambda \frac{T_2^k + 1 - T_1^k + 1}{\Delta y},$$

величина которого характеризует теплосъем с наружной поверхности гарнисажа. В начальный момент времени  $q_{2H} = \lambda (T_1 - T_2) / \delta_H = 150$  кВт/м<sup>2</sup>. В конечном стационарном состоянии  $q_2' = \lambda (T_1 - T_2) / \delta' = 450$  кВт/м<sup>2</sup>.

Результаты решения задачи, приведенные на рис. 16 в виде графиков зависимостей  $\delta(t)$  и  $q_2(t)$ , позволяют оценить продолжительность перехода к новому



Рис. 15. Структурная схема расчета изменения толщины гарнисажа

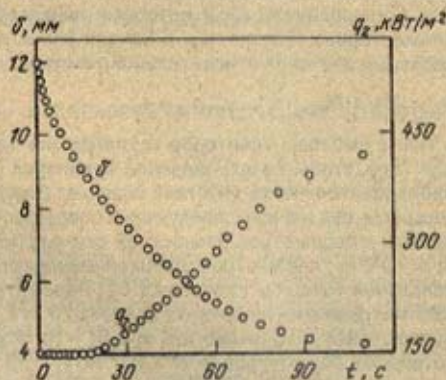
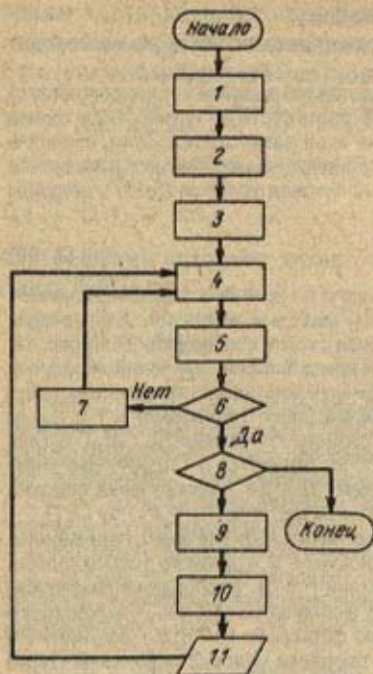


Рис. 16. Изменение во времени толщины гарнисажа  $\delta$  и плотности теплового потока  $q_2$  в процессе перехода к новому стационарному состоянию

стационарному состоянию, которая оказывается равной  $\sim 120$  с. Эти результаты также наглядно демонстрируют главный недостаток рассмотренного варианта разностной схемы, заключающийся в том, что уменьшение скорости перемещения межфазной границы приводит к возрастанию шага по времени и, следовательно, сопровождается ухудшением качества численного решения задачи. Для устранения данного недостатка нужно изменить разностную схему таким образом, чтобы заданной величиной являлся шаг по времени, выбираемый из соображений допустимой погрешности расчета, а искомой величиной на каждом шаге по времени — элементарное перемещение межфазной границы. В этом случае, однако, возникает проблема определения момента времени, в который должно происходить очередное изменение числа шагов по координате, что приводит к существенному усложнению алгоритма расчета.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим наиболее простую постановку двухмерной задачи теплопроводности, возникающую при расчете симметричного нагрева длинной прямоугольной заготовки. В этом случае можно считать, что температурное поле изменяется лишь в плоскости, перпендикулярной

оси заготовки. Введем в этой плоскости систему координат  $Oyz$  и обозначим через  $\delta_y$  половину ширины заготовки, а через  $\delta_z$  — половину ее высоты (рис. 17). Предполагая, что теплофизические характеристики нагреваемого металла не зависят от температуры, запишем в области

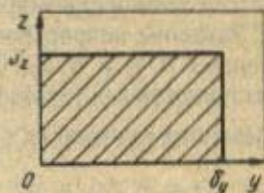


Рис. 17. Расчетная область в плоскости, перпендикулярной оси заготовки

$0 < t < \delta_y$ ,  $0 < z < \delta_z$  уравнение теплопроводности (3.3) в следующем виде:

$$\partial T / \partial t = a (\partial^2 T / \partial y^2 + \partial^2 T / \partial z^2). \quad (3.109)$$

Учитывая симметрию температурного поля, получим граничные условия при  $y = 0$  и  $z = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad 0 < z < \delta_z; \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad 0 < y < \delta_y. \quad (3.111)$$

На поверхности заготовки будем считать заданным линейное граничное условие III рода, соответствующее постоянным значениям температуры окружающей среды  $T_0$  и коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta_y} = \alpha (T_0 - T \Big|_{y=\delta_y}), \quad 0 < z < \delta_z; \quad (3.112)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta_z} = \alpha (T_0 - T \Big|_{z=\delta_z}), \quad 0 < y < \delta_y. \quad (3.113)$$

Предполагая, что в начальный момент времени тело является равномерно прогретым до температуры  $T_n$ , запишем начальное условие

$$T(y, z, 0) = T_n, \quad 0 \leq y \leq \delta_y, \quad 0 \leq z \leq \delta_z. \quad (3.114)$$

Как известно, точное решение линейной двумерной задачи теплопроводности (3.109) — (3.114) может быть найдено аналитически путем перемножения представленных в безразменном виде решений соответствующих одномерных задач. Это обстоятельство позволяет исполь-



звать систему уравнений (3.109) – (3.114) в качестве тестовой задачи, с помощью которой можно проверить работоспособность того или иного численного метода, в частности, метода конечных разностей.

Построение разностных схем для двухмерной задачи теплопроводности производится аналогично тому, как это было сделано в п. 2 при рассмотрении одномерной задачи.

Заменим непрерывную область изменения пространственных переменных  $0 \leq y \leq \delta_y$ ,  $0 \leq z \leq \delta_z$  конечной совокупностью дискретно расположенных узловых точек, имеющих координаты:

$$y_i = (i-1) \Delta y \quad (i=1, \dots, n_y+1) \quad \text{и} \quad z_j = (j-1) \Delta z \quad (j=1, \dots, n_z+1),$$

где  $\Delta y = \delta_y/n_y$  и  $\Delta z = \delta_z/n_z$  – значения шагов по координатам  $y$  и  $z$ ;  $n_y$  и  $n_z$  – числа разбиений отрезков  $[0, \delta_y]$  и  $[0, \delta_z]$  на элементарные интервалы. Введем шаг по времени  $\Delta t$  и обозначим через  $T_{ij}^k$  сеточное значение температурного поля в узловой точке с координатами  $(y_i, z_j)$  в момент времени  $t_k$ .

Для отыскания дискретного температурного поля  $T_{ij}^k$  необходимо заменить исходную дифференциальную задачу теплопроводности соответствующей разностной схемой, свойства которой так же, как и при решении одномерной задачи, описываются с помощью введенных в п. 2 понятий аппроксимации, устойчивости и сходимости. Не рассматривая этот вопрос более подробно, отметим справедливость основных результатов, полученных в п. 2. В частности, явная разностная схема оказывается устойчивой лишь при выборе достаточно малого шага по времени, а чисто неявная схема является безусловно устойчивой.

Применим для построения разностной схемы, аппроксимирующей задачу теплопроводности (3.109) – (3.114), метод баланса, причем так же, как и в п. 2, будем исходить не из готовых дифференциальных соотношений, а непосредственно из законов сохранения энергии и переноса тепла, примененных к дискретному температурному полю.

Рассмотрим элементарную ячейку  $y_{i-\frac{1}{2}} < y < y_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $z_{j-\frac{1}{2}} < z < z_{j+\frac{1}{2}}$  шириной  $\Delta y$  и высотой  $\Delta z$ , соответствующую некоторому

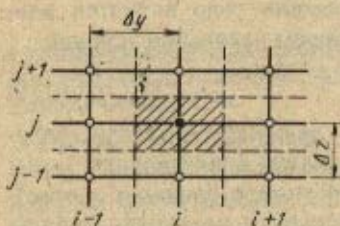


Рис. 18. Расположение элементарной ячейки, соответствующей внутреннему узлу

внутреннему узлу (на рис. 18 эта ячейка заштрихована), и запишем для нее уравнение теплового баланса при переходе от  $k$ -того к  $k + 1$ -му моменту времени. В расчете на единицу длины заготовки получим

$$c \cdot \Delta y \Delta z (T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k) = - \left[ \left( q_{i+\frac{1}{2},j} - q_{i-\frac{1}{2},j} \right) \Delta z + \left( q_{i,j+\frac{1}{2}} - q_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \Delta y \right] \Delta t, \quad (3.115)$$

где  $q_{i+\frac{1}{2},j}$  и  $q_{i,j+\frac{1}{2}}$  — проекции на оси  $y$  и  $z$  плотностей тепловых потоков, входящих в ячейку со стороны соседних правого и верхнего узлов;  $q_{i-\frac{1}{2},j}$  и  $q_{i,j-\frac{1}{2}}$  — проекции на оси  $y$  и  $z$  плотностей тепловых потоков, выходящих из ячейки и передаваемых соседним левому и нижнему узлам.

Для построения неявной разностной схемы используем дискретный аналог закона Фурье, устанавливающий следующие соотношения между сеточными значениями плотностей тепловых потоков и температур:

$$q_{i+\frac{1}{2},j} = -\lambda \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{ij}^{k+1}}{\Delta y}; \quad q_{i-\frac{1}{2},j} = -\lambda \frac{T_{ij}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta y}; \quad (3.116)$$

$$q_{i,j+\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{ij}^{k+1}}{\Delta z}; \quad q_{i,j-\frac{1}{2}} = -\lambda \frac{T_{ij}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z}.$$

Подставив выражения (3.116) в уравнения (3.115), получим при  $i = 2, \dots, n_y, j = 2, \dots, n_z$

$$\frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k}{\Delta t} = a \left( \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} \right) \quad (3.117)$$

или

$$T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k = f_y (T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}) + f_z (T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}), \quad (3.117')$$

где  $f_y = a \Delta t / \Delta y^2$ ,  $f_z = a \Delta t / \Delta z^2$ . Каждое из этих уравнений связывает сеточные значения температур в шести точках  $(i, j, k)$ , образующих шаблон, показанный на рис. 19.



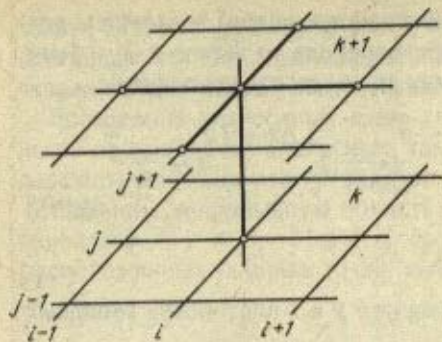


Рис. 19. Шаблон, соответствующий неявной разностной схеме решения двухмерной задачи теплопроводности

Разностные уравнения для граничных узлов, расположенных на боковых поверхностях заготовки ( $y = 0, y = \delta_y, 0 < z < \delta_z$ ), запишем, используя уравнения теплового баланса для граничных элементарных ячеек шириной  $\Delta y/2$  и высотой  $\Delta z$  (рис. 20, а). Получим при  $i = 1, j = 2, \dots, n_y$

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{1j}^{k+1} - T_{1j}^k}{\Delta t} = \lambda \frac{T_{2j}^{k+1} - T_{1j}^{k+1}}{\Delta y} \Delta z + \left( \lambda \frac{T_{1,j+1}^{k+1} - T_{1j}^{k+1}}{\Delta z} - \lambda \frac{T_{1j}^{k+1} - T_{1,j-1}^{k+1}}{\Delta z} \right) \frac{\Delta y}{2} \quad (3.118)$$

или

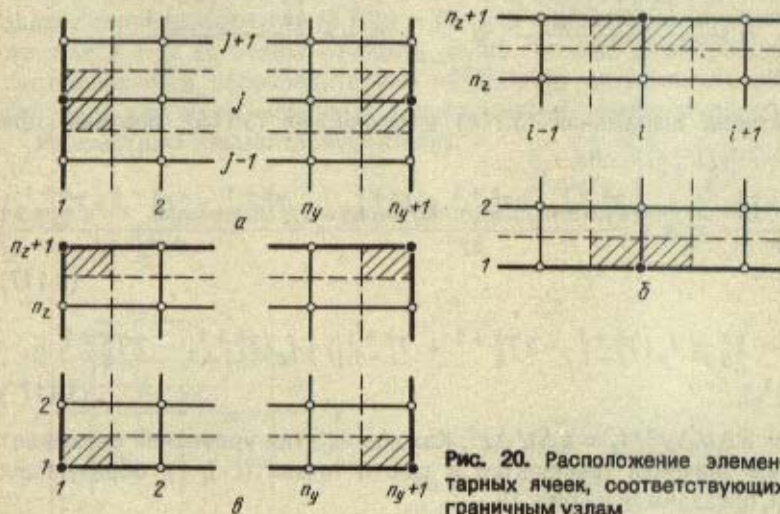


Рис. 20. Расположение элементарных ячеек, соответствующих граничным узлам

$$T_{1j}^{k+1} - T_{1j}^k = 2f_y (T_{2j}^{k+1} - T_{1j}^{k+1}) + f_z (T_{1,j+1}^{k+1} - 2T_{1j}^{k+1} + T_{1,j-1}^{k+1}); \quad (3.118')$$

при  $i = n_y + 1, j = 2, \dots, n_z$  (для сокращения записи у величины  $n_y$  опущен индекс  $y$ ):

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{n+1,j}^{k+1} - T_{n+1,j}^k}{\Delta t} = \left[ \alpha (T_0 - T_{n+1,j}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{n+1,j}^{k+1} - T_{nj}^{k+1}}{\Delta y} \right] \Delta z + \left( \lambda \frac{T_{n+1,j+1}^{k+1} - T_{n+1,j}^{k+1}}{\Delta z} - \lambda \frac{T_{n+1,j}^{k+1} - T_{n+1,j-1}^{k+1}}{\Delta z} \right) \frac{\Delta y}{2} \quad (3.119)$$

или

$$T_{n+1,j}^{k+1} - T_{n+1,j}^k = 2f_y [b_y (T_0 - T_{n+1,j}^{k+1}) - (T_{n+1,j}^{k+1} - T_{nj}^{k+1})] + f_z (T_{n+1,j+1}^{k+1} - 2T_{n+1,j}^{k+1} + T_{n+1,j-1}^{k+1}), \quad (3.119')$$

где  $b_y = \alpha \Delta y / \lambda$ .

Для узлов, расположенных на нижней и верхней поверхностях ( $z = 0, z = \delta_z, 0 < y < \delta_y$ ), при записи разностных граничных условий используем уравнения теплового баланса для граничных элементарных ячеек шириной  $\Delta y$  и высотой  $\Delta z/2$  (рис. 20, б). Получим при  $j = 1, i = 2, \dots, n_y$

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{i1}^{k+1} - T_{i1}^k}{\Delta t} = \left( \lambda \frac{T_{i+1,1}^{k+1} - T_{i1}^{k+1}}{\Delta y} - \lambda \frac{T_{i1}^{k+1} - T_{i-1,1}^{k+1}}{\Delta y} \right) \times \times \frac{\Delta z}{2} + \lambda \frac{T_{i2}^{k+1} - T_{i1}^{k+1}}{\Delta z} \Delta y \quad (3.120)$$

или

$$T_{i1}^{k+1} - T_{i1}^k = f_y (T_{i+1,1}^{k+1} - 2T_{i1}^{k+1} + T_{i-1,1}^{k+1}) + 2f_z (T_{i2}^{k+1} - T_{i1}^{k+1}); \quad (3.120')$$

при  $j = n_z + 1, i = 2, \dots, n_y$  (для сокращения записи у величины  $n_z$  опущен индекс  $z$ ):

$$\frac{1}{2} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{i,n+1}^{k+1} - T_{i,n+1}^k}{\Delta t} = \left( \lambda \frac{T_{i+1,n+1}^{k+1} - T_{i,n+1}^{k+1}}{\Delta y} - \lambda \frac{T_{i,n+1}^{k+1} - T_{i-1,n+1}^{k+1}}{\Delta y} \right) \frac{\Delta z}{2} + \left[ \alpha (T_0 - T_{i,n+1}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{i,n+1}^{k+1} - T_{in}^{k+1}}{\Delta z} \right] \Delta y \quad (3.121)$$



или

$$T_{i,n+1}^{k+1} - T_{i,n+1}^k = f_y (T_{i+1,n+1}^{k+1} - 2T_{i,n+1}^{k+1} + T_{i-1,n+1}^{k+1}) + 2f_z [b_z (T_0 - T_{i,n+1}^{k+1}) - (T_{i,n+1}^{k+1} - T_{i,n}^{k+1})], \quad (3.121')$$

где  $b_z = \alpha \Delta z / \lambda$ .

В особых условиях теплообмена находятся угловые элементарные ячейки шириной  $\Delta y/2$  и высотой  $\Delta z/2$ , соответствующие узлам, расположенным на ребрах заготовки (рис. 20, в). Для этих узлов получим следующие разностные уравнения:

при  $i=1, j=1$

$$\frac{1}{4} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{1,1}^{k+1} - T_{1,1}^k}{\Delta t} = \lambda \frac{T_{2,1}^{k+1} - T_{1,1}^{k+1}}{\Delta y} \frac{\Delta z}{2} + \lambda \frac{T_{1,2}^{k+1} - T_{1,1}^{k+1}}{\Delta z} \times \frac{\Delta y}{2} \quad (3.122)$$

или

$$T_{1,1}^{k+1} - T_{1,1}^k = 2f_y (T_{2,1}^{k+1} - T_{1,1}^{k+1}) + 2f_z (T_{1,2}^{k+1} - T_{1,1}^{k+1}); \quad (3.122')$$

при  $i=n_y+1, j=1$

$$\frac{1}{4} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{n+1,1}^{k+1} - T_{n+1,1}^k}{\Delta t} = \left[ \alpha (T_0 - T_{n+1,1}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{n+1,1}^{k+1} - T_{n,1}^{k+1}}{\Delta y} \right] \times \frac{\Delta z}{2} + \lambda \frac{T_{n+1,2}^{k+1} - T_{n+1,1}^{k+1}}{\Delta z} \frac{\Delta y}{2} \quad (3.123)$$

или

$$T_{n+1,1}^{k+1} - T_{n+1,1}^k = 2f_y [b_y (T_0 - T_{n+1,1}^{k+1}) - (T_{n+1,1}^{k+1} - T_{n,1}^{k+1})] + 2f_z (T_{n+1,2}^{k+1} - T_{n+1,1}^{k+1}); \quad (3.123')$$

при  $i=1, j=n_z+1$

$$\frac{1}{4} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{1,n+1}^{k+1} - T_{1,n+1}^k}{\Delta t} = \lambda \frac{T_{2,n+1}^{k+1} - T_{1,n+1}^{k+1}}{\Delta y} \frac{\Delta z}{2} + \left[ \alpha (T_0 - T_{1,n+1}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{1,n+1}^{k+1} - T_{1,n}^{k+1}}{\Delta z} \right] \frac{\Delta y}{2} \quad (3.124)$$

или

$$T_{1,n+1}^{k+1} - T_{1,n+1}^k = 2f_y (T_{2,n+1}^{k+1} - T_{1,n+1}^{k+1}) + 2f_z [b_z (T_0 - T_{1,n+1}^{k+1}) - (T_{1,n+1}^{k+1} - T_{1,n}^{k+1})]; \quad (3.124')$$

при  $i = n_y + 1, j = n_z + 1$  (обозначим  $n_y + 1$  через  $n'$ , а  $n_z + 1$  через  $n''$ )

$$\frac{1}{4} c' \Delta y \Delta z \frac{T_{n'n'}^{k+1} - T_{n'n}^k}{\Delta t} = \left[ \alpha (T_0 - T_{n'n'}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{n'n'}^{k+1} - T_{nn''}^{k+1}}{\Delta y} \right] \times \\ \times \frac{\Delta z}{2} + \left[ \alpha (T_0 - T_{n'n'}^{k+1}) - \lambda \frac{T_{n'n'}^{k+1} - T_{n'n}^k}{\Delta z} \right] \frac{\Delta y}{2} \quad (3.125)$$

или

$$T_{n'n'}^{k+1} - T_{n'n}^k = 2f_y [b_y (T_0 - T_{n'n'}^{k+1}) - (T_{n'n'}^{k+1} - T_{nn''}^{k+1})] + \\ + 2f_z [b_z (T_0 - T_{n'n'}^{k+1}) - (T_{n'n'}^{k+1} - T_{n'n}^k)]. \quad (3.125')$$

Система разностных уравнений (3.117) – (3.125) представляет собой систему  $(n_y + 1)(n_z + 1)$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений сеточных температур  $T_{ij}^{k+1}$  ( $i = 1, \dots, n_y + 1; j = 1, \dots, n_z + 1$ ). Для ее решения могут быть применены различные – как прямые, так и итерационные – методы решения систем линейных уравнений. Недостатком этих методов, однако, является их низкая эффективность, приводящая к резкому возрастанию объема вычислений при измельчении сетки. Поэтому особый интерес представляют специальные способы решения рассматриваемой задачи, основанные на сведении двухмерной разностной схемы к совокупности одномерных разностных схем.

Идея одного из таких способов заключается в *расщеплении* двухмерной задачи по каждому из координатных направлений. При этом расчет на каждом шаге по времени проводится в два этапа: на первом этапе находятся некоторые промежуточные, вспомогательные значения  $T'_{ij}$ , получаемые при заданном исходном распределении температуры  $T_{ij}^k$  и учете теплопереноса только вдоль оси  $y$ ; на втором этапе промежуточные значения  $T'_{ij}$  рассматриваются в качестве исходных, и производится учет теплопереноса вдоль оси  $z$ .

На первом этапе необходимо для каждого  $j$  ( $j = 1, \dots, n_z + 1$ ) решить следующую систему уравнений, представляющую собой неявную четырехточечную разностную схему для одномерной задачи теплопроводности:

$$\frac{T'_{ij} - T_{ij}^k}{\Delta t} = a \frac{T'_{i+1,j} - 2T'_{ij} + T'_{i-1,j}}{\Delta y^2}, \quad i = 2, \dots, n_y; \\ \frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T'_{1j} - T_{1j}^k}{\Delta t} = \lambda \frac{T'_{2j} - T'_{1j}}{\Delta y}; \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2} c' \Delta y} \right\} \quad (3.126)$$



$$\frac{1}{2} c' \Delta y \frac{T'_{n+1,j} - T^k_{n+1,j}}{\Delta t} = \alpha(T_0 - T'_{n+1,j}) - \lambda \frac{T'_{n+1,j} - T'_{n,j}}{\Delta y} \quad (n \equiv n_y) \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2} c' \Delta y} \right\}$$

или [сравните с системой уравнений (3.46'), (3.47'), (3.50')]:

$$\left. \begin{aligned} -f_y T'_{i-1,j} + (1 + 2f_y) T'_{ij} - f_y T'_{i+1,j} &= T^k_{ij}, \quad i=2, \dots, n_y; \\ (1 + 2f_y) T'_{1j} - 2f_y T'_{2j} &= T^k_{1j}; \\ -2f_y T'_{nj} + [1 + 2f_y(1 + b_y)] T'_{n+1,j} &= T^k_{n+1,j} + \\ + 2f_y b_y T_0 \quad (n \equiv n_y) \end{aligned} \right\} \quad (3.126')$$

На втором этапе определяем искомые значения сеточной температуры  $T^{k+1}_{ij}$  путем решения аналогичной системы уравнений для каждого  $i$  ( $i=1, \dots, n_y+1$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{T^{k+1}_{ij} - T^k_{ij}}{\Delta t} &= a \frac{T^{k+1}_{i,j+1} - 2T^{k+1}_{ij} + T^{k+1}_{i,j-1}}{\Delta z^2}, \quad j=2, \dots, n_z; \\ \frac{1}{2} c' \Delta z \frac{T^{k+1}_{i1} - T^k_{i1}}{\Delta t} &= \lambda \frac{T^{k+1}_{i2} - T^k_{i1}}{\Delta z}; \\ \frac{1}{2} c' \Delta z \frac{T^{k+1}_{i,n+1} - T^k_{i,n+1}}{\Delta t} &= \alpha(T_0 - T^{k+1}_{i,n+1}) - \\ - \lambda \frac{T^{k+1}_{i,n+1} - T^k_{in}}{\Delta z} \quad (n \equiv n_z) \end{aligned} \right\} \quad (3.127)$$

или

$$\left. \begin{aligned} -f_z T^{k+1}_{i,j-1} + (1 + 2f_z) T^{k+1}_{ij} - f_z T^{k+1}_{i,j+1} &= T^k_{ij}, \quad j=2, \dots, n_z; \\ (1 + 2f_z) T^{k+1}_{i1} - 2f_z T^{k+1}_{i2} &= T^k_{i1}; \\ -2f_z T^{k+1}_{in} + [1 + 2f_z(1 + b_z)] T^{k+1}_{i,n+1} &= T^k_{i,n+1} + \\ + 2f_z b_z T_0 \quad (n \equiv n_z). \end{aligned} \right\} \quad (3.127')$$

Решение приведенных трехдиагональных систем уравнений производится методом прогонки.

Можно показать, что локально-одномерная разностная схема (3.126), (3.127) является безусловно устойчивой и сходится со скоростью  $O(\Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta t)$ .

Пример 3.7. Заготовка квадратного сечения  $0,1 \times 0,16$  м нагревается в течение 480 с в печи скоростного конвективного нагрева. Начальная температура тела  $T_H = 1100$  К, температура газа  $T_0 = 1800$  К, коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 350$  Вт/(м<sup>2</sup> · К). Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности

стали равны соответственно  $\lambda = 28 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  и  $a = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Предполагая, что нагрев является симметричным, рассчитать распределение температуры в средней плоскости и на поверхности заготовки.

Применяя для решения задачи метод расщепления, составим программу расчета, текст которой приведен в приложении 7. Программа предусматривает ввод значений  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и  $\Delta t$  и решение систем разностных уравнений (3.126) и (3.127) методом прогонки. По окончании счета производится вывод на экран дисплея распределений температуры по толщине заготовки.

Для прямой оценки погрешности расчета найдем аналитическое решение задачи. Для этого представим рассматриваемое тело как результат пересечения двух взаимно перпендикулярных бесконечных пластин, толщиной  $2\delta_y$  и  $2\delta_z$ , и решим для каждой из этих пластин одномерную задачу теплопроводности. Записав формулу (3.45) в безразмерном виде и ограничившись двумя первыми слагаемыми, получим:

$$\theta(Y, Fo_y) \approx C_{1y} \exp(-\mu_{1y}^2 Fo_y) \cos(\mu_{1y} Y) + C_{2y} \exp(-\mu_{2y}^2 Fo_y) \cos(\mu_{2y} Y); \quad (3.128)$$

$$\theta(Z, Fo_z) \approx C_{1z} \exp(-\mu_{1z}^2 Fo_z) \cos(\mu_{1z} Z) + C_{2z} \exp(-\mu_{2z}^2 Fo_z) \cos(\mu_{2z} Z), \quad (3.129)$$

где  $Y = y/\delta_y$  и  $Z = z/\delta_z$  — безразмерные координаты, изменяющиеся от 0 до 1;  $Fo_y = at/\delta_y^2$  и  $Fo_z = at/\delta_z^2$  — числа Фурье, соответствующие моменту времени  $t$ ;  $\theta = (T - T)/(T_0 - T_H)$  — относительная избыточная температура, равная единице в начальный момент времени и стремящаяся к нулю в процессе нагрева тела. Характеристические числа  $\mu_{1y}$ ,  $\mu_{2y}$ ,  $\mu_{1z}$  и  $\mu_{2z}$  определяются величинами критериев Био ( $Bi_y = \alpha\delta_y/\lambda$  и  $Bi_z = \alpha\delta_z/\lambda$ ) в соответствии с уравнением, приведенным при рассмотрении примера 3.1. Там же указана формула для вычисления коэффициентов  $C_{1y}$ ,  $C_{2y}$ ,  $C_{1z}$  и  $C_{2z}$ .

Из условия задачи следует, что  $\delta_y = \delta_z = \delta$  ( $\delta = 0,08 \text{ м}$ ),  $\alpha_y = \alpha_z = \alpha$  [ $\alpha = 350 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ], поэтому  $Bi_y = Bi_z = Bi$  ( $Bi = 1$ ) и все коэффициенты, входящие в выражения (3.128) и (3.129), имеют одинаковые значения:  $\mu_{1y} = \mu_{1z}$ ,  $\mu_{2y} = \mu_{2z}$ ,  $C_{1y} = C_{1z}$ ,  $C_{2y} = C_{2z}$ . Кроме того, числа Фурье для обоих координатных направлений равны  $Fo_y = Fo_z = Fo$  ( $Fo = 0,48$ ). Таким образом, решения вспомогательных одномерных задач теплопроводности для каждой из бесконечных пластин в рассматриваемом случае отличаются только значениями координат  $Y$  и  $Z$ .

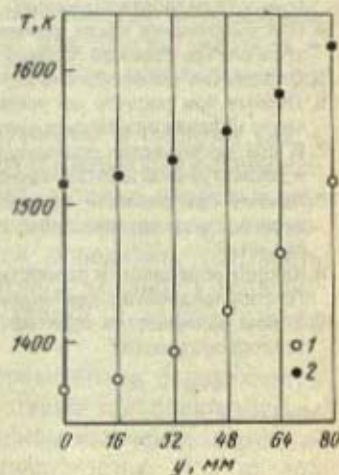


Рис. 21. Распределение температуры по ширине заготовки при  $\Delta y = 0,016 \text{ м}$ : 1 — средняя плоскость ( $z = 0$ ); 2 — поверхность ( $z = \delta_z$ )



Перемножив выражения (3.128) и (3.129), получим решение двухмерной задачи теплопроводности в следующем виде:

$$\theta(Y, Z, Fo) = \theta(Y, Fo)\theta(Z, Fo). \quad (3.130)$$

Например, на оси заготовки, т.е. при  $Y = Z = 0$ , при указанных значениях параметров будем иметь  $\theta = 0,6146$ , откуда  $T = T_0 - (T_0 - T_H)\theta = 1369,8 \text{ K}$ .

Проведем численное решение задачи при  $\Delta y = \Delta z = 0,016 \text{ м}$  ( $n_y = n_z = 5$ ),  $\Delta t = 20 \text{ с}$ . Для иллюстрации на рис. 21 показано изменение сеточных значений температуры при  $i = 1, \dots, 6$  в средней плоскости заготовки ( $j = 1$ ) и на ее поверхности ( $j = 6$ ). Погрешность этого решения в каждой узловой точке определим, используя точные значения температуры, найденные по формуле (3.130). Как показывает расчет, максимальная абсолютная погрешность наблюдается в центральном узле ( $i = j = 1$ ), для которого расчетное значение температуры оказывается равным  $1367,2 \text{ K}$ , при этом  $\epsilon = 2,6 \text{ K}$ .

Для того чтобы продемонстрировать повышение точности расчета при измельчении сетки, уменьшим значение шагов по координатам в два раза, т.е. положим  $\Delta y = \Delta z = 0,008 \text{ м}$  ( $n_y = n_z = 10$ ). В соответствии с оценкой  $\epsilon = O(\Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta t)$  одновременно в четыре раза уменьшим шаг по времени, т.е. возьмем  $\Delta t = 5 \text{ с}$ . В результате решения задачи получим температуру центрального узла, равную  $1369,1 \text{ K}$ , при этом погрешность уменьшится до  $0,7 \text{ K}$ . Таким образом, соотношение  $\epsilon = O(\Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta t)$  приближенно соответствует фактическому уменьшению погрешности расчета.

При отсутствии точного решения задачи так же, как и в одномерном случае, для оценки погрешности расчета может быть использован метод Рунге.

В заключение отметим, что метод расщепления легко распространяется на случай трех пространственных переменных и может быть применен для решения трехмерной задачи теплопроводности.

### Контрольные вопросы

1. Какие разностные схемы называются аппроксимирующими исходную дифференциальную задачу теплопроводности? Что называется порядком аппроксимации?
2. Какие разностные схемы называются устойчивыми?
3. Какие разностные схемы называются сходящимися? Что называется порядком точности разностной схемы?
4. При выполнении каких условий разностная схема является сходящейся? Чему в этом случае равен ее порядок точности?
5. В каком случае аппроксимация граничных условий называется несогласованной?
6. Почему при расчете нагрева тела явная разностная схема дает завышенные, а чисто неявная разностная схема – заниженные значения температуры?
7. В чем заключаются преимущества и недостатки явной, неявной четырехточечной и симметричной шеститочечной разностных схем?
8. Почему при решении нелинейной задачи теплопроводности применение итерационных разностных схем приводит к повышению эффективности алгоритма расчета?
9. Каковы особенности разностной схемы, предназначенной для решения уравнения теплопроводности с движущейся границей?
10. В чем заключается идея метода расщепления при решении двухмерной задачи теплопроводности?

Перейдем к рассмотрению методов расчета процессов теплообмена излучением и конвекцией, определяющих условия теплового взаимодействия поверхности нагреваемого тела с окружающей средой. Эту поверхность обычно можно рассматривать как один из элементов системы, образованной некоторым газовым объемом и ограничивающей его замкнутой оболочкой. Предположим сначала, что газ является неподвижным, а переносом тепла теплопроводностью можно пренебречь, так что теплообмен в системе осуществляется только излучением. В этом случае состояние системы характеризуется следующими переменными: температурным полем  $T(N)$ , К, и полем тепловыделений  $q^V(N)$ , Вт/м<sup>3</sup>, в газе ( $N$  — точка газового объема); температурным полем  $T(M)$ , К, и распределением плотности потока результирующего излучения  $q^P(M)$ , Вт/м<sup>2</sup>, на ограничивающей поверхности ( $M$  — точка поверхности).

В зависимости от того, какие переменные являются заданными (входными), а также неизвестными, подлежащими определению (выходными), различают прямую, обратную и смешанную постановки задачи. При прямой постановке задачи входными переменными являются температурные поля  $T(N)$  и  $T(M)$ , а выходными — поля тепловыделений  $q^V$  и плотностей потока  $q^P$ ; при обратной постановке задачи — наоборот. Чаще всего на практике встречается смешанная постановка задачи, когда для одних участков газового объема и ограничивающей поверхности заданы температуры, а искомыми являются тепловыделения или плотности результирующих потоков; для других участков — наоборот, заданы тепловыделения или плотности результирующих потоков, а требуется определить температуры.

Например, при расчете теплообмена излучением в системе газ — кладка — металл часто считаются известными температуры поверхности нагреваемого металла и газового объема, а также плотность результирующего потока на поверхности кладки (имеющая смысл плотности потока тепловых потерь). Требуется определить плотность результирующего потока на поверхности металла, мощность тепловыделения в газовом объеме и температуру кладки. В данном случае постановка задачи является смешанной.

Связи между входными и выходными переменными определяются геометрией системы и радиационными свойствами тел: спектральным коэффициентом поглощения газа  $k_\lambda$  (рассеянием излучения пренебрегаем) и спектральной поглощательной способностью  $A_\lambda$ , равной



спектральной степени черноты  $\epsilon_\lambda$  ограничивающей поверхности<sup>1</sup>. В общем случае радиационные свойства тел зависят от температуры, поэтому при неравномерном температурном поле значения  $k_\lambda$ ,  $A_\lambda$  и  $\epsilon_\lambda$  являются функциями от координат. Кроме того,  $k_\lambda$ ,  $A_\lambda$  и  $\epsilon_\lambda$  могут явно зависеть от координат в силу неравномерного распределения концентрации поглощающих компонент в газовом объеме и неоднородности радиационных свойств различных участков ограничивающей поверхности.

Строгое математическое описание радиационного теплообмена приводит к интегральным уравнениям, для решения которых могут быть применены различные численные методы. Необходимым этапом расчета является при этом дискретизация системы, т.е. ее разбиение на отдельные конечные участки с последующим усреднением всех величин в пределах каждого участка. В результате строгое математическое описание радиационного теплообмена заменяется его приближенной математической моделью в виде системы алгебраических уравнений.

Ориентируясь на применение численных методов для расчета радиационного теплообмена, построение приближенной математической модели этого процесса можно производить сразу, проводя дискретизацию системы уже на этапе постановки задачи. При этом разбиение системы на расчетные участки должно быть таким, чтобы в пределах каждого участка (зоны) температуру и радиационные характеристики можно было считать постоянными. Подобные методы называются *зональными методами расчета радиационного теплообмена*. Решение, получаемое зональными методами, является, конечно, приближенным, однако, выбирая размеры зон достаточно малыми, можно получить результат с любой заданной точностью.

## 1. ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ЗОНАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

### *Постановка задачи*

Пусть ограничивающая поверхность разбита на  $m$  зон, площади которых равны  $F_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). В пределах каждой из этих зон постоянными являются температура поверхности и спектральная поглощательная способность, равная степени черноты:

---

<sup>1</sup> Строго говоря, равенство  $A_\lambda = \epsilon_\lambda$ , выражающее закон Кирхгофа, выполняется при условии локального термодинамического равновесия, следствием которого является независимость спектральных радиационных характеристик вещества от свойств падающего излучения. Обоснованность допущения о локальном термодинамическом равновесии для процессов лучистого теплообмена, протекающих в теплотехнических агрегатах, подтверждается экспериментальными данными.

$$T_i = \text{const}, A_{\lambda i} = \varepsilon_{\lambda i} = \text{const}, i = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

Обозначим через  $q_{\lambda i}$  спектральную плотность потока собственного излучения  $i$ -той поверхностной зоны, а через  $q_{\lambda i}^0$  — спектральную плотность потока собственного излучения абсолютно черного тела при температуре  $T_i$  [зависимость  $q_{\lambda i}^0 = f(\lambda, T_i)$  устанавливается законом Планка]. Из соотношения  $q_{\lambda i} = \varepsilon_{\lambda i} q_{\lambda i}^0$  следует, что спектральная плотность потока  $q_{\lambda i}$  также является постоянной в пределах каждой поверхностной зоны, и спектральный поток собственного излучения равен

$$Q_{\lambda i} = q_{\lambda i} F_i = \varepsilon_{\lambda i} q_{\lambda i}^0 F_i. \quad (4.2)$$

Газовый объем разобьем на  $n$  зон, объемы которых равны  $V_l$ , а площади ограничивающих поверхностей —  $F_l$ ,  $i = m + 1, \dots, l$  ( $l = m + 1 + n$  — общее число зон). В пределах каждой из этих зон постоянными являются температура газа и спектральный коэффициент поглощения

$$T_i = \text{const}, k_{\lambda i} = \text{const}, i = m + 1, \dots, l. \quad (4.3)$$

Величины (4.3) являются характеристиками объемного излучения газа, в частности, коэффициент поглощения  $k_{\lambda i}$  определяет объемную спектральную плотность потока собственного излучения газа при температуре  $T_i$

$$\eta_{\lambda i} = 4k_{\lambda i} q_{\lambda i}^0. \quad (4.4)$$

Спектральный поток собственного излучения  $i$ -той объемной зоны  $Q_{\lambda i}$  может быть выражен через  $\eta_{\lambda i}$  следующим образом:

$$Q_{\lambda i} = \gamma_{\lambda i} \eta_{\lambda i} V_i, \quad (4.5)$$

где множитель  $\gamma_{\lambda i} < 1$  (коэффициент использования излучающего объема) показывает, что часть собственного излучения объемной зоны поглощается в ней самой.

Различие способов описания излучения поверхностных и объемных зон создает значительные неудобства при реализации зонального метода. Поэтому желательно описать свойства объемных зон таким образом, чтобы от коэффициентов поглощения  $k_{\lambda i}$  перейти к величинам  $A_{\lambda i}$  и  $\varepsilon_{\lambda i}$ , характеризующим излучение твердых непрозрачных поверхностей.

Для того чтобы произвести такой переход, условимся считать, что участие в теплообмене принимает не сам газ, находящийся в объемной зоне, а ограничивающая его воображаемая поверхность. Этой поверхности необходимо приписать определенную температуру и радиационные свойства таким образом, чтобы ее излучение было эквивалентно излучению газового объема.

Примем температуру поверхности  $i$ -той объемной зоны равной



температуре газа  $T_i$ , заменим тепловыделение в объемной зоне  $Q_i^v$  потоком результирующего излучения через поверхность  $F_i$ :  $Q_i^p = -Q_i^v$  (знак минус показывает, что отрицательным считается результирующий поток, направленный от поверхности теплообмена) и введем спектральную поглощательную способность поверхности объемной зоны, равную спектральной поглощательной способности газового объема

$$A_{\lambda i} = 1 - \exp(-k_{\lambda i} s_i^{\text{эф}}), \quad (4.6)$$

где  $s_i^{\text{эф}}$  — эффективная длина пути луча для  $i$ -той объемной зоны. Введем также спектральную степень черноты этой поверхности таким образом, чтобы спектральный поток собственного излучения объемной зоны (4.5) определялся соотношением (4.2)

$$Q_{\lambda i} = \varepsilon_{\lambda i} q_{\lambda i}^0 F_i. \quad (4.7)$$

Согласно закону Кирхгофа для спектральных величин  $\varepsilon_{\lambda i} = A_{\lambda i}$ , т.е. степень черноты  $\varepsilon_{\lambda i}$ , которую для краткости будем называть степенью черноты  $i$ -той объемной зоны, можно найти по формуле (4.6).

Применение выражения (4.6) связано с нахождением эффективной длины пути луча, зависящей от коэффициента поглощения газа, размеров и конфигурации объемной зоны. Обозначим через  $\tilde{s}_i^{\text{эф}}$  эффективную длину пути луча для некоторой объемной зоны, обладающей достаточно малой поглощательной способностью ( $A_{\lambda i} \ll 1$ ). Из выражения (4.6) следует, что в этом случае  $k_{\lambda i} \tilde{s}_i^{\text{эф}} = -\ln(1 - A_{\lambda i}) \approx A_{\lambda i}$ , а значит и  $\varepsilon_{\lambda i} \approx k_{\lambda i} \tilde{s}_i^{\text{эф}}$ . Пренебрегая поглощением части собственного излучения газа в самой объемной зоне, положим в соотношении (4.5)  $\gamma_{\lambda i} \approx 1$  и с учетом (4.4) получим  $Q_{\lambda i} \approx 4k_{\lambda i} q_{\lambda i}^0 V_i$ . Сопоставив эту величину с выражением (4.7), получим

$$\varepsilon_{\lambda i} q_{\lambda i}^0 F_i \approx 4k_{\lambda i} q_{\lambda i}^0 V_i$$

$$\text{или } (k_{\lambda i} \tilde{s}_i^{\text{эф}}) F_i \approx 4k_{\lambda i} V_i,$$

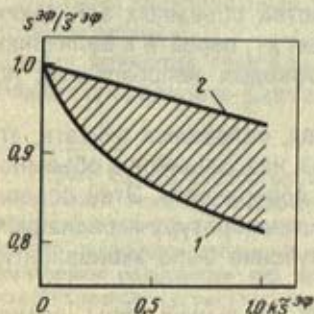


Рис. 22. К определению эффективной длины пути луча:

1 — плоский слой; 2 — сферический объем

откуда следует известное выражение эффективной длины пути луча для слабопоглощающего объема

$$\tilde{s}_i^{\text{эф}} = 4V_i/F_i. \quad (4.8)$$

В общем случае (при  $\nu_{\lambda i} < 1$ ) эффективная длина пути луча будет иметь меньшее значение:  $s_i^{\text{эф}} < \tilde{s}_i^{\text{эф}}$ . Для серого газа величину отношения  $s_i^{\text{эф}}/\tilde{s}_i^{\text{эф}}$  можно оценить с помощью графика, приведенного на рис. 22. В приближенных расчетах обычно считают, что  $s^{\text{эф}} \approx 0,9\tilde{s}^{\text{эф}}$ .

Итак, введение понятий поглощательной способности и степени черноты объемных зон приводит к единообразному описанию состояния всех зон с помощью величин (4.1), т.е. температур  $T_i$  и спектральных радиационных характеристик  $A_{\lambda i} = \epsilon_{\lambda i} (i = 1, \dots, l)$ .

Для перехода к интегральным величинам обозначим через  $Q_i$  интегральный поток собственного излучения  $i$ -той зоны, а через  $Q_i^0$  интегральный поток собственного излучения абсолютно черного тела при температуре  $T_i$  (по закону Стефана – Больцмана  $Q_i^0 = \sigma_0 T_i^4 F_i$ ). Тогда

$$Q_i = \int_0^\infty Q_{\lambda i} d\lambda = \int_0^\infty \epsilon_{\lambda i} Q_{\lambda i}^0 d\lambda \quad (4.9)$$

$$\text{или } Q_i = \epsilon_i Q_i^0,$$

где интегральная степень черноты

$$\epsilon_i = \frac{1}{Q_i^0} \int_0^\infty \epsilon_{\lambda i} Q_{\lambda i}^0 d\lambda. \quad (4.10)$$

Обозначим также через  $Q_{\lambda i}^{\text{пад}}$  и  $Q_i^{\text{пад}}$  спектральный и интегральный потоки излучения, падающего на  $i$ -тую зону, а через  $Q_{\lambda i}^{\text{погл}}$  и  $Q_i^{\text{погл}}$  – спектральный и интегральный потоки излучения, поглощенного  $i$ -той зоной. Тогда

$$Q_{\lambda i}^{\text{погл}} = A_{\lambda i} Q_{\lambda i}^{\text{пад}}$$

$$\text{и } Q_i^{\text{погл}} = \int_0^\infty Q_{\lambda i}^{\text{погл}} d\lambda = \int_0^\infty A_{\lambda i} Q_{\lambda i}^{\text{пад}} d\lambda$$

$$\text{или } Q_i^{\text{погл}} = A_i Q_i^{\text{пад}}, \quad (4.11)$$

где интегральная поглощательная способность

$$A_i = \frac{1}{Q_i^{\text{пад}}} \int_0^\infty A_{\lambda i} Q_{\lambda i}^{\text{пад}} d\lambda. \quad (4.12)$$

В рамках классического зонального метода расчета радиационного теплообмена используется также понятие потока эффективного излу-



чения  $Q^{\text{эф}}$ , с помощью которого производится учет переотражений излучения поверхностными зонами.

По определению, для поверхностных зон

$$Q_i^{\text{эф}} = R_i Q_i^{\text{пад}} + Q_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.13)$$

где  $R_i = 1 - A_i$  — отражательная способность  $i$ -той зоны.

Пренебрегая рассеянием излучения в газовом объеме, положим отражательную способность поверхностей объемных зон равной нулю, поэтому для них — в отличие от поверхностных зон —

$$Q_i^{\text{эф}} = Q_i, \quad i = m + 1, \dots, l. \quad (4.14)$$

Поток результирующего излучения  $Q^{\text{р}}$  определяется соотношением

$$Q^{\text{р}} = Q_i^{\text{погл}} - Q_i. \quad (4.15)$$

Для поверхностных зон ( $i = 1, \dots, m$ ) из этого соотношения, с учетом (4.13), следует, что

$$Q_i^{\text{р}} = Q_i^{\text{пад}} - Q_i^{\text{эф}} \quad (4.16)$$

или

$$Q_i^{\text{р}} = \frac{1}{R_i} (A_i Q_i^{\text{эф}} - Q_i). \quad (4.17)$$

Для объемных зон ( $i = m + 1, \dots, l$ ) справедлива лишь формула (4.15), а выражения (4.16) и (4.17) перестают быть применимыми.

Одним из основных этапов постановки задачи расчета радиационного теплообмена классическим зональным методом является описание связи потока излучения, падающего на некоторую зону, с эффективными потоками остальных зон. Такая связь устанавливается с помощью обобщенных угловых коэффициентов излучения, характеризующих взаимное расположение зон в пространстве и частичное поглощение излучения газом в процессе теплообмена между зонами.

Напомним, что обобщенный угловой коэффициент излучения  $\psi_{ki}$  выражает вклад эффективного излучения  $k$ -той зоны в лучистый поток, падающий на  $i$ -тую зону при наличии поглощающей среды

$$Q_{ki}^{\text{пад}} = Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki}, \quad (4.18)$$

где  $Q_{ki}^{\text{пад}}$  — часть потока эффективного излучения  $k$ -той зоны, падающая на  $i$ -тую зону. При этом полная величина потока излучения, падающего на  $i$ -тую зону

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki}. \quad (4.19)$$

В последнем соотношении для сокращения записи символом  $\sum_k$

обозначена операция суммирования по всем зонам — как поверхностным, так и объемным — т.е. при  $k = 1, \dots, l$ . Для записи соотношения (4.19) удобно использовать матричную форму

$$Q_{\text{пад}} = Q^{\text{эф}} \psi, \quad (4.20)$$

где  $Q_{\text{пад}} \equiv \{ Q_i^{\text{пад}} \}$  и  $Q^{\text{эф}} \equiv \{ Q_i^{\text{эф}} \}$  — строки, элементами которых являются потоки падающего и эффективного излучения ( $i = 1, \dots, l$ );  $\psi$  — матрица обобщенных угловых коэффициентов размером  $l \times l$ .

При нахождении обобщенных угловых коэффициентов излучения  $\psi_{ki}$  используем формулу для локального обобщенного углового коэффициента с элемента  $dF_k$   $k$ -той зоны на  $i$ -тую зону, которая в случае диффузного излучения имеет вид

$$\psi'_{ki} = \int_{F_i} \frac{\cos \theta_k \cos \theta_i}{\pi s_{ki}^2} e^{-ks_{ki}} dF_i, \quad (4.21)$$

где  $s_{ki}$  — расстояние между элементами  $dF_k$  и  $dF_i$ ;  $\theta_k$  и  $\theta_i$  — углы между нормальными к элементам  $dF_k$  и  $dF_i$  и направлением  $s_{ki}$ ;  $k$  — средний коэффициент поглощения газа на пути  $s_{ki}$ . Тогда

$$Q_{ki}^{\text{пад}} = \int_{F_k} \psi'_{ki} q_k^{\text{эф}} dF_k.$$

Для того чтобы привести полученное выражение к виду (4.18), предположим, что плотность потока эффективного излучения  $q_k^{\text{эф}}$  постоянна в пределах  $k$ -той зоны. В этом случае  $q_k^{\text{эф}} = Q_k^{\text{эф}}/F_k$  и

$$Q_{ki}^{\text{пад}} = \frac{Q_k^{\text{эф}}}{F_k} \int_{F_k} \psi'_{ki} dF_k,$$

откуда получаем выражение для среднего обобщенного углового коэффициента

$$\psi_{ki} = \frac{1}{F_k} \int_{F_k} \psi'_{ki} dF_k. \quad (4.22)$$

Следует подчеркнуть, что возможность использования формулы (4.22) для расчета  $\psi_{ki}$  основана на допущении о постоянстве плотности потока эффективного излучения в пределах каждой зоны. Для объемных зон справедливость этого допущения следует из выражения (4.14) и условия постоянства температуры в пределах зоны. Для поверхностных зон условие



$$q_i^{\text{эф}} = \text{const}, i = 1, \dots, m. \quad (4.23)$$

накладывает дополнительные ограничения на размеры зон и должно учитываться при дискретизации системы наряду с основными требованиями (4.1)

Из условия (4.23) и выражений (4.13), (4.14) следует также, что в пределах поверхностных зон постоянные значения имеют плотности падающих и результирующих потоков:

$$q_i^{\text{пад}} = \text{const}, q_i^{\text{р}} = \text{const}, i = 1, \dots, m.$$

По этой причине в системах с диатермичной средой (т.е. при отсутствии объемных зон) зональные уравнения можно записывать непосредственно для плотностей потоков излучения. Для перехода в выражении (4.19) к плотностям эффективных потоков учтем, что  $q_k^{\text{эф}} = \text{const}$  и  $q_i^{\text{пад}} = \text{const}$  в пределах каждой поверхностной зоны, поэтому  $Q_k^{\text{эф}} = q_k^{\text{эф}} F_k$  и  $Q_i^{\text{пад}} = q_i^{\text{пад}} F_i$ . Используя свойство взаимности средних угловых коэффициентов  $F_k \psi_{ki} = F_i \psi_{ik}$ , получим

$$q_i^{\text{пад}} = \sum_k \psi_{ik} q_k^{\text{эф}}. \quad (4.24)$$

Такой подход будет использован при рассмотрении примера 4.3.

Указав все соотношения, необходимые для описания излучения отдельных зон и связей между ними, перейдем к построению математической модели радиационного теплообмена, т.е. к записи системы зональных уравнений. Предварительно уточним цель расчета, отметив что для каждой зоны в соответствии с общей постановкой задачи одна из величин —  $T_i$  или  $Q_i^{\text{р}}$  — является заданной по условию, а другая — искомой. В зависимости от того, какая из этих двух величин считается известной, различают зоны I и II рода. Для зон I рода заданы температуры  $T_i$  (или потоки собственного излучения  $Q_i$ ), а искомыми являются результирующие потоки  $Q_i^{\text{р}}$ ; для зон II рода, наоборот, заданы результирующие потоки  $Q_i^{\text{р}}$ , а искомыми являются температуры  $T_i$  (или потоки собственного излучения  $Q_i$ ). Таким образом, при прямой постановке задачи все зоны являются зонами I рода, при обратной — II рода, при смешанной — имеются зоны как I, так и II рода.

Для некоторых зон (III рода) неизвестными могут быть как температуры, так и потоки результирующего излучения — при заданной связи между ними. Например, для зон на поверхности кладки печи непрерывного действия поток тепловых потерь через кладку  $Q_i^{\text{р}}$  связан с температурой  $T_i$  соотношением  $Q_i^{\text{р}} = k_T (T_i - T_0) F_i$ , где  $k_T$  — коэффициент теплопередачи;  $T_0$  — температура окружающей среды. Тепловыделение в объемных зонах также может быть связано с температурой газа — например, в результате влияния температуры продуктов сгорания на степень их диссоциации. В подобных случаях для расчета теплообмена можно применить метод итераций, задавая значение температуры  $T_i$ , определяя  $Q_i^{\text{р}}$  и затем пересчитывая  $T_i$  на основании известной связи между этими величинами. Можно проводить итерации и в другой последовательности: задавать  $Q_i^{\text{р}}$ , определять  $T_i$  и затем пересчитывать  $Q_i^{\text{р}}$ . При таком подходе на каждом шаге итераций вместо зон III рода мы будем иметь дело с зонами I или II рода (см. пример 4.1). Поэтому достаточным является рассмотрение систем, содержащих зоны только I и II рода.

В рамках классического зонального метода расчет производят в два этапа: сначала для всех зон определяют потоки эффективного излучения, а затем по найденным значениям  $Q_i^{\text{эф}}$  для зон I рода рассчитывают результирующие потоки, а для зон II рода — температуры.

### Система зональных уравнений

Будем считать, что в рассматриваемой системе имеется:

$m_1$  поверхностных зон I рода ( $i = 1, \dots, m_1$ );

$m_2$  поверхностных зон II рода ( $i = m_1 + 1, \dots, m$ );

$n_1$  объемных зон I рода ( $i = m + 1, \dots, m + n_1$ );

$n_2$  объемных зон II рода ( $i = m + n_1 + 1, \dots, l$ ),

где  $m = m_1 + m_2$  — общее число поверхностных зон;  $n = n_1 + n_2$  — общее число объемных зон;  $l = m + n$  — общее число зон.

Запишем уравнения, определяющие значения эффективных потоков, отдельно для поверхностных и объемных зон I и II рода. Для поверхностных зон I рода, используя выражения (4.13) и (4.19), получим

$$Q_i^{\text{эф}} = R_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} + Q_i, \quad i = 1, \dots, m_1. \quad (4.25)$$

Для поверхностных зон II рода с учетом (4.16) получим

$$Q_i^{\text{эф}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{р}}, \quad i = m_1 + 1, \dots, m. \quad (4.26)$$

Для объемных зон I рода согласно (4.14)

$$Q_i^{\text{эф}} = Q_i, \quad i = m + 1, \dots, m + n_1. \quad (4.27)$$

Для объемных зон II рода, заменив в соотношении (4.15)  $Q_i$  на  $Q_i^{\text{эф}}$ , будем иметь

$$Q_i^{\text{эф}} = A_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{р}}, \quad i = m + n_1 + 1, \dots, l. \quad (4.28)$$

Таким образом, получена система из  $l$  уравнений относительно  $l$  неизвестных эффективных потоков  $Q_i^{\text{эф}}$  ( $i = 1, \dots, l$ ). Решив эту систему, найдем значения  $Q_i^{\text{эф}}$  для всех зон, после чего определим интересующие нас величины потоков результирующего излучения  $Q_i^{\text{р}}$  для зон I рода и температур  $T_i$  (или потоков собственного излучения  $Q_i$ ) для зон II рода по формулам (4.14) — (4.17):

для поверхностных зон I рода ( $i = 1, \dots, m_1$ )

$$Q_i^{\text{р}} = \frac{1}{R_i} (A_i Q_i^{\text{эф}} - Q_i) \quad (4.29)$$

$$\text{или } Q_i^{\text{р}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{эф}}; \quad (4.30)$$



для поверхностных зон II рода ( $i = m_1 + 1, \dots, m$ )

$$Q_i = A_i Q_i^{\text{эф}} - R_i Q_i^{\text{р}}; \quad (4.31)$$

для объемных зон I рода ( $i = m + 1, \dots, m + n_1$ )

$$Q_i^{\text{р}} = A_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i; \quad (4.32)$$

для объемных зон II рода ( $i = m + n_1 + 1, \dots, l$ )

$$Q_i = Q_i^{\text{эф}}. \quad (4.33)$$

Для поверхностных зон I рода можно воспользоваться одним из соотношений (4.29) или (4.30) [а также (4.32)]. При этом следует иметь в виду, что погрешность расчета по более простой формуле (4.29) возрастает при  $R_i \rightarrow 0$ , тогда как соотношения (4.30) или (4.32) свободны от этого недостатка.

