

**Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ**

Е.В.Арменский, И.В.Кузина

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

**Рекомендовано Редакцией
института в качестве учебного
пособия**

Москва - 1975

© РИО МИЭМ, 1975

В В Е Д Е Н И Е

Бурное развитие научно-технической революции вызвало мощный подъем и дальнейшее развитие всех отраслей науки и техники. Развитие и внедрение во все отрасли новейших достижений вычислительной техники позволяет практически решать задачи проектирования и расчета машин, механизмов, процессов и приборов, не возможных иными способами. Все это в полной мере относится к электромашиностроению, где с развитием вычислительных математических методов появились новые возможности совершенствования способов расчета и конструирования огромного многообразия конструкций электрических машин.

До последнего времени расчет и конструирование электромеханических преобразователей энергии – электрических машин сводился к определению конструктивных параметров данного типа электрической машины. В силу сложности электромагнитных процессов, протекающих в электромеханических преобразователях, и их математического описания, расчет и нахождение параметров машины сводится к определению конструктивных величин электрической машины, при этом их определение проводилось по методике, предназначенной для расчета данного типа машин. Обычно в этих методиках значительная

часть параметров определяется введением в расчетные формулы множества эмпирических коэффициентов, которые найдены путем обобщения многолетнего опыта. Такие методики дают удовлетворимые результаты для машин большой мощности, выпускаемых конструктивными рядами больших серий, но составлять отдельные методики для большого многообразия конструкций электрических микромаши экономически не целесообразно.

Поэтому в последнее время внимание ученых все больше привлекают вопросы создания машинных методов расчета и проектирования.

В последнее время в практику проектирования входят высокопроизводительные и экономичные методики, на базе которых строятся различные АСП (автоматизированные системы проектирования). При создании таких систем возникают две глобальные проблемы:

1. Построение моделей процесса или аппарата, который подлежит проектированию.

2. Выбор соответствующего математического аппарата для создания АСП.

Все это в полной мере относится и для создания автоматизированной системы проектирования электрических машин и дальнейшего развития АСП, АСУТП (автоматизированные системы управления технологическим процессом) производства электрических машин, а также высшей стадии АСП - синтеза.

Единая теория электрических машин Крона с применением тензорного анализа и метода графов, а также привлечение современных ЭМ (электронных вычислительных машин) является принципиальными предпосылками для создания систем АСП, АСУТП и синтеза электрических машин.

Первые работы Крона, создавшего единую теорию электрических

машин, появились в 30-х годах нашего столетия. Крон создал модель так называемой "обобщенной машины", полностью систематизировал процесс составления уравнений электрических цепей и машин с помощью матриц соединений, характеризующих структуру системы.

К последователям Крона из зарубежных ученых можно отнести Адкинса, Гиббса, Хенкока и др. В нашей стране идеи Крона получили развитие в трудах А.В.Галопова, В.В.Хрущева, И.П.Копылова, И.В.Кузиной и др.

В последнее время метод Крона начинает широко внедряться в учебный процесс высших учебных заведений. Так, начиная с 50-х годов в Англии Гиббсом и Адкинсом читается курс матричной теории электрических машин. В университете Лавала Буавером и Робинсо читается курс электрических машин на базе направленных графов и, наконец, в настоящее время в колледжах США обучение учащихся в курсах электрических машин производится на базе обобщенной машины.

В Советском Союзе основные положения единой теории Крона все больше вводятся в лекционные курсы, семинары и лабораторные занятия, курсовое и дипломное проектирования. В Московском энергетическом институте, Московском авиационном институте, Московском институте электронного машиностроения, Ленинградском институте авиационного приборостроения и др. методы машинного проектирования электрических машин на базе теории Крона находят все большее приложение как в учебном процессе, так и в научной деятельности.

Настоящее учебное пособие содержит основные теоретические положения теории Крона, раскрывает суть, а также возможность использования ее при проектировании электрических машин на ЭВМ.

подхода к методике синтеза электромеханических преобразователей энергии.

Единый подход к электрическим машинам при всем многообразии их типов дает возможность построить учебный процесс таким образом, чтобы обеспечить широкое инженерное приложение теории к вопросам, связанным с применяемой практикой, акцентировать внимание на основных принципах и методах анализа, существенно сократить материал описательного характера.

В учебном пособии авторы попытались сформулировать математические и физические основы единой теории электрических машин, наложить теории Крона как в матричном, так и в графовом виде, описать основные уравнения и характеристики.

Глава I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

§ I. Основные понятия линейной алгебры

Чтобы облегчить изучение теории Крона, основанной на понятии тензора и преобразованиях, тесно связанных с этим понятием, целесообразно будет вспомнить основные положения из области линейной алгебры.

Скаляр - величина, которая после выбора системы измерения, характеризуется одним числом. К скалярным величинам относятся, например, угол, температура, масса, мощность и т.д.

Скаляры делят на "чистые" и псевдоскаляры. Чистые скаляры не зависят от выбора осей отсчета (температуры, массы). Псевдоскаляры изменяют знак в зависимости от выбора положительного направления осей. Например, угол, площадь. Скаляр является инвариантом относительно преобразования осей координат.

Вектор. Векторная величина зависит от числа, измеряющего длину вектора, и направления. Для векторов в аналитической геометрии были определены две операции:

а) сложение двух векторов и б) умножение вектора на число.

Эти операции обладают свойствами:

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$3. \text{Существует нулевой вектор } 0 \text{ такой, что } \vec{a} + 0 = \vec{a}$$

$$4. \text{Для каждого вектора } \vec{X} \text{ существует противоположный вектор } \vec{b} = -\vec{a} \text{ такой, что } \vec{a} + \vec{b} = 0$$

$$5. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$6. \lambda (\mu \bar{a}) = (\lambda \mu) \bar{a}$$

$$7. (\lambda + \mu) \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{a}$$

$$8. \lambda (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$$

Множества элементов, на которых определены операции сложения и умножения, обладающие этими свойствами, называются линейными или векторными пространствами L .

Пусть векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ - векторы некоего линейного пространства. Вектор \bar{y} называется линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, если

$$\bar{y} = \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \quad (I.2)$$

где λ - числа.

Если в системе \bar{x}_n векторов один является линейной комбинацией остальных, то

$$\mu_1 \bar{x}_1 + \mu_2 \bar{x}_2 + \dots + \mu_n \bar{x}_n = 0, \quad (I.3)$$

где не все μ_i равны нулю.

Если в системе векторов хотя бы один является линейной комбинацией других, такая система будет линейно зависимая. Если равенство (I.3) выполняется только тогда, когда все μ_i равны нулю, то векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ называются линейно независимыми.

Из любой системы векторов можно выделить подсистему, векторы которой линейно независимы, а все остальные векторы из системы являются их линейной комбинацией. Такую подсистему называют базисом, а ее векторы - базисными. В системе можно выделить много базисов, но число векторов в них одно и то же и называется размерностью данного линейного пространства.

Например, на плоскости существует два линейно независимых вектора и она является двумерным пространством L_2 . Евклидово пространство - трехмерное L_3 .

Любая система из n -линейно независимых векторов в пространстве L_n образует базис. Любой другой произвольный вектор является линейной комбинацией базисных и при заданном базисе единственной комбинацией.

Пусть \bar{X}_n -множество базисных векторов пространства L_n , тогда $\bar{y} \in L_n$ будет

$$\bar{y} = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_n,$$

где числа a_1, a_2, \dots, a_n называются координатами или компонентами вектора \bar{y} , т.е. любой вектор из пространства L_n может быть разложен по n базисным векторам.

Например, на прямой любой вектор из L_1 может быть представлен в виде:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1,$$

где \bar{e}_1 - произвольный, отличный от нуля вектор этой прямой.

На плоскости вектор \bar{x} может быть представлен в виде

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2,$$

где \bar{e}_1 и \bar{e}_2 - любые два непараллельных вектора, принадлежащих этой плоскости

и так далее.

В общем виде разложение вектора можно записать:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^n x_k \bar{e}_k, \quad (I.4)$$

где \bar{e}_k - базисные вектора, а

x_k - координаты вектора \bar{x} в базисе $\{\bar{e}_k\}$.

Эту запись можно еще упростить (предложено А.Эйнштейном), опустив символ суммы:

$$\bar{x} = x_k \bar{e}_k,$$

полагая суммирование по индексу k .

3. Линейная форма

1) Если в линейном пространстве L каждому вектору $\bar{x} \in L$ поставлено в соответствие некоторое число, то это значит, что в этом пространстве задана скалярная функция векторного аргумента. Эта функция называется линейной формой, если она обладает свойст-

важно:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi(\bar{x} + \bar{y}) &= \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) \\ \text{б) } \varphi(\lambda \bar{x}) &= \lambda \varphi(\bar{x}) \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Примером может служить проекция вектора на произвольную ось.

Как запишется линейная форма в каком-либо базисе? Например,

$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_i\}$$

Любой вектор может быть разложен по базисным векторам:

$$\bar{x} = x_i \cdot \bar{e}_i$$

и φ - линейная форма

$$\text{Тогда } \varphi(\bar{x}) = \varphi(x_i \bar{e}_i) = x_i \varphi(\bar{e}_i)$$

Обозначим $\varphi(\bar{e}_i) = a_i$. Тогда линейная форма запишется

$$\varphi(\bar{x}) = a_i x_i \quad (\text{I.6})$$

Это многочлен первой степени относительно x_i и отсюда название линейной формы.

2) Число может быть поставлено в соответствие не одному, а двум векторам, такая скалярная функция двух векторных аргументов $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ называется билинейной формой (при $\bar{x} = \bar{y}$ квадратичной), если выполняются условия (5) по каждому аргументу, т.е.

$$\begin{aligned} \text{1) } \varphi(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) &= \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}_2, \bar{y}) \\ \text{2) } \varphi(\lambda \bar{x}_1, \bar{y}) &= \lambda \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}) \\ \text{3) } \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) &= \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \\ \text{4) } \varphi(\bar{x}_1, \lambda \bar{y}_1) &= \lambda \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Например, билинейной формой будет скалярное произведение двух векторов.

Как запишется билинейная форма?

В каком-то базисе $\{\bar{e}_i\}$ векторы могут быть представлены:

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i \quad \bar{y} = y_j \bar{e}_j$$

И так как функция φ - билинейна и выполняются условия (I.7), то

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x_i \bar{e}_i, y_j \bar{e}_j) = x_i y_j \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

Обозначив $\varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_{ij}$, получим

$$\varphi = a_{ij} x_i y_j \quad (I.8)$$

3) Аналогично можно определить трilinearную форму (смешанное произведение трех векторов) и вообще полилинейную форму

$$\varphi = a_{ij \dots n} x_i y_j \dots z_n \quad (I.9)$$

Количество индексов (пусть m) формы (I.9) определяется, как видно, числом векторных аргументов.

4. Линейные преобразования векторного пространства

О линейных преобразованиях говорят, когда рассматривается не скалярная, а векторная функция векторного аргумента, т.е. если каждому вектору $\bar{x} \in L$ поставлен в соответствие вектор $\bar{u} = A(\bar{x})$ того же пространства. Векторная функция будет линейна, если она обладает свойствами

$$\begin{aligned} A(\bar{x} + \bar{y}) &= A(\bar{x}) + A(\bar{y}) \\ A(\alpha \bar{x}) &= \alpha A(\bar{x}), \end{aligned} \quad (I.10)$$

где α - любое число.

Эту векторную функцию называют линейным преобразованием пространства L или линейным оператором.

Например: 1) растяжение или сжатие, когда $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$

2) преобразование, ставящее в соответствие вектору \bar{x} вектор \bar{u} , получающийся поворотом вектора \bar{x} . Как записывается линейный оператор?

Пусть имеем систему координат $\{\bar{e}_i\} i=1 \dots n$. Вектор $\bar{x} \in L$ в этой системе можно записать:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_i \bar{e}_i \quad \text{и} \quad \bar{u} = u_j \bar{e}_j \\ \bar{u} &= A(\bar{x}) \end{aligned}$$

Так как преобразование линейно, то

$$A\bar{x} = x_i A\bar{e}_i$$

Вектор $A\bar{e}_i$ разложится по исходному базису $\{\bar{e}_i\}$

$$A\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$

$$A\bar{e}_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n$$

.....

$$A\bar{e}_n = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

или в сокращенной форме:

$$A\bar{e}_i = a_{ik}\bar{e}_k \quad n = 1 \dots n$$

Тогда $A\bar{x} = a_{ik}x_i\bar{e}_k$, но

$$A\bar{x} = \bar{u}$$

Поэтому координаты вектора \bar{u} будут

$$u_i = a_{ik}x_k$$

(I.II)

5. Физический тензор

В физике, механике, геометрии существуют объекты, которые не попадают ни в категорию скалярных величин, ни векторных и имеют более сложный характер. Например, в потоке жидкости находится тело объемом V и ограниченное поверхностью S .



Рис. I.I.

На каждый элемент dS этой поверхности будет действовать со стороны потока сила, пропорциональная площади dS . Она зависит от ориентации площади, определяемой нормалью к ней \vec{n} . Обозначим ее через \vec{P}_n . Вообще говоря, сила \vec{P}_n не будет совпадать с направлением нормали \vec{n} . Каждому направлению \vec{n} отвечает свой вектор \vec{P}_n . Координатным направлениям в трехмерном пространстве будут отвечать векторы силы $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z, \vec{P}_x$ — вектор силы, действующий на площадку, перпендикулярную оси Ox . Его можно

разложить по осям с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$;

$$\bar{P}_x = P_{xx}\bar{i} + P_{xy}\bar{j} + P_{xz}\bar{k}$$

Аналогично можно представить векторы \bar{P}_y и \bar{P}_z .

$$\bar{P}_y = P_{yx}\bar{i} + P_{yy}\bar{j} + P_{yz}\bar{k} \quad \bar{P}_z = P_{zx}\bar{i} + P_{zy}\bar{j} + P_{zz}\bar{k}$$

Так, давление, испытываемое телом обтекаемым потоком, является величиной, имеющей компонентами не скаляры, а векторы и лишь при разложении этих компонент-векторов, получаются скалярные величины. Такие величины назвали тензорами.

Впервые с ними столкнулись при изучении диэлектрических свойств кристалла, теплового расширения твердого тела, пьезоэлектрических свойств кристалла, упругих деформаций в кристалле, напряжения в кристалле и т.д. и появился термин "тензор", в переводе "напряжение". Но как увидим далее, понятие тензора в настоящее время более широкое. Поэтому будем называть такого типа величины физическим тензором, который записывается:

$$T = e_k e_e t_{ke} \quad (I.12)$$

Могут быть объекты, компоненты которых по осям координат дадут тензоры, проекции которых в свою очередь дадут векторы, а уж их проекции-скаляры. Это тоже тензор, но уже более высокой валентности - третьей.

$$T = t_{\alpha\beta\gamma} e_\alpha e_\beta e_\gamma \quad (I.13)$$

В общем случае

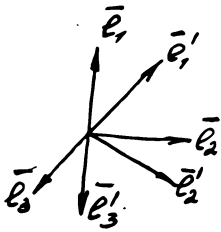
$$T = t_{\alpha\beta \dots \zeta} e_\alpha \cdot e_\beta \dots e_\zeta \quad (I.14)$$

Обычно тензоры второй валентности называют просто тензорами.

§ 2. Преобразования, связанные с изменением базиса

Преобразование системы координат

Пусть имеем базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$. В линейном пространстве L_n любой другой базис $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ можно разложить по векторам старого базиса.



$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + \dots + c_n \bar{e}_n \\ \bar{e}'_n &= c_{n1} \bar{e}_1 + c_{n2} \bar{e}_2 + \dots + c_{nn} \bar{e}_n \end{aligned}$$

Рис. 1.2.

В сокращенном виде такое разложение будет иметь вид:

$$\bar{e}'_i = c_{ij} \bar{e}_j \quad (i, j = 1 \dots n) \quad (I.15)$$

Суммирование идет по индексу j .

В ортонормированном базисе коэффициенты c_{ij} будут являться косинусами углов между старыми и новыми координатными векторами.

$$c_{ij} = \cos(\bar{e}'_i, \bar{e}_j) \quad (I.16)$$

Действительно, умножим скалярно каждое из равенств (I.15) соответственно на вектор \bar{e}_i

Учитывая, что $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{и векторы } \bar{e}_i \text{ и } \bar{e}'_j \text{ единичные,}$$

$$\bar{e}'_i \cdot \bar{e}_j = \cos(\bar{e}'_i, \bar{e}_j)$$

Можно разложить и старый базис $\{\bar{e}_j\}$ по новым базисным векторам \bar{e}'_i . Тогда будем иметь

$$\bar{e}_j = c_{ji}' \bar{e}'_i \quad (I.17)$$

Преобразование c_{ji}' называется обратным преобразованием координат c_{ij} и в случае ортонормированных базисов получается путем перестановки индексов.

Преобразование координат вектора при изменении базиса

Допустим, в пространстве L_n задан вектор \vec{r} . Этот объект

сам не изменяется при изменении базиса, но изменяются его компоненты.

Запишем разложение вектора \vec{z} в двух различных базисах:
 $\vec{z} = \alpha_i \bar{e}_i$ и $\vec{z} = \alpha'_j \bar{e}'_j$.

Откуда

$$\alpha_j \bar{e}_j = \alpha'_i \bar{e}'_i$$

Векторы старого базиса \bar{e}_i заменим через новые согласно (I.17) и получим

$$\alpha_i c_{ij}^{-1} \bar{e}'_j = \alpha'_j \bar{e}'_j,$$

откуда по теореме о единственности разложения вектора в данном базисе

$$\alpha'_j = c_{ij}^{-1} \alpha_i \quad (\text{I.18})$$

Так выражаются новые координаты вектора через старые.

Старые координаты вектора через новые выразятся формулой:

$$\alpha_i = c_{ij} \alpha'_j \quad (\text{I.19})$$

Мы видим, что преобразование компонент вектора при переходе к другому базису соответствует закону преобразования самого базиса, но только новые координаты вектора выражаются через старые так, как старые базисные векторы выражаются через новые. Такое преобразование называется контрвариантным.

Линейная форма при изменении базиса

Имеем преобразование базиса

$$\bar{e}'_i = c_{ij} \bar{e}_j$$

Линейная форма в старом базисе запишется: $\varphi = \varphi_j x_j$,

в новом - $\varphi = \varphi'_i x'_i$,

где $\varphi'_i = \varphi(\bar{e}'_i)$ $\varphi_j = \varphi(\bar{e}_j)$

Коэффициенты линейной формы в новой системе можно выразить через старые:

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= \varphi(\bar{e}'_i) = \varphi(c_{ij} \bar{e}_j) = c_{ij} \varphi(\bar{e}_j) \\ \varphi'_i &= c_{ij} \varphi_j, \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

т.е. при переходе к новому базису закон изменения коэффициентов линейной формы соответствует закону изменения координат вектора и определяется самим законом преобразования координат.

В отличие от координат вектора коэффициенты линейной формы преобразуются ковариантно, т.е. коэффициенты линейной формы в новом базисе выражаются через коэффициенты в старом базисе так же, как новый базис выражается через старый.

Билинейная форма при изменении базиса

В новом базисе билинейная форма запишется

$$\varphi = a'_{im} x'_i y'_m \quad \text{где} \quad a'_{im} = \varphi(\bar{e}'_i, \bar{e}'_m)$$

При переходе к новому базису имеем

$$\bar{e}'_i = c_{ij} \bar{e}_j \quad \bar{e}'_m = c_{me} \bar{e}_e$$

Тогда

$$a'_{im} = \varphi(c_{ij} \bar{e}_j, c_{me} \bar{e}_e) = c_{ij} c_{me} a_{je} \quad (\text{I.21})$$

Получим, что при переходе к новому базису коэффициенты билинейной формы изменяются по тому же закону, по которому преобразуется сам базис—ковариантно, только преобразование используется дважды.

В общем случае преобразование коэффициентов полилинейной формы содержит закон преобразования координат столько раз, сколько векторов определяет линейную форму.

$$a_{i_1 j_1 \dots k_1} = c_{i_1 i_2} \cdot c_{j_1 j_2} \dots c_{k_1 k_2} a_{i_2 j_2 \dots k_2} \quad (\text{I.22})$$

л) Линейный оператор при изменении базиса

$$\bar{u} = A \bar{x} \quad \text{или} \quad u_j = a_{jm} x_m$$

Каждый из векторов преобразуется при переходе к новой системе координат:

$$u'_i = c_{ij}^{-1} u_j \quad x'_k = c_{km}^{-1} x_m$$

Старые же координаты векторов через новые выразятся

$$u_j = c_{ji} u'_i \quad \text{и} \quad x_m = c_{mk} x'_k$$

Тогда

$$C_{ji} U_i' = A_{jm} \cdot C_{mk} x_k'$$

или

$$U_i' = A_{jm} C_{ji}^{-1} \cdot C_{mk} x_k';$$

где

$$A_{jm} C_{ji}^{-1} \cdot C_{mk} = A_{ik}' \quad (I.23)$$

т.к. и в новой системе координат

$$\bar{U}' = A' \bar{X}'$$

Таким образом, коэффициенты линейного оператора преобразуются также по закону преобразования базиса, один раз контрвариантно, один раз ковариантно.

Преобразование физического тензора

Пусть имеем тензор T в каком-то базисе

$$T = t_{ke} e_k \cdot e_e,$$

в любом другом

$$T = t'_{mn} e'_m \cdot e'_n,$$

но тензор - инвариантен к преобразованию координат и

$$t_{ke} \cdot e_k \cdot e_e = t'_{mn} e'_m \cdot e'_n$$

Старый базис выразится через новый

$$e_k = C_{km}^{-1} \cdot e'_m \quad e_e = C_{en}^{-1} \cdot e'_n$$

Тогда

$$t'_{mn} = C_{km}^{-1} \cdot C_{en}^{-1} t_{ke} \quad (I.24)$$

Итак, компоненты физического тензора также преобразуются по закону преобразования базиса.

§ 3. Общее понятие тензора

Тензор можно определить как объект, компоненты которого при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по закону преобразования координатной системы ко- или контрвариантно. Причем, валентность тензора (ρ) равна числу преобразований координатной системы $(C_{ij}, C_{ji}, C_{ij}^{-1})$, необходимому для преобразования компонент данного тензора. Тензор имеет n^ρ компонент. Чтобы отличить ковариантный тензор от контрвариантного, у последнего индексы ставятся сверху.

Так, скалярная величина является тензором нулевой валентности $\rho = 0$. Если n - размерность пространства, то число компонент $n^0 = 1$. Тензор первой валентности (вектор) $\rho = 1$ и имеет столько компонент, какова размерность пространства n . Тензор второй валентности имеет n^2 компонент (билинейная форма, линейный оператор, физический тензор и т.д.), может быть дважды ковариантным дважды контрвариантным T^{ik} или один раз ковариантным, один раз контрвариантным t_i^k .

Тензор третьей валентности имеет n^3 компонент и четыре типа $t_{ikl}, t_{ikl}^e, t_i^{ke}, t_{ik}^e$ (трилинейная форма).

Тензор валентности ρ имеет n^ρ компонент, которые запишутся

$$\bar{k}_1, k_2 \dots k_2$$

$$t_{i_1 i_2 \dots i_m} \quad \text{где } m + r = \rho \quad (I.25)$$

При преобразовании компоненты t в компоненту t' в новой системе m раз используется координатное преобразование C_{ij} и r раз обратное координатное преобразование.

Если преобразование t в t' и обратно не подчиняется этому закону, то t не является компонентой тензора. Однако выяснить вопрос о том, является ли данная совокупность элементов тензором путем установления, подчиняются ли эти элементы законам преобразования координат - операция трудоемкая.

Этот процесс значительно упрощается, если использовать матричную форму формул преобразования тензоров и самих координатных систем.

Надо заметить, что матричный аппарат пригоден только для тен-

зоров валентности не выше второй, но именно такие тензоры и используются чаще всего в настоящее время в реальных задачах.

§ 4. Матричная форма записи тензоров

Напомним, что матрица - это совокупность чисел или символов, записанных в виде таблицы. Числа или символы, из которых состоит матрица, называются ее элементами.

Аппарат матриц позволяет более просто представлять различные математические и физические операции с помощью числовых действий над элементами матриц.

В общем случае матрицы имеют „ n ” измерений.

Матрица нулевого порядка - скаляр.

Матрица первого порядка - таблица в виде строки или столбца -

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a^j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

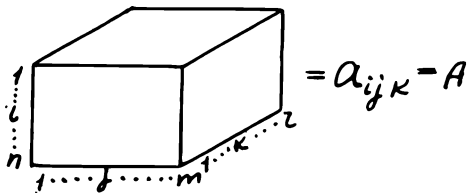
Матрица второго порядка - прямоугольная -

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix}$$

Элемент a_{ij} расположен в i -й строке и в j -ом столбце,
 n - число строк; m - число столбцов.

Если $n = m$ - матрица квадратная.

Матрица трехмерная представляет собой кубическую таблицу.



Для матриц определены операции сложения и умножения.

Сумма двух матриц $A = a_{ik}$ и $B = b_{ik}$ порядка $m \times n$ - есть матрица порядка $m \times n$.

$$[a_{ik} + b_{ik}] = c_{ik} \quad (I.26)$$

Произведение матрицы a_{ik} порядка $m \times n$ на скаляр α - есть матрица порядка $m \times n$:

$$\alpha A = \alpha [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \quad (I.27)$$

Произведение матрицы $A = a_{ij}$ порядка $m \times n$ на матрицу $B = b_{jk}$ порядка $n \times l$ - есть матрица $C = c_{ik}$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad (I.28)$$

Вообще

$$AB \neq BA$$

Операции сложения и умножения матриц обладают свойствами:

- 1) $A + B = B + A$
 - 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
 - 3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
 - 4) $A(BC) = (AB)C$
 - 5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
 - 6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
 - 7) $A(B + C) = AB + AC$ $(B + C)A = BA + CA$
- (I.29)

Нулевая матрица - матрица, все элементы которой равны нулю

$$A + 0 = A \quad 0B = 0$$

Единичная матрица - есть матрица с диагональными единичными элементами

$$E = [\delta_{ik}] \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

Если $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, то матрица A^{-1} обратная.

Она равна

$$A^{-1} = a_{ik}^{-1} = \frac{A_{ki}}{\det[a_{ik}]}, \quad (I.30)$$

где A_{ik} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $\det[a_{ij}]$. Для существования обратной матрицы необходимо, чтобы матрица была квадратной и ее строки или столбцы линейно-независимыми. Операция деления определена как умножение на обратную матрицу. Наибольшее число линейно-независимых строк или столбцов называется рангом матрицы.

Матрица, у которой строки заменены столбцами, а столбцы строками называется транспонированной.

Матричное представление вектора

Вектор в базисе $\{e_i\}$ пространства L_n

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

может быть представлен в матричной форме. Компоненты вектора записываются в виде матрицы-столбца:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

И будем обозначать матрицу большой буквой, соответствующей малым буквам, обозначающим компоненты.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$$

Матрица представляет вектор только в конкретной системе координат.

При переходе к другой системе координат векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса (I.15).

Коэффициенты c_{ij} могут быть записаны в виде двумерной матрицы C :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Если базисная координатная система $\{e_i\}$ преобразуется в базисную $\{e'_j\}$ одного и того же пространства размерности n , то матрица C должна быть квадратной ($m=n$) и невырожденной, т.е. $\det C \neq 0$ и должна существовать обратная матрица C^{-1} . Если матрицу произвольного вектора из пространства L_n в старом базисе $\{e_i\}$ обозначить через X , матрицу того же вектора в новом базисе $\{e'_j\}$ - через X' , а матрицу перехода от одного базиса к другому - через C (I.15), то старые координаты выразятся через новые по формуле

$$X = CX', \quad (I.31)$$

т.е.

$$X_i = C_{i1} X'_1 + C_{i2} X'_2 + \dots + C_{in} X'_n$$

Если выражение (i) умножить слева на C^{-1} , то получим

$$X' = C^{-1} X \quad (I.32)$$

Таким образом, при переходе от старого базиса к новому новые координаты вектора через старые выражаются с использованием матрицы перехода от старого базиса к новому. (Преобразование контрвариантное).

Матричная запись линейной формы

В общем виде линейная форма запишется

$$f(x) = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n, \quad (I.33)$$

где q_i - фиксированные числа и равны $q_i = f(e_i)$, а e_i - вектор произвольного базиса

или (I.33) можно считать произведением двух матриц Q и X . Так как они столбцовые, а перемножаются строки на столбцы, то

$$f(x) = Q_x X = CX_x Q \quad (I.34)$$

При изменении базиса коэффициенты линейной формы преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi = Q_x X = Q'_x X' = X'_x Q = X'_x A' \quad X'_x = CX'_x \\ CX'_x Q = X'_x A', \quad \text{откуда} \quad A' = CQ \end{aligned} \quad (I.35)$$

Матричная запись билинейной формы

В произвольном базисе e_i она записывается

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x^j y^k,$$

где $a_{jk} = f(e_j, e_k)$ являются значениями билинейной формы на парах базисных векторов.

В матричной форме

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$f(x, y) = AXU$$

При изменении базиса коэффициенты билинейной формы изменяются ковариантно

$$A' = C_t A C \quad (I.36)$$

Матричная запись линейного оператора

Линейный оператор пространства L_n может быть представлен квадратичной матрицей $a_{ik} = A$ порядка n . Этот оператор любой вектор $x \in L_n$ преобразует в y .

$$\bar{y} = A \bar{x}$$

При переходе к другому базису

$$\bar{y}' = A' \bar{x}'$$

И матрица A' выразится через A

$$A' = C^{-1} A C \quad (I.37)$$

Матричная форма общего правила преобразования тензоров

1) Дважды ковариантный тензор преобразуется по формуле

$$T' = \{t_{ik}\}' = C \cdot T \cdot C_t \quad (I.38)$$

2) Для дважды контрвариантного тензора формула преобразова-

ния будет

$$T' = \{t^{ik}\} = C_i^{-1} \cdot T \cdot C^{-1} \quad (I.39)$$

3) И для смешанного тензора

$$\{t_i^k\} = T' = C \cdot T \cdot C^{-1} \quad (I.40)$$

Из приведенных формул ясно, что если тензоры не выше второй валентности, их преобразования можно записать в матричной форме. Однако не всякая матрица представляет тензор. Матрица в некоторой системе координат представляет тензор в том случае, если ее элементы подчиняются законам преобразования, свойственным компонентам тензора.

Поясним это на примере.

Можно привести такой пример. Для удобства при снятии мерок портной составляет таблицу, каждая строка которой содержит все сведения об одном заказчике, а каждый столбец - какое-то одно сведение для всех заказчиков.

i	рост	объем талии	длина руки
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}

Но вместо этих размеров можно выбрать другие. Например: длина ноги, объем шеи, объем груди. Для какого-то из заказчиков можно определить закон, связывающий старые размеры с новыми. Но другие элементы матрицы не будут преобразовываться по этому закону. Такая матрица не будет тензором.

Глава П. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Электрические машины относятся к классу электромеханических преобразователей, т.е. устройств, преобразующих электрическую энергию в механическую или наоборот, и представляют собой довольно сложную систему со многими переменными.

Изучение электрических систем распадается на три задачи:

- 1) физическое описание системы;
- 2) математическое описание - составление уравнений движения системы;
- 3) исследование уравнений с учетом конкретных условий.

§ I. Физические процессы

Рассмотрение электромеханических систем следует начать с выбора физических законов, которые соответствуют физическим процессам в системе и определяют выбор математического аппарата.

Любой процесс преобразования энергии подчинен закону сохранения энергии, согласно которому:

$$\boxed{\text{Подводимая энергия}} = \boxed{\text{энергия на выходе}} + \boxed{\text{запасенная энергия}} + \boxed{\text{потери энергии}}$$

Механические силы, действующие на систему, тесно связаны с запасенной энергией и обмен между электрической и механической энергиями происходит через посредство энергии, запасенной в магнитном поле системы.

Современные магнитные материалы допускают плотность запасенной энергии во много раз большую, нежели существующие электропроводящие материалы. Поэтому устройства, преобразующие электри-

ческую и механическую энергии, преимущественно являются магнитными устройствами.

Электрическая машина состоит из ряда взаимодействующих электромагнитных контуров, часть которых неподвижна, а некоторые имеют возможность перемещаться (как правило, они вращаются).

Такие устройства тесно связаны с двумя законами электромагнетизма: законом Фарадея и законом Ампера.

Закон Фарадея включает в себя два различных физических процесса. Первый имеет место когда проводник движется со скоростью \vec{v} в магнитном поле \vec{B} . Электродвижущая сила, наводимая в проводнике, определяется из выражения

$$\mathcal{E} = \int \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l}, \quad (2.1)$$

где $d\vec{l}$ — элемент длины проводника.

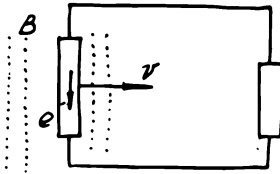


Рис. 2.1.

Если предположить, что поле однородно в пределах длины проводника и цепь замкнута вне магнитного поля (рис. 2.1), то $\vec{v} \cdot \vec{B}$ постоянно на всей длине проводника и

$$\mathcal{E} = \vec{B} \cdot \vec{l} \cdot \vec{v}$$

Если вектор \vec{v} не перпендикулярен \vec{B} , то нужно рассматривать соответствующие компоненты этих векторов. Такую ЭДС принято называть ЭДС движения.

Другая ЭДС носит название "трансформаторной" и возникает в неподвижном проводнике при изменении магнитного потока, в котором находится данный проводник, и равна

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.2)$$

Знак минус диктуется законом Ленца.

Вообще же эти формулы можно получить одну из другой и сущность их одна - возникновение ЭДС в контуре при изменении потока, пронизывающего этот контур.

По закону Ампера на элемент проводника с током, помещенного в магнитном поле, действует механическая сила

$$F_{d\ell} = \mathcal{J} [d\vec{S} \cdot \vec{B}],$$

где \mathcal{J} - плотность тока;

dS - элемент площади проводника.

При однородном распределении тока по проводнику

$$F = I [d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]$$

Если проводник прямолинеен, то

$$F = [I \cdot \vec{B}] \cdot \ell \quad (2.3)$$

Это векторное произведение векторов и механическая сила будет максимальной, если проводник и поле взаимно перпендикулярны.

Взаимодействие магнитного поля с током не зависит от причин возникновения поля. Поэтому будут взаимодействовать электрические контура, электрический контур с микротоками в ферромагнитных материалах и т.д.

§ 2. Составление уравнений

Получить уравнения электромеханической системы можно различными способами как на основании физических законов, так и при помощи вариационных принципов. Между этими способами имеется большое различие с точки зрения формальности применяемой техники анализа.

Рассмотрим кратко некоторые из способов получения уравнений системы.

1) Применение физических законов мало формально и требует большой профессиональной интуиции, особенно, когда речь идет о сложных системах с большим числом переменных. Уравнения движения получают из законов физики: Фарадея, Ампера, Кирхгофа и др. Для определения механических сил взаимодействия в системе используется закон сохранения энергии и принцип возможных перемещений.

Если обозначить через

$W_{\text{мех}}$ - механическую энергию системы;

W_m - энергию, запасенную в магнитном поле;

$W_{эл}$ - энергию электрических контуров,

то энергетический баланс системы запишется

$$d(W_{эл}) = d(W_{мех}) + d(W_m), \quad (2.4)$$

где $d(W_{эл})$ - приращение энергии, подводимой от сети, за исключением потерь в меди (тепловых)

$$d(W_{эл}) = \sum_K U_{ki} I_k \Delta t - \sum_K I_k^2 R_k \Delta t \quad (2.5)$$

K - число контуров, питаемых от i -го источника;

$d(W_m)$ - изменение запасенной магнитной энергии;

$d(W_{мех})$ - энергия, преобразованная в механическую

$$d(W_{мех}) = F_k v_k \Delta t, \quad (2.6)$$

где F_k - механическая сила, действующая на k -й контур с током, находящийся в магнитном поле, а

v_k - скорость данного контура.

Уравнение (2.4) можно записать в символах мощности:

$$F_k v_k + \frac{dW_m}{dt} + \sum_K I_k^2 R_k - \sum_K U_{ki} I_k = 0 \quad (2.7)$$

Заметим, что запасенная электрическая энергия не учитывается, так как она, как отмечалось ранее, много меньше магнитной.

Теперь определим, чему равна запасенная магнитная энергия. Напряжение U_{ki} , подводимое от i -го источника к k контуру, должно уравновешивать по закону Кирхгофа ЭДС $e = -\frac{d\psi}{dt}$, индуцируемую в контуре вследствие изменения потокоцепления по закону Фарадея.

Если контур имеет сопротивление R_k , то

$$U_{ki} = R_k i_k + \frac{d\psi_k}{dt}$$

Умножим обе части уравнения на i_k .

Мощность, затрачиваемая источником, равна $U_{ki} i_k$, а работа, про-

изведенная в k -ом контуре за время dt ,

$$dW_k = R_k i_k^2 dt + i_k d\psi_k,$$

часть энергии $R_k i_k^2 dt$ — рассеивается в виде тепла, а $i_k d\psi_k$ запасается в виде магнитной энергии dW_m . При полном изменении потокосцепления от 0 до ψ_k магнитная энергия в контуре

$$W_{mK} = \int_0^{\psi_k} i_k d\psi_k \quad (2.8)$$

Для системы n контуров запасенная магнитная энергия будет

$$W_m = \sum_{k=1}^n \int_0^{\psi_k} i_k d\psi_k \quad (2.9)$$

Это мощность, подводимая к контуру за вычетом потерь электрических

$$\sum_k U_k i_k - \sum_k R_k i_k^2 = \sum_k L_k \frac{d i_k}{dt} \quad (2.10)$$

Это можно записать через взаимные индуктивности для случая линейных систем, в которых потокосцепления k -го контура — есть функция токов всех контуров

$$\psi_k = \sum_{s=1}^n M_{ks} I_s, \quad (2.11)$$

где M_{ks} — взаимная индуктивность контуров k и s ;

$M_{kk} = L_k$ — собственная индуктивность контура.

Тогда изменение потокосцепления в k -ом контуре

$$d\psi_k = \sum_{s=1}^n M_{ks} dI_s$$

и полная работа всех контуров за время перемещения

$$dW = \sum_{k=1}^n I_k \sum_{s=1}^n M_{ks} dI_s \quad (2.12)$$

Учитывая, что $M_{12} = M_{21}$, общее выражение для полной магнитной энергии, запасенной в системе, запишется:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k = \sum_s \sum_k \frac{L_{ks} i_k i_s}{2} \quad (2.13)$$

Это полная энергия, поступающая от источника и запасаящаяся в магнитном поле системы, если она неподвижна.

Выражение (2.13) есть частный случай (2.9), когда система нелинейна.

Подставляя (2.13) и (2.8) в (2.7) при постоянном токе, получим:

$$F_K \psi_K + \frac{1}{2} \sum_K I_K \frac{d\psi_K}{dt} - \sum_K I_K \frac{d\psi_K}{dt} = 0$$

$$F_K \psi_K = \frac{1}{2} \sum_K I_K \frac{d\psi_K}{dt} = \frac{dW_m}{dt} \quad \frac{\partial W_m}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial X_K} \cdot \frac{\partial X_K}{\partial t} = \frac{\partial W_m}{\partial X_K} \psi_K$$

Откуда
$$F_K = \frac{\partial W_m}{\partial X_K} \Big|_{I=\text{const}} \quad (2.14)$$

Возьмем два контура с собственными индуктивностями L_1 и L_2 , взаимной индуктивностью M .

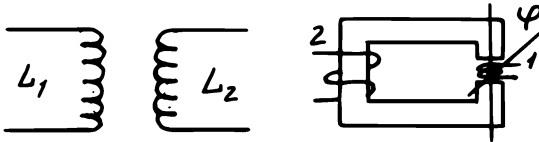


Рис. 2.2.

Можно определить момент, действующий на контур I.

$$T_1 = \frac{\partial W_m}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{2} I_1^2 L_1 + \frac{1}{2} I_2^2 L_2 + M I_1 I_2 \right) \quad (2.15)$$

Если собственные индуктивности не зависят от перемещения, то

$$T_1 = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \varphi} \quad (2.16)$$

или

$$T_1 = I_1 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (2.17)$$

если учесть, что потокосцепление $\psi = L_1 I_1 + M I_2$

Запасенную магнитную энергию можно выразить и через индукцию и напряженность. Пусть имеем тороид с витками. На основании закона полного тока $H\ell = iW$, откуда $i = \frac{H\ell}{W}$

$$\psi = W\phi = W \cdot S \cdot B \quad d\psi = W \cdot S \cdot dB$$

Согласно (2.9)

$$W_m = \int_0^\Psi I d\psi = \frac{e \cdot S \cdot W}{w} \int_0^B H \cdot dB = V \int_0^B H \cdot dB \quad (2.18)$$

Если $\mu = \text{const}$, то (2.18) будет

$$W_m = V \frac{H^2 \mu}{2} = V \frac{HB}{2}, \quad (2.19)$$

а плотность магнитной энергии

$$W_m = \frac{HB}{2}$$

Если контур имеет ферромагнитный сердечник и μ - есть функция H , система будет нелинейна и магнитная энергия может быть определена, если заданы $B = B(H)$ для соответствующих сред (рис. 2.3)

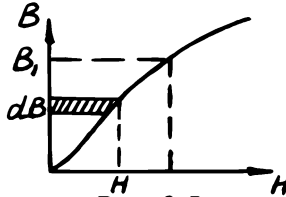


Рис. 2.3.

Плотность магнитной энергии здесь будет равна заштрихованной площади.

$$W_m = \int_0^B H \cdot dB$$

Наиболее общий и распространенный случай представляет собой именно контур с током, в поле которого находится ферромагнетик. Согласно закону сохранения энергии, если контуру сообщено бесконечно малое перемещение, то

$$I d\psi = f_x \cdot dx + dW, \quad (2.20)$$

где $I d\psi$ - энергия, подводимая от источника к контуру (2.9),

$f_x dx$ - механическая работа контура,

dW - изменение запасенной энергии.

Из этого уравнения можно определить силу, действующую на контур по направлению перемещения X .

$$F_x = i \frac{d\psi}{dx} - \frac{dW}{dx} \quad (2.21)$$

Учитывая, что $W_k = \int_0^{\psi_k} i_k d\psi_k$ и обобщая на n контуров, (2.20) можно записать:

$$F_x = \sum_1^n i_k \frac{d\psi_k}{dx} - \sum_1^n \frac{d}{dx} \int_0^{\psi_k} i_k d\psi_k \quad (2.22)$$

В случае, если перемещение производится при постоянном потокоосцеплении ψ_k (2.22) принимает вид:

$$F_x = \frac{d}{dx} \sum_1^n \int_0^{\psi_k} i_k d\psi_k = - \frac{dW_m}{dx} \Big|_{\psi = const}, \quad (2.23)$$

т.е. при постоянном потокоосцеплении сила равна уменьшению магнитной энергии при перемещении контура.

При постоянном токе, не зависящем от перемещения, из (2.22) получим:

$$F_x = \sum_1^n \int_0^{i_k} \frac{d\psi_k}{dx} \cdot di_k \quad (2.24)$$

или

$$F_x = \frac{dW'_m}{dx} \Big|_{I = const}, \quad (2.25)$$

где W'_m так называемая магнитная коэнергия. Поясним это понятие.

На рис. 2.4 дана типичная зависимость ψ от i для контура с учетом насыщения (нелинейного).

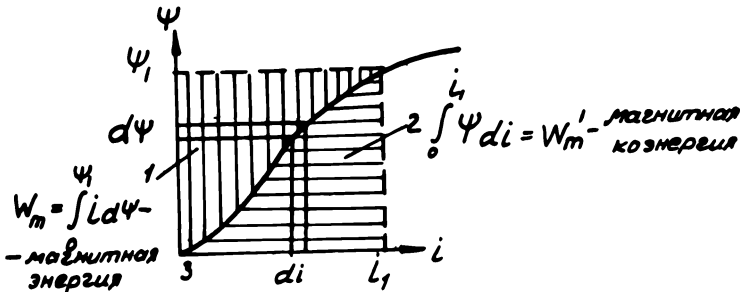


Рис. 2.4.

W_m или полная энергия, запасенная в магнитном поле катушки при изменении Ψ от 0 до Ψ_m .

$$W_m = \int_0^{\Psi_m} i d\Psi$$

При отсутствии ферромагнитного сердечника $\Psi = Li$, а

$$L = \text{const} \quad d\Psi = L di$$

Тогда

$$W_m = L \int_0^{i_m} i di = \frac{Li^2}{2} = W_m'$$

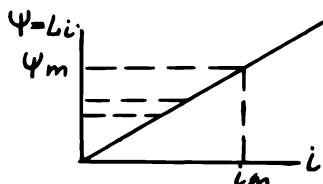


Рис. 2.5.

На рис. 2.5 W_m равна заштрихованной площади.

Таким образом, если перемещение происходит так, что ток остается постоянным, сила равна увеличению коэнергии. Очевидно, что для линейных систем (рис. 2.6), когда $\Psi = k \cdot i$, энергия и коэнергия равны.

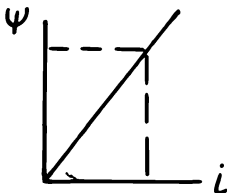


Рис. 2.6.

Для случая контура с сердечником уравнение (2.21) выражает силу, действующую на контур с сердечником в целом, без учета распределения силы между катушкой и сердечником. Этот результат позволяет при расчете силы рассматривать только токи на поверхности сердечника, не учитывая формы пазов.

2) Другой способ вывода уравнений движения электромеханических систем основан на вариационных принципах и в большей степени формализован и применим не только для механических систем.

В основе этого принципа лежат уравнения Лагранжа, которые постулируются:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

Здесь q_k - обобщенные координаты системы.

Любая система уравнений может быть записана в какой-то системе координат. Выбор координат может быть произвольным. Но эти координаты должны полностью определять состояние системы в статическом равновесии. Эти координаты должны быть независимыми. Если среди выбранных координат есть зависимые, надо установить между ними связи. Существует два типа связей - голономные, если они могут быть выражены как соотношения между координатами

$$f_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad j = 1 \dots m \quad (2.27)$$

и, в противном случае, неголономные.

В случае голономных связей всегда можно m переменных исключить и получить $n-m$ независимых переменных.

Случай неголономных связей практически решения не имеет. Когда систему описывают в системе координат, где исключены все связи, т.е. переменные независимы, то эти координаты называют обобщенными.

Для динамической системы координаты не определяют ее состояние и требуются еще динамические переменные. Ими могут быть производные координат, скорости, импульсы. Число динамических координат равно числу координат.

Таким образом, для системы с $n-m = N$ степенями свободы надо иметь $2N$ обобщенных переменных. Состояние динамической системы можно представить точкой в $2N$ -мерном пространстве, называемом фазовым. Уравнения Лагранжа определяют траектории в этом пространстве.

Т.е. поведение динамической системы есть траектория в фазовом пространстве.

Здесь L - лагранжиан - силовая функция Лагранжа.

Под силовой функцией вообще разумеем такую, которая определяет состояние системы, независимо от ее предистории. Лагранжиан опре-

делен как разность между кинетической энергией T и потенциальной V

$$L = T - V \quad (2.28)$$

Для общего случая нелинейных систем лагранжиан будет

$$L = T' - V \quad (2.29)$$

$$T = \int \dot{q} \cdot d\rho \quad \rho = m\dot{q}$$

$$T' = \int \rho \cdot d\dot{q},$$

где ρ - обобщенный импульс,
 T' - кинетическая коэнергия.

Но для линейных систем $T' = T$.
 Потенциальная энергия определяется

$$\int \mathcal{F} \cdot dq, \quad (2.30)$$

где \mathcal{F} - обобщенная потенциальная сила,
 Q_k - обобщенные силы.

Они находятся из выражения

$$\delta A = Q_k \delta q_k \quad (2.31)$$

δA - виртуальная работа сторонних и диссипативных сил.

Виртуальная работа - это работа сил, совершенная по виртуальным перемещениям, каковыми являются обобщенные координаты. Если перемещения виртуальные совпадают с истинными, то

$$Q_k = \frac{\partial A}{\partial q_k} \quad (2.32)$$

Вообще лагранжиан можно представить функцией второй степени относительно скоростей \dot{q}_k .

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \quad (2.33)$$

L_2 - соответствует кинетической энергии - \dot{q}^2

L_1 - соответствует потенциальной энергии - \dot{q}^0

L_0 - соответствует работе сторонних и диссипативных сил - \dot{q}^1

Если система консервативна, $Q_k = 0$: Кинетическая и потенциальная энергия переходят друг в друга, так как в изолированной системе, которая не отдает и не получает энергии, суммарная энергия остается постоянной.

В случае передачи энергии приобретенная или потерянная энергия одной системой равна энергии, потерянной или приобретенной другой системой.

В случае электромеханической системы функцию Лагранжа для линейной системы $L = T - V$ можно представить как $L = L_{эм} + L_{мех}$

$L_{эм}$ - лагранжиан для электромагнитной системы,

$L_{мех}$ - для механической системы.

В качестве обобщенных координат удобно принять:

а) электромагнитная система

$$\left. \begin{array}{l} w_e = w_k \\ \varphi_i - \psi_i ; \\ \varphi_i - u_i ; \\ f_i - i_i ; \\ p - Q ; \end{array} \right\} \text{ или } \left. \begin{array}{l} w_m = w_k \\ -Q_i \\ -i_i \\ -u_i \\ -\psi_i \end{array} \right\} (2.34)$$

Первая система обобщенных координат дает в качестве кинетической энергии электрическую, а вторая система - магнитную.

б) механическая система

$$\left. \begin{array}{l} q_i = X_i \\ \varphi_i = U_i = \dot{X}_i \\ f_i = -K_i X_i \\ p_i = C X \end{array} \right\} (2.35)$$

Тогда общая механическая и магнитная потенциальная энергия

$$V = \int_0^{\psi_i} \sum_1^n i_i (\psi_i \dots \psi_n; X_1 \dots X_m) d\psi_i + \int_0^{X_i} \sum_1^m -f_i (X_1 \dots X_m) dX \quad (2.36)$$

Общая кинетическая энергия

$$\begin{aligned}
 T &= T(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m, U_1, \dots, U_n) = \\
 &= \int_0^{Q_{i,n}} \sum_i U_i(Q_1, \dots, Q_m, x_1, \dots, x_m) dQ + \\
 &+ \int_0^{p_m} \sum_i X_i(p_1, \dots, p_m) dp_m
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

В этом случае была принята система электрических координат, которая дает магнитную энергию в качестве потенциальной. Запасенная энергия в электрическом поле, как уже говорилось, много меньше энергии магнитного поля и поэтому ее можно пренебречь.

Рассмотрим несколько примеров того, как используются уравнения Лагранжа для вывода уравнений движения системы.

Пример I. Можно показать, что уравнения Лагранжа для механических систем приводят ко второму закону Ньютона.

Рассмотрим консервативную систему, состоящую из груза и пружины (рис. 2.7).

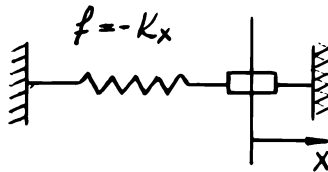


Рис. 2.7.

Эта система имеет одну обобщенную координату - смещение X . Обобщенной скоростью будет скорость движения груза \dot{X} . Обобщенный импульс $p = m\dot{X}$. Согласно (2.29) кинетическая энергия этой системы

$$T = \frac{m\dot{X}^2}{2}$$

потенциальная согласно (2.30)

$$V = f \cdot X$$

Функция Лагранжа запишется:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - fx$$

Подставляя L в уравнение Лагранжа (2.26), получим

$$f = m\ddot{x}$$

Но известно, что этот закон Ньютоном постулировался, был дан на основе опыта.

Пример 2. - неконсервативной механической системы с диссипативной силой в виде вязкого трения (рис. 2.8.)

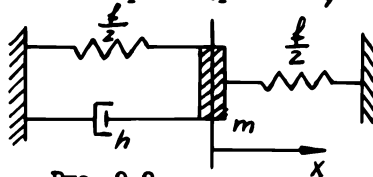


Рис. 2.8.

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$V = fx$$

$$\delta A = h\dot{x}\delta x$$

Отсюда

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x}$$

$$Q = h\dot{x}$$

Уравнение движения запишется:

$$m\ddot{x} - f = h\dot{x}$$

Пример 3 - электромагнитная система

Возьмем в качестве обобщенных координат вторую в (2.34). Тогда:

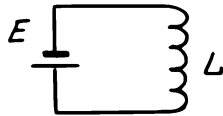
1) Считая систему консервативной

$$T = \int p \cdot d\dot{q} = \frac{Li^2}{2}$$

$$V = -E \cdot Q,$$

если $L = \text{const}$,

то
$$L = \frac{L\dot{q}^2}{2} = Eq$$



$$\frac{L di}{dt} + E = 0$$

Рис. 2.9.

2) Если E считать сторонней силой, то

$$L \frac{di}{dt} = E$$

$$\delta A = E \delta q \frac{\delta A}{\delta q} = E$$

Получили второй закон Кирхгофа.

Пример 4. Электрическая система с рассеивающим элементом и сторонней силой E .

$$T = \frac{L\dot{q}^2}{2}$$

$$\delta A = E \delta q - R\dot{q} \delta q = Q \delta q \quad Q = E - R\dot{q}, \text{ но}$$

$$\dot{q} = i$$

Из уравнения Лагранжа получим

$$E = Ri + \frac{L di}{dt}$$

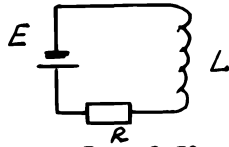


Рис. 2.10.

