АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

В.В.Гороховик

Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации

МИНСК «НАВУКА І ТЭХНІКА» 1990

УДК 519.8 + 517.977

Г о р о х о в и к В. В. **Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации.**–Мн.: Навука і тэхніка, 1990.– 239 с.– ISBN 5-343-00519-5.

Дано систематическое изложение математической теории векторной оптимизации. Последовательно рассматриваются абстрактные экстремальные задачи в предупорядоченных векторных пространствах, векторные задачи нелинейного программирования, задачи оптимального управления с векторным показателем качества терминального типа. Значительное место уделяется развитию одного из направлений негладкого анализа — теории аппроксимативного квизидифференцирования функций и отображений.

Книга рассчитана на нучных работников и инженеров, специализирующихся в области теории оптимизации и систем управлении, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Библиогр.: 360 назв.

Н а у ч н ы й р е д а к т о р

д-р физ.-мат. наук Ф. М. Кириллова

Р е ц е н з е н т ы:

д-р физ.-мат. наук В. Ф. Демьянов,
канд. физ.-мат. наук В. В. Альсевич

$\Gamma \ \dfrac{1602110000-093}{\text{М}316(03)-90} 50-90$

ISBN 5-343-00519-5

Памяти моей матери

ВВЕДЕНИЕ

В классических моделях задач оптимизации критерий качества формализуется в виде вещественнозначной функции, определенной на множестве допустимых решений, при этом цель оптимизации однозначно связывается с минимизацией или максимизацией данной функции. По мере усложнения технических и социально-экономических систем, вовлекаемых в сферу приложений математической теории оптимизации, выявилась неадекватность такой модели ряду реальных задач рационального выбора. Одна из причин несоответствия — многоцелевой (многокритериальный) характер большинства реальных задач рационального выбора. Например, в социально-экономических системах многокритериальность может быть обусловлена целенаправленными действиями в системе группы индивидуумов, каждый из которых преследует свои собственные интересы. Выразить степень удовлетворенности всей группы при реализации того или иного конкретного решения одним вещественным числом весьма трудно, а иногда и невозможно. Аналогичные трудности возникают и при оценке сложных технических систем.

Начало систематическому изучению задач многокритериального рационального выбора было положено Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в монографии [182], в которой были разработаны основы новой математической теории — теории игр. Число работ, посвященных теоретике-игровым проблемам, огромно (см. аннотированные указатели [45, 46]). Ретроспективный обзор и анализ современных тенденций развития теории игр дан в работах Н.Н.Воробьева [47, 48]. Результаты по отдельным направлениям теории игр детально представлены в монографиях [49, 142, 144, 189–192, 229].

Другая причина неадекватности классических моделей задач оптимизации реальным задачам выбора обусловлена тем, что во многих таких задачах выбор оптимального решения вообще не может быть основан на числовых оценках допустимых решений, а опирается лишь на результаты парных (или n-арных, см. [8]) сравнений допустимых решений. Естественно, что наиболее подходящими формальными объектами для описания результатов парных сравнений являются бинарные отношения (см. §1). По-видимому, впервые формальные математические модели задач рационального выбора, в которых показатель качества задан в виде бинарного отношения, также были представлены и первоначально исследованы в монографии [182, гл. 12]. В последующем разработка теории для таких моделей выбора происходила в основном в рамках экономико-математических исследований [128, 137, 157, 168, 184, 221].

В последние годы интерес к проблемам рационального выбора значительно возрос в связи с созданием систем автоматизации в таких сферах интеллектуальной деятельности человека, как управление, проектирование и т. д. Значительные усилия исследователей направляются как на решение конкретных задач, так и на выявление общих идей и принципов, лежащих в основе рационального выбора, их формализацию и создание в итоге общей математической теории принятия решений [20, 134, 158, 169, 178, 187, 219, 220, 225, 234, 235, 241].

Настоящая монография посвящена задачам векторной оптимизации. Часто в литературе под векторной оптимизацией понимается весь круг проблем, связанных с многокритериальностью в задачах принятия решения, при этом термины векторная оптимизация и многокритериальная (многоцелевая) оптимизация используются как синонимы. Такое широкое толкование векторной оптимизации особенно было присуще начальному периоду исследований. По мере развития математической теории принятия решений более определенной становилась и точка зрения на проблематику теории векторной оптимизации.

Приведем здесь краткий очерк основных идей и понятий общей теории принятия решений и определим место задач векторной оптимизации в рамках этой теории.

Формальное определение любой задачи оптимизации или игры (см., например, [41, 43, 48, 49, 176]) явно или неявно содержит следующие две компоненты: некоторое множество X, интерпретируемое как множество возможных исходов, и семейство $\mathcal{G} \subset 2^{X\times X}$ бинарных отношений на X, каждое из которых интерпретируется как показатель качества, соответствующий отдельному индивидууму или характеризующий отдельное свойство исхода. Систему $\Gamma := \langle X, \mathcal{G}\rangle$, образованную этими двумя компонентами, назовем пространством решений.

Множество X будем называть носителем пространства решений, элементы x из X — решениями, а бинарные отношения G из $\mathcal{G}$ — показателями или критериями качества.

Пространство решений $\Gamma := \langle X, \mathcal{G}\rangle$ назовем однокритериальным, если на X задан единственный критерий качества, т. е. если $\mathcal{G} = \{G\}$. Если же семейство $\mathcal{G}$ содержит более одного критерия качества, то пространство решений назовем многокритериальным.

Зафиксируем множество X и рассмотрим класс $\mathfrak{F}_X$, состоящий из всевозможных пространств решений $\Gamma := \langle X, \mathcal{G} \rangle$, у которых носитель пространства есть множество X.

Под принципом оптимальности, заданным на классе пространств решений $\mathfrak{F}_X$, будем понимать (ср. с [41, 43, 48, 176]) соответствие $\mathbf{C}$ между классом $\mathfrak{F}_X$ и совокупностью отображений $C: 2^X \to 2^X$, сопоставляющих каждому непустому множеству $\Omega \subset X$ некоторое его подмножество $C(\Omega) \subset \Omega$ (такие отображения называются [43, 169, 176, 178] функциями выбора).

Принцип оптимальности $\mathbf{C}$ назовем однозначным, если соответствие $\mathbf{C}$ является отображением, т. е. если каждому пространству решений $\Gamma \in \mathfrak{F}_X$ соответствие $\mathbf{C}$ сопоставляет не более одной функции выбора C_Γ.

Описанный уровень формализации принципа оптимальности не охватывает все те содержательные представления о наиболее справедливом или наиболее рациональном выборе, которые обычно интуитивно вкладываются в понятие оптимальности. Дальнейшая формализация таких содержательных представлений и составляет содержание одной из основных проблем теории принятия решений — проблемы определения принципа оптимальности. Впервые эта проблема была осознана в рамках теории игр [39, 41, 43, 48, 49]. Хотя игровые пространства решений имеют свои специфические особенности, которые находят отражение и в принципах оптимальности, развитая в теории игр методология исследования понятия оптимальности имеет важное значение и для общей теории принятия решений.

Среди всех подходов к понятию оптимальности наиболее естественным представляется аксиоматический метод определения принципа оптимальности, наиболее существенный вклад в развитие которого внесли Н.Н. Воробьев [48, 49] и Э. И. Вилкас [39 – 41, 225]. Суть этого метода состоит в том, что соответствие $\mathbf{C}$ задается посредством набора аксиом, определяющих его свойства на некотором классе пространств решений. Аксиоматические определения принципов оптимальности на многокритериальных пространствах без игровой структуры рассмотрены Э. И. Вилкасом в работе [40].

Функцию выбора $C: 2^X \to 2^X$ называют нормальной, если существует бинарное отношение $G_C \subset X \times X$ такое, что $C(\Omega) = \mathrm{Min}\,(\Omega | G_C)$ для всех $\Omega \subset X$, где $\mathrm{Min}\,(\Omega | G_C)$ — подмножество минимальных по отношению G_C элементов множества Ω.

Напомним [10, 22, 29] (см. § 1), что $x \in \mathrm{Min}\,(\Omega | G_C)$ тогда и только тогда, когда $x \in \Omega$ и для любого $y \in \Omega$ из условия $(y, x) \in G_C$ следует $(x, y) \in G_C$.

Критерий нормальности функции выбора представлен, например, в монографии [176].

Принцип оптимальности $\mathbf{C}$ на $\mathfrak{F}_X$ будем называть нормальным, если для любого $\Gamma \in \mathfrak{F}_X$ соответствующая функция выбора C_Γ является нормальной.

С нормальными принципами оптимальности тесно связаны принципы согласования критериев качества [176]. Под принципом согласования критериев качества понимается соответствие $\mathbf{R} : \langle X; \mathcal{G}\rangle \to \langle X; R(\mathcal{G})\rangle$, где $R(\mathcal{G}) \subset X \times X$ -бинарное отношение на X, между классом $\mathfrak{F}_X$ и его подклассом $\mathcal{F}_X^{(1)}$, состоящим из однокритериальных пространств решений.

Всякому нормальному принципу оптимальности $\mathbf{C}$ можно сопоставить принцип согласования $\mathbf{R}_C : \langle X; \mathcal{G}\rangle \to \langle X; R_C(\mathcal{G})\rangle$, положив $R_C(\mathcal{G}) = G_{C(\Gamma)}$ Обратно, если задан принцип согласования $\mathbf{R}$, то, определив для каждого $\Gamma := \langle X; \mathcal{G}\rangle$ функцию выбора $\Omega \to \mathrm{M}in(\Omega | R(\mathcal{G}))$, мы зададим тем самым нормальный принцип оптимальности на $\mathfrak{F}_X$. Вследствие этой связи подходы к проблеме формализации принципов оптимальности и принципов согласования в идейном плане во многом совпадают.

Кроме общих соображений при определении принципа оптимальности (или принципа согласования) эффективно может быть использована информация о таких качественных отношениях между критериями, как относительная важность и равноценность критериев. Аксиоматические способы задания такой информации исследованы В. В. Подиновским [196, 197, 199] (см. также [43, 225]). В частном случае, когда критерии качества из $\mathcal{G}$ заданы функциями полезности (вещественнозначная функция $\varphi : X \to R$ называется [41, 240] функцией полезности бинарного отношения $G \subset X \times X$, если для любых $x, y \in X$ условие $(x, y) \in G$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \leq \varphi(y)$), такая информация может быть привнесена в пространство решений либо в виде весовых коэффициентов с последующим согласованием критериев в виде аддитивно-взвешенной свертки критериев [28, 170, 178, 199, 200, 234, 235, 241], либо в виде уровней уступок по каждому критерию [44], либо в виде идеальной точки и некоторой меры приближения к ней [224, 318]. В реальных моделях информация о сравнимости критериев может быть получена, например, на основе различных экспертных оценок [21, 63, 64, 241].

Если же никакой дополнительной информации о сравнимости критериев качества нет, то оправданными представляются лишь такие принципы согласования и принципы оптимальности, результаты которых не будут противоречить результатам, полученным при появлении любой возможной информации. Существует параллель между описанным “осторожным” подходом к определению принципа оптимальности или принципа согласования и решением задач в условиях неопределенности [148, 178, 234], основанным на принципе гарантированного результата [62, 65, 143, 148, 225, 238]. Общепризнано, что такой идее “осторожности” в полной мере удовлетворяют принципы, носящие имя итальянского экономиста В. Парето [333]: принцип оптимальности Парето

$$\mathbf{P}_\Gamma(\Omega) = \mathrm{Min}(\Omega| \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G) \text{ для всех } \Omega \subset X,$$

а также соответствующий ему принцип согласования Парето

$$\mathbf{R}_\mathbf{P} : \langle X; \mathcal{G}\rangle \to \langle X; \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\rangle.$$

На этом завершим обсуждение проблем оптимальности и согласования критериев на пространствах решений и перейдем к определению общей задачи оптимизации.

Пусть $\mathbf{C}$ — однозначный принцип оптимальности на $\mathfrak{F}_X$, $\Gamma := \langle X; \mathcal{G}\rangle$ — фиксированное пространство решений, Ω — некоторое подмножество из X.

Под общей задачей оптимизации, определенной на пространстве решений $\Gamma := \langle X; \mathcal{G}\rangle$ по принципу оптимальности $\mathbf{C}$, будем понимать задачу нахождения для заданного множества $\Omega \subset X$ соответствующего ему подмножества $C_\Gamma(\Omega)$, где C_Γ — функция выбора, сопоставляемая пространству решений Γ в силу принципа оптимальности $\mathbf{C}$.

Таким образом, общая задача оптимизации может быть задана в виде системы $\{\Omega; \Gamma, C\}$. Множество Ω называется множеством допустимых решений задачи оптимизации, а $C_\Gamma(\Omega)$ — множеством оптимальных решений.

Каждое пространство решений $\Gamma := \langle X; \mathcal{G}\rangle$ и принцип оптимальности $\mathbf{C}$ на $\mathfrak{F}_X$ определяют класс задач оптимизации $\{\Gamma, C\}$. Чтобы выделить из этого класса некоторую конкретную задачу оптимизации, необходимо задать подмножество Ω из X, положив его множеством допустимых решений.

Если принцип оптимальности $\mathbf{C}$ на $\mathfrak{F}_X$ является нормальным, то задачу оптимизации $\{\Omega; \Gamma, C\}$ также будем называть нормальной.

Пусть $\{\Gamma, C\}$ — класс нормальных задач оптимизации и пусть бинарное отношение $G_\Gamma \subset X \times X$ таково, что $C_\Gamma(\Omega) = \mathrm{Min}(\Omega|G_\Gamma)$ для всех $\Omega \subset X$. Образуем однокритериальное пространство $\Gamma' := \langle X; G_\Gamma\rangle$. Легко видеть, что исходный класс задач оптимизации совпадает с классом задач оптимизации $\{\Gamma'; \mathbf{P}\}$, где $\mathbf{P}$ — принцип оптимальности Парето на $\mathfrak{F}_X$. Следовательно, любая нормальная задача оптимизации $\{\Omega; \Gamma, C\}$ может быть переформулирована как задача оптимизации $\{\Omega; \Gamma', \mathbf{P}\}$ на однокритериальном пространстве решений Γ' по принципу оптимальности Парето $\mathbf{P}$. Условимся в дальнейшем формулировать нормальные задачи оптимальности исключительно как задачи оптимизации на однокритериальных пространствах решений. Поскольку при этом соглашении принцип оптимальности фиксирован, то любая нормальная задача оптимизации полностью определяется системой $\{\Omega; \Gamma\}$, где $\Gamma := \langle X; G\rangle$ — однокритериальное пространство решений, а $\Omega \subset X$ — подмножество из X. Более того, так как для любого $\Omega \subset X$ множество $\mathrm{Min}(\Omega|G)$ однозначно определяется сужением G на Ω (бинарным отношением $G \cap (\Omega \times \Omega)$), то любая нормальная задача оптимизации может быть определена множеством допустимых решений Ω и заданным на нем бинарным отношением G и, следовательно, формально может быть отождествлена с системой $\{\Omega; G\}$.

Общая теория нормальных задач оптимизации, рассматриваемых в виде системы $\{\Omega, G\}$, где Ω — произвольное абстрактное множество, а G — произвольное бинарное отношение на нем, разрабатывалась еще Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в [182, гл. 12]. Основные результаты, полученные ими, связывают свойства множества оптимальных решений $\mathrm{Min}(\Omega|G)$ с такими свойствами бинарного отношения G, как ацикличность, полнота и др. Естественный путь дальнейшего развития теории состоит в изучении отдельных классов задач оптимизации, для выделения которых воспользуемся понятием пространства оценок.

Будем говорить, что $\Gamma_1 := \langle X_1, G_1\rangle$ является пространством оценок для пространства решений $\Gamma := \langle X, G\rangle$, если существует отображение $F : X \to X_1$ такое, что для любых $x, y \in X$ включение $(x, y) \in G$ имеет место тогда и только тогда, когда $(F(x), F(y)) \in$ $\in G_1$. Бинарное отношение G_1 будем называть при этом отношением предпочтения оценок, а значение $F(x)$ — оценкой решения x.

Если $\Gamma_1 := \langle X_1, G_1\rangle$ является пространством оценок для пространства решений $\Gamma := \langle X, G\rangle$, то для любого $\Omega \subset X$ имеет место равенство $\mathrm{Min}(\Omega|G) = \{x \in X | F(x) \in \mathrm{Min}(F(\Omega)|G_1)\}$ и, следовательно, любая нормальная задача оптимизации на пространстве решений $\Gamma := \langle X, G\rangle$ может быть рассмотрена как прообраз задачи оптимизации на пространстве решений $\Gamma_1 := \langle X_1, G_1\rangle$.

Множество действительных чисел R с естественным отношением порядка $\leq$ на нем является наиболее изученным с математической точки зрения пространством решений $\langle R, \leq\rangle$.

Пространства решений, для которых $\langle R, \leq\rangle$ является пространством оценок, назовем скалярными пространствами решений, а нормальные задачи оптимизации на скалярных пространствах решений — задачами скалярной оптимизации. Другими словами, пространство решений $\langle X; G\rangle$ является скалярным, если существует вещественнозначная функция $f : X \to R$ такая, что для любых $x, y \in X$ включение $(x, y) \in G$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \leq \leq f(y)$. Как уже отмечалось выше, функция $f : X \to R$, обладающая указанными свойствами, называется функцией полезности. Исследования условий существования функций полезности на пространствах решений, т. е. условий, когда пространство решений является скалярным, составляют основное содержание теории полезности [42, 137, 240].

Современная математическая теория оптимизации в основном имеет дело с задачами скалярной оптимизации [11, 15, 16, 23 – 25, 34, 36 – 38, 56, 58, 91, 115, 122 – 125, 129, 132, 136, 146, 163, 167, 171, 202, 245]. Наряду с этим начиная с 60-х годов интенсивно развивается теория векторной оптимизации (библиографические указатели [249, 325] содержат более 2000 наименований).

Основополагающим для определения задач векторной оптимизации является понятие предупорядоченного векторного пространства — системы $\langle X, \precsim\rangle$, состоящей из векторного пространства X и заданного на нем отношения предпорядка $\precsim$, согласованного с векторной структурой X (точное определение см. в § 2 гл. 1).

С точки зрения теории принятия решений любое предупорядоченное векторное пространство, рассматриваемое как система $\langle X, \precsim\rangle$, является пространством решений.

Будем различать две формулировки задачи векторной оптимизации: каноническую и общую.

Каноническими задачами векторной оптимизации будем называть нормальные задачи оптимизации, определенные на предупорядоченных векторных пространствах.

Таким образом, для того чтобы сформулировать каноническую задачу векторной оптимизации, необходимо задать некоторое предупорядоченное векторное пространство $\langle X, \precsim\rangle$ и подмножество Ω из X. Множество оптимальных решений канонической задачи векторной оптимизации отождествляется с подмножеством $\mathrm{Min}(\Omega|\precsim)$ минимальных векторов множества Ω.

Пространство решений $\Gamma := \langle X; G\rangle$ назовем векторным, если для него существует предупорядоченное векторное пространство оценок, т. е. если существуют предупорядоченное векторное пространство $\langle Y, \precsim\rangle$ и отображение $F : X \to Y$ такие, что для любых $x_1, x_2 \in X$ включение $(x_1, x_2) \in G$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(x_1) \precsim F(x_2)$.

Разумеется, что любое предупорядоченное векторное пространство является векторным пространством решений. Условимся считать при этом, что пространство оценок совпадает с самим пространством решений, а соответствие между ними задается тождественным отображением.

Общими задачами векторной оптимизации называются нормальные задачи оптимизации, определенные на векторных пространствах решений.

Математическая формулировка общей задачи векторной оптимизации включает три объекта: множество Ω, предупорядоченное векторное пространство $\langle Y, \precsim \rangle$ и отображение $F : \Omega \to Y$. Множество оптимальных решений общей задачи векторной оптимизации определяется как множество допустимых решений $x^0 \in \Omega$, для которых выполнено включение $F(x^0) \in \mathrm{Min}(F(\Omega)|\precsim)$.

Нетрудно видеть, что произвольная общая задача векторной оптимизации является прообразом соответствующей канонической задачи векторной оптимизации, определенной на пространстве оценок.

Итак, в рамках общей теории принятия решений задачи векторной оптимизации образуют специальный класс нормальных задач оптимизации. Исследования этого класса задач были стимулированы в значительной мере тем, что в приложениях наибольшее использование нашли такие модели многокритериальных задач принятия решений, у которых показатели качества заданы функциями полезности (см., например, [44, 65, 112, 114, 134, 170, 178, 187, 192, 214, 219, 220]). Применение в этих случаях принципа оптимальности Парето однозначно приводит к задачам векторной оптимизации. Приложения теории векторной оптимизации не ограничиваются задачами принятия решений. Задачи минимизации векторных отображений, а также задачи нахождения минимальных элементов подмножеств в предупорядоченных векторных пространствах возникают во многих разделах математики [17, 31, 50, 96, 130, 140, 145]. Переход от скалярной оптимизации к векторной является также актуальным и с точки зрения внутреннего развития математической теории оптимизации. Тенденция к обобщениям такого рода находила свое выражение в таких понятиях, как критическая точка отображения [60, 61], экстремальность системы функций по Нойштадту [326] , s-необходимость [159 – 162], которые были положены в основу различных общих схем исследования скалярных задач оптимизации.

В настоящее время математическая теория векторной оптимизации интенсивно развивается как у нас в стране [5 – 7, 35, 92 – 94, 116 – 119, 150 – 154, 156, 170, 179, 200, 238, 241] , так и за рубежом [263 – 268, 272, 273, 277, 278, 297, 298, 306 – 309, 324, 325, 346 – 348, 352, 353, 358 – 360]. Основные усилия ученых концентрируются на разработке таких традиционных для теории оптимизации направлений, как теоремы существования оптимальных решений [269, 298, 309, 328] , условия оптимальности [90, 92 – 94, 150 – 154, 156, 250, 255, 258, 273, 274, 277, 278, 313, 317, 324, 343], двойственность в задачах векторной оптимизации [5 – 7, 199, 252, 272, 308, 348], устойчивость оптимальных решений [179] и т.д. Значительная доля исследований посвящена проблеме скаляризации [28, 63, 90, 114, 134, 169, 173, 178, 187, 192, 199, 241, 288, 291, 306, 313, 342, 356, 359, 360], повышенный интерес к которой объясняется прежде всего тем, что редукция задачи векторной оптимизации к задаче или семейству задач скалярной оптимизации открывает путь для использования в векторной оптимизации огромного арсенала хорошо разработанных методов скалярной оптимизации.

В книге развивается математическая теория оптимальных решений выпуклых и негладких задач векторной оптимизации, включая задачи оптимального управления с негладким векторным показателем качества.

Глава 1 посвящена исследованию сублинейных отношений предпорядка, посредством которых в формальных моделях задач векторной оптимизации задаются показатели качества. В § 1 представлены основные сведения, относящиеся к бинарным отношениям. Сублинейные отношения предпорядка и связанное с ними понятие предупорядоченного векторного пространства вводятся в § 2. Изучению внутреннего строения сублинейных отношений предпорядка посвящен § 3. Здесь установлено, что произвольное сублинейное отношение предпорядка $G \subset X \times X$ (X — векторное пространство) обладает структурой верхней решетки, элементами которой являются попарно непересекающиеся относительно открытые сублинейные отношения предпорядка, образующие разбиение G. Этот факт используется в § 4 при построении для сублинейных отношений слабого порядка двойственных объектов — кортежей линейных функционалов. Понятие кортежа линейных функционалов позволяет задавать сублинейные отношения слабого порядка функционально, что открывает возможность для аналитического исследования задач векторной оптимизации.

Основной темой главы 2 является проблема скаляризации выпуклых задач векторной оптимизации. В первом параграфе этой главы (§ 5) представлены определения основных понятий для канонических задач векторной оптимизации. Следующий параграф (§ 6) посвящен методу линейной скаляризации. Основные утверждения, лежащие в основе линейной скаляризации, впервые были получены в работе [247] для пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным отношением частичного порядка, заданным неотрицательным ортантом. Для упорядоченных топологических векторных пространств аналогичные утверждения были доказаны в статье [90]. Различные вопросы, относящиеся к линейной скаляризации, рассматривались позднее во многих работах, в том числе в [131, 199, 264, 273, 295, 306, 356, 358 – 360]. Исчерпывающую характеристику множества оптимальных решений (необходимые и достаточные условия оптимальности) метод линейной скаляризации дает лишь для задач сравнительно узкого класса: канонических задач векторной оптимизации с выпуклым многогранным множеством допустимых решений (векторных задач линейного программирования [360]). Для произвольных выпуклых задач векторной оптимизации метод линейной скаляризации позволяет охарактеризовать только собственно минимальные решения [90, 199, 256, 263, 282, 295, 297, 307, 327], для остальных же минимальных решений он дает лишь необходимое условие минимальности.

Естествен следующий вопрос: какими дополнительными условиями следует пополнить это необходимое условие, чтобы в совокупности они были необходимыми и достаточными для минимальности решений, которые не являются собственно минимальными? Ответ на этот вопрос дан в § 7, 8. В § 7 для кортежей линейных функционалов, заданных на предупорядоченном векторном пространстве, вводятся и исследуются понятия положительности, существенной и сильной положительности. Эти понятия обобщают аналогичные понятия для линейных функционалов. Однако если для существования существенно положительных и тем более сильно положительных линейных функционалов необходимо налагать дополнительные требования на предупорядоченное векторное пространство, на котором они заданы, то сильно положительные, а значит, и существенно положительные кортежи лийейных функционалов существуют на любом предупорядоченном векторном пространстве. В § 8 представлен новый метод скаляризации задач векторной оптимизации, названный методом условно линейной скаляризации. Этот метод редуцирует исходную задачу векторной оптимизации к семейству задач минимизации кортежей линейных функционалов. Понятие минимума для кортежа линейных функционалов вводится в данном параграфе. Теоретико-множественным эквивалентом такого понятия является понятие минимума для сублинейного отношения слабого порядка, дуального рассматриваемому кортежу линейных функционалов. В силу основного результата данного параграфа, доказанного в теореме 8.2, допустимое решение произвольной выпуклой задачи векторной оптимизации является (слабо) $\preceq$-минимальным тогда и только тогда, когда оно минимизирует на множестве допустимых решений некоторый (существенно положительный) строго положительный кортеж линейных функционалов. Таким образом, теорема 8.2

дает исчерпывающий ответ на поставленный выше вопрос. В качестве приложения теоремы 8.2 в § 9 получен критерий для оптимальных решений скалярных задач выпуклого программирования, обобщающий классическую теорему Куна–Таккера и выполняющийся без каких-либо предположений регулярности (в классической теореме Куна–Таккера, как известно [115, 131, 132, 202, 213, 218], предполагается выполненным условие регулярности Слейтера).

Исследование общих задач векторной оптимизации требует привлечения средств анализа функций и отображений. Характерная черта современного этапа развития математической теории оптимизации — бурное развитие в ее рамках негладкого анализа, т. е. анализа недифференцируемых в классическом смысле функций и отображений. Первым обобщением классического дифференциала явилось понятие субдифференциала для выпуклых функций (см., например, [11, 126, 212, 218]). Распространение этого понятия на более широкие классы функций привело к возникновению различных теорий субдифференцирования (А. Д. Иоффе и В. М. Тихомиров [126], Б. Н. Пшеничный [211, 212], Ф.Кларк [270, 271], Р. Рокафеллар [340, 341], Ж.–П. Пено [334]), а также таких понятий, как производные множества (Дж. Варга [34]) квазидифференциалы (В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [100, 101, 105, 106, 276, 336]), вееры (Х. Халкин [293], А. Д. Иоффе [303]), верхние выпуклые аппроксимации или ЛМО–аппроксимации ([159-162]) и ряду других [120, 147, 152, 180, 181, 201, 245, 299, 305, 319].

Остановимся более подробно на общих идеях, лежащих в основе различных теорий субдифференцирования. С этой целью рассмотрим вещественнозначную функцию f, определенную на конечномерном евклидовом пространстве X. Общим для всех теорий субдифференцирования является то, что в них в качестве обобщенных дифференциалов функции f, называемых субдифференциалами, рассматриваются замкнутые выпуклые множества из сопряженного пространства X^*, образующие полулинейное пространство $\widehat{V}(X^*)$. Так как в силу двойственности Минковского [155] пространство $\widehat{V}(X^*)$ изоморфно полулинейному пространству $\widehat{P}(X)$ сублинейных функций на X, то определение субдифференциала для функции f в точке x^0 равносильно определению некоторой сублинейной локальной аппроксимации для этой функции в точке x^0. Для выпуклых функций роль такой локальной аппроксимации играет обычная производная по направлениям (см. [11, 218]). Для субдифференциалов Кларка вводится специальная производная по направлениям, называемая производной Кларка, замечательным свойством которой является сублинейность. Субдифференциалы Пшеничного [211, 212] являются двойственными объектами для верхних выпуклых аппроксимаций, определяемых как сублинейные мажоранты верхней производной Дини [305, 334]. Несколько другой подход реализован в монографиях [126, 213], в которых в качестве локальных аппроксимаций использованы традиционные производные по направлениям, а их принадлежность пространству сублинейных функций постулирована как условие субдифференцирования. Отметим, что такой подход аналогичен классическим теориям дифференцирования [1, 2, 357] и отличается от них лишь тем, что вместо пространства линейных функций в качестве пространства локальных аппроксимаций рассматривается более широкое пространство сублинейных функций.

Теория квазидифференцирования, разработанная В.Ф. Демьяновым и А.М. Рубиновым [99 - 101, 103 - 107, 275, 276], — естественное развитие этого подхода. Существенно новым в данной теории является использование в качестве обобщенных дифференциалов (квазидифференциалов) элементов векторного пространства выпуклых множеств $V(X^*)$ [155, 193, 253, 337] (элементами пространства $V(X^*)$ являются классы эквивалентности пар выпуклых множеств из X^*). Подробнее пространство $V(X^*)$ будет охарактеризовано в § 6. Поскольку полулинейное пространство $\widehat{V}(X^*)$ вкладывается в векторное пространство $V(X^*)$ как воспроизводящий выпуклый конус, то переход от субдифференциалов к квазидифференциалам означает фактически переход к более широкому пространству обобщенных дифференциалов. Соответствующим расширением пространства локальных аппроксимаций является векторное пространство разностно-сублинейных функций $P(X)$, т. е. пространство функций, пред ставимых в виде разности двух сублинейных функций, при этом двойственность Минковского продолжается до изоморфизма между $V(X^*)$ и $P(X)$. В качестве локальной аппроксимации функции f в точке x^0 в теории квазидифференцирования [105 – 107] используется обычная производная по направлениям $f'(x^0|\cdot)$. В том случае, когда $f'(x^0|\cdot)$ принадлежит пространству $P(X)$, ей соответствует благодаря изоморфизму между $P(X)$ и $V(X^*)$ элемент из $V(X^*)$, который и называется, согласно [105 – 107], квазидифференциалом функции f в точке x^0. Основные положения теории квазидифференцирования изложены в монографиях [100, 101, 276] и сборнике [336]. Там же имеется библиографический перечень работ по этой тематике.

В главе 3 настоящей монографии развита теория аппроксимативного квазидифференцирования вещественнозначных функций, обобщающая теорию квазидифференцирования. Пространство разностно-сублинейных функций и двойственное ему пространство выпуклых множеств, играющие ключевую роль в этих теориях, описаны в первом параграфе главы (§ 10). Кроме того, в § 10 представлены основные результаты квазидифференциального анализа разностно-сублинейных функций: определен оператор квазидифференцирования разностно-сублинейных функций; построено исчисление квазидифференциалов; представлены двойственные критерии (в терминах квазидифференциалов) неотрицательности разностно-сублинейных функций, а также разностно-сублинейный аналог леммы Фаркаша. В § 11 развивается теория аппроксимативного квазидифференцирования положительно однородных функций. Основным понятием этой теории является понятие ε–квазидифференциала. ε–Квазидифференциалом положительно однородной функции $p : X \to \mathbb{R}$ называется элемент пространства выпуклых множеств $V(X^*)$, которому соответствует в силу двойственности Минковского разностно-сублинейная функция, равномерно аппроксимирующая на единичном шаре функцию p с точностью ε. Если ε-квазидифференциал существует при любом положительном ε, то функция p называется аппроксимативно квазидифференцируемой, а аппроксимативный квазидифференциал определяется как семейство $\mathcal{D}p := \{\mathcal{D}_\varepsilon p \mid \varepsilon > 0\}$, где $\mathcal{D}_\varepsilon p$ — подмножество из $V(X')$, элементами которого являются ε–квазидифференциалы функции p. Из теоремы Вейерштрасса–Стоуна выводится, что пространство аппроксимативно квазидифференцируемых положительно однородных функций совпадает с пространством непрерывных положительно однородных функций. Двойственное ему пространство — пространство аппроксимативных квазидифференциалов — является пополнением пространства $V(X^*)$, реализованным в виде минимальных фильтров Коши. Строится исчисление ε–квазидифференциалов; устанавливаются необходимые, а также достаточные условия неотрицательности (положительности) ε–квазидифференцируемых положительно однородных функций; доказывается ε–квазидифференциальный вариант леммы Фаркаша.

В § 12 понятия ε–квазидифференцируемости и аппроксимативной квазидифференцируемости распространяются на произвольные вещественнозначные функции. Схема распространения следующая: функция $\to$ положительно однородная локальная аппроксимация этой функции в точке $\to$ ε–квазидифференциал (аппроксимативный квазидифференциал) локальной аппроксимации как ε–квазидифференциал (аппроксимативный квазидифференциал) исходной функции в точке. Используя различные положительно однородные локальные аппроксимации, по указанной схеме могут быть построены различные теории аппроксимативного квазидифференцирования. Первый вариант такой теории строится в работе на основании обычной производной по направлениям. Подобный выбор локальной аппроксимации обусловлен двумя причинами. Во-первых, производная по направлениям является наиболее простой и наиболее распространенной положительно однородной локальной аппроксимацией. Во-вторых, выбор той же локальной аппроксимации, что и в теории квазидифференцирования Демьянова–Рубинова, позволит более отчетливо выявить особенности новой теории. Отметим, что существование равномерной производной по направлениям обеспечивает аппроксимативную квазидифференцируемость исходной функции. Второй вариант теории аппроксимативной квазидифференцируемости строится в работе на основании нижней и верхней производных Дини. Основными понятиями этого варианта теории являются нижние и верхние ε-=квазидифференциалы, а также нижние и верхние аппроксимативные квазидифференциалы. Оба варианта теории совпадают для равномерно дифференцируемых по направлениям функций. В частности, такое совпадение имеет место для локально липшицевых функций, дифференцируемых по направлениям. Произвольная локально липшицева функция аппроксимативно квазидифференцируема как снизу, так и сверху. В каждом из вариантов теории развиты простейшие правила исчисления соответствующих ε–квазидифференциалов. В первом варианте такое исчисление богаче, чем во втором, что обусловлено более богатым исчислением обычных производных по направлению по сравнению с исчислением производных Дини. Завершается параграф доказательством необходимых, а также достаточных условий локального минимума (максимума) для вещественнозначных функций, формулируемых в терминах нижних (верхних) ε–квазидифференциалов.

В § 13 идеи квазидифференцируемости распространяются на локальный анализ множеств. С этой целью вводятся понятия квазинормалей и ε–квазинормалей (внутренних и внешних) к множествам в заданной точке, связанные с такими локальными аппроксимациями множеств, как внутренний и касательный (контингентный) конусы. Устанавливаются условия существования квазинормалей и ε–квазинормалей и предлагаются методы их нахождения для некоторых частных случаев.

Выводу условий локального минимума для вещественнозначных функций при наличии ограничений посвящен § 14. Рассматриваются как нефункциональные ограничения, заданные в виде абстрактного множества, так и функциональные ограничения типа неравенства и равенства. Представленные условия оптимальности формулируются в терминах ε–квазидифференциалов и ε–квазинормалей.

Заключительный параграф третьей главы (§ 15) посвящен исследованию функции симметризованного расстояния до множества. Эта функция использовалась в § 13 при рассмотрении вопроса о существовании квазинормалей и ε–квазинормалей к множествам и в § 19, 20 для функционального представления сублинейных отношений предпорядка.

Глава 4 посвящена распространению теории аппроксимативного квазидифференцирования на векторные отображения и выводу условий оптимальности для решений общей задачи векторной оптимизации. В первом параграфе этой главы (§ 16) вводится пространство разностно-сублинейных отображений $P(X,Y)$ (X и Y — конечномерные евклидовы пространства), рассматриваемое в теории квазидифференцирования отображений как пространство основных локальных аппроксимаций. Устанавливается двойственность между пространством $P(X,Y)$ и пространством $\mathcal{L}(Y^*,V(X^*))$ линейных отображений из Y^* в пространство выпуклых множеств $V(X^*)$. Соответствие двойственности между $P(X,Y)$ и $\mathcal{L}(Y^*,V(X^*))$ задается оператором сопряжения, играющим в теории квазидифференцирования отображений ту же роль, что и оператор квазидифференцирования разностно-сублинейных функций в теории квазидифференцирования вещественнозначных функций. В.Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [100, 107, 275, 276] использовали при определении квазидифференциала для отображений несколько другой подход. Основным понятием в их теории является понятие квазиопоры разностносублинейного отображения. В работе устанавливается связь между сопряженным отображением и квазиопорой разностно-сублинейного отображения, что позволяет выяснить соотношением принятого в монографии подхода с подходом Демьянова–Рубинова.

В § 17 даны определения квазидифференцируемости, ε–квазидифференцируемости и аппроксимативной квазидифференцируемости векторных отображений. Схема, по которой вводятся эти понятия, аналогична схеме определения соответствующих понятий для вещественнозначных функций. Например, определение понятия ε–квазидифференциала отображения состоит из следующих этапов: отображение $\to$ производная по направлениям $\to$ разностно-сублинейная ε–аппроксимация производной по направлениям $\to$ отображение, сопряженное разностно-сублинейной ε -аппроксимации как ε–квазидифференциал исходного отображения. Доказана теорема об ε–квазидифференцируемости композиции отображений, на основе которой может быть построено исчисление ε–квазидифференциалов отображений.

Основные определения понятий локального $\precsim$–минимума для векторнозначных отображений даны в § 18. Здесь же исследована связь этих понятий с принципами оптимальности ряда распространенных задач скалярной оптимизации (задач нелинейного программирования, минимаксных задач).

Дальнейшая часть данной главы посвящена условиям локального $\precsim$-минимума для векторных отображений. Теория необходимых и достаточных условий оптимальности занимает центральное место в математической теории оптимизации, поскольку большинство других разделов (например, устойчивость оптимальных решений, численные методы и др.) существенным образом основываются на условиях оптимальности. Значительный вклад в разработку условий оптимальности и методов их вывода в общих экстремальных задачах внесли Р. В. Гамкрелидзе [60, 61], В.Г. Болтянский [24 – 27], А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин [113, 159 – 162, 174, 175], А.Д. Иоффе и В.М. Тихомиров [126], Б. Н. Пшеничный [211 – 213], Л. В.Нойштадт [326], Х. Халкин [292, 293] и др. Одной из тенденций современного этапа развития этого направления исследований является создание теорий необходимых и достаточных условий оптимальности, базирующихся на средствах негладкого анализа [23, 120, 147, 148, 215, 216, 230, 257, 258, 286, 300]. В скалярных задачах оптимизации основные трудности при разработке условий оптимальности высокого порядка возникают при наличии ограничений, в частности при наличии функциональных ограничений типа неравенства и равенства. Впервые эти трудности были преодолены в работах [159 – 162, 175] (несколько другой вариант их теории был предложен в [302]). Развитие техники негладкого анализа способствовало появлению и других подходов [13, 14, 152, 215, 216, 233, 267, 283, 304, 314, 315, 354, 355]. Условиям оптимальности в задачах векторной оптимизации посвящены работы [92 - 94, 150 - 154, 156, 250, 255, 258, 273, 274, 277, 278, 313, 317, 324, 343].

В § 19, 20 монографии представлены условия оптимальности первого и второго порядков для задачи $\precsim$-минимизации векторного отображения, определенного на конечномерном евклидовом пространстве. Ключевую роль в предлагаемом методе вывода условий оптимальности играет скаляризация исходной задачи векторной оптимизации, осуществляемая на первом этапе исследования. Отметим, что такой же этап характерен и для исследований задач скалярной оптимизации при наличии ограничений. Достаточно вспомнить теоремы о редукции (см., например, [271, 302]), различные виды штрафных функций [38, 132, 202], производящие функции в ЛМО-теории [159 – 162]. Однако во всех этих подходах выбор редуцированной задачи носит в значительной мере искусственный характер и зависит скорее от используемой техники исследования, а не от структуры предпочтения исходной оптимизационной задачи. В отличие от этого предлагаемый в работе метод редукции задачи векторной оптимизации к скалярным задачам имеет совершенно определенную основу —

функциональное представление отношения предпорядка, задающего в задаче оптимизации структуру предпочтения.

В § 19 функциональное представление сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ осуществляется при помощи непрерывной сублинейной функции $s_{\precsim} : X \to R,$ которая может быть построена по отношению $\precsim$ (например, по функции симметризованного расстояния до конуса положительных векторов отношения $\precsim$). Такое представление позволяет редуцировать исходную задачу $\precsim$ -минимизации векторного отображения $F : X \to Y$ к задаче минимизации скалярной функции $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0)).$ Дальнейший анализ композиции $s_{\precsim}(F(x)-F(x^0))$ позволяет получить достаточные, а если конус положительных векторов телесен, то и необходимые условия оптимальности для решения $x^0.$ Заметим, что даже в том случае, когда F - гладкое отображение, композиция $s_{\precsim}(F(x)-F(x^0))$ может быть в общем случае недифференцируемой в классическом смысле в точке $x^0.$ Это требует привлечения для исследования средств негладкого анализа.

Необходимые и достаточные условия оптимальности первого порядка доказаны соответственно в теоремах 19.2 и 19.1. Исходные требования, касающиеся дифференциальных свойств минимизируемого отображения, ограничиваются в данных теоремах лишь требованием существования (равномерной) производной по направлениям. В теоремах 19.4 и 19.3 эти условия переформулированы в двойственной форме в терминах ε -квазидифференциалов. Дальнейшая часть § 19 посвящена необходимым условиям оптимальности второго порядка. В теореме 19.5 доказано основное необходимое условие оптимальности второго порядка. Его справедливость установлена в предположении, что отображение F обладает второй производной по направлениям с отклонениями. В качестве следствий этого результата получены еще два необходимых условия оптимальности второго порядка, более простые по форме, чем основное утверждение. Первое следствие (теорема 19.6) доказано при выполнении дополнительного условия, названного вторым условием регулярности отображения F относительно $\precsim$. Дальнейшее упрощение формы необходимого условия оптимальности второго порядка достигнуто во втором следствии (теорема 19.7) за счет ужесточения требований относительно F: справедливость теоремы 19.7 доказана для отображений $F,$ обладающих строгой производной первого порядка.

В § 20 функциональное представление сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ осуществляется при помощи непрерывной сублинейной функции $\sigma_{\precsim}$ и оператора проектирования $P_{\precsim}.$ Такое представление позволяет получить необходимые условия оптимальности и для случая, когда конус положительных векторов отношения $\precsim$ не является телесным. Исходная задача векторной оптимизации редуцируется при этом к задаче минимизации скалярной функции $x \to \sigma_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ при ограничении типа равенства $P_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) = 0$. Дальнейшая структура § 20 аналогична структуре предыдущего параграфа, поэтому подробную его характеристику проводить не будем. Отметим лишь то, что анализ ограничения типа равенства $P_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) = 0$ проводится в предположении, что выполнено первое условие регулярности для отображения F. В частности, выполнение классического условия Люстерника для отображения $P_{\precsim} \circ F$ достаточно для выполнения этого условия. Особенностью § 20 является также достаточное условие оптимальности второго порядка, доказанное в теореме 20.6 для дважды дифференцируемых по Фреше отображений F.

В заключительном параграфе (§ 21) главы в качестве следствий результатов из § 19, 20 получены необходимые, а также достаточные условия оптимальности для скалярной задачи нелинейного программирования.

Глава 5 посвящена задачам оптимального управления системами, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Литература по данной проблематике столь обширна, что привести здесь сколь-нибудь полный ее обзор не представляется возможным. Основополагающий вклад в развитие теории оптимального управления внесли советские математики Л. С. Понтрягин [207, 209, 210], Н. Н. Красовский [141 – 144], В. Г. Болтянский [24, 25, 210], Р. В. Гамкрелидзе [60, 61, 210], В.И. Зубов [122 – 125], Н.Н. Моисеев [177, 178] и многие другие [11 – 16, 23, 36, 37, 51 – 59, 121, 127, 136, 146, 148, 194, 195, 226 – 228, 242, 248].

Цель главы — развить теорию необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления с векторным показателем качества терминального типа, заданным аппроксимативно квазидифференцируемым отображением. Относительно системы управления сохраняются традиционные предположения гладкости. Заметим, что такие предположения являются новыми и для задач со скалярным показателем качества. Формулировка задачи дана в § 22. В задачах оптимального управления с векторным показателем качества аналогами общих понятий минимальности и слабой минимальности являются соответственно понятия оптимальности по Парето и оптимальности по Слейтеру. Поскольку в задачах терминального управления цель управления определяется лишь состоянием системы в конечный момент времени, то исходная бесконечномерная задача оптимизации может быть интерпретирована как задача $\precsim$-минимизации отображения на подмножестве конечномерного пространства (множестве достижимости системы управления в конечный момент времени). Такая интерпретация позволяет, воспользовавшись результатами предыдущей главы, сформулировать как необходимые, так и достаточные условия оптимальности в рассматриваемой задаче терминального управления. Однако отсутствие в общем случае стандартных методов построения касательного конуса к множеству достижимости системы исключает возможность эффективного использования достаточных условий предыдущей главы. Что же касается необходимых условий оптимальности, то их можно применить в ослабленном виде, заменив касательный конус каким-либо его подмножеством, допускающим конструктивное построение. С помощью такого приема для задачи терминального управления с векторным показателем качества, удовлетворяющим лишь требованию аппроксимативной квазидифференцируемости, развита (§ 23 – 25) полная теория необходимых условий оптимальности по Слейтеру. Полнота теории понимается в том смысле, что, заменив всюду векторный показатель качества скалярным, а требование аппроксимативной квазидифференцируемости классической дифференцируемостью, мы получим все известные необходимые условия оптимальности для задачи терминального управления со скалярным показателем качества.

Коротко о распределении результатов по параграфам. Обобщению классических условий оптимальности посвящен § 23. Здесь представлены ε–квазидифференциальные варианты условий Эйлера и Лагранжа. В § 24 получен ε–квазидифференциальный принцип максимума Понтрягина и, кроме того, в предположении, что отображение, задающее векторный показатель качества, дважды дифференцируемо, для оптимальных по Слейтеру управлений доказано многоточечное условие в матричных импульсах. Последний результат является новым (несмотря на гладкость показателя качества) и для задач оптимального управления со скалярным показателем качества при наличии ограничений типа неравенства и равенства. Впервые условие в матричных импульсах было получено Р. Габасовым [51, 52, 55] (см. также [228]) для задачи со скалярным показателем качества.

Необходимые условия оптимальности по Слейтеру, которые представлены в § 25, по своей сути являются обобщением классического условия Лежандра–Клебша [57, 95, 126]. Впервые обобщенные условия Лежандра–Клебша были получены для задачи управления со скалярным показателем качества в работах Г. Дж. Келли, Р. Е. Коппа и Х. Г. Мойера [133, 139, 310] (для скалярных управлений), а также в работах И. Б. Вапнярского [33] и Б. С. Гоха [284, 285] (для векторных управлений). Существенный вклад в развитие методики вывода обобщенных условий Лежандра–Клебша внесли Р. Габасов и Ф.М. Кириллова [55], В. А. Срочко [226, 227]. Позднее распространению обобщенных условий Лежандра–Клебша на задачи управления со скалярным показателем качества при наличии ограничений на правый конец траектории был посвящен целый ряд работ [3, 4, 18, 109, 110, 127, 314, 315]. Обобщенные условия Лежандра–Клебша для оптимальных по Слейтеру процессов в задачах управления с векторным показателем качества были представлены в работах [68, 74, 76, 280]. С целью упрощения изложения в § 25 при выводе обобщенных условий Лежандра – Клебша предполагается, что показатель качества является квазидифференцируемым, а конус положительных векторов отношения предпочтения оценок — телесным.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Р. Габасову и Ф. М. Кирилловой, под руководством которых были получены основные результаты, составившие содержание настоящей книги. Искренне благодарю также В. Ф. Демьянова и В. В. Альсевича за ценные критические замечания и советы, высказанные при рецензировании книги. Пользуясь возможностью, благодарю моих коллег, сотрудников лаборатории теории процессов управления Института математики АН БССР, искренняя помощь и поддержка которых всегда была своевременна и необходима. А. И. Астровского и Т. Б. Копейкину благодарю за большую помощь, оказанную при оформлении рукописи.

Глава 1

СУБЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОРЯДКА

В формальных моделях задач векторной оптимизации, рассматриваемых в данной монографии, отношения предпочтения (векторные показатели качества) задаются посредством сублинейных отношений предпорядка. Изучению некоторых свойств этого класса отношений и посвящена настоящая глава. В частности, здесь показано, что сублинейные отношения предпорядка обладают естественным (вытекающим из алгебраических свойств отношения) внутренним строением, характеризующим различия в интенсивности предпочтения сравниваемых пар решений. Выявленная внутренняя структура использована далее при построении для сублинейных отношений слабого порядка, т. е. полных сублинейных отношений предпорядка, двойственных объектов, названных кортежами линейных функционалов.

§ 1. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1.1. Пусть X — произвольное непустое множество, которое не предполагается наделенным какой-либо структурой.

Бинарным отношением на множестве X называется любое подмножество G декартового квадрата $X \times X$, т. е. любое подмножество упорядоченных пар элементов из X. Если $(x, y) \in G$, то говорят, что элемент x находится в отношении G к элементу y и записывают это через xGy. Следовательно, для любых двух элементов $x, y \in X$ соотношение xGy равносильно включению $(x, y) \in G$.

Понятие бинарного отношения на множестве X эквивалентно понятию многозначного отображения из X в X. Эта эквивалентность устанавливается взаимно однозначным соответствием между многозначными отображениями и их графиками. Поэтому ниже часто будем отождествлять определенное на X бинарное отношение G с многозначным отображением $x \rightrightarrows G(x) = \{y \in X|\ (x, y) \in G\}$. *Областью определения* бинарного отношения (многозначного отображения) G назовем подмножество $\mathrm{dom}G = \{x \in X|\ G(x) \neq \varnothing\}$.

Отношение равенства элементов множества X является бинарным отношением на X, которое задается диагональю $\Delta = \{(x, y) \in X \times X|\ x = y\}$. Соответствующее ему многозначное отображение есть тождественное отображение множества X на себя.

Если Y — некоторое подмножество из X, то *сужением* бинарного отношения G на Y называется бинарное отношение, определяемое на Y, подмножеством $G \cap (Y \times Y)$. В этом случае также используется следующая терминология. Говорят, что бинарное отношение $G \cap (Y \times Y)$ *индуцировано* на Y бинарным отношением G, заданным на X.

Над бинарными отношениями как над подмножествами декартового квадрата могут быть осуществлены любые теоретико-множественные операции. В частности, можно рассматривать *объединения* и *пересечения* бинарных отношений; *дополнение* к G, т. е. подмножество $\overline{G} = (X \times X) \setminus G$, задает бинарное отношение $\overline{G}$, называемое *отрицанием* бинарного отношения G. Если для бинарных отношений $\widehat{G}$ и G имеет место включение $\widehat{G} \subseteq G$, то говорят, что бинарное отношение G *доминирует* бинарное отношение $\widehat{G}$.

Специфичность бинарных отношений как подмножеств упорядоченных пар позволяет определить и другие операции над бинарными отношениями, отличные от теоретике-множественных. В частности, полагая $G^{-1} = \{(x, y) |\ (y, x) \in G\}$ для любого бинарного отношения G, определим отношение G^{-1}, *обратное* к G.

Композицией бинарных отношений G_1 и G_2, заданных на X, называется бинарное отношение $G_2 \circ G_1$ на X такое, что $(x, y) \in \in G_2 \circ G_1$ тогда и только тогда, когда существует $z \in X$, удовлетворяющий условиям $(x, z) \in G_1$ и $(z, y) \in G_2$.

Говорят, что бинарное отношение G, определенное на множестве X, является

рефлексивным, если G доминирует отношение равенства Δ, т. е. если $\Delta \subset G$;

антирефлексивным, если G не пересекается с отношением равенства Δ, т. е. $\Delta \cap G = \varnothing$;

симметричным, если $G = G^{-1}$;

антисимметричным, если $G \cap G^{-1} \subset \mathcal{D}$;

асимметричным, если $G \cap G^{-1} = \varnothing$;

транзитивным, если $G \circ G \subset G$;

полным, если $G \cup G^{-1} = X \times X$, т. е. для любых $x, y \in X$ имеет место хотя бы одно из соотношений xGy и yGx.

Все свойства бинарных отношений могут быть без труда переформулированы в терминах многозначных отображений.

Более подробно со свойствами бинарных отношений, а также с существующими взаимозависимостями между ними можно познакомиться, например, по монографиям [9, 22, 29, 50, 137, 240].

Пусть G — прозвольное бинарное отношение на множестве X. *Симметричная* и *асимметричная части* G определяются соответственно как отношения $S_G = G \cap G^{-1}$ и $P_G = G \setminus G^{-1}$. Очевидно, что $G = S_G \cup P_G$, причем $S_G \cap P_G = \varnothing$.

Будем говорить, что бинарное отношение G_1 *правильно доминирует* бинарное отношение G_2, если G_1 доминирует G_2 и отношение доминирования сохраняется при переходах к симметричной и асимметричной частям G, т. е. если $S_{G_1} \supset S_{G_2}$ и $P_{G_1} \supset P_{G_2}$.

Для симметричных и асимметричных бинарных отношений понятия доминируемости и правильной доминируемости совпадают.

Минимальным элементом подмножества $Q \subset X$ относительно заданного на X бинарного отношения G называется такой элемент $x^0 \in Q \cap \mathrm{dom} G$, для которого не существует $\bar{x} \in Q$, удовлетворяющий соотношению $(\bar{x}, x^0) \in P_G = G \setminus G^{-1}$.

Если асимметричная часть $P_G = G \setminus G^{-1}$ бинарного отношения G пуста, т. е. если G симметрично, то условимся любой элемент из $Q \cap \mathrm{dom} G$ считать минимальным в Q относительно G.

Множество всех минимальных элементов подмножества $Q \subset X$ относительно заданного на X бинарного отношения G будем обозначать символом $\mathrm{Min}(Q|G)$.

Предложение 1.1. а) *Если G_1 и G_2 — бинарные отношения на X, причем G_1 правильно доминирует G_2, то для любого подмножества Q из X имеет место включение*

$$\mathrm{Min}(Q|G_1) \subset \mathrm{Min}(Q|G_2). \tag{1.1}$$

б) *Если G — бинарное отношение на X, а Q_1 и Q_2 — подмножества в X такие, что $Q_2 \subset Q_1$, то*

$$Q_2 \cap \mathrm{Min}(Q_1|G) \subset \mathrm{Min}(Q_2|G). \tag{1.2}$$

Для полных бинарных отношений G условие минимальности элемента $x^9 \in Q$ эквивалентно выполнению включения $(x^0, x) \in G$ для всех $x \in Q$. Постулирование этого свойства в общем случае приводит к понятию наименьшего элемента множества.

Наименьшим элементом подмножества $Q \subset X$ относительно бинарного отношения G называется такой элемент $x^0 \in Q$, что $(x^0, x) \in G$ для всех $x \in Q$.

Таким образом, для полных бинарных отношений понятия минимальных и наименьших элементов совпадают.

Если в X существует элемент $z \in X$ такой, что $(z, x) \in G$ для всех $x \in Q \subset X$, то подмножество Q называется *ограниченным снизу* в X относительно бинарного отношения G.

Очевидно, что если подмножество Q имеет наименьший элемент, то Q является ограниченным снизу.

1.2. Транзитивное бинарное отношение G, определенное на множестве X, называется (ср. с [137,240])

предпорядком, если G рефлексивно;

строгим предпорядком, если G антирефлексивно;

частичным порядком, если G рефлексивно и антисимметрично;

слабым порядком, если G рефлексивно и полно;

совершенным порядком, если G рефлексивно, антисимметрично и полно;

эквивалентностью, если G рефлексивно и симметрично.

Пусть S — отношение эквивалентности на X. Вследствие симметричности обратное ему отношение S^{-1} совпадает с S. Отношение эквивалентности задает разбиение множества X на непересекающиеся классы смежности или, в другой терминологии, классы эквивалентности. Совокупность всех классов эквивалентности множества X по отношению эквивалентности S обозначается X/S. Обратно, любое разбиение множества X на семейство непересекающихся подмножеств задает на X отношение эквивалентности, классы эквивалентности которого совпадают с подмножествами разбиения. Многозначное отображение, соответствующее отношению эквивалентности S на X, совпадает с каноническим отображением X в X/S. Символ $\sim$ будем использовать как стандартное обозначение для отношений эквивалентности.

Предположим теперь, что бинарное отношение P является отношением строгого предпорядка на X. Легко проверяется, что обратное ему отношение P^{-1} также есть отношение строгого предпорядка, причем $P \cap P^{-1} = \varnothing$, т. е. P асимметрично. Символ $\prec$ является стандартным обозначением для отношений строгого предпорядка, при этом для обозначения обратного отношения вместо $\prec^{-1}$ используется символ $\succ$.

Рассмотрим далее на X произвольное отношение предпорядка G. Обратное ему отношение G^{-1} обладает свойствами рефлексивности и транзитивности и, следовательно, также является отношением предпорядка. Бинарное отношение $G \cap G^{-1}$, наследуя у G и G^{-1} свойства рефлексивности и транзитивности, обладает, кроме того, свойством симметричности. Следовательно, если G — отношение предпорядка, то его симметричная часть $S_G = G \cap G^{-1}$ есть отношение эквивалентности. Нетрудно убедиться также в том, что асимметричная часть $P_G := G \setminus G^{-1}$ отношения предпорядка является отношением строгого предпорядка. Из вышеизложенного следует, что всякое отношение предпорядка G есть объединение отношения эквивалентности S_G и отношения строгого предпорядка P_G : $G = S_G \cup P_G$, при этом $S_G \cap P_G = \varnothing$.

Обратно, если на X заданы отношение эквивалентности S и отношение строгого предпорядка P такие, что $S \cap P = \varnothing$, то их объединение $P \cup S$ есть отношение предпорядка на X в том и только в том случае, когда $S \circ P = P \circ S = P$. В силу этого будем использовать в дальнейшем в качестве стандартного обозначения для отношений предпорядка символ $\precsim$, обратное отношение $\precsim^{-1}$ будем обозначать $\succsim$.

Заметим, что если отношение предпорядка G обладает свойством антисимметричности, т. е. фактически является отношением частичного порядка, то соответствующее ему отношение эквивалентности S_G есть отношение равенства на X. Основываясь на этом замечании, введем для стандартного обозначения отношений частичного порядка символ $\leq$, обратное отношение $\leq^{-1}$ обозначим $\geq$.

Пусть G — отношение предпорядка на X. Бинарное отношение G', определенное на фактор-множестве X/S_G следующим образом: $G' = \{(U, V) \in X/S_G \times X/S_G | \, (x, y) \in G$ для всех $x \in U$ и всех $y \in V\}$, является отношением частичного порядка и называется отношением частичного порядка, ассоциированным с отношением предпорядка G.

Если на множестве X задано отношение предпорядка (строгого предпорядка, частичного, слабого или совершенного порядка), то говорят, что множество X является предупорядоченным (строго предупорядоченным, частично, слабо или совершенно упорядоченным). Совершенно упорядоченное множество X, каждое подмножество которого обладает наименьшим элементом, называется *вполне упорядоченным.* Частично упорядоченное множество X называется *индуктивно упорядоченным*, если любое совершенно упорядоченное подмножество из X является ограниченным снизу.

Следующее утверждение называют л е м м о й Ц о р н а [10, 138, 246].

Если множество X индуктивно упорядочено отношением предпорядка $\precsim$, то для любого элемента $x \in X$ множество X обладает минимальным элементом $x^0 \in X$ таким, что $x^0 \precsim x$.

§ 2. СУБЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОРЯДКА

2.1. Пусть X — вещественное векторное пространство. Это предположение относительно X будет сохраняться далее на протяжении всей главы, даже если это не оговорено специально.

Транзитивное бинарное отношение G, определенное на векторном пространстве X, назовем *сублинейным*, если

A1) для любых $x, y, z \in X$ из условия $(x, y) \in G$ следует

$(x+z, y+z) \in G$;

A2) для любых $x, y \in X$ и любого вещественного положительного числа $\alpha > 0$ из условия $(x, y) \in G$ следует $(\alpha x, \alpha y) \in G$.

Условия А 1), А 2) являются типичными условиями согласования бинарных отношений со структурой векторного пространства (см., например, [9, 31, 50, 130 и др.]).

Предложение 2.1. *Транзитивное бинарное отношение G на векторном пространстве X является сублинейным тогда и только тогда, когда*

а) $domG = X$;

б) $G(0)$ *является выпуклым конусом;*

в) $G(x) = \{x\} + G(0)$ *для всех* $x \in X$.

Здесь $G(x) = \{y \in X | (x, y) \in G\}$.

Из данного утверждения следует, что в зависимости от того является ли конус $G(0)$, называемый *конусом положительных векторов* отношения G, заостренным или нет, т. е. в зависимости от того, какое из соотношений $0 \in G(0)$ или $0 \notin G(0)$ выполнено, сублинейное транзитивное отношение G является либо отношением предпорядка, либо отношением строгого предпорядка.

Векторное пространство X с заданным на нем сублинейным отношением предпорядка $\precsim$ будем называть *предупорядоченным векторным пространством* и будем обозначать через $\langle X, \precsim \rangle$

Теория предупорядоченных векторных пространств хорошо развита для случая, когда отношение предпорядка является фактически отношением частичного порядка. Соответствующие этому случаю пространства называются упорядоченными векторными пространствами [9, 22, 31, 130, 244, 246]. Большинство понятий, а также результатов и методов теории упорядоченных векторных пространств может быть использовано, возможно с некоторыми изменениями или модификациями, и при рассмотрении предупорядоченных векторных пространств.

2.2. Пусть $\langle X, \precsim \rangle$ — заданное предупорядоченное векторное пространство и пусть $\prec$ и $\sim$ являются соответственно асимметричной и симметричной частями заданного отношения предпорядка. Таким образом, $x \prec y$ означает, что $x \precsim y$, но $y \not\precsim x$; соотношение $x \sim y$ равносильно тому, что $x \precsim y$ и $y \precsim x$.

Вектор $x \in X$ будем называть *положительным*, если $0 \precsim x$; *существенно положительным*, если $0 \prec x$; *эквивалентным нулевому вектору* или просто *нуль-вектором*, если $0 \sim x$.

Множество $X^+ := \precsim (0) = \{x \in X \,|\, 0 \precsim x\}$ называется *конусом положительных векторов* предупорядоченного векторного пространства X. Для обозначения множества существенно положительных векторов будем использовать символ $X^{\succ} \ := \prec (0) = \{x \in X \,|\, 0 \prec x\}$, а множество нуль-векторов будем обозначать через $X^{\sim} :=\sim (0) = \{x \in X \,|\, 0 \sim x\}$. Из данной выше характеристики сублинейных транзитивных бинарных отношений следует, что X^{+} есть заостренный выпуклый конус, $X^{\sim} = X^{+} \cap (-X^{+})$ — максимальное векторное подпространство, содержащееся в X^{+}, а $X^{\succ}$ — незаостренный выпуклый конус.

Вектор x из предупорядоченного векторного пространства $\langle X, \precsim \rangle$ назовем *строго положительным*, если для любого положительного вектора $y \in X^{+}$ существует положительное вещественное число $\mu > 0$ такое, что $\mu y \precsim x$.

То, что вектор x является строго положительным, будем обозначать через $0 \prec\!\!\prec x$ или $x \succ\!\!\succ 0$, а множество всех строго положительных векторов обозначим символом $X^{\succ\!\succ}$.

Из определения строгой положительности следует, что вектор x из X является строго положительным тогда и только тогда, когда $X^{+} = \mathrm{cone}[0, x]$, где $[0, x] := \{y \in X \,|\, 0 \precsim y \precsim x\}$ — порядковый интервал в X, а $\mathrm{cone} M$ — коническая оболочка множества M из X.

Так как $\ \in X^{+}$, то из определения получаем, что любой строго положительный вектор является положительным, т. е. $X^{\succ\!\succ} \subset X^{+}$. Покажем, что на самом деле $X^{\succ\!\succ} \subset X^{\succ}$. Будем рассуждать от противного. Пусть $X^{\sim} \cap X^{\succ\!\succ} \neq \varnothing$. Тогда для любого $x \in X^{\sim} \cap X^{\succ\!\succ}$ и любого существенно положительного вектора $y \in X^{\succ}$ найдется вещественное положительное число $\mu > 0$ такое, что $\mu y \precsim x$. Отсюда в силу A1) получаем $-x \precsim -\mu y$. Так как $x \in X^{\sim}$, то $0 \precsim -x$ и, следовательно, $0 \precsim -y$, что влечет $y \in X^{\sim}$. Последнее невозможно из-за $X^{\succ} \cap X^{\sim} = \varnothing$. Таким образом, $X^{\succ\!\succ} \subset X^{\succ}$.

Следующий пример показывает, что $X^{\succ\!\succ}$ является, вообще говоря, собственным подмножеством $X^{\succ}$.

Пример 2.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $X^{+} = \overline{\mathbb{R}}^2_{+} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Тогда $X^{\succ} = X^{+} \setminus \{0\}$, а $X^{\succ\!\succ} = \mathbb{R}^2_{+} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Следовательно, векторы вида $(0, x)$ и $(x, 0)$, где $x > 0$, существенно положительны, но не строго положительны.

Алгебраической (относительной алгебраической) внутренностью множества Q из вещественного векторного пространства X называется [138, 217, 312] обозначаемое через $\mathrm{cr} Q$ $(\mathrm{icr} Q)$ множество, состоящее из таких векторов $x \in Q$, что для любого $y \in X$ ($y \in \mathrm{aff} Q - x$) существует положительное вещественное число $\delta > 0$ такое, что $x + \lambda y \in Q$ для всех $\lambda \in (-\delta, \delta)$. Здесь $\mathrm{aff} Q$ — наименьшее аффинное многообразие в X, содержащее Q.

Множество Q называется *алгебраически (относительно алгеб-*

раически) открытым, если $Q = \mathrm{cr}Q$ $(Q = \mathrm{icr}Q)$.

Если Q — выпуклое множество, то $\mathrm{icr}Q$ состоит из всех векторов $x \in Q$ таких, что для любого $y \in Q$ существует $\delta > 0$ такое, что $x + \lambda(y - x) \in Q$ для всех $\lambda \in (-\delta, \delta)$.

Предложение 2.2. *Для того чтобы в предупорядоченном векторном пространстве X существовал строго положительный вектор, необходимо и достаточно, чтобы относительная алгебраическая внутренность конуса положительных векторов $\mathrm{icr}X^+$ была непуста, при этом $x \in X$ является строго положительным тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{icr}X^+$, т. е. $X^{\succ\!\succ} = \mathrm{icr}X^+$.*

Доказательство. Если $x \in X^{\succ\!\succ} \neq \varnothing$, то для любого $y \in X^+$ существует положительное вещественное число $\mu_0 > 0$ такое, что $x - \mu y \in X^+$ для всех $\mu \in [0, \mu_0]$. Так как $\mu x \in X^+$, $\mu \geq 0$, то из последнего включения и того, что X^+ выпуклый конус, получаем $x - \mu(y - x) \in X^+$ для всех $\mu \in [0, \mu_0]$. Кроме того, в силу выпуклости X^+ имеем $x + \mu(y - x) \in X^+$ для всех $\mu \in [0, 1]$. Положив $\delta = \min\{1, \mu_0\}$, получаем $x + \mu(y - x) \in X^+$ для всех $\mu \in (-\delta, \delta)$, что влечет $x \in \mathrm{icr}X^+$.

Для доказательства обратного включения предположим, что $\mathrm{icr}X^+ \neq \varnothing$. Для произвольного $y \in X^+$ укажем $\delta > 0$ такое, что $x + \mu(y - x) \in X^+$ для любого $\mu \in (-\delta, \delta)$. Это влечет $x - \dfrac{|\mu|}{1 + |\mu|} y \in$ $\in X^+$ для любого $\mu \in (-\delta, 0)$, что означает строгую положительность x. Предложение доказано.

Следствие 2.1. *Множество строго положительных векторов $X^{\succ\!\succ}$ предупорядоченного векторного пространства X является относительно алгебраически открытым выпуклым конусом в X.*

Из предложения 2.2 следует, что любое конечномерное предупорядоченное векторное пространство обладает строго положительными векторами. В то же время на любом бесконечномерном векторном пространстве X существует такое сублинейное отношение предпорядка, относительно которого в X не существуют строго положительные векторы. Чтобы показать это, воспользуемся конструкцией из [217]. Зададим в X базис Гамеля $(a_i)_{i \in I}$ и рассмотрим сублинейное отношение предпорядка, конус положительных векторов для которого есть выпуклый конус K, состоящий из векторов x, имеющих в заданном базисе только неотрицательные координаты x_i, $i \in I$. Так как базис бесконечен, то каждый вектор $x \in K$ имеет нулевую координату. Пусть для определенности $x_j = 0$. Тогда $x - \lambda a_j$ не содержится в K ни при каком положительном λ. Поскольку все векторы базиса принадлежат K, то это означает, что x не является строго положительным вектором.

Замечание 2.1. Впервые понятие строго положительных векторов было введено М. Г. Крейном и М. А. Рутманом [145] для нормированных упорядоченных пространств с телесным конусом положительных векторов X^+ и определялось как принадлежность вектора внутренности конуса X^+. Поскольку при выполнении условия $\mathrm{int}X^+ \neq \varnothing$ имеет место равенство $\mathrm{cr}X^+ = \mathrm{int}X^+$, то из предложения 1.1 следует, что данное здесь определение строгой положительности обобщает определение Крейна - Рутмана на произвольные предупорядоченные век- торные пространства.

С другой стороны, если конус положительных векторов X^+ воспроизводящий, т. е. если $X^+ - X^+ = X$, то понятие строго положительного вектора совпадает с понятием порядковой единицы. (Вектор x из упорядоченного векторного пространства называется *порядковой единицей* [9, 22, 244] , если порядковый интервал $[-x, x]$ является поглощающим в X, т. е. для любого $y \in X$ найдется вещественное число $\lambda > 0$ такое, что $-\lambda x \precsim y \precsim \lambda x$.

Замечание 2.2. В последующем иногда на одном и том же векторном пространстве X будут рассматриваться различные сублинейные отношения предпорядка G. Для отличия понятий, соответствующих предупорядоченным векторным пространствам $\langle X, G\rangle$, различающимся только отношением предпорядка G, удобнее связать эти понятия и их обозначения не с векторным пространством X, а с отношением G. Поэтому будем говорить о конусах положительных, существенно положительных и строго положительных векторов сублинейного отношения предпорядка G, а не предупорядоченного векторного пространства X и обозначать их соответственно через $G(0)$, $G^{\succ}(0)$ и $G^{\succ\!\succ}(0)$ вместо X^+, $X^{\succ}$, $X^{\succ\succ}$. По тем же причинам будем использовать обозначение $G^{\sim}(0)$ вместо $X^{\sim}$ для подпространства нуль-векторов.

§ 3. ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ СУБЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДПОРЯДКА

3.1. Пусть $\langle X, \precsim\rangle$ — предупорядоченное векторное пространство.

Сублинейное отношение предпорядка $\precsim$, определенное на X, назовем *относительно открытым,* если $X^{\succ\!\succ} \neq \varnothing$ и $X^{\succ} = X^{\succ\!\succ}$.

Оказывается, что произвольные сублинейные отношения предпорядка обладают внутренней структурой, в которой в качестве элементарных составляющих выступают относительно открытые сублинейные отношения предпорядка. Чтобы выявить это, заметим, что понятие строгой положительности вектора x отражает некоторое свойство “доминирования” положительного вектора x над всеми остальными положительными векторами. Сужая данное свойство на произвольную пару положительных векторов $x, y \in X^+$, введем на конусе X^+ отношение предпорядка, которое будем называть *отношением граневого подчинения* (см. замечание 3.1).

Будем говорить, что *положительный вектор* $x \in X^+$ *находится в граневом подчинении к положительному вектору* $y \in X^+$, если существует положительное вещественное число $\mu > 0$ такое, что $\mu x \precsim y$.

Обозначим отношение граневого подчинения символом $\trianglelefteq$. Рефлексивность и транзитивность отношения $\trianglelefteq$ устанавливаются элементарно. Следовательно, отношение граневого подчинения является отношением предпорядка на X^+.

Символом $\lessgtr$ обозначим отношение эквивалентности, порождаемое на X^+ отношением граневого подчинения, т. е. $x \lessgtr y$ тогда и только тогда, когда $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq x$. Легко получить, что $x \lessgtr y$ в том и только в том случае, когда существуют вещественные числа $\mu > 0$ и $\nu > 0$ такие, что $\mu x \precsim y \precsim \nu x$.

Пусть $\mathcal{M}(X^+)$ -множество, полученное факторизацией конуса положительных векторов X^+ по отношению эквивалентности $\lessgtr$, и пусть $M_x = \{y \in X^+ \mid y \lessgtr x\}$ — класс эквивалентности из $\mathcal{M}(X^+)$, содержащий вектор x.

Предложение 3.1. *Каждый класс эквивалентности из* $\mathcal{M}(X^+)$ *является относительно алгебраически открытым выпуклым конусом. В частности, класс эквивалентности* M_0, *содержащий нулевой вектор, совпадает с подпространством нуль-векторов* $X^\sim$.

Доказательство. Покажем сначала, что любой класс эквивалентности $M_x \in \mathcal{M}(X^+)$ является выпуклым конусом. Рассмотрим множество $\overline{M}_x = \{y \in X^+ | y \trianglelefteq x\}$. Так как $y \trianglelefteq x$ эквивалентно выполнению соотношения $\mu y \precsim x$ для некоторого $\mu > 0$, то $\dfrac{\mu}{\alpha}(\alpha y) \precsim x$ для любого $\alpha > 0$ влечет $\alpha y \in \overline{M}_x$ для всех $y \in \overline{M}_x$ и $\alpha > 0$. Пусть $y_1, y_2 \in \overline{M}_x$. Из соотношений $\mu_1 y_1 \precsim x$ и $\mu_2 y_2 \precsim x$ получаем $\mu(y_1 + y_2) \precsim x$ при $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, что влечет $y_1 + y_2 \in \overline{M}_x$. Таким образом, множество $\overline{M}_x$ является выпуклым конусом. Аналогично доказывается, что множество $\underline{M}_x = \{y \in X^+ \mid x \trianglelefteq y\}$ также является выпуклым конусом. Поскольку $M_x = \underline{M}_x \cap \overline{M}_x$, то M_x — выпуклый конус.

Пусть L_x — наименьшее аффинное многообразие, содержащее M_x. Так как M_x — выпуклый конус, то $L_x = M_x - M_x$ является векторным подпространством. Для доказательства того, что M_x является относительно алгебраически открытым, надо показать, что для любого $y \in L_x$ найдется число $\delta > 0$, удовлетворяющее условию $x + ty \in M_x$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$. Пусть $y_1, y_2 \in M_x$ таковы, что $y = y_1 - y_2$, где y — произвольно выбранный вектор из L_x. Для y_1 и y_2 существуют числа $\nu_1 > 0, \mu_1 > 0$ и $\nu_2 > 0, \mu_2 > 0$ такие, что $\nu_1 x \precsim y_1 \precsim \mu_1 x$ и $\nu_2 x \precsim y_2 \precsim \mu_2 x$. Положив $\nu = \min\{\nu_1, \nu_2\}$ и $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$, получим $\nu x \precsim y_i \precsim \mu x$, $i = 1, 2$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\nu < \mu$. Так как $-(\mu - \nu)x \precsim y_1 - y_2 \precsim (\mu - \nu)x$, то для любого вещественного числа t имеем $(1 - |t|(\mu - \nu))x \precsim x + t(y_1 - y_2) \precsim (1 + |t|(\mu - \nu))x$. Положив $\delta = \dfrac{1}{\mu - \nu}$, получим $1 - |t|(\mu - \nu) > 0$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$. Следовательно, $x + t(y_1 - y_2) \in M_x$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь класс эквивалентности M_0. Заметим, что $M_0 = X^+$. Следовательно, $M_0 = \overline{M}_0 = \{y \in X^+ \mid y \trianglelefteq x\}$. Так как условие $y \trianglelefteq 0$ эквивалентно $y \precsim 0$, то $M_0 = X^+ \cap (-X^+) = X^\sim$. Предложение доказано.

Элементы семейства $\mathcal{M}(X^+)$ будем называть *открытыми гранями* конуса положительных векторов X^+.

Множество всех открытых граней $\mathcal{M}(X^+)$ конуса X^+ упорядочим, полагая, как обычно в подобных случаях, что для произвольных $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(X^+)$ отношение $M_1 \trianglelefteq M_2$ имеет место в том и только в том случае, когда $x \trianglelefteq y$ для всех $x \in M_1$ и всех $y \in M_2$. На $\mathcal{M}(X^+)$ отношение $\trianglelefteq$ является отношением частичного порядка.

Так как для любого $y \in X^\sim$ и любого $x \in X^+$ имеет место соотношение $y \trianglelefteq x$, то $X^\sim \trianglelefteq M$ для всех $M \in \mathcal{M}(X^+)$, т. е. открытая грань $X^\sim$ — наименьший элемент в $\mathcal{M}(X^+)$. Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Множество всех, открытых, граней $\mathcal{M}(X^+)$ конуса положительных векторов X^+ является верхней решеткой по отношению граневого подчинения $\trianglelefteq$, т. е. множество верхних границ любого двухэлементного множества $\{M_1, M_2\} \subset \mathcal{M}(X^+)$ непусто и обладает наименьшим элементом $M_1 \vee M_2 \in \mathcal{M}(X^+)$, при этом операция $\vee$ на $\mathcal{M}(X^+)$ является факторизацией заданной на X^+ алгебраической операции сложения, т. е. $M_x \vee M_y = M_{x+y}$ для любых $x, y \in X^+$.*

Доказательство. Пусть M_1, M_2 — произвольные открытые грани из $\mathcal{M}(X^+)$ и пусть $x \in M_1$, $y \in M_2$, т. е. $M_1 = M_x, M_2 = M_y$. Так как $x \trianglelefteq x + y$ и $y \trianglelefteq x + y$ для любых $x, y \in X^+$, то $M_x \trianglelefteq M_{x+y}$ и $M_y \trianglelefteq M_{x+y}$. Следовательно, множество верхних границ множества $\{M_1, M_2\}$ непусто.

Предположим далее, что $M_x \trianglelefteq M, M_y \trianglelefteq M$ для некоторой открытой грани $M \in \mathcal{M}(X^+)$. Пусть $z \in M$, тогда $x \trianglelefteq z, y \trianglelefteq z$ или эквивалентно $\lambda x \precsim z, \mu y \precsim z$ для некоторых чисел $\lambda > 0, \mu > 0$. Из последних соотношений нетрудно получить $\nu(x+y) \precsim z$, где $\nu = \min\{\lambda, \mu\}$, что влечет $x+y \trianglelefteq z$ и, следовательно, $M_{x+y} \trianglelefteq M$. Таким образом, M_{x+y} является точной верхней границей для M_x и M_y. Предложение доказано.