Поскольку цель расчета радиационного теплообмена состоит в определении результирующих потоков и температур, эффективные потоки в системе зональных уравнений (4.25) – (4.33) являются вспомогательными, промежуточными величинами. В принципе, их можно было бы исключить из рассмотрения, перейдя к системе уравнений, непосредственно связывающей результирующие потоки и температуры. Заметим, что исключение эффективных потоков путем прямой подстановки выражений (4.14) и (4.17) в уравнения (4.25) – (4.28) возможно лишь при аналитическом (ручном) решении простейших задач, описываемых двумя–тремя зональными уравнениями. При достаточно большом числе зон такой способ не может быть реализован, поскольку получающиеся в результате прямого исключения эффективных потоков громоздкие выражения невозможно записать в общем виде, необходимом для построения эффективных алгоритмов численного решения задачи. Ниже будет показано, что для сохранения простоты и наглядности зональных уравнений при исключении эффективных потоков необходимо изменить сам способ описания радиационного теплообмена, а именно, перейти от обычных угловых коэффициентов к так называемым разрешающим угловым коэффициентам излучения.

### Частные случаи

Рассмотрим два важных частных случая.

1. Прямая постановка задачи. Если для всех зон заданы температуры (а вместе с тем и потоки собственного излучения  $Q_i$ ), система уравнений относительно  $Q_i^{\text{эф}}$  принимает вид

$$\left. \begin{aligned} Q_i^{\text{эф}} &= R_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} + Q_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ Q_i^{\text{эф}} &= Q_i, \quad i = m + 1, \dots, l. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Перенесем все неизвестные величины в левую часть первого из этих уравнений и введем символ Кронекера

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i \\ 0 & \text{при } k \neq i, \end{cases}$$

тогда уравнения (4.34) перепишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum_k Q_k^{\text{эф}} (\delta_{ki} - \psi_{ki} R_i) &= Q_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ \sum_k Q_k^{\text{эф}} \delta_{ki} &= Q_i, \quad i = m+1, \dots, l. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Полученную систему уравнений удобно представить в матричной форме. Для этого кроме уже введенных матрицы обобщенных угловых коэффициентов  $\psi$  и строки  $Q^{\text{эф}}$  рассмотрим диагональную матрицу отражательных способностей  $R \equiv \{ \delta_{ki} R_i \}$  (напомним, что  $R_i = 0$  при  $i = m+1, \dots, l$ ) и строку потоков собственного излучения  $Q \equiv \{ Q_i \}$ . Тогда систему (4.35) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$Q^{\text{эф}} (I - \psi R) = Q, \quad (4.36)$$

где  $I \equiv \{ \delta_{ki} \}$  — единичная матрица.

2. Обратная постановка задачи. Если для всех зон заданы значения результирующих потоков, то система уравнений для  $Q_i^{\text{эф}}$  принимает вид

$$\left. \begin{aligned} Q_i^{\text{эф}} &= \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{р}}, \quad i = 1, \dots, m; \\ Q_i^{\text{эф}} &= A_i \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} - Q_i^{\text{р}}, \quad i = m+1, \dots, l. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Сложив все приведенные уравнения почленно, получим

$$\sum_i Q_i^{\text{эф}} = \sum_{i=1}^m \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} + \sum_{i=m+1}^l \sum_k Q_k^{\text{эф}} \psi_{ki} A_i - \sum_i Q_i^{\text{р}}. \quad (4.38)$$

Так при стационарном теплообмене в замкнутой системе

$$\sum_i Q_i^{\text{р}} = 0, \quad (4.39)$$

уравнения (4.37) оказываются линейно зависимыми, поэтому система зональных уравнений при обратной постановке задачи имеет бесчисленное множество решений. Физический смысл этого результата вполне понятен: в связи с тем, что плотности результирующих потоков должны удовлетворять условию (4.39), независимо друг от друга могут быть заданы лишь  $l-1$  значений  $Q_i^{\text{р}}$ , таким образом задача оказывается недоопределенной. Для получения единственного решения необходимо



задать температуру хотя бы одной зоны, т.е. перейти к смешанной постановке задачи.

Таким образом, обратная постановка задачи не представляет самостоятельного интереса, однако, с помощью соотношения (4.38) можно установить одно чрезвычайно важное свойство обобщенных угловых коэффициентов.

Поменяем порядок суммирования в правой части соотношения (4.38) и перенесем левую сумму направо, поменяв в ней индекс  $i$  на  $k$ , получим

$$\sum_k Q_k^{\text{эф}} \left( \sum_{i=1}^m \psi_{ki} + \sum_{i=m+1}^l \psi_{ki} A_i - 1 \right) = 0.$$

Поскольку это равенство должно удовлетворяться для всего бесконечного набора решений системы уравнений (4.37), выражение, стоящее в скобках, должно тождественно равняться нулю при всех  $k$ , отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m \psi_{ki} + \sum_{i=m+1}^l \psi_{ki} A_i = 1. \quad (4.40)$$

Полученное соотношение выражает свойство замкнутости обобщенных угловых коэффициентов и может быть интерпретировано следующим образом. Каждое слагаемое  $\psi_{ki} A_i$  при  $i = m+1, \dots, l$  выражает долю эффективного излучения  $k$ -той зоны, поглощаемую в  $i$ -той объемной зоне, поэтому сумма  $\sum_{i=m+1}^l \psi_{ki} A_i \equiv A_{\Gamma(k)}$  представляет собой

поглощательную способность газа для эффективного излучения  $k$ -той зоны. Таким образом

$$\sum_{i=1}^m \psi_{ki} = 1 - A_{\Gamma(k)}, \quad (4.41)$$

а это соотношение имеет ясный физический смысл, вытекающий из закона сохранения энергии: сумма обобщенных угловых коэффициентов по всем поверхностным зонам равна пропускательной способности газа. При отсутствии поглощения излучения газом  $A_{\Gamma(k)} = 0$ , и из соотношения (4.41) получим обычное выражение свойства замкнутости для угловых коэффициентов излучения  $\psi_{ki}$  в диатермичной среде:

$$\sum_{i=1}^m \psi_{ki} = 1.$$

## Решение системы зональных уравнений

Если коэффициенты, входящие в уравнения (4.25) – (4.33) (поглощательные и отражательные способности, степени черноты, обобщенные угловые коэффициенты излучения), не зависят от температуры, то полная система зональных уравнений является линейной относительно искомым потокам результирующего излучения (для зон I рода) и собственного излучения (для зон II рода), а подсистема (4.25) – (4.28) – линейной относительно потоков эффективного излучения. В этом случае после нахождения из подсистемы (4.25) – (4.28) значений  $Q_i^{\text{эф}}$  для всех зон потоки результирующего излучения для зон I рода и потоки собственного излучения (и температуры) для зон II рода определяем по явным формулам (4.29) – (4.33).

В общем случае система зональных уравнений (4.25) – (4.33) является нелинейной. Это связано прежде всего с тем, что коэффициент поглощения газа (а следовательно, поглощательные способности, степени черноты объемных зон и обобщенные угловые коэффициенты излучения) весьма существенно зависят от температуры. Если в системе имеются объемные зоны II рода, температуры которых заранее неизвестны, для решения задачи приходится применять метод итераций, используя в начальном приближении некоторые исходные значения коэффициента поглощения газа в пределах этих зон. Решив задачу и определив температуры объемных зон II рода, нужно пересчитать коэффициенты поглощения по найденным температурам, при необходимости провести повторное решение задачи и т.д.

Нелинейность системы зональных уравнений может быть также обусловлена зависимостью от температуры поглощательных способностей и степеней черноты поверхностных зон II рода. Необходимость применения метода итераций в этом случае пояснит пример 4.2.

В рамках классического зонального метода полная, в целом нелинейная система зональных уравнений оказывается частично линейной, так как содержит подсистему уравнений (4.25) – (4.28), линейную относительно потоков эффективного излучения. В ряде случаев это обстоятельство позволяет значительно облегчить решение задачи.

В частности, для систем с диатермичной средой поглощательные способности и степени черноты зон II рода фигурируют лишь в уравнениях (4.31), определяющих температуры этих зон, и не оказывают влияния на значения эффективных потоков. Поэтому решение системы зональных уравнений может быть проведено в два этапа: сначала из системы линейных уравнений (4.25) – (4.28) определяем значения  $Q_i^{\text{эф}}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), а затем, решая (например, методом итераций) нелинейные относительно температур уравнения (4.31) при фиксированных значениях эффективных потоков, находим температуры зон II рода



$T_i (i = m_1 + 1, \dots, m)$ . Поток результирующего излучения для зон I рода  $Q_i^P (i = 1, \dots, m_1)$  вычислим непосредственно по формулам (4.29) или (4.30). Алгоритм решения системы зональных уравнений в данном случае поясняет структурная схема, приведенная на рис. 23, а.

При наличии объемных зон и необходимости учета зависимости обобщенных угловых коэффициентов излучения и радиационных характеристик объемных зон II рода от температуры решение задачи

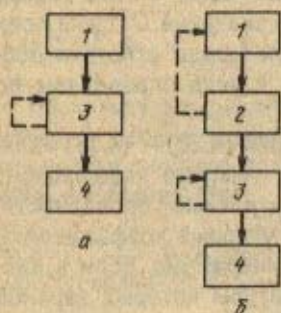


Рис. 23. Структурные схемы решения системы зональных уравнений при отсутствии (а) и наличии (б) объемных зон:

1 – решение системы линейных уравнений относительно  $Q_i^{эф}$ ; 2 – расчет  $T_i$  для объемных зон II рода; 3 – расчет  $T_i$  для поверхностных зон II рода; 4 – расчет  $Q_i^P$  для зон I рода. Штриховые линии соответствуют итерационным циклам

существенно усложняется. В этом случае обобщенные угловые коэффициенты излучения и поглощательные способности объемных зон II рода являются параметрами системы уравнений (4.25) – (4.28) для потоков эффективного излучения, поэтому при решении нелинейных относительно температур уравнений (4.33) на каждом шаге итераций приходится заново решать эту систему (рис. 23, б). Тем самым терлется главное достоинство классического зонального метода – возможность нахождения промежуточных значений эффективных потоков независимо от вычисления конечных значений результирующих потоков и температур. Как будет показано ниже, для расчета радиационного теплообмена в поглощающе-излучающей среде в общем случае более удобным оказывается другой, так называемый резольвентный зональный метод.

При рассмотрении проблем, связанных с учетом нелинейности системы зональных уравнений, не был затронут вопрос о методах решения системы линейных алгебраических уравнений (4.25) – (4.28) относительно потоков эффективного излучения. Затруднения, которые могут при этом возникнуть, связаны с выбором наиболее рационального метода расчета с учетом как сложности системы (числа зон), так и возможностей имеющейся вычислительной техники. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Перепишем систему уравнений (4.25) – (4.28) в матричном виде. Для этого введем матрицу  $a \equiv \{a_{kl}\}$  и строку  $b \equiv \{b_j\}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 i = 1, \dots, m_1: & \quad a_{ki} = \psi_{ki} R_i, \quad b_i = Q_i; \\
 i = m_1 + 1, \dots, m: & \quad a_{ki} = \psi_{ki} R_i, \quad b_i = -Q_i^p; \\
 i = m + 1, \dots, m + n_1: & \quad a_{ki} = 0, \quad b_i = Q_i; \\
 i = m + n_1 + 1, \dots, l: & \quad a_{ki} = \psi_{ki} A_i, \quad b_i = -Q_i^p,
 \end{aligned}$$

тогда вместо системы уравнений (4.25) – (4.28) получим одно матричное уравнение

$$Q^{\Phi} = Q^{\Phi} a + b \quad (4.42)$$

$$\text{или } Q^{\Phi}(I - a) = b. \quad (4.43)$$

Напомним, что при прямой постановке задачи  $a = \psi R$ ,  $b = Q$  и система зональных уравнений принимает вид (4.36).

Наиболее наглядный способ решения системы линейных уравнений, представленной матричным уравнением (4.43), заключается в нахождении обратной матрицы  $(I - a)^{-1}$ , позволяющей выразить эффективные потоки в виде линейных комбинаций собственных и результирующих потоков, заданных по условию

$$Q^{\Phi} = b(I - a)^{-1}. \quad (4.44)$$

Несмотря на очевидные достоинства записи решения в явном виде, метод обращения матрицы на практике применяется редко, так как его реализация при большом числе зон требует значительных затрат машинного времени. Действительно, нахождение обратной матрицы  $x = (I - a)^{-1}$  из уравнения  $(I - a)x = I$  требует решения  $l$  систем уравнений с  $l$  неизвестными. Использование метода обращения матрицы может быть оправдано лишь при проведении многовариантных расчетов, когда возникает необходимость неоднократного решения системы при постоянной матрице  $a$  (т.е. при неизменной конфигурации системы и постоянных радиационных характеристиках) и различных значениях  $b$ . В этом случае достаточно вычислить обратную матрицу один раз, а результаты расчетов различных вариантов получать путем подстановки изменяющихся значений собственных и результирующих потоков в соотношение (4.44). Для простейших систем, состоящих из двух-трех зон, элементы обратной матрицы можно явным образом выразить через угловые коэффициенты и радиационные характеристики по формулам Крамера, т.е. в виде отношения двух определителей. При  $l > 3$  применение метода Крамера становится нецелесообразным, так как приводит к чрезвычайно громоздким формулам, расчет по которым требует огромного объема вычислений. Существуют более эффективные численные методы обращения матриц, описание которых можно найти в специальной литературе.



Если вычисление обратной матрицы представляется нецелесообразным, решение системы линейных уравнений (4.43) может быть осуществлено одним из прямых методов, позволяющих получить точное решение (при пренебрежении ошибками округления) после выполнения конечного числа операций. Широкое распространение при практических расчетах получили методы последовательного исключения, в частности, метод исключения Гаусса, основанный на преобразовании исходной системы уравнений, приводящем матрицу  $a$  к треугольному виду. Наиболее универсальные прямые методы решения систем линейных уравнений (и обращения матриц) реализованы в виде стандартных программ, входящих в математическое обеспечение современных ЭВМ.

Для решения систем линейных уравнений могут быть также применены итерационные методы, заключающиеся в многократном повторении одного и того же алгоритма, который дает результат, постепенно приближающийся к точному решению. Рассмотрим простейшие итерационные схемы, пригодные для решения системы зональных уравнений. Вернемся к записи зональных уравнений в виде (4.42) и зададим последовательные приближения для потоков эффективного излучения следующей формулой

$$Q^{\text{эф}}(p) = Q^{\text{эф}}(p-1)a + b, \quad (4.45)$$

где  $p = 1, 2, \dots$  – номер итерации. Начало итерационной последователь-

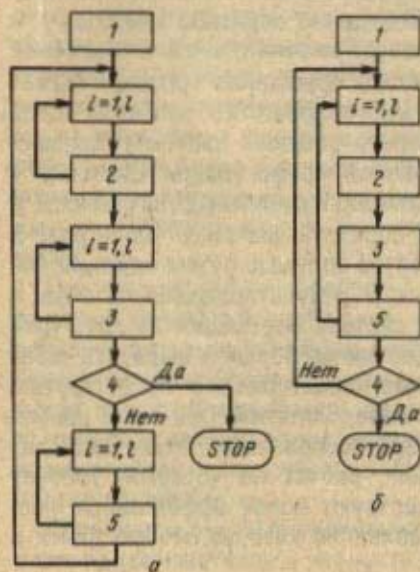


Рис. 24. Структурные схемы решения системы линейных уравнений (4.43) итерационными методами:

$a$  – метод простой итерации;  $б$  – метод Гаусса – Зейделя; 1 – задание начального приближения  $Q_i^{\text{эф}} = Q_i^{\text{эф}}(0)$ ,  $i = 1, \dots, l$ ; 2 – нахождение нового приближения  $Q_i^{\text{эф}*} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} a_{ki} + b_i$ ;

3 – вычисление разности между новым и старым приближениями для  $i$ -той зоны  $\Delta_i = |Q_i^{\text{эф}*} - Q_i^{\text{эф}}|$ ; 4 – проверка условия  $\max \Delta_i < \Delta$ ; 5 – присваивание нового (уточненного) значения переменной  $Q_i^{\text{эф}}$ :  $Q_i^{\text{эф}} = Q_i^{\text{эф}*}$ .

ности определим некоторым исходным приближением  $Q^{\text{эф}}(0)$ , а заканчивать итерации условимся тогда, когда изменение значений  $Q_i^{\text{эф}}$  во всех зонах станет меньше некоторой заданной величины  $\Delta$ , т.е. при выполнении условия  $\max_i |Q^{\text{эф}}(p) - Q^{\text{эф}}(p-1)| < \Delta$ . Не касаясь условий сходимости итерационных последовательностей, отметим, что на практике сходимость приходится обычно проверять "экспериментально", путем проведения пробных расчетов.

Поскольку на каждом шаге итераций интерес представляют только два значения искомой переменной: старое и новое — целесообразно изменить обозначения, переписав уравнение (4.45) в виде  $Q^{\text{эф}*} = Q^{\text{эф}}a + b$ , понимая под  $Q^{\text{эф}}$  и  $Q^{\text{эф}*}$  соответственно старое (предыдущее) и новое (последующее) приближение. При этом, конечно, нужно иметь в виду, что переход к очередному шагу итераций сопровождается присваиванием переменным  $Q^{\text{эф}}$  тех значений, которые на данном шаге получают переменные  $Q^{\text{эф}*}$ . Структурные схемы алгоритмов, реализующих описанный метод, приведены на рис. 24. Различие между схемами а и б заключается в разных способах присваивания новых значений переменным  $Q_i^{\text{эф}}$ . В методе простой итерации присваивание уточненных значений производится после окончания расчетов на данном шаге итерации всем переменным одновременно. В методе Гаусса — Зейделя уточненные значения переменных используются сразу же после их получения. Такое небольшое усовершенствование метода простой итерации позволяет значительно увеличить скорость сходимости. Метод Гаусса—Зейделя применен при решении системы зональных уравнений в примере 4.3.

Итерационные методы обладают рядом преимуществ по сравнению с прямыми методами решения систем линейных уравнений. Главным достоинством является то, что проведение итераций не приводит к накоплению погрешностей округления. Действительно, появление такой погрешности на каждом шаге равносильно некоторому смещению исходного приближения, которое не должно влиять на окончательный результат. В противоположность этому при решении уравнений высокого порядка прямыми методами, например методом исключения Гаусса, накопление погрешностей округления может приводить к значительному искажению результата. Таким образом, учет погрешностей округления приводит к парадоксальному на первый взгляд выводу о том, что итерационные методы позволяют получать более точные решения, чем прямые. Конечно, увеличение точности в данном случае достигается за счет возрастания объема вычислений, однако, при наличии быстродействующей вычислительной техники это обстоятельство может не иметь существенного значения. Отметим, что в некоторых случаях оказывается целесообразным применение ком-



бинированной схемы решения, когда результат, полученный каким-либо прямым методом, используется в качестве начального приближения в методе итераций.

Сравнивая прямые и итерационные методы, необходимо иметь в виду еще одно важное обстоятельство. При использовании прямых методов для решения системы зональных уравнений необходимо заранее вычислить все угловые коэффициенты излучения и найденные значения разместить в памяти ЭВМ. Соответствующий числовой массив — с учетом свойства взаимности, дающего  $l(l-1)/2$  дополнительных связей между угловыми коэффициентами — должен содержать  $l^2 - l(l-1)/2 = l(l+1)/2$  элементов. По этой причине при увеличении числа зон потребность в памяти ЭВМ значительно возрастает. В то же время в некоторых случаях, в частности для систем с диатермичной средой, угловые коэффициенты могут быть рассчитаны по известным достаточно простым формулам, так что можно не задавать угловые коэффициенты заранее, а определять требуемые их значения непосредственно по ходу вычислений. Такая возможность, естественно, может быть реализована только в рамках итерационного метода (см. пример 4.3). Несмотря на существенное увеличение времени счета, обусловленное необходимостью повторных вычислений угловых коэффициентов на каждом шаге итераций, такой путь оказывается целесообразным, если главной задачей является экономия оперативной памяти ЭВМ. Отметим, что по указанным причинам эффективность итерационных методов возрастает при решении систем уравнений высокого порядка, и особенно в тех случаях, когда матрица угловых коэффициентов содержит много нулевых элементов (для систем с затенением).

Рассмотренные особенности итерационных методов, а также простота и компактность реализующих их программ, позволяют рекомендовать их для проведения расчетов на ЭВМ даже в тех случаях, когда приходится сознательно идти на увеличение времени счета.

Пример 4.1. Определить температуру внутренней поверхности стенки  $T_C$  электрической печи сопротивления непрерывного действия в непосредственной близости от нагревателя. Температура нагревателя  $T_H = 1400$  К, степень черноты  $\epsilon_H = 0,8$ . Толщина стенки  $\delta = 0,2$  м, коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1,2$  Вт/(м·К), степень черноты внутренней поверхности  $\epsilon_C = 0,6$ . Температура наружной поверхности стенки  $T_0 = 330$  К. Поверхности стенки и нагревателя считать серыми и рассматривать как бесконечные параллельные плоскости.

В данном случае поверхность нагревателя является зоной I рода, для которой задана температура  $T_H$ . Поверхность стенки является зоной III рода, для нее известна связь между плотностью результирующего потока (плотностью потока тепловых потерь) и температурой  $T_C$ .

$$q_C^D = \frac{\lambda}{\delta} (T_C - T_0). \quad (4.46)$$

Вспомним, что теплообмен излучением между серыми параллельными плоскостями описывается формулой

$$q_C^D = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_H^4 - T_C^4), \quad (4.47)$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}} = 1 / (\frac{1}{\varepsilon_H} + \frac{1}{\varepsilon_C} - 1)$  — приведенная степень черноты. Таким образом, задача состоит в решении системы уравнений (4.46) и (4.47), нелинейной относительно искомой температуры  $T_C$ . Применяя метод итераций, построение расчетной схемы можно производить двумя путями, в зависимости от того, считается ли заданной на каждом шаге температура  $T_C$  или плотность результирующего потока  $q_C^D$ .

В первом случае, задавая начальное приближение  $T_C$  и проводя расчет теплообмена по формуле (4.47), определяем  $q_C^D$ , после чего, используя зависимость (4.46), находим уточненное значение  $T_C$  и т.д. Таким образом, на каждом шаге итераций поверхность стенки рассматривается как зона I рода. Итерационная последовательность для  $T_C$  при этом определяется уравнением

$$T_C^* = \frac{\delta \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0}{\lambda} (T_H^4 - T_C^4) + T_0, \quad (4.48)$$

где  $T_C$  и  $T_C^*$  — предыдущее и последующее приближение для температуры стенки.

Во втором случае поверхность стенки рассматривается как зона II рода. В качестве начального приближения задаем некоторое значение  $q_C^D$ , из решения задачи теплообмена по формуле (4.47) находим  $T_C$ , после чего, используя зависимость (4.46), находим уточненное значение  $q_C^D$  и т.д. В данном случае итерационная последовательность для  $q_C^D$  определяется уравнением

$$q_C^{D*} = \frac{\lambda}{\delta} \left( \sqrt[4]{T_H^4 - \frac{q_C^D}{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0}} - T_0 \right), \quad (4.49)$$

где  $q_C^D$  и  $q_C^{D*}$  — предыдущее и последующее приближения для плотности результирующего потока. Выразив величину  $q_C^D$  через искомую температуру  $T_C$ , получим

$$T_C^* = \sqrt[4]{T_H^4 - \frac{\lambda}{\delta \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0} (T_C - T_0)}. \quad (4.50)$$

Нетрудно заметить, что если уравнение (4.48) представить в виде  $T_C^* = f(T_C)$ , то уравнение (4.50) получается путем обращения функции  $f$ , т.е. принимает вид  $T_C^* = f^{-1}(T_C)$ .

Сходимость итераций в каждом конкретном случае проще всего установить путем пробных расчетов. Так, выбрав в качестве начального приближения  $T_C = 1400$  К, с помощью формулы (4.48) последовательно получим следующие значения температуры: 1400,0; 330,0; 19212,3, . . . , т.е. первая итерационная последовательность оказывается расходящейся. Уравнение (4.50), напротив, задает сходящуюся последовательность, имеющую следующий вид: 1400,0; 1379,8; 1380,2; 1380,2, . . . Выполнив вычисления с точностью до 1 К, окончательно получим  $T_C = 1380$  К.

Пример 4.2. Определить температуру нагревателя электрической печи сопротивления при температуре металла  $T_M = 1000$  К. Удельная мощность нагревателя  $p_H = 50$  кВт/м<sup>2</sup>, степень черноты металла при данной температуре  $\varepsilon_M = 0,5$ . Зависимость степени черноты нагревателя  $\varepsilon_H$  от температуры  $T_H$  в интервале 1000 — 2000 К может быть выражена соотношением  $\varepsilon_H = c T_H^{-1}$ , где  $c = 0,15 \cdot 10^{-3}$  1/К. Поверхности металла и нагревателя считать серыми и рассматривать как бесконечные параллельные плоскости.



В данном случае имеем смешанную постановку задачи: поверхность металла является зоной I рода, для которой задана температура  $T_M$ , а поверхность нагревателя — зоной II рода, для которой известна величина плотности потока результирующего излучения  $q_H^0 = -\rho_H$ . Вспомним, что теплообмен излучением между серыми параллельными плоскостями в случае диатермичной среды описывается формулой

$$\rho_H = \epsilon_{\text{пр}}(T_H) \sigma_0 (T_H^4 - T_M^4), \quad (4.51)$$

где  $\epsilon_{\text{пр}}(T_H) = 1 / \left[ \frac{1}{\epsilon_M} + \frac{1}{\epsilon_H(T_H)} - 1 \right]$  — приведенная степень черноты, зависящая от температуры нагревателя.

Для решения нелинейного относительно искомой величины  $T_H$  уравнения (4.51) применим метод итераций, для чего преобразуем это уравнение к виду  $T_H^* = f(T_H)$ . Такое преобразование можно выполнить различными путями, получая уравнения, дающие как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные последовательности. Сходящуюся последовательность дает, например, формула

$$T_H^* = \sqrt[4]{\frac{\rho_H}{\sigma_0} \left( \frac{1}{\epsilon_M} + \frac{1}{\epsilon_H(T_H)} - 1 \right)} + T_M^4,$$

которая получается, если соотношение (4.51) поделить на  $\epsilon_{\text{пр}}(T_H) \sigma_0$ , перенести  $T_M^4$  в левую часть и извлечь из полученного выражения корень четвертой степени. Так, выбрав в качестве начального приближения  $T_H = 1000$  К, последовательно получим следующие значения  $T_H$ : 1000,0; 1669,1; 1524,7; 1547,7; 1543,8; 1544,5; 1544,3 . . . Выполняя вычисления с точностью до 1 К, окончательно получим  $T_H = 1544$  К.

Для улучшения сходимости итерационных последовательностей может быть применен метод Ньютона, согласно которому для решения уравнения  $\Phi(x) = 0$  используется следующая итерационная формула

$$x^* = x - \Phi(x) / \Phi'(x). \quad (4.52)$$

Отметим, что при применении этой формулы не требуется точного вычисления производной  $\Phi'(x)$ , так как ее величина определяет лишь значение очередного приближения, не влияя на окончательный результат.

Применим метод Ньютона для решения уравнения (4.51).

Для этого перепишем его в виде  $\Phi(T_H) = 0$ , где

$$\Phi(T_H) = \rho_H - \epsilon_{\text{пр}}(T_H) \sigma_0 (T_H^4 - T_M^4).$$

Для приближенной оценки производной  $\Phi'(T_H)$  пренебрежем при дифференцировании функции  $\Phi(T_H)$  зависимостью  $\epsilon_{\text{пр}}(T_H)$ , получим

$$\Phi'(T_H) \approx 4 \epsilon_{\text{пр}}(T_H) \sigma_0 T_H^3.$$

Соотношение (4.52) в данном случае принимает вид

$$T_H^* = T_H + \frac{\rho_H - \epsilon_{\text{пр}}(T_H) \sigma_0 (T_H^4 - T_M^4)}{4 \epsilon_{\text{пр}}(T_H) \sigma_0 T_H^3}. \quad (4.53)$$

Расчет по формуле (4.53) приводит к следующей последовательности значений  $T_H$ : 1000,0; 2690,2; 1685,5; 1544,5; 1544,3 . . . Таким образом, за счет некоторого усложнения итерационной формулы обеспечена более быстрая сходимость последовательных приближений.

Пример 4.3. Рассмотрим рабочее пространство электрической печи сопро-

тивления, имеющее прямоугольное сечение с основанием  $B$  и высотой  $H$ . Нижняя поверхность  $m$  соответствует поверхности нагреваемого металла, верхняя  $n$  — поверхности нагревателя, боковые  $kl$  — поверхностям кладки (рис. 25). Среду, заполняющую рабочее пространство, будем считать диатермичной. Введем следующие обозначения:  $T_M, T_N, T_{kl}$  — температура поверхностей металла, нагревателя и кладки;  $q_M^D, q_N^D, q_{kl}^D$  — плотности потоков результирующего излучения на поверхностях металла, нагревателя и кладки;  $\epsilon_M, \epsilon_N, \epsilon_{kl}$  — степени черноты металла,

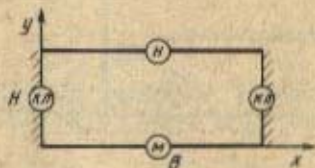


Рис. 25. Схема рабочего пространства электрической печи сопротивления

нагревателя и кладки. Примем следующие упрощающие допущения: все тела являются серыми; температура  $T_M$  одинакова во всех точках поверхности металла; плотность потока результирующего излучения  $q_N^D$  равномерно распределена по поверхности нагревателя (в этом случае  $q_N^D = -\rho_N$ , где  $\rho_N$  — удельная мощность нагревателя, Вт/м<sup>2</sup>); тепловые потери через кладку составляют  $s$  (%) от мощности нагревателя, так что  $q_{kl}^D = 0,01s\rho_N (B/2H)$ . Заданными по условию считаем значения  $B, H, T_M, \rho_N, \epsilon_M, \epsilon_N, \epsilon_{kl}, s$ . Требуется определить: распределение плотности потока результирующего излучения  $q_M^D(x)$  по ширине металла; распределение температуры нагревателя  $T_N(x)$  по ширине печи; распределение температуры кладки  $T_{kl}(y)$  по высоте печи.

Разобьем поверхность металла на  $m_M$  зон, поверхность нагревателя на  $m_N$  зон и каждую из поверхностей кладки на  $m_{kl}$  зон. Ширина зон на поверхности металла  $\delta_M = B/m_M$ , на поверхности нагревателя —  $\delta_N = B/m_N$ , на поверхностях кладки —  $\delta_{kl} = H/m_{kl}$ . Общее число зон  $m = m_M + m_N + 2m_{kl}$ . Зоны на поверхности металла, для которых известна температура  $T_M$ , имеют номера от 1 до  $m_M$

$$T_i = T_M, i = 1, \dots, m_M.$$

Для зон на поверхности нагревателя задана плотность результирующего потока  $q_N^D = -\rho_N$ , пронумеруем эти зоны от  $m_M + 1$  до  $m_M + m_N$

$$q_i^D = -\rho_N, i = m_M + 1, \dots, m_M + m_N.$$

Зоны на поверхностях кладки, для которых задана плотность результирующего потока  $q_{kl}^D$ , обозначим номерами от  $m_M + m_N + 1$  до  $m$

$$q_i^D = q_{kl}^D, i = m_M + m_N + 1, \dots, m.$$

При определении угловых коэффициентов излучения в диатермичной среде  $\varphi_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, m$ ) используем известные формулы:

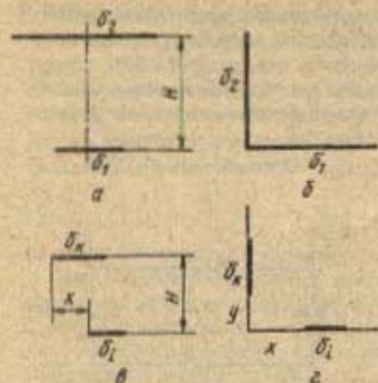
для параллельных полос шириной  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , расположенных на расстоянии  $H$  (рис. 26, а)

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\delta_1} \left[ \sqrt{\frac{1}{4}(\delta_2 + \delta_1)^2 + H^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(\delta_2 - \delta_1)^2 + H^2} \right];$$

для взаимно перпендикулярных полос шириной  $\delta_1$  и  $\delta_2$  (рис. 26, б)



Рис. 26. К определению угловых коэффициентов излучения  $\Phi_{ik}$



$$\Phi_{12} = \frac{1}{2\delta_1} (\delta_1 + \delta_2 - \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}).$$

С учетом аддитивности угловых коэффициентов получим:  
для зон  $i$  и  $k$ , расположенных на параллельных плоскостях (рис. 26, а)

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\delta_l} [\sqrt{(x + \delta_l)^2 + H^2} + \sqrt{(x - \delta_k)^2 + H^2} - \sqrt{(x + \delta_l - \delta_k)^2 + H^2} - \sqrt{x^2 + H^2}]; \quad (4.54)$$

для зон  $i$  и  $k$ , расположенных на взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 26, б)

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\delta_l} [\sqrt{x^2 + (y + \delta_k)^2} + \sqrt{(x + \delta_l)^2 + y^2} - \sqrt{(x + \delta_l)^2 + (y + \delta_k)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}]. \quad (4.55)$$

Для расчета искомых значений  $q_i^p$  ( $i = 1, \dots, m_M$ ) и  $T_i$  ( $i = m_M + 1, \dots, m$ ) предварительно из системы зональных уравнений, основанных на соотношении (4.24), определим плотности потока эффективного излучения  $q_i^{3\Phi}$  для всех зон:

$$\left. \begin{aligned} q_i^{3\Phi} (1 - \epsilon_M) \sum_k \Phi_{ik} q_k^{3\Phi} + \epsilon_M \sigma_0 T_M^4, \quad i = 1, \dots, m_M; \\ q_i^{3\Phi} = \sum_k \Phi_{ik} q_k^{3\Phi} + \rho_H, \quad i = m_M + 1, \dots, m_M + m_H; \\ q_i^{3\Phi} = \sum_k \Phi_{ik} q_k^{3\Phi} - q_{кл}^D, \quad i = m_M + m_H + 1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Решение системы уравнений (4.56) проведем методом Гаусса — Зейделя, положив на первом шаге итераций  $q_i^{3\Phi} = 0, i = 1, \dots, m$ . Условие окончания итераций зададим неравенством  $\max |1 - q_i^{3\Phi} / q_i^{3\Phi}| < \Delta$ , где  $\Delta$  — величина, характеризующая относительную погрешность расчета плотностей эффективных потоков. Для экономии памяти ЭВМ значения угловых коэффициентов излучения будем рассчитывать, по формулам (4.54), (4.55) непосредственно по ходу вычислений.

После нахождения всех значений  $q_i^{\text{эф}}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) плотность результирующего потока для зон на поверхности металла определим по формуле (4.29)

$$q_i^{\text{р}} = \frac{\epsilon_{\text{М}}}{1 - \epsilon_{\text{М}}} (q_i^{\text{эф}} - \sigma_0 T_i^{\text{а}}), \quad i = 1, \dots, m_{\text{М}}, \quad (4.57)$$

а температуру зон на поверхностях нагревателя и кладки — из соотношения (4.31):

$$\sigma_0 - T_i^{\text{а}} = q_i^{\text{эф}} + \frac{1 - \epsilon_{\text{Н}}}{\epsilon_{\text{Н}}} \rho_{\text{Н}}, \quad i = m_{\text{М}} + 1, \dots, m_{\text{М}} + m_{\text{Н}}; \quad (4.58)$$

$$\sigma_0 T_i^{\text{а}} = q_i^{\text{эф}} - \frac{1 - \epsilon_{\text{КЛ}}}{\epsilon_{\text{КЛ}}} q_{\text{КЛ}}^{\text{р}}, \quad i = m_{\text{М}} + m_{\text{Н}} + 1, \dots, m. \quad (4.59)$$

Текст программы, реализующей решение системы зональных уравнений (4.56) — (4.59), приведен в приложении 8. В процессе работы программы выполняются следующие операции:

ввод исходных данных ( $B, H, T_{\text{М}}, \rho_{\text{Н}}, \epsilon_{\text{М}}, \epsilon_{\text{Н}}, \epsilon_{\text{КЛ}}, s, \Delta$ );

ввод числа зон ( $m_{\text{М}}, m_{\text{Н}}, m_{\text{КЛ}}$ );

решение системы уравнений (4.56);

проведение вычислений по формулам (4.57) — (4.59).

После этого производится вывод на экран дисплея результатов расчета: распределение  $q_i^{\text{р}}$  по зонам на поверхности металла ( $i = 1, \dots, m_{\text{М}}$ ); распределения  $T_i$  по зонам на поверхности нагревателя ( $i = m_{\text{М}} + 1, \dots, m_{\text{М}} + m_{\text{Н}}$ ); распределения  $T_i$  по зонам на поверхности кладки ( $i = m_{\text{М}} + m_{\text{Н}} + 1, \dots, m$ ).

На рис. 27 приведены графики расчетных зависимостей  $q_{\text{М}}^{\text{р}}(x)$ ,  $T_{\text{Н}}(x)$  и  $T_{\text{КЛ}}(y)$ , полученные при следующих значениях исходных данных:  $B = 2$  м;  $H = 0,5$  м;  $T_{\text{М}} = 500$  К;  $\rho_{\text{Н}} = 100$  кВт/м<sup>2</sup>;  $\epsilon_{\text{М}} = 0,3$ ;  $\epsilon_{\text{Н}} = 0,7$ ;  $\epsilon_{\text{КЛ}} = 0,6$ ;  $s = 10$  %;  $\Delta = 0,1$  %. Уровни  $T$ , полученные при условии  $m_{\text{М}} = 1$ ,  $m_{\text{Н}} = 1$ ,  $m_{\text{КЛ}} = 1$ , характеризуют средние значения  $q_{\text{М}}^{\text{р}}$ ,  $T_{\text{Н}}$  и  $T_{\text{КЛ}}$ . Отклонение величины  $q_{\text{М}}^{\text{р}} = 89,76$  кВт/м<sup>2</sup> от истинного значения  $0,01 \rho_{\text{Н}} = 90$  кВт/м<sup>2</sup> позволяет оценить погрешность расчета  $q_{\text{М}}^{\text{р}}$  (~ 0,3 %), обусловленную применением метода итераций. Кривые 2 представляют решение задачи при  $m_{\text{М}} = 20$ ,  $m_{\text{Н}} = 20$ ,  $m_{\text{КЛ}} = 10$ .

В силу допущений, сделанных при постановке задачи, приведенные зависимости имеют, конечно, приближенный, качественный характер. Это и не удивительно: нельзя рассчитывать на получение достаточно точных результатов, ограничиваясь решением только внешней задачи, т.е. игнорируя взаимосвязь температуры и плотности результирующего потока в пределах каждой зоны. Для получения более точного решения необходимо использовать математическую модель сопряженного теплообмена (см. гл. V); решение внешней задачи составляет лишь один из блоков этой модели.

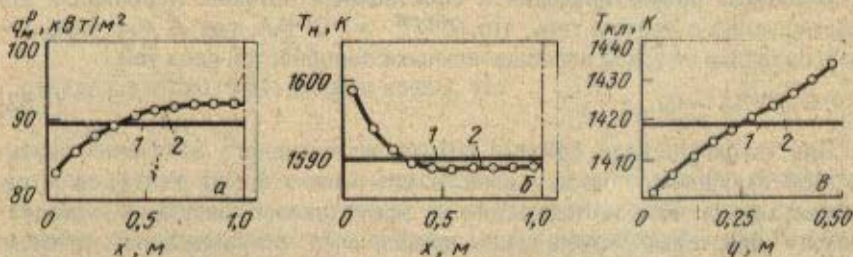


Рис. 27. Распределение плотности потока результирующего излучения  $q_{\text{М}}^{\text{р}}(x)$  и температуры нагревателя  $T_{\text{Н}}(x)$  по ширине печи (а, б) и распределение температуры кладки  $T_{\text{КЛ}}(y)$  по высоте печи (в)



## Постановка задачи

Выше было отмечено, что классический зональный метод особенно удобен для расчета радиационного теплообмена в системах с диатермичной средой. В общем же случае, при учете излучения газового объема, решение системы зональных уравнений существенно усложняется. Причиной этого, в конечном счете, является то, что описание радиационного теплообмена в рамках классического зонального метода основано на использовании обобщенных угловых коэффициентов, связывающих потоки падающего и эффективного излучения

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{эф.ф.}} \quad (4.60)$$

Понятие потока эффективного излучения становится, таким образом, необходимым элементом описания теплообмена, поэтому построение зональных уравнений удобнее производить, исходя из соотношения

$$Q_{\text{р}} = Q_{\text{пад}} - Q_{\text{эф.}} \quad (4.61)$$

К сожалению, это соотношение применимо лишь к поверхностным зонам, а для объемных зон приходится пользоваться другим выражением

$$Q_{\text{р}} = Q_{\text{погл}} - Q, \quad (4.62)$$

в которое явно поток эффективного излучения не входит. Этим и объясняется то обстоятельство, что объемные зоны плохо вписываются в схему классического зонального метода.

Существует другой метод расчета радиационного теплообмена — так называемый резольвентный зональный метод — обеспечивающий единое описание характеристик всех зон — как поверхностных, так и объемных. В рамках этого метода основой всех зональных уравнений является соотношение (4.62), непосредственно выражающее искомую взаимосвязь результирующих и собственных потоков. Перепишем это соотношение с учетом того, что  $Q_{\text{погл}} = Q_{\text{пад}}A$ , где  $A \equiv \{ \delta_{ki}A_i \}$  — диагональная матрица поглощательных способностей всех зон

$$Q_{\text{р}} = Q_{\text{пад}}A - Q. \quad (4.63)$$

При таком подходе понятие потока эффективного излучения оказывается излишним, поэтому вместо обычных угловых коэффициентов, связывающих потоки падающего и эффективного излучения, следует ввести некоторые новые (так называемые *разрешающие*) угловые коэффициенты, связывающие падающие потоки непосредственно с потоками собственного излучения.

По определению, разрешающий обобщенный угловой коэффициент

излучения  $\Psi_{ki}$  выражает вклад собственного излучения  $k$ -той зоны в лучистый поток, падающий на  $i$ -тую зону:  $Q_{ki}^{\text{пад}} = Q_k \Psi_{ki}$ . При этом имеется в виду, что собственное излучение  $k$ -той зоны может достигать  $i$ -той зоны как непосредственно, так и после многочисленных отражений от поверхностных зон и поглощений в газовом объеме. Таким образом, введение разрешающих угловых коэффициентов излучения позволяет учесть переотражения от поверхностных зон без использования понятия потока эффективного излучения.

Полная величина потока излучения, падающего на  $i$ -тую зону

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k \Psi_{ki}, \quad i = 1, \dots, l,$$

$$\text{или в матричном виде } Q^{\text{пад}} = Q \Psi, \quad (4.64)$$

где  $\Psi \equiv \{ \Psi_{ki} \}$  — матрица разрешающих обобщенных угловых коэффициентов. Последнее соотношение вместе с выражением (4.63) составляет основу математической модели радиационного теплообмена в рамках резольвентного зонального метода.

Прежде чем переходить к составлению системы зональных уравнений укажем способ нахождения обобщенных разрешающих угловых коэффициентов. Для этого достаточно установить связь матриц  $\Psi$  и  $\psi$ , так как методы расчета обобщенных угловых коэффициентов достаточно хорошо разработаны. В качестве исходного выражения используем уравнение 1.36)

$$Q^{\text{эф}} (I - \psi R) = Q, \quad (4.65)$$

решение которого можно представить в виде

$$Q^{\text{эф}} = Q (I - \psi R)^{-1}. \quad (4.66)$$

Матрица  $(I - \psi R)^{-1}$  называется резольвентной уравнения (4.65), откуда и происходит название метода. Исключая  $Q^{\text{эф}}$  путем подстановки выражения (4.66) в (4.60), получим

$$Q^{\text{пад}} = Q (I - \psi R)^{-1} \psi, \quad (4.67)$$

откуда с учетом (4.64) делаем вывод, что

$$\Psi = (I - \psi R)^{-1} \psi. \quad (4.68)$$

Выражение (4.68) можно использовать для пояснения физического смысла разрешающих угловых коэффициентов. Для этого умножим слева обе его части на  $(I - \psi R)$  и раскроем скобки  $\Psi - \psi R \Psi = \psi$  или  $\Psi = \psi + \psi R \Psi$ . Перейдя к индексной форме записи, окончательно получим

$$\Psi_{ki} = \psi_{ki} + \sum_j \psi_{kj} R_j \Psi_{ji}. \quad (4.69)$$



Поскольку для объемных зон  $R_j = 0$ , суммирование в правой части последнего выражения распространяется только на поверхностные зоны. Соотношение (4.69) находится в полном согласии с определением разрешающих угловых коэффициентов. Действительно, первое слагаемое в его правой части можно интерпретировать как долю собственного излучения  $k$ -той зоны, достигающего  $i$ -той зоны непосредственно, а каждое слагаемое, входящее под знак  $\sum_j$ , соответствует части излучения, которая попадает с  $k$ -той зоны на некоторую  $j$ -тую поверхностную зону, отражается от нее и после этого всеми возможными путями достигает  $i$ -той зоны.

Отметим, что для расчета разрешающих угловых коэффициентов необходимо предварительно задать отражательные способности всех поверхностных зон. Для зон II рода это можно сделать, строго говоря, только в том случае, если их отражательные способности не зависят от температуры. В противном случае при нахождении разрешающих угловых коэффициентов приходится задавать некоторые приближенные значения отражательных способностей поверхностных зон II рода. Решив задачу и определив температуры этих зон, нужно сравнить получающиеся значения отражательных способностей с первоначально заданными и при необходимости, уточнив их значения, произвести повторное решение задачи.

При практических расчетах значения разрешающих угловых коэффициентов могут быть найдены путем прямого выполнения операций над матрицами в соответствии с выражением (4.68). По причинам, приведенным выше, однако, этот способ может быть оправдан лишь для простейших систем, состоящих из двух-трех зон (см. пример 4.4). При достаточно большом числе зон целесообразнее преобразовать соотношение (4.68), умножив его слева на  $(I - \psi R)$ , и получить таким образом матричное уравнение

$$(I - \psi R) \Psi = \psi, \quad (4.70)$$

эквивалентное совокупности  $l \times l$  линейных уравнений

$$\sum_j (\delta_{ij} - \psi_{ij} R_j) \Psi_{jk} = \psi_{ik}, \quad i=1, \dots, l; \quad k=1, \dots, l. \quad (4.71)$$

Каждому фиксированному  $k$  в этой совокупности соответствует система  $l$  линейных уравнений, в правой части которой фигурирует  $k$ -тый столбец матрицы  $\psi$ , а неизвестными величинами являются элементы  $k$ -того столбца искомой матрицы  $\Psi$ . Таким образом, для нахождения всех разрешающих угловых коэффициентов (при  $k = 1, \dots, l$ ) необходимо решить  $l$  систем линейных уравнений, отличающихся только правыми частями. Для этого можно использовать метод итераций, задавая в качестве начального приближения значения обычных угловых коэффи-

циентов, либо один из прямых методов решения систем линейных уравнений.

Отметим, что в пакете прикладных программ для ЭВМ серий ЕС и СМ имеется стандартная подпрограмма GELG, предназначенная для решения совокупности систем линейных уравнений с различными правыми частями методом исключения Гаусса. Применение этой подпрограммы для нахождения разрешающих угловых коэффициентов излучения рассмотрено в примере 4.4.

**Пример 4.4.** Составить подпрограмму нахождения разрешающих угловых коэффициентов излучения путем решения уравнения (4.70). Предусмотреть включение в число параметров подпрограммы количества зон ( $L$ ), одномерного массива отражательных способностей всех зон ( $R$ ) и двухмерного массива обобщенных угловых коэффициентов ( $\Psi$ ).

Текст подпрограммы RAZR приведен в приложении 9. После задания элементов единичной матрицы ( $\Delta$ ) вычисляются элементы матрицы  $I - \Phi R$ . Далее производится решение уравнения (4.70) с помощью стандартной подпрограммы GELG, обращение к которой в данном случае имеет следующий вид: CALL GELG (PSI, A, L, L, E, IER), где PSI — имя массива, соответствующего матрице  $\Psi$ ; A — имя массива, соответствующего матрице  $A = I - \Phi R$ ; IER — параметр ошибки: значение IER > 0 указывает на возможную потерю точности решения в случае плохо обусловленной матрицы A; E =  $10^{-6}$  — входная константа, используемая для оценки относительной погрешности при проверке потери точности. После нахождения разрешающих угловых коэффициентов их значения присваиваются элементам массива PSI.

### Система зональных уравнений

При записи зональных уравнений используем соотношения (4.63) и (4.64). Для зон I рода — как поверхностных, так и объемных — получим

$$Q_i^p = A_i \sum_k Q_k \Psi_{ki} - Q_i^p, \quad i = 1, \dots, l_1, \quad (4.72)$$

где  $l_1$  — общее число зон I рода ( $l_1 = m_1 + n_1$ ).

Для зон II рода получим

$$Q_i = A_i \sum_k Q_k \Psi_{ki} - Q_i^p, \quad i = l_1 + 1, \dots, l. \quad (4.73)$$

Отметим, что соотношения (4.72) представляют собой формулы, в явном виде выражающие искомые результирующие потоки для зон I рода через собственные потоки всех зон.

Простота и наглядность системы зональных уравнений (4.72) — (4.73) достигается за счет использования разрешающих угловых коэффициентов излучения, при нахождении которых в значительной мере учитываются оптико-геометрические свойства системы. В частности, при прямой постановке задачи, когда для всех зон плотности потоков собственного излучения заданы по условию, решение задачи — после нахождения разрешающих угловых коэффициентов — сводится просто к вычислениям по явным формулам (4.72). Следует подчеркнуть, что прямая постановка задачи очень часто возникает на промежуточных этапах



расчета радиационного теплообмена при использовании методов последовательных приближений (см., например, п. 3). В таких случаях достоинства резольвентного зонального метода становятся особенно ощутимыми.

При обратной постановке задачи система зональных уравнений имеет бесчисленное множество решений. Это следует из условия замкнутости системы  $\sum_i Q_i^p = 0$ , равносильного линейной зависимости уравнений (4.73). С учетом этого условия, аналогично выводу соотношения (4.40) можно показать, что

$$\sum_i \Psi_{ki} A_i = 1. \quad (4.74)$$

Полученное равенство, выражающее свойство замкнутости разрешающих угловых коэффициентов, показывает, что все собственное излучение каждой  $k$ -той зоны полностью поглощается внутри рассматриваемой замкнутой системы.

### Решение системы зональных уравнений

Единообразное описание свойств поверхностных и объемных зон в рамках резольвентного зонального метода приводит к тому, что система зональных уравнений распадается на две подсистемы: (4.72) – для зон I рода и (4.73) – для зон II рода. Поскольку выражения (4.72) представляют собой явные формулы для искомых значений результирующих потоков зон I рода, задача сводится к решению подсистемы (4.73).

Если поглощательные способности и разрешающие угловые коэффициенты не зависят от температур зон II рода, подсистема (4.73) оказывается линейной относительно  $Q_i$  ( $i = I_1 + 1, \dots, I$ ), и ее решение осуществляется одним из методов, рассмотренных в п. 1. В противном случае задача усложняется, поскольку относительно температур  $T_i$  эта подсистема становится нелинейной.

Нелинейность системы уравнений (4.73) может быть обусловлена также наличием зон III рода, для которых заданным по условию является соотношение между результирующим потоком и температурой. Например, если для зон на поверхности кладки  $Q_i^p = k_T (T_i - T_0) F_i$  (где  $k_T$  – коэффициент теплопередачи;  $T_0$  – температура окружающей среды), использование этих выражений приводит к появлению в зональных уравнениях слагаемых, линейно зависящих от температур. Понятно, что система зональных уравнений становится при этом существенно нелинейной. Аналогичная проблема возникает при решении внешней задачи теплообмена с учетом конвективного теплопереноса (см. п. 6).

Прямых методов решения систем нелинейных уравнений не существует, а методы простой итерации или Гаусса – Зейделя обладают узкой

областью сходимости. Наиболее распространенным методом решения систем нелинейных алгебраических уравнений является итерационный метод Ньютона<sup>1</sup>. В рассматриваемом случае возможность использования этого метода обусловлена тем, что в рамках резольвентного зонального метода все слагаемые в зональных уравнениях явно выражаются через температуры. Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, перепишем уравнения (4.73) с учетом того, что  $Q_k = \epsilon_k \sigma_0 T_k^4 F_k$

$$\epsilon_i \sigma_0 T_i^4 F_i = A_i \sum_k \epsilon_k \sigma_0 T_k^4 F_k \Psi_{ki} - Q_i^p$$

$$\text{или } \sum_k \epsilon_k \sigma_0 T_k^4 F_k (\Psi_{ki} A_i - \sigma_{ki}) - Q_i^p = 0.$$

Для сокращения записи обозначим через  $a_{ki}$  коэффициенты, на которые в  $i$ -том уравнении умножается величина  $T_k^4$

$$a_{ki} = \epsilon_k \sigma_0 F_k (\Psi_{ki} A_i - \sigma_{ki}). \quad (4.75)$$

Используя коэффициенты  $a_{ki}$  (коэффициенты радиационного обмена), систему зональных уравнений для зон II рода можно записать в следующем компактном виде:

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 - Q_i^p = 0, \quad i = l_1 + 1, \dots, l. \quad (4.76)$$

После решения системы уравнений (4.76) относительно температур зон II рода  $T_i, i = l_1 + 1, \dots, l$ , результирующие потоки зон I рода определяются по явным формулам (4.72), которые после введения коэффициентов радиационного обмена принимают следующий вид:

$$Q_i^p = \sum_k a_{ki} T_k^4, \quad i = 1, \dots, l_1. \quad (4.77)$$

Из изложенного становится ясным основное достоинство резольвентного зонального метода: наглядность и компактность алгоритма расчета, облегчающие его реализацию и во многих случаях позволяющие повысить эффективность вычислительного процесса.

Пример 4.5. Применим резольвентный зональный метод для расчета радиационного теплообмена в системе газ – кладка – металл (рис. 28). Обозначим поверхность

Рис. 28. Схематическое изображение системы газ – кладка – металл:

1 – поверхность металла; 2 – поверхность кладки; 3 – (штриховая линия) – поверхность объемной газовой зоны



<sup>1</sup>Применение метода Ньютона для решения системы нелинейных зональных уравнений будет подробно рассмотрено в п. 6.



металла индексом 1, поверхность кладки – индексом 2, поверхность объемной газовой зоны – индексом 3. Будем считать известными температуры металла и газа  $T_1$  и  $T_3$ , поглощательные способности и степени черноты металла, кладки и газа  $A_i$  и  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), а также площади поверхностей металла и кладки  $F_1$  и  $F_2$  (площадь поверхности газовой зоны  $F_3 = F_1 + F_2$ ). Кладку считаем адиабатной:  $Q_2^0 = 0$ . Требуется определить поток результирующего излучения на поверхности металла  $Q_1^P$  (или плотность потока  $q_1^P$ ), температуру кладки  $T_2$  и поток результирующего излучения для объемной газовой зоны  $Q_3^P$ .

Запишем матрицу обобщенных угловых коэффициентов

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & D & 1 \\ \frac{F_1}{F_2} D & \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right) D & 1 \\ \frac{F_1}{F_1 + F_2} & \frac{F_2}{F_1 + F_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

или

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & D & 1 \\ \frac{1}{\omega} D & \frac{\omega - 1}{\omega} D & 1 \\ \frac{1}{\omega + 1} & \frac{\omega}{\omega + 1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.78')$$

где  $\omega = F_2/F_1$  – степень развития кладки;  $D = 1 - A_3$  – пропускательная способность газа.