Пример 5. Электромагнитный прибор, состоящий из подвижной катушки, вращающейся в магнитном поле, которая создает другая, неподвижная катушка. Подвижная катушка снабжена возвращающей пружиной и ее обмотка вместе с обмоткой неподвижной катушки и внешней эдс образует последовательную электрическую цепь (рис. 2.11).

L_1 и L_2 - индуктивности неподвижной и подвижной катушек,

R - общее сопротивление цепи,

K - жесткость пружины,

h - коэффициент вязкого трения,

γ - момент инерции вращающейся катушки.

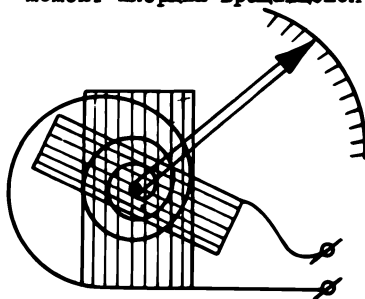


Рис. 2.11.

Обобщенными координатами будут заряд Q и угол поворота φ .

$$L = L_3 + L_{\text{мех}} = T_3 - V_3 + T_{\text{мех}} - V_{\text{мех}}$$

$$T_3 = \int p dq = \sum_1^2 L_{\kappa 3} \int Q dQ =$$

$$= \frac{1}{2} (L_1 + 2M + L_2) \dot{Q}^2$$

$V_3 \approx \dot{0}$ - много меньше T_3 .

$$T_{\text{мех}} = \gamma \dot{\varphi}^2$$

$$V_{\text{мех}} = + f \varphi = -k \varphi^2 \text{ м.к. } f = -k \varphi$$

Отсюда

$$L = \frac{1}{2} [(L_1 + 2M + L_2) \dot{Q}^2 + \gamma \dot{\varphi}^2 - k \varphi^2]$$

Виртуальная работа сторонних и диссипативных сил равна

$$\delta A = E \delta Q - R \dot{Q} \delta Q - h \dot{\varphi} \delta \varphi$$

(так как диссипативные силы пропорциональны обобщенной скорости)
Продифференцировав уравнение Лагранжа по обобщенным координатам, сначала по Q , потом по φ , получим, считая взаимоиנדуктивность функцией φ

$$\left. \begin{aligned} (L_1 + 2M + L_2) \ddot{Q} &= E - \left(R + 2 \frac{dM}{d\varphi} \dot{\varphi} \right) \dot{Q} \\ \gamma \ddot{\varphi} + h \dot{\varphi} + k \varphi &= \frac{dM}{d\varphi} \dot{Q}^2 \end{aligned} \right\}$$

но $\dot{Q} = i$

Тогда окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} (L_1 + 2M + L_2) \frac{di}{dt} + \left(R + 2 \frac{dM}{d\varphi} \dot{\varphi} \right) i &= E \\ \gamma \frac{d^2\varphi}{dt^2} + h \frac{d\varphi}{dt} + k \varphi &= \frac{dM}{d\varphi} \cdot i^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

§ 3. Решение уравнений

Вывод уравнений движения для электромеханических систем является очень важным шагом. Однако для полного решения задачи, т.е. определения поведения системы в любой момент времени, необходимо решить уравнения движения, найти характеристики системы.

Воспользуемся дифференциальными уравнениями электромеханических систем могут быть трех типов:

- 1) линейные с постоянными коэффициентами,
- 2) линейные с переменными коэффициентами,
- 3) нелинейные.

Для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами существуют аналитические методы, которые позволяют найти реакцию системы на любое воздействие. Для решения же нелинейных уравнений общих аналитических методов не существует, приходится получать решения посредством линеаризации уравнений.

Глава III. ТЕОРИЯ КРОНА

Очевидно, что не говоря о решении уравнений, описывающих поведение системы, процесс вывода их для электромеханических систем бывает довольно сложным.

Математическое описание было полностью систематизировано Г.Кроном, применившим в 30-х годах тензорный анализ для определения поведения электрических цепей и машин.

Существенными в теории Крона являются два утверждения: применение аппарата тензорного исчисления и создание модели так называемой "обобщенной машины".

Согласно первому принципу относительности все физические величины являются тензорными, т.е. они инвариантны относительно определенного класса преобразований координат. Это значит, что в различных системах координат этого класса меняется не сама физическая величина, а ее проекция на оси данной системы.

Одни и те же тензорные уравнения справедливы для целого класса координатных систем, преобразующихся одна в другую с помощью дробно-линейной функции. Уравнения в каждой конкретной координатной системе будут матричными.

Идея Крона состоит в том, что надо записать матричные уравнения для самой простой системы данного класса, а затем от нее переходить к любой другой. Не надо анализировать сложную систему, а надо составить уравнения родственной системы, которую легче анализировать или уравнения которой уже были известны. Затем надо перейти от уравнений простой системы к уравнениям сложной системы путем стандартных преобразований, которым подчиняются тензоры.

Самой простой и самой общей системе в классе электрических машин отвечает модель "обобщенной машины" Крона.

Как уже говорилось, электрическая машина является преобразователем электрической и механической энергии и состоит из нескольких электромагнитных контуров (катушек с сердечником), часть которых может вращаться. Неподвижная часть машины называется статором, а вращающаяся – ротором.

§ I. Физическое представление обобщенной машины

В обобщенной машине статорные обмотки расположены по двум взаимно перпендикулярным осям – продольной (обозначается индексом " α ") и поперечной (обозначается индексом " β "). На обмотке ротора размещены две пары щеток: одна пара по продольной оси, другая – по поперечной (рис. 3.1).

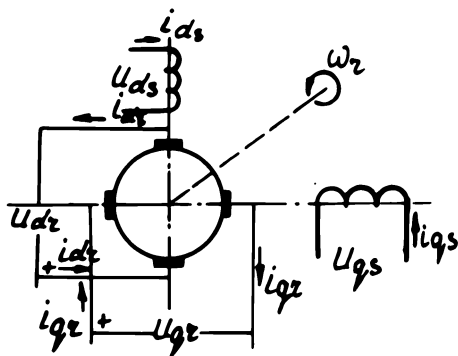


Рис. 3.1.

Здесь индекс " s " относится к статорной обмотке, индекс " r " – к роторной. Щетки являются токосъемателями по отношению к роторной обмотке. Они сами неподвижны, а обмотка ротора вращается с угловой скоростью ω_r (если скорость вращения измеряется не в рад/сек, а в об/мин, ее обычно обозначают n).

Так как щетки реально существуют не у всех электрических машин, то в общем случае их можно представить воображаемыми, тогда они служат лишь в качестве координатных осей, на которые проектируется вектор тока роторной обмотки (рис. 3.2).

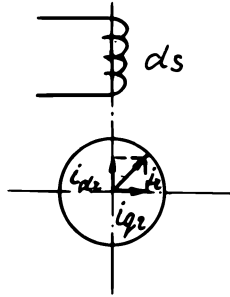


Рис. 3.2.

Поэтому роторную обмотку можно рассматривать как состоящую из двух воображаемых катушек, расположенных взаимно перпендикулярно. Так же, как при вращении ротора, цепь каждой пары щеток будет состоять из разных проводников в каждый момент времени, а сами щетки неподвижны, так и воображаемые катушки с токами i_{d2} и i_{q2} неподвижны, хотя в каждый момент времени будут состоять из различных проводников.

Таким образом, обобщенная машина может быть представлена схемой (рис. 3.3).

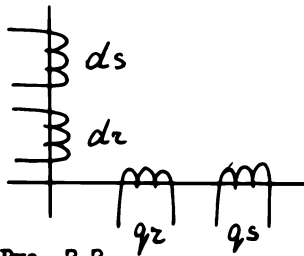


Рис. 3.3.

Причем, каждая из катушек имеет одинаковое число витков и катушки между собой электрически не соединены, т.е. токи во всех катушках независимы.

§ 2. Математическое описание обобщенной машины

Одним из методов, в том числе с помощью уравнений Лагранжа, могут быть выведены уравнения движения для обобщенной машины. Эта система имеет пять обобщенных координат: четыре электрические и одну механическую.

В качестве обобщенных электрических скоростей принимаются токи в катушках, в качестве механической координаты — угол поворота ротора.

Так как токи и создаваемые ими магнитные потоки считаются независимыми, то справедлив принцип суперпозиции. Если считать, что насыщение отсутствует, то получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{ds} = R_{ds} i_{ds} + L_{ds} \frac{di_{ds}}{dt} + M_{ds} \frac{di_{dr}}{dt} \\ U_{dr} = M_{dr} i_{ds} \frac{di_{ds}}{dt} + R_{dr} i_{dr} + L_{dr} \frac{di_{dr}}{dt} + \frac{\partial M_{dqz}}{\partial \theta} \dot{\theta} i_{qz} + \frac{\partial M_{dqz}}{\partial \theta} \dot{\theta} i_{qs} \\ U_{qz} = \frac{\partial M_{qzds}}{\partial \theta} \dot{\theta} i_{ds} + \frac{\partial M_{qzdr}}{\partial \theta} \dot{\theta} i_{dr} + R_{qz} i_{qz} + L_{qz} \frac{di_{qz}}{dt} + M_{qzqs} \frac{di_{qs}}{dt} \quad (3.1) \\ U_{qs} = M_{qzqs} \frac{di_{qz}}{dt} + R_{qs} i_{qs} + L_{qs} \frac{di_{qs}}{dt} \\ J \ddot{\theta} + h \dot{\theta} - \sum_{\substack{k=dz, \\ qz, ds, qs}} \sum_{j=dz, qz} \frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta} i_j i_k = M_{мех} \end{array} \right.$$

Для установившегося режима $J \ddot{\theta} = 0$. Если еще пренебречь трением, то последнее из уравнений примет вид:

$$- M_{эм} = M_{мех}$$

Разные знаки означают, что если один из этих моментов вращающий, то другой - тормозящий.

Первые четыре уравнения - суть законы Кирхгофа для каждой из цепей четырех катушек.

Здесь:

- | | |
|----------------------------------|--|
| $R_{ds}, R_{dr}, R_{qz}, R_{qs}$ | - сопротивления соответственно каждой из обмоток, |
| $L_{ds}, L_{dr}, L_{qz}, L_{qs}$ | - собственные индуктивности обмоток, |
| $M_{drds}, M_{qzds} \dots$ | - взаимоиנדуктивности обмоток, соответствующих индексам. |

В случае, когда воздушный зазор между ротором и статором равномерный и магнитная цепь по осям d и q симметрична, от угла поворота ротора θ зависят лишь взаимоиנדуктивности пар катушек. В этом случае магнитный поток, сцепленный с парой катушек, изменяется по косинусоидальному закону:

$$M(\theta) = M \cos \theta \quad (3.2)$$

В уравнениях (2.38) члены, представляющие трансформатор - ную ЭДС, в качестве коэффициентов имеют взаимоиנדуктивности. А так как в обобщенной машине пары катушек или параллельны или перпендикулярны, т.е. $\theta = 0$ или $\theta = \pm 90^\circ$, то очевидно, что трансформированная ЭДС будет наводиться в катушках соосных и при этом коэффициент взаимоиנדуктивности $M(\theta) = M$.

Члены же, представляющие генерированную ЭДС ("вращения"), имеют в качестве коэффициентов $\frac{\partial M}{\partial \theta}$, что дает:

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = -M \sin \theta, \quad (3.3)$$

т.е. ЭДС вращения будет наводиться, когда взаимоиנדуктивность минимальна, т.е. когда катушки взаимно перпендикулярны. Коэффициентом будет являться M .

Учитывая все сказанное, уравнения (3.1) для обобщенной машины можно записать в более простом виде:

$$\begin{cases}
 U_{ds} = (z + L_p) i_{ds} + M_p i_{dz} \\
 U_{dz} = M_p i_{ds} + (z + L_p) i_{dz} + M_p \theta i_{qz} + M_p \theta i_{qs} \\
 U_{qz} = M_p \theta i_{ds} - M_p \theta i_{dz} + (z + L_p) i_{qz} + M_p i_{qs} \\
 U_{qs} = \quad \quad \quad + M_p i_{qz} + (z + L_p) i_{qs}
 \end{cases}$$

$$M_{\Sigma M} = \sum_{j=dz, qz} \sum_{k=ds, dz, qz, qs} M_{jk} i_j i_k = M(i_{dz} i_{qs} + i_{dz} i_{qz}) - M(i_{qz} i_{ds} + i_{qz} i_{dz}) = M(i_{dz} i_{qs} - i_{qz} i_{ds}).$$

Эти уравнения для обобщенной машины в матричном виде

$$\begin{cases}
 U = Z \cdot i \\
 M = i \cdot G i
 \end{cases} \quad (3.5)$$

где в осях катушек матрицы соответственно будут:

$$U = \begin{matrix} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{matrix} \begin{matrix} U_{ds} \\ U_{dz} \\ U_{qz} \\ U_{qs} \end{matrix} \quad i = \begin{matrix} ds & dz & qz & qs \\ \hline i_{ds} & i_{dz} & i_{qz} & i_{qs} \end{matrix}$$

$$Z = \begin{matrix} ds & dz & qz & qs \\ ds & dz & qz & qs \\ \hline \hline \hline \hline \end{matrix} \begin{matrix} z+L_p & M_p & 0 & 0 \\ M_p & z+L_p & M_p \theta & M_p \theta \\ -M_p \theta & -M_p \theta & z+L_p & M_p \\ 0 & 0 & M_p & z+L_p \end{matrix} \quad (3.6)$$

Матрица Z называется матрицей полного сопротивления и ее можно разбить на три подматрицы:

1) матрицу активного сопротивления

$$R = \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{array} \begin{array}{cccc} ds & dz & qz & qs \\ \begin{array}{c} z \\ \\ \\ z \end{array} & & & \\ & \begin{array}{c} z \\ \\ \\ \end{array} & & \\ & & \begin{array}{c} z \\ \\ \\ \end{array} & \\ & & & \begin{array}{c} z \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (3.7)$$

Она состоит из сопротивлений всех четырех обмоток.

2) матрицу, составленную из коэффициентов при всех ρ -матрицу индуктивности:

$$L = \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{array} \begin{array}{cccc} ds & dz & qz & qs \\ \begin{array}{c} L \\ M \\ \\ M \end{array} & \begin{array}{c} M \\ L \\ \\ \end{array} & & \\ & & \begin{array}{c} L \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} M \\ \\ \\ \end{array} \\ & & & \begin{array}{c} M \\ \\ L \\ \end{array} \end{array} \quad (3.8)$$

3) матрицу, составленную из коэффициентов при всех $\rho\theta$, так называемую матрицу момента

$$G = \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{array} \begin{array}{cccc} ds & dz & qz & qs \\ & & & \\ & & \begin{array}{c} M \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} M \\ \\ \end{array} \\ & \begin{array}{c} -M \\ -M \end{array} & & \\ & & & \end{array} \quad (3.9)$$

Суммарную матрицу полного сопротивления Z можно записать:

$$Z = R + L\rho + \rho\theta G, \quad (3.10)$$

а напряжение

$$U = Ri + L\rho i + \rho\theta Gi \quad (3.11)$$

Если магнитные цепи по осям d и q несимметричны, то M и L отмечаются соответствующими индексами M_d, M_q, L_d, L_q . Крон постулирует, что для большинства электрических машин будут справедливы эти же уравнения, но тензорные, т.е. такие, когда каж-

дая величина, входящая в уравнение, является тензором. Для обобщенной машины уравнения известны, а для каждой другой, реальной, уравнения находятся по правилам преобразования тензоров.

Правило знаков

Элементы матрицы полного сопротивления Z обобщенной машины имеют знаки, соответствующие случаю, если:

1. за положительное направление вращения принять вращение по часовой стрелке (в направлении от оси d к оси q);
2. направление токов в обмотке будет совпадать с положительным направлением осей d и q).

Рассмотрим случай, когда по статорной обмотке протекает ток i_{ds} (рис. 3.4, 3.5). Этот ток будет индуцировать и генерировать ЭДС во всех четырех обмотках. Их можно записать в

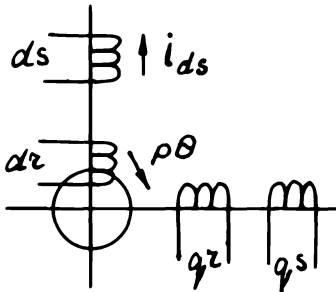


Рис. 3.4.

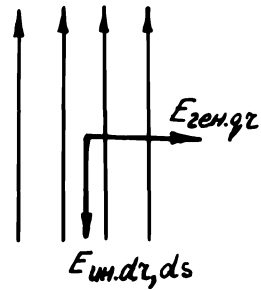


Рис. 3.5.

виде таблицы:

	i_{ds}
$E_{ds} =$	$-r_{ds} - L_{ds} p$
$E_{dz} =$	$-M d p$
$E_{qz} =$	$M d p \theta$
$E_{qs} =$	0

Рассмотрим еще один случай, когда ток протекает по другой статорной обмотке, по поперечной, i_{qs} (рис. 3.6).

Таблица ЭДС генерированных и индуцированных во всех

обмотках током i_{qs} будет:

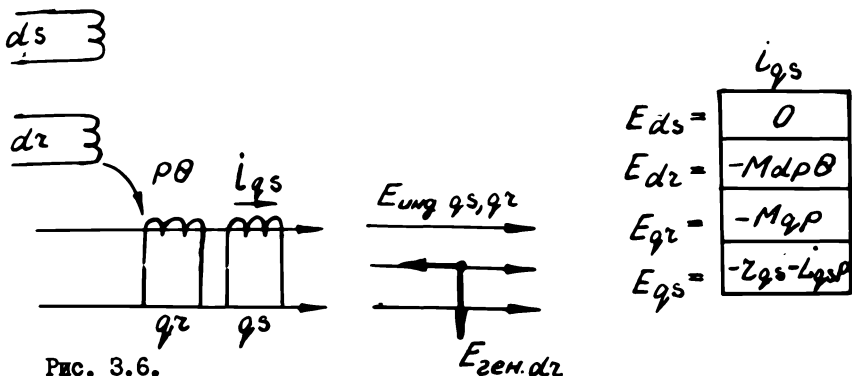


Рис. 3.6.

Для всех четырёх катушек уравнения наводимых ЭДС

$$e = Z_e \cdot i,$$

где матрица Z_e имеет знаки:

	ds	dr	qz	qs		
$Z_e =$	ds	-	-	0	0	(3.12)
	dr	-	-	-	-	
	qz	+	+	-	-	
	qs	0	0	-	-	

Матрицу с такими знаками Z применяют при расчетах генераторных режимов электрических машин. Для двигательного режима, когда токи в обмотках имеют обратные знаки, обратные знаки будут и у напряжений $u = -e$; тогда $Z' = -Z_e$, т.е. матрица Z имеет знаки:

$Z =$	+	+	0	0	(3.13)
	+	+	+	+	
	-	-	+	+	
	0	0	+	+	

Как правило, такие знаки имеют асинхронные двигатели.

Если по статорным обмоткам потекли переменные токи, сдвинутые по фазе, то необходимо обратить внимание на то, в какой именно

обмотке имеется отставание. Как известно, такие токи создадут вращающееся магнитное поле в направлении от отстающего тока к опережающему. В случае, если ток i_{qs} отстает от i_{ds} , поле будет вращаться против часовой стрелки и направление вращения ротора следует принять положительным против часовой стрелки.

Тогда знаки матрицы Z будут

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline + & + & 0 & 0 \\ \hline + & + & - & - \\ \hline + & + & + & + \\ \hline 0 & 0 & + & + \\ \hline \end{array} \quad (3.14)$$

Знаки в матрице полного сопротивления меняются в зависимости от того, приложено напряжение к обмотке или наводится в ней а также от направления вращения якоря и сдвига по фазе токов в статорных обмотках.

Понятие элементарной модели

Элементарная модель реальной машины отличается от модели обобщенной машины только количеством обмоток: оно определяется количеством обмоток реальной машины и может быть больше или меньше статорных или роторных обмоток обобщенной машины. В соответствии с этим в матрице Z обобщенной машины вычеркнутся или добавятся соответствующие строки и столбцы.

Строится элементарная модель следующим образом:

1. Все обмотки реальной машины представляются по двум осям " d " и " q ". Если обмотка короткозамкнута, то она раскладывается на две взаимноперпендикулярные.

2. Все эти обмотки предполагаются идентичными и не связанными друг с другом.

3. Количество этих обмоток определяет размерность базиса уравнения $U = Z i$ данной элементарной машины.

4. Матрица полного сопротивления Z элементарной машины получается из матрицы Z обобщенной машины вычеркиванием или добавлением к ней строк и столбцов, соответствующих отсутствующим или дополнительным обмоткам в элементарной модели.

5. Матрица Z реальной модели не будет содержать элементов,

принципиально отличных от $\# z_{ij} \#$ обобщенной машины. В этом, собственно, смысле обобщенной модели — она описывает все возможные случаи взаимодействия обмоток. Количество их уточняется элементарной моделью.

Рассмотрим, как осуществляется переход от обобщенной машины к реальной. Обобщенная машина имеет четыре обмотки. В реальной машине число обмоток может быть любым. Поэтому вводится промежуточная модель. Если взять число обмоток реальной машины разложенных по осям d и q , равных и независимых, то мы будем иметь так называемую модель "элементарной машины". Это по сути тоже обобщенная машина, но с числом обмоток, соответствующим реальной машине. Например, двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Он состоит из обмотки возбуждения и якорной обмотки. Если щетки расположены перпендикулярно направлению оси обмотки возбуждения, то элементарная машина, равно как и реальная, имеет две обмотки ds и qr (рис. 3.7).

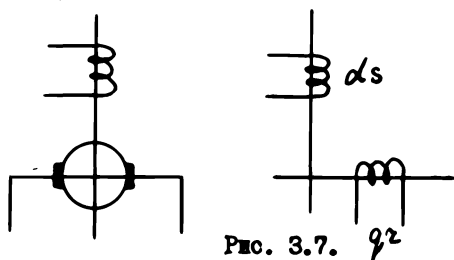


Рис. 3.7.

А если щетки расположены под углом к оси обмотки возбуждения, то элементарная машина будет иметь три обмотки: ds, dz, qr .

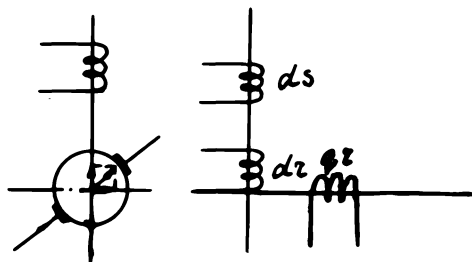


Рис. 3.8.

§ 3. Правила преобразования

Правила преобразования при переходе от уравнений одной машины к уравнениям другой можно получить, исходя из двух концепций:

1) за координатные оси принимаются сами обмотки ds, dz, qz, qs с известным положительным направлением. Тогда тензор Z в уравнении $\bar{u} = Z \cdot \bar{i}$ будет представлять линейный оператор, какому вектору u ставящий в соответствие вектор i .

Известно, как при переходе к новой координатной системе ds', dz', qz', qs' будут преобразовываться проекции векторов и коэффициенты линейного оператора.

Пусть матрица линейного преобразования C , т.е.

$$\begin{aligned} ds' &= C_{11} ds + C_{12} dz + C_{13} qz + C_{14} qs \\ dz' &= C_{21} ds + C_{22} dz + C_{23} qz + C_{24} qs \\ qz' &= C_{31} ds + C_{32} dz + C_{33} qz + C_{34} qs \\ qs' &= C_{41} ds + C_{42} dz + C_{43} qz + C_{44} qs \end{aligned} \quad (3.15)$$

Обычно вектора считаются контрвариантными, тогда формулы преобразования будут:

$$\left. \begin{aligned} i' &= C^{-1} \cdot i \\ u' &= C^{-1} \cdot u \\ z' &= C^{-1} \cdot z \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Но преобразование с использованием обратной матрицы C является нежелательным.

В реальной машине в отличие от обобщенной число обмоток может быть другим. И тогда матрица C будет прямоугольной и обратная C матрица C^{-1} не существует. Как видно из уравнения (3.16), число независимых переменных равно числу обмоток элементарной матрицы, а число независимых уравнений будет определяться числом независимых обмоток реальной машины. Неприятность, связанная с использованием обратной матрицы C , устранится, если принять, что вектор i — контрвариантный, а вектор u — ковариантный. Формулы преобразования в

этом случае будут:

$$\left. \begin{aligned} i &= C \cdot i' \\ u' &= C_t \cdot u \\ z' &= C_t \cdot z \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Непосредственно из этих уравнений определить i' можно через обратную матрицу C^{-1} .

Но, используя то, что уравнение $u = z \cdot i$ тензорное, т.е. и в другой координатной системе оно справедливо, $u' = z' \cdot i'$, можно токи в реальной машине найти не через C^{-1} , а через z'^{-1} , которая существует и определяется из (3.17). Окончательно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u' &= C_t \cdot u \\ z' &= C_t \cdot z \cdot C \\ i' &= z'^{-1} \cdot u' \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Уравнение $u = z \cdot i$ в тензорной записи будет $u_\alpha = z_{\alpha\beta} \cdot i^\beta$,

где

α, β - индексы обмоток,

$z_{\alpha\beta}$ - дважды ковариантный тензор.

Он должен быть таким, так как при перемножении тензоров должно соблюдаться правило "немного индекса", т.е. индекса, по которому ведется суммирование. При перемножении тензоров результирующий тензор имеет только свободные индексы. Например,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} b_{\alpha} = C \\ A \cdot B &= \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \cdot B_{\beta} = C_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Приняв u - ковариантным, i - контрвариантным их произведение дает скаляр $u_{\alpha} i^{\alpha} = P$ - мощность в любой, в том числе и не в ортогональной системе координат.

2) за координатные оси, т.е. базисную систему векторов, прини-

маются токи в обмотках обобщенной машины. Тогда в уравнении

$$U = Z \cdot i$$

Z будет представлять двухвалентный физический тензор, а $\bar{U}_{d_1 s}, \bar{U}_{d_2 r}, \bar{U}_{q_2 r}, \bar{U}_{q_1 s}$ - вектора проекции тензора U на базис $\{i\}$. Проекции векторов $U_{d_1 s}, \dots$ по базисным векторам $\{i\}$ будут скалярные величины, которые можно записать в виде квадратичной матрицы Z . Каждый элемент этой матрицы является сопротивлением току в обмотке от тока в другой обмотке.

Правила преобразования задаются соотношением токов элементарной и реальной машины

$$\left. \begin{aligned} i &= C \cdot i' \\ u' &= C^{-1} \cdot u \\ Z' &= C_t^{-1} \cdot Z \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Эти формулы преобразования содержат обратную матрицу преобразования C^{-1} .

Если бы за закон преобразования принять соотношение между токами реальной и элементарной машин, то получили бы

$$\left. \begin{aligned} i' &= C \cdot i \\ u' &= C_t \cdot u \\ Z' &= C_t \cdot Z \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Однако практически находить приходится матрицу C именно как матрицу перехода от старой системы к новой, потому что именно в новой системе (реальной машине) известна связь между токами. Например. Двигатель с последовательным возбуждением. Ток в обмотку возбуждения поступает из роторной обмотки (рис. 3.9).

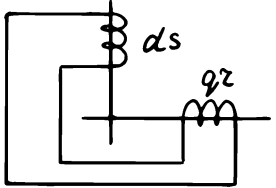


Рис. 3.9.

В реальной машине одна цепь "a" и один ток i .

Имеем:

$$i_{ds} = i$$

$$i_{qr} = i$$

Матрица перехода

$$C = \begin{matrix} ds \\ qr \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Избавиться от обратной матрицы в преобразованиях (3.20) возможно, предположив, что вектора \vec{u} контрвариантные, а базисные вектора \vec{i} ковариантные. Тензор Z по-прежнему дважды ковариантный. Тогда

$$\left. \begin{aligned} i &= C \cdot i' \\ u' &= C_t \cdot u \\ Z' &= C_t \cdot Z \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Матрица C находится следующим образом. Если в реальной машине все "n" обмоток соответствующей ей элементарной машины идентичны и независимы, матрица C будет единичной

$$C = \begin{matrix} ds \\ dr \\ qr \\ qs \end{matrix} \begin{matrix} ds' & dr' & qr' & qs' \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Если обмотки все независимы, но имеют различное число витков, то все приводится к одной из них. Это значит, что одну из обмоток реальной машины выбирает в качестве обмоток элементарной машины, т.е. она будет идентична и соответствующей обмотке элементарной машины. Соответствующий элемент матрицы C будет равен единице.

Если число витков в какой-то обмотке в „ k “ раз больше, чем у обмоток элементарной машины, то соответствующий элемент матрицы C будет не единица, а „ k “.

Если в реальной машине две обмотки соединены последовательно, то в результате имеем одну независимую обмотку с другим числом витков. Матрица C будет прямоугольной. Обмотка, расположенная под углом к осям d и q , представляется через ее проекции по этим осям.

Преобразование поворота координатных осей

При переходе от элементарной машины к реальной с катушками может быть произведена операция поворота их в пространстве, что равносильно повороту щеток в пространстве.

Допустим, что в некоторый момент времени вектор тока определен на роторе (рис. 3.10). В элементарной машине ток i проектируется на оси d и q и дает проекции i_d и i_q . Это соответствует случаю, когда в реальной машине щетки сдвинуты на угол α . Тогда

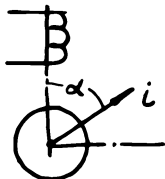


Рис. 3.10.

$$i_d = i \cdot \cos \alpha$$

$$i_q = i \cdot \sin \alpha$$

$$C = \begin{matrix} & \text{m} \\ d & \begin{matrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix} \\ q & \end{matrix}$$

Если имеем две пары взаимно перпендикулярных щеток и они сдвинуты на угол α , то реальных токов будет два по направле-

виде щеток m и n . Матрица C будет

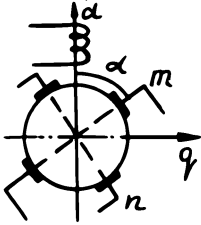


Рис. 3. II.

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} d \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \text{так как} \quad (3.23)$$

$$i_d = i_m \cdot \cos \alpha - i_n \sin \alpha \quad (3.24)$$

$$i_q = i_m \sin \alpha + i_n \cos \alpha$$

Другие координатные преобразования будут рассмотрены в следующих разделах.

Преобразование в несколько приемов

Предположим, что с помощью матрицы C_1 совершен переход от i к i' , затем с помощью C_2 от i' к i'' . Тогда эти последовательные преобразования могут быть выполнены за один прием с помощью результирующего преобразования

$$C = C_1 \cdot C_2$$

или в общем случае

$$C = C_1 \cdot C_2 \dots C_n \quad (3.25)$$

§ 4. Расчет режимов

I. Заданы все приложенные к обмоткам напряжения, требуется найти токи в обмотках и электромагнитный момент. (Двигательный режим работы).

Токи находятся по формуле

$$i' = Z'^{-1} \cdot U'$$

т.е. для определения токов необходимо найти матрицу обратную Z'^{-1} ну

Для простоты и удобства обозначим индексы "ds" через 1, "dt" через 2, "qt" через 3, "qr" через 4.

Тогда матрицу Z можно записать:

$$Z' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z'_{11} & Z'_{12} & & \\ \hline Z'_{21} & Z'_{22} & Z'_{23} & Z'_{24} \\ \hline Z'_{31} & Z'_{32} & Z'_{33} & Z'_{34} \\ \hline & & Z'_{43} & Z'_{44} \\ \hline \end{array} = \parallel Z'_{ij} \parallel \quad (3.26)$$

Каждый элемент обратной матрицы получают следующим образом: матрицу Z транспонируют, затем соответствующий элементу ij минор Δ_{ji} делят на детерминант матрицы $Z - \Delta$. Знак элемента определяется как $(-1)^{i+j}$, т.е. элемент обратной матрицы запишется:

$$Z'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\Delta_{ji}}{\Delta'} \quad (3.27)$$

Отсюда

$$i'_i = \sum_j^n (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta'} U'_j, \quad (3.28)$$

где n - число источников.

Отношение $\frac{i'_i}{U'_j}$ называется передаточной функцией, которая определяет ток в i -й обмотке, вызванный напряжением в j -й обмотке.
Вычисление момента.

Уравнение напряжений в тензорном виде можно представить:

$$U = R_i + L \rho i + G \rho \theta \cdot i$$

Если это уравнение умножить слева на i_t , то получим уравнение мощности

$$i_t U = i_t \cdot R \cdot i + i_t \cdot L \cdot \rho i + i_t \cdot G \cdot \rho \theta \cdot i \quad (3.29)$$

Левая часть - полная мощность на всех зажимах.

Первый член правой части - мощность электрических потерь. Второй член - мощность, запасенная в магнитном поле. Третий член - мощность, преобразуемая в механическую.

Так как угловая скорость $\rho \theta$, то момент получится, если $i_t \cdot G \cdot \rho \theta \cdot i$ разделить на $\rho \theta$. Это возможно, потому что $\rho \theta$ величина не матричная, а скалярная. Поэтому вращающий момент $M_{эм}$

равен $i_t \cdot G \cdot i$. Для обобщенной машины он будет

$$M_{\text{ЭМ}} = \begin{matrix} ds & dr & qz & qs \\ \boxed{i ds} & \boxed{i dr} & \boxed{i qz} & \boxed{i qs} \end{matrix} \times$$

$$\begin{matrix} ds & & & & \\ dr & & & L_2 & M \\ qz & -M & -L_2 & & \\ qs & & & & \end{matrix} \times \begin{matrix} \boxed{i ds} \\ \boxed{i dr} \\ \boxed{i qz} \\ \boxed{i qs} \end{matrix} \quad (3.30)$$

Для всех реальных машин величина момента в тензорном виде одинакова, т. е.

$$M'_{\text{ЭМ}} = i'_t \cdot G' \cdot i'$$

G - тензор момента, состоящий из коэффициентов при скоростях, т. е. при

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & L_{23} & M_{24} \\ \boxed{-M_{31}} & \boxed{-L_{32}} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.33)$$

При симметричном роторе и равномерном воздушном зазоре

$$L_{32} = L_{23} = L_2 \text{ и все } M_{ij} \text{ одинаковы.}$$

Зная токи, можно еще вычислить тензор момента G' . Его получают из коэффициентов при составляющих Z' , содержащих Z , или

выводят из матрицы Z элементарной машины

$$G' = C_z \cdot G \cdot C \quad (3.32)$$

Зная i' и G' момент определяется:

1) при постоянном токе постоянная составляющая момента f

$$f = i' \cdot G' \cdot i', \quad (3.33)$$

так как приложенные напряжения постоянны и $p = 0$.

2) при переменном токе в случае установившегося режима постоянная составляющая момента может быть найдена по формуле

$$f = \operatorname{Re} i'^* \cdot G' \cdot i', \quad (3.34)$$

где i'^* - величина, комплексно сопряженная с i' (по аналогии с определением $p = i'^* \cdot e$).

При установившемся режиме в случае синусоидального тока составляющие e' могут быть сдвинуты по фазе, т.е. содержать комплексные числа.

Оператор p в этом случае заменяется на $j\omega$, где ω - угловая частота приложенного напряжения. Тогда все индуктированные ЭДС будут иметь множители

$$pL = j\omega L = jx \quad \text{и} \quad pM = j\omega M = jx_m \quad (3.35)$$

Во всех генерированных ЭДС множители $p\theta$ заменяются $\nu\omega$,

где $\nu = \frac{\text{угловая скорость ротора}}{\text{угловая частота питания}}$

Тогда

$$\begin{aligned} p\theta \cdot L &= \nu \cdot \omega L = \nu x \\ p\theta \cdot M &= \nu \cdot \omega M = \nu x_m \end{aligned} \quad (3.36)$$

3) переменная составляющая момента найдется, если вместо каждой составляющей i подставить мгновенное значение

$$\sqrt{2} (i_1 \sin \omega t + i_2 \cos \omega t), \quad (3.37)$$

где i_1 и i_2 - соответственно вещественная и мнимая части i .

Величина электромагнитного момента пропорциональна произведению двух векторов (токов). Если две величины переменные (напри-

мер, токи), то и их произведение также является величиной переменной, из которой можно, однако, выделить постоянную составляющую (в частном случае она может быть равна нулю).

Известно, что если два вектора изменяются синусоидально, то их произведение будет:

а) для случая, если их фазы совпадают i_1, i_2

$$i_1 = i_{1m} \sin \omega t;$$

$$i_2 = i_{2m} \sin \omega t,$$

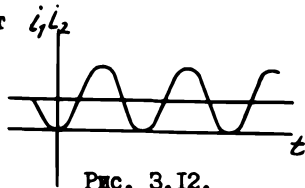


Рис. 3.12.

то

$$i_1 i_2 = \frac{i_{1m} i_{2m}}{2} (1 - \cos 2\omega t), \quad (3.38)$$

т.е. произведение в этом случае содержит постоянную составляющую $\frac{i_{1m} \cdot i_{2m}}{2}$ и составляющую, изменяющуюся с частотой 2ω и имеющую ту же амплитуду $\frac{i_{1m} i_{2m}}{2}$

б) если два вектора сдвинуты по фазе на $\pm 90^\circ$

$$i_1 = i_{1m} \sin \omega t$$

$$i_2 = i_{2m} \sin (\omega t \pm 90^\circ),$$

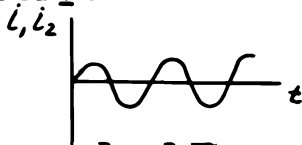


Рис. 3.13.

то

$$i_1 i_2 = \frac{i_{1m} \cdot i_{2m}}{2} \sin 2\omega t, \quad (3.39)$$

т.е. произведение постоянной составляющей не содержит, а переменная также имеет двойную частоту и амплитуду, равную $\frac{i_{1m} i_{2m}}{2}$

А теперь рассмотрим общий случай, когда два вектора под про-

извольным углом φ друг к другу

$$в) 0 < \varphi < 90^\circ$$

$$i_1 = i_{1m} \sin \omega t$$

$$i_2 = i_{2m} \sin(\omega t + \varphi)$$

Вектор i_2 можно разложить по направлению i_1 и перпендикулярному ему. Произведение таких векторов будет равно

$$i_1 \cdot i_2 = i_1 (i_2' + i_2'')$$

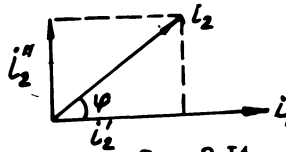


Рис. 3.14.

Член $i_1 i_2'$ содержит постоянную составляющую $\frac{i_{1m} i_{2m}}{2}$ и переменную - косинусоиду с амплитудой $\frac{i_{1m} i_{2m}}{2}$ и частотой 2ω . Произведение $i_1 i_2''$ содержит только переменную составляющую синусоиды с амплитудой $\frac{i_{1m} i_{2m}}{2}$ и частотой 2ω .

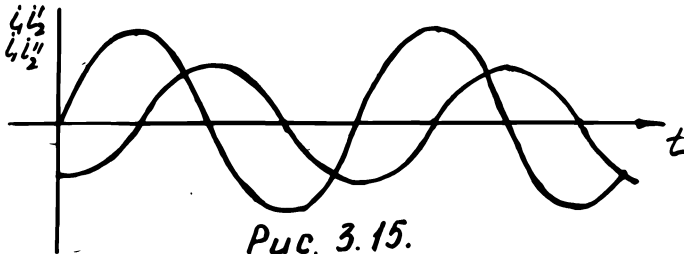


Рис. 3.15.

Таким образом, постоянная составляющая равна

$$\frac{i_{1m} \cdot i_{2m}}{2} = \frac{i_{1m} i_{2m} \cos \varphi}{2}, \quad (3.40)$$

где φ - угол между векторами i_1 и i_2

Переменная составляющая равна сумме синусоиды и косинусоиды

одинаковой частоты, но с равными амплитудами (рис. 3.15)

$$\frac{i_m i_m \cos \varphi}{2} \cos 2\omega t + \frac{i_m i_m \sin \varphi}{2} \sin 2\omega t$$

Обозначим $\frac{i_m i_m \cos \varphi}{2}$ через A_1 ,

а $\frac{i_m i_m \sin \varphi}{2}$ через A_2 .

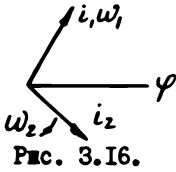
Тогда имеем

$$\begin{aligned} & A_1 \cos 2\omega t + A_2 \sin 2\omega = \\ & = A_1 \sin(2\omega t + 90^\circ) + A_2 \sin 2\omega t = \quad (3.41) \\ & = A \sin(2\omega t + \varphi_1), \end{aligned}$$

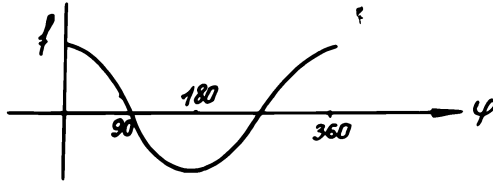
где

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(-90^\circ)} = \frac{\sqrt{2} i_m i_m}{2} \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\}$$

г) Обе величины i_1 и i_2 имеют различные частоты ω_1 и ω_2 . В этом случае векторы, изображающие i_1 и i_2 на комплексной плоскости, будут подобно часовым стрелкам, вращаясь с разными угловыми скоростями, перемещаться друг относительно друга.



Таким образом, угол сдвига фаз φ между i_1 и i_2 будет все время изменяться и за время $T_{\text{отр}}$, равное периоду обращения одного вектора относительно другого (соответствующее относительной скорости $\omega_2 - \omega_1$), угол φ изменится от 0 до 360° и постоянная составляющая момента сама будет переменной величиной (рис. 3.17) согласно а, б, в.



Средняя же величина момента за время $t > T_{\text{отр}}$ будет равна 0. Отсюда следует, что электромагнитный момент отличен от нуля в том случае, если взаимодействующие переменные токи или потоки изменяются с одинаковой частотой и не сдвинуты по фазе на (90°) .

4) Момент может быть записан следующим образом:

$$M_{\text{ЭМ}} = i_2^t G (i_2 + i_3)$$

и соответственно тензор G может быть разделен на две составляющие G_3 и G_2 ; $G = G_3 + G_2$

Тогда

$$M_{\text{ЭМ}} = i_2^t G_3 i_3 + i_2^t G_2 i_2 \quad (3.42)$$

Если машина симметрична по осям d и q и $\int dr = \int qz$, то момент, обусловленный одними токами в роторе, равен нулю

$$i_2^t G_2 i_2 = i_{dr} \int qz i_{qr} - i_{qr} \int dr i_{dr} = 0 \quad (3.43)$$

$$M_{\text{эм}} = i_2^2 G_s L_s \quad (3.44)$$

Если магнитные цепи по осям не симметричны, то

$$M_{\text{эм}} = L_2^2 G_2 L_2 = id_2 \cdot i_{gr} (L_{gr} - L_{dr}) \quad (3.45)$$

Этот момент называется реактивным. Обычно он обусловлен наличием явных полюсов или у ротора или у статора.

II. Заданы токи в обмотках, требуется определить напряжения в них. (Машина работает в генераторном режиме).

В этом случае расчеты значительно проще, ибо напряжения находятся по формуле

$$U' = Z' i'$$

и обратную матрицу сопротивлений искать не требуется.

Электромагнитный момент определяется по той же формуле

$$M_{\text{эм}}' = i_2^2 G' i_2'$$

III. Если заданы входные напряжения, а необходимо найти выходные, то используется расчет обоих режимов (двигательного и генераторного). Выходное напряжение определяется по формуле

$$U'_{\text{вых}} = Z' i',$$

а i' определяется по формуле

$$i_i' = \sum_j^n (-1)^{i+j} \frac{U_j}{Z_{ij}}, \quad (3.46)$$

где n - число входов.

Примером такого режима являются трансформаторы.

Глава IV. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Мы показали, что изучение электромеханических систем сводится к задаче либо совместного решения уравнений, либо к матричным операциям в случае использования обобщенной машины Крона. Но оба этих математических аппарата не отражают некоторых фундаментальных соотношений в явном виде, как например, обратную связь. Кроме того, часто сходство каких-либо задач зависит в первую очередь от структуры связей между переменными, а сами по себе уравнения не позволяют легко обнаружить эти связи и произвести упрощения, подсылаемые топологией системы.

Сейчас структурные методы расчета широко применяют для расчета различных систем (экономических, автоматического регулирования и др.).

В последнее время появилось несколько работ по теории направленных графов в области электрических цепей и машин.

Направленные графы оказались удобным аппаратом при решении задач с функциональными связями. Теория линейных направленных графов позволяет разработать формальные методы получения уравнений, описывающих систему, в том числе электромеханическую.

§ I. Основные положения теории графов

Теория графов - графическая алгебра в наиболее развитой форме. Графические образы переменной величины и функциональной связи освобождают от понятия физического объекта и делают применимыми графическое представление системы в любой области науки и техники.

Направленный граф адекватен соответствующей системе уравнений. При этом независимыми переменными оказываются возмущения, действующие на систему, а вызванные в ней процессы рассматриваются как зависимые переменные. Мэйсон показал, что топологические преобразования линейных графов соответствуют алгебраическим операциям, осуществленным над системой линейных уравнений.

Определение графа

Граф - пара, состоящая из множества и отображения X и Y , т.е. каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие $y \in Y$, связанный с $x \in X$ определенным законом, например, $y = \alpha x$

Элементы множества X изображаются точками на плоскости, а пары точек x и y соединяются линией со стрелкой от x к y . Точки называются вершинами, а линия, соединяющая вершины, называется дугой или ребром графа. Таким образом, граф представляет собой геометрическую фигуру, образованную из точек, соединенных линиями. Однако граф может деформироваться, его можно сжимать, растягивать, дуги могут быть линиями или кривыми, точки в пространстве могут быть расположены произвольно - это не влияет на результат вычислительных операций над графом и этим граф отличается от фигур, изучаемых геометрией.

Понятие графа чисто абстрактное математическое, не привязанное ни к какой конкретной системе и поэтому его можно использовать для исследований самых различных систем.

Множеством и его отображением могут быть переменные и их функции. Соответствующий этому случаю граф назовем функциональным в отличие от графов, элементами которых могут быть другие множества. Например, города и связывающие их дороги, люди и родственные связи между ними и др.

Каждому уравнению или системе уравнений соответствует граф. Вершинами его будут переменные, а ветвями коэффициенты при них, называемые коэффициентами передачи.

Пример:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= ax + bx_3 \\ x_3 &= x_0 + cx + dx_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

X_i , относительно которой разрешено i -е уравнение и представленная i -й вершиной, определяется как сумма коэффициентов передач ветвей, входящих в эту вершину, умноженных на переменную, из которой исходит эта ветвь.

Сначала строится граф для первого уравнения (рис. 4.1)г

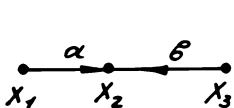


Рис. 4.1.

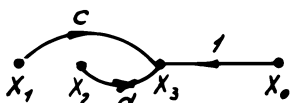


Рис. 4.2.

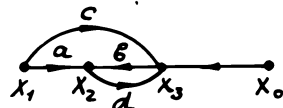


Рис. 4.3.

Затем для второго (рис. 4.2). Полный граф системы показан на рис. 4.3.

Граф содержит ту же информацию, что и представленная им система. Разрешив систему относительно других переменных, получим другие графы. Нас интересуют приложения теории графов к исследованию электрических машин, а для этой цели понадобятся лишь некоторые сведения из теории графов. Необходимые определения и операции над графами мы и рассмотрим.

1. Основные определения.

- а) Нуль граф - граф, состоящий из одних вершин, не соединенных дугами (рис. 4.4,а).
- б) Полный граф - граф, в котором любые две вершины связаны дугой, одной или более (рис. 4.4,б).
- в) Подграф - граф, являющийся частью другого графа (рис. 4.4,в).
- г) Источник - вершина, из которой дуга или дуги исходят, например, X_1 и X_5 на рис. 4.4,б).
- д) Сток - вершина, в которую дуга или дуги входят.
- е) Путь - цепочка дуг, через которые надо пройти, чтобы попасть из одной вершины в другую. Направление обхода указывается стрелками дуг. Путь задается либо перечислением вершин, встречающихся при обходе, либо перечислением дуг. Например $X_1 - X_2 - X_3 - X_4$ или $ab\bar{d}$ (рис. 4.4,б).
- ж) Разомкнутый путь - путь, в котором каждая вершина встречается только один раз.

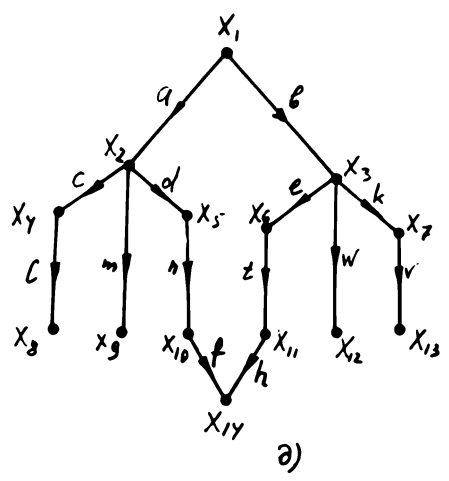
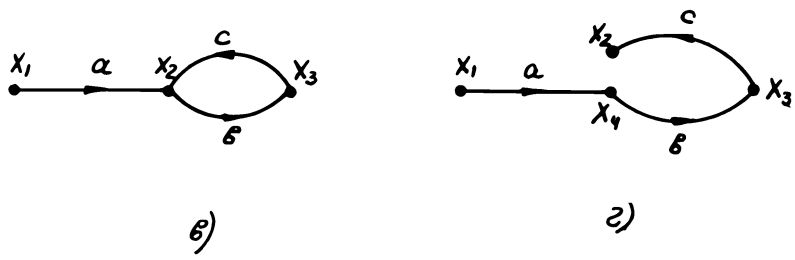
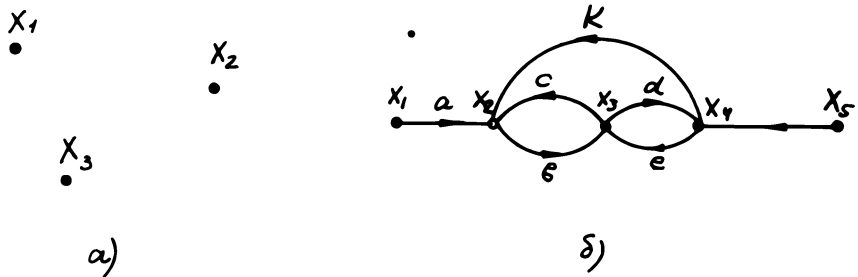


Рис. 4.4.

з) Замкнутый путь или контур, или петля - путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий через каждую вершину один раз, например, $bc, \bar{c}dc$ (рис. 4.4,б).

и) Элементарная петля имеет всего одну вершину.

к) Блокированная вершина - разделенная вершина, размыкающая петлю, проходящую через нее. Через эту вершину сигнал не передается (рис. 4.4,г. Блокированная вершина - X_2). Минимальное число блокированных вершин, необходимое, чтобы ликвидировать все петли графа, называется порядком графа.

л) Связный граф - граф, в котором любые две вершины могут быть соединены цепью (рис. 4.4,б,в).

м) Деревом называется связный граф, не имеющий контуров. Дерево, все пути которого имеют обход вершину, называется лагранжевым (рис. 4,4,д).

П. Вычислительные операции над графом или решение графа сводится к упрощению графа, свертыванию, либо граф решается непосредственно по правилу Мэйсона.

а) По правилу Мэйсона можно решить любой граф.

$$\chi_i = \chi_0 \frac{\sum_k G_k D_k}{D}, \quad (4.2)$$

где D - определитель графа (системы)

$$D = 1 - \sum_m P_m + \sum P_{p_2} - \dots, \quad (4.3)$$

где P_{mn} - произведение коэффициентов передачи p -го сочетания (для вершин χ_i и χ_0) из n несоприкасающихся контуров;

G_k - коэффициент передачи k -го разомкнутого пути, соединяющего χ_0 с χ_i

D_k - определитель части графа, не соприкасающийся с k -ым разомкнутым путем.

Таким образом, видим, что решение сводится к матричному вычислению и если число переменных большое, то и вычисления громоздкие. На первый взгляд кажется, что граф ничего облегчающего по сравнению с другими методами не дает: одинаково трудно составить уравнение или граф, одинаково трудно вычисление их.

в) Упрощение графа заключается в том, что по определенным правилам исключаются ненужные вершины и граф преобразуется к виду,

позволяющему вскрыть нужные связи. Основные правила преобразования функционального графа были разработаны Мэйсоном и им же доказано соответствие этих преобразований алгебраическим операциям над системой уравнений, эквивалентных данному графу.

Вот простейшие преобразования, ведущие к упрощению графа и преобразованию его к удобному виду:

1) Устранение вершины.

Неужная вершина отбрасывается, а коэффициенты передачи, связывающие ее с двумя другими вершинами, перемножаются (рис. 4.5)



Рис. 4.5.

2) Устранение ветви:

две ветви, связывающие две вершины, можно заменить одной с коэффициентом передачи, равным сумме коэффициентов передач этих ветвей

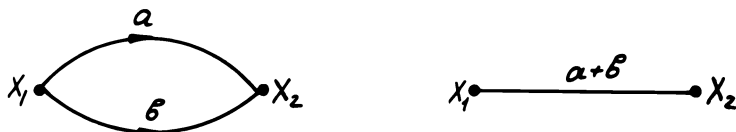


Рис. 4.6.