Следствие 3.1. *Пусть M — произвольная открытая грань конуса положительных векторов X^+, $L_M = M - M$ — наименьшее векторное подпространство, содержащее M. Тогда*

$$X^+ \cap L_M = \cup\{\widetilde{M} \mid \widetilde{M} \in \mathcal{M}(X^+),\ \widetilde{M} \trianglelefteq N\}.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{M} \in \mathcal{M}(X^+)$, $\widetilde{M} \trianglelefteq M$. Для любых $x \in \widetilde{M}$ и $z \in M$ имеем $\omega = x + z \in M$. Значит, $x = \omega - z$, где $\omega, z \in M$. Это влечет $\widetilde{M} \subset L_M$ и, следовательно, $\cup\{\widetilde{M} \mid \widetilde{M} \in \in \mathcal{M}(X^+), \widetilde{M} \trianglelefteq M\} \subset X^+ \cap L_M$. Обратно, пусть $x \in (X^+) \cap L_M$. Из представления $x = \omega - z$, $w, z \in M$, получаем $\omega = x + z$. Значит, $M_x \vee M = M$, что влечет $M_x \trianglelefteq M$ и тем самым доказывает обратное включение. Следствие доказано.

Следствие 3.2. *Если семейство открытых граней $\mathcal{M}(X^+)$ является совершенно упорядоченным (относительно $\trianglelefteq$), то для любой открытой грани $M \in \mathcal{M}(X^+)$, $M \neq X^\sim$, множество $M' = \cup\{\widetilde{M} \in \mathcal{M}(X^+) | \widetilde{M} \vartriangleleft M\}$ также является выпуклым конусом и $L_{M'} = M' - M'$ (наименьшее векторное пространство, содержащее M') не пересекается с M.*

Доказательство. Так как $\mathcal{M}(X^+)$ является совершенно упорядоченным, то для любых $x, y \in M'$ имеем либо $M_{x+y} = M_x$, либо $M_{x+y} = M_y$. Следовательно, $M_{x+y} \vartriangleleft M$ и $x + y \in M'$. Положительная однородность множества M' очевидна.

Предположим, что $M \cap L_{M'} \neq 0$ и пусть $z \in M \cap L_{M'}$. Из включения $z \in L_{M'}$ получаем $z = u - v$, где $u, v \in M'$. Отсюда следует, что $z + v = u \in M'$. С другой стороны, в силу предложения 3.2 из соотношения $v \trianglelefteq z$ получаем $z + v \in M_z = M$. Получили противоречие тому, что $M \cap M' \neq \varnothing$. Значит, $L_{M'} \cap M \neq \varnothing$.

Нетрудно привести примеры, показывающие, что если $\mathcal{M}(X^+)$ не является совершенно упорядоченным, то M' может не быть выпуклым, а M может принадлежать $L_{M'}$.

Следующее утверждение связывает существование строго положительных векторов с граневым строением конуса положительных векторов.

Теорема 3.1. *Для того чтобы множество строго положительных векторов $X^{\rightarrowtail}$ пред упорядоченного векторного пространства X было непусто, необходимо и достаточно, чтобы семейство открытых граней $\mathcal{M}(X^+)$ конуса положительных векторов X^+,* *упорядоченное отношением граневого подчинения, имело наибольший элемент* $M_B \in \mathcal{M}(X^+)$, *т. е. имело такую открытую грань* M_B, *что* $M \trianglelefteq M_B$ *для всех* $M \in \mathcal{M}(X^+)$, *при этом* $M_B = X^{\succ\!\succ}$.

Доказательство теоремы следует непосредственно из определения строгой положительности вектора, которое в терминах отношения граневого подчинения может быть переформулировано следующим образом: положительный вектор $x \in X^+$ является строго положительным тогда и только тогда, когда $z \trianglelefteq x$ для всех $z \in X^+$.

Из данной теоремы следует, что сублинейное отношение предпорядка $\precsim$ является относительно открытым в том и только в том случае, когда семейство открытых граней конуса положительных векторов является двухэлементным, т. е. $\mathcal{M}(X^+) = \{X^\sim, X^{\succ\!\succ}\}$.

Пусть $\precsim$ — произвольное сублинейное отношение предпорядка. С каждой открытой гранью $M \in \mathcal{M}(X^+)$ свяжем относительно открытое сублинейное отношение предпорядка $\precsim_M$, конус положительных векторов которого есть $\precsim_M (0) = M \cup X^\sim$. В силу предложения 3.2 семейство $\mathcal{P}(\precsim) = \{\precsim_M |\ M \in \mathcal{M}(X^+)\}$, состоящее из относительно открытых сублинейных отношений предпорядка, является верхней решеткой по отношению граневого подчинения (отношение граневого подчинения естественным образом переносится на $\mathcal{P}(\precsim)$ с семейства открытых граней $\mathcal{M}(X^+)$), при этом имеет место равенство

$$\precsim = \cup\{\precsim_M |\ M \in \mathcal{M}(X^+)\}.$$

Таким образом, внутреннее строение произвольного сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ полностью характеризуется верхней решеткой $\mathcal{P}(\precsim)$, если рассматривать в качестве элементарных относительно открытые сублинейные отношения предпорядка.

Замечание 3.1. Отношение граневого подчинения на конусе положительных векторов сублинейного отношения предпорядка было введено как сужение свойства строгой положительности на пары векторов. Подобным образом в произвольном (неупорядоченном) векторном пространстве X можно рассмотреть свойство вектора быть относительно алгебраически внутренним для заданного множества $Q \subset X$ как некоторое свойство доминирования этого вектора над всеми векторами из Q. Если сузить это свойство на пары векторов из Q, то аналогично вышеизложенному придем к отношению граневого подчинения для заданного выпуклого множества Q, которое впервые было введено и исследовано в статье [223] .

§ 4. СУБЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ СЛАБОГО ПОРЯДКА И КОРТЕЖИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Цель настоящего параграфа — установить характеристические свойства сублинейных отношений слабого порядка (полных отношений предпорядка), определенных на вещественном векторном пространстве X, и построить для них двойственные объекты в пространстве X'.

4.1. Обозначим через $\mathcal{G}$ семейство всех сублинейных отношений предпорядка, заданных на вещественном векторном пространстве X. Символом $\mathcal{E}$ будем обозначать подсемейство из $\mathcal{G}$, состоящее из сублинейных отношений эквивалентности. Зафиксируем некоторое сублинейное отношение эквивалентности $S \in \mathcal{E}$ и рассмотрим подсемейство $\mathcal{G}(S)$ всех сублинейных отношений предпорядка G из $\mathcal{G}$, удовлетворяющих условию $G \cap G^{-1} = S$. Очевидно, что $\mathcal{G} = \cup\{\mathcal{G}(S) \mid S \in \mathcal{E}\}$ и $\{S\} = \mathcal{G}(S) \cap \mathcal{E}$.

Теорема 4.1. *Сублинейное отношение предпорядка G, определенное на векторном пространстве X, является слабым порядком на X тогда и только тогда, когда G является максимальным по отношению доминирования элементом семейства $\mathcal{G}(S)$, где $S = G \cap G^{-1}$, т. е. когда на X не существует сублинейного отношения предпорядка $\widehat{G}$, удовлетворяющего условиям*

$$G \subset \widehat{G},\ G \neq \widehat{G} \text{ и } G \cap G^{-1} = \widehat{G} \cap \widehat{G}^{-1}. \tag{4.1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — слабый порядок на X и пусть G_1 из $\mathcal{G}(S)$, где $S = G\cap G^{-1}$, удовлетворяет включению $G \subset G_1$. Вследствие полноты G произвольная пара $(x, y) \in G_1$ принадлежит либо G, либо G^{-1}. Однако если $(x, y) \in G^{-1}$, то в силу $G^{-1} \subset G_1^{-1}$ имеем $(x, y) \in G_1^{-1}$ и, следовательно, $(x, y) \in G_1 \cap G_1^{-1} = S \subset G$. Таким образом, $G_1 \subset G$, что влечет равенство $G_1 = G$, которое вследствие произвольного выбора G_1 означает максимальность G в $\mathcal{G}(S)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что G является максимальным элементом в $\mathcal{G}(S)$ и пусть в противоположность утверждению $G \cup G^{-1} \neq X \times X$. Пусть $(a, b) \notin G \cup G^{-1}$. В силу сублинейности G получаем, что вектор $c = -a \notin G(0) \cup (-G(0))$. Рассмотрим в X сублинейное отношение предпорядка G_1, конус положительных векторов которого есть $G_1(0) = \{x+\alpha c \mid x \in G(0), \alpha \geq 0\}$. Очевидно, что $G \subset G_1, G \neq G_1$. Покажем, что $G_1 \cap G_1^{-1} = G \cap G^{-1}$. Включение $G \cap G^{-1} \subset G_1 \cap G^{-1}$ следует из $G \subset G_1$. Докажем обратное включение. Пусть $(x, y) \in G_1 \cap G_1^{-1}$. Тогда $y - x \in G_1(O)$ и $x - y \in G_1(O)$.

Это означает, что существуют $z_1, z_2 \in G(0)$ и $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, удовлетворяющие равенствам $y - x = z_1 + \alpha_1 c = -z_2 - \alpha_2 c$. Отсюда получаем $z_1 + z_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2)c$. Поскольку $z_1 + z_2 \in G(0)$, а $-c \notin G(0)$, то последнее равенство возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, что влечет $y - x = z_1 \in -G(0)$ и $y - x = -z_2 \in -G(0)$, т. е. $(x, y) \in G \cap G^{-1}$. Таким образом, построенное сублинейное отношение предпорядка G_1 удовлетворяет условиям (4.1), что противоречит максимальности G в $\mathcal{G}(S)$. Теорема доказана.

Поскольку любая цепь $\{G_i, i \in I\}$ из семейства $\mathcal{G}(S)$, где S — произвольное сублинейное отношение эквивалентности из $\mathcal{E}$, ограничена сверху сублинейным отношением предпорядка $\bigcup\limits_{i \in I} G_i$, то, используя лемму Цорна [10,138,246], получаем

Следствие 4.1. *Для любого сублинейного отношения предпорядка G, определенного на векторном пространстве X, существует сублинейное отношение слабого порядка $\widehat{G}$ на X, правильно доминирующее G, т. е. такое, что $G \subset \widehat{G}$ и $G \setminus G^{-1} \subset \widehat{G} \setminus \widehat{G}^{-1}$.*

Следующее утверждение характеризует сублинейные отношения слабого порядка через свойства соответствующих им конусов положительных векторов.

Теорема 4.2. *Пусть G — сублинейное отношение предпорядка, заданное на векторном пространстве X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) *G является сублинейным отношением слабого порядка на X;*

б) *конус положительных векторов $G(0)$ удовлетворяет условию $G(0) \cup (-G(0)) = X$;*

в) *конус положительных векторов $G(0)$ является максимальным по включению элементом семейства, состоящего из выпуклых конусов K из X таких, что $K \cap (-K) = G(0) \cap (-G(0))$.*

Доказательство эквивалентности а) $\iff$ б) тривиально, а эквивалентность а) $\iff$ в) доказывается аналогично доказательству теоремы 4.1.

Следствие 4.2. *Сублинейное отношение предпорядка G, определенное на векторном пространстве X, является отношением совершенного порядка тогда и только тогда, когда*

$$G(0) \cup (-G(0)) = X \text{ и } G(0) \cap (-G(0)) = \{0\}.$$

Замечание 4.1. В работах [294, 311] для произвольного (без порядковой структуры) векторного пространства X было введено понятие полупространства — максимального выпуклого множества, содержащегося в $X \setminus \{0\}$. Из следствия 4.2 заключаем, что конус существенно положительных векторов $G^{\succ}(0)$ сублинейного отношения предпорядка G, определенного на X, является полупространством в X тогда и только тогда, когда G — совершенный порядок на X.

4.2. Наша дальнейшая цель — построить двойственные объекты для сублинейных отношений слабого порядка. Начнем с рассмотрения сублинейных отношений слабого порядка частного вида, названных ниже гиперпорядками.

Сублинейное отношение эквивалентности S на векторном пространстве X назовем *гиперэквивалентностью,* если в $\mathcal{E}$ не существует сублинейного отношения эквивалентности $\widehat{S}$ такого, что $S \subset \widehat{S}$ и $S \neq \widehat{S}$, $\widehat{S} \neq X \times X$, т. е. если S является максимальным по отношению доминирования элементом в $\mathcal{E} \setminus \{X \times X\}$.

Нетрудно убедиться, что сублинейное отношение эквивалентности S является гиперэквивалентностью в том и только том случае, когда $S(0) = \{x \in X \mid (0, x) \in S\}$ является гиперподпространством в X. Из этого заключаем, что любая гиперэквивалентность S может быть представлена в виде $S = \{(x, y) \in X \times X \mid l(x) = l(y)\}$, где $l : X \to \mathbb{R}$ — линейный функционал на X.

Сублинейное отношение слабого порядка G на X назовем *гиперпорядком,* если порожденное им отношение эквивалентности $G \cap G^{-1}$ является гиперэквивалентностью.

Теорема 4.3. *Для любой гиперэквивалентности S, определенной на векторном пространстве X, существуют ровно два взаимнообратных между собой отношения гиперпорядка G и G^{-1} такие, что $G \cap G^{-1} = S$, при этом*

$$G = \{(x, y) \in X \times X \mid l(x) \leq l(y)\},$$

где $l : X \to \mathbb{R}$ — линейный функционал на X, однозначно определяемый по выбранному гиперпорядку G с точностью до положительного вещественного множителя.

Доказательство. Пусть $l : X \to \mathbb{R}$ — произвольный линейный функционал на X такой, что $S = \{(x, y) \in X \times X \mid l(x) = l(y)\}$. Легко проверить, что отношение $G_l = \{(x, y) \in X \times X \mid l(x) \leq l(y)\}$ является гиперпорядком на X, причем $G_l \cap G_l^{-1} = S$.

Рассмотрим произвольный гиперпорядок G на X такой, что $G \cap G^{-1} = S$. Так как $G^{\succ}(0) \cap S(0) = \varnothing$ и $S(0)$ является гиперплоскостью, то имеет место одно из включений: либо $G(0) \subset G_l(0) = \{x \in X \mid l(x) \geq 0\}$, либо $G(0) \subset -G_l(0) = \{x \in X \mid l(x) \leq 0\}$. Воспользовавшись далее максимальностью конуса $G(0)$ (см. теорему 4.2. в)), получаем, что либо $G(0) = G_1(0)$, либо $G(0) = -G_1(0)$. Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Сублинейное отношение слабого порядка G, определенное на векторном пространстве X, является гиперпорядком тогда и только тогда, когда оно является относительно открытым, т. е. когда $G^{\succ}(0) = G^{\succ\!\succ}(0)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Так как для гиперпорядка G конус существенно положительных векторов $G^{\succ}(0)$ имеет вид $G^{\succ}(0) = \{x \in X \mid l(x) > 0\}$, где $l : X \to \mathbb{R}$ — некоторый линейный функционал на X, то алгебраическая внутренность конуса $G(0)$ совпадает с $G^{\succ}(0)$. Это влечет в силу предложения 2.2 равенство $G^{\succ}(0) = G^{\succ\!\succ}(0)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $G^{\succ}(0) = G^{\succ\!\succ}(0)$, то $G^{\succ}(0)$ является алгебраически открытым конусом в X (здесь использована также полнота G). Так как подпространство $S(0) = G(0) \cap (-G(0))$ не пересекается с $G^{\succ}(0)$, то в силу геометрических теорем продолжения (см., например, [217], с. 127, теорема 3) найдется гиперподпространство $L \subset X$ такое, что $L \cap G^{\succ}(0) = \varnothing$ и $S(0) \subset L$. Поскольку, кроме того, $L \cap (-G^{\succ}(0)) = \varnothing$ и $X = G^{\succ}(0) \cup S(0) \cup (-G^{\succ}(0))$, то имеет место и обратное включение $L \subset S(0)$. Следовательно, $S(0)$ — гиперподпространство в X. Теорема доказана.

Замечание 4.2. В контексте теории принятия решения результаты настоящего пункта могут быть интерпретированы следующим образом: для того чтобы для отношения предпорядка G, определенного на векторном пространстве X, существовала линейная функция полезности, необходимо и достаточно, чтобы G являлось отношением гиперпорядка (ср. с [42, 182, 240]).

4.3. Рассмотрим векторное пространство X', состоящее из всех линейных функционалов, определенных на векторном пространстве X (пространство X' называется алгебраически сопряженным векторному пространству X).

Линейно независимое семейство $\mathcal{F}$ линейных функционалов из X' назовем *кортежем* на X, если $\mathcal{F}$ является совершенно упорядоченным и для любого $x \in X$ подсемейство $\mathcal{F}_x = \{l \in \mathcal{F} \mid l(x) \neq 0\}$ либо пусто, либо имеет наименьший элемент (будем обозначать этот элемент через l_x).

Очевидно, что любое вполне упорядоченное линейно независимое семейство $\mathcal{F}$ линейных функционалов из X' является кортежем на X. В частности, любое конечное совершенно упорядоченное линейно независимое семейство $\mathcal{F} = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ есть кортеж.

Лемма 4.1. *Для всякого кортежа $\mathcal{F} \in X'$ имеют место следующие утверждения:*

1. *$\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\lambda x}$ для всех $x \in X$ и всех вещественных чисел $\lambda \neq 0$.*
2. *Если $x \in X$ и $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$, то $l_{\lambda x} = l_x$ для всех вещественных*

чисел λ.

3. *Пусть* $x, y \in X$,

а) *если* $\mathcal{F}_x = \varnothing, \mathcal{F}_y = \varnothing$, *то* $\mathcal{F}_{x+y} = \varnothing$,

б) *если* $\mathcal{F}_x = \varnothing, \mathcal{F}_y \neq \varnothing$, *то* $\mathcal{F}_{x+y} \neq \varnothing$ *и* $l_{x+y} = l_y$,

в) *если* $\mathcal{F}_x \neq \varnothing, \mathcal{F}_y \neq \varnothing$ *и* $l_x(x)l_y(y) > 0$, *то* $\mathcal{F}_{x+y} \neq \varnothing$.

Кроме того, если при этом $l_x = l_y$ *или* l_x *предшествует* l_y *в упорядочении кортежа, то* $l_{x+y} = l_x$.

Доказательства утверждений 1, 2, 3 а) и 3 б) элементарно следуют из определения кортежа и линейности функционалов, входящих в кортеж.

Докажем утверждение 3 в). Пусть $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$, $\mathcal{F}_y \neq \varnothing$ и $l_x(x)l_y(y) > 0$. Предположим, что $l_x = l_y$ и $\mathcal{F}_{x+y} = \varnothing$. Из условия $l(x+y) = 0$ для всех $l \in \mathcal{F}$ получаем $l_x(x) = -l_x(y) = -l_y(y)$, что противоречит предположению $l_x(x)\, l_y(y) > 0$. Значит, $\mathcal{F}_{x+y} \neq \varnothing$. Если же l_x предшествует l_y в упорядочении кортежа, то $l_x(y) = 0$. Следовательно, $l_x(x+y) = l_x(x) \neq \varnothing$, что влечет $\mathcal{F}_{x+y} \neq \varnothing$.

Так как для всех l, предшествующих l_x и l_y, имеет место равенство $l(x+y) = l(x) + l(y) = 0$, то l_{x+y} не может предшествовать l_x и l_y. Предположим, что $l_x = l_y$. Тогда $l_x(x+y) = l_x(x)+l_y(y) \neq 0$, поскольку $l_x(x)\, l_y(y) > 0$ и, следовательно, $l_{x+y} = l_x$. Если же l_x предшествует l_y, то $l_x(x+y) = l_x(x) \neq 0$. Значит, и в этом случае $l_{x+y} = l_x$. Лемма доказана.

Замечание 4.3. Термин кортеж линейных функционалов впервые был введен автором в работах [75, 288] для конечных положительных (существенно положительных, сильно положительных) кортежей на предупорядоченном векторном пространстве (см. следующий параграф). Семейства линейных функционалов, аналогичные кортежам специального вида, рассматривались в статьях [311, 312] в связи с изучением структуры полупространств.

Значением кортежа $\mathcal{F}$ *в точке* $x \in X$ назовем вещественное число $\mathcal{F}_(x)$, определенное следующим образом:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{F}_x = \varnothing, \\ l_x(x), & \text{если } \mathcal{F}_x \neq \varnothing. \end{cases}$$

Тем самым на векторном пространстве X определен функционал $c_{\mathcal{F}} : x \to \mathcal{F}(x)$.

Лемма 4.2. *Функционал* $c_{\mathcal{F}}$, *соответствующий кортежу* $\mathcal{F}$, *является однородным* ($c_{\mathcal{F}}(\lambda x) = \lambda c_{\mathcal{F}}(x)$ *для любого* $x \in X$ *и любого вещественного числа* λ) *и таким, что множество* $\{x \in X \mid c_{\mathcal{F}}(x) \geq 0\}$ *является выпуклым конусом в* X.

Доказательство. Однородность функционала $c_{\mathcal{F}}$ следует из утверждений 1 и 2 леммы 4.1, а выпуклость множества

$\{x \in X \mid c_{\mathcal{F}}(x) \geq 0\}$ нетрудно получить из утверждения 3 леммы 4.1.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathcal{F} \subset X'$ есть кортеж на векторном пространстве X. Тогда бинарное отношение*

$$G_{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in X \times X \mid c_{\mathcal{F}}(y - x) \geq 0\}$$

является сублинейным отношением слабого порядка.

Доказательство. Так как в силу леммы 4.2 $G_{\mathcal{F}}(0) = \; = \{x \in X \mid c_{\mathcal{F}} \geq 0\}$ есть выпуклый конус и $0 \in G_{\mathcal{F}}(0)$, то $G_{\mathcal{F}}$ сублинейное отношение предпорядка на X. Кроме того, из однородности $c_{\mathcal{F}}$ следует, что любой $x \in X$ принадлежит либо $G_{\mathcal{F}}(0)$, либо $-G_{\mathcal{F}}(0)$. Следовательно, $G_{\mathcal{F}}(0) \cup (-G_{\mathcal{F}}(0)) = X$. Из теоремы 4.2 заключаем, что $G_{\mathcal{F}}$ — сублинейное отношение слабого порядка. Теорема доказана.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим граневое строение сублинейных отношений слабого порядка.

Пусть G - произвольное сублинейное отношение слабого порядка на X; $\trianglelefteq_G$ — отношение граневого подчинения на конусе положительных векторов $G(0); \mathcal{M}(G(0))$ — семейство открытых граней конуса $G(0)$, упорядоченное фактор-отношением граневого подчинения, которое также обозначается символом $\trianglelefteq_G$. Поскольку G является полным отношением, то отношение граневого подчинения $\trianglelefteq_G$ на $\mathcal{M}(G(0))$ также полное. Таким образом, семейство всех открытых граней $\mathcal{M}(G(0))$ конуса положительных векторов $G(0)$ произвольного сублинейного отношения слабого порядка совершенно упорядочено по отношению граневого подчинения $\trianglelefteq_G$.

Пусть M — произвольная открытая грань конуса $G(0)$, не совпадающая с $G^{\sim}(0)$, и пусть $L_M = M - M$ — наименьшее векторное подпространство, содержащее M. В предыдущем параграфе было показано (см. следствие 3.2), что множество $M' = \; = \cup\{\widetilde{M} \in \mathcal{M}(G(0)) \mid \widetilde{M} \trianglelefteq_G M\}$ является выпуклым конусом и принадлежит подпространству L_M, причем наименьшее векторное подпространство $L_{M'} = M' - M'$, содержащее M', не пересекается с M.

Лемма 4.3. *Если G является сублинейным отношением слабого порядка, то $L_{M'} = M' \cup (-M')$, $L_M = M \cup L_{M'} \cup (-M)$ и $M + L_{M'} = M$.*

Доказательство. Так как G является сублинейным отношением слабого порядка, то из теоремы 4.2 имеем $X = G(0) \cup (-G(0))$. Это влечет $L_M = (G(0) \cap L_M) \cup (-(G(0) \cap L_M))$. В следствии 3.1 показано, что $G(0) \cap L_M = M \cup M'$. Значит, $L_M = M \cup M' \cup (-M') \cup (-M)$. Так как $L_{M'} \cap M \neq \varnothing$ и $L_{M'} \subset L_M$, то из последнего равенства следует $L_{M'} = M' \cup (-M')$ и $L_M = M \cup L'_M \cup (-M)$.

Докажем равенство $M+L'_M = M$. Включение $M \subset M+L_{M'}$ очевидно. Предположим, что обратное ему включение не имеет места. Тогда существует $z = x + y,\ x \in M,\ y \in L'_M$ такой, что $z \notin M$. В силу равенства $L_M = M \cup L_{M'} \cup (-M)$ получаем $z \in L_{M'} \cup (-M)$. Включение $z \in L_{M'}$ невозможно, ибо влечет $x = z - y \in L_{M'}$ и, следовательно, противоречит условию $M \cap L_{M'} = \varnothing$. Если же $z \in -M$, то $y = z - x \in -M$, а это противоречит условию $(-M) \cap L_{M'} = \varnothing$. Значит, $M + L_{M'} \subset M$. Лемма доказана.

Теорема 4.6. *Для любого сублинейного отношения слабого порядка G на векторном пространстве X существует кортеж $\mathcal{F}$ такой, что $G = G_{\mathcal{F}}$.*

Доказательство. Пусть M — произвольная открытая грань конуса положительных векторов $G(0)$, не совпадающая с $G^{\sim}(0)$. На векторном подпространстве L_M рассмотрим сублинейное отношение предпорядка $\widetilde{G}_M$, конус положительных векторов которого есть $L_{M'} \cup M$. Из леммы 4.3 следует, что для $\widetilde{G}_M(0)$ имеют место соотношения $\widetilde{G}_M(0) \cap (-\widetilde{G}_M(0)) = L_{M'}$ и $\widetilde{G}_M(0) \cup (-\widetilde{G}(0)) = L_M$. В силу теоремы 4.2 $\widetilde{G}_M$ является сублинейным отношением слабого порядка на L_M. Кроме того, имеем $\widetilde{G}^{\succ}(0) = M$, причем множество M алгебраически открыто в L_M. Это влечет $\widetilde{G}^{\succ}_M(0) = \widetilde{G}^{\succ\!\succ}(0) = M$. В силу теоремы 4.4 $\widetilde{G}_M$ является гиперпорядком на L_M. Из теоремы 4.3 заключаем, что на L_M существует линейный функционал $\widetilde{l}_M$ такой, что $M = \widetilde{G}^{\succ}_M(0) = \{x \in L_M \mid \widetilde{l}_M(x) > 0\}$ и $L_{M'} = \{x \in L_M \mid \widetilde{l}_M(x) = 0\}$. Продолжение $\widetilde{l}_M$ на все векторное пространство X обозначим через l_M. Рассмотрим семейство линейных функционалов $\mathcal{F} = \{l_M \mid M \in \mathcal{M}(G(0)), M \neq G^{\sim}(0)\}$, которое упорядочим отношением, обратным отношению граневого подчинения на $\mathcal{M}(G(0)) : l_{M_1}$ предшествует l_{M_2} тогда и только тогда, когда $M_2 \trianglelefteq_G M_1$. Так как $\mathcal{M}(G(0))$ совершенно упорядочено, то $\mathcal{F}$ также совершенно упорядочено.

Покажем, что семейство $\mathcal{F}$ является линейно независимым. Предположим противное. Пусть существует конечное подсемейство $\{l_{M_1}, l_{M_2}, \ldots, l_{M_n}\}$ из $\mathcal{F}$ и вещественные, не равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_{M_i} = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что функционалы $l_{M_1}, l_{M_2}, \ldots, l_{M_n}$ занумерованы в соответствии с упорядочением в $\mathcal{F}$. Рассмотрим $\overline{x} \in M_1$. Тогда $l_{M_1}(\overline{x}) > 0$, и так как $M_i \subset M_1'$ для всех $i = 2, 3, \ldots, n$, то $l_{M_i}(\overline{x}) =$
0
для всех $i = 2, 3, \ldots, n$. В силу этого равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_{M_i}(\overline{x}) =$ $= \alpha_1 l_{M_1}(\overline{x}) = 0$ влечет $\alpha_1 = 0$, что противоречит выбору α_1. Сле-

довательно, семейство $\mathcal{F}$ линейно независимо.

Для завершения доказательства того, что $\mathcal{F}$ является кортежем на X, воспользуемся равенством $X = G^{\succ}(0) \cup G^{\sim}(0) \cup (-G^{\succ}(0))$. Если $x \in X \setminus G^{\sim}(0)$, то существует $M \in \mathcal{M}(G(0)), M \neq G^{\sim}(0)$, такой, что либо $x \in M$, либо $-x \in M$. Значит, $l_M(x) \neq 0$, что влечет $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$. Если же $x \in G^{\sim}(0)$ и поскольку $G^{\sim}(0) \subset L_{M'}$ для всех $M \in \mathcal{M}(G(0)), M \neq G^{\sim}(0)$, то $l_M(x) = 0$ для всех $l_M \in \mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F}_x = \varnothing$. Таким образом, $\mathcal{F}$ есть кортеж на X, причем $G^{\sim}(0) = \{x \in X \mid c_{\mathcal{F}}(x) = 0\}$. Для любого $x \in M$ имеем $l_{\widetilde{M}}(x) = 0$ для всех $\widetilde{M} \in \mathcal{M}(G(0))$ таких, что $M \lhd_G \widetilde{M}$, т. е. для всех $l_{M'}$, которые предшествуют l_M в кортеже $\mathcal{F}$, и $l_M(x) > 0$. Значит, $l_x = l_M$ для всех $x \in M$, что влечет $c_{\mathcal{F}}(x) > 0$ для всех $x \in M$ и, следовательно, $M \subset G_{\mathcal{F}}(0)$. Таким образом, $G(0) \subset G_{\mathcal{F}}(0)$, откуда в силу максимальности выпуклого конуса $G(0)$ получаем $G(0) = G_{\mathcal{F}}(0)$. Теорема доказана.

Следствие 4.3. *Пусть G — сублинейное отношение слабого порядка на векторном пространстве X, $\mathcal{F} \subset X'$ — соответствующий ему кортеж на X. Тогда семейство множеств*

$$\mathcal{M} = \{M_l, l \in \mathcal{F};\ M_0\},$$

где

$$M_l = \{x \in X \mid l(x) > 0, \bar{l}(x) = 0 \text{ для всех } \bar{l}, \text{предшествующих } l \text{ в } \mathcal{F}\},;$$

$$M_0 = \{x \in X \mid l(x) = 0 \text{ для всех } l \in \mathcal{F}\},$$

совпадает с семейством открытых граней конуса положительных векторов $G(0)$ отношения G.

При этом, положив M_0 первым элементом в $\mathcal{M}$, а остальные элементы $\mathcal{M}$ упорядочив отношением, обратным упорядочению $\mathcal{F}$, получим на $\mathcal{M}$ отношение, совпадающее с отношением граневого подчинения.

Из следствия заключаем, что два кортежа $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ определяют на X одно и то же сублинейное отношение слабого порядка G в том и только в том случае, когда $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеют как упорядоченные множества один и тот же порядковый тип [10, 29], а соответствующие друг другу функционалы в кортежах $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ отличаются положительным вещественным множителем (вообще говоря, своим для каждой пары соответствующих функционалов).

Замечание 4.4. В монографии [137] для численного представления бинарных отношений наряду с функцией полезности используется функция интенсивности предпочтения. Незначительно изменяя оригинальное определение из [137], функцией интенсивности предпочтения для бинарного отношения $G \subset X \times X$ назовем такую кососимметричную вещественнозначную функцию $i : X \times X \to \mathbb{R}$, что

$$(x, y) \in G \Longleftrightarrow i(x, y) \leq 0$$

(кососимметричность означает, что $i(x, y) = -i(y, x)$ для всех $x, y \in X$).

Пусть G — сублинейное отношение слабого порядка на векторном пространстве X, $\mathcal{F}$ — соответствующий G кортеж линейных функционалов, $c_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная по кортежу $\mathcal{F}$. Тогда нетрудно проверить, что функция $(x, y) \to c_{\mathcal{F}}(x - y)$ является функцией интенсивности предпочтения для G.

Замечание 4.5. В связи с результатами настоящего параграфа представляет интерес работа [296] , в которой для векторного пространства, упорядоченного сублинейным отношением совершенного порядка, строится порядково и алгебраически изоморфное ему пространство, названное лексикографическим пространством функций.

Замечание 4.6. Из теорем 4.5 и 4.6 следует, что сублинейные отношения слабого порядка являются фактически отношениями лексикографического упорядочения (по поводу лексикографических отношений порядка см. обзор [279]).

Глава 2

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предметом изучения данной главы являются оптимальные решения выпуклых задач векторной оптимизации. Исследования проводятся в рамках абстрактных предупорядоченных векторных пространств, что обеспечивает утверждениям максимальную степень общности. Основной результат главы — двойственный критерий (слабой) минимальности для решений выпуклых задач векторной оптимизации, сформулированный в терминах кортежей линейных функционалов. Метод условно линейной скаляризации, основанный на данном критерии, распространяет известный метод линейной скаляризации в такой степени, сколь это необходимо для того, чтобы получить исчерпывающее решение проблемы скаляризации для класса выпуклых задач векторной оптимизации. В качестве следствия основного результата получен критерий оптимальности для решений скалярной задачи выпуклого программирования, обобщающий классическую теорему Куна – Таккера.

§ 5. МИНИМАЛЬНОСТЬ И СЛАБАЯ МИНИМАЛЬНОСТЬ В ПРЕДУПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

5.1. Пусть $\langle X, \precsim \rangle$ — предупорядоченное векторное пространство, Q — заданное множество в X.

Как обычно, асимметричную часть отношения предпорядка $\precsim$ будем обозначать символом $\prec$, а симметричную часть $\precsim$ — символом $\sim$. Для сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ его асимметричная часть $\prec$ определяется конусом существенно положительных векторов $X^{\succ} : x \prec y$ тогда и только тогда, когда $y - x \in X^{\succ}$.

Вектор $x^0 \in Q$ называется $\precsim$*–минимальным в* Q *(минимальным в* Q *относительно сублинейного отношения предпорядка* $\precsim$*)*, если в Q не существует $\overline{x} \in Q$ такого, что $\overline{x} \prec x^0$.

Множество всех $\precsim$–минимальных векторов множества Q будем обозначать символом $\mathrm{Min}(Q \,|\precsim)$.

Предположим, что множество строго положительных векторов $X^{\succ\!\succ}$ пространства X непусто. Незаостренный выпуклый конус $X^{\succ\!\succ}$

определяет на X отношение строгого предпорядка $\prec\!\!\prec$: $x \prec\!\!\prec y$ тогда и только тогда, когда $y - x \in X^{\succ\!\!\succ}$.

Вектор $x^0 \in Q$ называется *слабо $\precsim$–минимальным в Q (слабо минимальным в Q относительно сублинейного отношения предпорядка $\precsim$),* если в Q не существует $\overline{x} \in Q$ такого, что $\overline{x} \prec\!\!\prec x^0$.

Множество всех слабо $\precsim$–минимальных векторов множества Q будем обозначать через $\text{w-Min}(Q|\precsim)$.

Включение $X^{\succ\!\!\succ} \subset X^{\succ}$ влечет, что любой $\precsim$–минимальный вектор является и слабо $\precsim$–минимальным, т. е. $\text{Min}(Q|\precsim) \subset$ $\subset \text{w-Min}(Q|\precsim)$. Обратное включение, вообще говоря, неверно.

Пример 5.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2, X^+ = \overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, Q = \{(x_1, x_2) \mid \max\limits_i |x_i| \leq 1\}$. Вектор $(-1, -1)$ является единственным $\precsim$–минимальным вектором в Q, тогда как множество слабо $\precsim$–минимальных векторов есть множество $\{(x_1, x_2) \mid \min\limits_i x_i = -1\}$.

Пример 5.2. Пусть X и Q те же, что и в примере 5.1, а $X^+ =$ $= \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$. Тогда $\text{Min}(Q|\precsim) =$ $= \{(-1, -1)\}$, а $\text{w-Min}(Q|\precsim) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$.

Последний пример показывает, что даже в тех случаях, когда сублинейное отношение предпорядка $\precsim$ является полным, включение $\text{Min}(Q \mid \precsim) \subset \text{w-Min}(Q \mid \precsim)$ может быть собственным. Для того, чтобы еще раз подчеркнуть различие между минимальными и слабо минимальными векторами, рассмотрим в качестве множества Q конус положительных векторов X^+. Тогда $\text{Min}(X^+ \mid \precsim) = X^{\sim}$, а $\text{w-Min}(X^+ \mid \precsim) = X^+ \setminus X^{\succ\!\!\succ}$. Естественно, что равенство $X^{\succ} = X^{\succ\!\!\succ}$ обеспечивает совпадение множеств $\text{Min}(Q \mid \precsim)$ и $\text{w-Min}(Q|\precsim)$ при любом $Q \subset X$.

Замечание 5.1. Понятие $\precsim$–минимальности относительно сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ является, по существу, переформулировкой классического определения понятия минимальности относительно произвольного бинарного отношения (ср. с определением из § 1). Что же касается понятия слабой $\precsim$–минимальности, то его возникновение связано с развитием теории векторной оптимизации [75, 273, 306, 324, 325] . Такие понятия, как оптимальность по Слейтеру [90, 119, 199], слабая эффективность [67, 68, 72], предшествовали появлению общего понятия слабой $\precsim$–минимальности. Поскольку $\text{w-Min}(Q|\precsim) = \text{Min}(Q \mid \prec\!\!\prec)$, то с концептуальной точки зрения понятие слабой $\precsim$–минимальности тождественно понятию $\precsim$–минимальности. Выделение слабой $\precsim$–минимальности в самостоятельное понятие обусловлено главным образом используемыми при исследовании средствами анализа и может быть интерпретировано как регуляризация исходного отношения предпорядка.

Замечание 5.2. Для множеств слабо $\precsim$–минимальных векторов справедливы утверждения, аналогичные тем, которые сформулированы в предложении 1.1 для множеств минимальных векторов.

5.2. Множество Q, принадлежащее предупорядоченному векторному пространству $\langle X, \precsim \rangle$, назовем *выпуклым снизу,* если для любых векторов $x_1, x_2 \in Q$ и любого вещественного числа α, $0 \leq \alpha \leq 1$, существует $z \in Q$ такой, что $z \precsim \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Дуальным образом определяется понятие выпуклости сверху.

Пример 5.3. График любой выпуклой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является выпуклым снизу множеством в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, упорядоченным отношением предпорядка, конус положительных векторов которого есть $\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x \in \mathbb{R}^n, \ \xi \in \mathbb{R}, x = 0, \xi \geq 0\}$.

Пример 5.4. Пусть $X = \mathbb{R}^2, X^+ = \overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Множество $Q_1 = \{(x_1,x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1, (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \geq 1\}$ выпукло снизу, а множество $Q_2 = \{(x_1,x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \geq 1, (x_1+1)^2 + (x^2-1)^2 \geq 1\}$ выпукло снизу и сверху.

Любое векторное пространство X, структура предпорядка на котором не задана, можно рассматривать как предупорядоченное векторное пространство с конусом положительных векторов, состоящим лишь из нулевого вектора. Если принять это соглашение, то понятие выпуклости снизу и выпуклости сверху в таком предупорядоченном векторном пространстве совпадают с обычным понятием выпуклости в векторном пространстве.

Предложение 5.1. *Множество Q из предупорядоченного векторного пространства $\langle X, \precsim \rangle$ является выпуклым снизу тогда и только тогда, когда множество $Q + X^+$ выпукло.*

Замечание 5.3. Как следует из предложения 5.1, понятие выпуклости снизу множеств предупорядоченного векторного пространства эквивалентно понятию конусной выпуклости [199, 295, 358].

(Каноническую) задачу векторной оптимизации, т. е. задачу нахождения множества минимальных векторов $\mathrm{Min}(Q|\precsim)$, (или множества слабо минимальных векторов $\text{w-Min}(Q|\precsim)$) заданного подмножества Q из предупорядоченного векторного пространства $\langle X, \precsim \rangle$ *будем называть выпуклой*, если множество Q является выпуклым снизу в $\langle X, \precsim \rangle$.

§ 6. ЛИНЕЙНАЯ СКАЛЯРИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

6.1. Пусть X - вещественное векторное пространство, $\precsim$ — фиксированное сублинейное отношение предпорядка на X. В дальнейшем, говоря о предупорядоченном векторном пространстве X, будем понимать пару $\langle X, \precsim \rangle$.

Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ (не обязательно линейный), определенный на предупорядоченном векторном пространстве X, называют *положительным,* если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in X^+$. Положительный функционал f назовем *существенно положительным,* если он отличен от тождественного нуля на конусе положительных векторов X^+; *сильно положительным,* если $f(x) > 0$ для всех $x \in X^{\succ}$, т. е. f положителен на всех существенно положительных векторах из X.

Пусть X' — векторное пространство, алгебраически сопряженное X, т. е. векторное пространство линейных функционалов на X. Множество $(X')^+$ всех положительных линейных функционалов на X образует заостренный выпуклый конус в X' и, следовательно, определяет на X' сублинейное отношение предпорядка $\precsim'$. Пару $\langle X', \precsim' \rangle$ будем называть дуальным предупорядоченным векторным пространством по отношению к пространству $\langle X, \precsim \rangle$.

Введение на X' структуры предупорядоченного векторного пространства индуцирует для линейных функционалов наряду с положительностью понятия существенной и строгой положительности. Заметим, что индуцированное понятие существенной положительности линейных функционалов совпадает с данным выше общим определением соответствующего понятия. Что касается понятия строгой положительности линейных функционалов в смысле дуального предупорядоченного векторного пространства $\langle X', \precsim' \rangle$ и понятия сильной положительности линейных функционалов на предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim \rangle$, то в общем случае эти понятия являются различными. Если, однако, векторное пространство X конечномерно, а отношение $\precsim$ таково, что конус положительных векторов X^+ замкнут в евклидовой топологии пространства X, то понятие сильной и строгой положительности линейных функционалов совпадают.

Основные результаты, касающиеся существования положительных линейных функционалов, были установлены в работе [145]. Из этих результатов следует (см. также [50]), что существование существенно положительных линейных функционалов обеспечивается условием $X^{\succ\!\succ} \neq \varnothing$. Если же X является сепарабельным нормированным пространством, а конус положительных векторов X^+

замкнут, то гарантируется существование сильно положительных линейных функционалов (см. теорему 2.1 из [145] и лемму 5.2.2 из [90, с. 136]).

6.2. Будем предполагать, что свойства сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ обеспечивают существование сильно положительных линейных функционалов на предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim \rangle$, и рассмотрим произвольное (не обязательно выпуклое снизу) множество $Q \subset X$.

Теорема 6.1. а) *Если вектор* $x^0 \in Q$ *доставляет на* Q *минимум сильно положительному линейному функционалу* $l \in X'$, *то* $x^0 \in \mathrm{Min}(Q \mid \precsim)$;

б) *если вектор* $x^0 \in Q$ *доставляет на* Q *минимум существенно положительному линейному функционалу* $l \in X'$, *то* $x^0 \in$ $\in \mathrm{w} - \mathrm{Min}(Q \mid \precsim)$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Предположив противное, рассмотрим вектор $\overline{x} \in Q$ такой, что $x^0 - \overline{x} \in X^{\succ}$. Так как функционал $l \in X'$ является сильно положительным на $\langle X, \precsim \rangle$, то $l(x^0 - \overline{x}) > 0$, т. е. $l(x^0) > l(\overline{x})$. Получили противоречие тому, что x^0 доставляет минимум функционалу l на Q. Доказательство утверждения б) проводится аналогично. Теорема доказана .

Продемонстрируем на примерах, что требования сильной положительности функционала $l \in X'$ в утверждении а) и существенной положительности в утверждении б) теоремы 6.1 не могут быть ослаблены.

Пример 6.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2, X^+ = \overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, Q = \{(x_1, x_2) \mid \max\limits_i |x_i| \leq 1\}$ (см. пример 5.1). Линейный функционал $l(x) = x_1$ является существенно положительным, но не сильно положительным. Любой вектор $(-1, \mu)$, $-1 < \mu \leq 1$, доставляет на Q минимум функционалу $l(x) = x_1$, однако ни один из них не принадлежит множеству $\mathrm{Min}(Q \mid \precsim)$.

Пример 6.2. Пусть $X = \mathbb{R}^3, X^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\}$, $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \geq -\sqrt{1 - x_3^2}, -1 \leq x_3 \leq 1\}$. Линейный функционал $l(x) = x_3$ является положительным на X и достигает на Q минимума в точке $(1, 1, -1)$. Однако вектор $(0, 0, -1)$ также принадлежит Q и $(0, 0, -1) \precnsim (1, 1, -1)$, т. е. вектор $(1, 1, -1)$ не является слабо $\precsim$–минимальным в Q.

Обозначим символом $\mathrm{Min}(Q \mid l)$ множество векторов из Q, доставляющих на множестве Q минимум линейному функционалу $l \in X'$. Пусть, кроме того, $(X')^s$ обозначает множество сильно положительных линейных функционалов на $\langle X, \precsim \rangle$. Используя эти обозначения, утверждения теоремы 6.1 могут быть представлены в виде включений

$$\bigcup_{l\in(X')^S} \mathrm{Min}(Q\,|\,l) \subset \mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim), \tag{6.1}$$

$$\bigcup_{l\in(X')^\succ} \mathrm{Min}(Q\,|\,l) \subset \text{w-}\mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim), \tag{6.2}$$

справедливых для произвольного множества $Q \subset X$.

В общем случае включения (6.1) и (6.2) являются собственными, в том числе и для выпуклых снизу множеств Q. Лишь для выпуклых многогранников Q, заданных на конечномерном предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim\rangle$, включения (6.1) и (6.2) выполняются как равенства (см., например, [199, 282, 295, 360]). Для произвольных выпуклых снизу множеств $Q \subset X$ теорема 6.1 допускает обращение лишь в ослабленном варианте.

Теорема 6.2. *Если множество Q является выпуклым снизу и таково, что множество $Q + X^+$ обладает непустой относительной алгебраической внутренностью, то для любого $x^0 \in \mathrm{Min}(Q|\precsim)$ $(x^0 \in \text{w-}\mathrm{Min}(Q|\precsim))$ существует ненулевой положительный линейный функционал $l \in (X')^+, l \neq 0,$ такой, что*

$$l(x^0) = \min_{x\in Q} l(x). \tag{6.3}$$

Доказательство. Если вектор $x^0 \in \mathrm{Min}(Q \mid \precsim)$ $(x^0 \in \text{w-}\mathrm{Min}(Q \mid \precsim))$, то $x^0 \notin \mathrm{icr}(Q+X^+)$, где $\mathrm{icr}(Q+X^+)$ — относительная алгебраическая внутренность множества $Q+X^+$. В силу теорем о существовании опорных линейных функционалов (см., например, [217]) заключаем, что существует ненулевой линейный функционал $l \in X', l \neq 0,$ удовлетворяющий условию

$$l(x^0) \le l(x) \text{ для всех } x \in Q + X^+,$$

из которого следует соотношение (6.3) и положительность функционала l на $\langle X, \precsim\rangle$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 6.2 гарантирует существование лишь положительного линейного функционала $l \in (X')^+, l \neq 0,$ тогда как достаточные условия теоремы 6.1 требуют сильной положительности l для минимальности x^0 и существенной положительности для слабой минимальности x^0. Приведем примеры, показывающие, что требование положительности линейного функционала $l \in X'$ в теореме 6.2 нельзя усилить до требования сильной или существенной положительности.

Пример 6.3. Пусть $X = \mathbb{R}^2, X^+ = \{(x_1,x_2)\,|\,x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}, Q = \{(x_1,x_2)|x_2 \ge -\sqrt{1-x_1^2}, -1 \le x_1 \le 0\} \cup \{(x_1,x_2)|x_1 \ge 0, x_2 \ge -1\}$.

Так как множество Q выпукло, а X конечномерно, то условия теоремы 6.2 выполнены. Для вектора $x^0 = (-1, 0) \in \mathrm{Min}(Q \,|\, \precsim)$ существует единственный (с точностью до положительного вещественного множителя) линейный функционал $l(x) = x_1$, для которого выполняется соотношение (6.3). Заметим, что линейный функционал $l(x) = x_1$ является существенно положительным на $\langle X, \precsim \rangle$, но не сильно положительным.

Пример 6.4. Пусть $X = \mathbb{R}^2, X^+ = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = 0, x_2 \geq 0\}, Q = \{(x_1, x_2) \,|\, -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq -\sqrt{1 - x_1^2}\}$. Так как в этом примере $X^{\succ} = X^{\succ\!\succ}$, то $\mathrm{Min}(Q \,|\, \precsim) = \text{w-Min}(Q \,|\, \precsim)$. Линейный функционал $l(x) = -x_1$ является единственным (с точностью до положительного вещественного множителя), которому минимальный вектор $x^0 = (1, 0) \in \mathrm{Min}(Q \,|\, \precsim)$ доставляет минимум на множестве Q, при этом линейный функционал $l(x) = -x_1$ является положительным, но не существенно положительным на $\langle X, \precsim \rangle$.

Замечание 6.1. Различные понятия собственной минимальности [90, 199, 256, 263, 282, 295, 297, 307, 327] выделяют из множеств минимальных векторов выпуклых снизу подмножеств $Q \subset X$ такие и только такие минимальные векторы, для которых в теореме 6.2 можно гарантировать существование сильно положительного линейного функционала $l \in (X')^s$, удовлетворяющего (6.3). Говоря неформально, собственно минимальными называются такие минимальные векторы, которые удовлетворяют некоторому дополнительному условию регулярности. Существующие в настоящее время различные определения собственной минимальности отличаются выбором конкретного условия регулярности.

Утверждения теоремы 6.2 могут быть представлены в виде включений

$$\mathrm{Min}(Q \,|\, \precsim) \subset \bigcup_{l \in (X')^+,\, l \neq 0} \mathrm{Min}(Q \,|\, l), \tag{6.4}$$

$$\text{w-Min}(Q \,|\, \precsim) \subset \bigcup_{l \in (X')^+,\, l \neq 0} \mathrm{Min}(Q \,|\, l), \tag{6.5}$$

справедливых для произвольных выпуклых снизу множеств $Q \subset X$ таких, что $\mathrm{icr}(Q + X^+) \neq \varnothing$.

Если при любом $l \in (X')^+ \setminus (X')^S$, $l \neq 0$, множество $\mathrm{Min}(Q \,|\, \precsim)$ является одноэлементным (в частности, это имеет место для строго выпуклых множеств Q), то включения (6.4) и (6.5) выполняются как равенства [90, 295]. В общем выпуклом случае, однако, включения (6.4) и (6.5), так же как и включения (6.1) и (6.2), являются собственными.

Таким образом, в классе выпуклых снизу подмножеств $Q \subset X$ средства линейной скаляризации позволяют получить лишь внутреннюю и внешнюю оценки множеств минимальных и слабо минимальных векторов, причем внешняя оценка существует только при дополнительном требовании $\mathrm{icr}(Q + X^+) \neq \varnothing$.

§ 7. КОРТЕЖИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРЕДУПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

7.1. Основная цель настоящего параграфа — распространить понятия положительности, существенной и сильной положительности на кортежи линейных функционалов.

Пусть $\langle X, \precsim \rangle$ - предупорядоченное векторное пространство, $\mathcal{F} \subset X'$ — произвольный фиксированный кортеж линейных функционалов на X. Каждому кортежу $\mathcal{F} \subset X'$ соответствует (см. § 4) однородный функционал $c_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}$, определенный равенством

$$c_{\mathcal{F}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{F}_x = \varnothing, \\ l_x(x), & \text{если } \mathcal{F}_x \neq \varnothing, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $\mathcal{F}_x = \{l \in \mathcal{F} \,|\, l(x) \neq 0\}$, l_x — наименьший элемент из $\mathcal{F}_x$. Воспользуемся теперь определением положительности (существенной положительности, сильной положительности) произвольного вещественнозначного функционала, заданного на предупорядоченном векторном пространстве, которое было дано в разделе 6.1 предыдущего параграфа.

Кортеж $\mathcal{F} \subset X'$, заданный на предупорядоченном векторном пространстве X, назовем *положительным (существенно положительным, сильно положительным)*, если соответствующий ему однородный функционал $c_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}$ является положительным (существенно положительным, сильно положительным) на X.

Отметим, что если кортеж $\mathcal{F}$ положителен на X, то $c_{\mathcal{F}}(x) = 0$ для всех $x \in X^{\sim}$. Однако положительность кортежа не исключает и такой случай, когда $c_{\mathcal{F}}(x) = 0$ для всех $x \in X^+$.

Каждому кортежу $\mathcal{F} \subset X'$ однозначно соответствует сублинейное отношение слабого порядка $G_{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in X \times X \,|\, c_{\mathcal{F}}(y - x) \geq 0\}$ на X (см. теорему 4.5). В терминах отношения $G_{\mathcal{F}}$ или в терминах соответствующего ему конуса положительных векторов $G_{\mathcal{F}}(0)$ условия положительности, а также условия существенной и сильной положительности кортежей могут быть переформулированы следующим образом.

Предложение 7.1. *Кортеж $\mathcal{F} \subset X'$, заданный на предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim \rangle$, является*

положительным тогда и только тогда, когда $X^+ \subset G_{\mathcal{F}}(0)$;

существенно положительным тогда и только тогда, когда $X^+ \subset G_{\mathcal{F}}(0)$ *и* $X^+ \cap G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0) \neq \varnothing$;

сильно положительным тогда и только тогда, когда $X^+ \subset G_{\mathcal{F}}(0)$ *и* $X^{\succ} \subset G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$.

Другими словами, кортеж $\mathcal{F} \subset X'$, заданный на $\langle X, \precsim \rangle$, положителен в том и только том случае, когда $G_{\mathcal{F}}$ доминирует сублинейное отношение предпорядка $\precsim$, а существенная положительность $\mathcal{F}$ предполагает, кроме того, что $\precsim$ не доминируется при этом отношением эквивалентности $G_{\mathcal{F}} \cap G^{-1}_{\mathcal{F}}$. Сильная положительность $\mathcal{F}$ на $\langle X, \precsim \rangle$ эквивалентна тому, что $G_{\mathcal{F}}$ правильно доминирует $\precsim$, т. е. $\precsim \subset G_{\mathcal{F}}$ и $\prec \subset G_{\mathcal{F}} \setminus G^{-1}_{\mathcal{F}}$.

В случае, если конус строго положительных векторов $X^{\succ\!\succ}$ пространства $\langle X, \precsim \rangle$ непуст, условие существенной положительности кортежа имеет следующую эквивалентную характеристику.

Предложение 7.2. *Если* $X^{\succ\!\succ} \neq \varnothing$, *то кортеж* $\mathcal{F} \subset X'$ *является существенно положительным тогда и только тогда, когда* $X^+ \subset G_{\mathcal{F}}(0)$ *и* $X^{\succ\!\succ} \subset G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$, *т. е. когда* $\precsim \subset G_{\mathcal{F}}$ *и* $\prec\!\prec \subset G_{\mathcal{F}} \setminus G^{-1}_{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Достаточность утверждения очевидна. Докажем необходимость. Пусть $z \in X^+ \cap G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$. Для любого $x \in X^{\succ\!\succ}$ существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda x - z \in X^+$. В силу включения $X^+ \subset G_{\mathcal{F}}(0)$ имеем $\lambda x - z \in G_{\mathcal{F}}(0)$, а так как $z \in G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$ и $G_{\mathcal{F}}(0) + G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0) = G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$, то $\lambda x \in G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$. Вследствие положительной однородности $G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$ получаем $x \in G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$. Предложение доказано.

Замечание 7.1. Условие $X^{\succ\!\succ} \subset G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$ и даже $X^{\succ} \subset G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$ не влекут, вообще говоря, положительности кортежа $\mathcal{F}$. Действительно, пусть $X = \mathbb{R}^2, \mathcal{F} = \{l_1, l_2\}$, где $l_1 = (1,0), l_2 = (0,1)$; $X^+ = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0\}$. Тогда $X^{\succ} = X^{\succ\!\succ} = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0\}$, $G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0) = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = 0, x_2 > 0\}$. Очевидно, что $X^{\succ} = X^{\succ\!\succ} \subset G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0)$, однако $G_{\mathcal{F}}(0) = G^{\succ}_{\mathcal{F}}(0) \cup \{(0,0)\} \subset X^+$. Следовательно, кортеж $\mathcal{F}$ не является положительным на $\langle X, \precsim \rangle$.

Существование положительных кортежей обеспечивается леммой Цорна. В частности, из следствия 4.1 и предложения 7.1 следует, что для любого предупорядоченного векторного пространства $\langle X, \precsim \rangle$ совокупность сильно положительных, а значит, и существенно положительных на нем кортежей непуста.

7.2. Пусть на предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim \rangle$ задан кортеж $\mathcal{F} \subset X'$ и пусть $\lessdot$ - отношение совершенного порядка на $\mathcal{F}$: для любых $l_1, l_2 \in \mathcal{F}$ соотношение $l_1 \lessdot l_2 \in \mathcal{F}$ означает, что l_1 предшествует l_2 в кортеже $\mathcal{F}$. Каждому линейному функционалу l из кортежа $\mathcal{F}$ поставим в соответствие выпуклый подконус X^+_l конуса положительных векторов X^+, определенный следующим образом:

$$X_l^+ = \{x \in X^+ \,|\, \bar{l}(x) = 0 \text{ для всех } \bar{l} \in \mathcal{F} \text{ таких, что } \bar{l} \lessdot l\}.$$

Если $\mathcal{F}$ имеет наименьший элемент l^0, то $X_{l^0}^+ = X^+$. Очевидно, что $X^\sim \subset X_l^+$ для всех $l \in \mathcal{F}$.

Теорема 7.1. *Кортеж $\mathcal{F} \subset X'$, заданный, на предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim \rangle$, является*

а) *положительным тогда и только тогда, когда для любого $l \in \mathcal{F}$ выполнено условие*

$$l(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in X_l^+; \tag{7.2}$$

б) *существенно положительным тогда и только тогда, когда для любого $l \in \mathcal{F}$ выполнено условие (7.2) и существует $\widehat{l} \in \mathcal{F}$ такой, что $\hat{l}(x) > 0$ хотя бы для одного x из $X_{\widehat{l}}^+$;*

в) *сильно положительным тогда и только тогда, когда для любого $l \in \mathcal{F}$ выполнено условие (7.2) и имеет место равенство*

$$X^\sim = \{x \in X^+ \,|\, l(x) = 0 \text{ для всех } l \in \mathcal{F}\}. \tag{7.3}$$

Доказательство, а) *Необходимость.* Пусть $\overline{x} \in X_l^+$. Если $\mathcal{F}_{\overline{x}} = \varnothing$, то равенство $l(\overline{x}) = 0$ выполняется для всех $l \in \mathcal{F}$ в силу определения $\mathcal{F}_{\overline{x}}$. Если же $\mathcal{F}_{\overline{x}} \neq \varnothing$, то $\overline{x} \in X_l^+$ тогда и только тогда, когда $l \lessdot l_{\overline{x}}$ или $l = l_{\overline{x}}$. Значит, либо $l(\overline{x}) = 0$, либо $l(\overline{x}) = l_{\overline{x}}(\overline{x})$. Если кортеж $\mathcal{F}$ положителен, то во втором случае имеем $l(\overline{x}) > 0$. Выполнение соотношения (7.2) доказано.

Достаточность. Пусть $y \in X^+$ и $\mathcal{F}_y \neq \varnothing$. Поскольку $l(y) = 0$ для всех $l \lessdot l_y$, то $y \in X_{l_y}^+$. Из условий (7.2) получаем $l_y(y) > 0$. Следовательно, кортеж $\mathcal{F}$ положителен. Утверждение а) доказано.

б) Если кортеж $\mathcal{F}$ существенно положителен, то существует $y \in X^+$ такой, что $\mathcal{F}_y \neq \varnothing$. Как было показано выше, в этом случае $y \in X_{l_y}^+$ и в силу (7.2) имеет место $l_y(y) > 0$. Это,доказывает необходимость утверждения б). Обратное утверждение очевидно, так как $X_l^+ \subset X^+$ для всех $l \in \mathcal{F}$.

в) Равенство (7.3) фактически эквивалентно условию $\mathcal{F}_x \neq \varnothing$ для всех $x \in X^\succ$.

Теорема доказана.

Если кортеж $\mathcal{F}$ является вполне упорядоченным, то семейство конусов $\{X_l^+ \,|\, l \in \mathcal{F}\}$ может быть построено индуктивно. Для двух функционалов l, $l' \in \mathcal{F}$ будем говорить, что функционал l' *непосредственно предшествует* функционалу l в кортеже $\mathcal{F}$, если не существует $\bar{l} \in \mathcal{F}$ такого, что $l' \lessdot \bar{l} \lessdot l$. Если для $l \in \mathcal{F}$ не существует непосредственно предшествующего ему в кортеже $\mathcal{F}$ функционала, то l будем называть *предельным* в $\mathcal{F}$. (Эта терминология принята в теории упорядоченных множеств [10].) Первый или наименьший элемент кортежа $\mathcal{F}$ обозначим через l^0.

Построение семейства $\{X_l^+ \mid l \in \mathcal{F}\}$ осуществим следующим образом:

1) для первого элемента кортежа l^0 положим $X_{l^0}^+ = X^+$;

2) если для l существует непосредственно предшествующий ему в кортеже $\mathcal{F}$ функционал l', то положим $X_l^+ = \{\in X_{l'}^+ \mid l'(x) = 0\}$;

3) если l является предельным в $\mathcal{F}$, то $X_l^+ = \cap\{X_{\bar{l}}^+ | \bar{l} \in \mathcal{F},\ \bar{l} \lessdot l\}$.

Замечание 7.2. Впервые понятия положительных, существенно положительных и сильно положительных кортежей были введены в работах [75, 288] .

§ 8. УСЛОВНО ЛИНЕЙНАЯ СКАЛЯРИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

8.1. Пусть X - вещественное векторное пространство, $\mathcal{F}$ — произвольный фиксированный кортеж на X, Q — заданное множество из X.

Будем говорить, что вектор $x^0 \in Q$ *доставляет минимум кортежу* $\mathcal{F} \subset X'$ *на множестве* Q, если $c_{\mathcal{F}}(x - x^0) \geq 0$ для всех $x \in Q$. Здесь функционал $c_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}$ определен равенством (7.1).

Множество векторов из Q, доставляющих минимум кортежу $\mathcal{F}$ на множестве Q, будем обозначать символом $\mathrm{Min}(Q \mid \mathcal{F})$.

Из соответствия двойственности, существующего между кортежами и сублинейными отношениями слабого порядка, следует, что $\mathrm{Min}(Q \mid \mathcal{F}) = \mathrm{Min}(Q \mid G_{\mathcal{F}})$, где $G_{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in \times X \mid c_{\mathcal{F}}(x - y) \leq 0\}$ — сублинейное отношение слабого порядка, дуальное кортежу $\mathcal{F}$. Таким образом, понятие минимума для кортежа $\mathcal{F}$ эквивалентно понятию минимальности для дуального ему отношения слабого порядка $G_{\mathcal{F}}$. Нетрудно видеть также, что понятие минимума для одноэлементного кортежа $\mathcal{F} = \{l\}$ совпадает с обычным понятием минимума для линейного функционала l.

Замечание 8.1. Можно было бы определить понятие слабого минимума для кортежа $\mathcal{F}$, отождествив его с понятием слабого минимума для сублинейного отношения слабого порядка $G_{\mathcal{F}}$. Однако понятие слабого минимума для $G_{\mathcal{F}}$ имеет смысл лишь в том случае, когда конус строго положительных векторов $G_{\mathcal{F}}^{\gg}(0)$ непуст. Равносильное дуальное требование состоит в том, что кортеж $\mathcal{F}$ имеет наименьший элемент l^0. Поскольку при этом $G_{\mathcal{F}}^{\gg}(0) =$

$= \{x \in X \mid l^0(x) > 0\}$ (следствие 4.3), то вектор $x^0 \in Q$ доставляет кортежу $\mathcal{F} \subset X'$ слабый минимум на множестве Q тогда и только тогда, когда $l^0(x - x^0) > 0$ для всех $x \in Q$. Следовательно, понятие слабой минимальности для кортежей по существу эквивалентно понятию минимума для линейных функционалов.

Пусть x^0 - фиксированный вектор из множества Q. Каждому линейному функционалу $l \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие подмножество $Q_l(x^0)$ множества Q, определенное равенством $Q_l(x^0) = \{x \in Q \mid \bar{l}(x) = \bar{l}(x^0)$ для всех $\bar{l} \lessdot l,\ \bar{l} \in \mathcal{F}\}$, где $\lessdot$ — отношение совершенного порядка на кортеже $\mathcal{F}$: для любых $l_1, l_2 \in \mathcal{F}$ соотношение $l_1 \lessdot l_2$ означает, что l_1 предшествует l_2 в кортеже $\mathcal{F}$.

Если в $\mathcal{F}$ существует наименьший элемент l^0, то положим $Q_{l^0}(x^0) = Q$.

Предложение 8.1. *Вектор $x^0 \in Q$ доставляет кортежу $\mathcal{F} \subset X'$ минимум на множестве Q тогда и только тогда, когда для любого $l \in \mathcal{F}$ имеет место*

$$l(x) \geq l(x^0) \text{ для всех } x \in Q_l(x^0). \tag{8.1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Зафиксируем $l \in \mathcal{F}$ и выберем произвольный вектор $x \in Q_l(x^0)$. Из определения множества $Q_l(x^0)$ получаем, что либо $l(x - x^0) = 0$, либо $l(x - x^0) = c_{\mathcal{F}}(x - x^0)$. Если вектор $x^0 \in \mathrm{Min}(Q \mid \mathcal{F})$, то $c_{\mathcal{F}}(x - x^0) \geq 0$. Следовательно, $l(x - x^0) \geq 0$ для любого $x \in Q_l(x^0)$ при условии, что $x^0 \in \mathrm{Min}(Q \mid \mathcal{F})$.

Достаточность. Предположим, что соотношения (8.1) выполняются и вместе с тем существует $\overline{x} \in Q$, для которого $c_{\mathcal{F}}(\overline{x} - x^0) < 0$. Тогда для вектора $y = \overline{x} - x^0$ имеем $\mathcal{F}_y \neq \varnothing$ и $l_y(y] = c_{\mathcal{F}}(y) < 0$. Поскольку $\overline{x} \in Q_{l_y}(x^0)$, то последнее неравенство противоречит (8.1). Теорема доказана.

Если кортеж $\mathcal{F}$ является вполне упорядоченным, то множество векторов $\mathrm{Min}(Q \mid \mathcal{F})$, доставляющих минимум кортежу $\mathcal{F}$ на произвольном выпуклом снизу множестве Q, может быть построено индуктивно. Для этого построим семейство подмножеств $\{Q_l \mid l \in \mathcal{F}\}$, зависящее только от выбранного элемента кортежа:

1) для наименьшего элемента l^0 кортежа $\mathcal{F}$ положим $Q_{l^0} = Q$;

2) если для l существует непосредственно предшествующий ему в кортеже $\mathcal{F}$ функционал l', то

$$Q_l = \{x \in Q_{l'} \mid l'(x) = \min_{z \in Q_{l'}} l'(z)\};$$

3) если l является предельным элементом $\mathcal{F}$, то

$$Q_l = \cap\{Q_{\bar{l}} \mid \bar{l} \in \mathcal{F}, \bar{l} \lessdot l\}.$$

Предложение 8.2. *Если кортеж $\mathcal{F}$ является вполне упорядоченным и*

а) *в $\mathcal{F}$ существует наибольший элемент l_m, то*

$$\operatorname{Min}(Q \,|\, \mathcal{F}) = \{x \in Q_{l_m} \,|\, l_m(x) = \min_{z \in Q_{l_m}} l_m(z)\};$$

б) *в $\mathcal{F}$ не существует наибольшего элемента, то*

$$\operatorname{Min}(Q \,|\, \mathcal{F}) = \cap\{Q_l \,|\, l \in \mathcal{F}\}.$$

Следствие 8.1. *Если кортеж $\mathcal{F} = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ конечен, то вектор $x^0 \in Q$ доставляет минимум кортежу $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда*

$$l_i(x^0) = \min_{x \in Q_i} l_i(x), \tag{8.2}$$

где $Q_1 = Q, Q_{i+1} = \{x \in Q_i \,|\, l_i(x) = \min_{z \in Q_i} l_i(z)\},\ i = 1, 2, \ldots, m-1.$

Из последнего предложения и следствия из него заключаем, что понятие минимума для кортежа является по существу обобщением понятия лексикографического минимума [198, 279].

8.2. Вернемся к исследованию задач векторной оптимизации, определенных на предупорядоченном векторном пространстве $\langle X, \precsim \rangle$. Пусть Q — произвольное заданное множество из X.

Непосредственным обобщением теоремы 6.1 является следующая

Теорема 8.1. а) *Если вектор $x^0 \in Q$ доставляет минимум сильно положительному кортежу $\mathcal{F}$, то $x^0 \in \operatorname{Min}(Q \,|\, \precsim)$.*

б) *Если вектор $x^0 \in Q$ доставляет минимум существенно положительному кортежу $\mathcal{F}$, то $x^0 \in \text{w-}\operatorname{Min}(Q \,|\, \precsim)$.*

Доказательство. а) Так как кортеж $\mathcal{F}$ сильно положителен, то $c_{\mathcal{F}}(x) < 0$ для всех $x \in (-X^{\succ})$. Условие $x^0 \in \operatorname{Min}(Q \,|\, \mathcal{F})$ равносильно выполнению неравенства $c_{\mathcal{F}}(x - x^0) \geq 0$ для всех $x \in Q$. Сравнивая эти два неравенства, заключаем, что $(-X^{\succ}) \cap (Q - x^0) = \varnothing$. Таким образом, $x^0 \in \operatorname{Min}(Q \,|\, \precsim)$.

Доказательство утверждения б) проводится аналогично. Действительно, существенная положительность кортежа $\mathcal{F}$ влечет в силу предложения 7.2 выполнение неравенства $c_{\mathcal{F}}(x) < 0$ для всех $x \in (-X^{\succ\!\succ})$. Сравнивая это неравенство с условием $c_{\mathcal{F}}(x - x^0) \geq 0$ для всех $x \in Q$, получаем $(-X^{\succ\!\succ}) \cap (Q - \{x^0\}) = \varnothing$, что эквивалентно включению $x^0 \in \text{w-}\operatorname{Min}(Q \,|\, \precsim)$. Теорема доказана.

Символами F^s и $F^{\succ}$ обозначим соответственно совокупности сильно положительных и существенно положительных кортежей на предупорядоченном векторном пространстве X. Используя эти обозначения, утверждения теоремы 8.1 можно представить в виде включений

$$\bigcup_{\mathcal{F}\in F^s} \mathrm{Min}(Q\,|\,\mathcal{F}) \subset \mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim), \tag{8.3}$$

$$\bigcup_{\mathcal{F}\in F^{\succ}} \mathrm{Min}(Q\,|\,\mathcal{F}) \subset \text{w-}\mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim), \tag{8.4}$$

справедливых для произвольного множества $Q \subset X$.

Поскольку каждый линейный функционал $l \in X'$ можно рассматривать как одноэлементный кортеж $\mathcal{F} = \{l\}$, при этом понятие минимума для кортежа $\mathcal{F} = \{l\}$ совпадает с обычным понятием минимума для линейного функционала $l \in X'$, то включения (8.3) и (8.4) обобщают включения (6.1) и (6.2) соответственно.

Оказывается, что в выпуклом случае теорема 6.2 допускает полное обращение.

Теорема 8.2. *Если множество $Q \subset X$ выпукло снизу, то*

а) *для того чтобы $x^0 \in \mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim)$, необходимо и достаточно, чтобы на X существовал сильно положительный кортеж $\mathcal{F}$ такой, что $c_{\mathcal{F}}(x - x^0) \geq 0$ для всех $x \in Q$;*

б) *для того чтобы $x^0 \in \text{w-}\mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim)$, необходимо и достаточно, чтобы на X существовал существенно положительный кортеж $\mathcal{F}$ такой, что $c_{\mathcal{F}}(x - x^0) \geq 0$ для всех $x \in Q$.*

Доказательство. Достаточность утверждений а) и б) доказана в теореме 8.1. Докажем необходимость утверждения а). Пусть $x^0 \in \mathrm{Min}(Q\,|\,\precsim)$ и пусть $K = \mathrm{cone}[(Q + X^+) - \{x^0\}]$ есть коническая оболочка множества $(Q + X^+) - \{x^0\}$. Легко видеть, что $X^+ \subset K$. Кроме того, из минимальности x^0 следует $X^{\succ} \cap (-K) = \varnothing$. Действительно, если предположить, что $X^{\succ} \cap (-K) \neq \varnothing$, то для $z \in X^{\succ} \cap (-K)$ существуют $q \in Q, x^+ \in X^+$ и вещественное число $\lambda > 0$ такие, что $-\lambda z = q + x^+ - x^0$. Отсюда получаем $x^0 - q = \lambda z + x^+ \in X^{\succ}$, т. е. $q \prec x^0$, что противоречит минимальности x^0. Конус K, определяет на X некоторое сублинейное отношение предпорядка G. В силу следствия 4.1 на X существует сублинейное отношение слабого порядка $\widehat{G}$, правильно доминирующее G. Так как $X^+ \subset K \subset \widehat{G}(0)$ и $K \setminus (-K) \subset \widehat{G}^{\succ}(0)$ то из условия $X^{\succ} \cap (-K) = \varnothing$ следует, что $X^{\succ} \subset \widehat{G}^{\succ}(0)$. В силу предложения 7.1 кортеж $\mathcal{F}$, соответствующий $\widehat{G}$, является сильно положительным на X и, кроме того, $Q - \{x^0\} \subset K \subset \widehat{G}(0)$. Из последнего включения заключаем, что вектор x^0 доставляет минимум кортежу $\mathcal{F}$ на множестве Q. Таким образом, требуемый в теореме кортеж построен. Утверждение а) доказано.

Для доказательства необходимой части утверждения б) аналогично предыдущему осуществим, исходя из произвольного вектора $x^0 \in \text{w-Min}(Q \,|\, \precsim)$, построение конуса $K = \text{cone}[(Q + X^+) - \{x^0\}]$ и сублинейного отношения слабого порядка $\widehat{G}$ на X такого, что $X^+ \subset K \subset \widehat{G}^{\succ}(0)$. Из слабой минимальности x^0 получим $X^{\ggcurly} \cap$ $\cap (-K) = \varnothing$, что влечет $X^{\ggcurly} \subset \widehat{G}^{\succ}(0)$. Воспользовавшись предложением 7.2, заключаем, что кортеж $\mathcal{F}$, соответствующий $\widehat{G}$, является существенно положительным на X. Включение $Q - \{x^0\} \subset$ $\subset K \subset \widehat{G}(0)$ означает, что вектор x доставляет минимум кортежу $\mathcal{F}$ на множестве Q. Теорема доказана.

Таким образом, если множество Q выпукло снизу, то

$$\text{Min}(Q \,|\, \precsim) = \bigcup_{\mathcal{F} \in F^s} \text{Min}(Q \,|\, \mathcal{F}), \tag{8.5}$$

$$\text{w-Min}(Q \,|\, \precsim) = \bigcup_{\mathcal{F} \in F^{\succ}} \text{Min}(Q \,|\, \mathcal{F}). \tag{8.6}$$

Заметим, что в отличие от включений (6.4) и (6.5), обобщением которых являются равенства (8.5) и (8.6), последние получены без каких-либо предположений о непустоте алгебраической внутренности множества $Q + X^+$.

Следствие 8.2. *Пусть предупорядоченное векторное пространство $\langle X, \precsim \rangle$ таково, что $codim X^{\sim} = k < +\infty$. Тогда, для того чтобы вектор $x^0 \in Q$ был минимальным (слабо минимальным) в множестве Q относительно $\precsim$, достаточно, а если множество выпукло снизу, то и необходимо, чтобы существовал конечный сильно положительный (существенно положительный) кортеж $\mathcal{F} = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, $m \le k$, такой, что*

$$l_i(x^0) = \min_{x \in Q_i} l_i(x), \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8.7}$$

где $Q_1 = Q, Q_{i+1} = \{x \in Q_i \,|\, l_i(x) = \min\limits_{z \in Q_i} l_i(z)\}, i = 1, 2, \ldots, m-1.$

Пример 8.1. Вернемся к примеру 6.3: $X = \mathbb{R}^2, X^+ = \overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$, $Q = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 \ge -\sqrt{1 - x_1^2},$ $-1 \le x_1 \le 0\} \cup \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ge 0, x_2 \ge -1\}$. Было показано, что вектор $x^0 = (-1, 0) \in \text{Min}(Q \,|\, \precsim)$ не минимизирует никакой сильно положительный линейный функционал. Вместе с тем нетрудно проверить, что кортеж $\mathcal{F} = \{l_1(x) = x_1, l_2(x) = x_2\}$ является сильно положительным и $x^0 = (-1, 0) \in \text{Min}(Q \,|\, \mathcal{F})$.

Из данного примера следует также, что даже в простейших случаях (например, для пространства $\mathbb{R}^n$, упорядоченного неотрицательным ортантом) теоремы 8.1 и 8.2 усиливают утверждения теорем 6.1 и 6.2.

Вещественный функционал $c : X \to \mathbb{R}$, определенный на векторном пространстве X, назовем *условно линейным,* если для него можно указать такой кортеж линейных функционалов $\mathcal{F} \subset X'$, что $c(x) = c_{\mathcal{F}}(x)$ для всех $x \in X$.

Очевидно, что теоремы 8.1 и 8.2 можно переформулировать в терминах условно линейных функционалов. Например, теорема 8.2 утверждает, что минимальными векторами выпуклого снизу подмножества $Q \subset X$ являются те и только те векторы x^0 из Q, для каждого из которых существует условно линейный функционал $c : X \to \mathbb{R}$ такой, что $c(x - x^0) \geq 0$ для всех $x \in Q$. Вследствие этого будем называть метод скаляризации, обоснованный в теоремах 8.1 и 8.2, *методом условно линейной скаляризации.* Поскольку векторное пространство линейных функционалов X' принадлежит совокупности условно линейных функционалов, а теоремы 6.1 и 6.2 — следствия теорем 8.1 и 8.2, то метод условно линейной скаляризации содержит в себе как частный случай метод линейной скаляризации и, следовательно, является его естественным распространением.

§ 9. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

9.1. Применим результат теоремы 8.2, а точнее, следствия 8.2 к исследованию оптимальных решений скалярной задачи выпуклого программирования:

$$\begin{gathered} f_0(x) \to \inf, \\ x \in \Omega, f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{9.1}$$

где $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — вещественные выпуклые функции, определенные на векторном пространстве X; Ω — выпуклое множество из X.

С этой целью установим связь между понятием $\precsim$–минимальности и понятием оптимальности в задаче (9.1). Введем отображение $F : X \to \mathbb{R}^{1+m}$, определив его равенством

$$F(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Предложение 9.1. *Вектор $x^0 \in Q$, удовлетворяющий ограничениям $f_i(x^0) \leq 0, i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, является оптимальным решением задачи выпуклого программирования (9.1) тогда и только тогда, когда вектор $F(x^0)$ является $\precsim_0$ -минимальным в множестве $F(Q) = \{F(x) \in \mathbb{R}^{1+m} \mid x \in \Omega\}$ относительно сублинейного* *отношения предпорядка $\precsim_0$, заданного на $\mathbb{R}^{1+m}$ конусом положительных векторов:*

$$Y_0^+ = \{y \in \mathbb{R}^{l+m} \,|\, y_0 > 0, y_i \geq 0, i \in I_a(x^0)\} \cup \{0\}, \qquad (9.2)$$

где $I_a(x^0) = \{i \in I \,|\, f_i(x^0) = 0\}$ — множество индексов, соответствующих активным в точке x^0 ограничениям.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x^0 \in \Omega$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования (9.1) и пусть существует вектор $\overline{x} \in \Omega$ такой, что $F(\overline{x}) \prec_0 (\mathcal{F}(x^0)$. Последнее соотношение эквивалентно выполнению неравенств $f_0(\overline{x}) < f_0(x^0)$, $f_i(\overline{x}) \leq f_i(x^0), i \in I(x^0)$. Выберем вещественное число $\alpha_0 \in (0,1)$ таким образом, чтобы неравенство $f_i(x^0+\alpha(\overline{x}-x^0)) \leq$ $\leq f_i(x^0) + \alpha(f_i(\overline{x}) - f_i(x^0)) \leq 0$ выполнялось при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Вследствие выпуклости множества Ω и функции f_0 будем иметь, кроме того, $x^0 + \alpha(\overline{x} - x^0) \in \Omega$ и $f_0(x^0 + \alpha(\overline{x} - x^0)) - f_0(x^0)) \leq 0$ при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Полученные соотношения противоречат тому, что x^0 является решением задачи (9.1).