Выполнив операции над матрицами в соответствии с формулой (4.68), получим явное выражение для матрицы разрешающих обобщенных угловых коэффициентов

$$\Psi = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} D^2 R_2 & D & 1 + DR_2 \\ \frac{1}{\omega} D & \frac{1}{\omega} D(DR_1 + \omega - 1) & 1 + \frac{1}{\omega} DR_1 \\ \frac{1}{\omega + 1} \left(1 + \frac{1}{\omega} DR_2\right) & \frac{\omega}{\omega + 1} \left(1 + \frac{1}{\omega} DR_1\right) & \frac{R_1 + \omega R_2}{\omega + 1} + \frac{1}{\omega} DR_1 R_2 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

где  $Z = 1 - \frac{1}{\omega} DR_2(DR_1 + \omega - 1)$  – определитель матрицы  $I - \Psi R$ ;  $R_1 = 1 - A_1$ ,  $R_2 = 1 - A_2$  – отражательные способности металла и кладки.

Поскольку из условий замкнутости системы и адиабатности кладки следует, что  $Q_2^0 = -Q_2^R$ , достаточно записать два зональных уравнения:

(4.72) для поверхности металла

<sup>1</sup> Поток результирующего излучения  $Q_3^P$ , взятый с противоположным знаком, имеет смысл тепловыделения в газовом объеме, необходимого для поддержания заданной температуры газа.

$$Q_1^0 = A_1(Q_1 \Psi_{11} + Q_2 \Psi_{21} + Q_3 \Psi_{31}) - Q_1 \quad (4.80)$$

и (4.73) для поверхности кладки (при  $Q_1^0 = 0$ )

$$Q_2 = A_2(Q_1 \Psi_{12} + Q_2 \Psi_{22} + Q_3 \Psi_{32}) \quad (4.81)$$

Из последнего уравнения сразу следует, что

$$Q_2 = A_2 \frac{Q_1 \Psi_{12} + Q_3 \Psi_{32}}{1 - \Psi_{22} A_2} \quad (4.82)$$

Учитывая, что  $Q_i = \epsilon_i \sigma_0 T_i^4 F_i$  и по свойству взаимности разрешающих угловых коэффициентов  $F_i \Psi_{jk} = F_k \Psi_{ji}$ , из выражения (4.82) получим следующую формулу для температуры кладки:

$$T_2^4 = \frac{A_2}{\epsilon_2} \frac{\Psi_{21} \epsilon_1 T_1^4 + \Psi_{23} \epsilon_3 T_3^4}{1 - \Psi_{22} A_2} \quad (4.83)$$

Используя приведенное выше выражение матрицы разрешающих угловых коэффициентов, после алгебраических преобразований окончательно получим

$$T_2^4 = \frac{A_2}{\epsilon_2} \left[ \xi \frac{\epsilon_1}{A_1} T_1^4 + (1 - \xi) \frac{\epsilon_3}{A_3} T_3^4 \right], \quad (4.84)$$

где  $\xi = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{1}{A_1} (1 + \gamma) + \frac{1}{A_3} - 1 \right]$ ,  $\gamma = \omega / (1 - A_3)$ .

Поток результирующего излучения на поверхности металла можно найти по явной формуле (4.80), подставив в нее выражение (4.82) для  $Q_2$ . Если по условию задачи требуется рассчитать плотность результирующего потока  $q_1^0$ , удобнее предварительно преобразовать выражение (4.80) с учетом свойства взаимности разрешающих угловых коэффициентов

$$q_1^0 = A_1 (\Psi_{11} q_1 + \Psi_{12} q_2 + \Psi_{13} q_3) - q_1 \quad (4.85)$$

$$\text{или } q_1^0 = \sigma_0 [(A_1 \Psi_{11} - 1) \epsilon_1 T_1^4 + A_1 (\Psi_{12} \epsilon_2 T_2^4 + \Psi_{13} \epsilon_3 T_3^4)]. \quad (4.85)$$

Подставив в уравнение (4.85) выражение (4.83) для  $T_2^4$ , приходим к известной формуле для плотности результирующего потока на поверхности металла

$$q_1^0 = \frac{(1 + \gamma) \sigma_0}{\frac{1}{A_1} (1 + \gamma) + \frac{1}{A_3} - 1} \left( \frac{\epsilon_3}{A_3} T_3^4 - \frac{\epsilon_1}{A_1} T_1^4 \right) \quad (4.86)$$

Предположение о том, что все тела, образующие систему, являются серыми, т.е.  $A_i = \epsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), приводит к существенному упрощению соотношений (4.84) и (4.86):

$$T_2^4 = \xi T_1^4 + (1 - \xi) T_3^4, \quad (4.87)$$

$$q_1^0 = \frac{(\gamma + 1) \sigma_0}{\frac{1}{\epsilon_1} (1 + \gamma) + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} (T_3^4 - T_1^4). \quad (4.88)$$

В заключение отметим, что если по условию задачи требуется произвести конкретный расчет теплообмена и необходимость вывода явных формул для искомых величин отсутствует, то для нахождения разрешающих угловых коэффициентов излучения



можно воспользоваться подпрограммой RAZR, описанной в примере 4.4. Для иллюстрации в приложении 10 представлен текст программы расчета значений  $T_2$  и  $q_2^R$  в системе серых тел при  $T_1 = 1400$  К;  $T_3 = 1700$  К;  $\epsilon_1 = 0,8$ ;  $\epsilon_2 = 0,6$ ;  $\epsilon_3 = 0,25$ ;  $\omega = 2$ . Расчет по этой программе приводит к следующим результатам:  $T_2 = 1562$  К,  $q_2^R = 123$  кВт/м<sup>2</sup>. Такие же значения, конечно, можно получить непосредственно по формулам (4.87) и (4.88).

### 3. УЧЕТ СЕЛЕКТИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

При применении зонального метода расчета радиационного теплообмена часто используется допущение о равенстве интегральной поглощательной способности и интегральной степени черноты в пределах каждой зоны

$$\epsilon = A. \quad (4.89)$$

Существенно упрощая постановку задачи, это допущение вместе с тем может приводить к значительному искажению реальной картины радиационного теплообмена. Действительно, согласно закону Кирхгофа равенство поглощательной способности и степени черноты справедливо лишь для спектральных величин

$$\epsilon_\lambda = A_\lambda. \quad (4.90)$$

Учитывая соотношения (4.10) и (4.12), можно сделать вывод о том, что равенство (4.89) справедливо либо при термодинамическом равновесии, когда  $Q_\lambda^{\text{пад}} = Q_\lambda^R$ , либо для серого тела, спектральные радиационные характеристики которого не зависят от длины волны. Для реальных тел, излучение которых имеет селективный характер ( $\epsilon_\lambda$  и  $A_\lambda$  зависят от  $\lambda$ ), равенство интегральных значений  $\epsilon$  и  $A$  может выполняться лишь приближенно, причем отличие интегральной поглощательной способности от интегральной степени черноты будет тем большим, чем более резкой является зависимость спектральных радиационных характеристик от длины волны и чем сильнее условия теплообмена отличаются от равновесных. В частности, следует ожидать значительного различия значений  $\epsilon$  и  $A$  для газов, излучение которых имеет резко селективный характер, причем это различие должно возрастать при повышении интенсивности теплообмена.

Для иллюстрации этих общих положений рассмотрим более подробно процесс радиационного теплообмена в системе газ – кладка – металл. При учете селективности излучения решение задачи представляется формулами (4.84) и (4.86). К сожалению, эти выражения не могут быть непосредственно использованы для нахождения температуры кладки и результирующего потока на поверхности металла, так как поглощательные способности  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , зависящие от спектрального состава

падающих потоков, заранее неизвестны, и могут быть определены лишь в результате расчета радиационного теплообмена. Для учета этого обстоятельства необходимо перейти к определению спектральных плотностей потоков излучения с использованием закона Кирхгофа (4.90) для спектральных радиационных характеристик.

Итак, пусть по условию заданы следующие величины: температуры металла и газа  $T_1$  и  $T_3$ , площади поверхностей металла и кладки  $A_1$  и  $F_2$ , а также зависимости спектральных степеней черноты металла  $\varepsilon_{1\lambda}$ , кладки  $\varepsilon_{2\lambda}$  и газа  $\varepsilon_{3\lambda}$  от длины волны. Кладку считаем адиабатной:  $Q_2^p = 0$ . Требуется определить поток результирующего излучения на поверхности металла  $Q_1^p$  и температуру кладки  $T_2$ , а также интегральные поглощательные способности и степени черноты металла ( $A_1$  и  $\varepsilon_1$ ), кладки ( $A_2$  и  $\varepsilon_2$ ) и газа ( $A_3$  и  $\varepsilon_3$ ). Значения интегральных радиационных характеристик представляют интерес, поскольку степень их отклонения от равенства (4.89) можно рассматривать как некоторый обобщенный показатель влияния селективности радиационных свойств каждого тела на процесс радиационного теплообмена.

При численном решении поставленной задачи необходимо прежде всего выделить конечный расчетный интервал длин волн  $(\lambda_1, \lambda_2)$  и разбить его на  $n$  элементарных интервалов шириной  $\Delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1)/n$ . Величина  $\Delta\lambda$  должна быть достаточно малой, для того чтобы в пределах каждого элементарного интервала можно было бы считать постоянными значения спектральной степени черноты всех тел, участвующих в теплообмене. Введем следующие обозначения:  $\varepsilon_1^{(j)}$  — спектральная степень черноты металла в пределах  $j$ -того элементарного интервала;  $Q_1^{(j)}$ ,  $Q_1^{\text{пад}}(j)$ ,  $Q_1^p(j)$  — потоки собственного, падающего и результирующего излучений на поверхности металла, приходящиеся на  $j$ -тый элементарный интервал;  $Q_1^0(j)$  — поток собственного излучения абсолютно черного тела при температуре металла, приходящийся на  $j$ -тый элементарный интервал.

$$Q_1^0(j) = \int_{\lambda_1 + (j-1)\Delta\lambda}^{\lambda_1 + j\Delta\lambda} Q_{\lambda}^0(T_1) d\lambda. \quad (4.91)$$

Аналогичным образом обозначим спектральные характеристики и элементарные потоки излучения для поверхностей кладки и газового объема. Поскольку интегральные потоки излучения определяются простым суммированием введенных элементарных потоков по  $j$  от 1 до  $n$ , задача сводится к расчету радиационного теплообмена в пределах каждого элементарного интервала.

Принципиальное затруднение, возникающее при решении этой задачи, связано с тем, что для поверхности кладки по условию задана интегральная величина результирующего потока



$$Q_2^p = \sum_{j=1}^n Q_2^p(j) = 0, \quad (4.92)$$

а распределение потоков  $Q_2^p(j)$  по элементарным интервалам, зависящее от температуры кладки, заранее неизвестно. Таким образом, при расчете радиационного теплообмена в пределах элементарного интервала поверхность кладки нельзя рассматривать как зону II рода. Решение задачи в данном случае возможно лишь методом последовательных приближений, на каждом шаге которого температура кладки считается известной величиной. После нахождения  $Q_2^p(j)$  в пределах каждого элементарного интервала при заданном значении  $T_2$  необходимо проверить выполнение условия (4.92); если это условие не выполняется, нужно изменить значение  $T_2$  и повторить расчет. Алгоритм решения задачи, конечно, должен быть построен таким образом, чтобы последовательность значений  $T_2$  сходилась к истинному значению температуры кладки, соответствующему условию адиабатности (4.92).

Простой и надежный алгоритм определения температуры кладки основан на использовании метода половинного деления, обеспечивающего последовательное сближение границ интервала температур  $T'_2 < T_2 < T''_2$ , содержащего искомое значение  $T_2$ . В начале расчета можно принять  $T'_2 = T_1$  и  $T''_2 = T_3$ . На каждом шаге метода половинного деления производится решение задачи при температуре кладки  $T_2 = (T'_2 + T''_2)/2$ , соответствующей середине интервала  $(T'_2, T''_2)$ . Если в результате расчета получается положительное значение  $Q_2^p$  (т.е.  $Q_2^{\text{полн}} > Q_2$ ), значит, температура кладки была занижена; в таком случае на следующем шаге нужно найденное значение  $T_2$  использовать в качестве нижней границы интервала  $(T'_2, T''_2)$ , т.е. положить  $T'_2 = T_2$ . Если же температуре  $T_2$  соответствует отрицательное значение  $Q_2^p$  (т.е.  $Q_2^{\text{полн}} < Q_2$ ), следует уменьшить величину  $T_2$ , положив на очередном шаге  $T''_2 = T_2$ . Описанная процедура повторяется до тех пор, пока длина интервала неопределенности  $T''_2 - T'_2$  не станет достаточно малой:  $T''_2 - T'_2 < \Delta$ , где  $\Delta$  — заданная по условию погрешность определения температуры кладки.

Вернемся к задаче расчета радиационного теплообмена в пределах  $j$ -го элементарного интервала. С учетом закона Кирхгофа (4.90)  $\epsilon_j^{(j)} = A_j^{(j)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), и определение элементарных потоков излучения производится точно так же, как и для серых тел. Отметим, что при нахождении температуры кладки методом половинного деления постановка задачи на каждом шаге расчета оказывается прямой, поэтому для ее решения целесообразно применить резольвентный зональный метод. Считая известными значения обобщенных разрешающих угловых коэффициентов [найденные по явным формулам (4.79) или с помощью подпрограммы RAZR], можно сразу записать

$$Q_2^p(j) = \varepsilon_2^{(j)}(Q_1^{(j)}\Psi_{12}^{(j)} + Q_2^{(j)}\Psi_{22}^{(j)} + Q_3^{(j)}\Psi_{32}^{(j)}) - Q_2^{(j)}, j=1, \dots, n, \quad (4.93)$$

где через  $\Psi^{(j)}$  обозначены обобщенные разрешающие угловые коэффициенты для  $j$ -того элементарного интервала.

После нахождения температуры кладки  $T_2$ , соответствующей условию адиабатности (4.92), определяются все остальные элементарные потоки ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n$ )

$$Q_i^{\text{пад}}(j) = Q_1^{(j)}\Psi_{1i}^{(j)} + Q_2^{(j)}\Psi_{2i}^{(j)} + Q_3^{(j)}\Psi_{3i}^{(j)} \quad (4.94)$$

$$\text{и } Q_1^p(j) = \varepsilon_1^{(j)}Q_1^{\text{пад}}(j) - Q_1^{(j)}, \quad (4.95)$$

необходимые для расчета искомых интегральных характеристик ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$Q_1^p = \sum_{j=1}^n Q_1^p(j); \quad (4.96)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon_i^{(j)}Q_i^p(j)}{\sum_{j=1}^n Q_i^p(j)}; \quad (4.97)$$

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon_i^{(j)}Q_i^{\text{пад}}(j)}{\sum_{j=1}^n Q_i^{\text{пад}}(j)}. \quad (4.98)$$

Структурная схема алгоритма расчета показана на рис. 29.

**Пример 4.6.** Рассчитать радиационный теплообмен в системе газ – кладка – металл, предполагая, что продукты сгорания топлива не содержат сажистых частиц, а поверхности металла и кладки можно считать серыми. Проанализировать влияние степени черноты кладки на интенсивность теплообмена.

Для приближенного задания радиационных характеристик газового объема при отсутствии сажистых частиц используем селективно-серую аппроксимацию, в рамках которой спектр поглощения газа представляется в виде отдельных полос, имеющих фиксированную ширину, причем в пределах каждой полосы спектральная поглощательная способность газового объема  $A_{3\lambda}$  и его спектральная степень черноты  $\varepsilon_{3\lambda} = A_{3\lambda}$  считаются независимыми от длины волны. На основании закона Бугера – Бера в пределах полос поглощения имеем

$$\varepsilon_{3\lambda} = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{k_{\text{CO}_2}}{T_3} p_{\text{CO}_2} + \frac{k_{\text{H}_2\text{O}}}{T_3} p_{\text{H}_2\text{O}} \right) s^{\text{эф}} \right], \quad (4.99)$$

где  $p_{\text{CO}_2}$  и  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  – парциальные давления  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  в продуктах сгорания;  $s^{\text{эф}}$  – эффективная длина пути луча;  $k_{\text{CO}_2}$  и  $k_{\text{H}_2\text{O}}$  – приведенные коэффициенты поглощения, которые для основных полос поглощения дымовых газов имеют следующие значения:

Интервал длин волн, мкм	$k_{\text{CO}_2} \cdot 10^2, \text{K}/(\text{Па} \cdot \text{м})$	$k_{\text{H}_2\text{O}} \cdot 10^2, \text{K}/(\text{Па} \cdot \text{м})$
1,5 – 1,75	0	0,6
2,5 – 3,0	3,3	5,8
4,0 – 4,8	198,5	0
4,8 – 8,0	0	6,4



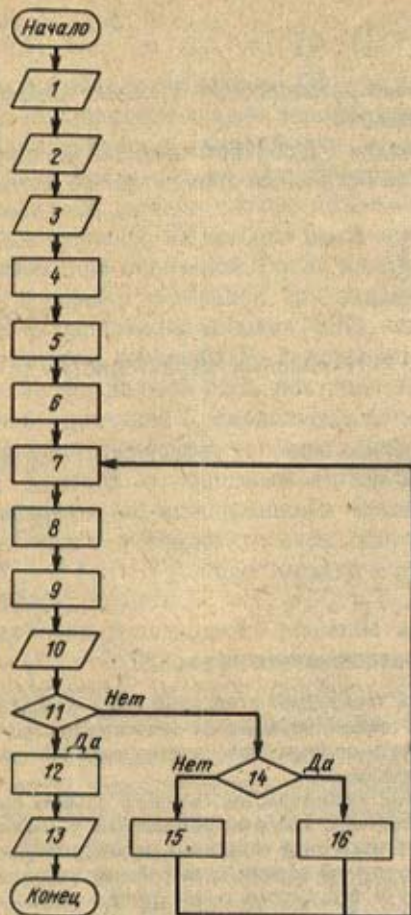


Рис. 29. Структурная схема алгоритма расчета радиационного теплообмена в системе газ – кладка – металл с учетом селективности излучения:

1 – ввод исходных данных ( $T_1$ ,  $T_3$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\Delta$ ); 2 – ввод значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяющих границы расчетного интервала длин волн, и числа разбиений расчетного интервала  $n$ ; 3 – ввод параметров, определяющих зависимость спектральных степеней черноты металла, кладки и газа от длины волны; 4 – вычисление  $\epsilon_j^{(i)}$ ,  $\epsilon_2^{(i)}$ ,  $\epsilon_3^{(i)}$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ ; 5 – вычисление  $Q_1^{(i)}$  и  $Q_3^{(i)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) по формуле (4.91); 6 – присваивание  $T_2^* = T_1$ ,  $T_2'' = T_3$ ; 7 – вычисление  $T_2 = (T_2^* + T_2'')/2$ ; 8 – вычисление  $Q_2^{(i)}$  и  $Q_2^{(i)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) по формулам (4.91) и (4.93); 9 – вычисление  $Q_2^0$ ; 10 – вывод промежуточных значений  $T_2$  и  $Q_2^0$ ; 11 – проверка неравенства  $T_2^* - T_2'' < \Delta$ ; 12 – вычисление  $Q_1^0$  и  $\epsilon_j$ ,  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) по формулам (4.96) – (4.98); 13 – вывод найденных значений  $Q_1^0$  и  $\epsilon_j$ ,  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ); 14 – проверка неравенства  $Q_2^0 > 0$ ; 15 – присваивание  $T_2^* = T_2$ ; 16 – присваивание  $T_2'' = T_1$ .

Таким образом, при вводе исходных данных (блок 3 на схеме рис. 29) следует задать значения  $s^{\text{эф}}$ ,  $\rho_{\text{CO}_2}$  и  $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ , а при расчете спектральных значений  $\epsilon_j^{(i)}$  использовать формулу (4.99).

Текст программы, реализующей рассмотренный выше алгоритм, приведен в приложении 11. В процессе работы программы после ввода исходных данных на экран дисплея выводятся значения температуры кладки, полученные методом половинного деления, и соответствующие им значения плотности результирующего потока на поверхности кладки. После нахождения температуры кладки, обеспечивающей выполнение условия адиабатности (4.92), на экран выводятся результаты расчета:  $Q_1^{(p)}$  (и  $q_1^0$ ),  $\epsilon_1$  и  $A_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $A_2$ ,  $\epsilon_3$  и  $A_3$ . После этого возможен переход к расчету нового варианта при изменении значения одного из входных параметров. Подпрограмма Q0 производит вычисление плотностей потоков собственного излучения абсолютно черного тела, приходящихся на элементарный интервал длин волн, путем численного интегрирования функции  $q_{\lambda}^0$  методом Симпсона.

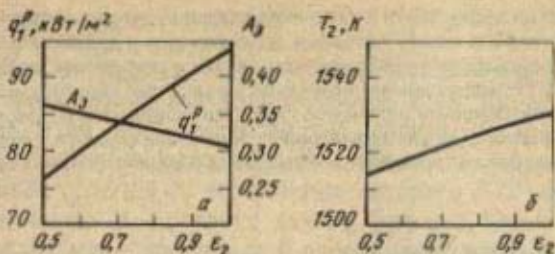


Рис. 30. Результаты расчета радиационного теплообмена в сварочной зоне: а – зависимость плотности потока результирующего излучения на поверхности металла  $q_r^0$  и поглощательной способности газа  $A_g$  от степени черноты кладки  $\epsilon_2$  (при расчете по серой модели  $q_r^0 = 123 \text{ кВт/м}^2$ ,  $A_g = \epsilon_2 = 0,25$ ); б – зависимость температуры кладки от ее степени черноты

На рис. 30 показаны результаты решения задачи при значениях входных параметров, соответствующих условиям радиационного теплообмена в сварочной зоне нагревательной печи:  $s^{\text{эф}} = 2 \text{ м}$ ;  $p_{\text{CO}_2} = 10 \text{ кПа}$ ;  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 15 \text{ кПа}$ ;  $F_1 = 40 \text{ м}^2$ ;  $F_2 = 80 \text{ м}^2$  ( $\omega = 2$ );  $T_3 = 1700 \text{ К}$ ;  $T_1 = 1400 \text{ К}$ ;  $\epsilon_1 = 0,8$ ;  $\epsilon_2 = 0,5$ . Приведенные зависимости позволяют сделать два важных вывода. Во-первых, учет селективности излучения газа значительно повышает точность решения задачи: расчет по серой модели приводит к существенному (в рассмотренном примере на 40 – 60 %) завышению плотности потока результирующего излучения на поверхности металла. Во-вторых, интенсивность теплообмена возрастает при увеличении степени черноты кладки. Отметим, что в случае серого газа – согласно формулам (4.87) и (4.88) – степень черноты кладки не влияет ни на температуру кладки, ни на плотность результирующего потока на поверхности металла.

Физический смысл полученных результатов становится вполне понятным, если учесть, что в пределах полос поглощения спектральная поглощательная способность реального (селективного) газа значительно превышает поглощательную способность серого газа. Поскольку полосы поглощения газа располагаются как раз в той области спектра, на которую приходится основная доля эффективного излучения кладки и металла, интегральная поглощательная способность реального газа  $A_g$  для этого излучения оказывается большей, чем поглощательная способность серого газа, равная  $\epsilon_2$ , т.е. имеет место неравенство  $A_g > \epsilon_2$ . Это, естественно, приводит к уменьшению результирующего потока на поверхности металла (по сравнению с расчетом по серой модели), а также к уменьшению потока излучения, падающего на кладку, что сопровождается понижением ее температуры. Формально эти результаты следуют из соотношений (4.84) и (4.86) при  $A_g > \epsilon_2$ .

Влияние степени черноты кладки на интенсивность радиационного теплообмена объясняется тем, что на поверхности кладки происходит трансформация спектрального состава излучения: собственное излучение газа, имеющее дискретный спектр, частично поглощается кладкой, возвращается обратно в систему в виде собственного излучения кладки, спектр которого является непрерывным. Рассмотрим этот вопрос подробнее, предположив для простоты, что кладка является адиабатной. Тогда при изменении ее степени черноты величина интегрального потока эффективного излучения  $Q_2^{\text{эф}} = Q_2 + Q_2^{\text{отр}}$  будет оставаться постоянной; например, при понижении степени черноты кладки уменьшение потока собственного излучения  $Q_2$  компенсируется возрастанием потока отраженного излучения  $Q_2^{\text{отр}}$ . В то же время



спектральный состав эффективного излучения кладки будет существенным образом зависеть от соотношения между потоками собственного и отраженного излучения. Например, при уменьшении степени черноты кладки и повышении доли отраженного излучения в  $Q_2^{\text{эф}}$  эффективное излучение кладки по спектральному составу приближается к собственному излучению газа. Это приводит к возрастанию поглощательной способности газа для эффективного излучения кладки и, следовательно, к уменьшению потока результирующего излучения на поверхности металла.

#### 4. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Наиболее трудоемким этапом реализации зонального метода расчета радиационного теплообмена является нахождение обобщенных угловых коэффициентов излучения. Для простых систем, состоящих из двух – трех поверхностных зон и одной объемной зоны (например, для системы газ – кладка – металл), проблем, конечно, не возникает, так как все угловые коэффициенты в этом случае могут быть рассчитаны по формулам поточной алгебры. В более же сложных случаях необходимо использовать другие методы, среди которых наибольшее распространение в связи с развитием вычислительной техники получили метод прямого интегрирования, основанный на непосредственном применении исходных соотношений (4.19) и (4.20), и метод статистических испытаний, или метод Монте-Карло.

Прямое вычисление обобщенных угловых коэффициентов по формулам (4.19), (4.20) позволяет получать их значения с высокой точностью, однако, это связано с построением громоздких алгоритмов численного интегрирования, особенно при необходимости учета геометрических и оптических особенностей исследуемой системы: реальной конфигурации поверхностных зон, неоднородности коэффициента поглощения газа, недиффузности излучения твердых поверхностей и т.д. Метод Монте-Карло, напротив, предоставляет возможность приближенного, но простого и наглядного решения самых сложных задач. При этом точность определения угловых коэффициентов оказывается вполне приемлемой для практических расчетов.

##### *Метод Монте-Карло*

Для того чтобы познакомиться с основными принципами метода Монте-Карло, рассмотрим простейшие системы, для которых известны точные значения угловых коэффициентов излучения. Это позволит произвести прямую оценку погрешности метода Монте-Карло и сделать некоторые выводы, имеющие общий характер.

## Сущность метода

Пусть требуется вычислить некоторую безразмерную физическую величину  $U$ , имеющую смысл относительной доли, так что  $0 \leq U \leq 1$ . Для решения этой детерминированной задачи построим соответствующую ей вероятностную модель следующим образом: найдем такое случайное событие  $S$ , вероятность которого  $P(S)$  равнялась бы искомому значению  $U$ . Согласно закону больших чисел вероятность  $P(S)$  — а вместе с ней и подлежащую определению величину  $U$  — можно приближенно оценить путем проведения серии из  $N$  независимых испытаний и нахождения относительной частоты осуществления события  $S$ .

$$U = P(S) \approx M/N, \quad (4.100)$$

где  $M$  — число испытаний, в которых происходит событие  $S$ . К сожалению, погрешность этой оценки убывает при увеличении  $N$  очень медленно (обратно пропорционально  $\sqrt{N}$ ), поэтому для получения удовлетворительного результата обычно требуется достаточно большое число испытаний — порядка тысяч и десятков тысяч. Понятно, что такая вычислительная процедура может быть реализована только на ЭВМ. Проведение статистических испытаний с вероятностной моделью, реализованной в виде программы для ЭВМ, и называется методом Монте-Карло.

Поясним сказанное на простейшем примере. Пусть требуется рассчитать площадь  $f$  плоской фигуры, расположенной внутри прямоугольника со сторонами  $A$  и  $B$  (рис. 31). Определим долю  $U = f/AB$ , которую

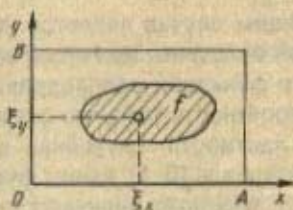


Рис. 31. К определению площади плоской фигуры методом Монте-Карло

площадь фигуры  $f$  составляет от площади прямоугольника  $AB$ . Выберем в этом прямоугольнике случайную точку, т.е. точку, координаты которой  $\xi_x$  и  $\xi_y$  представляют собой случайные величины, и рассмотрим событие, состоящее в том, что эта точка попадет в область  $f$ . Интуитивно ясно, что если случайные координаты  $\xi_x$  и  $\xi_y$  равномерно распределены на отрезках  $[0, A]$  и  $[0, B]$  и независимы, то случайные точки будут равномерно покрывать прямоугольник, и искомая величина  $U$  будет



равна вероятности попадания точки в область  $f$ . Проведем серию из  $N$  испытаний, в каждом из которых определим положение случайной точки, и подсчитаем число точек  $M$ , попавших в область  $f$ . Тогда  $U \approx M/N$ .

Структурная схема описанной процедуры приведена на рис. 32.

Наиболее ответственным этапом реализации метода Монте-Карло в

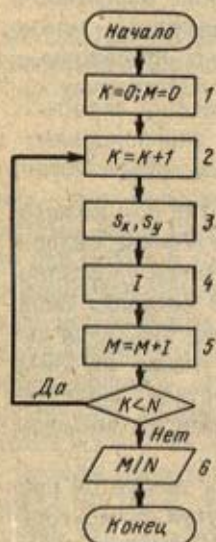


Рис. 32. Структурная схема алгоритма, реализующего метод Монте-Карло:

1 – начальная установка счетчиков  $M$  и  $K$  ( $K$  – текущий номер испытания); 2 – подсчет числа испытаний; 3 – нахождение случайных значений  $\xi_x$  и  $\xi_y$ ; 4 – определение значения случайной функции  $I$ , равной 1 при попадании точки в область  $f$  или 0 – в противном случае; 5 – подсчет числа попавших точек в область  $f$ ; 6 – вывод значения  $M/N$

общем случае является нахождение (разыгрывание) значений случайной величины, имеющей заданную функцию распределения. Напомним, что функцией распределения  $F(x)$  случайной величины  $\xi_x$  называется вероятность того, что значение  $\xi_x$  будет меньше  $x$ :  $F(x) \equiv P \{ \xi_x < x \}$ . В частности, случайная величина  $r_x$ , равномерно распределенная в интервале  $[0, 1]$ , имеет функцию распределения  $F(x) \equiv P \{ r_x < x \} = x$ .

Случайные величины, равномерно распределенные в интервале  $[0, 1]$ , играют особую роль при реализации метода Монте-Карло. Для разыгрывания значений таких случайных величин в математическом обеспечении современных ЭВМ имеются специальные программные генераторы, формирующие последовательности так называемых псевдослучайных чисел, близкие к равномерно распределенным в интервале  $[0, 1]$ . Находя значения случайной величины  $r$  с помощью такого генератора и преобразуя их определенным образом, можно получить случайную величину, имеющую любую заданную функцию распределения.

Итак, пусть требуется разыграть значение случайной координаты  $\epsilon_x$  имеющей функцию распределения  $F(x)$ . Найдем значение случайной величины  $r_x$ , равномерно распределенной в интервале  $[0, 1]$  (индекс  $x$  показывает, что величина  $r_x$  используется в качестве вспомогательной случайной величины при разыгрывании координаты  $\epsilon_x$ ), и определим значение  $\epsilon_x$  из уравнения

$$F(\epsilon_x) = r_x, \quad (4.101)$$

т.е. положим  $\epsilon_x = F^{-1}(r_x)$ , где  $F^{-1}$  — функция, обратная  $F$ . Покажем, что функция распределения определенной таким образом случайной величины  $\epsilon_x$  равна  $F(x)$

$$P\{\epsilon_x < x\} = P\{F^{-1}(r_x) < x\} = P\{r_x < F(x)\} = F(x).$$

При записи первого из приведенных равенств использовано правило (4.101), второго — монотонно неубывающий характер функции распределения, третьего — определение функции распределения случайной величины  $r_x$  равномерно распределенной в интервале  $[0, 1]$ .

Таким образом, для нахождения случайного значения  $\epsilon_x$  нужно разыграть значение вспомогательной случайной величины, равномерно распределенной в интервале  $[0, 1]$ , и к полученному значению  $r_x$  применить формулу (4.101).

Вернемся к рассмотренному выше примеру. Очевидно, что функции распределения случайных координат  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$ , равномерно распределенных в интервалах  $[0, A]$  и  $[0, B]$ , равны  $F(x) = x/A$ ,  $F(y) = y/B$ . Поэтому разыгрывание случайных значений этих координат следует производить с использованием формул  $\epsilon_x/A = r_x$  и  $\epsilon_y/B = r_y$  или

$$\epsilon_x = Ar_x, \quad \epsilon_y = Br_y, \quad (4.102)$$

где  $r_x$  и  $r_y$  — две независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале  $[0, 1]$ .

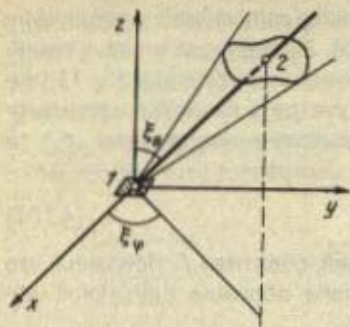
#### Расчет угловых коэффициентов излучения в диатермичной среде

Рассмотрим сначала методику расчета локального углового коэффициента излучения  $\varphi'_{12}$ , где индекс 1 соответствует элементарной излучающей площадке, а индекс 2 — лучевоспринимающей поверхности (рис. 33). По определению локальный угловой коэффициент излучения, характеризующий долю эффективного излучения элементарной площадки 1, попадающего на поверхность 2, можно представить в следующем виде:

$$\varphi'_{12} = \frac{1}{q_{\text{эф}}} \int_{\omega} B \cos \theta d\omega, \quad (4.103)$$



Рис. 33. К определению локального углового коэффициента излучения методом Монте-Карло



где  $B$  — яркость эффективного излучения;  $\omega$  — телесный угол, под которым лучевоспринимающая поверхность видна из излучающей площадки. Для простоты предположим, что излучение является двухфазным, тогда  $B = q^2 \Phi / \pi$

$$\psi'_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega} \cos \theta d\omega. \quad (4.104)$$

Для расчета локального углового коэффициента методом Монте-Карло построим вероятностную модель. Рассмотрим случайный луч, исходящий из элементарной излучающей площадки, и событие  $S$ , состоящее в том, что этот луч попадает на поверхность 2. Модель должна быть построена таким образом, чтобы вероятность попадания случайного луча на поверхность 2 равнялась бы локальному угловому коэффициенту излучения, т.е.

$$P(S) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega} \cos \theta d\omega. \quad (4.105)$$

Для этого нужно специальным образом задать функции распределения  $F(\varphi)$  и  $F(\theta)$  случайных углов  $\varepsilon_\varphi$  и  $\varepsilon_\theta$  (см. рис. 33), определяющих направление луча в пространстве.

Найдем  $F(\varphi) \equiv P\{\varepsilon_\varphi < \varphi\}$

$$F(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\varphi d\psi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad (4.106)$$

т.е. азимутальный угол  $\varphi$  равномерно распределен в интервале  $[0, 2\pi]$ . Для диффузного излучения этот результат является вполне понятным.

Найдем  $F(\theta) \equiv P\{\varepsilon_\theta < \theta\}$

$$F(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \sin^2 \theta. \quad (4.107)$$

Итак, если функции распределения  $F(\varphi)$  и  $F(\theta)$  определяются выражениями (4.106) и (4.107), вероятность случайного события  $S$  оказывается равной искомому значению локального углового коэффициента.

Для нахождения приближенного значения  $P(S) = \varphi'_{12}$  проведем серию из  $N$  независимых испытаний, в каждом из которых найдем направление случайного луча, и определим, попадает ли этот луч на поверхность 2. Подсчитав число попаданий  $M$ , получим  $\varphi'_{12} \approx M/N$ .

Структурная схема алгоритма расчета отличается от изображенной на рис. 32 только тем, что в блоке 3 необходимо разыграть случайные значения  $\xi_\varphi$  и  $\xi_\theta$  таким образом, чтобы они имели функции распределения (4.106) и (4.107). Для этого следует определить значения двух независимых случайных величин  $r_\varphi$  и  $r_\theta$  равномерно распределенных в интервале  $[0, 1]$ . Подставляя полученные значения в формулу (4.101), получим  $\varepsilon_\varphi/2\pi = r_\varphi$  и  $\sin^2 \varepsilon_\theta = r_\theta$  откуда

$$\varepsilon_\varphi = 2\pi r_\varphi \quad (4.108)$$

$$\xi_\theta = \arcsin \sqrt{r_\theta}. \quad (4.109)$$

Если излучающая поверхность имеет конечную величину и цель расчета состоит в определении среднего углового коэффициента излучения, необходимо несколько усложнить вероятностную модель. Будем считать, что случайным является не только направление луча, но и положение излучающей точки, причем по смыслу среднего углового коэффициента распределение этих точек по излучающей поверхности должно быть равномерным. В этом случае при реализации метода Монте-Карло следует разыграть не только направление случайного луча, но и координаты излучающей точки.

Пример 4.7. Пусть требуется определить средний угловой коэффициент излучения  $\varphi_{12}$  между двумя параллельными полосами 1, 2, ограничивающими бесконечный канал прямоугольного сечения высотой  $H$ . Половина ширины каждой полосы равна  $A$  (рис. 34). Рассмотрим случайный луч, исходящий из некоторой точки  $B$  нижней полосы и пересекающий верхнюю полосу в точке  $C'$ . Обозначим через  $\xi_x$  случайную координату точки  $B$ ,  $\xi_\varphi$  и  $\xi_\theta$  — случайные значения углов, определяющих направление луча в пространстве. Координата излучающей точки  $\xi_x$  должна быть равномерно распределена на отрезке  $[-A, A]$ , поэтому ее функция распределения  $F(x) = P\{\xi_x < x\} = (x+A)/2A$ , и разыгрывание ее значения производится по формуле  $(\xi_x + A)/2A = r_x$  или

$$\xi_x = A(2r_x - 1). \quad (4.110)$$

Таким образом, для каждого испытания необходимо найти значения трех независимых случайных величин, равномерно распределенных в интервале  $[0, 1]$ :  $r_x$ ,



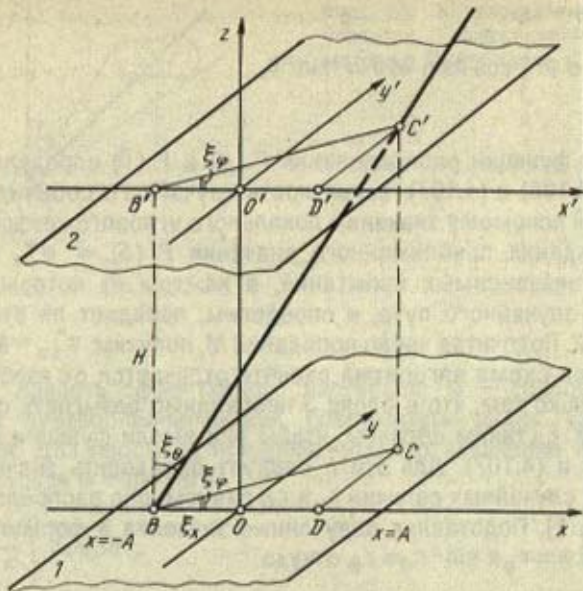


Рис. 34. К определению среднего углового коэффициента излучения между параллельными полосами методом Монте-Карло

$r_\varphi$  и  $r_\theta$ , позволяющих определить конкретные значения  $\xi_x$ ,  $\xi_\varphi$  и  $\xi_\theta$  по формулам (4.110), (4.108) и (4.109).

Для подсчета числа попаданий случайного луча на верхнюю полосу введем функцию  $I$ , равную 1 при попадании и 0 — при промахе

$$I(r_x, r_\varphi, r_\theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } |O'D'| < A \\ 0 & \text{при } |O'D'| > A \end{cases} \quad (4.111)$$

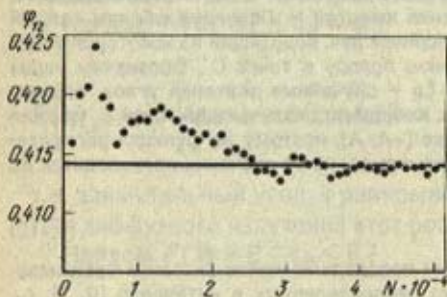


Рис. 35. Результаты расчета углового коэффициента излучения  $\Phi_{12}$

где  $O'D' = H \operatorname{tg} \xi_{\theta} \cos \xi_{\varphi} + \xi_x$ , и в соответствии с формулой (4.109)  $\operatorname{tg} \xi_{\theta} = \frac{\sqrt{r_{\theta}}}{\sqrt{1 - r_{\theta}}}$ .

Алгоритм расчета среднего углового коэффициента излучения реализован в виде программы, текст которой приведен в приложении 12. Для генерации псевдослучайных чисел  $R_X (r_x)$ ,  $R_F (r_{\varphi})$  и  $R_T (r_{\theta})$  использована стандартная программа RANDU ( $J1, J1, R$ ), где  $J1$  и  $J1$  – заранее определенные целые переменные, значения которых изменяются при каждом обращении к программе;  $R$  – имя вещественной переменной, в которую передается псевдослучайное число, заключенное в интервале  $[0, 1]$ .

Результаты расчета при  $A = 0,5$  м,  $H = 1$  м и увеличении числа испытаний от 1000 до 50000 показаны на рис. 35. Точное значение  $\varphi_{12} = 0,414$  получено по известной формуле

$$\varphi_{12} = \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2A}\right)^2} - \frac{H}{2A}. \quad (4.112)$$

Рис. 35 иллюстрирует зависимость погрешности расчета среднего углового коэффициента методом Монте-Карло от числа испытаний.

### Расчет обобщенных угловых коэффициентов излучения

При расчете обобщенных угловых коэффициентов излучения необходимо усовершенствовать рассмотренную выше вероятностную модель таким образом, чтобы в ней учитывалась поглощательная способность среды, разделяющей излучающую и лучевоспринимающую поверхности.

Как известно, зависимость яркости эффективного излучения  $B (s)$  от длины пути луча для некоторого фиксированного направления в пространстве определяется законом Бугера

$$B (s) = B (0) \exp(-ks), \quad (4.113)$$

где  $k$  – коэффициент поглощения среды;  $B (0)$  – яркость излучающей поверхности. В соответствии с этим законом поглощательная способность среды для данного луча, характеризующая долю лучистого потока, поглощенного на пути  $s$ , равна

$$A (s) = \frac{B (0) - B (s)}{B (0)} = 1 - \exp(-ks). \quad (4.114)$$

Учесть эту зависимость в вероятностной модели можно, например, следующим образом. Будем считать, что случайный характер имеет не только положение излучающей точки и направление луча, но и длина пути, на котором происходит полное поглощение его энергии. Обозначим эту случайную длину пути луча через  $\xi_s$ . Тогда вероятность поглощения луча на пути  $s$  приобретает смысл поглощательной способности среды  $A (s)$ . Но вероятность поглощения луча на пути  $s$  представляет собой не что иное как функцию распределения случайной величины  $\xi_s$ :  $F (s) \equiv P \{ \xi_s < s \}$ . Итак, следует положить



$$F(s) = 1 - \exp(-ks). \quad (4.115)$$

При реализации метода Монте-Карло в данном случае необходимо при каждом испытании разыграть не только случайные координаты излучающей точки и значения углов, задающих случайное направление в пространстве, но также и величину пути  $\xi_s$ , на котором данный луч будет поглощен. Разыгрывание конкретного случайного значения  $\xi_s$  производится по формуле (4.101):  $1 - \exp(-k \xi_s) = r_s$ , откуда

$$\xi_s = -\frac{1}{k} \ln(1 - r_s)$$

или

$$\xi_s = -\frac{1}{k} \ln r_s, \quad (4.116)$$

где  $r_s$  (или  $1 - r_s$ ) — случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[0, 1]$ . Сравнивая полученное значение с расстоянием от излучающей точки до лучевоспринимающей поверхности, можно сделать вывод о том, произойдет ли в данном испытании попадание луча на эту поверхность или он будет поглощен средой.

**Пример 4.8.** Найдем средний обобщенный угловой коэффициент излучения  $\psi_{12}$  между двумя бесконечными параллельными полосами (см. рис. 34) при коэффициенте поглощения среды, равном  $k$ .

В отличие от расчета среднего углового коэффициента излучения в диатермичной среде (см. пример 4.7) для каждого испытания необходимо осуществить проверку не только неравенства  $|O'D'| \leq A$ , соответствующего условию попадания направления луча на верхнюю полосу, но также условия  $\xi_s > BC' = H / \cos \xi_\theta$  (где  $\cos \xi_\theta = \sqrt{1 - r_\theta}$ ), выполнение которого свидетельствует о том, что поглощения данного луча на пути  $BC'$  не произошло. Таким образом, функция  $I$ , определяющая факт попадания случайного луча на верхнюю полосу, будет иметь следующий вид:

$$I(r_x, r_\varphi, r_\theta, r_s) = \begin{cases} 1 & \text{при } |O'D'| \leq A \vee \xi_s > BC' \\ 0 & \text{при } |O'D'| > A \wedge \xi_s \leq BC'. \end{cases} \quad (4.117)$$

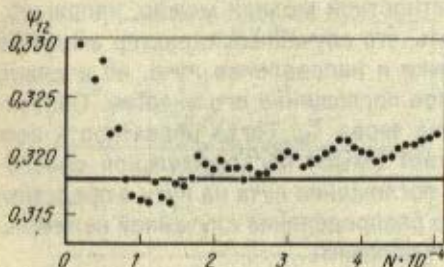


Рис. 36. Результаты расчета обобщенного углового коэффициента излучения  $\psi_{12}$

С учетом этого обстоятельства следует несколько изменить текст программы (см. приложение 13).

Результаты расчета при  $A = 0,5$  м,  $H = 1$  м,  $k = 0,2$  м<sup>-1</sup> и увеличении числа испытаний от 1000 до 50000 показаны на рис. 36. Точное значение  $\psi_{12} = 0,318$  получено методом прямого интегрирования. Из приведенных данных следует, что при  $N > 10000$  метод Монте-Карло обеспечивает нахождение обобщенного углового коэффициента с абсолютной погрешностью  $\pm 0,003$ .

### Расчет степени черноты газового объема

Метод Монте-Карло может быть применен для расчета спектральной (а для серого газа – интегральной) степени черноты газового объема. Для этого следует учесть закон Кирхгофа  $\epsilon_\lambda = A_\lambda$  (для серого газа  $\epsilon = A$ ) и вычислить поглощательную способность газового объема, равную  $1 - \psi_{11}$ , где индекс 1 при  $\psi$  в данном случае соответствует всей поверхности, ограничивающей газовый объем. При этом обобщенный угловой коэффициент  $\psi_{11}$  (коэффициент самооблучения этой поверхности) имеет смысл пропускательной способности газового объема. Таким образом, задача сводится к расчету коэффициента самооблучения поверхности, ограничивающей рассматриваемый газовый объем.

Пример 4.9. Найдем степень черноты серого газа  $\epsilon = 1 - \psi_{11}$ , заключенного внутри бесконечного канала, имеющего квадратное сечение с высотой  $H$  и основанием  $2A$ , равными 1 м. Коэффициент поглощения газа  $k = 0,2$  м<sup>-1</sup>.

В силу симметрии задачи коэффициент самооблучения  $\psi_{11}$  равен обобщенному угловому коэффициенту излучения с основания параллелепипеда на всю его поверхность. Поэтому излучающие точки, так же как и в предыдущем примере, расположены в пределах основания канала (см. рис. 34). Если абсцисса точки  $C'$ , в которой направление случайного луча пересекает плоскость верхней поверхности канала, т.е. длина отрезка  $O'D' = H \operatorname{tg} \xi_\theta \cos \xi_\varphi + \xi_x$  удовлетворяет условию  $|O'D'| \leq A$ , направление луча попадает на верхнюю полосу, и расстояние от излучающей точки

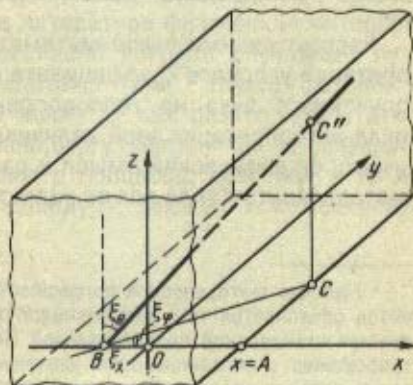


Рис. 37. К определению длины пути луча



до точки  $C'$  равно  $BC' = H / \cos \xi_\theta$ . Если же  $|O'D'| > A$ , то направление луча пересекает поверхность канала в точке  $C''$ , лежащей на его боковой грани (рис. 37), и расстояние от излучающей точки до точки  $C''$  равно

$$BC'' = \begin{cases} (A - \xi_x) / (\cos \xi_\varphi \sin \xi_\theta) & \text{при } \cos \xi_\varphi > 0. \\ -(A + \xi_x) / (\cos \xi_\varphi \sin \xi_\theta) & \text{при } \cos \xi_\varphi < 0. \end{cases}$$

Таким образом, случайный луч не будет поглощен газом на пути до поверхности, ограничивающей газовый объем (т.е. функция  $l$  принимает значение, равное 1) при выполнении следующего условия:

$$(|O'D'| < A \cup \xi_s > BC') \cap (|O'D'| > A \cup \xi_s > BC'').$$

Программа, реализующая метод Монте-Карло в рассматриваемом случае, отличается от предыдущего примера только содержанием подпрограммы – функции  $l$ , текст которой приведен в приложении 14.

На рис. 38 проведено сопоставление результатов решения задачи с точным значением пропускательной способности исследуемого газового объема  $\psi = 0,8254$

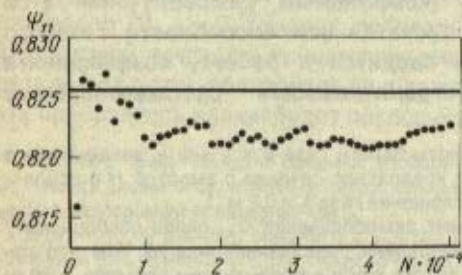


Рис. 38. Результаты расчета коэффициента самооблучения замкнутой поверхности  $\psi_{11}$

(полученным методом прямого интегрирования), позволяющее оценить методическую погрешность расчета<sup>1</sup>. Так же, как и в предыдущем случае, абсолютная погрешность расчета оказывается достаточно малой ( $< 0,005$ ), что обеспечивает нахождение пропускательной способности газового объема  $\psi_{11}$  с относительной погрешностью  $\sim 0,6\%$ , а степени черноты – с относительной погрешностью  $\sim 3\%$ .

Рассмотренные выше математические модели основаны на интерпретации углового коэффициента излучения как вероятности попадания случайного луча на тепловоспринимающую поверхность. Возможна иная интерпретация этой величины, позволяющая в некоторой степени учесть ее физический смысл и расширить возможности использования метода Монте-Карло для ее расчета.

<sup>1</sup> Наличие методической погрешности расчета обобщенных угловых коэффициентов объясняется тем, что последовательность псевдослучайных чисел, генерируемая стандартной подпрограммой RANDU, недостаточно строго удовлетворяет требованию о независимости значений разыгрываемых случайных величин от результатов предшествующих испытаний.

Будем считать, что каждый ( $i$ -тый) луч переносит определенную порцию энергии  $e_i$ , тогда приближенное значение углового коэффициента излучения может быть найдено как отношение энергии лучей, достигающих тепловоспринимающей поверхности, к полной энергии всех лучей, испущенных за время испытаний. Если всем лучам, независимо от их направления в пространстве, приписать одинаковую энергию  $e_i = e$  и считать, что в поглощающей среде после прохождения лучом определенного пути эта энергия скачком уменьшается до нуля, получим схему, эквивалентную описанной выше вероятностной модели.

Можно рассмотреть и другие варианты расчетной схемы, предположив, например, что энергия луча пропорциональна угловой плотности потока излучения, в частности для диффузионного излучения  $e_i = \cos \theta_i$ . Моделируя поглощение излучения газом, можно считать, что уменьшение энергии луча происходит не скачком, а постепенно, так что энергия луча, достигающего тепловоспринимающей поверхности, равна  $D_i e_i$ , где  $D_i = \exp(-ks_i)$  — пропускательная способность среды для данного луча. Таким образом, в основу метода Монте-Карло могут быть положены различные статистические модели, и одной из проблем, возникающих при практической реализации этого метода, является выбор алгоритма, обладающего наибольшей эффективностью, т.е. позволяющего достичь заданной точности расчета при минимальном объеме вычислений.

В заключение отметим, что применение метода Монте-Карло для расчета угловых коэффициентов излучения является примером использования статистической модели для решения чисто детерминированной задачи.

Действительно, в теории радиационного теплообмена испускание, распространение и поглощение лучистой энергии рассматривается как детерминированный процесс. Учет статистической природы теплового излучения выходит за рамки этой теории, поэтому совершенно необоснованной является встречающаяся в литературе физическая интерпретация статистических испытаний, согласно которой случайные лучи имитируют поведение отдельных фотонов (или "связок фотонов"). Особенностью метода Монте-Карло является как раз то, что статистические модели, лежащие в его основе, могут быть никак не связаны с физическим содержанием исследуемого процесса, позволяя в то же время построить вычислительную процедуру, дающую искомое решение детерминированной задачи.



*Приближенная оценка обобщенных угловых коэффициентов излучения*

При проведении практических расчетов часто оказывается, что геометрические угловые коэффициенты излучения  $\psi_{ki}$  в исследуемой системе могут быть найдены достаточно просто, а главная трудность связана с учетом поглощения излучения газом. В этом случае при нахождении обобщенных угловых коэффициентов  $\Psi_{ki}$  удобно использовать соотношение

$$\Psi_{ki} = \psi_{ki} D_{ki}, \quad (4.118)$$

где множитель  $D_{ki}$  имеет смысл пропускательной способности газа для части эффективного излучения  $k$ -той зоны, попадающей на  $i$ -тую зону.

Для приближенной оценки пропускательной способности  $D_{ki}$  учтем, что газовый объем разбит на зоны, каждая из которых характеризуется определенными значениями коэффициента поглощения газа и эффективной длины пути луча. Пусть для  $j$ -той объемной зоны коэффициент поглощения равен  $k_j$ , а эффективная длина пути луча —  $s_j^\Phi$ . Тогда пропускательная способность этой зоны

$$D_j = \exp(-k_j s_j^\Phi). \quad (4.119)$$

Строго говоря, выражение (4.119) определяет пропускательную способность газового объема для излучения поверхности, ограничивающей этот объем. Однако при приближенных расчетах можно считать, что такое же значение пропускательная способность будет иметь и для излучения любой другой поверхности. В таком случае пропускательную способность  $D_{ki}$  можно представить в виде произведения пропускательных способностей всех объемных зон, разделяющих  $k$ -тую и  $i$ -тую зоны

$$D_{ki} = \prod_j D_j. \quad (4.120)$$

Отсюда, с учетом выражений (4.118) и (4.119) окончательно получим приближенное соотношение, связывающее обобщенные и геометрические угловые коэффициенты излучения

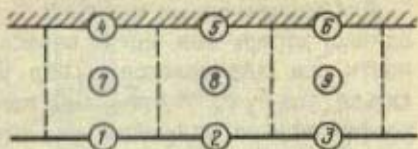
$$\Psi_{ki} = \psi_{ki} \exp\left(-\sum_j k_j s_j^\Phi\right), \quad (4.121)$$

где суммирование производится по всем объемным зонам, разделяющим  $k$ -тую и  $i$ -тую зоны.

**Пример 4.10.** Оценим возможность применения формулы (4.121) для расчета обобщенных угловых коэффициентов излучения в системе, изображенной на рис. 39. Рассматриваемая система соответствует части рабочего пространства нагревательной печи высотой 1 м, разбитой на три одинаковых участка длиной 1 м каждый. Коэффициент поглощения газа  $k = 0,2 \text{ м}^{-1}$ .