3) Инверсия, позволяющая изменить направление некоторых ветвей графа на обратные. Иногда это облегчает упрощение графа и дает возможность установить ряд связей. Часто инверсия применяется, когда необходимо вершину-сток сделать вершиной-источником. Инверсия ветви изменяет: а) направление этой ветви и сообщает обратную величину коэффициента передачи; б) переносит вместе с конечной вершиной этой ветви в ее начальную вершину концы других ветвей, входящих в эту вершину до инверсии и в) делит коэффициенты передачи этих ветвей на первоначальный коэффициент передачи инверсируемой ветви, взятый с обратным знаком. Начальные вершины ветвей с перенесенными конечными вершинами остаются неизменными. Инверсия любой ветви некоторого пути вызывает инверсию всего пути.

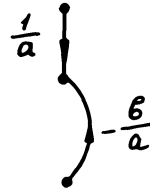
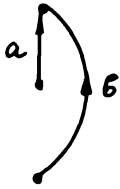


Рис. 4.7.

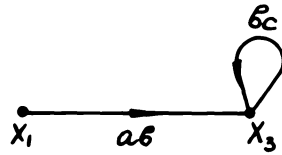
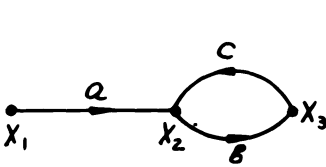


Рис. 4.8.

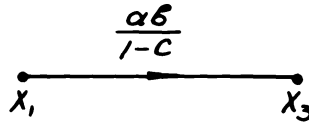
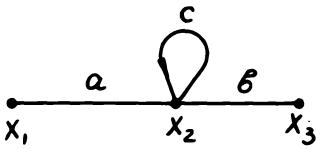


Рис. 4.9.

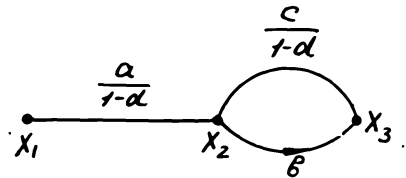
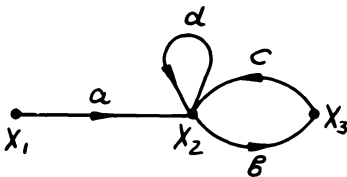


Рис. 4.10.

На рис. 4.7 показан пример инверсии ветви \mathcal{O} . Преобразование петлевого графа приводит к появлению элементарной петли (рис. 4.8).

4) Устранение элементарной петли сводится к устранению вершины, которой принадлежит данная петля. При устранении вершины с элементарной петлей, коэффициенты передачи, проходящие через эту вершину, делаются на множитель, равный единице минус коэффициент передачи петли (рис. 4.9).

При сохранении этой вершины коэффициенты передач ветвей, либо входящих в эту вершину, либо исходящих из нее, делятся на множитель, равный единице минус коэффициент передачи петли. Но только первое сохраняет за вершиной ее исходное значение. Пример дается на рис. 4.10.

5) Обратная связь вершины при K -й вершине F_K определяется как

$$F_K = 1 - T_K, \quad (4.4)$$

где T_K - петлевая передача рассматриваемой вершины.

Петлевая передача вершины определяется как передача от источника к стоку при блокировке вершины. Петлевая передача ветви определяется как петлевая передача вспомогательной вершины, внесенной в эту ветвь и которая разбивает ветвь на две: с коэффициентом передачи ветви и коэффициентом передачи, равным единице.

Обратная связь всегда является дробно-линейной функцией коэффициента передачи некоторой произвольной ветви графа или линейной функцией коэффициента передачи ветви, которая непосредственно связана с рассматриваемой вершиной или примыкает к рассматриваемой ветви.

6) Обратная связь m -й вершины графа, у которого вершины пронумерованы и передача через вершины более высокого порядка, чем m блокирована, называется парциальной обратной связью. Произведение парциальных обратных связей, вычисленных для всех вершин графа, остается постоянным независимо от порядка нумерации вершин и равно детерминанту графа

$$D = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdots D_n, \quad (4.5)$$

где D_1, \dots, D_n - парциальные обратные связи,

D - детерминант графа.

Таким образом, найдя парциальные обратные связи, определим множители, на которые раскладывается детерминант графа.

Обратная связь k -й вершины

$$F_k = \frac{D}{D_k}, \quad (4.6)$$

где D_k - детерминант графа, k -я вершина которого заблокирована.

Обратная связь ветви j_k равна

$$F_{jk} = \frac{D}{D_{jk}}, \quad (4.7)$$

где D_{jk} - определитель графа с удаленной ветвью.

7) Прямое моделирование графа. Оно сводится к замене каждого элемента физической цепи соответствующим реляционным блоком и соединению реляционных блоков по структуре, совпадающему с графом. Реляционные блоки должны содержать элементы, имитирующие коэффициенты передачи ветвей графа, соответствующему элементарному физическому объекту (четырёхполюснику). При этом реляционные блоки должны быть представлены в форме четырёхполюсников.

§ 2. Направленные графы в применении к электрическим машинам. Граф обобщенной и реальной машин

Как и матричный анализ электрических машин, графовая теория основывается на модели обобщенной машины Крона. Методика анализа остается кронической: исходя из одной и той же модели самой общей и самой простой, описание которой считается известным, с помощью некоторых преобразований создается возможность получить описание любой реальной машины. Только математический аппарат описания машин меняется. Вместо матриц используются направленные графы.

Как известно, обобщенная машина представляет собой ряд статорных и роторных одинаковых обмоток, расположенных по двум взаимно перпендикулярным осям. Часть из них неподвижна, некоторые вращаются с угловой скоростью θ

Уравнение рамки (янтка) с током, движущейся в магнитном поле,

записывается в следующем виде:

$$u = Ri + p\Phi + \theta\psi, \quad (4.8)$$

т.е. напряжение, приложенное к зажимам рамки, уравнивает сумму эдс:

- 1) падение напряжения Ri на активном сопротивлении рамки,
- 2) напряжение, уравнивающее э.д.с. самоиндукции $p\Phi$ (Φ — магнитный поток) и
- 3) напряжение, уравнивающее э.д.с. вращения $\theta\psi$, которая наводится при вращении рамки в магнитном поле ψ с угловой скоростью θ

Умножив на i все члены уравнения (4.8), получим уравнение энергетического баланса рамки

$$u_i = Ri^2 + ip\Phi + i\theta\psi, \quad (4.9)$$

где u_i — мощность, подводимая к катушке;

Ri^2 — мощность джоулевых потерь,

$ip\Phi$ — энергия, накопленная в магнитном поле катушки,

$i\theta\psi$ — механическая мощность на оси катушки.

На рис. 4.11 изображен граф уравнения равновесия рамки с током, движущейся в магнитном поле. Мгновенное значение электромагнитного момента будет

$$M_{эм} = i\psi \quad (4.10)$$

и полный граф рамки с током, вращающейся в магнитном поле, показан на рис. 4.12. И, наконец, на рис. 4.13 представлен граф энергетического баланса этой элементарной системы.

Для обобщенной машины, имеющей две неподвижные обмотки (статорные — „ S “) и две вращающиеся (роторные — „ r “), расположенные по двум взаимно перпендикулярным осям, направленный граф представляется на рис. 4.14. Для наглядности здесь сохраняется расположение обмоток обобщенной машины. Этот граф можно разбить на два подграфа: граф переходного сопротивления и граф момента.

При электрическом соединении обмоток, т.е. при переходе от обобщенной машины к реальной, Крон вводит матрицу соединения C . В теории графов эквивалентом матрицы C является граф соединения, устанавливающий связь между токами обмоток элементарной и реальной машин.

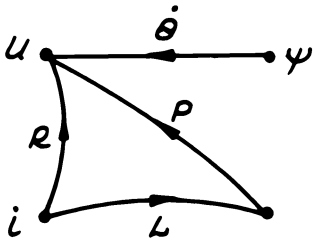


Рис. 4.11.

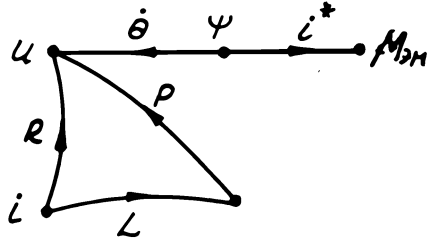


Рис. 4.12.

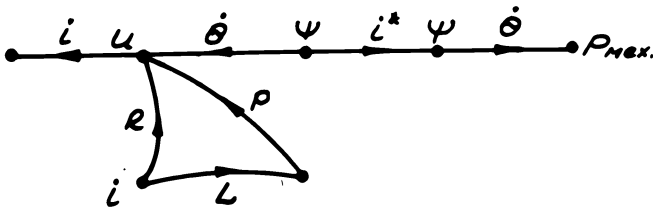


Рис. 4.13.

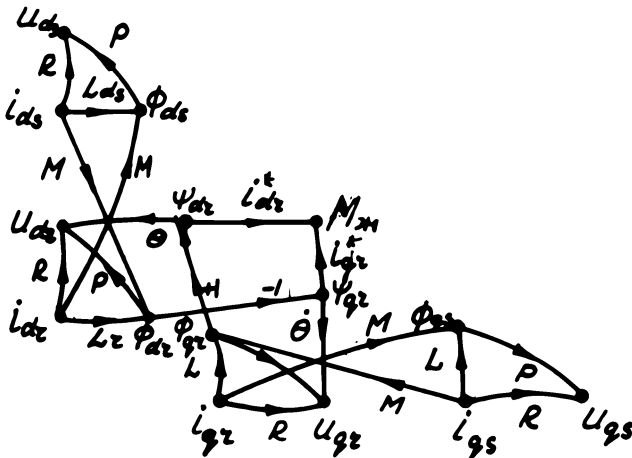


Рис. 4.14.

$$L = C L'$$

Матрицу C можно рассматривать как матрицу инцидентий графа перехода. Как известно, элементы матрицы инцидентий показывают, соединены данные вершины ребром или нет. Наша матрица C является особой матрицей инцидентий:

- 1) строками ее являются токовые вершины графа элементарной машины, а столбцами - реальной;
- 2) элементы ее могут быть отличны от 0 и 1.

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & i'_1 & i'_2 \\ i_1 & 1 & \\ i_2 & & k \\ i_3 & & \\ i_4 & & \end{array} \end{array} \quad (4.11)$$

§ 3. Правила построения графа реальной машины

1. Если матрица C единичная

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & & 1 \end{array} \end{array} \quad (4.12)$$

(что указывает на отсутствие электрических связей между обмотками элементарной и реальной машины и их идентичность), то это значит, что токовые вершины элементарной машины и есть токовые вершины реальной машины, т.е. граф реальной машины совпадает с графом элементарной.

2. Матрица C диагональная, но не единичная. Возможны два способа построения графа реальной машины:

а) токовая вершина, соответствующая элементу матрицы C , отличному от 1, умножается на значение этого элемента. Затем матрица C должна согласно преобразованию $L' = C L$ транспонироваться и аналогичный процесс повторяется относительно вершин напряжений. Но так как матрица диагональная, транспонировать ее не приходится.

Пример: машина постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 4.15 - элементарная модель).

На рис. 4.16 дан граф полного сопротивления ее. Обмотки име-

юг разлнчное число витков и электрически не соединены.

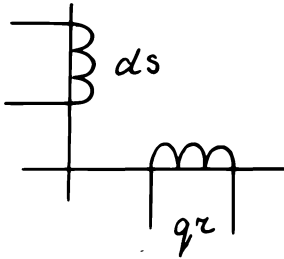


Рис. 4.15.

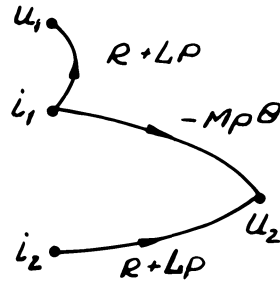


Рис. 4.16.

На рис. 4.17 представлен граф реальной машины.

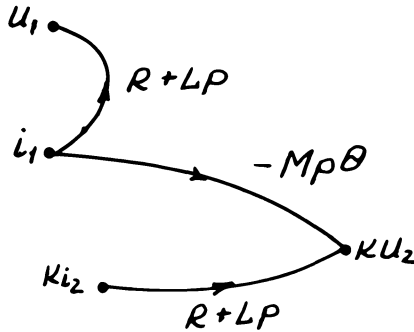


Рис. 4.17.

б) Бывает случай, когда известно не истинное сопротивление некоторых обмоток, а уже приведенное к какой-либо обмотке их значение. В этом случае удобно преобразовывать вершины-напряжения и ветви. Операция эта проводится следующим образом: вершины - напряжения с индексами, которые в матрице C соответствуют элементам, равным "К", умножаются на "К", или ветвь, соединяющая вершины (не только напряжения), обе из которых имеют индекс, которому соответствует элемент матрицы C , равный "К", умножается на K^2 , а если одна-на "К".

Пример: рассмотрим 2-фазный асинхронный двигатель с элементар-

ной машиной, данной на рис. 4.18.

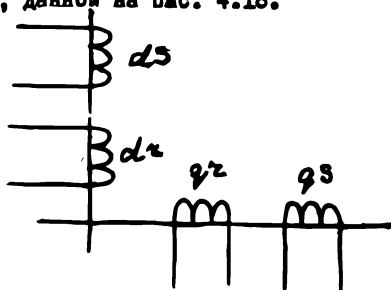


Рис. 4.18.

Элементарной машине соответствует граф (рис. 4.19).

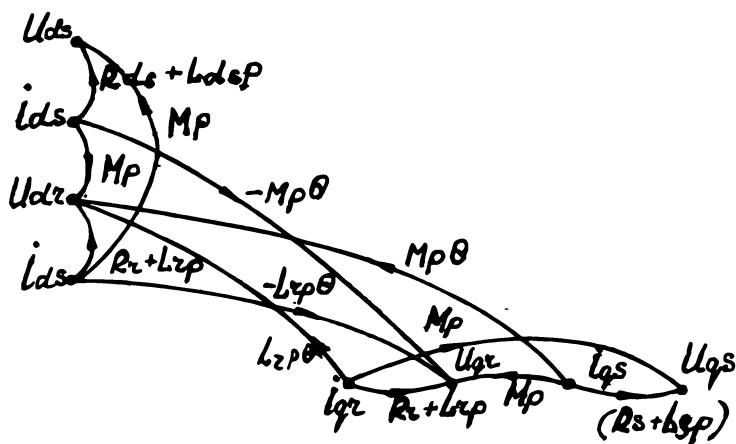


Рис. 4.19.

В этом двигателе все обмотки независимы и статорные отличаются только числом ветков. Сопротивления роторных обмоток даны уже приведенными к обмотке ds . Таким условиям соответствует мат-

рица перехода C :

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & K \\ \hline \end{array}$$

А граф реальной машины показан на рис. 4.20.

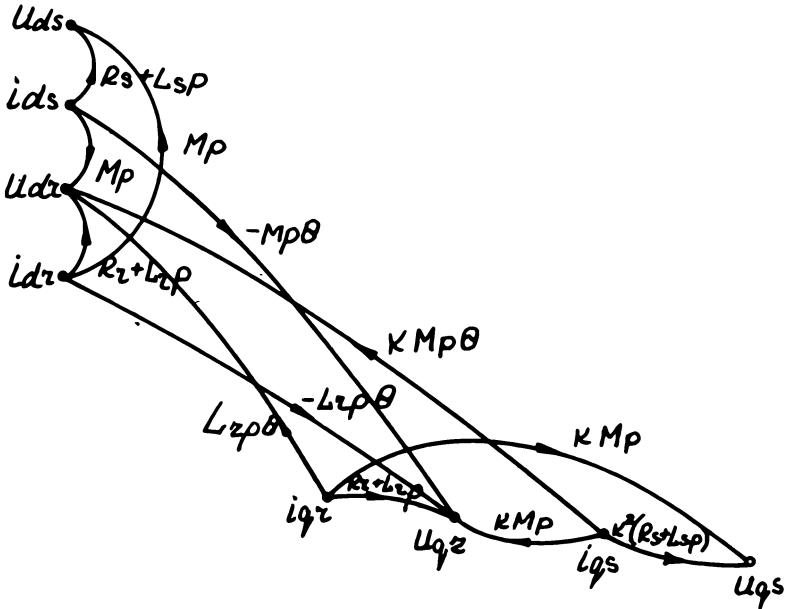


Рис. 4.20.

3. Матрица C недиагональная, в ней имеются недиагональные элементы, отличные от нуля. Такая матрица указывает, что между обмотками с индуксами, соответствующими недиагональным элементам матрицы C , отличным от нуля, существует связь. Поэтому на графе реальной машины появятся новые вершины, соответствующие токам и

напряжениям реальной машины и ветви, связывающие новые вершины со старыми и имеющие коэффициент передачи, указанный в матрице.

Пример. Генератор постоянного тока с последовательным возбуждением. На рис. 4.21 изображена его элементарная модель. Ей соответствует граф, данный на рис. 4.22 (он такой же, как и на рис.4.16)

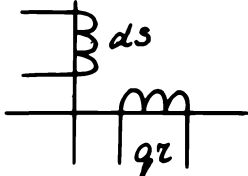


Рис. 4.21.

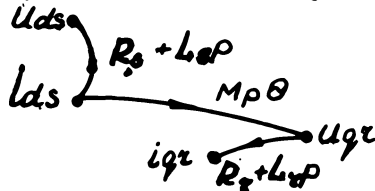


Рис. 4.22.

Допустим, что обе обмотки одинаковы, но последовательно соединены, т.е. в реальной машине имеется всего один ток, равный i_{ds} и i_{qz}

$$i_{ds} = i'$$

$$i_{qz} = i'$$

Матрицы C и C_t будут:

$$C = \begin{matrix} i_{ds} \\ i_{qz} \end{matrix} \begin{matrix} i' \\ 1 \end{matrix}$$

$$C_t = i' \begin{matrix} i_{ds} & i_{qz} \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Отсюда граф реальной машины, принимая во внимание что $U' = C_t U$, будет иметь вид (рис. 4.23).

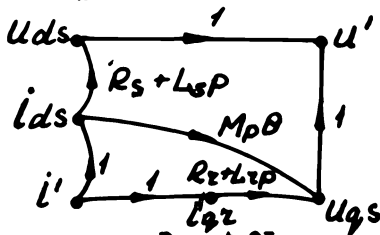


Рис. 4.23.

§ 4. Расчет характеристик частотным методом

Расчет характеристик машины и их энергетических показателей

сводится к расчету передаточных функций и осуществлению над ними математических операций. Передаточной функцией, например, для двигателя является отношение момента к входному напряжению. Но электромагнитный вращающий момент определяется через токи в обмотках двигателя, которые зависят от входных напряжений. Отношение тока в " i " -й обмотке от напряжения в " j " -й обмотке можно считать частными или промежуточными передаточными функциями.

В случае, когда для расчета машины используется матричный метод, частная передаточная функция i -го выхода и j -го входа, т.е. отношение тока в i -й обмотке к напряжению, подаваемому на j -ю обмотку, определяется следующим образом:

$$\frac{i_i}{U_j} = (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} = W_{ij}, \quad (4.13)$$

где Δ_{ji} - соответствующий минор транспонированной матрицы полного сопротивления;

Δ - детерминант матрицы полного сопротивления.

При расчете машин методом графов передаточная функция рассчитывается по правилу Мэйсона :

$$W_{ij} = \frac{i_i}{U_j} = \frac{\sum_{k=1}^n G_{jik} D_{jik}}{D}, \quad (4.14)$$

где n - число разомкнутых путей от источника " j " до стока " i ";

G_{jik} - коэффициент передачи k -го разомкнутого пути от вершины j к i ;

D_{jik} - детерминант графа, не соприкасающегося с путем G_{jik} ;

D - детерминант графа.

Если имеется более одного источника в системе, то ток обмотки определяется суммой:

$$i_i = \sum_{j=1}^m W_{ij} U_j, \quad (4.15)$$

где m - число источников питания.

Формула (4.15), выражающая принцип наложения, справедлива для линейных систем.

Процесс расчета передаточных функций как матричным, так и графовым методом, оказывается довольно трудоемким. Еще более трудоемко определение электромагнитного момента, пропорционального сумме произведений промежуточных передаточных функций. Эта операция в конечном счете сводится к перемножению многочленов с большим количеством членов.

Однако вычислить передаточные функции возможно еще и графически, т.е. с помощью метода логарифмических характеристик определяются амплитуда и фаза выходной величины, для графического построения передаточной функции используются стандартные приемы метода логарифмических частотных характеристик, известные в теории автоматического регулирования. Очевидно, что метод логарифмических характеристик наиболее результативен в случае, когда входные и выходные величины переменные (т.е. для машин переменного тока) и для расчета переходных процессов. Для расчета установившегося режима применение метода логарифмических характеристик сводится к действиям с помощью логарифмической линейки, где операция умножения заменяется операцией сложения. Если учесть, что при определении момента требуется перемножение многочленов с большим количеством членов, то логарифмический метод дает большую экономию в вычислении даже установившегося режима.

Расчет передаточных функций в установившемся режиме

В установившемся режиме оператор производной \mathcal{D} заменяется на $j\omega$ и вводится понятие амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик. Тогда передаточную функцию можно представить

$$Y(j\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad (4.16)$$

Основанием для расчета характеристик электрических машин служит либо матрица полного сопротивления машины, либо адекватный ей направленный граф полного сопротивления. Однако граф обладает известными преимуществами по сравнению с матрицей, так как он позволяет привлекать к исследованию более удобный аппарат топологии, структурных преобразований.

Исходя из графовой модели, выражение для частной передаточной функции $Y_i(p) = \frac{U_i}{U_1}$ можно записать в виде:

$$Y_i(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{N_2(p)} \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)}, \quad (4.17)$$

где $W_1(p)$ - числитель передаточной функции, определенной по правилу Мэйсона (4.2)

$$W_2(p) = D - 1 \quad , \text{т.е. детерминант графа без единиц.}$$

Для получения амплитудной и фазовой характеристик передаточной функции $Y_1(p)$ необходимо:

1. Определить $W_1(p)$ и $W_2(p)$ из графа машины;
2. Построить амплитудные и фазовые характеристики $W_1(p)$ и $W_2(p)$;
3. В соответствии с формулой (4.17) замкнуть функцию $W_2(p)$ с помощью диаграммы замыкания;
4. Вычесть характеристики $W_1(p)$ и $W_2(p)$;
5. Сложить характеристики, полученные в пунктах 2 и 3.

Эти характеристики позволяют получить величину момента M и мощности P :

$$f = Re i^* G i$$

$$P = Re i^* e$$

Так как эти уравнения матричные, то количество передаточных функций (или токов) будет зависеть от количества обмоток и способа их соединения. Находятся все необходимые передаточные функции, далее строятся характеристики сопряженных величин токов. При этом амплитудная характеристика остается неизменной, а фазовая меняет знак. Затем в логарифмическом масштабе складываются характеристики соответствующих W_1 и W_2 . После этого с помощью номограмм [12,13] по этим кривым определяется действительная часть. Вместо номограмм можно непосредственно использовать формулу

$$Re Y(p) = A \cos \varphi \quad (4.18)$$

В качестве примера расчета передаточных функций частотным методом рассмотрим двухфазный асинхронный конденсаторный двигатель с короткозамкнутым ротором. Он имеет два входа, напряжение подается на две статорные обмотки. Граф полного сопротивления этого

двигателя представлен на рис. 4. 24.

Здесь индексы соответственно относятся:

"1" - к статорной обмотке управления, расположенной по продольной оси;

"2" - к роторной продольной обмотке (условной);

"3" - к роторной обмотке, расположенной по поперечной оси (условно);

"4" - к статорной обмотке возбуждения, расположенной на поперечной оси.

Значения коэффициентов передачи графа будут следующие:

$$\begin{array}{lll}
 a = -R_s & m = -L_r \theta & f = k^2 R_s \\
 b = \frac{1}{L_s} & y = L_r \theta & g = c \\
 c = \frac{1}{p} & d = \frac{1}{p} & \beta = -\kappa M \\
 d = -M & h = \frac{1}{L_r} & \gamma = -\kappa M \\
 e = -M & v = -R_q & W = \kappa M \theta \\
 f = -R_z & t = -M' \theta & \psi = \frac{1}{k^2 h s} \\
 h = \frac{1}{L_r} & q = \frac{1}{p} & \\
 e = \frac{1}{p} & r = p &
 \end{array} \quad (4.19)$$

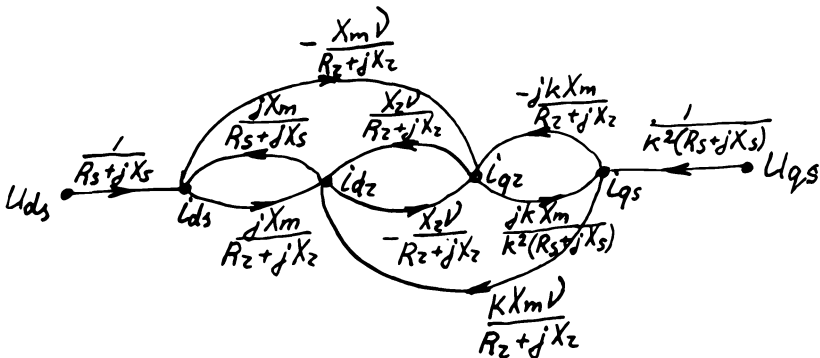


Рис. 4.24.

Частными передаточными функциями будут являться отношения:

$$\frac{\dot{I}_1}{U_1}; \frac{\dot{I}_1}{U_4}; \frac{\dot{I}_2}{U_1}; \frac{\dot{I}_2}{U_4}; \frac{\dot{I}_3}{U_1}; \frac{\dot{I}_3}{U_4}; \frac{\dot{I}_4}{U_1}; \frac{\dot{I}_4}{U_4}$$

Передаточные функции находятся по правилу Мейсона

$$\begin{aligned} Y_{11}(p) &= \frac{\dot{I}_1}{U_1} = \frac{N_{11}}{D} \\ Y_{14}(p) &= \frac{\dot{I}_1}{U_4} = \frac{N_{14}}{D} \\ Y_{21}(p) &= \frac{\dot{I}_2}{U_1} = \frac{N_{21}}{D} \\ Y_{24}(p) &= \frac{\dot{I}_2}{U_4} = \frac{N_{24}}{D} \\ Y_{31}(p) &= \frac{\dot{I}_3}{U_1} = \frac{N_{31}}{D} \\ Y_{41}(p) &= \frac{\dot{I}_4}{U_1} = \frac{N_{41}}{D} \\ Y_{44}(p) &= \frac{\dot{I}_4}{U_4} = \frac{N_{44}}{D} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Напряжения $U_2 = U_3 = 0$, если ротор короткозамкнутый. Детерминант графа равен

$$\begin{aligned} D = & 1 - abc - nlf - Lhw - q\varphi\varphi - r\psi\delta - h\gamma\varphi\beta - v\epsilon\alpha - \\ & - nlmhd\gamma - wnlmhf\varphi q - wlnmhf\delta r + abcfln + \\ & + abc\epsilon d h v + abcq\varphi\varphi + abc\tau\delta\psi + abcwnlmh\delta\varphi q + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + abcwnlmh\gamma\delta r + abch\varphi\gamma\beta + nlfq\varphi\psi + nlf\alpha h v + \\
& + nlf r\varphi\delta + abc nlmhdy + nlfh\gamma\varphi\beta + \alpha h v q\varphi\psi + \\
& + \alpha h v r\delta\psi + \alpha h v b e n d + b e n d q\varphi\psi + b e n d \varphi r\delta + \\
& + nlmhdyq\varphi\psi + nlmhdy r\varphi\delta - abcfen\alpha h v - \\
& - abcfenq\varphi\varphi - abcfenr\delta\psi - abcfen h\gamma\varphi\beta - \\
& - \alpha h v r\varphi\delta b e n d + abcfen\alpha h v q\varphi\varphi + abcfen\alpha h v r\delta\varphi + \\
& + q\varphi\varphi t h d y n d b e + r\varphi\delta t h d y n d b c ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{11} = & bc(1 - n\varphi t - \alpha h v - q\varphi\varphi - r\delta\psi - h\gamma\varphi\beta - \\
& - h d y n e m - w n l m h \gamma \ell q - w n l m h \gamma \delta r + \quad (4.21) \\
& + n l f h \gamma \ell \beta + \alpha h v q \varphi \psi + \alpha h v r \delta \psi + f n \ell d q h v \varphi \psi - \\
& - f n \ell \alpha h v r \delta \psi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{14} = & \varphi\beta h d y n d b c + \varphi q w n d n b c (1 - \alpha h v) + \\
& + \delta r w n d b c (1 - \alpha h v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{21} &= bcn\ell(1-dh\nu - q\varphi\psi - r\delta\varphi - h\gamma\beta + \\
 &+ d h \nu q \varphi \psi + a h \nu r \delta \varphi) + b e t h d y n \ell (1 - q \varphi \psi - r \delta \varphi) + \\
 &+ b e t h \gamma \varphi q w n \ell + b e h t \gamma \delta r w n \ell
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{24} &= \varphi q w n \ell (1 - d h \nu - a b c + a b c d h \nu) + \\
 &+ \varphi \beta h d y n \ell (1 - a b c) + \delta r w n \ell (1 - a b c - d h \nu + a b c d h \nu);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{31} &= b e t h d (1 - f n \ell - q \varphi \psi - \delta r \varphi + f n \ell q \varphi \psi + \\
 &+ f n \ell \delta r \varphi) + b e n \ell n m h d (1 - q \varphi \psi - \delta r \varphi);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{34} &= \varphi q w n \ell m h d (1 - a b c) + \varphi q w n d b e t h d + \\
 &+ \varphi \beta h d (1 - a b c - f n \ell - b e h d + a b c f n \ell) + \\
 &+ \delta r w n \ell m h d (1 - a b c) + \delta r w h d b e t h d;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{41} &= b e t h \gamma \varphi q (1 - f n \ell) + b e t h \gamma \delta r (1 - f n \ell) + \\
 &+ b e n \ell m h \gamma \varphi q + b e n \ell m h \gamma \delta r,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{44} &= \varphi q (1 - a b c - f n \ell - d h \nu - b e n d - h d y n \ell m - \\
 &- t h d y n d b c + a b c f n \ell - a b c d f n \ell h \nu) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ abchdynlcm + flndhv - abcfndhv) + \\
 &+ \delta r (1 - abc - fnl - dhv - bend - hdynlcm - \\
 &- thdynabc + abcfnl + abc dhv + abchdynlcm + \\
 &+ flndhv - abcfndhv).
 \end{aligned}$$

Если подставить значение коэффициентов передачи (4.19), то можно получить передаточные функции в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются полиномами относительно степени оператора производной p .

Например, передаточную функцию $y_{11}(p)$ можно представить следующим выражением:

$$y_{11}(p) = \frac{A_{11}p^4 + B_{11}p^3 + C_{11}p^2 + T_{11}p + Q_{11}}{A_p p^5 + B_p p^4 + C_p p^3 + T_p p^2 + Q_p + E}, \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= k^2 R_s C h_s L_s^2 \\
 B_{11} &= L_s L_n^2 - M^2 L_r - k^2 M^2 C L_r h_s \Theta^2 + 2k^2 R_s R_r C h_s h_r \\
 C_{11} &= 2R_r h_s h_r + R_s h_r h_s + k^2 R_r^2 R_s C h_s h_s - R_r M^2 \\
 T_{11} &= L_r^2 L_s \Theta^2 - M^2 L_r \Theta^2 + R_r^2 h_s + 2R_s R_r L_r \\
 Q_{11} &= R_r^2 R_s \\
 A &= k^2 R_s C h_s^2 L_n^2 + k^2 M^2 L_s h_r C \\
 B &= L_s^2 L_n^2 - 2M^2 L_r h_s - 2k^2 R_r R_s C h_r h_s^2 - \\
 &\quad - M^2 R_r R_s C h_s - M^2 R_s h_r \\
 G &= 2R_s h_s h_r^2 + 2R_r h_r h_s^2 - 2M^2 R_s h_r - 2M^2 R_s h_s - \\
 &\quad - k^2 L_n^2 L_s^2 R_s C \Theta^2 - k^2 R_r^2 R_s^2 \cdot C h_r h_s \\
 T &= 4R_r R_s h_r h_s + R_r^2 L_s^2 - 2M^2 R_r R_s
 \end{aligned}$$

$$Q = 2R_s L_p^2 L_s \Theta^2 + 2R_s R_p^2 L_s$$

$$E \approx 0$$

Остальные передаточные функции $Y_{ik}(p)$ отличаются от $Y_{11}(p)$ только коэффициентами числителя $N_{ik}, B_{ik}, G_{ik}, T_{ik}$ и Θ_{ik} . Величина электромагнитного момента в этом случае может быть выражена следующим образом:

$$M = \operatorname{Re} \frac{U_4 u_4}{D D^*} \left[(L N_{11} + N_{14})(L N_{31}^* + N_{34})k - (L N_{21} + N_{24})(L N_{41}^* + N_{44}^*) \right] \quad (4.23)$$

$$I_1 = \frac{U_4}{D} (L N_{11} + N_{14}) \quad I_3 = \frac{U_4}{D} (L N_{31} + N_{34})$$

$$I_2 = \frac{U_4}{D} (L N_{21} + N_{24}) \quad I_4 = \frac{U_4}{D} (L N_{41} + N_{44}) \quad (4.24)$$

Как видно, данные передаточные функции имеют много слагаемых и поэтому при построении их логарифмических характеристик часто придется пользоваться номограммами, что, во-первых, трудоемко и, во-вторых, уменьшает точность расчетов.

Поэтому передаточные функции удобнее определять с помощью так называемых обратных парциальных связей. В этом случае более полно используется топология графа и передаточные функции получаются в виде, более удобном для построения логарифмических характеристик, когда детерминант графа представлен не в виде полинома, а в виде произведений ряда сомножителей.

Детерминант графа можно определить как произведение всех

парциальных обратных связей графа.

$$D = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_n \quad (4.25)$$

Понятие парциальной обратной связи связано с понятием петлевой передачи. Петлевая передача K -й вершины T_K определяется как передача от источника к стоку, возникающая при блокировании (рассечении) данной вершины, т.е. как передача от одной половины вершины к другой.

Например, петлевая передача 1-й вершины графа, изображенного на рис. 4.25, будет равна $T_1 = \frac{ac}{1-d} + b$

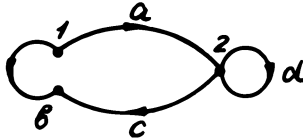


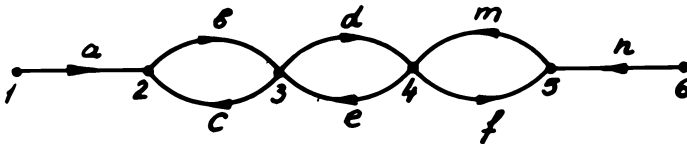
Рис. 4.25.

Обратная связь K -й вершины F_K определяется как

$$F_K = 1 - T_K \quad (4.26)$$

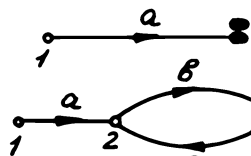
Парциальную обратную связь K -й вершины вычисляют как обратную связь этой вершины графа, у которого заблокированы все вершины более высокого порядка, чем K . Для этого нумеруются все вершины графа.

В качестве примера на рис. 4.26 показан исходный граф и парциальные обратные связи его вершин.

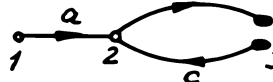


$$D_1 = 1 - T_1 = 1$$

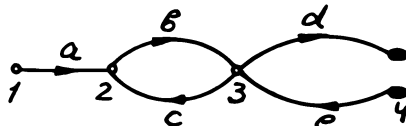
$$D_2 = 1 - T_2 = 1$$



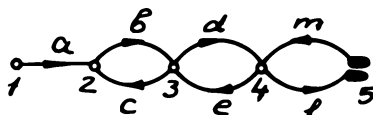
$$D_3 = 1 - T_3 = 1 - bc$$



$$D_4 = 1 - \frac{ed}{1 - bc}$$



$$D_5 = 1 - \frac{mf}{1 - \frac{de}{1 - bc}}$$



$$D_6 = 1 - T_6 = 1$$

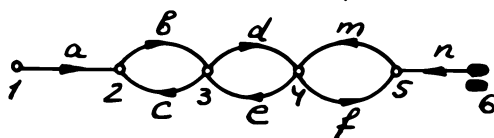


Рис. 4.26.

Детерминант графа

$$D = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot D_4 \cdot D_5 \cdot D_6$$

Нетрудно заметить, что обратная парциальная связь каждой последующей вершины равна единице минус сумма произведений коэффициентов передач разомкнутых путей, которые добавляются при блокировании следующей вершины, деленная на обратную, парциальную связь предыдущей вершины:

$$D_j = 1 - \frac{\sum_i^n G_{ji}}{D_{j-1}}, \quad (4.27)$$

где. n - число разомкнутых путей блокированной вершины.

Передачная функция от i -го источника к k -му выходу с использованием обратных парциальных связей выразится следующим об-

разом:

$$Y_{ik}(p) = \sum_j^n \frac{G_j(p)}{D_{\alpha_j}(p) D_{\beta_j}(p)}, \quad (4.28)$$

где n - число разомкнутых путей от вершины k -й до i ;
 G_j - коэффициент передачи j -го разомкнутого пути;
 $D_{\alpha_j} \dots D_{\beta_j}$ - произведение парциальных обратных связей j -го пути, т.е. обратных парциальных связей всех вершин $(\alpha, \beta \dots)$, входящих в j -й путь.

Общее выражение для обратной парциальной связи j -й вершины (4.27) позволяет записать в рекуррентной форме передаточную функцию от i -го источника до k -го стока:

$$Y_{ik}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{G_j(p)}{\prod_1^m \left[1 - \frac{\sum G_{mz}}{1 - \frac{\sum G(m-1)e}{1 - \frac{\sum G_{zu}}{D_1}}} \right]} \quad (4.29)$$

n - число разомкнутых путей от i -й вершины до k -го стока,
 m - число вершин, входящих в j -й разомкнутый путь,
 α, β, μ - число возможных передач соответственно какой-то из блокированных вершин.

Передаточная функция от i -го источника к k -му стоку равна сумме дробей, числителем которых являются коэффициенты передачи разомкнутых путей между этими вершинами, а в знаменателях стоит произведение обратных парциальных связей всех вершин, входящих в данный разомкнутый путь. Такая форма записи передаточных функций удобна для построения логарифмических частотных характеристик.

Сначала строится ЛАЧХ D_i , затем ЛАЧХ суммы коэффициентов передачи следующей "2" блокированной вершины, затем разность этих ЛАЧХов по диаграмме замыканий складывается с "1" и т.д.

Пример. Рассмотрим опять двухфазный асинхронный двигатель.

На рис. 4.20 изображен его граф. Согласно (4.28) передаточные функции, если ввести обозначения

$$\begin{aligned}bc &= y_{10} \\bcf &= y_{20} \\ed &= y_{30} \\kl &= y_{40},\end{aligned}$$

будут следующие:

$$y_1(p) = \frac{i_1}{u_2} = \sum_j \frac{G_{1j}}{D_j} = a = G_{11}$$

$$\begin{aligned}y_3(p) &= \frac{i_2}{u_4} = \sum_j \frac{G_{3j}}{D_j} = \frac{mnl}{D_4 D_2 D_1} + \frac{mkb}{D_4 D_3 D_2 D_1} = (4.29') \\&= \frac{G_{31}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}})} + \frac{G_{32}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}})(\dots)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(p) &= \frac{i_2}{u_1} = \sum_j \frac{G_{2j}}{D_j} = \frac{ae}{D_1 D_2} + \frac{afc}{D_2 D_1 D_3} + \frac{afkn}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \\&= \frac{G_{21}}{(1-y_{10})} + \frac{G_{22}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}})} + \frac{G_{23}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}})^2} \dots\end{aligned}$$

$$\left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{20})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}}\right]^{-1};$$

$$\begin{aligned}y_3(p) &= \frac{i_3}{u_1} = \sum_j \frac{G_{3j}}{D_j} = \frac{af}{D_1 D_3} + \frac{aed}{D_1 D_2 D_3} = \\&= \frac{G_{31}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}})} + \frac{G_{32}}{(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}})},\end{aligned}$$

$$y_4(p) = \frac{l_4}{u_4} = \sum_j \frac{G_{4j}}{D_j} = \frac{acde}{D_1 D_2 D_3 D_4} + \frac{0fl}{D_1 D_3 D_4} =$$

$$= \frac{G_{41}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}}) \left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1+y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]^+}$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}} \right) \left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]}$$

$$y_6(p) = \frac{l_2}{u_4} = \sum_j \frac{G_{6j}}{D_j} = \frac{mkc}{D_4 D_2 D_2} + \frac{mn}{D_4 D_2} =$$

$$= \frac{G_{61}}{(1-y_{10})(1-\frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}}) \left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]^+}$$

$$+ \frac{G_{62}}{(1-y_{10}) \left[1 - \frac{y_{20}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]^+}$$

$$y_7(p) = \frac{l_3}{u_4} = \sum_j \frac{G_{7j}}{D_j} = \frac{mk}{D_4 D_3} + \frac{mnd}{D_1 D_3 D_4} + \frac{mnbf}{D_1 D_2 D_3 D_4} =$$

$$= \frac{G_{71}}{\left(1 - \frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}} \right) \left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]^+} + \frac{G_{72}}{\left(1 - \frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}} \right) \left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]^+ (1-y_{10})}$$

$$+ \frac{G_{73}}{\left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right] (1-y_{10}) \left(1 - \frac{y_{20}+y_{30}}{1-y_{10}} \right)}$$

$$y_8(p) = \frac{l_4}{u_4} = \sum_j \frac{G_{8j}}{D_j} = \frac{m}{D_4} = \frac{G_{81}}{\left[1 - \frac{y_{40}(1-y_{10})}{1-y_{10}-y_{20}-y_{30}} \right]^+}$$

Знак (-) перед функциями y_{i0} можно подвести под знак коэффициента усиления. Все G и y находятся подстановкой значений соответствующих коэффициентов усиления. Так, для конденсаторного двигателя эти функции расширятся следующим образом:

$$y_{10}(p) = K_{10} \frac{p^2}{(T_{\tau_0} p + 1)(T_{\tau p} + 1)} ;$$

$$y_{20}(p) = K_{20} \frac{p}{(T_{sp} + 1)(T_{\tau p} + 1)^2} ;$$

$$y_{30}(p) = K_{30} \frac{1}{(T_{\tau p} + 1)^2} ;$$

$$y_{40}(p) = K_{40} \frac{p^3}{(T_{\tau p} + 1)(T_4 p^2 + 2 \zeta T_4 p + 1)} ;$$

$$G_{11} = K_{11} \frac{1}{T_{sp} + 1} ; \quad (4.30)$$

$$G_{21} = K_{21} \frac{p}{(T_{sp} + 1)(T_{\tau p} + 1)}$$

$$G_{22} = K_{22} \frac{1}{(T_{sp} + 1)(T_{\tau p} + 1)^2}$$

$$G_{23} = K_{23} \frac{p^2}{(T_{sp} + 1)(T_{\tau p} + 1)^2 (T_4 p^2 + 2 \zeta T_4 p + 1)}$$

$$G_{31} = K_{31} \frac{1}{(T_{sp} + 1)(T_{\tau p} + 1)} = \frac{K_{31}}{K_{21}} p G_{21}$$

$$G_{32} = K_{32} \frac{P}{(T_{sp}+1)(T_{rp}+1)^2} = \frac{K_{32}}{K_{22}} P' G_{22}$$

$$G_{41} = K_{41} \frac{P^3}{(T_{sp}+1)(T_{rp}+1)(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} = \frac{K_{41}}{K_{23}} P G_{23}$$

$$G_{42} = K_{42} \frac{P^2}{(T_{sp}+1)(T_{rp}+1)(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} = -G_4$$

$$G_{51} = K_{51} \frac{P^2}{(T_{sp}+1)(T_{rp}+1)(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} = -G_4$$

$$G_{52} = K_{52} \frac{P^3}{(T_{sp}+1)(T_{rp}+1)^2(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} = -G_4$$

$$G_{61} = K_{61} \frac{P^2}{(T_{rp}+1)^2(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} = \frac{K_{61}}{K_4} \frac{1}{P} y_{40}$$

$$G_{62} = K_{62} \frac{P}{(T_{rp}+1)(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} ;$$

$$G_{71} = K_{71} \frac{P^2}{(T_{rp}+1)(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} ;$$

$$G_{72} = K_{72} \frac{P}{(T_{rp}+1)(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} ;$$

$$G_{73} = K_{73} \frac{P}{(T_{sp}+1)(T_{rp}+1)^2(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)} ;$$

$$G_{81} = K_{81} \frac{P}{(T_4^2 p^2 + 2 \xi T_4 p + 1)}$$

Причем, как видно из (4.30), все эти функции являются комбинацией одних и тех же звеньев. Постоянные времени и коэффициенты усиления соответственно равны:

$$T_s = \frac{L_s}{R_s}$$

$$K_{31} = -\frac{M\theta}{R_s R_r}$$

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}$$

$$K_{32} = \frac{M L_r \theta}{R_s R_r^2}$$

$$T_4 = K \sqrt{L_s \cdot C}$$

$$K_{41} = -\frac{CKM^2 L_r \theta}{R_s R_r^2}$$

$$\xi = \frac{R_s}{L_s} \cdot \frac{K}{2} \sqrt{L_s \cdot C}$$

$$K_{42} = \frac{CKM^2 \theta}{R_s R_r}$$

$$K_{10} = \frac{M^2}{R_s R_r}$$

$$K_{51} = -\frac{CKM^2 \theta}{R_s R_r^2}$$

$$K_{20} = -\frac{M^2 L_s \theta^2}{R_s R_r^2}$$

$$K_{52} = \frac{CKM^2 L_s \theta}{R_s R_r^2}$$

$$K_{30} = -\frac{L_r^2 \theta^2}{R_s R_r^2}$$

$$K_{61} = \frac{CKM L_r \theta}{R_r^2}$$

$$K_{40} = \frac{K^2 M^2 C}{R_r}$$

$$K_{62} = \frac{CKM \theta}{R_r}$$

$$K_{11} = \frac{1}{R_s}$$

$$K_{71} = -\frac{KMC}{R_r}$$

$$K_{21} = -\frac{M}{R_r R_s}$$

$$K_{72} = -\frac{KM L_s \theta C}{R_r^2}$$

$$K_{22} = -\frac{M L_s \theta^2}{R_s R_r^2}$$

$$K_{73} = \frac{CKM^3 \theta^2}{R_s R_r^2}$$

$$K_{23} = \frac{CK^2 M^3 \theta^2}{R_s R_r^2}$$

$$K_{81} = 1 \cdot C$$

Глава V. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

§ I. Классификация электрических машин

Большое многообразие применяемых в настоящее время электрических машин можно разделить на три больших класса:

- 1) трансформаторы;
- 2) машины постоянного тока;
- 3) машины переменного тока.

Каждый из этих классов можно подразделить на две большие группы: энергетические и функциональные. К числу энергетических относят электрические машины - преобразователи одного вида энергии в другой, например, механической в электрическую (генератор), электрической в механическую (двигатель); либо электрической одной параметров в электрическую энергию других параметров (трансформатор). Обычно такую энергетическую группу машин называют общими машинами.

К группе функциональных будем относить электрические машины, с помощью которых осуществляют функциональные зависимости в различных устройствах и системах автоматики, вычислительной техники, радиотехники и т.д.

Обычно такие машины называют микромашинами, так как мощность их не превосходит нескольких сотен ватт.

На рис. 5.1 представлена классификация основных типов трансформаторов.

К числу энергетических относят силовые трансформаторы. Это - статические электромагнитные преобразователи энергии. Они служат для преобразования электрической энергии одного вида в электрическую энергию другого вида и применяются, главным образом, для передачи электрической энергии от электростанции к потребителям.

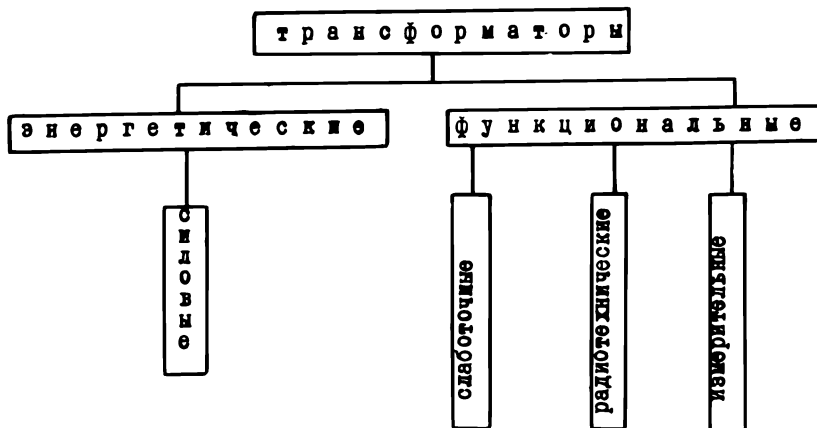


Рис. 5.1.

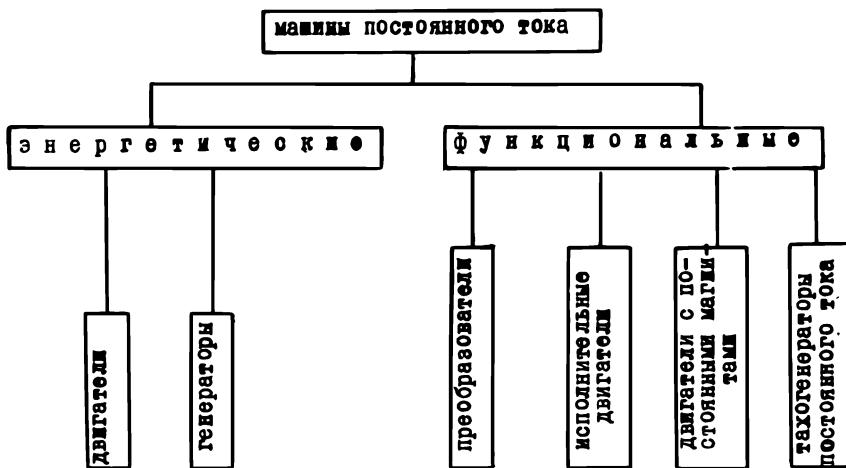


Рис. 5.2.

Суммарная мощность таких трансформаторов в 3-4 раза превышает установленную мощность электрических станций, так как при передаче электроэнергии от электрической станции к потребителю напряжение сигнала повышается, а затем снижается - это преобразование параметров сети и производится силовыми трансформаторами.

Слаботочные трансформаторы, служащие для преобразования параметров электрической цепи, находят широкое применение в различного рода приборах, машинах и лабораторных установках. Слаботочные трансформаторы также широко применяются в бытовых приборах.

Радиотехнические трансформаторы служат для передачи колебаний, развязки контуров и т.д. в различных радиоэлектронных приборах и устройствах. Они выпускаются для этих целей в широком диапазоне частот от нескольких гц до сотен кГц.

Измерительные трансформаторы служат для удобства измерения больших величин тока и напряжения и применяются в комплекте с электрическими измерительными приборами. В зависимости от целей измерения они называются: "Трансформатор тока" или "Трансформатор напряжения".

На рис. 5.2 представлена классификация машин постоянного тока. К числу энергетических относятся двигатели и генераторы постоянного тока.

Двигатели постоянного тока большой и средней мощности находят применение в специальных промышленных агрегатах, для приводов которых в широких пределах требуется изменять скорость вращения. Обычно они питаются в таких устройствах по системе Г - Д (генератор - двигатель). Регулируемый привод в этом случае получается достаточно надежным и экономичным. Двигатели постоянного тока смешанного и последовательного возбуждения широко используются в качестве тяговых двигателей в транспортных установках (метро, троллейбус, трамвай, электровоз и т.д.).

Энергетические генераторы постоянного тока находят применение в специальных промышленных установках для получения напряжения постоянного тока, в упоминавшихся выше системах генератор-двигатель, в тяговых устройствах, а также в качестве генераторов электрической энергии постоянного тока в различного рода передвижных установках (питание передвижных радиостанций, самолетов и т.д.).

К числу функциональных машин постоянного тока относят преоб-

разователи, исполнительные двигатели, двигатели с постоянными магнитами и тахогенераторы постоянного тока.

Преобразователи постоянного тока используют в передвижных установках для питания радиоустройств, когда требуется изменить величину напряжения постоянного тока. Большинство из машин этого типа составляют электромашинные усилители поперечного поля, а также однокорные преобразователи, умформеры и т.д.

Исполнительные двигатели постоянного тока, обычно машины малой и микроомности с независимым возбуждением, используются в различного рода следящих системах и системах автоматического регулирования и управления. В приборах, измерительных системах находят применение двигатели постоянного тока с постоянными магнитами. Высокая надежность, отсутствие источника возбуждения являются существенными преимуществами этих двигателей. В следящих системах и системах автоматического управления и регулирования для целей получения сигналов обратной связи по скорости исполнительного двигателя находят применение тахогенераторы постоянного тока. Небольшие генераторы постоянного тока при выполнении некоторых конструктивных и механических требований дают на выходных клеммах напряжение, пропорциональное скорости вращения механизма. В ряде случаев тахогенераторы используют в измерительных системах в качестве датчика скорости.

Классификация машин переменного тока представлена на рис. 5.3,

К числу энергетических относят синхронные генераторы и двигатели, асинхронные двигатели с короткозамкнутым и фазным роторами, а также коллекторные двигатели переменного тока.