Достаточная часть предложения доказывается аналогичным образом.

Теорема 9.1. *Вектор $x^0 \in \Omega$, удовлетворяющий ограничениям $f_i(x^0) \leq 0$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, является оптимальным решением задачи выпуклого программирования (9.1) тогда и только тогда, когда в $\mathbb{R}^m$ существует такой набор векторов $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}$, $0 \leq k \leq |I_a(x^0)|$ ($|I_a(x^0)|$ — число элементов множества $I_a(x^0) =$ $= \{i \in I \,|\, f_i(x^0) = 0\}$), что выполнены следующие условия:*

а) *если $k > 0$, то первые k векторов $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$ являются линейно независимыми;*

б) *условие дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_i^{(s)} f_i(x^0) = 0 \text{ для всех } i \in I, s = 1, 2, \ldots, k+1;$$

в) *условие неотрицательности:*

$$\lambda_i^{(s)} \geq 0 \text{ для всех } i \in I_s, \ s = 1, 2, \ldots, k+l,$$

где $I_1 = I_a(x^0), I_{s+1} = \{i \in I_s \,|\, \lambda_i^{(s)} = 0\}, s = 1, 2, \ldots, k$;

г) *условия минимума:*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(s)} f_i(x^0) = \min_{x \in \Omega_s} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(s)} f_i(x), s = 1, 2, \ldots, k,$$

$$f_0(x^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k+1)}f_i(x^0)=\min_{x\in\Omega_{k+1}}(f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k+1)}f_i(x),$$

где $\Omega_1=\Omega, \Omega_{s+1}=\{x\in\Omega_s\mid \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(s)}f_i(x)=\min_{z\in Q_s}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(s)}f_i(z)\}$, $s=1,2,\dots,k$.

Доказательство. В силу предложения 9.1 вектор $x^0\in Q$, удовлетворяющий ограничениям $f_i(x^0)\le 0, i\in I$, является оптимальным решением задачи (9.1) тогда и только тогда, когда вектор $F(x^0)=(f_0(x^0),f_1(x^0),\dots,f_m(x^0))\in\mathbb{R}^{1+m}$ является $\precsim_0$-минимальным в множестве

$$F(\Omega)=\{F(x)=(f_0(x),f_1(x),\dots,f_m(x))\in\mathbb{R}^{1+m}\mid x\in\Omega\}$$

относительно сублинейного отношения предпорядка $\precsim_0$, заданного на $\mathbb{R}^{1+m}$ конусом положительных векторов Y_0^+ (см. (9.2)).

Рассмотрим сейчас условия а) - г) доказываемой теоремы. Условие а) обеспечивает линейную независимость векторов $(0,\lambda^{(1)}),\dots$ $\dots,(0,\lambda^{(k)}),(1,\lambda^{(k+1)})$ в пространстве $\mathbb{R}^{1+m}$. Из этого следует, что упорядоченное семейство линейных функционалов

$$\{(0,\lambda^{(1)}),\dots,(0,\lambda^{(k)}),(1,\lambda^{(k+1)})\} \tag{9.3}$$

образует на $\mathbb{R}^{1+m}$ кортеж, сильная положительность которого относительно сублинейного отношения предпорядка $\precsim_0$ равносильна условиям б), в). Условия минимума г) являются фактически конкретной формой условия (8.7), записанного для кортежа (9.3) и множества $F(\Omega)$.

Таким образом, справедливость теоремы 9.1 следует из предложения 9.1 и следствия 8.2.

Замечание 9.1. Если выполнено условие Слейтера: существует $\overline{x}\in\Omega$ такой, что $f_i(\overline{x})<0, i=l,2,\dots,m$, то в теореме 9.1 можно гарантировать существование единственного вектора $\lambda^{(1)}\in\mathbb{R}^m$, образующего требуемый набор, т. е. можно гарантировать $k=0$. В этом случае теорема 9.1, как нетрудно видеть, превратится в классическую теорему Куна - Таккера (см., например, [115, 132, 202, 213, 218]).

Пример 9.1. Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x)=(x_1+2)^2+x_2^2+x_3\to\min,\\ x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\\ f_1(x)=x_1^2+x_2^2-2\le 0,\\ f_2(x)=-x_1-x_2+2\le 0,\\ f_3(x)=e^{-x_3}-1\le 0. \end{array}\right\} \tag{9.4}$$

Точка $x^0 = (1,1,0)$ удовлетворяет ограничениям задачи (9.4), при этом $I_a(x^0) = \{1,2,3\}$. Нетрудно проверить, что набор, состоящий из двух векторов $\lambda^{(1)} = (1,2,0)$, $\lambda^{(2)} = (0,0,1)$, удовлетворяет условиям а) – г) в точке $x^0 = (1,1,0)$. Следовательно, точка $x^0 = (1,1,0)$ является оптимальным решением задачи (9.4). Заметим, что условие Слейтера для задачи (9.4) не выполняется. Следовательно, классическая теорема Куна - Таккера здесь неприменима.

Глава 3

АППРОКСИМАТИВНАЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ СКАЛЯРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Исследования общих задач векторной оптимизации требуют привлечения средств анализа функций и отображений. В данной главе развивается теория аппроксимативного квазидифференцирования вещественнозначных функций, обобщающая теорию квазидифференцирования Демьянова–Рубинова [103 – 107]. Основными понятиями развиваемой теории являются понятия ε–квазидифференциала и аппроксимативного квазидифференциала. Эти понятия вводятся сначала для положительно однородных функций, а затем переносятся на произвольные вещественнозначные функции. Развивается исчисление ε–квазидифференциалов. Определяются понятия квазинормалей и ε–квазинормалей, распространяющие идеи квазидифференцируемости на локальный анализ множеств. Доказываются условия локального экстремума, выраженные в терминах ε–квазидифференциалов исследуемой функции.

§ 10. РАЗНОСТНО-СУБЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

10.1. Пусть X — конечномерное евклидово пространство и пусть $\mathcal{P}(X)$ — векторное пространство вещественнозначных положительно однородных $(p(\lambda x) = \lambda p(x), \lambda > 0, x \in X)$ непрерывных функций, определенных на X. Так как каждая функция из $\mathcal{P}(X)$ однозначно определяется ее сужением на единичную сферу $S = \{x \in X \,|\, \|x\| = 1\}$, где $\|\cdot\|$ — норма в X, то $\mathcal{P}(X)$ можно отождествить с пространством $C(S)$ вещественнозначных непрерывных функций, заданных на компакте S. Такое отождествление позволяет перенести на $\mathcal{P}(X)$ все структуры пространства $C(S)$. В частности, определив на $\mathcal{P}(X)$ норму $\|p\| = \max\limits_{\|x\|=1} |p(x)|$ и задав отношение частичного порядка посредством конуса неотрицательных функций $\mathcal{P}^+(X) = \{p \in \mathcal{P}(X) \,|\, p(x) \geq 0, \; x \in X\}$, снабдим $\mathcal{P}(X)$ структурой банаховой решетки [9, 22, 50, 130].

10.2. Символом $\widehat{P}(X)$ обозначим совокупность всех непрерывных сублинейных функций, определенных на X. Напомним, что функция $p : X \to \mathbb{R}$ называется *сублинейной,* если она положительно однородна и субаддитивна $(p(x+y) \leq p(x)+p(y),\ x,y \in X)$ на X. Всюду в дальнейшем рассматриваемые в этой главе сублинейные функции будут предполагаться непрерывными, поэтому условимся, не оговаривая это каждый раз специально, под сублинейной функцией понимать непрерывную сублинейную функцию. Как подмножество векторного пространства $\mathcal{P}(X)$ совокупность сублинейных функций $\widehat{P}(X)$ есть выпуклый конус. Кроме того, совокупность $\widehat{P}(X)$ замкнута относительно операции супремума в решетке $\mathcal{P}(X)$ и, следовательно, является верхней полурешеткой [22, 130].

Пусть X^* — векторное пространство, топологически сопряженное X, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов на X. Так как X — конечномерное евклидово пространство, то X^* совпадает с алгебраически сопряженным пространством, т. е. пространством всех линейных функционалов на X, и, кроме того, может быть отождествлено с X. Здесь, однако, такое отождествление осуществлять не будем, что позволит всегда четко различать, идет ли речь о векторах пространства X или же о линейных функционалах на X. Очевидно, что X^* является векторным подпространством в $\widehat{P}(X)$.

Каждой сублинейной функции $p \in \widehat{P}(X)$ однозначно соответствует в пространстве X^* выпуклое компактное подмножество

$$\partial p = \{x^* \in X^* \,|\, \langle x, x^* \rangle \leq p(x), x \in X\}, \tag{10.1}$$

называемое *субдифференциалом* функции p, причем

$$p(x) = \max_{x^* \in \partial p} \langle x, x^* \rangle,\ x \in X \tag{10.2}$$

Здесь $\langle x, x^* \rangle$ обозначает каноническую билинейную форма двойственности $\langle X, X^* \rangle$.

Из определения субдифференциала следует, что сублинейная функция p неотрицательна на X тогда и только тогда, когда выполняется включение $0 \in \partial p$.

Обозначим совокупность всех выпуклых компактов из X^* через $\widehat{V}(X^*)$. На $\widehat{V}(X^*)$ естественным образом определены алгебраические операции сложения и умножения на неотрицательное вещественное число:

$$A_1 + A_2 = \{x^* \in X^* \,|\, x^* = x_1^* + x_2^*, x_1^* \in A_1, x_2^* \in A_2\},$$

$$\lambda A = \{x^* \in X^* \,|\, x^* = \lambda y^*, y^* \in A\}$$

для любых $A, A_1, A_2 \in \widehat{V}(X^*)$.

Отношение включения задает на $\widehat{V}(X^*)$ частичный порядок, относительно которого $\widehat{V}(X^*)$ является верхней полурешеткой, при этом для любого конечного семейства $\{A_i, i \in I\}$ из $\widehat{V}(X^*)$ имеем

$$\bigvee_{i\in I} A_i = \operatorname{conv} \bigcup_{i\in I} A_i$$

где $\bigvee\limits_{i\in I}$ — точная верхняя грань $\{A_i, i \in I\}$ в $\widehat{V}(X^*)$, $\operatorname{conv} M$ — выпуклая оболочка множества M.

Функция $\rho_H : \widehat{V}(X^* \times \widehat{V}(X^*) \to \mathbb{R}$, заданная соотношением

$$\rho_H(A_1, A_2) = \inf\{\alpha > 0 \,|\, A_1 \subset A_2 + \alpha B^*, \ A_2 \subset A_1 + \alpha B^*\} \tag{10.3}$$

где B^* — единичный шар в пространстве X^*, определяет на $\widehat{V}(X^*)$ метрику, называемую метрикой Хаусдорфа [155]. Оператор субдифференцирования $\partial : \widehat{P}(X) \to \widehat{V}(X^*)$, согласно которому каждой сублинейной функции $p \in \widehat{P}(X)$ соответствует ее субдифференциал $\partial p \in \widehat{V}(X^*)$, биективен и удовлетворяет следующим равенствам:

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 + \partial p_2 \tag{10.4}$$

для любых $p_1, p_2 \in \widehat{P}(X)$;

$$\partial(\lambda p) = \lambda \partial p \tag{10.5}$$

для любого $p \in \widehat{P}(X)$ и любого вещественного неотрицательного числа λ;

$$\partial(\max_{i\in I} p_i) = \operatorname{conv} \bigcup_{i\in I} \partial p_i \tag{10.6}$$

для любого конечного семейства $\{p_i, i \in I\}$ сублинейных функций из $\widehat{P}(X)$;

$$\|p_1 - p_2\|_{\mathcal{P}(X)} = \rho_H(\partial_{p_1}, \partial_{p_2}) \tag{10.7}$$

для любых $p_1, p_2 \in \widehat{P}(X)$.

Следовательно, оператор субдифференцирования ∂ является изоморфизмом алгебраических, порядковых и метрических структур, заданных на $\widehat{P}(X)$ и $\widehat{V}(X^*)$. Это свойство оператора субдифференцирования называется двойственностью Минковского [155].

10.3. Функцию $p \in \mathcal{P}(X)$ назовем *разностно-сублинейной*, если она может быть представлена как разность двух сублинейных функций, т. е. если существуют функции $\underline{p}$ и $\overline{p}$ из $\widehat{P}(X)$ такие, что $p(x) = \underline{p}(x) - \overline{p}(x)$, $x \in X$. Совокупность всех разностно-сублинейных функций обозначим через $P(X)$.

Нетрудно видеть, что $P(X)$ является наименьшим векторным подпространством в $\mathcal{P}(X)$, которое содержит выпуклый конус $\widehat{P}(X)$. Другими словами, $P(X)$ есть векторное подпространство в $\mathcal{P}(X)$, порожденное выпуклым конусом сублинейных функций $\widehat{P}(X)$.

Рассмотрим конечное семейство разностно-сублинейных функций $\{p_i, i \in I\} \subset P(X)$ и предположим, что $p_i(x) = \underline{p}_i(x) - \overline{p}_i(x)$, $x \in X, i \in I$, где $\underline{p}_i, \overline{p}_i, i \in I$ — сублинейные функции из $\widehat{P}(X)$. Из равенств

$$\max_{i \in I} p_i(x) = \max_{i \in I} \left(\underline{p}_i(x) + \sum_{i \in I, j \neq i} \overline{p}_j(x) \right) - \sum_{i \in I} \overline{p}_j(x), x \in X \qquad (10.8)$$

$$\min_{i \in I} p_i(x) = \sum_{j \in I} \underline{p}_j(x) - \max_{i \in I} \left(\overline{p}_i(x) + \sum_{j \in I, j \neq i} \underline{p}_j(x) \right), \ x \in X, \qquad (10.9)$$

заключаем, что функции $\max\limits_{i \in I} p_i(x)$ и $\min\limits_{i \in I} p_i(x)$ также являются разностно-сублинейными. Следовательно, векторное пространство разностно-сублинейных функций $P(X)$ является нормированной подрешеткой [22, 130] в банаховой решетке $\mathcal{P}(X)$. Более того, в силу изоморфизма $\mathcal{P}(X)$ и $C(S)$ из теоремы Стоуна - Вейерштрасса [32, 244] следует, что нормированная подрешетка разностно-сублинейных функций $P(X)$ плотна в банаховой решетке положительно однородных непрерывных функций $\mathcal{P}(X)$. Таким образом, любая положительно однородная непрерывная функция $p : X \to \mathbb{R}$ может быть равномерно аппроксимирована на единичном шаре $S \subset X$ разностно-сублинейными функциями.

10.4. Рассмотрим произвольную разностно-сублинейную функцию $p \in P(X)$ и пусть $p(x) = \underline{p}(x) - \overline{p}(x), x \in X,$ — произвольное ее представление в виде разности двух сублинейных функций $\underline{p}$ и $\overline{p}$ из $\widehat{P}(X)$. Используя это представление, поставим в соответствие функции p упорядоченную пару выпуклых компактных множеств $(\partial_{\underline{p}}, \partial_{\overline{p}})$ из X^*, составленную из субдифференциалов функций $\underline{p}$ и $\overline{p}$ соответственно. В силу двойственности Минковского функция p и соответствующая ей упорядоченная пара $(\partial_{\underline{p}}, \partial_{\overline{p}})$ связаны соотношением

$$p(x) = \max_{x^* \in \partial \underline{p}} \langle x, x^* \rangle - \max_{x^* \in \partial \overline{p}} \langle x, x^* \rangle, x \in X.$$

Воспользуемся данным соответствием для того, чтобы построить для разностно-сублинейных функций двойственные объекты, аналогичные субдифференциалам сублинейных функций. С этой целью определим на прямом произведении $\widehat{V}(X^*) \times \widehat{V}(X^*)$ отображение $\phi : \widehat{V}(X^*) \times \widehat{V}(X^*) \to P(X)$, положив

$$\phi(\underline{A}, \overline{A})(x) = \max_{x^* \in \underline{A}} \langle x, x^* \rangle - \max_{x^* \in \overline{A}} \langle x, x^* \rangle, x \in X, \tag{10.10}$$

для любой упорядоченной пары $(\underline{A}, \overline{A})$ выпуклых компактов из X^*. Отображение ϕ сюръективно, но не является инъективным. Действительно, если пары $(\underline{A}_1, \overline{A}_1)$ и $(\underline{A}_2, \overline{A}_2)$ удовлетворяют равенству

$$\underline{A}_1 + \overline{A}_2 = \overline{A}_1 + \underline{A}_2, \tag{10.11}$$

то $\phi(\underline{A}_1, \overline{A}_1)(x) = \phi(\underline{A}_2, \overline{A}_2)(x), x \in X$. Нетрудно проверить, что равенство (10.11) задает на $\widehat{V}(X^*) \times \widehat{V}(X^*)$ отношение эквивалентности. Обозначим символом $V(X^*)$ множество, полученное факторизацией $\widehat{V}(X^*) \times \widehat{V}(X^*)$ по отношению эквивалентности (10.11). Класс эквивалентности из $V(X^*)$, содержащий упорядоченную пару $(\underline{A}, \overline{A})$ выпуклых компактов $\underline{A}$ и $\overline{A}$ из X^*, будем обозначать символом $[\underline{A}, \overline{A}]$. Отображение ϕ корректно определяет биективное отображение $V(X^*)$ на $P(X)$, которое также будем обозначать символом ϕ.

Используя биекцию $\phi : V(X^*) \to P(X)$, перенесем на $V(X^*)$ алгебраическую, порядковую и метрическую структуры пространства $P(X)$, т. е. определим на $V(X^*)$ эти структуры так, чтобы биекция $\phi : V(X^*) \to P(X)$ являлась изоморфизмом соответствующих структур.

Начнем с определения на $V(X^*)$ алгебраической структуры векторного пространства. Пусть $[\underline{A}_1, \overline{A}_1]$ и $[\underline{A}_2, \overline{A}_2]$ — произвольные элементы из $V(X^*)$. Так как

$$\phi([\underline{A}_1, \overline{A}_1])(x) + \phi([\underline{A}_2, \overline{A}_2])(x) = \max_{x^* \in \underline{A}_1 + \underline{A}_2} \langle x, x^* \rangle -$$

$$- \max_{\overline{A}_1 + \overline{A}_2} \langle x, x^* \rangle = \phi([\underline{A}_1 + \underline{A}_2, \overline{A}_1 + \overline{A}_2])(x), \ x \in X,$$

то сложение элементов в $V(X^*)$ определим следующим образом:

$$[\underline{A}_1, \overline{A}_1] + [\underline{A}_2, \overline{A}_2] = [\underline{A}_1 + \underline{A}_2, \overline{A}_1 + \overline{A}_2]. \tag{10.12}$$

Аналогично, используя равенства

$$\lambda\phi([\underline{A}, \overline{A}])(x) = \max_{x^* \in \lambda\underline{A}} \langle x, x^* \rangle - \max_{x^* \in \lambda\overline{A}} \langle x, x^* \rangle =$$

$$= \phi([\lambda\underline{A}, \lambda\overline{A}])(x), x \in X, \text{ при } \lambda \geq 0,$$

$$\lambda\phi([\underline{A},\overline{A}])(x) = \max_{x^*\in|\lambda|\overline{A}}\langle x,x^*\rangle - \max_{x^*\in|\lambda|\underline{A}}\langle x,x^*\rangle =$$

$$= \phi([|\lambda|\overline{A},|\lambda|\underline{A}])(x),\ x\in X,\ \text{при } \lambda<0,$$

определим умножение элементов из $V(X^*)$ на вещественное число:

$$\lambda[\underline{A},\overline{A}] = \left\{\begin{array}{cl} [\lambda\underline{A},\lambda\overline{A}] & \text{при } \lambda\ge 0, \\ [|\lambda|\overline{A},|\lambda|\underline{A}] & \text{при } \lambda<0. \end{array}\right. \tag{10.13}$$

Относительно введенных операций (10.12) и (10.13) $V(X^*)$ является векторным пространством, при этом нейтральным элементом в $V(X^*)$ является класс эквивалентности $[M,M]$, где M — произвольный выпуклый компакт из X^*; противоположным элементом для класса $[\underline{A},\overline{A}]$ является класс $[\overline{A},\underline{A}]$.

Порядковую структуру на $V(X^*)$ определим, исходя из отношения частичного порядка, заданного на $P(X)$ конусом неотрицательных функций. Поскольку для любых $[\underline{A}_1,\overline{A}_1]$ и $[\underline{A}_2,\overline{A}_2]$ из $V(X^*)$ неравенство

$$\phi([\underline{A}_1,\overline{A}_1])(x) \le \phi([\underline{A}_2,\overline{A}_2])(x),\ x\in X, \tag{10.14}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\max\limits_{x^*\in\underline{A}_1+\overline{A}_2}\langle x,x^*\rangle \le$ $\le \max\limits_{x^*\in\overline{A}_1+\underline{A}_2}\langle x,x^*\rangle,\ x\in X,$ что, в свою очередь, эквивалентно включению $\underline{A}_1+\overline{A}_2\subset\overline{A}_1+\underline{A}_2$, то, определив на $V(X^*)$ отношение частичного порядка $[\underline{A}_1,\overline{A}_1]\le[\underline{A}_2,\overline{A}_2]$ тогда и только тогда, когда $\underline{A}_1+\overline{A}_2\subset\overline{A}_1+\underline{A}_2$, превратим $V(X^*)$ в векторную решетку, изоморфную векторной решетке $P(X)$.

Используя равенства (10.8) и (10.9), нетрудно получить, что решеточные операции на $V(X^*)$ задаются следующим образом:

$$\bigvee_{i\in I}[\underline{A}_i,\overline{A}_i] = \left[\operatorname{conv}\{\bigcup_{i\in I}(\underline{A}_i+\sum_{j\in I,j\ne i}\overline{A}_j)\},\ \sum_{i\in I}\overline{A}_i\right], \tag{10.15}$$

$$\bigwedge_{i\in I}[\underline{A}_i,\overline{A}_i] = \left[\sum_{i\in I}\underline{A}_i,\ \operatorname{conv}\{\bigcup_{i\in I}(\overline{A}_i+\sum_{j\in I,j\ne i}\underline{A}_j)\}\right], \tag{10.16}$$

где $\bigvee\limits_{i\in I}[\underline{A}_i,\overline{A}_i]$ и $\bigwedge\limits_{i\in I}[\underline{A}_i,\overline{A}_i]$ обозначают соответственно супремум и инфимум конечного семейства $\{[\underline{A}_i,\overline{A}_i],\ i\in I\}$ элементов в векторной решетке $V(X^*)$.

Для определения нормы на $V(X^*)$ воспользуемся следующими соотношениями. Для любого класса $[\underline{A}, \overline{A}] \in V(X^*)$ имеем

$$\|\phi([\underline{A}, \overline{A}])\|_{\mathcal{P}(X)} = \max_{\|x\|_X = 1} |\phi([\underline{A}, \overline{A}])(x)| =$$

$$= \inf\{\alpha \geq 0 \,|\, |\phi([\underline{A}, \overline{A}])(x)| \leq \alpha \|x\|_X \text{ для всех } x \in X\}.$$

Так как $\|x\|_X = \max\limits_{x^* \in B^*} \langle x, x^* \rangle$, где B^* — единичный шар в пространстве X^*, то $\|x\|_X = \phi([B^*, \{0\}])(x), x \in X$. Следовательно, $\|\phi([\underline{A}, \overline{A}]\|_{\mathcal{P}(X)} = \inf\{\alpha \geq 0| - \alpha\phi([B^*, \{0\}])(x) \leq \phi([\underline{A}, \overline{A}])(x) \leq$ $\leq \alpha\phi([B^*, \{0\}])(x),\, x \in X\}$. Используя алгебраический и порядковый изоморфизм пространств $V(X^*)$ и $P(X)$, из последнего равенства получаем

$$\|\phi([\underline{A}, \overline{A}])\|_{\mathcal{P}(X)} = \inf\{\alpha \geq 0 \,|\, \underline{A} \subset \overline{A} + \alpha B^*, \overline{A} \subset \underline{A} + \alpha B^*\} = \rho_H(\underline{A}, \overline{A}),$$

где $\rho_H(\underline{A}, \overline{A})$ — расстояние Хаусдорфа на совокупности выпуклых компактов из X^*. Это позволяет сделать заключение, что функция

$$[\underline{A}, \overline{A}] \to \|[\underline{A}, \overline{A}]\| := \inf\{\alpha \geq 0 \,|\, \underline{A} \subset \overline{A} + \alpha B^*, \overline{A} \subset \underline{A} + \alpha B^*\} \quad (10.17)$$

является нормой на $V(X^*)$.

Алгебраическая, порядковая и метрическая структуры, заданные на $V(X^*)$ соотношениями (10.12) - (10.17), согласованы и в совокупности определяют на $V(X^*)$ структуру нормированной решетки, изоморфную $P(X)$. Нормированная решетка $V(X^*)$ называется *пространством выпуклых множеств.* Изоморфизм пространств $V(X^*)$ и $P(X)$ задается отображением $\phi : V(X^*) \to P(X)$. Следовательно, ϕ и обратное ему отображение $\phi^{-1} : P(X) \to V(X^*)$ являются линейными, изотонными и непрерывными операторами, перестановочными с решеточными операциями.

Каждому выпуклому компакту A из $\widehat{V}(X^*)$ поставим в соответствие класс эквивалентности $[A, \{0\}]$ из $V(X^*)$. Нетрудно убедиться, что соответствие $A \to [A, \{0\}]$ инъективно и, кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$[A_1, \{0\}] + [A_2, \{0\}] = [A_1 + A_2, \{0\}],$$

$$\alpha[A, \{0\}] = [\alpha A, \{0\}] \text{ для любого } \alpha \geq 0,$$

$$[A_1, \{0\}] \leq [A_2, \{0\}] \Leftrightarrow A_1 \subset A_2,$$

$$\|[A_1, \{0\}] - [A_2, \{0\}]\| = \|[A_1, A_2]\| = \rho_H(A_1, A_2).$$

Следовательно, соответствие $A \to [A, \{0\}]$ осуществляет вложение $\widehat{V}(X^*)$ в нормированную решетку $V(X^*)$ с сохранением алгебраической, порядковой и метрической структур, при этом $\widehat{V}(X^*)$ реализуется в $V(X^*)$ как воспроизводящий выпуклый конус, замкнутый относительно верхней решеточной операции (операции супремума).

Таким образом, изоморфизм пространств $P(X)$ и $V(X^*)$ является распространением двойственности Минковского между $\widehat{P}(X)$ и $\widehat{V}(X^*)$. В силу этого изоморфизм между $P(X)$ и $V(X^*)$ также называется двойственностью Минковского.

Замечание 10.1. Соотношения (10.12) — (10.17), определяющие алгебраическую, порядковую и метрическую структуры на $V(X^*)$, формулируются в терминах операций, заданных на X^*, и могут быть введены на $V(X^*)$ непосредственно без использования биекции $\phi : V(X^*) \to P(X)$. В частности, построение $V(X^*)$ может быть осуществлено, исходя из $\widehat{V}(X^*)$ посредством стандартной алгебраической процедуры погружения полугруппы с сокращениями в группу (по этому поводу см. [149]).

Общая теория двойственности Минковского, основанная на понятии H-выпуклости, детально разработана в монографии [155].

10.5. Определение 10.1. *Отображение* $D : P(X) \to V(X^*)$, *обратное отображению* $\phi : V(X^*) \to P(X)$ *называется оператором квазидифференцирования разностно-сублинейных функций, при этом значение оператора квазидифференцирования на функции* p *называется квазидифференциалом разностно-сублинейной функции* p *и обозначается* Dp.

Если упорядоченная пара $(\underline{\partial} p, \overline{\partial} p)$ выпуклых компактных множеств $\underline{\partial} p$ и $\overline{\partial} p$ из X^* такова, что $Dp = [\underline{\partial} p, \overline{\partial} p]$ то $\underline{\partial} p$ называется *субдифференциалом* функции p, а $\overline{\partial} p$ — *супердифференциалом* функции p. Для каждой разностно-сублинейной функции пара субдифференциал — супердифференциал определяется неоднозначно. Однако если одна из компонент пары (скажем, супердифференциал) задана, то другая компонента пары (субдифференциал) находится единственным образом. Условимся для сублинейных функций всегда в качестве супердифференциала рассматривать множество $\overline{\partial} p = \{0\}$. Тогда соответствующий субдифференциал однозначно находится в соответствии с соотношением (10.1). Аналогично для суперлинейных функций (функция p называется суперлинейной, если $-p$ является сублинейной функцией) условимся рассматривать в качестве субдифференциала множество $\underline{\partial} p = \{0\}$.

Из свойств отображения $\phi : V(X^*) \to P(X)$ следует, что оператор квазидифференцирования $D : P(X) \to V(X^*)$ является линейным, изотонным, сохраняет норму и коммутирует с решеточными операциями. Это позволяет получить следующие простейшие формулы исчисления квазидифференциалов:

$$D(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_1 Dp_1 + \lambda_2 Dp_2 \tag{10.18}$$

для любых $p_1, p_2 \in P(X)$ и любых вещественных чисел λ_1, λ_2;

$$D(\max_{i\in I} p_i) = \bigvee_{i\in I} Dp_i = \left[\mathrm{conv}\{\bigcup_{i\in I}(\underline{\partial} p_i + \sum_{j\in I, j\neq i} \overline{\partial} p_j)\}, \sum_{i\in I} \overline{\partial} p_i\right], \tag{10.19}$$

$$D(\min_{i\in I} p_i) = \bigwedge_{i\in I} Dp_i = \left[\sum_{i\in I} \underline{\partial} p_i, \mathrm{conv}\{\bigcup_{i\in I}(\overline{\partial} p_i + \sum_{j\in I, j\neq i} \underline{\partial} p_j)\}\right] \tag{10.20}$$

для любого конечного семейства $\{p_i, i \in I\}$ разностно-сублинейных функций.

Другие формулы исчисления квазидифференциалов могут быть получены при использовании следующего результата, характеризующего композицию разностно-сублинейных функций.

Предложение 10.1. *Пусть* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *— разностно-сублинейные функции из* X *в* $\mathbb{R}$ *и пусть* $q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *— разностно-сублинейная функция из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}$. *Тогда сложная функция* $p : x \to q(p_1(x), \ldots, p_m(x))$ *является разностно-сублинейной. Если* $Dp_i = [\underline{\partial}\, p_i, \overline{\partial} p_i], i = 1, 2, \ldots, m,$ *и* $Dq = [\underline{\partial}\, q, \overline{\partial} q]$ *— квазидифференциалы функций* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *и* q *соответственно, а векторы* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ *и* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ *удовлетворяют неравенству*

$$\nu_i \le \lambda_i \le \mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \text{при любом } \lambda \in \underline{\partial}\, q \cup \overline{\partial} q, \tag{10.21}$$

то $Dp = [\underline{\partial}\, p, \overline{\partial} p]$, *где*

$$\underline{\partial}\, p = \bigcup_{\lambda\in\underline{\partial}\, q} \{\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \nu_i)\underline{\partial}\, p_i + \sum_{i=1}^m (\mu_i - \lambda_i)\overline{\partial} p_i\}, \tag{10.22}$$

$$\overline{\partial} p = \bigcup_{\lambda\in\overline{\partial} q} \{\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \nu_i)\underline{\partial}\, p_i + \sum_{i=1}^m (\mu_i - \lambda_i)\overline{\partial} p_i\}, \tag{10.23}$$

является квазидифференциалом сложной функции $p(x) = q(p_1(x), \ldots, p_m(x))$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что

$$p(x) = \max_{\lambda\in\underline{\partial} q}(\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x) + c(x)) - \max_{\lambda\in\overline{\partial} q}(\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x) + c(x)), x \in X,$$

для любой сублинейной функции $c : X \to \mathbb{R}$. Определим функцию $c : X \to \mathbb{R}$ в виде

$$c(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \phi([\overline{\partial} p_i, \{0\}])(x) - \sum_{i=1}^{m} \nu_i \phi([\underline{\partial}\, p_i, \{0\}])(x), x \in X,$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ и $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ — некоторые векторы из $\mathbb{R}^m$. Предположим, что ν и μ удовлетворяют условию (10.21). Тогда, используя представление функций $p_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ в виде $p_i(x) = \phi([\underline{\partial}\, p_i, \{0\}])(x) - \phi([\overline{\partial} p_i, \{0\}])(x), x \in X,$ убеждаемся, что функции

$$\underline{p}(x) := \max_{\lambda \in \underline{\partial}\, q} (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(x) + c(x)) =$$

$$= \max_{\lambda \in \underline{\partial}\, q} \left(\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \nu_i) \phi([\underline{\partial}\, p_i, \{0\}])(x) + \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - \lambda_i) \phi(\overline{\partial} p_i, \{0\})(x) \right), x \in X,$$

и

$$\overline{p}(x) := \max_{\lambda \in \overline{\partial} q} (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(x) + c(x)) =$$

$$= \max_{\lambda \in \overline{\partial} q} \left(\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \nu_i) \phi([\overline{\partial} p_i, \{0\}])(x) + \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - \lambda_i) \phi(\overline{\partial} p_i, \{0\})(x) \right), x \in X,$$

являются сублинейными, а их субдифференциалы $\underline{\partial}\, p$ и $\overline{\partial} p$ определяются соотношениями (10.22) и (10.23). Предложение доказано.

Замечание 10.2. Бесконечномерный вариант этого утверждения, установленный А. Я. Заславским, а также различные следствия из него представлены в работах [100, 107].

10.6. Пусть p — разностно-сублинейная функция и пусть $Dp = [\underline{\partial}\, p, \overline{\partial} p]$ — ее квазидифференциал.

Предложение 10.2. *Для того чтобы разностно-сублинейная функция p была неотрицательной (неположительной) на X, т. е. $p(x) \geq 0$ $(p(x) \leq 0)$ для всех $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\partial} p \subset \underline{\partial}\, p \quad (\underline{\partial}\, p \subset \overline{\partial} p). \tag{10.24}$$

Разностно-сублинейная функция p строго положительна (строго отрицательна) на X, т. е. $p(x) > 0$ $(p(x) < 0)$ для всех $x \in X$, $x \neq 0$, тогда и только тогда, когда

$$\overline{\partial} p \subset \mathrm{int} \underline{\partial}\, p \quad (\underline{\partial}\, p \subset \mathrm{int} \overline{\partial} p). \tag{10.25}$$

Доказательство. Первая часть предложения следует непосредственно из двойственности Минковского и определения отношения порядка на пространстве выпуклых множеств $V(X^*)$.

Если $p(x) > 0$ для всех $x \in X$, $x \neq 0$, то $\delta = \min\limits_{\|x\|=1} p(x) > 0$. Следовательно, $p(x) \geq \delta\|x\|$ для всех $x \in X$. Так как $\|x\| = \max\limits_{x^* \in B^*} \langle x, x^* \rangle$, то последнее неравенство эквивалентно тому, что $\max\limits_{x^* \in \underline{\partial}\, p} \langle x, x^* \rangle \geq \max\limits_{x^* \in \overline{\partial} p + \delta B^*} \langle x, x^* \rangle$ для всех $x \in X$, а это, в свою очередь, равносильно включению $\overline{\partial} p + \delta B^* \subset \underline{\partial}\, p$. Таким образом, $\overline{\partial} p \subset \mathrm{int} \underline{\partial}\, p$.

Обратно, если имеет место включение $\overline{\partial} p \subset \mathrm{int} \underline{\partial}\, p$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $\overline{\partial} p + \delta B^* \subset \underline{\partial}\, p$. Рассуждая в обратном порядке, придем к условию $p(x) \geq \delta\|x\|$, $x \in X$. Предложение доказано.

Предложение 10.3. *Для того чтобы разностно-сублинейная функция p была неотрицательной (неположительной) на выпуклом конусе K, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\partial} p \subset \underline{\partial}\, p + K^* \ (\underline{\partial}\, p \subset \overline{\partial} p + K^*), \tag{10.26}$$

где $K^* = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle \leq 0$ для всех $x \in K\}$ — конус, сопряженный конусу K.

Доказательство. Так как

$$\sup_{x^* \in K^*} \langle x, x^* \rangle = \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{cl} K, \\ +\infty, & x \notin \mathrm{cl} K, \end{cases}$$

то условие

$$p(x) + \sup_{x^* \in K^*} \langle x, x^* \rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in X \tag{10.27}$$

эквивалентно неотрицательности функции p на конусе K. Воспользовавшись тем, что

$$p(x) = \sup_{x^* \in \underline{\partial}\, p} \langle x, x^* \rangle - \sup_{x^* \in \overline{\partial} p} \langle x, x^* \rangle, \ x \in X,$$

представим условие (10.27) в виде

$$\sup_{x^* \in \underline{\partial}\, p + K^*} \langle x, x^* \rangle \geq \sup_{x^* \in \overline{\partial} p} \langle x, x^* \rangle, \ x \in X,$$

откуда очевидна его равносильность включению (10.26). Предложение доказано.

Предложение 10.4. (лемма Фаркаша для разностно-сублинейных функций). *Пусть p и q — разностно-сублинейные функции и пусть $Dp = [\underline{\partial}\, p, \overline{\partial} p]$ и $Dq = [\underline{\partial}\, q, \overline{\partial} q]$ — их квазидифференциалы.*

Неравенство $p(x) \geq 0$ *выполняется для всех* $x \in X$ *таких, что* $q(x) \leq 0$ *в том и только том случае, если выполняется включение*

$$\overline{\partial} p \subset \bigcap_{w^* \in \overline{\partial} q} [\underline{\partial}\, p + \overline{\text{cone}}(\underline{\partial}\, q - \{w^*\})]. \tag{10.28}$$

Здесь $\overline{\text{cone}} M$ *— замыкание конической оболочки множества* M.

Доказательство. Множество $Q = \{x \in X \,|\, q(x) \leq 0\}$ является конусом, однако, возможно, невыпуклым. Зафиксируем произвольный линейный функционал $w^* \in \overline{\partial} q$ и рассмотрим выпуклый конус $Q_{w^*} = \{x \in X \,|\, \max\limits_{x^* \in \underline{\partial} q} \langle x, x^* \rangle - \langle x, w^* \rangle \leq 0\}$. Вследствие неравенства $q(x) \leq \max\limits_{x^* \in \underline{\partial} q} \langle x, x^* \rangle - \langle x, w^* \rangle, x \in X,$ и компактности $\overline{\partial} q$ имеем $Q = \bigcup\limits_{w^* \in \overline{\partial} q} Q_{w^*}$. Следовательно, выполнение неравенства $p(x) \geq 0$ для всех $x \in Q$ эквивалентно неотрицательности функции p на любом выпуклом конусе Q_{w^*} из семейства $\{Q_{w^*} \,|\, w^* \in \overline{\partial} q\}$. Так как $Q^*_{w^*} = \overline{\text{cone}}(\underline{\partial} q - \{w^*\})$, то из предыдущего предложения получаем, что это выполняется тогда и только тогда, когда

$$\overline{\partial} p \subset \underline{\partial} p + \overline{\text{cone}}(\underline{\partial} q - \{w^*\})$$

для всех $w^* \in \overline{\partial} q$. Предложение доказано.

Замечание 10.3. То, что в предложении 10.4 рассматривается лишь одно ограничение $q(x) \leq 0$, не сужает общности. Действительно, конечное число ограничений $q_i(x) \leq 0, i = l, 2, \ldots, m,$ с разностно-сублинейными функциями $q_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ эквивалентно одному ограничению $\max\limits_{1 \leq i \leq m} q_i(x) \leq 0$, при этом функция $\max\limits_{1 \leq i \leq m} q_i$, также принадлежит пространству разностно-сублинейных функций, а ее квазидифференциал легко вычисляется по формуле (10.19).

Замечание 10.4. Используя отмеченный в предыдущем замечании прием замены конечного числа ограничений одним ограничением, из предложения 10.4 легко получить классический результат Фаркаша: неравенство $\langle x, x^* \rangle \leq 0$ выполняется для всех $x \in X$ таких, что $\langle x, x_i^* \rangle \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, в том и только том случае, когда

$$0 \in \{x^*\} + \overline{\text{cone}}(\text{conv}\{x_i^*, i = 1, 2, \ldots, m\}),$$

что эквивалентно существованию неотрицательных чисел $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$ таких, что $-x^* = \lambda_1 x_1^* + \cdots + \lambda_m x_m^*$.

§ 11. ε-КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И АППРОКСИМАТИВНАЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. Пусть $p : X \to R$ — произвольная положительно однородная функция из X в $\mathbb{R}$ (X, как и ранее, — конечномерное евклидово пространство, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая) и пусть ε — заданное неотрицательное число.

Определение 11.1. *Элемент $[\underline{A}, \overline{A}]$ пространства выпуклых множеств $V(X^*)$ назовем ε–квазидифференциалом функции p, если*

$$|p(x) - \max_{x^* \in \underline{A}} \langle x, x^* \rangle + \max_{x^* \in \overline{A}} \langle x, x^* \rangle| \leq \varepsilon \|x\| \tag{11.1}$$

для всех $x \in X$.

Для обозначения ε–квазидифференциала положительно однородной функции p будем использовать символ $D_\varepsilon p$. Выпуклые компактные множества $\underline{\partial}_\varepsilon p$ и $\overline{\partial}_\varepsilon p$ из X^* такие, что $D_\varepsilon p = [\underline{\partial}_\varepsilon p, \overline{\partial}_\varepsilon p]$, будем называть соответственно ε-субдифференциалом и ε-супердифференциалом функции p.

Отметим, что в определении 11.1 функция p, вообще говоря, не предполагается непрерывной.

Пример 11.1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и пусть положительно однородная функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена условиями

$$p(x) = \begin{cases} \|x\|, & \text{при } x \in \overline{\mathbb{R}}^n_+, \\ \\ \dfrac{1}{2}\|x\|, & \text{при } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{R}}^n_+, \end{cases}$$

где $\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Элемент $\left[\dfrac{3}{4}\mathbb{R}^*_n, \{0\}\right] \in V(\mathbb{R}^n)$ является ε–квазидифференциалом функции p при любом $\varepsilon \geq \dfrac{1}{4}$. Здесь B^* — единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, что любой ε–квазидифференциал $D_\varepsilon p$ положительно однородной функции p является также ε'–квазидифференциалом для p при любом $\varepsilon' \geq \varepsilon$. В частности, если функция p разностно-сублинейна, то ее квазидифференциал Dp является ε–квазидифференциалом для p при любом положительном ε. Однако класс положительно однородных функций, которые обладают ε–квазидифференциалом при любом положительном ε, не исчерпывается разностно-сублинейными функциями.

Теорема 11.1. *Положительно однородная функция $p : X \to$ $\to \mathbb{R}$ обладает ε–квазидифференциалом при любом положительном ε тогда и только тогда, когда p непрерывна на X.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из плотности пространства разностно-сублинейных функций $P(X)$ в пространстве $\mathcal{P}(X)$ положительно однородных непрерывных функций на X.

Определение 11.2. *Аппроксимативным квазидифференциалом положительно однородной непрерывной функции* $p : X \to \mathbb{R}$ *назовем семейство* $\mathcal{D}p = \{\mathcal{D}_\varepsilon p \,|\, \varepsilon > 0\}$, *где* $\mathcal{D}_\varepsilon p$ *— подмножество из* $V(X^*)$, *элементами которого являются* ε *–квазидифференциалы функции* p.

В силу теоремы 11.1 подмножество $\mathcal{D}_\varepsilon p$ непусто при любом положительном ε и, кроме того, $\mathcal{D}_\varepsilon p \subset \mathcal{D}_{\varepsilon'} p$, если $\varepsilon \leq \varepsilon'$. Пересечение $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathcal{D}_\varepsilon p$ непусто тогда и только тогда, когда функция p разностно-сублинейна, причем $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathcal{D}_\varepsilon p = \{Dp\}$.

Аппроксимативный квазидифференциал $\mathcal{D}p$ любой положительно однородной непрерывной функции p образует в $V(X^*)$ базис некоторого минимального фильтра Коши [30]. Поскольку каждому минимальному фильтру Коши в $V(X^*)$ однозначно соответствует некоторая функция из $\mathcal{P}(X)$, то существует взаимно однозначное соответствие между пространством положительно однородных непрерывных функций $\mathcal{P}(X)$ и пополнением $V(X^*)$, реализованным в виде совокупности минимальных фильтров Коши. Фактически имеет место изометрический изоморфизм пространства $\mathcal{P}(X)$ и пополнения $V(X^*)$.

Замечание 11.1. Если проследить доказательство порядкового варианта теоремы Стоуна–Вейерштрасса, данное, например, в монографии [244, с. 307] , то можно сделать вывод, что любая непрерывная положительно однородная функция $p : X \to \mathbb{R}$ может быть с любой точностью равномерно аппроксимирована на единичной сфере функциями вида $x \to \max\limits_{i \in I} \min\limits_{j \in J} \langle x, x_{ij}^* \rangle$, а также функциями вида $x \to \min\limits_{i \in I} \max\limits_{j \in J} \langle x, x_{ij} \rangle$ с конечными множествами индексов I и J.

11.2. Основополагающим результатом для построения исчисления ε–квазидифференциалов является следующая теорема о вычислении ε–квазидифференциала композиции функций.

Теорема 11.2. *Пусть* $p_1, \ldots, p_m$ *— положительно однородные функции из* X *в* $\mathbb{R}$, *каждая из которых обладает соответственно* ε_i *–квазидифференциалом* $D_{\varepsilon_i} p_i = [\underline{\partial}_{\,\varepsilon_i} p_i, \overline{\partial}_{\varepsilon_i} p_i]$, *и пусть* $q : \mathbb{R}^m \to$ $\to \mathbb{R}$ *— положительно однородная функция из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}$, *обладающая* ε *–квазидифференциалом* $D_\varepsilon q = [\underline{\partial}_{\,\varepsilon} q, \overline{\partial}_\varepsilon q]$. *Тогда сложная функция* $w : X \to q(p_1(x), \ldots, p_m(x))$ *обладает* $\widehat{\varepsilon}$ *–квазидифферен-*

циалом при

$$\widehat{\varepsilon} = \max_{\lambda\in\underline{\partial}_{\varepsilon}q}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\varepsilon_i + \max_{\lambda\in\overline{\partial}_{\varepsilon}q}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\varepsilon_i + \varepsilon(\sum_{i=1}^{m}\|D_{\varepsilon_i}p_i\| + \varepsilon_i),$$

при этом если векторы $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ *и* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\nu_i \le \lambda_i \le \mu_i, i = 1, 2, \ldots, m, \text{ для всех } \lambda \in \underline{\partial}_{\varepsilon}q \cup \overline{\partial}_{\varepsilon}q,$$

то $D_{\widehat{\varepsilon}}w = [\underline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w, \overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w]$, *где*

$$\underline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w = \bigcup_{\lambda\in\underline{\partial}_{\varepsilon}q}\{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \nu_i)\underline{\partial}_{\varepsilon_i}p_i + \sum_{i=1}^{m}(\mu_i - \lambda_i)\overline{\partial}_{\varepsilon_i}p_i\}, \tag{11.2}$$

$$\overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w = \bigcup_{\lambda\in\overline{\partial}_{\varepsilon}q}\{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \nu_i)\underline{\partial}_{\varepsilon_i}p_i + \sum_{i=1}^{m}(\mu_i - \lambda_i)\overline{\partial}_{\varepsilon_i}p_i\}, \tag{11.3}$$

является $\widehat{\varepsilon}$*–квазидифференциалом функции* w.

Доказательство. Определим разностно-сублинейные функции

$p_{\varepsilon_i}(x) = \phi(D_{\varepsilon_i}p_i)(x), x \in X, i = 1, 2, \ldots, m,$ и $q_{\varepsilon}(x) = \phi(D_{\varepsilon}q)(x), x \in X,$

и заметим, что $Dp_{\varepsilon_i} = D_{\varepsilon_i}p_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ и $Dq_{\varepsilon} = D_{\varepsilon}q$.

В силу предложения 10.1 сложная функция $w_{\widehat{\varepsilon}} : x \to \to q_{\varepsilon}(p_{\varepsilon_1}(x), \ldots, p_{\varepsilon_m}(x))$ разностно-сублинейна и $[\underline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w, \overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w]$, где множества $\underline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w$ и $\overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w$ определены соотношениями (11.2) и (11.3), является квазидифференциалом $w_{\widehat{\varepsilon}}$, т. е.

$$w_{\widehat{\varepsilon}}(x) = \max_{x^*\in\underline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}w}\langle x, x^*\rangle - \max_{x^*\in\overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}}q}\langle x, x^*\rangle, x \in X.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся неравенством

$$|w(x) - w_{\widehat{\varepsilon}}(x)| \le |w(x) - q_{\varepsilon}(p_1(x), \ldots, p_m(x))| +$$

$$+ |q_{\varepsilon}(p_1(x), \ldots, p_m(x)) - w_{\varepsilon}(x)|, x \in X, \tag{11.4}$$

и оценим сверху оба слагаемые в его правой части.

Из определения ε–квазидифференциала функции q имеем

$$|w(x) - q_{\varepsilon}(p_1(x), \ldots, p_m(x))| = |q(p_1(x), \ldots, p_m(x)) -$$

$$- q_{\varepsilon}(p_1(x), \ldots, p_m(x))| \le \varepsilon\|p_1(x)e_1 + \ldots + p_m(x)e_m\|, x \in X,$$

где $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_m = (0,0,\ldots,1)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^m$. Так как $\|p_i\| \le \|D_{\varepsilon_i} p_i\| + \varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,m$, то

$$\|p_1(x)e_1 + \ldots + p_m(x)e_m\| \le \sum_{i=1}^m |p_i(x)| \le \sum_{i=1}^m \|p_i\|\|x\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^m (\|D_{\varepsilon_i} p_i\| + \varepsilon_i)\|x\|, \ x \in X.$$

Следовательно,

$$|w(x) - q_\varepsilon(p_1(x),\ldots,p_m(x))| \le \varepsilon(\sum_{i=1}^m (\|D_{\varepsilon_i} p_i\| + \varepsilon_i))\|x\| \qquad (11.5)$$

для всех $x \in X$.

Перейдем сейчас к оценке второго слагаемого из (11.4). Так как для любых вещественных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i p_{\varepsilon_i}(x) - (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\varepsilon_i)\|x\| \le \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^m \lambda_i p_{\varepsilon_i}(x) + (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\varepsilon_i)\|x\|, \ x \in X,$$

то, воспользовавшись известными неравенствами для максимумов суммы и разности, получим

$$\max_{\lambda \in \underline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m \lambda_i p_{\varepsilon_i}(x)) - \max_{\lambda \in \underline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\varepsilon_i)\|x\| \le \max_{\lambda \in \underline{\partial}_\varepsilon q} \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x) \le$$

$$\le \max_{\lambda \in \underline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m \lambda_i p_{\varepsilon_i}(x)) + \max_{\lambda \in \underline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\varepsilon_i)\|x\|, \ x \in X$$

и

$$-\max_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m \lambda_i p_{\varepsilon_i}(x)) - \max_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\varepsilon_i)\|x\| \le -\max_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon q} \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x) \le$$

$$\le -\max_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m \lambda_i p_{\varepsilon_i}(x)) + \max_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon q} (\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\varepsilon_i)\|x\|, \ x \in X.$$

Складывая две последние цепочки неравенств, приходим к соотношению

$$|q_\varepsilon(p_1(x),\ldots,p_m(x)) - w_\varepsilon(x)| \le \widetilde{\varepsilon}\|x\|, \ x \in X, \qquad (11.6)$$

где
$$\widetilde{\varepsilon} = \max_{\underline{\partial}_\varepsilon q} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|\varepsilon_i + \max_{\lambda\in\overline{\partial}_\varepsilon q} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|\varepsilon_i.$$
Из неравенств (11.4) – (11.6) получаем
$$|w(x) - w_{\widehat{\varepsilon}}(x)| \le \widehat{\varepsilon}\|x\|,\ x\in X,$$
где $\widehat{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon} + \varepsilon(\sum\limits_{i=1}^{m} \|D_{\varepsilon_i} p_i\| + \varepsilon_i)$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие 11.1. *Пусть положительно однородные функции $p_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяют предположениям теоремы 11.2. Тогда*

а) *функция $x \to \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(x)), x\in X$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — произвольные вещественные числа, обладает ε–квазидифференциалом при $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_i|\varepsilon_i$, причем*
$$D_\varepsilon(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_{\varepsilon_i} p_i; \tag{11.7}$$

б) *функция $x \to \max\limits_{1\le i\le m} p_i(x)$ обладает ε–квазидифференциалом при $\varepsilon = \max\limits_{1\le i\le m} \varepsilon_i$, причем*
$$D_\varepsilon(\max_{1\le i\le m} p_i) = [\mathrm{conv}\{\bigcup_{i=1}^{m} (\underline{\partial}_{\varepsilon_i} p_i + \sum_{j=1, j\ne i} \overline{\partial}_{\varepsilon_j} p_j)\}, \sum_{i=1}^{m} \overline{\partial}_{\varepsilon_i} p_i]; \tag{11.8}$$

в) *функция $x \to \min\limits_{1\le i\le m} p_i(x)$ обладает ε–квазидифференциалом при $\varepsilon = \max\limits_{1\le i\le m} \varepsilon_i$, причем*
$$D_\varepsilon(\min_{1\le i\le m} p_i) = [\sum_{i=1}^{m} \underline{\partial}_{\varepsilon_i} p_i, \mathrm{conv}\{\bigcup_{i=1}^{m} (\overline{\partial}_{\varepsilon_i} p_i + \sum_{j=1, j\ne i}^{m} \underline{\partial}_{\varepsilon_j} p_i)\}]. \tag{11.9}$$

Для доказательства утверждений следствия 11.1 достаточно воспользоваться теоремой 11.2, полагая функцию $q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ равной а) $q(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i y_i$; б) $q(y) = \max\limits_{1\le i\le m} y_i$; в) $q(y) = \min\limits_{1\le i\le m} y_i$.

11.3. Завершим данный параграф доказательством утверждений, характеризующих в терминах ε–квазидифференциалов неотрицательность (неположительность) положительно однородных функций.

Теорема 11.3. *Пусть* $p : X \to \mathbb{R}$ *— положительно однородная функция, обладающая* ε *–квазидифференциалом* $D_\varepsilon p = [\underline{\partial}_\varepsilon p, \overline{\partial}_\varepsilon p]$.

Для того чтобы функция p *была неотрицательной (неположительной) на* X, *т. е.* $p(x) \in Q$ *для всех* $x \in X$, *необходимо выполнение включения*

$$\overline{\partial}_\varepsilon p \subset \underline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^* \quad (\underline{\partial}_\varepsilon p \subset \overline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*) \tag{11.10}$$

и достаточно выполнения включения

$$\overline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^* \subset \underline{\partial}_\varepsilon p \quad (\underline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^* \subset \overline{\partial}_\varepsilon p). \tag{11.11}$$

Доказательство. Из определения 11.1 и равенства $\|x\| = \max\limits_{x^* \in B^*} \langle x, x^* \rangle$ следует

$$\max_{x^* \in \underline{\partial}_\varepsilon p} \langle x, x^* \rangle - \max_{x^* \in \overline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*} \langle x, x^* \rangle \le p(x) \le$$

$$\le \max_{x^* \in \underline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*} \langle x, x^* \rangle - \max_{x^* \in \overline{\partial}_\varepsilon p} \langle x, x^* \rangle, x \in X. \tag{11.12}$$

Если функция p неотрицательна на X, то из правой части неравенства (11.12) получаем соотношение

$$\max_{x^* \in \underline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*} \langle x, x^* \rangle \ge \max_{x^* \in \overline{\partial}_\varepsilon p} \langle x, x^* \rangle, x \in X,$$

эквивалентное включению (11.10). Если же выполнено включение (11.11), то

$$\max_{x^* \in \underline{\partial}_\varepsilon p} \langle x, x^* \rangle \ge \max_{x^* \in \overline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*} \langle x, x^* \rangle, x \in X,$$

и, следовательно, левая часть неравенств (11.12) влечет неотрицательность p.

Условие неположительности p доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 11.4. *Пусть* $p : X \to \mathbb{R}$ *— положительно однородная функция и пусть* $D_\varepsilon p = [\underline{\partial}_\varepsilon p, \overline{\partial}_\varepsilon p]$ *— ее квазидифференциал.*

Для того чтобы функция p *удовлетворяла неравенству* $p(x) > 0$ $(p(x) < 0)$ *для всех* $x \in X, x \ne 0$, *необходимо, чтобы*

$$\overline{\partial}_\varepsilon p \subset \operatorname{int}(\underline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*) \ (\underline{\partial}_\varepsilon p \subset \operatorname{int}(\overline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^*)), \tag{11.13}$$

и достаточно, чтобы

$$\overline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^* \subset \operatorname{int}\underline{\partial}_\varepsilon p \ (\underline{\partial}_\varepsilon p + \varepsilon B^* \subset \operatorname{int}\overline{\partial}_\varepsilon p). \tag{11.14}$$

Доказательство следует из неравенств (11.12) и второй части предложения 10.4.

Следующее утверждение является обобщением леммы Фаркаша на случай ε–квазидифференцируемых положительно однородных функций.

Теорема 11.5. *Если положительно однородные функции* $p : X \to \mathbb{R}$ *и* $q : X \to \mathbb{R}$ *обладают соответственно* ε_1–*квазидифференциалом* $D_{\varepsilon_1}p = [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}p, \overline{\partial}_{\varepsilon_1}p]$ *и* ε_2–*квазидифференциалом* $D_{\varepsilon_2}q = [\underline{\partial}_{\varepsilon_2}q, \overline{\partial}_{\varepsilon_2}q]$, *то для выполнения неравенства*

$$p(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in X \text{ таких, что } q(x) \leq 0, \tag{11.5}$$

необходимо, чтобы

$$\overline{\partial}_{\varepsilon_1}p \subset \bigcap_{w^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_2}q} [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}p + \varepsilon_1 B^* + \overline{\mathrm{cone}}(\underline{\partial}_{\varepsilon_2}q + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\})], \tag{11.16}$$

и достаточно, чтобы

$$\overline{\partial}_{\varepsilon_1}p + \varepsilon_1 B^* \subset \bigcap_{w^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_2}q + \varepsilon_2 B^*} [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}p + \overline{\mathrm{cone}}(\underline{\partial}_{\varepsilon_2}q - \{w^*\})]. \tag{11.17}$$

Доказательство. Из определения 11.1 следует, что (11.15) влечет выполнение условия (а): $\phi(D_{\varepsilon_1}p)(x) + \varepsilon_1\|x\| \geq 0$ для всех $x \in X$ таких, что $\phi(D_{\varepsilon_2}q)(x) + \varepsilon_2\|x\| \leq 0$. В свою очередь, выполнение условия (б): $\phi(D_{\varepsilon_1}p)(x) - \varepsilon_1\|x\| \geq 0$ для всех $x \in X$ таких, что $\phi(D_{\varepsilon_2}q)(x) - \varepsilon_2\|x\| \leq 0$, влечет (11.15). В силу предложения 10.4 условия (а) и (б) эквивалентны соответственно включениям (11.16) и (11.17). Теорема доказана.

Замечание 11.2. Теоремы 11.3 и 11.4 доставляют фактически необходимые, а также достаточные условия того, что функция p достигает в точке $x = 0$ минимум (максимум) и строгий минимум (строгий максимум). С аналогичной точки зрения можно рассматривать и теорему 11.5. Отметим, что в точке $x = 0$ локальный минимум (максимум) положительно однородной функции совпадает с глобальным.

§ 12. ε-КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И АППРОКСИМАТИВНАЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящем параграфе понятия ε–квазидифференцируемости и аппроксимативной квазидифференцируемости будут распространены на произвольные вещественнозначные функции. Однако если для положительно однородных функций ε–квазидифференциал и аппроксимативный квазидифференциал являются глобальными характеристиками, то соответствующие понятия для произвольных вещественнозначных функций будут иметь локальный характер.

12.1. Пусть X — конечномерное евклидово пространство и пусть f — вещественнозначная функция, определенная на некотором открытом множестве $U \subset X$, содержащем точку x^0.

Согласно В. Ф. Демьянову и А. М. Рубинову [105, 106], функция f называется *квазидифференцируемой в точке* x^0, если:

а) f дифференцируема по направлениям в точке x^0, т. е. для всех $h \in X$ существует предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x^0 + th) - f(x^0)}{t} := f'(x^0|h);$$

б) производная по направлениям $f'(x^0|\cdot) : X \to \mathbb{R}$ является разностно-сублинейной функцией.

Квазидифференциалом функции f *в точке* x^0 называется такой элемент $Df(x^0) = [\underline{\partial} f(x^0), \overline{\partial} f(x^0)]$ пространства выпуклых множеств $V(X^*)$, что

$$f'(x^0|h) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x^0)} \langle h, x^* \rangle - \max_{x^* \in \overline{\partial} f(x^0)} \langle h, x^* \rangle, h \in X,$$

при этом множества $\underline{\partial} f(x^0)$ и $\overline{\partial} f(x^0)$ называются соответственно *субдифференциалом* и *супердифференциалом функции* f *в точке* x^0.

Таким образом, квазидифференциал функции f в точке x^0 — это квазидифференциал производной по направлениям $f'(x^0|\cdot) : X \to \mathbb{R}$ (если, конечно, $f'(x^0|\cdot)$ существует и является разностно-сублинейной).

Обобщая эти понятия, введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. *Функцию* f *назовем* ε*–квазидифференцируемой (* $\varepsilon \geq 0$ *) в точке* x^0, *если* f *дифференцируема по направлениям в точке* x^0 *и ее производния по направлениям* $f'(x^0|\cdot) : X \to \mathbb{R}$, *рассматриваемая как положительно однородная функция, является* ε *–квазидифференцируемой.*

При этом ε–квазидифференциал положительно однородной функции $f'(x^0|\cdot) : X \to \mathbb{R}$ будем называть ε*-квазидифференциалом* функции f в точке x^0 и будем обозначать символом $D_\varepsilon(x^0) = [\underline{\partial}_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}_\varepsilon f(x^0)]$.

Определение 12.2. *Функцию f будем называть аппроксимативно квазидифференцируемой в точке x^0, если f является ε–квазидифференцируемой в точке x^0 при любом положительном ε.*

Аппроксимативным квазидифференциалом функции f в точке x^0 назовем семейство $\mathcal{D}f(x^0) = \{\mathcal{D}_\varepsilon f(x^0) | \varepsilon > 0\}$, где $\mathcal{D}_\varepsilon f(x^0)$ — подмножество в $V(X^*)$, элементами которого являются ε–квазидифференциалы функции f в точке x^0.

Из предыдущего параграфа следует, что любая квазидифференцируемая функция является также аппроксимативно квазидифференцируемой. Теорема 11.1 влечет следующий критерий аппроксимативной квазидифференцируемости.

Теорема 12.1. *Функция f, определенная на конечномерном евклидовом пространстве X, является аппроксимативно квазидифференцируемой в точке x^0 тогда и только тогда, когда она дифференцируема по направлениям в точке x^0 и ее производная по направлениям $f'(x^0|\cdot) : X \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Следствие 12.1. *Если функция f равномерно дифференцируема по направлениям в точке x^0, то f является аппроксимативно квазидифференцируемой в точке x^0.*

Как известно [108, 113, 126], функция f называется равномерно дифференцируемой по направлениям в точке x^0, если она дифференцируема по направлениям в этой точке и для произвольного $h \in X$ по любому заданному $\Delta > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$|t^{-1}(f(x^0 + tz) - f(x^0)) - f'(x^0|h)| < \Delta$$

для всех $t \in (0, \gamma)$ и всех $z \in B_\delta(h) = \{y \in X | \; \|y - h\| \le \delta\}$.

Всякая функция f, удовлетворяющая в точке x^0 условию Липшица и дифференцируемая по направлениям в этой точке, является равномерно дифференцируемой по направлениям. Следовательно, любая локально липшицева функция, дифференцируемая по направлениям, является аппроксимативно квазидифференцируемой.

Теорема 12.2. *Пусть U — открытое подмножество пространства X, V — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что заданы функции $f_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$, и $g : V \to \mathbb{R}$ и задана точка $x^0 \in U$ такая, что $y^0 = (f_i(x^0), \ldots, f_n(x^0)) \in V$. Предположим, далее, что функции f_i, являются ε_i–квазидифференцируемыми ($\varepsilon_i \ge 0$) в точке x^0, а функция g равномерно дифференцируема по направлениям в точке y^0, и пусть $D_{\varepsilon_i} f_i(x^0), i = 1, 2, \ldots, n$, —*

произвольные ε_i *–квазидифференциалы функций* $f_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ *в точке* x^0, *а* $D_\varepsilon g(y^0)$ *— произвольный* ε *–квазидифференциал (* $\varepsilon \geq 0$ *) функции* g *в точке* y^0.

Тогда сложная функция $S : X \to g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ *является* $\widehat{\varepsilon}$ *–квазидифференцируемой в точке* x^0 *при*

$$\widehat{\varepsilon} = \max_{\lambda \in \underline{\partial}_{\ \varepsilon} g(y^0)} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \varepsilon_i + \max_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon g(y^0)} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \varepsilon_i + \varepsilon \biggl(\sum_{i=1}^{n} \|D_{\varepsilon_i} f_i(x^0)\| + \varepsilon_i \biggr),$$

и если векторы $\nu = (\nu_i, \ldots, \nu_n)$ *и* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\nu_i \leq \lambda_i \leq \mu_i, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \lambda \in \underline{\partial}_{\ \varepsilon} g(y^0) \cup \overline{\partial}_\varepsilon g(y^0),$$

то $D_{\widehat{\varepsilon}} S(x^0) = [\underline{\partial}_{\ \widehat{\varepsilon}} S(x^0), \overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}} S(x^0)]$, *где*

$$\underline{\partial}_{\ \widehat{\varepsilon}} S(x^0) = \bigcup_{\lambda \in \underline{\partial}_{\ \varepsilon} g(y^0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \nu_i) \underline{\partial}_{\varepsilon_i} f_i(x^0) + \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overline{\partial}_{\varepsilon_i} f_i(x^0) \right\},$$

$$\overline{\partial}_{\widehat{\varepsilon}} S(x^0) = \bigcup_{\lambda \in \overline{\partial}_\varepsilon g(y^0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \nu_i) \underline{\partial}_{\ \varepsilon_i} f_i(x^0) + \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overline{\partial}_{\varepsilon_i} f_i(x^0) \right\},$$

является $\widehat{\varepsilon}$ *–квазидифференциалом сложной функции* S *в точке* x^0.

Доказательство. Так как функция g равномерно дифференцируема по направлениям в точке y^0, а функции $f_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ дифференцируемы по направлениям в точке x^0, то [126] сложная функция $S(x) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ является дифференцируемой по направлениям в точке x^0, при этом $S'(x^0|h) = g'(y^0|f'(x^0|h))$, где $f'(x^0|h) = (f_1'(x^0|h), \ldots, f_n'(x^0|h))$. В силу следствия 12.1 функция g аппроксимативно квазидифференцируема, поэтому положительно однородная функция $g'(y^0|\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ обладает ε –квазидифференциалом при любом положительном ε. Применяя далее теорему 11.2 к композиции $g'(y^0|f'(x^0|\cdot)$, приходим к утверждению теоремы.

Замечание 12.1. Если в условиях теоремы 12.2 дополнительно предположить, что функции $f_i : U \to \mathbb{R}, i = l, 2, \ldots, n,$ являются аппроксимативно квазидифференцируемыми в точке x^0, то сложная функция $x \to S(x) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ также является аппроксимативно квазидифференцируемой в точке x^0.

Следствие 12.2. *Пусть вещественнозначные функции* $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m,$ *являются соответственно* ε_i *–квазидифференцируемыми в точке* x^0 *и пусть* $D_{\varepsilon_i} f_i(x^0), i = l, 2, \ldots, m,$ *— произвольные* ε_i *–квазидифференциалы функций* $f_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ *в точке* x^0. *Тогда* а) *функция* $x \to \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *— произвольные вещественные числа, является* ε *–квазидифференцируемой в точке* x^0 *при* $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_i| \varepsilon_i$, *причем*

$$D_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_{\varepsilon_i} f_i(x^0);$$

б) *функция* $x \to \prod\limits_{i=1}^{m} f_i(x)$ *является* ε *–квазидифференцируемой в точке* x^0 *при* $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1}^{m} f_j(x^0) \varepsilon_i$, *причем*

$$D_\varepsilon \left(\prod_{i=1}^{m} f_i \right)(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1, j \neq i}^{m} f_j(x^0) D_{\varepsilon_i} f_i(x^0);$$

в) *если вещественнозначная функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *является* $\widehat{\varepsilon}$ *–квазидифференцируемой в точке* x^0 *и* $f(x^0) \neq 0$, *то функция* $x \to \dfrac{1}{f(x)} \prod\limits_{i=1}^{m} f_i(x)$ *является* ε *–квазидифференцируемой в точке* x^0 *при*

$$\varepsilon = \frac{1}{f^2(x^0)} \left[\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1, j \neq i}^{m} f_j(x^0) f(x^0) \varepsilon_i - \prod_{j=1}^{m} f_j(x^0) \widehat{\varepsilon} \right],$$

причем

$$D_\varepsilon \left(\frac{1}{f} \prod_{i=1}^{m} f_i \right)(x^0) =$$

$$= \frac{1}{f^2(x^0)} \left(\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1, j \neq i}^{m} f_j(x^0) f(x^0) D_{\varepsilon_i} f_i(x^0) - \prod_{j=1}^{m} f_j(x^0) D_{\widehat{\varepsilon}} f(x^0) \right);$$

г) *функция* $x \to \max\limits_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$ *является* ε *–квазидифференцируемой в точке* x^0 *при* $\varepsilon = \max\limits_{i \in I(x^0)} \varepsilon_i$, *причем*

$$D_\varepsilon (\max_{1 \leq i \leq m} f_i)(x^0) =$$

$$= \left[\operatorname{conv}(\bigcup_{i \in I(x^0)} (\underline{\partial}_{\varepsilon_i} f_i(x^0) + \sum_{j \in I(x^0), j \neq i} \overline{\partial}_{\varepsilon_j} f_j(x^0))), \sum_{j \in I(x^0)} \overline{\partial}_{\varepsilon_j} f_j(x^0) \right],$$

где $I(x^0) = \{j \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid f_j(x^0) = \max\limits_{1 \le i \le m} f_i(x^0)\}$;

д) *функция* $x \to \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x)$ *является* ε*–квазидифференцируемой в точке* x^0 *при* $\varepsilon = \max\limits_{i \in I_1(x^0)} \varepsilon_i$, *причем*

$$D_\varepsilon(\min_{1 \le i \le m} f_i)(x^0) =$$

$$= \left[\sum_{j \in I_1(x^0)} \underline{\partial}_{\varepsilon_j} f_j(x^0), \mathrm{conv} \left(\bigcup_{i \in I_1(x^0)} (\overline{\partial}_{\varepsilon_i} f(x^0) + \sum_{j \in I_1(x^0), j \ne i} \underline{\partial}_{\varepsilon_j} f_j(x^0)) \right) \right],$$

где $I_1(x^0) = \{j \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid f_j(x^0) = \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x^0)\}$.

Из замечания 12.1 следует, что если функции $f_i, i = 1, 2, \ldots, m$, являются аппроксимативно квазидифференцируемыми в точке x^0, то сложные функции, рассмотренные в пунктах а) — д), также аппроксимативно квазидифференцируемы в x^0.

12.2. Понятия ε–квазидифференцируемости и аппроксимативной квазидифференцируемости могут быть введены на основе любых других положительно однородных локальных аппроксимаций вещественнозначной функции f, отличных от производной по направлениям $f'(x^0 \mid \cdot)$. Введение таких понятий может быть целесообразным не только для недифференцируемых по направлениям функций, но и тогда, когда производной по направлениям недостаточно для характеристики тех или иных свойств функции. В теории экстремальных задач широкое использование (см., например, [147, 305, 334]) находят нижняя и верхняя производные Дини по направлениям. Эти локальные аппроксимации не только дают хорошее приближение целевой функции, но и позволяют достаточно точно описать касательный и внутренний конусы к ограничениям (см. [251, 334]).

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ - произвольная вещественнозначная функция и пусть x^0 — заданная точка в X.

Функции

$$d^- f(x^0 \mid \cdot) : h \to \liminf_{z \to h,\, t \to +0} t^{-1}(f(x^0 + tz) - f(x^0))$$

и

$$d^+ f(x^0 \mid \cdot) : h \to \limsup_{z \to h,\, t \to +0} t^{-1}(f(x^0 + tz) - f(x^0))$$

называются соответственно *нижней и верхней производными Дини* (по направлениям) функции f в точке x^0 [305, 334].

Очевидно, что при любом $h \in X$ имеет место неравенство

$$d^- f(x^0 \mid h) \le d^+ f(x^0 \mid h),$$

причем выполнение последнего соотношения как равенства при некотором $h \in X$ эквивалентно равномерной дифференцируемости функции f в точке x^0 по направлению h. Если $d^- f(x^0|h) = d^+ f(x^0|h)$ для всех $h \in X$, то их общее значение будем обозначать в дальнейшем через $df(x^0|h)$. Функция

$$df(x^0\,|\,\cdot) : h \to \lim_{t \to +0, z \to h} t^{-1}(f(x^0 + tz) - f(x^0))$$

является при этом равномерной производной по направлениям функции f в точке x^0.

Замечание 12.2. Производные Дини называют также дуальными полупроизводными [326], контингентными производными [251]. Простейшие свойства производных Дини описаны в статьях [305, 334].

Сравним производные Дини с радиальными полупроизводными по направлениям [334], под которыми понимаются функции

$$f^-(x^0\,|\,\cdot) : h \to \liminf_{t \to +0} t^{-1}(f(x^0 + th) - f(x^0)),$$

$$f^+(x^0\,|\,\cdot) : h \to \limsup_{t \to +0} t^{-1}(f(x^0 + th) - f(x^0)).$$

Нетрудно видеть, что

$$d^- f(x^0\,|\,h) \le f^-(x^0\,|\,h) \le f^+(x^0\,|\,h) \le d^+ f(x^0\,|\,h)$$

для всех $h \in X$.

Если функция f удовлетворяет в окрестности точки x^0 условию Липшица, то для всех $h \in X$ имеют место равенства $d^- f(x^0|h) = f^-(x^0|h)$ и $d^+ f(x^0|h) = f^+(x^0|h)$. Следовательно, для локально липшицевых функций f имеем

$$df(x^0|h) = \lim_{t \to +0} t^-(f(x^0 + th) - f(x^0)),$$

т. е. существование (радиальной) производной по направлениям $f'(x^0\,|\,)$ эквивалентно существованию равномерной производной, при этом $df(x^0|h) = f'(x^0\,|\,h)$, $h \in X$. В общем случае (если f не является локально липшицевой) f может иметь производную по направлениям и не иметь равномерной производной. Наоборот, равномерная дифференцируемость всегда влечет дифференцируемость по направлениям.

Предложение 12.1 (исчисление производных Дини):

а) *пусть* λ *— вещественное число. Тогда*

$$d^-(\lambda f)(x^0\,|\,h) = \begin{cases} \lambda d^- f(x^0\,|\,h), & \lambda \ge 0, \\ \lambda d^+ f(x^0\,|\,h), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

$$d^+(\lambda f)(x^0\,|\,h) = \begin{cases} \lambda d^+ f(x^0\,|\,h), & \lambda \geq 0, \\ \lambda d^- f(x^0\,|\,h), & \lambda \leq 0 \end{cases}$$

для всех $h \in X$;

б)

$$\sum_{i=1}^{m} d^- f_i(x^0|h) \leq d^-\left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right)(x^0|h),\ h \in X,$$

$$\sum_{i=1}^{m} d^+ f_i(x^0|h) \geq d^+\left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right)(x^0|h),\ h \in X,$$

причем если все функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$, *за исключением, может быть, какой-либо одной из них, равномерно дифференцируемы по направлениям, то последние соотношения выполняются как равенства;*

в) *пусть* $f(x) = \sup\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$, *где* A *— некоторое непустое множество индексов. Тогда*

$$d^- f(x^0|h) \geq \sup_{\alpha \in A(x^0)} d^- f_\alpha(x^0|h), h \in X,$$

$$d^+ f(x^0|h) \geq \sup_{\alpha \in A(x^0)} d^+ f_\alpha(x^0|h), h \in X,$$

где $A(x^0) := \{\alpha \in A\,|\,f_\alpha(x^0) = f(x^0)\}$.

Доказательство. Справедливость утверждений а) и б) следует из свойств нижних и верхних пределов. Для доказательства в) заметим, что для любого $\alpha \in A(x^0)$ неравенство

$$t^{-1}(f(x^0 + tz) - f(x^0)) \geq t^{-1}(f_\alpha(x^0 + tz) - f_\alpha(x^0))$$

верно для всех $t > 0$ и $z \in X$. Следовательно,

$$d^- f(x^0|h) \geq d^- f_\alpha(x^0|h) \text{ и } d^+ f(x^0|h) \geq d^+ f_\alpha(x^0|h),$$

для всех $\alpha \in A(x^0)$, что влечет справедливость доказываемых неравенств.

Определение 12.3. *Будем говорить, что функция* f *квазидифференцируема снизу (сверху) в точке* x^0, *если ее нижняя (верхняя) производная Дини по направлениям* $d^- f(x^0\,|\,\cdot)$ $(d^+ f(x^0\,|\,\cdot))$ *является разностно–сублинейной функцией, при этом квазидифференциал функции* $d^- f(x^0\,|\,\cdot)$ $(d^+ f(x^0\,|\,\cdot))$ *будем называть нижним (верхним) квазидифференциалом функции* f *в точке* x^0 *и будем обозначать символом* $D^- f(x^0) = [\underline{\partial}^- f(x^0), \overline{\partial}^- f(x^0)](D^+ f(x^0) = [\underline{\partial}^+ f(x^0), \overline{\partial}^+ f(x^0)])$.

Определение 12.4. *Пусть* ε *— заданное положительное число. Функцию* f *назовем* ε *–квазидифференцируемой снизу (сверху) в точке* x^0, *если ее нижняя (верхняя) производная Дини по направлениям* $d^- f(x^0\,|\,\cdot)$ $(d^+ f(x^0\,|\,\cdot))$ *обладает (как положительно однородная функция)* ε *–квазидифференциалом.*

ε *-Квазидифференциал нижней (верхней) производной Дини* $d^- f(x^0\,|\,\cdot)(d^+ f(x^0\,|\,\cdot))$ *назовем нижним (верхним)* ε *–квазидифференциалом функции* f *в точке* x^0 *и обозначим символом* $D^-_\varepsilon f(x^0) = [\underline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0)]$ $(D^+_\varepsilon f(x^0) = [\underline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0)])$.

Определение 12.5. *Функцию* f *назовем аппроксимативно квазидифференцируемой снизу (сверху) в точке* x^0, *если нижняя (верхняя) производная Дини* $d^- f(x^0\,|\,\cdot)$ $(d^+ f(x^0\,|\,\cdot))$ *является аппроксимативно квазидифференцируемой как положительно однородная функция, при этом аппроксимативный квазидифференциал положительно однородной функции* $d^- f(x^0\,|\,\cdot)$ $(d^+ f(x^0\,|\,\cdot))$ *будем называть нижним (верхним) аппроксимативным квазидифференциалом функции* f *в точке* x^0 *и будем обозначать символом* $\mathcal{D}^- f(x^0)$ $(\mathcal{D}^+ f(x^0))$.