Выделим соответствующие каждому расчетному участку зоны на поверхности

Рис. 39. К расчету обобщенных угловых коэффициентов излучения



метала (1 – 3), кладки (4 – 6) и в газовом объеме (7 – 9) и будем считать ширину печи достаточно большой, так что каждую поверхностную зону можно рассматривать как бесконечную полосу. В этом случае геометрические угловые коэффициенты излучения  $\psi_{ki}$  могут быть найдены по формулам (4.54) и (4.55). С учетом того, что пропускательная способность каждой объемной зоны равна 0,825 (см. пример 4.9), используя соотношение (4.121), получим приближенные значения обобщенных угловых коэффициентов  $\psi_{ki}$  (при  $k = 1$ ) и для сравнения приведем также точные значения обобщенных угловых коэффициентов  $\psi_{ki}^*$ , полученные методом прямого интегрирования:

$i$ .....	4	5	6	8	9
$\psi_{ki}$ .....	0,342	0,139	0,029	0,242	0,060
$\psi_{ki}^*$ .....	0,318	0,135	0,035	0,254	0,061

Представленные результаты показывают, что при проведении расчетов, не требующих высокой точности, применение формулы (4.121) для нахождения обобщенных угловых коэффициентов в рассмотренной системе является вполне возможным. Как будет показано в дальнейшем, использование этой формулы является особенно удобным при необходимости учета зависимости коэффициента поглощения газа от температуры.

#### Коррекция величин обобщенных угловых коэффициентов излучения

Поскольку значения обобщенных угловых коэффициентов  $\psi_{ki}$ , найденные методом Монте-Карло, а тем более по формуле (4.121), являются приближенными, для них, вообще говоря, может не выполняться свойство замкнутости (4.40). Это означает, что для некоторых строк матрицы  $\psi$  (т.е. для некоторых зон) сумма

$$s_k = \sum_{i=1}^m \psi_{ki} + \sum_{i=m+1}^l \psi_{ki} A_i \quad (4.122)$$

может отличаться от 1. По этой причине непосредственно использовать полученные значения  $\psi_{ki}$  нельзя, иначе расчетная схема не будет удовлетворять закону сохранения энергии. Произведем коррекцию величин обобщенных угловых коэффициентов путем их нормирования по формуле

$$\bar{\psi}_{ki} = \psi_{ki} / s_k \quad (4.123)$$



Для исправленных значений  $\bar{\Psi}_{ki}$  свойство замкнутости справедливо, однако, теперь они могут перестать удовлетворять свойству взаимности, т.е. для некоторых пар угловых коэффициентов может оказаться, что  $F_k \bar{\Psi}_{ki} \neq F_i \bar{\Psi}_{ik}$ . При использовании таких значений угловых коэффициентов излучения расчетная схема не будет удовлетворять второму началу термодинамики. Поэтому необходимо откорректировать значения  $\bar{\Psi}_{ki}$  по свойству взаимности, положив

$$\bar{\Psi}_{ki} = \frac{F_k \bar{\Psi}_{ki} + F_i \bar{\Psi}_{ik}}{2F_k} \quad \text{и} \quad \bar{\Psi}_{ik} = \frac{F_k \bar{\Psi}_{ki} + F_i \bar{\Psi}_{ik}}{2F_i} \quad (4.124)$$

После этого следует проверить выполнение свойства замкнутости для найденных значений  $\bar{\Psi}_{ki}$  и при необходимости (т.е. если погрешность  $\max_k |s_k - 1|$  будет превышать заданный по условию уровень)

повторить описанную процедуру. В результате получим совокупность угловых коэффициентов излучения, мало отличающихся от исходных величин и в то же время с заданной точностью удовлетворяющих одновременно как свойству замкнутости, так и свойству взаимности.

Алгоритм коррекции угловых коэффициентов излучения реализован в виде подпрограммы CORR, текст которой приведен в приложении 15.

## 5. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Расчеты движения и теплообмена, основанные на теории пограничного слоя, получили в настоящее время широкое распространение при проектировании и конструировании различного рода теплообменных систем и устройств. Детальный анализ скоростных и температурных полей лишь в области больших поперечных градиентов скорости (гидродинамический пограничный слой) и температуры (тепловой пограничный слой) позволяет значительно упростить решение полной и весьма сложной задачи конвективного теплообмена с сохранением физической сути процессов.

Течение в пограничном слое может происходить в ламинарном, переходном и турбулентном режимах. В металлургических печах практически все потоки жидкости или газа турбулентны. В связи с этим будем рассматривать теплообмен среды с непроницаемой поверхностью при турбулентном режиме течения.

### *Математическая модель турбулентного пограничного слоя*

Рассмотрим квазистационарный турбулентный пограничный слой на плоской поверхности (рис. 40). Пусть вдоль данной поверхности движется неограниченный плоский поток с равномерным распределением

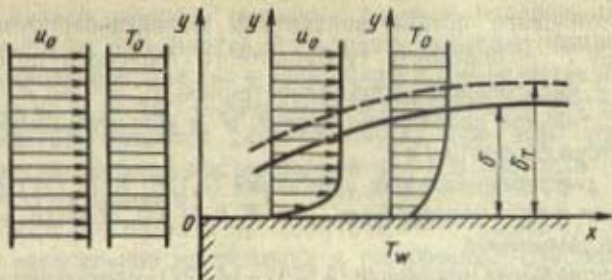


Рис. 40. Гидродинамический и тепловой пограничные слои на плоской поверхности

скорости и температуры вдоль оси  $Oy$ . При натекании такого потока на плоскую поверхность, неограниченную в направлении оси  $Oz$  (по ширине поверхности), происходят следующие процессы. Во-первых, вблизи поверхности образуется тонкий динамический пограничный слой толщиной  $\delta$ , в котором скорость изменяется от нуля на стенке (согласно условию прилипания) до значения  $u_0$  — скорости невозмущенного потока. Во-вторых, вследствие теплообмена между потоком жидкости и поверхностью стенки, имеющими разную температуру, около поверхности тела можно наблюдать область, в которой температура изменяется от температуры стенки  $T_w$  до температуры невозмущенного потока  $T_0$  — область теплового пограничного слоя толщиной  $\delta_T$ . Вдоль оси  $Ox$  происходит увеличение толщины обоих пограничных слоев из-за проникновения тормозящего действия стенки и ее теплового воздействия в направлении, перпендикулярном основному движению потока.

Запишем систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена на плоской пластине в приближении пограничного слоя для случая турбулентного течения несжимаемой жидкости:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} (q + q_T); \quad (4.125)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau + \tau_T); \quad (4.126)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.127)$$

где  $u, v$  — усредненные по времени значения продольной и поперечной составляющих вектора скорости;  $T$  — усредненное значение температуры;  $\rho$  — плотность;  $c_p$  — удельная теплоемкость;  $q = -\rho c_p \alpha \frac{\partial T}{\partial y}$  —



плотность теплового потока вследствие молекулярного переноса;  $q_T = \rho c_p \overline{v'T}$  — плотность турбулентного теплового потока;  $\tau = \rho \nu du/dy$  — касательное напряжение трения;  $\tau_T = -\rho \overline{u'v'}$  — турбулентное касательное напряжение трения;  $u'$  и  $v'$  — пульсации составляющих вектора скорости  $u$  и  $v$ .

Система дифференциальных уравнений (4.125) — (4.127) содержит три уравнения и пять неизвестных ( $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $q_T$  и  $\tau_T$ ), поэтому возникает проблема ее замыкания.

Дифференциальные уравнения (4.125) — (4.127) описывают перенос тепла и импульса в пограничном слое за счет действия двух механизмов переноса: молекулярного и турбулентного. Соотношение этих двух форм переноса меняется в широких пределах поперек пограничного слоя.

В пограничном слое будем различать четыре характерные области течения и теплообмена (четырёхслойная схема пограничного слоя). Приближенные границы областей приведены в табл. 6.

В непосредственной близости от стенки существует область теплопроводного (поперечный перенос теплоты происходит вследствие молекулярного механизма) и вязкого подслоя  $l$ , в которой можно пренебречь плотностью турбулентного теплового потока  $q_T$  и турбулентным касательным напряжением  $\tau_T$  в силу малости пульсации поперечной составляющей вектора скорости  $v'$ . Перенос тепла и импульса в этой области согласно классической молекулярно-кинетической теории осуществляется посредством взаимодействия молекул, обладающих разной энергией и импульсом в поле переменных температур и при

Таблица 6. Границы областей пограничного слоя

Внутренние области			Внешняя область (турбулентное ядро)
I	II	III	IV
$0 < y_+ < 5$	$5 < y_+ < 60$	$60 < y_+ < 300$	$300 < y_+ < 3000$
$0 < y_+ Pr < 5$	$5 < y_+ Pr < 60$	$60 < y_+ Pr < 300$	$300 < y_+ Pr < 3000$
$0 < y/\delta < 0,002$	$0,002 < y/\delta < 0,02$	$0,02 < y/\delta < 0,1$	$0,1 < y/\delta < 1$
$0 < y/\delta_T < 0,002$	$0,002 < y/\delta_T < 0,02$	$0,02 < y/\delta_T < 0,1$	$0,1 < y/\delta_T < 1$

Примечание. В таблице приняты следующие обозначения:  $y_+ = yu_\tau/\nu$  — безразмерная координата, где  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  — динамическая скорость;  $\tau_w$  — касательное напряжение по стенке;  $\delta$  — толщина гидродинамического пограничного слоя;  $\delta_T$  — толщина теплового пограничного слоя;  $Pr$  — критерий Прандтля.

наличии сдвига скорости (неравенства нулю поперечного градиента скорости  $du/dy \neq 0$ ). Иногда эту область называют ламинарным подслоем, что неверно, так как в этой области только пульсация  $v' \approx 0$ , а пульсации  $u'$  и  $w'$  ( $w'$  — пульсация составляющей вектора скорости вдоль оси  $Oz$ ) остаются существенными, при этом относительная пульсация продольной составляющей вектора скорости ( $u'/\bar{u}$ ) достигает своего максимума.

В области II — области промежуточного (буферного) слоя — турбулентное касательное напряжение и напряжение, обусловленное вязкостью, а также величины плотности теплового потока, переносимого молекулами и турбулентными молями, соизмеримы по величине. Это переходная область от чисто вязкого течения к турбулентному.

Область III — область полностью развитого турбулентного течения, в которой можно пренебречь молекулярным переносом тепла и импульса. В этой области распределение скорости  $u$  ( $y$ ) и температуры  $T$  ( $y$ ) подчиняется логарифмическому закону:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + B; \quad (4.128)$$

$$\frac{T_w - T}{T_\tau} = \frac{1}{\chi_h} \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + B_h, \quad (4.129)$$

где  $u_\tau$  — динамическая скорость;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости;  $T_w$  — температура стенки;  $T_\tau = q_w / (\rho c_p u_\tau)$  — по аналогии с  $u_\tau$  эту величину называют динамической температурой;  $q_w$  — плотность теплового потока на стенке;  $u$  и  $T$  — значения продольной составляющей вектора скорости и температуры в области III;  $\chi$ ,  $\chi_h$ ,  $B$ ,  $B_h$  — эмпирические константы. Эту область называют логарифмическим слоем.

В области IV течение также носит турбулентный характер, а профили скорости и избыточной температуры являются автомодельными, т.е. достаточно точно аппроксимируются выражениями вида:

$$\frac{u_0 - u}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \frac{T_0 - T}{T_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta_T}\right), \quad (4.130)$$

где  $u_0$  и  $T_0$  — значения скорости и температуры невозмущенного потока.

Эти четыре области в поперечном сечении пограничного слоя можно объединить следующим образом: I и II — вязкий слой; III и IV — область полностью турбулентного течения; I — III — пристенный слой, в котором тепловой поток и касательное напряжение слабо изменяются поперек слоя.

Таким образом, при моделировании турбулентного пограничного



слоя необходимо учитывать особенности течения в области вязкого слоя, в которой эффекты турбулентного переноса незначительны.

Представим плотность турбулентного теплового потока, по аналогии с постулатом Фурье, в виде

$$q_T = -\rho c_p a_T \partial T / \partial y, \quad (4.131)$$

а турбулентное касательное напряжение трения, по аналогии с законом Ньютона, запишем как

$$\tau_T = \rho \nu_T \partial u / \partial y, \quad (4.132)$$

где  $a_T$  — коэффициент турбулентной теплопроводности;  $\nu_T$  — кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Подставив выражения (4.131) и (4.132) в систему уравнений (4.125) — (4.127), и, выполнив несложные преобразования, получим:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (a + a_T) \frac{\partial T}{\partial y} \right]; \quad (4.133)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (4.134)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.135)$$

Граничные условия, необходимые для интегрирования системы дифференциальных уравнений пограничного слоя (4.133) — (4.135) зададим обычным способом:

$$\left. \begin{aligned} T_w = f(x); u_w = 0; v_w = 0 \text{ при } y = 0 \\ T = T_0; \partial T / \partial y = 0 \text{ при } y = \delta_T \\ u = u_0; \partial u / \partial y = 0 \text{ при } y = \delta \end{aligned} \right\} \text{ при } x > 0; \quad (4.136)$$

$$T = T_0; u = u_0; v = 0 \text{ при } x = 0. \quad (4.137)$$

Граничные условия для поперечной составляющей вектора скорости  $v$  ( $\partial v / \partial y = 0$ ) при  $y = \delta$  в расчетах не используются, так как  $v$  находят непосредственно из уравнения неразрывности по известному значению продольной скорости  $u$ . Граничное условие  $\partial v / \partial y = 0$  при  $y = \delta$  может служить для контроля правильности решения уравнений пограничного слоя; по этому условию можно также контролировать толщину пограничного слоя. Граничное условие (4.137) на левой границе расчетной области  $x = 0$  можно трактовать как начальное условие для расчета. При этом задавать граничные условия на правой границе расчетной области  $x = l_p$  нет необходимости, так как уравнения пограничного слоя явля-

ются дифференциальными уравнениями параболического типа, для которых передача влияния вверх по потоку, т.е. от сечения  $x = l_p$  к сечению  $x = 0$ , исключается.

В практических расчетах за внешнюю границу пограничного слоя, обычно, принимают поверхность, на которой  $T = (0,99 + 0,995) T_0$  и  $u = (0,99 + 0,995) u_0$ .

В инженерных расчетах, как правило, вычисляют величину кинематического коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_T$ , а величину коэффициента турбулентной температуропроводности определяют по соотношению

$$Pr_T = \nu_T / a_T, \quad (4.138)$$

которое называется турбулентным числом Прандтля и является аналогом физического (молекулярного) числа Прандтля  $Pr = \nu / a$ . Заметим, что турбулентное число Прандтля в пределах пограничного слоя изменяется слабо и в первом приближении может рассматриваться как константа, близкая к единице. На самом деле  $Pr_T \approx 0,9$  во внутренней области пограничного слоя и снижается до 0,5 во внешней области, а также существенно зависит от геометрии течения. Турбулентное число Прандтля не является физическим параметром жидкости, поскольку включает в себя турбулентные коэффициенты переноса импульса и тепла, зависящие от режима течения.

С учетом соотношения (4.138) уравнение энергии для турбулентного пограничного слоя (4.133) будет выглядеть следующим образом:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( a + \frac{\nu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (4.139)$$

Для решения системы уравнений пограничного слоя (4.133) – (4.135) необходимо каким-либо образом задать количественную зависимость коэффициентов турбулентного переноса  $a_T$  и  $\nu_T$  от режимных характеристик потока (в конечном счете от скорости осредненного потока и структуры турбулентности). Получить такую зависимость аналитически не представляется возможным и поэтому ряд данных определяют из эксперимента. Такие модели турбулентности, в которых теоретические функциональные зависимости адаптируют по экспериментальным данным, называются полуэмпирическими.

Рассмотрим полуэмпирические модели турбулентности, основанные на уравнении баланса (переноса) кинетической энергии турбулентных пульсаций. Запишем дифференциальное уравнение сохранения кинетической энергии турбулентности для стационарного турбулентного пограничного слоя в стандартной форме уравнений сохранения



$$\underbrace{u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y}}_I = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \underbrace{v \frac{\partial K}{\partial y} - v' \left( \frac{1}{\rho} \rho' + K' \right)}_{II} \right] - \underbrace{u' v'}_{III} \frac{\partial u}{\partial y} - \underbrace{\varepsilon}_{IV} \quad (4.140)$$

где  $K = ((\overline{u'})^2 + (\overline{v'})^2 + (\overline{w'})^2)/2$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций на единицу массы, Дж/кг  $\equiv$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $K' = ((u')^2 + (v')^2 + (w')^2)/2$  – пульсация кинетической энергии турбулентности, Дж/кг  $\equiv$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, Дж/(с · кг)  $\equiv$  м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>;  $\rho'$  – пульсация давления, Па.

Отметим, что даже в случае двухмерных течений, когда составляющая вектора скорости вдоль оси Oz равна нулю ( $w = 0$ ), пульсация  $w' \neq 0$  и представляет собой величину того же порядка, что  $u'$  и  $v'$ .

Член I уравнения (4.140) характеризует конвективный перенос энергии турбулентности осредненным течением, член II отражает диффузию кинетической энергии турбулентности  $K$  за счет молекулярного механизма (вязкая диффузия) и вследствие турбулентного перемешивания (турбулентная диффузия). При этом, согласно гипотезе А.Н.Колмогорова, турбулентный перенос пульсационной энергии осуществляется диффузией градиентного типа [аналогично (4.131) и (4.132)]

$$-v' \left( \frac{1}{\rho} \rho' + K' \right) = \Gamma_T^K \partial K / \partial y, \quad (4.141)$$

где  $\Gamma_T^K$  – коэффициент турбулентного переноса (диффузии) кинетической энергии турбулентности.

В расчетах кинетической энергии турбулентности по аналогии с турбулентным числом Прандтля для энергии пульсаций  $Pr_T^K = \nu_T / \Gamma_T^K$ . Значение  $Pr_T^K$  близко к единице, поэтому часто в инженерных расчетах полагают  $\Gamma_T^K \approx \nu_T$ .

Член III уравнения (4.140) представляет собой работу турбулентного напряжения  $\tau_T$ , вследствие которой возникает (порождается) турбулентность. Этот член – порождение турбулентности – с учетом предположения (4.132) примет вид

$$-u' v' \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (4.142)$$

Член IV уравнения (4.140) описывает диссипацию кинетической энергии турбулентности, которая для течения в пограничном слое при использовании допущения об изотропии турбулентности, т.е. независимости турбулентных пульсаций от направления, определяется по формуле

$$\epsilon = 2 \left[ \left( \overline{\frac{\partial u'}{\partial x}} \right)^2 + \left( \overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} \right)^2 + \left( \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}} \right)^2 \right]. \quad (4.143)$$

Изотропия, строго говоря, не выполняется для всех масштабов (размеров вихрей). Однако структура малых масштабов, которая собственно и определяет диссипацию энергии турбулентности, мало отличается от изотропной в связи с тем, что малые вихри взаимодействуют непосредственно не со средним движением, а только с вихрями больших масштабов.

Для изотропной турбулентности в логарифмической области пограничного слоя экспериментально установлено, что  $\epsilon$  обратно пропорциональна расстоянию от стенки  $y$ . Тогда, учитывая размерность, получим, что она пропорциональна кинетической энергии турбулентности в степени  $3/2$

$$\epsilon = c_\epsilon K^{3/2}/L, \quad (4.144)$$

где  $c_\epsilon$  — эмпирическая постоянная;  $L \sim y$  — масштаб турбулентности — характерный размер турбулентных вихрей.

Перепишем уравнение баланса кинетической энергии турбулентности (4.140) с учетом соотношений (4.141), (4.142) и (4.144)

$$u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{Pr_T^k} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right] + S_K, \quad (4.145)$$

где  $S_K$  — источниковый член уравнения,

$$S_K = \nu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_\epsilon \frac{K^{3/2}}{L}. \quad (4.146)$$

В рамках молекулярно-кинетической теории для газов кинематический коэффициент вязкости, как известно, определяется выражением

$$\nu = \text{const} \bar{c} l, \quad (4.147)$$

где  $l$  — средняя длина свободного пробега молекул;  $\bar{c}$  — средняя скорость теплового движения молекул.

По аналогии с выражением (4.147), а также с учетом размерности, А.Н.Колмогоровым и Л.Прандтлем предложена формула для вычисления кинематического коэффициента турбулентной вязкости по известным значениям кинетической энергии турбулентности  $K$  и масштаба турбулентности  $L$

$$\nu_T = c_v^t \sqrt{KL}, \quad (4.148)$$

где  $c_v^t$  — константа, определяемая из эксперимента.

Для расчета течения в пограничном слое масштаб турбулентности можно определить по одной из многочисленных интерполяционных формул, например по формуле

$$L/\delta = 0,4y/\delta - 0,5(y/\delta)^2 + 0,2(y/\delta)^3 \quad (4.149)$$

или



$$L/\delta = 0,08 [1 - (1 - y/\delta)^5], \quad (4.150)$$

где  $\delta$  – толщина гидродинамического пограничного слоя.

Все формулы для расчета масштаба турбулентности учитывают, что вблизи стенки он изменяется по линейному закону, а во внешней части пограничного слоя остается приблизительно постоянным.

Для расчета турбулентных потоков наибольшее распространение получила  $K - \varepsilon$  модель турбулентности. Это объясняется тем, что расчеты характеристик турбулентного течения с использованием  $K - \varepsilon$  модели турбулентности наиболее точно соответствуют экспериментальным данным, в особенности, вблизи твердых ограничивающих поверхностей. Существо этой модели заключается в том, что коэффициент турбулентного переноса импульса  $\nu_T$  в каждой точке потока определяется, исходя из значений  $K$  и  $\varepsilon$  в этой точке. Рассмотрим эту модель более подробно.

Для изотропной турбулентности во внутренней области пограничного слоя реализуется равновесие между процессами порождения и диссипации, т.е. диссипация турбулентности равна ее порождению

$$\varepsilon = \nu_T (du/dy)^2. \quad (4.151)$$

Выразив из формулы (4.132) абсолютную величину градиента скорости  $|du/dy| = |\tau_T/\rho| / \nu_T$  и подставив ее значение в выражение (4.151), получим

$$\varepsilon = |\tau_T/\rho|^2 / \nu_T. \quad (4.152)$$

Откуда

$$\nu_T = |\tau_T/\rho|^2 / \varepsilon = (|\tau_T/\rho|^2 / K^2) K^2 / \varepsilon, \quad (4.153)$$

где  $|\tau_T/\rho|^2 / K^2 = c_v^\varepsilon \approx 0,09$  – константа, определенная экспериментально.

С учетом этого

$$\nu_T = c_v^\varepsilon K^2 / \varepsilon. \quad (4.154)$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой А.Н.Колмогорова и Л.Прандтля для  $\nu_T$  (4.148) несложно получить

$$\varepsilon = (c_v^\varepsilon / c_v^L) K^{3/2} / L = c_\varepsilon K^{3/2} / L, \quad (4.155)$$

где  $c_\varepsilon = c_v^\varepsilon / c_v^L$ .

Таким образом, формула для  $\varepsilon$  (4.144) справедлива, строго говоря, только в области равновесия порождения и диссипации турбулентности, которое имеет место лишь во внутренней части пограничного слоя.

Для расчета  $\varepsilon$  запишем дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению баланса кинетической энергии турбулентности

$$\underbrace{u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}}_I = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_T}{Pr_T^{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right]}_{II} + \underbrace{c_1 v_T \frac{\varepsilon}{K} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}_{III} - \underbrace{c_2 \frac{\varepsilon^2}{K}}_{IV} \quad (4.156)$$

Члены этого уравнения, которое получено по формальной схеме уравнений сохранения, можно характеризовать так: I – изменение диссипации при конвективном переносе; II – перенос диссипации градиентной диффузией; III – “генерация” (“порождение”) диссипации при взаимодействии турбулентных вихрей с градиентом средней скорости; IV – турбулентная “диссипация” диссипации кинетической энергии турбулентности. Величина  $Pr_T^{\varepsilon}$  представляет собой отношение коэффициентов турбулентного переноса импульса и скорости диссипации энергии пульсаций.

Константы, фигурирующие в  $K - \varepsilon$  модели турбулентности, определены на основе экспериментальных данных для изотропной турбулентности в полностью турбулентной области пограничного слоя, в которой порождение турбулентности равно скорости ее диссипации (область III табл. 6). Имеем следующие числовые значения рассматриваемых констант:  $c_v^{\varepsilon} = 0,09$ ;  $c_{\varepsilon} = 1,0$ ;  $Pr_T^k = 0,9 \div 1,0$ ;  $Pr_T^{\varepsilon} = 1,22 \div 1,3$ ;  $c_1 = 1,44 \div 1,65$ ;  $c_2 = 1,92 \div 2,0$ . Эти же константы применяются и для расчетов области IV пограничного слоя, т.е. для всей турбулентной зоны.

Как уже отмечалось выше, в области вязкого подслоя (см. табл. 6) течение не является полностью турбулентным, и перенос тепла и импульса здесь осуществляется в основном за счет действия молекулярного механизма. Это обстоятельство выражается в резком уменьшении коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности, которые зависят от турбулентного числа Рейнольдса  $Re_T^{\varepsilon} = K^2 / (v\varepsilon)^*$ , пропорционального отношению  $v_T / v$ . Кроме этого, в области вязкого подслоя диссипация кинетической энергии турбулентности возрастает, что отражается в уменьшении деградации диссипации (член IV) в дифференциальном уравнении (4.156). С учетом этих соображений формула для расчета кинематического коэффициента эффективной вязкости  $v_{\text{эф}}$ , равного сумме кинематических коэффициентов турбулентной и молекулярной вязкости, а также дифференциальные уравнения переноса  $K$  и  $\varepsilon$  будут выглядеть следующим образом:

$$v_{\text{эф}} = v + v_T \varphi_1(Re_T^{\varepsilon}); \quad (4.157)$$

\* Легко видеть, что  $Re_T^{\varepsilon}$  представляет собой такое значение числа Рейнольдса, в котором роль характерной скорости играет  $\sqrt{K}$ , т.е. характерная скорость переноса импульса, а в качестве характерного размера используется масштаб пульсаций  $L$ .



$$u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_T \varphi_1(\text{Re}_T^e)}{\text{Pr}_T^k} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right] + v_T \varphi_1(\text{Re}_T^e) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_\varepsilon \frac{K^{3/2}}{L}; \quad (4.158)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_T \varphi_1(\text{Re}_T^e)}{\text{Pr}_T^e} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + c_1 v_T \varphi_1(\text{Re}_T^e) \frac{\varepsilon}{K} \times \\ \times \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \varphi_2(\text{Re}_T^e) \varphi_3(y_+). \quad (4.159)$$

В уравнениях (4.157) – (4.159)  $\varphi_1(\text{Re}_T^e)$  и  $\varphi_2(\text{Re}_T^e)$  – функции, учитывающие эффекты нелинейного взаимодействия процессов переноса молекулярной и молярной (турбулентной) природы, получены на основе обработки экспериментальных данных:

$$\varphi_1(\text{Re}_T^e) = \exp[-2,5/(1 + 0,02 \text{Re}_T^e)]; \quad (4.160)$$

$$\varphi_2(\text{Re}_T^e) = 1 - 0,3 \exp[-(\text{Re}_T^e)^2]. \quad (4.161)$$

Функции  $\varphi_1(\text{Re}_T^e)$  и  $\varphi_2(\text{Re}_T^e)$  возрастают при увеличении турбулентного числа Рейнольдса, и при  $\text{Re}_T^e \approx 10^3$  течение рассматривается как полностью турбулентное.

В вязком подслое (область I табл. 6) диссипация кинетической энергии турбулентных пульсаций не равна нулю в силу сильной анизотропии турбулентности ( $u'$  существенно больше  $v'$  и  $w'$ ). Для учета этого явления в последний член уравнения (4.159) введена дополнительная поправочная функция  $\varphi_3(y_+)$ , которая изменяется от нуля до единицы и ограничивает уменьшение деградации диссипации. Вид функции  $\varphi_3(y_+)$  получен также на основе численного эксперимента из условий наилучшего совпадения расчетных и экспериментальных профилей средней скорости и характеристик турбулентности

$$\varphi_3(y_+) = -\exp(-10) + \exp[-250/(25 + y_+^3)]. \quad (4.162)$$

Граничные условия для  $K$  и  $\varepsilon$  в этом случае будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} K=0; \quad \varepsilon=0 \quad \text{при } y=0 \\ \partial K/\partial y=0; \quad \partial \varepsilon/\partial y=0 \quad \text{при } y=\delta \end{aligned} \right\} x > 0. \quad (4.163)$$

Значение кинетической энергии турбулентности на стенке равно нулю вследствие того, что скорость, а следовательно и ее пульсации равны нулю. Отсюда, в соответствии с выражением (4.155), следует, что

в случае изотропного характера турбулентности  $\epsilon$  на стенке равна нулю. А так как при этом функция  $\Psi_z$ , учитывающая анизотропию, обращается в нуль, следовательно на стенке скорость диссипации должна быть задана равной нулю.

Итак, решение системы уравнений (4.133) – (4.135) совместно с уравнениями (4.158) и (4.159) переноса характеристик турбулентности  $K$  и  $\epsilon$  и с использованием формулы (4.154) для  $v_T$  позволит найти распределение составляющих вектора скорости  $u(y)$  и  $v(y)$ , а также температуры  $T(y)$  по толщине турбулентного пограничного слоя в каждой точке пластины  $x$ . В этом случае плотность теплового потока от жидкости на стенку [при  $(\partial T/\partial y)_{y=0} > 0$ ] или от стенки к жидкости [при  $(\partial T/\partial y)_{y=0} < 0$ ] за счет конвективной теплоотдачи определена постулатом Фурье

$$q_w = -(\lambda + \lambda_T)(\partial T/\partial y)_{y=0} = -\rho c_p(a + a_T)(\partial T/\partial y)_{y=0} \quad (4.164)$$

или с использованием чисел Прандтля для молекулярного  $Pr$  и турбулентного  $Pr_T$  переноса

$$q_w = -\rho c_p(v/Pr + v_T/Pr_T)(\partial T/\partial y)_{y=0} \quad (4.165)$$

Способ учета сложной картины течения и теплообмена в вязкой области (I и II табл. 6) пограничного слоя путем введения специальных функций, зависящих от турбулентного числа Рейнольдса  $Re_T^{\epsilon}$ , носит название метода малых чисел Рейнольдса. Этот метод позволит достаточно точно рассчитать распределение скоростей и температур в непосредственной близости от стенки. Однако использование метода малых чисел Рейнольдса требует значительных ресурсов памяти ЭВМ и затрат машинного времени. Поэтому при проведении приближенных расчетов граничные условия задают по методу, в котором используется логарифмическое распределение скорости (4.128) и температуры (4.129) во внутренней турбулентной части пограничного слоя (область III табл. 6). В этом случае задают не истинное граничное условие на стенке, а искусственное граничное условие, располагая границу потока в области логарифмического слоя. С учетом эмпирического соотношения  $\sqrt{\tau_w/(\rho K)} = (c_v^{\epsilon})^{1/4}$ , справедливого в этой области турбулентного пограничного слоя, выражения (4.128) и (4.129) для точки  $P$ , расположенной в логарифмическом слое, примут вид:

$$\frac{u_P}{\tau_w/\rho} (c_v^{\epsilon})^{1/4} K_P^{1/2} = \frac{1}{x} \ln \left( \frac{y_P \sqrt{(c_v^{\epsilon})^{1/2} K_P}}{v} \right) + B; \quad (4.166)$$

$$\frac{(T_w - T_f) \rho c_p (c_v^{\epsilon})^{1/4} K_P^{1/2}}{q_w} = \frac{Pr}{x_h} \ln \left( \frac{y_P \sqrt{(c_v^{\epsilon})^{1/2} K_P}}{v} \right) + B_h, \quad (4.167)$$



где  $u_P$  — продольная составляющая вектора скорости в точке  $P$ ;  $K_P$  — значение кинетической энергии турбулентности в точке  $P$ ;  $\kappa \approx \kappa_h = 0,38 + 0,41$ ;  $y_P$  — координата точки  $P$ ;  $B \approx 5,0 + 5,2$  — постоянная величина, определенная из эксперимента;  $B_h = 9,0 (Pr/Pr_T - 1)(Pr_T/Pr)^{1/4}$ .

Из выражений (4.166) и (4.167) легко найти касательное напряжение трения и плотность теплового потока на стенке. Характеристики турбулентности в точке  $P$  логарифмического слоя рассчитывают по следующим формулам:

$$K_P = \tau_w / (\rho \sqrt{c_v^E}); \quad \varepsilon_P = (c_v^E)^{3/4} K_P^3 / 2 / (\kappa y_P). \quad (4.168)$$

Использование данного метода, который получил название "метод закона стенки", позволяет существенно экономить память ЭВМ и время расчета, что весьма важно при проведении многовариантных оптимизационных расчетов.

Среди простейших моделей турбулентности, наиболее часто используемых в расчетах турбулентных пограничных слоев, отметим усовершенствованную Ван-Дристом модель пути смешения Прандтля, согласно которой

$$v_T = L^2 f_{V-D} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (4.169)$$

$$\text{где } f_{V-D} = [1 - \exp(-y_+ / A)]^2; \quad (4.170)$$

$L$  — масштаб турбулентности (длина пути смешения);  $f_{V-D}$  — поправочный множитель Ван-Дриста, позволяющий распространить модель пути смешения на вязкий подслой;  $A = 26$  — постоянная Ван-Дриста.

Для расчета  $L$  может быть использована одна из формул (4.149) или (4.150).

Перейдем к рассмотрению метода решения дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя.

#### *Метод расчета характеристик турбулентного пограничного слоя*

Систему дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя (4.133) — (4.135), (4.158) и (4.159) с соответствующими условиями однозначности и дополнительными эмпирическими соотношениями в настоящее время возможно решить только численными методами, самым распространенным из которых является метод конечных разностей. Рассмотрим применение этого метода на примере решения обобщенного дифференциального уравнения для переменной  $F$ , которая в зависимости от уравнения имеет смысл температуры  $T$  (4.133), продольной составляющей вектора скорости  $u$  (4.134), кинетической энергии турбулентности  $K$  (4.158) и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  (4.159)

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_F \frac{\partial F}{\partial y} \right) + S_F, \quad (4.171)$$

где  $F$  — искомая функция;  $\Gamma_F$  — эффективный коэффициент переноса для  $F$ ;  $S_F$  — источниковый член.

Значения  $F$ ,  $\Gamma_F$  и  $S_F$  для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине представлены ниже:

Значение функции $F$	Значение коэффициента переноса $\Gamma_F$	Источниковый член $S_F$
$u$	$\nu + \nu_T \varphi_1(\text{Re}_T^\varepsilon)$	0
$T$	$\nu/\text{Pr} + \nu_T \varphi_1(\text{Re}_T^\varepsilon)/\text{Pr}_T$	0
$K$	$\nu_T \varphi_1(\text{Re}_T^\varepsilon)/\text{Pr}_T^K$	$\nu_T \varphi_1(\text{Re}_T^\varepsilon) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon$
$\varepsilon$	$\nu_T \varphi_1(\text{Re}_T^\varepsilon)/\text{Pr}_T^\varepsilon$	$c_1 \nu_T \varphi_1(\text{Re}_T^\varepsilon) \frac{\varepsilon}{K} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 -$ $- c_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \varphi_2(\text{Re}_T^\varepsilon) \varphi_3(y_+)$

Граничные условия для функции  $F$  зададим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F = F_w \text{ при } y = 0 \\ \partial F / \partial y = 0 \text{ при } y = \delta, \delta_T \end{aligned} \right\} x > 0 \quad (4.172)$$

Начальные условия имеют вид

$$F = F_0 = \text{const при } x = 0, \quad (4.173)$$

где  $F_0$  — значение функции  $F$  в невозмущенном потоке.

Как и дифференциальное уравнение теплопроводности дифференциальное уравнение (4.171) относится к классу параболических уравнений. Поэтому все положения, касающиеся применения метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности (см. гл. III), применимы и к решению уравнения (4.171). Однако распределение  $F$  изменяется не во времени (как в задачах нестационарной теплопроводности), а вдоль оси  $Ox$ .

Для решения дифференциального уравнения (4.171) методом конечных разностей введем основную прямоугольную сетку (рис. 41):

$$x_k = (k - 1) \Delta x; \quad y_l = (l - 1) \Delta y; \quad k = 1, \dots, n_x; \quad l = 1, \dots, n_y \quad (4.174)$$

и вспомогательные "полуцелые" сетки:

$$x_k = (k - 1) \Delta x; \quad y_{l+\frac{1}{2}} = \left( l - \frac{1}{2} \right) \Delta y; \quad (4.175)$$

$$x_{k+\frac{1}{2}} = \left( k - \frac{1}{2} \right) \Delta x; \quad y_l = (l - 1) \Delta y; \quad k = 1, \dots, n_x; \quad l = 1, \dots, n_y,$$



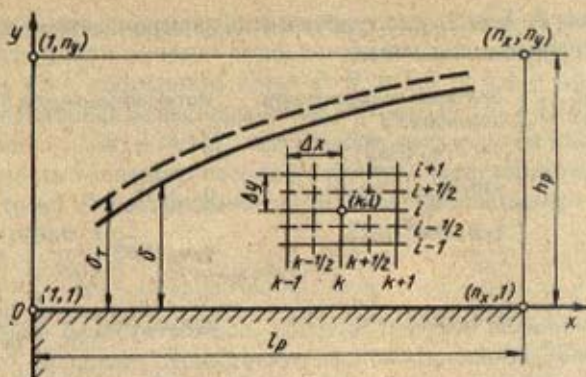


Рис. 41. Прямоугольная конечно-разностная сетка

где  $k$  – номер узла сетки вдоль оси  $Ox$ ;  $i$  – номер узла сетки вдоль оси  $Oy$ ;  $x_k$  – текущее значение координаты  $x$ ;  $y_l$  – текущее значение координаты  $y$ ;  $\Delta x$  – расстояние между узлами сетки по координате  $x$  (шаг по координате  $x$ );  $\Delta y$  – шаг по координате  $y$ ;  $n_x$  и  $n_y$  – число разностных узлов по координатам  $x$  и  $y$  соответственно.

Значения функции  $F$  будем рассматривать в узлах основной разностной сетки, а значения  $u$ ,  $v$ ,  $\Gamma_F$  и  $S_F$  в зависимости от вида схемы либо в узлах основной, либо в узлах вспомогательной разностной сетки. При этом введем следующие обозначения:

$$F(x_k, y_l) = F_{k,i}; \quad u_{k+\frac{1}{2},l} = (u_{k+1,l} + u_{k,l})/2;$$

$$v_{k+\frac{1}{2},l} = (v_{k+1,l} + v_{k,l})/2; \quad \Gamma_{k+\frac{1}{2},l} = (\Gamma_{k+1,l} + \Gamma_{k,l})/2; \quad S_{k+\frac{1}{2},l} = (S_{k+1,l} + S_{k,l})/2. \quad (4.176)$$

Здесь и далее нижний индекс  $F$  у коэффициента переноса и источникового члена опущен для сокращения записи.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения к разностному используем метод разностной аппроксимации. Для этого частные производные в дифференциальном уравнении (4.171) заменим их конечно-разностными аналогами, используя разложение функции  $F$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(k, l)$

$$F_{k+1,l} = F_{k,l} + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{k,l} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{k,l} \Delta x^2 + \dots \quad (4.177)$$

Решая (4.177) относительно  $\partial F/\partial x$ , получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{k,i} = \frac{F_{k+1,i} - F_{k,i}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{k,i} \Delta x - \dots \quad (4.178)$$

$$\text{или } \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{k,i} = \frac{F_{k+1,i} - F_{k,i}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (4.179)$$

где выражение  $O(\Delta x)$  означает "величина порядка  $\Delta x$ " и относится к членам ряда, содержащим множители  $\Delta x$ ,  $\Delta x^2$  и т.д. Выражение  $(F_{k+1,i} - F_{k,i})/\Delta x$  называют разностью вперед или правой разностью.

Аналогичным путем можно получить конечно-разностный аналог для производной  $\partial F/\partial x$  при разностной аппроксимации назад или левую разность  $(F_{k,i} - F_{k-1,i})/\Delta x$ , которая также имеет первый порядок аппроксимации.

Центральную (симметричную разностную аппроксимацию получим, используя разность разложений в ряд Тейлора функции слева и справа в окрестности точки  $(k, i)$

$$F_{k+1,i} = F_{k,i} + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{k,i} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{k,i} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{k,i} \Delta x^3 + \\ + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \Big|_{k,i} \Delta x^4 + \dots \quad (4.180)$$

и

$$F_{k-1,i} = F_{k,i} - \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{k,i} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{k,i} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{k,i} \Delta x^3 + \\ + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \Big|_{k,i} \Delta x^4 + \dots \quad (4.181)$$

Почленно вычитая (4.181) из (4.180) и выражая из полученного равенства  $\partial F/\partial x$ , найдем

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{k,i} = \frac{F_{k+1,i} - F_{k-1,i}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{k,i} \Delta x^2 + \dots = \\ = \frac{F_{k+1,i} - F_{k-1,i}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (4.182)$$

Полученное выражение для центральной разности  $(F_{k+1,i} - F_{k-1,i})/(2\Delta x)$  имеет погрешность аппроксимации порядка  $\Delta x^2$ .

Конечно-разностный аналог второй производной  $\partial^2 F/\partial x^2$  легко получить, складывая выражения (4.180) и (4.181) и решая полученное уравнение относительно  $\partial^2 F/\partial x^2$



$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{k,i} = \frac{F_{k+1,i} - 2F_{k,i} + F_{k-1,i}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (4.183)$$

где  $(F_{k+1,i} - 2F_{k,i} + F_{k-1,i})/\Delta x^2$  — конечно-разностный аналог  $\partial^2 F/\partial x^2$  со вторым порядком аппроксимации.

Для решения уравнения (4.171) с соответствующими начальными и граничными условиями можно использовать как явную, так и неявную разностные схемы (эти понятия относятся здесь не ко времени, как в гл. III, а к координате  $x$ ).

При явном методе расчета неизвестные значения функции в сечении  $(k+1)$  рассчитывают по значениям функции в сечении  $k$ , расположенном выше по течению на шаг  $\Delta x$  (рис. 42, а). Явную схему получим,

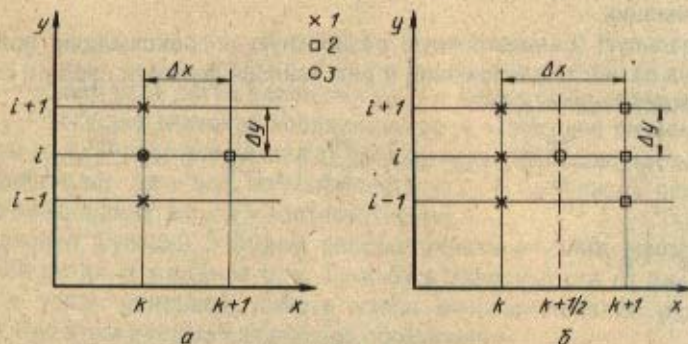


Рис. 42. Конечно-разностная сетка для явного (а) и неявного (б) методов расчета: 1 — известные величины; 2 — неизвестные величины; 3 — центр

заменяв  $\partial F/\partial x$  в уравнении (4.171) разностью вперед,  $\partial F/\partial y$  — центральной разностью, а  $\partial (\Gamma_F \partial F/\partial y)/\partial y$  — выражением, аналогичным (4.183), пренебрегая членами  $O(\Delta y^2)$ . При этом приближенные значения производных  $\partial F/\partial y$  и  $\partial (\Gamma_F \partial F/\partial y)/\partial y$  у запишем для узла  $(k, i)$ , отстоящего от узла  $(k+1, i)$  на шаг  $\Delta x$ . Значения  $u, v, \Gamma$  и  $S$  также будем считать известными в узле  $(k, i)$

$$u_{k,i} \frac{F_{k+1,i} - F_{k,i}}{\Delta x} + v_{k,i} \frac{F_{k,i+1} - F_{k,i-1}}{2\Delta y} = \frac{\Gamma_{k,i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (F_{k,i+1} - F_{k,i}) - \Gamma_{k,i-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (F_{k,i} - F_{k,i-1})}{\Delta y^2} + S_{k,i}. \quad (4.184)$$

Из последнего уравнения легко получить искомое значение  $F_{k+1,i}$

$$F_{k+1,i} = F_{k,i} + \frac{\Delta x}{u_{k,i}} \left[ \frac{\Gamma_{k,i+\frac{1}{2}} (F_{k,i+1} - F_{k,i}) - \Gamma_{k,i-\frac{1}{2}} (F_{k,i} - F_{k,i-1})}{\Delta y^2} - v_{k,i} \frac{F_{k,i+1} - F_{k,i-1}}{2\Delta y} + S_{k,i} \right]. \quad (4.185)$$

Для сохранения консервативности разностной схемы значения коэффициентов переноса  $\Gamma_{k,i+\frac{1}{2}}$  и  $\Gamma_{k,i-\frac{1}{2}}$  в выражениях (4.184)

и (4.185) вычисляются для узлов "полуцелой" сетки по формулам, аналогичным (4.176).

Для всех узлов сетки, расположенных внутри расчетной области  $i = 2, \dots, n_y - 1$ , легко найти значение неизвестной функции последовательным применением формулы (4.185). Преимуществом явной схемы расчета перед другими разностными схемами является простота ее реализации. Однако для получения устойчивого решения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma \Delta x / (\Delta y^2 u_0) < 0,5. \quad (4.186)$$

Откуда  $\Delta x < 0,5 u_0 \Delta y^2 / \Gamma$ , где  $u_0$  — скорость невозмущенного потока.

Из последнего выражения видно, что уменьшение  $\Delta y$  с целью увеличения точности расчета требует уменьшения  $\Delta x$  пропорционально величине  $\Delta y^2$ , что приводит к резкому увеличению времени расчета на ЭВМ.

Неявный метод расчета значения функции  $F_{k+1,i}$  заключается в ее определении через значения функции  $F_{k+1,i+1}$  и  $F_{k+1,i-1}$  в том же сечении  $(k+1)$ , что и искомая величина (рис. 42, б). В этом случае получим

$$u_{k+\frac{1}{2},i} \frac{F_{k+1,i} - F_{k,i}}{\Delta x} + v_{k+\frac{1}{2},i} \frac{F_{k+1,i+1} - F_{k+1,i-1}}{2\Delta y} = \frac{\Gamma_{k+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} (F_{k+1,i+1} - F_{k+1,i}) - \Gamma_{k+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} (F_{k+1,i} - F_{k+1,i-1})}{\Delta y^2} + S_{k+\frac{1}{2},i}, \quad (4.187)$$

где  $u_{k+\frac{1}{2},i}$ ,  $v_{k+\frac{1}{2},i}$  и  $S_{k+\frac{1}{2},i}$  рассчитывают по формулам (4.176),



а коэффициенты переноса по следующим выражениям, справедливым также для узлов вспомогательной "полуцелой" сетки

$$\Gamma_{k+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma_{k+1, l+1} + \Gamma_{k, l+1} + \Gamma_{k+1, l} + \Gamma_{k, l}}{4}$$

и

$$\Gamma_{k+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma_{k+1, l-1} + \Gamma_{k, l-1} + \Gamma_{k+1, l} + \Gamma_{k, l}}{4}.$$

Целесообразность такого приема объясняется требованиями консервативности разностной схемы. Заметим, что точно такую же разностную аппроксимацию можно получить, используя метод баланса (см. гл. III).

Как показано в гл. III, более точную разностную схему можно получить, введя вес  $\mu$ , который равен нулю для явной схемы и единице для чисто неявной схемы расчета

$$\begin{aligned} & u_{k+\frac{1}{2}, l} \frac{F_{k+1, l} - F_{k, l}}{\Delta x} + v_{k+\frac{1}{2}, l} \frac{\mu (F_{k+1, l+1} - F_{k+1, l-1}) + \dots}{2\Delta y} \dots \\ & \dots \frac{+(1-\mu)(F_{k, l+1} - F_{k, l-1})}{2\Delta y} = \mu \frac{\Gamma_{k+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} (F_{k+1, l+1} - \dots}{\Delta y^2} \dots \\ & \dots \frac{-F_{k+1, l}) - \Gamma_{k+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}} (F_{k+1, l} - F_{k+1, l-1})}{\Delta y^2} + (1-\mu) \times \\ & \times \frac{\Gamma_{k+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} (F_{k, l+1} - F_{k, l}) - \Gamma_{k+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}} (F_{k, l} - F_{k, l-1})}{\Delta y^2} + \\ & + S_{k+\frac{1}{2}, l}. \end{aligned} \quad (4.188)$$

При  $0,5 \leq \mu \leq 1$  схема (4.188) абсолютно устойчива (см. гл. III), т.е. выбор шагов  $\Delta x$  и  $\Delta y$  можно производить независимо друг от друга, а их величина определяется лишь соображениями точности и времени расчета. При малых  $\Delta x$  и  $\Delta y$  точность расчета повышается, однако, время расчета при этом, естественно, возрастает.

Значение  $\mu = 0,5$  приводит к неявной разностной схеме Кранка - Николсона с порядком аппроксимации  $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ . Явная и чисто неявная разностные схемы имеют более низкий порядок аппроксима-

ции  $O(\Delta x + \Delta y^2)$ . Это можно пояснить схемой, представленной на рис. 43. При явной схеме расчета переход от сечения  $k$  к сечению  $(k+1)$  происходит скачком при  $x = x_{k+1}$ , т.е. на всем протяжении  $\Delta x$  используется значение функции  $F_{k,i}$ . При расчетах по чисто неявной

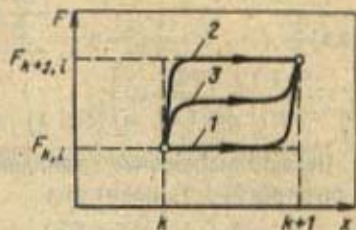


Рис. 43. Изменение функции  $F$  при переходе от слоя  $k$  к слою  $(i+1)$  при явной (1), чисто неявной (2) схемах и схеме Кранка - Николсона (3)

схеме переход к новому значению  $F_{k+1,i}$  происходит в сечении  $k$ , а затем это значение остается постоянным в пределах шага  $\Delta x$ . Согласно схеме Кранка - Николсона на протяжении шага  $\Delta x$  используется промежуточное значение функции  $F$ .

Входящую в выражения (4.184) и (4.188) поперечную составляющую вектора скорости найдем из уравнения неразрывности (4.135), которое аппроксимируем следующим образом:

при расчетах по явной схеме

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{k+1,i+1} - u_{k,i+1}}{\Delta x} + \frac{u_{k+1,i} - u_{k,i}}{\Delta x} \right) + \frac{v_{k,i} - v_{k,i-1}}{\Delta x} = 0; \quad (4.189)$$

при расчетах по неявной схеме

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{k+1,i+1} - u_{k,i+1}}{\Delta x} + \frac{u_{k+1,i} - u_{k,i}}{\Delta x} \right) + \frac{v_{k+\frac{1}{2},i} - v_{k+\frac{1}{2},i-1}}{\Delta y} = 0. \quad (4.190)$$

Здесь для повышения точности расчета конечно-разностный аналог производной  $\partial u / \partial x$  представлен в виде полусуммы правых разностей на слоях  $(i+1)$  и  $i$  соответственно

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{k+1,i+1} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{k+1,i} \right].$$

Из выражений (4.189) и (4.190) неизвестное значение поперечной составляющей вектора скорости определится явно в следующем виде:  
для узлов основной сетки



$$v_{k,l} = v_{k,l-1} - \frac{\Delta y}{2} \left( \frac{u_{k+1,l+1} - u_{k,l+1}}{\Delta x} + \frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{\Delta x} \right); \quad (4.191)$$

для узлов "полуцелой" вспомогательной сетки

$$v_{k+\frac{1}{2},l} = v_{k+\frac{1}{2},l-1} - \frac{\Delta y}{2} \left( \frac{u_{k+1,l+1} - u_{k,l+1}}{\Delta x} + \frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{\Delta x} \right). \quad (4.192)$$

Первое выражение граничных условий (4.172) в конечных разностях в сечении  $(k+1)$  имеет вид

$$F_{k+1,1} = -F_{w,k+1}, \quad (4.193)$$

где  $F_{w,k+1}$  — значение функции  $F$  на стенке.

Для аппроксимации граничного условия (4.172) на внешней границе пограничного слоя со вторым порядком по  $\Delta y$  применим метод неопределенных коэффициентов, согласно которому можно записать

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{k+1,n_y} \approx \frac{AF_{k+1,n_y} + BF_{k+1,n_y-1} + CF_{k+1,n_y-2}}{\Delta y}, \quad (4.194)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — искомые коэффициенты;  $n_y$  — номер узла на верхней границе расчетной области.

Разложим функции  $F_{k+1,n_y-1}$  и  $F_{k+1,n_y-2}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $i = n_y$ . Ограничиваясь тремя членами ряда, получим:

$$F_{k+1,n_y-1} = F_{k+1,n_y} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{k+1,n_y} (-\Delta y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{k+1,n_y} \Delta y^2;$$

$$F_{k+1,n_y-2} = F_{k+1,n_y} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{k+1,n_y} (-2\Delta y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{k+1,n_y} (2\Delta y)^2. \quad (4.195)$$

Подставим выражения (4.195) в правую часть равенства (4.194). После приведения подобных слагаемых приравняем соответствующие коэффициенты левой и правой частей равенства (4.194). В результате получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -B - 2C = 1 \\ \frac{B}{2} + 2C = 0, \end{cases}$$

решая которую найдем значения коэффициентов:  $A = 3/2$ ,  $B = -2$  и  $C = 1/2$ . Итак,

$$\frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{\frac{3}{2} F_{k+1, n_y} - 2F_{k+1, n_y-1} + \frac{1}{2} F_{k+1, n_y-2}}{\Delta y} = \frac{3F_{k+1, n_y} - 4F_{k+1, n_y-1} + F_{k+1, n_y-2}}{2 \Delta y} \quad (4.196)$$

Принимая во внимание выражения (4.193) и (4.196), граничные условия в сечении  $(k+1)$  пограничного слоя аппроксимируем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F_{k+1, 1} &= F_{w, k+1} && \text{при } y=0 \\ \frac{3F_{k+1, n_y} - 4F_{k+1, n_y-1} + F_{k+1, n_y-2}}{2 \Delta y} &= 0 && \text{при } y = \delta, \delta_T \end{aligned} \right\} x > 0. \quad (4.197)$$

Начальное условие (4.193) для всех  $i = 1, \dots, n_y$  примет вид

$$F_{1, i} = F_0. \quad (4.198)$$

При записи несимметричного трехточечного разностного выражения для производной  $\partial F / \partial y|_{y=0}$  на стенке также применим метод неопределенных коэффициентов. В этом случае

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{k+1, 1} \approx \frac{AF_{k+1, 1} + BF_{k+1, 2} + CF_{k+1, 3}}{\Delta y} \quad (4.199)$$

Раскладывая функции  $F_{k+1, 2}$  и  $F_{k+1, 3}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $i = 1$  и ограничиваясь тремя членами ряда, получим:

$$F_{k+1, 2} = F_{k+1, 1} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{k+1, 1} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{k+1, 1} \Delta y^2;$$

$$F_{k+1, 3} = F_{k+1, 1} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{k+1, 1} 2 \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{k+1, 1} (2 \Delta y)^2.$$

Подставляя последнее выражение в правую часть равенства (4.199), приводя подобные члены и приравнивая коэффициенты при одинаковых членах левой и правой частей снова получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными коэффициентами  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B + 2C = 1 \\ \frac{B}{2} + 2C = 0, \end{cases}$$



решая которую, получим:  $A = -3/2$ ;  $B = 2$ ;  $C = -1/2$ . Таким образом:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{k+1,1} = \frac{-\frac{3}{2}F_{k+1,1} + 2F_{k+1,2} - \frac{1}{2}F_{k+1,3}}{\Delta y} =$$

$$= \frac{-3F_{k+1,1} + 4F_{k+1,2} - F_{k+1,3}}{2\Delta y}. \quad (4.200)$$

Плотность теплового потока на стенке будем рассчитывать в сечении  $(k+1)$  по формуле (4.165), применив для аппроксимации градиента температуры формулу (4.200)

$$q_{w,k+1,1} \approx -\rho c_p a_{\text{эф},k+1,1} \frac{3}{2} (-3T_{k+1,1} + 4T_{k+1,2} - T_{k+1,3}) / (2\Delta y), \quad (4.201)$$

где  $a_{\text{эф}} = a_{\tau} + a$  — эффективный коэффициент температуропроводности. Заметим, что  $T_{w,k+1} = T_{k+1,1}$ , так как узел  $i=1$  расположен на поверхности стенки.