Синхронные генераторы выполняют в основном в виде машин большой мощности и используют в качестве генераторов электростанций.

Синхронные двигатели используют в специальных системах, где требуется строго постоянная скорость вращения. Специфическая особенность синхронных двигателей - отсутствие пускового момента - не позволяет широко использовать этот тип двигателя. Синхронные двигатели, работающие в режиме холостого хода, часто применяют в качестве синхронных компенсаторов для улучшения коэффициента мощности сети.

Очень большое применение во всех отраслях науки и техники по-

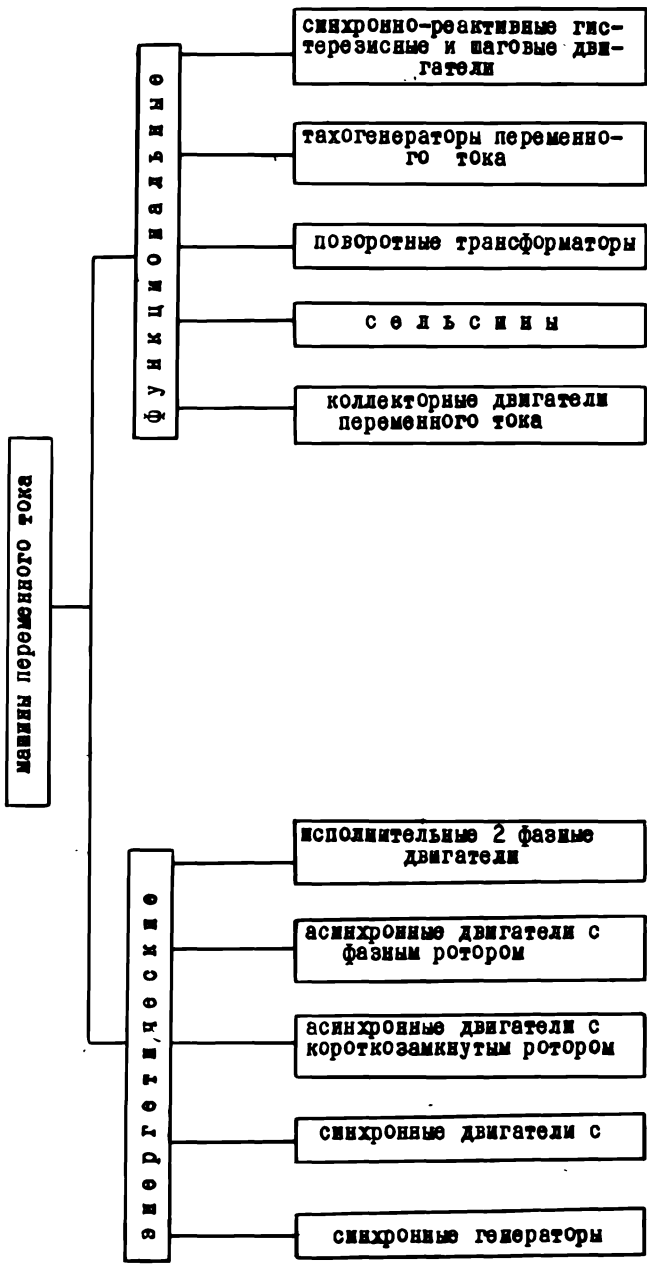


Рис. 5.3.

лучили асинхронные двигатели с короткозамкнутым и фазным роторами. Простота конструкции, надежность в работе, хорошие энергетические показатели сделали эти машины самыми распространенными из числа энергетических электрических машин. К числу недостатков этих типов двигателей следует отнести отсутствие хороших регулировочных свойств, поэтому эти машины получили широкое распространение в основном в нерегулируемых приводах.

Коллекторные двигатели переменного тока применяют лишь как двигатели малой мощности в приводах бытового применения (холодильниках, пылесосах, полотерах, стиральных машин и т.д.). Тяжелые условия коммутации двигателя, наличие скользящего контакта переменного тока существенно снижают достоинства этих машин.

К функциональным машинам переменного тока относятся исполнительные двухфазные двигатели, сельсинны, поворотные трансформаторы, тахогенераторы переменного тока, синхронно-реактивные и гистерезисные двигатели.

Двухфазные асинхронные двигатели в силу хороших регулировочных свойств находят широкое применение в маломощных, приборных, следящих системах. Эти двигатели изготавливаются с короткозамкнутым ротором и полым ротором, последние имеют более высокое быстродействие. Надежные в работе и простые по конструкции эти двигатели также находят применение в звукозаписывающей и звуко снимающей аппаратуре (магнитофонах, проигрывателях, радиоприемниках).

В системах синхронной связи применяют небольшие индукционные машины - сельсинны, работающие обычно в индикаторном, трансформаторном режимах и режиме с дифференциальными сельсиннами. Эти устройства служат для передачи угла или линейного перемещения (индикаторный режим), усиления момента в следящих системах (трансформаторный режим), включая функции сложения и вычитания угловых или линейных величин (включение с дифференциальным сельсинном). Сельсинны выпускают как в контактном, так и бесконтактном исполнении. Бесконтактные сельсинны достаточно надежны и широко применяются в специальных системах индикаторной и трансформаторной передачи угла.

Во многих автоматических устройствах требуется точное преобразование угловой тригонометрической или линейной величины в электрический сигнал (напряжение переменного тока). Этой цели служат специальные индукционные поворотные трансформаторы, которые чаще всего используют в режиме синусно-косинусного вращающегося

трансформатора СКВТ или линейного вращающегося трансформатора ЛВТ.

В системах автоматического управления, работающих на переменном токе, для получения сигналов обратной связи используют тахогенераторы переменного тока. Тахогенераторы переменного тока по конструкции аналогичны двухфазному асинхронному двигателю. Одна из обмоток статора является обмоткой возбуждения и создает пульсирующий магнитный поток. Вторая измерительная, с нее снимается электрический сигнал переменного тока, амплитуда которого пропорциональна скорости вращения.

В различных устройствах автоматики, вычислительной техники, радиотехники получили распространение специальные типы функциональных микромаши - это синхронно-реактивные, гистерезисные и шаговые двигатели. В синхронно-реактивных двигателях вращающееся магнитное поле вследствие упругой деформации магнитных силовых линий создает вращающий момент на явнополюсном роторе. Реактивный вращающий момент образуется в результате неравенства магнитной проводимости по продольной и поперечной осям. Синхронно-реактивные двигатели выпускают как с сосредоточенной, так и с распределенной обмоткой статора. Для получения низких синхронных скоростей выпускают реактивные редукторные двигатели.

Синхронные реактивные двигатели, которые преобразуют команду, данную в виде импульсов, в фиксированный угол поворота вала или фиксированное линейное перемещение без датчиков обратной связи, называют реактивными шаговыми двигателями. Шаговые двигатели применяют в автоматических устройствах дискретного действия совместно с электронными коммутаторами. В синхронных двигателях, в которых вращающий момент возникает за счет гистерезиса при перематгничивании материала ротора, называют синхронным гистерезисным двигателем.

Вращающееся магнитное поле в таком двигателе создается трехфазной или двухфазной системой обмоток статора.

Электрические машины как силовые, так и функциональные выпускаются в широком диапазоне мощности. По выходной мощности их можно условно разделить на микромашины и малые машины мощностью до 1 квт. Машины малой и средней мощности от 1 до 100 квт, и крупные машины большой мощности до 100 квт и выше. В свою очередь микромашины согласно ГОСТ 12139-66 соответствуют ряду предпочтительных чисел по мощности. Этот ряд $R - 5$ имеет числа полезных мощностей в ваттах:

0,010; 0,025; 0,060; 0,1; 0,16; 0,25; 0,40; 0,60; 1,0; 1,6; 2,5; 4,0; 6,0; 10; 16; 25; 40; 60; 90; 120; 180; 250; 370; 550; 750.

По скорости вращения электрические машины разделяют на тихоходные, имеющие менее 250 об/мин, машины средней скорости - от 250 до 1000 об/мин; быстроходные от 1000 до 3000 об/мин; сверхбыстроходные - свыше 3000 об/мин. Самый быстроходный двигатель имеет скорость более 300000 об/мин, а самый тихоходный делает несколько оборотов в сутки.

По величине напряжения электрические машины разделяют на машины низкого напряжения (до 100 в); машины среднего напряжения (100 + 1000 в) и машины высокого напряжения (свыше 1000 в).

§ 2. Материалы, применяемые в электромашиностроении

В конструкциях современных электрических машин применяют огромное количество различных материалов: металлов, сплавов, различных пластмасс, минерально-органических материалов, порошковых материалов, латоканей и т.д.

Материалы, применяемые в электромашиностроении, в зависимости от назначения можно разделить на три группы:

1. активные;
2. изоляционные;
3. конструктивные.

Активные материалы. К активным материалам относят токопроводящие и магнитные, они служат для создания благоприятных условий протекания электромагнитных процессов, превращения энергии в электрической машине.

К числу токопроводящих материалов можно отнести многие чистые металлы.

В табл.5.1 приведены удельные сопротивления некоторых металлов при температуре 20°C.

Таблица 5.1

№	Металл	Удельное сопротивление, ом.мм ² /м	№	Металл	Удельное сопротивление, ом.мм ² /м
1.	Серебро	0,016220	4.	Алюминий	0,026200
2.	Медь	0,016925	5.	Вольфрам	0,050000
3.	Золото	0,021900	6.	Железо	0,097800

Как видно из табл. 5.1, к электропроводящим материалам прежде всего относят медь и алюминий. Серебро и золото, имеющие также хорошие токопроводящие свойства, в качестве материалов в электромашиностроении не используются, так как они относятся к драгметаллам и их себестоимость высока.

Кроме меди и алюминия в качестве токопроводящих материалов применяют некоторые сплавы, такие как латунь и берилловая бронза.

Различные примеси в меди значительно влияют на электропроводность. Медь, применяемая в электрических машинах, не должна иметь более 0,1% примесей. Поскольку чистая медь также дорога в производстве, ее применяют с небольшим количеством примесей, и тогда ее нормальное удельное сопротивление составляет 0,017241 ом мм²/м при 20°C. Вместе с медью в качестве токопроводящего материала применяют алюминий, удельное сопротивление которого при практических применениях составляет 0,028200 ом.мм²/м и значительно зависит от температуры. При изменении температуры в десять раз от 20 до 200°C удельное сопротивление возрастает с 0,028200 до 0,048600 ом.мм²/м. Это существенный недостаток. Медные провода для обмоток трансформаторов и электрических машин изготовляют круглого и прямоугольного сечения с различными видами изоляции.

Для изготовления магнитопроводов трансформаторов и электрических машин применяют различные ферромагнитные материалы: листовую электротехническую сталь различных сортов, чугуны, стальное литье, листовую (конструкционную) сталь, ковачью сталь и специальные стальные сплавы. В электромашиностроении применяют стали марки Э11; Э12; Э21; Э310; Э320; Э330; Э41; Э42; Э43. Буква Э означает, что сталь электротехническая; следующие за буквой числа показывают степень легирования стали: 1 - слаболегированная, 2 - среднелегированная,

3 - повышеннолегированная, 4 - высоколегированная; следующие цифры обозначают: 1 - нормальные удельные потери, 2 - пониженные и 3 - низкие удельные потери. Цифра 0 - означает, что сталь холоднокатаная текстурованная. Например, сталь марки Э-330 означает, что это электротехническая повышеннолегированная холоднокатаная текстурованная сталь с низкими удельными потерями. Толщина листа обычно бывает 0,5 и 0,35 мм. Для машин повышенной частоты сталь бывает и меньшей толщины (0,1; 0,15; 0,2 мм).

Главными характеристиками электротехнической стали являются зависимость магнитной индукции от величины напряженности поля, а также величины потерь на гистерезис и вихревые токи от частоты и индукции.

Стальное литье применяют для машин постоянного тока и для синхронных машин (обода роторов).

Листовую конструкционную сталь применяют для станин машин постоянного тока и для роторов синхронных машин.

Стальные поковки применяют для изготовления роторов быстроходных синхронных машин. Изготовление цельных массивных роторов синхронных машин производится потому, что здесь очень велики механические напряжения, возникающие за счет больших центробежных сил.

Чугун для магнитопроводов применяют редко, так как у него по сравнению со сталью значительно худшие магнитные свойства.

Специальные стальные сплавы применяют для изготовления постоянных магнитов магнитоэлектрических машин. Эти сплавы обладают большой остаточной индукцией и высокой коэрцитивной силой. Типичными представителями этой группы являются сплавы: альнико, нипермаг, сталь К5 и др.

В некоторых случаях при производстве специальных машин необходимо иметь материал с узкой петлей гистерезиса, т.е. с большой начальной и максимальной относительной магнитной проницаемостью. К числу таких ферромагнитных материалов относится сплав "пермалой С" ($Ni - 78,5\%$; $Fe - 18\%$; $Al - 3\%$, $Mn - 0,5\%$). Начальная относительная проницаемость $M/M_0 = 6000$; максимальная относительная магнитная проницаемость $M_{max}/M_0 = 100000$; остаточная индукция 0,45 тл; коэрцитивная сила 0,035 а/м.

Изоляционные материалы. Изоляционные материалы являются одними из основных при производстве трансформаторов и электрических

машины и в значительной степени определяют надежность и долговечность электрической машины. Основное назначение изоляционных материалов - надежно изолировать токо- и магнитопроводящие части. Основные требования к изоляционным материалам - диэлектрическая прочность. Изоляция машины работает при повышенных температурах, больших механических нагрузках, а в ряде случаев и в агрессивных средах, поэтому диэлектрическая прочность должна сочетаться с высокой температуростойкостью, механической прочностью и выдерживать условия агрессивных сред.

В зависимости от применяемых материалов изоляции определяется ГОСТом 8865-58 допустимый нагрев обмоток электрических машин. Согласно этому ГОСТу обмотки с различной изоляцией разделяют на 7 классов

В табл. 5.2 приведены основные показатели деления обмоток по классам.

Таблица 5.2.

Класс тепло-стойкости	Допустимая температура нагрева обмотки °С	Характеристика основных групп материалов, соответствующих данному классу тепло-стойкости
У	90	непропитанные материалы из целлюлозы и пленка
А-	105	пропитанные —" —" —"
Е	120	некоторые синтетические пленки
В	130	материалы на основе слюды, асбеста и стекловолокна с органическими связующими и пропитывающими составами
	155	материалы на основе слюды, асбеста и стекловолокна с синтетическими связующими и пропитывающими составами
Н	180	материалы на основе слюды, асбеста и стекловолокна с кремнеорганическими связующими и пропитывающими составами
С	более	слюда, керамические материалы, стекло, кварц без связующих составов или с неорганическими или элементоорганическими связующими составами

Для улучшения свойств изоляции как обмотки электрических машин в целом, так и отдельных изоляционных материалов, применяют

различные лаки - компаунды.

Лаки и компаунды должны иметь хорошие изоляционные свойства, быть термостойкими, хорошо пропитывать материал и быть эластичными и прочными.

Для изоляции применяют светлые лаки на различных маслах: асфальтомаслянистые, эмалевые и спиртовые.

Для заполнения воздушных пространств в изоляции применяют асфальтовые компаунды, высматывающие лаки и канифоли.

В трансформаторах для лучшей изоляции и теплосъема с обмоток применяют специальное трансформаторное масло, которое обладает высокой диэлектрической прочностью. Однако, трансформаторное масло очень горючее, что может привести к тяжелым авариям. Поэтому в последнее время появились заменители трансформаторного масла, не горючие масла. Например, у нас в СССР выпускается заменитель-сортал.

Конструктивные материалы. Конструктивные материалы применяют при изготовлении различных частей электрических машин и трансформаторов. Так как части машин находятся под воздействием статических и динамических, механических нагрузок, то основным требованием к конструктивным материалам является высокая механическая прочность и немагнитные свойства. Поэтому в электромашиностроении применяют те же конструктивные материалы, что и в общем машиностроении.

Для создания конструкции электрических машин и трансформаторов применяют: чугун простой, ковкий и немагнитный; сталь углеродистая и легированная; цветные металлы и их сплавы и различные пластмассы.

Глава VI. ТРАНСФОРМАТОРЫ

§ I. Устройство и конструктивные элементы трансформаторов

Трансформатор представляет собой статический электромагнитный аппарат, предназначенный для преобразования одних величин тока и напряжения в другие той же частоты.

Трансформаторы применяют для передачи электроэнергии и распределения ее между потребителями: в промышленных установках, в устройствах автоматики и телемеханики, радиотехники и связи, вычислительной техники, а также при электрических измерениях.

Трансформаторы бывают одно- трех- и многофазные.

По назначению различают трансформаторы: силовые, автотрансформаторы (латры), импульсные, пиковые, испытательные, измерительные, печные, сварочные и радиотехнические.

Основными частями трансформатора являются магнитопровод (сердечник), обмотки, охлаждение и выводные изоляторы.

Магнитопровод или сердечник служит для усиления магнитной связи обмоток. В зависимости от конструкции трансформаторы различают броневый, стержневой и тороидальный типа (рис. 6.I)

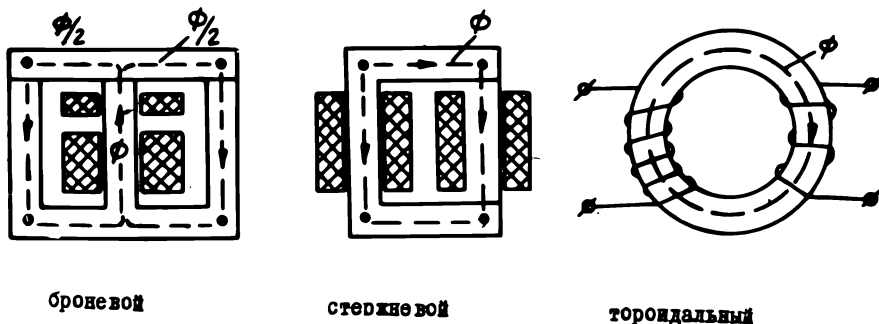


Рис. 6.I.

В броневом трансформаторе магнитопровод охватывает частично обмотки и как бы бронзирует их, в стержневом обмотки охватывают стержни магнитопровода, в тороидальной обмотки наматываются на магнитопровод равномерно по всей окружности.

Трансформаторы большой и средней мощности обычно выполняются стержневыми. Они проще по конструкции и позволяют легче осуществлять изоляцию обмоток.

Однофазные трансформаторы малой мощности большей частью выполняются броневыми и тороидальными, так как они имеют небольшие вес и стоимость.

Для уменьшения потерь от вихревых токов магнитопроводы трансформаторов выполняют пластинчатыми или ленточными П-образной, П-образной или тороидальной формы, толщиной 0,35 или 0,5 мм. Применяется горячекатаная электротехническая сталь с высоким содержанием кремния или холоднокатаная сталь. Пакет сердечника собирается "внахлестку" или "встык". При сборке "внахлестку" слои чередуются через один. Пластины сердечника и ярма изолируют друг от друга оксидной пленкой или слоем лака и стягивают в пакет изолированными шпильками, что уменьшает магнитное сопротивление. На стыках в магнитопроводе образуются воздушные зазоры, которые приводят к значительному увеличению магнитного сопротивления сердечника и намагничивающего тока.

Ленточные сердечники изготавливают путем навивки на металлические оправки узкой лентой из электротехнической стали (или спец. сплавов) толщиной 0,08 - 0,35 мм. Лента предварительно покрывается изолирующим и склеивающим составом. Броневые и стержневые ленточные сердечники разрезают на две половины для монтажа на них катушки

обмоток. Затем их стягивают металлическими бандажками или лента-

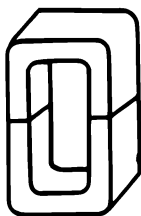


Рис. 6.2

ми. Торцы половинок склеивают специальной пастой (рис. 6.2). Торонадальные сердечники не разъемные.

Сердечники трансформаторов, используемых на высоких частотах, изготавливают из ферритов.

Те части сердечника, на которые помещают обмотки, называют стержнями, части без обмоток — ярмами.

Обмотки трансформаторов выполняют из изолированного медного (алюминиевого) провода круглого или прямоугольного сечения. Обмотка, подключенная к питающей сети, называется первичной, а присоединенная к нагрузке — вторичной. В многообмоточном трансформаторе может быть две, три и больше вторичных обмоток. Для лучшей взаимодукции обмотки располагают возможно ближе друг к другу, одну в другой или в чередующемся порядке на высоте стержня сердечника. В первом случае их называют концентрическими, во втором чередующимися или дисковыми. Провод в катушке наматывается на каркас или на гильзу в несколько слоев до заданного числа витков. Для повышения электрической прочности, влагостойкости и теплопроводности катушки обмоток пропитывают изоляционными лаками или компаундами.

По способу охлаждения трансформаторы делятся на масляные и сухие.

Мощные трансформаторы имеют масляное охлаждение, у них сердечник с катушками помещается в бак с трансформаторным (очищенным) минеральным маслом. Масло обладает высокой теплопроводностью и повышает электрическую прочность изоляции обмоток. Для большей теплоотдачи бак делают ребристым снаружи. При необходимости делают принудительное масляное или воздушное охлаждение.

Трансформаторы малой мощности обычно выполняют "сухими", т.е. с естественным воздушным охлаждением. Отвод тепла в них происходит путем непосредственной теплоотдачи от нагретых поверхностей обмоток и сердечника к окружающему воздуху.

Выходные изоляторы трансформатора монтируют на крышке масляного бака. Устанавливаются они на мощных трансформаторах. Конструк-

ция их может быть различной в зависимости от степени мощности. Например, в трансформаторах до 35 кВ применяют фарфоровые изоляторы с воздушным и масляным заполнением, а в трансформаторах на 110 кВ и выше применяют маслонеполненные изоляторы с рядом концентрически расположенных бумажнобакезитовых цилиндров.

§ 2. Принцип действия однофазного трансформатора

Простейшим трансформатором является однофазный двухобмоточный. Физический процесс, протекающий в трансформаторе, заключается в следующем. На одну из обмоток, называемую первичной, подается переменное напряжение U_1 , которое создает ток в первичной обмотке и магнитный поток Φ_0 , замыкающийся по магнитопроводу. Так как поток Φ_0 переменный, он наведет в обмотках трансформатора э.д.с. По физической природе эта э.д.с. будет трансформаторной:

$$e_1 = -W \frac{d\Phi_0}{dt} = -L \frac{di_1}{dt} \quad \text{и} \quad e_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad (6.1)$$

Если вторичную обмотку замкнуть на нагрузку, по ней потечет ток i_2 . Со вторичной обмотки снимается напряжение U_2

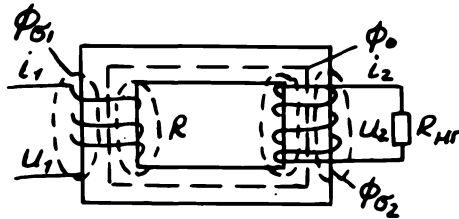


Рис. 6.3.

Кроме основного потока Φ_0 (рис. 6.3), замыкающегося по магнитопроводу, вокруг обмоток будут создаваться потоки рассеяния, сцепленные каждый только с одной обмоткой $\Phi_{\delta 1}$ и $\Phi_{\delta 2}$

Математическое описание работы трансформатора дадим на базе графовой модели теории Крона.

Первым шагом является составление элементарной модели трансформатора. Она будет состоять из двух обмоток, расположенных по одной и той же оси "d" или "q" (рис. 6.4).

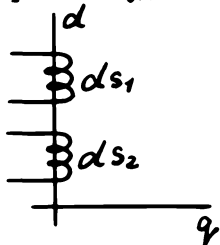


Рис. 6.4.

Обе обмотки неподвижны, т.е. статорные.

Матрица Z элементарной модели трансформатора будет следующей:

$$Z = \begin{matrix} & ds_1 & ds_2 \\ \begin{matrix} ds_1 \\ ds_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} r + L_p & -M_p \\ M_p & -(r + L_p) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.2)$$

Она получилась после вычеркивания из матрицы Z обобщенной машины строк и столбцов, соответствующих обмоткам d^r, q^r, q^s (так как они в трансформаторе отсутствуют) и добавлением строки и столбца, соответствующего обмотке ds_2 (эта обмотка отсутствует в обобщенной машине). Кроме того, необходимо учесть, что первичная обмотка имеет источник U_1 .

Граф полного сопротивления двухобмоточного трансформатора показан на рис. 6.5.

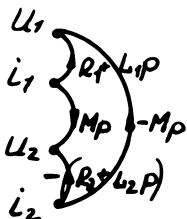


Рис. 6.5.

U_1, U_2 - мгновенные значения напряжений на зажимах первичной и вторичной обмоток;

i_1, i_2 - мгновенные значения токов первичной и вторичной обмоток;

$R_1, R_2 = R$ - активные сопротивления обмоток,

$L_1, L_2 = L$ - индуктивности обмоток,
 M - взаимная индуктивность.

Реальный трансформатор отличается от элементарного тем, что число витков первичной и вторичной обмоток не одинаково. Отношение числа витков вторичной обмотки к числу витков первичной об-

мотки $\frac{W_2}{W_1} = K$ называется коэффициентом трансформации. Обмотки не соединены между собой электрически, поэтому $i_1 = i_1'$, $i_2 = i_2'$

В этом случае матрица перехода C будет следующей:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \\ \hline & K \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (6.3)$$

Так как отличны от нуля только диагональные элементы, значит, дополнительных ветвей в графе реального трансформатора не будет, а ветви, соединяющие вершины, одна из которых относится ко вторичной обмотке (т.е. имеет индекс "2"), а другая к первичной (индекс "1"), изменят коэффициент передачи в K раз. Коэффициент передачи ветвей, соединяющих вершины только вторичной обмотки, умножится на K^2 . В результате получим граф полного сопротивления реального трансформатора, представленный на рис. 6.6. Тут же приводится и матрица полного сопротивления.

The diagram shows a transformer with primary winding resistance $R+Lp$ and secondary winding resistance $k^2(R+Lp)$. Mutual inductance is represented by $+kMp$ and $-kMp$. Primary current is i_1 and secondary current is i_2 . Primary voltage is U_1 and secondary voltage is U_2 .

$$Z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline R+Lp & -kMp \\ \hline kMp & -k^2(R+Lp) \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (6.4)$$

Рис. 6.6. Граф полного сопротивления реального двухобмоточного трансформатора

Входной величиной трансформатора обычно является первичное напряжение U_1 а выходной - вторичное U_2 .

В графе, изображенном на рис. 6.6, U_1 и U_2 — стоки, тогда как вершина U_1 должна быть источником. Поэтому необходимо произвести инверсию одной из ветвей, входящих в вершину U_1 .

Пусть инверсируемой ветвью будет i_1, U_1 . На рис. 6.7 дан граф после инверсии этой вершины:

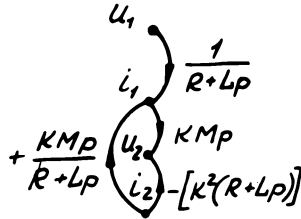


Рис. 6.7. Граф полного сопротивления двухобмоточного трансформатора

По правилу Мэйсона, передаточные функции трансформатора будут равны:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\sum G_i D_i}{D} = \frac{K M p}{R + L p} \quad (6.5)$$

$$G_1 = \frac{K M p}{R + L p} \quad D_1 = 1 \quad D = 1$$

$$\frac{U_2}{i_2} = -[K^2(R + L p)] + \frac{(K M p)^2}{R + L p} \quad (6.6)$$

При допущении линейности системы вторичное напряжение равно:

$$U_2 = \left(\frac{K M p}{R + L p} \right) U_1 - \frac{[K^2(R + L p) - (K M p)^2]}{R + L p} i_2 \quad (6.7)$$

Если приложенное к первичной обмотке напряжение U_1 синусоидально, то в установившемся режиме $p = j \omega$

Учтем, что $\omega M = X_m$ - реактивное сопротивление взаимной индуктивности,
 $\omega l = X$ - реактивное сопротивление, соответствующее полному потоку, сцепленному с первичной обмоткой Φ_1

$$\Phi_L = \Phi_0 + \Phi_{\delta_1}$$

Пусть l_1 - индуктивность, соответствующая потоку Φ_{δ_1}
 Тогда

$$L_1 = M + l_1 \quad \text{и} \quad X_1 = X_m + X, \quad (6.8)$$

где X_1 - реактивное сопротивление потока рассеяния первичной обмотки.

Уравнение (6.7) может быть записано в виде:

$$\dot{U}_2 = \frac{k_j X_m}{R + jX_1} \dot{U}_1 - \frac{k^2 (R + jX_1)^2 - k^2 (jX_m)^2}{R + jX_1} \dot{I}_2, \quad (6.9)$$

где $\frac{k_j X_m}{R + jX_1} \dot{U}_1$ - есть ЭДС вторичной обмотки E_2 .

Холостой ход трансформатора

При Х.Х. вторичная обмотка разомкнута и ток $i_2 = 0$. Положив в (6.9) $i_2 = 0$ или устранив из графа (рис. 6.7) соответствующие вершину и исходящие из нее ветви, получим выражение для напряжения на вторичной обмотке при Х.Х. U_{20} (индекс "0" обычно употребляется для режима Х.Х.):

$$\dot{U}_{20} = \frac{k_j X_m}{R + jX_1} \dot{U}_1 = \dot{E}_2 \quad (6.10)$$

Обычно делают допущение, что активное сопротивление первичной обмотки мало и $l_1 \ll M$ Тогда

$$U_{20} = \frac{k_j X_m \cdot \dot{U}_1}{R_1 + j(X_m + X)} \approx k U_{10} \quad (6.11)$$

или

$$K = \frac{U_{20}}{U_{10}}$$

Таким образом, коэффициент трансформации приближенно равен отношению напряжений вторичной обмотки к первичной при холостом ходе. Ток в первичной обмотке при холостом ходе i_{10} будет равен

$$\dot{I}_{10} = \dot{U}_1 \cdot \frac{1}{R + jX_1} \quad (6.12)$$

Режим короткого замыкания

Теперь положим равным нулю напряжение на вторичной обмотке U_2 . Чтобы отбросить вершину U_2 и связанные с ней ветви, необходимо граф, изображенный на рис. 6.6, преобразовать так, чтобы вершина U_2 была источником. Для этого достаточно инверсировать ветви $i_2 U_2$ и $i_1 U_1$ (рис. 6.8)

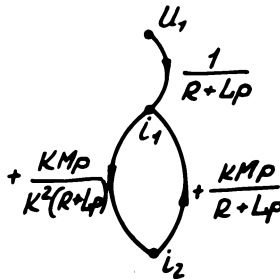


Рис. 6.8. Граф короткого замыкания трансформатора

Согласно правилу Мейсона из графа короткого замыкания трансформатора следует

$$D = 1 - \frac{(Mp)^2}{(R + Lp)^2} \quad \frac{i_1}{U_1} = \frac{R + Lp}{(R + Lp)^2 - (Mp)^2} \quad (6.13)$$

$$\frac{\dot{I}_2}{U_1} = \frac{\frac{M_P}{k(R+L_P)^2}}{\frac{(M_P)^2}{(R+L_P)^2} + (R+L_P)^2} = \frac{M_P}{k[-(M_P)^2 + (R+L_P)^2]}$$

В установившемся режиме при синусоидальном приложенном напряжении

$$\dot{I}_{1K} = \dot{U}_{1K} \frac{(R+jX)}{X_m^2 + (R+jX)^2} \quad (6.14)$$

$$\dot{I}_{2K} = \dot{U}_{1K} \frac{jX_m}{k[jX_m^2 + (R+jX)^2]}$$

(Индекс "К" говорит о режиме К.З.)

Отношение $\frac{\dot{I}_{2K}}{\dot{I}_{1K}}$ называют коэффициентом трансформации по току. Если принять обычное допущение, что активное сопротивление первичной обмотки мало, выражения (6.14) упростятся и

$$\frac{\dot{I}_{2K}}{\dot{I}_{1K}} = \frac{jX_m}{k(R+jX)} \quad (6.15)$$

Оно еще более упростится, если принять другое обычное допущение о том, что активное сопротивление мало и реактивное сопротивление рассеяния много меньше реактивного сопротивления взаимной индукции, т.е. $X \ll X_m$ Тогда

$$\frac{\dot{I}_{2K}}{\dot{I}_{1K}} \approx \frac{1}{k} \quad (6.16)$$

Принято различать два режима К.З.

1) Аварийное короткое замыкание, когда замыкание вторичной обмотки происходит при номинальном первичном напряжении. Токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 согласно (6.14) являются функциями входного напряжения U_1 . Знаменатель в (6.14) малая величина и поэтому токи будут большими. При наших допущениях они вообще стремятся к ∞ . Это может привести к сгоранию обмоток, т.е. к аварии.

2) Для исследований подбирается такое напряжение U_1 , чтобы токи были номинальные. Обычно при этом $U_{1к}$ составляет 10-15% от $U_{1н}$ - номинального напряжения первичной обмотки.

Работа трансформатора под нагрузкой

Работа трансформатора под нагрузкой характеризуется тем, что вторичная обмотка замкнута на нагрузочное сопротивление $Z_{нл}$. Именно этим сопротивлением вкуче с внутренним сопротивлением вторичной обмотки Z_{22} определяется ток вторичной обмотки i_2 (рис. 6.9)



Рис. 6.9.

Напряжение U_2 , с одной стороны, если независимой переменной считать ток i_2 , равно (6.9). Но, с другой стороны, если учесть, что ток i_2 сам есть функция $Z_{нл}$, вторичное напряжение будет

$$U_2 = i_2 Z_{нл} \quad (6.17)$$

Отсюда $i_2 = \frac{U_2}{Z_{нл}}$

Подставив это выражение в (6.9), получим выходное напряжение как функцию нагрузочного сопротивления.

$$U_2 = E_2 - \frac{U_2}{Z_{нл}} \cdot \frac{\kappa^2(R+Lp)^2 - (\kappa M p)^2}{R+Lp}$$

$$U_2 = \frac{E_2}{1 + \frac{\kappa^2(R+Lp)^2 - (\kappa M p)^2}{(R+Lp)Z_{нл}}} \quad (6.18)$$

Это же выражение получим, если в граф трансформатора введем цепь

нагрузки. Такой граф дан на рис. 6.10.

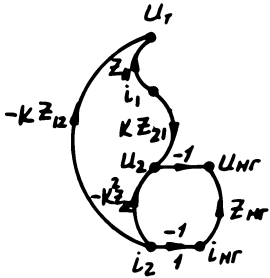


Рис. 6.10.

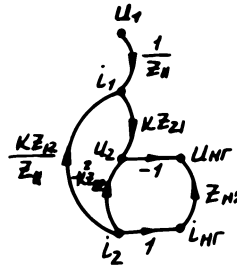


Рис. 6.11.

На рис. 6.11 представлен этот граф с инверсированной ветвью $i_1 U_1$.
Здесь $Z_{11} = Z_{22} = R + j\omega L$, $Z_{12} = Z_{21} = M\omega$

На рис. 6.12 дан граф с инверсией ветви $i_2 U_2$.
При построении графа учитывалось, что $U_{NR} = -U_2$

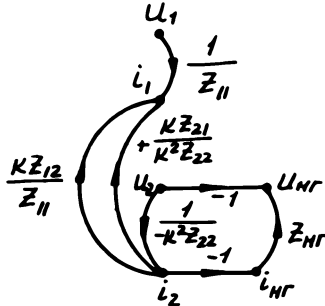


Рис. 6.12.

$$\begin{aligned}
 1) \quad U_{nr} &= U_1 \frac{\frac{Z_{21} \cdot Z_{nr}}{K Z_n Z_{22}}}{1 + \frac{Z_{12} Z_n}{Z_{11} Z_{22}}} + \frac{U_2}{1 + \frac{Z_{12} Z_{11}}{Z_{11} Z_{22}}} - U_2 \frac{1}{1 + \frac{K^2 Z_{22} Z_{nr}}{Z_{11} Z_{22}}} = \\
 &= U_2 \left(- \frac{Z_{21} Z_{nr} Z_1 + Z_{22}}{K Z_{11} Z_{22} (Z_n Z_{22} + Z_{12} + Z_{21})} + \frac{(1 - K^2 Z_{22} Z_{nr}) Z_n Z_{22}}{(Z_n Z_{22} + Z_{12} Z_{21})} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad U_{nr} &= \frac{-U_1 \frac{Z_{21} Z_{nr}}{Z_{11} K Z_{22}}}{1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} Z_{22}} + \frac{Z_{nr}}{K^2 Z_{22}}} = \frac{U_1 Z_{21} Z_{nr} K^2 Z_n Z_{22}}{K Z_{11} Z_{22} (K^2 Z_{11} Z_{22} - K^2 Z_{12}^2 + Z_n Z_{nr})} = \\
 &= \frac{-U_1 \frac{M \cdot K}{R + L \cdot P}}{1 + \frac{K^2 Z_{11} Z_{22} - K^2 Z_{12}^2}{Z_{11} Z_{nr}}}
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

Это выражение равно (6.19), но имеет обратный знак.

Это естественно, ибо $U_2 = -U_{nr}$

Внешние характеристики трансформатора

I) Внешняя характеристика. Это зависимость напряжения от тока во вторичной обмотке \bar{I}_2 ,

$$\text{т. е. } U_2 = f(\bar{I}_2)$$

Из уравнения (6.9) очевидно, что эта зависимость соответствует кривой, изображенной на рис. 6.13

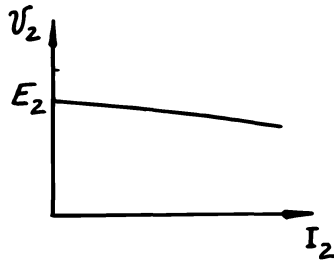


Рис. 6.13

При Х.Х., когда ток $I_2 = 0$, напряжение на вторичной обмотке равно самой э.д.с. $U_2 = E_2$. С увеличением тока I_2 напряжение падает.

Учитывая, что ток I_2 сам является функцией $Z_{нг}$, можно внешнюю характеристику представить как зависимость $U_2 = f(Z_{нг})$, данную уравнением (6.14). Анализ данного выражения с учетом вышеупомянутых допущений показывает, что в идеальном трансформаторе, т.е. при отсутствии потерь, U_2 не зависит от $Z_{нг}$. В реальных трансформаторах величина $k^2[(M\rho)^2 - (R + L\rho)^2]$ не равна нулю, однако, обычно это величина небольшая, порядка десятков ом и поэтому изменение $Z_{нг}$ сказывается на изменении U_2 при $Z_{нг}$ того же порядка отличающемся на порядок. Кроме того, U_2 зависит от характера нагрузки. В общем случае $Z_{нг}$ имеет как активную, так и реактивную составляющие, обусловленные наличием индуктивности и емкости в цепи нагрузки

$$Z_{нг} = R_{нг} + jX_{Lнг} - jX_{Cнг} \quad (6.21)$$

Очевидно, что при преобладании в цепи нагрузки того или иного характера кривые $U_2 = f(\frac{1}{Z_{нг}})$ будут иметь различный на-

клон, как это показано на рис. 6.14, где

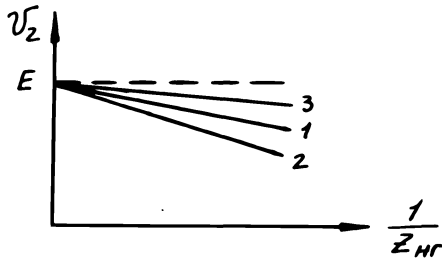


Рис. 6.14.

- 1 - кривая соответствует активной нагрузке,
 2 - " " " активно-индуктивной,
 3 - " " " активно-емкостной

Энергетические показатели трансформатора

Энергетическими показателями, характеризующими работу трансформатора, являются: потребляемая мощность, мощность потерь, к.п.д. К.п.д., как известно, есть отношение полезной мощности на выходе P_2 к мощности, затраченной - на входе P_1

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

Так как i и u - синусоидальные величины и записываются в виде комплексных чисел, то

$$P_2 = \operatorname{Re} U_2 I_2^*$$

$$P_1 = \operatorname{Re} U_1 I_1^* \quad (6.22)$$

I_1^* из графа (рис. 6.7) равен

$$i_1^* = \frac{u_1}{Z_{11}^*} + \frac{k Z_{12}^*}{Z_{11}^*} i_2 \quad (6.23)$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{k Z_{21}}{Z_{11}} u_1 i_2 - \frac{k^2 Z_{22} Z_{11} - k^2 Z_{12}^2}{Z_{11}} i_2^2 \right] \quad (6.24)$$

$i_2 = i_2^*$ потому, что комплексными являются сопротивления Z , а i_2 в данном случае независимая переменная и через Z не выражается. В установленном режиме

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \operatorname{Re} \left[\frac{KjX_m}{z+jX} U_1 i_2 - \frac{K^2(z+jX)^2 - K^2(jX_m)^2}{z+jX} I_2^2 \right] = \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{KjX_m}{z+jX} U_1 I_2 - I_2^2 \frac{K^2z^2 + 2K^2zjX - K^2X^2 + K^2X_m^2}{z+jX} \right] = \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{KjX_m(z-jX) U_1 I_2}{z^2 + X^2} \right] - \\
 &- I_2^2 \frac{K^2z^3 + 2K^2z^2jX - K^2X^2z + K^2X_m^2z - K^2z^2jX - 2K^2z(jX)^2 + K^2jX_m^2z}{z^2 + X^2} \\
 P_2 &= \frac{KX_m U_1 I_2}{z^2 + X^2} - I_2^2 \frac{K^2z^3 - K^2X^2z + K^2X_m^2z + 2K^2zX^2}{z^2 + X^2} \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

$$P_1 = \operatorname{Re} \left[\frac{U_1^2}{z-jX} + \frac{K(-jX_m)}{z-jX} I_2 U_1 \right] = \frac{z U_1^2}{z^2 + X^2} + \frac{KX_m X}{z^2 + X^2} I_2 U_1$$

При холостом ходе, когда $I_2 = 0$ $P_2 = 0$, а потребляемая мощность

$$P_1 = \frac{z U_1^2}{z^2 + X^2} \approx \frac{z U_1^2}{X^2}, \quad (6.26)$$

к. п. д. будет иметь вид:

$$\eta = \frac{KXmU_1\bar{I}_2 - (K^2\bar{I}_2^3 - K^2X^2\bar{I}_2 + K^2Xm\bar{I}_2 + 2K\bar{I}_2X^2)\bar{I}_2}{2U_1^2 + KXmX\bar{I}_2U_1} \quad (6.27)$$

Так как сопротивление рассеяния-величина, по крайней мере на порядок меньше сопротивления взаимной индуктивности, т.е. $X \ll X_m \ll X_m$, то величиной второй степени можно пренебречь.

Тогда

$$\eta = \frac{KXmXU_1\bar{I}_2 - K^2\bar{I}_2^2\bar{I}_2 - K^2Xm^2\bar{I}_2}{2U_1^2 + KXmX\bar{I}_2U_1} \quad (6.28)$$

Зависимость $\eta = f(\bar{I}_2)$ является одной из характеристик трансформатора.

Проанализируем выражение (6.28). Во-первых, так как это квадратичная зависимость, то имеется два корня, т.е. η обращается в нуль

$$\begin{aligned} \text{при } 1) \quad \bar{I}_2' &= 0 & \text{и} \\ 2) \quad \bar{I}_2'' &= \frac{U_1Xm}{K^2(X_m^2 + X^2)} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Во-вторых, зависимость (6.28) имеет максимальное значение при некотором токе \bar{I}_2 . Определим его из условия

$$\begin{aligned} \frac{d\eta'}{d\bar{I}_2} &= 0 \\ \bar{I}_2 + \bar{I}_2 \frac{U_1 X m}{K X X m} - \frac{U_1^2}{K^2 (X_m^2 + X^2)} &= 0. \end{aligned}$$

Откуда
$$i_2^{1,2} = \frac{U_1}{K X X_m} \left[\pm \sqrt{z^2 + \frac{X_m^2 X^2}{(X^2 + X_m^2)}} - z \right]$$

или
$$i_2' \approx \frac{U_1}{K X_m}$$

i_2^2 - отрицательный и для реального трансформатора не имеет смысла.

Таким образом, зависимость $\eta = f(i_2)$ можно изобразить кривой, показанной на рис. 6.15.

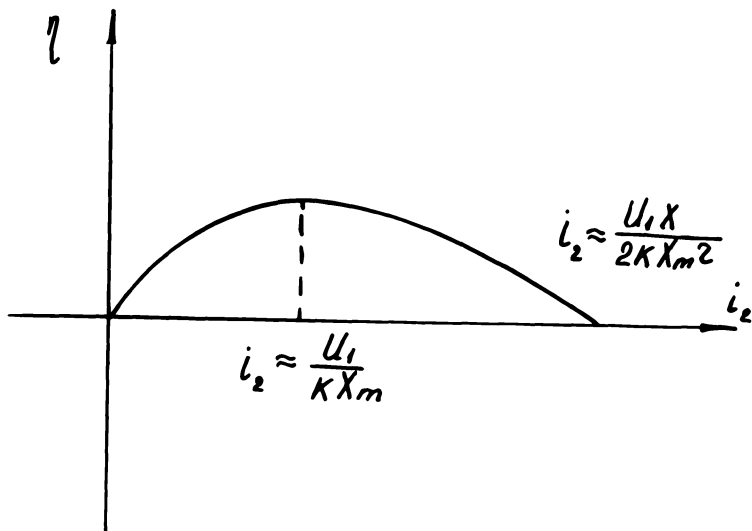


Рис. 6.15.

Глава VII. ВРАЩАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

Вращающимися электрическими машинами считают такие устройства, в которых по крайней мере один из контуров имеет вращательное движение, т.е. существуют обмотки (роторные), у которых $\theta \neq 0$. Такие устройства преобразуют электрическую энергию в механическую или наоборот.

Одной из основных величин, характеризующих вращающиеся машины, является электромагнитный момент.

Будем считать, что электрическая машина работает, если она обеспечивает непрерывное преобразование энергии. Для этого достаточно проанализировать установившийся режим работы машины. Если машина, например, обеспечивает некоторый средний момент при данном питании и скорости вращения, то она может вращаться с этой скоростью, если момент нагрузки будет равен развиваемому электромагнитному моменту.

Необходимые условия работы машины могут быть получены при рассмотрении различных способов питания и величины среднего момента.

Для этого рассмотрим уравнение момента обобщенной машины при различных способах питания.

Ранее было выведено выражение электромагнитного момента обобщенной машины:

$$M_{\text{эм}} = i_r^t G_s i_s + i_r^t G_r i_r = M_s + M_r \quad (7.1)$$

Первый член обусловлен взаимодействием токов ротора и статора, а второй, имеющий место при различной магнитной проницаемости, т.е. при наличии явных полюсов, обусловлен взаимодействием только роторных токов.

Средний момент отличен от нуля, как ранее доказывалось, может быть только в случае, если перемножаемые токи имеют одну частоту. Это возможно в следующих случаях:

- 1) реактивный момент отсутствует, угловая частота тока стато-

ра и тока ротора относительно неподвижных осей должны быть равны

$$\omega^s = \pm \omega^r \pm n \omega_r, \quad (7.2)$$

где ω^s - угловая частота тока статора;

n - число пар полюсов;

$n \omega_r$ - скорость ротора в электрических радианах;

ω^r - угловая частота тока относительно ротора.

Если ток статора изменяется по закону

$$i_s = I_m^s \sin \omega^s t, \quad (7.3)$$

то ток ротора должен изменяться

$$i_r = I_m^r \sin (\pm \omega^s \pm n \omega_r) t \quad (7.4)$$

Это соответствует так называемому классу асинхронных машин.

Если ток статора изменяется по закону

$$i_s = I_m^s \sin n \omega_r t \quad (7.5)$$

(т.е. соответственно скорости вращения ротора), то ток в роторе должен быть

$$i_r = I_m^r \sin 2n \omega_r t \quad (7.6)$$

Это так называемая машина двойного питания или $i_2 = const$ что соответствует синхронным машинам.

Если ток статора постоянный ($i^s = const$), то частота тока ротора должна соответствовать частоте вращения ротора

$$\omega^r = n \omega_r \quad (7.7)$$

Это соответствует машинам постоянного тока.

2) Явнополюсная структура вносит дополнительные условия существования реактивного момента. Чтобы векторы роторных токов были неподвижны друг относительно друга, частоты роторных токов должны подчиняться условию

$$\omega^{rd} = \pm \omega^{rq} \pm 2n \omega_r \quad (7.8)$$

Так как разные токи в роторе в реальных машинах практически не используются, это условие сводится к тому, что токи в роторе должны иметь частоту скорости вращения ротора $n\omega$

Это соответствует синхронной машине.

Исследования условий, которым должны удовлетворять частоты токов ротора и статора для создания среднего ненулевого момента, а значит, и для успешного преобразования энергии, приводят к естественной классификации электрических машин:

- постоянного тока;
- асинхронные;
- синхронные.

Конкретных же конструкций электрических машин существует большое множество, так как используются различные технические приспособления, обеспечивающие соблюдение вышеуказанных условий (например, коллектор). Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Обратимость работы электрических машин

Под обратимостью работы электрических машин подразумевается способность **МЖ** работать как в двигательном, так и в генераторном режиме. На языке уравнений перевод электрической машины из одного режима в другой означает перестановку зависимых и независимых переменных в уравнениях, т.е.,

$$U = Z \cdot i \rightarrow i = YU,$$

где $Y = Z^{-1}$ — матрица проводимости.

Уравнение $U = Z \cdot i$ говорит о том, что по заданным токам можно найти напряжения (и они существуют), если известна матрица Z и $|Z| \neq 0$ (т.е. машина работает генератором).

Обратная матрица Z^{-1} равна

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \{ Z_{ij}^{-1} \}, \quad (7.9)$$

где Z_{ij}^{-1} — алгебраическое дополнение элемента Z_{ij} в определителе $|Z|$

Отличие от нуля определителя $|Z^{-1}|$ говорит о том, что по заданным напряжениям из уравнения $i = Z^{-1}U$ можно найти токи (и они

существуют), если $|Z^{-1}| \neq 0$ (работа машины в двигательном режиме).

Известно, что

$$|Z^{-1}| = \frac{1}{|Z|} \quad (7.10)$$

Это выражение показывает, что при $|Z| \neq 0$ также $|Z^{-1}| \neq 0$. Отличие от нуля $|Z|$ или $|Z^{-1}|$ является необходимым и достаточным условием для работы реальной машины и ее обратимости.

На языке графов это значит, что надо вершины-источники сделать вершинами-стоками и наоборот, вершины-стоки — вершинами-источниками, т.е. необходима инверсия графа. Для существования такого перехода необходимым и достаточным условием является отличие от нуля детерминанта матрицы Z или графа переходного сопротивления.

Глава УИ. АСИНХРОННЫЕ МАШИНЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА.

Асинхронными называются такие машины, скорость вращения ротора которых не соответствует частоте питания и зависит от нагрузки. Асинхронные машины чаще всего используются в двигательном режиме.

Как следует из условия существования электромагнитного момента, для асинхронных машин характерным является то, что питание подается только на статорные обмотки. Этим, собственно, объясняется конструкция ротора - как правило, его обмотки коротко замкнуты (возможно замкнуты и на сопротивление).

Возможны различные случаи питания статорных обмоток: однофазные, двухфазные, трехфазные и многофазные.

§ I. Асинхронные двухфазные машины

Начнем с рассмотрения принципа действия двухфазной асинхронной машины, так как она наиболее близка к обобщенной модели.

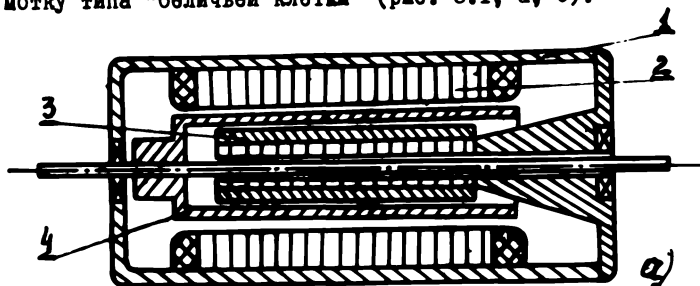
Двухфазные асинхронные микромашины можно разделить по назначению в технических устройствах автоматики, вычислительной и измерительной техники на четыре основные группы:

1. исполнительные двигатели;
2. датчики момента;
3. тахогенераторы;
4. датчики ускорения.

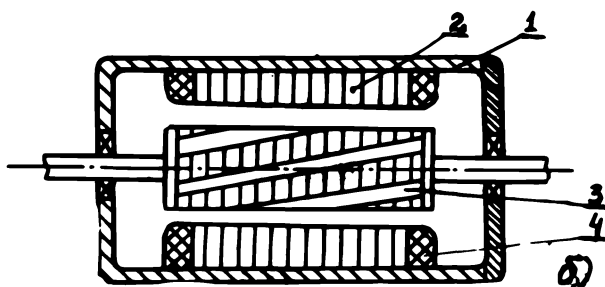
Конструктивно машины перечисленных групп имеют много общего и их отношение к определенной группе определяется режимом работы.

Асинхронная машина включает в себя ротор, вращающийся в подшипниках; статор, в пазах которого расположены обмотки. Ротор представляет собой либо полный стакан, либо короткозамкнутую об-

мотку типа "беличьей клетки" (рис. 8.1, а, б).



1-корпус, 2-внешний статор, 3-внутренний статор, 4-полюс ротор



1-корпус, 2-статор, 3-"беличья клетка", 4-обмотка статора

Рис. 8.1.