Отметим, что одновременная квазидифференцируемость (соответственно, $\varepsilon-$ квазидифференцируемость или аппроксимативная квазидифференцируемость) снизу и сверху функции f в точке x^0 не влечет ее квазидифференцируемость (соответственно ε–квазидифференцируемость или аппроксимативную квазидифференцируемость).

Пример 12.1. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную соотношением

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

Производная по направлениям в точке $x = 0$ для функции f не существует. Следовательно, функция f не является квазидифференцируемой в точке $x = 0$. Нетрудно убедиться, однако, в том, что $d^- f(x^0|h) = -|h|$ и $d^+ f(x^0|h) = |h|$. Значит, функция f квазидифференцируема снизу и сверху в точке $x = 0$, при этом $D^- f(0) = [\{0\}, [-1,1]]$ и $D^+ f(0) = [[-1,1], \{0\}]$.

Предложение 12.2. *Если функция* f *является липшицевой в точке* x^0, *то* f *аппроксимативно квазидифференцируема снизу и сверху в точке* x^0.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что липшицевость функции f в точке x^0 влечет неравенства

$$-k\|h\| \le d^- f(x^0|h) \le d^+ f(x^0|h) \le k\|h\|,\ h \in X,$$

где k — константа Липшица. Следовательно, как нижняя, так и верхняя производные Дини по направлениям функции f в точке x^0 являются непрерывными функциями направлений. Применяя теорему 11.1, приходим к требуемому утверждению.

Замечание 12.3. Исчисление нижних и верхних квазидифференциалов и ε-квазидифференциалов определяется исчислением нижней и верхней производных Дини, а также исчислением квазидифференциалов и ε-квазидифференциалов положительно однородных функций.

Замечание 12.4. Понятия квазидифференцируемости (ε-квазидифференцируемости) снизу и сверху для положительно однородной функции p в нуле совпадает с соответствующими понятиями для полунепрерывных замыканий функции p снизу и сверху. Это следует из равенств $d^-p(0|h) = \liminf\limits_{z\to h} p(z) = p^{\downarrow}(h)$ и $d^+p(0|h) = \limsup\limits_{z\to h} p(z) = p^{\uparrow}(h)$.

12.3. Пусть Ω - открытое множество в конечномерном евклидовом пространстве $X, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция на Ω со значениями в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающая конечное значение в точке $x^0 \in \Omega$. Будем предполагать, что при некотором $\varepsilon \geq 0$ функция f является ε-квазидифференцируемой снизу (сверху) в точке x^0.

Теорема 12.3. *Если функция f имеет в точке x^0 локальный минимум (максимум), то для любого нижнего (верхнего) ε-квазидифференциала $D^-_\varepsilon f(x^0) = [\underline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0)]$ ($D^+_\varepsilon f(x^0) = [\underline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0)]$) функции f в точке x^0 имеет место включение*

$$\overline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0) \subset \underline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0) + \varepsilon B^* \quad (\underline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0) \subset \underline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0) + \varepsilon B^*). \tag{12.1}$$

Доказательство. Если f имеет в точке x^0 локальный минимум (максимум), то $d^-f(x^0|h) \geq 0 \quad (d^+f(x^0|h) \leq 0)$ для всех $h \in X$. Применив далее необходимую часть теоремы 11.3, приходим к включениям (12.1). Теорема доказана.

Теорема 12.4. *Если для некоторого нижнего (верхнего) ε-квазидифференциала $D^-_\varepsilon f(x^0) = [\underline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0)]$ ($D^-_\varepsilon f(x^0) = [\underline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0), \overline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0)]$) функции f в точке x^0 существует вещественное число $\delta > \varepsilon$ такое, что*

$$\overline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0) + \delta B^* \subset \underline{\partial}^-_\varepsilon f(x^0) \ (\underline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0) + \delta B^* \subset \overline{\partial}^+_\varepsilon f(x^0)), \tag{12.2}$$

то точка x^0 доставляет функции f изолированный локальный минимум (максимум).

Доказательство. Ограничимся доказательством достаточности условия (12.2) для изолированного локального минимума. Используя достаточную часть теоремы 11.3 и определение ε –квазидифференциала, из условия (12.2) получим

$$d^- f(x^0|h) \geq (\delta - \varepsilon)\|h\|, h \in X. \tag{12.3}$$

В противоположность утверждению теоремы предположим, что x^0 не доставляет изолированный локальный минимум функции f. Тогда существует последовательность $x_k, k = 1, 2, \ldots,$ сходящаяся в точке x^0, такая, что $f(x_k) \leq f(x^0)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $t_k = \|x_k - x^0\|^{-1}, k = 1, 2, \ldots,$ и пусть вектор $\overline{h} \in X$ является предельным для последовательности $t_k^{-1}(x_k - x^0), k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$d^- f(x^0|\overline{h}) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x^0)}{t_k} \leq 0,$$

что противоречит (12.3). Теорема доказана.

Следствие 12.3. *Предположим, что функция f является квазидифференцируемой снизу (сверху) в точке x^0. Тогда если f достигает в точке x^0 локального минимума (максимума), то*

$$\overline{\partial}^- f(x^0) \subset \underline{\partial}^- f(x^0) \ \ (\underline{\partial}^+ f(x^0) \subset \overline{\partial}^+ f(x^0)).$$

Если же имеет место включение

$$\overline{\partial}^- f(x^0) \subset \operatorname{int} \underline{\partial}^- f(x^0) \ \ (\underline{\partial}^+ f(x^0) \subset \operatorname{int} \overline{\partial}^+ f(x^0)),$$

то f достигает в точке x^0 изолированного локального минимума (максимума).

Пример 12.2. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из примера 12.1. Заметим, что в точке $x^0 = 0$ для нее выполняются условия локального минимума, основанные на верхних выпуклых аппроксимациях [211, 212]. В то же время применение теоремы 12.3 (следствия 12.3) показывает, что в этой точке функция f не имеет экстремума.

Замечание 12.5. Теоремы 12.3 и 12.4 и следствие 12.3 обобщают условия локального минимума, полученные Л. Н. Поляковой для квазидифференцируемых функций [105, 106, 203].

Замечание 12.6. Если сравнивать с результатами классического анализа, то теорема 12.3 является обобщением теоремы Ферма о стационарности точек локального экстремума [11, 57, 138]. Что касается теоремы 12.4, то она не имеет аналогов в классическом анализе (для дифференцируемых функций условия (12.2) никогда не выполняются).

§ 13. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ ε-КВАЗИНОРМАЛИ К МНОЖЕСТВАМ

Понятия квазидифференцируемости для вещественнозначных функций основаны на их локальном приближении производными (Дини) по направлениям. Подобным образом, исходя из локальных аппроксимаций множеств, введем понятия квазинормалей и ε–квазинормалей (внешних и внутренних) к множествам.

13.1. Пусть Ω — непустое множество в X и пусть точка x^0 принадлежит замыканию Ω.

Говорят [113, 166], что вектор $h \in X$ определяет в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, *внутреннее направление для множества* Ω, если существует окрестность $\mathcal{O}(h)$ вектора h и положительное вещественное число $\delta > 0$ такие, что $x^0 + th' \in \Omega$, для всех $h' \in \mathcal{O}(h)$ и всех $t \in (0, \delta)$.

Векторы, определяющие в точке x^0 внутренние направления для множества Ω, образуют в X открытый конус (возможно, пустой), который называется *внутренним конусом к множеству* Q *в точке* x^0 и обозначается $I(x^0|\Omega)$.

Таким образом,

$$I(x^0|\Omega) = \bigcup_{\delta>0} \mathrm{int}[\bigcap_{0<t<\delta} t^{-1}(\Omega - x^0)] \tag{13.1}$$

Говорят [108, 113, 166], что вектор $h \in X$ определяет в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ *касательное* (или, в другой терминологии [251], *контингентное*) *направление к множеству* Ω, если для любой окрестности $\mathcal{O}(h)$ вектора h и любого положительного вещественного числа $\delta > 0$ существуют такие $h' \in \mathcal{O}(h)$ и $t' \in (0, \delta)$, что $x^0 + t'h' \in \Omega$.

Векторы, определяющие в точке x^0 касательные направления для множества Ω, образуют в X непустой замкнутый конус, который называется *касательным* (или *контингентным*) *конусом к множеству* Ω *в точке* x^0 и обозначается символом $T(x^0|\Omega)$.

Имеет место равенство

$$T(x^0|\Omega) = \bigcap_{\delta>0} \mathrm{cl}[\bigcup_{0<t<\delta} t^{-1}(\Omega - x^0)]. \tag{13.2}$$

Из равенств (13.1) и (13.2) следует соотношение

$$T(x^0|\Omega) = X \setminus I(x^0|X \setminus \Omega), \tag{13.3}$$

где $X \setminus M$ — теоретико-множественное дополнение множества M в пространстве X.

Детально изложение свойств внутреннего и касательного конусов может быть найдено в работах [108, 166, 251]. Связь понятий верхней и нижней производных Дини по направлениям для функций с понятиями внутреннего и касательного конусов для множеств изучена в статье [334].

13.2. Пусть ε — вещественное неотрицательное число и пусть $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$, где $\mathrm{bd}\Omega := \mathrm{cl}\Omega \setminus \mathrm{int}\Omega$ — граница множества Ω.

Определение 13.1. *Элемент $A = [\underline{A}, \overline{A}] \in V(X^*)$ пространства выпуклых множеств назовем внешней ε–квазинормалью к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, если*

$$\Phi(A + \varepsilon E) \subset T(x^0|\Omega) \subset \Phi(A - \varepsilon E), \tag{13.4}$$

где $E = [B^*, \{0\}]$ — порядковая единица пространства $V(X^*)$, а множество $\Phi(B)$ определяется для любого $B \in V(X^*)$ равенством

$$\Phi(B) = \{h \in X | \phi(B)(h) \leq 0\}. \tag{13.5}$$

Будем обозначать внешнюю ε–квазинормаль к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$ символом $N_\varepsilon^-(x^0|\Omega) = [\underline{n}_\varepsilon^-(x^0|\Omega), \overline{n}_\varepsilon^-(x^0|\Omega)]$.

Определение 13.2. *Пусть точка $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$ такова, что $I(x^0|\Omega) \neq \varnothing$ и $I(x^0|\Omega) \neq X$. Элемент $A = [\underline{A}, \overline{A}] \in V(X^*)$ пространства выпуклых множеств назовем внутренней ε–квазинормалью к множеству Ω в точке x^0, если*

$$\Phi^0(A + \varepsilon E) \subset I(x^0|\Omega) \subset \Phi^0(A - \varepsilon E), \tag{13.6}$$

где множество $\Phi^0(B)$ определяется для любого $B \in V(X^*)$ соотношением

$$\Phi^0(B) = \{h \in X | \phi(B)(h) < 0\}. \tag{13.7}$$

Для обозначения внутренней ε–квазинормали к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ будем использовать символ $N_\varepsilon^+(x^0|\Omega) = [\underline{n}_\varepsilon^+(x^0|\Omega), \overline{n}_\varepsilon^+(x^0|\Omega)]$.

Из равенства (13.3) и соотношений (13.4) – (13.7) следует, что если $A \in V(X^*)$ является внешней ε–квазинормалью к множеству Ω в точке x^0, то $-A \in V(X^*)$ есть внутренняя ε–квазинормаль к множеству $C\Omega := X \setminus \Omega$ (дополнению к множеству Ω) в точке x^0. Другими словами, имеет место равенство

$$N_\varepsilon^-(x^0|\Omega) = -N_\varepsilon^+(x^0|C\Omega). \tag{13.8}$$

Если соотношение (13.4) выполняется при $\varepsilon = 0$, т. е. если имеет место равенство

$$T(x^0|\Omega) = \Phi(A),$$

то вместо внешняя 0–квазинормаль к множеству Ω в точке x^0 будем называть элемент $A \in V(X^*)$ *внешней квазинормалью к множеству* Ω *в точке* x^0 и будем использовать обозначение $N^-(x^0|\Omega) = [\underline{n}^{\,-}(x^0|\Omega), \overline{n}^{\,-}(x^0|\Omega)$.

Аналогичным образом *внутреннюю квазинормаль к множеству* Ω *в точке* $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ определим как такой элемент $A \in V(X^*)$, что

$$I(x^0|\Omega) = \Phi^0(A).$$

Будем обозначать внутреннюю квазинормаль к множеству Ω в точке x^0 символом $N^+(x^0|\Omega) = [\underline{n}^{\,+}(x^0|\Omega), \overline{n}^{\,+}(x^0|\Omega)]$.

Элемент $A = [\underline{A}, \overline{A}] \in V(X^*)$, который одновременно является как внутренней, так и внешней ε–квазинормалью (квазинормалью) к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$, будем называть *$\varepsilon$–квазинормалью (квазинормалью) к множеству* Ω *в точке* $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$ и обозначать $N_\varepsilon(x^0|\Omega) = [\underline{n}_{\,\varepsilon}(x^0|\Omega), \overline{n}_{\,\varepsilon}(x^0|\Omega)]$ $(N(x^0|\Omega) = [\underline{n}(x^0|\Omega), \overline{n}(x^0|\Omega)])$.

Замечание 13.1. В работе [345] квазинормалью к множеству Ω в точке x^0 назван такой элемент $A = [\underline{A}, \overline{A}] \in V(X^*)$, для которого справедливо включение $\Phi(A) \subset T(x^0|\Omega)$. Определенная выше совокупность понятий (внешних и внутренних) ε–квазинормалей и квазинормалей позволяет более точно охарактеризовать локальную структуру множества.

Теорема 13.1. а) *Какие бы ни были непустое множество* Ω *и точка* $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, *внешняя* ε *–квазинормаль* $N_\varepsilon^-(x^0|\Omega)$ *существует для любого вещественного положительного числа* ε.

б) *Если множество* Ω *и точка* $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ *таковы, что* $I(x^0|\Omega) \neq \emptyset$ *и* $I(x^0|\Omega) \neq X$, *то внутренняя* ε *–квазинормаль* $N_\varepsilon^+(x^0|\Omega)$ *существует для любого вещественного положительного числа* ε.

Доказательство, а) Так как касательный конус $T(x^0|\Omega)$ непуст для любого непустого множества Ω и любой точки $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, то симметризованное расстояние до конуса $T(x^0|\Omega)$, определяемое равенством

$$s_{T(x^0|\Omega)}(h) = \inf_{w \in T(x^0|\Omega)} \|w - h\| - \inf_{v \in CT(x^0|\Omega)} \|v - h\|,\ h \in X,$$

является непрерывной положительно однородной функцией, причем

$$T(x^0|\Omega) = \{h \in X | s_{T(x^0|\Omega)}(h) \leq 0\}. \tag{13.9}$$

(Подробно свойства симметризованного расстояния до множества представлены ниже в § 15.)

В силу теоремы 11.1 функция $h \to s_{T(x^0|\Omega)}(h)$ обладает ε–квазидифференциалом при любом положительном ε. Пусть $D_\varepsilon s_{T(x^0|\Omega)}$ — произвольный ε–квазидифференциал функции $s_{T(x^0|\Omega)} : X \to \mathbb{R}$. Так как

$$\phi(D_\varepsilon s_{T(x^0|\Omega)})(h) - \varepsilon\|h\| \le s_{T(x^0|\Omega)}(h) \le$$

$$\le \phi(D_\varepsilon s_{T(x^0|\Omega)})(h) + \varepsilon\|h\|,\ h \in X,$$

то, используя равенство (13.9), нетрудно убедиться в том, что $D_\varepsilon s_{T(x^0|\Omega)}$ является внешней ε–квазинормалью к множеству Ω в точке x^0. Таким образом, внешняя ε–квазинормаль к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ существует при любом $\varepsilon > 0$.

б) Существование внутренних ε–квазинормалей при любом $\varepsilon > 0$ доказывается подобным образом. Для этого следует рассмотреть симметризованное расстояние $s_{I(x^0|\Omega)}(h)$ к внутреннему конусу $I(x^0|\Omega)$ и воспользоваться равенством

$$I(x^0|\Omega) = \{h \in X | s_{I(x^0|\Omega)}(h) < 0\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 13.2. *Если множество Ω или его дополнение $C\Omega$ является регулярным в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, т. е. если имеет место равенство $T(x^0|\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|\Omega))$ или же равенство $T(x^0|C\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|C\Omega))$, то для любого вещественного положительного числа ε существует ε–квазинормаль к множеству Ω в точке x^0.*

Доказательство. Вследствие равенства $T(x^0|\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|\Omega))$ имеем $s_{T(x^0|\Omega)}(h) = s_{I(x^0|\Omega)}(h)$ для всех $h \in X$. Таким образом, прослеживая доказательство предыдущей теоремы, убеждаемся в том, что ε–квазидифференциал $D_\varepsilon s_{T(x^0|\Omega)}$ функции $s_{T(x^0|\Omega)} : X \to \mathbb{R}$ является как внешней, так и внутренней ε–квазинормалью к множеству Ω в точке x^0.

В случае $T(x^0|C\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|C\Omega))$ утверждение следует из равенств $s_{T(x^0|\Omega)}(h) = = -s_{I(x^0|C\Omega)}(h), h \in X$, и $s_{I(x^0|\Omega)}(h) = = -s_{T(x^0|C\Omega)}(h), h \in X$. Теорема доказана.

Очевидно, что достаточным условием существования внешней или внутренней квазинормали к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ является принадлежность функции $h \to s_{T(x^0|\Omega)}(h)$ или соответственно функции $h \to s_{I(x^0|\Omega)}(h)$ пространству $P(X)$ разностно-сублинейных функций. Если при этом множество Ω регулярно в точке x^0, то квазидифференциал функции $h \to s_{T(x^0|\Omega)}(h) = s_{I(x^0|\Omega)}(h)$ является квазинормалью к множеству Ω в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$.

Замечание 13.2. Условие регулярности $T(x^0|\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|\Omega))$ не является необходимым для существования ε–квазинормалей к множеству Ω в точке x^0. Рассмотрим пример. Пусть $\Omega = \overline{\mathbb{R}}^2_+ \cup H$, где $\overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(\xi_1, \xi_2) \,|\, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}$, $H = \{(\xi_1, \xi_2) \,|\, \xi_1 = \xi_2, \xi_1 \leq 0, \xi_2 \leq 0\}$, и пусть $x^0 = (0,0) \in \Omega$. Так как Ω есть замкнутый конус, то $T(x^0|\Omega) = \Omega$, а $I(x^0|\Omega) = \mathrm{int}\Omega = \mathbb{R}^2_+ = \{(\xi_1, \xi_2)|\xi_1 > 0, \xi_2 > 0\}$. Следовательно, $\mathrm{cl}(I(x^0|\Omega)) = \overline{\mathbb{R}}^2_+ \neq T(x^0|\Omega)$, т. е. условие регулярности не выполнено. Вместе с тем симметризованное расстояние до множества Ω удовлетворяет равенствам $s_{T(x^0|\Omega)}(h) = s_\Omega(h) = \min\{s_{\overline{\mathbb{R}}^2_+}(h), s_H(h)\}$ для всех $h \in X$, откуда следует, что $s_{T(x^0|\Omega)}(h)$ является разностно-сублинейной функцией (как минимум двух сублинейных функций), причем $T(x^0|\Omega) = \{h \in X \,|\, s_{T(x^0|\Omega)}(h) \leq 0\}$ и $I(x^0|\Omega) = \{h \in X | s_{T(x^0|\Omega)}(h) < 0\}$. Значит, квазидифференциал функции $s_{T(x^0|\Omega)}(h)$ является квазинормалью к рассматриваемому множеству Ω в точке $x^0 = (0,0)$.

Замечание 13.3. В работе [345, теорема 2, с. 61] утверждается, что для любого замкнутого конуса $K \subset X$ существует разностно-сублинейная функция $p \in P(X)$ такая, что $K = \{h \in X \,|\, p(h) \leq 0\}$. Из этого утверждения следует существование в точке $x^0 \subset \mathrm{cl}\Omega$ внешних и внутренних квазинормалей для любого множества $\Omega \subset X$ и существование квазинормалей для любого $\Omega \subset X$, удовлетворяющего в точке x^0 условию регулярности.

13.3. Приведем простейшие геометрические критерии существования внешних и внутренних квазинормалей к множествам и укажем способы их построения.

Введем следующие понятия.

Определение 13.3. *Множество Ω назовем*

а) *локально выпуклым извне (изнутри) в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ если касательный конус $T(x^0|\Omega)$ (внутренний конус $I(x^0|\Omega)$) к множеству Ω в точке x^0 является выпуклым;*

б) *локально вогнутым извне (изнутри) в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, если касательный конус $T(x^0|\Omega)$ (внутренний конус $I(x^0|\Omega)$) к множеству Ω, в точке x^0 является вогнутым.*

Множество $M \subset X$ назовем вогнутым в векторном пространстве X, если его дополнение $CM := X \setminus M$ является выпуклым.

Предположим, что множество Ω локально выпукло изнутри в точке x^0. Тогда сопряженный конус $(I(x^0|\Omega))^* = \{x^* \in X^* \,|\, \langle x, x^* \rangle \leq 0$ для всех $x \in I(x^0|\Omega)\}$ обладает компактной выпуклой базой $B \subset X^*$, причем $I(x^0|\Omega) = \{h \in X \,|\, \max\limits_{x^* \in B} \langle h, x^* \rangle < 0\}$. (Напомним, что множество $B \subset X^*$ называется базой выпуклого конуса $K \subset X^*$, если для любого $x^* \in K, x^* \neq 0$, существуют единственным образом определенные $y^* \in B$ и вещественное положительное число $\lambda > 0$ такие, что $x^* = \lambda y^*$.) Таким образом, элемент $[B, \{0\}]$

пространства выпуклых множеств $V(X^*)$ является внутренней квазинормалью к множеству Ω в точке x^0. Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

Предложение 13.1. *Если множество Ω является локально выпуклым изнутри в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, то любой элемент пространства выпуклых множеств $V(X^*)$ вида $[B, \{0\}]$, где B — произвольная выпуклая компактная база сопряженного конуса $(I(x^0|\Omega))^*$, является внутренней квазинормалью к множеству Ω в точке x^0.*

Аналогичным образом, воспользовавшись равенством $T(x^0|\Omega) = X \setminus I(x^0|C\Omega)$ приходим к следующему утверждению.

Предложение 13.2. *Если множество Ω является локально вогнутым извне в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$, то любой элемент пространства выпуклых множеств $V(X^*)$ вида $[\{0\}, B]$, где B — произвольная выпуклая компактная база сопряженного конуса $(I(x^0|C\Omega))^*$, является внешней квазинормалью к множеству Ω в точке x^0.*

Предположим теперь, что множество Ω локально выпукло извне в точке x^0. Пусть L — линейная часть конуса $T^*(x^0|\Omega)$, сопряженного касательному конусу $T(x^0|\Omega)$. Представим $T^*(x^0|\Omega)$ в виде прямой суммы $T^*(x^0|\Omega) = L \oplus \widetilde{T}$, где $\widetilde{T}$ — выступающий замкнутый выпуклый конус в X^*. Выбрав произвольную компактную выпуклую базу B_0 конуса $\widetilde{T}$ и произвольный базис $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ в подпространстве L, получим представление

$$T(x^0|\Omega) = \{h \in X \mid \max(\max_{x^* \in B_0} \langle h, x^* \rangle, |\langle h, x_1^* \rangle|, \ldots, |\langle h, x_m^* \rangle|) \le 0\}.$$

Пусть $B_i = [-x_i^*, x_i^*]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, тогда $|\langle h, x_i^* \rangle| = \max\limits_{x^* \in B_i} \langle h, x^* \rangle$, $h \in X$, для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Используя правила исчисления квазидифференциалов, получаем

$$T(x^0|\Omega) = \{h \in X \mid \max_{x^* \in \mathrm{conv}(\bigcup\limits_{i=0}^{m} B_i)} \langle h, x^* \rangle \le 0\}.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 13.3. *Пусть множество Ω является локально выпуклым извне в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ и пусть выпуклые компактные множества $B_0, B_1, \ldots, B_m$ из пространства X^* определены следующим образом: множество B_0 — произвольная выпуклая компактная база выступающего замкнутого выпуклого конуса $\widetilde{T} \subset X^*$ такого, что $T^*(x^0|\,\Omega) = L \oplus \widetilde{T}$, где L — линейная часть конуса $T^*(x^0|\,\Omega)$, а символ $\oplus$ означает прямую сумму множеств; $B_i = [-x_i^*, x_i^*], i = 1, 2, \ldots, m$, где $\{x_i^*, \ldots, x_m^*\}$ — произвольный базис в подпространстве L. Тогда элемент пространства выпуклых* *множеств* $V(X^*)$ *вида* $[\mathrm{conv}(\bigcup\limits_{i=0}^{m} B_i), \{0\}]$ *является внешней квазинормалью к множеству* Ω *в точке* x^0.

Предложение 13.4. *Пусть множество* Ω *является локально вогнутым изнутри в точке* $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$ *и пусть выпуклые компактные множества* $B_0, B_1, \ldots, B_m$ *из пространства* X^* *определены следующим образом: множество* B_0 *— произвольная выпуклая компактная база выступающего замкнутого выпуклого конуса* $\widetilde{T} \subset X^*$ *такого, что* $T^*(x^0|C\Omega) = L \oplus \widetilde{T}$, *где* L *— линейная часть конуса* $T^*(x^0|\,C\Omega)$; $B_i = [-x_i^*, x_i^*], i = 1, 2, \ldots, m$, *где* $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ *— произвольный базис в* L. *Тогда элемент пространства выпуклых множеств* $V(X^*)$ *вида* $[\{0\}, \mathrm{conv}(\bigcup\limits_{i=0}^{m} B_i)]$ *является внутренней квазинормалью к множеству* Ω *в точке* x^0.

Используя результаты предложений 13.1 – 13.4, а также алгебраические и решеточные операции в пространстве выпуклых множеств $V(X^*)$, можно находить внешние и внутренние квазинормали к множествам, локальная структура которых сложнее, чем в рассмотренных выше случаях.

Пусть, например, касательный конус $T(x^0|\Omega)$ к множеству Ω в точке x^0 есть объединение конечного числа замкнутых конусов T_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, каждый из которых является либо выпуклым, либо вогнутым, и таких, что $\bigcap\limits_{i=1}^{m} T_i = \{0\}$. Тогда множество Ω обладает в точке x^0 внешней квазинормалью, которая может быть построена следующим образом. Следуя схеме предложения 13.2 или предложения 13.3, построим для каждого $T_i, i = 1, 2, \ldots, m$, внешнюю квазинормаль $N^-(0, T_i), i = 1, 2, \ldots, m$, в точке 0. Далее, воспользовавшись формулой (10.16), вычислим нижнюю грань $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} N^-(0, T_i)$ элементов $N^-(0, T_i), i = 1, 2, \ldots, m$, пространства $V(X^*)$. Так как $\Phi(\bigwedge\limits_{i=1}^{m} N^-(0, T_i)) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Phi(N^-(0, T_i)) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i = T(x^0|\Omega)$, то $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} N^-(0, T_i)$ является внешней квазинормалью к множеству Ω в точке x^0.

§ 14. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

14.1. Пусть X — конечномерное евклидово пространство, $f : X \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на X, Ω — заданное множество в X.

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \inf,\ x \in \Omega, \tag{14.1}$$

состоящую в минимизации функции f на множестве Ω. Цель настоящего параграфа — представить в квазидифференциальной форме необходимые, а также достаточные условия для точек, доставляющих функции f локальный минимум на множестве Ω. При выводе этих условий будем исходить из следующих условий локального минимума, сформулированных в терминах производных Дини (по направлениям) функции f и касательного и внутреннего конусов множества Ω.

Предложение 14.1 (необходимое условие локального минимума). *Если точка $x^0 \in \Omega$ доставляет на множестве Ω локальный минимум функции f, то*

$$d^- f(x^0|h) \geq 0 \text{ для всех } h \in I(x^0|\Omega), \tag{14.2}$$

$$d^+ f(x^0|h) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega). \tag{14.3}$$

Доказательство этого предложения может быть найдено в статье [334].

Предложение 14.2. (достаточное условие локального изолированного минимума). *Если при некотором $\delta > 0$ неравенство*

$$d^- f(x^0|h) \geq \delta\|h\| \tag{14.4}$$

выполняется для всех $h \in T(x^0|\Omega)$, то точка $x^0 \in \Omega$ доставляет локальный изолированный минимум функции f на множестве Ω.

Доказательство. Предположим противное, т. е. будем считать, что $x^0 \in \Omega$ удовлетворяет условию (14.4), но не доставляет локальный изолированный минимум функции f на множестве Ω. Тогда существует последовательность точек $x_n \in \Omega, x_n \neq x^0, n = 1, 2, \ldots,$ сходящаяся к точке x^0, и такая, что $f(x_n) \leq f(x^0)$. Если $h \in X$ является предельным вектором последовательности $\dfrac{x_n - x^0}{\|x_n - x^0\|}$, $n = 1, 2, \ldots,$ то $\overline{h} \in T(x^0|\Omega)$ и

$$d^- f(x^0|\overline{h}) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x^0)}{\|x_n - x\|} \leq 0$$

Последнее, однако, противоречит условию (14.4), что и доказывает предложение.

Замечание 14.1. Вследствие конечномерности пространства X условие (14.4) эквивалентно условию

$$d^- f(x^0|h) > 0 \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega), h \neq 0.$$

Используя предложения 14.1 и 14.2, получим следующие условия локального минимума.

Теорема 14.1. *Если функция f является ε_1–квазидифференцируемой снизу в точке $x^0 \in \Omega$, то для того, чтобы точка x^0 доставляла локальный минимум функции f на множестве Ω, необходимо, чтобы для любого нижнего ε_1–квазидифференциала $D^-_{\varepsilon_1} f(x^0) = [\underline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0), \overline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0)]$ функции f в точке x^0 и любой внутренней ε_2–квазинормали $N^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) = [\underline{n}^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega), \overline{n}^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega)]$ к множеству Ω в точке x^0 имело место включение*

$$\overline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{n}^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) \subset \operatorname{conv}\{(\underline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0) +$$

$$+ \overline{n}^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) + \varepsilon_1 B^*) \cup (\overline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0) + \underline{n}^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) + \varepsilon_2 B^*)\}. \qquad (14.5)$$

Доказательство. Включение (14.5) является следствием необходимого условия (14.2). Действительно, поскольку в силу определений нижнего ε_1–квазидифференциала $D^-_{\varepsilon_1} f(x^0)$ и внутренней ε_2–квазинормали $N^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega)$ имеют место неравенство

$$\phi(D^-_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 E)(h) \geq d^- f(x^0|h) \text{ для всех } h \in X,$$

и включение

$$\{h \in X \mid \phi(N^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) + \varepsilon_2 E)(h) < 0\} \subset I(x^0|\Omega),$$

то из (14.2) следует, что система строгих неравенств

$$\phi(D^-_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 E)(h) < 0, \ \phi(N^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) + \varepsilon_2 E)(h) < 0$$

несовместна на X относительно h. Значит, для всех $h \in X$

$$\max\{\phi(D^-_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 E)(h), \phi(N^+_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) + \varepsilon_2 E)(h)\} \geq 0. \qquad (14.6)$$

Воспользовавшись теперь правилами исчисления квазидифференциалов разностно-сублинейных функций, получим, что неравенство (14.6) эквивалентно включению (14.5). Теорема доказана.

Теорема 14.2. *Если функция f является ε_1 –квазидифференцируемой сверху в точке $x^0 \in \Omega$, то для того, чтобы x^0 доставляла локальный минимум функции f на множестве Ω, необходимо, чтобы для любого верхнего ε_1 –квазидифференциала $D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) = [\underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0), \overline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0)]$ функции f в точке x^0 и любой внешней ε_2 –квазинормали $N^-_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega) = [\underline{n}^-_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega), \overline{n}^-_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega)]$ к множеству Ω в точке x^0 имело место включение*

$$\overline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0) \subset \bigcap_{w^* \in \overline{n}^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega)} [\underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 B^* +$$

$$+\overline{\mathrm{cone}}(\underline{n}^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega) + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\})]. \tag{14.7}$$

Здесь $\overline{\mathrm{cone}} M$ — замыкание конической оболочки множества M.

Доказательство. Используя определение нижнего ε_1 –квазидифференциала $D^+_{\varepsilon_1} f(x^0)$ и внешней ε_2 –квазинормали $N^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega)$, из условия (14.3) получаем $\phi(D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 E)(h) \geq 0$ для всех $h \in \Phi(N^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega) + \varepsilon_2 E)$. Применив далее предложение 10.4, приходим к (14.7). Теорема доказана.

Теорема 14.3. *Если существуют нижний ε_1 –квазидифференциал $D^-_{\varepsilon_1} f(x^0) = [\underline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0), \overline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0)]$ функции f в точке $x^0 \in \Omega$, внешняя ε_2 –квазинормаль $N^-_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega)$ множества Ω в точке x^0 и вещественное число $\delta > \varepsilon_1$ такие, что*

$$\overline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0) + \delta B^* \subset \bigcap_{w^* \in \overline{n}^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega) + \varepsilon_2 B^*} [\underline{\partial}^-_{\varepsilon_1} f(x^0) +$$

$$+\overline{\mathrm{cone}}(\underline{n}^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega) - \{w^*\})], \tag{14.8}$$

то точка x^0 доставляет локальный изолированный минимум функции f на множестве Ω.

Доказательство. Из предложения 10.4 заключаем, что включение (14.8) эквивалентно выполнению неравенства

$$\phi(D^-_{\varepsilon_1} f(x^0) - \delta E)(h) \geq 0 \text{ для всех } h \in \Phi(N^-_{\varepsilon_2}(x^0|\Omega) - \varepsilon_2 E),$$

откуда, используя определение нижнего ε_1 –квазидифференциала $D^-_{\varepsilon_1} f(x^0)$ и внешней ε_2 –квазинормали $N^-_{\varepsilon_2}(x^0|\,\Omega)$, получаем

$$d^- f(x^0|h) \geq (\delta - \varepsilon_1)\|h\| \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega).$$

Так как $\delta > \varepsilon_1$, то из предложения 14.2 следует, что точка x^0 доставляет на множестве Ω локальный изолированный минимум функции f. Теорема доказана.

14.2. Наиболее часто ограничения в задачах минимизации задаются в виде множеств уровня (ограничения типа неравенства) или поверхностей уровня (ограничения типа равенства) некоторых вещественнозначных функций. Для таких задач естественно получить условия оптимальности в терминах ε–квазидифференциалов функций, задающих ограничения.

Рассмотрим задачу минимизации функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $\Omega = \{x \in X \,|\, g(x) \leq 0\}$, где $g : X \to \mathbb{R}$ — заданная вещественнозначная функция на X.

Теорема 14.4. *Пусть $x^0 \in \Omega$ и пусть f является ε_1–квазидифференцируемой сверху в точке x^0, а функция g — ε_2–квазидифференцируемой снизу в точке x^0.*

Если точка x^0 доставляет на множестве Ω локальный минимум функции f и $g(x^0) = 0$, то для любого верхнего ε_1–квазидифференциала $D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) = [\underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0), \overline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0)]$ функции f в точке x^0 и любого нижнего ε_2–квазидифференциала $D^-_{\varepsilon_2} g(x^0) = [\underline{\partial}^-_{\varepsilon_2} g(x^0), \overline{\partial}^-_{\varepsilon_2} g(x^0)]$ функции g в точке x^0 имеет место включение

$$\overline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^-_{\varepsilon_2} g(x^0) \subset \operatorname{conv}\{(\underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^-_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_1 B^*) \cup$$
$$\cup (\overline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \underline{\partial}^-_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 B^*)\}. \tag{14.9}$$

Доказательство. Поскольку для множества

$$\Omega = \{x \in X \,|\, g(x) \leq 0\}$$

и точки x^0, удовлетворяющей равенству $g(x^0) = 0$, имеют место включения [334]

$$\{h \in X \,|\, d^- g(x^0|h) < 0\} \subset T(x^0|\Omega) \subset$$
$$\subset \{h \in X \,|\, d^- g(x^0|h) \leq 0\}, \tag{14.10}$$

то из (14.5) заключаем, что система неравенств

$$d^+ f(x^0|h) < 0, \; d^- g(x^0|h) < 0$$

несовместна на X относительно h. Кроме того, в силу определений нижних и верхних ε–квазидифференциалов при любых $D^+_{\varepsilon_1} f(x^0)$ и $D^-_{\varepsilon_2} g(x^0)$ имеют место неравенства

$$d^+ f(x^0|h) \leq \phi(D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 E)(h),$$

$$d^- g(x^0|h) \leq \phi(D^-_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 E)(h), \; h \in X.$$

Сопоставляя оба эти факта, приходим к тому, что при любых $D^+_{\varepsilon_1} f(x^0)$ и $D^-_{\varepsilon_2} g(x^0)$ система неравенств

$$\phi(D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 E)(h) < 0,\ \phi(D^-_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 E)(h) < 0$$

также несовместна на X относительно h.

Рассуждая дальше аналогично доказательству теоремы 14.1, получим включение (14.9). Теорема доказана.

Будем говорить, что в точке x^0 выполняется *условие регулярности для ограничения типа неравенства* $\Omega = \{x \in X \,|\, g(x) \leq 0\}$, если $g(x^0) = 0$ и функция $d^- g(x^0 \,|\, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ не имеет точек локального минимума на X.

Так как функция $d^- g(x^0 \,|\, \cdot)$ положительно однородна, то $d^- g(x^0|h^0) = 0$ для любого вектора $h^0 \in X$, доставляющего локальный минимум (или максимум) функции $d^- g(x^0 \,|\, \cdot)$. Действительно, если $d^- g(x^0|h^0) \neq 0$, то на луче $\{th^0 \,|\, t > 0\}$ функция $d^- g(x^0 \,|\, th^0) = td^- g(x^0|h^0)$ принимает при t, близких к единице, значения как меньшие, так и большие $d^- g(x^0|h^0)$. Учитывая это, нетрудно видеть, что сформулированное выше условие регулярности для ограничения типа неравенства эквивалентно следующему требованию: для любого $h^0 \in X$, удовлетворяющего условию $d^- g(x^0|h^0) = 0$, и любого вещественного положительного числа $\nu > 0$ существует $\overline{h} \in X$ такой, что $d^- g(x^0|\overline{h}) < 0$ и $\|h^0 - \overline{h}\| < \nu$. (Впервые в такой форме условия регулярности были сформулированы в работе [108].)

Если функция $g : X \to \mathbb{R}$ локально выпукла снизу, т. е. если ее нижняя производная Дини по направлениям $d^- g(x^0 \,|\, \cdot)$ является выпуклой функцией, то условие регулярности для ограничения типа неравенства эквивалентно выполнению неравенства $d^- g(x^0|\overline{h}) < 0$ для некоторого $\overline{h} \in X$ и, следовательно, принимает форму хорошо известного в математическом программировании условия регулярности Слейтера [132, 202].

В общем случае, однако, наличие вектора $\overline{h} \in X$ такого, что $d^- g(x^0|h) < 0$, не влечет выполнение в точке x^0 условия регулярности для ограничения типа неравенства $\Omega = \{x \in X \,|\, g(x) \leq 0\}$. Рассмотрим функцию $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, нижняя равномерная полупроизводная по направлениям которой в точке $x^0 \in \mathbb{R}^2$ имеет вид $d^- g(x^0|h) = \min\{|h^{(1)}|, -h^{(2)}\}, h = (h^{(1)}, h^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$. Нетрудно проверить, что в точке $\overline{h} = (0, 1)$ функция $d^- g(x^0 \,|\, \cdot)$ удовлетворяет условию регулярности Слейтера, т. е. $d^- g(x^0|\overline{h}) < 0$, и вместе с тем $d^- g(x^0 \,|\, \cdot)$ достигает локального минимума в точке $h_0 = (0, -1)$.

Предложение 14.3. *Если в точке $x^0 \in X$ выполнено условие регулярности для ограничения типа неравенства*

$\Omega = \{x \in X \mid g(x) \le 0\}$, *то*

$$T(x^0 \mid \Omega) = \{h \in X \mid d^- g(x^0|h) \le 0\}. \tag{14.11}$$

Доказательство. Условие регулярности гарантирует для любого вектора $h \in X$, удовлетворяющего условию $d^- g(x^0|h) = 0$, существование последовательности векторов $h_i \to h, i \to \infty$, такой, что $d^- g(x^0|h_i) < 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Из этого следует равенство

$$\mathrm{cl}\{h \in X \mid d^- g(x^0|h) < 0\} = \{h \in X \mid d^- g(x^0|h) \le 0\},$$

которое вместе с (14.10) дает (14.11). Предложение доказано. Легко видеть, что если имеет место равенство (14.11), то любой нижний ε–квазидифференциал $D_\varepsilon^- g(x^0)$ является внешней ε–квазинормалью к множеству Ω в точке x^0. Из этого замечания, используя теорему 14.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 14.5. *Пусть выполнены предположения теоремы 14.4 и пусть, кроме того, в точке x^0 выполнено условие регулярности для ограничения типа неравенства $\Omega = \{x \in X \mid g(x) \le 0\}$. Тогда если точка x^0 доставляет функции f локальный минимум на множестве Ω, то для любого верхнего ε_1–квазидифференциала $D_{\varepsilon_1}^+ f(x^0) = [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}^+ f(x^0), \overline{\partial}_{\varepsilon_1}^+ f(x^0)]$ функции f в точке x^0 и любого нижнего ε_2–квазидифференциала $D_{\varepsilon_2}^- g(x^0) = [\underline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0), \overline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0)]$ функции g в точке x^0 имеет место включение*

$$\overline{\partial}_{\varepsilon_1}^+ f(x^0) \subset \bigcap_{w^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0)} [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}^+ f(x^0) + \varepsilon_1 B^* +$$

$$+ \overline{\mathrm{cone}}(\underline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\})]. \tag{14.12}$$

Аналогичным образом, переформулируя теорему 14.3, приходим к следующим достаточным условиям локального минимума на множестве Ω для функции f.

Теорема 14.6. *Если существуют нижний ε_1–квазидифференциал $D_{\varepsilon_1}^- f(x^0) = [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}^- f(x^0), \overline{\partial}_{\varepsilon_1}^- f(x^0)]$ функции f в точке x^0, верхний ε_2–квазидифференциал $D_{\varepsilon_2}^- g(x^0) = [\underline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0), \overline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0)]$ функции g в точке x^0 и вещественное число $\delta > \varepsilon_1$ такие, что*

$$\overline{\partial}_{\varepsilon_1}^- f(x^0) + \delta B^* \subset \bigcap_{w^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0) + \varepsilon_2 B^*} [\underline{\partial}_{\varepsilon_1}^- f(x^0) +$$

$$+ \overline{\mathrm{cone}}(\underline{\partial}_{\varepsilon_2}^- g(x^0) - \{w^*\})],$$

то точка x^0 доставляет локальный изолированный минимум функции f на множестве $\Omega = \{x \in X \mid g(x) \leq 0\}$.

Замечание 14.2. Условие (14.12) аналогично условию, полученному в работах [203, 205] для квазидифференцируемых функций f и g.

Замечание 14.3. Условие (14.9) является следствием условия (14.12).

Действительно, так как при любом компактном выпуклом множестве $M \subset X^*$ класс эквивалентности $[M, M]$ является нулевым элементом пространства выпуклых множеств $V(X^*)$, то

$$D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) = [\underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0), \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0)]$$

и

$$D^-_{\varepsilon_2} g(x^0) = [\underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0), \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)].$$

Запишем условие (10.12) для этих представителей ε–квазидифференциалов. В результате получим

$$\overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) \subset \underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_1 B^* +$$

$$+\overline{\mathrm{cone}}(\underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\}) \tag{14.13}$$

для всех $w^* \in \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)$.

Рассмотрим произвольные $x^* \in \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)$ и $z^* \in \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0)$. Возможны два случая: а) $x^* + z^* \in \underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_2 B^*$ и б) $x^* + z^* \notin \underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_2 B^*$. В случае а) выполнение включения

$$x^* + z^* \in \mathrm{conv}[(\underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_2 B^*)\cup$$

$$\cup(\underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_2} g(x^0 + \varepsilon_1 B^*) \tag{14.14}$$

очевидно.

Так как для любого выпуклого компактного множества M, удовлетворяющего условию $0 \notin M$, имеет место равенство $\overline{\mathrm{cone}} M = \mathrm{cone} M$, то в случае б) из (14.13) следует

$$x^* + z^* \in \underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \overline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_1 B^* +$$

$$+\mathrm{cone}(\underline{\partial}^{\,-}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{x^* + z^*\}).$$

Значит, существуют $v_1^* \in \underline{\partial}_{\varepsilon_1}^{\,+} f(x^0) + \overline{\partial}_{\varepsilon_2}^{\,-} g(x^0) + \varepsilon_1 B^*$, $v_2^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_1}^{\,+} f(x^0) + \underline{\partial}_{\varepsilon_2}^{\,-} g(x^0) + \varepsilon_2 B^*$ и вещественное число $\lambda \geq 0$ такие, что $x^* + z^* = v_1^* + \lambda(v_2^* - (x^* + z^*))$, откуда получаем

$$x^* + z^* = \frac{1}{1+\lambda} v_1^* + \frac{\lambda}{1+\lambda} v_2^*.$$

Таким образом, включение (14.14) имеет место и в случае б). Так как рассматривались произвольные $x^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_1}^{\,+} f(x^0)$ и $z^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_2}^{\,-} g(x^0)$, то выполнение условия (14.9) доказано.

Сравним необходимые условия (14.9) и (14.12) с другими известными в математическом программировании необходимыми условиями оптимальности. С этой целью рассмотрим следующий

Пример 14.1. Предположим, что функция f является регулярно локально выпуклой в точке x^0 [126], т. е. в точке x^0 существует равномерная производная по направлениям $df(x^0 \,|\, \cdot)$ и, кроме того, эта производная является выпуклой. Будем предполагать также, что функция g имеет вид $g(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} g_i(x)$, где функции $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, являются регулярно локально выпуклыми в точке x^0 для $i \in I(x^0) = \{i \in \{1, 2, \ldots, m\} |\, g_i(x^0) = g(x^0)\}$.

Пусть $\partial f(x^0)$ и $\partial g_i(x^0)$, $i \in I(x^0)$, — субдифференциалы функций f и g_i, $i \in I(x^0)$, соответственно в точке x^0. Тогда $Df(x^0) = [\partial f(x^0), \{0\}]$ и $Dg(x^0) = [\mathrm{conv}\{\partial g_i(x^0), i \in I(x^0)\}, \{0\}]$ являются соответственно квазидифференциалами функций f и g в точке x^0. Следовательно, для рассматриваемого случая условие (14.9) имеет вид

$$0 \in \mathrm{conv}\{\partial f(x^0), \partial g_i(x^0), i \in I(x^0)\},$$

что эквивалентно существованию векторов $x^* \in \partial f(x^0), x_i^* \in \partial g_i(x^0)$, $i \in I(x^0)$, и вещественных чисел $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0, i \in I(x^0)$, $\lambda_0 + \sum\limits_{i \in I(x^0)} \lambda_i = 1$, таких, что

$$\lambda_0 x^* + \sum_{i \in I(x^0)} \lambda_i x_i^* = 0.$$

Так как функция $dg(x^0|h) = \max\limits_{i \in I(x^0)} dg_i(x^0|h)$, $h \in X$, выпукла, то условие регулярности для ограничения типа неравенства $\Omega = \{x \in X \,|\, \max\limits_{1 \leq i \leq m} g_i(x) \leq 0\}$ в точке x^0 эквивалентно существованию вектора $\overline{h} \in X$ такого, что $dg_i(x^0|\overline{h}) < 0$ для $i \in I(x^0)$.

Необходимое условие (14.12) формулируется в данном случае следующим образом:

$$0 \in \partial f(x^0) + \mathrm{cone}(\mathrm{conv}\{\partial g_i(x^0), i \in I(x^0)\}).$$

Это эквивалентно существованию векторов $x^* \in \partial f(x^0), x_i \in \partial g_i(x^0)$, $i \in I(x^0)$, и вещественных чисел $\lambda_i \geq 0, i \in I(x^0)$, таких, что

$$x^* + \sum_{i \in I(x^0)} \lambda_i x_i^* = 0.$$

Таким образом, необходимые условия (14.9) и (14.12) обобщают соответственно известные в нелинейном программировании условия оптимальности Каруша–Джона [202] и условия оптимальности Куна–Таккера [132, 202, 316].

Замечание 14.4. То, что здесь была рассмотрена задача минимизации только с одним ограничением типа неравенства, на самом деле не сужает общности, поскольку конечное число ограничений $g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m$, можно заменить одним $\max\limits_{1 \leq i \leq m} g_i(x) \leq 0$, не выходя из класса ε–квазидифференцируемых функций.

14.3. Рассмотрим теперь задачу минимизации функции f при ограничении типа равенства $\Omega = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$.

Будем говорить, что в точке $x^0 \in \Omega$ *выполняется условие регулярности для ограничения типа равенства* $\Omega = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$, если

a) функция $g : X \to \mathbb{R}$ равномерно дифференцируема по направлениям в точке x^0;

b) ее равномерная производная $dg(x^0 \mid \cdot) : X \to \mathbb{R}$ не имеет точек локального экстремума (минимума или максимума) на X.

Рассуждая аналогично случаю условий регулярности для ограничения типа неравенства, легко убедиться, что условие б) эквивалентно следующему условию (см. [108]):

b') для любого $h \in X$, удовлетворяющего равенству $dg(x^0|h) = 0$, и любого вещественного числа $\gamma > 0$ существуют векторы $h_1, h_2 \in X$ такие, что $dg(x^0|h_1) < 0, \|h_1 - h\| < \gamma$ и $dg(x^0|h_2) > 0$, $\|h_2 - h\| < \gamma$.

Отметим, что из равномерной дифференцируемоемости функции g в точке x^0 следует ее аппроксимативная квазидифференцируемость в точке x^0. Таким образом, если в точке x^0 выполнено условие регулярности для ограничения типа равенства $\Omega = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$, то функция g обладает ε–квазидифференциалами $D_\varepsilon g(x^0)$ в точке x^0 при любом положительном ε.

Теорема 14.7. *Предположим, что функция f является ε–квазидифференцируемой сверху в точке $x^0 \in \Omega$ и, кроме того, в точке x^0 выполнено условие регулярности для ограничения типа равенства $\Omega = \{x \in X \mid g(x^0) = 0\}$.*

Если точка $x^0 \in \Omega$ доставляет локальный минимум функции f на множестве Ω, то для любого верхнего ε_1–квазидифференциала

$D^+_{\varepsilon_1} f(x^0) = [\underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0), \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)]$ *функции* f *в точке* x^0 *и любого* ε_2 *–квазидифференциала* $D_{\varepsilon_2} g(x^0) = [\underline{\partial}_{\,\varepsilon_2} g(x^0),\ \overline{\partial}_{\varepsilon_2} g(x^0)]$ *функции* g *в точке* x^0 *(при этом вещественное число* $\varepsilon_2 > 0$ *также произвольно) имеет место включение*

$$\overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) \subset \bigcap_{w^* \in \overline{\partial}_{\,\varepsilon_2} g(x^0),\ v^* \in \underline{\partial}_{\,\varepsilon_2} g(x^0)} \Big\{ \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 B^* +$$

$$+ \overline{\mathrm{cone}} \left[(\underline{\partial}_{\,\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\}) \cup (\overline{\partial}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{v^*\}) \right] \Big\} \quad (14.15)$$

Доказательство. Как следует из работы [108], при выполнении условия регулярности для ограничения типа равенства $\Omega = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ в точке $x^0 \in \Omega$ имеет место равенство $T(x^0|\Omega) = \{h \in X \mid dg(x^0|h) = 0\}$.

Покажем, что при любом $z^* \in \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)$ либо система

$$\max_{x^* \in \underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)} \langle h, x^* \rangle - \langle h, z^* \rangle + \varepsilon_1 \|h\| < 0,\ dg(x^0|h) < 0, \qquad (14.16)$$

либо система

$$\max_{x^* \in \underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)} \langle h, x^* \rangle - \langle h, z^* \rangle + \varepsilon_1 \|h\| < 0,\ -dg(x^0|h) < 0 \qquad (14.17)$$

является несовместной.

Рассуждая от противного, предположим, что обе системы совместны и пусть h_1 — решение системы (14.16), а h_2 — решение системы (14.17). Поскольку функция $h \to dg(x^0|h)$ непрерывна по h, то существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $dg(x^0|h_\alpha) = 0$, где $h_\alpha = \alpha h_1 + (1-\alpha) h_2$, и, следовательно, $h_\alpha \in T(x^0|\Omega)$. Так как при любом $z^* \in \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)$ имеет место цепочка неравенств

$$d^+ f(x^0|h_\alpha) \le \max_{x^* \in \underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0)} \langle h_\alpha, x^* \rangle - \langle h_\alpha, z^* \rangle + \varepsilon_1 \|h_\alpha\| \le$$

$$\le \alpha(\max_{x^* \in \underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0)} \langle h_1, x^* \rangle - \langle h_1, z^* \rangle + \varepsilon_1 \|h_1\|) +$$

$$+ (1-\alpha)(\max_{x^* \in \underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0)} \langle h_2, x^* \rangle - \langle h_2, z^* \rangle + \varepsilon_1 \|h_2\|) < 0,$$

то пришли к противоречию с условием (14.3).

Таким образом, при любом $z^* \in \overline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0)$ хотя бы одна из систем (14.16) или (14.17) является несовместной, т. е. функция $\phi([\underline{\partial}^+_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 B^*, \{z^*\}])(h)$ неотрицательна хотя бы на одном из множеств $\{h \in X \mid dg(x^0|h) \le 0\}$ или $\{h \in X \mid -dg(x^0|h) \le 0\}$. Используя далее предложение 10.4, получаем, что либо

$$z^* \in \underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 B^* + \overline{\text{cone}}(\underline{\partial}_{\,\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\})$$

$$\text{для всех } w^* \in \overline{\partial}_{\varepsilon_2} g(x^0),$$

либо

$$z^* \in \underline{\partial}^{\,+}_{\varepsilon_1} f(x^0) + \varepsilon_1 B^* + \overline{\text{cone}}(\overline{\partial}_{\varepsilon_2} g(x^0) + \varepsilon_2 B^* - \{v^*\})$$

$$\text{для всех } v^* \in \underline{\partial}_{\,\varepsilon_2} g(x^0).$$

Отсюда без труда приходим к включению (14.15). Теорема доказана.

Замечание 14.5. По-видимому, впервые при доказательстве необходимых условий минимума для задачи с ограничением типа равенства альтернатива о несовместности двух систем неравенств (типа (14.16) и (14.17)) была рассмотрена в статьях [215, 216].

Замечание 14.6. Для квазидифференцируемых функций задача минимизации функции f при ограничении $g(x) = 0$ рассматривалась в работах [100, 204]. Нетрудно убедиться, что для f и g, дифференцируемых по Фреше, условие (10.14) превращается в классическое условие Лагранжа.

Замечание 14.7. Так как для любой точки x^0 множества $\Omega = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ имеет место включение

$$T(x^0|\Omega) \subset \{h \in X \mid d^- g(x^0|h) \le 0\} \cap \{h \in X \mid d^+ g(x^0|h) \ge 0\},$$

то из предложения 14.2 следует, что каждое из условий:

а) $d^- f(x^0|h) > 0$ для всех $h \ne 0$ таких, что $d^- g(x^0|h) \le 0$;

б) $d^- f(x^0|h) > 0$ для всех $h \ne 0$ таких, что $d^+ g(x^0|h) \le 0$

является достаточным для того, чтобы x^0 доставляла локальный изолированный минимум функции f при ограничении $g(x) = 0$ (выполнение каких-либо условий регулярности не предполагается). Используя теорему 11.5, условия а) и б) можно записать в терминах ε–квазидифференциалов функций f и g в точке x^0.

§ 15. СИММЕТРИЗОВАННОЕ РАССТОЯНИЕ ДО МНОЖЕСТВА

15.1. Пусть Ω — непустое множество в конечномерном евклидовом пространстве X $(\Omega \ne X)$.

Расстоянием от точки $x \in X$ *до множества* Ω называется неотрицательное вещественное число $\rho_\Omega(x) := \inf\limits_{y \in \Omega} \|y - x\|$.

Симметризованным расстоянием от точки $x \in X$ *до множества* Ω будем называть вещественное число $s_\Omega(x)$, определяемое равенством

$$s_\Omega(x) = \inf_{y \in \Omega} \|y - x\| - \inf_{z \in C\Omega} \|z - x\|, \tag{15.1}$$

где $C\Omega = X \setminus \Omega$.

Таким образом, $s_\Omega(x) = \rho_\Omega(x) - \rho_{C\Omega}(x)$ для всех $x \in X$.

Впервые, по-видимому, функция $x \to s_\Omega(x)$ рассматривалась в работе [299] (см. также [300]).

Непосредственно из определения следуют простейшие свойства симметризованного расстояния:

$$s_{C\Omega}(x) = -s_\Omega(x) \text{ для всех } x \in X; \tag{15.2}$$

$$\mathrm{cl}\Omega = \{x \in X \mid s_\Omega(x) \le 0\}; \tag{15.3}$$

$$\mathrm{int}\Omega = \{x \in X \mid s_\Omega(x) < 0\}; \tag{15.4}$$

$$\text{если } \Omega_1 \subset \Omega_2, \text{ то } s_{\Omega_2}(x) \le s_{\Omega_1}(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{15.5}$$

Предложение 15.1. *Функция* $x \to s_\Omega(x)$ *является положительно однородной тогда и только тогда, когда* Ω *— конус в* X.

Доказательство утверждения следует из равенств $\alpha\Omega = \Omega$, $\alpha(C\Omega) = C\Omega$, где α — произвольное положительное вещественное число.

Предложение 15.2. *Функция* $x \to s_\Omega(x)$ *является аффинной (линейной) на* X *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{cl}\Omega$ *является замкнутым полупространством в* X *(удовлетворяющим условию* $0 \in \mathrm{bd}\Omega$).

Доказательство. Необходимость следует из свойства (15.3). Докажем достаточность утверждения. Если $\mathrm{cl}\Omega$ является замкнутым полупространством, то существуют единичный линейный функционал $e^* \in X^*$ и вещественное число β такие, что $\mathrm{cl}\Omega = \{x \in X \mid \langle x, e^*\rangle + \beta \le 0\}$ ($\beta = 0$, если $0 \in \mathrm{bd}\Omega$). Используя далее то, что $s_\Omega(x) \equiv \inf_{y \in \mathrm{cl}\Omega} \|y - x\|$ для $x \notin \mathrm{cl}\Omega$, и $s_\Omega(x) \equiv -\inf_{y \in \mathrm{cl}(C\Omega)} \|y - x\|$ для $x \in \mathrm{cl}\Omega$, получим $s_\Omega(x) = \langle x, e^*\rangle + \beta$ для всех $x \in X$. Предложение доказано.

Предложение 15.3. *Функция* $x \to s_\Omega(x)$ *является выпуклой на* X *тогда и только тогда, когда множество* $\mathrm{cl}\Omega$ *выпукло.*

Доказательство. Необходимость следует из (15.3). Для доказательства достаточности требуется показать, что, каковы бы ни были векторы $x_1, x_2 \in X$ и вещественное число $\alpha \in (0, 1)$, функция $s_\Omega(x)$ удовлетворяет неравенству

$$s_\Omega(x_\alpha) \le s_\Omega(x_1) + (1 - \alpha)s_\Omega(x_2), \tag{15.6}$$

где $x_\alpha := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.

Возможны три существенно различных случая: 1. $x_1, x_2 \in \mathrm{cl}(C\Omega)$; 2. $x_1, x_2 \notin \mathrm{cl}(C\Omega)$; и 3. $x_1 \in \mathrm{cl}(C\Omega), x_2 \notin \mathrm{cl}(C\Omega)$.

1. Пусть $x_1, x_2 \in \mathrm{cl}(C\Omega)$. Если при этом $x_\alpha \in \Omega$, то справедливость неравенства (15.6) следует из того, что $s_\Omega(x) \le 0$ для всех $x \in \Omega$ и $s_\Omega(x) \ge 0$ для всех $x \in \mathrm{cl}(C\Omega)$. Если же $x_\alpha \in C\Omega$, то в силу равенства $s_\Omega(x) = \rho_\Omega(x)$ для всех $x \in C\Omega$ соотношение (15.6) следует из выпуклости функции расстояния $\rho_\Omega(x)$ при выпуклом Ω (см., например, [212, 218]).

2. Пусть $x_1, x_2 \notin \mathrm{cl}(C\Omega)$, тогда $x_1, x_2 \in \Omega$ и вследствие выпуклости Ω имеем также $x_\alpha \in \Omega$. Рассмотрим множество $\Omega_0 := \mathrm{conv}(B(x_1; r_1) \cup B(x_2; r_2))$, где $B(x; r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x, r_1 := \rho_{C\Omega}(x_1), r_2 := \rho_{C\Omega}(x_2)$. Нетрудно видеть, что для любого $\alpha \in [0,1]$ справедливо включение $B(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2; \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) \subset \Omega_0$. Кроме того, из выпуклости множества Ω следует включение $\Omega_0 \subset \mathrm{cl}\Omega$. Сопоставляя эти включения, заключаем, что $\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2 \le \rho_{C\Omega}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$. Так как $s_\Omega(x) = -\rho_{C\Omega}(x)$ для $x \in \Omega$, то из последнего неравенства следует справедливость условия (15.6) для произвольных $x_1, x_2 \in \Omega$.

3. Предположим, что $x_1 \in \mathrm{cl}(C\Omega), x_2 \notin \mathrm{cl}(C\Omega)$. Возможны два случая: $x_\alpha \in \mathrm{cl}(C\Omega)$ и $x_\alpha \notin \mathrm{cl}(C\Omega)$. Пусть имеет место включение $x_\alpha \in \mathrm{cl}(C\Omega)$ и пусть $s_\Omega(x_\alpha) = -\rho_{C\Omega}(x_\alpha) = -\|x_\alpha - y_\alpha\|$, где $y_\alpha \in \mathrm{bd}\Omega$. Символом H_α обозначим гиперплоскость, опорную к множеству Ω в точке y_α. Пусть $\overline{H}_\alpha$ — замкнутое полупространство, ограниченное гиперплоскостью H_α и содержащее множество Ω. Так как $\Omega \subset \overline{H}_\alpha$, то в силу (15.5) имеем

$$s_{\overline{H}_\alpha}(x) \le s_\Omega(x) \text{ для всех } x \in X \tag{15.7}$$

и, кроме того,

$$s_{\overline{H}_\alpha}(x_\alpha) = s_\Omega(x_\alpha). \tag{15.8}$$

Последнее равенство имеет место вследствие того, что гиперплоскость H_α является опорной в точке y_α как к множеству Ω, так и к шару $B(x_\alpha; \rho_{C\Omega}(x_\alpha))$. Так как $s_{\overline{H}_\alpha}(x)$ является аффинной функцией (см. предложение 15.2), то $s_{\overline{H}_\alpha}(x_\alpha) = \alpha s_{\overline{H}_\alpha}(x_1) + (1-\alpha)s_{\overline{H}_\alpha}(x_2)$. Воспользовавшись соотношениями (15.7) и (15.8), получаем из последнего равенства требуемое неравенство (15.6).

Если имеет место случай $x_\alpha \notin \mathrm{cl}(C\Omega)$, то выберем в качестве y_α такой элемент границы $\mathrm{bd}\Omega$, что $s_\Omega(x_\alpha) = \|x_\alpha - y_\alpha\|$. Рассуждая дальше аналогично предыдущему, придем к неравенству (15.6). Предложение доказано.

Объединяя результаты предложений 15.2 и 15.3, получаем

Следствие 15.1. *Функция $x \to s_\Omega(x)$ является сублинейной тогда и только тогда, когда Ω является выпуклым конусом.*

15.2. Рассмотрим далее топологические и дифференциальные свойства функции симметризованного расстояния до множества.

Предложение 15.4. *Функция $x \to s_\Omega(x)$ непрерывна и удовлетворяет на X условию Липшица с константой, равной единице.*

Доказательство. Непрерывность функции $s_\Omega(x)$ следует из тождества $s_\Omega(x) = \rho_\Omega(x) - \rho_{C\Omega}(x), x \in \Omega,$ и непрерывности функции расстояния до множества (см., например, [101, 213]). Для доказательства липшицевости снова рассмотрим три существенно различных случая: 1) $x_1, x_2 \in \Omega$, 2) $x_1, x_2 \in C\Omega$ и 3) $x_1 \in \Omega, x_2 \in C\Omega$. Если имеют место первые два случая, то требуемое утверждение вытекает из липшицевости (с константой 1) функции расстояния до множества [213] и тождеств $s_\Omega(x) \equiv \rho_\Omega(x), x \in C\Omega$, и $s_\Omega(x) \equiv \equiv -\rho_{C\Omega}(x), x \in \Omega$. Если имеет место случай 3), то $|s_\Omega(x_1) - s_\Omega(x_2)| = = |-\rho_{C\Omega}(x_1) - \rho_\Omega(x_2)| = \rho_{C\Omega}(x_1) + \rho_\Omega(x_2)|$. Пусть $z_0 \in \mathrm{bd}\Omega \cap [x_1, x_2]$. Так как $\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - z_0\| + \|z_0 - x_2\|$, то $\rho_{C\Omega}(x_1) + \rho_\Omega(x_2) \leq \leq \|x_1 - z_0\| + \|z_0 - x_2\| = \|x_1 - x_2\|$, что завершает доказательство предложения.

Так как функция $x \to s_\Omega(x)$ является липшицевой (с константой 1), то производные Дини по направлениям $d^- s_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$ и $d^+ s_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$ также являются липшицевыми (с той же константой). Это влечет непрерывность функций $d^- s_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$ и $d^+ s_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$. Кроме того, вследствие липшицевости функции $s_\Omega(x)$ производные Дини $d^- s_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$ и $d^+ s_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$ совпадают соответственно с радиальными полупроизводными по направлениям $s_\Omega^-(x^0 \,|\, \cdot)$ и $s_\Omega^+(x^0 \,|\, \cdot)$ и, следовательно, равномерная производная по направлениям $ds_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$, если она существует, совпадает с обычной производной по направлениям $s'_\Omega(x^0 \,|\, \cdot)$.

Предложение 15.5. *Если точка $x^0 \notin \mathrm{bd}\Omega$, то функция $x \to s_\Omega(x)$ является равномерно дифференцируемой по направлениям в точке x^0, причем*

$$ds_\Omega(x^0|h) = \frac{1}{s_\Omega(x^0)} \min_{y \in M_\Omega(x^0)} \langle h, x^0 - y \rangle, h \in X, \tag{15.9}$$

где $M_\Omega(x^0) = \{y \in \mathrm{bd}\Omega \mid \|x^0 - y\| = |s_\Omega(x^0)|\}$, а $\langle h, x^0 - y \rangle$ понимается как скалярное произведение векторов h и $x^0 - y$ в евклидовом пространстве X.

Доказательство. Так как $x^0 \notin \mathrm{bd}\Omega$, то в некоторой окрестности точки x^0 функция $s_\Omega(x)$ совпадает с одной из функций $\rho_\Omega(x)$ или $-\rho_{C\Omega}(x)$. Воспользовавшись далее результатом Б. Н. Пшеничного [212, глава V, теорема 2.7], относящимся к дифференцируемости по направлениям функции расстояния до множества в точке, лежащей вне замыкания этого множества, а также замечанием, предшествующим формулировке доказываемого предложения, убеждаемся в справедливости утверждения.

Прежде, чем рассмотреть свойства дифференцируемости функции $s_\Omega(x)$ в точках, принадлежащих границе множества Ω, докажем следующее предложение.

Предложение 15.6. *Пусть Ω — непустое множество в X и пусть $x^0 \in \mathrm{cl}\Omega$. Тогда*

а)
$$d^+\rho_\Omega(x^0|h) \le \rho_{I(x^0|\Omega)}(h), x \in X; \tag{15.10}$$

б)
$$d^-\rho_\Omega(x^0|h) = \rho_{T(x^0|\Omega)}(h), x \in X; \tag{15.11}$$

в) *если множество Ω регулярно в точке x^0, т. е. если $T(x^0|\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|\Omega))$, то функция $x \to \rho_\Omega(x)$ равномерно дифференцируема по направлениям в точке x^0 и*

$$d\rho_\Omega(x^0|h) = \rho_{T(x^0|\Omega)}(h) = \rho_{I(x^0|\Omega)}(h), h \in X. \tag{15.12}$$

Доказательство. Так как $d^+\rho_\Omega(x^0|z) = 0$ для любого $z \in I(x^0|\Omega)$, то, воспользовавшись липшицевостью $d^+\rho_\Omega(x^0|\cdot)$, получаем $d^+\rho_\Omega(x^0|h) \le \|h - z\|$ для любых $h \in X$ и любых $z \in I(x^0|\Omega)$, что влечет $d^+\rho_\Omega(x^0|h) \le \inf\limits_{z \in I(x^0|\Omega)} \|h - z\| = \rho_{I(x^0|\Omega)}(h)$ для всех $h \in X$. Таким образом, неравенство (15.10) доказано.

Аналогичным образом из равенства $d^-\rho_\Omega(x^0|z) = 0$ для любого $z \in T(x^0|\Omega)$ получаем

$$d^-\rho_\Omega(x^0|h) \le \rho_{T(x^0|\Omega)}(h), h \in X. \tag{15.13}$$

Для доказательства (15.11) необходимо убедиться в справедливости неравенства, обратного (15.13). Выберем $h \in X$ и последовательность $t_k \to +0$, $k \to \infty$, такую, что

$$d^-\rho_\Omega(x^0|h) = \lim_{k\to\infty} t_k^{-1}\rho_\Omega(x^0 + t_k h).$$

Пусть $\rho_\Omega(x^0+t_k h) = \|(x^0+t_k h)-y_k\|$, где $y_k \in \mathrm{cl}\Omega, k = 1, 2, \dots$ Тогда $d^-\rho_\Omega(x^0|h) = \lim\limits_{k\to\infty} \|h - t_k^{-1}(y_k - x^0)\|$. В силу липшицевости функции $\rho_\Omega(x)$ имеет место неравенство $d^-\rho_\Omega(x^0|h) \le \|h\|$. Следовательно, последовательность $\{t_k^{-1}(y_k - x^0)\}_{k=1}^\infty$ ограничена. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность, обозначение которой отождествим с исходной последовательностью. Пусть $w = \lim\limits_{k\to\infty} t_k^{-1}(y_k - x^0)$, тогда $w \in T(x^0|\Omega)$ и $d^-\rho\Omega(x^0|h) = \|h - w\|$.

Значит, $\rho_{T(x^0|\Omega)}(h) \le \|h-w\| = d^-\rho_\Omega(x^0|h)$. Вследствие произвольного выбора вектора $h \in X$ это завершает доказательство равенства (15.11).

Справедливость утверждения в) очевидным образом следует из неравенства $d^-\rho_\Omega(x^0|h) \le d^+\rho_\Omega(x^0|h), h \in X,$ условия регулярности и соотношений (15.10) и (15.11). Предложение доказано.

Предложение 15.7. *Пусть* $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$. *Тогда*

а) *имеет место следующая цепочка неравенств:*

$$s_{T(x^0|\Omega)}(h) \le d^- s_\Omega(x^0|h) \le \rho_{T(x^0|\Omega)}(h) - \rho_{T(x^0|C\Omega)}(h) \le$$
$$\le d^+ s_\Omega(x^0|h) \le s_{I(x^0|\Omega)}(h), h \in X; \tag{15.14}$$

б) *если множество* Ω *или его дополнение* $C\Omega$ *является регулярным в точке* x^0, *т. е. если выполнено хотя бы одно из равенств* $T(x^0|\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|\Omega))$ *или* $T(x^0|C\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|C\Omega))$, *то функция* $x \to s_\Omega(x)$ *является равномерно дифференцируемой по направлениям в точке* x^0 *и*

$$ds_\Omega(x^0|h) = s_{T(x^0|\Omega)} = -s_{T(x^0|C\Omega)}(h), h \in X. \tag{15.15}$$

Доказательство. а) Воспользовавшись правилами исчисления производных Дини по направлениям (предложение 12.1), из равенств $s_\Omega(x) = \rho_\Omega(x) - \rho_{C\Omega}(x),\ \ x \in X,$ и $\rho_\Omega(x) = s_\Omega(x) + \rho_{C\Omega}(x), x \in X,$ получим

$$d^- s_\Omega(x^0|h) \ge d^-\rho_\Omega(x^0|h) - d^+\rho_{C\Omega}(x^0|h), x \in X, \tag{15.16}$$

и

$$d^-\rho_\Omega(x^0|h) \ge d^- s_\Omega(x^0|h) + d^-\rho_{C\Omega}(x^0|h), h \in X.$$

Из последнего неравенства следует

$$d^- s_\Omega(x^0|h) \le d^-\rho_\Omega(x^0|h) - d^-\rho_{C\Omega}(x^0|h), h \in X. \tag{15.17}$$

Объединяя (15.16) и (15.17), а также используя результаты предложения 15.6, получаем

$$\rho_{T(x^0|\Omega)}(h) - \rho_{I(x^0|C\Omega)}(h) \le d^- s_\Omega(x^0|h) \le$$
$$\le \rho_{T(x^0|\Omega)}(h) - \rho_{T(x^0|C\Omega)}(h), h \in X, \tag{15.18}$$

что эквивалентно вследствие равенства $CT(x^0|\Omega) = I(x^0|C\Omega)$ первым двум неравенствам из (15.14).

Так как неравенства (15.18) имеют место для произвольного множества Ω и точки $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$, то перепишем его для множества $C\Omega$ и учтем, что $s_{C\Omega}(x) = -s_\Omega(x), x \in X$. Поскольку последнее тождество влечет $d^- s_{C\Omega}(x^0|h) = -d^+ s_\Omega(x^0|h), \ h \in X$, то в результате получим

$$\rho_{T(x^0|\Omega)}(h) - \rho_{T(x^0|C\Omega)}(h) \le d^+ s_\Omega(x^0|h) \le$$
$$\le \rho_{I(x^0|\Omega)}(h) - \rho_{T(x^0|C\Omega)}(h), h \in X.$$

Вследствие равенства $T(x^0|C\Omega) = CI(x^0|\Omega)$ это равносильно последним двум равенствам из (15. 14). Таким образом, цепочка неравенств (15.14) доказана полностью.

б) Предположим, что имеет место равенство $T(x^0|\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|\Omega))$. Тогда $s_{T(x^0|\Omega)}(h) = s_{I(x^0|\Omega)}(h), h \in X$, и, следовательно, (15.14) всюду выполняется как равенство. Это влечет равномерную дифференцируемость по направлениям функции $x \to s_\Omega(x)$ в точке x^0 и равенство (15.15). Заметим, что $s_{I(x^0|\Omega)}(h) = -s_{CI(x^0|\Omega)}(h) = -s_{T(x^0|C\Omega)}(h), h \in X$.

Если же имеет место равенство $T(x^0|C\Omega) = \mathrm{cl}(I(x^0|C\Omega))$, то в силу только что доказанного (15.15) выполняется для множества $C\Omega$. Записывая это равенство, получаем

$$ds_{C\Omega}(x^0|h) = -ds_\Omega(x^0|h) = s_{T(x^0|C\Omega)}(h) = -s_{T(x^0|\Omega)}(h), h \in X,$$

откуда заключаем, что (15.15) выполняется и для множества Ω. Этим завершается доказательство предложения.

Предложение 15.8. *Пусть* $x^0 \in \mathrm{bd}\Omega$. *Тогда*

$$T(x^0|\Omega) = \{h \in X | d^- s_\Omega(x^0|h) \le 0\}, \tag{15.19}$$

$$I(x^0|\Omega) = \{h \in X | d^+ s_\Omega(x^0|h) < 0\}. \tag{15.20}$$

Доказательство. Включения

$$T(x^0|\Omega) \supset \{h \in X | d^- s_\Omega(x^0|h) \le 0\}$$

и

$$I(x^0|\Omega) = \{h \in X | d^+ s_\Omega(x^0|h) < 0\}$$

следуют из неравенств (15.14) и свойств (15.3) и (15.4). Предположим, что $h \in T(x^0|\Omega)$. Тогда для любой окрестности $\mathcal{O}(h)$ вектора h и любого вещественного числа $\delta > 0$ найдутся $\overline{z} \in \mathcal{O}(h)$ и $\overline{t} \in (0, \delta)$ такие, что $s_\Omega(x^0 + \overline{t}\overline{z}) \le 0$. Так как $s_\Omega(x^0) = 0$, то

$$d^- s_\Omega(x^0|h) = \sup_{\mathcal{O}(h),\ \delta > 0} \ \inf_{z \in \mathcal{O}(h),\ t \in (0,\delta)} t^{-1} s_\Omega(x^0 + tz) \le 0.$$

Следовательно, $T(x^0|\Omega) \subset \{h \in X | d^- s_\Omega(x^0|h) \le 0\}$, что завершает доказательство равенства (15.19).

Равенство (15.20) является следствием (15.19), если рассмотреть его для множества $C\Omega$. Предложение доказано.

Замечание 15.1. Так как функции $d^- s_\Omega(x^0\,|\,\cdot)$ и $d^+ s_\Omega(x^0\,|\,\cdot)$ являются положительно однородными и непрерывными, то из представлений (15.19) и (15.20) следуют утверждения теоремы 13.1 (а также утверждения теоремы 13.2) о существовании внешних и внутренних ε –квазинормалей к множеству при любом положительном ε.

Глава 4

АППРОКСИМАТИВНАЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В этой главе теория аппроксимативного квазидифференцирования вещественнозначных функций, разработанная в предыдущей главе, распространяется (§ 16, 17) на векторные отображения. В § 18 представлены основные определения, относящиеся к понятию $\precsim$–минимума для векторных отображений. Далее в §§ 19, 20 развивается теория условий оптимальности первого и второго порядков для решений задачи $\precsim$–минимизации негладкого векторного отображения. В качестве приложений этой теории в § 21 получены необходимые, а также достаточные условия оптимальности для решений скалярной задачи нелинейного программирования.

§ 16. РАЗНОСТНО-СУБЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИМ СОПРЯЖЕННЫЕ

16.1. Пусть X и Y — конечномерные евклидовы пространства. Символом $\mathcal{P}(X,Y)$ обозначим банахово пространство положительно однородных непрерывных отображений из X в Y, норма на котором определена равенством

$$\| Q \|_{\mathcal{P}(X,Y)} = \max_{\|x\|_X=1} \|Q(x)\|_Y,$$

где $Q : X \to Y$ — произвольное отображение из $\mathcal{P}(X,Y)$.

Поскольку Y не является априори упорядоченным, то в отличие от $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X,\mathbb{R})$ в общем случае пространство $\mathcal{P}(X,Y)$ также не является упорядоченным.

Выделим в $\mathcal{P}(X,Y)$ векторное подпространство $P(X,Y)$, элементами которого являются отображения из X в Y, представимые в виде линейных комбинаций разностно-сублинейных функций из $P(X)$ с коэффициентами из Y, т. е. отображения вида $x \to \sum\limits_{i=1}^{\mu} q_i(x)a_i$, где $q_i \in P(X)$, $a_i \in Y, i = 1,2,\ldots,\mu$. По аналогии с одномерным случаем будем называть отображения из $P(X,Y)$ *разностно-сублинейными отображениями.* Поскольку X конечномерно, то из теоремы Стоуна–Вейерштрасса следует (см. [32], предложение 5, с. 245), что пространство разностно-сублинейных отображений $P(X,Y)$ плотно в банаховом пространстве $\mathcal{P}(X,Y)$.

Замечание 16.1. Зафиксируем в Y произвольный базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Любое отображение Q из $P(X,Y)$ может быть представлено в данном базисе. Это означает, что для любого отображения $Q \in P(X,Y)$ могут быть найдены разностно-сублинейные функции $q_i \in P(X), i = 1, 2, \dots, m,$ такие, что $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(x) e_i$.

Предложение 16.1. *Пусть X, Y и Z — конечномерные евклидовы пространства. Если отображения $Q : X \to Y$ и $H : Y \to Z$ являются разностно-сублинейными, то их композиция $H \circ Q : X \to Z$ также является разностно-сублинейным отображением.*

Справедливость этого утверждения следует из предложения 10.1.