Рассмотрим подробно метод решения системы линейных уравнений (4.188). Дело в том, что при  $\mu \neq 0$  из выражения (4.188) нельзя выразить искомое значение функции  $F_{k+1,i}$ , так как ее значение определяется по известным значениям  $F_{k,i-1}$ ,  $F_{k,i}$  и неизвестным  $F_{k+1,i-1}$  и  $F_{k+1,i+1}$ . В данном случае неизвестные значения функции  $F_{k+1,i}$  [ $i = 2, \dots, n_y - 1$ ] можно найти только решением системы алгебраических уравнений, составленных для всех внутренних узлов сетки. Перепишем уравнение (4.188) в следующем виде:

$$A_i F_{k+1,i+1} - B_i F_{k+1,i} + C_i F_{k+1,i-1} + P_i = 0, \quad (4.202)$$

где

$$A_i = \Gamma_{k+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} \frac{\mu}{\Delta y^2} - v_{k+\frac{1}{2},i} \frac{\mu}{2\Delta y};$$

$$B_i = \left( \Gamma_{k+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \Gamma_{k+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} \right) \frac{\mu}{\Delta y^2} + u_{k+\frac{1}{2},i} \frac{1}{\Delta x};$$

$$C_i = \Gamma_{k+\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{\Delta y^2} + v_{k+\frac{1}{2},i} \frac{\mu}{2\Delta y};$$

$$P_i = \left[ \Gamma_{k+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} \frac{1-\mu}{\Delta y^2} - v_{k+\frac{1}{2},i} \frac{1-\mu}{2\Delta y} \right] F_{k,i+1} -$$

$$- \left[ \left( \Gamma_{k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} + \Gamma_{k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}} \right) \frac{1-\mu}{\Delta y^2} - u_{k+\frac{1}{2}, i} \frac{1}{\Delta x} \right] F_{k, i} +$$

$$+ \left[ \Gamma_{k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}} \frac{1-\mu}{\Delta y^2} + v_{k+\frac{1}{2}, i} \frac{1-\mu}{2\Delta y} \right] F_{k, i-1} + S_{k+\frac{1}{2}, i}$$

В матричной форме система (4.202) имеет вид

$$AF = P, \quad (4.203)$$

где  $F$  и  $P$  —  $(n_y - 2)$ -мерные столбцы;

$$F = \begin{bmatrix} F_{k+1,2} \\ F_{k+1,3} \\ \vdots \\ F_{k+1, n_y-2} \\ F_{k+1, n_y-1} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -P_2 \\ -P_3 \\ \vdots \\ -P_{n_y-2} \\ -P_{n_y-1} \end{bmatrix}, \quad (4.204)$$

а  $A$  — трехдиагональная матрица порядка  $(n_y - 2)$ :

$$A = \begin{bmatrix} -B_2 & A_2 & & & 0 \\ C_3 & -B_3 & A_3 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & C_{n_y-2} & -B_{n_y-2} & A_{n_y-2} \\ & 0 & & & C_{n_y-1} & -B_{n_y-1} \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

Для решения системы линейных уравнений (4.202) с трехдиагональной матрицей (4.205) относительно неизвестных  $F_{k+1, i}$  ( $i = 2, \dots, n_y - 1$ ) применим рассмотренный ранее в гл. III метод прогонки. Предположим в соответствии с этим методом, что существует линейная связь между значениями  $F_{k+1, i}$  и  $F_{k+1, i+1}$  в виде

$$F_{k+1, i} = \alpha_i F_{k+1, i+1} + \beta_i \quad (4.206)$$

или аналогично

$$F_{k+1, i-1} = \alpha_{i-1} F_{k+1, i} + \beta_{i-1}, \quad (4.207)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \alpha_{i-1}$  и  $\beta_{i-1}$  — коэффициенты прогонки. Подставим (4.207) в (4.202) и после несложных преобразований получим



$$F_{k+1,i} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} F_{k+1,i+1} + \frac{C_i \beta_{i-1} + P_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} \quad (4.208)$$

Сравнивая последнее выражение с основной формулой прогонки (4.206), легко сделать вывод о том, что коэффициенты прогонки вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} + P_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} \quad (4.209)$$

для всех внутренних узлов сетки  $i = 2, \dots, n_y - 1$ .

Значения коэффициентов прогонки в узле  $i = 1$  ( $\alpha_1$  и  $\beta_1$ ) вычисляются из заданных граничных условий на твердой поверхности. При известном значении функции  $F_{k+1,1}$  на поверхности стенки ( $y = 0$ ) в виде (4.193) в соответствии с основной формулой прогонки (4.206) имеем:  $\alpha_1 = 0$  и  $\beta_1 = F_{k+1,1} = F_{w,k+1}$ .

В граничном узле  $i = n_y$  на внешней границе пограничного слоя значение функции  $F_{k+1,n_y}$  определим, исходя из граничного условия (4.193). Для этого выразим значение функций  $F_{k+1,n_y-1}$  и  $F_{k+1,n_y-2}$  в узлах  $i = n_y - 1$  и  $i = n_y - 2$  через значение функции  $F_{k+1,n_y}$  в узле  $i = n_y$ , дважды используя формулу прогонки (4.206). Получим

$$F_{k+1,n_y} = (4 \beta_{n_y-1} - \alpha_{n_y-2} \beta_{n_y-1}) / (3 - 4 \alpha_{n_y-1} + \alpha_{n_y-2} \alpha_{n_y-1}) \quad (4.210)$$

Расчет всех значений функции  $F_{k+1,i}$  ( $i = 1, \dots, n_y$ ) осуществляется в два этапа. Сначала рассчитывают коэффициенты прогонки  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  для узлов сетки  $i = 1, \dots, n_y - 1$ , т.е. выполняют прямую прогонку. Затем, рассчитав значение функции в граничном узле по формуле (4.210), выполняют обратную прогонку, определяя значения функции по формуле (4.206) во всех внутренних  $i = 2, \dots, n_y - 1$  узлах сетки.

### Алгоритм расчета турбулентного пограничного слоя

Для расчета турбулентного пограничного слоя будем пользоваться методом малых чисел Рейнольдса и только при расчете распределения кинетической энергии пульсаций и скорости ее диссипации в переходном сечении применим метод Ван-Дриста.

Расчеты турбулентного пограничного слоя по явному и неявному методам имеют некоторые различия. Сначала рассмотрим алгоритм расчета по неявной схеме Кранка - Николсона, поскольку она предпочтительнее в смысле точности и устойчивости, а затем кратко остановимся на особенностях алгоритма расчета с применением чисто неявной и явной схем.

Расчет характеристик турбулентного пограничного слоя с использованием неявной схемы будем проводить в следующей последовательности:

1. Задаем исходные данные, необходимые для расчета, такие как скорость невозмущенного потока  $u_0$ , температура невозмущенного потока  $T_0$ , размеры расчетной области  $h_p$  и  $l_p$  и ряд других данных, которые приведены ниже.

2. Строим основную и вспомогательную конечно-разностные сетки по формулам (4.174) и (4.175). При этом для простейшей равномерной прямоугольной сетки шаги по координатам  $x$  и  $y$  рассчитываем по очевидным формулам:

$$\Delta x = l_p / (n_x - 1); \quad \Delta y = h_p / (n_y - 1), \quad (4.211)$$

где  $l_p$  и  $h_p$  — размеры расчетной области (см. рис. 41);  $n_x$  и  $n_y$  — номера граничных узлов на осях  $Ox$  и  $Oy$ .

Высота расчетной области  $h_p$  может быть приближенно задана по формуле

$$h_p = \delta_1 + 0,376 (v/u_0)^{0,24} \rho^{0,8},$$

где  $\delta_1 = 0,005 + 0,01$  м — начальное значение высоты расчетной области в узле  $k = 1$ ; второе слагаемое в выражении (4.212) представляет собой закон изменения толщины турбулентного гидродинамического пограничного слоя по длине пластины (в рассматриваемом случае  $x = l_p$ ), полученный с помощью полуэмпирического расчета.

Число расчетных узлов по координате  $x - n_x$  и по координате  $y - n_y$  выбираем, исходя из соображений точности и времени расчета. Естественно, с увеличением числа узлов (а, следовательно, с уменьшением  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ) точность решения возрастает, однако, при этом увеличивается время расчета. В зависимости от числа разностных узлов погрешность решения можно оценить, например, по принципу Рунге (см. гл. III).

3. Задаем значения характеристик турбулентного пограничного слоя в начальном его сечении  $x = x_{кр}$  ( $k = n_{x,кр}$ ), где  $x_{кр}$  — значение координаты  $x$ , при которой происходит переход от ламинарного течения к турбулентному, а  $n_{x,кр}$  — номер разностного узла, соответствующего этой координате.

Значение  $x_{кр}$  найдем по критическому числу Рейнольдса  $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$

$$x_{кр} = (Re_{кр} v) / u_0. \quad (4.213)$$

Расчет ламинарного пограничного слоя проводим в следующей последовательности:

а) задаем начальные значения для  $u, v$  и  $T$  ( $k = 1$ ):

для внутренних узлов сетки ( $i = 2, \dots, n_y$ )

$$u_{1,i} = u_0; \quad v_{1,i} = 0; \quad T_{1,i} = T_0;$$

на стенке ( $i = 1$ ) для всех  $k = 1, \dots, n_x$

$$u_{k,1} = v_{k,1} = 0; \quad T_{k,1} = T_w, k;$$

б) выполнив шаг  $\Delta x$  вдоль оси  $Ox$ , находим в узле  $k = 2$  значения  $u_{2,i}$  и  $T_{2,i}$  путем решения системы разностных уравнений (4.188), считая  $\mu = 0,5$  при постоянных коэффициентах переноса  $\Gamma_u = \nu$  и  $\Gamma_T = \nu / Pr$  и источниковых членах, равных нулю. Значения поперечной составляющей вектора скорости в узлах полуцелой сетки ( $k = 3/2, i$ ) в нулевом приближении примем равным  $v_{3/2,i} = v_{1,i} = 0$ ;

в) находим значение поперечной составляющей вектора скорости  $v_{3/2,i}$  в узлах полуцелой сетки с помощью выражения (4.192);

г) повторяем расчет  $u_{2,i}$  и  $T_{2,i}$  с новыми значениями  $v_{3/2,i}$ ;

д) расчет  $u_{2,i}$  и  $T_{2,i}$  методом итераций заканчиваем, если выполняется условие

$$\max_i |F_{2,i}^{m+1} - F_{2,i}^m| / \max_i F_{2,i} < \Delta F, \quad (4.214)$$

где  $\Delta F$  — заданная погрешность расчета  $F = u, T$ . В числителе выражения (4.214) стоит максимальная разность двух приближений для всех  $n_y$  узлов, а в знаменателе — максимальное из всех  $n_y$  значений функции;



е) повторяем расчет  $u$  и  $T$  для всех оставшихся сечений  $k = 3, \dots, n_{x_{кр}}$  по описанному выше алгоритму.

Значения  $u$ ,  $v$  и  $T$  в сечении  $x = x_{кр}$  принимаем за начальные для расчета турбулентного пограничного слоя. Для удобства записи нумерацию узлов вдоль оси  $Ox$  в турбулентном пограничном слое начнем с единицы. Тогда получим:

$$u_{1,i} = u_{n_{x_{кр}},i}; \quad T_{1,i} = T_{n_{x_{кр}},i}; \quad v_{1,i} = v_{n_{x_{кр}},i}.$$

Распределение коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_T$  поперек пограничного слоя в сечении  $x = x_{кр}$  рассчитываем по простой полуэмпирической модели Ван-Дриста (4.169), в которой масштаб турбулентности определим, например, по формуле (4.150). Используя гипотезу А.Н.Колмогорова и Л.Прандтля (4.148), найдем значение кинетической энергии турбулентности в сечении  $x = x_{кр}$

$$K_{1,i} = [\nu_{T,1,i} / (c_v^L L_{1,i})]^2, \quad (4.215)$$

где  $c_v^L \approx c_v^E$  — эмпирическая постоянная.

Зная распределение  $K$  и  $L$  в сечении  $x = x_{кр}$ , найдем начальное значение скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\epsilon$

$$\epsilon_{1,i} = c_\epsilon K_{1,i}^{3/2} / L_{1,i}. \quad (4.216)$$

4. Определяем неизменные в ходе расчета граничные условия для всех  $k = 2, \dots, n_x$  в узле  $i = 1$

$$u_{k,1} = v_{k,1} = K_{k,1} = \epsilon_{k,1} = 0. \quad (4.217)$$

5. Смещаемся на шаг  $\Delta x$  и итерационным путем рассчитываем с помощью уравнений (4.188) значения продольной составляющей вектора скорости  $u$ , температуры  $T$ , характеристик турбулентности  $K$  и  $\epsilon$  во втором сечении по координате  $x$  ( $k = 2$ ) турбулентного пограничного слоя, используя значения искомым величин в первом ( $k = 1$ ) сечении. Для этого:

а) если заданы граничные условия первого рода, определяем значение температуры на границе по формуле (4.193);

б) рассчитываем коэффициенты  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $P_j$  разностного уравнения (4.202). При этом  $\Gamma_{3/2,1}$ ,  $u_{3/2,1}$ ,  $S_{3/2,1}$  вычисляем по формулам (4.180), в которые входят еще неизвестные значения  $\Gamma_{2,1}$ ,  $u_{2,1}$ ,  $S_{2,1}$  в новом расчетном сечении  $k = 2$ . В этом случае, как обычно, применим метод итераций, приняв в качестве начального приближения значения  $\Gamma$ ,  $u$  и  $S$  в предыдущем (в данном случае в первом) расчетном сечении  $k$

$$\Gamma_{2,i}^m = \Gamma_{1,i}; \quad u_{2,i}^m = u_{1,i}; \quad S_{2,i}^m = S_{1,i},$$

где  $m$  — номер итерации.

Необходимое для расчета значение  $v_{3/2,1}$  в нулевом приближении также примем равным  $v_{3/2,1}^m = v_{1,1}$ . Напомним, что в уравнении переноса импульса  $\Gamma = v + v_T \Phi_1(\text{Re}_T^E)$ , в уравнении энергии  $\Gamma = v / \text{Pr} + v_T \Phi_1(\text{Re}_T^E) / \text{Pr}_T$ , а в уравнениях переноса характеристик турбулентности  $K$  и  $\epsilon$

$$\Gamma_K = v_T \Phi_1(\text{Re}_T^E) / \text{Pr}_K \quad \text{и} \quad \Gamma_\epsilon = v_T \Phi_1(\text{Re}_T^E) / \text{Pr}_\epsilon;$$

в) рассчитываем коэффициенты прогонки  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  по формулам (4.209) для всех характеристик потока  $F = u, T, K$  и  $\epsilon$  ( $i = 2, \dots, n_y - 1$ ). При этом, если на границе задано граничное условие первого рода,  $\alpha_1 = 0$  и  $\beta_1 = F_w, \delta$

г) вычисляем значение  $F_{2, n_y}$  на верхней границе расчетной области (пограничного слоя), используя формулу (4.210);

б) проводим обратную прогонку по формуле (4.206) и находим значения в узлах сетки  $i = 2, \dots, n_y - 1$ . В результате получим значение  $F_{2, i}^{m=1}$  на первой итерации;

в) рассчитываем новое приближение коэффициентов переноса  $\Gamma_{2, i}^{m=1}$  по принятой  $K-\epsilon$  модели турбулентности;

ж) вычисляем поперечную составляющую вектора скорости  $v_{3/2, i}^{m=1}$  по уравнению неразрывности (4.192);

з) поскольку для расчета  $F_{2, i}^{m=1}$  на первой итерации были применены приближенные значения  $\Gamma, v, u$  и  $S$ , для их уточнения повторим расчет с п. 5б, т.е. проведем вторую итерацию ( $m = 2$ );

и) итерационный процесс повторяем до выполнения условия (4.214);

к) выполняем расчет плотности теплового потока на стенке по формуле (4.201).

Итак, выполнив пункт 5, получим распределение температуры  $T$ , продольной составляющей скорости  $u$  и характеристик турбулентности  $K$  и  $\epsilon$  в сечении  $k = 2$ , а также значения поперечной составляющей скорости  $v_{3/2, i}$  в сечении  $k = 3/2$ .

6. Вновь смещаемая на шаг  $\Delta x$  вдоль пластины и проводим расчет  $T, u, v, K$  и  $\epsilon$  методом итераций в сечении с номером  $k = 3$ , приняв в качестве нулевого приближения значения всех характеристик течения и источников члена из последней итерации на слое  $k = 2$ . Этот расчет проводим по алгоритму, изложенному в п. 5.

7. Расчет турбулентного пограничного слоя заканчиваем, если достигнута заданная длина расчетной области  $x = l_p$  ( $k = n_x$ ).

Для упрощения расчетных формул можно использовать чисто неявную или явную разностные схемы. Расчет по чисто неявной схеме проводится по описанному выше алгоритму с той лишь разницей, что в пп. 3б и 5 вместо выражения (4.188) используется схема (4.187).

Расчет с применением явной разностной схемы в основном проводится по такому же алгоритму, что и для неявного метода. При этом шаг  $\Delta u$  выбирается также, исходя из требуемой точности расчета, однако, размер шага  $\Delta x$  ограничен неравенством (4.186), и поэтому время расчета может оказаться слишком большим. Расчет характеристик турбулентного пограничного слоя в пп. 5 и 6 алгоритма проводится по формуле (4.185) без выполнения итераций, так как данные, необходимые для расчета  $(k + 1)$ -го сечения, заимствуются из  $k$ -того расчетного сечения. Поперечная составляющая скорости  $v_{k, i}$  рассчитывается по формуле (4.191).

Рассмотренная выше равномерная прямоугольная разностная сетка (см. рис. 41) приводит к большой погрешности расчета начального участка пограничного слоя, поскольку на этом участке толщина пограничного слоя еще мала и лишь небольшое число разностных узлов расчетной области попадает в область пограничного слоя. Увеличение числа разностных узлов, естественно, повышает точность расчета начального участка. Однако при этом резко возрастают вычислительные затраты, а кроме того во второй половине расчетного участка в связи с малым изменением характеристик потока поперек слоя в таком количестве расчетных точек просто нет необходимости. Введение неравномерной разностной сетки по координате  $u$  с переменным шагом также позволяет получить приемлемую точность расчета при минимальном числе разностных узлов, но в этом случае значительно усложняются аппроксимационные формулы и сам алгоритм расчета.

Рассмотрим два способа построения достаточно простых равномерных сеток, которые при относительно небольшом количестве разностных узлов дают приемлемую точность расчета пограничного слоя по всей длине пластины.

Согласно первому способу в начале пластины в узле  $k = 1$  задаем начальные значения толщины пограничного слоя  $\delta_1 = 0,005 + 0,01$  м и числа узлов  $n_y$ , расположенных в этой области. При этом шаг поперек слоя выражается как  $\Delta u = \delta_1(n_y - 1)$ .



Затем выполняем пп. 3, 4, 5 а-г изложенного выше алгоритма. Далее, до выполнения обратной прогонки, проверяем условие плавного перехода искомой функции  $F$  к постоянному значению во внешнем потоке, используя выражение

$$\left| F_{2, n_y} - F_{2, n_y - 1} \right| / F_{2, n_y} < \Delta \delta, \quad (4.218)$$

где  $\Delta \delta = 0,01 \div 0,005$  — относительная погрешность определения толщины пограничного слоя. При выполнении условия (4.218), которое называют условием гладкого сопряжения, проводим расчет всех значений  $F_{2, j}$  с помощью обратной прогонки и выполняем новый шаг  $\Delta x$ . В противном случае увеличиваем величину расчетной области по  $y$  на  $\Delta y$  [тем самым добавляем узел с номером  $(n_y + 1)$ ], рассчитываем коэффициенты прогонки  $\alpha_{n_y}$  и  $\beta_{n_y}$  по рекуррентным формулам (4.209) и находим значение функции в узле  $i = n_y + 1$  по формуле (4.210). Вновь проверяем условие (4.218) и, если оно не выполняется, добавляем еще один расчетный узел с номером  $(n_y + 2)$ . Процедуру увеличения числа разностных узлов по оси  $Oy$  проводим до тех пор, пока не выполнится условие гладкого сопряжения (4.218). При вычислении коэффициентов прогонки в узлах  $i \geq n_y$  значения составляющих вектора скорости и коэффициентов переноса принимаются равными их значениям в узле  $i = n_y$  в предыдущем расчетном сечении.

Далее расчет проводим по основному алгоритму, начиная с п. 5 д. Таким образом, получаем равномерную ступенчатую разностную сетку.

Второй метод построения адаптивной сетки, т.е. сетки, учитывающей изменение размера расчетной области поперек пограничного слоя с увеличением его длины, заключается в следующем. Как и для предыдущей ступенчатой разностной сетки в начальном сечении  $k = 1$  задаем начальную толщину пограничного слоя  $\delta_1$  и число расчетных узлов  $n_y$  поперек слоя, которое в отличие от ступенчатой разностной сетки не изменяем в ходе всего расчета. Проводим расчет характеристик пограничного слоя, следуя алгоритму, изложенному выше. При этом рекомендуется величину шага вдоль пластины  $\Delta x_{k+1}$  и размер расчетной области поперек пограничного слоя  $\delta_{k+1}$  рассчитывать по формулам:

$$\delta_{k+1} = \delta_1 + 0,376 (v/u_0)^{0,2} x_{k+1}^{0,8}; \quad (4.219)$$

$$\Delta x_{k+1} = (0,2 \div 0,3) \delta_{k+1}, \quad (4.220)$$

где  $\delta_{k+1}$  — величина расчетной области в  $(k+1)$ -ом сечении по координате  $x$ ;  $\delta_1$  — начальный размер расчетной области;  $x_{k+1}$  — расстояние от начала пластины до рассматриваемого сечения с номером  $(k+1)$ . Размеры шага по  $y$  в данном  $(k+1)$ -ом сечении рассчитываем по очевидной формуле  $\Delta y_{k+1} = \delta_{k+1} / (n_y - 1)$ . Таким образом, получаем равномерную расширяющуюся разностную сетку, у которой шаг  $\Delta y$  одинаков для каждого расчетного сечения, но увеличивается с ростом толщины пограничного слоя пропорционально  $\sim x^{0,8}$ . При этом шаг  $\Delta x_{k+1}$  также растет вниз по потоку пропорционально толщине пограничного слоя  $\delta_{k+1}$ . Данный алгоритм построения сетки реализует переход от координаты  $y$  к безразмерной координате  $\eta = y / \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — толщина слоя, которую можно оценить, используя выражение (4.219).

В частном случае расчета изотермического течения из рассмотрения исключается решение уравнения энергии, а расчеты теплообмена при стабилизированном течении в трубе не включают в себя решение уравнения гидродинамического пограничного слоя. В остальном алгоритм расчета остается без изменений.

В заключение рассмотрим пример расчета турбулентного пограничного слоя на плоской пластине при натекании на нее воздушного потока. Исходные данные для этого случая представлены ниже:

Температура невозмущенного потока $T_0$ , К	293
Скорость невозмущенного потока $u_0$ , м/с	10
Эмпирические постоянные в модели турбулентности	
$Pr_T^k$	0,9
$Pr_T^j$	0,9
$Pr_T^c$	1,3
$c_\varepsilon$	1,0
$c_1$	1,44
$c_2$	1,92
Длина расчетной области $l_p$ , м	5
Шаг по длине пластины $\Delta x$ , м	0,1
Число расчетных узлов поперек слоя $n_y$	110
Температура стенки $T_w$ , К	373

Таблица 7. Расчетные характеристики турбулентного пограничного слоя

Номер узла	$u$ , м/с	$v \cdot 10^2$ , м/с	$T$ , К	$v_T \cdot 10^4$ , м <sup>2</sup> /с
1	0	0	373	0
2	4,32	0,005	348,3	2,686
3	4,85	0,016	333,7	2,164
4	5,05	0,028	328,7	3,733
5	5,39	0,040	326,1	5,193
6	5,61	0,052	324,3	6,491
7	5,82	0,065	322,5	7,649
8	5,99	0,079	321,2	8,694
9	6,18	0,092	320,6	9,646
10	6,31	0,106	319,1	10,515
11	7,09	0,120	317,9	11,311
15	7,49	0,178	314,4	13,294
20	7,91	0,255	311,4	15,743
30	8,40	0,415	307,9	16,759
40	8,78	0,584	303,8	15,797
50	9,09	0,759	301,6	12,009
60	9,35	0,940	299,3	7,857
70	9,52	1,125	297,8	4,428
80	9,72	1,313	295,8	1,857
90	9,93	1,505	295,1	0,371
91	9,95	1,525	294,6	0,286
92	9,97	1,544	294,5	0,271
93	9,98	1,56	294,3	0,171
94	9,99	1,58	294,1	0,128
95	9,99	1,58	294,0	0,086
96	10,00	1,58	293,9	0,028
97	10,00	1,58	293,8	0,007
98	10,00	1,58	293,7	0
99	10,00	1,58	293,6	0
100	10,00	1,58	293,3	0
110	10,00	1,58	293,0	0



Расчеты проведены на ЭВМ по алгоритму, изложенному выше, на прямоугольной равномерной разностной сетке с шагом  $\Delta y$  по оси  $Oy$  равным  $0,001$  м. В табл. 7 представлены некоторые результаты расчета основных характеристик турбулентного пограничного слоя в сечении  $x = 5$  м. По данным табл. 7 можно оценить толщину гидродинамического  $\delta$  и теплового  $\delta_T$  пограничных слоев. Приняв за границу гидродинамического пограничного слоя точку, в которой продольная составляющая вектора скорости  $u$  равна  $99,7\%$  скорости невозмущенного потока  $u_0$ , получим  $\delta \approx 0,091$  м (граница в узле  $i = 92$ ). Аналогично, если принять за границу теплового пограничного слоя точку, в которой температура  $T$  отличается от температуры невозмущенного потока  $T_0$  на  $0,3\%$ , получим  $\delta_T \approx 0,095$  м (граница в узле  $i = 96$ ).

Изменение составляющих вектора скорости  $u$  и  $v$ , а также температуры  $T$  поперек пограничного слоя показано на рис. 44. Обратим внимание, что поперечная составляющая скорости  $v$  изменяется от нуля до некоторого постоянного значения вне пограничного слоя.

Изменение кинематического коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_T$  поперек пограничного слоя изображено на рис. 45. Зависимость  $\nu_T = f(y)$  имеет максимум при  $y \approx 0,32\delta$ , т.е. во внешней области турбулентного пограничного слоя. По данным табл. 7 можно сделать вывод о том, что перенос импульса в турбулентном пограничном слое осуществляется в основном за счет молярного механизма, так как  $\nu_T \gg \nu$  (для воздуха при  $T = 293$  К,  $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с), за исключением области непосредственно прилегающей к стенке.

Заметим, что результаты расчета в целях наглядности приведены в размерной форме. Переход к безразмерному виду характеристик течения и координаты  $y$  можно выполнить по следующим формулам:

$$u_+ = u/u_T; \quad v_+ = v/u_T; \quad T_+ = (T_W - T)/T_T;$$

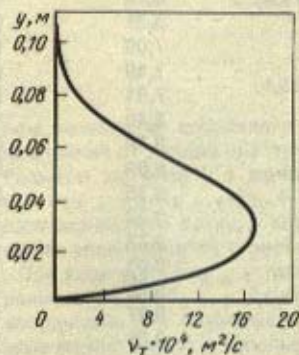
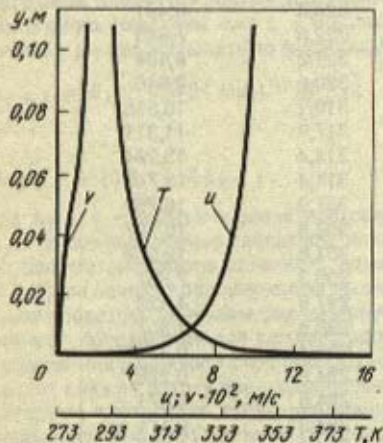


Рис. 44. Изменение составляющих вектора скорости  $u$  и  $v$  и температуры  $T$  поперек турбулентного пограничного слоя на плоской пластине в сечении  $x = 5$  м при ее обтекании воздухом с  $u_0 = 10$  м/с,  $T_0 = 293$  К,  $T_W = 373$  К

Рис. 45. Изменение кинематического коэффициента турбулентной вязкости поперек пограничного слоя на плоской пластине в сечении  $x = 5$  м при ее обтекании воздухом с  $u_0 = 10$  м/с

$$v_{T,+} = v_T / (u_T \delta); v_+ = v / (u_T \delta); y_+ = y u_T / \nu,$$

где индекс "+" обозначает безразмерную величину;  $u_T$  — динамическая скорость;  $T_T$  — динамическая температура;  $\delta$  — толщина гидродинамического пограничного слоя.

Изложенная математическая модель используется в п. 3 гл. V для решения сопряженной задачи теплообмена при охлаждении стальной ленты.

## 6. РАСЧЕТ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА ЗОНАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

При рассмотрении зональных методов расчета теплообмена в системе, образованной газовым объемом и ограничивающей его замкнутой поверхностью, до сих пор предполагалось, что газ является неподвижным, так что перенос тепла осуществляется только излучением. Рассмотрим теперь вопрос о том, как в рамках зонального метода можно учесть конвективный теплоперенос, обусловленный движением газа.

Будем считать, что движение газа является стационарным, причем распределение массовой скорости (плотности потока массы) в газовом объеме описывается известной функцией  $\rho \vec{w}(N)$ , кг/(м<sup>2</sup> · с), где  $N$  — точка газового объема. Тогда для любого участка поверхности, разделяющей объемные зоны, можно определить поток массы  $G$ , кг/с

$$G = (\rho w)_n F, \quad (4.221)$$

где  $(\rho w)_n$  — среднее значение проекции массовой скорости газа на нормаль к поверхности  $F$ .

Для каждой поверхностной зоны будем считать заданным среднее значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , найденное на основании эмпирических зависимостей или рассчитанное по методике, изложенной в п. 5.

### *Зональные выражения для конвективного теплового потока*

Пусть в рассматриваемой системе выделено  $m$  поверхностных и  $n$  объемных зон при общем числе зон  $l = m + n$ . В отличие от задачи чисто радиационного теплообмена результирующий тепловой поток для каждой ( $i$ -той) зоны складывается теперь из двух составляющих: потока результирующего излучения  $Q_F$  и конвективного теплового потока  $Q_K$ . Для поверхностных зон под конвективным тепловым потоком будем понимать поток конвективной теплоотдачи, а для объемных зон — сумму теплового потока, переносимого движущейся средой, и потока конвективной теплоотдачи к смежным поверхностным зонам.

Обозначим суммарный (результирующий) тепловой поток через  $\dot{Q}_i$



$$\tilde{Q}_i = Q_i^p + Q_i^k. \quad (4.222)$$

В отличие от задачи чисто радиационного теплообмена в рассматриваемом случае именно эта величина подлежит определению для зон I рода и должна быть задана по условию для зон II рода. Например, при отсутствии тепловыделения в некоторой объемной зоне следует положить  $\tilde{Q}_i = 0$  или  $Q_i^p + Q_i^k = 0$  в соответствии с тем, что тепловой поток, излучаемый данной зоной, при стационарном режиме должен компенсироваться конвективным подводом тепла из соседних зон. Для зон на поверхности кладки величина  $\tilde{Q}_i$  имеет смысл потока тепловых потерь  $Q_i^{\text{пот}}$ . При идеальной теплоизоляции  $Q_i^{\text{пот}} = 0$  и  $Q_i^p + Q_i^k = 0$ , т.е. тепловой поток, подводимый к кладке конвекцией, должен быть возвращен в систему в результате теплообмена излучением<sup>1</sup>.

Таким образом, состояние системы в случае сложного теплообмена характеризуется зональными значениями температур  $T_i$  и результирующих тепловых потоков  $\tilde{Q}_i$ . Поэтому для построения замкнутой системы зональных уравнений необходимо наряду с соотношениями, которые были использованы при расчете радиационного теплообмена, учесть дополнительные связи, выражающие зависимость конвективного теплового потока для каждой зоны от ее температуры и от температур смежных с ней зон.

Для поверхностных зон, используя заданные по условию значения коэффициентов теплоотдачи, получим простое выражение

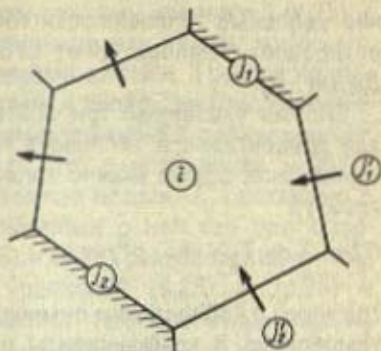
$$Q_i^k = \alpha_i(T_j - T_i)F_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.223)$$

где  $j$  — номер объемной зоны, граничащей с  $i$ -той поверхностной зоной.

Для объемных зон искомое соотношение будет иметь более сложный вид, так как оно должно учитывать как теплоотдачу от газа к поверхностным зонам, так и конвективный перенос тепла между смежными объемными зонами. Рассмотрим некоторую  $i$ -тую объемную зону ( $i = m + 1, \dots, l$ ). Номера смежных с ней поверхностных и объемных зон обозначим следующим образом (рис. 46):  $j_1, j_2, \dots$  — поверхностные зоны;  $j'_1, j'_2, \dots$  — объемные зоны, из которых газ входит в рассматриваемую зону. Кроме этого, обозначим через  $G_{j_1 i}$  поток массы, передаваемой  $i$ -той зоне со стороны зоны  $j_1$ , и учтем, что некоторый дополнительный поток массы может поступать в  $i$ -тую объемную зону через

<sup>1</sup> В некоторых случаях и при сложном теплообмене для зон II рода может быть по-прежнему задан поток результирующего излучения. Например, если положить  $Q_i^{\text{пот}} = Q_i^k$ , как это часто делается при приближенных расчетах, получим равенство нулю лучистой составляющей результирующего теплового потока  $Q_i^p$  на поверхности кладки.

Рис. 46. Нумерация зон, смежных с  $i$ -той объемной зоной



смежные с ней поверхностные зоны. Например, при описании теплообмена в сварочной зоне нагревательной печи такой дополнительный поток массы для первой по ходу газов объемной зоны включает в себя поток массы топлива  $G_i^T$ , поток массы воздуха  $G_i^B$  и поток массы продуктов сгорания, поступающих из томильной зоны  $G_i^{n.cr}$ . Тогда полный поток массы, входящий в  $i$ -тую объемную зону (и выходящий из нее), будет равен

$$\sum_j G_{ji} + G_i^T + G_i^B + G_i^{n.cr}.$$

Используя введенные обозначения, выразим отдельные составляющие конвективного теплового потока для  $i$ -той объемной зоны:  
тепловой поток, отдаваемый газом поверхностным зонам

$$\sum_j \alpha_j (T_j - T_i) F_j;$$

тепловой поток, получаемый рассматриваемой зоной за счет движения газа

$$\sum_j c_{p,j} (T_j - 273) G_{ji} + c_{p,T} (T_T - 273) G_i^T + c_{p,B} (T_B - 273) G_i^B + c_{p,n.cr} (T_{n.cr} - 273) G_i^{n.cr};$$

тепловой поток, теряемый рассматриваемой зоной за счет движения газа

$$-c_{p,i} (T_i - 273) (\sum_j G_{ji} + G_i^T + G_i^B + G_i^{n.cr});$$

где  $T_B$ ,  $T_T$  — соответственно температура топлива и воздуха,  $K$ ;  $T_{n.cr}$  — температура продуктов сгорания, поступающих из-за пределов рассматриваемой системы,  $K$ ;  $c_{p,j}$  и  $c_{p,i}$  — средние удельные теплоемкости газа при постоянном давлении в интервалах температур от  $273 K$  до  $T_j$  и  $T_i$  соответственно,  $Дж/(кг \cdot K)$ ;  $c_{p,T}$ ,  $c_{p,B}$  и  $c_{p,n.cr}$  — сред-



ние удельные теплоемкости топлива, воздуха и продуктов сгорания в интервалах температур от 273 К до  $T_T$ ,  $T_B$  и  $T_{п.сг}$  соответственно, Дж/(кг · К).

Сложив указанные три составляющие, получим полное выражение для конвективного теплового потока  $i$ -той объемной зоны, которое в компактной форме можно записать в виде линейной комбинации температур

$$Q_i^K = \sum_k g_{ki} T_k + g_i^0, \quad (4.224)$$

где через  $g_i^0$  обозначены суммы слагаемых, не зависящих от зональных температур, а коэффициенты  $g_{ki}$  определяют вклад  $k$ -той зоны в конвективный поток  $i$ -той зоны и называются коэффициентами конвективного обмена. Для объемных зон ( $i = m + 1, \dots, l$ ) эти коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$g_i^0 = c_{p,T} T_T G_i^T + c_{p,B} T_B G_i^B + c_{p,п.сг} T_{п.сг} G_i^{п.сг} + 273 \left[ \sum_{j'} (c_{p,i} - c_{p,j'}) G_{j'i} + (c_{p,i} - c_{p,T}) G_i^T + (c_{p,i} - c_{p,B}) G_i^B + (c_{p,i} - c_{p,п.сг}) G_i^{п.сг} \right]; \quad (4.225)$$

$$g_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, k \neq j', k \neq i \\ \alpha_j F_j & \text{при } k = j \\ c_{p,j'} G_{j'i} & \text{при } k = j' \\ - \left[ \sum_j \alpha_j F_j + c_{p,i} (\sum_{j'} G_{j'i} + G_i^T + G_i^B + G_i^{п.сг}) \right], & \text{при } k = i, \end{cases} \quad (4.226)$$

где  $j$  — номер смежных поверхностных зон;  $j'$  — номера смежных объемных зон, из которых газ входит в  $i$ -тую зону.

В форме (4.224) можно представить также выражение (4.223) потока конвективной теплоотдачи  $Q_i^K$  для поверхностных зон ( $i = 1, \dots, m$ ). При этом

$$g_i^0 = 0; \quad g_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, k \neq i \\ \alpha_j F_j & \text{при } k = j \\ - \alpha_j F_j & \text{при } k = i, \end{cases} \quad (4.227)$$

где  $j$  — номер смежной объемной зоны.

#### Система зональных уравнений

При решении задачи сложного теплообмена за основу может быть взят как классический, так и резольвентный зональный метод.

Рассмотрим сначала возможности применения классического

зонального метода. Для этого преобразуем систему уравнений (4.25) – (4.33) с учетом соотношения (4.222), заменив потоки результирующего излучения  $Q_i^p$  на разности  $\tilde{Q}_i - Q_i^k$ . Заданными для зон II рода и подлежащими определению для зон I рода являются теперь результирующие потоки  $\tilde{Q}_i$ . Особенностью системы зональных уравнений, получающейся после этого преобразования, является то, что в уравнениях (4.26) и (4.28) для зон II рода появляются конвективные потоки  $Q_i^k$  связанные с неизвестными температурами  $i$ -той и смежных с ней зон соотношениями (4.224). Поскольку уравнения (4.26) и (4.28) становятся при этом существенно нелинейными, системы уравнений (4.25) – (4.28) и (4.29) – (4.33) приходится решать совместно<sup>1</sup>. Простые итерационные методы, которые могут быть при этом использованы, приводят к построению громоздкого и плохо сходящегося алгоритма.

Построение более эффективного алгоритма численного решения задачи сложного теплообмена возможно при условии применения резольвентного зонального метода. Заменяя в системе уравнений (4.77), (4.76) потоки результирующего излучения  $Q_i^p$  на разности  $Q_i - Q_i^k$  и выразив конвективные потоки  $Q_i^k$  в форме (4.224), получим:

для зон I рода

$$\tilde{Q}_i = \sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) + g_i^0, \quad i = 1, \dots, l_1; \quad (4.228)$$

для зон II рода

$$\sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) + g_i^0 - \tilde{Q}_i = 0, \quad i = l_1 + 1, \dots, l. \quad (4.229)$$

Здесь, как и ранее,  $l = l_1 + l_2$  – общее число зон;  $l_1$  – число зон I рода;  $l_2$  – число зон II рода. Для решения задачи необходимо из системы уравнений (4.229) определить температуры зон II рода и найденные значения подставить в формулы (4.228).

Прежде чем переходить к обсуждению способа решения системы уравнений (4.229), перепишем ее, выделив в левых частях уравнений те члены, в которые входят неизвестные температуры зон II рода. Для этого обозначим сумму первых  $l_1$  слагаемых в выражениях  $\sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k)$  через  $z_i$

$$z_i = \sum_{k=1}^{l_1} (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k). \quad (4.230)$$

Величины  $z_i$ , характеризующие для каждой ( $i$ -той) зоны часть результирующего теплового потока, обусловленную тепловым взаимодействием

<sup>1</sup> Аналогичная ситуация уже возникала в п. 1 при учете зависимости радиационных характеристик объемных зон II рода от температуры.



вием этой зоны с зонами I рода, определяются заданными по условию температурами зон I рода и могут быть вычислены заранее. Подставив эти величины в уравнения (4.229), получим систему уравнений

$$\sum_{k=i_1+1}^I (a_{ki}T_k^4 + g_{ki}T_k) + z_i + g_i^0 - \tilde{Q}_i = 0, \quad i = i_1 + 1, \dots, I, \quad (4.231)$$

в которой явно выделены слагаемые, содержащие искомые температуры зон II рода.

Таким образом, особенностью математического описания сложного теплообмена является существенно нелинейный характер системы зональных уравнений (4.231) относительно температур зон II рода. По сравнению с классическим зональным методом, однако, полученная система нелинейных уравнений является гораздо более простой и удобной для численного решения: во-первых, число уравнений в этой системе сокращается до  $I_2$  (числа зон II рода), и, во-вторых, искомые температуры  $T_i, i = i_1 + 1, \dots, I$ , входят теперь в зональные уравнения в явном виде. Последнее обстоятельство позволяет использовать для решения системы уравнений (4.231) итерационный метод Ньютона, обладающий по сравнению с простыми итерационными методами более широкой областью сходимости и обеспечивающий высокую скорость сходимости итераций.

Рассмотрим кратко применение метода Ньютона для решения системы  $n$  нелинейных уравнений

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

относительно неизвестных  $x_k, k = 1, \dots, n$ . Построение итерационной последовательности в рамках этого метода производится по формуле

$$x_k^* = x_k - \Delta x_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.232)$$

показывающей, что последующее приближение искомых переменных  $x_k^*$  получается путем смещения предыдущего приближения  $x_k$  на определенную величину  $\Delta x_k$ . Для нахождения совокупности смещений  $\Delta x_k, k = 1, \dots, n$  на каждом шаге итераций выполняют следующие действия:

вычисляют значения функций  $\Phi_i$  при значениях аргументов  $x_1, \dots, x_n$ , соответствующих предыдущему приближению;

при тех же значениях аргументов вычисляют частные производные  $\partial \Phi_i / \partial x_k$ ;

составляют систему линейных уравнений

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n} \Delta x_n = -\Phi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.233)$$

решение которой определяет значения смещений  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ .

Структурная схема алгоритма, реализующего метод Ньютона, приведена на рис. 47.

Описанный метод является обобщением метода Ньютона решения одного нелинейного уравнения (см. пример 4.2) на многомерный случай. Для того чтобы это показать, представим соотношения (4.232) и систему уравнений (4.233) в матричной форме:

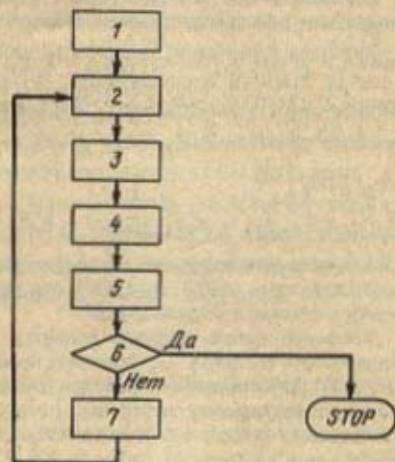
$$x^* = x - \Delta x; \quad (4.234)$$

$$\Phi' \Delta x = \Phi, \quad (4.235)$$

где  $x = \{x_k\}$  и  $x^* = \{x_k^*\}$  — столбцы предыдущего и последующего приближений;  $\Delta x = \{\Delta x_k\}$  — столбец смещений;  $\Phi = \{\Phi_i\}$  — столбец "невязок";  $\Phi' = \{\partial \Phi_i / \partial x_k\}$  — матрица частных производных. Выразив решение матричного уравнения (4.235) в

Рис. 47. Структурная схема решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона:

1 — задание начального приближения  $x_k = x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ; 2 — вычисление "невязок"  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; 3 — вычисление частных производных  $\partial \Phi_i / \partial x_k$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, n$ ; 4 — решение системы линейных уравнений (4.233); 5 — нахождение нового приближения  $x_k^*$  по формуле (4.232); 6 — проверка условия окончания итераций  $\max_k |\Delta x_k / x_k| < \Delta$ , где  $\Delta$  — некоторая заданная величина, определяющая требуемую относительную погрешность решения; 7 — присваивание новых значений переменным  $x_k$ :  $x_k = x_k^*$



явном виде:  $\Delta x = (\Phi')^{-1} \Phi$  и подставив его в формулу (4.234), получим соотношение

$$x^* = x - (\Phi')^{-1} \Phi, \quad (4.236)$$

совпадающее по форме с (4.52), если рассматривать матрицу  $\Phi'$  в качестве некоторого многомерного аналога обычной производной.

Пример 4.11. Рассмотрим схему расчета сложного теплообмена в системе газ — кладка — металл. Обозначим поверхность металла индексом 1, поверхность кладки — индексом 2, объемную газовую зону — индексом 3 (см. рис. 28). Таким образом, общее число зон в системе  $l = 3$ , число поверхностных зон  $m = 2$ , число объемных зон  $n = 1$ .

В отличие от постановки задачи, рассмотренной в примере 4.5, в данном случае нужно учесть конвективный теплоперенос, обусловленный движением продуктов сгорания, заполняющих объемную зону. Для этого необходимо, во-первых, задать коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , позволяющие определить потоки конвективной теплоотдачи от газа к поверхностям металла и кладки:

$$Q_1^k = \alpha_1 (T_3 - T_1) F_1; \quad Q_2^k = \alpha_2 (T_3 - T_2) F_2. \quad (4.237)$$

Во-вторых, следует учесть тепловой поток, вносимый в объемную зону топливом (температура топлива  $T_T$ , К) и воздухом (температура воздуха  $T_B$ , К), а также тепловой поток, теряемый объемной зоной вместе с уходящими из нее продуктами сгорания.

Полная величина конвективного теплового потока объемной зоны в рассматриваемом случае будет равна



$$Q_3^k = \alpha_1(T_1 - T_3)F_1 + \alpha_2(T_2 - T_3)F_2 + c_{p,T}(T_T - 273)G_T + c_{p,B}(T_B - 273)G_B - c_{p,p.ог}(T_3 - 273)(G_T + G_B), \quad (4.238)$$

где  $G_T$  - массовый расход топлива, кг/с;  $G_B$  - массовый расход воздуха, кг/с;  $c_{p,T}$ ,  $c_{p,B}$ ,  $c_{p,p.ог}$  - средние удельные теплоемкости (при постоянном давлении) топлива, воздуха и продуктов сгорания в интервалах температур от 273 К до  $T_T$ ,  $T_B$  и  $T_3$  соответственно.

Записывая соотношения (4.237) и (4.238) в форме (4.224), получим следующие выражения для коэффициентов конвективного обмена:

$$\text{при } i = 1 \quad g_1^0 = 0, \quad g_{11} = -\alpha_1 F_1, \quad g_{21} = 0, \quad g_{31} = \alpha_1 F_1;$$

$$\text{при } i = 2 \quad g_2^0 = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = -\alpha_2 F_2, \quad g_{32} = \alpha_2 F_2;$$

$$\text{при } i = 3 \quad g_3^0 = c_{p,T} T_T G_T + c_{p,B} T_B G_B + 273 [(c_{p,p.ог} - c_{p,T}) G_T + (c_{p,p.ог} - c_{p,B}) G_B];$$

$$g_{13} = \alpha_1 F_1, \quad g_{23} = \alpha_2 F_2, \quad g_{33} = -[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + c_{p,p.ог}(G_T + G_B)].$$

Как нетрудно проверить, приведенные выражения находятся в полном согласии с соотношениями (4.227) и (4.226), определяющими значения коэффициентов конвективного обмена в общем случае.

Конечной целью расчета является определение результирующего потока на поверхности металла  $\tilde{Q}_2$  соответствующего заданной температуре этой поверхности  $T_1$ . Для поверхности кладки, считая, что поток тепловых потерь приближенно равен конвективному тепловому потоку ( $\tilde{Q}_2 = Q_2^k$ ), получим:  $Q_2^0 = 0$ , поэтому для поверхности кладки искомой величиной является температура  $T_2$ . Для газового объема - в отличие от примера 4.5 - будем считать заданным результирующий тепловой поток  $\tilde{Q}_3 = -Q_3^k$ , где  $Q_3^k$  - тепловая мощность, равная произведению расхода топлива  $G_T$  на низшую рабочую теплоту сгорания топлива  $Q_H^p$  ( $Q_3^k = G_T Q_H^p$ ). Определяемой величиной для объемной зоны является ее температура  $T_3$ .

Таким образом, в данном случае число зон I рода  $l_1 = 1$  (поверхность металла), число зон II рода  $l_2 = 2$  (поверхность кладки и газовый объем).

Укажем основные этапы расчета сложного теплообмена:

1. Задание исходных значений: площадей  $F_1$  и  $F_2$  ( $F_3 = F_1 + F_2$ ) или степени развития кладки  $\omega = F_2/F_1$ ; степеней черноты  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  (для нахождения  $\epsilon_3$  необходимо задать коэффициент поглощения газа); коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; удельных теплоемкостей топлива, воздуха и продуктов сгорания  $c_{p,T}$ ,  $c_{p,B}$  и  $c_{p,p.ог}$ ; теплоты сгорания топлива  $Q_H^p$ ; расходов топлива и воздуха  $G_T$  и  $G_B$ ; температур подогрева топлива и воздуха  $T_T$  и  $T_B$ .

2. Вычисление обобщенных угловых коэффициентов по формулам (4.76).

3. Вычисление разрешающих обобщенных угловых коэффициентов с помощью явных формул (4.79) или подпрограммы RAZR (см. пример 4.4).

4. Вычисление коэффициентов радиационного и конвективного обмена по формулам (4.75) и (4.239).

5. Решение системы уравнений (4.231) для зон II рода. В данном случае эта система состоит из двух уравнений ( $l_2 = 2$ ). Для поверхности кладки ( $i = 2$ ), с учетом условия  $\tilde{Q}_2 = Q_2^k$ , уравнение (4.231) упрощается, принимая вид  $a_{22} T_2^4 + a_{32} T_3^4 + z_2 = 0$ .

Для газового объема ( $i = 3$ ), заменив  $\tilde{Q}_3$  на  $-Q_3^k$ , получим  $a_{23} T_2^4 + a_{33} T_3^4 + g_{33} T_2 + g_{33} T_3 + z_3 + g_3^0 + Q_3^k = 0$ .

Здесь, в соответствии с формулой (4.230) при  $l_1 = 1$

$$z_2 = a_{12} T_1^4; \quad z_3 = a_{13} T_1^4 + g_{13} T_1.$$

6. Вычисление результирующего теплового потока на поверхности металла  $\bar{Q}_1$  по формуле (4.228).

Математические модели, рассмотренные в настоящей главе, конечно, не могут во всех случаях обеспечить адекватное описание теплообмена в рабочем пространстве печи. Действительно, при решении внешней задачи теплообмена предполагается, что температуры зон на поверхности металла имеют известные, заданные по условию значения. На самом же деле эти температуры не являются независимыми величинами, а сами определяются интенсивностью внешнего теплообмена, причем определяющую роль в этой зависимости играют такие факторы как размер и форма нагреваемых заготовок, их начальная температура и скорость перемещения в печи, теплофизические характеристики металла. Для того чтобы учесть влияние этих факторов и таким образом в полной мере отразить взаимосвязь результирующих тепловых потоков и температур на поверхности металла, необходимо построение сопряженной математической модели, предусматривающей совместное решение внешней и внутренней задач теплообмена.

#### *Контрольные вопросы*

1. Каковы основные этапы расчета радиационного теплообмена классическим зональным методом?
2. Каковы преимущества и недостатки прямых и итерационных методов решения системы линейных зональных уравнений?
3. В чем заключаются преимущества резольвентного зонального метода по сравнению с классическим зональным методом?
4. Почему при расчете радиационного теплообмена с учетом селективности излучения наиболее целесообразно применение резольвентного зонального метода?
5. Как производится разыгрывание направления случайного луча при определении угловых коэффициентов излучения методом Монте-Карло?
6. Как в рамках метода Монте-Карло производится учет поглощения излучения средой при определении обобщенных угловых коэффициентов?
7. Из каких областей состоит турбулентный пограничный слой в соответствии с четырехслойной схемой?
8. Что такое кинетическая энергия турбулентности?
9. В чем заключается основная идея  $K - \epsilon$  модели турбулентности?
10. Чем обусловлена нелинейность системы зональных уравнений при расчете сложного теплообмена?



1. ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Постановку задачи сопряженного теплообмена рассмотрим на примере нагрева тел в проходных печах непрерывного действия. Для того чтобы установить общие принципы расчета теплообмена в печах различного типа (протяжных термических, вращающихся обжиговых, толкательных нагревательных), примем следующие упрощающие допущения:

нагреваемые тела можно рассматривать как сплошную однородную среду, перемещающуюся в печи с постоянной скоростью  $u$ ;

поверхность нагрева является плоской, причем интенсивность внешнего теплообмена на этой поверхности постоянна по ширине печи, так что изменением температуры нагреваемых тел по ширине печи можно пренебречь;

режим теплообмена является стационарным.

Для описания температурного поля нагреваемых тел введем неподвижную систему координат, в которой ось  $x$  совпадает с направлением движения, ось  $y$  перпендикулярна поверхности нагрева, а ось  $z$  направлена по ширине печи. В силу указанных допущений температурное поле не будет зависеть от координаты  $z$  и уравнение стационарной теплопроводности в среде, движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $u$ , принимает вид

$$c' u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (5.1)$$

Предположим для определенности, что тело представляет собой пластину полутолщиной  $\delta$  и нагрев является симметричным, т.е. условия теплообмена на обеих поверхностях пластины одинаковы. Выберем начало координат во входном сечении печи в плоскости симметрии температурного поля. Тогда решение уравнения теплопроводности можно искать в области  $x > 0$ ,  $0 < y < \delta$ , причем граничное условие при  $y = 0$  принимает следующий вид:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad x > 0. \quad (5.2)$$

Обозначив через  $q_w(x)$  абсолютную величину плотности теплового потока на поверхности нагрева, получим при  $y = \delta$  граничное условие Нрода

$$\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = q_w(x), \quad x > 0. \quad (5.3)$$

При записи этого соотношения учтено, что в случае нагрева тела внешний тепловой поток имеет направление противоположное оси  $y$ .

Предположим также, что при входе в печь тело является равномерно прогретым до температуры  $T_H$ ; отсюда следует граничное условие при  $x=0$

$$T(0, y) = T_H, \quad 0 \leq y \leq \delta. \quad (5.4)$$

Если тело является термически тонким, уравнение (5.1) можно значительно упростить. Для этого усредним температурное поле по толщине пластины, проинтегрировав левую и правую части уравнения (5.1) по  $y$  от 0 до  $\delta$  и введем в рассмотрение среднюю температуру

$\bar{T}(x) = 1/\delta \int_0^\delta T(x, y) dy$ , получим

$$c' u \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{d\bar{T}}{dx} \right) + \frac{1}{\delta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right),$$

или, учитывая граничные условия (5.2) и (5.3),

$$c' \delta u \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{d\bar{T}}{dx} \right) \delta + q_w$$

с граничным условием  $\bar{T}(0) = T_H$ . Для термически тонких тел температуру поверхности, от которой зависит величина  $q_w$ , можно считать равной средней температуре:  $T_w(x) = \bar{T}(x)$ . В дальнейшем при записи уравнения теплопроводности для тонких тел знак усреднения у величины  $\bar{T}(x)$  и индекс  $w$  у температуры  $T_w(x)$  будем опускать. Таким образом, получим

$$c' \delta u \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) \delta + q_w \quad \text{при } T(0) = T_H. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) использовано при решении задачи внутреннего теплообмена в п. 3 при расчете охлаждения стальной ленты в протяжной печи. Поскольку в этом случае направление внешнего теплового потока совпадает с направлением оси  $y$ , перед величиной  $q_w$  в соотношениях (5.3) – (5.5) следует поставить знак минус.

Если температура тела изменяется по длине печи достаточно медленно, так что плотностью продольного теплового потока за счет теплопроводности  $\lambda \left| \frac{dT}{dx} \right|$  можно пренебречь по сравнению с плотностью



теплового потока  $c' u T$ , переносимого движущейся средой, уравнение (5.5) еще более упрощается, принимая следующий вид:

$$c' \delta u (dT/dx) = q_w. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) использовано при решении задачи внутреннего теплообмена в п. 2 при расчете нагрева стальной ленты в протяжной печи и в п. 4 при расчете нагрева материала в обжиговой вращающейся печи.