При использовании полого ротора машина содержит как внутренний, так и наружный статоры, на каждом из которых могут находиться обмотки. Статор набирается из листов электротехнической стали, имеющей узкую петлю гистерезиса. В некоторых случаях внутренний статор может поворачиваться соосно внешнему, что позволяет изменять пространственный угол сдвига между обмотками. Обмотки фаз для 2-полюсных машин выполняются обычно распределенными. При большем числе пар полюсов из-за ограниченного числа пазов обмотки приходится выполнять сосредоточенными. Пространственный сдвиг обмоток фаз составляет обычно 90 эл. градусов.

Для двигателей полый немагнитный ротор изготавливается из сплавов алюминия, имеющих низкое удельное сопротивление. В тахогенераторах, где особо важным является точность преобразования, ротор изготавливается из сплавов фосфористой бронзы, имеющей повышенное удельное сопротивление.

Короткозамкнутая обмотка типа "беличьей клетки" выполняется из меди или латуни. Эта обмотка заливается в расплавленном состоянии в пазы ротора, набираемого из листов электротехнической стали. Обычно пазы ротора выполняются со скосом на I-I,5 зубцовых деления, что позволяет снизить величину паразитных моментов.

"Элементарная модель" такой машины показана на рис. 8.2.

Так как все эти обмотки электрически не соединены, а статорные обмотки могут иметь коэффициент трансформации K , то матрица перехода будет

$$C = \begin{matrix} & ds & dr & qz & qs \\ \begin{matrix} ds \\ dr \\ qz \\ qs \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & K \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8.1)$$

Тогда получим граф полного сопротивления двухфазной машины в установленном режиме (рис. 8.3). Этот граф необходимо инверсиро-

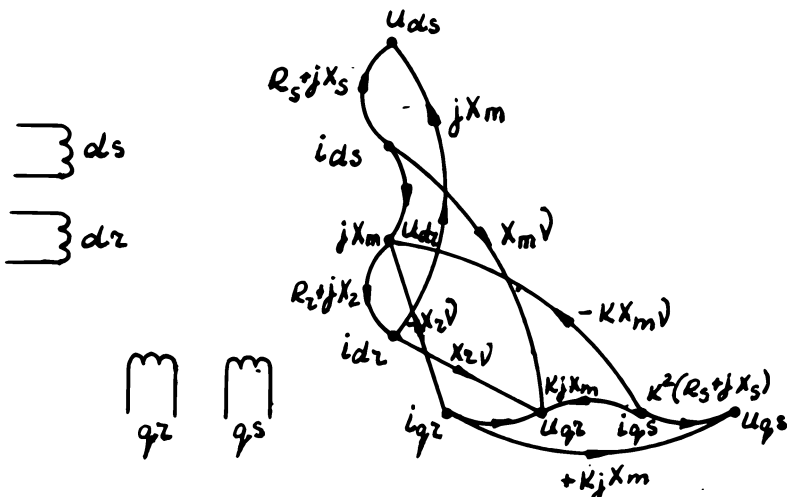


Рис. 8.2.

Рис. 8.3.

вать, потому что напряжение подается на обмотки ds и qs и вершины U_{ds} , U_{qs} , U_{dz} и U_{qz} надо сделать источниками, после чего U_{dz} и U_{qz} можно отбросить (роторные обмотки замкнуты). В результате получим граф, представленный на рис. 8.4, ν = относительная скорость, $\nu = \frac{v}{v_0}$.

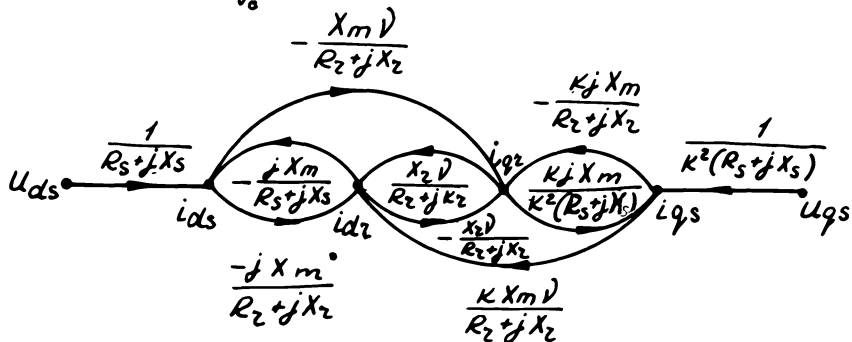


рис. 8.4.

На рис. 8.5 приведен граф момента.

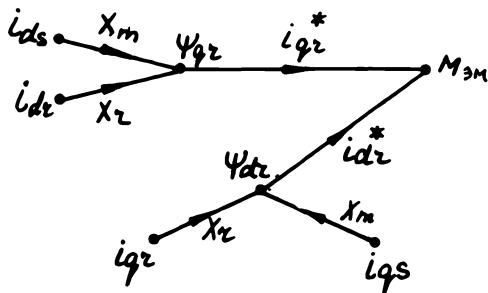


рис. 8.5.

Для определения момента сначала находятся токи из графа полного сопротивления по правилу Мэйсона. Момент же получим, перемножая соответствующие токи согласно графу момента и взяв действительную часть этого выражения.

Зависимость каждого из токов (стоков) от каждого из напряжений (источников) назовем частной передаточной функцией, которая будет

$$\frac{I_i'}{U_j'} = \frac{\sum_k G_{kji} D_{kji}}{D} = P_{ji}, \quad (8.2)$$

где G_{kji} k -й разомкнутый путь от источника j к стоку i ;
 D_{kji} - детерминант графа, не соприкасающийся с путем G_{kji}
 D - детерминант графа.

Таким образом, токи будут выражениями

$$I_i' = \sum_j U_j' P_{ji} = U_1 P_{1i} + U_2 P_{2i} + \dots, \quad (8.3)$$

где G_{kji}, D_{kji}, D в общем случае комплексные величины.

Электромагнитный момент, равный действительной части $i \cdot G_i^*$, будет состоять из суммы произведений

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \operatorname{Re} \left[G \sum_j U_j P_{ji} \cdot \sum_k U_k^* P_{km}^* \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[G \sum_j \sum_k U_j U_k^* P_{ji} P_{km}^* \right] = \operatorname{Re} \left[G (U_1^2 P_{1i} P_{1m}^* + U_1 U_2^* P_{1i} P_{2m}^* + \dots) \right] \end{aligned} \quad (8.4)$$

Произведение передаточных функций представляет собой сумму членов, являющихся произведениями ветвей графа - активных и реактивных сопротивлений (электромагнитных параметров машины). А поскольку в некоторые из ветвей входит скорость вращения ротора (или относительная), то произведение передаточных функций будет полиномом относительно степени скорости и отличен от нуля.

Для двухфазного двигателя это выражение будет иметь вид:

$$\mathcal{M} = \operatorname{Re} \left[U_1^2 P_{1i} P_{1j}^* + U_1 U_4 P_{1k} P_{4c}^* + U_4^2 P_{4m} P_{4n}^* \right] \quad (8.5)$$

В случае двигателя конкретной конструкции все электромагнитные параметры являются определенными постоянными величинами, такими же будут частные передаточные функции. Величина же электромагнитного момента при данной скорости ротора будет зависеть от соот-

ношения напряжений на обмотках статора.

Механическая характеристика двухфазной машины

Она выражает зависимость между скоростью вращения ротора и электромагнитного момента (в установившемся режиме электромагнитный момент и момент на валу равны) при постоянном напряжении на обмотках.

Для этого рассмотрим подробнее выражение (8.4). Введем в него коэффициент сигнала $\alpha = \frac{U_v}{U_i}$ и учитывая, что отличны от нуля только U_i и U_v т.е. $j = I; 4$ и $K = 4, I$,

$$f = R_e U_i^2 \left\{ \sum_j \sum_K P_{ji} \cdot P_{km}^* + \alpha \sum_j \sum_K P_{ji} P_{km}^* + \alpha^2 \sum_j \sum_K P_{ji} P_{km}^* \right\} = R_e U_i^2 \left\{ P_{ii} \cdot P_{im}^* + \alpha P_{ii} P_{im}^* + \alpha^2 P_{ii} \cdot P_{im}^* \right\} \quad (8.6)$$

Согласно (7.1) создаст момент произведения токов $i_1 \cdot i_3$ и $i_2 \cdot i_4$ (эти индексы соответствуют i и m), произведения токов с другими индексами в создании момента не участвуют.

Тогда, перекумузовав по порядку вершины, будем иметь:

$$f = R_e U_i^2 \left\{ (P_{11} \cdot P_{13}^* + P_{12} \cdot P_{14}^*) + \alpha (P_{12} \cdot P_{14}^* + P_{11} \cdot P_{13}^*) + \alpha^2 (P_{41} \cdot P_{43}^* + P_{42} \cdot P_{44}^*) \right\} \quad (8.7)$$

Напомним, что здесь первый индекс соответствует номеру точки, а второй - любой другой вершине (т.е. первый - напряжению, второй - токам).

В дальнейшем нам удобнее в графе (рис. 8.4) прокумузовать все вершины по порядку:

- 1 - U_1
- 2 - i_1
- 3 - i_2
- 4 - i_3
- 5 - i_4
- 6 - U_4

В результате (8.7) примет вид

$$f = Re G U_i^2 \{ (P_{12} \cdot P_{14}^* + P_{13} \cdot P_{14}^*) + \Delta (P_{13} \cdot P_{65}^* + P_{12} \cdot P_{64}) + \Delta^2 (P_{62} \cdot P_{64}^* + P_{63} \cdot P_{65}^*) \} \quad (8.8)$$

Обозначим коэффициенты передачи между i и j вершинами соответственно через Z_{ij}

А теперь выразим каждую из передаточных функций в виде полинома от степени скорости Δ

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{Z_{12}(1 - Z_{34}Z_{45}Z_{53} - Z_{34}Z_{43} - Z_{45}Z_{54})}{\Delta} \\ P_{13} &= \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}(-Z_{45}Z_{54} + 1) + Z_{12}Z_{24} \cdot Z_{43}(1)}{\Delta} \\ P_{14} &= \frac{Z_{12}Z_{23}Z_{34}(1) + Z_{12}Z_{24}(1)}{\Delta} \\ P_{15} &= \frac{Z_{12} \cdot Z_{23} \cdot Z_{34}Z_{45}(1) + Z_{12} \cdot Z_{24} \cdot Z_{45}}{\Delta} \\ P_{65} &= \frac{Z_{65}(1 - Z_{43} \cdot Z_{34} - Z_{32}Z_{23} - Z_{24} \cdot Z_{43}Z_{32})}{\Delta} \\ P_{64} &= \frac{Z_{65}Z_{54}(1 - Z_{23}Z_{32}) + Z_{65}Z_{53}Z_{34}(1)}{\Delta} \\ P_{63} &= \frac{Z_{65}Z_{54}Z_{43}(1) + Z_{65} \cdot Z_{53}}{\Delta} \\ P_{62} &= \frac{Z_{65}Z_{54}Z_{32}(1) + Z_{65} \cdot Z_{53} \cdot Z_{32}}{\Delta} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Следует заметить, что величину $\sqrt{\quad}$ содержат только ветви Z_{43} , Z_{24} и Z_{53} , Z_{34}

Следовательно, произведения передаточных функций, входящие в (8.8), будут представлять собой полиномы типа:

$$\left. \begin{aligned} P_{12} \cdot P_{14}^* &= \frac{1}{\Delta \Delta^*} (c_1 \sqrt{\quad} + d_1 \sqrt{\quad}^3); \\ P_{13} \cdot P_{15}^* &= \frac{1}{\Delta \Delta^*} (c_2 \sqrt{\quad} + d_2 \sqrt{\quad}^3); \\ P_{62} \cdot P_{64}^* &= \frac{1}{\Delta \Delta^*} (c_5 \sqrt{\quad} + d_5 \sqrt{\quad}^3) \alpha^2; \\ P_{13} \cdot P_{65}^* &= \frac{1}{\Delta \Delta^*} (b_3 + k_3 \sqrt{\quad}^2 + t_3 \sqrt{\quad}^4) \alpha; \\ P_{12} \cdot P_{64}^* &= \frac{1}{\Delta \Delta^*} (b_4 + k_4 \sqrt{\quad}^2 + t_4 \sqrt{\quad}^4) \alpha; \\ P_{63} \cdot P_{65}^* &= \frac{1}{\Delta \Delta^*} (c_6 \sqrt{\quad} + d_6 \sqrt{\quad}^3) \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Таким образом, уравнение момента будет представлять собой в общем виде полином 4-й степени относительно скорости:

$$\begin{aligned} f = Re \frac{X_m U_i^2}{A} [& \alpha B + (c_1 + c_2 \alpha^2) \sqrt{\quad} + k \alpha \sqrt{\quad}^2 + \\ & + (D_1 + D_2 \alpha^2) \sqrt{\quad}^3 + T \alpha \sqrt{\quad}^4] \end{aligned} \quad (8.11)$$

Действительно, члены, входящие в уравнение момента и содержащие скорость в четвертой степени $\sqrt{\quad}^4$ согласно графам рис. 8.4 и 8.5, будут равны произведениям:

I) от i_{ds} X_m i_{qr}

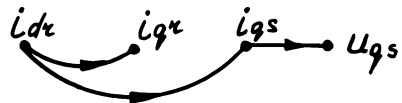


рис. 8.6.

$$1.0. \quad i_{ds} \cdot X_m i_{qz}^* = U_{ds} \cdot U_{ds} X_m \left(\frac{K X_m}{R_2 + jX_2} \right) \left(-\frac{X_2}{R_2 + jX_2} \right) \cdot \frac{K_j X_m}{K^2 (R_s + jX_s)} \cdot \left(\frac{K X_m}{R_2 + jX_2} \right) \left(-\frac{X_2}{R_2 + jX_2} \right) \quad (8.12)$$

$$2) \text{ от } i_{qs} \cdot K X_m \cdot i_{dz}^* = U_{qs} U_{ds} \cdot K \cdot X_m \left(-\frac{X_m}{R_2 + jX_2} \right) \cdot \frac{X_2}{R_2 + jX_2} \cdot \left(-\frac{j X_m}{R_s + jX_s} \right) \cdot \left(-\frac{X_m}{R_2 + jX_2} \right) \cdot \frac{X_2}{R_2 + jX_2} \quad (8.13)$$

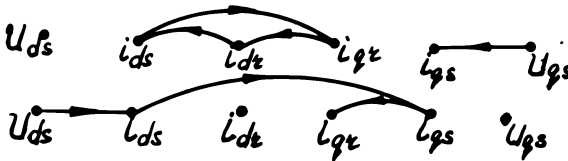


Рис. 8.7.

Их сумма при равномерном воздушном зазоре ($X_{dz} = X_{qz} = X_2$) будет равна нулю.

Вычисление коэффициентов показывает, что последний член в создании постоянной составляющей момента не участвует и

$$j = \frac{X_m U_1^2}{\omega_c A} \left[\mathcal{L} B + (C_1 + C_2 \mathcal{L}^2) \mathcal{V} + k \mathcal{L} \mathcal{V}^2 + (D_1 + D_2 \mathcal{L}^2) \mathcal{V}^3 \right] \quad (8.14)$$

(при $X_2 = X_m$),

где $A = \Delta \delta^* = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 (1 - \mathcal{V}^2)$

Но $\mathcal{L}_2 = 0$ в случае конденсаторной схемы.

Все коэффициенты являются многочленами, каждый из членов которых — произведение электромагнитных параметров.

При определении постоянной составляющей момента члены с минимальными коэффициентами отбрасываются.

Следует заметить, что величина $\sqrt{\quad}$ содержится также в коэффициенте Λ . При проектировании машины подбираются также параметры, которые бы обеспечивали заданную характеристику. Кроме того, характеристики конкретной машины, т.е. при фиксированных коэффициентах будут различны для разных d .

Величина момента при скорости, равной нулю (при пуске), называется пусковым моментом и равна согласно (8.14) выражению

$$f_{nye} = \frac{U_{с\epsilon mu}^2}{\omega_c \Lambda} \cdot d^2 B, \quad (8.15)$$

отличному от нуля.

То, что двухфазный двигатель имеет пусковой момент, отличный от нуля, можно узнать и без вывода уравнения момента, а просто из анализа графа переходного сопротивления, который превращается в граф, изображенный на рис. 8.8 (у него нет дуг, содержащих \mathcal{U}).



Рис. 8.8.

При $U_{ds} \neq 0$ и $U_{qs} \neq 0$ не равны нулю и все токи, а следовательно, и электромагнитный момент.

На рис. 8.9 приведено графическое изображение механической характеристики 2-фазной асинхронной машины. Она разделяется на три области, соответствующие трем режимам работы машины. Рассмотрим их:

1. Противодействие ($-\infty < \sqrt{\quad} < 0$), т.е. когда скорость вращения ротора и поля противоположны. Этот режим обычно используется для быстрого торможения ротора и возможен, например, если момент нагрузки становится вращающим (при опускании груза) или переключением фаз меняют направление вращения поля.

II. Двигательный режим - основной для асинхронных машин ($0 < \sqrt{\quad} < 1$).

III. Генераторный режим соответствует неравенству ($1 < \sqrt{\quad} < \infty$). Рассмотрим подробнее последние два режима.

Двигательный режим.

Параметры машины подбираются такими, чтобы характеристики двигательного режима были наиболее линейны. На рис. 8.10 приводится семейство механических характеристик для различных коэффициентов сигнала.

Из (8.15) следует, что величина пускового момента пропорциональна α . При холостом ходе ($f = 0$) ротором достигается наибольшая скорость (так называемая скорость холостого хода). Она бывает несколько меньше синхронной скорости ω_c (скорости идеального холостого хода) из-за наличия момента сил сопротивления на валу. Как видно из рис. 8.11, максимальная ω_0 при $\alpha = 1$. При больших значениях ω_0 меньше возрастает пусковой момент (из-за насыщения), но кривая круче падает и скорость холостого хода становится меньше.

При снятии сигнала управления (одно из U равно нулю) $\alpha = 0$. В этом случае пусковой момент отсутствует, т. е. двигатель нельзя запустить, а работающий двигатель будет иметь на валу тормозящий момент, пропорциональный скорости. Наклон линии $\alpha = 0$ определяет коэффициент $D_I + C_I$. Для удовлетворения требования отсутствия самохода достаточно, чтобы коэффициент D был отрицательным, $D < 0$. Однако, одна и та же машина в зависимости от способа управления будет иметь различные характеристики.

Из уравнения момента (8.11) видно, что даже конкретная машина (ей соответствуют фиксированные значения коэффициентов в (8.11)) будет иметь разные характеристики в зависимости от коэффициента сигнала α , равного отношению напряжений U_1 и U_2 . Однако из этих напряжений обычно оставляют неизменным (U сети), а другое меняют (U_2 — напряжение управления). Так как U сети и U_2 — синусоидальные величины, то отличаться они могут как по величине, так и по фазе (соответственно существует амплитудное управление и фазовое).

В первом случае α действительное переменное число, во втором меняется от $-j\alpha$ до $+j\alpha$, а само α — постоянное число.

Кроме того, напряжения могут отличаться по частоте, а также обмотки сдвинуты в пространстве друг относительно друга.

Рассмотрим соответствующие этим случаям способы управления двигателем.

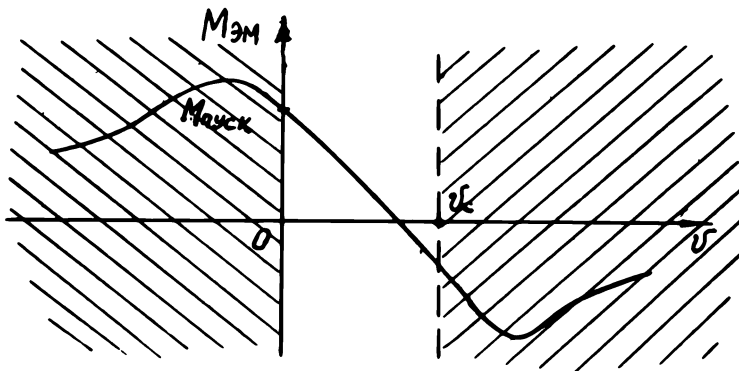


Рис. 8.9.

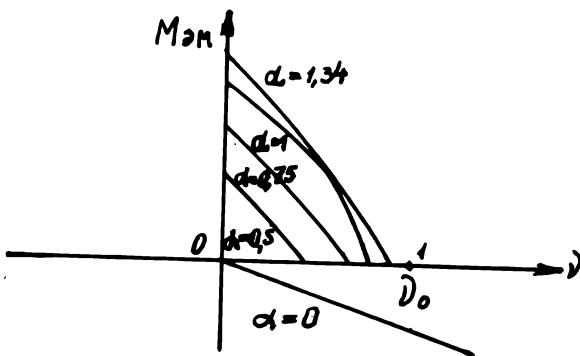


Рис. 8.10

I. Амплитудный способ. Условно мы называем одну из статорных обмоток обмоткой возбуждения (В), другую обмоткой управления (У). На обмотку возбуждения (предположим d_s) подается напряжение U_{ds} . Обмотка управления расположена перпендикулярно ОВ в пространстве и на нее подается напряжение, сдвинутое по фазе на 90 электрических градусов — $-jU_{ds}$ и имеющее ту же частоту, но отличающуюся по модулю.

Схема этого способа управления приводится на рис. 8.II

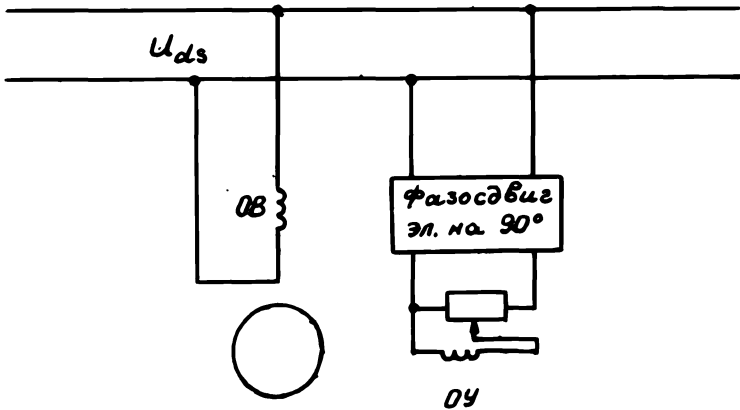


Рис. 8.II.

Удобно ввести так называемый коэффициент сигнала d , равный отношению $d = \frac{U_y}{U_{сстм}}$; $d = \text{var}$

II. Фазовый способ. Обмотку возбуждения подключают к сети, а на обмотку управления, также расположенную в пространстве перпендикулярно к ОВ, подается напряжение, такое же по величине (обычно номинальное) и сдвинутое по фазе $\angle \varphi = \text{var}$.

На рис. 8.I2 приведена схема фазового управления.

III. Пространственное управление. Обмотка возбуждения подключается к сети с номинальным напряжением. На обмотку управления, сдвинутую в пространстве на угол γ ($\angle \gamma = \text{var}$) относительно об-

мотки возбуждения, подается также номинальное напряжение, сдвинутое по фазе на 90° . Схема дана на рис. 8.13.

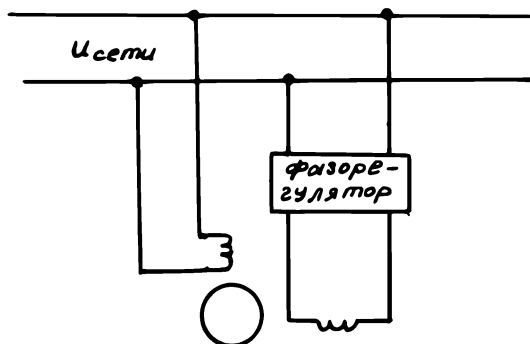


Рис. 8.12.

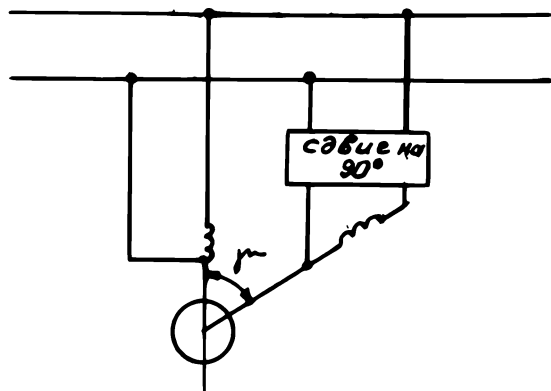


Рис. 8.13.

IV. Амплитудно-фазовое управление с конденсатором в цепи возбуждения (схема на рис. 8.14).

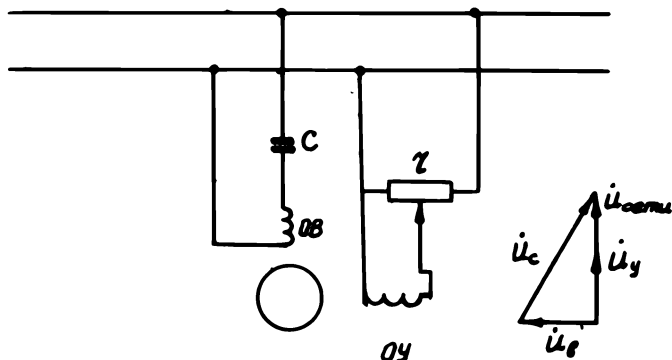


Рис. 8.14.

Обмотку управления подключают к сети через регулятор напряжения, а в ОВ включен конденсатор, сдвигающий по фазе ток в ОВ

$$|U_y| = \text{var}; U_c = U_{\text{сети}} - U_b$$

У. Частотное управление осуществляется с помощью преобразователя промышленной частоты в регулируемый. Это преобразующее устройство имеет ряд недостатков, таких как громоздкость, низкий к.п.д., низкое быстродействие. Однако, несмотря на эти недостатки, асинхронные двигатели с частотным управлением нашли практическое применение: в случае большого числа согласованно работающих электроприводов, тягового электропривода, приводов сверхскоростных металлорежущих станков и др.

Сравнение механических характеристик при различных способах управления

О сравнении характеристик имеет смысл говорить, если иметь в виду конкретную машину. В зависимости от различных способов управления коэффициент сигнала α будет разной величиной.

Так, при амплитудном способе управления коэффициент сигнала

будет $\alpha = -j\alpha_a$, где $\alpha_a = \frac{|U_y|}{|U_1|}$.

Его нетрудно получить

$$\begin{aligned}
 U_4 &= U_4 \cdot \sin \omega t = U_4 e^{j\omega t} \\
 U_1 &= U_1 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = U_1 e^{j(\omega t - 90^\circ)} \\
 \frac{U_4}{U_1} &= \alpha_a \cdot e^{j(-90^\circ)} \\
 e^{j(-90^\circ)} &= j \sin(-90^\circ) + \cos(-90^\circ) \\
 \alpha &= \alpha_a (-j)
 \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что при фазовом управлении, когда $|U_1| = |U_4|$ и частоты одинаковы, а сдвиг по фазе величина переменная, т.е. $\alpha = -\alpha \varphi j$, где $-1 \leq \alpha \varphi \leq 1$. Здесь $\alpha = \sin \varphi$, $\alpha \varphi = 0$ соответствует случаю, когда U_1 и U_4 в фазе, $\alpha \varphi = \pm 1$ — соответственно сдвигу на $+90^\circ$.

Пространственное управление определяется $\alpha = -j j(|U_1| = |U_4|)$, сдвиг по фазе 90°). Но в этом случае статорные обмотки в пространстве сдвинуты и при расположении одной из них по осям "d" и "q" некоторые члены матрицы сопротивления (или ветви графа) будут умножаться на $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$ (где φ — угол пространственного сдвига обмоток). Матрица перехода будет:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} ds_1 & s_2 & dk & qk \end{matrix} \\ \begin{matrix} ds_1 \\ ds_2 \\ dk \\ qk \\ q_{s2} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos \varphi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & \sin \varphi & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(8.16)

При уменьшении частоты на обмотке управления коэффициент сигнала представляется более сложным выражением

$$d = \frac{U_1 e^{j(\omega_1 t - \varphi_1)}}{U_2 e^{j(\omega_2 t - \varphi_2)}} = d_a \cdot e^{j[(\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2)]} \quad (8.17)$$

В комплексной плоскости это два вектора U_1 и U_2 , вращающиеся с различными скоростями ω_1 и ω_2 , т.е. вращающиеся друг относительно друга. Для выражения (8.17) можно предположить, что фазы φ_1 и φ_2 равны

$$\text{Тогда } e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} = e^{j\omega t},$$

где ω - относительная скорость векторов U_1 и U_2

$$\text{и } d = d_a (j \sin \omega t + \cos \omega t) \quad (8.18)$$

Амплитудно-фазовое управление с конденсатором в цепи возбуждения можно описать, введя в матрицу сопротивления реактивное сопротивление емкости X_C :

$$Z' = \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline R_s + jX_s & jX_m & & \\ \hline jX_m & R_z + jX_z & -X_z D & -X_m k D \\ \hline X_m D & X_z D & R_z + jX_z & k j X_m \\ \hline & & k j X_m & k^2 (R_s + jX_s) + k \\ \hline \end{array} \quad (8.19)$$

Очевидно, что уравнение электромагнитного момента при этом сохранится в том же виде (полинома третьей, четвертой степени), изменятся опять коэффициенты при степенях ν

Коэффициент сигнала d в этом случае будет таким же, как при амплитудном управлении.

Таким образом, мы видим, что характер электромагнитного момента при различных способах управления не изменяется, но будет принимать разные значения коэффициентов А, В, С...

Наиболее близкими будут уравнения моментов при амплитудном и фазовом управлении. Кажущиеся одинаковыми коэффициенты сигнала, однако, отличаются друг от друга тем, что при фазовом управлении d изменяется пропорционально $\sin \varphi$ (отношение амплитуд равно единице), а при амплитудном пропорционально d_a , т.е. отношению амплитуд.

При проектировании двухфазных исполнительных двигателей коэффициенты уравнения (8.14) следует подобрать такими, чтобы механические характеристики удовлетворяли требованиям в диапазоне скоростей, соответствующих двигательному режиму:

- А) линейности
- Б) однозначности
- В) устойчивости

Для удовлетворения этих требований при проектировании машины приводит к необходимости увеличения активного сопротивления ротора, что в свою очередь приводит к увеличению потерь и снижению КПД. Поэтому исполнительные двигатели, как правило, выпускаются малой (до 1000 Вт) мощности.

На рис. 8.15 приведены механические характеристики исполнительного асинхронного двигателя при наиболее распространенных в автоматике способах управления: а - амплитудном, б - фазовом, в - амплитудно-фазовом.

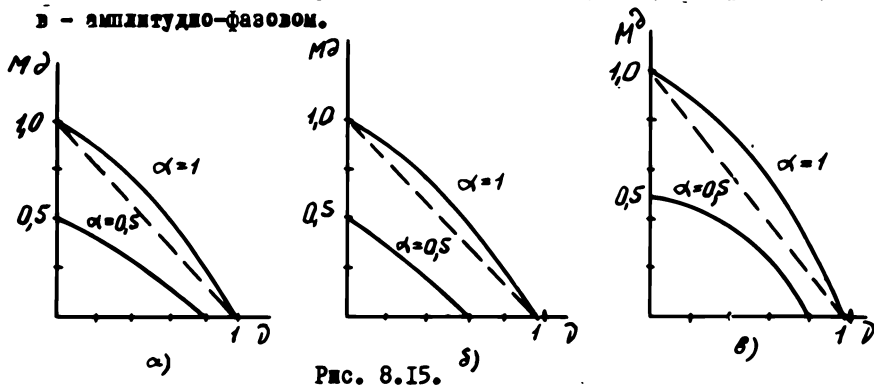


Рис. 8.15.

Эти характеристики даны в относительных единицах (принято по отношению к пусковому моменту, когда $\nu = 0$), для чего все члены полинома делятся на $\frac{U_{\text{сигн}}^2}{10^4} \cdot 13$.

Анализ механических характеристик показывает, что наиболее линейными являются характеристики при фазовом управлении, причем жесткость их мало изменяется в зависимости от изменения коэффициента сигнала. Менее линейные механические характеристики при

амплитудном управлении, причем жесткость их мало изменяется в зависимости от изменения коэффициента сигнала. Наиболее линейны механические характеристики при амплитудно-фазовом управлении. При всех способах управления механические характеристики являются устойчивыми и однозначными во всем диапазоне двигательного режима.

Регулировочные характеристики

Под регулировочной характеристикой двигателей имеется в виду зависимость скорости вращения ротора от напряжения управления (коэффициента сигнала) $\nu = f(d)$ при $M = \text{const}$.

Уравнение регулировочной характеристики можно получить из уравнения механической характеристики. Причем, значительно проще получить обратную зависимость $d = f(\nu)$

$$d = \frac{2(D\nu + T\nu^3 - \frac{M\omega_c}{U_{\text{ст}}})}{B + K\nu^2 \pm \sqrt{(B + K\nu^2)^2 - 4(c\nu + N\nu^3)(D\nu + T\nu^3 - \frac{M\omega_c}{U_{\text{ст}}})}} \quad (8.20)$$

Из (8.20) следует, что в момент трогания, когда $\nu = 0$, величина, называемая напряжением трогания, равна:

$$d_{\text{тр}} = \frac{M\omega_c}{U_{\text{ст}}} \quad (8.21)$$

Анализ регулировочных характеристик (рис. 8.16) показывает, что наиболее линейными являются характеристики двигателя с фазовым управлением. Все характеристики имеют наибольшую линейность в начальной части, т.е. при малых относительных скоростях. Для увеличения интервала линейности, т.е. для уменьшения относительных скоростей чаще всего повышают частоту питания, так как при этом повышается соответственно синхронная скорость.

Из (8.21) видно, что напряжение трогания пропорционально моменту на валу.

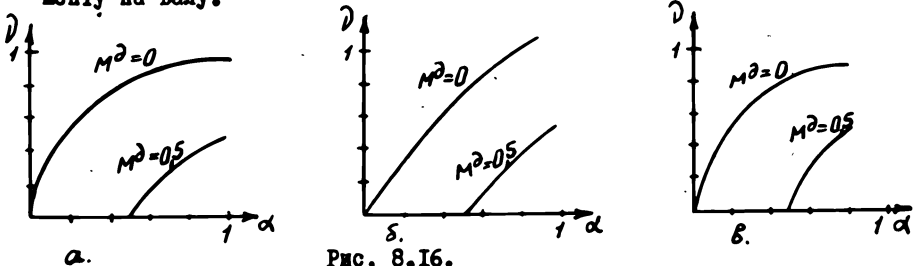


Рис. 8.16.

Энергетическими показателями являются мощности:

P_B - потребляемая обмоткой возбуждения;

P_Y - мощность управления, потребляемая обмоткой управления;

P_I - потребляемая мощность, равная сумме P_B и P_Y ;

P_2 - выходная или полезная мощность, мощность на валу двигателя;

η - коэффициент использования, равный отношению полезной мощности к потребляемой $\eta = \frac{P_2}{P_I}$ и в отличие от КПД не учиты-

вающей мощность потерь на трение (в действительности потребляемая мощность P_I равна сумме $P_Y + P_B + P_{тр}$).

Полезную мощность определим как $M_{эм} \dot{V}$

$$\text{Потребляемая} - P_{затр} = Re I_i^* \dot{V}_i + Re I^* U_c$$

В результате соответствующих расчетов получим следующие уравнения, выражающие зависимость $P_{затр}$, P_Y , P_B от относительной скорости вращения ротора \dot{V}

$$P_Y = \frac{U_c^2 c_{em}}{\Delta \Delta^*} [d^2 B_1 + d C_1 \dot{V} + d^2 K_1 \dot{V}^2 + d N_1 \dot{V}^3 + d^2 T_1 \dot{V}^4]$$

$$P_B = \frac{U_c^2 c_{em}}{\Delta \Delta^*} [B_2 + d C_2 \dot{V} + K_2 \dot{V}^2 + d N_2 \dot{V}^3 + T_2 \dot{V}^4]$$

$$P_{затр} = \frac{U_c^2 c_{em}}{\Delta \Delta^*} [(d^2 B_1 + B_2) + (d^2 K_1 + K_2) \dot{V}^2 + (d^2 T_1 + T_2) \dot{V}^4] \quad (8.22)$$

(коэфф. $C_1 = -C_2$; $N_1 = -N_2$; $T_2 = 0$)

$$\eta = \frac{d B_1 \dot{V} + (d^2 C + D) \dot{V}^2 + d K \dot{V}^3 + (d^2 N + L) \dot{V}^4}{(d^2 B_1 + B_2) + (d^2 K_1 + K_2) \dot{V}^2 + (d^2 T_1 + T_2) \dot{V}^4}$$

На рис. 8.17-8.20 изображены зависимости энергетических показателей для коэффициента сигнала $d = 1$ и $d = 0,5$ для двигательного режима и режима претивовключения двигателя АДП-362.

Коэффициенты B_1 и B_2 характеризуют потребляемую мощность обмоток управления и возбуждения в момент пуска. Коэффициенты C_1 и C_2 определяют поведение характеристики в интервале малых скоростей.

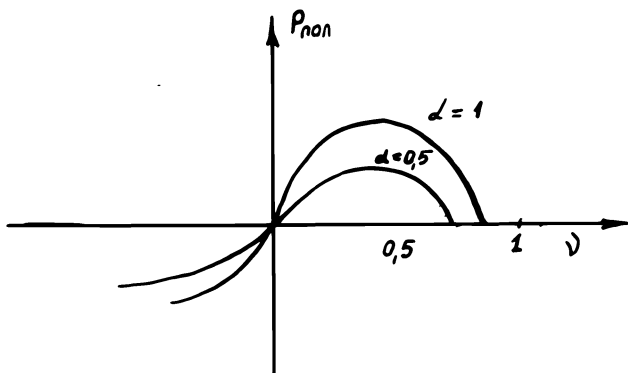


Рис. 8.17.

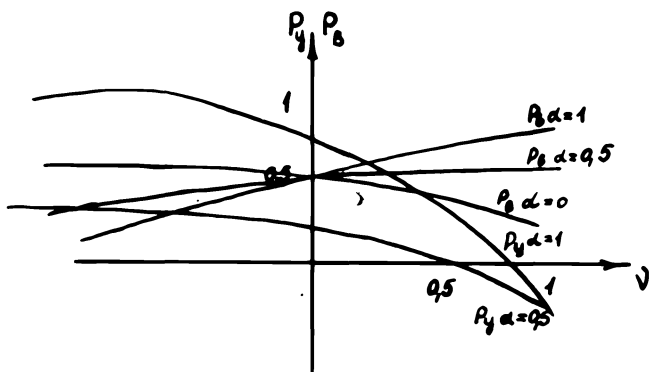


Рис. 8.18.

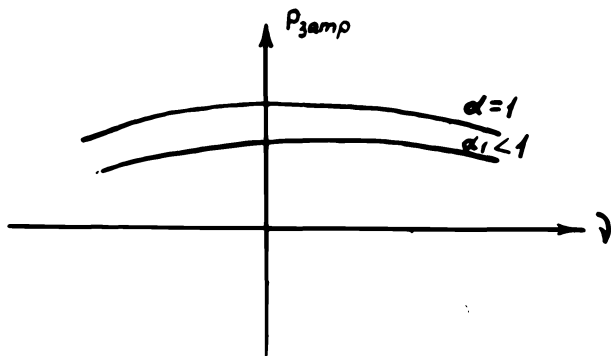


Рис. 8.19.

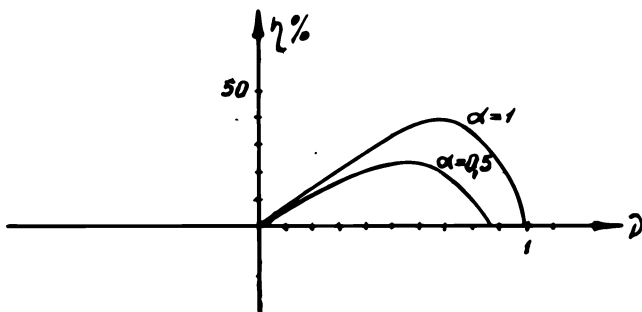


Рис. 8.20.

Из (8.22) следует, что потребляемая мощность обмотки возбуждения в момент пуска не зависит от коэффициента сигнала α , т.е. семейство кривых $P_0 = f(s)$ для различных α сходится в одной точке при $s = 0$. Мощность, потребляемая обмоткой управления, в момент пуска пропорциональна квадрату α .

Полная потребляемая мощность $P_{\text{затр}}$ (как видно из 8.22 и рис. 8.19) оказывается инвариантной относительно направления вращения ротора.

Двухфазные асинхронные двигатели обычно используются в качестве так называемых исполнительных или управляемых двигателей. Действительно, с изменением сигнала управления (в конечном счете α) изменяется скорость вращения ротора при неизменной нагрузке на вал ($M = \text{const}$), что отражает регуляторная характеристика.

Генераторный режим

В генераторном режиме асинхронные машины имеют сравнительно узкую область применения. Это объясняется тем, что для обеспечения работы машины в генераторном режиме, когда в сеть будет поступать электроэнергия, а электромагнитный момент становится отрицательным, что соответствует потреблению механической энергии, ротор машины необходимо раскручивать до скорости, значительно большей синхронной.

Для раскручивания ротора приходится использовать первичный (приводной) двигатель, механическая энергия которого преобразуется в электрическую и отдается в сеть.

Однако асинхронные машины в генераторном режиме (так называемые тахогенераторы) имеют специальное применение.

Тахогенераторами называют электрические машины малой мощности, служащие для преобразования скорости вращения в пропорциональный электрический сигнал. Эта зависимость называется выходной характеристикой:

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{ус}} n_2 = K_{\text{ус}} \frac{d\theta}{dt}, \quad (8.23)$$

где θ - угол поворота ротора;
 $K_{\text{ус}}$ - коэффициент усиления.

По конструкции и принципу действия тахогенераторы могут быть постоянного тока, асинхронные, синхронные.

Асинхронные тахогенераторы имеют конструкцию, аналогичную исполнительному двухфазному двигателю с полым немагнитным ротором.

Принципиальная же схема отличается тем, что сигнал (электрическая энергия) подается только на одну обмотку (возбуждения), а другая является выходной (генераторной). Этому режиму двухфазной машины соответствует граф, представленный на рис. 8.2I, полученный инверсией путей $i_{ds} U_{ds}$; $i_{qr} U_{qr}$; $i_{dr} U_{dr}$

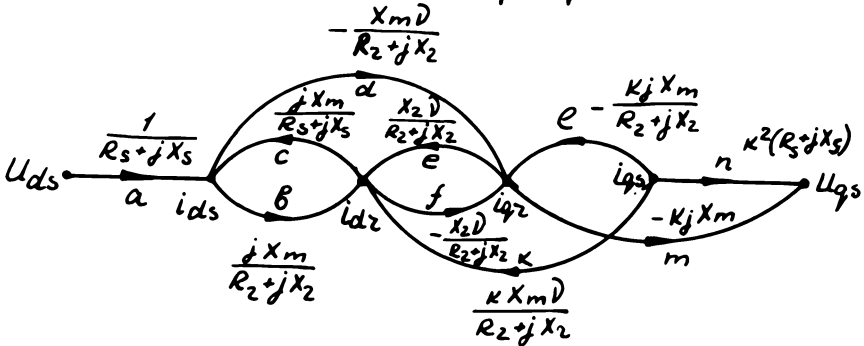


Рис. 8.2I.

По правилу Мэйсона определяем передаточную функцию $\frac{U_{qs}}{U_{ds}} = \frac{\sum G_i D_i}{D}$

где $G_1 = a \cdot b \cdot f \cdot m$ $D_1 = 1$
 $G_2 = a \cdot d \cdot m$ $D_2 = 1$
 $D = 1 - b \cdot e - e \cdot f - e \cdot c \cdot d$

Так как обмотка q_s - генераторная, исходящие ветви из i_{qs} были взяты противоположного знака

$$\begin{aligned} \frac{U_{qs}}{U_{ds}} &= \frac{a \cdot m \cdot (b \cdot f + d)}{1 - b \cdot e - e \cdot f - e \cdot c \cdot d} = \\ &= \frac{-\frac{K_j X_m}{R_s + jX_s} \left(-\frac{jX_m}{R_r + jX_r} - \frac{X_2 \Delta}{R_r + jX_r} + -\frac{X_m \Delta}{R_r + jX_r} \right)}{1 + \frac{jX_m}{R_r + jX_r} \cdot \frac{jX_m}{R_s + jX_s} + \frac{(X_2 \Delta)^2}{(R_r + jX_r)^2} + \frac{X_r \Delta j X_m \cdot X_m \Delta}{(R_r + jX_r)^2 (R_s + jX_s)}} = \\ &= \frac{K X_m^2 X_2 \Delta + X_m R_r \Delta - j X_m X_2 \Delta}{X_m^2 (R_r + jX_r) + (R_s + jX_s)(X_2 \Delta)^2 + X_2 \Delta j X_m^2 \Delta} = \\ &= \frac{(A - jA') \Delta}{(B + jB') + (C + jC') \Delta^2} \end{aligned}$$

Таким образом, выходное напряжение будет:

$$U_{qs} = \frac{(A + jA') \Delta}{(B + jB') + (C + jC') \Delta^2} U_{ds}, \quad (8.24)$$

$$\text{где } \Lambda = K X_m^2 X_2 - X_m^2 R_2$$

$$A' = -X_m^2 X_2$$

$$B = R_s R_2^2 - X_2^2 R_s - 2 R_2 X_2 X_s - X_m^2 R_2$$

$$B' = 2 R_2 X_2 R_s + X_s R_2^2 - X_s X_2^2 - X_2 X_m^2 \quad (8.25)$$

$$C = R_s X_2^2$$

$$C = X_s X_2^2 - X_2 X_m^2$$

При неподвижном роторе ($\dot{\nu} = 0$) напряжение на выходной обмотке (U_{qs}) равно нулю. Это нетрудно заметить, если обратиться к графу (рисунок 8.21.) Действительно, в этом случае не существует ни одного разомкнутого пути от источника U_{ds} к стору U_{qs} . Из уравнения (8.24) также следует, что при $\dot{\nu} = 0$ $U_{qs} = 0$. Переменное напряжение U_{ds} создает ток в обмотке возбуждения и продольный пульсирующий магнитный поток. Этот магнитный поток наводит трансформаторную ЭДС только в обмотке d_2 . Поскольку ротор короткозамкнутый, по его обмотке потечет ток и создаст свой магнитный поток направленный, аналогично трансформаторному, навстречу потоку обмотки возбуждения.

В результате по продольной оси установится суммарный поток φ_{d_2} , пульсирующий с частотой напряжения возбуждения.

При вращении ротора в продольной его обмотке по-прежнему будет наводиться трансформаторная ЭДС, а в поперечной Γq_2 - генераторная. Она создает ток Γq_2 и поток φ_{q_2} , направленный по оси генераторной обмотки. Частота пульсации потока φ_{q_2} (как и ЭДС и ток ротора) относительно неподвижных координат совпадает с частотой питания. По величине этот поток будет пропорционален скорости вращения ротора, так как пропорциональна скорости генераторная ЭДС.

Однако, зависимость выходного напряжения (при разомкнутой обмотке q_2 соответственно E_{qs}) от скорости вращения не является прямой линией (уравнение 8.24). Это объясняется тем, что под действием потока φ_{q_2} во вращающихся витках ротора, расположенных по продольной оси, наводится дополнительная ЭДС вращения, совпадающая по направлению с ЭДС трансформаторной и пропорциональная квадрату скорости (так как сам поток φ_{q_2} пропорционален скорости).

Отклонение от линейности выходной характеристики, данной на рис. 8.22, дает амплитудную погрешность. Изменение фазы выходного напряжения относительно питания - фазовая погрешность. Обе их можно определить из уравнения (8.24).

Если обмотку q_2 замкнуть на внешнее сопротивление Z_{nr} , то выходное напряжение будет $U_{q_2} = E_{q_2} - I_{q_2} Z_{q_2}$

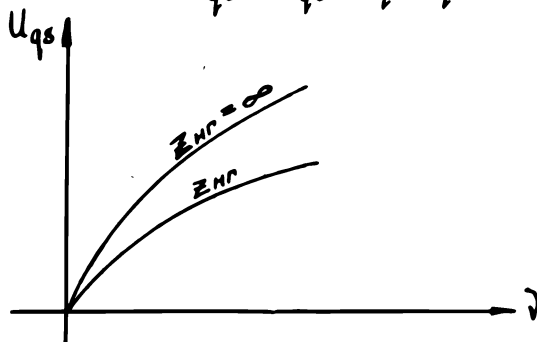


Рис. 8.22.

Существует еще одна погрешность - нулевой сигнал. Он является результатом возникновения ЭДС в генераторной обмотке при неподвижном роторе. Это связано с технологическими возможностями создания точного сдвига между обмотками на угол $\pi/2$, несимметричностью ротора.

§ 2. Однофазная асинхронная машина

Однофазная асинхронная машина имеет одну статорную обмотку и короткозамкнутую роторную.

На рис. 8.23 показана ее элементарная модель

$\} ds$

$\} dr$
 q_2
 $\} \text{---}$

Рис. 8.23
160

Соответствующая матрица полного сопротивления:

$$Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} d_s & d_z & q_z \end{matrix} \\ \begin{matrix} d_s \\ d_z \\ q_z \end{matrix} & \begin{matrix} R_s + L_p & M_p & \\ M_p & R_z + L_z p & -L_z V \\ M V & L_z V & R_z + L_z p \end{matrix} \end{matrix} \quad (8.26)$$

Так как все области электрически не связаны, матрица перехода будет единичной:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} d_s & d_z & q_z \end{matrix} \\ \begin{matrix} d_s \\ d_z \\ q_z \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Для анализа работы машины и расчета ее характеристик опять воспользуемся графовой моделью.

Граф полного сопротивления в установившемся режиме легко получить из графа двухфазной машины, отбросив вторую статорную обмотку (рис. 8.24)

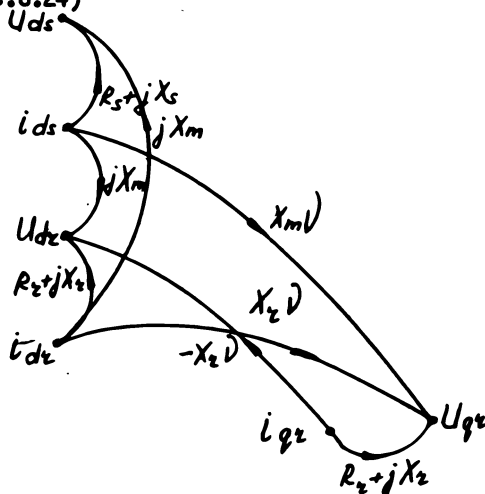


Рис. 8.24

Очевидно, что для однофазной асинхронной машины исключается генераторный режим, ибо отсутствует выходная обмотка. Если же в качестве генераторной принять роторную обмотку, генератор будет синхронным.

Для рассмотрения двигательного режима граф на рис. 8.24 удобно преобразовать путем инверсии ветвей $U_1, i_1, i_2, U_2, i_3, U_3$ к виду (рис. 8.25).

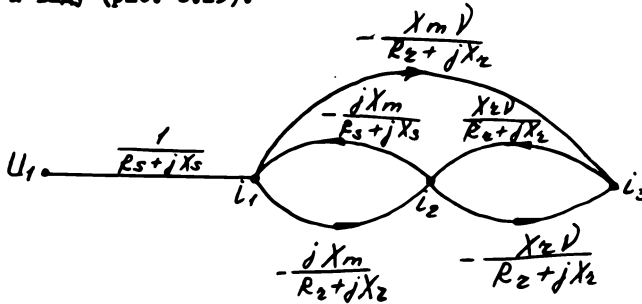


Рис. 8.25.

Граф момента при симметричном роторе, когда

$$i_{d2} X_{d2} i_{q2}^* - i_{q2} X_{q2} i_{d2}^* = 0,$$

принимает простой вид

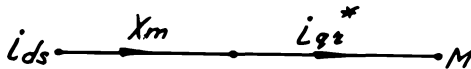


Рис. 8.26.

Не прибегая к расчетам, из графа на рис. 8.25 видно, что в момент пуска двигателя, когда $V = 0$, ток $i_s(i_{q2})$ равен нулю, так как нет непрерывного разомкнутого пути от источника к вершине i_s . Это значит, что однофазный асинхронный двигатель не имеет пускового момента.