Пусть Y^* — пространство линейных функционалов, определенных на Y. Из предложения 16.1 следует, что если $Q : X \to Y$ — разностно-сублинейное отображение, то при любом $y^* \in Y^*$ композиция $y^* \circ Q$ является разностно-сублинейной функцией на X. Нетрудно убедиться, что справедливо и обратное: если для некоторого отображения $Q : X \to Y$ композиция $y^* \circ Q$ является разностно-сублинейной функцией при любом $y^* \in Y^*$, то $Q \in P(X,Y)$. Таким образом, имеет место следующее

Предложение 16.2. *Для того чтобы отображение $Q : X \to Y$ принадлежало пространству разностно-сублинейных отображений $P(X,Y)$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $y^* \in Y^*$ вещественнозначная функция $q_{y^*} : x \to \langle Q(x), y^* \rangle$ принадлежала пространству разностно-сублинейных, функций $P(X)$.*

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — билинейная форма, приводящая Y и Y^* в двойственность.

Использование одного и того же символа для обозначения канонических билинейных форм, соответствующих различным двойственностям, не приведет к недоразумениям, поскольку из контекста всегда ясно, о какой двойственности идет речь.

16.2. Пусть $Q : X \to Y$ — разностно-сублинейное отображение из X в Y. Так как при каждом $y^* \in Y^*$ соответствующая ему функция $q_{y^*} : x \to \langle Q(x), y^* \rangle$ принадлежит $P(X)$, то в силу двойственности Минковского ей соответствует однозначно определенный элемент $Q^*(y^*) = [\underline{Q}^*(y^*), \overline{Q}^*(y^*)]$ пространства выпуклых множеств $V(X^*)$ такой, что

$$q_{y^*}(x) = \max_{x^* \in \underline{Q}^*(y^*)} \langle x, x^* \rangle - \max_{x^* \in \overline{Q}^*(y^*)} \langle x, x^* \rangle, x \in X.$$

Следовательно, разностно-сублинейное отображение Q порождает отображение $Q^* : Y^* \to V(X^*)$, определяемое равенством

$$Q^*(y^*) = D(y^* \circ Q) \text{ для всех } y^* \in Y^*,$$

где D — оператор квазидифференцирования разностно-сублинейных функций из $P(X)$.

Так как оператор D является линейным и непрерывным на $P(X)$, то отображение Q^* также линейно и непрерывно, т. е. Q^* принадлежит нормированному пространству $\mathcal{L}(Y^*, V(X^*))$ линейных непрерывных отображений из Y^* в $V(X^*)$.

Отображение $Q^* \in \mathcal{L}(Y^*, V(X^*))$, определенное по заданному разностно-сублинейному отображению $Q \in P(X, Y)$ описанным выше образом, будем называть $*$-*сопряженным* отображению Q. Выбор такого термина оправдывается тем, что в случае, когда Q — линейный оператор, Q^* совпадает с сопряженным оператором в смысле определения, принятого в теории линейных операторов [96, 138, 246].

Обратно, пусть задано отображение $G \in \mathcal{L}(Y^*, V(X^*))$. Положив

$$G^{\triangle}(x) = \sum_{i=1}^{m} \phi(G(e_i^*))(x) e_i, x \in X,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ — некоторый (произвольный) базис в Y, $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*\}$ — дуальный ему базис в Y^*, определим разностно-сублинейное отображение $G^{\triangle} : X \to Y$, которое будем называть $\triangle$-*сопряженным* отображению G.

Если $G \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, т. е. если G — линейный оператор из Y^* в X^*, то $\triangle$-сопряженное ему отображение $G^{\triangle}$ также является линейным оператором из X в Y, причем $G^{\triangle}$ совпадает с оператором, сопряженным G в смысле определения теории линейных операторов.

Для любых $Q \in P(X, Y)$ и $G \in \mathcal{L}(Y^*, V(X^*))$ имеют место соотношения

$$(Q^*)^{\triangle} = Q \text{ и } (G^{\triangle})^* = G.$$

То, что операции $*$- и $\triangle$-сопряжения устанавливают алгебраический изоморфизм пространств $P(X, Y)$ и $\mathcal{L}(Y^*, V(X^*))$, достаточно очевидно. Покажем, что, кроме того, эти соответствия сохраняют норму. Действительно,

$$\|Q\,|\,|_{P(X,Y)} = \max_{\|x\|_X = 1} \|Q(x)\|_Y =$$

$$= \max_{\|x\|_X = 1} \max_{\|y^*\|_{Y^*} = 1} |\langle Q(x), y^*| = \max_{\|y^*\|_{Y^*} = 1} \max_{\|x\|_X = 1} |\phi(Q^*(y^*))(x)| =$$

$$= \max_{\|y^*\|_{Y^*}=1} \|Q^*(y^*)(x)\|_{V(X)} = \|Q^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,V(X^*))}.$$

Таким образом, пространства $P(X,Y)$ и $\mathcal{L}(Y^*,V(X^*))$ изометрически изоморфны.

Если $Y=\mathbb{R}$, то $P(X,\mathbb{R})=P(X)$ и, следовательно, $*$-сопряженными отображениями для разностно-сублинейных функций из $P(X)$ являются линейные отображения из $\mathcal{L}(\mathbb{R},V(X^*))$. Так как любое отображение из $\mathcal{L}(\mathbb{R},V(X^*))$ однозначно определяется его значением в произвольной фиксированной ненулевой точке (скажем, в точке $y^*=1$), то $\mathcal{L}(\mathbb{R},V(X^*))$ может быть отождествлено с $V(X^*)$. Таким образом, для разностно-сублинейных функций из $P(X)$ понятие $*$-сопряженного отображения и понятие квазидифференциала могут быть отождествлены. Это показывает, что соответствие $*$-сопряжения, заданное на пространстве разностно-сублинейных отображений, следует рассматривать как аналог операции квазидифференцирования разностно-сублинейных функций. Операция $\triangle$-сопряжения есть аналог соответствия $\phi : V(X^*) \to P(X)$, обратного квазидифференцированию.

Пусть $Q:X\to Y$ — разностно-сублинейное отображение. В силу предложения 16.1 при любом $A\in V(X^*)$ композиция $\phi(A)\circ Q$ является разностно-сублинейной функцией на X и, следовательно, ей однозначно соответствует квазидифференциал $D(\phi(A)\circ Q)$, принадлежащий $V(X^*)$. Значит, разностно-сублинейное отображение $Q:X\to Y$ определяет $*$-сопряженное отображение Q^* фактически на всем пространстве $V(Y^*)$ при этом $Q^*\in\mathcal{L}(V(Y^*),V(X^*))$. Однако можно ограничиться рассмотрением Q^* как элемента пространства $\mathcal{L}(Y^*,V(X^*))$, поскольку любое отображение из $\mathcal{L}(V(Y^*),V(X^*))$ однозначно определяется своим сужением на Y^*. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим композицию $p\circ Q$ разностно-сублинейного отображения $Q\in P(X,Y)$ и разностно-сублинейной функции $p\in P(Y)$ и найдем формулы, позволяющие вычислять квазидифференциал $D(p\circ Q)$ по значениям $*$-сопряженного отображения Q^* на Y^* и квазидифференциалу Dp.

Зададим в пространстве Y произвольный базис $e_1,\dots,e_m$ и пусть $e_1^*,\dots,e_m^*$ — дуальный ему базис в Y^*. Выберем линейные функционалы $\underline{z}^*,\overline{z}^*\in Y^*$ так, что

$$\underline{z}^* \precsim_{K^*} y^* \precsim_{K^*} \overline{z}^* \text{ для всех } y^*\in\underline{\partial}p\cup\overline{\partial}p, \tag{16.1}$$

где $K^*=\mathrm{coconv}\{e_1^*,e_2^*,\dots,{}_m^*\}$ — выпуклая коническая оболочка линейных функционалов $e_1^*,e_2^*,\dots,{}_m^*$, $Dp=[\underline{\partial}p,\overline{\partial}p]$ — квазидифференциал функции p. Для того чтобы убедиться в существовании линейных функционалов $\underline{z}^*$ и $\overline{z}^*$, удовлетворяющих (16.1), рассмотрим линейный функционал w^*, определенный равенствами $\langle e_i, w^* \rangle = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots m$. Порядковый интервал $[-w^*, w^*] = \{y^* \in Y^* \mid -w^* \precsim_{K^*} y^* \precsim_{K^*} w^*\}$ является выпуклой окрестностью нуля и, следовательно, поглощает компакт $\underline{\partial} p \cup \overline{\partial} p$, т. е. для некоторого $\lambda > 0$ имеет место включение $\underline{\partial} p \cup \overline{\partial} p \subset$ $\subset [-\lambda w^*, \lambda w^*]$. Значит, функционалы $\underline{z}^* = -\lambda w^*$ и $\overline{z}^* = \lambda w^*$ удовлетворяют условию (16.1).

Заметим, что

$$(p \circ Q)(x) = \max_{y^* \in \underline{\partial} p} (\langle Q(x), y^* \rangle + q(x)) - \max_{y^* \in \overline{\partial} p} (\langle Q(x), y^* \rangle + q(x)) \quad (16.2)$$

для любой функции $q : X \to \mathbb{R}$.

Выберем $q(x)$ так, чтобы оба члена (уменьшаемое и вычитаемое) в разности (16.2) являлись сублинейными функциями. Для этого воспользуемся представлением $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(x) e_i$, где $q_i \in P(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$, и пусть $q_i(x) = \underline{q}_i(x) - \overline{q}_i(x)$, где $\underline{q}_i, \overline{q}_i \in \widehat{P}(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$. В соотношении (16.2) положим

$$q(x) = \widetilde{q}(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, \overline{z}^* \rangle \ \overline{q}_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, \underline{z}^* \rangle \ \underline{q}_i(x), x \in X.$$

Вследствие условия (16.1) функция

$$\langle Q(x), y^* \rangle + \widetilde{q}(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, y^* - \underline{z}^* \rangle \ \underline{q}_i(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, \overline{z}^* - y^* \rangle \ \overline{q}_i(x), \quad (16.3)$$

является сублинейной при любом $y^* \in \underline{\partial} p \cup \overline{\partial} p$, а поскольку максимум по семейству сублинейных функций есть сублинейная функция, то

$$\underline{r}(x) = \max_{y^* \in \underline{\partial} p} (\langle Q(x), y^* \rangle + \widetilde{q}(x))$$

и

$$\overline{r}(x) = \max_{y^* \in \overline{\partial} p} (\langle Q(x), y^* \rangle + \widetilde{q}(x))$$

также являются сублинейными функциями. Из равенства $(p \circ Q)(x) = \underline{r}(x) - \overline{r}(x), x \in X$, и соотношения (16.3), используя правила исчисления субдифференциалов [212, 218], нетрудно получить формулы

$$\underline{\partial}(p \circ Q) = \bigcup_{y^* \in \underline{\partial} p} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, y^* - \underline{z}^* \rangle \underline{Q}^*(e_i^*) + \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, \overline{z}^* - y^* \rangle \overline{Q}^*(e_i^*) \Big\} \quad (16.4)$$

$$\overline{\partial}(p\circ Q)=\bigcup_{y^*\in\overline{\partial}p}\Big\{\sum_{i=1}^m\langle e_i,y^*-\underline{z}^*\rangle\underline{Q}^*(e_i^*)+\sum_{i=1}^m\langle e_i,\overline{z}^*-y^*\rangle\overline{Q}^*(e_i^*)\Big\}\quad(16.5)$$

для вычисления квазидифференциала $D(p\circ Q)=[\underline{\partial}(p\circ Q),\overline{\partial}(p\circ Q)]$ композиции $p\circ Q$.

16.3. Пусть $Q:X\to Y$ — произвольное разностно-сублинейное отображение. Зафиксируем в Y произвольный базис $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ и представим Q в этом базисе, т. е. найдем разностно-сублинейные функции $q_i\in P(X),i=1,2,\dots,m,$ такие, что $Q(x)=$ $=\sum\limits_{i=1}^m q_i(x)e_i$. В свою очередь, любая из функций $q_i(x),i=1,2,\dots,m,$ представима в виде $q_i(x)=\underline{q}_{\,i}(x)-\overline{q}_{\,i}(x),x\in X,i=1,2,\dots,m,$ где $\underline{q}_{\,i},\overline{q}_{\,i},i=1,2,\dots,m,$ — сублинейные непрерывные функции из $\widehat{P}(X)$. Положив $\underline{Q}(x)=\sum\limits_{i=1}^m\underline{q}_{\,i}(x)e_i$ и $\overline{Q}(x)=\sum\limits_{i=1}^m\overline{q}_{\,i}(x)e_i,$ получим, что $Q(x)=\underline{Q}(x)-\overline{Q}(x),x\in X.$

Зададим теперь в Y выпуклый конус $K=\mathrm{coconv}\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, являющийся выпуклой конической оболочкой векторов фиксированного в Y базиса $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, и определим посредством него отношение частичного порядка $\leq_K$ на Y, превратив тем самым Y в векторную решетку. Построенные отображения $\underline{Q}:X\to Y$ и $\overline{Q}:X\to Y$ являются K-сублинейными, т. е.

$$\underline{Q}(\lambda x)=\lambda\underline{Q}(x),\overline{Q}(\lambda x)=\lambda\overline{Q}(x),x\in X,\lambda\geq 0;$$

$$\underline{Q}(x_1+x_2)\leq_K\underline{Q}(x_1)+\underline{Q}(x_2),\overline{Q}(x_1+x_2)\leq_K\overline{Q}(x_1)+\overline{Q}(x_2)$$

для всех $x_1,x_2\in X$.

Таким образом, любое отображение из $P(X,Y)$ представимо в виде разности двух K-сублинейных отображений из X в Y (это еще раз оправдывает термин разностно-сублинейные отображения). Заметим, что такое представление неоднозначно и зависит как от выбора базиса $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ в Y, эквивалентного выбору структуры векторной решетки на Y, так и от представления функций $q_i(x),i=1,2,\dots,m,$ в виде разности двух сублинейных функций.

Очевидно, что верно и обратное. Если отображение $Q:X\to Y$ представимо относительно какого-либо миниэдрального конуса K в виде разности двух K-сублинейных отображений, то Q является разностно-сублинейным отображением. Напомним, что выпуклый конус $K\subset Y$ называется миниэдральным, если относительно частичного порядка $\leq_K$, определяемого этим конусом, пространство Y является векторной решеткой.

Таким образом, имеет место следующее утвержхдение

Предложение 16.3. *Отображение $Q : X \to Y$ является разностно-сублинейным тогда и только тогда, когда для любого (достаточно, чтобы для некоторого) миниэдрального конуса $K \subset Y$ найдутся непрерывные K-сублинейные отображения $\underline{Q} : X \to Y$ и $\overline{Q} : X \to Y$ такие, что $Q(x) = \underline{Q}(x) - \overline{Q}(x), x \in X$.*

Пусть $Q : X \to Y$ — разностно-сублинейное отображение и пусть $Q(x) = \underline{Q}(x) - \overline{Q}(x), x \in X,$ — представление Q виде разности двух K-сублинейных отображений, где K — произвольный заданный миниэдральный конус в Y. Пусть

$$\partial\underline{Q} = \{\underline{A} \in \mathcal{L}(X,Y) \,|\, \underline{A}x \leq_K \underline{Q}(x), x \in X\}$$

— опорное множество K-сублинейного отображения $\underline{Q} : X \to Y$;

$$\partial\overline{Q} = \{\overline{A} \in \mathcal{L}(X,Y) \,|\, \overline{A}x \leq_K \overline{Q}(x), x \in X\}$$

— опорное множество K-сублинейного отображения $\overline{Q} : X \to Y$.

Упорядоченную пару $(\partial\underline{Q}, \partial\overline{Q})$, которая составлена соответственно из опорных множеств сублинейных отображений $\underline{Q}$ и $\overline{Q}$, удовлетворяющих равенству $Q(x) = \underline{Q}(x) - \overline{Q}(x), x \in X$, назовем $K-$ *квазиопорой* разностно-сублинейного отображения $Q : X \to Y$.

Так как в рассматриваемом здесь случае X конечномерно, то $\partial\underline{Q}$ и $\partial\overline{Q}$ всегда непусты (см. [222, 239]) и, следовательно, $K-$ квазиопора существует для любого разностно-сублинейного отображения Q и любого миниэдрального конуса K. Заметим, что вследствие неоднозначности представления Q в виде разности двух $K-$ сублинейных отображений $K-$ квазиопора также определяется неоднозначно. Такой неоднозначности можно избежать, используя подходящее отношение эквивалентности и рассматривая в качестве $K-$ квазиопоры класс эквивалентности, содержащий $(\partial\underline{Q}, \partial\overline{Q})$.

Связь между $K-$ квазиопорой $(\partial\underline{Q}, \partial\overline{Q})$ разностно-сублинейного отображения Q и $*$-сопряженным отображением $Q^* : Y^* \to V(X^*)$ задается соотношениями

$$\underline{Q}^*(y^*) = \{\underline{A}^* y^*_+ + \overline{A}^* y^*_- \,|\, \underline{A} \in \partial\underline{Q}, \overline{A} \in \partial\overline{Q}\}, \tag{16.6}$$

$$\overline{Q}^*(y^*) = \{\underline{A}^* y^*_- + \overline{A}^* y^*_+ \,|\, \underline{A} \in \partial\underline{Q}, \overline{A} \in \partial\overline{Q}\}, \tag{16.7}$$

где $\underline{A}^*$ и $\overline{A}^*$ — операторы, сопряженные в смысле теории линейных операторов операторам $\underline{A}$ и $\overline{A}$ соответственно; $y^*_+ = \sup\{y^*, 0\}$ и $y^*_- = \inf\{y^*, 0\}$, при этом супремум и инфимум понимаются в смысле частичного порядка, задаваемого на Y^* конусом

$K^* = \{y^* \in Y^* \mid \langle y, y^* \geq 0$ для всех $y \in K\}$. Так как конус K миниэдрален, то конус K^* также миниэдрален, причем в Y и Y^* существуют взаимно дуальные базисы $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ и $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\}$ такие, что $K = \mathrm{coconv}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ и $K^* = \mathrm{coconv}\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\}$.

Если $y^* \in K^*$, то $y_+^* = y^*, y_-^* = 0$. Значит, для любого $y^* \in K^*$ имеют место равенства $\underline{Q}^*(y^*) = \{\underline{A}^* y^* \mid \underline{A} \in \partial \underline{Q}\}$ и $\overline{Q}^*(y^*) = \{\overline{A}^* y^* \mid \overline{A} \in \partial \overline{Q}\}$, откуда заключаем, что

$$\langle Q(x), y^* \rangle = \sup_{\underline{A} \in \partial \underline{Q}} \langle \underline{A} x, y^* \rangle - \sup_{\overline{A} \in \partial \overline{Q}} \langle \overline{A} x, y^* \rangle, x \in X,$$

для всех $y^* \in K^*$.

Замечание 16.2. Пусть K-замкнутый выпуклый конус в Y такой, что $K \cap (-K) = \{0\}$. Для K-сублинейных операторов $Q : X \to Y$ сужение $*$-сопряженного оператора $Q^* : Y^* \to V(X^*)$ на конус K^*, рассматриваемое как отображение из K^* в $V(X^*)$, совпадает с сопряженным оператором, понятие которого было введено для сублинейных операторов в работах [164, 165, 232].

16.4. Обсудим возможные обобщения понятия разностно-сублинейных отображений на бесконечномерные пространства.

Предположим, что X и Y — бесконечномерные нормированные пространства. Пространство разностно-сублинейных функций $P(X)$ определяется так же, как это было сделано для конечномерного X. Естественно, что некоторые свойства пространства $P(X)$ будут ослаблены или даже утеряны. В частности, в бесконечномерном случае $P(X)$ не будет, вообще говоря, плотным в пространстве положительно однородных непрерывных функций $\mathcal{P}(x)$. Пространство выпуклых множеств $V(X^*)$ также строится аналогичным образом как наименьшее векторное пространство, содержащее полулинейное пространство $\widehat{V}(X^*)$ выпуклых слабых компактов из X^* (подробнее об этом можно найти в [155]).

Пусть $\mathcal{P}(X, Y)$ — пространство положительно однородных непрерывных функций из X в Y.

А. Отображение $Q : X \to Y$, принадлежащее пространству $\mathcal{P}(X, Y)$, назовем *разностно-сублинейным отображением конечного ранга*, если Q представимо в виде линейной комбинации разностно-сублинейных функций из $\mathcal{P}(x)$ с коэффициентами из Y, т. е. если существуют функции $q_i \in P(X)$, $a_i \in Y, i = 1, 2, \ldots, \mu$, такие, что $Q(x) = \sum_{i=1}^{\mu} q_i(x) a_i$ для всех $x \in X$ (натуральное число μ, вообще говоря, свое для каждого Q).

Б. Отображение $Q \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем *разностно-сублинейным* *в слабом смысле*, если для любого $y^* \in Y^*$ композиция $y^* \circ Q$ принадлежит пространству разностно-сублинейных функций $P(X)$.

В. Дополнительно предположим, что пространство Y является нормированной решеткой и, кроме того, что любой непрерывный сублинейный оператор $Q : X \to Y$ обладает непустой опорой, т. е. множество

$$\partial Q = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) \mid Ax \leq Q(x), x \in X\}$$

непусто и

$$Q(x) = \sup_{A \in \partial Q} Ax.$$

В частности, эти требования выполняются, если Y является пространством Канторовича [130, 239].

Разностно-сублинейными отображениями назовем такие отображения из $\mathcal{P}(X, Y)$, которые представимы в виде разности двух сублинейных отображений.

Как следует из предложений 16.2 и 16.3, в конечномерном случае все три определения приводят к одному и тому же понятию.

§ 17. ε-КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И АППРОКСИМАТИВНАЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ

17.1. Пусть X и Y — конечномерные евклидовы пространства, $F : \Omega \to Y$ — отображение, определенное на некотором открытом множестве Ω из X, содержащем точку $x^0 \in \Omega$ и принимающее значения из Y.

Определение 17.1. *Отображение $F : \Omega \to Y$ называется квазидифференцируемым в точке $x^0 \in \Omega$, если*

а) *F дифференцируемо по направлениям в точке x^0, т. е. для всех $h \in X$ существует предел*

$$F^{'}(x^0|h) = \lim_{t \to +0} \frac{F(x^0 + th) - F(x^0)}{t};$$

б) *производная по направлениям $F'(x^0 \,|\, \cdot) : h \to F'(x^0|h)$ является разностно-сублинейным отображением.*

При этом отображение $F'(x^0|\cdot) : X \to Y$ и $*$-сопряженное ему отображение $DF[x^0] : Y^* \to V(X^*)$ будем называть соответственно *квазипроизводной* и *квазидифференциалом отображения F в точке x^0.*

Замечание 17.1. В работах В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [107, 275] квазидифференциалом отображения F в точке x^0 названа K–квазиопора отображения $F'(x^0\,|\,\cdot) : X \to Y$, где K — фиксированный миниэдральный конус в Y, задающий в Y структуру векторной решетки. Соотношения (16.6), (16.7) позволяют установить связь между квазидифференциалом в смысле определения 17.1 и квазидифференциалом Демьянова–Рубинова.

Определение 17.2. *Пусть ε — вещественное неотрицательное число. Отображение $F : \Omega \to Y$ назовем ε–квазидифференцируемым в точке x^0, если*

а) *F дифференцируемо по направлениям в точке x^0;*

б) *существует разностно-сублинейное отображение $F'_\varepsilon(x^0\,|\,\cdot) : X \to Y$ такое, что*

$$\|F'(x^0|h) - F'_\varepsilon(x^0|h)\| \le \varepsilon\|h\| \tag{17.1}$$

для всех $h \in X$.

Отображение $F'_\varepsilon(x^0\,|\,\cdot) : X \to Y$ и $*$-сопряженное ему отображение $D_\varepsilon F[x^0] : Y^* \to V(X^*)$ назовем соответственно *ε–квазипроизводной* и *ε–квазидифференциалом отображения F в точке x^0*.

Заметим, что соотношение (17.1) эквивалентно выполнению неравенства

$$\langle F'(x^0|h), y^*\rangle \le \langle F'_\varepsilon(x^0|h), y^*\rangle + \varepsilon\|h\| \cdot \|y^*\| \tag{17.2}$$

для всех $h \in X$ и всех $y^* \in Y^*$.

Определение 17.3. *Отображение $F : \Omega \to Y$ назовем аппроксимативно квазидифференцируемым в точке $x^0 \in \Omega$, если F является ε–квазидифференцируемым в точке x^0 при любом положительном ε.*

Из определений 17.1 – 17.3 следует, что любое отображение F, квазидифференцируемое в точке x^0, является также аппроксимативно квазидифференцируемым в точке x^0.

Теорема 17.1. *Отображение $F : \Omega \to Y$ является аппроксимативно квазидифференцируемым в точке x^0 тогда и только тогда, когда оно дифференцируемо по направлениям в точке x^0 и его производная по направлениям $F'(x^0\,|\,\cdot) : X \to Y$ непрерывна.*

Следствие 17.1. *Если отображение $F : \Omega \to Y$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке x^0, т. е. если для любого $h \in X$ имеет место равенство*

$$F'(x^0|h) = \lim_{t\to+0,\, z\to h} \frac{F(x^0+tz) - F(x^0)}{t},$$

то отображение F является аппроксимативно квазидифференцируемым в точке x^0.

17.2. Пусть X, Y и Z — конечномерные евклидовы пространства и пусть Ω_X и Ω_Y — открытые множества в пространствах X и Y, соответственно. Рассмотрим непрерывные отображения $F : \Omega_X \to Y$ и $G : \Omega_Y \to Z$ и точку $x^0 \in \Omega_X$. Предположим, что точка $y^0 = F(x^0)$ принадлежит подмножеству Ω_Y. Тогда множество $F^{-1}(\Omega_Y) \cap \Omega_X$ открыто в X и содержит точку x^0. В этом открытом множестве (обозначим его через Ω'_X) определим сложное отображение $W = G \circ F : \Omega'_X \to Z$ и выясним его (ε -) квазидифференциальные свойства в точке x^0 при условии, что составляющие отображения F и G подчинены некоторым требованиям (ε -) квазидифференцируемости в точках x^0 и y^0.

Все предложения о (ε -) квазидифференцируемости сложного отображения, которые будут установлены ниже, базируются на следующем утверждении [126].

Предложение 17.1. *Если отображение $F : \Omega_X \to Y$ (равномерно) дифференцируемо по направлениям в точке x^0, а отображение $G : \Omega_Y \to Z$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $y^0 = F(x^0)$, то сложное отображение $W = G \circ F : \Omega_X' \to Z$ (равномерно) дифференцируемо по направлениям в точке x^0, при этом*

$$W'(x^0|h) = G'(F(x^0) \,|\, F'(x^0|h)) \text{ для всех } h \in X. \tag{17.3}$$

Исходя из методических соображений, доказательство основного результата разобьем на ряд этапов, которые представим здесь в виде самостоятельных утверждений о квазидифференцируемости сложного отображения в некоторых частных случаях.

Теорема 17.2. *Если отображение $F : \Omega_X \to Y$ квазидифференцируемо в точке x^0, а отображение $G : \Omega_Y \to Z$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $y^0 = F(x^0)$, то сложное отображение $W = G \circ F : \Omega_X' \to Z$ аппроксимативно квазидифференцируемо в точке x^0, при этом для любого $\widehat{\varepsilon} > 0$ сложное отображение $h \to G'_\varepsilon(F(x^0) \,|\, F'(x^0|h))$, где $0 < \varepsilon \le \|F'(x^0 \,|\, \cdot)\|^{-1}$, а $G_\varepsilon'(y^0 \,|\, \cdot) : Y \to Z$ — произвольная ε–квазипроизводная отображения G в точке y^0, является $\widehat{\varepsilon}$–квазипроизводной отображения $W = G \circ F$ в точке x^0.*

Доказательство. В силу предложения 17.1 отображение $W = G \circ F$ является дифференцируемым по направлениям в точке y^0 и имеет место равенство (17.3). Зададим произвольное $\widehat{\varepsilon} > 0$ и выберем $\varepsilon : 0 < \varepsilon \le \widehat{\varepsilon} \|F'(x^0|\cdot)\|^{-1}$. Так как отображение G аппроксимативно квазидифференцируемо в точке y^0 (см. следствие 17.1), то для выбранного ε найдется ε–квазипроизводная

$G'_\varepsilon(y^0\,|\,\cdot): Y \to Z$ отображения G в точке y^0. Используя определение ε–квазипроизводной (17.1) и равенство (17.3), получим цепочку неравенств

$$\|W'(x^0|h) - G'_\varepsilon(y^0|F'(x^0|h))\|_Z \le \varepsilon\|F'(x^0|h)\|_Y \le$$
$$\le \|F'(x^0|\cdot)\|_{\mathcal{P}(X,Y)}\|h\|_X \text{ для всех } h \in X,$$

откуда заключаем, что композиция $h \to G'_\varepsilon(y^0|F'(x^0|h))$ является ε–квазипроизводной сложного отображения $W = G \circ F$ в точке x^0. Теорема доказана.

Для формулировки следующего утверждения введем на пространстве разностно-сублинейных функций $P(Y)$ вещественнозначную неотрицательную функцию $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle : p \to \langle\!\langle p\rangle\!\rangle$, определенную равенством

$$\langle\!\langle p\rangle\!\rangle = \inf\{\|\underline{p}\|_{\mathcal{P}(Y)} + \|\overline{p}\|_{\mathcal{P}(Y)}\,|\,(\underline{p},\overline{p}) \in \mathcal{M}(p)\},$$

где $\mathcal{M}(p) = \{(\underline{p},\overline{p}) \in \widehat{P}(Y) \times \widehat{P}(Y)\,|\,p = \underline{p} - \overline{p}\}$.

Покажем, что функция $p \to \langle\!\langle p\rangle\!\rangle$ удовлетворяет на пространстве $P(Y)$ аксиомам нормы.

1. Пусть $p \in P(Y)$ и пусть $\langle\!\langle p\rangle\!\rangle = 0$. Это влечет существование последовательности $(\underline{p}_k, \overline{p}_k) \in \mathcal{M}(p), k = 1, 2, \ldots,$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}(\|\underline{p}_k\|_{\mathcal{P}(Y)} + \|\overline{p}_k\|_{\mathcal{P}(Y)}) = 0$. Из последнего равенства следует $\lim\limits_{k\to\infty}\|\underline{p}_k\|_{\mathcal{P}(Y)} = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\|\overline{p}_k\|_{\mathcal{P}(Y)} = 0$, откуда получаем $\lim\limits_{k\to\infty}\|\underline{p}_k - \overline{p}_k\|_{\mathcal{P}(Y)} = 0$. С другой стороны, $\underline{p}_k - \overline{p}_k = p$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\|\underline{p}_k - \overline{p}_k\|_{\mathcal{P}(Y)} = \|p\|_{\mathcal{P}(Y)}$ В силу единственности предела получаем $\|p\|_{\mathcal{P}(Y)} = 0$, что влечет $p = 0$.

Обратно, если $p = 0$, то $(0, 0) \in \mathcal{M}(Y)$ и, следовательно, $\langle\!\langle p\rangle\!\rangle = 0$. Таким образом, $\langle\!\langle p\rangle\!\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $p = 0$.

2. Пусть $p \in P(Y)$ и пусть λ — произвольное ненулевое вещественное число. Если $(\underline{p}, \overline{p}) \in \mathcal{M}(p)$, то $(\lambda\underline{p}, \lambda\overline{p}) \in \mathcal{M}(\lambda p)$ при $\lambda > 0$ и $(|\lambda|\overline{p}, |\lambda|\underline{p}) \in \mathcal{M}(|\lambda|p)$ при $\lambda < 0$, поэтому $\langle\!\langle\lambda p\rangle\!\rangle \le |\lambda|\langle\!\langle p\rangle\!\rangle$. Верно и обратное неравенство. Действительно, если $(\underline{p}_\lambda, \overline{p}_\lambda) \in \mathcal{M}(\lambda p)$, то $\left(\frac{1}{\lambda}\underline{p}_\lambda, \frac{1}{\lambda}\overline{p}_\lambda\right) \in \mathcal{M}(p)$ при $\lambda > 0$ и $\left(\frac{1}{|\lambda|}\underline{p}_\lambda, \frac{1}{|\lambda|}\overline{p}_\lambda\right) \in \mathcal{M}(p)$ при $\lambda > 0$. Следовательно, $\langle\!\langle p\rangle\!\rangle \le \frac{1}{|\lambda|}\langle\!\langle\lambda p\rangle\!\rangle$. Таким образом, $\langle\lambda p\rangle = |\lambda|\langle\!\langle p\rangle\!\rangle$ для любых $p \in P(Y)$ и $\lambda \in R$ (при $\lambda = 0$ равенство очевидно).

3. Так как $\{(\underline{p}+\underline{q}, \overline{p}+\overline{q})\,|\,(\underline{p},\overline{p}) \in \mathcal{M}(p), (\underline{q},\overline{q}) \in \mathcal{M}(q)\} \subset \mathcal{M}(p+q)$ то

$$\langle\!\langle p+q\rangle\!\rangle = \inf\{\|\underline{s}\| + \|\overline{s}\|\,|\,(\underline{s},\overline{s}) \in \mathcal{M}(p+q)\} \le$$

$$\le \inf\{\|\underline{p}+\underline{q}\| + \|\overline{p}+\overline{q}\| \mid (\underline{p},\overline{p}) \in \mathcal{M}(p), (\underline{q},\overline{q}) \in \mathcal{M}(q)\} \le$$

$$\le \inf\{(\|\underline{p}\| + \|\overline{p}\|) + (\|\underline{q}\| + \|\overline{q}\|) \mid (\underline{p},\overline{p}) \in \mathcal{M}(p), (\underline{q},\overline{q}) \in \mathcal{M}(q)\} =$$

$$= \langle\!\langle p \rangle\!\rangle + \langle\!\langle q \rangle\!\rangle.$$

Итак, функция $p \to \langle\!\langle p \rangle\!\rangle$ является нормой на векторном пространстве разностно-сублинейных функций $P(Y)$.

Так как для любой функции $p \in P(Y)$ и любой пары $(\underline{p},\overline{p}) \in \mathcal{M}(p)$ имеет место соотношение

$$|p(x)| = |\underline{p}(x) - \overline{p}(x)| \le |\underline{p}(x)| + |\overline{p}(x)|, x \in X,$$

то

$$\|p\| \le \langle\!\langle p \rangle\!\rangle \text{ для всех } p \in P(Y).$$

Если же $p \in \widehat{P}(Y)$, то пара $(p, 0) \in \mathcal{M}(p)$ и, следовательно, последнее соотношение выполняется как равенство, т. е.

$$\|p\| = \langle\!\langle p \rangle\!\rangle \text{ для всех } p \in \widehat{P}(Y).$$

Рассмотрим сейчас разностно-сублинейные отображения из пространства $P(Y, Z)$ и определим для них аналогичную функцию $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle : P(Y, Z) \to \mathbb{R}$. Для этого зафиксируем в пространстве Z произвольный базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, составленный из векторов единичной нормы, и для любого отображения $Q \in P(Y, Z)$ положим

$$\langle\!\langle Q \rangle\!\rangle = \max_{1 \le i \le n} \langle\!\langle q_i \rangle\!\rangle,$$

где $q_i \in P(Y), i = l, 2, \ldots, n$, таковы, что $Q(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(y) b_i$, $y \in Y$. Нетрудно убедиться, что функция $Q \to \langle\!\langle Q \rangle\!\rangle$ также является нормой на $P(Y, Z)$.

Теорема 17.3. *Если отображение $F : \Omega_X \to Y$ является ε–квазидифференцируемым в точке $x^0 \in \Omega_X$, а отображение $G : \Omega_Y \to Z$ равномерно квазидифференцируемо в точке $y^0 = F(x^0)$, то сложное отображение $W = G \circ F : \Omega_X^{'} \to Z$ является $\widehat{\varepsilon}$–квазидифференцируемым в точке x^0 при любом $\widehat{\varepsilon} > \varepsilon \langle\!\langle G'(y^0 \mid \cdot) \rangle\!\rangle$, при этом, какая бы ни была ε–квазипроизводная $F_\varepsilon^{'}(x^0 \,|\, \cdot) : X \to Y$ отображения F в точке x^0, композиция $h \to G^{'}(y^0 \mid F_\varepsilon^{'}(x^0|h))$ является $\widehat{\varepsilon}$–квазипроизводной сложного отображения $W = G \circ F$ в точке x^0.*

Доказательство. Свойства отображений F к G обеспечивают дифференцируемость по направлениям сложного отображения $W = G \circ F$ в точке x^0 (следует воспользоваться предложением 17.1), при этом $W'(x^0|h) = G'(y^0 \mid F'(x^0|h))$.

Дальнейшее доказательство разобьем на три этапа.

I. Пусть $Z=\mathbb{R}, G:=g:\Omega_Y\to\mathbb{R}$ и $g'(y^0\,|\,\cdot)\in\widehat{P}(Y)$ т. е. функция $g:\Omega_Y\to\mathbb{R}$ является равномерно локально выпуклой в точке y^0, и пусть $\partial g(y^0)$ — субдифференциал функции g в точке y^0.

Тогда
$$g'(y^0|F'(x^0|h))=\max_{y^*\in\partial g(y^0)}\langle F'(x^0|h),y^*\rangle.$$

Вследствие ε–квазидифференцируемости отображения F в точке x^0 из соотношения (17.2) получаем неравенства
$$-\varepsilon\|h\|\,\|y^*\|+\langle F_\varepsilon^{'}(x^0|h),y^*\rangle\le\langle F'(x^0|h),\,y^*\rangle\le$$
$$\le\langle F_\varepsilon^{'}(x^0|h),y^*\rangle+\varepsilon\|h\|\,\|y^*\|,$$
справедливые для всех $h\in X$ и всех $y^*\in Y^*$. Отсюда в силу неравенств
$$\max_{t\in T}(\gamma(t)-\nu(t)\ge\max_{t\in T}\gamma(t)-\max_{t\in T}\nu(t),$$
$$\max_{t\in T}(\gamma(t)+\nu(t)\le\max_{t\in T}\gamma(t)+\max_{t\in T}\nu(t)$$
имеем
$$g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h))-\varepsilon\|h\|\max_{y^*\in\partial g(y^0)}\|y^*\|\le g'(y^0|F'(x^0|h))\le$$
$$\le g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h))+\varepsilon\|h\|\max_{y^*\in\partial g(y^0)}\|y^*\|,h\in X. \tag{17.4}$$

Так как в рассматриваемом случае $\langle\!\langle g'(y^0\,|\,\cdot)\rangle\!\rangle=\|g'(y^0\,|\,\cdot)\|=$ $=\max\limits_{y^*\in\partial g(y^0)}\|y^*\|$, то из (17.3) заключаем, что $h\to g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h))$ является $\widehat{\varepsilon}$–квазипроизводной отображения $g\circ F$ в точке x^0 при любом $\varepsilon\ge\varepsilon\langle\!\langle g'(y^0|\cdot)\rangle\!\rangle$. Для случая I утверждение теоремы доказано.

II. Пусть $Z=\mathbb{R}, G:=g:\Omega_Y\to\mathbb{R}$ и $g'(y^0|\cdot)\in P(Y)$. Рассмотрим произвольное представление разностно-сублинейной функции $g'(y^0\,|\,\cdot)$ в виде $g'(y^0|\cdot)=\underline{g}'(y^0\,|\,\cdot)-\overline{g}'(y^0\,|\,\cdot)$, где $\underline{g}'(y^0|\cdot),\overline{g}'(y^0|\cdot)\in$ $\in\widehat{P}(Y)$. Воспользовавшись результатом этапа I, для каждой из функций $\underline{g}'(y^0|\cdot)$ и $\overline{g}'(y^0|\cdot)$ получим в силу (17.4) следующие неравенства:
$$\underline{g}'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h))-\varepsilon\|h\|\max_{y^*\in\partial\underline{g}(y^0)}\|y^*\|\le\underline{g}'(y^0|F'(x^0|h))\le$$
$$\le\underline{g}'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h))+\varepsilon\|h\|\max_{y^*\in\partial\underline{g}(y^0)}\|y^*\|,h\in X;$$

$$-\overline{g}'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) - \varepsilon\|h\| \max_{y^*\in\partial\overline{g}(y^0)} \|y^*\| \le -\overline{g}'(y^0|F'(x^0|h)) \le$$

$$\le \overline{g}'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) + \varepsilon\|h\| \max_{y^*\in\partial\overline{g}(y^0)} \|y^*\|, h \in X,$$

где $\partial\underline{g}(y^0)$ и $\partial\overline{g}(y^0)$ являются соответственно субдифференциалами функций $\underline{g}'(y^0|\cdot)$ и $\overline{g}'(y^0|\cdot)$.

Складывая обе цепочки неравенств, придем к соотношениям

$$g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) - \varepsilon(\|\underline{g}'(y^0|\cdot)\| + \|\overline{g}'(y^0|\cdot)\|)\|h\| \le$$

$$\le g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) \le$$

$$\le g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) + \varepsilon(\|\underline{g}'(y^0|\cdot)\| + \|\overline{g}'(y^0|\cdot)\|)\|h\|, h \in X. \qquad (17.5)$$

Поскольку для любого $\delta > 0$ можно указать такие функции $\underline{g}'(y^0\,|\,\cdot)$ и $\overline{g}'(y^0\,|\,\cdot)$ из $\widehat{P}(Y)$, что $g'(y^0|\cdot) = \underline{g}'(y^0|\cdot) - \overline{g}'(y^0|\cdot)$ и $\|\underline{g}'(y^0\,|\,\cdot)\| + \|\overline{g}'(y^0\,|\,\cdot)\| < \langle\!\langle g'(y^0\,|\,\cdot)\rangle\!\rangle + \delta$, то из (17.5) следует

$$|g'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) - g'(y^0\,|\,F'(x^0|h))| \le$$

$$\le \varepsilon(\langle\!\langle g'(y^0|\cdot)\rangle\!\rangle + \delta)\|h\|, h \in X.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ из последнего соотношения заключаем, что функция $h \to g'(y^0\,|\,F_\varepsilon^{'}(x^0|h))$ является $\widehat{\varepsilon}$–квазипроизводной композиции $g\circ F$ в точке x^0 при любом $\widehat{\varepsilon} > \varepsilon\langle\!\langle g'(y^0\,|\,\cdot)\rangle\!\rangle$. Таким образом, справедливость теоремы для случая II доказана.

III. Рассмотрим, наконец, общий случай, сформулированный в условиях теоремы 17.3. Так как $G'(y^0\,|\,\cdot) \in P(Y,Z)$, то найдутся $q_i(\cdot) \in P(Y), i = 1,2,\ldots,n$, такие, что $G'(y^0\,|\,h) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(h)b_i$, где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — базис в Z, о котором шла речь при определении функции $Q \to \langle\!\langle Q\rangle\!\rangle$ на пространстве $P(Y,Z)$. Следовательно,

$$\langle G'(y^0|F'(x^0|h)), z^*\rangle = \sum_{i=1}^{n} q_i(F'(x^0|h))\langle b_i, z^*\rangle \qquad (17.6)$$

для всех $h \in X$ и всех $z^* \in Z^*$.

Рассуждая аналогично случаю II, для любого $1 = 1,2,\ldots,n$ получим

$$|q_i(F'(x^0|h)) - g_i(F_\varepsilon^{'}(x^0|h))| \le \widehat{\varepsilon}_i\|h\|, h \in X,$$

где $\widehat{\varepsilon}_i > \varepsilon\langle\!\langle q_i\rangle\!\rangle$.

Поскольку $\langle b_i, z^*\rangle \le \|z^*\|, i = l,2,\ldots,n$, то из (17.6) получаем

$$\langle G'(y^0|F^{'}(x^0|h)), z^*\rangle \le \langle G'(y^0|F_\varepsilon^{'}(x^0|h)), z^*\rangle + \widehat{\varepsilon}\|h\|\|z^*\|$$

для всех $h \in X$, $z \in Z^*$ и произвольного вещественного числа $\widehat{\varepsilon} > \varepsilon \max\limits_{1 \le i \le n} \langle\!\langle q_i \rangle\!\rangle = \varepsilon \langle\!\langle G(y^0 \,|\, \cdot) \rangle\!\rangle$. Теорема 17.3 доказана полностью.

Теорема 17.4. *Пусть отображение* $F : \Omega_X \to X$ *является* ε*–квазидифференцируемым в точке* $x^0 \in \Omega_X$, *а отображение* $G : \Omega_Y \to Z$ *равномерно дифференцируемо по направлениям в точке* $y^0 = F(x^0)$ *и пусть* $F^{'}_{\varepsilon}(x^0 \,|\, \cdot) : X \to Y$ *— произвольная* ε*–квазипроизводная отображения* F *в точке* x^0, *а* $G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 \,|\, \cdot) : Y \to Z$ *— произвольная* ε_1*–квазипроизводная отображения* G *в точке* y^0 *(*ε_1 *— любое положительное вещественное число). Тогда сложное отображение* $W = G \circ F : \Omega^{'}_X \to Z$ *является* $\widehat{\varepsilon}$*–квазидифференцируемым в точке* x^0 *при любом* $\widehat{\varepsilon} > \varepsilon \langle\!\langle G^{'}_{\varepsilon}(y^0 \,|\, \cdot) \rangle\!\rangle + \varepsilon_1 \| F^{'}_{\varepsilon}(x^0 \,|\, \cdot) \| + \varepsilon\varepsilon_1$, *при этом композиция* $h \to G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 | F^{'}_{\varepsilon}(x^0 | h))$ *является* $\widehat{\varepsilon}$*–квазипроизводной отображения* W *в точке* x^0.

Доказательство. Из определения ε_1–квазипроизводной для отображения G в точке y^0 (точнее, из соотношения (17.2)) имеем

$$\langle G'(y^0 | F^{'}(x^0|h), z^* \rangle \le \langle G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 | F'(x^0|h)), z^* \rangle +$$

$$+ \varepsilon_1 \| F'(x^0|h) \| \, \| z^* \| \tag{17.7}$$

для всех $h \in X$ и всех $z^* \in Z^*$.

Воспользовавшись далее ε–квазидифференцируемостью отображения F в точке x^0, из соотношения (17.1) получим

$$\| F'(x^0|h) \| \le \| F^{'}_{\varepsilon}(x^0|h) \| + \varepsilon \| h \| \le (\| F^{'}_{\varepsilon}(x^0 \,|\, \cdot) \| + \varepsilon) \| h \|, h \in X.$$

Кроме того, аналогично (17.6) можно показать, что неравенство

$$\langle G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 | F^{'}(x^0|h)), z^* \rangle \le \langle G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 | F^{'}_{\varepsilon_1}(x^0|h)), z^* \rangle + \widetilde{\varepsilon} \| h \| \, \| z^* \|$$

имеет место для любых $h \in X$, $z^* \in Z^*$ и произвольного вещественного числа $\widetilde{\varepsilon}$, удовлетворяющего ограничению $\widetilde{\varepsilon} > \varepsilon \langle\!\langle G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 \,|\, \cdot) \rangle\!\rangle$.

Таким образом, из (17.7) следует, что если вещественное число $\widehat{\varepsilon}$ подчинено условию $\widehat{\varepsilon} > \varepsilon \langle\!\langle G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 \,|\, \cdot) \rangle\!\rangle + \varepsilon_1 (\| F^{'}_{\varepsilon}(x^0 \,|\, \cdot) \| + \varepsilon)$, то неравенство

$$\langle G'(y^0 | F^{'}(x^0|h)), z^* \rangle \le \langle G^{'}_{\varepsilon_1}(y^0 | F^{'}_{\varepsilon}(x^0|h)), z^* \rangle + \widehat{\varepsilon} \| h \| \, \| z^* \|$$

имеет место для любых $h \in X$ и $z^* \in Z^*$. Теорема доказана.

Используя теоремы 17.2 – 17.4, можно развить богатое исчисление для ε–квазидифференциалов отображений.

§ 18. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

18.1. Пусть X — топологическое пространство, $\langle Y, \precsim \rangle$ — предупорядоченное векторное пространство, $F : X \to Y$ — отображение из X в Y, Ω — подмножество в X.

Будем говорить, что точка $x^0 \in \Omega$ доставляет на множестве Ω *локальный* $\precsim$*–минимум отображению* F, если существует такая окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0, что $F(x^0)$ является $\precsim$–минимальным вектором в множестве $F(\mathcal{N}(x^0) \cap \Omega)$, т. е. если не существует точки $\overline{x} \in \mathcal{N}(x^0) \cap \Omega$ такой, что $F(\overline{x}) \prec F(x^0)$.

Если же для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки $x^0 \in \Omega$ вектор $F(x^0)$ является слабо $\precsim$–минимальным в множестве $F(\mathcal{N}(x^0) \cap \Omega)$, т. е. не существует точки $\overline{x} \in \mathcal{N}(x^0) \cap \Omega$ такой, что $F(\overline{x}) \prec\!\!\prec F(x^0)$, то будем говорить, что точка x^0 доставляет на множестве Ω *локальный слабый* $\precsim$*–минимум отображению* F.

Определение слабого $\precsim$–минимума для отображения F корректно лишь в том случае, когда множество строго положительных векторов $Y^{\succ\!\!\succ}$ пространства Y непусто. В противном случае отношение $\prec\!\!\prec$ на Y является пустым и, следовательно, любая точка из Ω удовлетворяет требованиям определения. Заметим, что для отображения $F : X \to Y$, принимающего значения в конечномерном предупорядоченном векторном пространстве $\langle Y, \precsim \rangle$, определение слабого локального $\precsim$–минимума всегда корректно.

Наконец, будем говорить, что точка $x^0 \in \Omega$ доставляет на множестве Ω *локальный изолированный* $\precsim$*–минимум отображению* F, если в некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 не существует точки $\overline{x} \in \mathcal{N}(x^0) \cap \Omega, \overline{x} \neq x^0$, такой, что $F(\overline{x}) \precsim F(x^0)$.

Если в данных выше определениях в качестве окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ можно выбрать все пространство X, то будем говорить, что вектор x^0 доставляет на Ω *глобальный (слабый, изолированный)* $\precsim$*–минимум отображению* F. Понятие глобального минимума имеет смысл и в том случае, когда X не является топологическим пространством, поскольку относительно любого множества X можно считать, что на нем задана тривиальная топология $\{\varnothing, X\}$.

В случае, если $Y = \mathbb{R}$ — пространство вещественных чисел, а $Y^+ = \overline{\mathbb{R}}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \geq 0\}$ — подмножество неотрицательных вещественных чисел, то отображение $F : X \to Y$ является вещественнозначной функцией, а понятия локального $\precsim$–минимума и локального слабого $\precsim$–минимума совпадают между собой и сводятся к известному в математическом анализе определению локального минимума для вещественнозначных функций. Понятие локального изолированного $\precsim$–минимума для F также превращается в этом случае в общепринятое понятие локального изолированного минимума для вещественнозначных функций.

В силу включений $Y^{\succ\!\succ} \subset Y^{\succ} \subset Y^{+}$, связывающих множества положительных, существенно положительных и строго положительных векторов предупорядоченного векторного пространства Y, любая локально $\precsim$–минимальная точка отображения F является также локально слабо $\precsim$–минимальной для F. В свою очередь точка, доставляющая отображению F локальный изолированный $\precsim$–минимум, является также точкой локального $\precsim$–минимума для F. Следовательно, любое необходимое условие локального слабого $\precsim$–минимума для отображения F является также необходимым и для точек, доставляющих локальный $\precsim$–минимум или локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению F. Аналогично любое достаточное условие локального изолированного $\precsim$–минимума для отображения F является достаточным для обеспечения локального $\precsim$–минимума и локального слабого $\precsim$–минимума.

18.2. Рассмотрим общую задачу нелинейного программирования (задачу НЛП):

$$\begin{gathered} f_0(x) \to \min, \\ x \in \Omega,\ f_i(x) \le 0, i = 1, 2, \ldots, m', \\ f_i(x) = 0, i = m' + 1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{18.1}$$

где $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, m,$ — вещественнозначные непрерывные функции, определенные на топологическом пространстве X, Ω — заданное множество из X.

Множество

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \,|\, f(x) \le 0, i = 1, 2, \ldots, m', f_i(x) = 0, i = m' + 1, \ldots, m\}$$

называется *множеством допустимых решений* задачи НЛП.

Допустимое решение $x^0 \in \Omega_0$ называется (*изолированным*) *локально оптимальным решением* задачи нелинейного программирования (18.1), если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 неравенство $f_0(x^0) \le f_0(x)$ $(f_0(x^0) < f_0(x))$ выполняется для всех $x \in \Omega_0 \cap \mathcal{N}(x^0), x \ne x^0$.

Предложение 18.1. *Допустимое решение $x^0 \in \Omega_0$ является локально оптимальным решением задачи НЛП (18.1) в том и только том случае, когда x^0 доставляет на множестве Ω локальный $\precsim_1$–минимум отображению $F : x \to (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \in \mathbb{R}^{1+m}$ по сублинейному отношению предпорядка $\precsim_1$, заданному на $\mathbb{R}^{1+m}$ конусом положительных векторов*

$$Y_1^+ = \{y \in \mathbb{R}^{1+m} | y_0 > 0, y_i \ge 0, i \in I_a(x^0); y_i = 0, i = m'+1, \ldots, m\} \cup \{0\},$$

где $I_a(x^0) = \{i \in \{1, 2, \ldots, m'\} \mid f_i(x^0) = 0\}$ *— множество индексов, соответствующих активным в точке* x^0 *ограничениям типа неравенства.*

Доказательство. Заметим, что вследствие непрерывности функций $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, m,$ множество

$$\Omega' = \{x \in X \mid f_i(x) < 0, i \in \{1, 2, \ldots, m'\} \setminus I_a(x^0)\}$$

является открытым в X для любого допустимого решения задачи НЛП $x^0 \in \Omega_0$.

Пусть $x^0 \in \Omega_0$ является локально оптимальным решением задачи НЛП (18.1) и пусть $\mathcal{N}(x^0)$ — окрестность, о которой идет речь в определении локально оптимальных решений задачи НЛП. В противоположность необходимой части утверждения предположим, что x^0 не доставляет на множестве Ω локальный $\precsim_1$–минимум отображению F. Из этого предположения следует, что в окрестности $\mathcal{N}_1(x^0) = \Omega' \cap \mathcal{N}(x^0)$ найдется точка $\overline{x} \in \mathcal{N}_1(x^0) \cap \Omega,$ удовлетворяющая соотношениям $f_0(\overline{x}) < f_0(x^0); f_i(\overline{x}) \leq f_i(x^0), i \in I_a(x^0);$ $f_i(\overline{x}) = f_i(x^0), i = m' + 1, \ldots, m.$ Поскольку, кроме того, $f_i(x^0) = 0$ для всех $i \in I_a(x^0) \cup \{m' + 1, \ldots, m\}$ и $f_i(\overline{x}) < 0$ для $i \in \{1, 2, \ldots, m'\} \setminus I_a(x^0),$ то последние соотношения противоречат тому, что x^0 является локально оптимальным решением задачи НЛП. Полученное противоречие доказывает справедливость необходимой части предложения.

Обратно, пусть x^0 является допустимым решением задачи НЛП, т. е. $x^0 \in \Omega_0,$ и пусть x^0 доставляет локальный $\precsim_1$–минимум отображению F. Тогда для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 система

$$\begin{array}{ll} f_0(x) < f_0(x^0); & \\ f_i(x) \leq f_i(x^0), & i \in I_a(x^0); \\ f_i(x) = f_i(x^0), & i = m' + 1, \ldots, m, \end{array} \tag{18.2}$$

несовместна для $x \in \Omega \cap \mathcal{N}(x^0)$.

Поскольку для любого $x \in \Omega_0 \cap \mathcal{N}(x^0)$ выполнены соотношения

$$\begin{array}{ll} f_i(x) \leq 0 = f_i(x^0), & i \in I_a(x^0); \\ f_i(x) = 0 = f_i(x^0), & i = m' + 1, \ldots, m; \\ x \in \Omega, & \end{array}$$

то из несовместности системы (18.2) заключаем, что $f_0(x) \geq f_0(x^0)$ для всех $x \in \Omega_0 \cap \mathcal{N}(x^0)$. Таким образом, x^0 является локально оптималышм решением задачи НЛП. Доказательство предложения завершено.

Предложение 18.2. *Допустимое решение* $x^0 \in \Omega_0$ *является изолированным локально оптимальным решением задачи НЛП*

(18.1) в том и только том случае, когда x^0 доставляет на множестве Ω локальный изолированный $\precsim_2$ –минимум отображению $F : x \to (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^{1+m}$ по сублинейному отношению предпорядка $\precsim_2$, заданному на $\mathbb{R}^{1+m}$ конусом положительных векторов

$$Y_2^+ = \{y \in \mathbb{R}^{1+m} \mid y_0 \geq 0, y_i \geq 0, i \in I_a(x^0); y_i = 0, i = m' + 1, \ldots, m\}.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего предложения.

18.3. Рассмотрим далее задачу минимизации на множестве $\Omega \subset X$ функции $x \to \max\limits_{i \in I} f_i(x)$, где $f_i : X \to \mathbb{R}, i \in I,$ — вещественнозначные непрерывные функции, определенные на топологическом пространстве X; I — конечное множество индексов, которое отождествим с подмножеством $\{0, 1, \ldots, m\}$ множества целых чисел.

Предложение 18.3. *Для того чтобы точка $x^0 \in \Omega$ доставляла на Ω локальный минимум функции $x \to \max\limits_{i \in I} f_i(x)$, необходимо, а, если $f_i(x^0) = 0$ для всех $i \in I$, то и достаточно, чтобы x^0 доставляла локальный слабый $\precsim_3$ –минимум отображению $F : x \to (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^{1+m}$ по сублинейному отношению предпорядка $\precsim_3$, заданному на $\mathbb{R}^{1+m}$ конусом положительных векторов*

$$Y_3^+ = \{y \in \mathbb{R}^{1+m} \mid y_i \geq 0, i \in I(x^0)\},$$

где $I(x) = \{i \in I \mid f_i(x) = \max\limits_{i \in I} f_i(x)\}$.

Доказательство. Вследствие непрерывности функций $f_i, i \in I$, для любой точки $x^0 \in X$ можно указать окрестность $\overline{\mathcal{N}}(x^0)$ такую, что $I(x) \subset I(x^0)$ для всех $x \in \overline{\mathcal{N}}(x^0)$. Если точка $x^0 \in \Omega$ доставляет на Ω локальный минимум функции $x \to \max\limits_{i \in I} f_i(x)$, то существует окрестность $\mathcal{N}(x^0) \subset \overline{\mathcal{N}}(x^0)$ точки x^0 такая, что

$$\max_{i \in I} f_i(x^0) \leq \max_{i \in I} f_i(x) \text{ для всех } x \in \Omega \cap \mathcal{N}(x^0). \tag{18.3}$$

Предположим, что x^0 не является слабо $\precsim_3$ –минимальной точкой для отображения F. Тогда для некоторой точки $\overline{x} \in \Omega \cap \mathcal{N}(x^0)$ выполняются неравенства $f_i(\overline{x}) < f_i(x^0), i \in I(x^0)$. Поскольку $I(\overline{x}) \subset I(x^0)$, то из последних неравенств получаем $\max\limits_{i \in I} f_i(\overline{x}) < \max\limits_{i \in I} f_i(x^0)$, что противоречит (18.3).

Обратно, если $x^0 \in \Omega$ является слабо $\precsim_3$ –минимальной точкой отображения F, то система неравенств $f_i(x) < f_i(x^0), i \in I(x^0)$, несовместна в некоторой окрестности точки x^0, что равносильно выполнению в этой окрестности неравенства $\max\limits_{i \in I(x^0)} (f_i(x) - f_i(x^0)) \geq 0$.

При выполнении равенств $f_i(x^0) = 0, i \in I$, из последнего равенства получаем $\max\limits_{i \in I} f_i(x) \geq \max\limits_{i \in I} f_i(x^0) = 0$. Предложение доказано.

Предложение 18.4. *Для того чтобы точка $x^0 \in \Omega$ доставляла на Ω локальный изолированный минимум функции $x \to \max\limits_{i \in I} f_i(x)$, необходимо, а если $f_i(x^0) = 0$ для всех $i \in I$, то и достаточно, чтобы x^0 доставляла на Ω локальный изолированный $\precsim_3$ –минимум отображению $F : x \to (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \ \in \mathbb{R}^{1+m}$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущего предложения.

Замечание 18.1. Предложения 18.1 – 18.4 раскрывают общность понятий (слабого, изолированного) $\precsim$–минимума для отображений по отношению к принципам оптимальности распространенных экстремальных задач. Они позволяют рассматривать понятие $\precsim$–минимума для отображений как общее свойство принципов оптимальности частных экстремальных задач, а методику вывода условий минимума для отображений как общую схему, применимую к широкому кругу задач оптимизации.

§ 19. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО $\precsim$–МИНИМУМА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. I

В данном параграфе будет исследован частный случай задачи $\precsim$–минимизации векторного отображения, который фактически имеет место лишь при дополнительном предположении о том, что конус положительных векторов сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ обладает непустой внутренностью. Общий случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

19.1. Пусть X и Y — конечномерные евклидовы пространства и пусть на Y задано сублинейное отношение предпорядка $\precsim$, конус положительных векторов которого есть Y^+. Пусть, кроме того, заданы отображение $F : X \to Y$ и множество $\Omega \subset X$ в пространстве X.

В этом параграфе будем выбирать функциональное представление для сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ и производного от него отношения $\prec\!\!\prec$ в пространстве сублинейных непрерывных функций. Существование такого представления устанавливается в следующем утверждении.

Предложение 19.1. *Для любого сублинейного отношения предпорядка* $\precsim$ *на* Y, *существует сублинейная непрерывная функция* $s_{\precsim} : Y \to \mathbb{R}$ $(\|s_{\precsim}\| = 1)$ *такая, что*

а) *для того чтобы для* $y_1, y_2 \in Y$ *выполнялось соотношение* $y_1 \precsim y_2$, *необходимо, а если конус положительных векторов* Y^+ *замкнут, то и достаточно выполнение неравенства*

$$s_{\precsim}(y_1 - y_2) \le 0;$$

б) *если конус положительных векторов* Y^+ *телесен, то для любых* $y_1, y_2 \in Y$ *соотношение* $y \prec\!\!\prec y_2$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$s_{\precsim}(y_1 - y_2) < 0.$$

Доказательство. Пусть

$$s_{\precsim}(y) = \inf_{z \in Y^+} \|z + y\| - \inf_{z \in Y \setminus Y^+} \|z + y\|, \qquad (19.1)$$

т. е. $s_{\precsim}(y)$ равно симметризованному расстоянию от вектора $-y$ до конуса положительных векторов Y^+. Используя свойства функции симметризованного расстояния (см. § 15), нетрудно проверить выполнение утверждений а) и б) для функции $y \to s_{\precsim}(y)$, определенной равенством (19.1). Предложение доказано.

Замечание 19.1. Если конус положительных векторов Y^+ многогранный, т. е. если

$$Y^+ = \{y \in Y \mid \langle y, a_i^* \rangle \ge 0, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}\}$$

$$(a_i^* \in Y^*, \|a_i^*\| = 1, i \in I),$$

то в предложении 19.1 в качестве функции $y \to s_{\precsim}(y)$ можно выбрать функцию $y \to \max_{i \in I} \langle y, a_i^* \rangle$.

В этом параграфе будем предполагать, что сублинейная непрерывная функция $s_{\precsim} : Y \to \mathbb{R}$, о существовании которой утверждается в предложении 19.1, выбрана и зафиксирована.

Воспользовавшись характеристикой сублинейного отношения предпорядка $\precsim$, данной в предложении 19.1, получим следующие утверждения о редукции задачи $\precsim$–минимизации векторного отображения $F : X \to Y$ к скалярному неравенству.

Предложение 19.2. *Пусть* $x^0 \in \Omega$. *Условие*

$$s_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) > 0 \text{ *для всех* } x \in \Omega \cap \mathcal{N}(x^0), x \ne x^0, \qquad (19.2)$$

где $\mathcal{N}(x^0)$ — некоторая окрестность вектора x^0 в X, является достаточным, а в случае замкнутого конуса положительных векторов Y^+ и необходимым для того, чтобы вектор x^0 доставлял отображению F на множестве Ω локальный изолированный $\precsim$–минимум.

Предложение 19.3. *Если конус положительных векторов Y^+ сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ телесен, то для того, чтобы вектор x^0 доставлял на множестве Ω локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ вектора x^0 выполнялось условие*

$$s_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) \geq 0 \text{ для всех } x \in \Omega \cap \mathcal{N}(x^0). \tag{19.3}$$

Замечание 19.2. Функцию $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ можно рассматривать как обобщение классической функции Лагранжа, широко используемой при формулировке необходимых, а также достаточных условий для решений задач математического программирования. Фактически классическая функция Лагранжа является композицией некоторого субградиента сублинейной функции $y \to s_{\precsim}(y)$ в нуле и отображения $x \to F(x) - F(x^0)$.

Замечание 19.3. Поскольку всякий локальный изолированный $\precsim$–минимум отображения F является в то же время и локальным $\precsim$–минимумом отображения F, то условие (19.2) достаточно для локального $\precsim$–минимума. Аналогично из того, что любой вектор, доставляющий локальный $\precsim$–минимум F, доставляет также и локальный слабый $\precsim$–минимум, следует, что условие (19.3) необходимо для локального $\precsim$–минимума.

Разрыв между достаточным условием (19.2) и необходимым условием (19.3) для точек локального $\precsim$–минимума отображения F вызван тем, что функция $y \to s_{\precsim}(y)$ не является точной характеристикой конуса существенно положительных векторов $Y^{\succ}$ отношения предпорядка $\precsim$: имеют место лишь включения

$$\{y \in Y \,|\, s_{\precsim}(y) < 0\} \subset Y^{\succ} \subset \{y \in Y \,|\, s_{\precsim} \leq 0\}.$$

Поскольку точную характеристику для $Y^{\succ}$ вообще нельзя получить, используя только непрерывные функции, то разрыв между необходимыми и достаточными условиями локального $\precsim$–минимума будет иметь место всякий раз, когда при образовании обобщенной функции Лагранжа в качестве “множителей Лагранжа” выбираются непрерывные функции. Именно по этой причине аналогичная ситуация типична и для нелинейного программирования, где “множителями Лагранжа" при образовании классической функции Лагранжа являются линейные функции.

19.2. Осуществим сейчас локальный анализ неравенств (19.2) и (19.3), используя в качестве аппроксимаций первого порядка для отображения F равномерную производную по направлениям, а для множества Ω — касательный конус.

Теорема 19.1. *Пусть отображение $F : X \to Y$ является равномерно дифференцируемым по направлениям в точке $x^0 \in \Omega$.*

Условие

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h)) > 0 \text{ для всех } h \in T(x^0 \,|\, \Omega), h \neq 0, \tag{19.4}$$

является достаточным для того, чтобы вектор $x^0 \in \Omega$ доставлял на множестве Ω локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению F.

Здесь $T(x^0|\Omega)$ — касательный конус к множеству Ω в точке x^0.

Доказательство. Прежде всего отметим, что функция $y \to s_{\precsim}(y)$ равномерно дифференцируема по направлениям в точке $y = 0$ и $s'_{\precsim}(0|y) = s_{\precsim}(y)$ для всех $y \in Y$. Следовательно, в силу предложения 17.1 и предположений относительно F композиция $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ равномерно дифференцируема по направлениям в точке x^0 и ее производная по направлениям в точке x^0 совпадает с композицией $h \to s_{\precsim}(F'(x^0|h))$. Воспользуемся далее предложением 14.2, из которого заключаем, что условие (19.4) достаточно для того, чтобы вектор $x^0 \in \Omega$ доставлял на множестве Ω локальный изолированный минимум функции $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$, а это, в свою очередь, эквивалентно условию (19.2). Применяя далее предложение 19.2, приходим к требуемому утверждению. Теорема доказана.

Введем в рассмотрение конус

$$K_F(x^0) = \{h \in X \,|\, F'(x^0|h) \precsim 0\},$$

который будем называть *конусом направлений $\precsim$–убывания отображения F в точке x^0.*

Легко видеть, что условие (19.4) эквивалентно равенству

$$K_F(x^0) \cap T(x^0|\Omega) = \{0\}. \tag{19.5}$$

Теорема 19.2. *Пусть конус положительных векторов Y^+ сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ телесен и пусть отображение $F : X \to Y$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке x^0.*

Если вектор $x^0 \in \Omega$ *доставляет на множестве* Ω *локальный слабый* $\precsim$*–минимум отображению* F, *то*

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega). \tag{19.6}$$

Доказательство. Из предложения 19.3 следует, что функция $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ имеет в точке $x^0 \in \Omega$ локальный минимум на множестве Ω. Воспользовавшись далее предложением 14.1 (точнее, условием (14.3)) и равномерной дифференцируемостью по направлениям отображения $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ в точке x^0 (см. доказательство предыдущей теоремы), получим неравенство (19.6). Теорема доказана.

Введем конус

$$SK_F(x^0) = \{h \in X \mid F'(x^0|h) \prec\prec 0\},$$

который назовем *конусом направлений строгого* $\precsim$*–убывания отображения* F *в точке* x^0.

Неравенство (19.6) эквивалентно условию

$$SK_F(x^0) \cap T(x^0|\Omega) = \varnothing, \tag{19.7}$$

которое, следовательно, также является необходимым условием локального слабого $\precsim$–минимума для отображения F на множестве Ω.

Замечание 19.4. Если в теореме 19.2 требование равномерной дифференцируемости по направлениям отображения F в точке x^0 ослабить, заменив его на предположение о дифференцируемости по направлениям отображения F в точке x^0, то вместо условия (19.6) можно доказать необходимость выполнения неравенства

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in A(x^0|\Omega), \tag{19.8}$$

где $A(x^0 \mid \Omega)$ — *конус допустимых направлений множества* Ω *в точке* x^0 [108, 166].

В другой форме условие (19.8) имеет вид

$$SK_F(x^0) \cap A(x^0 \mid \Omega) = \varnothing. \tag{19.9}$$

19.3. Условия (19.4), (19.6) и (19.8) являются прямыми условиями локального изолированного и слабого $\precsim$–минимума отображения F на множестве Ω. Получим соответствующие им дуальные условия, выраженные в терминах ε–квазидифференциалов композиции $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ и внешних ε–квазинормалей множества Ω.

Выясним сначала квазидифференциальные свойства композиции $x \to s_{\precsim}(F(x)-F(x^0))$. Предположим, что отображение F является ε-квазидифференцируемым в точке x^0 при некотором $\varepsilon \geq 0$. Так как $\|s_{\precsim}\| = 1$, то в силу теоремы 17.3 композиция $x \to s_{\precsim}(F(x)-$ $-F(x^0))$ также является ε-квазидифференцируемой в точке x^0 при том же значении параметра ε, причем если $F_\varepsilon^{'}(x^0) : X \to Y$ — произвольная ε-квазипрозводная отображения F в точке x^0, то квазидифференциал $D(s_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) = [\underline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)), \overline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))]$ композиции $s_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)$ является ε-квазидиференциалом функции $x \to s_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ в точке x^0. Квазидифференциал $D(s_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))$ может быть вычислен по формулам (16.4) и (16.5), исходя из субдифференциала $\partial s_{\precsim}$ и ε-квазидифференциала $D_\varepsilon F[x^0] : Y^* \to V(X^*)$ отображения F в точке x^0, соответствующего $F_\varepsilon^{'}(x^0)$ (напомним, что $D_\varepsilon F[x^0]$ определяется как отображение, $*$-сопряженное ε-квазипроизводной $F_\varepsilon^{'}(x^0)$).

Теорема 19.3. *Пусть отображение F является равномерно дифференцируемым по направлениям в точке x^0 и пусть $x^0 \in \Omega$.*

Если для некоторых $\varepsilon_1 \geq 0$ и $\varepsilon_2 \geq 0$ существуют ε_1-квазипроизводная $F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0) : X \to Y$ отображения F в точке x^0, внешняя ε_2-квазинормаль $N_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega) = [\underline{n}_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega), \overline{n}_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega)]$ к множеству Ω в точке x^0 и вещественное число $\delta > \varepsilon_1$ такие, что

$$\overline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)) + \delta B^* \subset$$

$$\subset \bigcap_{w^* \in \overline{n}_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega)+\varepsilon_2 B^*} [\underline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)) + \overline{\mathrm{cone}}(\underline{n}_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega) - \{w^*\})], \quad (19.10)$$

то вектор x^0 доставляет на множестве Ω локальный изолированный $\precsim$-минимум отображению F.

Здесь $D(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)) = [\underline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)), \overline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0))]$ — квазидифференциал композиции $s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)$.

Доказательство. В силу достаточной части теоремы 11.5 условие (19.10) влечет выполнение неравенства

$$s_{\precsim}(F_\varepsilon^{'}(x^0|h)) - \delta\|h\| \geq 0 \quad (19.11)$$

для всех $h \in X$ таких, что

$$\phi(N_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega))(h) - \varepsilon_2\|h\| \leq 0.$$

Из определения внешней ε_2-квазинормали $N_{\varepsilon_2}^{-}(x^0|\Omega)$ и неравенства (19.11) следует

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq (\delta - \varepsilon_1)\|h\| \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega).$$

Так как $\delta > \varepsilon_1,$ то вследствие теоремы 19.1 вектор x^0 доставляет на множестве Ω локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению $F.$ Теорема доказана.

Следствие 19.1. *Пусть отображение F равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0.$ Если для некоторого $\varepsilon \geq 0$ существуют ε–квазипроизводная $F_{\varepsilon}^{'}(x^0) : X \to Y$ отображения F в точке x^0 и вещественное число $\delta > \varepsilon$ такие, что*

$$\overline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon}^{'}(x^0)) + \delta B^* \subset \underline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon}^{'}(x^0)), \tag{19.12}$$

то вектор x^0 доставляет на пространстве X локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению $F.$

Теорема 19.4. *Пусть $\mathrm{int}Y^+ \neq \varnothing$ и пусть отображение F равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0.$*

Если вектор $x^0 \in \Omega$ доставляет на множестве Ω локальный слабый $\precsim$–минимум отображению $F,$ то для любых $\varepsilon_1 > 0,$ $\varepsilon_2 > 0,$ любой ε_1–квазипроизводной $F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0) : X \to Y$ отображения F в точке x^0 и любой внешней ε_2–квазинормали $N_{\varepsilon_2}^{-}(x^0 \,|\, \Omega) = [\underline{n}\,_{\varepsilon_2}^{-}(x^0 \,|\, \Omega), \overline{n}\,_{\varepsilon_2}^{-}(x^0 \,|\, \Omega)]$ к множеству Ω в точке x^0 выполняется включение

$$\overline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)) \subset \bigcap_{w^* \in \overline{n}\,_{\varepsilon_2}^{-}(x^0 | \Omega)} [\underline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon_1}^{'}(x^0)) + \varepsilon_1 B^* +$$

$$+ \overline{\mathrm{cone}}(\underline{n}\,_{\varepsilon_2}^{-}(x^0 | \Omega) + \varepsilon_2 B^* - \{w^*\})]. \tag{19.13}$$

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 19.2, то имеет место неравенство (19.6), из которого получаем

$$s_{\precsim}(F_{\varepsilon}^{'}(x^0 | h)) + \varepsilon_1 \|h\| \geq 0$$

для всех $h \in X$ таких, что

$$\phi(N_{\varepsilon_2}^{-}(x^0 | \Omega))(h) + \varepsilon_2 \|h\| \leq 0.$$

Из предложения 10.4 следует эквивалентность последнего неравенства включению (19.13). Теорема доказана.

Следствие 19.2. *Пусть отображение F является ε–квазидифференцируемым ($\varepsilon \geq 0$) в точке $x^0 \in X$ и пусть $\mathrm{int}\Omega \neq \varnothing.$*

Если точка $x^0 \in X$ доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению $F,$ то для любой ε–квазипроизводной отображения F в точке x^0 имеет место включение

$$\overline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon}^{'}(x^0)) \subset \underline{\partial}(s_{\precsim} \circ F_{\varepsilon}^{'}(x^0)) + \varepsilon B^*. \tag{19.14}$$

Доказательство. Воспользовавшись замечанием 19.4, из (19.8) получаем неравенство

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in X,$$

из которого в силу теоремы 11.3 следует (19.14).

19.4. Предположим, что в исследуемой точке $x^0 \in \Omega$, выполнено необходимое условие (19.6), а достаточное условие (19.4) не выполняется. Для характеристики таких точек получим условия $\precsim$-локального минимума для отображения $F : X \to Y$, выраженные через вторые производные отображения F.

Будем говорить, что отображение $F : X \to Y$ является *дважды дифференцируемым в точке* $x^0 \in X$ *по направлению* $h \in X$ *с отклонением* $w \in X$, если F дифференцируемо в точке x^0 по направлению h и, кроме того, существует предел

$$F''(x^0|h,w) = \lim_{t \to +0} 2t^{-2}(F(x^0 + th + \frac{t^2}{2}w) - F(x^0) - tF'(x^0|h)). \quad (19.15)$$

Вектор $F''(x^0|h,w)$ назовем *второй производной отображения* F *в точке* x^0 *по направлению* h *с отклонением* w.

Если отображение F дважды дифференцируемо в точке x^0 по любому направлению $h \in X$ с любым отклонением $w \in X$, то оно определяет на $X \times X$ отображение $F''(x^0|\cdot,\cdot) : (h,w) \to F''(x^0|h,w)$, которое будем называть *второй производной по направлениям с отклонениями* отображения F в точке x^0.

Понятие второй производной отображения по направлениям с отклонениями введено сравнительно недавно [258, 259], хотя неявно оно использовалось в частных случаях и ранее при выводе необходимых условий оптимальности второго порядка. Более широкое распространение в литературе получило понятие второй производной отображения по направлениям (см., например, [98, с. 95]), которое совпадает с сужением $F''(x^0|\cdot,\cdot) : X \times X \to Y$ на $X \times \{0\}$. Вследствие этого ниже вместо $F''(x^0|h,0)$ будем использовать традиционное для второй производной по направлениям обозначение $F''(x^0|h)$. Использование более узкого понятия второй производной по направлениям объясняется, возможно, тем, что в гладком случае вторая производная по направлениям с отклонениями выражается через первую и вторую производные по направлениям.

Лемма 19.1. *Если отображение* F *строго дифференцируемо в точке* x^0 *и обладает в этой точке второй производной* $F''(x^0|h)$ *по направлению* h, *то при любом* $w \in X$ *отображение* F *является дважды дифференцируемым в точке* x^0 *по направлению* h *с* *отклонением* w, *при этом*

$$F''(x^0|h,w) = F'(x^0)w + F''(x^0|h), w \in X. \qquad (19.16)$$

Здесь $F'(x^0) : X \to Y$ *— строгая производная отображения* F *в точке* x^0.

Отображение $F : X \to Y$ называется *строго дифференцируемым в точке* $x^0 \in X$ [11], если существует линейный оператор $A : X \to Y$, обладающий следующим свойством: для любого вещественного числа $\gamma > 0$ существует окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 в X такая, что

$$\|F(x_1) - F(x_2) - A(x_1 - x_2)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \qquad (19.17)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(x^0)$.

Линейный оператор $A : X \to Y$, удовлетворяющий (19.17), называется *строгой производной отображения* F *в точке* x^0.

Легко убедиться, что строго дифференцируемое в точке x^0 отображение F является также дифференцируемым по Фреше в этой точке, при этом строгая производная и производная Фреше $F'(x^0)$ совпадают.