При решении задачи внутреннего теплообмена для термически массивных тел, нагреваемых, например в методической толкательной печи (см. п. 5), также может быть использовано допущение о том, что продольный перенос тепла обусловлен, главным образом, движением среды. При этом в исходном уравнении (5.1) можно опустить первое слагаемое в правой части. В результате уравнение теплопроводности существенно упрощается и может быть записано следующим образом:

$$c' u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad 0 < y < \delta. \quad (5.7)$$

Характерной особенностью теплообмена в рассматриваемых системах является то, что выражение для плотности теплового потока на поверхности тела  $q_w$ , определяемое решением задачи внешнего теплообмена, не может быть задано заранее, т.е. найдено независимо от решения задачи внутреннего теплообмена. Действительно, протекание процесса радиационного теплообмена в рабочем пространстве печи зависит не только от распределения температуры на поверхностях нагревателей и кладки и температурного поля в газовом объеме, но также от распределения температуры  $T_w(x)$  на самой поверхности тела. Плотность потока конвективной теплоотдачи в заданной точке поверхности тела также зависит от распределения температуры  $T_w(x)$ , так как видом этой функции в значительной степени определяется формирование теплового пограничного слоя.

Таким образом, для решения задачи внешнего теплообмена нужно задать распределение температуры на поверхности тела, а для этого необходимо осуществить решение задачи внутреннего теплообмена, которое в свою очередь определяется интенсивностью внешнего теплообмена. Другими словами, необходимо обеспечить совместное, сопряженное решение задач внешнего и внутреннего теплообмена. С этой целью может быть использована итерационная схема, включающая в себя следующие этапы:

1. Задание начального приближения для распределения температуры на поверхности тела  $T_w(x)$ .
2. Решение задачи внешнего теплообмена, устанавливающее рас-

пределение плотности теплового потока на поверхности  $q_w(x)$ , соответствующее заданному распределению температуры  $T_w(x)$ .

3. Решение задачи внутреннего теплообмена, устанавливающее новое распределение температуры  $T_w^*(x)$ , соответствующее распределению плотности теплового потока, найденному в п. 2.

4. Сравнение найденной функции  $T_w^*(x)$  с первоначально заданной и определение максимальной погрешности расчета  $\max |T_w^*(x) - T_w(x)|$ .

5. Возврат к п. 2 в том случае, если максимальная погрешность расчета превышает заданный по условию уровень.

Приведенный алгоритм обеспечивает сопряжение решений задач внешнего и внутреннего теплообмена по температуре поверхности тела.

Для решения сопряженной задачи можно использовать также другую итерационную схему, в рамках которой при расчете внешнего теплообмена задается распределение плотности теплового потока  $q_w(x)$  на поверхности тела, а искомым является распределение температуры  $T_w(x)$ ; целью решения задачи внутреннего теплообмена является при этом уточнение распределения плотности теплового потока  $q_w(x)$  с учетом найденного распределения температуры  $T_w(x)$ . В этом случае сопряжение решений задач внешнего и внутреннего теплообмена производится по плотности теплового потока на поверхности тела. Сходимость того или иного алгоритма при решении конкретных задач проще всего установить путем пробных расчетов.

Отметим, что расчет сопряженного теплообмена значительно упрощается, если решение задачи внутреннего теплообмена устанавливает связь распределения плотности теплового потока  $q_w(x)$  с распределением температуры  $T_w(x)$  на поверхности тела в явном виде. В этом случае сопряжение решений задач внешнего и внутреннего теплообмена осуществляется путем подстановки найденного явного выражения для  $q_w(x)$  в уравнения, описывающие внешний теплообмен (см. пп. 2 и 4).

## 2. РАСЧЕТ НАГРЕВА СТАЛЬНОЙ ЛЕНТЫ В ПРОТЯЖНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЕЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим решение задачи сопряженного теплообмена в камере нагрева горизонтальной протяжной электрической печи сопротивления, имеющей 8 зон регулирования температуры нагревателей. Длина камеры нагрева  $L = 24$  м, высота рабочего пространства над поверхностью ленты  $H = 0,8$  м.

При решении задачи будем считать заданными следующие величины: полутолщину ленты  $\delta$ ; скорость движения ленты  $u$ ; теплофизические характеристики тел, участвующих в теплообмене (удельную объемную



теплоемкость металла  $c'$ , степени черноты металла  $\epsilon_M$ , нагревателя  $\epsilon_H$  и кладки  $\epsilon_{кл}$ ); температуры нагревателей в пределах каждой зоны регулирования, определяемые материалом нагревателей. Требуется определить изменение температуры ленты по длине камеры нагрева и электрические мощности зон регулирования.

Для упрощения расчета будем предполагать справедливость следующих допущений:

температура металла, нагревателей и торцевых участков кладки постоянна по ширине печи;

кладка является адиабатной;

нагрев ленты является симметричным, так что расчет теплообмена можно проводить только для одной (верхней) половины камеры нагрева, принимая в качестве расчетного размера ленты ее полутолщину;

лента является термически тонкой;

естественной конвекцией, а также конвективным теплообменом, обусловленным движением ленты в защитном газе, можно пренебречь;

все поверхности, принимающие участие в теплообмене, являются серыми, а газ — диатермичным.

Введем систему координат, в которой ось  $x$  совпадает с направлением движения ленты, ось  $y$  перпендикулярна ее поверхности, а ось  $z$  направлена по ширине печи. В силу первых двух допущений можно считать, что рабочее пространство печи имеет бесконечную протяженность по направлению оси  $z$ , и проводить расчет теплообмена на единицу ширины печи.

### Задача внешнего теплообмена

Применяя зональный метод расчета внешнего теплообмена, разобьем рабочее пространство камеры нагрева на восемь одинаковых участков — по числу зон регулирования температуры нагревателей — и выделим соответствующие этим участкам расчетные зоны на поверхности ленты ( $i = 1, \dots, 8$ ), кладки ( $i = 9, 10$ ) и нагревателей ( $i = 11, \dots, 18$ ). Расположение зон показано на рис. 48. Обозначим длину зон на поверхностях металла и нагревателей через  $L_1$  ( $L_1 = 3$  м), а высоту зон на поверхностях кладки через  $H$  ( $H = 0,8$  м).

Зональный метод расчета радиационного теплообмена применим в резольвентной постановке, непосредственно устанавливающей связь потоков результирующего излучения с температурами.

*Определение коэффициентов радиационного обмена.* Для нахождения коэффициентов радиационного обмена предварительно рассчитаем значения геометрических угловых коэффициентов излучения  $\Phi_{kl}$ . Поскольку, в силу указанных выше допущений, каждую зону можно

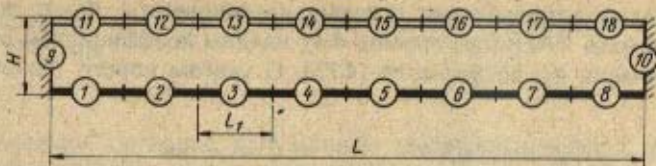


Рис. 48. Расположение зон при расчете внешнего теплообмена в камере нагрева протяжной электрической печи сопротивления

рассматривать как бесконечную полосу шириной  $L_1$  — для зон на поверхностях металла и нагревателей, и шириной  $H$  — для зон на поверхностях кладки, значения  $\varphi_{ki}$  могут быть найдены по формулам (4.54) и (4.55). Эти формулы в рассматриваемом случае принимают следующий вид:

для угловых коэффициентов излучения между зонами на поверхностях металла и нагревателей

$$\varphi_{ki} = \frac{1}{2L_1} (\sqrt{(x + L_1)^2 + H^2} + \sqrt{(x - L_1)^2 + H^2} - 2\sqrt{x^2 + H^2}), \quad (5.8)$$

где  $x$  — величина горизонтального смещения  $i$ -той зоны относительно  $k$ -той зоны (рис. 49, а);

для угловых коэффициентов излучения с зон на поверхности металла (или нагревателей) на кладку

$$\varphi_{ki} = \frac{1}{2L_1} (L_1 + \sqrt{x^2 + H^2} - \sqrt{(x + L_1)^2 + H^2}), \quad (5.9)$$

где  $x$  — расстояние от зоны  $k$  к соответствующей поверхности кладки (рис. 49, б);

для угловых коэффициентов излучения между поверхностями кладки

$$\varphi_{9,10} = \frac{1}{H} (\sqrt{L^2 + H^2} - L). \quad (5.10)$$

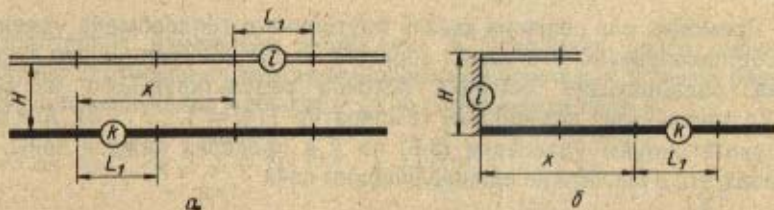


Рис. 49. К расчету угловых коэффициентов излучения между зонами на поверхностях металла и нагревателей (а) и металла (нагревателей) и кладки (б)



Определив разрешающие угловые коэффициенты  $\Phi_{ki}$  с помощью подпрограммы RAZR (см. пример 4.4), найдем коэффициенты радиационного обмена  $a_{ki}$  по формуле (4.75). С учетом серого приближения получим

$$a_{ki} = \epsilon_k \sigma_0 F_k (\Phi_{ki} \epsilon_i - \delta_{ki}), \quad (5.11)$$

где  $\epsilon_i = \epsilon_M$  при  $i = 1, \dots, 8$ ;  $\epsilon_i = \epsilon_{кл}$  при  $i = 9, 10$ ;  $\epsilon_i = \epsilon_N$  при  $i = 11, \dots, 18$ .

*Запись системы зональных уравнений.* При рассматриваемой постановке задачи зоны на поверхности нагревателей ( $i = 11, \dots, 18$ ) являются зонами I рода: для них заданы температуры  $T_i$ , а требуется определить мощности  $Q_i^p = -Q_i^p$ .

Зональные уравнения (4.77), имеющие в этом случае вид

$$Q_i^p = \sum_k a_{ki} T_k^4, \quad i = 11, \dots, 18, \quad (5.12)$$

представляют собой явные формулы, по которым после нахождения всех неизвестных значений температур могут быть вычислены искомые потоки результирующего излучения  $Q_i^p$ .

Зоны на поверхностях адиабатной кладки ( $i = 9, 10$ ) являются зонами II рода: для них известны значения  $Q_i^p = 0$ , а требуется определить температуры  $T_i$ . Соответствующие зональные уравнения (4.76) принимают вид

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 = 0, \quad i = 9, 10. \quad (5.13)$$

Для зон на поверхности ленты (поверхности сопряжения решения внешней и внутренней задач) запишем зональные уравнения (4.76) в виде

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 - Q_i^p = 0, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5.14)$$

Взаимосвязь потоков результирующего излучения и температур для этих зон устанавливается решением задачи внутреннего теплообмена.

#### Задача внутреннего теплообмена

Применив для решения задачи внутреннего теплообмена уравнение (5.6), преобразуем его таким образом, чтобы получить явные выражения, связывающие значения потоков результирующего излучения  $Q_i^p$  с зональными значениями температур  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ). Для этого проинтегрируем уравнение (5.6) по  $x$  в пределах каждой зоны, учитывая, что в расчете на единицу ширины печи

$$Q_i^p = \int_{(i-1)L_1}^{iL_1} q_w(x) dx.$$

Обозначив через  $T_i'$  и  $T_i''$  температуры ленты в начале и в конце  $i$ -той зоны, получим

$$c' \delta u (T_i'' - T_i') = Q_i^p, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5.15)$$

Поскольку, согласно допущениям зонального метода, в пределах каждой зоны плотность внешнего теплового потока считается постоянной, температура ленты в интервале от  $T_i'$  до  $T_i''$  линейно зависит от координаты  $x$ , таким образом средnezональное значение температуры ленты равно (рис. 50)

$$T_i = 1/2 (T_i' + T_i''), \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5.16)$$

$$\text{При этом } T_1' = T_H; \quad T_i' = T_{i-1}'', \quad i = 2, \dots, 8, \quad (5.17)$$

где  $T_H$  — температура ленты на входе в камеру нагрева. Отметим, что изменение температуры  $T_i'' - T_i'$  должно быть достаточно малым для

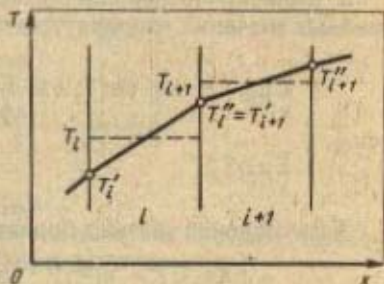


Рис. 50. Изменение температуры ленты по длине печи в пределах двух зон ( $T_i$  и  $T_{i+1}$  — зональные значения температур)

того, чтобы при решении задачи внешнего теплообмена можно было считать температуру ленты в пределах  $i$ -той зоны постоянной и равной  $T_i$ .

Из соотношений (5.16) и (5.17) нетрудно определить, что

$$T_i'' - T_i' = 2 \left[ T_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} T_k + (-1)^i T_H \right], \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5.18)$$

Подставляя найденные выражения в уравнения (5.15), получим искомые соотношения между зональными значениями потоков результирующего излучения и температур на поверхности ленты

$$Q_i^p = 2c' \delta u \left[ T_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} T_k + (-1)^i T_H \right], \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5.19)$$



После подстановки выражений (5.19) в уравнения (5.14) решение задачи сводится к решению следующей системы зональных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_k a_{ki} T_k^4 - 2c' \delta u [T_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} T_k + (-1)^i T_H] &= 0, \quad i=1, \dots, 8; \\ \sum_k a_{ki} T_k^4 &= 0, \quad i=9, 10. \end{aligned} \quad (5.20)$$

В силу нелинейности этой системы относительно температур зон на поверхности ленты для ее решения целесообразно использовать итерационный метод Ньютона.

В соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 47, отметим основные этапы расчета:

1. Задание начального приближения искомых температур  $T_k$ ,  $k = 1, \dots, 10$ .
2. Вычисление невязок  $\Phi_i$ , получающихся при подстановке приближенных значений температур в левые части уравнений (5.20)

$$\Phi_i = \begin{cases} \sum_k a_{ki} T_k^4 - 2c' \delta u [T_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} T_k + (-1)^i T_H] & \text{при } i=1, \dots, 8 \\ \sum_k a_{ki} T_k^4 & \text{при } i=9, 10. \end{cases}$$

3. Вычисление частных производных  $\partial \Phi_i / \partial T_k$  по формулам:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial T_k} = \begin{cases} 4a_{ki} T_k^3 - 4(-1)^{i+k} c' \delta u & \text{при } i=1, \dots, 8, k < i; \\ 4a_{ki} T_k^3 - 2c' \delta u & \text{при } i=1, \dots, 8, k = i; \\ 4a_{ki} T_k^3 & \text{при } i=1, \dots, 8, k > i \text{ или } i=9, 10. \end{cases}$$

4. Нахождение смещений  $\Delta T_k$  путем решения системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial T_1} \Delta T_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial T_{10}} \Delta T_{10} = \Phi_i, \quad i=1, \dots, 10.$$

5. Нахождение нового приближения  $T_k^*$  по формулам

$$T_k^* = T_k - \Delta T_k, \quad k=1, \dots, 10.$$

6. Проверка условия окончания итераций  $\max_k |\Delta T_k / T_k| < \Delta$ , где  $\Delta$  — заданная величина, определяющая относительную погрешность расчета.

7. Присваивание новых значений температур  $T_k$ :  $T_k = T_k^*$ ,  $k = 1, \dots, 10$ .

После нахождения температур зон на поверхностях металла и кладки определяем результирующие потоки для зон на поверхности нагревателей (мощности зон регулирования) по формулам (5.12).

На рис. 51 показаны результаты расчета нагрева стальной ленты, половина

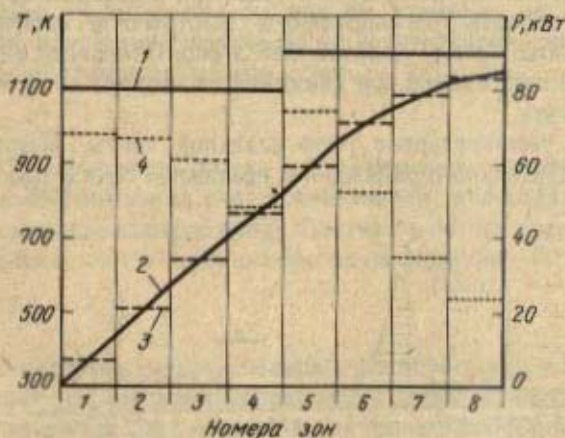


Рис. 51. Результаты расчета нагрева стальной ленты:

1 — температура нагревателей; 2 — температура ленты; 3 — зональные значения температуры ленты; 4 — мощности нагревателей (зон регулирования)

толщины которой  $\delta = 0,3$  мм, при скорости движения  $u = 0,67$  м/с (40 м/мин). Удельная объемная теплоемкость стали  $c' = 5 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К). Степени черноты металла, нагревателя и кладки равны соответственно:  $\epsilon_M = 0,4$ ;  $\epsilon_H = 0,5$ ;  $\epsilon_{кл} = 0,6$ . Температура нагревателей в первой по ходу ленты половине камеры нагрева постоянна и равна 1100 К, во второй половине — 1200 К ( $T_i = 1100$  К при  $i = 11, \dots, 14$ ;  $T_i = 1200$  К при  $i = 15, \dots, 18$ ).

Рассмотренная математическая модель теплообмена в камере нагрева протяжной электрической печи сопротивления может быть использована для прогнозирования графика изменения температуры ленты, определения мощностей зон регулирования, обеспечивающих заданный температурный режим печи (заданные значения температур нагревателей), а также для анализа влияния степени черноты, толщины и скорости движения ленты на характер ее нагрева.



### 3. ОХЛАЖДЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ СТАЛЬНОЙ ЛЕНТЫ

Термическая обработка стальной ленты в протяжной печи включает в себя несколько стадий (нагрев, выдержка и охлаждение металла). Способы охлаждения ленты выбирают, исходя из требований, предъявляемых к качеству термообрабатываемого металла. Как правило, охлаждение ленты в протяжной печи происходит в нескольких, установленных по ходу ленты, камерах или участках, в которых осуществляются разные способы регулируемого, быстрого и окончательного охлаждения ленты. Самый простой метод окончательного охлаждения ленты — это ее охлаждение при движении на воздухе от печи к последующему агрегату.

Рассчитаем температурное поле стальной ленты, выходящей из камеры предварительного охлаждения протяжной печи с температурой

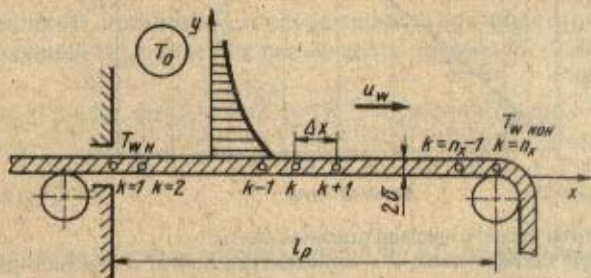


Рис. 52. К расчету охлаждения стальной ленты

$T_{w, n}$  при ее окончательном охлаждении на воздухе, имеющем температуру  $T_0$ , на горизонтальном участке длиной  $l_p$ . При этом будем считать заданными половину толщины ленты  $\delta$  и скорость ее движения  $u_w$  (рис. 52).

*Математическая формулировка задачи охлаждения ленты*

В условиях работы протяжных печей стальную ленту можно рассматривать как термически тонкое тело. Дифференциальное уравнение теплопроводности для движущейся тонкой полосы в неподвижной декартовой системе координат имеет вид (см. п. 1)

$$c'u_w \delta \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) \delta - q_w, \quad (5.21)$$

где  $q_w$  — плотность теплового потока, уходящего с поверхности полосы в окружающую среду за счет излучения и конвективной теплоотдачи.

Если теплофизические свойства стали не зависят от температуры, уравнение (5.21) существенно упрощается

$$u_w \frac{dT}{dx} = a \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{q_w}{c\delta} \quad (5.22)$$

Охлаждение стальной полосы при ее движении на воздухе осуществляется вследствие излучения и конвективной теплоотдачи от поверхности в окружающую среду, поэтому

$$q_w = q_w^p + q_w^k, \quad (5.23)$$

где  $q_w^p$  и  $q_w^k$  — плотность потока результирующего излучения и плотность теплового потока за счет конвективной теплоотдачи от поверхности полосы в окружающую среду. Плотность потока результирующего излучения определится в данном случае по формуле

$$q_w^p = \varepsilon \sigma_0 [T_w^4 - T_0^4], \quad (5.24)$$

в которой  $\varepsilon$  — степень черноты поверхности полосы;  $T_w$  и  $T_0$  — температуры поверхности полосы и окружающей среды, К. Расчет плотности теплового потока за счет конвективной теплоотдачи основан на определении характеристик турбулентного пограничного слоя и подробно изложен в п. 5 гл. IV.

Распределение плотности теплового потока на поверхности полосы  $q_w(x)$  зависит от распределения температуры  $T_w(x)$ , которое заранее неизвестно, и, в свою очередь, определяется распределением  $q_w(x)$  [см. уравнение (5.22)]. Таким образом, рассматриваемая задача относится к классу задач сопряженного теплообмена и решается методом итераций с расчетом на каждой итерации температурного поля воздушного потока и распределения плотности теплового потока на поверхности ленты (внешний теплообмен) и температуры ленты (внутренний теплообмен).

#### *Метод решения и алгоритм расчета охлаждения движущейся ленты*

Основываясь на единстве методики решения задач внешнего и внутреннего теплообмена, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (5.22) будем решать тем же методом конечных разностей, как и дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя.

Нанесем одномерную разностную сетку на расчетную область ленты





ниже алгоритм решения данной задачи должен включать итерационную процедуру:

1. Выбираем шаг  $\Delta x$  по длине ленты, руководствуясь соображениями, изложенными в п. 5 гл. IV.

2. Смещаемся вдоль ленты на шаг  $\Delta x$  и рассчитываем температуру  $T_{w2}$  в узле  $k = 2$  методом итераций. Для этого:

а) задаем нулевое приближение для температуры ленты во втором узле. Целесообразно принять  $T_{w2}^{m=0} = T_{w1}$ , где  $m$  – номер итерации при расчете температуры ленты. Заметим, что температура в узле  $k = 1$  равна начальному значению температуры ленты:  $T_{w1} = T_{w,n}$ ;

б) зная температуру ленты  $T_{w2}^{m=0}$ , рассчитываем плотность теплового потока за счет конвективной теплоотдачи от поверхности ленты в окружающую среду с помощью алгоритма, изложенного в п. 5 гл. IV. При этом следует принять скорость невозмущенного воздушного потока  $u = 0$  и считать, что скорость на стенке по условию прилипания равна скорости движения ленты  $u_w$  (см. рис. 53). Теплоотдачей за счет свободной конвекции будем пренебрегать. Учтем лишь вынужденную конвекцию, обусловленную движением ленты;

в) рассчитываем плотность потока результирующего излучения  $q_{w2}^p$  по формуле (5.24) и суммарную плотность теплового потока по (5.23);

г) определяем температуру ленты в первом приближении  $T_{w2}^{m=1}$  по формуле (5.27);

д) сравниваем предыдущее и последующее приближения температуры ленты. Проверяем выполнение условия

$$|T_{w2}^{m+1} - T_{w2}^m| < \Delta T, \quad (5.28)$$

где  $\Delta T$  – заданная погрешность расчета температуры ленты.

Если условие (5.28) не выполняется, расчет повторяем с п.б до выполнения этого условия, приняв при этом в качестве расчетной найденную температуру  $T_{w2}^{m+1}$ .

3. После выполнения условия (5.28) в сечении  $k = 2$  смещаемся еще на один шаг  $\Delta x$  и рассчитываем температуру ленты в узле  $k = 3$ , используя алгоритм, изложенный в п. 2. При этом для расчета температуры ленты необходимо применить формулу (5.26).

Описанную процедуру повторяют до тех пор, пока текущая координата  $x$  не превысит длину расчетной области.

### Результаты расчета охлаждения стальной ленты на воздухе

Изложенная математическая модель сопряженного теплообмена при охлаждении движущейся стальной ленты на воздухе реализована в виде программы на алгоритмическом языке фортран. Для удобства многовариантных расчетов часть исходной информации вводится с терминала в диалоговом режиме:



Длина участка охлаждения $l_D$ , м .....	25
Начальная высота расчетной области для пограничного слоя $\delta_0^*$ , м .....	0,001
Шаг по длине ленты $\Delta x$ , м .....	0,1
Число разностных узлов по оси $y$ , $n_y$ .....	110
Начальная температура ленты $T_{w,н}$ .....	473
Скорость движения ленты $u_w$ , м/с .....	1-10
Половина толщины ленты $\delta$ , м .....	0,000125-0,0005

\* В настоящем параграфе толщина пограничного слоя обозначена через  $\delta'$ .

Остальные данные, необходимые для расчета, хранятся на внешнем магнитном носителе. Эти данные представлены ниже:

Температура окружающей среды $T_0$ , К .....	293
Коэффициент теплопроводности стали $\lambda$ , Вт/(м·К) .....	30
Плотность стали $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> .....	7800
Удельная теплоемкость стали:	
$c$ , Дж/(кг·К) .....	700
$c'$ , Дж/(м <sup>3</sup> ·К) .....	$5,64 \cdot 10^6$
Эмпирические постоянные в модели турбулентности:	
$Pf_T$ .....	0,9
$Pf_K$ .....	0,9
$Pf_{\epsilon}$ .....	1,3
$c_{\epsilon}$ .....	1
$c_1$ .....	1,44
$c_2$ .....	1,92
Степень черноты стальной ленты $\epsilon$ .....	0,4

Некоторые результаты расчета охлаждения ленты на воздухе показаны на рис. 54 - 57. Из их анализа несложно сделать вывод о влиянии толщины и скорости ленты на интенсивность охлаждения. Естественно, что лента меньшей толщины остывает быстрее при прочих одинаковых условиях (см. рис. 54). Увеличение скорости движения ленты с одной стороны интенсифицирует конвективную теплоотдачу от поверхности ленты к воздуху (см. рис. 56) и тем самым увеличивает скорость охлаждения. Однако, с другой стороны, при большей скорости уменьшается время охлаждения ленты на участке с заданной длиной  $l_D$ . В результате увеличение скорости перемещения стальной ленты приводит к меньшему изменению ее температуры (см. рис. 55). Распределения температуры  $T$  и продольной составляющей вектора скорости  $u$  для трех сечений турбулентного пограничного слоя изображены на рис. 57.

Приведем перечень задач, рекомендуемых для самостоятельного решения с использованием математической модели охлаждения стальной ленты при ее движении на воздухе:

1. Исследовать влияние толщины ленты на интенсивность охлаждения.
2. Исследовать влияние скорости движения ленты на интенсивность конвективной теплоотдачи.

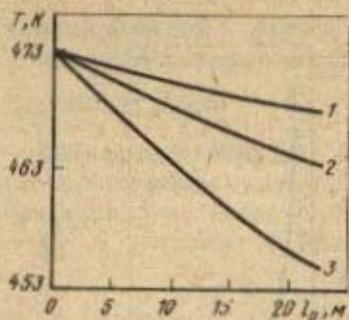


Рис. 54. Изменение температуры по длине ленты толщиной  $2\delta = 1$  мм (1), 0,5 мм (2) и 0,25 мм (3) при скорости ее движения  $u_w = 5$  м/с

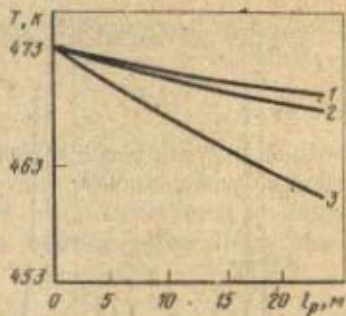
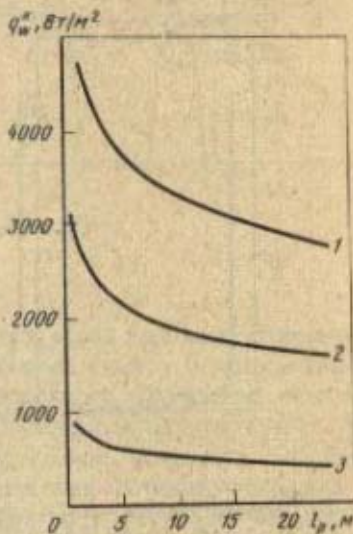


Рис. 55. Изменение температуры по длине ленты толщиной  $2\delta = 1$  мм при скорости ее движения  $u_w = 10$  м/с (1), 5 м/с (2) и 1 м/с (3)

Рис. 56. Изменение плотности потока конвективной теплоотдачи по длине ленты при скорости ее движения  $u_w = 10$  м/с (1), 5 м/с (2) и 1 м/с (3) ( $T_{WH} = 473$  К,  $2\delta = 0,5$  мм)



3. Выбрать скорость движения ленты, необходимую для охлаждения ее до заданной конечной температуры.

4. Выбрать длину участка охлаждения стальной ленты, необходимую для изменения ее температуры до заданной конечной величины.



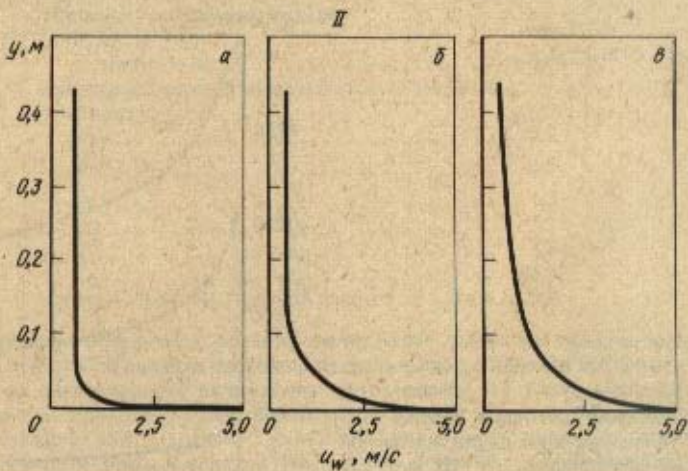
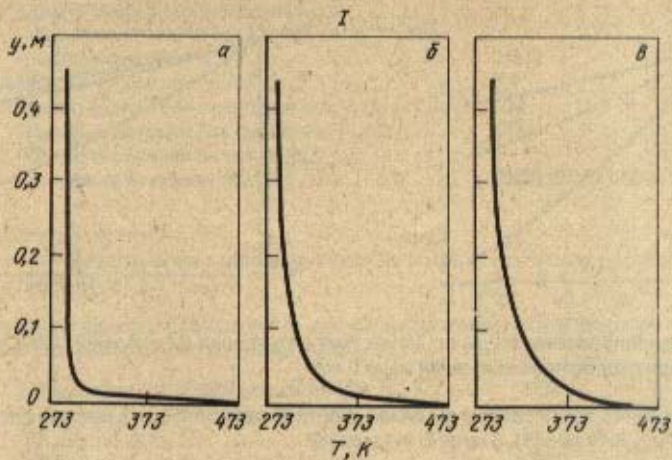


Рис. 57. Профили температуры I и скорости II в турбулентном пограничном слое при  $x = 1 \text{ м}$  (а),  $10 \text{ м}$  (б),  $20 \text{ м}$  (в) ( $2\delta = 0,25 \text{ мм}$ ;  $u_w = 5 \text{ м/с}$ )

#### 4. НАГРЕВ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА В ОБЖИГОВОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЕЧИ

Рассмотрим применение метода математического моделирования для расчета тепловой работы обжиговой вращающейся печи. Вращающаяся печь для обжига сыпучих и кусковых материалов – современный механизированный теплотехнический агрегат, широко приме-

няемый в черной и цветной металлургии, строительной, химической и огнеупорной промышленности.

### Постановка задачи

Вращающаяся печь (рис. 58) представляет собой длинный барабан 1 (отношение длины к диаметру  $l/D_k = 15 + 50$ ), опирающийся при помощи бандажей 5 на опорные ролики. Печь устанавливается с уклоном  $\sim 4 - 6^\circ$  к горизонту. Вращение печи осуществляется при помощи

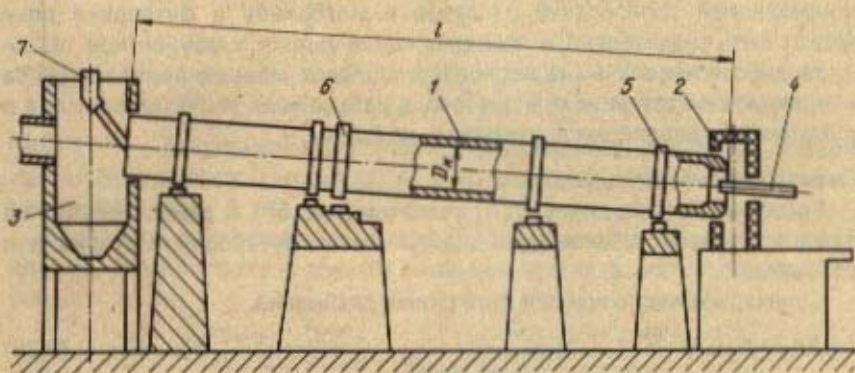


Рис. 58. Схема вращающейся печи

венцовой шестерни 6 от электродвигателя через редуктор. В верхний (левый) торец барабана, входящий в пылевую камеру 3, производится подача через загрузочный желоб 7 исходного материала, подвергаемого обработке. Нижний торец барабана входит в откатную головку 2, в которой установлено газогорелочное устройство 4. Вращающаяся печь — это пламенная проходная печь противоточного типа.

Рассчитываем распределение температур и тепловых потоков в рабочем пространстве вращающейся печи для обжига сыпучего материала заданной производительности  $P$ . Известны также расход природного газа  $B$ , продолжительность обжига (под которой понимается полное время пребывания материала в печи)  $t$  и геометрические размеры печи (ее длина, внутренний диаметр и толщина футеровки). Кроме того из справочной литературы необходимо задать радиационные и теплофизические характеристики материала, футеровки и продуктов сгорания, а также определить некоторые данные из расчета горения топлива (стехиометрическое число, выход продуктов сгорания и т.д.).



Уровень температур газового потока по длине обжиговой вращающейся печи, имеющей достаточно большую относительную длину ( $l/D_k = 15 + 50$ ), изменяется от  $1000 - 1900^\circ\text{C}$  в зоне обжига, до  $400 - 800^\circ\text{C}$  на выходе из печи. Ввиду относительно небольших скоростей газов в рабочем пространстве доминирующую роль в теплоотдаче к материалу для этого класса печей играет излучение.

Наряду с лучистым теплопереносом в рабочем пространстве печи имеет место перенос тепла конвекцией и турбулентной теплопроводностью. При этом для низкотемпературных вращающихся печей доля конвективной теплоотдачи от газов к материалу и футеровке печи может быть значительна, а передача тепла за счет турбулентной теплопроводности невелика (на несколько порядков меньше передачи тепла конвекцией и излучением) и поэтому в дальнейших расчетах ее вклад в суммарный теплоперенос учитывать не будем.

#### Задача внешнего теплообмена

Разобьем печь по длине на  $n_1$  участков (рис. 59). В данном случае на каждом участке печи выделяются три зоны: футеровки, материала и газовая.

Суммарное число зон при этой схеме разбиения

$$l = 3n_1 + n_2, \quad (5.29)$$

где  $n_1$  — число участков по длине печи;  $n_2 = 2$  — число торцевых зон печи. Через  $m = 2n_1 + 2$  обозначим число поверхностных зон, а через  $n = n_1$  число объемных зон.

Зональный метод расчета сложного теплообмена применим в резольвентной постановке, непосредственно устанавливающей связь результирующего и собственного тепловых потоков.

Определение разрешающих обобщенных угловых коэффициентов. Величины этих коэффициентов для открытых участков футеровки и материала (ограничивающих объемную газовую зону)  $\Psi^{\text{от}}$  найдем, решая систему уравнений (4.71) с помощью подпрограммы RAZR (см. пример 4.4).

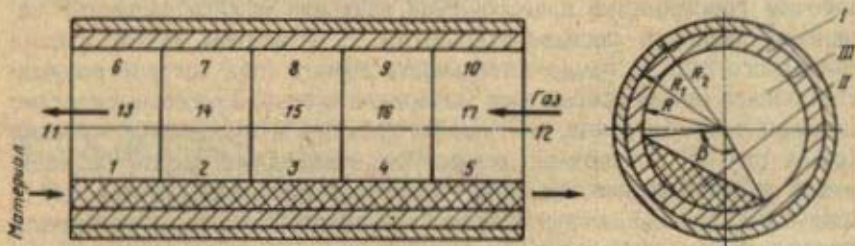


Рис. 59. Схема разбиения печи на зоны:

I — футеровка; II — материал; III — газ (продукты сгорания); 1 — 17 — номера зон

Теплообмен между футеровкой и слоем сыпучего материала на участке их контакта в первом приближении будем рассматривать как теплообмен двух бесконечных параллельных пластин, разделенных диатермичной средой. Последнее допущение объясняется малостью зазора между этими двумя телами. Тогда разрешающие угловые коэффициенты в системе тел слой – футеровка на участке их контакта также можно найти решением системы уравнений (4.71). Имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_{\Phi-M}^{\text{зак}} &= \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon_{\Phi})(1 - \varepsilon_M)}; & \Psi_{M-\Phi}^{\text{зак}} &= \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon_{\Phi})(1 - \varepsilon_M)}; \\ \Psi_{\Phi-\Phi}^{\text{зак}} &= \frac{1 - \varepsilon_M}{1 - (1 - \varepsilon_{\Phi})(1 - \varepsilon_M)}; & \Psi_{M-M}^{\text{зак}} &= \frac{1 - \varepsilon_{\Phi}}{1 - (1 - \varepsilon_{\Phi})(1 - \varepsilon_M)}; \end{aligned} \quad (5.30)$$

где  $\Psi^{\text{зак}}$  – разрешающие угловые коэффициенты закрытых поверхностей футеровки и материала;  $\varepsilon_{\Phi}$  и  $\varepsilon_M$  – степени черноты футеровки и материала.

Обобщенные угловые коэффициенты на данном участке печи необходимо рассчитывать с учетом площади контакта материала и футеровки:

$$\begin{aligned} \Psi_{\Phi-M} &= \frac{\Psi_{\Phi-M}^{\text{от}} F_{\Phi}^{\text{зак}} + \Psi_{\Phi-M}^{\text{зак}} F_{\Phi}^{\text{от}}}{F_{\Phi}}; & \Psi_{M-\Phi} &= \frac{\Psi_{M-\Phi}^{\text{от}} F_M^{\text{от}} + \Psi_{M-\Phi}^{\text{зак}} F_M^{\text{зак}}}{F_M}; \\ \Psi_{\Phi-\Phi} &= \frac{\Psi_{\Phi-\Phi}^{\text{от}} F_{\Phi}^{\text{от}} + \Psi_{\Phi-\Phi}^{\text{зак}} F_{\Phi}^{\text{зак}}}{F_{\Phi}}; & \Psi_{M-M}^{\text{зак}} &= \frac{\Psi_{M-M}^{\text{от}} F_M^{\text{от}} + \Psi_{M-M}^{\text{зак}} F_M^{\text{зак}}}{F_M}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где  $F_M^{\text{от}}$ ,  $F_{\Phi}^{\text{от}}$  – площади открытых поверхностей материала и футеровки;  $F_M^{\text{зак}} = F_{\Phi}^{\text{зак}}$  – площадь контакта материала и футеровки.

Обобщенные разрешающие угловые коэффициенты между зонами, расположенными на разных участках печи, необходимо определять аналогичным образом, учитывая закрытую и открытую части футеровки и материала:

$$\begin{aligned} \Psi_{\Phi-\Gamma} &= \Psi_{\Phi-\Gamma}^{\text{от}} F_{\Phi}^{\text{от}} / F_{\Phi}; & \Psi_{M-\Gamma} &= \Psi_{M-\Gamma}^{\text{от}} F_M^{\text{от}} / F_M; \\ \Psi_{\Phi-\Phi} &= \Psi_{\Phi-\Phi}^{\text{от}} F_{\Phi}^{\text{от}} / F_{\Phi}; & \Psi_{M-M} &= \Psi_{M-M}^{\text{от}} F_M^{\text{от}} / F_M; \\ \Psi_{\Phi-M} &= \Psi_{\Phi-M}^{\text{от}} F_{\Phi}^{\text{от}} / F_{\Phi}; & \Psi_{M-\Phi} &= \Psi_{M-\Phi}^{\text{от}} F_M^{\text{от}} / F_M \end{aligned} \quad (5.32)$$

В формулах (5.31) и (5.32) площади поверхностей открытой и закрытой частей футеровки и материала рассчитывают по формулам (см. рис. 59):

$$F_{\Phi} = F_{\Phi}^{\text{от}} + F_{\Phi}^{\text{зак}} = l_s R (2\pi - \beta) + l_s R \beta; \quad (5.33)$$



$$F_M = F_M^{\text{от}} + F_M^{\text{зак}} = l_s 2R \sin(\beta/2) + l R \beta,$$

в которых  $l = l/n_1$ , где  $l$  — длина печи;  $n_1$  — число участков по длине печи;  $\beta$  — центральный угол сегмента материала.

Геометрия рабочего пространства печи зависит от производительности печи и продолжительности обжига материала.

Площадь сегмента, занимаемого материалом в поперечном сечении печи, найдем по уравнению неразрывности для сыпучего материала

$$f_M = P/(\rho_M u_M), \quad (5.34)$$

где  $P$  — производительность печи, кг/с;  $\rho_M$  — плотность материала, кг/м<sup>3</sup>;  $u_M$  — скорость перемещения материала по длине печи, м/с;  $u_M = l/t$ , здесь  $l$  — длина печи, м;  $t$  — продолжительность обжига материала, с.

Скорость перемещения отдельных частиц материала зависит от вида материала, размеров частиц, их формы, производительности печи, угла наклона печи и скорости вращения печи. Однако с точностью, приемлемой для инженерных расчетов, при моделировании можно принять допущение о том, что все частицы сыпучего материала перемещаются вдоль печи с одинаковой скоростью  $u_M$ .

Зная площадь сегмента  $f_M$ , занимаемого материалом, найдем центральный угол сегмента  $\beta$  (см. рис. 59), воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$f_M = R^2(\beta - \sin\beta)/2, \quad (5.35)$$

в котором  $f_M$  — площадь сегмента, м<sup>2</sup>;  $\beta$  — центральный угол сегмента в радианах. Поскольку выразить явно  $\beta$  из последнего выражения не представляется возможным, найдем величину центрального угла сегмента методом итераций, приняв в качестве итерационной формулы

$$\beta^{p+1} = 2f_M/R^2 + \sin\beta^p, \quad (5.36)$$

где  $\beta^{p+1}$  и  $\beta^p$  —  $(p+1)$ -е и  $p$ -тое приближения центрального угла  $\beta$  в радианах. Итерационный процесс расчета  $\beta$  быстро сходится.

Площадь торцевой зоны  $F_T$  и объем газовой зоны  $V$  рассчитываем по очевидным формулам:

$$F_T = \pi R^2 - f_M; \quad V = F_T l_s. \quad (5.37)$$

Заметим, что формулы (5.33) и (5.37) позволяют связать геометрические характеристики печи с ее производительностью и продолжительностью обжига.

Обобщенные угловые коэффициенты в системе открытых поверхностей футеровки и материала с учетом поглощения в газовых зонах определим по формуле (4.121)

$$\psi_{ik} = \psi_{ik} \exp \left[ - \sum_j k_j s_j^{\text{эф}} \right],$$

где  $\psi_{ik}$  – средний угловой коэффициент излучения зоны  $i$  на зону  $k$ ;  $k_j$  – коэффициент поглощения в пределах  $j$ -той объемной зоны; суммирование производится по всем объемным зонам, разделяющим  $i$ -тую и  $k$ -тую зоны.

Эффективную длину пути луча для  $j$ -той объемной зоны определим по формуле  $s_j^{\text{эф}} = 3,6 V_j / F_j$ , где  $V_j$  и  $F_j$  – объем и площадь поверхности  $j$ -той зоны.

Коэффициент поглощения можно найти по одной из многочисленных известных в литературе аппроксимирующих формул, например

$$k_j = (0,8 + 1,6 \cdot 10^{-5} p_{\text{H}_2\text{O}})(1 - 0,38 \cdot 10^{-3} T_j) \sqrt{(p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}}) \cdot 10^5} / \sqrt{s_j^{\text{эф}}}, \quad (5.38)$$

где  $p_{\text{CO}_2}$  и  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  – парциальные давления диоксида углерода и водяных паров, определяемые из расчета горения топлива, Па;  $T_j$  – температура  $j$ -той газовой зоны, К.

Матрицу геометрических угловых коэффициентов в системе тел (см. рис. 59) определим методом статистических испытаний (см. п. 4 гл. IV).

*Определение степени черноты.* Считая газ серым, степень черноты  $i$ -той объемной зоны найдем по формуле

$$\varepsilon_i = 1 - \exp(-k_i s_i^{\text{эф}}). \quad (5.39)$$

Увеличение степени черноты объемных зон вследствие запыленности газового потока учтем коэффициентом, равным 1,4. Зависимостью степени черноты поверхностных зон материала и футеровки печи от температуры будем пренебрегать и примем их постоянными по справочным данным. Например, для шамота  $\varepsilon = 0,6$ . Степень черноты торцевых зон примем равной единице.

*Расчет коэффициентов радиационного обмена.* Определив обобщенные разрешающие угловые коэффициенты излучения и степени черноты всех зон и считая, что все тела являются серыми, по формуле (4.75) найдем коэффициенты радиационного обмена

$$a_{ki} = \varepsilon_k \sigma_0 F_k (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki}), \quad i, k = 1, \dots, i.$$

*Расчет мощности тепловыделения в объемных зонах.* Мощность тепловыделения за счет сжигания газа в  $i$ -той объемной зоне определим по формуле

$$Q_i^{\text{г}} = B Q_{\text{H}}^{\text{P}} (C_{i+1} - C_i), \quad (5.40)$$

где  $B$  – расход топлива на печь, кг/с;  $Q_{\text{H}}^{\text{P}}$  – низшая теплота сгорания



топлива, Дж/кг;  $C_i$  — концентрация топлива на границе  $i$ -той объемной зоны (на выходе из горелки концентрация топлива  $C = 1$ ). Для расчета  $C_i$  примем экспоненциальную зависимость выгорания топлива по длине факела

$$C_i = \exp(-m_{\phi} l_i^2), \quad (5.41)$$

где  $m_{\phi}$  — эмпирическая константа;  $l_i$  — длина факела на границе  $i$ -той объемной зоны. Постоянную  $m_{\phi}$  найдем, задав ориентировочную длину факела  $l_{\phi}$ . При этом примем, что факел заканчивается в сечении, где  $C = C_{\phi}$  — заданная величина недожога (обычно считают, что  $C_{\phi} \approx 0,02$ ). Тогда из формулы (5.41) имеем

$$m_{\phi} = -\ln(C_{\phi})/l_{\phi}^2 \quad (5.42)$$

или, приняв  $C_{\phi} = 0,02$ , окончательно получим

$$m_{\phi} = 3,912/l_{\phi}^2. \quad (5.43)$$

Длина факела зависит от способа организации сжигания топлива в рабочем пространстве печи, т.е. от конструкции газогорелочного устройства, установленного в печи. На практике конструкцию горелки выбирают в зависимости от требований технологии обжига конкретного материала. Длина факела в принципе может быть рассчитана, однако, в данной модели величину  $l_{\phi}$  будем задавать в качестве исходного параметра.

Расчет коэффициентов конвективного обмена. При использовании выражений (4.224) для конвективных тепловых потоков  $Q_i^k$  обозначим через  $G_{п.сг}$  поток массы продуктов сгорания, кг/с, равный

$$G_{п.сг} = B(1 + \Omega K_{р.в}), \quad (5.44)$$

где  $B$  — расход топлива, кг/с;  $K_{р.в}$  — коэффициент расхода воздуха, равный для условий обжигowych вращающихся печей 1,25 — 1,5;  $\Omega$  — стехиометрическое число, которое показывает, какое количество окислителя (воздуха) необходимо для сжигания 1 кг топлива, кг/кг.

Так же, как и в п. 6 гл. IV, будем обозначать через  $c_{p,i}$ , Дж/(кг · К), среднюю удельную теплоемкость продуктов сгорания при постоянном давлении в интервале температур от 273 К до  $T_i$ , а через  $c_{p,\tau}$  и  $c_{p,v}$  — аналогичные величины для топлива и воздуха, поступающих в печь с температурой  $T_{\tau}$  и  $T_v$  соответственно. Получим

$$Q_i^k = \sum_k g_{ki} T_k + g_i^0, \quad (5.45)$$

где для всех объемных зон, кроме первой по ходу газов зоны ( $i = m + 1, \dots, l - 1$ )

$$g_i^0 = 273 G_{п.сг} (C_i - C_{i+1}). \quad (5.46)$$

Для первой по ходу газов объемной зоны (при разбиении печи на пять участков — зона № 17), в которую вводятся топливо и воздух

$$g_1^0 = (c_{pT} T_T + c_{pB} T_B K_{p,B} \Omega) V - 273 [(c_{pT} + c_{pB} K_{p,B} \Omega) V - c_{p,i} G_{п.ог}]. \quad (5.47)$$

Коэффициенты конвективного обмена  $g_{ki}$  для поверхностных зон ( $i = 1, \dots, m$ ) определяются по формулам (4.227)

$$g_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, k \neq i; \\ \alpha_j F_j & \text{при } k \neq j; \\ -\alpha_j F_j & \text{при } k = i, \end{cases} \quad (5.48)$$

где  $j$  — номер смежной объемной зоны. Для объемных зон ( $i = m + 1, \dots, l$ ) согласно (4.226) выражения для этих коэффициентов принимают следующий вид:

$$g_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, k \neq i+1, k \neq i; \\ \alpha_j F_j & \text{при } k = j; \\ c_{p,i+1} G_{п.ог} & \text{при } k = i+1; \\ -(\sum_j \alpha_j F_j + c_{p,i} G_{п.ог}) & \text{при } k = i, \end{cases} \quad (5.49)$$

где  $j$  — номера поверхностных зон, смежных с  $i$ -той объемной зоной.

Зависимость удельной изобарной теплоемкости от температуры и состава продуктов сгорания может быть определена по формуле

$$c_{p,п.ог} = c_{pH_2O} C_{H_2O} + c_{pCO_2} C_{CO_2} + c_{pN_2} C_{N_2} + c_{pO_2} C_{O_2} + c_{pT} C_T, \quad (5.50)$$

где  $c_{pH_2O}$ ,  $c_{pCO_2}$ ,  $c_{pN_2}$ ,  $c_{pO_2}$  и  $c_{pT}$  — удельные изобарные теплоемкости  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  и топлива (природного газа) соответственно, а  $C_{H_2O}$ ,  $C_{CO_2}$ ,  $C_{N_2}$ ,  $C_{O_2}$  и  $C_T$  — концентрации этих газов в продуктах сгорания.

Влияние температуры на средние теплоемкости газов достаточно хорошо аппроксимируется линейной зависимостью

$$c_p = a + bT, \quad (5.51)$$

где значения коэффициентов  $a$  и  $b$  приведены ниже:

Газ	$a$ , Дж/(кг · К)	$b$ , Дж/(кг · К <sup>2</sup> )
CO <sub>2</sub>	1740,2	2,055
H <sub>2</sub> O	1002,3	0,0865
N <sub>2</sub>	823,8	0,1983
Природный газ (CH <sub>4</sub> = 81,3 %, N <sub>2</sub> = 14,4 %, C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> = 2,9 % + следы).....	1000	2,055
O <sub>2</sub>	888,1	0,0977



Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_i$  рассчитываем по значению числа Нуссельта  $\overline{Nu}_i$

$$\alpha_i = \overline{Nu}_i \lambda_i / d_r. \quad (5.52)$$

Предполагая для упрощения задачи, что газовый поток представляет собой стабилизированное турбулентное течение в трубе, число Нуссельта найдем по формуле М.А.Михеева

$$\overline{Nu}_i = 0,021 Re_i^{0,8} Pr_i^{0,43}. \quad (5.53)$$

В формуле (5.48) критерий Рейнольдса  $Re_i = \overline{u}_i d_r / \nu_i$ . Значения коэффициента теплопроводности  $\lambda_i$ , кинематического коэффициента вязкости  $\nu_i$ , критерия Прандтля  $Pr_i$  зависят от температуры и состава продуктов сгорания. Так, например, для продуктов сгорания природного газа эти параметры можно определить по следующим формулам:

$$\lambda = (-0,27 + 11,56 \cdot 10^{-3} T - 650 \cdot 10^{-6} T^2 + 2,04 \cdot 10^{-9} T^3) \cdot 10^{-2}, \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad (5.54)$$

$$\nu = (-3,62 + 32,01 \cdot 10^{-3} T + 116,01 \cdot 10^{-6} T^2 - 23,83 \cdot 10^{-9} T^3) \cdot 10^{-6}, \text{ м}^2/\text{с}; \quad (5.55)$$

$$Pr = 0,778 - 0,331 \cdot 10^{-3} T + 0,263 \cdot 10^{-6} T^2 \text{ при } 273 \text{ К} \leq T \leq 673 \text{ К}; \quad (5.56)$$

$$Pr = 0,533 + 0,280 \cdot 10^{-3} T - 0,106 \cdot 10^{-6} T^2 \text{ при } 673 \text{ К} \leq T \leq 1273 \text{ К}. \quad (5.57)$$

В качестве определяющей в формуле (5.48) принята температура  $i$ -той объемной зоны, а определяющим размером является гидравлический (эквивалентный) диаметр  $d_r$ , равный учетверенной площади свободного сечения печи деленной на периметр этого сечения. В нашем случае

$$d_r = 4(\pi R^2 - f_M) / [2\pi R - \beta R + 2R \sin(\beta/2)],$$

где  $f_M$  — площадь сегмента материала (см. рис. 59).

Среднерасходная скорость в газовой зоне, м/с

$$\overline{u}_i = G_{п.сг} / (\rho_i F_T), \quad (5.58)$$

где  $F_T$  — площадь поперечного сечения объемной газовой зоны (равна площади торцевой зоны);  $\rho_i$  — плотность продуктов сгорания, кг/м<sup>3</sup>.

Расчет тепловых потерь через футеровку печи. Потери тепла через футеровку печи в окружающую среду на участке длиной  $l_s$  определим по формуле стационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку

$$Q_i^{\text{пот}} = \pi l_s k_{L,i} (T_i - T_{\infty}), \quad (5.59)$$

где линейные коэффициенты теплопередачи для одно- и двухслойной цилиндрической стенки соответственно равны (см. рис. 59):

$$k_L^{(1)} = \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{1}{2R_1(\alpha_n + \alpha_k)} \right)^{-1}; \quad (5.60)$$

$$k_L^{(2)} = \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2R_2(\alpha_n + \alpha_k)} \right)^{-1}, \quad (5.61)$$

здесь  $Q_i^{\text{пот}}$  – поток потерь тепла на  $i$ -том участке печи;  $T_i$  – температура футеровки печи на  $i$ -том участке;  $l_s$  – длина участка печи;  $T_0$  – температура окружающей среды;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности огнеупорного и изоляционного слоев футеровки печи, определяемые по линейной зависимости  $\lambda = f(T)$ , в которую входят средние температуры слоев;  $\alpha_n$  – коэффициент теплоотдачи за счет излучения поверхности кожуха в окружающую среду;  $\alpha_k$  – коэффициент конвективной теплоотдачи от поверхности кожуха в окружающую среду;  $R$  – внутренний радиус печи;  $R_1$  и  $R_2$  – наружные радиусы первого и второго слоев футеровки. Термическим сопротивлением кожуха пренебрегаем.

Коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием определим по известной формуле

$$\alpha_n = \epsilon_k \sigma_0 (T_k^4 - T_0^4) / (T_k - T_0), \quad (5.62)$$

а коэффициент конвективной теплоотдачи по следующей эмпирической формуле:

$$\alpha_k = 0,0078 \frac{\lambda_B}{D_K} \text{Re}_0^{0,905}, \quad (5.63)$$

где  $\epsilon_k = 0,75$  – степень черноты кожуха печи;  $T_k$  – температура кожуха печи;  $\text{Re}_0 = u_B D_K / \nu_B$  – критерий Рейнольдса;  $D_K$  – диаметр кожуха печи;  $\lambda_B$  и  $\nu_B$  – коэффициенты теплопроводности и кинематической вязкости воздуха при температуре окружающей среды;  $u_B$  – скорость воздушного потока, омывающего печь ( $u_B = 1 \div 3$  м/с).