Определим уравнение механической характеристики, предварительно вычислив ток:

$$i_{ds} = \frac{1}{R_s + jX_s} \left(1 - \frac{X_2^2 \dot{V}^2}{(R_2 + jX_2)^2} \right) \cdot U_{ds}$$

$$i_{qs} = \frac{1}{R_s + jX_s} \left(-\frac{jX_m}{R_2 + jX_2} \right) \cdot \left(-\frac{X_2 \dot{V}}{R_2 + jX_2} \right) + \frac{1}{R_s + jX_s} \left(-\frac{X_m \dot{V}}{R_2 + jX_2} \right) \cdot U_{ds}$$

$$M = \operatorname{Re} \frac{U_{ds}^2}{D D^*} (A \dot{V}^3 + A_1 \dot{V}) \quad \text{где } A = X_m R_2 X_2^2; \quad A_1 = X_m^2 R_2 (X_2^2 - R_2^2)$$

$$D = 1 - \frac{(jX_m)^2}{(R_s + jX_s)(R_2 + jX_2)} + \frac{X_2^2 \dot{V}^2}{(R_2 + jX_2)^2} - \frac{jX_m^2 X_2 \dot{V}^2}{(R_s + jX_s)(R_2 + jX_2)^2} =$$

$$= \frac{(R_s + jX_s)(R_2 + jX_2)^2 + X_m^2 (R_2 + jX_2) + X_2^2 \dot{V}^2 (R_s + jX_s) - jX_m^2 X_2 \dot{V}^2}{(R_s + jX_s)(R_2 + jX_2)^2}$$

$$D D^* = D + D_1 \dot{V}^2 + D_2 \dot{V}^4$$

$$\text{где } D = -2X_m^2 R_2^3 R_s + 3X_m^2 X_2^2 X_s^2 - 2R_2^2 X_m^3 X_s + \\ + X_m^4 R_2^2 + X_s^2 R_2^4 - X_s^2 X_m^4 - 2X_m^5 X_s + 2R_2 X_m^4 R_s$$

$$D_1 = -X_m^4 (X_s - X_m)^2 - 2X_m^3 R_2^2 X_s - 2X_m^4 R_2 R_s + 2X_m^5 X_s + \\ + X_m^2 X_s^2 R_2^2$$

$$D_2 = X_m^4 (X_s - X_m)^2$$

Уравнение механической характеристики:

$$M_{\text{эм}} = U_{ds}^2 \frac{A \dot{V}^3 + A_1 \dot{V}}{D + D_1 \dot{V}^2 + D_2 \dot{V}^4} \quad (8.27)$$

Соответствующая этому уравнению кривая зависимости момента

от скорости вращения ротора изображена на рис. 8.27

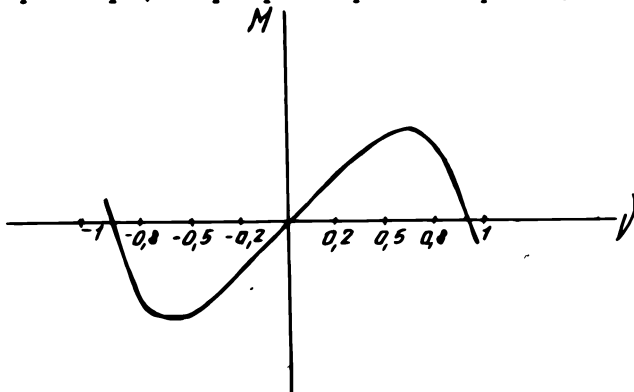


Рис. 8.27.

Отсюда следует, что направление момента совпадает с направлением скорости ротора и что отсутствует пусковой момент. Поэтому ротор двигателя необходимо привести во вращение с помощью стороннего двигателя, а затем, когда появится вращающийся электромагнитный момент, соответствующий данной скорости ротора, вал машины можно нагружать. Однако величина нагрузки не должна превышать $m\alpha\chi$ электромагнитного момента.

Следует заметить, что при изменении электромагнитных параметров машины коэффициенты Λ ; D_1 ; D_2 будут изменяться, а кривая момента деформироваться. Изменение электромагнитных параметров может привести и к изменению знака у какого-либо из коэффициентов Λ ; D_1 ; D_2 и кривая приобретает вид, изображенный на рис.8.28.

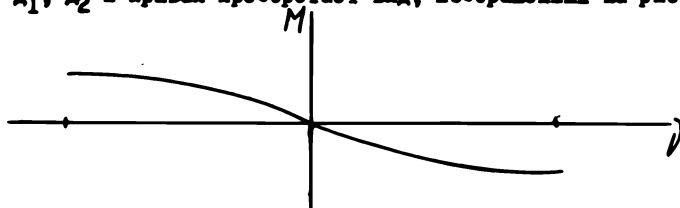


Рис. 8.28.

Однако так спроектированная машина вообще работать не будет, ибо при раскручивании ротора возникает тормозящий момент. Так

должна быть спроектирована двухфазная машина, когда при отсутствии сигнала управления при любой скорости ротора электромагнитный момент должен быть тормозящим, обеспечивающим возможность самехода.

Пусковой момент в однофазном двигателе можно получить довольно простым способом - путем расщепления полюсов.

Такой двигатель изображен на рис. 8.29.

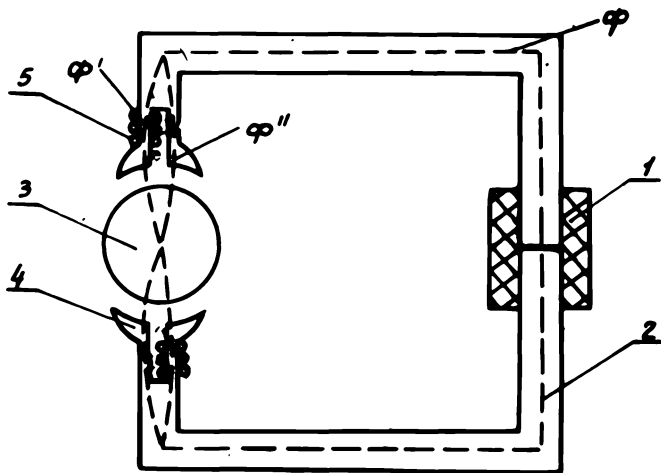


Рис. 8.29.

При подаче переменного напряжения на зажимы однофазной обмотки возбуждения I в магнитопроводе 2 создается пульсирующий магнитный поток Φ . Проходя по полюсам статора 4, он расщепляется на два потока Φ и Φ' , сдвинутых в пространстве друг относительно друга. Один из них Φ' , проходя по экранированной части полюса, наводит ЭДС в короткозамкнутых витках 5, отстающую от потока по фазе на 90° . По виткам течет ток I_K , отстающий от ЭДС вследствие индуктивности витков и создающий поток Φ_K .

В сумме с потоком Φ он образует поток Φ_2 экранированной части.

Таким образом, питание двигателя осуществляется от однофазной обмотки, а по существу двигатель является двухфазным. Матрица

преобразования С его будет такой же, как и для двухфазного двигателя с пространственным управлением. Для двигателя данной конструкции (рис. 8.29) характерно отсутствие реверса. Возможна и реверсивная конструкция, В этом случае катушки с разомкнутыми витками помещают на обеих частях каждого расщепленного полюса. Замыкая то одну пару, катушек, то другую изменяют направление вращения ротора. Создание реверса приводит к увеличению габарита и веса машины. Другими недостатками двигателя являются малый пусковой момент, низкие КПД и коэффициент мощности.

К достоинствам однофазных двигателей с расщепленными полюсами, кроме простоты конструкции и малой стоимости, относится надежная работа при пусках и остановках под напряжением.

§ 3. Трехфазная асинхронная машина

Эта машина имеет трехфазную обмотку питания на статоре и два исполнения ротора: с короткозамкнутой обмоткой и трехфазной.

Рассмотрим трехфазную машину с короткозамкнутым ротором. Одну из фазных обмоток статора совместим с продольной осью d . На рис. 8.30 представлена элементарная трехфазная машина, полученная при разложении статорных обмоток по осям d и q .

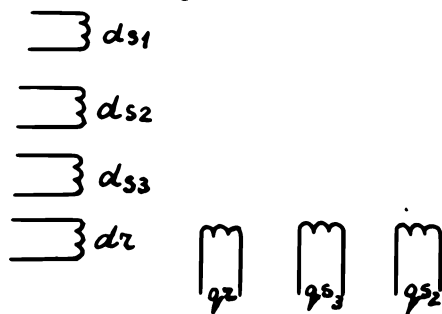


Рис. 8.30.

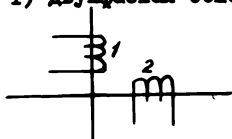
Для исследования многофазных машин очень удобно использовать метод симметричных составляющих.

Теория вращающегося поля

В реальном пространстве токи n обмоток создают круговое магнитное вращающееся поле при условии: амплитуды в каждой фазе равны, сдвиг по фазе и сдвиг обмоток в пространстве должен быть $\frac{2\pi}{n}$, токи имеют одну частоту.

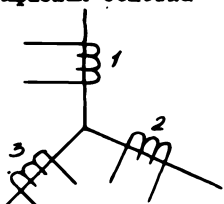
Например.

1) Двухфазная обмотка



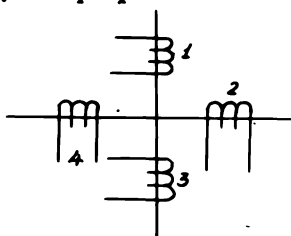
$$i_1 = I_m \cdot \sin \omega t$$
$$i_2 = I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

2) Трехфазная обмотка



$$i_1 = I_m \cdot \sin \omega t$$
$$i_2 = I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$
$$i_3 = I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} \cdot 2)$$

3) Четырехфазная обмотка



$$i_1 = I_m \cdot \sin \omega t$$
$$i_2 = I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{4})$$
$$i_3 = I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{4} \cdot 2)$$
$$i_4 = I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{4} \cdot 3)$$

4) n -фазная обмотка

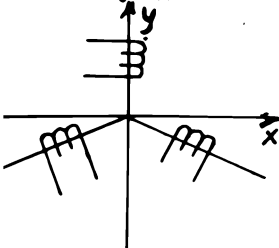
$$i_n = I_m \cdot \sin[\omega t - \frac{2\pi}{n} (n-1)].$$

Доказать это нетрудно. Так как все обмотки расположены на одной плоскости в реальном пространстве, то выбирают две взаимноперпендикулярных оси (базис этого пространства) x и y и на них проектируют токи всех обмоток. Сумма их проекций на каждую из осей I_x и I_y должна дать уравнение окружности в параметрической

форме, т. е.

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_m \cdot \sin \omega t \\ I_y &= I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \end{aligned} \right\}$$

Для первого случая это очевидно, для второго и всех остальных можно убедиться



$$i_{1x}, i_{2x}, i_{3x} \dots i_{nx}$$

$$i_{1y}, i_{2y}, i_{3y} \dots i_{ny}$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= i_{1x} + i_{2x} + \dots + i_{nx} \\ I_y &= i_{1y} + i_{2y} + \dots + i_{ny} \end{aligned} \right\}$$

$$I_m = -\frac{\sum I_{mi}}{2}$$

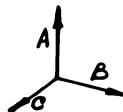
Исключением являются однофазная и двухфазная обмотки: однофазная дает пульсирующее поле, ее базис в пространстве имеет одну ось; двухфазная имеет сдвиг фаз и сдвиг обмоток в пространстве $\frac{\sqrt{2}}{2} - I$ и результирующий ток равен 0.

Та же обмотка, которую мы называем двухфазной, на самом деле является частным случаем четырехфазной (половине ее) и амплитуда поэтому равна $\frac{4I_m}{2} ; \frac{1}{2} = I_m$.

Такие системы обмоток в пространстве называются симметричными.

Так как каждый из токов - переменная синусоидальная величина, то она может быть изображена вектором в комплексной плоскости, вращающийся со скоростью ω . Каждая из систем симметричных обмоток дает симметричную систему векторов на комплексной плоскости неподвижных относительно друг друга и вращающихся со скоростью ω .

Например,



и т. д.,

где углы между векторами соответствуют сдвигу фаз в n -фазной обмотке.

Если система реальных обмоток не симметрична (нарушаются условия симметричности и результирующее поле не будет круговым), то и соответствующая ей система векторов токов на комплексной плоскости также будет не симметричной.

Однако по теореме о симметричных составляющих любую несиммет-

ричную систему n - векторов можно представить в виде суммы n симметричных n -векторных (их называют симметричными составляющими) систем.

Преобразование, дающее симметричные составляющие, было предложено Фортескью:

$$C = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{matrix} & i_0 & i_1 & i_2 & \dots & i_{n-1} \\ \begin{matrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ \vdots \\ i_x \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a^{-1} & a^{-2} & \dots & a^{-(n-1)} \\ 1 & a^{-2} & a^{-4} & \dots & a^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a^{-(n-1)} & a^{-2(n-1)} & \dots & a^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

где a - оператор поворота вектора $a = e^{j \frac{2\pi}{n}}$;

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k = 0;$$

i_0 - вектор, называемый током нулевой последовательности;

i_1 - вектор прямой последовательности или i_+ ;

i_2 - вектор обратной последовательности или i_- .

Рассмотрим двухфазную обмотку, которая является частным случаем четырехфазной ($n = 4, a = j$) и матрица преобразования которой будет

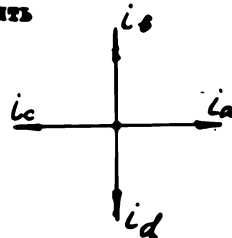
$$C = \frac{1}{2} \begin{matrix} & i_0 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \begin{matrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C^{-1} = C_t^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

Отсюда получим двухфазную, если положить

$$\begin{aligned} i_a &= -i_c \\ i_b &= -i_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_0 &= 0 \\ i_1 &= i_a + j i_b \\ i_2 &= 0 \\ i_3 &= i_a - j i_b \end{aligned}$$



Т. е. ток нулевой последовательности отсутствует, а токи прямой и обратной последовательности будут:

$$i_+ = \frac{1}{2}(i_a + j i_b)$$

$$i_- = \frac{1}{2}(i_a - j i_b)$$

и

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$$

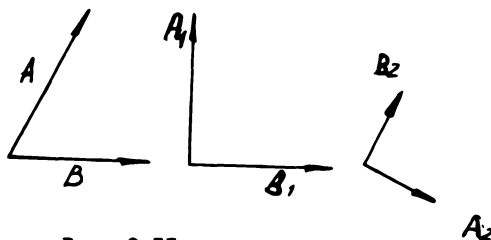


Рис. 8.31.

На рис. 8.31 приведено разложение несимметричной двухфазной системы на симметричные составляющие.

Например, матрица вида

$$Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} d & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} d \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z & Z_1 \\ -Z_1 & Z \end{bmatrix} \end{matrix}$$

при помощи матрицы

$$C = \frac{1}{2} \begin{matrix} & \begin{matrix} + & - \end{matrix} \\ \begin{matrix} d \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \end{matrix}$$

приводится к диагональному виду

$$Z' = C_t^* \cdot Z \cdot C = \frac{1}{2} \begin{matrix} & \begin{matrix} + & - \end{matrix} \\ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z - j Z_1 & \\ & Z + j Z_1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8.33)$$

Это характерно для роторных обмоток машины с равномерным воздушным зазором.

$$Z = \begin{array}{c} d_2 \\ q_2 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline r_2 + jX_2 & X_2 V \\ \hline -X_2 V & r_2 + jX_2 \\ \hline \end{array} \quad (8.34)$$

$$Z = \frac{1}{2} \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline r_2 + (1+V)jX_s & 0 \\ \hline 0 & r_2 + (1+V)jX_s \\ \hline \end{array}$$

Рассмотрим асинхронный двухфазный двигатель с несимметричными приложенными напряжениями (рис. 8.32)

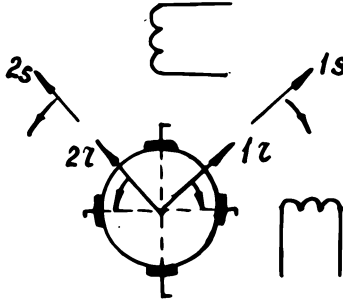


Рис. 8.32.

В установившемся режиме уравнения его элементарной машины

$$U = Z \begin{array}{c} I_{ds} \\ I_{d2} \\ I_{q2} \\ I_{qs} \end{array} \quad (8.35)$$

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_2 + jX_s & & & \\ \hline jX_m & r_2 + jX_2 & -X_2 V & -X_m V \\ \hline X_m V & X_2 V & r_2 + jX_2 & jX_m \\ \hline & & jX_m & r_2 + jX_s \\ \hline \end{array}$$

	ds	dx	qx	qs
ds	1			
dx		1		
qx			1	
qs				$\frac{1}{a}$

	$1s$	$2s$	$1x$	$2x$
ds	1	1		
dx			1	1
qx			$-j$	j
qs	$-j$	j		

$$C = C_1^{-1} \cdot C_2 = \frac{1}{2} \begin{array}{c} ds \\ dx \\ qx \\ qs \end{array} \begin{array}{cccc} +s & -s & +x & -x \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -j & j \\ -j/a & j/a & & \end{array}$$

так как

$$\begin{aligned} i ds &= (i_{1s} + i_{2s})/2 \\ i dx &= (i_{1x} + i_{2x})/2 \\ i qx &= -j(i_{1x} - i_{2x})/2 \\ i qs &= -j(i_{1s} - i_{2s})/2 \end{aligned}$$

Далее находим матрицу сопротивления Z' , соответствующую теории вращающегося поля

$$Z' = C_e^* Z C$$

	$+s$	$+x$	$-s$	$-x$
$+s$	$Z_s + jX_s$	jX_m		
$+x$	$jX_m(1+j)$	$Z_x + jX_x(1+j)$		
$-s$			$Z_s + jX_s$	$-jX_m$
$-x$			$jX_m(1-j)$	$Z_x + jX_x(1-j)$

$$U' = C_t U = \begin{matrix} +S & (U_d + j U_q(a))/2 \\ -S & (U_d - j U_q(a))/2 \\ +\gamma & \\ -\gamma & \end{matrix}$$

$$G' = C_t G C$$

$$\omega G' I' = \begin{matrix} +S & \\ -S & \\ +\gamma & -(j X_m i_{1s} + j X_e i_{1e}) / 2 \\ -\gamma & (j X_m i_{2s} + j X_e i_{2e}) / 2 \end{matrix}$$

Можно опустить $\frac{1}{2}$ у и тогда внести $\frac{1}{2}$ в матрицу токов. Поскольку к ротору не приложены напряжения, оси ротора $+\gamma$ и $-\gamma$ могут быть исключены согласно формуле

$$Z_1 = Z_3 \cdot Z_4^{-1} \cdot Z_3$$

Тогда

$$Z' = \frac{1}{2} \begin{matrix} +S & X_s + jX_s + \frac{X_m^2}{S} \\ -S & X_s + jX_s + \frac{X_m^2}{2-S} + jX_e \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{matrix} +S & -S \\ Z_1 & Z_2 \end{matrix} \quad (8.36)$$

где $S = 1 - \nu$, а $2 - S = 1 + \nu$;

Z_1 - полное сопротивление цепи прямой последовательности, а

Z_2 - полное сопротивление цепи обратной последовательности.

Расчет токов и момента приводит к тем же результатам, что система двух реакций, но сама процедура расчета упрощается из-за диагональности матрицы Z'

Трехфазная обмотка на статоре

Элементарная модель трехфазной машины с короткозамкнутым ротором представлена на рис. 8.33.

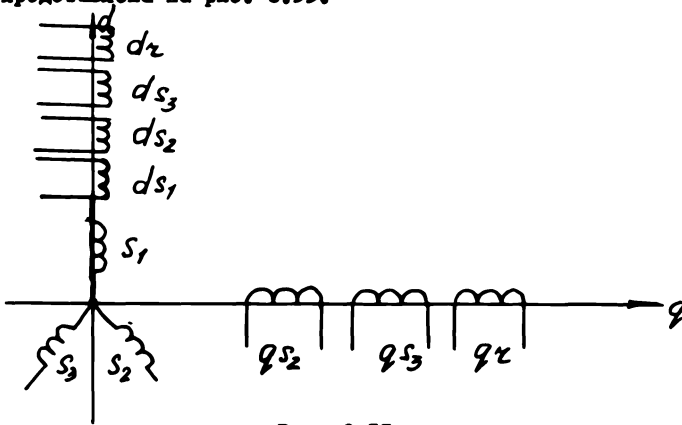


Рис. 8.33.

Удобно ось d совместить с одной из фазных обмоток. Например, с S_1 .

Тогда $ds_1 \quad ds_2 \quad ds_3 \quad qs_2 \quad qs_3 \quad dr \quad qr$

	ds_1	ds_2	ds_3	qs_2	qs_3	dr	qr
ds_1	$r_s + L_{s1}$	M_{dp}	M_{dp}	0	0	M_{dp}	0
ds_2	M_{dp}	$r_s + L_{s2}$	M_{dp}	0	0	M_{dp}	0
ds_3	M_{dp}	M_{dp}	$r_s + L_{s3}$	0	0	M_{dp}	0
qs_2	0	0	0	$r_r + L_{r2}$	M_{qr}	0	M_{qr}
qs_3	0	0	0	M_{qr}	$r_r + L_{r3}$	0	M_{qr}
dr	M_{dp}	M_{dp}	M_{dp}	$-M_{qr}\theta$	$M_{qr}\theta$	$r_r + L_{r\theta}$	$-L_{r\theta}\theta$
qr	$M_{dp}\theta$	$M_{dp}\theta$	$M_{dp}\theta$	M_{qr}	M_{qr}	$L_{r\theta}\theta$	$r_r + L_{r\theta}$

(8.37)

будет матрицей полного сопротивления элементарной трехфазной машины с короткозамкнутым ротором. Для определения \bar{Z} в любых осях исходной является матрица \bar{Z} элементарной машины.

Затем определяется \bar{Z}' трехфазной обмотки

$$\bar{Z}' = C_{1t}^* \cdot \bar{Z} \cdot C_1$$

\bar{Z}' реальной трехфазной машины можно определить с помощью преобразования C_1 , соответствующего разложению трехфазной обмотки по осям d и q .

	s_1	s_2	s_3	dz	qz
ds_1	1				
ds_2		$\cos \alpha$			
ds_3			$\cos \beta$		
$C_1 = qs_2$		$\sin \alpha$			
qs_3			$\sin \beta$		
dz				1	
qz					1

(8.38)

Так как для трехфазной обмотки $\angle \alpha = 120^\circ$, а $\angle \beta = 240^\circ$, то

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \beta &= -\frac{1}{2} \\ \sin \beta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (8.39)$$

А затем по формулам преобразования рассчитать \bar{Z}'

$$\bar{Z}' = C_{1t} \bar{Z} C_1$$

Для определения Z' можно воспользоваться теорией вращающегося поля. Нетрудно показать, что трехфазная обмотка, питаемая трехфазным током, создает вращающееся магнитное поле.

Следовательно, можно перейти к координатной системе, соответствующей теории вращающегося поля.

Однако при переходе от одной системы координат к другой и обратно с помощью C и C^{-1} важно помнить, что уравнений должно быть столько же, сколько и осей.

Фортескью была предложена следующая система преобразования, Три действительных тока i_{s1} , i_{s2} и i_{s3} элементарной системы заменяются тремя воображаемыми токами i^0 , i^1 , i^2 - токами нулевой, прямой и обратной последовательностей:

$$\begin{aligned} i_{s1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + i^1 + i^2) \\ i_{s2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + a^2 i^1 + a i^2) \\ i_{s3} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + a i^1 + a^2 i^2) \end{aligned} \quad (8.40)$$

Откуда матрица преобразования C будет

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a^2 & a \\ \hline 1 & a & a^2 \\ \hline \end{array} \quad (8.41)$$

где a - так называемый оператор поворота на $\frac{2\pi}{3}$ градусов (рис. 8.34) и равен

$$a = -\frac{1}{2} + j0,866 = e^{j120}$$

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j0,866 = e^{-j120}$$

$$1 + a + a^2 = 0$$

$$a^3 = 1 \quad a^4 = a \quad a^* = a^2$$

$$(a^2)^* = a$$

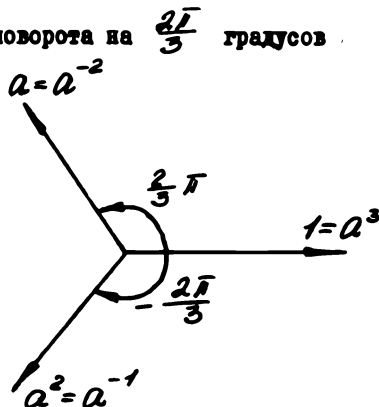


Рис. 8.34

Ил. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ вводится в целях сохранения энергетического баланса
 В новой системе $Z'(C_1^* \cdot Z \cdot C)$

$$Z' = \frac{1}{3} \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & Z+X_1+X_2 & & \\ 1 & & Z+a^2X_1+aX_2 & \\ 2 & & & Z+aX_1+a^2X_2 \end{array} \quad (8.42)$$

если Z была

$$Z = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & Z & X_1 & X_2 \\ S_2 & X_2 & Z & X_1 \\ S_3 & X_1 & X_2 & Z \end{array}$$

т.е. получили диагональную матрицу, что упрощает расчет токов и момента .

Наконец, следует обратить внимание еще на одно преобразование - приведение к двухфазной машине. В соответствии с преобразованием (8.40) симметричные составляющие напряжений и токов будут

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (U_{S1} + U_{S2} + U_{S3}) \\ U_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (U_{S1} + aU_{S2} + a^2U_{S3}) \\ U_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (U_{S1} + a^2U_{S2} + aU_{S3}) \\ I_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (I_{S1} + I_{S2} + I_{S3}) \\ I_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (I_{S1} + aI_{S2} + a^2I_{S3}) \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (I_{S1} + a^2I_{S2} + aI_{S3}) \end{aligned} \quad (8.44)$$

На рис. 8.35 показаны векторы симметричных составляющих на-

пряжений на комплексной плоскости (векторы токов изображаются аналогично).

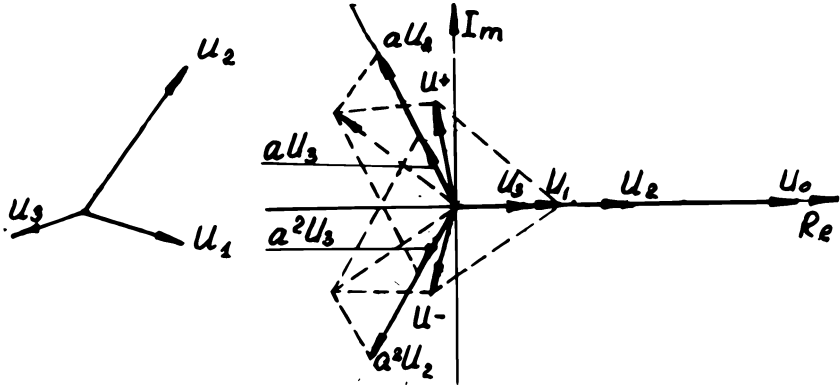


Рис. 8.35.

Исходные напряжения вещественны, следовательно, откладываются на вещественной оси.

Для построения вектора U_0 (симметричная составляющая нулевой последовательности) просто складываются исходные вектора по величине и сумма откладывается по вещественной оси. Чтобы определить вектор U_1 (симметричная составляющая прямой последовательности) сначала строятся вектора $a U_{s2}$ и $a^2 U_{s3}$, а затем они складываются и приравляется вектор U_{s1} . Аналогично строится вектор U_2 . В результате имеем напряжения нулевой последовательности — вещественную составляющую, а две остальные составляющие в виде сопряженных пар, сумма которых также вещественна. Следовательно, можно трехфазную систему привести к двухфазной с вещественными независимыми переменными. Эти переменные называются обобщенными двухфазными составляющими. Они также упрощают математическую сложность при расчете режима работы машины.

Матрица преобразования, которая дает двухфазные вещественные составляющие и образует последовательности $0, \alpha, \beta$, выразится как

	0	α	β
s_1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0
s_2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
s_3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(8.45)

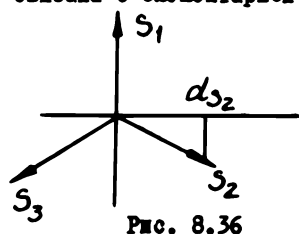
Преобразование между симметричными составляющими и двухфазными действительными составляющими запишется

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \beta \\ 0 \\ -j \end{matrix} \quad (8.46)$$

Так три фазы можно привести к двум.

Но трехфазная обмотка имеет фазные обмотки, сдвинутые в пространстве на $\pm 120^\circ$ друг относительно друга. Она связана с элементарной матрицей преобразования (рис. 8.36) C_I :

$$C_I = \begin{matrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \\ qs_2 \\ qs_3 \end{matrix} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} & \\ & & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}$$



Резльтирующее преобразование, дающее возможность от элементарной трехфазной матрицы перейти к двухфазной в системе координат α и β , будет:

$$C_2 = C_I C, \quad \text{где } C \text{ ось } (8.46)$$

$$C_2 = \begin{matrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \\ qs_2 \\ qs_3 \end{matrix} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \alpha & \beta \\ s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \\ s_3 & \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \\ \frac{1}{4} & +\frac{\sqrt{3}}{4} & \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & +\frac{3}{4} & \end{matrix} \quad (8.46')$$

Тогда $U' = C_{22} \cdot U = U_e \cdot C_{22}$

$$U' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & +\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ a^2 U \\ a^2 U \\ a^2 U \\ a^2 U \end{bmatrix}$$

$$U' = \left[\left(\frac{6}{8} - \frac{\sqrt{3}j}{4} \right) U \left(\frac{6}{8} + \frac{3\sqrt{3}j}{4} \right) U \right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

или если обозначить первый элемент матрицы через U_α , а второй через U_β

$$U' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ U_\alpha & U_\beta \end{bmatrix}$$

$$U_\beta = U_\alpha \cdot j$$

Модуль напряжений и обобщенных двухфазных координат U_α и U_β отличен от модуля напряжения трехфазной системы

$$\sqrt{\frac{\frac{3^2}{4^2} + \frac{9 \cdot 3}{4^2}}{1}} = \frac{3}{2}$$

Таким образом, если привести трехфазную обмотку к двухфазной, то она образует вращающееся круговое поле с радиусом $\frac{1}{2} U_m$, где U_m - амплитуда напряжения каждой фазы

Матрица Z' - приведена к двухфазной машине

$$Z' = C_{22} \cdot Z \cdot C_{22}$$

$$Z' = \begin{matrix} ds_1 & ds_2 & ds_3 & qs_2 & qs_3 & dz & qz \\ ds & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & & \\ qs & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & & \\ dz & & & & & & 1 & \\ qz & & & & & & & 1 \end{matrix} \cdot Z =$$

	ds_1	ds_2	ds_3	dz
ds	$(z_s + L_{sp}) + \frac{1}{2} Mdp$	$\frac{5}{4} Mdp + \frac{1}{4} (z_s + L_{sp})$	$\frac{5}{4} Mdp + \frac{1}{4} (z_s + L_{sp})$	$\frac{3}{2} Mdp$
q_s	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4} (z_s + L_{sp}) + \frac{\sqrt{3}}{4} M$	$-\frac{\sqrt{3}}{4} M + \frac{\sqrt{3}}{4} (z_s + L_{sp})$	0
dz	Mdp	Mdp	Mdp	$z_2 + L_{zp}$
q_z	$Mdp\theta$	$Mdp\theta$	$Mdp\theta$	$z_2 p\theta$

	q_z	q_{s2}	q_{s3}
	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4} (z_s + L_{sp}) + \frac{\sqrt{3}}{4} M$	$\frac{\sqrt{3}}{4} M + \frac{\sqrt{3}}{4} (z_s + L_{sp})$
	$\frac{3}{2} Mq_p$	$\frac{3}{4} (z_s + L_{sp}) + \frac{3}{4} M$	$\frac{3}{4} M + \frac{3}{4} (z_s + L_{sp})$
	$-L_{zp}\theta$	$-Mq_p\theta$	$-Mq_p\theta$
	$z_2 + L_{zp}$	Mq_p	$L_{zp}\theta$

	ds	q_s	dz	q_z
ds	$\frac{3}{2} (z_s + L_{sp}) + \frac{3}{4} M$	0	0	0
q_s	0	$\frac{3}{2} (z_s + L_{sp}) + \frac{3}{4} M$	0	$\frac{3}{2} M$
dz	$\frac{3}{2} M$	$-\frac{3}{2} M\theta$	z_2	$-L_{zp}\theta$
q_z	$\frac{3}{2} M\theta$	$\frac{3}{2} M$	$L_{zp}\theta$	$z_2 + L_{zp}$

или в порядке осей, что были приняты для обобщенной машины:

$$Z' = \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{array} \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \\ qs \end{array} \begin{array}{c} \frac{3}{2}(L_s+L_{sp}) + \frac{3}{4}M_p \\ \frac{3}{2}M_p \\ \frac{3}{2}M_p\theta \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{3}{2}M_p \\ L_r+L_{rp} \\ L_{rp}\theta \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -L_{rp}\theta \\ L_r+L_{rp} \\ \frac{3}{2}M_p \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{3}{2}M_p\theta \\ \frac{3}{2}M_p \\ \frac{3}{2}(L_s+L_{sp}) + \frac{3}{4}M_p \end{array} \quad (8.47)$$

В результате получили матрицу Z' , аналогичную матрице полного сопротивления двухфазного двигателя. Следовательно, уравнение токов и момента в зависимости от скорости будут теми же, что и для двухфазной, только изменятся машинные постоянные коэффициенты.

Обычно трехфазная машина проектируется так, чтобы максимальный момент лежал в пределах длительного режима, т.е. когда $0 > \nu > 1$

Таким образом, с точки зрения математического описания трехфазный двигатель можно привести к двухфазному. Его токи будут отличаться в этом случае от токов двухфазной машины на матрицу C (8.46), элементы которой не содержат скорости, поэтому в уравнении механической характеристики изменятся только коэффициенты при скоростях, а не вид полинома.

Трехфазные машины применяются в основном как силовые, т.е. достаточно большой мощности и поэтому требования, предъявляемые к машине, диктуются его энергетикой. Например, в двигательном режиме машина должна иметь максимальное значение вращающего электромагнитного момента (для этого подбираются соответствующие конструктивные параметры) и механическая характеристика примет вид, указанный на рис. 8.37

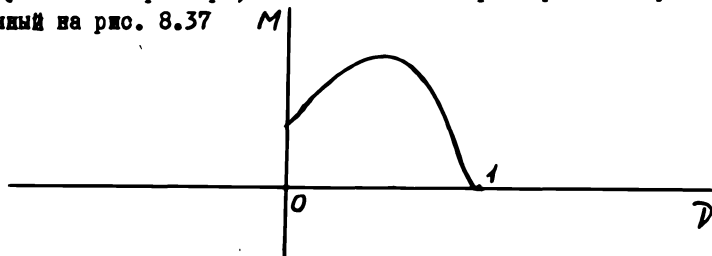


Рис. 8.37.

Однако нетрудно заметить на рис. 8.37, что механическая характеристика в зоне двигательного режима ($0 < \sqrt{2} I$) не однозначна, что делает машину непригодной для работы в качестве исполнительного двигателя. Зато к.п.д. двигателя возрастает (обычно 80–90% против 25–30% у исполнительного).

Трехфазная машина также работает в трех режимах, аналогичных двухфазной, основным из которых является двигательный. Работа трехфазного двигателя характеризуется, кроме механической, так называемыми рабочими характеристиками, представляющими зависимость скорости вращения ротора, к.п.д., $\cos \varphi_2$ момента, токов от полезной мощности на валу.

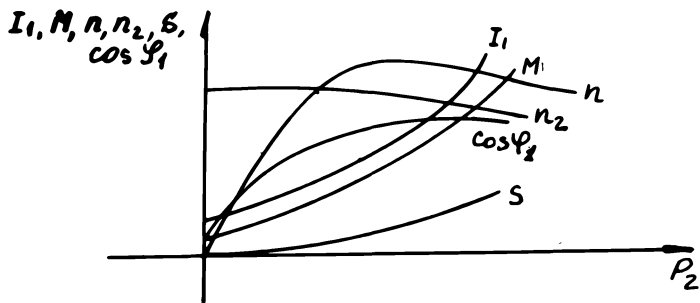


Рис. 8.38.

ГЛАВА IX. СИНХРОННЫЕ МАШИНЫ

Синхронные машины - это класс машин, которые отвечают следующему условию существования электромагнитного момента: $i_r = \text{const}$ (во вращающейся системе координат), т.е. $\omega^S = n\omega_r$ или $n\omega^S = \omega^2$ в неподвижной системе координат.

Это условие будет выполняться:

1) в генераторном режиме машины, когда поток статора постоянный (обмотка его питается постоянным напряжением или вместо нее постоянный магнит), а ЭДС и ток ротора имеют угловую частоту, соответствующую скорости ротора, но с обратным знаком;

2) в двигательном режиме необходимо, чтобы одна из обмоток питалась постоянным током, а вторая переменным, частота которого определит скорость вращения ротора (будет равна ей).

Это условие определяет как принцип действия синхронных машин, так и их конструкцию.

Однофазная синхронная машина. Синхронный генератор

В синхронных генераторах, как правило, индуктором (в) является ротор, а якорная обмотка (а) неподвижна, находится на статоре. Направление определяется потоком возбуждения (рис. 9.1). Но, как известно, для законов электромеханики существенным является значение относительной скорости ротора и статора.

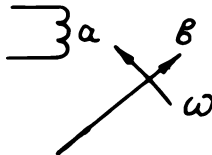


Рис. 9.1.

Поэтому можно считать поток неподвижным (он будет иметь теперь индекс " S "), а якорную обмотку вращающейся (индекс " Z "), но в противоположную сторону (рис. 9.2).

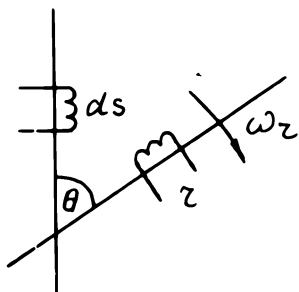


Рис. 9.2.

В результате в матрице Z в случае синхронных машин члены, содержащие $p\theta$, изменят свой знак на обратный.

Напомним, что уравнения электрических машин — тензорные. Это значит, что запись их в различных координатных системах разная и подчиняется законам преобразования самих координатных систем. От выбранной системы координат зависят и выражения для токов, напряжений. Скалярные величины, такие, как мощность, момент (псевдоскаляр изменяется по знаку), от выбора системы координат не зависят.

Уравнения обобщенной машины записаны в осях q и d — неподвижных. Рассмотренные ранее трансформаторы и асинхронные машины было удобно рассматривать в этих осях.

Для выяснения вопроса о целесообразности выбора тех или иных осей проанализируем оба представления синхронных генераторов.

В первом случае (рис. 9.1), чтобы получить уравнения в неподвижных осях ротора, обмотки раскладываем по направлению, совпадающему с неподвижной якорной обмоткой и перпендикулярному ему (рис. 9.3).

В якорной обмотке a , так как она неподвижна, может наводиться только трансформаторная ЭДС, а ее будет создавать только ток обмотки az .

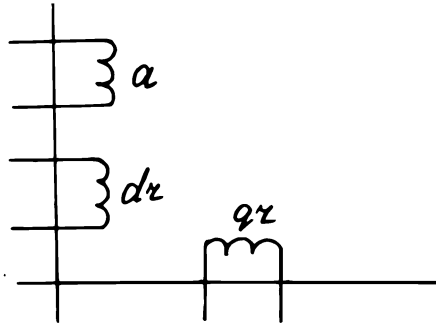


Рис. 9.3.

Относительно неподвижных осей ток $i_{dз}$ будет переменным с частотой, соответствующей скорости вращения ротора. Матрица Z будет

$$Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & dз & qз \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ dз \\ qз \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_a + L_{a\phi} & M_{\phi} & 0 \\ M_{\phi} & r_z + L_z p & +L'_z p \theta \\ -M'_z p \theta & -L'_z p \theta & r_z + L_z p \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.1)$$

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ dз \\ qз \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \\ & \cos \theta \\ & \sin \theta \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.2)$$

Кроме того, следует иметь в виду, что в цепи якоря имеется нагрузка $-Z_{nr}$. В результате матрица полного сопротивления однофазного генератора, работающего под нагрузкой Z' , будет:

$$Z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_a + L_{a\phi} p + Z_{nr} & M_{\phi} \cos \theta \\ M_{\phi} \cos \theta - M \theta \sin \theta & r_z + L_z p \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.3)$$

Ей соответствует граф (рис. 9.4), вершина которого U_z

и i_2 - напряжением и ток реальной роторной обмотки.

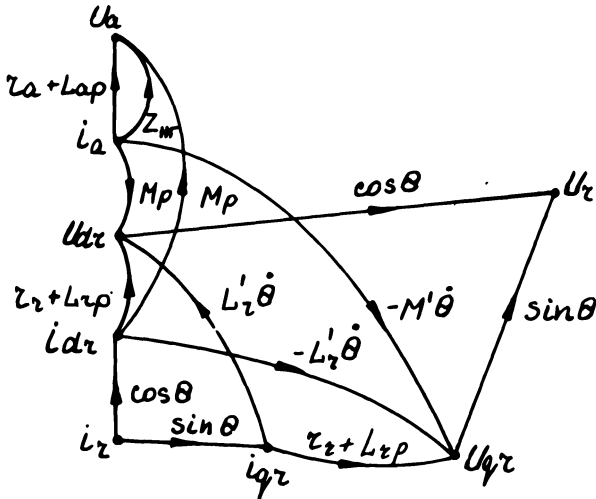


Рис. 9.4.

Наша задача определить выходное напряжение U_a в зависимости от тока i_2 или от напряжения U_2 . В последнем случае необходима инверсия графа, чтобы U_2 сделать источником. Если считать источником i_2 , получим:

$$U_a = i_2 \cdot M_p \cos \theta + i_a (\tau_a + L_a p + Z_m) \quad (9.4)$$

При разомкнутой якорной обмотке ток по ней протекать не будет ($i_a = 0$), и мы получим наводимую ЭДС, равную согласно (9.4):

$$U_a = i_2 M_p \cdot \cos \theta \quad (9.5)$$

Это режим холостого хода.

В установившемся режиме оператор $p = j\omega$, где ω равна угловой скорости вращения ротора $\rho\omega_2$. Тогда

$$U_a = i_2 j M \rho \omega_2 \quad (9.6)$$

т. е. $\theta = \omega t.$

Отсюда видно, что амплитуда наводимой ЭДС в якоре пропорциональна потоку возбуждения и скорости вращения. По фазе ЭДС сдвинута от потока на $\frac{\pi}{2}$ т.е. на 90° .

Якорная обмотка может быть и многофазной: двух, трех фазной.

Двухфазная обмотка. фазные обмотки сдвинуты на 90° (рис.9.5)

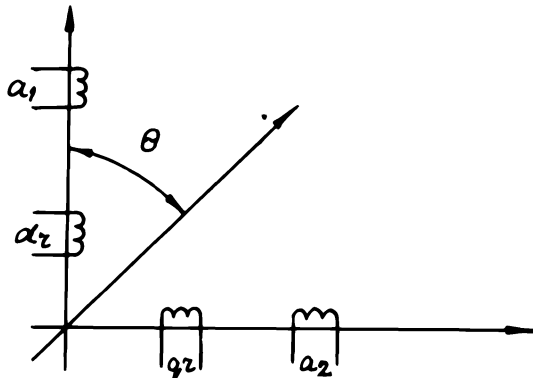


Рис. 9.5.

Так как якорные обмотки неподвижны, в них может наводиться только трансформаторная ЭДС : в обмотке a_1 - от тока i_{a2} , в обмотке a_2 - от тока i_{q2} .

При холостом ходе будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} U_{a1} &= j i_2 M_d \omega_2 \cdot \cos \theta = j X_{md} \cdot i_2 \cdot \cos \omega_2 t \\ U_{a2} &= j i_2 M_q \omega_2 \cdot \sin \theta = j X_{mq} \cdot i_2 \cdot \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} (9.7)$$

Трёхфазная обмотка (рис. 9.6)

$$\left. \begin{aligned} U_{a1} &= j \cdot i_2 M_1 \omega_2 \cdot \cos \theta \\ U_{a2} &= j i_2 M_2 \omega_2 \cdot \cos(\theta - 120^\circ) \\ U_{a3} &= j i_2 M_3 \omega_2 \cdot \cos(\theta - 240^\circ) \end{aligned} \right\} (9.8)$$

При симметричной обмотке $M_1 = M_2' = M_3$. Э. д. с. m - и фазы n - фазной обмотки

в установившемся режиме:

$$e_{am} = j\chi_m i_2 \cos \left[\frac{(n-1)\pi}{m} - \omega t \right] \quad (9.9)$$

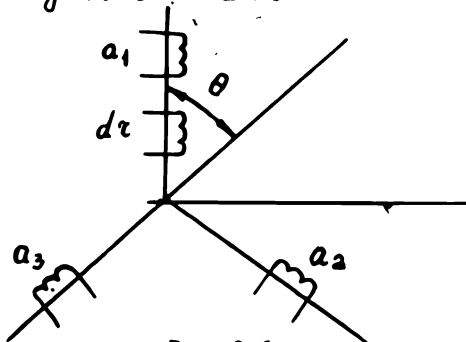


Рис. 9.6.

В режиме нагрузки ток, протекающий по якорной обмотке, будет оказывать влияние на наводимую ЭДС. Это явление называется реакцией якоря. Как видно из (9.4), она меняется с изменением характера нагрузки Z_{nr} , может быть $r j\chi_u - j\chi_c$. При расчете характеристик следует учесть, что ток i_2 сам является функцией напряжения, подводимого к обмотке возбуждения U_2 и для вычисления его ветви графа (рис. 9.4) $i_2 i_{q2} U_{q2} U_2$ и $i_2 i_{d2} U_{d2} U_2$ нужно инверсировать, после чего получим граф, изображенный на рис. 9.7.

$$U_a = e_2 \frac{\sum_i G_i D_i}{D} + i_a \frac{\sum_i G_i D_i'}{D} ;$$

(9.10)

$$G_i = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{r_2 + L_2 p} \cdot M_p ; \quad D_i = 1 ;$$

Подставив эти выражения в (9.10), получим:

$$U_a = U_c \frac{M_p [\operatorname{tg} \theta (r_2 + L_p) + L \dot{\theta}]}{(r_2 + L_2 p) \cos \theta - L_2 \dot{\theta} \sin \theta} + i_a \left\{ \frac{(r_a + L_2 p + Z_m) [\cos(\alpha + \theta) - L \dot{\theta} \sin \theta] + (M_p)^2 \cos \theta + M_p \dot{\theta} \sin \theta}{(r_2 + L_2 p) \cos \theta - L_2 \dot{\theta} \sin \theta} \right\} L \dot{\theta} \quad (9.11)$$

Параметры конкретной машины (M , L , τ) являются величинами постоянными. Выходное напряжение будет функцией скорости вращения, угла поворота ротора, напряжения питания, а также сопротивления нагрузки, которое может быть различным по характеру.

Аналогичным образом проводится расчет ЭДС каждой фазы многофазных генераторов.

В другом представлении синхронного генератора (рис. 9.8) неподвижные оси связаны с потоком возбуждения (полюсом), а якорная обмотка находится на роторе, вращается.

Возбуждение создает постоянный магнитный поток, с направлением которого обычно совмещается ось d . Любая роторная обмотка (явнополюсная или неявнополюсная) может быть разложена по осям " d " и " q ".

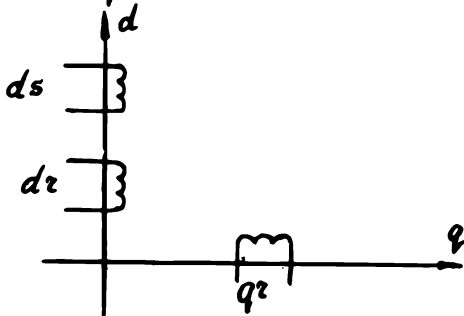


Рис. 9.8.

В результате постоянства тока i_s производная его $p i_s = 0$, генерированная ЭДС наводится только в обмотке q_2 .

Элементарная модель представлена на рис. 9.9.

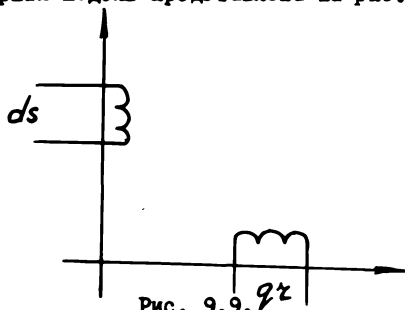


Рис. 9.9.

Матрица Z такой машины:

$$Z = \begin{array}{c} ds \\ qz \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline ds & qz \\ \hline r_z + 0 & 0 \\ \hline +M_p\theta & r_z + L_z p \\ \hline \end{array}$$

Знак "+", так как обмотка генераторная и вращается в другую сторону.

В установившемся режиме $p = +j\omega_z$.

На рис. 9.10 дан граф полного сопротивления однофазного синхронного генератора.

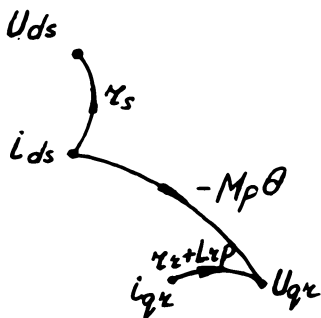


Рис. 9.10.

U_{ds} является источником, поэтому ветвь i_{ds} U_{ds} надо инверсировать (рис. 9.II).

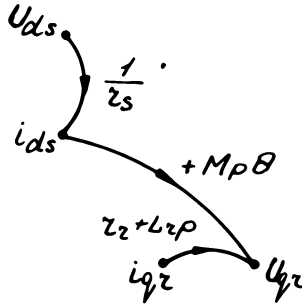


Рис. 9.II.

Отсюда $U_{qr} = i_{qr}(z_2 + L_{zr}) + U_{ds} + \left(\frac{1}{z_s} \cdot M p \theta\right)$

При холостом ходе, когда ток $i_{qr} = 0$ в генераторной обмотке будет наводиться э.д.с.

$$U_{qr} = \frac{U_{ds}}{z_s} M p \theta$$

$p\theta$ - скорость вращения ротора.

Здесь M - коэффициент пропорциональности между генерированной э.д.с. U_{qr} и $i_{ds} p\theta$. Если U_{ds} постоянна, то, казалось бы, и U_{qr} должна быть постоянной, тогда как известно, что синхронный генератор - машина переменного тока. Объяснение этого противоречия заключается в следующем.

Вышезаписанные уравнения даны в неподвижных осях " α " и " η ". Таким образом, магнитные потоки, созданные как ротором, так и статором, рассматриваются относительно неподвижного наблюдателя. Вспомним, что условием работы машины является неподвижность потоков друг относительно друга.

В случае однофазного синхронного генератора поток (ток) статора - постоянный. Постоянным (относительно неподвижного наблюдателя) должен быть и поток ротора. Но в отличие от статорной, обмотка ротора вращается со скоростью θ (ей соответ-

существует угловая скорость ω_2) и ток, протекающий в ней, должен иметь ту же частоту (поток, создаваемый этим током, должен вращаться с той же частотой, но в обратном направлении). Тогда поток ротора относительно неподвижного наблюдателя будет неподвижен. Таким образом, по проводникам обмотки будет протекать переменный ток с угловой частотой ω_2 . Мы видим, что в разных координатных осях получаются разные выражения для Э.Д.С. Они преобразуются по законам преобразования из одной в другую координатных систем. В этом же представлении можно записать уравнения многофазных синхронных генераторов.

ЭДС якорной обмотки будет также функцией коэффициента M , который зависит от типа роторной обмотки. Если например, обмотка неявнополюсная, ее можно аппроксимировать гладким ротором (проводники в катушке $q\alpha$ при повороте ротора будут другие, а катушка $q\alpha$ - неизменная), α коэффициент M - постоянен, от угла поворота ротора не зависит, величина же его определяется по формулам Крона в зависимости от типа обмотки.

Коэффициент M будет функцией угла поворота ротора относительно оси " α " или " q ", если ротор явнополюсный.

Двигательный режим, в первую очередь, характеризуется величиной вращающего электромагнитного момента, f определяемого из матричного уравнения $M_{21} = i \cdot L \cdot i_1$.

Синхронные двигатели, так же, как и генераторы, могут быть одно- и многофазными. Расчет характеристик производится по графу синхронной машины заданной фазности, но преобразованному к виду, соответствующему двигательному режиму, т.е. токи ротора должны быть стоками, а ЭДС обмоток статора и ротора - источниками. Рассмотрим двухфазный синхронный двигатель, так как он является и наиболее распространенным и наиболее общим с точки зрения математического описания.

Если статорная обмотка трех- или n -фазная, ее всегда можно привести к двухфазной, как это было показано при рассмотрении асинхронных машин.

Обмотка статора - двухфазная, а ротора - либо питается постоянным током, либо сам статор является постоянным магнетом. В свою очередь роторная обмотка может быть явнополюсной или неявнополюсной, с одинаковыми взаимоиנדуктивностями по осям α и q или с различными. Каждый из этих вариантов, конечно, жи-

лет на урзвнения выходных характеристик машины. Элементарная модель такого двигателя для установившегося режима изображена на рис. 9.1.

Удобно расположить обмотку постоянного тока на статоре, а двухфазную - на роторе (рис. 9.12).

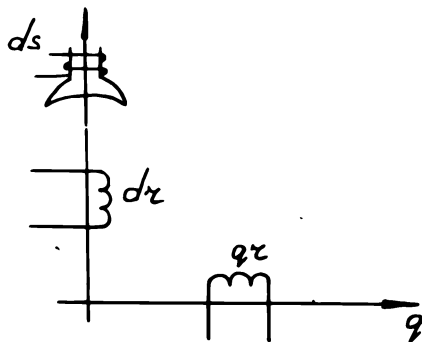


Рис. 9.12.

Матрица импеданса будет получена из матрицы обобщенной машины при следующих условиях:

а) катушка qs отсутствует;
 б) элементы тензора момента G будут иметь множитель, равный угловой скорости ротора, которая у синхронных машин соответствует частоте тока двухфазной обмотки. Появление этого множителя соответствует приведению вращающихся обмоток к неподвижным катушкам и $\omega L = X$;

в) при неподвижных роторных катушках ток в обмотках dr и qr должен быть постоянным (так как ток статора постоянный) в результате чего все производные тока равны нулю $p = 0$. Матрица Z для установившегося режима будет:

$$Z = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline ds & dr & qr \\ \hline ds & Z_s & \\ \hline dr & & Z_r & -X_r q \\ \hline qr & +X_m & +X_{rd} & Z_r \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (9.12)$$

Заметим, что в Z все X не содержат множителя jX . Это объясняется тем, что отсутствуют трансформаторные ЭДС. Соот-

ответствующий граф дан на рис. 9.13:

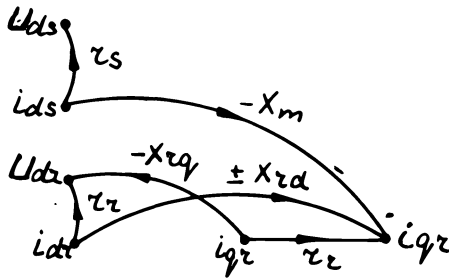


Рис. 9.13.