Доказательство леммы 19.1. Пусть

$$G(t;h,w) = 2(F(x^0 + th + \frac{t^2}{2}w) - F(x^0) - tF'(x^0|h)).$$

Запишем $G(t;h,w)$ в виде

$$G(t;h,w) = 2(F(x^0 + th + \frac{t^2}{2}w) - F(x^0 + th)) +$$

$$+2(F(x^0 + th) - F(x^0) - tF(x^0|h)).$$

Вследствие строгой дифференцируемости отображения F в точке x^0 имеем

$$\lim_{t \to +0} 2t^{-2}(F(x^0 + th + \frac{t^2}{2}w) - F(x^0 + th)) = F'(x^0)w.$$

Кроме того, так как F обладает в точке x^0 второй производной по направлению h, то

$$\lim_{t \to +0} 2t^{-2}(F(x^0 + th) - F(x^0) - tF'(x^0|h)) = F''(x^0|h).$$

Из этого следует существование предела $\lim\limits_{t \to +0} t^{-2}G(t;h,w)$ и справедливость равенства (19.16). Лемма доказана.

Замечание 19.5. Если отображение F дважды дифференцируемо по Фреше в точке x^0, то соотношение (19.16) имеет место без требования строгой дифференцируемости F в точке x^0.

Нетрудно убедиться в том, что сужение второй производной по направлениям с отклонениями $F''(x^0|\cdot,\cdot) : X \times X \to Y$ на $\{0\} \times X$ совпадает с первой производной по направлениям, т. е. имеет место равенство

$$F''(x|0, w) = F'(x^0|w) \text{ для всех } w \in X. \tag{19.18}$$

Отметим также следующее свойство положительной однородности:

$$F''(x^o|\tau h, \tau^2 w) = \tau^2 F''(x^0|h, w) \tag{19.19}$$

для всех h, $w \in X$ и всех $\tau > 0$.

Будем говорить, что вторая производная $F''(x^0|h, w)$ отображения F в точке x^0 по направлению h с отклонением w является *равномерной* (по отклонению), если

$$F''(x^0|h, w) = \lim_{t \to +0, z \to w} 2t^{-2}(F(x^0 + th + \frac{t^2}{2}z) -$$

$$-F(x^0) - tF'(x^0|h)). \tag{19.20}$$

Теорема 19.5. (основное необходимое условие второго порядка). *Пусть конус положительных векторов Y^+ сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ телесен и пусть отображение $F : X \to Y$ обладает в точке x^0 второй производной по направлениям с отклонениями.*

Если вектор $x^0 \in X$ доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то неравенство

$$\max_{y^* \in \partial s_{\precsim}(F'(x^0|h))} \langle F''(x^0|h, w), y^* \rangle \geq 0 \tag{19.21}$$

выполняется для всех $h \in K_F(x^0)$ и всех $w \in X$.

Здесь $\partial s_{\precsim}(F'(x^0|h)) = \{y^* \in \partial s_{\precsim} \mid \langle F'(x^0|h), y^* \rangle = 0\}$.

Доказательство. Зафиксируем $h \in K_F(x^0)$ и $w \in X$. Из предложения 19.3 следует, что

$$s_{\precsim}(F(x^0 + th + \frac{t^2}{2}w) - F(x^0)) \geq 0. \tag{19.22}$$

Так как отображение F обладает в точке x^0 второй производной по направлениям с отклонениями, то из (19.15) и соотношения (19.22) получаем

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h) + \frac{t}{2}(F''(x^0|h, w) + \frac{o_{\,h,w}(t^2)}{t^2})) \geq 0 \tag{19.23}$$

где $t^{-2}o_{h,w}(t^2) \to 0$ при $t \to +0$.

В силу необходимого условия (19.6) и включения $h \in K_F(x^0)$ имеем $s_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0$. Поскольку функция $s_{\precsim}$ равномерно дифференцируема по направлениям (как непрерывная сублинейная функция [126, с. 209]), из условия (19.23) получаем

$$s'_{\precsim}(F'(x^0|h)|F''(x^0|h,w)) \geq 0.$$

Из равенства $\partial s_{\precsim}(y^0) = \{y^* \in \partial s_{\precsim} \mid \langle y^0, y^* \rangle = s_{\precsim}(y^*)\}$, где $\partial s_{\precsim}(y^0)$ — субдифференциал функции $s_{\precsim}$ в точке y^0, следует, что последнее неравенство совпадает с (19.21). Теорема доказана.

Замечание 19.6. Условие (19.21) содержит в себе и необходимое условие первого порядка. Действительно, поскольку $\partial s_{\precsim}(F'(x^0|0)) = \partial s_{\precsim}$, $F''(x^0|\,0,w) = F'(x^0|w)$, то, положив в (19.21) $h = 0$, получим условие

$$s_{\precsim}(F'(x^0|w)) \geq 0 \text{ для всех } w \in X, \tag{19.24}$$

которое совпадает с условием (19.6) для рассматриваемого случая ($\Omega = X$).

Замечание 19.7. Так как $\partial s_{\precsim}(F'(x^0|h)) \subset \partial s_{\precsim}$ для любого $h \in X$, то из условия (19.21) следует неравенство

$$s_{\precsim}(F''(x^0|h,w)) \geq 0 \tag{19.25}$$

для всех $h \in K_F(x^0)$ и всех $w \in X$, которое также можно использовать как необходимое условие локального слабого $\precsim$–минимума. Отметим, что проверка условия (19.25) может быть проще, чем проверка условия (19.21), так как не требует нахождения для каждого $h \in X$ множества $\partial s_{\precsim}(F'(x^0|h))$.

В общем случае, однако, условие (19.25) грубее условия (19.21).

Введем множество

$$\partial_0 s_{\precsim} = \{y^* \in \partial s_{\precsim} \mid \langle F'(x^0|h), y^* \rangle = 0 \text{ для всех } h \in K_F(x^0)\}.$$

Очевидно, что $\partial_0 s_{\precsim} \subset \partial s_{\precsim}(F'(x^0|h))$ для любого $h \in K_F(x^0)$. Получим достаточное условие непустоты множества $\partial_0 s_{\precsim}$. Для этого рассмотрим множество

$$Q(x^0) = \{y = F'(x^0|h) \mid h \in K_F(x^0)\}.$$

Предложение 19.4. *Если выполнено условие (19.24) и конус $Q(x^0)$ является выпуклым, то множество $\partial_0 s_{\precsim}$ непусто и для любого $h \in K_F(x^0)$ такого, что $F'(x^0|h) \in \mathrm{ri}Q(x^0)$, имеет место равенство*

$$\partial_0 s_{\precsim} = \partial s_{\precsim}(F'(x^0|h)). \tag{19.26}$$

Доказательство. Так как $\Omega(x^0)$ является выпуклым подмножеством конечномерного евклидового пространства Y, то $\mathrm{ri}Q(x^0) \neq \varnothing$ и, следовательно, множество векторов $h \in K_F(x^0)$, удовлетворяющих условию $F'(x^0|h) \in \mathrm{ri}Q(x^0)$, также непусто. Поэтому для доказательства предложения достаточно установить равенство (19.26), из которого будет следовать и непустота множества $\partial_0 s_{\precsim}$.

Пусть $\overline{h} \in K_F(x^0)$ и пусть $\overline{y} = F'(x^0|\overline{h}) \in \mathrm{ri}Q(x^0)$. В силу последнего включения для любого $h \in K_F(x^0)$ существует $\delta > 0$ такое, что $\overline{y} + tF'(x^0|h) \in Q(x^0)$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$. Поскольку $Q(x^0) \subset -Y^+$, то $\langle \overline{y} + tF'(x^0|h), y^* \rangle$ для всех $y^* \in \partial s_{\precsim}$ и всех $t \in (-\delta, \delta)$. Если же $y^* \in \partial s_{\precsim}(F'(x^0|\overline{h}))$, то $\langle \overline{y}, y^* \rangle = 0$. Следовательно, $t\langle F'(x^0|h), y^* \rangle \leq 0$ для всех $y^* \in \partial s_{\precsim}(F'(x^0|\overline{h}))$ и всех $t \in (-\delta, \delta)$. Таким образом, при любом $y^* \in \partial s_{\precsim}(F'(x^0|h))$ равенство $\langle F'(x^0|h), y^* \rangle = 0$ имеет место для всех $h \in K_F(x^0)$. Значит, $\partial s_{\precsim}(F'(x^0|\overline{h})) \subset \partial_0 s_{\precsim}$. Поскольку обратное включение очевидно, то равенство (19.26) доказано. Этим завершается и доказательство предложения в целом.

Будем говорить, что отображение $F : X \to Y$ удовлетворяет в точке $x^0 \in X$ *второму условию регулярности относительно отношения предпорядка* $\precsim$, если

а) конус $Q(x^0)$ является выпуклым;

б) для любого $h \in K_F(x^0)$ такого, что $F'(x^0|h) \notin \mathrm{ri}Q(x^0)$, существует сходящаяся к h последовательность $h_i \in K_F(x^0)$, $i = 1, 2, \ldots$ такая, что $F'(x^0|h_i) \in \mathrm{ri}Q(x^0), i = l, 2, \ldots$;

в) отображение F обладает в точке x^0 второй производной по направлениям с отклонениями, причем отображение $F''(x^0|\cdot, w) : h \to F''(x^0|h, w)$ является непрерывным при любом $w \in X$.

Нетрудно убедиться в том, что требования а) и б) выполнены, если отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x^0. Если же F дважды дифференцируемо по Фреше в точке x^0, то выполнено и условие в).

Теорема 19.6. *Пусть конус положительных векторов Y^+ сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ телесен и пусть отображение $F : X \to Y$ удовлетворяет в точке x^0 второму условию регулярности относительно $\precsim$.*

Если вектор $x^0 \in X$ доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$-минимум отображению F, то неравенство

$$\max_{y^* \in \partial_0 s_{\precsim}} \langle F''(x^0|h, w), y^* \rangle \geq 0 \tag{19.27}$$

выполняется для всех $h \in K_F(x^0)$ *и всех* $w \in X$.

Доказательство. В силу предложения 19.4 для векторов $h \in K_F(x^0)$, удовлетворяющих условию $F'(x^0|h) \in \mathrm{ri}Q(x^0)$, имеем $\partial_0 s_{\precsim} = \partial s_{\precsim}(F'(x^0|h))$. Следовательно, в этом случае (19.27) совпадает с (19.21). Рассмотрим вектор $h \in K_F(x^0)$ такой, что $F'(x^0|h) \notin \notin \mathrm{ri}Q(x^0)$. Так как отображение F удовлетворяет в точке x^0 второму условию регулярности относительно $\precsim$, то в силу требования б) существует сходящаяся к h последовательность $h_i \in K_F(x^0)$ такая, что $F'(x|h_i) \in \mathrm{ri}Q(x^0), i = 1, 2, \ldots$ Поскольку для каждого $i = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\max_{y^* \in \partial_0 s_{\precsim}} \langle F''(x^0|h_i, w), y^* \rangle \geq 0,$$

то вследствие условия в) получим в пределе неравенство (19.27). Теорема доказана.

При доказательстве следующего необходимого условия используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 19.2. *Пусть* $s : Y \to \mathbb{R}$ *— непрерывная сублинейная функция на* $Y, A : X \to Y$ *— линейный оператор из* X *в* Y, b *— фиксированный вектор из* Y. *Неравенство*

$$s(Ax + b) \geq 0 \text{ для всех } x \in X \tag{19.28}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\partial_A s = \{y^* \in \partial s \,|\, A^* y^* = 0\} \neq \varnothing \tag{19.29}$$

$$\max_{y^* \in \partial_A s} \langle b, y^* \rangle \geq 0. \tag{19.30}$$

Здесь $A^* : Y^* \to X^*$ *— линейный оператор, сопряженный оператору* A.

Доказательство этой леммы можно получить из результатов выпуклого анализа [160].

Теорема 19.7. *Пусть конус положительных векторов* Y^+ *сублинейного отношения предпорядка* $\precsim$ *телесен и пусть в точке* $x^0 \in X$ *отображение* F *строго дифференцируемо и обладает второй производной по направлениям* $F''(x^0\,|\,\cdot) : h \to F''(x^0|h)$.

Если вектор $x^0 \in X$ *доставляет на пространстве* X *локальный слабый* $\precsim$*–минимум отображению* F, *то множество*

$$\partial_{F'(x^0)} s_{\precsim} = \{y^* \in \partial s_{\precsim} | (F'(x^0))^* y^* = 0\}$$

непусто и

$$\max_{y^* \in \partial_{F'(x^0)} s_{\precsim}} \langle F''(x^0|h), y^* \rangle \geq 0 \tag{19.31}$$

для всех $h \in K_F(x^0)$.

Здесь $F'(x^0) : X \to Y$ *— строгая производная отображения* F *в точке* x^0.

Доказательство. Воспользовавшись представлением (19.16) из леммы 19.1, получим из основного необходимого условия второго порядка (19.21) (а точнее, из соотношения (19.25)), что неравенство

$$s_{\precsim}(F'(x^0)w + F''(x^0|h)) \geq 0$$

справедливо для всех $h \in K_F(x^0)$ и всех $w \in X$. Применив далее лемму 19.2 (для каждого $h \in K_F(x^0)$) придем к утверждению теоремы.

Замечание 19.8. Непустота множества $\partial_{F'(x^0)} s_{\precsim}$ является двойственным эквивалентом неравенства

$$s_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in X,$$

выполнение которого является необходимым условием первого порядка для точек локального слабого $\precsim$–минимума отображения F (см. теорему 19.2). Отметим, что в теореме 19.7 это условие доказано вновь независимо от предыдущих результатов.

Замечание 19.9. Утверждение теоремы 19.7 останется справедливым, если предположения относительно F заменить требованием, что F дважды дифференцируемо по Фреше. В следующем параграфе будет показано, что при выполнении этого требования "усиленное" неравенство (19.31) (усиление состоит в замене знака $\geq$ на строгое неравенство $>$ для $h \neq 0$) является достаточным условием локального изолированного $\precsim$–минимума.

§ 20. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО $\precsim$–МИНИМУМА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. II

Продолжим вывод условий локального $\precsim$–минимума для отображения $F : X \to Y$ на множестве $\Omega \subset X$. Как и в предыдущем параграфе, будем предполагать, что X и Y — конечномерные евклидовы пространства, причем на Y задано сублинейное отношение предпорядка $\precsim$. Основная цель настоящего параграфа — получить условия локального $\precsim$–минимума без предположения о телесности конуса положительных векторов Y^+ отношения предпорядка $\precsim$.

20.1. Получим такое функциональное представление для сублинейного отношения предпорядка $\precsim$, которое характеризовало бы производное отношение $\prec\!\!\prec$ и в том случае, когда конус положительных векторов Y^+ не является телесным.

Предложение 20.1. *Для любого сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ на Y, существуют сублинейная непрерывная функция $\sigma : Y \to \mathbb{R}$ $(\|\sigma_{\precsim}\| = 1)$ и оператор проектирования $P_{\precsim} : Y \to Y$ такие, что*

а) *для того чтобы для $y_1, y_2 \in Y$ выполнялось соотношение $y_1 \precsim y_2$, необходимо, а, если конус положительных векторов Y^+ замкнут, то и достаточно выполнение соотношений*

$$\sigma_{\precsim}(y_1 - y_2) \leq 0, P_{\precsim}(y_1 - y_2) = 0; \tag{20.1}$$

б) *для любых $y_1, y_2 \in Y$ соотношение $y_1 \prec\!\!\prec y_2$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_{\precsim}(y_1 - y_2) = 0, P_{\precsim}(y_1 - y_2) = 0. \tag{20.2}$$

Доказательство. Пусть $M = Y^+ - Y^+$ — линейная оболочка конуса положительных векторов Y^+. Если $\mathrm{int}Y^+ = \varnothing$, то $\mathrm{codim}M = m > 0$ и, следовательно, в Y существует нетривиальное векторное подпространство L, являющееся ортогональным дополнением M. Алгебраическая сумма $Y^+ + L = \{y + v \,|\, y \in Y^+, v \in L\}$ является телесным выпуклым конусом, причем

$$\mathrm{cl}Y^+ = \mathrm{cl}(Y^+ + L) \cap M,\ \mathrm{ri}Y^+ = \mathrm{int}(Y^+ + L) \cap M. \tag{20.3}$$

Введем функцию

$$y \to \sigma_{\precsim}(y) = \inf_{z \in Y^+ + L} \|z + y\| - \inf_{z \in Y \setminus (Y^+ + L)} \|z + y\|,$$

ставящую в соответствие каждому вектору $y \in Y$ симметризованное расстояние от вектора $-y$ до множества $Y^+ + L$, и линейный оператор $P_{\precsim} : Y \to Y$, являющийся оператором ортогонального проектирования на векторное подпространство L.

Поскольку $M = \{y \in Y | P_{\precsim} y = 0\}$, то из равенств (20.3) и свойств (15.3), (15.4) симметризованного расстояния (§ 15) следует

$$\mathrm{cl}Y^+ = \{y \in Y \,|\, \sigma_{\precsim}(-y) \leq 0, P_{\precsim}(y) = 0\},$$

$$\mathrm{ri}Y^+ = \{y \in Y \,|\, \sigma_{\precsim}(-y) < 0, P_{\precsim}(y) = 0\}.$$

Используя эти равенства, нетрудно проверить выполнение утверждений а) и б) предложения 20.1 для таким образом введенных функции $\sigma_{\precsim} : Y \to \mathbb{R}$ и оператора $P_{\precsim} : Y \to Y$.

Характеристика сублинейного отношения предпорядка $\precsim$, данная в предложении 20.1, позволяет получить следующие утверждения о редукции задачи $\precsim$–минимизации векторного отображения $F : X \to Y$.

Предложение 20.2. *Для того чтобы вектор $x^0 \in \Omega$ доставлял на множестве $\Omega \subset X$ локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению $F : X \to Y$, достаточно, а если конус положительных векторов Y^+ сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ замкнут, то и необходимо, чтобы для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ вектора x^0 выполнялось условие*

$$\sigma_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) > 0 \text{ для всех } x \in \mathcal{N}(x^0) \cap \Omega(x^0), x \neq x^0, \tag{20.4}$$

где

$$\Omega(x^0) = \{x \in \Omega \mid P_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) = 0\}. \tag{20.5}$$

Предложение 20.3. *Для того чтобы вектор $x^0 \in \Omega$ доставлял на множестве $\Omega \subset X$ локальный слабый $\precsim$–минимум отображению $F : X \to Y$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ вектора x^0 выполнялось условие*

$$\sigma_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathcal{N}(x^0) \cap \Omega(x^0). \tag{20.6}$$

Условия (20.5) и (20.6) совпадают по форме с условиями (19.2) и (19.3). Рассуждая далее по схеме предыдущего параграфа, получим условия первого порядка для точек локального $\precsim$–минимума отображения F на множестве Ω.

Теорема 20.1. *Пусть отображение F является равномерно дифференцируемым по направлениям в точке x^0 :*

а) *условие*

$$\sigma_{\precsim}(F'(x^0|h)) > 0 \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega(x^0)), h \neq 0, \tag{20.7}$$

является достаточным для того, чтобы вектор $x^0 \in \Omega$ доставлял на множестве Ω локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению F;

б) *если вектор $x^0 \in \Omega$ доставляет на множестве Ω локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то*

$$\sigma_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(x^0 \mid \Omega(x^0)). \tag{20.8}$$

20.2. Использование условий локального $\precsim$–минимума, данных в теореме 20.1, затруднено отсутствием стандартных методов нахождения касательного конуса $T(x^0 \,|\, \Omega(x^0))$ (даже при известном $T(x^0 \,|\, \Omega)$). Поэтому выясним, какие следствия можно получить из этой теоремы, если воспользоваться тем, что в определение можества $\Omega(x^0)$ входит операторное ограничение $P_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) = 0$.

Так как $\Omega(x^0) = \Omega \cap E(x^0)$, где $E(x^0) = \{x \in X \,|\, P_{\precsim}(F(x)- -F(x^0)) = 0\}$, то из общих свойств касательных конусов (см., например, [166]) следует включение

$$T(x^0 \,|\, \Omega(x^0)) \subset T(x^0|\Omega) \cap T(x^0|E(x^0)). \tag{20.9}$$

Кроме того, имеет место следующая

Лемма 20.1. *Пусть отображение $G : X \to Y$ обладает в точке $x^0 \in X$ равномерной производной по направлениям и пусть задано множество*

$$E_G(x^0) = \{x \in X \,|\, G(x) = G(x^0)\}.$$

Тогда

$$T(x^0|E_G(x^0)) \subset \{h \in X \,|\, G'(x^0|h) = 0\}.$$

Доказательство. Пусть $h \in T(x^0|E_G(x^0))$. Из равномерной дифференцируемости по направлениям отображения G в точке x^0 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $\mathcal{N}_\varepsilon(h)$ вектора h и число $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\|t^{-l}(G(x^0 + tz) - G(x^0)) - G'(x^0|h)\| < \varepsilon \tag{20.10}$$

для всех $z \in \mathcal{N}_\varepsilon(h)$ и $t \in (0, \delta(\varepsilon))$.

Поскольку $h \in T(x^0|E_G(x^0))$, то найдутся $z(\varepsilon) \in \mathcal{N}_\varepsilon(h)$ и $t(\varepsilon) \in (0, \delta(\varepsilon))$, удовлетворяющие равенству $G(x^0{+}t(\varepsilon)z(\varepsilon)) = G(x^0)$. Следовательно, положив в (20.10) $t = t(\varepsilon), z = z(\varepsilon)$, получим $\|G'(x^0|h)\| < \varepsilon$, что равносильно вследствие произвольного выбора $\varepsilon > 0$ равенству $G'(x^0|h) = 0$. Лемма доказана.

Таким образом, из включения (20.9) и леммы 20.1 заключаем, что если отображение F является равномерно дифференцируемым по направлениям в точке x^0, то

$$T(x^0 \,|\, \Omega(x^0)) \subset T(x^0 \,|\, \Omega) \cap \{h \in X \,|\, P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0\}. \tag{20.11}$$

Это включение можно использовать для того, чтобы получить следствие из достаточного условия, сформулированного в утверждении а) теоремы 20.1. Действительно, если в (20.7) множество $T(x^0 \,|\, \Omega(x^0))$ заменить на содержащее его множество

$T(x^0 \,|\, \Omega) \cap \{h \in X \,|\, P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0\}$, то полученное при этом условие также будет достаточным для локального изолированного $\precsim$–минимума. Нетрудно убедиться, что это условие содержательно совпадает с условием теоремы 19.1.

В самом деле, заменив в (20.7) $T(x^0|\Omega(x^0))$ на пересечение $T(x^0 \,|\, \Omega) \cap \{h \in X \,|\, P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0\}$, придем к тому, что система

$$\sigma_{\precsim}(F'(x^0|h)) \leq 0, P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0, h \in T(x^0|\Omega) \tag{20.12}$$

имеет лишь нулевое решение. В силу предложения 20.1 первые два условия в системе (20.12) равносильны соотношению $F'(x^0|h) \precsim 0$, поэтому отсутствие ненулевых решений у системы (20.12) эквивалентно равенству $K_F(x^0) \cap T(x^0|\Omega) = \{0\}$, достаточность которого для локального изолированного $\precsim$–минимума и составляет содержание теоремы 19.1.

Поскольку включение (20.9) может быть собственным, то подобную замену нельзя осуществить для необходимого условия локального слабого $\precsim$–минимума (20.8), сформулированного в утверждении б) теоремы 20.1.

Будем говорить, что отображение $F : X \to Y$ удовлетворяет на множестве $\Omega \subset X$ в точке $x^0 \in \Omega$ *первому условию регулярности* относительно отношения предпорядка $\precsim$, если F является равномерно дифференцируемым по направлениям в точке x^0 и

$$T(x^0|\Omega(x^0)) = T(x^0|\Omega) \cap \{h \in X \,|\, P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0\}. \tag{20.13}$$

Если множество Ω задано посредством функциональных или операторных ограничений, то можно получить достаточные условия для выполнения первого условия регулярности в терминах отображения F и функционалов или операторов-ограничений. Такие достаточные условия будем также называть условиями регулярности.

Ограничимся здесь лишь формулировкой следующих двух условий регулярности, соответствующих случаю $\Omega = X$.

Предложение 20.4. (условие регулярности (A)). *Если*

а) $\operatorname{codim}(\ker P_{\precsim}) = 1$;

б) *отображение F равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0 \in X$;*

в) *для линейного функционала $e^* \in Y^*, \|e^*\| = 1$, такого, что $\ker P_{\precsim} = \{y \in Y \,|\, \langle y, e^* \rangle = 0\}$, вещественнозначная функция $h \to \langle F'(x^0|h), e^* \rangle$ не имеет точек локального экстремума на X, то отображение F удовлетворяет на X в точке $x^0 \in X$ первому условию регулярности относительно отношения предпорядка $\precsim$.*

Доказательство. Так как $\Omega = X$ и $\operatorname{codim}(\ker P_{\precsim}) = 1$, то $\Omega(x^0) = \{h \in X \,|\, \langle F(x) - F(x^0), e^* \rangle = 0\}$. Из условий б) и в) следует, что в точке x^0 выполняется условие регулярности для ограничения типа равенства $g_{x^0,e^*}(x) = \langle F(x) - F(x^0), e^* \rangle$ (см. § 14). Как было показано (§ 14), это условие обеспечивает равенство $T(x^0|\Omega(x^0)) = \{h \in X \,|\, \langle F'(x^0|h), e^* \rangle = 0\}$, эквивалентное в рассматриваемом случае (20.13). Предложение доказано.

Предложение 20.5. (условие регулярности (Б)). *Если*

а) $\mathrm{codim}(\ker P_{\precsim}) = m > 1$;

б) *отображение F равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0 \in X$ и, кроме того, композиция $P_{\precsim} \circ F$ строго дифференцируема в точке x^0;*

в) $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ F)'(x^0) = \mathrm{Im}P_{\precsim}$,

то отображение F удовлетворяет на X в точке x^0 первому условию регулярности относительно отношения предпорядка $\precsim$.

Нетрудно видеть, что условие регулярности (Б) следует из теоремы Люстерника [11, с. 173].

Перейдем к необходимым условиям слабого локального $\precsim$–минимума для отображения F. Из утверждения б) теоремы 20.1 следует

Теорема 20.2. *Пусть отображение F удовлетворяет на множестве Ω в точке $x^0 \in \Omega$ первому условию регулярности относительно отношения предпорядка $\precsim$. Если вектор $x^0 \in \Omega$ доставляет на множестве Ω локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то*

$$\sigma_{\precsim}(F'(x^0|h)) \geq 0 \textit{ для всех } h \in T(x^0|\Omega), \tag{20.14}$$

удовлетворяющих равенству

$$P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0. \tag{20.15}$$

Нетрудно убедиться, что условия (20.14), (20.15) эквивалентны тому, что $SK_F(x^0) \cap T(x^0|\Omega) = \varnothing$. Таким образом, необходимое условие теоремы 20.2 аналогично необходимому условию теоремы 19.2, однако его справедливость гарантирована лишь при выполнении первого условия регулярности.

20.3. В этом разделе получим необходимые условия локального слабого $\precsim$–минимума для отображения $F : X \to Y$ на всем пространстве X, выраженные в терминах ε–квазидифференциалов. Для случая $\mathrm{codim}(Y^+ - Y^+) = 0$ такие результаты были представлены в следствиях 19.1 и 19.2, поэтому здесь сосредоточим внимание на случаях $\mathrm{codim}(Y^+ - Y^+) = m > 0$.

Теорема 20.3. *Пусть для отображения F в точке $x^0 \in X$ выполнено условие регулярности (А). Если вектор $x^0 \in X$ достав-*

ляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ и любой ε–квазипроизводной $F_\varepsilon^{'}(x^0)$ отображения F в точке x^0 имеет место включение

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) \subset \bigcap_{\substack{w^* \in \overline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) \\ v^* \in \underline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))}} \{\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) + \varepsilon B^* +$$

$$+\overline{\text{cone}}[(\underline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) + \varepsilon B^* - \{w^*\}) \cup$$

$$\cup (\overline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) + \varepsilon B^* - \{v^*\})]\}. \qquad (20.16)$$

Здесь $D(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))]$ и $D(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) = [\underline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)), \overline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))]$ — квазидифференциалы композиций $\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)$ и $e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)$ соответственно.

Доказательство. Введем вещественнозначные функции $x \to f_{x^0}(x) := \sigma_{\precsim}(F(x) - F(x^0))$ и $x \to g_{x^0,e^*}(x) := \langle F(x) - F(x^0), e^* \rangle$. Из предложения 20.3 заключаем, что x^0 является точкой локального минимума функции f_{x^0} при ограничении типа равенства $g_{x^0,e^*}(x) = 0$. Поскольку условия теоремы обеспечивают равномерную дифференцируемость по направлениям функций f_{x^0} и g_{x^0,e^*} в точке x^0 и выполнение в точке x^0 условия регулярности для ограничения типа равенства $g_{x^0}, e^*(x) = 0$, то можно воспользоваться результатом теоремы 14.7. С этой целью зададим произвольное вещественное число $\varepsilon > 0$ и выберем произвольную ε–квазипроизводную $F_\varepsilon^{'}(x^0)$ отображения F в точке x^0. Так как $\|\sigma_{\precsim}\| = 1$ и $\|e^*\| = 1$, то в силу теоремы 17.2 квазидифференциал $D(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))]$ композиции $\sigma_{\precsim} \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)$ является ε–квазидифференциалом функции f_{x^0} в точке x^0, а квазидифференциал $D(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)) = [\underline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)), \overline{\partial}(e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0))]$ композиции $e^* \circ F_\varepsilon^{'}(x^0)$ является ε–квазидифференциалом функции g_{x^0,e^*} в точке x^0. Положив в теореме 14.7 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ запишем условие (14.14) для ε–квазидифференциалов функций f_x^0 и g_{x^0,e^*}, соответствующих выбранной ε–квазипроизводной $F_\varepsilon^{'}(x^0)$ отображения F в точке x^0. В результате получим включение (20.16). Теорема доказана.

Следствие 20.1. *Пусть для отображения F в точке $x^0 \in X$ выполнено условие регулярности (A) и, кроме того, отображение F квазидифференцируемо в точке x^0. Тогда если вектор x^0 доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум* *отображению* F, *то*

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}(x^0)) \subset \bigcap_{\substack{w^* \in \overline{\partial}(e^* \circ F^{'}(x^0)) \\ v^* \in \underline{\partial}(e^* \circ F^{'}(x^0))}} [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}(x^0)) +$$

$$+\overline{\mathrm{cone}}((\underline{\partial}(e^* \circ F^{'}(x^0)) - \{w^*\}) \cup (\overline{\partial}(e^* \circ F'(x^0)) - \{v^*\}))], \qquad (20.17)$$

где $D(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}(x^0)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}(x^0))]$ *и* $D(e^* \circ F^{'}(x^0)) = = [\underline{\partial}(e^* \circ F^{'}(x^0)), \overline{\partial}(e^* \circ F^{'}(x^0))]$ *— квазидифференциалы композиций* $\sigma_{\precsim} \circ F^{'}(x^0)$ *и* $e^* \circ F^{'}(x^0)$ *соответственно.*

Теорема 20.4. *Пусть для отображения* F *в точке* $x^0 \in X$ *выполнено условие регулярности (Б). Тогда если точка* $x^0 \in X$ *доставляет на пространстве* X *локальный слабый* $\precsim$*–минимум отображению* F, *то для любого вещественного числа* $\varepsilon > 0$ *и любой* ε*–квазипроизводной* $F^{'}_{\varepsilon}(x^0)$ *отображения* F *в точке* x^0 *имеет место включение*

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)) \subset \underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)) + \varepsilon B^* + (\mathrm{Im} P^*_{\precsim}) \circ F^{'}(x^0), \qquad (20.18)$$

где $(\mathrm{Im} P^*_{\precsim}) \circ F'(x^0) := \{x^* \in X^* \,|\, x^* = y^* \circ F'(x^0), y^* \in \mathrm{Im} P^*_{\precsim}\}$, $D(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0))]$ *— квазидифференциал композиции* $\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)$.

Доказательство. Воспользуемся условием (20.8) из теоремы 20.1 б). Зададим произвольное вещественное число $\varepsilon > 0$ и произвольную ε–квазипроизводную $F^{'}_{\varepsilon}(x^0)$ отображения F в точке x^0. Поскольку квазидифференциал композиции $\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)$ является ε–квазидифференциалом для $\sigma_{\precsim} \circ F^{'}_{\varepsilon}(x^0)$, то из условия (20.8) следует, что

$$\sigma_{\precsim}(F^{'}_{\varepsilon}(x^0|h)) + \varepsilon\|h\| \geq 0 \text{ для всех } h \in T(x^0|\Omega(x^0)). \qquad (20.19)$$

В силу предложения 20.5 при выполнении условия регулярности (Б) касательный конус к множеству $\Omega(x^0)$ в точке x^0 определяется равенством

$$T(x^0|\Omega(x^0)) = \{h \in X \,|\, P_{\precsim}(F'(x^0|h)) = 0\}.$$

Так как композиция $P_{\precsim} \circ F'(x^0)$ является линейным оператором, то $T(x^0|\Omega(x^0))$ — векторное подпространство в X, причем аннулятор $T(x^0|\Omega(x^0))$ совпадает с векторным подпространством $(\mathrm{Im} P^*_{\precsim}) \circ F'(x^0)$. Применив необходимую часть предложения 10.3, из условия (20.19) получим включение (20.18). Теорема доказана.

Следствие 20.2. *Пусть для отображения* F *в точке* $x^0 \in X$ *выполнено условие регулярности (Б) и, кроме того, отображение*

F квазидифференцируемо в точке x^0. Если вектор x^0 доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)) \subset \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)) + (\mathrm{Im} P^*_{\precsim}) \circ F'(x^0). \qquad (20.20)$$

Здесь $D(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0))]$ — квазидифференциал композиции $\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)$.

Следствие 20.3. *Пусть для отображения F в точке $x^0 \in X$ выполнено условие регулярности (Б) и, кроме того, отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x^0. Если вектор x^0 доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то существуют линейные функционалы $v^* \in \partial\sigma_{\precsim}$ и $w^* \in \mathrm{Im} P^*$ такие, что*

$$(F'(x^0))^*(v^* + w^*) = 0, \qquad (20.21)$$

где $(F'(x^0))^* : Y^* \to X^*$ — линейный оператор, сопряженный оператору $F'(x^0) : X \to Y$.

Доказательство. Так как $F'(x^0) : X \to Y$ — линейный оператор, то композиция $\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)$ является сублинейной функцией на X, причем ее субдифференциал задается равенством

$$\partial(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)) = \{x^* \in X^* \mid x^* = y^* \circ F'(x^0), y^* \in \partial\sigma_{\precsim}\},$$

где $\partial\sigma_{\precsim}$ — субдифференциал функции $\sigma_{\precsim}$.

Следовательно, условие (20.20) в рассматриваемом случае имеет вид

$$0 \in \partial(\sigma_{\precsim} \circ F'(x^0)) + (\mathrm{Im} P^*_{\precsim}) \circ F'(x^0),$$

откуда заключаем, что существуют $v^* \in \partial\sigma_{\precsim}$ и $w^* \in \mathrm{Im} P^*_{\precsim}$, удовлетворяющие равенству (20.21). Следствие доказано.

Сублинейное отношение предпорядка $\precsim$, заданное на Y, индуцирует (см. § 6) на сопряженном пространстве Y^* дуальное сублинейное отношение предпорядка $\precsim^*$, конус положительных элементов $(Y^*)^+$ которого есть

$$(Y^*)^+ = \{y^* \in Y^* \mid \langle y, y^* \rangle \geq 0 \text{ для всех } y \in Y^+\}.$$

Символом $(Y^*)^\sim$ обозначается максимальное векторное подпространство, содержащееся в $(Y^*)^+$; $(Y^*)^\succ := (Y^*)^+ \setminus (Y^*)^\sim$ — конус существенно положительных функционалов.

Если исходное отношение предпорядка $\precsim$ задано на Y посредством функции $\sigma_{\precsim}$ и проектора $P_{\precsim}$ (предложение 20.1), то, воспользовавшись их двойственными характеристиками, можно получить для дуального отношения предпорядка $\precsim^*$ следующие представления:

$$(Y^*)^+ = \{y^* = \lambda v^* + w^* \mid \lambda \geq 0, v^* \in \partial\sigma_{\precsim}, w^* \in \mathrm{Im} P^*_{\precsim}\},$$

$$(Y^*)^{\succ} = \{y^* = \lambda v^* + w^* \mid \lambda > 0, v^* \in \partial\sigma_{\precsim}, w^* \in \mathrm{Im} P^*_{\precsim}\},$$

$$(Y^*)^{\sim} = \mathrm{Im} P^*_{\precsim}.$$

Эти соотношения позволяют переформулировать результирующую часть следствия 20.3 как утверждение о существовании существенно положительного линейного функционала $y^* \in (Y^*)^{\succ}$, удовлетворяющего равенству $(F'(x^0))^* y^* = 0$.

Заметим, что условия $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ F'(x^0)) = \mathrm{Im} P_{\precsim}$ и $\ker(F'(x^0))^* \cap \cap \mathrm{Im} P^*_{\precsim} = \{0\}$ эквивалентны. Поэтому если в следствии 20.3 не требовать выполнения условия регулярности (Б), то можно гарантировать лишь существование ненулевого положительного линейного функционала $y^* \in (Y^*)^+$, удовлетворяющего $(F'(x^0))^* y^* = 0$. Точнее, имеет место

Следствие 20.4. *Пусть отображение F дифференцируемо по Фреше в точке $x^0 \in X$, а композиция $P_{\precsim} \circ F$ строго дифференцируема в точке x^0.*

Если вектор x^0 доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то

$$\Lambda_{\precsim}(F'(x^0)) := \ker(F'(x^0))^* \cap (Y^*)^+ \neq \{0\}. \tag{20.22}$$

Следуя традициям, будем называть элементы множества $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$ *положительными* (линейными) *функционалами Лагранжа* для отображения F в точке x^0 по отношению предпорядка $\precsim$. Очевидно, что $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$ является выпуклым замкнутым конусом в Y^*.

20.4. Распространим теорему 19.7 на случай нетелесного конуса положительных векторов Y^+. Начнем с модификации вспомогательного утверждения, сформулированного в лемме 19.2.

Лемма 20.1. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор, b — фиксированный вектор из Y.*

Для того чтобы система

$$Ax + b \prec\!\!\prec 0 \tag{20.23}$$

была несовместна на X, достаточно, а если $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ A) = \mathrm{Im} P_{\precsim}$, то и необходимо, чтобы существовал существенно положительный линейный функционал $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ такой, что

$$A^* y^* = 0, \ \langle b, y^* \rangle \geq 0. \tag{20.24}$$

Доказательство. Достаточность утверждения леммы легко устанавливается, если предположить противное и воспользоваться тем, что $\langle y, y^* \rangle < 0$ для любого существенно положительного линейного функционала $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ и любого $y \prec\!\prec 0$.

Необходимость. Несовместность системы (20.23) эквивалентна тому, что $\mathrm{ri}Y^+ \cap \{y \in Y \,|\, y = -Ax - b, x \in X\} = \varnothing$. Из теорем отделимости (см., например, [218, теорема 11.2]) следует существование линейного функционала $y^* \in Y^*$ и вещественного числа α таких, что

$$\langle -Ax - b, y^* \rangle = \alpha \text{ для всех } x \in X,$$

$$\langle y, y^* \rangle > \alpha \text{ для всех } y \in \mathrm{ri}Y^+.$$

Из первого соотношения получаем $A^*y^* = 0$ и $\langle b, y^* \rangle = \alpha$, а из второго $\alpha \leq 0$ и $y^* \in (Y^*)^+$. Таким образом, существование положительного линейного функционала $y^* \in (Y^*)^+$, удовлетворяющего соотношениям (20.24), доказано. Покажем, что при выполнении условия $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ A) = \mathrm{Im}P_{\precsim}$ выбранный линейный функционал $y^* \in (Y^*)^+$ на самом деле является существенно положительным. Предположим противное, т. е. пусть $\langle y, y^* \rangle = 0$ для всех $y \in Y^+$. Так как $Y^+ - Y^+ = \ker P_{\precsim}$, то $y^* \in (\ker P_{\precsim})^{\perp} = \mathrm{Im}P^*_{\precsim}$ и, следовательно, $y^* = P^*_{\precsim} y^*$. Поэтому из $A^*y^* = 0$ следует равенство $A^* \circ P^*_{\precsim} y^* = 0$, равносильное тому, что $\langle y, y^* \rangle = 0$ для всех $y \in \mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ A)$. Поскольку $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ A) = \mathrm{Im}P_{\precsim}$, то $\langle P_{\precsim} y, y^* \rangle = \langle y, P^*_{\precsim} y^* \rangle = 0$ для всех $y \in Y$, т. е. $y^* \in \ker P^*_{\precsim}$. Таким образом, $y^* \in \mathrm{Im}P^*_{\precsim} \cap \ker P^*_{\precsim}$ и, значит, $y^* = 0$. Однако в силу теорем отделимости функционал y^* был выбран ненулевым. Полученное противоречие доказывает существенную положительность y^*. Лемма доказана.

Замечание 20.1. Из доказательства леммы 20.1 следует, что при $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ A) \neq \mathrm{Im}P_{\precsim}$ несовместность системы (20.23) гарантирует лишь существование ненулевого положительного линейного функционала $y^* \in (Y^*)^+$, удовлетворяющего условиям (20.24).

Теорема 20.5. *Пусть отображение $F : X \to Y$ строго дифференцируемо в точке $x^0 \in X$ и обладает в этой точке равномерной второй производной по направлениям с отклонениями.*

Если вектор $x^0 \in X$ доставляет на пространстве X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F, то

$$\max_{y^* \in \Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0))} \langle F''(x^0|h), y^* \rangle \geq 0 \tag{20.25}$$

для всех $h \in K_F(x^0)$.

Здесь

$$\Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0)) := \{y^* \in \Lambda_{\precsim}(F'(x^0)) \mid \|y^*\| = 1\},$$

$F''(x^0|h) := \lim\limits_{t\to+0} 2t^{-2}(F(x^0+th)-F(x^0)-tF'(x^0|h))$ *— вторая производная по направлениям отображения F в точке x^0.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу следствия 20.4 множество $\Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0))$ непусто. Кроме того, вследствие компактности единичной сферы пространства Y^* множество $\Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0))$ также компактно. Следовательно, операция максимума в (20.25) корректна.

Перейдем к доказательству неравенства (20.25). Если конус $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$ не является выступающим, т. е. содержит ненулевое векторное подпространство, то утверждение теоремы тривиально.

Пусть конус $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$ выступающий (это влечет равенство $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ F'(x^0)) = \mathrm{Im}P_{\precsim}$) и пусть утверждение теоремы неверно. Тогда найдется $\overline{h} \in K_F(x^0)$ такой, что

$$\langle F''(x^0|\overline{h}), y^* \rangle < 0 \tag{20.26}$$

для всех ненулевых y^* из $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$.

Так как любой существенно положительный линейный функционал $y^* \in (Y^*)^{\succ}$, удовлетворяющий равенству $(F'(x^0))^* y^* = 0$, принадлежит $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$, то в силу леммы 20.1 из (20.26) заключаем, что существует $\overline{z} \in X$, для которого

$$F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h}) \prec\!\!\prec 0.$$

Введем отображение $\varphi : \mathbb{R} \times X \to \mathrm{Im}P_{\precsim}$, которое определим следующим образом:

$$(\tau, h) \to \varphi(\tau, h) := P_{\precsim}(F(x^0 + \tau\overline{h} + \frac{1}{2}\tau^2\overline{z} + h) - F(x^0)).$$

Очевидно, что $\varphi(0,0) = 0$. Нетрудно убедиться также в том, что сделанные предположения относительно отображения F обеспечивают выполнение следующих свойств:

1) отображение $\tau \to \varphi(\tau, 0)$ непрерывно в точке $\tau = 0$;

2) для любого вещественного числа $\gamma > 0$ найдутся числа $\delta > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что из условий $\tau \in (-\delta, \delta)$ и $\|h_1\| = \Delta, \|h_2\| < \Delta$ следует неравенство

$$\|\varphi(\tau, h_1) - \varphi(\tau, h_2) - (P_{\precsim} \circ F'(x^0))(h_1 - h_2)\| \le \gamma \|h_1 - h_2\|.$$

Кроме того, из предположения, что конус $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$ выступающий, заключаем, что $\ker(F'(x^0))^* \cap \mathrm{Im} P^*_{\precsim} = \{0\}$. Значит, имеем равенство

3) $\mathrm{Im}(P_{\precsim} \circ F'(x^0)) = \mathrm{Im} P_{\precsim}$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы о существовании неявной функции [11, с. 161]. Это позволяет утверждать, что найдутся числа $k > 0, \delta_0 > 0$ и отображение $h : (-\delta_0, \delta_0) \to X$, удовлетворяющие соотношениям

а) $\varphi(\tau, h(\tau)) \equiv 0, \tau \in (-\delta_0, \delta_0)$;

б) $\|h(\tau)\| \leq k\|\varphi(\tau, 0)\|, \tau \in (-\delta_0, \delta_0)$.

Так как отображение F строго дифференцируемо в точке x^0 и обладает в этой точке равномерной второй производной по направлениям с отклонениями, то из соотношения (19.15) и леммы 19.1 получаем

$$\varphi(\tau, 0) = P_{\precsim}(\tau F'(x^0)\overline{h} + \frac{\tau^2}{2}(F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h})) + o_{\overline{h},\overline{z}}(\tau^2)),$$

где $\tau^{-2} o_{\overline{h},\overline{z}}(\tau^2) \to 0$ при $\tau \to +0$.

Поскольку $F'(x^0)\overline{h} \precsim 0$ и $F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h}) \prec\!\!\prec 0$, то $P_{\precsim}(F'(x^0)\overline{h}) = 0$ и $P_{\precsim}(F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h})) = 0$. Значит, $\varphi(\tau, 0) = P_{\precsim}(o_{\overline{h},\overline{z}}(\tau_2))$. Из неравенства б) следует

$$\|h(\tau)\| \leq k\|o_{\overline{h},\overline{z}}(\tau^2)\|. \tag{20.27}$$

Рассмотрим кривую

$$x(\tau) := x^0 + \tau\overline{h} + \frac{\tau^2}{2}\overline{z} + h(\tau), \tau \in (-\delta_0, \delta_0).$$

Вследствие тождества а) и определения отображения ϕ имеем

$$P_{\precsim}(F(x(\tau)) - F(x^0)) = 0, \tau \in (-\delta_0, \delta_0). \tag{20.28}$$

Воспользовавшись соотношениями (19.16) и (19.20), представим $F(x(\tau))$ в виде

$$F(x(\tau)) = F(x^0) + \tau F'(x^0)\overline{h} + \frac{\tau^2}{2}(F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h})) + o(\tau^2),$$

где $\tau^{-2} o(\tau^2) \to 0$ при $\tau \to +0$.

Так как $\sigma_{\precsim}(F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h})) < 0$, то вследствие непрерывности функции $\sigma_{\precsim}$ имеем $\sigma_{\precsim}(F'(x^0)\overline{z} + F''(x^0|\overline{h}) + 2\tau^{-2} o(\tau^2)) < 0$ при $\tau \in (0, \delta_0^{'})$, где $0 < \delta_0^{'} < \delta_0$. Поэтому из данного выше представления для $F(x(\tau))$ и сублинейности $\sigma_{\precsim}$ получаем

$$\sigma_{\precsim}(F(x) - F(x^0)) \leq \tau\sigma_{\precsim}(F'(x^0)\overline{h}) +$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\sigma_{\precsim}(F'(x^0)\overline{z}+F''(x^0|\overline{h})+2\tau^{-2}o(\tau^2))<0$$

при $\tau\in(0,\delta_0')$. Учитывая тождество (20.28), приходим к соотношению $F(x(\tau))\lll F(x^0)$ при $\tau\in(0,\delta_0')$, которое невозможно, если вектор x^0 доставляет на X локальный слабый $\precsim$–минимум отображению F. Таким образом, неравенство (20.26) не может выполняться для всех $y^*\in\Lambda_{\precsim}(F'(x^0)), y^*\neq 0$, а это и означает выполнение условия (20.25). Теорема доказана.

Замечание 20.2. В условии (20.25) $\Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0))$ можно заменить любым другим компактным подмножеством из Y^*, которое не содержит нулевой функционал и порождает конус $\Lambda_{\precsim}F'(x^0))$. Рассмотрим множество

$$\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0)):=\{y^*=v^*+w^*\,|\,(F'(x^0))^*y^*=0,$$

$$v^*\in\partial\sigma_{\precsim},w^*\in\mathrm{Im}P^*_{\precsim}\}.$$

Выпуклость и замкнутость $\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0))$ следует из свойств $\ker(F'(x^0))^*$, $\partial\sigma_{\precsim}$ и $\mathrm{Im}P^*_{\precsim}$, а ограниченность $\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0))$ эквивалентна условию $\mathrm{Im}(P_{\precsim}\circ F'(x^0))=\mathrm{Im}P_{\precsim}$. Кроме того, $0\notin\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0))$ и $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))=\{y^*=\lambda v^*\,|\,\lambda\geq 0,\ v^*\in\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0))\}$. Таким образом, если в предположениях теоремы дополнительно потребовать выполнения условия $\mathrm{Im}(P_{\precsim}\circ F'(x^0))=\mathrm{Im}P_{\precsim}$, то в (20.25) вместо множества $\Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0))$ можно использовать $\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0))$. Заметим, что для телесного конуса положительных векторов Y^+ (в этом случае $\sigma_{\precsim}=s_{\precsim},P_{\precsim}=0$) имеет место равенство $\Lambda^{\sigma}_{\precsim}(F'(x^0))=\partial_{F'(x^0)}s_{\precsim}$. Значит, в этом частном случае утверждения теорем 19.7 и 20.5 совпадают.

Теорема 20.6. *Пусть конус положительных векторов Y^+ сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ замкнут и отображение F в точке $x^0\in X$ является дважды дифференцируемым по Фреше.*

Если $K_F(x^0)\neq\{0\}$ и $\Lambda_{\precsim}(F'(x^0))\neq\{0\}$, то выполнение неравенства

$$\max_{y^*\in\Lambda^0_{\precsim}(F'(x^0))}\langle(F''(x^0)h)h,y^*\rangle>0 \tag{20.29}$$

для всех $h\in K_F(x^0),h\neq 0$, является достаточным для того, чтобы вектор x^0 доставлял на пространстве X локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению F.

Доказательство. Предположим, что вектор $x^0\in X$ не доставляет на X локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению F. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^0,x_n\neq x^0$ и $F(x_n)\precsim F(x^0)$. Последовательность $\{x_n\}$

может быть выбрана так, что соответствующая ей последовательность $\{h_n\}$, где $h_n = \|x_n - x^0\|^{-1}(x_n - x^0)$, сходится к некоторому вектору $\overline{h} \in K_F(x^0), \|\overline{h}\| = 1$. Введем обозначение $t_n := \|x_n - x^0\|$, тогда $x_n = x^0 + t_n h_n$.

Так как отображение F дважды дифференцируемо по Фреше в точке x^0, то

$$F(x^0 + t_n h_n) = F(x^0) + t_n F'(x^0)h_n + \frac{t_n^2}{2}(F''(x^0)h_n)h_n + o(t_n^2),$$

где $\tau^{-2}(\tau^2) \to 0$ при $\tau \to 0$.

Воспользовавшись тем, что $\langle F(x_n) - F(x^0), y^* \rangle \leq 0$ и $(F'(x^0))^* y^* = 0$ для всех $y^* \in \Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$, из предыдущего равенства получим

$$\frac{1}{2}\langle (F''(x^0)h_n)h_n, y^* \rangle + \langle t_n^{-2} o(t_n^2), y^* \rangle \leq 0$$

для всех $y^* \in \Lambda_{\precsim}(F'(x^0))$ и всех $n = 1, 2, \ldots$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, получим

$$\frac{1}{2}\langle (F''(x^0)\bar{h})\bar{h}, y^* \rangle \leq 0 \text{ для всех } y^* \in \Lambda_{\precsim}(F'(x^0)),$$

что противоречит условию (20.29). Теорема доказана.

§ 21. ПРИЛОЖЕНИЯ К СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Условия оптимальности для решений задачи нелинейного программирования могут быть получены как следствия условий локального $\precsim$–минимума для векторных отображений. Возможность таких следствий обеспечивается утверждениями предложений 18.1 и 18.2. Чтобы не перегружать изложение неизбежным при выводе следствий дублированием основных результатов, ниже ограничимся формулировкой лишь некоторых из таких следствий.

21.1. Рассмотрим задачу нелинейного программирования (НЛП):

$$\begin{aligned} &f_0(x) \to \min; \\ &f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m'; \\ &f_i(x) = 0, i = m' + 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{21.1}$$

где $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, m,$ — вещественные непрерывные функции, определенные на конечномерном евклидовом пространстве X.

Векторы $x \in X$, удовлетворяющие ограничениям

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m'; f_i(x) = 0, i = m' + 1, \ldots, m,$$

называются *допустимыми решениями* задачи нелинейного программирования (21.1).

Множество всех допустимых решений задачи НЛП (21.1) обозначим через Ω.

Допустимое решение $x^0 \in \Omega$ называется (изолированным) локально оптимальным решением задачи НЛП (21.1), если существует окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ вектора x^0 такая, что $f_0(x^0) \leq f_0(x)$ $(f_0(x^0) < < f_0(x))$ для всех $x \in \mathcal{N}(x^0) \cap \Omega, x \neq x^0$.

Задаче НЛП (21.1) и фиксированному ее допустимому решению $x^0 \in \Omega$ поставим в соответствие отображение

$$X \ni x \to F(x) := (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^{1+m} \tag{21.2}$$

и сублинейное отношение предпорядка $\precsim$ на $\mathbb{R}^{1+m}$, конус положительных векторов Y^+ которого есть

$$\begin{aligned} Y^+ := \{y \in \mathbb{R}^{1+m} \,|\, y_0 \geq 0, y_i \geq 0, i \in I_a(x^0), \\ y_i = 0, i = m' + 1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{21.3}$$

В этом параграфе, говоря об отображении F и отношении предпорядка $\precsim$, будем иметь в виду, что они определены соотношениями (21.2) и (21.3). Любой другой случай будет оговорен специально.

В силу предложения 18.1 любое локальное оптимальное решение задачи НЛП (21.1) доставляет отображению F локальный слабый $\precsim$–минимум на пространстве X. Следовательно, по любому необходимому условию локального слабого $\precsim$–минимума для векторных отображений, установленному в предыдущих параграфах, может быть сформулировано необходимое условие локальной оптимальности допустимого решения в задаче НЛП (21.1). В свою очередь предложение 18.2 утверждает, что любое допустимое решение задачи НЛП (21.1), доставляющее локальный изолированный $\precsim$–минимум отображению F на всем пространстве X, является изолированным локально оптимальным решением в задаче НЛП. Это позволяет использовать достаточные условия локального изолированного $\precsim$–минимума для векторных отображений, которые были доказаны выше, для того, чтобы получить достаточные условия для изолированных локально оптимальных решений задачи НЛП (21.1).

Особенностью рассматриваемого отношения предпорядка $\precsim$ является то, что соответствующий ему конус положительных векторов Y^+ (21.3) многогранный. Благодаря этому в условиях локального $\precsim$–минимума для векторных отображений в качестве функции $\sigma_{\precsim}$ (или $s_{\precsim}$, если конус Y^+ телесен) можно рассматривать функцию $y \to \max\limits_{i \in I(x^0)} y_i$, где $I(x^0) := \{0\} \cup I_a(x^0)$. Будем учитывать эту особенность при переформулировке условий для задачи НЛП. Приведем лишь часть из возможных результатов. При необходимости, действуя подобным образом, можно переформулировать все условия предыдущих двух параграфов.

21.2. Рассмотрим сначала случай, когда конус положительных векторов Y^+ телесен. Этот случай реализуется при $m' = m$, т. е. когда ограничения типа равенства в (21.1) отсутствуют и, следовательно, задача НЛП имеет вид

$$
\begin{gathered}
f_0(x) \to \min, \\
f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, m.
\end{gathered}
\tag{21.1a}
$$

Исходя из результатов § 19, в силу предложений 18.1 и 18.2 получим следующие условия оптимальности для задачи НЛП (21.1a).

Теорема 21.1. *Если функции $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, m,$ равномерно дифференцируемы по направлениям в точке $x^0 \subset X,$ которая является допустимым решением задачи НЛП* (21.1 a), *то условие*

$$
\max_{i \in I(x^0)} f'(x^0|h) > 0 \text{ для всех } h \in X, h \neq 0, \tag{21.4}
$$

является достаточным для того, чтобы допустимое решение x^0 было изолированным локально оптимальным решением задачи НЛП (21.1a).

Данное утверждение — следствие теоремы 19.1.

Введем конус

$$
K(x^0) := \{h \in X \mid f_i'(x^0|h) \leq 0, i \in I(x^0)\},
$$

который, следуя работам [159 – 162], будем называть *конусом критических направлений* для задачи НЛП (21.1a), соответствующим допустимому решению x^0. Очевидно, что $K(x^0) = K_F(x^0)$, т. е. $K(x^0)$ совпадает с конусом направлений $\precsim$-убывания для отображения F.

Условие (21.4) теоремы 21.1 равносильно равенству $K(x^0) = \{0\}$.

Используя теорему 19.2 и замечание 19.4, придем к следующему необходимому условию первого порядка для локально оптимальных решений задачи НЛП (21.1a).

Теорема 21.2. *Если функции* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, *являются дифференцируемыми по направлениям в* $x^0 \in X$, *то для того, чтобы допустимое решение* $x^0 \in \Omega$ *было локально оптимальным в задаче НЛП* (21.1a), *необходимо, чтобы*

$$\max_{i \in I(x^0)} f_i(x^0|h) \geq 0 \text{ для всех } h \in X. \qquad (21.5)$$

Перейдем к условиям второго порядка. Из теоремы 19.5 и замечания 19.5 следует

Теорема 21.3. *Пусть* $x^0 \in X$ *является допустимым решением задачи НЛП* (21.1a) *и пусть функции* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, *обладают в точке* x^0 *второй производной по направлениям с отклонениями.*

Для того чтобы допустимое решение $x^0 \in \Omega$ *являлось локально оптимальным в задаче НЛП* (21.1a), *необходимо, чтобы*

$$\max_{i \in I(x^0,h)} f''(x^0|h, w) \geq 0 \text{ для всех } h \in K(x^0) \text{ и всех } w \in X. \qquad (21.6)$$

Здесь $I(x^0, h) = \{i \in I(x^0) \,|\, f'(x^0|h) = 0\}$.

Введем множество

$$I_0(x^0) := \bigcap_{h \in K_F(x^0)} I(x^0, h).$$

Из результатов § 19 следует, что если отображение F удовлетворяет второму условию регулярности относительно $\precsim$, то множество $I_0(x^0)$ непусто и, более того, множество $I(x^0, h)$ в условии (21.6) может быть заменено на $I_0(x^0)$. Приведем здесь несколько более слабый результат, использовав для этого следующее достаточное условие непустоты множества $I_0(x^0)$.

Лемма 21.1. *Пусть* $x^0 \in X$ *является допустимым решением задачи НЛП* (21.1a) *и пусть функции* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, .., m$, *дифференцируемы по Фреше в точке* x^0.

Если допустимое решение $x^0 \in \Omega$ *удовлетворяет условию (21.5), то множество*

$$I_0(x^0) = \{i \in I(x^0) \,|\, f_i'(x^0)h = 0 \text{ для всех } h \in K_F(x^0)\}$$

непусто.

(Уместно сравнить утверждение леммы с предложением 19.4.)

Используя лемму 21.1 и теорему 19.6, получаем следующее необходимое условие оптимальности.

Теорема 21.4. *Пусть* $x^0 \in X$ *является допустимым решениемзадачи НЛП* (21.1a) *и функции* $f_i : X \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, m$, *дифференцируемы по Фреше в точке* x^0 *и обладают в этой точке второй производной по направлениям с отклонениями, причем при любом* $w \in X$ *отображения* $f_i^{''}(x^0|\cdot, w) : h \to f_i^{''}(x^0|h, w)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывны.*

Для того чтобы допустимое решение x^0 *было локально оптимальным в задаче НЛП* (21.1a), *необходимо, чтобы*

$$\max_{i \in I_0(x^0)} f_i^{''}(x^0|h, w) \geq 0 \tag{21.7}$$

для всех $h \in K_F(x^0)$ *и* $w \in X$.

21.3. Рассмотрим общую задачу нелинейного программирования (21.1). Поскольку при наличии ограничений типа равенства конус положительных векторов Y^+ (см. (21.3)), соответствующий задаче НЛП (21.1), не является телесным, то обратимся к результатам § 20. В частности, рассмотрим следствия, которые могут быть получены из теорем 20.5 и 20.6. Начнем с применения к задаче НЛП (21.1) следствия 20.4. В результате получим следующее необходимое условие локальной оптимальности решений задачи НЛП (21.1), известное как условие Каруша – Джона [202].

Теорема 21.5. *Если функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m'$, *являются дифференцируемыми по Фреше в точке* $x^0 \in X$, *а функции* f_i, $i = m' + 1, \ldots, m$, *строго дифференцируемы в точке* x^0, *то для того, чтобы допустимое решение* $x^0 \in \Omega$ *являлось локально оптимальным в задаче НЛП* (21.1), *необходимо, чтобы существовал ненулевой вектор* $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{1+m}$ *такой, что*

$$\alpha_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, m'; \ \alpha_i f_i(x^0) = 0, i = 1, 2, \ldots, m'; \tag{21.8}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^{'}(x^0) = 0. \tag{21.9}$$

Здесь $f_i^{'}(x^0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *— производные Фреше функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, *в точке* x^0.

Вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{1+m}$, удовлетворяющий условию (21.9), называют *вектором Лагранжа* для задачи НЛП (21.1) в точке x^0.

Условие (21.8) является условием положительности линейного функционала, соответствующего вектору $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{1+m}$, относительно отношения предпорядка $\precsim$, заданного на $\mathbb{R}^{1+m}$ конусом (21.3). Таким образом, положительный вектор Лагранжа — это вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{1+m}$, удовлетворяющий условиям (21.8) и (21.9). Множество всех положительных векторов Лагранжа для задачи НЛП (21.1) в точке x^0 обозначим через $\Lambda(x^0)$.

Используя предложение 18.1 и теорему 20.5, получим следующее необходимое условие второго порядка для локальной оптимальности решений задачи НЛП.

Теорема 21.6. *Пусть функции* $f_i, i = 0, 1, \dots, m,$ *строго дифференцируемы в точке* $x^0 \in X$ *и обладают в этой точке равномерной второй производной по направлениям с отклонениями.*

Для того чтобы допустимое решение $x^0 \in \Omega$ *было локально оптимальным в задаче НЛП* (21.1), *необходимо, чтобы*

$$\max_{\alpha \in \Lambda^0(x^0)} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f_i^{''}(x^0|h) \geq 0 \text{ для всех } h \in K(x^0). \tag{21.10}$$

Здесь $\Lambda^0(x^0) := \{\alpha \in \Lambda(x^0) \mid \sum\limits_{i=0}^{m} |\alpha_i| = 1\}$.

Отметим также, что конус критических направлений $K(x^0)$ для задачи НЛП (21.1) с ограничениями типа неравенства и равенства имеет вид

$$K(x^0) = \{h \in X \mid f_0^{'}(x^0)h \leq 0, f_i^{'}(x^0)h \leq 0, i \in I_a(x^0);$$

$$f_i^{'}(x^0)h = 0, i = m' + 1, \dots, m\},$$

где $I_a(x^0) = \{i \in \{1, \dots, m'\} \mid f_i(x^0) = 0\}$.

Как следует из результатов § 20, условие $K(x^0) = \{0\}$ является достаточным для того, чтобы допустимое решение x^0 было изолированным локально оптимальным решением задачи НЛП (21.1). В следующем утверждении представим достаточные условия второго порядка, вытекающие из теоремы 20.6.

Теорема 21.9. *Пусть* $x^0 \in X$ *— допустимое решение задачи нелинейного программирования* (21.1) *и пусть функции* f_i, $i = 0, 1, \dots, m$, *являются дважды дифференцируемыми по Фреше в точке* x^0. *Если* $K(x^0) \neq \{0\}$, *то выполнение условия* $\Lambda(x^0) \neq \{0\}$ *и неравенства*

$$\max_{\alpha \in \Lambda^0(x^0)} \sum_{i=0}^{m} (f_i^{''}(x^0)h)h > 0 \text{ для всех } h \in K(x^0), h \neq 0, \tag{21.11}$$

является достаточным для того, чтобы x^0 *было изолированным локально оптимальным решением задачи НЛП (21.1).*

Замечание 21.1. Условия (21.10) и (21.11) известны как условия Левитина-Милютина-Осмоловского. Впервые для задачи НЛП (21.1) они были представлены в работах [159, 160] (см. также [161, 162, 302]).

Пример 21.1 [258]. Рассмотрим задачу минимизации функции

$$f_0(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$$

при ограничении типа неравенства

$$f_1(x) = |x_1| - \frac{1}{k} x_2^2 \le 0,$$

где k — положительный параметр.

Исследуем на оптимальность допустимое решение $x^0 = (0, 0)$. Вычислим производные по направлениям функций f_0 и f_1 в точке x^0:

$$f_0^{'}(x^0|h) = -2h_1, f_0^{''}(x^0|h, w) = -2w_1 + 2(h_1^2 + h_2^2);$$

$$f_1^{'}(x^0|h) = |h_1|, f_1^{''}(x^0|h, w) = |w_1| - \frac{2}{k} h_2^2.$$

Поскольку

$$\max_{i \in \{0,1\}} f_i^{'}(x^0|h) = \max\{-2h_1, |h_1|\} = \begin{cases} -2h_1, & \text{если } h_1 < 0, \\ h_1, & \text{если } h_1 \ge 0, \end{cases}$$

то необходимое условие первого порядка (21.5) выполнено при любом значении параметра k. Вместе с тем

$$K(x^0) = \{(h_1,\, h_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, h_1 = 0\} \neq \{0\}.$$

Следовательно, достаточное условие первого порядка (21.4) не выполняется. Для дальнейшего исследования точки $x^0 = (0, 0)$ привлечем необходимое условие второго порядка (21.6). Так как для любого $h \in K(x^0)$ имеют место равенства $I(x^0, h) = \{0, 1\}$ и

$$\max_{i \in I(x^0,h)} f_i^{''}(x^0|h, w) = \max\left\{-2w_1 + 2h_2^2, |w_1| - \frac{2}{k} h_2^2\right\},$$

то нетрудно убедиться, что условие (21.6) выполнено для всех $h \in K(x^0)$ и всех $w \in \mathbb{R}^2$ только при $k \ge 2$. Действительно, если $-2w_1 + 2h_2^2 < 0$, то при $k \ge 2$ имеем $|w_1| - \frac{2}{k} h_2^2 = w_1 - \frac{2}{k} h_2^2 \ge 0$. Таким образом, условие $k \ge 2$ необходимо для оптимальности допустимого решения $x^0 = (0, 0)$. Можно показать, что это условие является также и достаточным.

Глава 5

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ВЕКТОРНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ КАЧЕСТВА

Основная цель настоящей главы — развить теорию необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления с векторным показателем качества терминального типа, заданным аппроксимативно квазидифференцируемым отображением. Относительно дифференциальных свойств системы управления, динамика которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, сохраняются традиционные предположения гладкости.

§ 22. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ВЕКТОРНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ КАЧЕСТВА ТЕРМИНАЛЬНОГО ТИПА

22.1. Пусть X и V — конечномерные евклидовы пространства, размерности которых равны соответственно n и r;

$T := [t_0, t_1]$ — заданный отрезок множества действительных чисел $\mathbb{R}$, который будем интерпретировать как отрезок времени;

$AC(T; X)$ — векторное пространство абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) : T \to X$, определенных на T и принимающих значения в X;

$KC(T; V)$ — векторное пространство кусочно-непрерывных функций $u(\cdot) : T \to V$ из T в V.

Пусть заданы отображение $f : \mathbb{R}\times V\times X \to X$, множество $U \subset V$ и вектор $x^0 \in X$.

Рассмотрим систему управления $S_U \subset KC(T; V) \times AC(T; X)$, заданную на отрезке времени T обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, u(t), x(t)), x(t_0) = x^0, \tag{22.1}$$

и ограничением

$$u(t) \in U, t \in T. \tag{22.2}$$

Следуя монографии [172], будем интерпретировать систему управления S_U как соответствие между пространством управлений $KC(T;V)$ и пространством выходов $AC(T;X)$.

Пара $(u(\cdot),x(\cdot)) \in KC(T;V) \times AC(T;X)$ называется допустимым процессом системы S_U, если $(u(\cdot),x(\cdot)) \in S_U$, т. е. если пара этих функций удовлетворяет соотношениям (22.1) и (22.2). Функция $u(\cdot) \in KC(T;V)$ называется *допустимым управлением системы* S_U, если существует функция $x(\cdot) \in AC(T;X)$ такая, что $u(\cdot),x(\cdot)) \in S_U$. Аналогично $x(\cdot) \in AC(T;X)$ называется *допустимой траекторией* системы управления S_U, если существует функция $u(\cdot) \in KC(T;V)$ такая, что $(u(\cdot),x(\cdot)) \in S_U$. Множество всех допустимых управлений системы S_U будем обозначать символом $\mathcal{D}(S_U)$, а множество всех допустимых траекторий — $\mathcal{R}(S_U)$.

Задачи оптимизации, у которых в качестве множества допустимых решений рассматривается множество допустимых процессов системы S_U, называются *задачами оптимального управления системой* S_U.

В общем виде показатель качества в задаче оптимального управления системой S_U задается некоторым бинарным отношением $G \subset \subset S_U \times S_U$. Ограничимся исследованием задач оптимального управления системой S_U по векторному показателю качества G, который будем отождествлять с некоторым его векторным представлением, состоящим из векторного пространства Y (пространства оценок), сублинейного отношения предпорядка $\precsim$ на Y (показателя предпочтения оценок) и отображения $G : KC(T;V) \times AC(T;X) \to Y$, ($G(u(\cdot),x(\cdot))$ — векторная оценка допустимого процесса $(u(\cdot),x(\cdot))$).

Допустимый процесс $(u^0(\cdot),x^0(\cdot)) \in S_U$ назовем *оптимальным по Парето* в задаче оптимального управления системой S_U по векторному показателю качества G, если $(u^0(\cdot),x^0(\cdot))$ доставляет $\precsim$–минимум отображению $G : KC(T;V) \times AC(T;X) \to Y$ на множестве допустимых процессов S_U.

Пусть сублинейное отношение предпорядка $\precsim$, заданное на пространстве оценок Y, таково, что конус строго положительных векторов $Y^{\gg}$ непуст. Введем следующее понятие.

Допустимый процесс $(u^0(\cdot),x^0(\cdot)) \in S_U$ назовем *оптимальным по Слейтеру* в задаче оптимального управления системой S_U по векторному показателю качества G, если $(u^0(\cdot),x^0(\cdot))$ доставляет слабый $\precsim$–минимум отображению $G : (u(\cdot),x(\cdot)) \to G(u(\cdot),x(\cdot))$ на множестве допустимых процессов S_U.

Из соотношений, связывающих слабый $\precsim$–минимум и $\precsim$–минимум, следует, что всякий допустимый процесс, оптимальный по Парето, является также оптимальным по Слейтеру. Обратное, вообще говоря, не имеет места.

22.2. Показатель качества G (не обязательно векторный) в задаче оптимального управления системой S_U называется *показателем качества терминального типа* (или *показателем Майера*), если при сравнении допустимых процессов системы S_U по G учитывается лишь состояние соответствующих допустимых траекторий в конечный (терминальный) момент $t = t_1$. Векторный показатель качества G является показателем качества терминального типа, если отображение $G : (u(\cdot), x(\cdot)) \to G(u(\cdot), x(\cdot))$ в его векторном представлении имеет вид

$$G(u(\cdot), x(\cdot)) := g(x(t_1)), \tag{22.3}$$

где $g : X \to Y$ — некоторое отображение из X в Y.

В дальнейшем задачу оптимального управления системой S_U по векторному показателю качества G терминального типа будем записывать следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, u, x), x(t_0) = x_0, \\ u(t) \in U, t \in T, \\ G(u(\cdot), x(\cdot)) = g(x(t_1)) \to \precsim - \min \end{gathered} \tag{VPS_U}$$

Всюду ниже, рассматривая задачу (VPS_U), будем считать, что векторное пространство оценок Y является конечномерным и евклидовым.

Введем множество

$$\Omega(t_1) := \{x = x(t_1) \,|\, x(\cdot) \in \mathcal{R}(S_U)\},$$

называемое *множеством достижимости* системы S_U к моменту $t = t_1$.

Легко убедиться в том, что допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Парето (оптимальным по Слейтеру) в задаче (VPS_U) тогда и только тогда, когда вектор $x^0(t_1)$ доставляет $\precsim$–минимум (слабый $\precsim$–минимум) отображению $g : X \to Y$ на множестве $\Omega(t_1) \subset X$. Следовательно, векторную задачу терминального управления (VPS_U) можно рассматривать как задачу $\precsim$–минимизации отображения $g : X \to Y$ на множестве $\Omega(t_1) \subset X$ (заметим, что последняя задача является конечномерной), вложив ее, таким образом, в класс задач, исследованию которых была посвящена предыдущая глава. Такая интерпретация позволяет, воспользовавшись результатами предыдущей главы, сформулировать как необходимые, так и достаточные условия оптимальности для допустимых процессов в векторной задаче терминального управления системой S_U (в задаче (VPS_U)) через равномерную производную по направлениям $g'(x^0(t_1)|\cdot) : X \to Y$ отображения g в точке $x^0(t_1)$ и касательный конус $T(x^0(t_1)\,|\,\Omega(t_1))$ к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$. К сожалению, отсутствие в общем случае стандартных методов построения касательного конуса $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ к множеству достижимости системы S_U исключает возможность эффективного использования достаточных условий оптимальности такого типа. Что же касается необходимых условий оптимальности, то их можно использовать в ослабленном варианте, заменив конус $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ каким-либо его подмножеством, допускающим конструктивное построение. С помощью такого приема ниже получен ряд необходимых условий оптимальности по Слейтеру для задачи (VPS_U). Исследование ограничивается необходимыми условиями оптимальности по Слейтеру по той причине, что любое такое условие необходимо и для оптимальных по Парето процессов.

Замечание 22.1. В монографии [192] введено понятие динамической устойчивости принципов оптимальности в многокритериальных задачах оптимального управления. Динамическая устойчивость принципа оптимальности означает, что при движении по оптимальной траектории принцип оптимальности остается справедливым в любой текущий момент времени для оставшегося куска траектории. Там же показано, что принцип оптимальности Парето и принцип оптимальности Слейтера являются динамически устойчивыми в задаче терминального управления.

§ 23. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО СЛЕЙТЕРУ КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

Одним из основных методов качественного исследования свойств допустимых процессов систем управления является метод вариаций, берущий свое начало в классическом анализе и вариационном исчислении. Наибольшее распространение в теории управления системами, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, получили классические и игольчатые возмущения допустимых управлений. Начнем исследование оптимальных процессов задачи терминального управления с векторным показателем качества

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,u,x), x(t_0) = x_0, \\ u(t) \in U, t \in T, \\ G(u(\cdot),x(\cdot)) = g(x(t_1)) \to \min, \end{gathered} \tag{VPS_U}$$

используя классические методы возмущения.

23.1. Пусть $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ — допустимый процесс системы S_U, подлежащий исследованию.

Зададим конечный набор функций $\delta u_1(\cdot), \ldots, \delta u_m(\cdot)$ из пространства $KC(T; V)$, которые будем называть *вариациями управления.*

Классическим возмущением допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, системы S_U будем называть семейство управлений

$$u(\varepsilon) := u^0 + \alpha_1(\varepsilon)\delta u_1 + \ldots + \alpha_m(\varepsilon)\delta u_m, \tag{23.1}$$

где $\alpha_1(\varepsilon), \ldots, \alpha_m(\varepsilon)$ — достаточно гладкие в некоторой окрестности нуля вещественные функции вещественного аргумента ε, удовлетворяющие условию $\alpha_i(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

В данном параграфе будем предполагать, что $\mathrm{int}U \neq \varnothing$ и $u^0(t) \in \mathrm{int}U$ для всех $t \in T$. Тогда при любых вариациях управления $\delta u_1, \ldots, \delta u_m$ из $KC(T; V)$ возмущенные управления $u(\varepsilon)$ из семейства (23.1) являются допустимыми при достаточно близких к нулю значениях параметра ε.

Простейшим классическим возмущением является возмущение вида

$$u(\varepsilon) := u^0 + \varepsilon\delta u, \delta u \in KC(T; V), |\varepsilon| \le \varepsilon_0 \tag{23.2}$$

где ε — заданное положительное число.

Пусть $x_{u^0+\varepsilon\delta u}(t), t \in T,$ — траектория системы управления S_U, соответствующая возмущенному управлению $u^0+\varepsilon\delta u$. Если отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ непрерывно дифференцируемо, то вследствие гладкости системы управления S_U имеет место соотношение

$$x_{u^0+\varepsilon\delta u}(t_1) = x^0(t_1) + \varepsilon\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) + o(\varepsilon), \tag{23.3}$$

где $\varepsilon^{-1}o(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

Для сокращения записи ниже будем использовать следующие обозначения:

$$f_x^0(t) := f_x(t,\, u^0(t),\, x^0(t)) \in \mathcal{L}(X, X),\, t \in T,$$

$$f_u^0(t) := f_u(t,\, u^0(t),\, x^0(t)) \in \mathcal{L}(V, X),\, t \in T.$$

Как известно (см. [11, 55, 124, 143]), *первая вариация* $\delta^1 x_{u^0}(t|\delta u)$, $t \in T$, *траектории* $x^0(t), t \in T$, есть решение дифференциального уравнения

$$\delta^1 \dot{x}_{u^0}(t|\delta u) = f_x^0(t)\delta^1 x_{u^0}(t|\delta u) + f_u^0(t)\delta u(t)$$

с начальным условием

$$\delta^1 x_{u^0}(t_0|\delta u) = 0$$

и может быть представлена в виде

$$\delta^1 x_{u^0}(t|\delta u) = \int\limits_{t_0}^{t} F(t,\tau) f_u^0(\tau)\delta u(\tau) d\tau, \qquad (23.4)$$

где операторнозначная функция $F : T \times T \to \mathcal{L}(X, X)$ определяется соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t,\tau) = f_x^0(t) F(t,\tau), F(\tau,\tau) = E$$

(E — тождественный оператор).

Из равенства (23.3) следует, что какая бы ни была вариация управления $\delta u \in KC(T;V)$, вектор $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u)$, соответствующий терминальному состоянию первой вариации траектории $x^0(t), t \in T$, является касательным к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$, т. е.

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) \in T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \text{ для всех } \delta u \in KC(T;V).$$

Множество первых (классических) вариаций траектории

$$E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) := \{\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) \mid \delta u \in KC(T;V)\}$$

является векторным подпространством в X, причем

$$E(x^0(t_1) \mid \Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Следовательно, векторное подпространство $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ можно рассматривать как локальную аппроксимацию множества достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$. Назовем $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ *касательным подпространством Эйлера* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$.

Нормальным подпространством Эйлера к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$ назовем векторное подпространство $E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ в X^*, являющееся аннулятором касательного подпространства Эйлера $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Линейные функционалы x^*, принадлежащие $E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, будем называть *нормальными функционалами Эйлера* или просто *нормалями Эйлера* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$.

Предложение 23.1. *Линейный функционал $x^* \in X^*$ является нормальным функционалом Эйлера к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие Эйлера*

$$\psi(t;x^*) f_u^0(t) \equiv 0, t \in T, \qquad (23.5)$$

где $\psi(t;x^*), t \in T,$ *— решение сопряженной системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{\psi} = -\psi f_x^0(t), \tag{23.6}$$

удовлетворяющее условию трансверсальности

$$\psi(t_1;x^*) = x^*. \tag{23.7}$$

Доказательство этого утверждения проводится традиционными методами вариационного исчисления.