Как видно из выражений (5.62) и (5.63), для расчета коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_n$  и  $\alpha_k$  необходимо знать температуру кожуха печи  $T_k$ . Найдем искомую температуру  $T_k$  итерационным методом, применив следующие расчетные формулы:

для однослойной футеровки

$$T_{k,i} = Q_i^{\text{пот}} \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} \right) / (\pi l_s) + T_i; \quad (5.64)$$

для двухслойной футеровки

$$T_{k,i} = Q_i^{\text{пот}} \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) / (\pi l_s) + T_i, \quad (5.65)$$

где  $Q_i^{\text{пот}}$  – тепловой поток потерь, вычисляемый по формуле (5.59);  $T_i$  – средняя температура внутренней поверхности футеровки.

Расчет температуры кожуха  $T_k$  будем проводить в следующей последовательности:



1. Зададим нулевое приближение для температуры кожуха на всех участках печи  $i = 1, \dots, n_1$ . Для двухслойной футеровки необходимо также задать температуру  $T_{1-2}$  на границе 1-го и 2-го слоев футеровки. В нулевом приближении примем  $T_{1-2} = 0,5(T_i + T_K)$ .

2. Найдем  $\lambda_1$  для однослойной и  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для двухслойной футеровки по средней температуре слоев:

для однослойной футеровки

$$\lambda_1 = a_{\lambda_1} + b_{\lambda_1} T_{cp1},$$

где  $T_{cp1} = (R_1^2 T_K - R^2 T_i) / (R_1^2 - R^2) + 0,5(T_i - T_K) / \ln(R_1/R)$  — средняя температура цилиндрического слоя;

для двухслойной футеровки

$$\lambda_1 = a_{\lambda_1} + b_{\lambda_1} T_{cp1}; \quad \lambda_2 = a_{\lambda_2} + b_{\lambda_2} T_{cp2},$$

где  $T_{cp1} = (T_{1-2} R_1^2 - T_i R^2) / (R_1^2 - R^2) + 0,5(T_i - T_{1-2}) / \ln(R_1/R)$  — средняя температура первого слоя футеровки, а  $T_{cp2} = (T_K R_2^2 - T_{1-2} R_1^2) / (R_2^2 - R_1^2) + 0,5(T_{1-2} - T_K) / \ln(R_2/R_1)$  — средняя температура второго слоя футеровки печи. В вышеприведенных формулах  $a_{\lambda_1}$ ,  $b_{\lambda_1}$ ,  $a_{\lambda_2}$  и  $b_{\lambda_2}$  — коэффициенты аппроксимации закона  $\lambda = f(T)$  линейной зависимостью.

3. Рассчитаем  $\alpha_n$  и  $\alpha_k$  по формулам (5.62) и (5.63).

4. Найдем тепловые потери  $Q_i^{пот}$  по формуле (5.39).

5. Определим новое значение  $T_{ki}$  по одной из формул (5.54) или (5.55).

6. Если вновь найденное значение  $T_{ki}$  температуры кожуха отличается от заданного на величину, не превышающую наперед заданную погрешность, то расчет закончим. В противном случае расчет повторим с п. 2, используя новую исходную температуру кожуха.

Тепловые потери излучением торцевых зон найдем по формуле

$$Q_i^{пот} = \epsilon_T \sigma_0 (T_i^4 - T_0^4) F_T, \quad i = 2n_1 + 1, m, \quad (5.66)$$

где  $\epsilon_T$  — степень черноты торцевых зон ( $\epsilon_T \approx 1$ );  $T_i$  — температура торцевых зон;  $T_0$  — температура в пылевой или холодильной камере печи (в первом приближении ее можно принять равной температуре окружающей среды);  $F_T$  — площадь поверхности торцевой зоны.

*Запись системы зональных уравнений.* Поскольку в рассматриваемой системе зоны I рода отсутствуют, воспользуемся зональными уравнениями (4.229) для поверхностных зон материала и футеровки, а также для объемных газовых зон.

Уравнения для зон на поверхностях материала ( $\bar{i} = 1, \dots, n_1$ ) оставим пока без изменения

$$\sum_k (a_{ki} T_i^4 + g_{ki} T_k) - \tilde{Q}_i = 0. \quad (5.67)$$

Соотношение, устанавливающее для этих зон связь результирующих тепловых потоков  $\tilde{Q}_i$  с температурами  $T_1, \dots, T_{n_1}$ , будет получено ниже в результате решения задачи внутреннего теплообмена.

Зоны на поверхностях футеровки ( $\bar{i} = n_1 + 1, \dots, m$ ) являются зонами III рода, для каждой из которых устанавливается однозначная зависи-

мость (5.59) между величиной результирующего теплового потока  $\tilde{Q}_i = Q_i^{\text{пот}}$  и температурой  $T_i$ . Поэтому уравнение (4.229) для этих зон примет вид

$$\sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) - \pi l_s k_{L,i} (T_i - T_0) = 0, i = n_1 + 1, \dots, m. \quad (5.68)$$

Для торцевых зон, участвующих в радиационном теплообмене с поверхностными и газовыми зонами внутри печи и отдающих тепло излучением во внешнюю среду, уравнение (4.229) запишем следующим образом:

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 - \tilde{Q}_i = 0, i = 2n_1 + 1, m, \quad (5.69)$$

где  $\tilde{Q}_i = Q_i^{\text{пот}}$  — поток тепловых потерь, определяется по формуле (5.66).

Для объемных газовых зон известна мощность тепловыделения за счет сгорания топлива  $Q_i^v$ , определяемая без учета зависимости от температуры газа, так как в первом приближении в данной математической модели не учитывается диссоциация продуктов сгорания. Поэтому для этих зон ( $i = m + 1, \dots, l$ ) заданными являются значения результирующих потоков  $\tilde{Q}_i = -Q_i^v$ , а определяемыми — температуры  $T_i$ . Таким образом, объемные газовые зоны являются зонами II рода, для которых

$$\sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) + g_i^0 + Q_i^v = 0, i = m + 1, \dots, l. \quad (5.70)$$

#### Задача внутреннего теплообмена

Материал, подвергающийся обжигу в печи, будем рассматривать как термически тонкое тело. Это допущение является приемлемым, во-первых, потому что материал, как правило, занимает не более 10 % объема рабочего пространства печи, и, во-вторых, в связи с интенсивным перемешиванием материала при его пересыпании. В этом случае изменение температуры материала в пределах  $i$ -той зоны определяется балансовым уравнением, аналогичным уравнению (5.15)

$$c_{Mi} P (T_i'' - T_i') = \tilde{Q}_i + Q_i^{\text{э-р}}, i = 1, \dots, n_1, \quad (5.71)$$

где  $T_i'$  и  $T_i''$  — температура материала в начале и в конце  $i$ -той зоны;  $c_{Mi}$  — средняя удельная теплоемкость материала в интервале температур от  $T_i'$  до  $T_i''$ , Дж/(кг · К);  $P$  — производительность печи, кг/с;  $Q_i^{\text{э-р}}$  — мощность источников (стоков) тепла в объеме материала в результате протекания экзо- и эндотермических реакций.

При нахождении величины  $c_{Mi}$  можно использовать следующую



формулу, определяющую зависимость истинной удельной теплоемкости  $c_m(T)$  от температуры с учетом порозности материала  $\gamma$ :

$$c_m(T) = (a_m + b_m T)(1 - \gamma) + c_{p.p.cг} \gamma, \quad (5.72)$$

где  $a_m$  и  $b_m$  — коэффициенты аппроксимации зависимости удельной теплоемкости материала от температуры (определяются по справочникам);  $\gamma$  — порозность материала, определяется экспериментально и в инженерных расчетах обычно принимается равной  $\gamma = 0,2 + 0,4$ ;  $c_{p.p.cг}$  — удельная теплоемкость продуктов сгорания, определяемая по формулам (5.50) и (5.51) с подстановкой в формулу (5.51) температуры материала.

Тепловой поток от протекания химических реакций в слое материала  $Q_i^{з.p}$ , идущих с выделением (знак плюс) или поглощением (знак минус) тепла, определяется экспериментально в зависимости от температуры и химического состава материала. Например, для условий обжига шамота можно принять  $Q_i^{з.p} = 0$ .

Для того чтобы в уравнениях (5.71) перейти к среднезональным температурам  $T_i$ , используем соотношение (5.18)

$$T_i'' - T_i' = 2 \left[ T_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} T_j + (-1)^i T_n \right],$$

где  $T_n$  — температура материала на входе в печь.

Учитывая, что  $Q_i^{з.p} = 0$ , окончательно получим связь результирующих тепловых потоков  $\tilde{Q}_i$  на поверхности материала с зональными температурами этой поверхности в следующем виде:

$$\tilde{Q}_i = 2c_{mi} P \left[ T_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} T_j + (-1)^i T_n \right]. \quad (5.73)$$

### Решение задачи сопряженного теплообмена

Для термически тонкого тела сопряжение решений задач внешнего и внутреннего теплообмена проще всего осуществить подстановкой выражения (5.73), определяющего величину результирующего теплового потока  $\tilde{Q}$  для зон на поверхности материала, в зональные уравнения (5.67)

$$\sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) - 2c_{mi} P \left[ T_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} T_j + (-1)^i T_n \right]. \quad (5.74)$$

В результате получаем замкнутую систему зональных уравнений (5.68) — (5.70) и (5.74) относительно температур  $T_1, \dots, T_i$ . Эта система нелинейна, что обусловлено, во-первых, тем, что температура входит

в уравнения в четвертой степени и, во-вторых, зависимостью коэффициентов радиационного  $a_{ki}$  и конвективного  $g_{ki}$  теплообмена от температуры. Для решения данной системы применим итерационный метод Ньютона, подробно изложенный в п. 6 гл. IV.

Рассмотрим алгоритм расчета сложного сопряженного теплообмена в рабочем пространстве вращающейся печи:

1. Ввод исходных данных: геометрических размеров печи (длины, внутреннего радиуса, толщины слоев футеровки), числа участков разбиения печи, производительности печи, продолжительности обжига, расхода топлива на печь, физических характеристик тел, участвующих в теплообмене и результатов расчета горения топлива.

2. Нумерация всех зон в зависимости от числа участков разбиения печи, определение геометрических параметров системы теплообмена по формулам (5.33) и (5.37) и расчет матрицы угловых коэффициентов в системе тел: материал – газ – футеровка для условий вращающейся печи (см. рис. 59) по вычислительной программе, реализующей метод статистических испытаний.

3. Расчет мощности тепловыделения в газовых зонах по формуле (5.40) (при предварительном задании длины факела по одной из инженерных методик или из практики эксплуатации печей данного класса).

4. Решение системы нелинейных уравнений (5.68) – (5.70), (5.74) методом Ньютона (при предварительном задании начального поля температур, точности расчета и порядка системы нелинейных уравнений, равного числу расчетных зон печи  $l$ ).

При решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона на каждой итерации по температуре выполняем расчет: степени черноты газовых зон; матрицы обобщенных угловых коэффициентов; матрицы разрешающих обобщенных угловых коэффициентов; коэффициентов радиационного и конвективного обмена.

Результатом решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона являются значения температур зон, исходя из которых осуществляют расчет тепловых потоков по зонам.

### *Расчет обжига шамота во вращающейся печи*

Математическая модель сложного теплообмена в рабочем пространстве вращающейся печи реализована в виде фортран-программы. Для оперативного выполнения многовариантных расчетов ввод исходных данных, указанных ниже, производится в диалоговом режиме:

Длина печи $l$ , м .....	50
Внутренний радиус печи $R$ , м .....	1
Толщина 1-го слоя футеровки (огнеупорного) $\delta_1$ , м .....	0,23



Толщина изоляции 2-го слоя футеровки $\delta_2$ , м .....	0
Число участков по длине печи $n_2$ .....	9
Производительность печи $P$ , кг/с (т/ч)	2,5/(9)
Плотность материала (шамота) $\rho_M$ , кг/м <sup>3</sup> .....	1900
Продолжительность обжига $t$ , с .....	5400
Расход топлива $B$ , кг/с (м <sup>3</sup> /ч) .....	0,271(1400)
Ориентировочная длина факела $l_\Phi$ , м	17

Ряд исходных данных, не требующих частых корректировок, записан на внешний магнитный носитель:

Порозность материала $\gamma$ .....	0,35
Степень черноты материала $\epsilon_M$ .....	0,6
Степень черноты внутренней поверхности футеровки $\epsilon_{кл}$ .....	0,6
Степень черноты торцевых зон $\epsilon_T$ .....	1,0
Степень черноты кожуха печи $\epsilon_K$ .....	0,75
Температура окружающей среды $T_0$ , К .....	293
Парциальное давление $CO_2$ в продуктах сгорания $p_{CO_2}$ , кПа .....	8
Парциальное давление $H_2O$ в продуктах сгорания $p_{H_2O}$ , кПа .....	17,2
Коэффициент, учитывающий запыленность факела $\epsilon_\Phi$ .....	1,4
Точность расчета $\Delta$ .....	0,01
Низшая теплота сгорания топлива $Q_H^P$ , МДж/кг .....	48,26
Стехиометрическое число $\Omega$ , кг/кг ...	16,52
Коэффициент расхода воздуха $K_{p,v}$ ..	1,25
Плотность топлива при температуре подогрева $\rho_T$ , кг/м <sup>3</sup> .....	0,7
Плотность окислителя (воздуха) при температуре подогрева $\rho_B$ , кг/м <sup>3</sup> .....	0,946
Температура подогрева топлива $T_T$ , К	303
Температура подогрева окислителя (воздуха) $T_B$ , К .....	373
Температура материала перед загрузкой в печь $T_{M,н}$ , К .....	293

Результаты расчета приведены на рис. 60 и 61. На рис. 60 представлено изменение температур газа, футеровки и материала по длине печи, а рис. 61 демонстрирует распределение линейных плотностей тепловых потоков вдоль печи. Проведен анализ полученных результатов.

С точки зрения технологии достигнута необходимая для обжига высокоглиноземистого шамота температура  $\sim 1873 \pm 200$  К. При данной длине факела, равной  $\sim 17$  м, обеспечивается достаточно большая длина зоны обжига ( $\sim 10$  м). На выходе из печи температура материала выше температуры газов, что характерно для этого класса печей. Температура уходящих газов, равная  $\sim 873$  К, достаточно высока, поэтому за данной печью целесообразно установить какое-либо теплоутилизи-

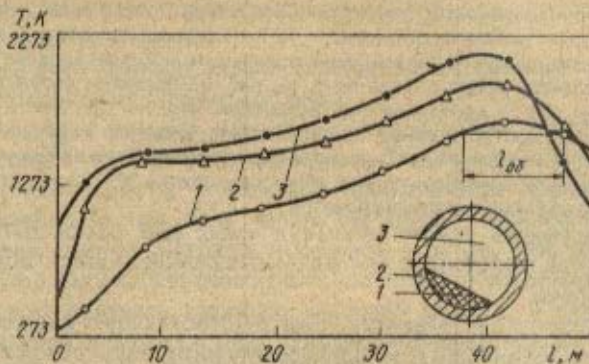


Рис. 60. Распределение температуры материала (1), футеровки (2) и газа (3) по длине печи

Рис. 61. Распределение линейных плотностей тепловых потоков по длине печи при  $P = 2,5 \text{ кг/с}$ ,  $B = 0,27 \text{ кг/с}$ :  $Q_L^{\text{пот}}$  — тепловые потери через футеровку;  $Q_L^M$  — изменение энтальпии материала;  $Q_L^Y$  — мощность тепловыделения за счет сжигания топлива

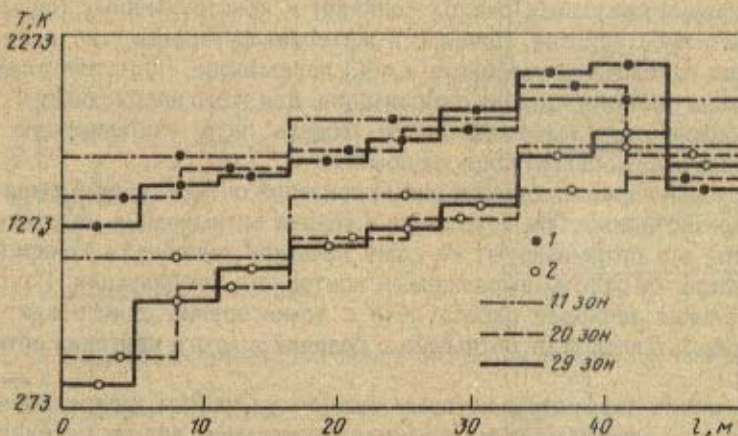
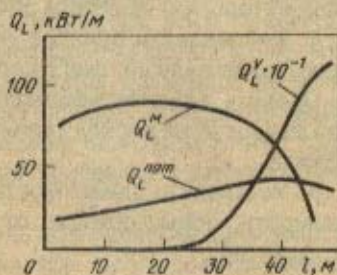


Рис. 62. Зональные значения температур газа (1) и материала (2)



рующее устройство (рекуператор или котел-утилизатор). Потери тепла через футеровку печи достаточно велики и составляют ~ 12 % от суммарного расхода печи.

Точность расчета сложного теплообмена зональным методом зависит от числа зон разбиения рабочего пространства печи. На рис. 62 показаны результаты расчета температуры газа и материала при разбиении печи на три, шесть и девять участков по длине и, соответственно, на одиннадцать, двадцать и двадцать девять зон. Из рис. 62 видно, что погрешность расчета при разбиении печи на три участка по длине печи значительна, а температурные линии при наличии 20 и 29 зон отличаются в пределах погрешности инженерных расчетов.

Приведем перечень задач, рекомендуемых для самостоятельного исследования при использовании математической модели обжиговой вращающейся печи:

1. Выбрать производительность печи  $P$ , отвечающую заданной технологии обжига (заданному температурному интервалу обжига).

2. Выбрать расход топлива  $B$ , отвечающий заданной технологии обжига.

3. Исследовать влияние наличия и толщины теплоизоляции (второго слоя футеровки) на режим обжига и тепловой баланс печи.

4. Исследовать влияние геометрии печи (радиуса, длины) на температурное поле рабочего пространства печи.

5. Оценить влияние температуры окружающей среды (зимний и летний периоды) на расход топлива при соблюдении заданной температуры обжига.

6. Установить зависимость уровня температур материала и протяженности зоны обжига от длины факела (типа сожигательного устройства).

### *Оптимизация тепловой работы вращающейся печи*

Оптимизация тепловой работы печи может быть достигнута за счет оптимизации режимных (расход топлива) и конструктивных (размеры рабочего пространства, толщина и материал футеровки, тип и расположение горелочных устройств и т.д.) параметров. При этом следует правильно поставить задачу оптимизации. Для этого необходимо:

1) разработать математическую модель печи, учитывающую все основные взаимосвязи процесса обжига;

2) сформулировать единственный критерий оптимизации и выразить его количественно. При подстановке задачи оптимизации надо всегда помнить, что оптимизируют не саму печь как таковую, а конкретный показатель ее работы, выражаемый критерием оптимизации. Поэтому оптимальная тепловая работа печи с точки зрения одного критерия может быть далекой от оптимума с позиций другого критерия оптимизации;

3) выявить параметры, которые можно варьировать в определенных пределах с целью изменения критерия оптимизации для достижения его экстремального значения;

4) выбрать метод поиска оптимума, наиболее целесообразный для данной конкретной задачи.

Первый этап решения задачи уже выполнен, остальные – зависят от целей, которые необходимо достичь.

**Оптимизация режима обжига высокоглиноземистого шамота.** Обжиг высокоглиноземистого шамота проводят с целью улучшения его огнеупорных свойств. В рабочем пространстве вращающейся печи последовательно проходят процессы сушки (при мокром способе подготовки сырья), нагрева и обжига шамота. При низком уровне температур высокоглиноземистого шамота в зоне обжига ( $< 1350\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) невозможно получить заданное качество обжига, а при повышенных температурах шамота ( $> 1800\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) будет наблюдаться его расплавление и налипание на футеровку печи. Поэтому при оптимальном режиме температура не должна выходить за пределы заданного интервала температур в зоне обжига ( $1350 - 1800\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Будем считать это обстоятельство первым ограничением при оптимизации режима. Качество материала зависит также от длины зоны обжига, т.е. зоны, в которой имеет место заданный температурный интервал. При малой длине этой зоны процессы изменения внутренней структуры материала не успевают завершиться. В дальнейших расчетах примем в качестве минимально допустимой по технологии длины зоны обжига величину  $l_{об} \approx 10\text{ м}$ . Это будет вторым ограничением при выборе оптимального режима.

На рис. 63 показана полученная в результате расчетов зависимость длины зоны обжига от расхода топлива при различных значениях производительности. Длина зоны обжига определяется из графика

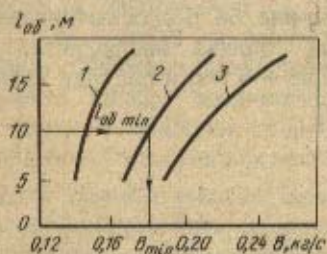


Рис. 63. Зависимость длины зоны обжига от расхода топлива при производительности  $P$ , кг/с:

1 – 0,28; 2 – 0,83; 3 – 1,39

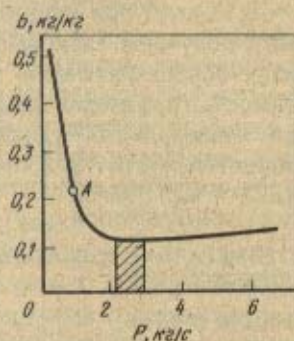


Рис. 64. К расчету оптимального режима обжига шамота



изменения температуры материала по длине печи (см. рис. 60). При небольшой производительности печи для выполнения требований технологического процесса необходим незначительный расход топлива. С увеличением производительности печи расход топлива, естественно, возрастает. Очевидно, существует некоторое оптимальное соотношение расхода топлива и производительности печи — минимальный удельный расход топлива, при котором можно получить заданное качество обжига и соблюдаются сформулированные ограничения. Иными словами, в качестве критерия оптимизации примем удельный расход топлива, кг/кг

$$b = B_{\min}/P, \quad (5.75)$$

где  $B_{\min}$  — расход топлива, при котором соблюдаются заданные ограничения, кг/с;  $P$  — производительность печи, кг/с.

Варьируемыми величинами, влияющими на критерий оптимизации  $b$ , будут расход топлива и производительность печи. Изменяя  $B$  и  $P$ , будем искать режим обжига, соответствующий минимуму удельного расхода топлива  $b$ .

Поставленную задачу решим простейшим методом, заключающимся в переборе вариантов. Изменяя производительность печи  $P$  с выбранным шагом  $\Delta P$ , будем добиваться для каждой производительности с помощью расчетов на математической модели требуемого технологического режима путем изменения расхода топлива  $B$ . Например, при построении точки  $A$  (рис. 64), задав  $P = 0,83$  кг/с (3 т/ч), изменяем расход топлива  $B$  и получаем в результате расчетов зависимость длины зоны обжига от  $B$  (см. рис. 63). Приняв за минимальную длину зоны обжига величину, равную 10 м, получим минимальный расход топлива  $B_{\min} \approx 0,18$  кг/с, при котором соблюдается технология обжига. В результате получаем зависимость  $b = f(P)$  при минимальном расходе топлива, обеспечивающем заданный технологический режим. Эта зависимость графически представлена на рис. 64. В рассматриваемом случае минимальный удельный расход топлива наблюдается при производительности  $P = 2,1 + 2,5$  кг/с (7,56 — 9 т/ч) и расходе топлива  $B \approx 0,231 + 0,275$  кг/с.

## 5. НАГРЕВ МЕТАЛЛА В ТОЛКАТЕЛЬНОЙ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПЕЧИ

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу сопряженного теплообмена в рабочем пространстве трехзонной толкательной методической печи с двусторонним нагревом металла. Длина печи  $L = 21$  м, длина методической зоны  $L_M = 9$  м, сварочной  $L_C = 7,5$  м и томильной  $L_T = 4,5$  м. Средняя высота

рабочего пространства печи над поверхностью нагреваемого металла в пределах методической и томильной зон  $H_M = 1,5$  м, в пределах сварочной зоны  $H_C = 2,5$  м.

В качестве параметров математической модели сопряженного теплообмена будем рассматривать следующие величины:

половину толщины нагреваемой заготовки  $\delta$  м; характеристики горения топлива: низшую рабочую теплоту сгорания  $Q_{Н,р}$ , Дж/кг; теоретическое количество воздуха, необходимое для сжигания единицы топлива (стехиометрическое число)  $\Omega$ , кг/кг; коэффициент расхода воздуха  $K_{р,в}$ ; состав продуктов сгорания (парциальные давления  $P_{CO_2}$  и  $P_{H_2O}$ , Па);

теплофизические характеристики тел, участвующих в теплообмене: коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , Вт/(м · К) и удельную объемную теплоемкость  $c'$ , Дж/(м<sup>3</sup> · К) металла; среднюю удельную теплоемкость продуктов сгорания  $c_{р,п.сг}$ , Дж/(кг · К); степени черноты металла  $\epsilon_M$  и кладки  $\epsilon_{кл}$ . Если указанные теплофизические характеристики зависят от температуры, параметрами модели являются коэффициенты в формулах, аппроксимирующих эти зависимости.

Входными переменными математической модели, значения которых при расчете теплообмена должны быть заданы по условию, являются:

производительность печи (в расчете на единицу ширины)  $P$ , кг/(м · с) или скорость перемещения металла в печи  $u = P/2\delta\rho$ , м/с ( $\rho$  — плотность металла);

общий расход топлива на печь (в расчете на единицу ширины)  $B$ , кг/(м · с);

распределение расхода топлива между сварочной и томильной зонами  $x_C = B_C/B$  и  $x_T = B_T/B$  ( $x_C + x_T = 1$ ), где  $B_C$  и  $B_T$  — расходы топлива в сварочной и томильной зонах соответственно.

В качестве выходных переменных, значения которых определяются в результате расчета теплообмена, могут выступать температура поверхности заготовки  $T_{wkон}$  и перепад температур по ее сечению  $\Delta T_{кон}$  на выходе из печи; температура продуктов сгорания, покидающих рабочее пространство  $T_{п.сг.вых}$ ; максимальное значение разности между среднemasсовой и минимальной температурами заготовки на начальной стадии нагрева  $\Delta T_{max}$  используемое при оценке величины термических напряжений и т.д.

Если математическая модель используется для прогнозирования тепловой работы печи, например при проведении поверочных расчетов спроектированной печи, цель решения задачи сопряженного теплообмена состоит в определении значений выходных параметров, в частности, температуры поверхности металла  $T_{wkон}$  и перепада температур  $\Delta T_{кон}$ , отвечающих заданным значениям производительности  $P$ , расхода топлива  $B$  и его распределения по зонам печи  $x_C$  и  $x_T$ . При решении



оптимизационных задач некоторые выходные переменные являются заданными по условию (на часть из них накладываются ограничения), а значения некоторых входных переменных подлежат определению. Обычно существует множество значений входных переменных, удовлетворяющих условию задачи, поэтому возникает возможность выбора такого решения, которому соответствует экстремум какой-либо целевой функции (критерия оптимизации).

Простейшим примером может служить рассматриваемая ниже задача о нахождении минимального расхода топлива, обеспечивающего требуемое конечное температурное состояние металла. В этом случае заданными по условию являются производительность печи и конечная температура поверхности металла, на перепад температур по сечению заготовки  $\Delta T_{\text{кон}}$  накладывается ограничение  $\Delta T_{\text{кон}} \leq \Delta T_{\text{конmax}}$ , а цель расчета заключается в определении таких значений входных переменных  $B$ ,  $x_c$  и  $x_T$ , для которых указанные требования соблюдаются при минимальном расходе топлива. Целевая функция в данном случае совпадает с одной из входных переменных – расходом топлива.

Для упрощения математической модели примем следующие допущения:

1. Температуры металла, футеровки и дымовых газов постоянны по ширине печи.

2. Нагрев металла в методической и сварочной зонах является симметричным, так что расчет теплообмена в этих зонах можно проводить только для одной (верхней) половины рабочего пространства печи.

3. Температуры футеровки и продуктов сгорания, заполняющих сварочную и томильную зоны, постоянны в пределах каждой из этих зон.

4. В пределах томильной зоны температура поверхности металла изменяется достаточно слабо, так что при решении задачи внешнего теплообмена всю эту поверхность можно рассматривать как единую расчетную зону.

5. Плотность потока тепловых потерь через футеровку печи приближенно равна плотности потока конвективной теплоотдачи от дымовых газов к внутренней поверхности футеровки, поэтому лучистую составляющую результирующего теплового потока на этой поверхности можно считать равной нулю.

6. Лучистым теплообменом между сварочной и томильной зонами можно пренебречь.

7. Для всех поверхностных зон коэффициент конвективной теплоотдачи  $\alpha$  имеет постоянное значение.

8. Состав продуктов сгорания постоянен по всему рабочему пространству печи, а их средняя удельная теплоемкость  $c_{p,п.сг}$  не зависит от температуры.

9. Все тела, принимающие участие в теплообмене (металл, кладка, продукты сгорания), являются серыми.

Введем систему координат, в которой ось  $x$  совпадает с направлением движения металла, ось  $y$  перпендикулярна его поверхности, а ось  $z$  направлена по ширине печи. Начало координат выберем во входном сечении печи в центральной плоскости заготовки, являющейся плоскостью симметрии температурного поля. С учетом первого допущения, справедливого при достаточно большой ширине печи, можно считать, что рабочее пространство имеет бесконечную протяженность по направлению оси  $z$  и проводить расчет теплообмена на единицу ширины печи.

Для решения задачи сопряженного теплообмена используем итерационную схему (см. п. 1), в рамках которой решение задачи внешнего теплообмена устанавливает распределение плотности теплового потока на поверхности металла, соответствующее заданному распределению температуры на этой поверхности; целью решения задачи внутреннего теплообмена является при этом уточнение распределения температуры на поверхности металла с учетом найденного распределения плотности теплового потока.

#### *Задача внешнего теплообмена*

Применяя зональный метод решения задачи внешнего теплообмена, разобьем рабочее пространство печи на расчетные зоны согласно схеме, приведенной на рис. 65. С учетом указанных выше допущений будем рассматривать газовые объемы в пределах сварочной II и томильной III зон как единые объемные зоны, а соответствующие им поверхности кладки — как единые поверхностные зоны. На поверхности металла в пределах сварочной зоны II выделим пять расчетных участков длиной  $L_1 = 1,5$  м каждый, а в пределах томильной зоны III будем рассматривать эту поверхность как единую расчетную зону. Для учета изменения температуры газа, кладки и металла по длине методической зоны I разобьем ее на шесть одинаковых участков длиной  $L_1 = 1,5$  м каждый и выделим соответствующие им поверхностные и объемные расчетные зоны.

Пренебрегая лучистым теплообменом между сварочной и томильной зонами, разделим рабочее пространство печи на две замкнутых в радиационном отношении подсистемы, одна из которых включает в себя методическую I и сварочную II зоны, а другая — томильную III зону. Решение задачи внешнего теплообмена будем проводить для каждой из этих подсистем независимо друг от друга, учитывая лишь конвективный перенос тепла продуктами сгорания, поступающими из томильной в сварочную зону.



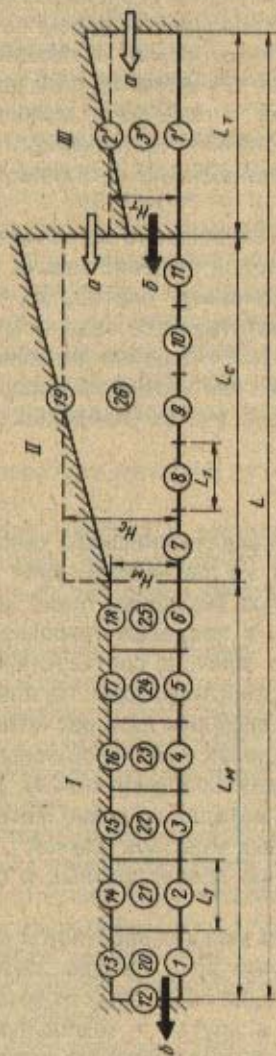


Рис. 65. Схема разбиения рабочего пространства методической печи на расчетные зоны. Стрелками обозначены направления движения топлива и воздуха (а) и продуктов сгорания (б)

### Расчет внешнего теплообмена в томильной зоне

С учетом указанных выше допущений в пределах томильной зоны III можно выделить три расчетные зоны (см. рис. 65): 1' – поверхность металла; 2' – поверхность кладки и 3' – газовый объем, и использовать для решения внешней задачи алгоритм, описанный в примере 4.11. В рамках этого алгоритма заданными величинами считаются температура поверхности металла  $T_{1'}$ , поток результирующего излучения на поверхности кладки  $Q_{2'}^0 = 0$  и результирующий тепловой поток для объемной зоны  $Q_{3'} = -Q_{3'}^v$ , где в рассматриваемом случае мощность тепловыделения в газовом объеме  $Q_{3'}^v = V_T Q_H^v$ , а  $V_T = \chi_T V$  – расход топлива в томильной зоне. В результате расчета определяются следующие величины: результирующий тепловой поток на поверхности металла  $\tilde{Q}_{1'}$ ; температурам кладки  $T_{2'}$ ; температура продуктов сгорания, поступающих из томильной в сварочную зону  $T_{3'}$  (в дальнейшем, при анализе внешнего теплообмена в сварочной зоне, будем обозначать эту температуру через  $T_{п.с.г.т}$ ).

### Расчет внешнего теплообмена в методической и сварочной зонах

В пределах методической и сварочной зон печи введем следующую нумерацию расчетных зон (см. рис. 65):  $i = 1, \dots, 11$  для зон на поверхности металла;  $i = 12, \dots, 19$  для зон на поверхности кладки;  $i = 20, \dots, 26$  для объемных газовых зон. Итак, в данном случае общее число зон  $l = 26$ , число поверхностных зон  $m = 19$ , число объемных зон  $n = 6$ .

Для расчета сложного теплообмена применим резольвентный зональный метод, позволяющий значительно упростить алгоритм и повысить эффективность численного решения задачи.

**Определение разрешающих обобщенных угловых коэффициентов излучения.** Рассматривая все поверхностные зоны (за исключением поверхности кладки сварочной зоны) и боковые поверхности объемных зон как бесконечные полосы, расположенные в параллельных или перпендикулярных плоскостях, геометрические угловые коэффициенты излучения  $\psi_{ki}$  между этими зонами найдем по формулам (5.8) и (5.10). При расчете значений угловых коэффициентов для поверхности кладки сварочной зоны используем свойство замкнутости геометрических угловых коэффициентов излучения.

Для определения обобщенных угловых коэффициентов излучения  $\psi_{ki}$  используем формулу (4.121), в которой суммирование производится по всем объемным зонам, разделяющим  $k$ -тую и  $i$ -тую зоны

$$\psi_{ki} = \psi_{ki} \exp\left(-\sum_j k_j s_j^{\text{эф}}\right), \quad k, i = 1, \dots, 26. \quad (5.76)$$



где  $k_j$  — коэффициент поглощения газа в пределах  $j$ -той объемной зоны;  $s_j^{\text{эф}} = 3,6 V_j / F_j$  — эффективная длина пути луча для  $j$ -той объемной зоны. Зависимость коэффициента поглощения газа  $k_j$  от парциальных давлений  $p_{\text{CO}_2}$  и  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  в продуктах сгорания, эффективной длины пути луча  $s_j^{\text{эф}}$  и температуры газа  $T_j$  может быть выражена соотношением (5.38).

После нахождения обобщенных угловых коэффициентов излучения и коррекции их значений по свойствам замкнутости и взаимности величины разрешающих обобщенных коэффициентов излучения  $\Psi_{ki}$  определяются путем решения системы уравнений (4.71) с помощью подпрограммы RAZR (см. пример 4.4).

*Определение степеней черноты.* Считая газ серым, степень черноты  $i$ -той объемной зоны найдем по формуле

$$\varepsilon_i = 1 - \exp(-k_i s_i^{\text{эф}}), \quad i = 20, \dots, 26. \quad (5.77)$$

Степени черноты поверхностей металла и кладки будем считать независимыми от температуры и равными соответственно  $\varepsilon_{\text{м}} = 0,8$  и  $\varepsilon_{\text{кл}} = 0,6$ .

*Определение коэффициентов радиационного обмена.* Рассчитав значения разрешающих обобщенных угловых коэффициентов излучения, зная степени черноты всех зон и учитывая, что все тела, участвующие в теплообмене, являются серыми, найдем коэффициенты радиационного обмена по формуле (4.75)

$$a_{ki} = \varepsilon_{k0} F_k (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki}), \quad k, i = 1, \dots, 26. \quad (5.78)$$

*Определение мощности тепловыделения в объемных зонах.* В пределах сварочной зоны ( $i = 26$ ) мощность тепловыделения определяется следующим выражением:

$$Q_{26}^{\text{в}} = B_{\text{с}} Q_{\text{н}}^{\text{р}}, \quad (5.79)$$

где  $B_{\text{с}} = 0,5 x_{\text{с}} V$  — расход топлива в сварочной зоне [множитель 0,5 учитывает, что расчет производится для одной (верхней) половины сварочной зоны]. Объемное тепловыделение в пределах методической зоны отсутствует:  $Q_i^{\text{в}} = 0$  при  $i = 20, \dots, 25$ .

*Определение коэффициентов конвективного обмена.* Используя выражения (4.225) — (4.227) для коэффициентов конвективного обмена учтем, что потоки массы топлива и воздуха, вводимые в сварочную зону, равны соответственно  $B_{\text{с}}$  и  $B_{\text{с}} \Omega K_{\text{р.в}}$ , а поток массы продуктов сгорания, поступающий из томильной зоны, равен  $B_{\text{т}}(1 + \Omega K_{\text{р.в}})$ . Полный поток массы продуктов сгорания в рассматриваемой системе равен

$$G_{\text{п.сг}} = (B_{\text{с}} + B_{\text{т}})(1 + \Omega K_{\text{р.в}}). \quad (5.80)$$

Учтем также, что согласно одному из упрощающих допущений средняя удельная теплоемкость продуктов сгорания  $c_{рп.сг}$  не зависит от температуры. В этом случае, преобразуя выражения (4.225), получим, что для всех объемных зон, кроме сварочной,  $g_i^0 = 0$  ( $i = 20, \dots, 25$ ), а для сварочной зоны ( $i = 26$ )

$$g_{26}^0 = c_{рТ} T_T B_c + c_{рв} T_B B_c \Omega K_{р.в} + c_{рп.сг} T_{п.сг.Т} B_T (1 + \Omega K_{р.в}) + 273 [(c_{рп.сг} - c_{рТ}) B_c + (c_{рп.сг} - c_{рв}) B_c \Omega K_{р.в}], \quad (5.81)$$

где  $T_T$  и  $T_B$  — температуры топлива и воздуха;  $c_{рТ}$  и  $c_{рв}$  — средние удельные теплоемкости топлива и воздуха в интервале температур от 273 К до  $T_T$  и  $T_B$  соответственно.

Коэффициенты конвективного обмена  $g_{ki}$  для объемных зон ( $i = 20, \dots, 26$ ) в рассматриваемом случае вычисляются по следующим формулам [сравните с выражениями (4.226)]:

$$g_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j; k \neq i+1, k \neq i; \\ \alpha F_j & \text{при } k = j; \\ c_{рп.сг} G_{п.сг} & \text{при } k = i+1; \\ -(\alpha \sum_j F_j + c_{рп.сг} G_{п.сг}) & \text{при } k = i, \end{cases} \quad (5.82)$$

где  $j$  — номера поверхностных зон, смежных с  $i$ -той объемной зоной.

Для поверхностных зон ( $i = 1, \dots, 19$ ) по формулам (4.227) получим  $g_i^0 = 0$  и

$$g_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, k \neq i; \\ \alpha F_j & \text{при } k = j; \\ -\alpha F_j & \text{при } k = i, \end{cases} \quad (5.83)$$

где  $j$  — номер смежной объемной зоны.

*Запись и решение системы зональных уравнений.* Поскольку целью расчета внешнего теплообмена на каждом шаге итерационного решения сопряженной задачи является определение зональных значений результирующих тепловых потоков  $\tilde{Q}_i$  на поверхности металла при заданных зональных значениях температур  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ), зоны на поверхности металла являются зонами I рода ( $l_1 = 11$ ). Соответствующие зональные уравнения представляют собой явные формулы (4.228)

$$\tilde{Q}_i = \sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) + g_i^0, \quad i = 1, \dots, 11, \quad (5.84)$$

по которым производится вычисление результирующих потоков после нахождения всех неизвестных значений температур.

Зоны на поверхности кладки ( $i = 12, \dots, 19$ ) являются зонами II рода: для них заданы значения потоков результирующего излучения



( $Q^p = 0$ ), а искомыми являются температуры  $T_i$ . Объемные газовые зоны ( $i = 20, \dots, 26$ ) также представляют собой зоны II рода, для которых известны значения результирующих потоков  $\bar{Q}_i = -Q_i^v$ , а требуется определить температуры  $T_i$ . Итак, в рассматриваемом случае общее число зон II рода  $I_2 = 15$ .

Зональные уравнения (4.76) для зон на поверхности кладки и (4.229) для объемных зон в данном случае принимают вид:

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 = 0, \quad i = 12, \dots, 19; \quad (5.85)$$

$$\sum_k (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) + g_i^p + Q_i^v = 0, \quad i = 20, \dots, 26. \quad (5.86)$$

Для решения системы уравнений (5.85), (5.86) относительно температур зон II рода  $T_i$  ( $i = 12, \dots, 26$ ) перепишем ее, обозначив в каждом уравнении через  $z_i$  сумму первых  $I_1 = 11$  слагаемых, определяемых известными температурами зон на поверхности металла:

$$z_i = \sum_{k=1}^{11} a_{ki} T_k^4, \quad i = 12, \dots, 19; \quad (5.87)$$

$$z_i = \sum_{k=1}^{11} (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k), \quad i = 20, \dots, 26.$$

Подстановка этих величин в уравнения (5.85), (5.86) приводит их к следующему виду:

$$\sum_{k=12}^{26} a_{ki} T_k^4 + z_i = 0, \quad i = 12, \dots, 19; \quad (5.88)$$

$$\sum_{k=12}^{26} (a_{ki} T_k^4 + g_{ki} T_k) + z_i + g_i^p + Q_i^v = 0, \quad i = 20, \dots, 26.$$

В полученных уравнениях явно выделены слагаемые, содержащие искомые температуры зон II рода.

Применяя для решения системы зональных уравнений (5.88) итерационный метод Ньютона, обозначим их левые части через  $\Phi_i(T_{12}, \dots, T_{26})$ ,  $i = 12, \dots, 26$  и найдем выражения для частных производных от каждой функции  $\Phi_i$  по температурам  $T_k$  ( $k = 12, \dots, 26$ ). Пренебрегая зависимостью коэффициентов радиационного обмена от искомых температур<sup>1</sup>, получим

<sup>1</sup> При применении метода Ньютона не требуется точного вычисления частных производных, так как их значения определяют лишь очередное приближение решения системы уравнений, не влияя на окончательный результат.

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial T_k} = \begin{cases} 4a_{kj} T_k^3 & \text{при } i=12, \dots, 19; \\ 4a_{kj} T_k^3 + g_{kj} & \text{при } i=20, \dots, 26. \end{cases} \quad (5.89)$$

Алгоритм, реализующий метод Ньютона в рассматриваемом случае, включает в себя следующие этапы (см. рис. 47):

1. Задание начального приближения искомых температур  $T_k = T_k^{(0)}$ ,  $k = 12, \dots, 26$ . Эти температуры в начальном приближении можно, например, принять одинаковыми и равными температуре продуктов сгорания на выходе из томильной зоны:  $T_k^{(0)} = T_{\text{п.ог.т}}$ .

2. Вычисление "невязок"  $\Phi_i$ ,  $i = 12, \dots, 26$ .

3. Вычисление частных производных  $\partial \Phi_i / \partial T_k$ ,  $i, k = 12, \dots, 26$  по формулам (5.89).

4. Определение смещений  $\Delta T_k$ ,  $k = 12, \dots, 26$  путем решения системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial T_{12}} \Delta T_{12} + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial T_{26}} \Delta T_{26} = \Phi_i, \quad i = 12, \dots, 26. \quad (5.90)$$

5. Нахождение нового приближения искомых температур по формуле

$$T_k^* = T_k - \Delta T_k, \quad k = 12, \dots, 26. \quad (5.91)$$

6. Проверка условия окончания итераций  $\max_k |\Delta T_k / T_k| < \Delta$ , где

$\Delta$  — заданная по условию величина, определяющая относительную погрешность расчета.

7. Присваивание новых значений переменных  $T_k$  ( $T_k = T_k^*$ ).

Отметим, что для учета зависимости коэффициентов радиационного обмена от искомых температур объемных газовых зон, необходимо пересчитывать значения степеней черноты этих зон и разрешающих обобщенных угловых коэффициентов излучения на каждом шаге итераций<sup>1</sup>.

#### Задача внутреннего теплообмена

Для расчета температурного поля  $T(x, y)$  нагреваемых заготовок в пределах методической и сварочной зон используем уравнение (5.7) в области  $0 < x < L_m + L_c$ ,  $0 < y < \delta$

$$c \cdot u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5.92)$$

<sup>1</sup> В общем случае следует учитывать влияние температур зон II рода также и на коэффициенты конвективного обмена.



со следующими граничными условиями:  
во входном сечении печи (при  $x = 0$ )

$$T(0, y) = T_n, \quad (5.93)$$

где  $T_n$  — начальная температура металла;  
в плоскости симметрии температурного поля (при  $y = 0$ )

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad (5.94)$$

на поверхности металла (при  $y = \delta$ )

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = q_w(x). \quad (5.95)$$

В силу допущений зонального метода плотность результирующего теплового потока на поверхности металла является постоянной в пределах каждой расчетной зоны; таким образом, на протяжении методической и сварочной зон ( $0 < x < L_m + L_c$ )

$$q_w(x) = \tilde{Q}_i / L_i \text{ при } (i-1)L_i < x < iL_i, \quad i = 1, \dots, 11.$$

В пределах томильной зоны ( $L_m + L_c < x < L$ ) нагрев заготовок является односторонним, поэтому расчет температурного поля необходимо производить по всей толщине металла, т.е. в области  $-\delta < y < \delta$ . В этом случае вместо условия (5.94) следует записать граничное условие на нижней поверхности заготовки, которое при пренебрежении отводом тепла от этой поверхности принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-\delta} = 0. \quad (5.96)$$

С учетом постоянства плотности результирующего теплового потока на поверхности металла на протяжении томильной зоны в граничном условии (5.95) следует положить  $q_w(x) = \tilde{Q}_1 / L_T$ .

Решение уравнения теплопроводности (5.92) с граничными условиями (5.93) — (5.95) произведем методом конечных разностей, описанным в гл. III применительно к задачам нестационарной теплопроводности. Для того чтобы более наглядно показать возможность использования этого метода в рассматриваемом случае, перейдем от координаты  $x$  к переменной  $t = x/u$ , имеющей смысл времени, в течение которого некоторое фиксированное сечение нагреваемой заготовки перемещается в печи на расстояние  $x$ . В результате вместо уравнения (5.92) получим соотношение, совпадающее по форме с уравнением нестационарной теплопроводности (3.6)

$$c' \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5.97)$$

с начальным условием (при  $t = 0$ )

$$T(0, y) = T_n, \quad (5.98)$$

граничными условиями (5.95) при  $0 < t < t_M + t_C$  и (5.96) при  $t_M + t_C < t < t_L$  и граничным условием II рода на поверхности металла

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = q_w(t), \quad (5.99)$$

где плотность внешнего теплового потока является кусочно-постоянной функцией времени

$$q_w(t) = \begin{cases} \tilde{Q}_I / L_1 & \text{при } (i-1)t_1 < t < it_1, i = 1, \dots, 11; \\ \tilde{Q}_T / L_T & \text{при } t_M + t_C < t < t_L, \end{cases}$$

здесь  $t_1 = L_1/u$  – промежуток времени, в течение которого заготовка проходит одну расчетную зону в пределах методической и сварочной зон печи;  $t_M = L_M/u$  и  $t_C = L_C/u$  – продолжительность нагрева заготовки соответственно в методической и сварочной зонах;  $t_L = L/u$  – полное время нагрева металла в печи.

Для решения приведенной задачи теплопроводности применим разностную схему Кранка – Николсона, обладающую повышенной точностью при достаточно больших значениях шага по времени. Построение и способ реализации этой разностной схемы описаны в гл. III.

В результате расчета определим дискретное температурное поле в моменты времени  $t_k = k\Delta t$  ( $k = 1, 2, \dots, k_L$ ), где  $\Delta t$  – шаг по времени;  $k_L = t_L/\Delta t$  – число шагов, соответствующее полному времени пребывания металла в печи. В дальнейшем будем использовать также следующие обозначения:  $k_1$  – число шагов по времени, соответствующее прохождению заготовкой одной расчетной зоны в пределах методической и сварочной зон печи;  $T_w^k$  – температура поверхности металла в момент времени  $t_k$ .

#### Решение задачи сопряженного теплообмена

Уточним содержание основных этапов алгоритма решения задачи сопряженного теплообмена, приведенного в п. 1:

1. Задание начального приближения температур расчетных зон на поверхности металла  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ) и  $T_1'$ .

2. Решение внешней задачи: определение зональных значений результирующих тепловых потоков на поверхности металла  $\tilde{Q}_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ) и  $\tilde{Q}_1'$ .



3. Решение внутренней задачи: расчет изменения температуры поверхности металла по длине печи  $T_w^k$  ( $k = 1, 2, \dots, k_L$ ), соответствующего зональным значениям результирующих тепловых потоков, найденных в п. 2.

4. Определение уточненных значений зональных температур  $T_i^*$  ( $i = 1, \dots, 11$ ) и  $T_1^*$  путем усреднения температуры поверхности металла в пределах расчетных зон по формулам

$$T_i^* = \frac{1}{k_1} \sum_{k=(i-1)k_1+1}^{ik_1} T_w^k, i=1, \dots, 11 \text{ и } T_1^* = \frac{1}{k_L - 11k_1} \sum_{k=11k_1+1}^{k_L} T_w^k,$$

где  $k_L - 11k_1$  — число шагов по времени, соответствующее нагреву металла в пределах томильной зоны.

5. Сравнение найденных температур с первоначально заданными и проверка условия окончания итераций  $\max |T^* - T| < \Delta$ , где  $T$  и  $T^*$  — совокупности значений температур в предыдущем и последующем приближениях;  $\Delta$  — величина, определяющая погрешность расчета.

6. При необходимости продолжения итерационного процесса присваивание уточненных значений температур  $T^*$  переменным  $T$  ( $T_i = T_i^*, i = 1, \dots, 11, T_1 = T_1^*$ ) и возврат к п. 2.

*Определение минимального расхода топлива, обеспечивающего заданное качество нагрева*

Применим рассмотренную математическую модель сопряженного теплообмена для определения минимального расхода топлива  $V_{\min}$ , кг/(м · с) (в расчете на 1 м ширины печи), обеспечивающего достижение поверхностью металла заданной конечной температуры  $T_{\text{вк}} = 1500$  К при перепаде температур по сечению заготовки на выходе из печи  $\Delta T_{\text{кон}}$ , не превышающем заданного по условию значения  $\Delta T_{\text{кон max}} = 50$  К.

Нагреваемые заготовки представляют собой слэбы из малоуглеродистой стали толщиной  $2\delta = 0,3$  м. Удельная объемная теплоемкость стали  $c' = 5 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К), коэффициент теплопроводности зависит от температуры:  $\lambda = 54 - 0,03(T - 300)$  Вт/(м · К) при  $300 \text{ К} \leq T \leq 1100 \text{ К}$ ;  $\lambda = 30$  Вт/(м · К) при  $T > 1100$  К. Начальная температура металла  $T_H = 300$  К.

Топливом служит смесь природного и доменного газов с теплотой сгорания  $Q_H^D = 21,3$  МДж/кг (20,9 МДж/м<sup>3</sup>). Расчет горения топлива позволяет установить значения стехиометрического числа  $\Omega = 7,5$  м и парциальных давлений  $p_{\text{CO}_2} = 10$  кПа и  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 16$  кПа (при коэффициенте расхода воздуха  $K_{p,v} = 1,1$ ). Среднюю удельную теплоемкость продуктов сгорания  $c_{p,сг}$  ориентировочно примем равной 1300 Дж/(кг · К) [1625 Дж/(м<sup>3</sup> · К)]. Температура топлива  $T_T = 300$  К, температура подогрева воздуха  $T_B = 700$  К. При указанных температурах  $c_{p,T} = 1500$  Дж/(кг · К),  $c_{p,B} = 1000$  Дж/(кг · К).

Коэффициент конвективной теплоотдачи положим равным  $\alpha = 15$  Вт/(м<sup>2</sup> · К). Производительность печи (в расчете на 1 м ширины)  $P = 2,92$  кг/(м · с) [10,5 т/(м · ч)]; при этом удельная производительность (напряжение активного пода)  $p = P/L = 0,139$  кг/(м<sup>2</sup> · с) [500 кг/(м<sup>2</sup> · ч)], и скорость перемещения заготовок в печи  $u = P/2\delta\rho = 1,25 \cdot 10^{-3}$  м/с ( $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> — плотность стали). Интервал времени

$t_1$ , в течение которого заготовка проходит одну расчетную зону длиной  $L_1 = 1,5$  м, разобьем на десять элементарных интервалов, т.е. положим  $k_1 = 10$ , тогда шаг по времени  $\Delta t = L_1 / uk_1 = 120$  с.

Расчет проводим в следующей последовательности:

1. Задаем исходные значения  $x_C$  и  $x_T$ , определяющие распределение топлива между сварочной и томильной зонами.

2. Подбираем расход топлива  $B$  таким образом, чтобы конечная температура поверхности металла равнялась заданному значению  $T_{\text{кон}}$ .

3. Если при этом конечный перепад температур по сечению заготовки  $\Delta T_{\text{кон}}$  превышает максимально допустимое значение  $\Delta T_{\text{кон max}}$ , перераспределяем топливо между сварочной и томильной зонами, уменьшая величину  $x_T$ ; если конечный перепад температур оказывается меньше допустимого, т.е. режим является приемлемым, для нахождения минимального расхода топлива следует сместить тепловую нагрузку к концу печи, увеличив значение  $x_T$ .

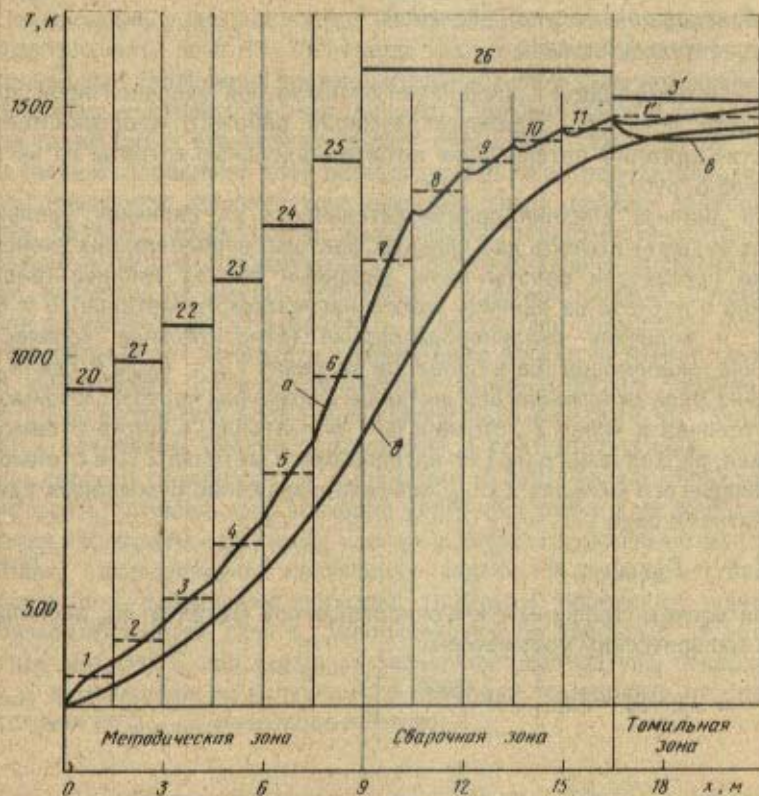


Рис. 66. Изменение температуры верхней поверхности (а) и средней плоскости заготовки (б), а также нижней поверхности заготовки в пределах томильной зоны (в) по длине печи. Горизонтальные отрезки представляют среднетемпературные температуры поверхности металла (штриховые линии) и дымовых газов (сплошные линии). Цифры соответствуют номерам расчетных зон



4. Вновь изменяем суммарный расход топлива, приводя конечную температуру металла в соответствие с заданной температурой  $T_{\text{вкон}}$ , и возвращаемся к п. 3.