После инверсии получим граф (рис. 9.14).

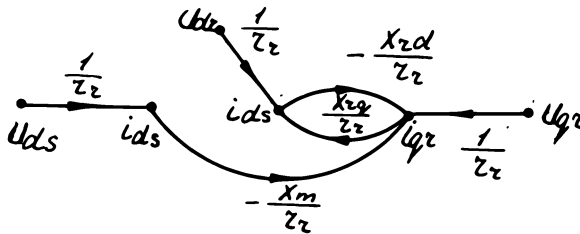


Рис. 9.14.

Вращающий момент, выраженный в синхронных ваттах, равен ωM , но в синхронных машинах скорость вращения ротора равна частоте питания, поэтому $\omega M = \omega_r M$.

А $\omega_r M$ — есть мощность. Величину же мощности мы условились считать инвариантом. Поэтому момент в синхронных эт можно вычислять в любой системе координат. Намного экономнее будет его вычисление в неподвижных осях (т.е. в осях элементарной машины).

Приложенные напряжения (на зажимах обмоток) в осях dz и qz будут иметь постоянные значения:

$$U = \begin{matrix} ds & dz & qz \\ U_{ds} & U_z \sin \delta & U_z \cos \delta \end{matrix}, \quad (9.13)$$

где δ - угол между осями (квадратурный) d, q и осями двухфазной обмотки (рис. 9.15.)

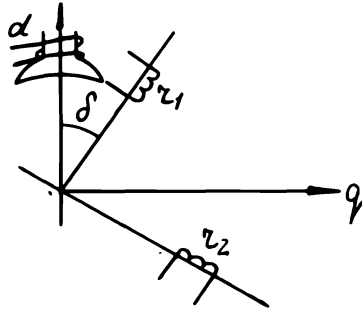


Рис. 9.15.

Угол δ зависит от нагрузки на валу, при х.х. нагрузка на валу отсутствует, угол δ равен нулю.

Тензор момента

$$G = \begin{array}{c} ds \\ dz \\ qz \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & ds & dz & qz \\ \hline ds & & & \\ dz & & & -L dz \\ qz & +M & +L qz & \\ \hline \end{array}$$

можно записать для установившегося режима

$$\omega G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & -X qz \\ \hline +X_m & +X dz & \\ \hline \end{array}$$

где все X включает в себя ωL .

Вращающий момент, определяемый по формуле $(i \cdot G \cdot i)$, будет

$$M_{\text{эл}} = [i_{dz} (X_{qz} - X_{dz}) i_{qz} - i_{qz} X_m i_{ds}] \frac{1}{\omega} \quad (9.14)$$

Из графа сопротивлений рассчитываем токи:

$$\left. \begin{aligned} i_{ds} &= \frac{U_{d2}}{Z_{ds}} \\ i_{dz} &= -\frac{U_{d2}}{D} \cdot \frac{X_m X_{qz}}{Z_s \cdot Z_z^2} + \frac{U_2 \sin \delta}{D} \cdot \frac{1}{Z} + \frac{U_2 \cos \delta X_{qz}}{D \cdot Z_z^2} \\ i_{qz} &= \frac{U_{d2} X_m}{D \cdot Z_s Z_z} - \frac{U_2 \sin \delta X_{dz}}{D \cdot Z_z^2} + \frac{U_2 \cos \delta}{D \cdot Z_z} \end{aligned} \right\} (9.15)$$

где D - детерминант графа $D = 1 + \frac{X_{dz} X_{qz}}{Z_z^2} = \frac{Z_z^2 + X_{dz} X_{qz}}{Z_z^2}$.

При неявнополюсном исполнении, когда воздушный зазор равномерный, проводимости по осям одинаковы и реактивный момент отсутствует.

$$X_{dz} = X_{qz} = X_z$$

Вращающий момент будет

$$M_{\text{вн}} = (i_{ds} \cdot X_m \cdot i_{qz}) \frac{1}{\omega}$$

В машине с выступающими полюсами, когда $X_{dz} \neq X_{qz}$, имеется и реактивная составляющая момента, которая существует при отсутствии питания, т.е. когда $i_{ds} = 0$ и $U_{d2} = 0$.

Двигатель, момент которого содержит только реактивную составляющую, называется реактивным.

В этом случае токи только роторные

$$\left. \begin{aligned} i_{dz} &= \frac{U_2 \sin \delta \cdot Z_z + U_2 \cos \delta X_{qz}}{Z_z^2 + X_{dz} X_{qz}} \\ i_{qz} &= \frac{-U_2 \sin \delta X_{dz} + U_2 \cos \delta Z_z}{Z_z^2 + X_{dz} X_{qz}} \end{aligned} \right\} (9.16)$$

При допущении, что активное сопротивление ротора много меньше реактивных сопротивлений, момент принимает выражение, принятое в учебниках по классической теории электрических машин:

$$f = \frac{U_k^2}{2\omega} \left(\frac{1}{X_{gk}} - \frac{1}{X_{dk}} \right) \sin 2\delta \quad (9.17)$$

Очевидно, что \max -величина момента при $\angle \delta = 45^\circ$. Если нагрузка на валу превышает f_{\max} , то двигатель останавливается.

В момент пуска, когда ротор неподвижен, а питание на обмотку подано, постоянная составляющая момента будет равна нулю, так как будут равны нулю X_m и X_k , содержащие величину скорости ротора. С точки зрения физики это легко объяснить. При неподвижном роторе двухфазная обмотка создает вращающееся магнитное поле, тогда как обмотка возбуждения питается постоянным током, образует постоянный магнитный поток. В результате взаимодействия этих полей получим переменный момент, средняя величина которого равна нулю. Отсутствие пускового момента является крупным недостатком таких двигателей.

Пуск двигателя осуществляется двумя способами:

1) Так называемый асинхронный пуск синхронного двигателя. В этом случае двигатель имеет специальную конструкцию - на роторе добавляется короткозамкнутая обмотка, которая обеспечивает пусковой момент, как у асинхронного двигателя, и разгон ротора до синхронной скорости. При этом синхронный момент отсутствует. Когда скорость ротора достигает синхронной, появляется синхронный момент (в том числе реактивный), а обмотка КЗ перестает работать, так как, вращаясь с одной скоростью с магнитным полем, в ней не наводятся ЭДС, нет токов и она не создает момента. На рис. 9.16 изображается механическая характе-

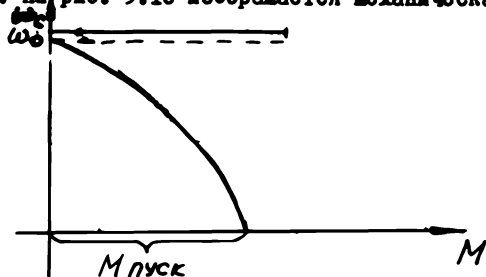


Рис. 9.16.

ристка синхронного двигателя с КЗ обмоткой на роторе. Однако наличие короткозамкнутой обмотки приводит к увеличению веса и габарита двигателя.

Как известно, ротор с КЗ обмоткой не может достичь синхронной скорости. Ротор будет иметь скорость, наиболее близкую к ω_c при х.х. Поэтому при пуске двигатель обычно не нагружают. При скорости ротора, близкой к синхронной, ротор "втягивается в синхронизм". Смысл этого явления заключается в следующем. В момент, когда скорость ротора достигает ω_{xx} , потоки ротора и статора будут вращаться друг относительно друга со скоростью вращения $\omega_c - \omega_{xx}$ (рис. 9.17).

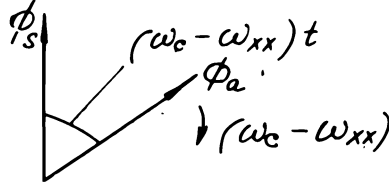


Рис. 9.17.

Момент, равный векторному произведению потоков, пропорционален синусу угла между ними, но угол будет величиной переменной.

Момент в этом случае также будет величиной переменной, но имеющей небольшую частоту (рис. 9.18).

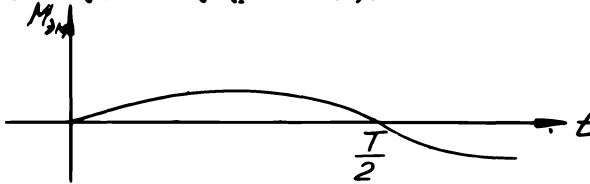


Рис. 9.18.

Здесь $T = \frac{2\pi}{\omega_c - \omega_{xx}}$. Момент будет в течение длительного времени иметь большую величину, и если это время будет достаточным, чтобы преодолеть инерцию ротора, раскрутить его до оборотов, равных синхронным, то осуществятся "втягивание и синхронизм". После этого будет создаваться постоянный синхронный момент.

2) Ротор двигателя раскручивается до синхронной скорости

с помощью стороннего двигателя, который затем отключается, а ротор будет вращаться под действием синхронного момента. В это время над двигателем нагружают, не превышая величины M_{max} .

Синхронные реактивные двигатели имеют ряд модификаций.

Основными типами синхронных реактивных двигателей в современных автоматических, счетно-решающих устройствах и приборах являются:

- 1) двигатели с распределенными обмотками статора;
- 2) редукторные двигатели;
- 3) двигатели с сосредоточенными обмотками статора.

Статор реактивного двигателя с распределенной обмоткой не отличается от статора, применяемого в обычных асинхронных и синхронных машинах. Вращающееся магнитное поле статора создается трехфазной или двухфазной обмоткой, питаемой соответственно трехфазной или однофазной системой напряжения. В последнем случае в цепь одной из обмоток включается конденсатор.

Роторы синхронных реактивных двигателей весьма различны по конструкции. Наибольшее распространение в настоящее время получил ротор (на рис. 9.13а), отличающийся от обычного короткозамкнутого ротора типа "беличьей клетки" асинхронного двигателя только впадинами и выступами на цилиндрической поверхности, с помощью которых образуются явно выраженные полюса, необходимые для работы реактивного двигателя в синхронном режиме. Короткозамкнутая обмотка ротора, как и в асинхронных машинах, обеспечивает создание вращающегося момента при пуске, поскольку синхронные реактивные двигатели собственного реактивного пускового момента не развивают. В синхронном режиме короткозамкнутая обмотка выполняет роль успокоительной системы при качании ротора.

Необходимо отметить, что в синхронных реактивных двигателях малой мощности весьма значительным является активное сопротивление обмотки статора.

Синхронные реактивные двигатели по сравнению с синхронными двигателями с обмоткой возбуждения на роторе проще по конструкции, дешевле и им не требуется источник возбуждения. Существенным недостатком этих двигателей является низкий $\cos \varphi$ и к.п.д.

Исследования, проведенные при определении оптимальной конструкции ротора, показали, что к.п.д. и $\cos \varphi$ могут быть повышены на 15–17% при использовании ротора, схематически изображенного на рис. 9.19,б, у которого в листах выштампованы овальные пазы, а впадины практически отсутствуют.

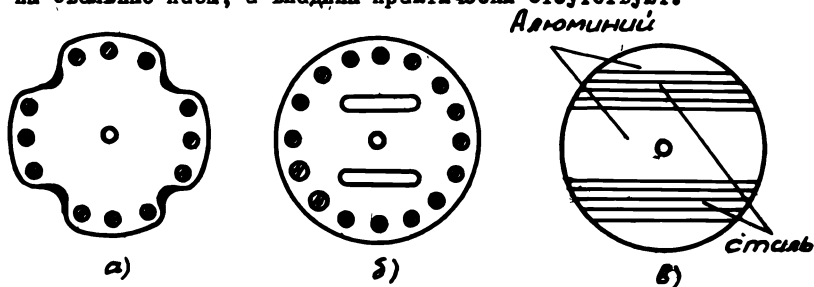


Рис. 9.19.

Весьма часто неравенство магнитных проводимостей ротора по продольной и поперечной осям создается за счет выполнения его из двух разнородных по магнитным свойствам материалов (рис. 9.19,в).

Реактивные редукторные двигатели (рис. 9.20) позволяют получить сколь угодно малую синхронную скорость вращения при питании от сети стандартной частоты без механического редуктора.

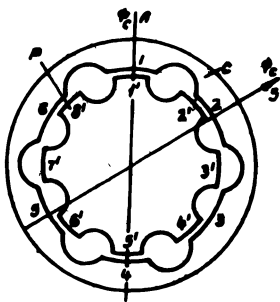


Рис. 9.20.

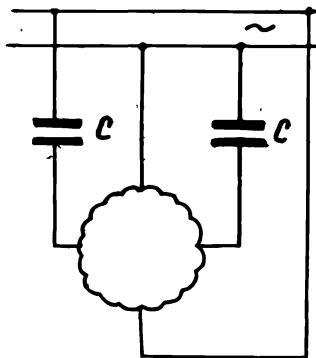


Рис. 9.21.

Принцип конструкции этих машин заключается в следующем. Статор и ротор двигателя - первый в виде кольца, а второй - в виде диска - набраны из листовой электротехнической стали. На внутренней поверхности статора и внешней поверхности ротора Z_c выштампованы полукруглые пазы. Число пазов статора и ротора Z_p различны. На статоре расположена двухполюсная спиральная обмотка, часть которой показана на чертеже. Если двигатель предназначен для работы от ключа-коллектора, то обмотка выполняется трехфазной (имеет три отпайки в трех точках, сдвинутых на 120°). Если же машина рассчитана на работу от однофазной сети, то от обмотки делают четыре равноудаленные отпайки и присоединяют ее к сети по схеме моста (рис. 9.21), причем для получения вращающегося поля включают конденсаторы.

Если ротор редукторного двигателя выполнить также в виде кольца, имеющего, кроме внешних, еще и внутренние пазы и зубцы, и поместить внутри его второй ротор с внешними зубцами, то можно получить дальнейшее уменьшение скорости, т.е. двойную редукцию. Установив несколько роторов, помещенных один в другой и подбирая соответственно числа зубцов, можно получить двигатель с редуцированием в несколько ступеней.

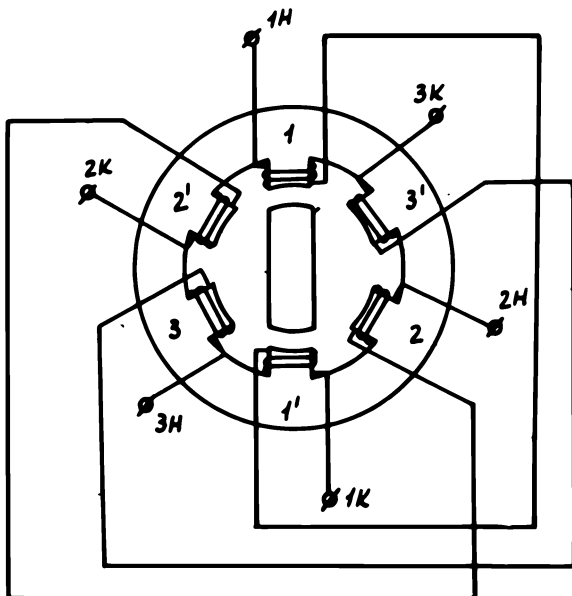


Рис. 9.22.

У реактивных двигателей со средоточенными обмотками статора ротор имеет форму, обычную для синхронных реактивных двигателей, статор же двигателя имеет несколько выступающих полюсов с уложенными на них обмотками (рис. 9.22). Каждая две обмотки, образующие обмотку управления, расположены диаметрально и соединены между собой так, что при подаче на зажимы обмотки управления постоянного напряжения образуются два полюса противоположной полярности (1 - 1 или 2 - 2 или 3 - 3).

Глава X. ДРУГИЕ ЭЛЕКТРОМАШИНЫЕ УСТРОЙСТВА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 1. Сельсины

Это устройство, название которого в переводе с английского языка означает "самосинхронизирующийся", служит для передачи на расстояние углового перемещения синфазно и синхронно.

Устройство синхронной связи состоит из датчика, одного или более приемников и линии электрической связи между ними. Таким образом, сельсины являются элементами системы и работают по крайней мере в паре.

Системы синхронной связи применяют в современных устройствах автоматки, телемеханики, счетно-решающей техники, автоматизированного электропривода и т.д.

Сельсины разделяются на следующие группы:

- 1) однофазные;
- 2) трехфазные силовые;
- 3) дифференциальные.

§ 2. Конструкция однофазных сельсинов

Однофазные сельсины по конструкции и наличию скользящего контакта можно разделить на:

- 1) контактные;
- 2) бесконтактные.

Контактные сельсины состоят из двух частей: статора и ротора. На статоре (или роторе) располагается однофазная обмотка возбуждения; на роторе (или на статоре) - обмотка синх-

хронизации. Конструктивно они схожи с синхронными машинами с электромагнитным возбуждением.

У однофазных сельсинов обмотка синхронизации выполнена по типу трехфазной, т.е. три отдельных обмотки смещены в пространстве на 120° и соединены в звезду, а наводимые в ней э.д.с. и токи, проходящие по ее отдельным обмоткам, имеют одну и ту же временную фазу. Поэтому правильнее было бы называть обмотку синхронизации трехлучевой.

Обмотка синхронизации всегда выполняется распределенной. Обмотка возбуждения может быть выполнена и распределенной и сосредоточенной. Так как при распределенной обмотке характеристика момента имеет меньшую крутизну, то для индикаторных сельсинов предпочтительнее оказывается обмотка возбуждения сосредоточенная. Число пар полюсов в сельсине выбирают равным единице ($P = 1$) для того, чтобы получить самосинхронизацию в пределах одного оборота.

Обмотка возбуждения сельсина создает пульсирующий магнитный поток. Этот поток, проходя по магнитопроводу сельсина, пересекает лучи обмотки синхронизации и наводит в них э.д.с., зависящие от угла поворота ротора. Так как при повороте ротора взаимдуктивность между обмоткой возбуждения и обмоткой синхронизации плавно изменяется по закону косинуса, то в лучах обмотки синхронизации будут находиться э.д.с., пропорциональные косинусу угла поворота ротора.

Принцип работы сельсина не зависит от места расположения каждой из обмоток: на статоре или на роторе. Однако в настоящее время наибольшее распространение получили сельсины с обмоткой возбуждения на роторе и с обмоткой синхронизации на статоре (рис. 10.1). У них меньше контактных колец и щеток,

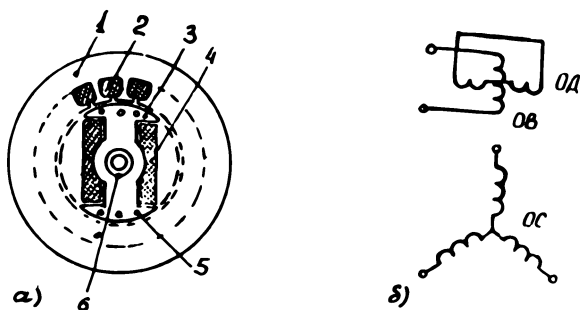


Рис. 10.1.

что обеспечивает более высокую надежность, меньший момент трения и объем сельсина. В цепи передачи сигнала - линии связи обмоток синхронизации - отсутствуют скользящие контакты. Такая конструкция обеспечивает более простое выполнение на роторе демпферной обмотки.

На рис. 10.1,б показана электрическая схема сельсина, где ОВ - однофазная обмотка возбуждения, ОС - трехфазная обмотка синхронизации, ОД - демпферная обмотка.

Скользящие контакты значительно снижают надежность контактных сельсинов. Поэтому в последние годы наибольшее распространение получили бесконтактные сельсины двух типов:

- а) с униполярным возбуждением ротора со стороны статора,
- б) с переходным кольцевым трансформатором.

В бесконтактном сельсине с униполярным возбуждением контактный подвод тока заменен бесконтактным подводом магнитного потока. На рис. 10.2 представлена схема конструкции такого бесконтактного сельсина.

На статоре расположен пакет основного магнитопровода 1, в пазах которого находится трехфазная обмотка синхронизации 2. Обмотка возбуждения 3, выполненная в виде двух катушек, также размещена на статоре. По краям статора расположены два торондальных магнитопровода 4. Они магнито замыкаются между собой пакетами внешнего магнитопровода 5, которые запрессованы в цилиндрический корпус сельсина 6.

Основной и торондальные магнитопроводы набраны из изолированных листов электротехнической стали, шихтованных по поперечной оси сельсина. Чтобы каждый лист не был короткозамкнутым витком на пути основного потока возбуждения, вводимого по продольной оси, в нем делают радиальный разрез. Сборка листов в пакет веерная, что обеспечивает равномерную магнитную проводимость пакетов по любой оси. Пакеты внешнего магнитопровода шихтованы по продольной оси сельсина. Ротор сельсина 7 состоит из двух пакетов, разделенных немагнитным промежутком 8. Каждый пакет собран из изолированных листов электротехнической стали, причем плоскости листов ротора параллельны продольной оси сельсина. Немагнитный промежуток обычно выполнен из пластмассы, в которую запрессованы листы пакетов ротора. Иногда в качестве немагнитной прослойки применяют

сплав силумин.

Принцип действия бесконтактного сельсина легко понять, проследив путь магнитного потока Φ .

Пусть в данный момент времени ток в обмотке возбуждения 3 протекает так, как это указано на рис. 10.2. Тогда силовые ли-

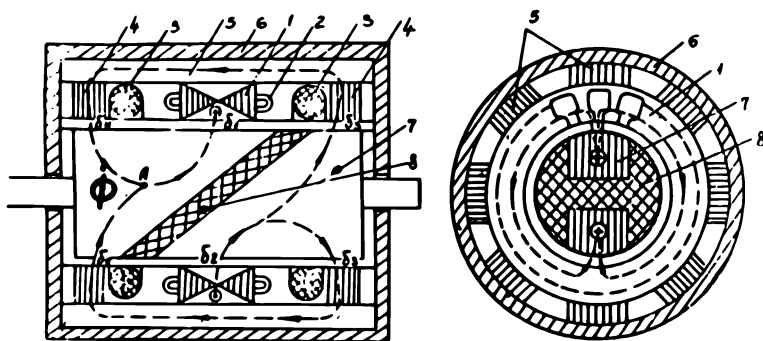


Рис. 10.2.

нии магнитного поля будут направлены слева направо. Выберем в левой части ротора точку А и последним из нее путь магнитных силовых линий. Поток, выйдя из точки А, встречает на пути немагнитный промежуток 8, меняет направление и через воздушный зазор δ_1 входит в пакет магнитопровода 1, проходит по нему путь 180° и через воздушный зазор δ_2 попадает в правый пакет ротора. Отсюда поток раздваивается и через зазоры δ_3 проходит в правый тороидальный магнитопровод 4. Далее поток по пакетам внешнего магнитопровода 5 проходит в левый тороидальный магнитопровод 4 и, пройдя через воздушный зазор δ_4 , вновь поступает в левый пакет ротора, где и замыкается в точке А. Проходя по основному магнитопроводу 1, поток возбуждения сцепляется с обмоткой синхронизации и наводит в ней ЭДС.

При повороте ротора с ним поворачивается и магнитный поток, т.е. потокосцепление обмотки синхронизации с потоком возбуждения изменяется по такому же закону, как и у контактного сельсина. Поэтому теоретический анализ принципа работы этих сельсинов в системах синхронной связи не отличается от анализа работы контактных сельсинов.

Сравнивая на рис. 10.1 и 10.2 пути магнитных потоков в контактном и бесконтактном сельсинах, нетрудно заметить, что у бесконтактного сельсина магнитный поток преодолевает в два раза больше воздушных зазоров, а так как для преодоления воздушного зазора затрачивается значительная часть МДС обмотки возбуждения, то бесконтактные сельсины за счет обмотки возбуждения по габаритам и весу несколько больше, чем контактные, выполненные на тот же полезный момент.

Бесконтактные сельсины с переходными трансформаторами состоят из двух частей: машинной и трансформаторной, связанных только электрически (рис. 10.3). Машинная часть не отличается от контактного сельсина. На статоре I расположена обмотка синхронизации 2, на роторе 3 - обмотка возбуждения 4 (иногда и демпферная). Трансформаторная часть представляет со-

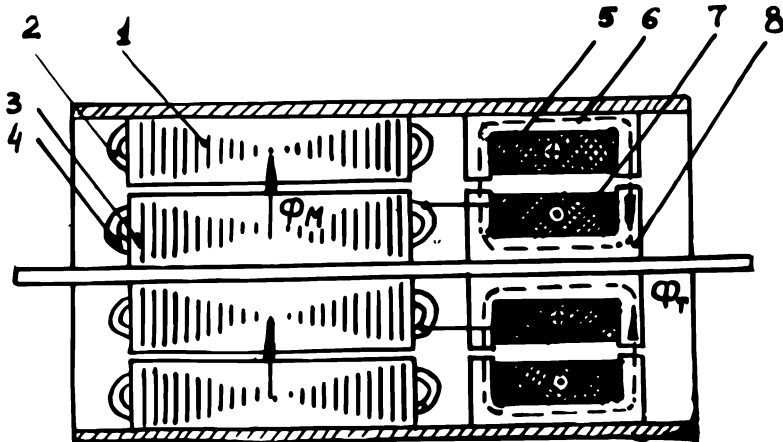


Рис. 10.3.

бой двухобмоточный кольцевой трансформатор. Обмотки статора 5 с ферромагнитным сердечником 6 и роторная 7 с ферромагнитным сердечником 8 выполнены в виде сосредоточенных катушек, магнитные оси которых совпадают с направлением вала. Вследствие концентричного расположения при повороте ротора взаимоиндуктивность обмоток не меняется. При подаче на зажимы статорной обмотки трансформатора переменного напряжения с его роторной обмотки снимается неизменное по амплитуде вторичное напряжение. Это напряжение по проводам подается на обмотку возбуждения машинной части. Таким образом, удастся устранить скользящие контакты.

При двухкратной передаче энергии через воздушный зазор в трансформаторной и машинной частях увеличивается мощность возбуждения по сравнению с контактными сельсинами, а также длина сельсина за счет переходного трансформатора.

Бесконтактные сельсины обоих типов имеют более сложную конструкцию по сравнению с контактными и их сложность несколько выше. Однако высокая надежность этих сельсинов окупает их недостатки. Кроме того, бесконтактные сельсины имеют меньший момент трения на валу, чем контактные с трением в скользящем контакте.

Дифференциальные сельсины отличаются от выше рассмотренных однофазных контактных сельсинов только тем, что у них на статоре и роторе обмотки трехлучевые.

Трехфазные сельсины имеют трехфазную обмотку возбуждения.

Режимы работы сельсинов

В индикаторном режиме сельсины используются в том случае, если необходимо передать на расстояние положение какого-либо регулируемого объекта.

Обычно работают два одинаковых сельсина, датчик СД и приемник СП (в основном - однофазные). На рис. 10.4 представлена схема однофазных сельсинов в индикаторном режиме. Поворот ротора датчика задает угол перемещения и стопорится. Одинаковые токи возбуждения наводят трансформаторные э.д.с. в лучах роторов датчика и приемника. Ввиду идентичности роторных обмоток

СД и СП, ЭДС. в лучах будут функциями лишь углов поворота роторов. В замкнутых линиях связи и обмотках ротора потечет ток, созданный в результате наложения токов, вызванных э.д.с. СД и СП. Они противоположны по направлению и если $O_d = O_n$, то результирующие токи отсутствуют.

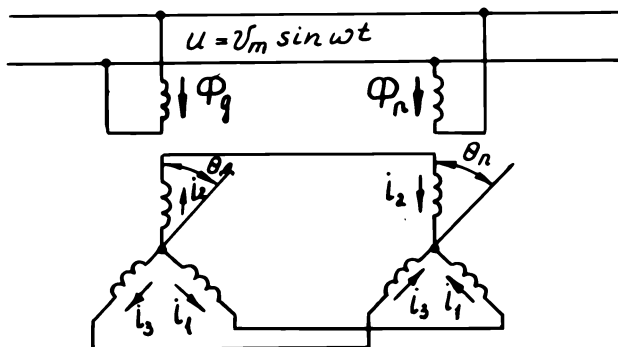


Рис. 10.4.

Все ЭДС и токи в лучах ротора имеют одну частоту, поэтому их можно сложить и результирующая величина будет зависеть от угла поворота ротора.

Схема Элементарной модели этой системы приведена на рис. 10.5.

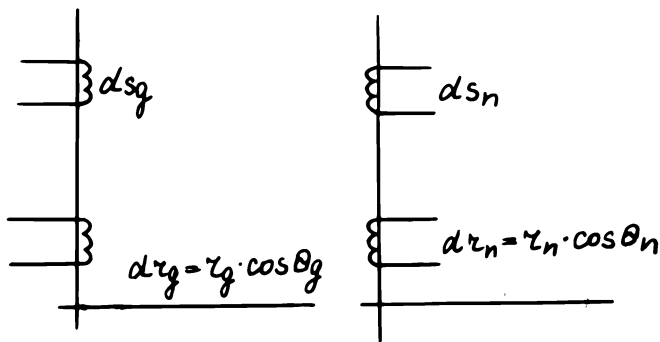


Рис. 10.5.

Так как здесь отсутствуют генераторные э.д.с., то достаточно взять проекции результирующей роторной обмотки на ось d .

Матрица Z будет

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & ds_g & dr_g & ds_n & dr_n \\
 ds_g & \zeta_{gs} + L_{gs} p & M_g \cos \theta_g p & & \\
 dr_g & M_g \cos \theta_g p & \zeta_{rg} + L_{rg} p & & \\
 ds_n & & & \zeta_{ns} + L_{ns} p & M_n \cos \theta_n p \\
 dr_n & & & M_n \cos \theta_n p & \zeta_{rn} + L_{rn} p
 \end{array} \\
 \text{(10.1)}
 \end{array}$$

После соединения роторов ток будет один - i :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 ds_g \quad dr \quad ds_n \\
 C = \begin{array}{ccc}
 ds_g & 1 & \\
 dr & & 1 \\
 ds_n & & & 1 \\
 dr_n & & -1 &
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{(10.2)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 ds_g \quad dr \quad ds_n \\
 Z' = \begin{array}{ccc}
 ds_g & \zeta_{gs} + L_{gs} p & M_g \cos \theta_g p & 0 \\
 dr & M_g \cos \theta_g p & \zeta_{gs} + \zeta_{ns} (L_{gs} + L_{ns}) p & M_n \cos \theta_n p \\
 ds_n & 0 & -M_n \cos \theta_n p & \zeta_{ns} + L_{ns} p
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{(10.3)}
 \end{array}$$

В установившемся режиме $p = j\omega$. И учитывая, что СД и СП абсолютно одинаковые ($\zeta_{sg} = \zeta_{sn}$ и т.д.), получим:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 ds_g \\
 Z' = \begin{array}{ccc}
 ds_g & \zeta_s + jX_s & jX_m \cos \theta_g \\
 dr & jX_m \cos \theta_g & 2\zeta_r + 2jX_r \\
 ds_n & 0 & -jX_m \cos \theta_n & \zeta_s + jX_s
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{(10.4)}
 \end{array}$$

В каждом из сельсинов создается электромагнитный момент. В результате взаимодействия статорного тока и поперечной составляющей роторного.

$$f_n = (i_{dsn} \cdot l_2 \cdot \sin \theta_n) \frac{\chi_m}{\omega} \quad \text{и} \\ f_g = (i_{dsg} \cdot l_2 \cdot \sin \theta_g) \frac{\chi_m}{\omega} \quad (10.5)$$

Токи рассчитываются из Z' и U'

$$U' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline U_{ds} & & U_{ns} \\ \hline \end{array} \quad (10.6)$$

Удобно это сделать из графовой модели, данной на рис.10.6.

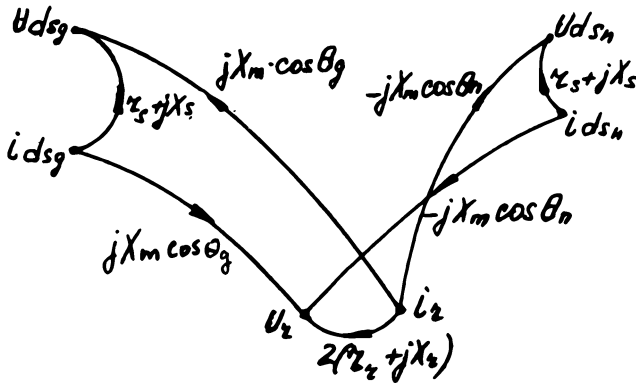


Рис. 10.6.

Граф необходимо инверсировать, так как U являются источниками, после чего получим граф, данный на рис. 10.7 ($U_x = 0$). По правилу Мэйсона находим i_{dsg} , i_{dsn} и i_2 . Детерминант графа будет

$$D = 1 + \frac{\chi_m^2 \cos^2 \theta_n}{(r_s + jX_s)^2 (r_2 + jX_2)} + \frac{\chi_m^2 \cdot \cos^2 \theta_g}{(r_s + jX_s)^2 (r_2 + jX_2)}$$

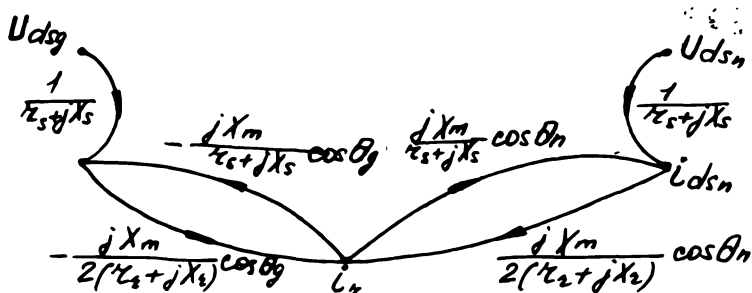


Рис. 10.7.

$$U_{dsn} = U_{dsg} = U$$

$$i_{dsg} = \frac{U}{D} \cdot \frac{1 + \frac{X_m^2 \cdot \cos \theta_n}{(X_s + jX_s)(X'_s + jX'_s)}}{X_s + jX_s} + \frac{U}{D} \cdot \frac{jX_m}{2(X'_s + jX'_s)} \cdot \frac{-jX_m \cos \theta_g}{(X_s + jX_s)^2} =$$

$$= \frac{U}{D} \left\{ \frac{(X_s + jX_s)2(X'_s + jX'_s) + X_m^2 \cos \theta_n + X_m^2 \cos \theta_g}{2(X_s + jX_s)^2(X'_s + jX'_s)} \right\}$$

$$i_{dsn} = \frac{U}{D} \cdot \frac{1}{X_s + jX_s} \left[1 + \frac{X_m^2 \cos^2 \theta_g}{(X'_s + jX'_s)2(X'_s + jX'_s)} \right] + \frac{U}{D} \cdot \frac{1}{X_s + jX_s} \cdot \frac{-jX_m jX_m \cos \theta_n}{2(X_s + jX_s)(X'_s + jX'_s)}$$

$$= \frac{U}{D} \left\{ \frac{(X_s + jX_s)2(X'_s + jX'_s) + X_m^2 \cos^2 \theta_g + X_m^2 \cos \theta_n}{2(X_s + jX_s)^2(X'_s + jX'_s)} \right\}$$

$$i_z = \frac{U}{D} \cdot \frac{1}{X_s + jX_s} \cdot \frac{-jX_m \cos \theta_g}{2(X'_s + jX'_s)} - \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{X_s + jX_s} \cdot \frac{jX_m \cos \theta_n}{2(X'_s + jX'_s)} =$$

$$= \frac{U}{D} \frac{jX_m (\cos \theta_n - \cos \theta_g)}{2(X_s + jX_s)(X'_s + jX'_s)}$$

$$f = \operatorname{Re} \{ i_{dsg}^* \cdot i_z \cdot \sin \theta_g + i_{dsn}^* \cdot i_z \cdot \sin \theta_n \} \frac{X_m}{\omega}$$

Разность $\theta_A - \theta_n = \alpha$ называется углом рассогласования.

Положим, что в начальный момент времени роторы СД и СП были расположены так, что $\theta_A = \theta_n = 0$. Затем ротор датчика повернули на θ_d . Этот угол будет углом рассогласования.

Тогда

$$f = - \frac{U^2 [A + B(1 + \cos \alpha)] (1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{C + D(1 + \cos \alpha) + K(1 + \cos^2 \alpha)}, \quad (10.7)$$

где А, В, С, D и К - постоянные, зависящие от конструкции машины.

Знак минус показывает, что момент будет стремиться датчик вернуть в исходное положение, но он закреплен и тогда поворачивается в сторону поворота СД и ротор СП. Из формулы (10.7) следует, что при $\alpha = 0$ (отрабатывается угол) вращающий момент равен нулю. При $\alpha = 90^\circ$ момент будет максимальным.

$$f_{\max} = \frac{U^2 (A + B)}{C + D + K} \quad (10.8)$$

В первом приближении вращающий электромагнитный момент (называется моментом синхронизации) будет синусоидально зависеть от угла рассогласования (рис. 10.8).

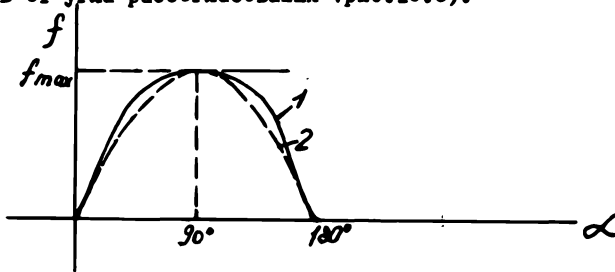


Рис. 10.8.

Кривая 1 - синусоида; кривая 2 - реальный момент

Если на валу сельсинов имеется нагрузка $f_{нг}$, то для поворота ротора СП необходимо существование такого угла рассогласования $\alpha_{нг}$, который бы обеспечивал синхронизирующий

момент по крайней мере не меньшей величины, чем f_{nr} . СП будет отрабатывать угол с ошибкой.

Сельсины характеризуются:

1. Удельным синхронизирующим моментом. (Это величина момента на 1° рассогласования)

$$f_{уд} = \left(\frac{df}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \quad (10.9)$$

2. Динамическим синхронизирующим моментом (момент, развиваемый ротором при вращении n об/мин).

При работе сельсинной пары угол рассогласования при отсутствии нагрузки на валу теоретически должен быть равен нулю. Однако имеется ряд причин, которые вызывают на СП момент сопротивления, и, следовательно, всегда есть угол стационарной ошибки α_0 . Этими причинами является трение в подшипниках, трение щеток о кольца, неточность изготовления статора, ротора, обмоток и т.д. В зависимости от величины статической угловой погрешности сельсины делятся на 3 класса:

1-й класс - датчики	$0^\circ \pm 0,25^\circ$	приемники	$0^\circ \pm 0,75^\circ$
2-й класс	$\pm 0,25^\circ \pm 0,5^\circ$	"	$\pm 0,75^\circ \pm 1,5^\circ$
3-й	$\pm 0,5^\circ \pm 1,0^\circ$	"	$\pm 1,5^\circ \pm 2,5^\circ$

В случае многократного приема мощность СД должна быть в n раз больше, если есть n одинаковых СП.

Схема трансформаторного режима дана на рис. 10.9.

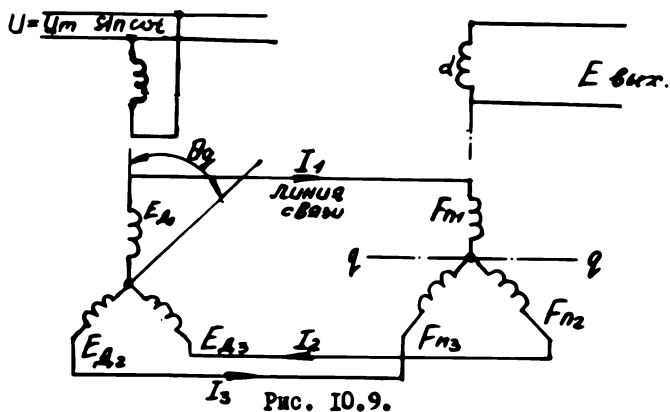


Рис. 10.9.

Этот режим применяется в тех случаях, когда на валу имеется большой момент сопротивления ($\neq M_r$). В трансформаторном режиме ротор СП стопорится, а с обмотки возбуждения СП снимается выходная ЭДС. Ее небольшая мощность затем усиливается и подается на ОУ исполнительного двигателя, который поворачивает объект на угол, заданный СД, и одновременно уменьшает угол рассогласования.

Пусть в начальный момент роторы СД и СП занимали положение, соответствующее $\theta_{\text{д}} = \theta_{\text{п}} = 0$. Затем на заданный угол α поворачивает ротор СД. На этот угол повернется и магнитный поток трехлучевой обмотки СД.

Но по трехлучевой обмотке СП протекают те же токи противоположного направления, поэтому поток ее также повернется на угол α , только в другую сторону. Этот переменный (с частотой питания) поток индуцирует ЭДС в выходной обмотке СП. Он будет пропорционален $\sin \alpha$. Крутизна кривой характеризуется удельной выходной ЭДС

$$E_{\text{уд}} = \left(\frac{dE_{\text{вых}}}{d\theta} \right)_{\theta=0} \quad (10.10)$$

Получить уравнение выходной характеристики можно из графа силовой пары с инверсной ветвью $i_{\text{дсг}} U_{\text{дсг}}$ и $i_{\text{дсн}} U_{\text{дсн}}$, а $U_{\text{дсн}}$ остается выходом (рис. 10.10) $\theta_{\text{п}} = 0$.

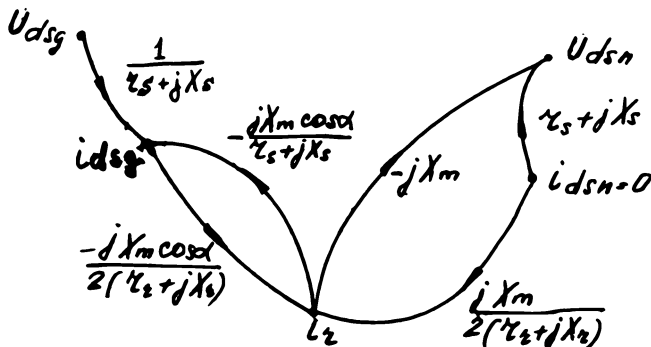


Рис. 10.10.
218

$$U_{gsn} = \frac{U_{dsq}}{D} \cdot \frac{1}{r_s + jX_s} \cdot \frac{jX_m \cos \alpha (-jX_m)}{2(r_2 + jX_2)}$$

$$D = 1 + \frac{X_m^2 \cos^2 \alpha}{2(r_s + jX_s)(r_2 + jX_2)}$$

$$U_{dsn} = U_{dsq} \frac{-X_m^2 \cos \alpha}{2(r_s + jX_s)(r_2 + jX_2) + X_m^2 \cos^2 \alpha} \quad (10.11)$$

Дифференциальные сельсины применяют при решении задачи сложения или вычитания угловых перемещений. В этом случае линейной связью соединяются между собой трехфазные статорные и роторные обмотки ДС с обмотками синхронизации двух СД, по схеме, изображенной на рис. 10.11.

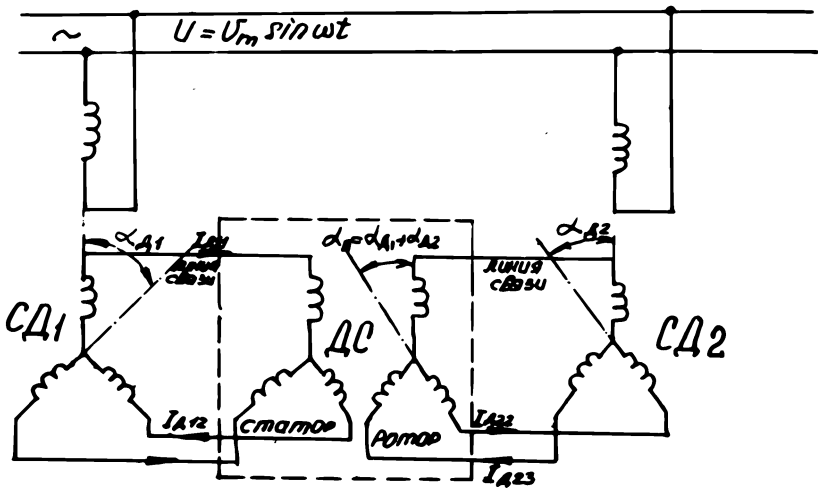


Рис. 10.11.

При повороте ротора CD_1 на угол α_1 на этот же угол повернется и поток его обмотки синхронизации, а также поток той обмотки ДС, которая соединена с ней (правда в противоположную сторону). Повернув на угол α_2 ротор CD_2 повернется и поток другой трехлучевой обмотки ДС на угол α_2 . Если датчики поворачивали в одну сторону, то и потоки повернутся в одну сторону (рис. 10.12,а). В ДС два потока не соосны, поэтому ротор будет вращаться до тех пор, пока они не совпадут по направлению и вращающий момент не будет равен нулю. При этом ротор отработывает угол, равный разности $|\alpha_1 - \alpha_2|$. При повороте датчиков в разные стороны ДС отработывает сумму углов $\alpha_1 + \alpha_2$. (рис. 10.12,б).

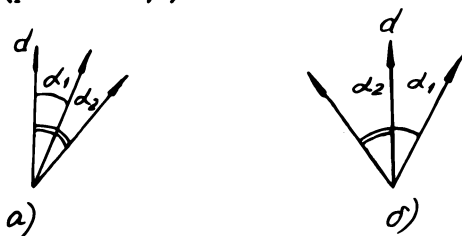


Рис. 10.12.

§ 3. Поворотные трансформаторы

Эти электромашинные устройства предназначены для отработки функциональных зависимостей. Они широко применяются в устройствах, предназначенных для решения геометрических и тригонометрических задач, связанных с построением треугольников, преобразованием координат и векторов.

Поворотные трансформаторы по конструкции и наличию скользящего контакта можно разделить на контактные и бесконтактные.

Поворотный трансформатор состоит из двух основных частей: неподвижной — статора 1 и подвижной — ротора 2.

Как статор, так и ротор собирают из листов электротехнической стали или пермаллоя — материала с малым магнитным сопротивлением, листы отделяют друг от друга изоляционным лаком.

Материал выбирают в зависимости от назначения и места поворотного трансформатора в схеме. Поворотные трансформаторы, работающие на входе схем и получающие питание непосредственно от сети с неизменной величиной напряжения, выполняют с магнитопроводом статора и ротора из электротехнической стали. Поворотные трансформаторы, работающие в середине или на выходе схем, выполняют с магнитопроводом из пермаллоя, так как их выходные напряжения могут меняться в широких пределах.

Изменение напряжения влияет на степень насыщения магнитопровода, а значит, и на величину магнитного сопротивления и параметры машины. Для предотвращения изменения параметров машины и связанных с этим ошибок преобразования магнитное сопротивление магнитопровода должно быть при любых режимах значительно меньше постоянного магнитного сопротивления воздушного зазора между статором и ротором. Данное условие соблюдается при использовании пермаллоя.

В пазах статора и ротора размещено по две распределенных обмотки, сдвинутых между собой на 90° (электрических). Пространственное размещение обмоток показано на рис. 10.14: C_1C_2 - главная обмотка статора; C_3C_4 - вспомогательная (квадратурная) обмотка статора; P_1P_2 и P_3P_4 - синусная и косинусная обмотки ротора. Обмотки статора выполняются обычно одинаковыми, т.е. с одинаковым числом витков, одним сечением обмоточного провода и одной схемой обмотки. Одинаковыми выполняются и роторные обмотки. Отсчет угла поворота ротора 0 производится от оси синусной обмотки до оси вспомогательной обмотки статора.

Концы статорных обмоток подводятся непосредственно к соединительным колодкам. Концы роторных обмоток в поворотных трансформаторах контактного типа выводятся через токосъемное устройство (четыре контактных кольца-щетки).

В бесконтактных поворотных трансформаторах напряжение с обмоток ротора может сниматься двумя способами:

- 1) с помощью спиральных пружинок;
- 2) с помощью переходных кольцевых трансформаторов (по типу бесконтактных сельсинов).

В первом случае угол поворота ротора ограничен в пределах 1,8-2 оборота, во втором - не ограничен. Устранение сколь-

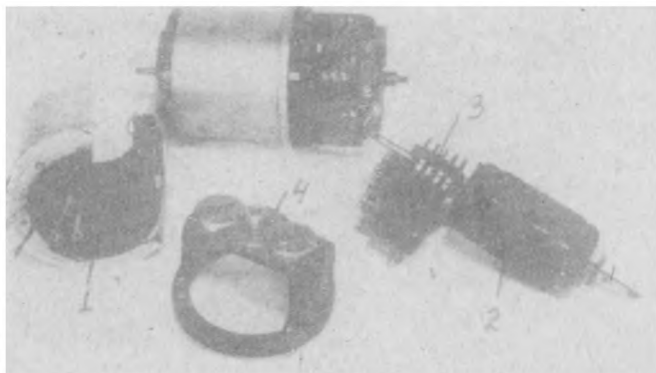


Рис. 10.13.

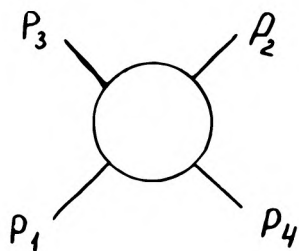
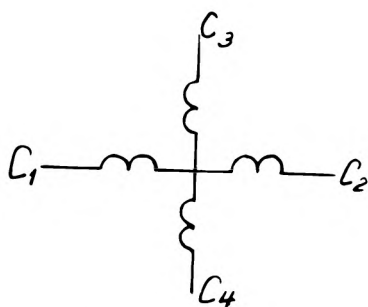


Рис. 10.14.

зящих контактов повышает надежность и точность поворотных трансформаторов.

Имеются обращенные конструкции поворотных трансформаторов, в которых синусная и косинусная обмотки расположены на статоре, вспомогательная обмотка замкнута накоротко, а концы главной обмотки выведены через два скользящих контакта или один переходный трансформатор.

Конструкция поворотных трансформаторов и технология изготовления должны обеспечивать при повороте ротора изменение взаимной индуктивности между обмотками статора и ротора по закону, наиболее близкому к идеальной синусоиде. Допускаемые погрешности во многих случаях не должны превышать 0,01%, т.е. ординаты действительной кривой изменения взаимной индуктивности от угла поворота в любой точке не должны отличаться от ординат идеальной синусоиды более чем на 0,0001 ее амплитудного значения. Это достигается при выполнении ряда специальных требований:

1. Схему статорных обмоток выбирают такой, при которой обеспечивается закон распределения м.д.с. в зазоре, наиболее близкий к синусоидальному; схему роторных обмоток - такой, при которой обеспечивается уничтожение высших гармоник ЭДС.

2. Для уменьшения пульсаций магнитного потока при повороте ротора, вызванных зубчатыми поверхностями статора и ротора, производят скос пазов статора (или ротора) на 1-1,5 зубцовых деления.

3. Чтобы обеспечить синусоидальность распределения индукции в зазоре при синусоидальном распределении МДС, магнитопровод поворотных трансформаторов выполняют венасимметричным.

4. С целью обеспечения равенства магнитных проводимостей по осям машины сборку пакетов статора и ротора производят веерным способом с учетом магнитной анизотропии листов.

5. Для обеспечения равномерности зазора устанавливают жесткие допуски на эксцентриситет расточки статора и ротора.

Поворотные трансформаторы в основном являются двухполюсными машинами. Однако, в системах дистанционной передачи угла высокой точности применяют и многополюсные поворотные трансформаторы - с электрической редукцией. Точность преобразования угла в напряжение у таких поворотных трансформаторов может быть выше, так как ослабляется влияние технологических погрешностей

в результате усреднения ЭДС наведенных под всеми $2l$ полюсами. Следует иметь в виду, что у многополюсных поворотных трансформаторов выходная характеристика должна рассматриваться как функция угла в электрических градусах $\theta_{эл} = p\theta$.

Поворотные трансформаторы всех типов изготавливают в настоящее время с номинальной частотой не ниже 400 гц.

На рис. 10.15 представлена схема поворотного трансформатора.

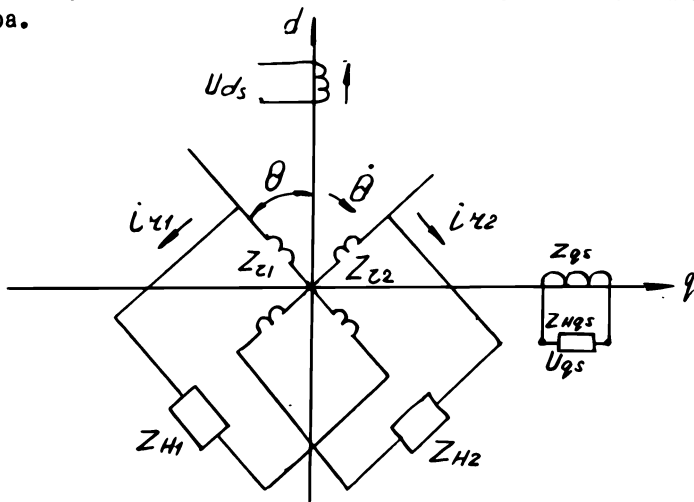


Рис. 10.15.