Касательное и нормальное подпространства Эйлера могут быть охарактеризованы при помощи линейного оператора $W(t_0,t_1) : X^* \to \to X,$ определенного соотношением

$$W(t_0,t_1) := \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1,t) f_u^0(t)(f_u^0)^*(t) F^*(t_1,t) dt. \tag{23.8}$$

Имеют место следующие равенства (ср. с [12, с. 216, теорема 5]):

$$E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \mathrm{Im} W(t_0,t_1), \tag{23.9}$$

$$E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \mathrm{Ker} W(t_0,t_1). \tag{23.10}$$

Замечание 23.1. Касательное подпространство Эйлера $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ как локальная аппроксимация множества достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$ в общем случае может быть намного грубее касательного конуса $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Однако если $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ совпадает со всем пространством X, то, очевидно, $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = = E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = X$. Используя теорему о локальном обращении отображений класса C^1 [11], можно показать, что при выполнении условия $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = X$ множество достижимости $\Omega(t_1)$ имеет непустую внутренность и $x^0(t_1) \in \mathrm{int}\Omega(t_1)$. Это утверждение известно как условие локальной управляемости по первому приближению [54, 141]. Из предложения 23.1 следует, что двойственным эквивалентом условия $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = X$ является отсутствие нетривиальных решений $\psi(t), t \in T,$ сопряженной системы дифференциальных уравнений (23.6), удовлетворяющих условию Эйлера (23.5).

23.2. Используя касательное подпространство Эйлера как локальную аппроксимацию множества достижимости системы S_U, перейдем к выводу необходимых условий оптимальности по Слейтеру для допустимых процессов в задаче (VPS_U). В этом разделе рассмотрим случай, когда конус положительных векторов Y^+, соответствующий заданному на пространстве оценок Y отношению предпорядка $\precsim$, является телесным. Будем предполагать при этом, что на пространстве Y задана сублинейная непрерывная функция $s_{\precsim} : Y \to R$ такая, что для любых $y_1, y_2 \in Y$ соотношение $y_1 \prec\!\!\prec y_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $s_{\precsim}(y_1 - y_2) < 0$ (существование такой функции и одна из возможных ее реализаций приведены в § 19).

Пусть $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ — исследуемый допустимый процесс системы управления S_U. Основным предположением относительно дифференциальных свойств показателя качества является требование равномерной дифференцируемости по направлениям отображения $g : X \to Y$ в точке $x^0(t_1)$. Всюду ниже будем считать это требование выполненным.

Предположим, что допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U). Так как это эквивалентно тому, что вектор $x^0(t_1)$ доставляет отображению $g : X \to Y$ слабый $\precsim$–минимум на множестве достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в момент $t = t_1$, то из теоремы 19.2 и включения $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset$ $\subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ получаем неравенство

$$s_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \tag{23.11}$$

Таким образом, условие (23.11) является необходимым для оптимальности по Слейтеру процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ в задаче (VPS_U). Поскольку функция $h \to s_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|h))$ положительно однородна и непрерывна, а множество $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ — векторное пространство в X, то, используя результаты главы 3 (§ 10 – 12), можно переформулировать условие (23.11) в двойственной форме через ε–квазидифференциалы композиции $s_{\precsim} \circ g$. В итоге получим следующее необходимое условие оптимальности по Слейтеру.

Теорема 23.1. *Пусть $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ — допустимый процесс системы S_U такой, что $u^0(t) \in \mathrm{int} U$ для всех $t \in T$.*

Предположим, что

а) *отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ непрерывно дифференцируемо в некоторой открытой области, содержащей кривую $\{(t, u^0(t), x^0(t)) | t \in T\}$;*

б) *отображение $g : X \to Y$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0(t_1)$;*

в) *конус положительных векторов Y^+, соответствующий отношению предпорядка $\precsim$ на Y, телесен.*

Тогда если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), то для любого $\varepsilon > 0$ и любого ε–квазидифференциала $D_\varepsilon(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}_\varepsilon(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)),$ $\overline{\partial}_\varepsilon(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))]$ композиции $s_{\precsim} \circ g$ в точке $x^0(t_1)$ имеет место *включение*

$$\overline{\partial}_\varepsilon(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}_\varepsilon(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) + \varepsilon B^* + E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), \quad (23.12)$$

где $E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ *— нормальный конус Эйлера к множеству достижимости* $\Omega(t_1)$ *системы* S_U *в точке* $x^0(t_1)$.

Следствие 23.1. *Пусть дополнительно к предположениям теоремы 23.1 отображение* g *квазидифференцируемо в точке* $x^0(t_1)$.

Тогда, если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *является оптимальным по Слейтеру в задаче* (VPS_U), *то*

$$\overline{\partial}(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) + E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), \quad (23.13)$$

где $D(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1))]$ *— квазидифференциал композиции* $(s_{\precsim}\circ g)$ *в точке* $x^0(t_1)$.

Следствие 23.2. *Если дополнительно к предположениям теоремы 23.1 отображение* g *дифференцируемо по Фреше в точке* $x^0(t_1)$, *то для того чтобы допустимый процесс* $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *был оптимальным по Слейтеру в задаче* (VPS_U), *необходимо, чтобы существовал существенно положительный линейный функционал* $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ *такой, что*

$$-(g'(x^0(t_1)))^* y^* \in E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \quad (23.14)$$

Здесь $g'(x^0(t_1)) : X \to Y$ *— производная Фреше отображения* g *в точке* $x^0(t_1)$.

В традиционной форме утверждение следствия 23.2 может быть переформулировано следующим образом.

Для того чтобы допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *был оптимальным по Слейтеру в задаче* (VPS_U), *необходимо, чтобы для некоторого существенно положительного линейного функционала* $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ *решение* $\psi(t), t \in T$, *сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = -\psi f_x^0(t), t \in T,$$

подчиненное терминальному условию

$$\psi(t_1) = -y^* g'(x^0(t_1)), \quad (23.15)$$

удовлетворяло условию Эйлера

$$\psi(t) f_u^0(t) \equiv 0, t \in T.$$

Таким образом, необходимое условие оптимальности по Слейтеру, данное в теореме 23.1 и следствии 23.1, обобщает на случай негладкого показателя качества классическое необходимое условие Эйлера. Негладкость показателя качества проявляется при этом лишь в условии трансверсальности, которое принимает форму (23.12) (или 23.13), само же условие Эйлера сохраняет традиционную форму (см. (23.5)).

23.3. Рассмотрим сейчас случай, когда конус положительных векторов Y^+, соответствующий заданному на пространстве оценок Y отношению предпорядка $\precsim$, имеет пустую внутренность. Аналогично § 20 зададим на Y сублинейную непрерывную функцию $\sigma_{\precsim} : Y \to \mathbb{R}$ и оператор ортогонального проектирования $P_{\precsim} : Y \to Y$ такие, что для любых $y_1, y_2 \in Y$ соотношение $y_1 \prec\!\!\prec y_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma_{\precsim}(y_1 - y_2) < 0$ и $P_{\precsim}(y_1 - y_2) = 0$ (см. предложение 20.1).

Пусть допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U). Так как вектор $x^0(t_1)$ доставляет отображению $g : X \to Y$ слабый $\precsim$–минимум на множестве достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U, то, воспользовавшись на этот раз теоремой 20.1 б), получим

$$\sigma_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in T(x^0(t_1)|\widehat{\Omega}(t_1)), \tag{23.16}$$

где $\widehat{\Omega}(t_1) = \{x \in \Omega(t_1) \mid P_{\precsim}(g(x) - g(x^0(t_1))) = 0\}$.

Будем говорить, что допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{E}')$, если

$(\mathcal{E}_1')$ отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ непрерывно дифференцируемо по Фреше в некоторой открытой области, содержащей кривую $\{(t, u^0(t), x^0(t)) | t \in T\}$;

$(\mathcal{E}_2')$ композиция $P_{\precsim} \circ g : X \to Y$ непрерывно дифференцируема по Фреше в окрестности точки $x^0(t_1)$;

$(\mathcal{E}_3')$ имеет место равенство

$$(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \mathrm{Im} P_{\precsim}. \tag{23.17}$$

Поскольку имеет место включение

$$(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset \mathrm{Im} P_{\precsim}$$

то равенство (23.17) эквивалентно включению

$$\mathrm{Im} P_{\precsim} \subset (P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)),$$

которое в свою очередь эквивалентно двойственному включению

$$\{y^* \in \mathrm{Im} P^*_{\precsim} | y^* \circ g'(x^0(t_1)) \in E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))\} \subset \mathrm{Ker} P^*_{\precsim}.$$

Так как $\mathrm{Im}P^*_{\precsim} \cap \mathrm{Ker}P^*_{\precsim} = \{0\}$, то последнее включение, а следовательно, и (23.17) равносильны равенству

$$[(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1))] \cap E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \{0\},$$

где $(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)) := \{x^* \in X^* \mid x^* = y^* \circ g'(x^0(t_1)), y^* \in \mathrm{Im}P^*_{\precsim}\}$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием выполнения равенства (23.17) является отсутствие нетривиальных решений $\psi(t), t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f^0_x(t), t \in T,$$

удовлетворяющих условию Эйлера (23.5) и терминальному условию

$$\psi(t_1) \in (\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)).$$

Лемма 23.1. *Если допустимый процесс* $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *удовлетворяет в задаче* (VPS_U) *условию регулярности* $(\mathcal{E}')$, *то*

$$\mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\widehat{\Omega}(t_1)). \quad (23.18)$$

Доказательство. Пусть вариация управления $\delta u \in KC(T;V)$ такова, что $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) \in \mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))]$. Покажем, что $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) \in T(x^0(t_1)|\widehat{\Omega}(t_1))$. Для этого зададим вариации управления $\delta u_1, \ldots, \delta u_k$ такие, что векторы $y_i := (P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, образуют базис в $\mathrm{Im}P_{\precsim}$. Существование таких вариаций управления следует из равенства (23.17) условия регулярности $(\mathcal{E}')$.

Рассмотрим семейство управлений

$$u(\varepsilon, \alpha) : u(t; \varepsilon, \alpha) = u^0(t) + \varepsilon \delta u(t) + \alpha_1 \delta u_1(t) + \ldots \ldots + \alpha_k \delta u_k(t), t \in T,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$.

Поскольку область определения $\mathcal{D}(S)$ системы S, определяемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, u, x), x(t_0) = x_0, t \in T,$$

является открытой в конечной топологии пространства $KC(Y;T)$ [60, 61], то в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^{1+k}$ можно определить отображение

$$w : (\varepsilon, \alpha) \to P_{\precsim}(g(x_{u(\varepsilon,\alpha)}(t_1)) - g(x^0(t_1))).$$

Отметим, что $w(0,0) = 0$. Кроме того, из свойств решений дифференциальных уравнений и свойств g и $P_{\precsim}$ следует, что отображение w является непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности, причем $w'_{\alpha_i}(0,0) = y_i, i = 1, 2, \ldots, k$. Последние равенства означают невырожденность производной $w'_{\alpha}(0,0)$. Таким образом, выполнены все условия классической теоремы о неявной функции [11]. Следовательно, уравнение $w(\varepsilon, \alpha) = 0$ определяет в некоторой окрестности нуля $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ непрерывно дифференцируемую функцию $\varepsilon \to \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^k$ такую, что $\alpha(0) = 0$ и $w(\varepsilon, \alpha(\varepsilon)) = 0$ при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Так как

$$w'_{\varepsilon}(0,0) = (P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) = 0,$$

то, продифференцировав последнее тождество, получим, кроме того, равенство $\alpha'(0) = 0$.

Итак, для некоторого ε'_0, $0 < \varepsilon'_0 \leq \varepsilon_0$, управления однопараметрического семейства

$$u(\varepsilon) : u(t; \varepsilon, \alpha(\varepsilon)) = u^0(t) + \varepsilon\delta u(t) + \alpha_1(\varepsilon)\delta u_1(t) + \ldots + \alpha_k(\varepsilon)\delta u_k(t),$$

$$t \in T, \varepsilon \in (-\varepsilon'_0, \varepsilon'_0),$$

являются допустимыми, а соответствующие им допустимые траектории $x_\varepsilon(t)$, $t \in T$, системы S_U удовлетворяют равенству

$$P_{\precsim}(g(x_\varepsilon(t_1)) - g(x^0(t_1))) = 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (-\varepsilon'_0, \varepsilon'_0).$$

Это означает, что кривая $x_\varepsilon(t_1), \varepsilon \in (-\varepsilon'_0, \varepsilon'_0)$ принадлежит множеству $\widehat{\Omega}(t_1)$. Используя свойства функций $\alpha_i(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, k$, нетрудно получить

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_\varepsilon(t_1) - x^0(t_1)}{\varepsilon} = \delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u)$$

и, следовательно, $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) \in T(x^0(t_1)|\widehat{\Omega}(t_1))$. Лемма доказана.

Теорема 23.2. *Пусть допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{E}')$ и пусть отображение $g : X \to Y$ является равномерно дифференцируемым по направлениям а точке $x^0(t_1)$.*

Если процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), то для любого $\varepsilon > 0$ и любого ε –квазидифференциала $D_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))]$ композиции $\sigma_{\precsim} \circ g$ в точке $x^0(t_1)$ имеет место включение

$$\overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) + \varepsilon B^* +$$

$$+(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)) + E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \tag{23.19}$$

Доказательство. Из неравенства (23.16) и включения (23.18) следует, что

$$\sigma_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|h)) \geq 0 \text{ для всех } h \in \mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Так как аннулятор пересечения $\mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ равен $(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)) + E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, то в двойственной форме последнее неравенство эквивалентно включению (23.19). Теорема доказана.

Следствие 23.3. *Пусть дополнительно к предположениям теоремы 23.2 отображение $g : X \to Y$ является квазидифференцируемым в точке $x^0(t_1)$.*

Тогда если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), то

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) +$$

$$+(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)) + E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), \tag{23.20}$$

где $D_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))]$ — квазидифференциал композиции $\sigma_{\precsim} \circ g$ в точке $x^0(t_1)$.

Следствие 23.4. *Пусть отображение $g : X \to Y$ дифференцируемо по Фреше в точке $x^0(t_1)$. Тогда если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U) и удовлетворяет условию регулярности $(\mathcal{E}')$, то существует существенно положительный линейный функционал $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ такой, что*

$$-(g'(x^0(t_1)))^* y^* \in E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \tag{23.21}$$

Доказательство. Предположения следствия 23.4 обеспечивают выполнение требований следствия 23.3. Поэтому имеет место соотношение (23.20), которое в данном случае принимает вид

$$0 \in (g'(x^0(t_1)))^*(\partial\sigma_{\precsim} + \mathrm{Im}P^*_{\precsim}) + E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Так как $\partial\sigma_{\precsim} + \mathrm{Im}P^*_{\precsim} \subset (Y^*)^{\succ}$, то из последнего включения следует справедливость (23.21) с некоторым существенно положительным функционалом y^*. Следствие доказано.

23.4. Если $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \neq X$, то включение $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ может быть собственным. В этом случае, построив более широкое, чем $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, подмножество касательного конуса $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, можно получить новые необходимые условия оптимальности по Слейтеру для $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$. Построим такое подмножество, используя вторые вариации траектории, соответствующие вырожденным вариациям управления.

Будем говорить, что вариация управления $\delta u \in KC(T; V)$ является *вырожденной* для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ системы S_U, если $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) = 0$.

Множество всех вариаций управления, вырожденных для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$, будем обозначать через $\mathcal{W}(u^0, x^0)$.

Легко видеть, что $\mathcal{W}(u^0, x^0)$ является выпуклым конусом в пространстве кусочно-непрерывных функций $KC(T; V)$.

Предположим, что отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой открытой области, содержащей кривую $\{(t, u^0(t), x^0(t))|\ t \in T\}$. Тогда для вырожденных вариаций управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ справедливо представление

$$x_{u^0+\varepsilon\delta u}(t_1) = x^0(t_1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) + o(\varepsilon^2), \qquad (23.22)$$

где $\varepsilon^{-2} o(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Вторая вариация $\delta^2 x_{u^0}(t\,|\,\delta u, \delta u), t \in T$, *траектории* $x^0(t)$, $t \in T$, является решением дифференциального уравнения

$$\delta^2 \dot{x} = f_x^0(t)\delta^2 x + (f_{xx}^0(t)\delta^1 x_{u^0}(t|\delta u) + f_{ux}^0(t)\delta u(t))\delta^1 x_u(t|\delta u) +$$

$$+ (f_{xu}^0(t)\delta^1 x_{u^0}(t|\delta u) + f_{uu}^0(t)\delta u(t))\delta u(t)$$

с начальным условием

$$\delta^2 x_{u^0}(t_0|\delta u, \delta u) = 0$$

и может быть представлена в интегральной форме

$$\delta^2 x_{u^0}(t|\delta u, \delta u) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)[f_{xx}^0(\tau)\delta^1 x_{u^0}(\tau|\delta u) + f_{ux}^0(\tau)\delta u(\tau)]\delta^1 x_{u^0}(\tau|\delta u)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)[f_{xu}^0(\tau)\delta^1 x_{u^0}(\tau|\delta u) + f_{uu}^0(\tau)\delta u(\tau)]\delta u(\tau)d\tau. \qquad (23.23)$$

Из равенства (23.22) следует, что

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) \in T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \text{ для любой } \delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0).$$

Заметим, что наряду с вектором $\delta^2 x_{u^0}(t_1 \,|\, \delta u, \delta u)$, где $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$, конус $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ содержит весь луч $\{\alpha\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u)|\alpha \geq 0\}$. Более того,

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta v) + \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) \in T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \tag{23.24}$$

для любых $\delta v \in KC(T, V)$ и любых $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$.

Действительно, рассмотрим классическое возмущение допустимого управления $u^0(t), t \in T$, следующего вида:

$$u(\varepsilon) := u^0 + \varepsilon\delta u + \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta v, \text{ где } \delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0), \delta v \in KC(T, V).$$

Терминальное значение соответствующей возмущенной траектории $x_{u^0+\varepsilon\delta u+\frac{1}{2}\varepsilon^2\delta v}(t_1)$ может быть представлено в виде

$$x_{u^0+\varepsilon\delta u+\frac{1}{2}\varepsilon^2\delta v}(t_1) = x^0(t_1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta v) + \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u)) + o(\varepsilon^2),$$

откуда следует включение (23.24).

Для каждой вырожденной вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ определим выпуклый конус

$$L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) :=$$
$$= \{\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta v) + \mu\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u)|\mu \geq 0, \delta v \in KC(T; V)\},$$

который будем называть *δu-касательным конусом Лагранжа* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$.

Пусть $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$. Очевидно, что $L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ совпадает с $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, если $\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) \in E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, и, следовательно, в этом случае δu-касательный конус Лагранжа как локальная аппроксимация множества достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$ не несет дополнительной информации по сравнению с касательным подпространством Эйлера $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Если же $\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) \notin E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, то $L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ — полуплоскость, размерность которой на единицу больше размерности касательного подпространства $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, причем $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ является краем для $L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$.

Линейный функционал $x^* \in X$ назовем *δu-нормальным функционалом Лагранжа* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$, если

$$\langle z, x^* \rangle \leq 0 \text{ для всех } z \in L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Выпуклый конус $L^*_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset X^*$, состоящий из δu-нормальных функционалов Лагранжа, назовем *δu-нормальным конусом Лагранжа* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$.

Так как $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ для любой вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$, то $L^*_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Из определения конуса $L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ следует, что нормальный функционал Эйлера $x^* \in E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ является δu-нормальным функционалом Лагранжа тогда и только тогда, когда $\langle \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u),\ x^* \rangle \leq 0$.

Так как $L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ для всех $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$, то и конус

$$L(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) := \bigcup_{\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)} L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \tag{23.25}$$

также принадлежит $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$.

Будем называть конус $L(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, определенный равенством (23.25), *касательным конусом Лагранжа* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$.

Касательный конус Лагранжа $L(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ является связкой полуплоскостей $L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ с общим краем $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Таким образом, в общем случае касательный конус Лагранжа $L(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ может быть невыпуклым.

Будем говорить, что допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{E}'')$, если

$(\mathcal{E}_1^{''})$ отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше в некоторой открытой области, содержащей кривую $\{(t, u^0(t), x^0(t)) \mid t \in T\}$;

$(\mathcal{E}_2^{''})$ композиция $P_{\precsim} \circ g : X \to Y$ дважды непрерывно дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности точки $x^0(t_1)$;

$(\mathcal{E}_3^{''})$ имеет место равенство (23.17).

Лемма 23.2. *Если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{E}^{''})$, то для любой вырожденной вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ имеет место включение*

$$\mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \tag{23.26}$$

Доказательство. Пусть вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ и $\delta v \in KC(T; V)$ таковы, что

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta v) + \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) \in \mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))].$$

Зафиксируем вариации управления $\delta u_1, \ldots, \delta u_k$ такие, что векторы $y_i := (P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u_i)$, $i = l, 2, \ldots, k$, образуют базис в

$\mathrm{Im}P_{\precsim}$ и рассмотрим семейство управлений

$$u(\varepsilon,\alpha): u(t;\varepsilon,\alpha) = u^0(t) + \varepsilon\delta u(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta v(t) +$$

$$+\alpha_1\delta u_1(t) + \ldots + \alpha_k\delta u_k(t), t \in T,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$.

Аналогично доказательству леммы 23.1 можно доказать существование функции $\varepsilon \to \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^k$, дважды непрерывно дифференцируемой на некотором интервале $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющей тождеству

$$P_{\precsim}(g(x_{u(\varepsilon,\alpha(\varepsilon))}(t_1)) - g(x^0(t_1))) \equiv 0, \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

и такой, что $\alpha(0) = \alpha'(0) = \alpha''(0) = 0$.

Здесь $x_{u(\varepsilon,\alpha(\varepsilon))}(t), t \in T,$ — траектория системы S_U, соответствующая управлению $u(t;\varepsilon,\alpha(\varepsilon)), t \in T$.

Кроме того, можно убедиться, что имеют место равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(x_{u(\varepsilon,\alpha(\varepsilon))}(t_1) - x^0(t_1)) = \delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}(x_{u(\varepsilon,\alpha(\varepsilon))}(t_1) - x^0(t_1)) = \frac{1}{2}(\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta v) + \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u)),$$

из которых следует утверждение леммы.

Теорема 23.3. *Пусть допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{E}'')$ и отображение $g: X \to Y$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0(t_1)$.*

Если процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным, по Слейтеру в задаче (VPS_U), то для любого $\varepsilon > 0$ и любого ε–квазидифференциала $D_\varepsilon(\sigma_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1))]$ композиции $\sigma_{\precsim}\circ g$ в точке $x^0(t_1)$ включение

$$\overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1)) + \varepsilon B^* +$$

$$+(\mathrm{Im}P^*_{\precsim})\circ g'(x^0(t_1)) + L^*_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \tag{23.27}$$

имеет место для любой вырожденной вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$.

Доказательство. Из неравенства (23.16) и включения (23.26) следует, что при любой вырожденной вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ неравенство $\sigma_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|h)) \geq 0$ выполняется для всех $h \in \mathrm{Ker}[(P_{\precsim}\circ g)'(x^0(t_1))] \cap L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Это неравенство эквивалентно включению (23.27), поскольку аннулятор пересечения

$\mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap L_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ равен $(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1))+$ $+L^*_{\delta u}x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Теорема доказана.

Следствие 23.5. *Пусть дополнительно к предположениям теоремы 23.3 отображение* $g : X \to Y$ *являеся квазидифференцируемым в точке* $x^0(t_1)$.

Если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *является оптимальным по Слейтеру в задаче* (VPS_U), *то для любой вырожденной вариации управления* $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ *имеет место включение*

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))+$$

$$+(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)) + L^*_{\delta u}(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), \tag{23.28}$$

где $D(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))]$ — *квазидифференциал композиции* $\sigma_{\precsim} \circ g$ *в точке* $x^0(t_1)$.

Следствие 23.6. *Пусть отображение* $g : X \to Y$ *дифференцируемо по Фреше в точке* $x^0(t_1)$. *Если допустимый процесс* $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *является оптимальным по Слейтеру в задаче* (VPS_U) *и удовлетворяет условию регулярности* $(\mathcal{E}'')$, *то для любой вырожденной вариации управления* $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ *найдется существенно положительный линейный функционал* $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ *такой, что выполнено включение (23.21) и*

$$\langle g'(x^0(t_1))\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u), y^*\rangle \le 0. \tag{23.29}$$

Пример 23.1. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$G(u(\cdot), x(\cdot)) = g(x(1)) = x_2(1) - \min\{(x_2(1)+1)^2, (x_1(1)-1)^2\} + 1,$$

заданного на множестве допустимых процессов системы

$$\dot{x}_1 = u_2,\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 4x_1u_1 + u_1^2, x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$U = \{(u_1, u_2)||u_i| \le 1,\ i = 1, 2\}, T = [0, 1].$$

Исследуем на оптимальность допустимый процесс $(u^0(t), x^0(t)) =$ $= (0, 0)$. Так как терминальное значение первой вариации траектории задается соотношением

$$\delta^1 x_1(1|\delta u) = \int_0^1 \delta u_2(\tau)d\tau,$$

$$\delta^1 x_2(1|\delta u) = 0,$$

то касательное и нормальное подпространства Эйлера имеют вид

$$E(x^0(1)|\Omega(1)) = \{(\alpha, 0)|\alpha \in \mathbb{R}\},$$

$$E^*(x^0(1)|\Omega(1)) = \{(0, \lambda)|\,\lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Функция $g(x_1, x_2) = x_2 - \min\{(x_1+1)^2, (x_1-1)^2\} + 1$, задающая показатель качества, является квазидифференцируемой в точке $x^0 = (0, 0)$, при этом ее квазидифференциал есть

$$Dg(x^0) = [\{(\mu, 1)|\mu \in [-2, 2]\}, \{0\}].$$

Необходимое условие Эйлера (23.20) имеет в данном случае вид

$$0 \in \{(\mu, 1)|\mu \in [-2, 2]\} + \{(0, \lambda)|\lambda \in \mathbb{R}\}$$

и, очевидно, выполняется.

Далее для исследования процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ применим необходимое условие (23.28). Терминальное значение второй вариации траектории определяется соотношениями

$$\delta^2 x_1(1|\delta u,\, \delta u) = 0,$$

$$\delta^2 x_2(1|\delta u,\, \delta u) = \int\limits_0^1 \left[2\left(\int\limits_0^t \delta u_2(\tau)d\tau\right)^2 + 8\delta u_1(t)\int\limits_0^t \delta u_2(\tau)d\tau + 2\delta u_1^2(t)\right]dt.$$

Вариация управления

$$\delta\overline{u}_1(t) = -\frac{t}{2},\ \delta\overline{u}_2(t) = \begin{cases} \ \ 1, & 0 \le t < \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

вырождена, причем $\delta^2 x_1(1|\delta\overline{u}, \delta\overline{u}) = 0, \delta^2 x_2(1|\delta\overline{u}, \delta\overline{u}) = -\dfrac{1}{6}$. Соответствующие этой вариации управления касательный и нормальный конусы Лагранжа есть

$$L_{\delta\overline{u}}(x^0(1)|\Omega(1)) = \{(\alpha_1, \alpha_2)|\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 < 0\},$$

$$L^*_{\delta\overline{u}}(x^0(1)|\Omega(1)) = \{(0, \lambda)|\lambda > 0\}.$$

Так как $0 \notin \{(\mu, 1)|\mu \in [-2, 2]\} + \{(0, \lambda)|\lambda > 0\}$, то необходимое условие (23.28) не выполнено. Следовательно, допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot)) = (0, 0)$ не является оптимальным.

§ 24. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И УСЛОВИЕ В МАТРИЧНЫХ ИМПУЛЬСАХ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СЛЕЙТЕРУ ПРОЦЕССОВ

Применение классических возмущений не выводит исследуемое допустимое управление $u^0(t), t \in T,$ из класса допустимых лишь при условии, что $u^0(t) \in \operatorname{int} U,\ t \in T.$ Однако для задач оптимального управления наиболее типичны случаи, когда значения оптимального управления принадлежат границе множества $U.$ Множество U вообще может не иметь внутренних точек или, более того, быть дискретным, т. е. состоять из изолированных точек. Поэтому исключительную важность для исследования задач оптимального управления имеют возмущения игольчатого типа, которые обеспечивают принадлежность возмущенных управлений классу допустимых независимо от свойств множества $U.$

Впервые игольчатые вариации ввел Е. Дж. Макшейн [322]. Однако подлинное их значение для задач оптимального управления было раскрыто лишь после доказательства принципа максимума для нелинейных систем [24, 207, 210]. Введем основные понятия, связанные с игольчатыми возмущениями допустимых процессов.

Будем предполагать, что система управления

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f(t, u(t), x(t)), x(t_0) = x^0, \\ u(t) \in U, t \in T := [t_0, t_1], \end{gathered} \tag{SU}$$

удовлетворяет следующим требованиям гладкости: отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ непрерывно по совокупности переменных и дифференцируемо по переменной $x,$ при этом производная $f_x : \mathbb{R} \times V \times X \to \mathcal{L}(X, X)$ также непрерывна по совокупности переменных.

24.1. Пусть задан допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ системы $S_U.$ Зафиксируем момент времени $\theta \in (t_0, t_1),$ вектор $v \in U$ и вещественную неотрицательную функцию $\rho(\varepsilon)$ скалярного параметра $\varepsilon,$ определенную и непрерывную в некоторой правосторонней окрестности нуля и удовлетворяющую, кроме того, условию $\rho(0) = 0.$

Игольчатой вариацией допустимого управления $u^0(t), t \in T,$ называется семейство (по параметру ε) функций

$$\delta u(t|\theta, v, \rho(\varepsilon)) := \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \rho(\varepsilon)), \\ \quad 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \rho(\varepsilon)). \end{cases} \tag{24.1}$$

Отметим, что в игольчатых вариациях, которые использовались в работе [210], рассматривались линейные функции $\rho(\varepsilon),$ т. е.

$\rho(\varepsilon) = l\varepsilon,\ l > 0.$ Как мы увидим ниже, такого класса функций вполне достаточно для вывода необходимых условий оптимальности первого порядка в простейших задачах оптимального управления.

На множестве всех игольчатых вариаций допустимого управления $u^0(t),\ t \in T,$ введем операцию пакетного суммирования, позволяющую конструировать из игольчатых вариаций более сложные возмущения допустимого управления.

Рассмотрим конечный набор игольчатых вариаций

$$\delta u(t|\theta_1, v_1, \rho_1(\varepsilon)), \ldots, \delta u(t|\theta_\nu, v_\nu, \rho_\nu(\varepsilon)), \tag{24.2}$$

допустимого управления $u^0(t), t \in T.$

Поскольку все рассматриваемые ниже игольчатые вариации являются вариациями одного и того же допустимого управления $u^0(t),$ $t \in T,$ то условимся не указывать каждый раз, о вариациях какого допустимого управления идет речь.

Определение операции пакетного суммирования проведем в два этапа. Сначала сделаем это для случая, когда во всех вариациях набора (24.2) момент варьирования один и тот же, т. е. $\theta_1 = \theta_2 = \ldots$ $\ldots = \theta_\nu := \theta.$

Пакетной суммой (или просто *пакетом*) игольчатых вариаций $\delta u(t|\theta, v_1, \rho_1(\varepsilon)), \ldots, \delta u(t|\theta, v_\nu, \rho_\nu(\varepsilon))$ называется семейство функций

$$\bigoplus_{i=1}^{\nu} \delta u(t|\theta, v_i, \rho_i(\varepsilon)) :=$$

$$= \begin{cases} v_j - u^0(t), & t \in [\theta + \sum\limits_{i=1}^{j-1} \rho_i(\varepsilon), \theta + \sum\limits_{i=1}^{j} \rho_i(\varepsilon)), j = 1, 2, \ldots, \nu, \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \sum\limits_{i=1}^{\nu} \rho_i(\varepsilon)). \end{cases} \tag{24.3}$$

Здесь и ниже предполагается, что $\sum\limits_{s=i}^{i-1} a_s = 0$ при любых $i = 1, 2, \ldots, \nu$ и любых слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_\nu.$

Легко видеть, что пакетная сумма игольчатых вариаций, определенная соотношением (24.3), зависит от порядка суммирования вариаций.

Рассмотрим общий случай, когда среди моментов варьирования у игольчатых вариаций из набора (24.2) могут быть как совпадающие моменты, так и различные. Прежде всего зададим на множестве индексов $J := \{1, 2, \ldots, \nu\}$ отношение эквивалентности, положив индексы i и j эквивалентными, если $\theta_i = \theta_j,$ и пусть $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$ — разбиение множества $J,$ соответствующее этому отношению эквивалентности.

Пакетной суммой (*пакетом*) игольчатых вариаций $\delta u(t|\theta_1, v_1, \rho_1(\varepsilon)), \ldots, \delta u(t|\theta_\nu, v_\nu, \rho_\nu(\varepsilon))$ называется семейство функций

$$\bigoplus_{i=1}^{\nu} \delta u(t|\theta_i, v_i, \rho_i(\varepsilon)) :=$$

$$= \sum_{s=1}^{\mu} \bigoplus_{i \in J_s} \delta u(t|\theta_i, v_i, \rho_i(\varepsilon)), t \in T, \tag{24.4}$$

где $\bigoplus_{i \in J_s} \delta u(t|\theta_i, v_i, \rho_i(\varepsilon)), t \in T,$ определены в соответствии с (24.3), а символ $\sum$ обозначает обычное алгебраическое суммирование элементов векторного пространства $KC(T; V)$.

Заметим, что если моменты варьирования $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ попарно различны, то пакетная сумма игольчатых вариаций сводится к обычной алгебраической сумме.

Пакет игольчатых вариаций введен в теорию оптимального управления Р. Габасовым и Ф.М. Кирилловой [55, 58, 59] . Данное здесь определение пакета отличается от оригинального определения способом суммирования игольчатых вариаций в пакете.

Игольчатым возмущением допустимого управления $u^0(t), t \in T,$ будем называть семейство управлений

$$u(\varepsilon) : u(t\,|\,\varepsilon) := u^0(t) + \bigoplus_{i=1}^{\nu} \delta u(t|\ \theta_i, v_i, \rho_i(\varepsilon)), t \in T. \tag{24.5}$$

Так как функции $\rho_1(\varepsilon), \ldots, \rho_\nu(\varepsilon)$ непрерывны справа в точке $\varepsilon = 0$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенное управление $u(t\,|\,\varepsilon)$, $t \in T$, удовлетворяет ограничению $u(t\,|\,\varepsilon) \in U, t \in T$. Кроме того, из общих теорем теории обыкновенных дифферен- циальных уравнений [183, 208] можно получить, что при малых $\varepsilon > 0$ дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, u(t\,|\,\varepsilon), x)$ и начальное условие $x(t_0) = x_0$ определяют на всем промежутке T единственную траекторию $x_\varepsilon(t)$, $t \in T$, причем $x_\varepsilon(t) \to x_{u^0}(t)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на промежутке T. Таким образом, игольчатое возмущение допустимого управления $u^0(t), t \in T$, определенное соотношением (24.5), является при достаточно малых $\varepsilon > 0$ допустимым управлением системы S_U.

Замечание 24.1. Пакетная сумма конечного числа пакетов игольчатых вариаций управления $u^0(t), t \in T$, определяется как пакетная сумма составляющих их игольчатых вариаций, при этом суммирование выполняется в соответствии с порядком пакетов, а также порядком игольчатых вариаций в пакетах-слагаемых. Для обозначения пакетного суммирования двух пакетов будем использовать символ $\oplus$.

24.2. Итак, пусть $u(t\,|\,\varepsilon), t \in T,$ — произвольное игольчатое возмущение допустимого управления $u^0(t), t \in T,$ а $x_\varepsilon(t), t \in T,$ — соответствующая траектория системы управления S_U. Так как $x_\varepsilon(t_1) \in \Omega(t_1)$ для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$ где $\varepsilon_0 > 0$ — некоторое заданное число, а $\Omega(t_1)$ — множество достижимости системы управления S_U к моменту $t_1,$ и $x_\varepsilon(t_1) \to x_{u^0}(t_1)$ при $\varepsilon \to 0,$ то предел (если, конечно, он существует)

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1) := \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-l}(x_\varepsilon(t_1) - x^0(t_1)) \tag{24.6}$$

является касательным вектором к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1),$ т. е. $\delta^1 x_{u^0}(t_1) \in T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$

Вектор $\delta^1 x_{u^0}(t_1),$ определенный равенством (24.6), называется *первой (игольчатой) вариацией допустимой траектории* $x^0(t),$ $t \in T,$ вычисленной в момент $t = t_1.$

Если функции $\rho_1(\varepsilon), \ldots, p_\nu(\varepsilon)$ дифференцируемы справа в точке $\varepsilon = 0,$ то из теорем о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным данным [183, 208] получим (ср. с [24, 56, 210])

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1) = \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i^{'}(0) F(t_1, \theta_i) \Delta_{v_i} f^0(\theta_i), \tag{24.7}$$

где $\Delta_v f^0(t) = f(t, v, x^0(t)) - f(t, u^0(t), x^0(t)), t \in T;$ $\rho_i^{'}(0)$ — правосторонняя производная функции $\rho_i(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0.$

Из равенства (24.7) следует, что первая (игольчатая) вариация траектории не зависит от порядка суммирования игольчатых вариаций в пакете.

Из представления (24.7) получаем, что для любого линейного функционала $x^* \in X^*$ справедливо равенство

$$\langle \delta^1 x_{u^0}(t_1), x^* \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i^{'}(0) \psi(\theta_i; x^*) \Delta_{v_i} f^0(\theta_i), \tag{24.8}$$

где функция $\psi(t; x^*) = x^* F(t_1, t), t \in T,$ может быть определена как решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f_x^0(t), t \in T, \tag{24.9}$$

подчиненное терминальному условию

$$\psi(t_1; x^*) = x^*. \tag{24.10}$$

Предположим, что функции $\rho_1(\varepsilon), \ldots, \rho_\nu(\varepsilon)$ имеют в нуле вторую правостороннюю производную, т. е. при любом $i = 1, 2, \ldots, \nu$ существует предел

$$\rho_i^{''}(0) := \lim_{\varepsilon\to+0} 2\frac{\rho_i(\varepsilon) - \varepsilon\rho_i^{'}(0)}{\varepsilon^2}.$$

Если, кроме того, отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ дважды непрерывно дифференцируемо по переменной x, то существует предел

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1) := 2\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{x_\varepsilon(t_1) - x^0(t_1) - \varepsilon\delta^1 x_{u^0}(t_1)}{\varepsilon^2} \tag{24.11}$$

Вектор $\delta^2 x_{u^0}(t_1)$ называется *второй (игольчатой) вариацией допустимой траектории* $x^0(t), t \in T$, вычисленной в момент t_1.

Зададим линейный функционал $x^* \in X^*$ и линейный оператор $B \in \mathcal{L}(X, X^*)$ и найдем представление для выражения $\langle\delta^2 x_{u^0}(t_1), x^*\rangle + \langle\delta^1 x_{u^0}(t_1), B\delta^1 x_{u^0}(t_1)\rangle$. Будем считать при этом, что в соответствующем пакете вариаций управления моменты варьирования $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ упорядочены по возрастанию в соответствии с их нумерацией, т. е. $\theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_\nu$. Нетрудно видеть, что такое предположение не ограничивает общности рассмотрения.

Аргументируя аналогично [55, 228], придем к следующему равенству:

$$\begin{gathered}
\langle\delta^2 x_{u^0}(t_1), x^*\rangle + \langle\delta^1 x_{u^0}(t_1), B\delta^1 x_{u^0}(t_1)\rangle = \\
= \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i^{''}(0)\psi(\theta_i; x^*)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i) + \\
+ \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i^{'}(0)\big(\rho_i^{'}(0) + 2\sum_{s=\underline{\nu}(i)}^{i-1} \rho_s^{'}(0)\big)\frac{d}{dt}\big(\psi(t; x^*)\Delta_{v_i} f^0(t)\big)|_{t=\theta_i+0} + \\
+ \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i^{'}(0)\big(\psi(\theta_i; x^*)(\Delta_{v_i} f)_x^0(\theta_i) + \\
+ \Psi(\theta_i; x^*, B)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i)\big)\big(\rho_i^{'}(0)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i)) + \\
+ 2\sum_{s=1}^{i-1} \rho_s^{'}(0) F(\theta_i, \theta_s)\Delta_{v_s} f^0(\theta_s)\big).
\end{gathered} \tag{24.12}$$

Здесь $\underline{\nu}(i) = \min\{s \in \{1, 2, \ldots, \nu\} | \theta_i = \theta_s\}$; функция $\psi(\cdot; x^*) : T \to \to X^*$ определяется соотношениями (24.9) и (24.10), а функция $\Psi(\cdot; x^*, B) : T \to \mathcal{L}(X, X^*)$ задается равенством

$$\Psi(t; x^*, B) = F^*(t_1, t)BF(t_1, t) +$$

$$+\int_{t}^{t_1} F^*(s,t)[\psi(s;x^*)f^0_{xx}(s)]F(s,t)ds$$

или как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\Psi} = -\Psi f^0_x(t) - (f^0_x)^*(t)\Psi - \psi(t;x^*)f^0_{xx}(t), \qquad (24.13)$$

удовлетворяющее терминальному условию

$$\Psi(t_1;x^*,B) = B. \qquad (24.14)$$

Впервые в теорию оптимального управления функция $\Psi(\cdot;x^*,B) : T \to \mathcal{L}(X,X^*)$ была введена Р. Габасовым [51, 52, 55] и была названа функцией матричных импульсов. Там же было получено выражение (24.12), соответствующее возмущению допустимого управления единственной игольчатой вариацией $\delta u(t|\theta,v,\varepsilon), t \in T$.

24.3. Рассмотрим множество $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, элементами которого являются первые вариации $\delta^1 x_{u^0}(t_1)$ траектории $x^0(t)$, $t \in T$, соответствующие всевозможным игольчатым возмущениям допустимого управления $u^0(t), t \in T$. Заметим, что если $\rho_1'(0) = \rho_2'(0)$, то игольчатым вариациям $\delta u(\cdot|\theta,v,\rho_1(\varepsilon))$ и $\delta u(\cdot|\theta,v,\rho_1(\varepsilon))$ соответствует одна и та же первая вариация траектории. Следовательно, для того чтобы получить множество $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, достаточно рассмотреть игольчатые вариации управления с линейными функциями $\rho(\varepsilon) = l\varepsilon, l > 0$.

Множество $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ — выпуклый конус [24, 210], причем его образующими являются первые вариации $\delta^1 x_{u^0}(t_1)$, соответствующие игольчатым вариациям вида $\delta u(t|\theta,v,l\varepsilon)$, $\theta \in (t_0,t_1), v \in U$, $l > 0$. В силу теоремы Каратеодори из выпуклого анализа [218] заключаем, что любой элемент конуса $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ может быть получен в результате возмущения допустимого управления $u^0(t), t \in T$, пакетной суммой n игольчатых вариаций с линейными функциями $\rho(\varepsilon)$ ($n = \mathrm{dim} X$) Таким образом,

$$B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) =$$

$$= \{\delta^1 x_{u^0}(t_1) = \sum_{i=1}^{n} l_i F(t_1,\theta_i)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i)|\ \theta_i \in (t_0,t_1), v_i \in U, l_i \ge 0\}.$$

Так как $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, то можно рассматривать $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ как локальную аппроксимацию множества достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$.

Будем называть конус $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ *касательным конусом Болтянского* к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$.

Нормальным конусом Болтянского к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$ назовем выпуклый замкнутый конус $B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset X^*$, сопряженный (в смысле выпуклого анализа) касательному конусу Болтянского $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$.

Таким образом,

$$B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) := \{x^* \in X^* | \langle h, x^* \rangle \leq 0 \text{ для всех } h \in B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))\}.$$

Линейные функционалы x^*, принадлежащие $B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, будем называть *нормальными функционалами Болтянского* (или просто *нормалями Болтянского*) к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$.

Предложение 24.1. *Линейный функционал $x^* \in X^*$ является нормальным функционалом Болтянского к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы управления S_U в точке $x^0(t_1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие максимума*

$$\psi(t;x^*)f(t,u^0(t),x^0(t)) = \max_{u \in U} \psi(t;x^*)f(t,u,x^0(t)), t \in T, \qquad (24.15)$$

где $\psi(t;x^*), t \in T$, — решение сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -\psi f_x^0(t), t \in T,$$

удовлетворяющее условию трансверсальности

$$\psi(t_1;x^*) = x^*.$$

Предположим, что отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ дифференцируемо по переменной u и выполняется включение $u^0(t) \in \text{int}U$, $t \in T$. Тогда из условия максимума (24.15) следует тождество

$$\psi(t;x^*)f_u^0(t) \equiv 0, t \in T.$$

Значит, любая нормаль Болтянского к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ в точке $x^0(t_1)$ является также нормалью Эйлера, т. е. $B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Из соотношения двойственности заключаем, что $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Таким образом, по сравнению с касательным подпространством Эйлера $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ касательный конус Болтянского $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ является более тонкой локальной аппроксимацией множества достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$. Вместе с тем в общем случае $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$ может быть грубее касательного конуса

$T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Если же $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = X$, то, разумеется, $T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = X$.

24.4. Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности по Слейтеру в задаче (VPS_U), используя в качестве локальной аппроксимации множества достижимости системы S_U касательный конус Болтянского.

Будем говорить, что допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) *условию регулярности* $(\mathcal{B})$, если

$(\mathcal{B}_1)$ отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ непрерывно и обладает непрерывной производной Фреше $f_x : \mathbb{R} \times V \times X \to \mathcal{L}(X, X)$ в некоторой открытой области, содержащей кривую $\{(t, u^0(t), x^0(t))|t \in T\}$;

$(\mathcal{B}_2)$ композиция $P_{\precsim} \circ g : X \to Y$ непрерывно дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности точки $x^0(t_1)$;

$(\mathcal{B}_3)$ имеет место равенство

$$(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \mathrm{Im}P_{\precsim}. \qquad (24.16)$$

Можно показать, что равенство (24.16) эквивалентно двойственному условию

$$[(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1))] \cap B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \{0\}.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием выполнения равенства (24.16) является отсутствие нетривиальных решений $\psi(t), t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f_x^0(t), t \in T,$$

удовлетворяющих принципу максимума (24.15) и терминальному условию

$$\psi(t_1) \in (\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)).$$

Замечание 24.2. Поскольку $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, то допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$, удовлетворяющий условию регулярности $(\mathcal{E}')$, удовлетворяет также условию регулярности $(\mathcal{B})$.

Лемма 24.1. *Если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{B})$, то*

$$\mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\widehat{\Omega}(t_1)), \qquad (24.17)$$

где $\widehat{\Omega}(t_1) = \{x \in \Omega(t_1)|P_{\precsim}(g(x) - g(x^0)(t_1))) = 0\}$.

Доказательство. В подпространстве $\mathrm{Im}P_{\precsim}$ зададим произвольный максимальный набор аффинно-независимых точек

$\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ $(k = \dim \mathrm{Im} P_{\precsim})$ такой, что нулевой вектор принадлежит относительной внутренности симплекса $S = \mathrm{conv}\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$. Для любого вектора $y \in S$ символом $\lambda(y) := (\lambda_0(y), \lambda_1(y), \dots, \lambda_k(y))$ будем обозначать вектор барицентрических координат для y в симплексе S. Тогда имеем $y = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(y) y_i, \lambda_i(y) \geq 0, \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_i(y) = 1$. В силу условия (24.16) существуют касательные векторы Болтянского $h_i \in B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), i = 0, 1, .., k,$ такие, что $y_i = (P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))h_i$, $i = 0, 1, \dots, k$. Будем считать, что касательные векторы Болтянского $h_i, i = 0, 1, \dots, k,$ порождены соответственно следующими пакетами игольчатых вариаций управления.

$$\delta u_i(\varepsilon) : \delta u_i(t|\,\varepsilon) = \bigoplus_{j=1}^{n} \delta u(t|\theta_{ij}, v_{ij}, l_{ij}\varepsilon), i = 0, 1, \dots, k,$$

где $\theta_{ij} \in (t_0, t_1), v_{ij} \in U, l_{ij} \geq 0, i = 0, 1, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n$. Согласно (24.7), имеем

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} F(t_1, \theta_{ij}) \Delta_{v_{ij}} f^0(\theta_{ij}), i = 0, 1, \dots, k.$$

Рассмотрим произвольный касательный вектор Болтянского $\overline{h} \in$ $\in B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, принадлежащий ядру оператора $(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))$. Покажем, что $\overline{h} \in T(x^0(t_1)|\widehat{\Omega}(t_1))$. С этой целью для каждого $y \in S$ образуем следующий пакет вариаций управления:

$$\delta u(y, \varepsilon) : \delta u(t\,|y, \varepsilon) = \bigoplus_{i=0}^{k} \bigoplus_{j=1}^{n} \delta u(t|\theta_{ij}, v_{ij}, \lambda_i(y) l_{ij}\varepsilon) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \delta u(t|\overline{\theta}_j, \overline{v}_j, \overline{l}_j\varepsilon), \tag{24.18}$$

где пакет $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} \delta u(t|\overline{\theta}_j, \overline{v}_j, \overline{l}_j\varepsilon)$ порождает касательный вектор $\overline{h}$. Заметим, что $\overline{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{l}_j F(t_1, \overline{\theta}_j) \Delta_{v_j} f^0(\overline{\theta}_j)$.

Пусть $x_{y,\varepsilon}(t), t \in T,$ — траектория системы управления S_U, соответствующая возмущенному управлению $u^0(t) + \delta u(t|y, \varepsilon), t \in T$. Рассмотрим семейство отображений $Q_1(\varepsilon) : S \to \mathrm{Im} P_{\precsim}$, определенное соотношениями

$$Q_1(\varepsilon) : Q_1(y, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{P_{\precsim}(g(x_{y,\varepsilon}(t_1)) - g(x^0(t_1)))}{\varepsilon}, & \text{при}\, \varepsilon > 0, \\ y, & \text{при}\, \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{24.19}$$

Отметим, что отображение $Q_1(y,\varepsilon)$ непрерывно по каждой переменной на $S\times[0,\varepsilon^0]$, где ε^0 — достаточно малое положительное число. Зададим замкнутый шар $R_\gamma := \{y \in \mathrm{Im}P_{\underset{\sim}{\prec}} \mid \|y\| \le \gamma\}$, принадлежащий симплексу S, и определим функцию

$$N(\varepsilon) := \max_{y\in R_\gamma} \|Q_1(y,0) - Q_1(y,\varepsilon)\|.$$

Функция $N(\varepsilon)$ непрерывна в некоторой правосторонней окрестности нуля и $N(0) = 0$. В силу непрерывности $N(\varepsilon)$ существует $\overline{\varepsilon} > 0$ такое, что $N(\varepsilon) \le \gamma$ для всех $0 \le \varepsilon \le \overline{\varepsilon}$. Зададим на $R_\gamma \times [0,\overline{\varepsilon}]$ отображение

$$(y,\varepsilon) \to \Gamma(y,\varepsilon) := Q_1(y,0) - Q_1(y,\varepsilon).$$

Нетрудно убедиться, что при каждом $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon})$ отображение $\Gamma(y,\varepsilon)$ отображает шар $R_{N(\varepsilon)} = \{y \in \mathrm{Im}P_{\underset{\sim}{\prec}} | \; \|y\| \le N(\varepsilon)\}$ в себя. По теореме Брауэра [96] о неподвижной точке $\Gamma(y,\varepsilon)$ имеет при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon)$ неподвижную точку в $R_{N(\varepsilon)}$, т. е. для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon)$ существует вектор $y(\varepsilon) \in R_{N(\varepsilon)}$ такой, что $\Gamma(y(\varepsilon),\varepsilon) = y(\varepsilon)$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon)$ существует $y(\varepsilon)$ для каждого

$$Q_1(y(\varepsilon),\varepsilon) = 0 \text{ и } \|y(\varepsilon)\| \le N(\varepsilon). \tag{24.20}$$

Так как $N(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, то $y(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Из этого следует, что функции $\rho_{ij}(\varepsilon) = l_{ij}\varepsilon\lambda_i(y(\varepsilon))$ имеют в нуле первую производную $\rho'_{ij}(0) = l_{ij}\varepsilon\lambda_i(0)$ (здесь используется то, что вектор барицентрических координат $\lambda(y)$ непрерывно зависит от y).

Рассмотрим возмущенное управление

$$u(t|\,\varepsilon) := u^0(t) + \delta u(t|y(\varepsilon),\varepsilon), t \in T,$$

где $\delta u(t|\,y,\varepsilon), t \in T$, определяется равенством (24.18), и пусть $x_\varepsilon(t), t \in T$, — соответствующая ему траектория системы управления S_U. Из соотношений (24.19) и (24.20) заключаем, что

$$P_{\underset{\sim}{\prec}}(g(x_\varepsilon(t_1)) - g(x^0(t_1))) \equiv 0 \text{ для } \varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}).$$

Следовательно, $x_\varepsilon(t_1) \in \widehat{\Omega}(t_1)$ для всех $\varepsilon \in [0,\overline{\varepsilon})$. Нетрудно проверить также, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{x_\varepsilon(t_1) - x^0(t_1)}{\varepsilon} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i(0) \sum_{j=1}^{n} l_{ij} F(t_1,\theta_{ij}) \Delta_{v_{ij}} f^0(\theta_{ij}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \overline{l}_j F(t_1,\overline{\theta}_j) \Delta_{\overline{v}_j} f^0(\overline{\theta}_j) = \overline{h}.$$

Таким образом, $\overline{h} \in T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Лемма доказана.

Замечание 24.3. Если конус положительных векторов Y^+ отношения предпорядка $\precsim$ телесен, то оператор $P_{\precsim}$ равен нулевому. Нетрудно видеть, что в этом случае требования $(\mathcal{B}_2)$ и $(\mathcal{B}_3)$ из условия регулярности $(\mathcal{B})$ выполняются тривиально. Тривиальным становится и утверждение леммы 24.1, поскольку оно сводится к доказательству включения $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, справедливость которого была установлена ранее.

Замечание 24.4. Используя теорему Брауэра о неподвижной точке, можно показать аналогично доказательству леммы 24.1, что условие $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = X$ является достаточным для локальной управляемости системы S_U в терминальный момент t_1 относительно допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$, т. е. для выполнения условий $\mathrm{int}\Omega(t_1) =\neq \varnothing$ и $x^0(t_1) \in \mathrm{int}\Omega(t_1)$. Ранее это утверждение было доказано другими методами в работе [3] .

Теорема 24.1. *Пусть допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ удовлетворяет в задаче (VPS_U) условию регулярности $(\mathcal{B})$ и пусть отображение $g : X \to Y$ является равномерно дифференцируемым по направлениям в точке $x^0(t_1)$.*

Если процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), то для любого $\varepsilon > 0$ и любого ε –квазидифференциала $D_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))]$ композиции $\sigma_{\precsim} \circ g$ в точке $x^0(t_1)$ имеет место включение

$$\overline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}_\varepsilon(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) + \varepsilon B^* +$$

$$+(\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g^{'}(x^0(t_1)) + B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), \tag{24.21}$$

где $B^*(x^0(t_1)(\Omega(t_1))$ — нормальный конус Болтянского к множеству достижимости $\Omega(t_1)$ системы S_U в точке $x^0(t_1)$.

Доказательство. Из неравенства (23.16) и включения (24.17) следует

$$\sigma_{\precsim}(g^{'}(x^0(t_1)|h)) \geq 0$$

для всех

$$h \in \mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \tag{24.22}$$

Так как

$$(\mathrm{Ker}[(P_{\precsim} \circ g)'(x^0(t_1))] \cap B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)))^* =$$

$$= (\mathrm{Im}P^*_{\precsim}) \circ g'(x^0(t_1)) + B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)),$$

то включение (24.21) является двойственным эквивалентом неравенства (24.22). Теорема доказана.

Замечание 24.5. Неравенство (24.22) эквивалентно условию

$$B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \cap SK_g(x^0(t_1)) = \varnothing, \tag{24.23}$$

где $SK_g(x^0(t_1)) := \{h \in X \,|\, g'(x^0(t_1)|h) \prec\!\!\prec 0\}$ — конус направлений строгого $\precsim$-убывания отображения g в точке $x^0(t_1)$. Таким образом, если выполнены предположения теоремы 24.1, то для того, чтобы допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ был оптимальным в задаче (VPS_U), необходимо, чтобы выполнялось условие (24.23).

Следствие 24.1. *Пусть дополнительно к предположениям теоремы 24.1 отображение g квазидифференцируемо в точке $x^0(t_1)$.*

Для того чтобы допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ был оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), необходимо, чтобы

$$\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) +$$

$$+ (\mathrm{Im} P^*_{\precsim}) \circ g^{'}(x^0(t_1)) + B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)), \tag{24.24}$$

где $D(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) = [\underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)), \overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))]$ — квазидифференциал композиции $\sigma_{\precsim} \circ g$ в точке $x^0(t_1)$.

Замечание 24.6. Если конус положительных векторов Y^+ отношения предпорядка $\precsim$ телесен, то необходимое условие оптимальности (24.24) из следствия 24.1 может быть переформулировано в прямой форме в виде

$$\max_{x^* \in \underline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))} \Delta_v H(x^0(t), \psi(t; x^*), u^0(t), t) \geq$$

$$\geq \max_{\overline{\partial}(\sigma_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))} \Delta_v H(x^0(t), \psi(t; x^*), u^0(t), t)$$

$$\text{для всех } t \in T, v \in U. \tag{24.25}$$

Здесь $H(x, \psi, u, t) = \langle f(t, u, x), \psi \rangle, \Delta_v H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, v, t) - H(x, \psi, u, t)$.

Для задачи терминального управления со скалярным показателем качества необходимое условие оптимальности типа (24.25) было представлено в работах [100, 103].

Следствие 24.2. *Пусть дополнительно к предположениям теоремы 24.1 отображение $g : X \to Y$ является дифференцируемым по Фреше в точке $x^0(t_1)$. Тогда если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), то существует существенно положительный линейный функционал $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ такой, что*

$$-(g'(x^0(t_1)))^* y^* \in B^*(x^0(t_1|\Omega(t_1)). \tag{24.26}$$

Доказательство. Так как отображение g является дифференцируемым по Фреше, то в силу следствия 24.1 условие (24.24) выполняется и имеет вид

$$0 \in (g'(x^0(t_1)))^*(\partial\sigma_{\precsim} + \mathrm{Im}P^*_{\precsim}) + B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Отсюда получаем, что существуют $v^* \in \partial\sigma_{\precsim}$ и $w^* \in \mathrm{Im}P^*_{\precsim}$, удовлетворяющие включению $-(g'(x^0(t_1)))^*(v^* + w^*) \in B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$. Так как $\partial\sigma_{\precsim} + \mathrm{Im}P^*_{\precsim} \subset (Y^*)^{\succ}$, то, положив $y^* = v^* + w^*$, найдем требуемый функционал. Следствие доказано.

Замечание 24.7. Утверждение следствия 24.2 можно переформулировать следующим образом: существует $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ такой, что решение $\psi(t), t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f^0_x(t), t \in T,$$

подчиненное терминальному условию

$$\psi(t_1) = -(g'(x^0(t_1)))^* y^*,$$

удовлетворяет условию максимума (24.15).

В таком виде необходимое условие оптимальности по Слейтеру из следствия 24.2 приняло традиционную форму принципа максимума Понтрягина. Таким образом, утверждение теоремы 24.1 и следствия 24.1 можно рассматривать как принцип максимума для векторной задачи оптимального управления с негладким показателем качества.

Замечание 24.8. Если допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ не удовлетворяет требованию $(\mathcal{B}_3)$ из условия регулярности $(\mathcal{B})$, то условие (24.26) выполняется для некоторого ненулевого функционала $y^* \in \mathrm{Im}P^*_{\precsim} \subset (Y^*)^+$.

24.5. Будем предполагать, что отображение $f : \mathbb{R}\times V\times X \to \to X$ непрерывно и обладает непрерывными производными Фреше $f_x : \mathbb{R} \times V \times X \to \mathcal{L}(X;X)$ и $f_{xx} : \mathbb{R} \times V \times X \to \mathcal{B}(X \times X; X)$ в некоторой открытой области, содержащей кривую $\{(t, u^0(t), x^0(t))|t \in T\}$. Отображение $g : X \to Y$ будем считать дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше в окрестности точки $x^0(t_1)$. Здесь $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ — исследуемый допустимый процесс системы S_U.

При сделанных предположениях будем говорить, что для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ задача (VPS_U) является дважды непрерывно дифференцируемой.

Введем множество

$$P(u^0, x^0) := \{y^* \in (Y^*)^+ \mid -y^* \circ g'(x^0(t_1)) \in B^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1))\}.$$

Легко видеть, что $P(u^0, x^0)$ — выпуклый замкнутый конус в X^*.

Допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ системы управления S_U будем называть *экстремалью Понтрягина* в задаче (VPS_U), если конус $P(u^0, x^0)$, соответствующий $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$, нетривиален, т. е. если $P(u^0, x^0) \neq \{0\}$.

В силу следствия 24.2 и замечания 24.10 любой оптимальный по Слейтеру процесс является экстремалью Понтрягина. Однако среди экстремалей Понтрягина возможны и такие допустимые процессы, которые не оптимальны по Слейтеру. Поэтому для дальнейшего анализа экстремалей Понтрягина с целью выяснения их оптимальности требуются новые необходимые условия.

Экстремаль Понтрягина $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ назовем *особой* на отрезке $T_0 \subset T$, если существует подмножество $U_0 \subset U, U_0 \setminus \{u^0(t)\} \neq \varnothing$, $t \in T_0$, такое, что для любого $v \in U_0$ имеет место включение

$$F(t_1, \theta)\Delta_v f^0(\theta) \in K_g(x^0(t_1)) \text{ для всех } \theta \in \mathrm{int} T_0. \tag{24.27}$$

Здесь $K_g(x^0(t_1)) := \{h \in X \mid g'(x^0(t_1)|h) \precsim 0\}$ — конус направлений $\precsim$-убывания отображения g в точке $x^0(t_1)$.

Заметим, что если экстремаль Понтрягина $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является особой, то для любого $y^* \in P(u^0, x^0)$ и любого $v \in U_0$ имеет место тождество $\psi(t)\Delta_v f^0(t) \equiv 0$, $t \in T_0$, где $\psi(t), t \in T$, — решение сопряженной системы (24.9), подчиненное условию $\psi(t_1) = -y^* \circ g'(x^0(t_1))$.

При доказательстве необходимого условия оптимальности по Слейтеру для особых экстремалей Понтрягина нам понадобится вспомогательное утверждение, обобщающее лемму 20.1.

Лемма 24.2. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор, b — фиксированный вектор из Y, C — выпуклый конус из X.*

Для того чтобы система

$$Ax + b \lll 0, x \in C, \tag{24.28}$$

была несовместна, достаточно, а если $\mathrm{cone}(P_{\precsim}(AC + b)) = \mathrm{Im} P_{\precsim}$, то и необходимо, чтобы существовал существенно положительный линейный функционал $y^* \in (Y^*)^{\succ}$ такой, что

$$\langle Ax, y^* \rangle \geq 0 \textit{ для всех } x \in C,\ \langle b, y^* \rangle \geq 0. \tag{24.29}$$

Доказательство. Достаточность легко проверяется от противного. Докажем необходимость. Несовместность системы (24.28) эквивалентна тому, что $\mathrm{ri} Y^+ \cap \{y \in Y | y = -Ax - b, x \in C\} = \varnothing$. Из теоремы об отделимости (см., например, [218] теоремы 11.3 и 11.7) следует, что существует однородная гиперплоскость, собственно разделяющая Y^+ и $\{y \in Y | y = -Ax - b, x \in C\}$. Таким образом, существует ненулевой линейный функционал $y^* \in Y^*$ такой, что $\langle -Ax - b, y^* \rangle \leq 0$ для всех $x \in C$ и $\langle y, y^* \rangle \geq 0$ для всех $y \in Y^+$. Первое из этих соотношений влечет $\langle Ax, y^* \rangle \geq 0$ для всех $x \in C$ и $\langle b, y^* \rangle \geq 0$, т. е. соотношения (24.29), а из второго следует, что $y^* \in (Y^*)^+$.

Покажем, что при выполнении условия $\mathrm{cone}(P_{\precsim}(AC+b)) = \mathrm{Im} P_{\precsim}$ разделяющий линейный функционал y^* является на самом деле существенно положительным. Предположим противное, тогда $y^* \in \mathrm{Im} P^*_{\precsim}$ и, следовательно, $y^* = P^*_{\precsim} y^*$. Поэтому из равенств $\langle Ax + b, y^* \rangle = \langle Ax + b, P^*_{\precsim} y^* \rangle = \langle P_{\precsim}(Ax + b), y^* \rangle$, условия $\mathrm{cone}(P_{\precsim}(AC + b)) = \mathrm{Im} P_{\precsim}$ и первого неравенства из (24.29) следует, что $\langle P_{\precsim} y, y^* \rangle = = \langle y, P^*_{\precsim} y^* \rangle = \langle y, y^* \rangle \geq 0$ для всех $y \in Y$. Отсюда заключаем, что $y^* = 0$. Однако в силу теорем отделимости функционал y^* был выбран ненулевым. Полученное противоречие доказывает, что $y^* \in (Y^*)^{\succ}$. Лемма доказана.

Пусть $P_0(u^0, x^0) = \{y^* \in P(u^0, x^0) \,|\, \|y^*\| = 1\}$. Каждому $y^* \in P_0(u^0, x^0)$ поставим в соответствие пару $(\psi, \Psi) \in AC(T; X^*) \times \times AC(T; \mathcal{L}(X, X^*))$, первый элемент которой $\psi(t), t \in T$, является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f_x^0(t),\ \psi(t_1) = -y^* \circ g'(x^0(t_1)),$$

а соответствующий ему второй элемент $\Psi(t), t \in T$, есть решение операторного дифференциального уравнения

$$\dot{\Psi} = -\Psi f_x^0(t) - (f_x^0)^*(t)\Psi - \psi(t) f_{xx}^0(t),$$

подчиненное терминальному условию

$$\Psi(t_1) = -y^* \circ g''(x^0(t_1)).$$

Множество всех таких пар обозначим символом $\mathcal{P}_0(u^0, x^0)$.

Теорема 24.2. *Пусть для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ задача (VPS_U) является дважды непрерывно дифференцируемой. Если процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является особой экстремалью Понтрягина, то для его оптимальности по Слейтеру в задаче (VPS_U) необходимо, чтобы неравенство*

$$\min_{(\psi,\Psi)\in\mathcal{P}_0(u^0,x^0)} \sum_{i=1}^{\nu} l_i \Big(\psi(\theta_i)\big(\Delta_{v_i} f_x^0\big)(\theta_i) + \Psi(\theta_i)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i) \Big) \Big(l_i \Delta_{v_i} f^0(\theta_i) +$$

$$+2 \sum_{s=1}^{i-1} l_s F(\theta_i, \theta_s) \Delta_{v_s} f^0(\theta_s) \Big) \leq 0 \qquad (24.30)$$

выполнялось при любом натуральном ν *и любых* $\theta_i \in \mathrm{int} T_0$, $v_i \in U_0, l_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Доказательство. Зададим натуральное число ν, моменты $\theta_i \in \mathrm{int}T_0,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$, векторы $v_i \in U, i = 1, 2, \ldots, \nu$, и вещественные числа $l_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$. Рассмотрим пакет игольчатых вариаций $\delta u(t\,|\,\varepsilon) = \bigoplus\limits_{i=1}^{\nu} \delta u(t\,|\,\theta_i, v_i, l_i\varepsilon)$ экстремали Понтрягина $u^0(t), t \in T,$ и пусть $\delta^1 x_{u^0}(t), t \in T,$ и $\delta^2 x_{u^0}(t), t \in T,$ — соответствующие ему первая и вторая вариации траектории $x^0(t), t \in T$. Введем вектор

$$b := g'(x^0(t_1))\delta^2 x_{u^0}(t_1) + \big(g^{''}(x^0(t_1))\delta^1 x_{u^0}(t_1)\big)\delta^1 x_{u^0}(t_1).$$

Неравенство (24.30) для выбранного набора $\{\theta_i, v_i, l_i, i = 1, 2, \ldots, \nu\}$ эквивалентно неравенству

$$\max_{y^* \in P_0(u^0, x^0)} \langle b, y^* \rangle \geq 0. \tag{24.31}$$

Заметим, что множество $P_0(u^0, x^0)$ компактно, поэтому использование операции максимума в последнем неравенстве, а следовательно, и операции минимума в (24.30) является обоснованным.

Для доказательства (24.31) достаточно показать существование ненулевого функционала $y^* \in P(u^0, x^0)$ такого, что $\langle b, y^* \rangle \geq 0$.

Если конус $P(u^0, x^0)$ не является выступающим, то выполнение неравенства $\langle b, y^* \rangle \geq 0$ для некоторого $y^* \in P(u^0, x^0), y^* \neq 0$, тривиально следует из существования ненулевого подпространства в $P(u^0, x^0)$. Предположим, что конус $P(u^0, x^0)$ является выступающим, и пусть в противоположность утверждению теоремы

$$\langle b, y^* \rangle < 0 \text{ для всех } y^* \in P(u^0, x^0), y^* \neq 0. \tag{24.32}$$

Поскольку $P(u^0, x^0)$ не содержит нетривиальных подпространств, то конус $P_{\precsim}(g'(x^0(t_1))B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)))$ обладает внутренностью относительно подпространства $\mathrm{Im}P_{\precsim}$. Кроме того, из условия (24.32) следует, что справедливо включение

$$-P_{\precsim} b \in \mathrm{ri}P_{\precsim}\big(g'(x^0(t_1))\big)B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))),$$

откуда получаем

$$0 \in \mathrm{ri}P_{\precsim}\big(g'(x^0(t_1))\big)B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) + b)$$

и, таким образом, приходим к равенству

$$\mathrm{cone}P_{\precsim}(g'(x^0(t_1))B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))) = \mathrm{Im}P_{\precsim}. \tag{24.33}$$

В силу леммы 24.2 из условий (24.32) и (24.33) следует существование такого касательного вектора Болтянского $z \in B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, что

$$g'(x^0(t_1))\overline{z} + b \prec\!\!\prec 0. \tag{24.34}$$

Покажем, что это противоречит оптимальности по Слейтеру экстремали $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$.

В $P_{\precsim}\big(g'(x^0(t_1))B(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) + b\big)$ рассмотрим k-мерный ($k = \dim \mathrm{Im} P_{\precsim}$) симплекс S, натянутый на аффинно-независимые точки $y_0, y_1, \ldots, y_k$ и содержащий начало координат в относительной внутренности. Пусть $z_i, i = 0, 1, \ldots, k,$ — такие векторы из $B(x^0(t_1)|\Omega(t_1))$, что $y_i = g_i^{'}(x^0(t_1))z_i, i = 0, 1, \ldots, k$. Будем считать, что $z_i, i = 0, 1, \ldots, k,$ порождены соответственно следующими пакетами вариаций управления: $\delta u_i(t|\varepsilon) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} \delta u(t|\theta_{ij}, v_{ij}, l_{ij}\varepsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Для каждого вектора $y \in S$ образуем следующий пакет вариаций управления:

$$\delta u(y, \varepsilon) : \delta u(t|y, \varepsilon) = \bigoplus_{i=0}^{k} \bigoplus_{j=0}^{n} \delta u(t|\theta_{ij}, v_{ij}, \lambda_i(y) l_{ij}\varepsilon^2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \delta u(t|\overline{\theta}_j, \overline{v}_j, \overline{l}_j\varepsilon^2) \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \delta u(t|\theta_j, v_j, l_j\varepsilon), \tag{24.35}$$

где пакет $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} \delta u(t|\overline{\theta}_j, \overline{v}_j, \overline{l}_j\varepsilon)$ порождает касательный вектор Болтянского $\overline{z}$, а $\lambda(y) = (\lambda_0(y), \lambda_1(y), \ldots, \lambda_k(y))$ — вектор барицентрических координат вектора y в симплексе S.

Пусть $x_{y,\varepsilon}(t), t \in T,$ — траектория системы управления S_U, соответствующая возмущенному управлению $u^0(t) + \delta u(t|y, \varepsilon), t \in T$. Рассмотрим семейство отображений

$$Q_2(\varepsilon) : Q_2(y, \varepsilon) := \begin{cases} \dfrac{P_{\precsim}(g(x_{y,\varepsilon}(t_1)) - g(x^0(t_1)))}{\varepsilon^2}, & \varepsilon > 0, \\ y, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Повторяя далее соответствующие рассуждения из доказательства леммы 24.1, докажем существование функции $y : (0, \overline{\varepsilon}) \to S, \overline{\varepsilon} > 0$, такой, что $y(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ и

$$Q_2(y(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0 \text{ при } \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}). \tag{24.36}$$

Из свойств вектора барицентрических координат $\lambda(y)$ следует, что функции $\rho_{ij}(\varepsilon) = \lambda_i(y(\varepsilon)) l_{ij}\varepsilon^2$ имеют в нуле первую и вторую правосторонние производные, причем $\rho_{ij}^{'}(0) = 0$, $\rho_{ij}^{''}(0) = \lambda_i(0) l_{ij}$.

Рассмотрим возмущенное управление

$$u(t|\varepsilon) = u^0(t) + \delta u(t|y(\varepsilon), \varepsilon), t \in T,$$

где $\delta u(t|y, \varepsilon), t \in T$, определяется равенством (24.35), и пусть $x_\varepsilon(t), t \in T$, — соответствующая ему траектория системы управления S_U. Из тождества (24.36) и определения отображения Q_2 получаем

$$P_{\precsim}(g(x_\varepsilon(t_1)) - g(x^0(t_1)) \equiv 0 \text{ для } \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}). \tag{24.37}$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся представлением

$$g(x_\varepsilon(t_1)) = g(x^0(t_1)) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} g'(x^0(t_1))F(t_1, \theta_i)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i) +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2 (g'(x^0(t_1))\overline{z} + b) + o(\varepsilon^2).$$

Так как экстремаль $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ является особой, то

$$\sigma_{\precsim}\left(\sum_{i=1}^{n} g'(x^0(t_1))F(t_1, \theta_i)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i)\right) \le 0.$$

Кроме того, из (24.34) имеем $\sigma_{\precsim}(g'(x^0(t_1))\overline{z} + b) < 0$. Вследствие непрерывности функции $\sigma_{\precsim}$ из последнего неравенства получаем $\sigma_{\precsim}(g'(x^0(t_1))\overline{z} + b + 2\varepsilon^{-2}o(\varepsilon^2)) < 0$ при $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}'), 0 < \overline{\varepsilon}' < \varepsilon$. Поэтому из данного выше представления для $g(x_\varepsilon(t_1))$ и сублинейности $\sigma_{\precsim}$ имеем

$$\sigma_{\precsim}\big(g(x_\varepsilon(t_1)) - g'(x^0(t_1))\big) \le$$

$$\le \varepsilon \sigma_{\precsim}\left(\sum_{i=1}^{n} g'(x^0(t_1))F(t_1, \theta_i)\Delta_{v_i} f^0(\theta_i)\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\sigma_{\precsim}\big(g'(x^0(t_1))\overline{z} + b + 2\varepsilon^{-2}o(\varepsilon^2)\big) < 0 \text{ при } \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}').$$

Учитывая тождество (24.36), приходим к соотношению $g(x_\varepsilon(t_1)) \prec\!\!\prec g(x^0(t_1))$, $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}')$, которое противоречит оптимальности по Слейтеру экстремали Понтрягина $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$. Таким образом, предположение (24.32) приводит к противоречию. Это и завершает доказательство неравенства (24.31) и всей теоремы в целом.

Замечание 24.9. Для задачи оптимального управления системой S_U по скалярному показателю качества терминального типа, т. е. в случае, если в задаче (VPS_U) пространство оценок совпадает с вещественной прямой $Y = \mathbb{R}$ и $Y^+ = \overline{\mathbb{R}}^+$, одноточечный

($\nu = 1$) вариант условия (24.30) совпадает с оригинальным условием оптимальности в матричных импульсах, впервые доказанным Р. Габасовым [51, 52]. Многоточечный вариант условия (24.30) при рассмотрении его для скалярной задачи управления дает условие, полученное впервые В. А. Срочко [228]. Изложение настоящего раздела основано на результатах работ [72, 76, 80, 289].

Пример 24.1. Рассмотрим задачу оптимизации векторного показателя качества

$$G(u(\cdot), x(\cdot)) = \begin{pmatrix} x_2(1) \\ x_2(1) - x_1(1) \end{pmatrix}$$

заданного на множестве допустимых процессов системы управления

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = -x_1^2,\ x(0) = 0;\ U = \{u \,|\, 0 \le u \le 1\},\ T = [0, 1].$$

Предполагается, что сублинейное отношение предпорядка $\precsim$ на пространстве оценок $\mathbb{R}^2$ задано положительным ортантом $\overline{\mathbb{R}}^2_+ = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0\}$. Допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot)) = (0, 0)$ является особой экстремалью Понтрягина, при этом $U_0 = U$, $T_0 = T$. Воспользуемся условием (24.30). При $\nu = 1$ и $l_1 = 1$ оно принимает вид $(1 - t)v^2 \le 0$ и, следовательно, нарушается при всех v таких, что $0 < v \le 1$ и всех $t \in [0, 1)$. Значит, допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot)) = (0, 0)$ не оптимален по Слейтеру.

Пример 24.2. На множестве допустимых процессов системы управления

$$\dot{x}_1 = u,\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_3 = -ux_2,\ x(0) = 0,\ |u| \le 1,\ T = [0, 1],$$

требуется минимизировать функционал

$$G(u(\cdot), x(\cdot)) = x_3(1).$$

Допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot)) = (0, 0)$ является особой экстремалью Понтрягина, при этом $U_0 = U, T_0 = T$. Необходимое условие (24.30) выполняется для $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ при $\nu = 1$. Однако при $\nu = 2$ и $l_1 = l_2 = 1$ условие (24.30) принимает вид неравенства $2v_1v_2(e^{\theta_2 - \theta_1} - 1) \le 0$, которое нарушается при $\theta_2 > \theta_1$ и $v_1v_2 > 0$. Из этого следует неоптимальность допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$.

§ 25. ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ ЛЕЖАНДРА – КЛЕБША ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СЛЕЙТЕРУ ПРОЦЕССОВ

25.1. Пусть Z и W-произвольные нормированные пространства. Символом $\mathcal{B}_k(Z,W)$ будем обозначать пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений $g: Z \to W$.

Скобкой Ли называется отображение $[g_1, g_2] \in \mathcal{B}_{k-1}(Z,Z)$, определяемое соотношением

$$[g_1, g_2](z) = g_2^{'}(z)g_1(z) - g_1^{'}(z)g_2(z), z \in Z,$$

где $g_1^{'}(z)$ и $g_2^{'}(z)$ — производные Фреше отображений g_1 и g_2 соответственно.

Произвольное отображение $g \in \mathcal{B}_1(Z,Z)$ определяет линейный оператор $\mathrm{ad}g : \mathcal{B}_1(Z,Z) \to \mathcal{B}_0(Z,Z)$, действующий по правилу

$$\mathrm{ad}g : \overline{g} \to [g, \overline{g}],\ \overline{g} \in \mathcal{B}_1(Z,Z).$$

Если $g \in \mathcal{B}_k(Z,Z)$, то для сужения $\mathrm{ad}g$ на $\mathcal{B}_k(Z,Z)$ стандартным образом определяется k-я степень: $\mathrm{ad}^k g = \mathrm{ad}g(\mathrm{ad}^{k-1}g)$. Как обычно, $\mathrm{ad}^0 g$ — тождественный оператор.

Рассмотрим нестационарное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{25.1}$$

где $f: \mathbb{R} \times X \to X$ — непрерывно дифференцируемое отображение из $\mathbb{R} \times X$ в X, т. е. $f \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R} \times X, X)$.