Описанная процедура повторяется до тех пор, пока не будет найден минимальный расход топлива, обеспечивающий требуемое качество нагрева металла. Для рассматриваемого примера получим  $B_{\text{min}} = 0,122 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$  [ $0,124 \text{ м}^3/(\text{м} \cdot \text{с})$ ] при  $\alpha_{\text{с}} = 96,5 \%$ ,  $\alpha_{\text{т}} = 3,5 \%$ \*

Соответствующие этим значениям распределения по длине печи температур дымовых газов, поверхности и центра нагреваемого металла приведены на рис. 66. Отметим, что немонотонное изменение температуры верхней поверхности металла в пределах сварочной зоны, конечно, не имеет никакого физического смысла и объясняется ступенчатым изменением плотности внешнего теплового потока по длине печи, вытекающим из допущений зонального метода.

### Определение оптимальной удельной производительности печи

Рассмотрим задачу определения оптимальной удельной производительности печи при заданных размерах рабочего пространства. В качестве критерия оптимизации выберем удельные затраты на нагрев металла  $S$ , руб/кг.

При анализе влияния производительности на величину удельных затрат будем учитывать два главных фактора, определяющих экономические показатели работы печи: удельный расход топлива (расход топлива в расчете на единицу массы нагреваемого металла)  $b = B/P$ , кг/кг, и величину окалинообразования (относительное количество металла, окисляющегося в процессе нагрева)  $\alpha_{\text{ок}} = \delta_{\text{ок}}/2\delta$ , где  $\delta_{\text{ок}}$  — толщина слоя окислившегося металла. Обозначим через  $Z_1$  стоимость 1 кг топлива и через  $Z_2$  стоимость 1 кг металла. Сложив стоимость топлива, расходуемого на 1 кг нагреваемого металла  $Z_1 b$  и стоимость окислившегося металла  $Z_2 \alpha_{\text{ок}}$ , получим выражение суммарных удельных затрат в виде

$$S = Z_1 b + Z_2 \alpha_{\text{ок}}. \quad (5.100)$$

Для расчета толщины слоя окислившегося металла  $\delta_{\text{ок}}$  воспользуемся эмпирическим уравнением

$$\frac{d\delta_{\text{ок}}^2}{dt} = 2,2 \cdot 10^{-4} \exp \left[ - \frac{18000}{T_{\text{w}}(t)} \right],$$

\* Заниженное значение доли расхода топлива в томительной зоне по сравнению с практическими данными объясняется, в частности, тем, что в рамках рассматриваемой модели не учитываются потери тепла излучением и возможный подсос холодного воздуха через окно торцевой выдачи металла из печи.

решение которого можно получить простейшим одношаговым методом

$$\delta_{\text{ок}}^{k+1} = \sqrt{(\delta_{\text{ок}}^k)^2 + 2,2 \cdot 10^{-4} \exp\left(-\frac{18000}{T_w^k}\right) \Delta t},$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени;  $T_w^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_L$  – дискретные значения температуры поверхности металла, найденные в результате расчета внутреннего теплообмена<sup>1</sup>.

Величину удельного расхода топлива для каждого заданного значения производительности печи  $P = pL$  (напомним, что расчет проводится на 1 м ширины печи) найдем по формуле  $b = B_{\text{min}}/P$ , где минимальный расход топлива, обеспечивающий требуемое качество нагрева, определяется описанным выше способом.

Зависимость удельных затрат на нагрев металла от удельной производительности печи  $S = f(P)$  имеет экстремальный характер. Действительно, для увеличения производительности при заданной длине печи необходимо увеличить расход топлива; удельный расход топлива при этом также будет возрастать за счет повышения температуры уходящих газов и сокращения доли тепла, идущего на нагрев металла. Кроме того, повышение температуры дымовых газов должно приводить к более резкому возрастанию температуры поверхности металла по длине печи, сопровождающемуся ускорением окалинообразования, при этом, несмотря на уменьшение общего времени нагрева, потери металла с окалиной могут возрастать. В результате повышение производительности будет приводить к увеличению затрат на нагрев металла. При уменьшении производительности удельный расход топлива снижается, но возрастает время пребывания металла в печи, что сопровождается усилением окалинообразования и соответствующим увеличением первого слагаемого в выражении (5.100). Таким образом, при некотором (оптимальном) значении удельной производительности печи должен наблюдаться минимум удельных затрат на нагрев металла.

Итак, сформулируем постановку задачи оптимизации тепловой работы печи следующим образом: требуется определить удельную производительность печи  $p$ , минимизирующую удельные затраты на нагрев металла  $S$  при заданных значениях температуры поверхности  $T_{\text{вкон}}$  и максимально допустимого перепада температур по сечению заготовки  $\Delta T_{\text{кон max}}$  на выходе из печи.

<sup>1</sup> При приближенных расчетах можно считать, что образование слоя окалины не оказывает существенного влияния на нагрев металла, так как возникающее при этом дополнительное тепловое сопротивление на поверхности металла компенсируется тепловыделением в процессе окисления железа.



Иллюстрацией решения этой задачи может служить рис. 67, на котором представлены результаты расчета удельного расхода топлива  $b$ ,  $\text{м}^3/\text{т}$ , величины окалинообразования  $x_{\text{ок}}$ , %, и удельных затрат на нагрев металла  $S$ , руб/т, при изменении удельной производительности печи от 400 до 800  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$ . При определении удельных затрат приняты значения  $Z_1 = 16$  руб/м<sup>3</sup> и  $Z_2 = 75$  руб/т.

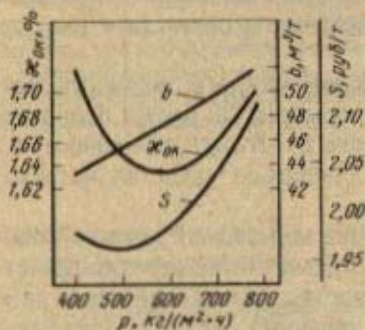


Рис. 67. К определению оптимальной удельной производительности печи.

Приведенные графики подтверждают справедливость сделанных выше качественных выводов о влиянии производительности печи на экономические показатели ее работы и позволяют оценить оптимальное значение удельной производительности печи  $p_{\text{опт}} \approx 500$   $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$ .

Описанная в настоящем разделе математическая модель может быть использована для исследования тепловой работы толкательных методических печей при решении, например, следующих задач:

оценка величины термических напряжений, обусловленных неравномерностью нагрева металла до его перехода в пластическое состояние; исследование зависимости этой величины от производительности печи, толщины заготовки и теплофизических характеристик стали при заданном конечном температурном состоянии металла;

анализ влияния толщины заготовки и теплофизических характеристик стали на удельный расход топлива, обеспечивающий заданное качество нагрева, при неизменной производительности печи;

анализ зависимости распределения расхода топлива по зонам (при заданном качестве нагрева) от вида топлива;

анализ тепловой работы печи с учетом зависимости степени черноты поверхности металла (окалины) от температуры;

анализ влияния стоимости металла и топлива на оптимальную удельную производительность печи.

## Контрольные вопросы

1. В чем состоит особенность решения задачи сопряженного теплообмена в протяжной печи при расчете нагрева термически тонкого тела?
2. Какие упрощающие допущения положены в основу математической модели нагрева стальной ленты в протяжной электрической печи сопротивления?
3. Каким образом получено соотношение (5.19) между зональными значениями потоков результирующего излучения и температур на поверхности ленты?
4. Почему задача охлаждения на воздухе движущейся стальной ленты является сопряженной?
5. Каковы основные этапы решения задачи внешнего теплообмена в обжиговой вращающейся печи?
6. Как ставится задача оптимизации режима обжига материала во вращающейся печи?
7. Каковы особенности постановки и решения задачи внутреннего теплообмена при расчете нагрева металла в толкательной методической печи?
8. Какие оптимизационные задачи могут быть решены с использованием математической модели нагрева металла в толкательной методической печи?



# П Р И Л О Ж Е Н И Я

## П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

### ПРОГРАММА РАСЧЕТА НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ ПО ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

```

C      DIMENSION T(11),T1(11)
C      T(I),T1(I) - СЕТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
C                  В ПРЕДЫДУЩИЙ И ПОСЛЕДУЮЩИЙ
C                  МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ
C
C      DATA DELTA, A, ALAM, TN /0.08, 6.4E-6, 28., 1100. /
C      DATA TO, AL, TIME /2000., 350., 480. /
C      DELTA - ПОЛУТОЛЩИНА ТЕЛА, М
C      A     - КОЭФФИЦИЕНТ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ, М2/С
C      ALAM  - КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ВТ/МК
C      TN    - НАЧАЛЬНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ТЕЛА, К
C      TO    - ТЕМПЕРАТУРА ГАЗА, К
C      AL    - КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ, ВТ/М2К
C      TIME  - ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ НАГРЕВА, С
C
C      TYPE 100
100    FORMAT(' ШАГ ПО КООРДИНАТЕ, М: ', $)
C      ACCEPT*, DX
C      TYPE 200
200    FORMAT(' ШАГ ПО ВРЕМЕНИ, С: ', $)
C      ACCEPT*, DT
C      N=I F I X( DELTA/DX)      I      N      - ЧИСЛО ШАГОВ ПО КООРДИНАТЕ
C      KMAX=I F I X( TIME/DT)    I      KMAX  - ЧИСЛО ШАГОВ ПО ВРЕМЕНИ
C      B=AL*DX/ALAM
C      F=A*DT/DX**2
C
C      ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ:
C      DO 1 I=1, N+1
1      T(I)=TN
C
C      DO 4 K=1, KMAX      I      K - НОМЕР ШАГА ПО ВРЕМЕНИ
C      РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ:
C      DO 2 I=2, N
2      T1(I)=F*T(I-1)+(1-2*F)*T(I)+F*T(I+1)
C      T1(I)=(1-2*F)*T(I)+2*F*T(I+1)
C      T1(N+1)=2*F*(T(N)+B*TO)+(1-2*F*(1+B))*T(N+1)
C      DO 3 I=1, N+1
3      T(I)=T1(I)
4      CONTINUE
C
C      TYPE 300, (T(I), I=1, N+1)
300    FORMAT(11F7.1)
C
C      STOP
C      END
    
```

ПРОГРАММА РАСЧЕТА НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ ПО НЕЯВНОЙ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ  
РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

```

DIMENSION T(11),ALFA(10),BETA(10)
C   T(I) - СЕТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
C   ALFA(I),BETA(I) - ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ
C
DATA DELTA,A,ALAM,TN /0.08,6.4E-6,28.,1100./
DATA TO,AL,TIME /2000.,350.,480./
TYPE 100
FORMAT(' ШАГ ПО КООРДИНАТЕ,М: ',%)
ACCEPТ*,DX
TYPE 200
FORMAT(' ШАГ ПО ВРЕМЕНИ ,С: ',%)
ACCEPТ*,DT
N=I F I X (DELTA/DX)
KMAX=I F I X (TIME/DT)
B=AL*DX/ALAM
F=A*DT/DX**2
C
C   ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ:
DO 1 I=1,N+1
1   T(I)=TN
C
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ALFA(I),I=1,N:
ALFA(1)=2*F/(1+2*F)
DO 10 I=2,N
10  ALFA(I)=F/(1+F*(2-ALFA(I-1)))
C
DO 4 K=1,KMAX
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ BETA(I),I=1,N:
BETA(1)=T(1)/(1+2*F)
DO 2 I=2,N
2   BETA(I)=(T(1)+F*BETA(I-1))/(1+F*(2-ALFA(I-1)))
C
C   ПОСЛЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОГНОЗНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C   В МАССИВ T(I) ЗАПИСЫВАЮТСЯ НОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР
C
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ:
T(N+1)=(T(N+1)+2*F*(BETA(N)+B*TO))/(1+2*F*(1+B-ALFA(N)))
C
C   ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА:
DO 3 I=N,1,-1
3   T(I)=ALFA(I)*T(I+1)+BETA(I)
C
4   CONTINUE
C
TYPE 300,(T(I),I=1,N+1)
300 FORMAT(11F7.1)
C
STOP
END

```



## ПРОГРАММА РАСЧЕТА НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ ПО СХЕМЕ КРАНКА-НИКОЛСОНА

```

DIMENSION T(11),ALFA(10),BETA(10)
DATA DELTA,A,ALAM,TN /0.08,6.4E-6,28.,1100./
DATA TO,AL,TIME /2000.,350.,480./
TYPE 100
100 FORMAT(' ШАГ ПО КООРДИНАТЕ, М: ', $)
ACCEPT*,DX
TYPE 200
200 FORMAT(' ШАГ ПО ВРЕМЕНИ, С: ', $)
ACCEPT*,DT
N=I F I X(DELTA/DX)
KMAX=I F I X(TIME/DT)
B=AL*DX/ALAM
F=A*DT/DX**2
F2=0.5*F

C
C ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ:
DO 1 I=1,N+1
1 T(I)=TN
C
C ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ALFA(I), I=1,N:
ALFA(1)=F/(1+F)
DO 10 I=2,N
10 ALFA(I)=F2/(1+F2*(2-ALFA(I-1)))
C
DO 4 K=1,KMAX
C
C ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ BETA(I), I=1,N:
BETA(1)=(T(1)*(1-F)+T(2)*F)/(1+F)
DO 2 I=2,N
2 Z=F2*(T(I-1)+T(I+1))+(1-F)*T(I)
C
C BETA(I)=(Z+F2*BETA(I-1))/(1+F2*(2-ALFA(I-1)))
C
C ПОСЛЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОГНОЗНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C В МАССИВ T(I) ЗАПИСЫВАЮТСЯ НОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР
C
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ:
T(N+1)=(T(N+1)*(1-F*(1+B))+F*(T(N)+(BETA(N)+2*B*TO)))/
1(1+F*(1+B-ALFA(N)))
C
C ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА:
DO 3 I=N,1,-1
3 T(I)=ALFA(I)*T(I+1)+BETA(I)
C
4 CONTINUE
C
TYPE 300,(T(I),I=1,N+1)
300 FORMAT(11F7.1)
C
STOP
END

```

ПРОГРАММА РАСЧЕТА НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

```

C DIMENSION T(11),T1(11),ALFA(10),BETA(10)
C T(I) - СЕТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА
C T1(I) - ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ, ПО КОТОРЫМ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ
C КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

DATA DELTA,CR,TN /0.1,4,Е6,300./
DATA TO,AL,TIME /1400.,120.,1800./
ALAM(T)=53.5+0.12E-2*T-0.25E-4*T**2
CR - УДЕЛЬНАЯ (ОБЪЕМНАЯ) ТЕПЛОЕМКОСТЬ, ДЖ/М3К

C
C
100 TYPE 100
FORMAT(' ШАГ ПО КООРДИНАТЕ, М ', $)
ACCEPT*,DX
TYPE 200
200 FORMAT(' ШАГ ПО ВРЕМЕНИ, С ', $)
ACCEPT*,DT
TYPE 300
300 FORMAT(' ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ: ', $)
ACCEPT*,M
G=DT/(CR*DX**2)
N=IFIX(DELTA/DX)
N1=N+1
KMAX=IFIX(TIME/DT)
DO 1 I=1,N1
T(I)=TN
T1(I)=TN

C
DO 4 K=1,KMAX
DO 5 L=1,M+1 I L - НОМЕР ИТЕРАЦИИ
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ:
TP=0.5*(T1(I)+T1(I+1))
FP=G*ALAM(TP)
ALFA(I)=2*FP/(1+2*FP)
BETA(I)=T(I)/(1+2*FP)
DO 2 I=2,N
FM=FP
TP=0.5*(T1(I)+T1(I+1))
FP=G*ALAM(TP)
Z=1/(1+FP+FM*(1-ALFA(I-1)))
ALFA(I)=FP*Z
BETA(I)=(T(I)+FM*BETA(I-1))*Z
B=AL*DX/ALAM(TP)
T1(N1)=(T(N1)+2*FP*(B*TO+BETA(N)))/(1+2*FP*(1+B-ALFA(N)))
DO 3 I=N,1,-1
T1(I)=ALFA(I)*T1(I+1)+BETA(I)

C
CONTINUE

DO 6 I=1,N1
6 T(I)=T1(I)
4 CONTINUE

C
TYPE 400,T(1),T(N1)
400 FORMAT(' ТЕМПЕРАТУРА ЦЕНТРА, К ',F8.2/
1 ' ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ, К ',F8.2)

C
STOP
END

```



## ПРОГРАММА РАСЧЕТА НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ III РОДА

```

DIMENSION T(11),ALFA(10),BETA(10)
DATA DELTA,CR,ALAM,TN /0.1,4.0E6,30.,750./
DATA TO,EPS,TI ME,SI GMA /1600.,0.6,1920.,5.67E-8/
C TO - ТЕМПЕРАТУРА СВАРОЧНОЙ ЗОНЫ, К
C EPS - ПРИВЕДЕННАЯ СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ
C SI GMA - ПОСТОЯННАЯ СТЕФАНА-БОЛЬШМАНА
TYPE 100
FORMAT(' ШАГ ПО КООРДИНАТЕ, М ', $)
ACCEPT*,DX
TYPE 200
FORMAT(' ШАГ ПО ВРЕМЕНИ, С: ', $)
ACCEPT*,DT
TYPE 300
FORMAT(' ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ: ', $)
ACCEPT*,M
N=I F I X(DELTA/DX)
N1=N+1
KMAX=I F I X(TI ME/DT)
F=ALAM*DT/(CR*DX**2)
DO 1 I=1,N1
1 T(I)=TN
ALFA(1)=2*F/(1+2*F)
DO 10 I=2,N
10 C ALFA(I)=F/(1+F*(2-ALFA(I-1)))
DO 4 K=1,KMAX
BETA(1)=T(1)/(1+2*F)
DO 2 I=2,N
2 C BETA(I)=(T(I)+F*BETA(I-1))/(1+F*(2-ALFA(I-1)))
C НАХОЖДЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА
C МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ:
T1=T(N1)
DO 6 L=1,M+1 ! L - НОМЕР ИТЕРАЦИИ
6 C QO=EPS*SI GMA*(TO**4-T1**4)
DELT=QO*DX/ALAM
T1=(T(N1)+2*F*(DELT+BETA(N)))/(1+2*F*(1-ALFA(N)))
T(N1)=T1
DO 3 I=N,1,-1
3 C T(I)=ALFA(I)*T(I+1)+BETA(I)
4 C CONTINUE
TYPE 400,T(1),T(N1)
400 C FORMAT(' ТЕМПЕРАТУРА ЦЕНТРА, К: ',F8.2/
1 ' ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ, К: ',F8.2)
STOP
END

```

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ГАРНИССАЖА В ПРОЦЕССЕ  
ПЕРЕХОДА К НОВОМУ СТАЦИОНАРНОМУ СОСТОЯНИЮ

```

C      REAL*4 KO
C      KO - КРИТЕРИЙ КОССОВИЧА
C      DIMENSION TETA(100), ALFA(100), BETA(100)
C      TETA - ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ГАРНИССАЖА
C      ALFA, BETA - ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

C      DATA ALAM, C1, Q1, T1 /1.5, 3. E6, 6. E8, 1550. /
C      ALAM - КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ВТ/МК
C      C1 - УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ, ДЖ/МЭК
C      Q1 - УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОТА ПЛАВЛЕНИЯ, ДЖ/МЗ
C      T1 - ТЕМПЕРАТУРА ПЛАВЛЕНИЯ, К

C      DATA TO, T2, AL /2000., 350., 1000. /
C      TO - ТЕМПЕРАТУРА РАСПЛАВА, К
C      T2 - ТЕМПЕРАТУРА НАРУЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, К
C      AL - КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОТДАЧИ, ВТ/МЭК

C      DATA DELTAN, DY, DTN /1.2E-2, 2. E-4, 1. /
C      DELTAN - НАЧАЛЬНАЯ ТОЛЩИНА ГАРНИССАЖА, М
C      DY - ШАГ ПО КООРДИНАТЕ, М
C      DTN - НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ, С

C      DATA ALFA(1), BETA(1) /2*0. /

C      A=ALAM/C1
C      KO=Q1/(C1*(T1-T2))
C      G=AL*(TO-T1)*DY/(ALAM*(T1-T2))
C      NN=IFIX(DELTA/DY)
C      F=A*DTN/(DY**2)
C      TIME=0. ! TIME - ТЕКУЩЕЕ ВРЕМЯ, С
C      DELTA=DELTA ! DELTA - ТЕКУЩАЯ ТОЛЩИНА ГАРНИССАЖА, М
C      ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ:
C      DO 1 I=1, NN+1
C      TETA(I)=FLOAT(I-1)/NN
C      N=NN-1

C      CONTINUE
C      ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОГНОЗНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ:
C      DO 2 I=2, N
C      ALFA(I)=F/(1+F*(2-ALFA(I-1)))
C      BETA(I)=(TETA(I)+F*BETA(I-1))/(1+F*(2-ALFA(I-1)))
C      GAMMA=1-ALFA(N)-BETA(N)

C      ВЫЧИСЛЕНИЕ УТОЧНЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ F1:
C      F1=(GAMMA*F+KO+(1-TETA(N+1)))/G

C      IF(ABS(1-F/F1), LT. 0.001) GO TO 3
C      F=F1
C      GO TO 4

C      IF(F, GT. 250) GO TO 5

C      ОБРАТНАЯ ПРОГОНКА:
C      TETA(N+1)=1
C      DO 6 I=N, 1, -1

```



6  
C TETA(I)=ALFA(I)\*TETA(I+1)+BETA(I)

TIME=TIME+F\*DY\*\*2/A

DELTA=DELTA-DY

N=N-1

Q2=ALAM\*(TETA(2)-TETA(1))\*(T1-T2)/DY

TYPE 100, TIME, DELTA, Q2

100 FORMAT(' TIME= ', F5.1, ' C', 5X, ' DELTA= ', 3PF4.1, ' MM',  
1 5X, ' Q2= ', -3PF5.1, ' КВТ/М2')

GO TO 4

C 5 STOP

END

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7

### ПРОГРАММА РАСЧЕТА НАГРЕВА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЗАГОТОВКИ МЕТОДОМ РАСШЕЛЕНИЯ

C DIMENSION T(11,11), T1(11,11)

T(I, J) - СЕТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА

T1(I, J) - ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР

C DIMENSION ALFAY(10), ALFAZ(10), BETAY(10), BETAZ(10)

C ALFAY, BETAY, ALFAZ, BETAZ - ПРОГНОЗНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

DATA DELY, DELZ /0.08, 0.08/

DATA TN, ALAM, A /1100., 28., 6.4E-6/

DATA TO, AL, TIME /1800., 350., 480./

C DELY, DELZ - ШИРИНА И ВЫСОТА РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ, М  
C (ОСТАЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ СМ. В ПРИЛОЖЕНИИ 1)

TYPE 100

100 FORMAT(' ШАГ ПО ШИРИНЕ ЗАГОТОВКИ, М: ', \$)

ACCEPT\*, DY

TYPE 200

200 FORMAT(' ШАГ ПО ВЫСОТЕ ЗАГОТОВКИ, М: ', \$)

ACCEPT\*, DZ

TYPE 300

300 FORMAT(' ШАГ ПО ВРЕМЕНИ, С: ', \$)

ACCEPT\*, DT

NY=I FI X (DELY/DY)

NZ=I FI X (DELZ/DZ)

KMAX=I FI X (TIME/DT)

FY=A\*DT/DY\*\*2

FZ=A\*DT/DZ\*\*2

BY=AL\*DY/ALAM

BZ=AL\*DZ/ALAM

C ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ

DO 1 I=1, NY+1

DO 1 J=1, NZ+1

T(I, J)=TN

C ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОГНОЗНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ALFAY И ALFAZ:

ALFAY(1)=2\*FY/(1+2\*FY)

DO 2 I=2, NY

ALFAY(I)=FY/(1+FY\*(2-ALFAY(I-1)))

ALFAZ(1)=2\*FZ/(1+2\*FZ)

DO 3 J=2, NZ

```

3      ALFAZ(J)=FZ/(1+FZ*(2-ALFAZ(J-1)))
C
DO 4 K=1,KMAX      1      KMAX - НОМЕР ШАГА ПО ВРЕМЕНИ
C
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (3.126):
DO 5 J=1,NZ+1
BETAY(1)=T(1,J)/(1+2*FY)
DO 6 I=2,NY
6      BETAY(I)=(T(I,J)+FY*BETAY(I-1))/(1+FY*(2-ALFAY(I-1)))
      T(NY+1,J)=(T(NY+1,J)+2*FY*(TO*BY+BETAY(NY)))
      1/(1+2*FY*(1+BY-ALFAY(NY)))
DO 7 I=NY,1,-1
7      T(I,J)=ALFAY(I)*T(I+1,J)+BETAY(I)
5      CONTINUE
C
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (3.127):
DO 8 I=1,NY+1
BETAZ(1)=T(I,1)/(1+2*FZ)
DO 9 J=2,NZ
9      BETAZ(J)=(T(I,J)+FZ*BETAZ(J-1))/(1+FZ*(2-ALFAZ(J-1)))
      T(I,NZ+1)=(T(I,NZ+1)+2*FZ*(TO*BZ+BETAZ(NZ)))
      1/(1+2*FZ*(1+BZ-ALFAZ(NZ)))
DO 10 J=NZ,1,-1
10     T(I,J)=ALFAZ(J)*T(I,J+1)+BETAZ(J)
8      CONTINUE
C
4      CONTINUE
C
ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА:
TYPE 400,(T(I,1),I=1,NY+1)
400    FORMAT(' РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СРЕДНЕМ
1 СЕЧЕНИИ ЗАГОТОВКИ: '/10F7.1)
TYPE 500,(T(I,NZ+1),I=1,NY+1)
500    FORMAT(' РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА
1 ПОВЕРХНОСТИ ЗАГОТОВКИ: '/10F7.1)
C
STOP
END

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ 8

### ПРОГРАММА РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛОБМЕНА В РАБОЧЕМ ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЕЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИМ ЗОНАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

```

100    FORMAT(12X,'ПРИМЕНЕНИЕ ЗОНАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА РТО '/
1      23X,' В ДИАТЕРМИЧНОЙ СРЕДЕ' /
2      23X,20('*')// 'ВЕВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ: '/
3      3 ' ШИРИНА РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА В, М',18(' '),$)
110    FORMAT(' ВЫСОТА РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА Н, М',18(' '),$)
120    FORMAT(' ТЕМПЕРАТУРА МЕТАЛЛА ТМ, К',26(' '),$)
130    FORMAT(' УДЕЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ НАГРЕВАТЕЛЯ РН, КВТ/М2',11(' '),$)
135    FORMAT(' ПОТЕРИ ТЕПЛА ЧЕРЕЗ КЛАДКУ (В % ОТ МОЩНОСТИ' /
1      1 ' НАГРЕВАТЕЛЯ)',39(' '),$)
140    FORMAT(' СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА EPSM',23(' '),$)
150    FORMAT(' СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ НАГРЕВАТЕЛЯ EPSN',19(' '),$)
155    FORMAT(' СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ EPSK',24(' '),$)

```



```

160 FORMAT(25X,5(' '*)) /
170 1 * ЧИСЛО ЗОН НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА MM',17('.'),($
180 FORMAT(' ЧИСЛО ЗОН НА ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ MN',13('.'),($
190 FORMAT(' ЧИСЛО ЗОН НА ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ МК',6('.'),($
200 FORMAT(' ОБЩЕЕ ЧИСЛО ЗОН НЕ ДОЛЖНО БЫТЬ БОЛЬШЕ 100' )
210 FORMAT(' ПОГРЕШНОСТЬ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ, Z',
220 11('.'),($
230 FORMAT(/15X,'РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА'/15X,18(' '*))
240 FORMAT(' 1) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ QM BT/M2 ПО ЗОНАМ НА
250 1 ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА'/(X,5E12.4))
260 FORMAT(/' 2) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ TN,K ПО ЗОНАМ НА
270 1 ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ'/(X,10F7.1))
280 FORMAT(/' 3) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТК,K ПО ЗОНАМ НА
290 1 ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ'/(X,10F7.1))
300 FORMAT(' ПЕРЕЙТИ К РАСЧЕТУ НОВОГО ВАРИАНТА? (Y/N): ',($
310 FORMAT(' ВЕРНУТЬСЯ К НАЧАЛУ ПРОГРАММЫ? (Y/N): ',($
320 FORMAT(/' "BK": ',($
330 FORMAT(A1)

```

```

C
DIMENSION QF(100),QF1(100),T(100),QRK(100)
LOGICAL *1 LX,LY,LN
DATA LY,LN /'Y','N'/
DATA SIGMA /5.67E-8/

```

```

C
C
C
ОПЕРАТОРЫ-ФУНКЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗОН,
РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ (H1) И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ (H2)
ПЛОСКОСТЯХ ПО ФОРМУЛАМ (4.54) И (4.55)
H1(X, XM, XN, C) = 0.5*(SQRT((X+XM)**2+C)+SQRT((X-XN)**2+C)
1-SQRT((X+XM-XN)**2+C)-SQRT(X**2+C))
H2(X, Y, XM, XK) = 0.5*(SQRT(Y**2+(X+XM)**2)
1+SQRT(X**2+(Y+XK)**2)-SQRT((X+XM)**2+(Y+XK)**2)
2-SQRT(X**2+Y**2))

```

```

62
TYPE 100
ACCEPT*,B' | B - ШИРИНА РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА, М
BB=B*B
TYPE 110
ACCEPT*,H' | H - ВЫСОТА РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА, М
HH=H*H
TYPE 120
ACCEPT*,TM' | TM - ТЕМПЕРАТУРА МЕТАЛЛА, К
ZO=SIGMA*TM**4
TYPE 130
ACCEPT*,X
PN=1000.*X | PN - УДЕЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ НАГРЕВАТЕЛЯ, ВТ/М2
TYPE 135
ACCEPT*,X
ARK=0.01*X
QRK=0.5*ARK*PN*B/H | QRK - ПОТЕРИ ТЕПЛА ЧЕРЕЗ КЛАДКУ, ВТ/М2
TYPE 140
ACCEPT*,EPSM' | EPSM - СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА
QM=EPSM*ZO | QM - ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА СОБСТВЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА, ВТ/М2
C
RM=1-EPSM | RM - ОТРАЖАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ МЕТАЛЛА
SM=1/EPSM-1
TYPE 150
ACCEPT*,EPSN' | EPSN - СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ НАГРЕВАТЕЛЯ
SN=1/EPSN-1
TYPE 155
ACCEPT*,EPSK' | EPSK - СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ
SK=1/EPSK-1
TYPE 200
ACCEPT*,E' | E - ПОГРЕШНОСТЬ РАСЧЕТА QF(1), %

```

```

2      TYPE 160
      ACCEPT*,MM ! MM - ЧИСЛО ЗОН НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА
      TYPE 170
      ACCEPT*,MN ! MN - ЧИСЛО ЗОН НА ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ
      TYPE 180
      ACCEPT*,MK ! MK - ЧИСЛО ЗОН НА ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ
      IF(MM+MN+2*MK.LE.100) GO TO 1
      TYPE 190
      GO TO 2
1      XM=B/MM ! XM,XN,XK - ШИРИНА ЗОНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ
      XN=B/MN ! МЕТАЛЛА, НАГРЕВАТЕЛЯ
      XK=B/MK ! И КЛАДКИ
      M1=MM+1 ! НОМЕРА ЗОН
      M2=MM+MN ! НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА - 1,...,MM
      M3=M2+1 ! НА ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВАТЕЛЯ - M1,...,M2
      M4=M2+MK ! НА ЛЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ - M3,...,M4
      M5=M4+1 ! НА ПРАВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ - M5,...,M5
C      QF(I),QF1(I),I=1,M5 - ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭФФЕКТИВНОГО
C      ИЗЛУЧЕНИЯ (ПРЕДЫДУЩЕЕ И ПОСЛЕДУЮ-
C      ЩЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ), Вт/м2
C      НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ :
3      DO 3 I=1,M5
      QF(I)=0.
C      РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЗОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО
53     QF(I),I=1,M5 МЕТОДОМ ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ:
      S1=0.
      DO 10 I=1,M1
      S=0.
11     DO 11 J=M1,M2
      S=S+H1((I-1)*XM-(J-M1)*XN,XM,XN,HN)*QF(J)
12     DO 12 J=M3,M4
      S=S+H2((I-1)*XM,(J-M3)*XK,XM,XK)*QF(J)
13     DO 13 J=M5,M5
      S=S+H2((MM-I)*XM,(J-M5)*XK,XM,XK)*QF(J)
10     QF1(I)=RM*S/XM+QM
      CONTINUE
      DO 20 I=M1,M2
      S=0.
21     DO 21 J=1,MM
      S=S+H1((I-M1)*XN-(J-1)*XM,XN,XM,HN)*QF1(J)
22     DO 22 J=M3,M4
      S=S+H2((I-M1)*XN,(M4-J)*XK,XN,XK)*QF(J)
23     DO 23 J=M5,M5
      S=S+H2((M2-I)*XN,(M5-J)*XK,XN,XK)*QF(J)
20     QF1(I)=S/XN+PN
      DO 30 I=M3,M4
      S=0.
31     DO 31 J=1,MM
      S=S+H2((I-M3)*XK,(J-1)*XM,XK,XM)*QF1(J)
32     DO 32 J=M1,M2
      S=S+H2((M4-I)*XK,(J-M1)*XN,XK,XN)*QF1(J)
33     DO 33 J=M5,M5
      S=S+H1((J-I-MK)*XK,XK,XK,BB)*QF(J)
30     QF1(I)=S/XK-QRK
      DO 40 I=M5,M5
      QF1(I)=QF1(I-MK)
C

```



```

C      ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА
C      ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭФФЕКТИВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ:
DO 50 I=1,M4
Z=ABS(1-QF(I)/QF1(I))
IF(Z.GT.S1) S1=Z
CONTINUE
50
C      IF(S1.LT.0.01*E) GO TO 51
C
C      DO 52 I=1,M5
52      QF(I)=QF1(I)
        GO TO 53
C      QRM(I),I=1,M4 - ПЛОТНОСТЬ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОТОКА
C                      НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА, Вт/м2
C      T(I), I=M1,M2 - ТЕМПЕРАТУРА НАГРЕВАТЕЛЯ, К
C      T(I), I=M3,M4 - ТЕМПЕРАТУРА КЛАДКИ, К
51      DO 54 I=1,M4
54      QRM(I)=(QF1(I)-ZO)/SM
        DO 55 I=M1,M2
55      T(I)=((QF1(I)+SN*PN)/SIGMA)**0.25
        DO 56 I=M3,M4
56      T(I)=((QF1(I)-SK*QRK)/SIGMA)**0.25
C
C      ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ:
C
C      TYPE 210
C      TYPE 270
C      ACCEPT 280,LX
C      TYPE 220,(QRM(I),I=1,M4)
C      TYPE 270
C      ACCEPT 280,LX
C      TYPE 230,(T(I),I=M1,M2)
C      TYPE 270
C      ACCEPT 280,LX
C      TYPE 240,(T(I),I=M3,M4)
C      TYPE 270
C      ACCEPT 280,LX
C
C      ВЫБОР ВАРИАНТА ДАЛЬНЕЙШЕЙ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ:
C      TYPE 250
61      ACCEPT 280,LX
        IF(LX.EQ.LY) GO TO 2
        IF(LX.EQ.LN) GO TO 60
        GO TO 61
C
C      TYPE 260
60      ACCEPT 280,LX
        IF(LX.EQ.LY) GO TO 62
        IF(LX.EQ.LN) GO TO 63
        GO TO 60
63      STOP
        END

```

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
ИЗЛУЧЕНИЯ

```

SUBROUTINE RAZR(L,R,PSI,A,DELTA)
DIMENSION R(L),PSI(L,L),A(L,L),DELTA(L,L)
C   L - ЧИСЛО ЗОН
C   R(I) - ОТРАЖАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ I-ОЙ ЗОНЫ
C   PSI(I,K) - ОБОБЩЕННЫЕ УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ
C   A,DELTA - ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАССИВЫ
C   ЗАДАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЫ DELTA:
DO 1 I=2,L
DO 1 K=1,I-1
DELTA(I,K)=0.
1 DELTA(K,I)=0.
DO 2 I=1,L
2 DELTA(I,I)=1.
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩИХ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ:
DO 3 I=1,L
DO 3 K=1,L
3 A(I,K)=DELTA(I,K)-PSI(I,K)*R(K)
CALL GELG(PSI,A,L,L,0.00001,IER)
C   В ПРОЦЕССЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ПОДПРОГРАММЫ GELG РАЗРЕШАЮЩИЕ
C   УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАПИСЫВАЮТСЯ В МАТРИЦУ PSI
RETURN
END
    
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 10

ПРОГРАММА РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ  
ГАЗ-КЛАДКА-МЕТАЛЛ

```

DIMENSION T(3),F(3),E(3),R(3),PSI(3,3),A(3,3),DELTA(3,3)
C   T(I) - ТЕМПЕРАТУРА I-ОЙ ЗОНЫ
C   F(I) - ПЛОЩАДЬ I-ОЙ ЗОНЫ
C   E(I) - СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ I-ОЙ ЗОНЫ
C   R(I) - ОТРАЖАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ I-ОЙ ЗОНЫ
C   PSI(I,K) - ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ
C   A,DELTA - ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАССИВЫ
C   SIGMA - ПОСТОЯННАЯ СТЕФАНА-ВОЛЬФМАНА
DATA SIGMA,T(1),T(3) /5.67E-8,1400.,1700. /
DATA E /0.8,0.6,0.25 /
DATA F /20.,40.,60. /
C   ЗАДАНИЕ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ R(I):
R(1)=1-E(1)
R(2)=1-E(2)
R(3)=0.
DG=1-E(3) ! DG - ПРОПУСКАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ГАЗА.
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ PSI
C   ПО ФОРМУЛАМ (4.75):
PSI(1,1)=0.
PSI(1,2)=DG
PSI(1,3)=1.
PSI(2,1)=DG*F(1)/F(2)
PSI(2,2)=(1-F(1)/F(2))*DG
    
```



PSI (2,3)=1.  
 PSI (3,1)=F(1)/F(3)  
 PSI (3,2)=F(2)/F(3)  
 PSI (3,3)=0.

С ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩИХ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ:  
 CALL RAZR(3,R,PSI,A,DELTA)  
 С ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ КЛАДКИ ПО ФОРМУЛЕ (4.80):  

$$T(2) = \frac{(PSI(2,1) * E(1) * T(1) ** 4 + PSI(2,3) * E(3) * T(3) ** 4) * 0.25}{1 - PSI(2,2) * E(2)}$$
 ТЕМПЕРАТУРА КЛАДКИ, К: T(2)  
 С ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОТОКА  
 С НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА ПО ФОРМУЛЕ (4.77):  

$$QR1 = SI * GMA * ((E(1) * PSI(1,1) - 1) * E(1) * T(1) ** 4 + E(1) * PSI(1,2) * E(2) * T(2) ** 4 + PSI(1,3) * E(3) * T(3) ** 4)$$
 ТЕМПЕРАТУРА ПЛОТНОСТЬ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОТОКА, ВТ/М2: QR1  
 STOP  
 END

## Приложение II

Программа расчета радиационного теплообмена в системе газ-кладка-металл с учетом селективности радиационных свойств тел

```

100  FORMAT(10X,'РАСЧЕТ ТЕПЛОБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ В СИСТЕМЕ'/
      1 21X,'ГАЗ-КЛАДКА-МЕТАЛЛ'/
      2 6X,'С УЧЕТОМ СЕЛЕКТИВНОСТИ РАДИАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ТЕЛ'/
      3 6X,47(' ')/6X,'ВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ: '/')
105  FORMAT(' ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА ПУТИ ЛУЧА, М',21(' '),$)
110  FORMAT(' ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ СО2, БАР',22(' '),$)
120  FORMAT(' ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ Н2О, БАР',22(' '),$)
130  FORMAT(' ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА, М2',20(' '),$)
135  FORMAT(' ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ, М2',21(' '),$)
140  FORMAT(' ТЕМПЕРАТУРА ГАЗА, К',32(' '),$)
150  FORMAT(' ТЕМПЕРАТУРА МЕТАЛЛА, К',29(' '),$)
160  FORMAT(20X,10(' ')/
      1 ' РАСЧЕТНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛИН ВОЛН, ММ: ОТ',14(' '),$)
170  FORMAT(35X,'ДО',14(' '),$)
180  FORMAT(' ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА ОТ ДЛИНЫ
      1 ВОЛНЫ: /
      2 25X,'LAM(1)=' ,F4.2/
      3 25X,'EPS(1)=' ,F4.2/
190  FORMAT(25X,'LAM(' ,I1,' )=' ,F4.2/
200  FORMAT(25X,'EPS(' ,I1,' )=' ,F4.2/
210  FORMAT(' ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ ОТ ДЛИНЫ
      1 ВОЛНЫ: /
      2 25X,'LAM(1)=' ,F4.2/
      3 25X,'EPS(1)=' ,F4.2/
220  FORMAT('/ ЧИСЛО РАЗВИТИЙ РАСЧЕТНОГО ИНТЕРВАЛА
      1 ДЛИН ВОЛН: ',F4.2/
230  FORMAT(20X,10(' ')/10X,'ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИВЛЕЖЕНИЯ:')
240  FORMAT(' ТК=' ,F5.0,' К',5X,'QRK=' ,E10.3,' ВТ/М2')
245  FORMAT(15X,'QRM=' ,E10.3,' ВТ/М2'/
      1 ' ПОГЛОЩАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ГАЗА',9(' '),F4.2/
      2 ' ИНТЕГРАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ ГАЗА',7(' '),F4.2/
      3 ' ПОГЛОЩАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ МЕТАЛЛА',6(' '),F4.2/
      4 ' ИНТЕГРАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА',4(' '),F4.2/
      5 ' ПОГЛОЩАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ КЛАДКИ',7(' '),F4.2/
      6 ' ИНТЕГРАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ',5(' '),F4.2)
250  FORMAT(' ""BK""',F4.2/
260  FORMAT(A1)
  
```

```

270 FORMAT(' ИЗМЕНИТЬ ЭФФЕКТИВНУЮ ДЛИНУ ПУТИ ЛУЧА? (1)'/
1 ' ИЗМЕНИТЬ ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ СО2? (2)'/
2 ' ИЗМЕНИТЬ ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ Н2О? (3)'/
3 ' ИЗМЕНИТЬ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА И КЛАДКИ? (4)'/
4 ' ИЗМЕНИТЬ ТЕМПЕРАТУРУ ГАЗА? (5)'/
5 ' ИЗМЕНИТЬ ТЕМПЕРАТУРУ МЕТАЛЛА? (6)'/
6 ' ИЗМЕНИТЬ РАСЧЕТНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛИН ВОЛН? (7)'/
7 ' ИЗМЕНИТЬ СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА? (8)'/
8 ' ИЗМЕНИТЬ СТЕПЕНЬ ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ? (9)'/
9 ' ИЗМЕНИТЬ ЧИСЛО РАЗБИВИЙ РАСЧЕТНОГО ИНТЕРВАЛА'
1 ' ДЛИН ВОЛН? (10)'/
2 ' ЗАКОНЧИТЬ СЧЕТ? (11)')

```

```

IMPLICIT REAL (L,K)
DIMENSION LM(10),LK(10),EPSM(10),EPSK(10),
1 QOG(100),QOM(100),EG(100),EM(100),EK(100),
2 E(3),R(3),F(3),PSI(3,3),A(3,3),DELTA(3,3)
LOGICAL*1 SX

```

```

C
M=0
TYPE 100
TYPE 105
ACCEPТ *,SEF ! SEF - ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА ПУТИ ЛУЧА, М
IF(M.NE.0)GOTO 40
21 TYPE 110
ACCEPТ *,PC ! PC - ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ СО2, ВАР
IF(M.NE.0)GOTO 40
22 TYPE 120
ACCEPТ *,PH ! PH - ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ Н2О, ВАР
IF(M.NE.0)GOTO 40
23 TYPE 130
ACCEPТ *,F(1) ! F(1)- ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА, М2
TYPE 135
ACCEPТ *,F(2) ! F(2)- ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КЛАДКИ, М2
F(3)=F(1)+F(2) ! F(3)- ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ГАЗОВОЙ ЗОНЫ, М2
24 IF(M.NE.0)GOTO 40
TYPE 140
ACCEPТ *,TG ! TG - ТЕМПЕРАТУРА ГАЗА, К
IF(M.NE.0)GOTO 40
25 TYPE 150
ACCEPТ *,TM ! TM - ТЕМПЕРАТУРА МЕТАЛЛА, К
IF(M.NE.0)GOTO 40

```

```

C
26 TYPE 160
ACCEPТ *,L1
C L1,L2 - ГРАНИЦЫ РАСЧЕТНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛИН ВОЛН, ММ
C LM(I), I=1,NM - ДЛИНЫ ВОЛН, ДЛЯ КОТОРЫХ ЗАДАЮТСЯ
C ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА EPSM(I)
C LK(I), I=1,NM - ДЛИНЫ ВОЛН, ДЛЯ КОТОРЫХ ЗАДАЮТСЯ
C ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ EPSK(I)
LM(1)=L1
LK(1)=L1
TYPE 170
ACCEPТ *,L2
IF(M.NE.0)GOTO 40
C ВВОД ДАННЫХ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЗАВИСИМОСТИ СТЕПЕНИ
C ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА ОТ ДЛИНЫ ВОЛНЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ
C ФУНКЦИЕЙ
27 TYPE 180,L1
ACCEPТ *,EPSM(1)
I=1
1 I=I+1
TYPE 190,I
ACCEPТ *,LM(I)
TYPE,200,I
ACCEPТ *,EPSM(I)

```



```

IF(LM(I).LT.0.99*L2)GOTO 1
NM=1
EPSM(NM)=EPSM(NM-1)+(EPSM(NM)-EPSM(NM-1))
1*(L2-LM(NM-1))/(LM(NM)-LM(NM-1))
LM(NM)=L2
IF(M.NE.0)GOTO 40

C      ВВОД ДАННЫХ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЗАВИСИМОСТИ СТЕПЕНИ
C      ЧЕРНОТЫ КЛАДКИ ОТ ДЛИНЫ ВОЛНЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ
C      ФУНКЦИЕЙ
28     TYPE 210,L1
        ACSEPT *,EPSK(1)
        I=1
        I=I+1
        TYPE 190,I
        ACSEPT *,LK(I)
        TYPE 200,I
        ACSEPT *,EPSK(I)
        IF(LK(I).LT.0.99*L2)GOTO 2
        NK=I
        EPSK(NK)=EPSK(NK-1)+(EPSK(NK)-EPSK(NK-1))
        1*(L2-LK(NK-1))/(LK(NK)-LK(NK-1))
        LK(NK)=L2
        IF(M.NE.0)GOTO 40

C      TYPE 220
C      N - ЧИСЛО РАЗБИТИЙ РАСЧЕТНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛИН ВОЛН
C      DL - ДЛИНА ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛИН ВОЛН,ММ
        ACSEPT *,N
        DL=(L2-L1)/N

C      CONTINUE

C      РАСЧЕТ QOG(I),QOM(I),EM(I),EK(I),EG(I), I=1,N:
C      QOG(I) [QOM(I)] - ПОТОКИ СОБСТВЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ АЧТ
C      ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ ГАЗА [МЕТАЛЛА],ПРИХОДЯЩИХСЯ НА I-ЫЙ
C      ИНТЕРВАЛ ДЛИН ВОЛН
C      EM(I),EK(I),EG(I) - СТЕПЕНИ ЧЕРНОТЫ МЕТАЛЛА,КЛАДКИ И ГАЗА
C      В ПРЕДЕЛАХ I-ГО ИНТЕРВАЛА ДЛИН ВОЛН

XC=1000*PC*SEF/TG           ! XC, XH, E1, E2, E3, E4 -
XH=1000*PH*SEF/TG           ! ВЕЛИЧИНЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ
E1=1-EXP(-.6*XH)           ! ПРИ РАСЧЕТЕ СТЕПЕНЕЙ
E2=1-EXP(-3.3*XC-5.8*XH)   ! ЧЕРНОТЫ ГАЗА ПО
E3=1-EXP(-198.5*XC)        ! ФОРМУЛЕ (4.99)
E4=1-EXP(-6.4*XH)
SQOM=0.
SQOG=0.
SQM=0.
SQG=0.

C      DO 3 I=1,N
        L=L1+(I-.5)*DL
        QOM(I)=QO(L,DL,TM,10)*F(1)
        QOG(I)=QO(L,DL,TG,10)*F(3)

C      РАСЧЕТ EM(I),EK(I),EG(I) :
C      DO 4 J=1,NM
        IF(LM(J).GT.L)GOTO 5
        CONTINUE
        EM(I)=EPSM(J-1)+(EPSM(J)-EPSM(J-1))*
        1*(L-LM(J-1))/(LM(J)-LM(J-1))

        DO 6 J=1,NK
        IF(LK(J).GT.L)GOTO 7
        CONTINUE

```











ПРОГРАММА РАСЧЕТА СРЕДНЕГО УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА ИЗЛУЧЕНИЯ  
МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛЮ В ПРИМЕРЕ 4.7

```

REAL*4 M,N,K
DATA I1,J1 /2*0/
DATA M,K /2*0./

C
2   TYPE 100
100  FORMAT(/10X,'ЧИСЛО ИСПЫТАНИЙ',23('.'),$(
      ACCEPT 110,N      ! N - ПОЛНОЕ ЧИСЛО ИСПЫТАНИЯ
110  FORMAT(F6.0)
1    K=K+1              ! K - НОМЕР ИСПЫТАНИЯ
C    RX,RF,RT - СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ
C              В ИНТЕРВАЛЕ [0,1]
      CALL RANDU (I1,J1,RX)
      CALL RANDU (I1,J1,RF)
      CALL RANDU (I1,J1,RT)
      M=M+1(RX,RF,RT)  ! M - "ЧИСЛО ПОПАДАНИЙ"
      IF(K.LT.N) GO TO 1
      FI=M/N           ! FI - УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ
120  TYPE 120,FI
      FORMAT(10X,'УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ',19('.'),F6.4)
      TYPE 130
130  FORMAT(/10X,'ПРОДОЛЖИТЬ ИСПЫТАНИЯ? (1-ДА,0-НЕТ): ',$(
      ACCEPT*,L
      IF(L.EQ.1) GO TO 2
      STOP
      END

C
      FUNCTION I(RX,RF,RT)
      REAL*4 KSI X,KSI F
      DATA A,H,PI /0.5,1.,3.1416/
      A - ПОЛУШИРИНА ПОЛОСЫ
      H - РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПОЛОСАМИ
      I=0
      KSI X=A*(2*RX-1)
      KSI F=2*PI*RF
      OD1=H*SQRT(RT)/SQRT(1-RT)*COS(KSI F)+KSI X
      IF(ABS(OD1).LE.A) I=1
      RETURN
      END

```

ПРОГРАММА РАСЧЕТА СРЕДНЕГО ОБЪЕМНОГО УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА  
ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО В ПРИМЕРЕ 4.8

```

REAL*4 M,N,K
DATA I1,J1 /2*0/
DATA M,K /2*0./

C
2
100 TYPE 100
    FORMAT(/10X,' ЧИСЛО ИСПЫТАНИЙ',23(' '),$)
    ACCEPT 110,N 1 N - ПОЛНОЕ ЧИСЛО ИСПЫТАНИЙ
110 FORMAT(F6.0)
1 K=K+1 1 K - НОМЕР ИСПЫТАНИЯ
C RX,RF,RT,RS - СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ
C В ИНТЕРВАЛЕ [0,1]
CALL RANDU (I1,J1,RX)
CALL RANDU (I1,J1,RF)
CALL RANDU (I1,J1,RT)
CALL RANDU (I1,J1,RS)
M=M+I(RX,RF,RT,RS) 1 M - "ЧИСЛО ПОПАДАНИЙ"
IF(K.LT.N) GO TO 1
FI=M/N 1 FI - УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ
TYPE 120,FI
120 FORMAT(10X,' УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ',19(' '),F6.4)
TYPE 130
130 FORMAT(/10X,' ПРОДОЛЖИТЬ ИСПЫТАНИЯ? [1-ДА,0-НЕТ]: ', $)
ACCEPT*,L
IF(L.EQ.1) GO TO 2
STOP
END

C
FUNCTION I(RX,RF,RT,RS)
REAL*4 KSI X,KSI F,KSI S
DATA A,H,AK,PI /0.5,1.,0.2,3.1416/
C A - ПОЛУШИРИНА ПОЛЮСЫ
C H - РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПОЛОСАМИ
C AK - КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ
I=0
KSI X=A*(2*RX-1)
KSI F=2*PI *RF
KSI S=-1/AK*ALOG(RS)
OD1=H*SQRT(RT)/SQRT(1-RT)*COS(KSI F)+KSI X
BC1=H/SQRT(1-RT)
IF(ABS(OD1).LE.A.AND.KSI S.GT.BC1) I=1
RETURN
END
    
```



ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ I, ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ПРИ РАСЧЕТЕ  
КОЭФФИЦИЕНТА САМООБЛУЧЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
В ПРИМЕРЕ 4.9

C  
C  
C

```

FUNCTION I (RX, RF, RT, RS)
REAL*4 KSI X, KSI F, KSI S
DATA A, H, AK, PI /0.5, 1., 0.2, 3.1416/
A - ПОЛУШИРИНА ПОЛОСЫ
H - РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПОЛОСАМИ
AK - КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ
I=0
KSI X=A*(2*RX-1)
KSI F=2*PI*RF
KSI S=-1/AK*ALOG(RS)
Z=COS(KSI F)
OD1=H*SQRT(RT)/SQRT(1-RT)*Z+KSI X
BC1=H/SQRT(1-RT)
IF(Z.GT.0.) BC2=(A-KSI X)/(Z*SQRT(RT))
IF(Z.LT.0.) BC2=-(A+KSI X)/(Z*SQRT(RT))
IF(ABS(OD1).LE.A.AND.KSI S.GT.BC1.OR.
1 ABS(OD1).GT.A.AND.KSI S.GT.BC2) I=1
RETURN
END

```





## РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

---

- Галин Н.М., Кириллов Л.П. Теплообмен (в ядерной энергетике): Учеб. пособие для вузов. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 376 с.
- Горинштейн А.М. Практика решения инженерных задач на ЭВМ. — М.: Радио и связь, 1984. — 232 с.
- Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 840 с.
- Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача: Учебник для вузов. — М.: Энергоиздат, 1981. — 416 с.
- Калиткин Н.Н. Численные методы: Учебник для вузов. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
- Лисиенко В.Г., Волков В.В., Гончаров А.Л. Математическое моделирование теплообмена в печах и агрегатах. — Киев: Наукова думка, 1984. — 232 с.
- Металлургическая теплотехника. В 2-х томах. Т. I Теоретические основы: Учебник для вузов/Кривандин В.А., Арутюнов В.А., Мاستрюков Б.С. и др. — М.: Metallurgy, 1986. — 424 с.
- Невский А.С. Лучистый теплообмен в печах и топках. — М.: Metallurgy, 1971. — 440 с.
- Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
- Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 150 с.
- Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
- Себиси Т., Бредшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 592 с.
- Соболь И.М. Метод Монте-Карло: Популярные лекции по математике. Вып. 46. — М.: Наука, 1978. — 64 с.
- Турчак Л.И. Основы численных методов: Учебное пособие. — М.: Наука, 1987. — 320 с.

Учебное издание

Владимир Александрович Арутюнов  
Вячеслав Викторович Бухмиров  
Сергей Алексеевич Крупеников

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОЙ  
РАБОТЫ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПЕЧЕЙ**

Редактор издательства Н.Ф.Фокина  
Художественный редактор А.А.Якубенко  
Технический редактор Е.К.Астафьева  
Корректор В.С.Колганова

Подписано в печать 1.08.90	Формат издания 60 x 90 1/16	ИБ № 3503	
Печать офсетная	Усл. печ. л. 15,0	Усл. кр.-отт. 15,25	Бумага офсетная № 2
Тираж 3170 экз.	Заказ 2671	Цена 50 к.	Уч.-изд. л. 15,61
			Изд. № 1768

Набрано в издательстве "Металлургия"  
на НПТ "Типотайпер" оператором О.Н.Прохоровой

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство "Металлургия", 119857, ГСП, Москва, Г-34,  
2-й Обыденский пер., д. 14

Московская типография № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата"  
при Государственном комитете СССР по печати  
109033, Москва, Волочаевская ул. д. 40