Обмотка qs может работать в разных режимах (разомкнута, замкнута накоротко, замкнута на нагрузку, может подводиться питание или нет). Переход элементарной машины к реальной осуществляется с помощью преобразования токов

$$\left. \begin{aligned} i_{dr} &= i_{r1} \cdot \cos \theta + i_{r2} \sin \theta \\ i_{dq} &= -i_{r1} \cdot \sin \theta + i_{r2} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Индексы 1 и 2 относятся к реальной машине. Статорные ток остаются без изменения. Случай $\theta=0$ соответствует элементарной машине. Поэтому $Z_{r1} = Z_{ds}$ и $Z_{r2} = Z_{qs}$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} U_{r1} &= \frac{\alpha + f c}{1 - d c} U_{ds} + \frac{\beta + k c}{1 - d c} U_{qs} \\ U_{r2} &= \frac{f + a d}{1 - d c} U_{ds} + \frac{k + \beta d}{1 - d c} U_{qs} \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho \frac{M_d}{Z_{ds}} \cos \theta}{1 - Z_1 \cos \theta + Z_2 \sin \theta} \\ f &= \frac{\rho \frac{M_d}{Z_{ds}} \sin \theta}{1 - Z_3 \sin \theta - Z_4 \cos \theta} \\ c &= \frac{Z_3 \cos \theta - Z_4 \sin \theta}{1 - Z_1 \cos \theta + Z_2 \sin \theta} \\ d &= \frac{Z_1 \sin \theta + Z_2 \cos \theta}{1 - Z_3 \sin \theta - Z_4 \cos \theta} \\ \beta &= \frac{-\rho \frac{M_d}{Z_{qs} + Z_{ms}} \sin \theta}{1 - Z_1 \cos \theta + Z_2 \sin \theta} \\ k &= \frac{\rho \frac{M_d}{Z_{qs} + Z_{ms}} \sin \theta}{1 - Z_3 \sin \theta - Z_4 \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

где в свою очередь

$$Z_1 = \frac{\cos \theta}{Z_{H1}} \left(Z'_{d2} - \frac{(PM_d)^2}{Z_{d3}} \right)$$

$$Z_2 = \frac{\sin \theta}{Z_{H1}} \left(Z'_{q2} - \frac{(PM_q)^2}{Z_{Hq3} + Z_{q3}} \right)$$

$$Z_3 = -\frac{\sin \theta}{Z_{H2}} \left(Z'_{d2} - \frac{(PM_d)^2}{Z_{d3}} \right)$$

$$Z_4 = -\frac{\cos \theta}{Z_{H2}} \left(Z'_{q2} - \frac{(PM_q)^2}{Z_{Hq3} + Z_{q3}} \right)$$

Полагая, что зазор равномерный, т.е.

$$L_{q2} = L_{d2} = L$$

$$M_q = M_d = M'$$

Получим окончательные выражения для выходных характеристик, если питание подается на обмотку d_s :

$$U_{21} = \frac{U_{d_s} \{ M_p \cos \theta [(M_p)^2 (Z'_{22} + Z_{H2}) Z'_{q's}] \} Z_{H1}}{D^2}, \quad (10.15)$$

$$U_{22} = \frac{U_{d_s} \{ M_p \sin \theta [(Z_{21} + Z_{H1}) Z'_{q's} - (M_p)^2] \} Z_{H2}}{D^2},$$

где

$$D^2 = \left\{ Z_{d_s} Z'_{q's} (Z_{21} + Z_{H1})(Z_{22} + Z_{H2}) - (M_p)^2 (Z_{21} + Z_{H1}) \times \right. \\ \left. \times (Z_{d_s} \cos^2 \theta + Z'_{q's} \sin^2 \theta) + (M_p)^2 (Z_{22} + Z_{H2}) (Z_{d_s} \sin^2 \theta + Z'_{q's} \cos^2 \theta) + M_p^4 \right\}$$

$$Z'_{q's} = Z_{Hq3} + Z_{q3}$$

Из уравнения 10.15 видно, что выходные характерис-

тики не будут чистыми синусоидой и косинусоидой (рис.10.18).

Это искажение можно ликвидировать, если

- а) накоротко замкнуть квадратную обмотку $q_s (Z_{Hq_s} \rightarrow 0)$. $Z_{q_s} = Z_{d_s} = Z'_{q_s}$.

Это так называемое первичное симметрирование.

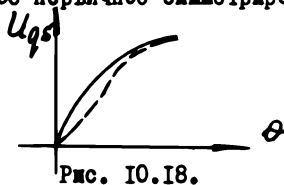


Рис. 10.18.

б) Сделать равными $Z_{H1} = Z_{H2}$. Это - вторичное симметрирование.

В зависимости от схемы включения ПТ может выполнять различные функции.

Синусный ПТ (рис.10.19). Сигнал подается на обмотку статора $C_1 C_2$. Выходной сигнал снимается с выходной обмотки (синусоидой). Уравнением выходной характеристики будет одно из выражений (10.15), где синусоидальная зависимость от угла поворота ротора θ . Симметрирование используется первичное.

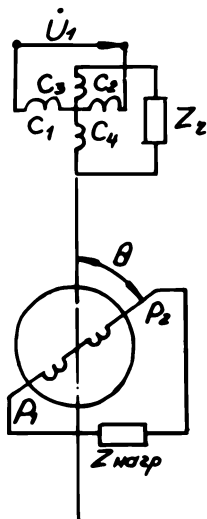
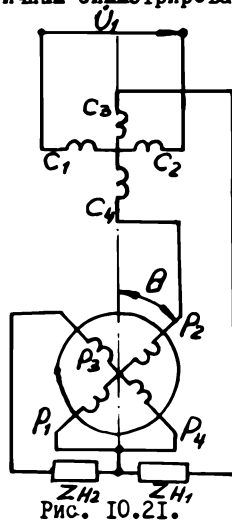
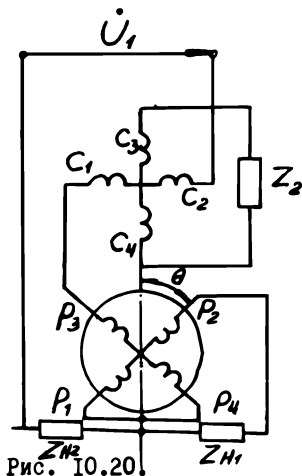


Рис. 10.19.

Синусно-косинусный ПТ. Выходное напряжение также подается на обмотку ds , выходной сигнал снимается с обеих роторных обмоток. Этот режим был подробно рассмотрен.

Линейный ПТ предназначен выдать выходное напряжение в виде линейной функции от угла поворота ротора. Для этого применяют две схемы - с первичным и вторичным симметрированием (рис. 10.21, 10.20).



Выходное напряжение будет следующим образом зависеть от угла θ :

$$U(\theta) = \frac{\sin \theta}{1 + a \cos \theta}, \quad (10.16)$$

где a - коэффициент, зависящий от параметров обмоток. Зависимость будет наиболее линейной, если $a=0,54$. Абсолютно линейной зависимости быть не может.

Масштабный ПТ приводит в соответствие выходное и входное напряжения последовательно соединенных узлов схемы. В качестве МПТ можно использовать синусный поворотный трансформатор с первичным симметрированием. Необходимый масштабный коэффициент подбирают подбором угла поворота ротора θ , он будет пропорционален $\sin \theta$.

Используется также и линейный поворотный трансформатор. Для расширения пределов его работы применяют схему, приводящую к образованию так называемых смещаемых напряжений.

Поворотный трансформатор-построитель применяют для решения геометрической задачи определения гипотенузы по двум заданным катетам. В схеме построителя, показанной на рис. 10.22, входными являются обе статорные обмотки (катеты). Гипотенуза будет определяться любым из максимальных значений (10.15).

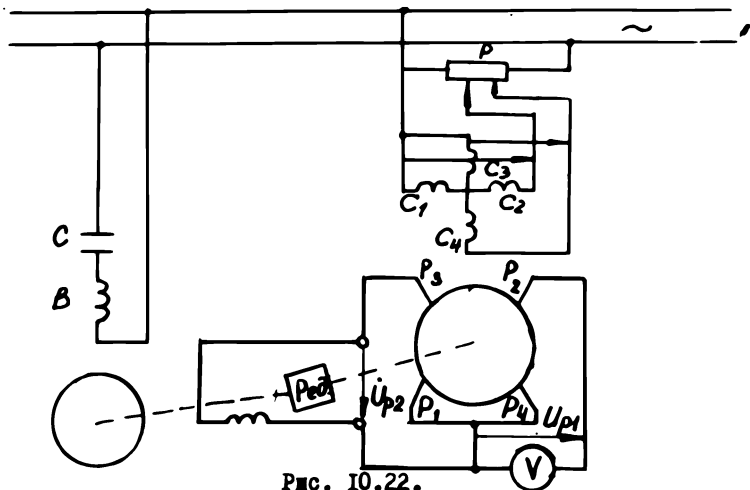


Рис. 10.22.

Ротор построителя обрабатывает величину, пропорциональную гипотенузе. Обмотки статора C_1C_2 и C_3C_4 подсоединяют к однофазной сети через реостат, позволяющий изменять подаваемое на них напряжение U_{c1} и U_{c2} . К одной из роторных обмоток подключен вольтметр. Напряжение с другой подается на обмотку управления исполнительного двигателя (например, асинхронного), вал которого механически связан с ротором ПТ (обычно через редуктор). Обмотки статора создают два пульсирующих, но неподвижных в пространстве потоков. Результирующий поток, также пульсирующий с той же частотой, будет равен геометрической их сумме (рис. 10.23). Когда одна из роторных обмоток будет параллельна потоку Φ , в ней будет наводиться максимальная ЭДС. В то же время в другой

роторной обмотке наводимая ЭДС будет равна нулю, так как она займет положение, перпендикулярное потоку Φ .

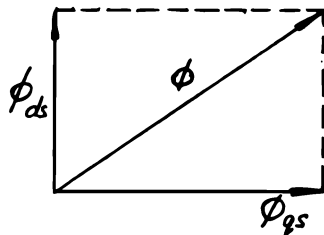


Рис. 10.23.

Ротор исполнительного двигателя будет вращаться до тех пор, пока в одной из роторных обмоток $\Pi\Pi$ ЭДС не станет равной нулю. Тогда вольтметр в цепи другой роторной обмотки $\Pi\Pi$ покажет величину, пропорциональную гипотенузе. Коэффициентом пропорциональности будет коэффициент трансформации между обмотками ротора и статора.

Глава XI. МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В машинах постоянного тока магнитный поток, создаваемый индуктором, должен быть постоянным. Также постоянным должно быть напряжение на зажимах якорной обмотки. Из условия существования электромагнитного момента, когда ток возбуждения постоянный $i_g = \text{const}$ в обмотке якоря должна наводиться переменная э.д.с., частота которой соответствует скорости вращения ротора. Это соотношение справедливо для синхронных машин. Чтобы получить машину постоянного тока, необходимо переменную якорную ЭДС выпрямить, для чего применяют специальное устройство - коллектор.

В генераторном режиме работы машины коллектор меняет полярность тока во внешней цепи якоря через каждые пол-оборота (180° эл.) ротора.

В режиме двигателя к зажимам обмотки якоря подводится постоянное напряжение. Чтобы при вращении ротора электромагнитный момент имел постоянную составляющую, коллектор также меняет полярность тока в якоре, но уже преобразуя постоянный ток в переменный.

Машины постоянного тока широко используются и в генераторном режиме и в режиме двигателя.

§ I. Конструкция машин постоянного тока

С точки зрения происходящих электромагнитных процессов в машине постоянного тока принято выделять две части:

- 1) часть, обеспечивающую создание магнитного потока - индуктор;
- 2) часть, в которой наводится ЭДС - якорь.

Якорь вращается, а индуктор, имеющий явно выраженные полюсы чередующейся полярности - неподвижен.

Необходимыми элементами современной машины постоянного тока являются также коллектор и щетки. Основные части машины показаны на рис. II.1.

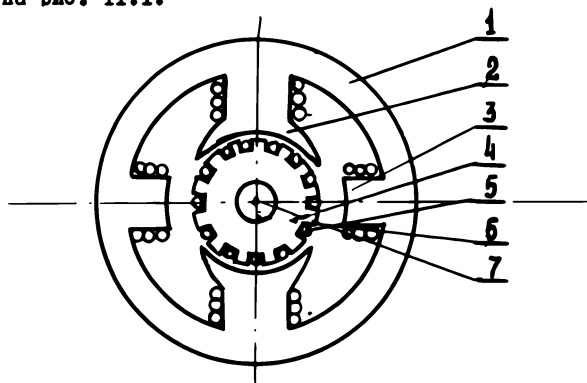


Рис. II.1.

1 - ядро статора (станина); 2 - главные полюса; 3 - добавочные полюса; 4 - сердечник якоря; 5 - обмотка якоря; 6 - коллектор; 7 - вал

Все перечисленные части служат для проведения магнитного потока и называются активными частями.

Для нормальной работы машины, передачи вращающего момента, обеспечения необходимой жесткости и прочности активных частей имеются конструктивные части:

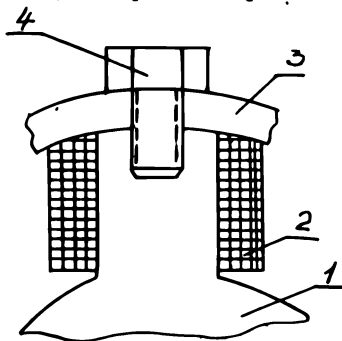


Рис. II.2.

вал (7), подшипниковые щиты или фундаментальная плита с подшипниковыми стойками, щеткодержатели. Для охлаждения машины служит вентилятор.

Главные полюсы предназначены для создания основного магнитного потока в машине. Полюс (рис. II.2) состоит из сердечника 1 и катушки возбуждения 2. Со стороны,

обращенной к якорю, сердечник полюса имеет расширенную часть - полюсный наконечник, при помощи которого достигается необходимое распределение магнитного потока в зазоре между полюсами и якорем. Сердечник полюса собирается из листовой стали толщиной 0,5-1 мм. Катушка изготавливается из медного или алюминиевого обмоточного провода. Полюс прикрепляется к станине 3 при помощи болтов 4.

Станина представляет собой короткий полый цилиндр, по которому проходит магнитный поток. Станины изготавливаются из стального проката или стального литья.

Добавочные полюсы предназначены для улучшения коммутации и применяются в машинах мощностью свыше 0,6 квт. Добавочный полюс состоит из сердечника и катушки. Добавочные полюса устанавливаются между главными и крепятся к станине болтами.

Якорь изготавливается из листовой стали толщиной 0,5 мм. По окружности сердечника якоря имеются пазы для укладки обмотки.

Обмотка якоря обычно делается двухслойной, состоящей из отдельных секций, которые изготавливаются из медного обмоточного провода круглого или прямоугольного сечения. Коллектор устанавливается на валу рядом с сердечником, он состоит из пластин, которые изолируются друг от друга micaнитовыми прокладками.

Для создания контакта между коллектором и неподвижными частями машины применяются щетки. В современных машинах применяются почти исключительно электрографитовые щетки. Щетки помещаются в щеткодержателе и посредством рычага и пружины прижимаются к коллектору.

Все вращающиеся части машины размещают на общем валу, который изготавливается из стали. Вал опирается на подшипники.

Обмотки якоря

Основной элемент обмотки якоря-секция. Это наименьшая часть обмотки, присоединенная к двум коллекторным пластинкам. Секция может состоять из одного или нескольких соединенных последовательно витков. В каждом витке можно выделить две активные стороны, расположенные в пазах сердечника якоря, и лобовые части по торцам этого сердечника. Начало первого витка секции и конец последнего витка соединены с коллекторными пластинками.

Обмотки якоря делятся на 1) петлевые, 2) волновые.

Кроме этого, они могут быть простыми и сложными.

Простая петлевая обмотка показана на рис. II.3.

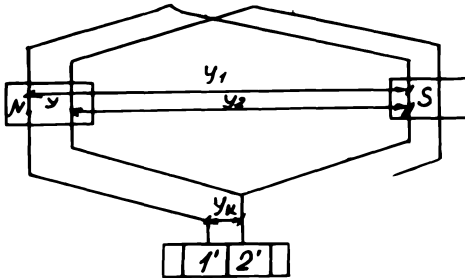


Рис. II.3.

Различают следующие шаги обмоток:

- J_I - первый шаг, равный ширине секции или расстоянию между начальной и конечной сторонами секции;
- J_2 - второй шаг, равный расстоянию между конечной стороной одной секции и начальной стороной следующей секции;
- J - результирующий шаг, равный расстоянию между начальными сторонами следующих друг за другом секций;
- J_K - шаг по коллектору, равный расстоянию между началом и концом секции по окружности коллектора.

Формула простой петлевой обмотки:

$$J_I - J_2 = J = J_K$$

При одной паре полюсов можно в принципе выполнить только петлевую обмотку.

Если $p > 1$, то обмотка может быть выполнена и другим способом.

Волновая обмотка (рис. II.4):

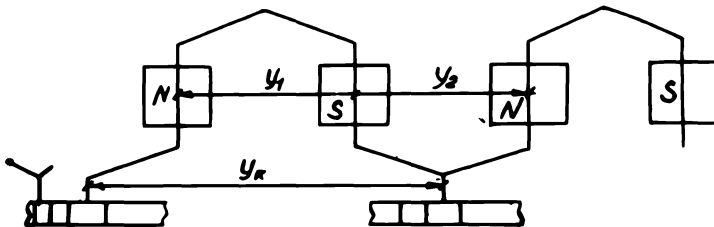


Рис. II.4.

$$J_1 + J_2 = J = J_k$$

Типы конструкций якоря исполнительных двигателей постоянного тока

Исполнительные двигатели постоянного тока имеют конструкцию якоря следующих типов:

- 1) нормальный барабанный якорь;
- 2) полый немагнитный якорь;
- 3) дисковой якорь.

Особенностью конструкции исполнительных двигателей постоянного тока с полым немагнитным якорем является то, что для уменьшения момента инерции якорь разделяют на две части: 1) обмотку с коллектором; 2) сердечник.

Наиболее массивную часть - внутренний статор, служащий магнитопроводом, делают неподвижной. Якорь выполняют в виде полого пластмассового цилиндра, в который запрессована обмотка из медного провода. Полый якорь вращается в воздушном зазоре между полюсами внешнего статора и внутренним статором. Возможно выполнение двигателей с постоянным магнитом внутри полого якоря и внешним магнитопроводом.

Особенностью конструкции исполнительных двигателей постоянного тока с дисковым якорем является то, что машина выполняется не с цилиндрическим воздушным зазором, а с плоским. Якорь представляет собой тонкий немагнитный диск без пазов (из керамики, текстолита, алюминия с печатной обмоткой). Неизолированные прямоугольные проводники печатной обмотки располагаются радиально по обеим сторонам диска и соединяются между собой через сквозные отверстия в диске. Роль коллектора в таких двигателях могут играть активные части проводников, находящихся на одной из поверхностей диска. По этой поверхности неизолированных проводников скользят серебряно-графитовые щетки. Возбуждение двигателя обеспечивается постоянными магнитами, выполненными из сплава магнито, с полюсными наконечниками из мягкой стали, имеющими форму кольцевых сегментов.

Магнитоэлектрические машины отличаются в конструктивном отношении от двигателей и генераторов с электромагнитным воз-

буждением устройством магнитной системы. Якорь, коллектор, щеточный аппарат (для машин постоянного тока), подшипниковые щиты вполне идентичны в преобразователях энергии обоих типов. Магнитные системы магнитоэлектрических машин более разнообразны, что находит объяснение в простоте придания различных конструктивных форм постоянным магнитам.

Постоянные магниты электрических машин принято делить на роторные и статорные.

Роторные магниты выполняют главным образом многополюсными, статорные же магниты выполняют чаще всего только двух- и четырех полюсными.

Роторные магниты различают с явно и неявно выраженными полюсами, с полюсными наконечниками и роторы когтеобразного типа.

Статорные магниты по геометрической форме делятся на кольцевые, дугообразные (изогнутые) и прямые.

Электродвигатели с постоянными магнитами, так же, как и обычные машины, могут выполняться с полым якорем или с якорем со стальным сердечником.

Ниже приведены некоторые магнитоэлектрические конструкции машин:

На рис. II.5 - машина с радиальными магнитами, где 1 - ядро, 2 - радиальные магниты, 3 - ротор.

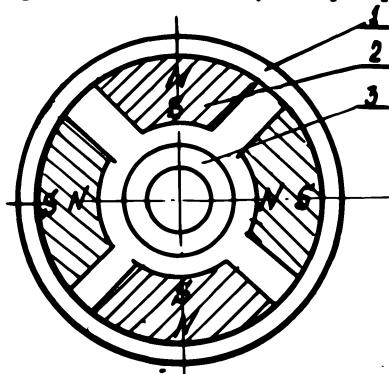


Рис. II.5.

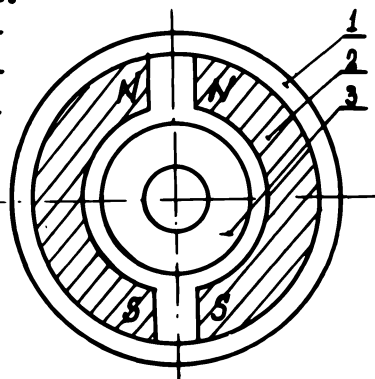


Рис. II.6.

На рис. II.6 - машина с дугообразными магнитами, где 1 - ядро, 2 - скобообразные магниты, 3 - ротор.

На рис. II.7 - машина с внутренним магнитом, где 1 - статор, 2 - ротор - магнит.

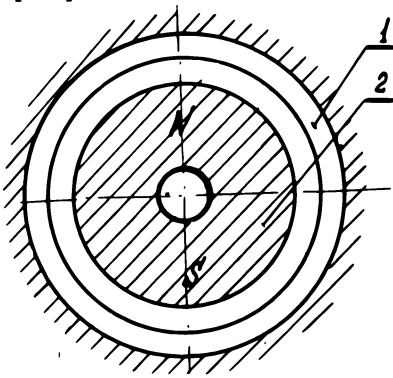


Рис. II.7.

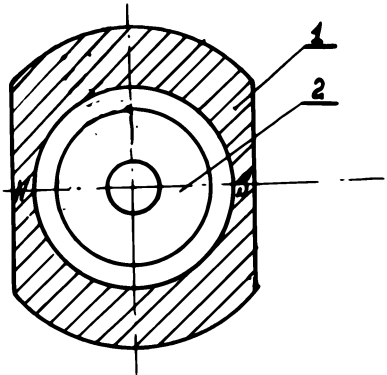


Рис. II.8.

На рис. II.8 - машина с магнитной системой кольцевого типа, где 1 - магнитный корпус, 2 - ротор (якорь).

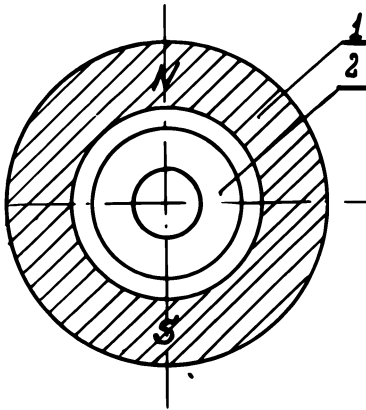


Рис. II.9.

На рис. II.9 - машина с вращающимся наружным магнитом 1 и неподвижными обмотками 2.

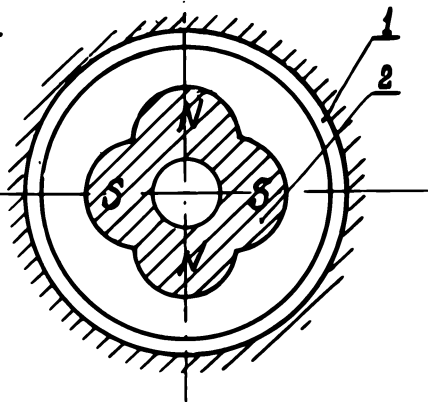


Рис. II.10.

На рис. II.10 - машина с магнитом "звездочка", где 1 - статор, 2 - ротор - магнит.

Конструкция электромашинного усилителя поперечного

поля

Конструктивно выполняется подобно генератору постоянного тока, но имеет дополнительный комплект щеток, установленных на поперечной оси машины и замкнутых накоротко. На статоре ЭМУ расположен ряд обмоток. В продольной оси полюсов расположены обмотки управления, которых обычно бывает несколько, они укладываются в большие пазы статора. Эти обмотки выполнены сосредоточенными в виде четырех катушек.

Соосно с обмотками управления расположена компенсационная обмотка, включаемая в продольную цепь последовательно с обмоткой якоря. Компенсационная обмотка шунтирована регулирующим сопротивлением R_w для регулирования степени компенсации усилителя. Эта обмотка делается распределенной и занимает часть большого поперечного паза и малые пазы. Такое расположение компенсационной обмотки создает хорошие условия компенсации, так как обмотка якоря, поток которой уравнивает поток компенсационной обмотки, выполнена также распределенной. В этом случае компенсация потока продольной реакции якоря производится не только по амплитуде, но и по форме.

В продольную же цепь для улучшения компенсации включена обмотка дополнительных полюсов, она укладывается в средних пазах, расположенных по продольной цепи машины и делается сосредоточенной. Для улучшения коммутации в поперечной цепи последовательно с якорем включает поперечную обмотку подмагничивания, которая расположена в средних пазах. На снимке большого паза расположена обмотка размагничивания для снятия остаточного напряжения.

§ 2. Анализ режимов машин постоянного тока

Так как ЭДС в якоре генерированная, то она наводится в поперечной обмотке (рис. II.11). По этой оси расположены

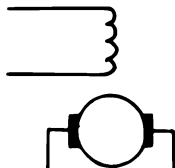


Рис. II.11.

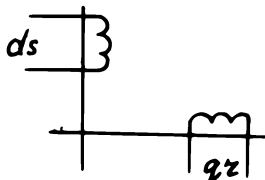


Рис. II.12.

реальные щетки.

На рис. II.12 дана элементарная машина, соответствующая этой схеме. По самим проводникам в якоре токи протекают переменные, но в цепи щеток, снимающих напряжение с разных проводников, ток одного направления. Щетка снимает напряжение с коллекторной пластины (припаянной к секции), пока они соприкасаются. За это время Δt секция меняется. То же происходит и со следующей секцией. В результате в цепи щеток будет не постоянный, а пульсирующий ток. Величина пульсаций будет зависеть от ширины щеток коллекторных пластин и скорости ротора. Таким образом, цепь щеток можно рассматривать с точки зрения обобщенной машины как неподвижные катушки с постоянным током.

Матрица элементарной машины будет

$$Z = \begin{matrix} & ds & qz \\ ds & R_s + L_s p & \\ qz & M\dot{\theta} & R_z + L_z p \end{matrix} \quad (II.1)$$

машины постоянного тока имеют различное возбуждение:

а) независимое (схема на рис. II.13)

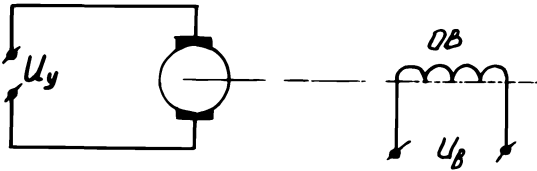


Рис. II.13.

В этом случае матрица C , не учитывая коэффициента трансформации, будет

$$C = \begin{matrix} & b & a \\ ds & 1 & \\ qz & & 1 \end{matrix}$$

где a - символ цепи якоря;
 b - символ цепи возбуждения.

На рис. II.14 изображен граф полного сопротивления Z :

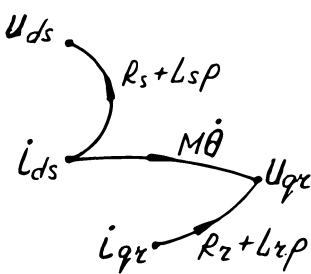


Рис. II.14.

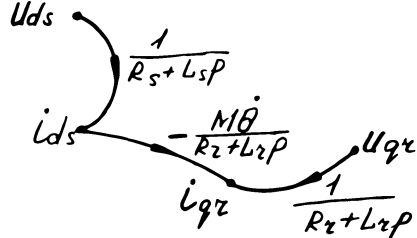


Рис. II.15.

В двигательном режиме U_{ds} и U_{qr} должны быть источниками, следовательно, этот граф надо инверсировать.

На рис. II.15 дан инверсированный граф. Из этого графа определяются токи и момент.

$$i_{ds} = \frac{U_{ds}}{R_r + L_s p}$$

$$i_{qr} = \frac{U_{qr}}{R_r + L_r p} + \frac{-M \dot{\theta} \cdot U_{ds}}{(R_s + L_s p)(R_r + L_r p)} \quad (II.2)$$

$$M_{эм} = R_e i_{ds} \cdot M \cdot i_{qr}$$

В установившемся режиме, учитывая, что $L_s p = 0$ и $L_r p = 0$,

$$M_{эм} = U_{ds} U_{qr} \frac{X_m}{R_s \cdot R_r} - U_{ds}^2 \cdot \frac{X_m^2}{R_s^2 R_r} \dot{\theta} \quad (II.3)$$

или

$$M_{эм} = A U_{ds} U_{qr} - B U_{ds}^2 \dot{\theta}, \quad (II.4)$$

где A и B - постоянные машины.

Механическая характеристика, т. е. зависимость $M = f(\dot{\theta})$ приводится на рис. II.16.

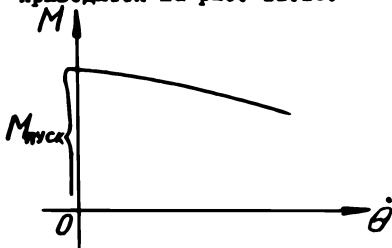


Рис. II.16.

При $\dot{\theta} = 0$ пусковой момент будет равен $U_{ds} \cdot U_{qz} \frac{R_2 X_{mi}}{R_s}$

С увеличением скорости ротора момент будет уменьшаться на величину, пропорциональную квадрату напряжения возбуждения (обычно эта величина меньше U_{ds}). Жесткость характеристики зависит

от конструктивных параметров машины.

Выходная ЭДС для генераторного режима найдется из графа рис. II.14 при инверсии ветви $i_{ds} U_{qz}$.

$$U_{qz} = \frac{U_{ds} \cdot M}{R_s + L_s p} \dot{\theta} + i_{qz} (R_2 + L_2 p), \quad (II.5)$$

где i_{qz} при х. х. равен нулю и выходная ЭДС

$$E = U_{qz} = C \cdot U_{ds} \cdot \dot{\theta}, \quad (II.6)$$

т. е. пропорциональная напряжению возбуждения и скорости ротора. Если якорная обмотка замкнута на нагрузку, то напряжение на нагрузке будет, как и для вторичной нагруженной обмотки трансформатора,

$$U = E - \Delta U_a, \quad (II.7)$$

где ΔU_a - падение напряжения в цепи якоря.

Внешняя характеристика ($U = f(I_a)$) имеет вид (рис. II.17)

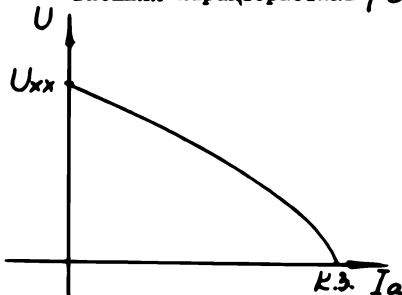
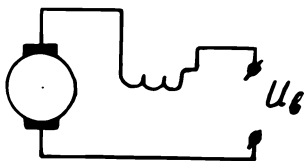


Рис. II.17.

При х. х. $U = E$.

При к. з. $U = 0$.

б) Последовательное возбуждение (схема дана на рис. II.18). Это один из видов самовозбуждения. В этом случае обмотка возбуждения получает питание от якорной обмотки. Такие машины должны обладать остаточным



намагничиванием. Ток
в реальной машине \dot{i}
один.

Рис. II.18.

Матрица C будет

$$C = \begin{matrix} d \\ ds \\ qz \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Матрица полного сопротивления $Z' = C_t \cdot Z \cdot C$ равна

$$Z' = (R_s + R_r) + (X_r + X_s) + X_m \dot{\theta} \quad (II.8)$$

Уравнение напряжения запишется в виде:

$$U = (R + L_p + X_m \dot{\theta}) \dot{i}, \quad (II.9)$$

где R - активное сопротивление всей цепи.

В установившемся режиме

$$U = RI + X_m \dot{\theta} I \quad (II.10)$$

Подводимое напряжение уравновешивает падение напряжения
и ЭДС вращения (противо ЭДС). Отсюда легко найти
ток и момент

$$M_{эм} = X_m I^2 \quad (II.11)$$

в) Схема параллельного возбуждения (также самовозбужде-
ние) приведена на рис. II.19.

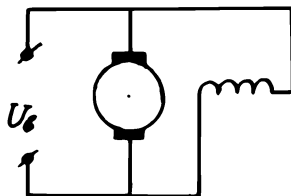


Рис. II.19.

Матрица сопротивлений для двигательного режима будет

$$Z = \begin{matrix} ds & qz \\ ds & \begin{matrix} R_s & \\ M\theta & R_z \end{matrix} \\ qz & \end{matrix} \quad (II.12)$$

Отсюда можно получить уравнение напряжений

$$U = R_a I_a + \dot{E}, \quad (II.13)$$

где $E = M \frac{\dot{\theta}}{\Delta H} I_B$ - противо ЭДС.

Момент определяется выражением

$$M_{\Delta H} = I_a X_m I_B = I_a E / \dot{\theta} \quad (II.14)$$

Находя токи из II.15 и учитывая, что напряжения на якоре и возбуждения одинаковы, получим выражение момента

$$M_{\Delta H} = \frac{V_B^2 (R_a - X_m \dot{\theta})}{R_B \cdot R_a^2} \cdot X_m = V_B^2 X_m \left(\frac{1}{R_a \cdot R_B} - \frac{X_m}{R_B \cdot R_a^2} \dot{\theta} \right) \quad (II.15)$$

Таким образом, механическая характеристика имеет тот же характер, что и при других способах возбуждения.

Зависимость $\dot{\theta} = f(U)$ при $M_{\Delta H} = const$ называется регулировочной характеристикой. При х. х., когда $M_{\Delta H} = 0$ (рис. II.20)

зависимость гиперболическая. Возможен "разнос" двигателя, если $i_B \rightarrow 0$, т. е. произойдет разрыв в цепи возбуждения.

В генераторном режиме при отсутствии нагрузки в цепи якоря

$$i_a = i_B = i$$

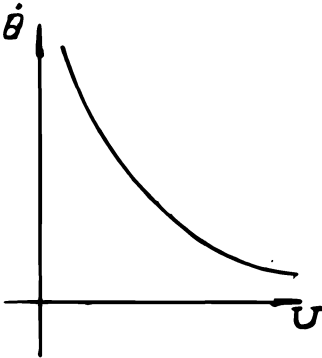


Рис. II.20.

$$C = \begin{matrix} ds & 1 \\ qz & 1 \end{matrix}$$

$$\text{Матрица } Z' = (R_B + R_A) + (L_B p + L_A p) + M\dot{\theta} \quad (\text{II.16})$$

$$\text{и } E' = U_A + U_B = 0,$$

Так как цепь замкнута. В начальный момент при вращении ротора в поле остаточного магнетизма в обмотке якоря наведется ЭДС U_0 и по обмотке возбуждения потечет также ток i_0 . Этот ток создает дополнительный поток и ЭДС дальше может нарастать или уменьшаться в зависимости от некоторых условий. Рассмотрим это подробнее.

Допустим, что в момент времени $t = 0$ ток равен i_0 .

Тогда преобразование Лапласа для уравнения напряжений имеет вид:

$$0 = \{(R_A + R_B) + (L_A + L_B)s - M\dot{\theta}\}i - (L_A + L_B)i_0$$

и

$$i = \frac{(L_A + L_B)i_0}{(L_A + L_B)s + (R_A + R_B - M\dot{\theta})} = \frac{i_0}{s + \frac{R_A + R_B - M\dot{\theta}}{L_A + L_B}},$$

откуда

$$i = i_0 U - \left\{ (R_A + R_B - M\dot{\theta}) / (L_A + L_B) \right\} \quad (\text{II.17})$$

Возникает три возможных случая:

$(R_A + R_B) > M\dot{\theta}$ - ток возрастает беспредельно;

$(R_A + R_B) = M\dot{\theta}$ - ток спадает до нуля;

$(R_A + R_B) < M\dot{\theta}$ - ток остается постоянным.

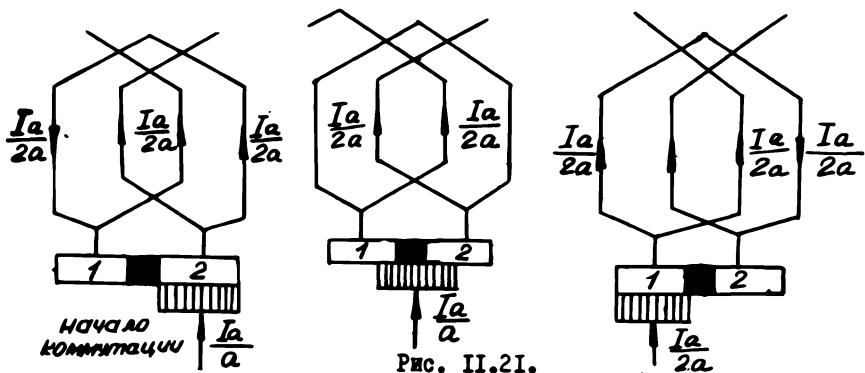
На практике начальный ток i_0 получается за счет остаточного намагничивания и если в ненасыщенной области $(R_A + R_B) < M\dot{\theta}$, машина самовозбуждается, т.е. ток и напряжение якоря возрастают. Однако когда величина тока достигает области насыщения, M уменьшается и в тот момент, когда $M\dot{\theta}$ уменьшится до значения $(R_A + R_B)$, дальнейшее нарастание тока и напряжения прекращается.

Если в ненасыщенной области $(R_A + R_B) > M\dot{\theta}$, то говорят, что сопротивление больше "критического" и увеличение напряже-

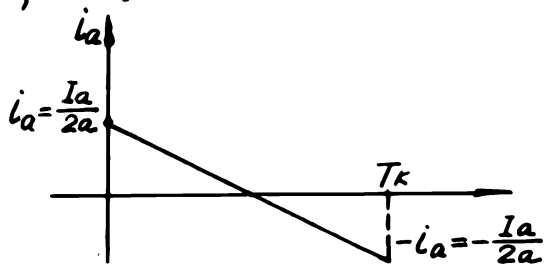
ния, создаваемого остаточным намагничиванием, незначительно. Напряжение на якоре без нагрузки равно $(R_a - M\theta)I_a$.

Однако в самих проводниках якорной обмотки протекают переменные токи, в результате чего наводится ЭДС самоиндукции. Это явление называется коммутацией. Секция, в которой изменяется ток, называется коммутирующей, время, в течение которого происходит процесс коммутации, называется периодом коммутации.

Если ширина щетки равна коллекторному делению, то $T_k = \frac{60}{k \cdot n}$. Так как обычно n - большое число, то T_k - маленькое время. Но за это время ток изменяется до $-\frac{I_a}{2a}$.



Если плотность тока под щеткой постоянна и ток пропорционален площади соприкосновения, то изменение тока в коммутирующей секции, как на рис. II.22:



Но так как T_k мало, а токи изменяются за это время на $1/2 I_a$, возникает ЭДС самоиндукции.

$e_c = -L \frac{di}{dt}$; L индуктивность секции и взаимоиנדукция (если $B_m > B_r$)

Эти ЭДС препятствуют изменению тока в коммутирующей секции. И ток опережает (рис. II.23) или отстает (рис. II.24)

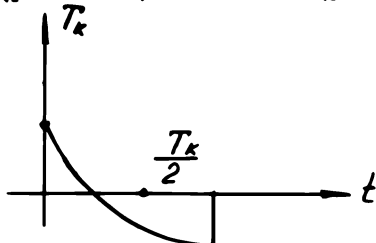


Рис. II.23.

Для устранения влияния этих ЭДС и реакции якоря вводят дополнительные полюса.

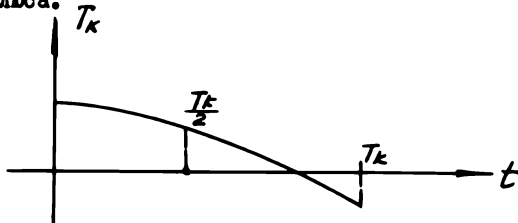


Рис. II.24.

Прямолинейная коммутация не опасна. Поэтому устранить надо добавочный ток коммутации. Для этого применяют либо дополнительные полюса (чтобы убрать e_0) или подбирают сопротивления.

Учет коммутации можно, если в матрице \bar{Z} вместо элемента R_{qz} ввести $R_{qz} + L_{\Sigma} p$.

Обычно последствия коммутации стремятся устранить, для чего делают дополнительные полюса, компенсирующие ЭДС самоиндукции, и сдвигают щетки с оси φ .

Элементарная машина для общего случая, когда щетки расположены под углом α к оси φ , представлены на рис. II.25.

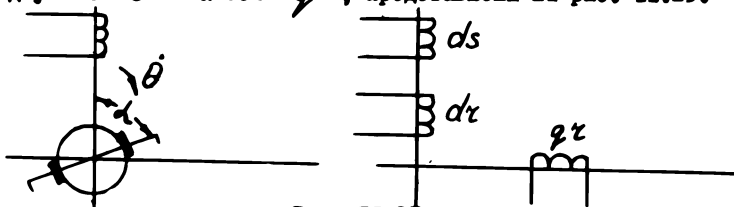


Рис. II.25.

Если машина имеет независимое возбуждение, то токи элементарной и реальной машины связаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} i_r &= i_r \cdot \sin \alpha \\ i_r &= i_r \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.18})$$

Граф полного сопротивления представлен на рис. II.26.

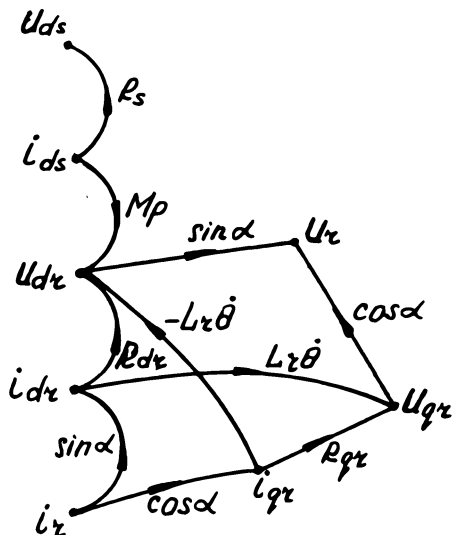


Рис. II.26.

Электромашинный усилитель

ЭМУ - важнейший элемент системы регулирования.

Усилителем называется устройство, посредством которого можно с помощью малой мощности управлять большой.

По системе возбуждения ЭМУ делятся на ЭМУ продольного и поперечного поля.

Основные требования:

I. Высокий коэффициент усиления K_y

$$K_y = \frac{P_{\text{вых.}}}{P_{\text{вх.}}};$$

(II.19)

или $K_{vi} = \frac{I_{\text{Вых}}}{I_{\text{Вх}}}$; $K_{\text{ви}} = \frac{U_{\text{Вых}}}{U_{\text{Вх}}}$

По числу ступеней усиления ЭМУ делится на одно, двух и трехступенчатые, в современных ЭМУ K_y бывает от 1000 до 100000.

2. Быстродействие. Чем быстрее будет реагировать ЭМУ на изменение входного сигнала, тем точнее и лучше будет работать система авторегулирования. Быстродействие в основном определяется электромагнитной инерцией входной цепи. Постоянная времени $T = \frac{L}{R}$.

3. Оценка различных ЭМУ часто производится по их добротности

$$K_d = \frac{K_y}{T} \quad (\text{II.20})$$

Электромагнитный усилитель продольного поля (рис. II.27).

Простейшим ЭМУ является обычный генератор постоянного тока с независимым возбуждением.

$$K_y = \frac{U_{\text{нг}} I_{\text{нг}}}{I_B^2 \cdot R_B}$$

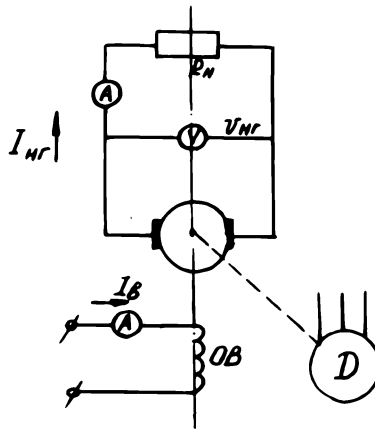


Рис. II.27.

У такого усилителя очень много недостатков:

1. Мал $K_y \sim 100$; 2. Одна обмотка управления (возбуждения); 3. Малое быстродействие (большая постоянная времени).

В качестве усилителя продольного поля с независимым возбуждением используются высокооборотные ненасыщенные генерато-

ры с минимальным воздушным зазором.

Такой усилитель снабжается несколькими обмотками управления (рис. II.28).

Для уменьшения постоянной времени в цепь управления в обмотку часто включают активное сопротивление R_g .

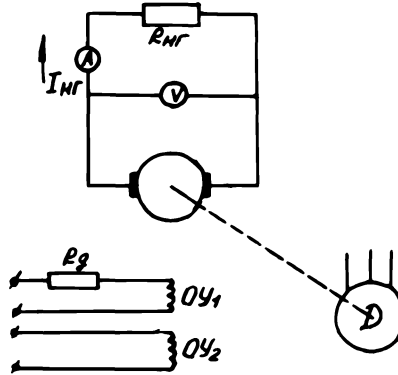


Рис. II.28.

Переходный процесс - по закону экспоненты (рис. II.29)

$$U_2 = E_2 = c \cdot n \cdot \Phi = c \cdot n \cdot \frac{U_1}{R_1} \cdot M_{12},$$

$$\frac{U_1}{R_1} = (1 + T_p) i; \quad U_1 = (R_1 + Lp) i; \quad E_2 = K U_1$$

$$E = \frac{K U_1}{(T_p + 1)}$$

Там, где постоянная времени не играет существенной роли, применяют последовательное соединение двух или нескольких машин.

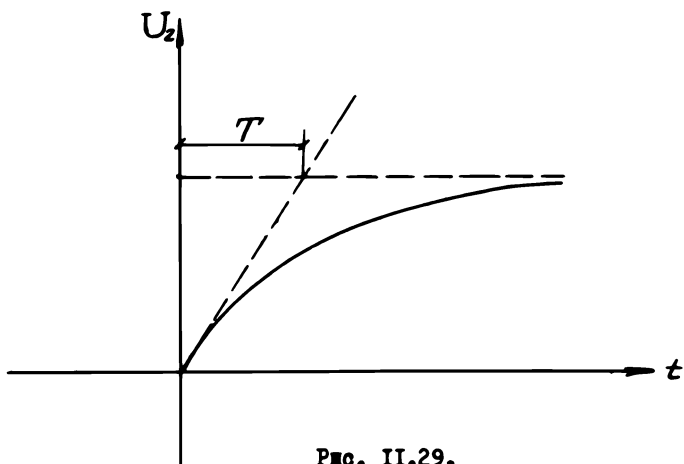


Рис. II.29.

Электромагнитный усилитель с самовозбуждением

Для увеличения коэффициента усиления можно добавить обмотку самовозбуждения, которая включается последовательно или параллельно обмотке якоря (рис. II.30).

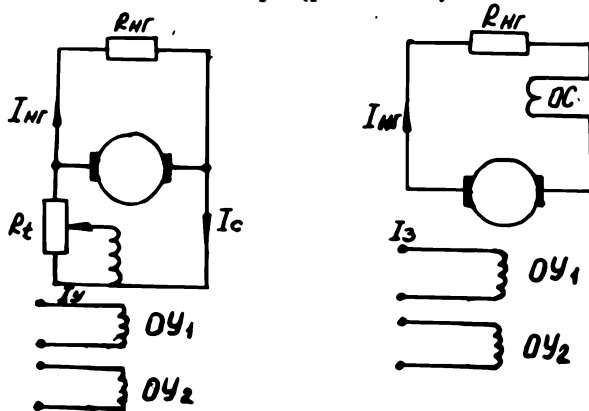


Рис. II.30.

В ЭМУ обмотки самовозбуждения настраивают так, что машина не возбуждается без сигнала управления, для этого подбирают сопротивление ОС. Оно должно быть немного больше критического.

В последнее время широкое применение получили ЭМУ поперечного поля (рис. II.31). Основным рабочим потоком, создающим ЭДС на выходе, является поток поперечной реакции якоря. Создается он таким, текущим по короткозамкнутой обмотке якоря.

ЭДС E_2 создается потоком управления Φ_y . Эта ЭДС имеет небольшую величину. Ток I_2 , протекающий по поперечной короткозамкнутой обмотке, имеет значительную величину. Поперечный поток Φ_q , созданный током I_2 , будет наводить в витках обмотки якоря ЭДС E_3 , которая будет сниматься продольными щетками.

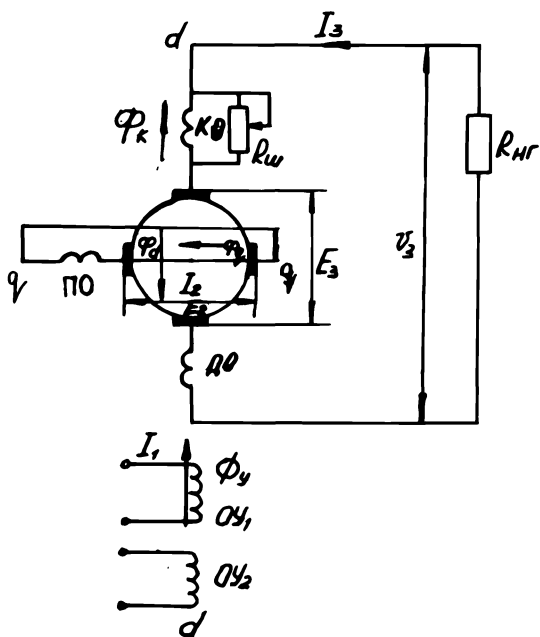


Рис. II.31.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Костенко М.П., Пиотровский Л.М. "Электрические машины" Часть I и II. Изд. "Энергия", Л., 1964.
2. Чечет Д.С. "Электрические микромашины автоматических устройств". Изд. "Энергия", Л., 1964.
3. Арменский В.В., Фалк Г.Б. "Электрические микромашины". Изд. "Высшая школа", М., 1968.
4. Хрущев В.В. "Электрические микромашины", Изд. "Энергия", Л., 1969.
5. Копылов И.П. "Электрохимические преобразователи энергии", изд. "Энергия", М., 1973.
6. Крон Г. "Применение тензорного анализа в электротехнике" Госэнергоиздат. М., 1955.
7. Робинс Л., Буазер М., Робер Х. "Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам", "Энергия", Л., 1964.
8. Сили. "Электрохимическое преобразование энергии", "Энергия", М., 1968.
9. Уайт Д., Вудсон Г. "Электрохимическое преобразование энергии", "Энергия", Л., 1964.
10. Кениг Г., Блекуалл В. "Теория электрохимических систем" "Энергия", Л., 1965.
11. Адкинс Б. "Общая теория электрических машин", Госэнергоиздат, Л., 1960.
12. Неймарк В.И., Фурфев Н.А. "Динамика неавтономных систем", "Наука", 1967.
13. Кэпкок Н. "Матричный анализ электрических машин", "Энергия", М., 1967.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	стр.
Введение	3
Глава I. Краткие сведения по линейной алгебре. . .	7
§ 1. Основные понятия линейной алгебры.	7
§ 2. Преобразования, связанные с изменением базиса.	13
§ 3. Общее понятие тензора.	18
§ 4. Матричная форма записи тензоров.	19
Глава II. Описание электрических машин.	25
§ 1. Физический процесс.	25
§ 2. Составление уравнений.	27
§ 3. Решение уравнений.	41
Глава III. Теория Крона.	43
§ 1. Физическое представление обобщенной машины	44
§ 2. Математическое описание обобщенной машины	46
§ 3. Правила преобразования.	54
§ 4. Расчет режимов.	59
Глава IV. Топологический анализ электрических машин	68
§ 1. Основные положения теории графов.	68
§ 2. Направленные графы в применении к электри- ческим машинам. Граф обобщенной и реальной машины.	76
§ 3. Правила построения графа реальной машины . .	79
§ 4. Расчет характеристик частотным методом . . .	83
Глава V. Общие сведения о конструкции электрических машин.	101
§ 1. Классификация электрических машин	101
§ 2. Материалы, применяемые в электромашиностроении	108

	стр.
Глава VI. Трансформаторы.	113
§ 1. Устройство и конструктивные элементы трансформаторов.	113
§ 2. Принцип действия однофазного трансформатора .	116
Глава VII. Вращающиеся электрические машины.	131
Глава VII. Асинхронные машины.	135
§ 1. Асинхронные двухфазные машины	135
§ 2. Однофазная асинхронная машина	160
§ 3. Трехфазная асинхронная машина	166
Глава IX. Синхронные машины.	185
Глава X. Другие электромашинные устройства переменного тока.	206
§ 1. Сельсины.	206
§ 2. Конструкция однофазных сельсинов.	206
§ 3. Поворотные трансформаторы.	220
Глава XI. Машины постоянного тока	232
§ 1. Конструкция машины постоянного тока	232
§ 2. Анализ режимов машины постоянного тока	239

Подп. к печати *19/IV-75* Л-24863 Ф. 60x90'/16
Бум. тип. № Физ. п. л. *17,25* Уч.-изд. л.
Заказ *1386* Тираж *550* Цена *0-58* коп.

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

Е. В. АРМЕНСКИЙ, И. В. КУЗИНА

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Москва — 1975