Для каждого непрерывно дифференцируемого отображения $h: \mathbb{R} \times X \to X$ *производной Ли*, генерируемой уравнением (25.1), назовем отображение $D_j h : \mathbb{R} \times X \to X$, определяемое соотношением ,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ D_j h(t,x) \end{pmatrix} = (\mathrm{ad}\widehat{f})h_0(t,x), \tag{25.2}$$

где

$$\widehat{f}(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x) \end{pmatrix}, h_0(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t,x) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что при любых f и h первая компонента в правой части соотношения (25.2) равна нулю. Следовательно, определение производной Ли корректно.

Производная Ли является линейным оператором, действующим из $\mathcal{B}_1(\mathbb{R} \times X, X)$ в $\mathcal{B}_0(\mathbb{R} \times X, X)$.

Стандартным образом определяется вторая D_f^2, третья D_f^3 и т. д. производные Ли (D_f^0 — тождественный оператор). Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} 0 \\ D_f^k(t,x) \end{pmatrix} = (\mathrm{ad}^k \widehat{f})h_0(t,x), k = 1,2,3,\ldots$$

Непосредственно вычисляя, получаем

$$D_f h(t,x) = h_x(t,x)f(t,x) - f_x(t,x)h(t,x) + h_t(t,x),$$

$$(D_f h)_x(t,x) = h_{xx}(t,x)f(t,x) + h_x(t,x)f_x(t,x) -$$

$$- f_{xx}(t,x)h(t,x) - f_x(t,x)h_x(t,x) + h_{tx}(t,x).$$

Пусть $x^0(\cdot) : T \to X$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (25.1), т. е.

$$\dot{x}^0(t) \equiv f(t, x^0(t)), t \in T.$$

Из предыдущих соотношений при всех $k = 0,1,2,\ldots$ получаем тождества

$$D_f^{k+1}h(t,x^0(t)) \equiv -f_x^0(t)D_f^k h(t,x^0(t)) +$$

$$+\frac{d}{dt}\big(D_f^k h(t,x^0(t))\big), t \in T, \tag{25.3}$$

$$(D_f^{k+1}h)_x(t,x^0(t)) \equiv \frac{d}{dt}\big((D_f^k h)_x(t,x^0(t))\big) -$$

$$-f_{xx}^0(t)(D_f^k h)(t,x^0(t)) + (D_f^k h)_x(t,x^0(t))f_x^0(t) -$$

$$-f_x^0(t)(D_f^k h)_x(t,x^0(t)),\ t \in T, \tag{25.4}$$

которые могут быть использованы как рекуррентные соотношения для построения последовательностей

$$h(t,x^0(t)), D_f h(t,x^0(t)), D_f^2 h(t,x^0(t)), \ldots, D_f^k h(t,x^0(t)), \ldots$$

и

$$h_x(t,x^0(t)), (D_f h)x(t,x^0(t)), (D_f^2 h)_x(t,x^0(t)), \ldots, (D_f^k h)_x(t,x^0(t)), \ldots$$

Из (25.3) следует важное тождество

$$F(t_1,t)D_f^{k+1}h(t,x^0(t)) \equiv \frac{d}{dt}\big(F(t_1,t)D_f^k h(t,x^0(t))\big) \equiv$$

$$\equiv \frac{d^k}{dt^k}\big(F(t_1,t)h(t,x^0(t))\big), t \in T, \tag{25.5}$$

связывающее производные Ли с обычными производными по времени, вычисленными вдоль фиксированного решения $x^0(t), t \in T$, дифференциального уравнения (25.1) и соответствующего ему решения системы

$$\frac{dF(t,\tau)}{dt} = f_x^0(t)F(t,\tau), F(\tau,\tau) = E.$$

В соответствии с соотношениями

$$(D_f H(t,x))v = D_f(H(t,x)v) \text{ для всех } v \in V,$$

$$(D_f B(t,x))[v,w] = D_f(B(t,x)[v,w]) \text{ для всех } v,w \in V,$$

операция дифференцирования Ли распространяется на отображения $H : \mathbb{R} \times V \to \mathcal{L}(V,X)$ и $B : \mathbb{R} \times V \to \mathcal{B}(V \times V, X)$, где $\mathcal{L}(V,X)$ — пространство линейных отображений из V в X, а $\mathcal{B}(V \times V, X)$ — пространство билинейных отображений из $V \times V$ в X.

25.2. Пусть $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ — допустимый процесс системы управления

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,u(t),x), x(t_0) = x^0, \\ u(t) \in U, t \in T. \end{gathered} \tag{S_U}$$

Производную Ли, генерируемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t,u^0(t),x),$$

условимся обозначать с целью упрощения записей просто символом D. Естественно, что для существования производной Ли D следует предположить непрерывную дифференцируемость отображения $(t,x) \to f(t,u^0(t),x)$. Не оговаривая специально, всюду ниже будем считать, что $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ и $u : T \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы достаточно большое число раз. В каждой конкретной ситуации требуемый порядок дифференцируемости легко определяется исходя из выполняемых операций.

Положим

$$\widehat{f}^{\,0}(t,x) := \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,u^0(t),x) \end{pmatrix}, \widehat{f}_u^{\,0}(t,x) := \begin{pmatrix} 0 \\ f_u^0(t,u^0(t),x) \end{pmatrix}$$

и введем последовательность отображений

$$R_i : \mathbb{R} \times X \to \mathcal{B}(V \times V, X), i = 1,2,\dots,$$

определив их соотношениями

$$\begin{pmatrix} 0 \\ R_i(t,x)[v,w] \end{pmatrix} :=$$

$$= [(\mathrm{ad}^{[i/2]}\widehat{f}^{\,0}(t,x))\widehat{f}_u^{\,0}(t,x)v, (\mathrm{ad}^{[(i-1)/2]}\widehat{f}^{\,0}(t,x))\widehat{f}_u^{\,0}(t,x)w]$$

где $[\nu]$ — целая часть действительного числа ν.

Можно показать, что R_i выражаются следующим образом:

$$R_i(t,x)[v,w] = (D^{[(i-1)/2]}f_u^{\,0}(t,x))_x[D^{[i/2]}f_u^{\,0}(t,x)v,w]-$$

$$-(D^{[i/2]}f_u^{\,0}(t,x))_x[D^{[(i-1)/2]}f_u^{\,0}(t,x)w,v], i=1,2,3,\ldots \qquad (25.6)$$

Последние соотношения вместе с (25.3) и (25.4) могут быть использованы для рекуррентного определения последовательности $R_i(t,x^0(t)), i=1,2,3,\ldots$ Следует заметить, что близкие рекуррентные формулы использовались в работах [284, 285].

Так как $\left[\frac{i-1}{2}\right]=\left[\frac{i}{2}\right]$ для нечетных i, то в силу кососимметричности скобок Ли билинейные отображения $R_{2s+1}(t,x), s=0,1,2,\ldots$ также являются кососимметричными. Относительно свойств $R_{2s}(t,x), s=1,2,\ldots$ можно сделать следующее замечание. Из тождеств Якоби для скобок Ли

$$(\mathrm{ad}g)[g_1,g_2] = [(\mathrm{ad}g)g_1,g_2]+[g_1,(\mathrm{ad}g)g_2]$$

получим равенство

$$R_{2s}(t,x)[v,w]-R_{2s}(t,x)[w,v] = DR_{2s-1}(t,x)[v,w],$$

из которого и тождества (25.5) следует

$$F(t_1,t)(R_{2s}(t,x^0(t))[v,w]-R_{2s}(t,x)[w,v]) \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt}(F(t_1,t)R_{2s-1}(t,x^0(t))[v,w]), t\in T.$$

Значит, если для некоторого натурального $s=1,2,3,\ldots$ билинейное отображение $F(t_1,t)R_{2s-1}(t,x^0(t))$ тождественно (по $t\in T$) равняется нулевому отображению на подпространстве $V_0\subset V$, то билинейное отображение $F(t_1,t)R_{2s}(t,x^0(t))$ симметрично на V_0.

25.3. В пространстве $KC(T;V)$ рассмотрим подпространство $\mathcal{U}_k$ элементами которого являются функции $\delta u\in KC(T;V)$, удовлетворяющие равенствам

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\tau^s\delta u(\tau)d\tau = 0, s=0,1,\ldots,k-1.$$

Очевидно, что $\mathcal{U}_{k+m}\subset\mathcal{U}_k$ для любых натуральных k и m.

Альтернативным способом пространство $\mathcal{U}_k$ можно задать следующим образом. Пусть $\mathcal{U}^{(k)}$ — подпространство из $KC(T;V)$, состоящее из таких функций $\delta v \in KC(T;V)$, для которых производные $\delta v^{(s)}(t), t \in T, s = 0, \ldots, k-1$, существуют и непрерывны на отрезке T, а производная $\delta v^{(k)}(t), t \in T$, существует и кусочно-непрерывна на T. Символом $\mathcal{U}_0^{(k)}$ обозначим подпространство в $\mathcal{U}^{(k)}$, определяемое условиями

$$\mathcal{U}_0^{(k)} = \{\delta u \in \mathcal{U}^{(k)} \mid \delta u^{(s)}(t_0) = \delta u^{(s)}(t_1) = 0, s = 0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Легко проверить, что соотношение

$$\delta v(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{k-1} \delta u(\tau) d\tau$$

устанавливает взаимооднозначное соответствие между функциями δu из подпространства $\mathcal{U}_k$ и функциями δv из $\mathcal{U}_0^{(k)}$. Обратное соответствие задается оператором k-кратного дифференцирования.

Таким образом, выбор функции δu из подпространства $\mathcal{U}_k$ равносилен выбору функции δv из $\mathcal{U}_0^{(k)}$ такой, что $\delta u = \delta v^{(k)}$.

Предложение 25.1. *Предположим, что отображение $f : \mathbb{R} \times V \times X \to X$ является $(k+2)$ раза непрерывно дифференцируемым, а допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ таков, что функция $u^0(t), t \in T$, принадлежит $U^{(k)}$. Тогда для любой вариации управления $\delta u \in \mathcal{U}_k$ имеют место равенства*

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) = (-1)^k \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1,t) D^k f_u^0(t, x^0(t)) \delta u_k(t) dt, \tag{25.7}$$

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) = (-1)^k \int\limits_{t_0}^{t_1} \big\{ \delta F_k(t_1,t) D^k f_u^0(t, x^0(t)) +$$

$$+ F(t_1,t) (D^k f_u^0)_x (t, x^0(t)) \delta x_k(t) \big\} \delta u_k(t) dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2k} \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1,t) R_i(t, x^0(t)) [\delta u_{[i/2]}(t), \delta u_{[(i+1)/2]}(t)] dt, \tag{25.8}$$

где

$$\delta u_j(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} \delta u(\tau) d\tau, j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\delta u_0(t) = \delta u(t), t \in T;$$

$$\delta x_k(t) = (-1)^k \int\limits_{t_0}^{t} F(t,\tau)(D^k f_u^0)(\tau, x^0(\tau))\delta u_k(\tau)d\tau,$$

$$\delta F_k(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} F(t,s)\big[f_{xx}^0(s, x^0(s))\delta x_k(s)+$$

$$+(-1^k)(D^k f_u^0)_x(s, x^0(s))\delta u_k(s)\big]F(s,\tau)ds.$$

Доказательство. Последовательно применяя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1,t) f_u^0(t, x^0(t))\delta u(t)dt =$$

$$= (-1)^k \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d^k}{dt^k}(F(t_1,t) f_u^0(t, x^0(t)))\delta u_k(t)dt$$

из которого благодаря (25.5) следует (25.7).

Доказательство представления (25.8) проведем по индукции. При $k = 0$ справедливость (25.8) следует из (23.23). Предположим, что (25.8) имеет место при $k = \rho$, и пусть $\delta u \in \mathcal{U}_{\rho+1}$.

Интегрируя по частям, получим

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} \big\{\delta F_\rho(t_1,t) D^\rho f_u^0(t, x^0(t))+$$

$$+F(t_1,t)(D^\rho f_u^0)_x(t, x^0(t))\delta x_\rho(t)\big\}\delta u_\rho(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\big\{\delta F_\rho(t_1,t) D^\rho f_u^0(t, x^0(t))+$$

$$+F(t_1,t)(D^\rho f_u^0)_x(t, x^0(t))\delta x_\rho(t)\big\}\delta u_{\rho+1}(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{\delta F_\rho(t_1,t)(-f_x^0(t, x^0(t)) D^\rho f_u^0(t, x^0(t)))+$$

$$+\frac{d}{dt}(D^\rho f_u^0(t, x^0(t)))\delta u_{\rho+1}(t)+$$

$$+F(t_1,t)\Bigg(\frac{d}{dt}((D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))[\delta x_\rho(t),\delta u_{\rho+1}(t)]-$$
$$-f_{xx}^0(t,x^0(t))[\delta x_\rho(t),D^\rho f_u^0(t,x^0(t))\delta u_{\rho+1}(t)]+$$
$$+(D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))[f_x^0(t,x^0(t))\delta x_\rho(t),\delta u_{\rho+1}(t)]-$$
$$-f_x^0(t,x^0(t))(D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))[\delta x_\rho(t),\delta u_{\rho+1}(t)])\Bigg)+$$
$$+F(t_1,t)((D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))[D^\rho f_u^0(t,x^0(t))\delta u_\rho(t),\delta u_{\rho+1}(t)]-$$
$$-(D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))[D^\rho f_u^0(t,x^0(t))\delta u_{\rho+1}(t),\delta u_\rho(t)])\Bigg\}dt.$$

Воспользовавшись равенствами (25.3), (25.4) и (25.7), получим

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\big\{\delta F_\rho(t_1,t)D^\rho f_u^0(t,x^0(t))+$$
$$+F(t_1,t)(D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))\delta x_\rho(t)\big\}\delta u_\rho(t)dt=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big\{\delta F_\rho(t_1,t)D^{\rho+1}f_u^0(t,x^0(t))\delta u_{\rho+1}(t)+$$
$$+F(t_1,t)(D^{\rho+1}f_u^0)_x(t,x^0(t))[\delta x_\rho(t),\delta u_{\rho+1}(t)]+$$
$$+F(t_1,t)R_{2\rho+1}(t,x^0(t))[\delta u_\rho(t),\delta u_{\rho+1}(t)]\big\}dt. \qquad (25.9)$$

Можно показать, что

$$\delta x_\rho(t)=\delta x_{\rho+1}(t)+(-1)^\rho D^\rho f_u^0(t,x^0(t))\delta u_{\rho+1}(t),$$
$$\delta F_\rho(t_1,t)=\delta F_{\rho+1}(t_1,t)-(-1)^\rho F(t_1,t)(D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))\delta u_{\rho+1}(t).$$

Подставив эти выражения для $\delta x_\rho(t)$ и $\delta F_\rho(t_1,t)$ в (25.9), придем к равенству

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\big\{\delta F_\rho(t_1,t)D^\rho f_u^0(t,x^0(t))+$$
$$+F(t_1,t)(D^\rho f_u^0)_x(t,x^0(t))\delta x_\rho(t)\big\}\delta u_\rho(t)dt=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big\{\delta F_{\rho+1}(t_1,t)D^{\rho+1}f_u^0(t,x^0(t))+$$
$$+F(t_1,t)(D^{\rho+1}f_u^0)_x(t,x^0(t))\delta x_{\rho+1}(t)\big\}\delta u_{\rho+1}(t)dt+$$

$$+(-1)^{\rho}\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1,t)R_{2\rho+2}(t,x^0(t))[\delta u_{\rho+1}(t),\delta u_{\rho+1}(t)]dt+$$

$$+(-1)^{\rho}\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1,t)R_{2\rho+1}(t,x^0(t))[\delta u_{\rho}(t),\delta u_{\rho+1}(t)]dt,$$

из которого следует справедливость (25.3) при $k=\rho+1$. Предложение доказано.

На этом подготовительная часть настоящего параграфа завершена. Перейдем сейчас к выводу необходимых условий оптимальности по Слейтеру в задаче (VPS_U).

25.4. Пусть $(u^0(\cdot),x^0(\cdot))$ — исследуемый допустимый процесс системы управления S_U.

Основные предположения, при которых здесь будут получены условия оптимальности, следующие:

а) $\mathrm{int}U\neq\varnothing$ и $u^0(t)\in\mathrm{int}U,\ t\in T$;

б) отображение $f:\mathbb{R}\times V\times X\to X$ является не менее чем дважды непрерывно дифференцируемым в некоторой открытой области пространства $\mathbb{R}\times V\times X$, содержащей кривую $\{(t,u^0(t),x^0(t))\,|\,t\in T\}$ (точные требования к порядку дифференцирования будут сформулированы в утверждениях);

в) отображение $g:X\to Y$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке $x^0(t_1)$.

Кроме того, для упрощения изложения введем дополнительно еще два предположения. Во-первых, будем считать, что отображение $g:X\to Y$ квазидифференцируемо в точке $x^0(t_1)$. Во-вторых, конус положительных векторов Y^+, соответствующий отношению предпорядка $\precsim$, будем предполагать телесным и будем считать, что задана сублинейная непрерывная функция $s_{\precsim}:Y\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $y_1\lll y_2$ тогда и только тогда, когда $s_{\precsim}(y_1-y_2)<0$.

Зададим на пространстве X^* многозначное отображение $\underline{\mathcal{L}}:v^*\to\underline{\mathcal{L}}[v^*]$, положив

$$\underline{\mathcal{L}}[v^*]:=\big(\underline{\partial}(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1))-\{v^*\}\big)\cap E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)\big).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}=\underline{\partial}(s_{\precsim}\circ g)(x^0(t_1))+E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Из других свойств многозначного отображения $\underline{\mathcal{L}}$ отметим лишь его непрерывность по Хаусдорфу [168] и то, что для любого $v^*\in\mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}$ множество $\underline{\mathcal{L}}[v^*]$ является выпуклым компактом.

В целях сокращения записей ниже будем использовать также обозначение $\overline{\Lambda} := \overline{\partial}(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))$.

Теорема 25.1. *Если допустимый процесс* $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *является оптимальным по Слейтеру в задаче* (VPS_U), *то* $\overline{\Lambda} \subset \mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}$ *и для любой вырожденной вариации управления* $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ *выполняется неравенство*

$$\min_{v^* \in \overline{\Lambda}} \max_{x^* \in \underline{\mathcal{L}}[v^*]} \langle \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u), x^* \rangle \geq 0. \tag{25.10}$$

Доказательство. В силу (23.24) для любой вырожденной вариации управления $\delta u \in \mathcal{W}(u^0, x^0)$ имеет место включение

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u) + E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) \subset T(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Так как оптимальность по Слейтеру допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ в рассматриваемой задаче (VPS_U) равносильна тому, что вектор $x^0(t_1)$ доставляет слабый $\precsim$–минимум отображению $g : X \to Y$ на множестве $\Omega(t_1)$, то из теоремы 19.2 и последнего включения следует справедливость неравенства

$$s_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|h + b)) \geq 0 \text{ для всех } h \in E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)). \tag{25.11}$$

Здесь $b := \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta u, \delta u)$.

Воспользовавшись равенством $E(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = W(t_0, t_1)X^*$ (см. (23.9)), где линейный оператор $W(t_0, t_1) : X^* \to X$ определен по (23.8), представим (25.11) в виде

$$s_{\precsim}(g'(x^0(t_1)|W(t_0, t_1)x^* + b)) \geq 0 \text{ для всех } x^* \in X^*.$$

Для любого $v^* \in \overline{\Lambda} := \overline{\partial}(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1))$ из последнего неравенства получаем

$$\max_{y^* \in \underline{\partial}(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) - \{v^*\}} \langle W(t_0, t_1)x^* + b, y^* \rangle \geq 0 \text{ для всех } x^* \in X^*. \tag{25.12}$$

Поскольку оператор $W(t_0, t_1)$ является самосопряженным, т. е. $W^*(t_0, t_1) = W(t_0, t_1)$, и в силу (23.10) справедливо равенство

$$E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) = \{x^* \in X^* \,|\, W^*(t_0, t_1)x^* = 0\},$$

то $\underline{\mathcal{L}}[v^*] = \{x^* \in \underline{\partial}(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) - \{v^*\} \,|\, W^*(t_0, t_1)x^* = 0\}$.

Применяя лемму 19.2, получаем, что неравенство (25.12) имеет место тогда и только тогда, когда множество $\underline{\mathcal{L}}[v^*]$ непусто, т. е. $v^* \in \mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}$, и выполнено неравенство

$$\max_{x^* \in \underline{\mathcal{L}}[v^*]} \langle b, x^* \rangle \geq 0. \tag{25.13}$$

Так как отображение $v^* \to \max\limits_{y^* \in \underline{\mathcal{L}}[v^*]} \langle b, y^* \rangle$ непрерывно (вследствие непрерывности по Хаусдорфу многозначного отображения $\underline{\mathcal{L}}$ [168]), то из (25.13) следует неравенство (25.10). Теорема доказана.

Заметим, что условие $\overline{\Lambda} \subset \mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}$ эквивалентно условию (23.13), необходимость которого для оптимальных по Слейтеру процессов была установлена в следствии 23.1. Таким образом, здесь дано еще одно доказательство этого необходимого условия.

В следующем разделе условие (25.10) будет использоваться как базовое при выводе обобщенных условий Лежандра-Клебша.

25.5. Начнем с распространения на задачу (VPS_U) классического условия Лежандра-Клебша.

Теорема 25.2 (условие Лежандра-Клебша). *Для того чтобы допустимый процесс $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ системы S_U был оптимальным по Слейтеру в задаче (VPS_U), необходимо, чтобы $\overline{\Lambda} \subset \mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}$ и*

$$\min_{v^* \in \overline{\Lambda}} \max_{x^* \in \underline{\mathcal{L}}[v^*]} \psi(t; x^*) f^0_{uu}(t; x^0(t))[v, v] \geq 0, t \in T, \text{ для всех } v \in V. \tag{25.14}$$

Здесь $\psi(t; x^*), t \in T,$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f^0_x(t), t \in T,$$

удовлетворяющее терминальному условию

$$\psi(t_1; x^*) = x^*.$$

Доказательство. Условие $\overline{\Lambda} \subset \mathrm{dom}\underline{\mathcal{L}}$ доказано в теореме 25.1. Докажем неравенство (25.14). В противоположность (25.14) предположим, что существуют $\theta \in (t_0, t_1), w \in V$ и $\widetilde{v}^* \in \overline{\Lambda}$ такие, что

$$\psi(\theta; x^*) f^0_{uu}(\theta, x^0(\theta))[w, w] < 0 \text{ для всех } x^* \in \underline{\mathcal{L}}[\widetilde{v}^*]. \tag{25.15}$$

Рассмотрим игольчатую вариацию управления

$$\delta u(\tau) : \delta u(t; \tau) = \begin{cases} w, & t \in [\theta, \theta + \tau), \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + \tau), \end{cases}$$

где $\tau : 0 \leq \tau \leq t_1 - \theta$.

Вообще говоря, $\delta u(\tau)$ может не принадлежать $\mathcal{W}(u^0, x^0)$, т. е. может не быть вырожденной для процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$. Рассмотрим функции $\delta v_1(\cdot), \ldots, \delta v_k(\cdot)$ из $KC(T; V)$ такие, что векторы $y_i = \delta^1 x_{u^0}(t_1 | \delta v_i), i = 1, 2, \ldots, m,$ образуют базис в касательном подпространстве Эйлера $E(x^0(t_1) | \Omega(t_1))$. Образуем в $KC(T; V)$ следующее семейство функций:

$$\delta w(\tau) : \delta w(t, \tau) = \delta u(t; \tau) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i(\tau) \delta v_i(t), t \in T,$$

где коэффициенты $\beta_i(\tau), i = 1, 2, \ldots, m,$ однозначно определяются из соотношения

$$-\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta u(\tau)) = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_m y_m.$$

Нетрудно убедиться, что $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta w(\tau)) \equiv 0, 0 \le \tau \le t_1 - \theta.$ Следовательно, семейство $\delta w(\tau), 0 \le \tau \le t_1 - \theta,$ состоит из вариаций управления, принадлежащих $\mathcal{W}(u^0, x^0)$.

Вторая вариация траектории на семействе $\delta w(\tau)$ может быть представлена в виде

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta w(\tau), \delta w(\tau)) = \tau F(t_1, \theta)) f^0_{uu}(\theta,\, x^0(\theta))[v, v] + o(\tau),$$

где $\tau^{-1} o(\tau) \to 0$ при $\tau \to +0.$

Из последнего равенства и предположения (25.15) получаем

$$\max_{x^* \in \underline{\mathcal{L}}[\,\widetilde{v}^*]} \langle \delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta w(\tau), \delta w(\tau)), x^* \rangle < 0$$

при достаточно близких к нулю значениях параметра τ. Пришли к противоречию с условием (25.10). Теорема доказана.

Замечание 25.1. Если отображение g является вещественнозначным и дифференцируемым по Фреше, то условие (25.14) совпадает с классическим условием Лежандра – Клебша [57, 95, 126].

Замечание 25.2. Используя пакеты игольчатых вариаций, можно доказать более сильный результат. Пусть

$$\begin{gathered} \mathrm{Lg}^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) := \\ = \{x^* \in E^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)) | \psi(t; x^*) f^0_{uu}(t, x^0(t))[v, v] \le 0 \\ \text{для всех } v \in V, t \in T\}. \end{gathered}$$

Тогда для оптимальности по Слейтеру допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ в задаче (VPS_U) необходимо, чтобы

$$\overline{\partial}(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) \subset \underline{\partial}(s_{\precsim} \circ g)(x^0(t_1)) + \mathrm{Lg}^*(x^0(t_1)|\Omega(t_1)).$$

Это условие следует также из принципа максимума Понтрягина (условие (24.24)).

25.6. Ниже для однообразия будем использовать обозначение $R_0(t, x) := f_{uu}(t, u^0(t), x)$.

Будем говорить, что *векторное подпространство* $V_0 \subset V$ *является особым порядка* k *в точке* $\theta \in (t_0, t_1)$ для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ системы S_U, если существует окрестность $\mathcal{O}_\theta$ точки θ такая, что

$$F(t_1, t) R_s(t, x^0(t))[v, w] \equiv 0, t \in \mathcal{O}_\theta \tag{25.16}$$

для всех $v, w \in V_0$ и всех $s = 0, 1, 2, \ldots, 2(k-1)$.

Если в данном выше определении $V_0 = \{\alpha v | \alpha \in R\}$ — одномерное векторное подпространство, порожденное вектором v, то будем говорить, что направление $v \in V$ является особым порядка k в точке $\theta \in (t_0, t_1)$ для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$. Поскольку билинейные отображения $R_s(t, x^0(t))$ кососимметричны при нечетных s, то при проверке, является ли направление $v \in V$ особым порядка k в точке $\theta \in (t_0, t_1)$ для $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$, достаточно убедиться в справедливости тождеств

$$F(t_1, t) R_{2s}(t, x^0(t))[v, v] \equiv 0, t \in \mathcal{O}_\theta,$$

для всех $s = 0, 1, \ldots, k-1$.

Теорема 25.3. *Если подпространство $V_0 \subset V$ является особым порядка k в точке $\theta \in (t_0, t_1)$ для допустимого процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$, то для оптимальности по Слейтеру процесса $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ в задаче (VPS_U) необходимо, чтобы выполнялись:*

а) *условие Вапнярского-Гоха*

$$\min_{v^* \in \overline{\Lambda}} \max_{x^* \in \underline{\mathcal{L}}[v^*]} \psi(t; x^*) R_{2k-1}(\theta, x^0(\theta))[v, w] \geq 0 \tag{25.17}$$

для всех $v, w \in V^0$;

б) *условие Келли-Коппа-Мойера*

$$\min_{v^* \in \overline{\Lambda}} \max_{x^* \in \underline{\mathcal{L}}[v^*]} \psi(t; x^*) R_{2k}(\theta, x^0(\theta))[v, v] \geq 0 \tag{25.18}$$

для всех $v \in V_0$.

Доказательство. Для каждого натурального k и любых $v \in V, \theta \in (t_0, t_1)$ будем рассматривать в подпространстве $\mathcal{U}_0^{(k)}$ семейство функций следующего вида:

$$\delta v_k(t|\theta, v, \tau) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ik} \gamma_k(t|\theta, i\tau) v, \tag{25.19}$$

где

$$\gamma_k(t|\theta, \mu) = \begin{cases} \dfrac{(t-\theta+\mu)^k}{k!}, & t \in [\theta-\mu, \theta], \\[2ex] \dfrac{(-1)^k (t-\theta-\mu)^k}{k!}, & t \in [\theta, \theta+\mu], \\[2ex] 0, & t \in [\theta-\mu, \theta+\mu], \end{cases}$$

а коэффициенты $\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{kk}$ определяются как решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{ik} i^{\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k-1, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{ik} i^{k} = 1. \end{cases}$$

Воспользовавшись леммой, доказанной в работе [315] (лемма 4.1, с. 272), можно показать, что

$$\lambda_{ik} = (-1)^{k+i} \frac{1}{i!(k+i)!}.$$

Докажем справедливость неравенства (25.17). Для этого рассмотрим семейство функций

$$\delta\overline{v}_k(\tau, v, w, \theta) : \delta\overline{v}_k(t|\tau, v, w, \theta) = \delta v_k(t|\theta, v, \tau) +$$

$$+ \frac{d}{dt} \delta v_{k+1}(t|\theta, w, \tau) + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik}(\tau) \delta u_{ik}(t), t \in T,$$

где функции $\delta u_{1k}(\cdot), \ldots, \delta u_{kk}(\cdot)$ из $\mathcal{U}_0^{(k)}$ таковы, что векторы $y_{ik} := \delta^1 x_{u^0}\left(t_1 \mid \dfrac{d^k}{dt^k} \delta u_{ik}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m_k$, образуют базис в подпространстве

$$E_k(x^0(t_1)|\ \Omega(t_1)) := \left\{ x \in X \mid x = \delta^1 x_{u^0}\left(t_1 \mid \frac{d^k}{dt^k} \delta u\right), \delta u \in \mathcal{U}_0^{(k)} \right\},$$

а коэффициенты $\beta_{ik}(\tau), i = 1, 2, \ldots, m_k$, однозначно определяются из соотношения

$$-\delta^1 x_{u_0}\left(t_1 \mid \frac{d^k}{dt^k} \delta v^k(\cdot \mid \theta, v, \tau) + \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \delta v_{k+1}(\cdot \mid \theta, w, \tau)\right) =$$

$$= \beta_{1k} y_{1k} + \beta_{2k} y_{2k} + \ldots + \beta_{m_k k} y_{m_k k}.$$

Определим семейство функций

$$\delta w_k(\tau) : \delta w_k(t|\tau, v, w, \theta) = \frac{d^k}{dt^k} \delta\overline{v}_k(t|\tau, v, w, \theta).$$

Нетрудно убедиться, что $\delta w_k(\tau) \in \mathcal{U}_k$ и $\delta^1 x_{u^0}(t_1|\delta w_k(\tau)) \equiv 0$, т. е. семейство $\delta w_k(\tau)$ состоит из вырожденных вариаций управления.

Разлагая по степеням τ и учитывая тождества (25.16) получим

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta w_k(\tau), \delta w_k(\tau)) = \tau^{2k} c_{2k} R_{2k}(\theta, x^0(\theta))[v, w] + o(\tau^{2k}),$$

где $s^{-1}o(s) \to 0$ при $s \to +0$, c_{2k} — положительная константа. Предположив, что условие (25.16) не выполняется для каких-то $\theta \in (t_0, t_1)$ и $v, w \in V$, из последнего равенства получим, рассуждая так же, как при доказательстве условия Лежандра-Клебша, противоречие с условием (25.10). Это доказывает необходимость неравенства (25.17).

Для доказательства неравенства (25.18) положим в семействе $\delta w_k(\cdot|\tau, v, w, \theta)$ вектор w нулевым ($w = 0$). Вследствие кососимметричности билинейных отображений $R_{2s+1}(t, x^0(t)), s = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$, тождества (25.16) позволяют получить в этом случае представление

$$\delta^2 x_{u^0}(t_1|\delta w_k^0(\tau), \delta w_k^0(\tau)) = \tau^{2k+1} c_{2k+1} R_{2k+1}(\theta, x^0(\theta))[v, v] + o(\tau^{2k+1}),$$

где $\delta w_k^0(\cdot|\tau, v, \theta) = \delta w_k(\cdot|\tau, v, 0, \theta)$, $s^{-1}o(s) \to 0$ при $s \to +0$, c_{2k+1} — положительная константа. Используя далее условие (25.10), придем к (25.18). Теорема доказана.

Замечание 25.3. Семейство функций $\delta v_k(\cdot|\theta, v, \tau)$, используемое при доказательстве теоремы 25.3, является обобщением вариаций Келли-Коппа-Мойера [133, 139, 310]. Нетрудно убедиться, что $\dfrac{d}{dt}\delta v_1(\cdot|\theta, v, \tau)$ совпадает с двуигольчатой вариацией Келли [133], $\dfrac{d^2}{dt^2}\delta v_2(\cdot|\theta, v, \tau)$ — с вариацией Коппа-Мойера [139].

Замечание 25.4. Если показатель качества является скалярным и гладким, т. е. если функция g вещественнозначна и дифференцируема по Фреше, то условие (25.18) превращается в известное условие оптимальности Келли-Коппа-Мойера [133, 139, 310], а условие (25.17) — в условие оптимальности типа равенства [33, 284, 285]. Заметим, что для систем со скалярным управлением условия (25.17) выполняются тривиально.

Замечание 25.5. Если воспользоваться методикой А. Кренера [315], то для оптимальных по Слейтеру процессов в задаче (VPS_U) можно получить обобщение принципа максимума высокого порядка, из которого в свою очередь могут быть выведены обобщенные условия Лежандра-Клебша в форме, аналогичной условию из замечания 25.2 (на шаге k конус Lg^* будет заменяться на меньший выпуклый конус Lg_k^*). Этот результат можно установить также, используя аппроксимационную лемму второго порядка, доказанную А. А. Аграчевым и Р. В. Гамкрелидзе [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Авербух В. И., Смолянов О. Г.** Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, №2. С. 201 – 260.

[2] **Авербух В. И., Смолянов О. Г.** Различные определения производной в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, №4. С. 67 – 116.

[3] **Аграчев А. А.** Необходимое условие оптимальности второго порядка в общем нелинейном случае // Мат. сб. 1977. Т. 102 (144), №4. С. 551 – 568.

[4] **Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.** Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия // Мат. сб. 1976. Т. 100 (142), №4. С. 610 – 643.

[5] **Азимов А. Я.** Двойственность в задачах векторной оптимизации // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, №5. С. 1033 – 1037.

[6] **Азимов А. Я.** Теоремы двойственности для многокритериальных задач // Докл. АН СССР. 1985. Т. 230, №1. С. 11 – 14.

[7] **Азимов А. Я.** Двойственность многокритериальных задач // Мат. сб. 1986. Т. 131 (173), №4. С. 519 – 535.

[8] **Айзерман М. А., Малишевский А. В.** Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика. 1981. №2. С. 65 – 83.

[9] **Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.** Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978. 368 с.

[10] **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 367с.

[11] **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432с.

[12] **Андреев Ю. Н.** Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.

[13] **Арутюнов А. В., Тынянский Н. Т.** К необходимым условиям локального минимума в теории оптимального управления // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, №2. С. 268 – 272.

[14] **Арутюнов А. В., Тынянский Н. Т.** Условия первого и второго порядков в задаче оптимального управления // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, №6. С. 199 – 200.

[15] **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. 226 с.

[16] **Ащепков Л. Т., Белов Б. И., Булатов В. П. и др.** Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. 233 с.

[17] **Барбашин Е. А.** Метод сечений в теории динамических систем. Мн.: Наука и техника, 1979. 119с.

[18] **Барбашина Е. Е.** Необходимые условия оптимальности типа Коппа - Мойера для случая замкнутой области // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, №3. С. 549 – 552.

[19] **Батухтин В. Д., Майборода Л. А.** Оптимизация разрывных функций. М.: Наука, 1984. 208с.

[20] **Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.** Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1981. 149с.

[21] **Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г.** Математико-статистические методы экспертных оценок. М.: Статистика, 1980. 264с.

[22] **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568с.

[23] **Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР. М.: Наука, 1985 Т. 169. С. 194 – 252.

[24] **Болтянский В. Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

[25] **Болтянский В. Г.** Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 446с.

[26] **Болтянский В. Г.** Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, №3. С. 3 – 55.

[27] **Болтянский В. Г.** Метод шатров в топологических векторных пространствах // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, №5. С. 1036 – 1039.

[28] **Борисов В. И.** Проблемы векторной оптимизации/Исследование операций. Методические аспекты. М.: Наука, 1972. С. 72 – 91.

[29] **Бурбаки Н.** Теория множеств. М.: Мир, 1965. 455с.

[30] **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука 1969. 272с.

[31] **Бурбаки Н.** Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 410с.

[32] **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975. 408с.

[33] **Вапнярский И. Б.** Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, №2. С. 259 – 283.

[34] **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624с.

[35] **Варга З., Силин Д. Б.** Об оптимальности Парето в векторных пространствах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика 1981. №4. С. 28 – 31.

[36] **Васильев О. В.** Методы оптимизации в функциональных пространствах. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1979. 117с.

[37] **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520с.

[38] **Васильев Ф. П.** Методы решений экстремальных задач. М.: Наука 1981. 400с.

[39] **Вилкас Э. И.** Аксиоматическое определение значения матричной игры // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, вып. 3. С. 324 – 327.

[40] **Вилкас Э. И.** Многоцелевая оптимизация // Математические методы в социальных науках. Вильнюс, 1976. Вып. 7. С. 17 – 67.

[41] **Вилкас Э. И.** Понятие оптимальности в теории игр // Современные направления теории игр. Вильнюс: Мокслас, 1976. С. 25 – 43.

[42] **Вилкас Э. И.** Теория полезности // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1977. Т. 14. С. 123 – 151.

[43] **Вилкас Э. И., Майминас Е. З.** Решения: теория, информация, моделирование. М.: Радио и связь, 1981. 328с.

[44] **Волкович В. Л., Даргейко Л. Ф.** Метод ограничений в задачах векторной оптимизации // Автоматика. 1976. №3. С. 13 – 17.

[45] **Воробьев Н. Н.** Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г. Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1976. 224с.

[46] **Воробьев Н. Н.** Теория игр. Аннотированный указатель отечественной и зарубежной литературы за 1969 – 1974 гг. Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1980. 289 с.

[47] **Воробьев Н. Н.** Развитие теории игр // Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. С. 631 – 702.

[48] **Воробьев Н. Н.** Современное состояние теории игр // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, №2. С. 81 – 140.

[49] **Воробьев Н. Н.** Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984. 495 с.

[50] **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407с.

[51] **Габасов Р.** О необходимых условиях оптимальности для особых управлений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. №5. С. 34 – 43.

[52] **Габасов Р.** Об оптимальности особых управлений // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, №6. С. 1000 – 1011.

[53] **Габасов Р., Гороховик В. В., Кириллова Ф. М.** Проблемы векторной оптимизации и теория оптимального управления // VII Всесоюз. совещ. по пробл. упр. Мн., 21 – 25 нояб. 1977 г.: Тез. докл. Мн., 1977. Кн. 1. С. 43 – 46.

[54] **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.

[55] **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.

[56] **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: Наука и техника, 1974. 272с.

[57] **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Методы оптимизации. Мн.: Изд-во Белорус, гос. ун-та, 1981. 350с.

[58] **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Срочко В. А., Тарасенко Н. В.** Условия оптимальности высокого порядка // Автоматика и телемеханика. 1971. №5. С. 5 – 22; №6. С. 5 – 24; №7. С. 5 – 34.

[59] **Габасов Р., Срочко В. А.** Исследование особых управлений с помощью пакета вариаций // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, №2. С. 260 – 275.

[60] **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977. 256 с.

[61] **Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. Л.** Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, №4. С. 781 – 839.

[62] **Гермейер Ю. Б.** Введение в теорию исследования операций М.: Наука, 1971. 383с.

[63] **Глотов В. А., Павельев В. В.** Экспертные методы определения весовых коэффициентов // Автоматика и телемеханика. 1976. №12. С. 95 – 107.

[64] **Глотов В. А., Павельев В. В.** Векторная стратификация. М.: Наука, 1984. 94 с.

[65] **Горелик В. А., Кононенко А. Ф.** Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982. 144с.

[66] **Гороховик В. В.** К проблеме векторной оптимизации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1972. №6. С. 63 – 70.

[67] **Гороховик В. В.** Условия слабой эффективности в конечномерных задачах векторной оптимизации. Мн., 1976. 18с. (Препринт/Ин-т математики АН БССР: №12).

[68] **Гороховик В. В.** Необходимые условия слабой эффективности в задаче управления с векторным показателем качества. Мн., 1976. 44 с. (Препринт/ Ин-т математики АН БССР: №13).

[69] **Гороховик В. В.** Задачи оптимизации по векторному показателю качества // Проблемы управления и оптимизации. Мн., 1976. С. 134 – 146.

[70] **Гороховик В. В.** Об условиях локального минимума в задаче нелинейного программирования // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1977. №6. С. 50 – 56.

[71] **Гороховик В. В.** Квазиминимальность в задачах управления с нескалярным показателем качества // IV Всесоюз. совещ. по управлению многосвязными системами. М., 1978 г.: Тез. докл. М., 1978. С. 129 – 130.

[72] **Гороховик В. В.** К необходимым условиям .слабой эффективности в задаче управления с векторным показателем качества. Мн., 1978. 21 с. (Препринт/Ин-т математики АН БССР: №4 (36)).

[73] **Гороховик В. В.** Понятия оптимальности в задачах многокритериальной оптимизации // Взаимодействие человека и ЭВМ в процессе принятия решения по многим критериям эффективности: III Всесоюз. семинар по исслед. операций и системному анализу. Кутаиси, 1980 г.: Тез. докл. Тбилиси, 1980. С. 21 – 22.

[74] **Гороховик В. В.** Необходимые условия оптимальности в задачах оптимизации с векторным показателем качества // Проблемы оптимального управления. Мн.: Наука и техника, 1981. С. 5 – 25.

[75] **Гороховик В. В.** Минимальность и квазиминимальность в упорядоченных векторных пространствах // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, №8. С. 685 – 688.

[76] **Гороховик В. В.** Необходимые условия оптимальности высокого порядка для задачи управления с терминальными ограничениями. Мн., 1982. 49с. (Препринт/Ин-т математики АН БССР: №1 (126)).

[77] **Гороховик В. В.** О квазидифференцируемости вещественнозначных функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, №6. С. 1294 – 1298.

[78] **Гороховик В. В.** Квазидифференцируемость и условия локального экстремума для вещественнозначных функций. Мн., 1982. 26 с. (Препринт/ Ин-т математики АН БССР: №24 (149)).

[79] **Гороховик В. В.** Квазидифференцируемость в задачах оптимального управления // 1У Всесоюз. конф. по оптимальному управлению в мех. системах. М., 16-18 нояб. 1982 г.: Тез. докл. М., 1982. С. 58.

[80] **Гороховик В. В.** Необходимые условия оптимальности второго порядка в задачах управления с векторным показателем качества // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, №10. С. 1672 – 1680.

[81] **Гороховик В. В.** Аппроксимативная квазидифференцируемость отображений // International Congress of Mathematicians. Warszawa, 1983. Short communications (Abstracts). Warszawa, 1983. Vol. 12. P. 27.

[82] **Гороховик В. В.** Квазидифференцируемость вещественнозначных функций и условия локального экстремума // Сиб. мат. жури. 1984. Т. 25, №3. С. 62 – 70.

[83] **Гороховик В. В.** Условно линейная скаляризация задач векторной оптимизации // Принятие решений при многих критериях: V Межресп. семинар по исслед. операций и системному анализу. Кутаиси. 24 – 27 сент. 1985 г.: Тез докл. М., 1985. С. 73.

[84] **Гороховик В. В.** Необходимые условия экстремума в задачах с ε–квазидифференцируемыми параметрами // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. №1. С. 3 – 9.

[85] **Гороховик В. В.** Необходимые условия оптимальности в матричных импульсах для задачи управления с терминальными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. №4. С. 66 – 74.

[86] **Гороховик В. В., Гороховик С. Я.** Необходимые условия оптимальности особых управлений в задачах с подвижным правым концом траектории // Докл. АН БССР. 1976. Т. 20, №3. С. 221 – 224.

[87] **Гороховик В. В., Гороховик С. Я.** Различные формы обобщенных условий Лежандра – Клебша // Автоматика и телемеханика. 1982. №7. С. 28 – 33.

[88] **Гороховик В. В., Дымков М. П.** Оптимизация линейных систем по векторным критериям // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск, 1975. Вып. 3. С. 245 – 256.

[89] **Гороховик В. В., Кириллова Ф. М.** О скаляризации задач векторной оптимизации // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, №7. С. 588 – 591.

[90] **Гурвиц Л.** Программирование в линейных пространствах // Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 65 – 155.

[91] **Гурман В. И.** Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304с.

[92] **Гусев М. И.** Векторная оптимизация линейных систем // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, №1. С. 21 – 24.

[93] **Гусев М. И.** Управление линейной системой, оптимизирующей векторный критерий // Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. Свердловск, 1974. С. 77 – 104.

[94] **Гусев М. И., Куржанский А. Б.** О ситуациях равновесия в многокритериальных игровых задачах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, №6. С. 1295 – 1298.

[95] **Гюнтер Н. М.** Курс вариационного исчисления. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941. 308с.

[96] **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896с.

[97] **Дараховский Б. С., Левитин Е. С.** Условия оптимальности второго порядка для одного класса негладких задач математического программирования // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, №2. С. 79 – 97.

[98] **Демьянов В. Ф.** Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГY, 1974. 112 с.

[99] **Демьянов В. Ф.** Задачи негладкой оптимизации и квазидифференцируемость // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №1. С. 9 – 19.

[100] **Демьянов В. Ф. и др.** Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: Изд-во ЛГY, 1982. 323с.

[101] **Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384с.

[102] **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368с.

[103] **Демьянов В. Ф., Никулина В. Н., Шаблинская И. Р.** Задача оптимального управления с негладкими дифференциальными связям и // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, №8. С. 1324 – 1330.

[104] **Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н.** Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве // Журн. вьиисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, №4. С. 849 – 856.

[105] **Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М.** Об одном обобщении понятия субдифференциала // Всесоюз. конф. по динамическому управлению: Тез. докл. Свердловск, 1979. С. 79 – 84.

[106] **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, №1. С. 21 – 25.

[107] **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** О некоторых подходах в задаче негладкой оптимизации // Экономика и мат. методы. 1981. Т. 17, вып. 6. С. 1153 – 1174.

[108] **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во ЛГY, Г968. 180с.

[109] **Дмитрук А. В.** Квадратичные условия слабого минимума для особых режимов в задачах оптимального управления // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, №4. С. 523 – 526.

[110] **Дмитрук А. В.** Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению, с ограничением на управление // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, №2. С. 285 – 289.

[111] **Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, №6. С. 11 – 46.

[112] **Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.** Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986. 295с.

[113] **Дубовицкий А. Я-, Милютин А. А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, №3. С. 395 – 453.

[114] **Емельянов С. В., Борисов В. И., Малевич А. А., Черкашин А. М.** Модели и методы векторной оптимизации // Итоги науки и техники. Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 5. С. 386 – 448.

[115] **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 191 с.

[116] **Жидков Ю. Н.** Оптимальные по Слейтеру управления в оптимальных процессах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1980. №2. С. 41 – 47.

[117] **Жуковский В. И.** Некоторые перспективы развития дифференциальных игр нескольких лиц. 1. Оптимальность по Слейтеру // Годишник на высшите учебни заведения. София: Техника, 1982. Т. 17, кн. 4. Прилежна математика. С. 37 – 50.

[118] **Жуковский В. И., Молоствов В. С.** Об оптимальности по Парето в кооперативных дифференциальных играх с многозначными целевыми функционалами // Сб. тр. ВНИИ системных исслед. М., 1980. №6. С. 96 – 108.

[119] **Заботин В. И.** О задаче оптимизации по векторному критерию // Тр. Казан, авиац. ин-та. 1971. Вып. 135. С. 69 – 75.

[120] **Забрейко П. П., Зафиевский А. В.** Об общих условиях минимума // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, №4. С. 798 – 801.

[121] **Завалишин С. Т.** Об особых решениях в задачах максиминной оптимизации динамических систем с квадратичным критерием // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, №4. С. 637 – 644.

[122] **Зубов В. И.** Теория оптимального управления. Л.: Судпромгиз, 1966. 352с.

[123] **Зубов В. И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. 335с.

[124] **Зубов В. И.** Лекции по теории управления. М.: Наука: 1975. 495 с.

[125] **Зубов В. И.** Динамика управляемых систем. М.: Высш. шк., 1982. 287с.

[126] **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479с.

[127] **Казимиров В. И., Плотников В. И., Старобинец И. М.** Абстрактная схема метода вариаций и необходимые условия экстремума // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, №1. С. 141 – 159.

[128] **Канторович Л. В.** Методы оптимизации и математические модели // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, №5. С. 107 – 109.

[129] **Канторович Л. В.** Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. 64с.

[130] **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

[131] **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 838с.

[132] **Карманов В. Г.** Математическое программирование. М.: Наука, 1980. 256с.

[133] **Келли Г. Дж.** Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации // Ракетная техника и космонавтика. 1964. Т. 3, №8. С. 26 – 29.

[134] **Кини Р. Л., Райфа Х.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560с.

[135] **Кириллова Ф. М., Гороховик В. В., Дымков М. П.** К теории векторной оптимизации // Матер. Всесоюз. симпоз. по опт. упр. и дифференц. играм. Тбилиси, 7-11 июня 1976 г. Тбилиси: Мецниереба, 1977. С. 139 – 145.

[136] **Кирин Н. Е.** Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л: Изд-во-ЛГУ, 1975. 159 с.

[137] **Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. Б.** Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1980. 168с.

[138] **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543с.

[139] **Копп Р. Е., Мойер Х. Г.** Необходимые условия оптимальности особых управлений // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. №8. С. 84 – 91.

[140] **Красносельский М. А.** Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394с.

[141] **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.

[142] **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420с.

[143] **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 581 с.

[144] **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456с.

[145] **Крейн М. Г., Рутман М. А.** Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 1 (23). С. 3 – 95.

[146] **Кротов В. Ф., Гурман В. И.** Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448с.

[147] **Кругер А. Я.** Обобщенные дифференциалы негладких функций и необходимые условия экстремума // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, №3. С. 78 – 90.

[148] **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390с.

[149] **Курош А. Г.** Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 399 с.

[150] **Кусраев А. Г.** О необходимых условиях экстремума для негладких векторнозначных отображений // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, №1. С. 44 – 47.

[151] **Кусраев А. Г.** Субдифференцирование негладких операторов и необходимые условия экстремума в многоцелевых задачах с ограничениями // Оптимизация. Новосибирск, 1980. Вып. 24(41). Проблемы экономической динамики и равновесия. С. 75 – 117.

[152] **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Локальный выпуклый анализ // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 155 – 206.

[153] **Кутателадзе С. С.** Выпуклое программирование // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, №5. С. 1048 – 1050.

[154] **Кутателадзе С. С.** Выпуклые операторы // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, №1. С. 167 – 196.

[155] **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1976. 254 с.

[156] **Кутателадзе С. С., Фельдман М. М.** Множители Лагранжа в задачах векторной оптимизации // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, №1. С. 28 – 31.

[157] **Ланкастер К.** Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972. 464с.

[158] **Ларичев О. И.** Наука и искусство принятия решения. М.: Наука, 1976. 200с.

[159] **Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.** О необходимых условиях локального минимума в задаче с ограничениями // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, №5. С. 1022 – 1025.

[160] **Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.** Об условиях локального минимума в задаче с ограничениями // Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974. С. 139 – 202.

[161] **Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.** Условия высших порядков в задачах с ограничениями // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, вып. 6. С. 85 – 148.

[162] **Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.** Теория условий высших порядков в гладких задачах на экстремум с ограничениями // Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1985. С. 4 – 40.

[163] **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576с.

[164] **Линке Ю. Э., Толстоногов А. А.** Представление сублинейных операторов многозначными отображениями // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, №2. С. 294 – 297.

[165] **Линке Ю. Э., Толстоногов А. А.** О свойствах пространств сублинейных операторов // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, №4. С. 792 – 806.

[166] **Лоран П.-Ж.** Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496с.

[167] **Лурье К. А.** Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480с.

[168] **Макаров В. Л., Рубинов А. М.** Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973. 335с.

[169] **Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. А., Соколов В. Б.** Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982. 328с.

[170] **Машунин Ю. К.** Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.

[171] **Мееров М. В.** Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. М.: Наука, 1986. 236с.

[172] **Месарович М., Такахара Я.** Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978. 311 с.

[173] **Метревели Д. Г.** Необходимые и достаточные условия эффективности в задачах векторной оптимизации // Сообщ. АН ГССР. 1976. Т. 83, №3. С. 585 – 588.

[174] **Милютин А. А.** Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, вып. 5 (155). С. 110 – 116.

[175] **Милютин А. А.** О квадратичных условиях экстремума в гладких задачах с конечномерным образом // Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1981. С. 138 – 177.

[176] **Миркин Б. Г.** Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256с.

[177] **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526с.

[178] **Моисеев Н. Н.** Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488с.

[179] **Молодцов А. Д.** Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987. 280с.

[180] **Мордухович Б. Ш.** Метрические аппроксимации и необходимые условия оптимальности для общих классов негладких задач // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, №5. С. 1072 – 1076.

[181] **Мордухович Б. Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 359 с.

[182] **Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 707с.

[183] **Немыцкий В. В., Степанов В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 448с.

[184] **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 517с.

[185] **Никулина В. Н., Шаблинская И. Р.** Необходимые условия минимума в задаче оптимального управления с квазидифференцируемым функционалом // Вопросы механики и процессов управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. Вып. 5. Моделирование и математическое обеспечение систем управления. С. 255 – 263.

[186] **Нурминский Е. А., Урясьев С. П.** Разность выпуклых множеств // Докл. АН УССР. Физ.-мат. и техн. науки. 1985. №1. С. 62 – 65.

[187] **Озерной В. М.** Принятие решений (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1971. №11. С. 106 – 121.

[188] **Осмоловский Н. П.** Условия второго порядка слабого локального минимума в задаче оптимального управления (необходимость, достаточность) // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, №2. С. 259 – 262.

[189] **Петросян Л. А.** Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 224с.

[190] **Петросян Л. А., Данилов Н. Н.** Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985. 276с.

[191] **Петросян Л. А., Томский Г. В.** Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 141 с.

[192] **Петросян Л. А., Захаров В. В.** Введение в математическую экологию. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 222 с.

[193] **Пинскер А. Г.** Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства // Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та. 1966. Вып. 63. С. 13 – 18.

[194] **Плотников В. И.** Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функционалов для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, №3. С. 652 – 679.

[195] **Плотников В. И., Сумин М. И.** Необходимые условия в негладкой задаче оптимального управления // Мат. заметки. 1982. Т. 32, №2. С. 187 – 197.

[196] **Подиновский В. В.** Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. 1976. №11. С. 118 – 127.

[197] **Подиновский В. В.** Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, №2. С. 330 – 344.

[198] **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975. 192с.

[199] **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 254 с.

[200] **Полищук Л. И.** Взвешенные обобщенные критерии в задачах векторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1982. №2. С. 55 – 60.

[201] **Половинкин Е. С., Смирнов Г. В.** Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, №6. С. 944 – 954.

[202] **Поляк Б. Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.

[203] **Полякова Л. Н.** Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестн. ЛГУ. 1980. №13. С. 57 – 62.

[204] **Полякова Л. Н.** Об одной задаче негладкой оптимизации // Кибернетика. 1982. №2. С. 119 – 122.

[205] **Полякова Л. Н.** Необходимые условия экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестн. ЛГУ. 1982. №7. С. 75 – 80.

[206] **Полякова Л. Н.** Достаточное условие локального экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вести. ЛГУ. 1985. №22. С. 26 – 30.

[207] **Понтрягин Л. С.** Оптимальные процессы регулирования // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 1. С. 3 – 20.

[208] **Понтрягин Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 331 с.

[209] **Понтрягин Л. С.** Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Тр. Мат. ин-та АН СССР. М.: Наука, 1985. Т. 169. С. 119 – 158.

[210] **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392с.

[211] **Пшеничный Б. Н.** О необходимых условиях экстремума для негладких функций // Кибернетика. 1977. №6. С. 92 – 96.

[212] **Пшеничный Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи М.: Наука, 1980. 319с.

[213] **Пшеничный Б. Н.** Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 144с.

[214] **Пшеничный Б. Н., Полищук Н. В.** К вопросу об оптимальности по Парето в некоторой модели производства и обмена // Кибернетика. 1986. №6. С. 125 – 128.

[215] **Пшеничный Б. Н., Хачатрян Р. А.** Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, №3. С. 553 – 556.

[216] **Пшеничный Б. Н., Хачатрян Р. А.** Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации // Экономика и мат. методы. 1982. Т. 18, №6. С. 1133 – 1140.

[217] **Райков Д. А.** Векторные пространства. М.: Наука, 1962. 211с.

[218] **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472с.

[219] **Руа Б.** Проблемы и методы принятия решений в задачах с многими целевыми функциями // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976. С. 20 – 58.

[220] **Руа Б.** Классификация и выбор при наличии нескольких критериев // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976. С. 80 – 107.

[221] **Рубинов А. М.** Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1980. 166с.

[222] **Рубинов А. М.** Сублинейные операторы и их приложения // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, №4 (196). С. 113 – 174.

[223] **Рубинштейн Г. Ш.** Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, вып. 5 (155). С. 171 – 201.

[224] **Салуквадзе М. Е.** Задачи векторной оптимизации в теории управления. Тбилиси: Мецниереба, 1975. 203с.

[225] **Современное** состояние теории исследования операций/Под ред. Н. Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. 464 с.

[226] **Срочко В. А.** Метод преобразования вариаций в теории особых управлений // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск, 1973. Вып. 2. С. 70 – 80.

[227] **Срочко В. А.** Исследование второй вариации на особых управлениях // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, №6. С. 1050 – 1056.

[228] **Срочко В. А.** Многоточечные условия оптимальности для особых управлений // Численные методы анализа (прикладная математика). Иркутск, 1976. С. 43 – 50.

[229] **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287с.

[230] **Субботина Н. Н.** Необходимые и достаточные условия оптимальности управлений и траекторий // Синтез оптимального управления в игровых системах. Свердловск, 1986. С. 86 – 96.

[231] **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304с.

[232] **Толстоногов А. А.** Некоторые свойства пространств сублинейных функционалов // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, №2. С. 429 – 443.

[233] **Третьяков А. А.** Необходимые и достаточные условия оптимальности p – го порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, №2. С. 203 – 209.

[234] **Трухаев Р. И.** Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 257с.

[235] **Трухаев Р. И.** Инфлюентный анализ и принятие решений. Детерминированный анализ. М.: Наука, 1984. 233с.

[236] **Тынянский Н. Т., Жуковский В. И.** Дифференциальные игры с ненулевой суммой (бескоалиционный вариант) // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1977. Т. 15. С. 199 – 266.

[237] **Тынянский Н. Т., Жуковский В. И.** Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 17. С. 3 – 112.

[238] **Федоров В. В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280с.

[239] **Фельдман М. М.** О достаточных услевиях существования опорных к сублинейным операторам // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, №1. С. 132 – 138.

[240] **Фишберн П.** Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978. 352с.

[241] **Хоменюк В. В.** Элементы теории многоцелевой оптимизации. М.: Наука, 1983. 124 с.

[242] **Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.** Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.

[243] **Шаблинская И. Р.** Необходимые условия оптимальности в негладких задачах теории управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. №3. С. 207 – 212.

[244] **Шефер Х.** Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359с.

[245] **Шор Н. З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук, думка, 1979. 200с.

[246] **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.

[247] **Эрроу К. Дж., Баранкин Е. В., Блекуэлл Д.** Допустимые точки выпуклых множеств // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 274 – 280.

[248] **Якубович В. А.** К абстрактной теории оптимального управления // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, №3. С. 685 – 687; 1978. Т. 19, №2. С. 436 – 460; 1979. Т. 20, №4. С. 885 – 910; 1979. Т. 20, №5. С. 1131 – 1159.

[249] **Achiles A., Elster K.-H., Nehse R.** Bibliographic zur Vektoroptimierung (Theorie und Anwendungen) // Math. Operationsforsch. und Statistik. Ser. Optimization. 1979. Vol. 10, N 2. P. 277 – 321.

[250] **Athans M., Geering H. P.** Necessary and sufficient conditions for differentiable nonscalar-valued functions to attain extrema // lEEE Trans. Automatic Control. 1973. Vol. AC-18, N 2. P. 132 – 139.

[251] **Aubin J.-P., Ekeland I.** Applied nonlinear analysis. N. Y. et al.: Wiley and Sons, 1984. 584 p.

[252] **Azimov A. Ya.** Duality in nonconvex problems of vector optimization // Problems of Control and Inform. Theory. 1983. Vol. 12, N 3. P. 209 – 218.

[253] **Banks H. T., Jacobs M. Q.** A differential calculus for multifunctions // J. of Math. Analysis and Applications. 1970. Vol. 29, N 2. P. 246 – 272.

[254] **Bell D. J.** Singular problems in optimal control — a survey // Intern. J. Control. 1975. Vol. 21, N 2. P. 319 – 331.

[255] **Ben-Israel A., Ben-Tal A., Charnes A.** Necessary and sufficient conditions for a Pareto-optimum in convex programming // Econometrica. 1977. Vol. 45, N 4. P. 811 – 820.

[256] **Benson H. P.** An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones // J. of Math. Analysis and Applications. 1972. Vol. 71, N 1. P. 232 – 241.

[257] **Ben-Tal A.** Second order theory of extremum problems // Lecture Notes in Economics and Math. Systems. 1980. Vol. 174. P. 336 – 356.

[258] **Ben-Tal A., Zowe J.** A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces // Math. Progr. Study. 1982. Vol. 19. P. 39 – 76.

[259] **Ben-Tal A.,l Zowe J.** Directional derivatives in nonsmooth optimization // J. of Optimization Theory and Applications. 1985, Vol. 47, N 4. P. 483 – 490.

[260] **Bernstein D. S.** A systematic approach to higher-order necessary conditions in optimization theory // SIAM J. of Control and Optimization. 1984. Vol. 22, N 2. P. 211 – 238.

[261] **Bitran G. R.** Duality for nonlinear multiple-criteria optimization theory // J. of Optimization Theory and Applications. 1981. Vol. 35, N 3. P. 367 – 401.

[262] **Blatnik J.** On multicriterion optimization in optimal control problems // Problems of Control and Inform. Theory. 1985. Vol. 14, N 3. P. 169 – 178.

[263] **Borwein J. M.** Proper efficient points for maximization with respect to cones // SIAM J. of Control and Optimization. 1977. Vol. 15, N 1. P. 57 – 63.

[264] **Borwein J. M.** The geometry of Pareto efficiency over cones // Math. Operationsforsch. und Statistik. Ser. Optimization. 1980. Vol. 11 N 2. P 235 – 248.

[265] **Borwein J. M.** On the existence of Pareto efficient points // Mathematics of Operations Research. 1983. Vol. 8, N 1. P. 64 – 73.

[266] **Borwein J. M.** Subgradients of convex operators // Math. Operationsforsch. und Statistik., Ser. Optimization. 1984. Vol. 15, N 2. P. 179 – 191.

[267] **Borwein J. M.** Stability and regular points, of inequality systems // J. of Optimization Theory and Applications. 1986. Vol. 48, N 1. P. 9 – 52.

[268] **Borwein J. M.** Two kinds of normality in vector optimization // Math. Progr. 1984. Vol. 28, N 2. P. 185 – 191.

[269] **Cesari L., Suryanarayana M. B.** Existence theorems for Pareto optimization in Banach spaces // Bull. American Math. Society. 1976. Vol. 82, N 2. P. 306 – 308.

[270] **Clarke F. H.** Generalized gradients and applications // Trans. of the Amer. Math. Society. 1975. Vol. 204, N 2. P. 247 – 262.

[271] **Clarke F. H.** A new approach to Lagrange multipliers // Mathematics of Operations Research. 1976. Vol. 1, N 2. P. 165 – 174.

[272] **Corley H. W.** Duality theory for maximizations with respect to cones // J. of Math. Analysis and Applications. 1981. Vol. 84, N 2. P. 560 – 568.

[273] **Corley H. W.** On optimality conditions for maximizations with respect to cones // J. of Optimization Theory and Applications. 1985. Vol. 46, N 1. P. 67 – 78.

[274] **Cunha N. O., Polak E.** Constrained minimization under vector-valued criteria in finite dimensional spaces // J, of Math. Analysis and Applications. 1967. Vol. 19, N 1. P. 103 – 124.

[275] **Demyanov V. F., Rubinov A. M.** On quasidifferentiable mappings // Math. Operationsforsch. und Statistik. Ser. Optimization. 1983. Vol. 14, N 1. P. 3 – 21.

[276] **Demyanov V. F., Rubinov A. M.** Quasidifferentiai calculus. N. Y.: Inc. Publications Devision, 1986. 289 p.

[277] **Deležal J.** Necessary conditions for Pareto optimality in nondifferentiable problems // Problems of Control and Information Theory. 1985. Vol. 14, N 2. P. 131 – 141.

[278] **Elster K.-H., Nehse R.** Necessary and sufficient conditions for the order-completeness of partially ordered vector spaces // Mathematische Nachrichten. 1978. Bd 81. S. 301 – 311.

[279] **Fishburn P. C.** Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey // Management Science. 1974. Vol. 20, N 11. P. 1442 – 1471.

[280] **Gabasov R., Gorokhovik V. V., Kirillova F. M.** Multicriterion optimization problems and optimal control theory // VII Triennial World congress IFAC. Helsinki, 12-16 June 1978. Helsinki, 1978. Vol. 2. P. 1001 – 1007.

[281] **Gabasov R., Kirillova F. M.** High order necessary conditions for optimality // SIAM J. Control. 1972. Vol. 10, N 1. P. 127 – 168.

[282] **Geoffrion A. M.** Proper efficiency and the theory of vector maximization // J. of Math. Analysis and Applications. 1968. Vol. 22, N 3. P. 618 – 630.

[283] **Gilbert E. G., Bernstein D. S.** Second-order necessary conditions in optimal control: accessary problem results without normality conditions // J. of Optimization Theory and Applications. 1983. Vol. 41, N 1. P. 75 – 106.

[284] **Goh B. S.** The second variation for the singular Bolza problem // SIAM J. Control. 1966. Vol. 4, N 2. P. 309 – 325.

[285] **Goh B. S.** Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables // SIAM J. Control. 1966. Vol. 4, N 4. P. 716 – 731.

[286] **Gollan B.** Higher order necessary conditions for an abstract optimization problems // Math. Progr. Study. 1981. Vol. 14. P. 69 – 76.

[287] **Gorokhovik V. V.** The optimization of systems with vector-valued objective function // Third IFAC Symp. on Multivariable Technological Systems. Manchester, 16-19 Sept. 1974. Manchester, 1974. P. S32-1 – S32-4.

[288] **Gorokhovik V. V.** Scalarization of multiobjective optimization problems // Wissenschaftliche Berichte der Technischen Hochschule Leipzig. 1980. H. 5: 2. Tagung Optimale Steuerung - Theorie und Anwendungen. P. 9 – 10.

[289] **Gorokhovik V. V.** High-order necessary optimality conditions for control problems with terminal constraints // Optlimal Control. Theory and Methods. 1983. Vol. 4, N 1. P. 103 – 127.

[290] **Gorokhovik V. V.** ε-Quasidifferentiability of real-valued functions and conditions in extremal problems // Math. progr. Study. Vol. 29. P. 203 – 218.

[291] **Gorokhovik V. V.** Dual characteristics of minimality in preordered vector spaces // Internationale Tagung. Mathematische Optimirung — Theorie und Anwendungen. Eisenach, Nov. 1986. Ilmenau, 1986. P. 58 – 61.

[292] **Halkin H.** A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations // SIAM J. Control. 1966. Vol. 4, N 1. P. 90 – 111.

[293] **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with differentiable or nondifferentiable data // Lecture Notes in Mathematics. 1978. Vol. 680. P. 77 – 118.

[294] **Hammer P. C.** Maximal convex sets // Duke Math. J. 1955. Vol. 22, N 1. P. 103 – 106.

[295] **Hartley R.** On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness // SIAM J. Applied Mathematics. 1978. Vol. 34, N 2. P. 211 – 222.

[296] **Hausner M., Wendel J. G.** Ordered vector spaces // Proc. of the American Math. Society. 1952. Vol. 3, N 5. P. 977 – 982.

[297] **Henig M. I.** Proper efficiency with respect to cones // J. of Optimization Theory and Applications. 1982. Vol. 36, N 3. P. 387 – 407.

[298] **Henig M. I.** Existence and characterization of efficient decisions with respect to cones // Math. Progr. 1982. Vol. 23, N 1. P. 111 – 116.

[299] **Hiriart-Urruty J.-B.** New concepts of nondifferential programming // Bulletin de la Sciété Math. de France. 1979. Mémoire N 60. P. 57 – 85.

[300] **Hiriart-Urruty J.-B.** Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Mathematics of Operations Research. 1979. Vol. 4, N 1. P. 79 – 97.

[301] **Hoffmann K. H., Kornstaedt H. J.** High-order necessary conditions in abstract mathematical programming // J. of Optimization Theory and Applications. 1978. Vol. 26, N 4. P. 533 – 568.

[302] **Ioffe A. D.** Necessary and sufficient conditions for local maximum // SIAM J. of Control and Optimization. 1979. Vol. 17, N 2. P. 245 – 288.

[303] **Ioffe A. D.** Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings // Trans. of the Amer. Math. Society. 1981. Vol. 266, N 1. P. 1 – 56.

[304] **Ioffe A. D.** Second order conditions in nonlinear nonsmooth problems of semi-infinite programming // Lecture Notes in Economics and Math. Systems. 1983. Vol. 215. P. 262 – 280.

[305] **Ioffe A. D.** Calculus of Dini subdifferentials of functions and coderivatives of set-valued maps // Nonlinear Analysis. Theory and Applications. 1984. Vol. 8, N 5. P. 517 – 539.

[306] **Jahn J.** Scalarization in vector optimization // Math. Progr. 1984. Vol. 29, N 2. P. 203 – 218.

[307] **Jahn J.** A characterization of properly minimal elements of the set // SIAM J. of Control and Optimization. 1985. Vol. 23, N 5. P. 649 – 656.

[308] **Jahn J.** Duality in vector optimization // Math. Progr. 1983. Vol. 25, N 4. P. 343 – 353.

[309] **Jahn J.** Existence theorems in vector optimization // J. of Optimization Theory and Applications. 1986. Vol. 50, N 3. P. 397 – 406.

[310] **Kelley H. J., Kopp R. E., Mover H. G.** Singular extremals // Topics in Optimization/Ed. G. Leitmann. N. Y.; London: Acad. Press, 1967. P. 63 – 101.

[311] **Klee V. L.** The structure of semispaces // Mathematica Scandinavica. 1956. Vol. 4, N 1. P. 54 – 64.

[312] **Klee V. L.** Separation and support properties of convex sets. — A survey // Control Theory and the Calculus of Variations/Ed. A. V. Balakrishnan. N. Y.: Acad. Press, 1969. P. 235 – 303.

[313] **Klinder A.** Vector-valued performance criteria // IEEE Trans. Automatic Control. 1964. Vol. AC-9, N 1. P. 117 – 118.

[314] **Knobloch H. W.** Higher order necessary conditions in optimal control theory // Lecture Notes in Control and Inform. Sciences. 1981. Vol. 34. P. 1 – 173.

[315] **Krener A. J.** The high order maximum principle and its applications to singular extremals // SIAM J. of Control and Optimization. 1977. Vol. 15, N 2. P. 256 – 293.

[316] **Kuhn H. W., Tucker A. W.** Nonlinear programming // Proc. of the Second Berkeley Symp. of Math. Statistics and Probability/Ed. J. Neymann. Berkeley: Univ. of California Press, 1951. P. 481 – 492.

[317] **Lantos B.** Necessary conditions for the optimality in abstract optimum control problems with nonscalar-valued performance criterion // Problems of Control and Inform. Theory. 1976. Vol. 5, N 3. P. 271 – 284.

[318] **Leitmann G., Yu P. L.** Compromise solutions, domination structures and Solukvadze's solutions // J. of Optimization Theory and Applications. 1974. Vol. 13, N 3. P. 362 – 378.

[319] **Lemarechal C.** An introduction to the theory of nonsmooth optimization // Optimization. 1986. Vol. 17, N 6. P. 827 – 858.

[320] **Luderer B.** On the quasidifferential of a continual maximum function // Optimization. 1986. Vol. 17, N 4. P. 447 – 452.

[321] **Massam H., Zlobec S.** Various definitions of the derivative in mathematical programming // Math. Progr. 1974. Vol. 7. N 1. P. 144 – 161.

[322] **McShane E. J.** On multipliers for Lagrange problems // Amer. J. Mathematics. 1939. Vol. 60. P. 809 – 819.

[323] **Messerly E. J., Polak E.** On second order necessary conditions of optimality // SIAM J. Control. 1969. Vol. 7, N 2. P. 272 – 251.

[324] **Minami M.** Weak Pareto-optimal necessary conditions in a non-differentiable multiobjective program on a Banach space // J. of Optimization Theory and Applications. 1983. Vol. 4, N 3. P. 451 – 461.

[325] **Nehse R.** Bibliographic zur Vektoroptimirung – Theorie und Anwendungen (1. Fortsetzung) // Math. Operationsforsch. und Statistik. Ser. Optimization. 1982. Vol. 13, N 4. P. 593 – 625.

[326] **Neustadt. L. W.** Optimization. A theory of necessary conditions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976. 424 p.

[327] **Niewenhuis J. W.** Properly efficient and efficient solutions for vector maximization problems in Euclidian space // J. of Math. Analysis and Applications. 1981. Vol. 84, N 2. P. 311 – 317.

[328] **Olech G.** Existence theorems for optimal problems with vector-valued cost function // Trans. of the Amer. Math. Society. 1969. Vol. 136, N l.P. 159 – 180.

[329] **Pallaschke D., Recht P., Urbanski R.** On locally-Lipschitz quasi-differentiable functions in Banach spaces // Optimization. 1986. Vol. 17, N 3. P. 287 – 295.

[330] **Papageorgiou N. S.** Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces: Part 1. Convex case // Pacific J. Mathematics. 1983. Vol. 107, N 2. P. 403 – 458.

[331] **Papageorgiou N. S.** Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces: Part 2. Nonconvex case, Clarke's theory // Pacific J. Mathematics. 1983. Vol. 109. N 2. P. 463 – 495.

[332] **Papageorgiou N. S.** Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces: The subdifferential theory // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1986. Vol. 10, N 7. P. 615 – 637.

[333] **Pareto V.** Course d'economic politique. Lausanne: Rouqe, 1896.

[334] **Penot J.-P.** Calcul sous-différential et optimisation // J. of Functional Analysis. 1978. Vol. 27, N 2. P. 248 – 276.

[335] **Pham Huu Sach.** К теории векторной оптимизации в выпуклых многозначных системах // Acta Math. Vietnamica. 1970. Vol. 4, N 1. P. 105 –112.

[336] **Quasidifferential** Calculus / Eds. V. F. Demyanov, L. C. W. Dixon. Amsterdam: North Holland, 1986. 222 p.

[337] **Radström H.** On embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. of the Amer. Math. Society. 1962. Vol. 3, N 1. P. 165 – 169.

[338] **Ritter K.** Optimization theory in linear spaces // Mathematische Annalen. 1969. Bd 182, N 3. S. 189 – 206; 1969. Bd 183, N 3. S. 169 – 180; 1970. Bd 184, N 2. S. 133 – 154.

[339] **Rockafellar R. T.** Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in $\mathbb{R}^n$ // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1979. Vol. 3, N 1. P. 145 – 154.

[340] **Rockafellar R. T.** Directionally lipschitzian functions and subdifferential calculus // Proc. of London Math. Society. 1979. Vol. 39, N 2. P. 331 – 355.

[341] **Rockafellar R. T.** Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions // Canadian J. Mathematics. 1980. Vol. 32, N 2. P. 257 – 280.

[342] **Rolewicz S.** On a norm scalarization in infinite dimensional Banach spaces // Control and Cybernetics. 1975. Vol. 4, N 1. P. 85 – 89.

[343] **Rolewicz S.** Sufficient condition for Pareto optimization in Banach spaces // Studia Mathematica. 1983. Vol. 77, N 2. P. 111 – 114.

[344] **Shapiro A.** On optimality conditions in quasidifferentiable optimization // SIAM J. of Control and Optimization. 1984. Vol. 22, N 4. P. 610 – 617.

[345] **Shapiro A.** Quasidifferentiable calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization // Math. Progr. Study. 1986. Vol. 29. P. 56 – 68.

[346] **Stadler W.** A survey of multicriteria optimization of the vector maximization problem: Part 1: 1776-1960 // J. of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 29, N 1. P. 1 – 52.

[347] **Stadler W.** A survey of vector optimization in infinite-dimensional spaces: Part 2 // J. of Optimization Theory and Applications. 1986. Vol. 51, N 2. P. 205 – 241.

[348] **Tanino T., Sawaragi Y.** Duality theory in multiobjective programming // J. of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 27, N 4. P. 509 – 529.

[349] **Ursescu C.** Tangent sets' calculus and necessary conditions for extremality // SIAM J. of Control and Optimization. 1982. Vol. 20, N 4. P. 563 – 574.

[350] **Vârsan C.** Necessary conditions of optimality of second order for the optimal control problem with functional constraints // Revue Roumaine Math. Pure et Application. 1973. Vol. 18, N 5. P. 767 – 791.

[351] **Vârsan C.** Pointwise high order necessary conditions for optimal control problems // Revue Roumaine Math. Pure et Application. 1976. Vol. 21, N 5. P. 565 – 577.

[352] **Vlach M.** Dubovitskii-Milutin optimization formalism for multiple-criteria problems // Mathematics of Operations Research. 1978. Vol. 31, N 4. P. 677 – 6S7.

[353] **Vlach M.** Levitin - Milutin - Osmolovskii conditions for local Pareto optimality // Lecture Notes in Economics and Math. Systems. 1984. Vol. 229. P. 31 – 96.

[354] **Warga J.** A second-order condition that strengthens Pontryagin's maximum principle // J. of Differential Equations. 1978. Vol. 28, N 2. P. 284 – 307.

[355] **Warga J.** Higher order conditions with and without Lagrange multipliers // SIAM J. of Control and Optimization. 1986. Vol. 24, N 4. P. 715 – 730.

[356] **Wierzbicki A. P.** Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization // Math. Operationsforsch. und Statistik. Ser. Optimization. 1977. Vol. 8, N 1. P. 61 – 73.

[357] **Yamamuro S.** Differential calculus in topological linear spaces. Berlin et al.: Springer-Verlag, 1974. 181 p.

[358] **Yu P. L.** Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // J. of Optimization Theory and Applications. 1974. Vol. 14, N 3. P. 319 – 377.

[359] **Zadeh L. A.** Optimality and nonscalar-valued performance criteria // IEEE Trans. Automatic Control. 1963. Vol. AC-8, N 1. P. 59 – 60.

[360] **Zeleny M.** Linear multiobjective programming. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

ГОРОХОВИК ВАЛЕНТИН ВИКЕНТЬЕВИЧ

ВЫПУКЛЫЕ И НЕГЛАДКИЕ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Заведующая редакцией *Л. Ю. Бельзацкая*
Редактор *О. М. Маршак*
Художник *В. А. Ковширко*
Художественный редактор *В. А. Жаховец*
Технический редактор *А. В. Скакун*
Корректор *З. Я. Губашина*

ИБ № 3271
Печатается по постановлению РИСО АН БССР.
Сдано в набор 28.08.89. Подписано в печать 18.05.90. АТ 04685.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. кн. журн. Усл. кр-отт. 15,0. Уч.-изд. л. 14,08. Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 15,0.
Тираж 970 экз. Зак. №1327. Цена 2 р. 60 к.

Издательство «Навука і тэхніка» Академии наук БССР и Государственного комитета БССР по печати. 220600. Минск. Жодинская, 18. Типография им. Франциска Скорины издательства «Навука і тэхніка». 220600. Минск. Жодинская, 18.