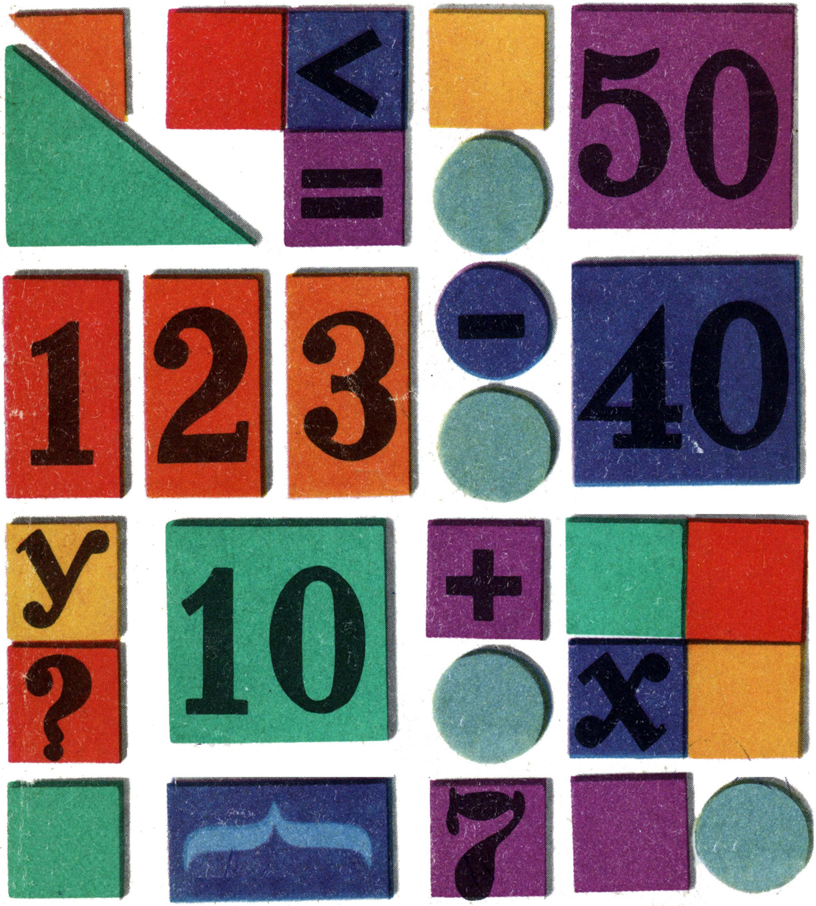
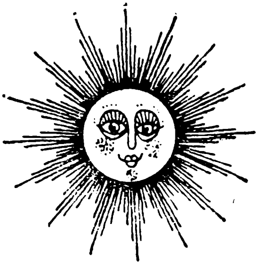
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ Г. Г. ЛЕВИТАС

МАТЕМАТИКА АТАКУЕТ РОДИТЕЛЕЙ

Воспитание в семье

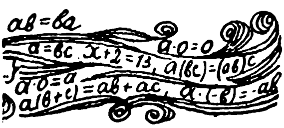



a+в=в+a
a·0=0
aв=вa, a(-в)=-aв. a=вc x+2=13, a(-в)
x+2=2+x a-0=a
c={2,3,5...} (xy) a+в=в+a, x+y=xy
a(в+c)=aв+ac a(вc)=(aв)c, a(в+c)=aв+ac
N=АМЕРИКА, АФРИКА, АЗИЯ
НА НУЛЬ ДЕЛИТЬ НЕЛЬЗЯ a+(-a)=0
a+0=a, a-a=0

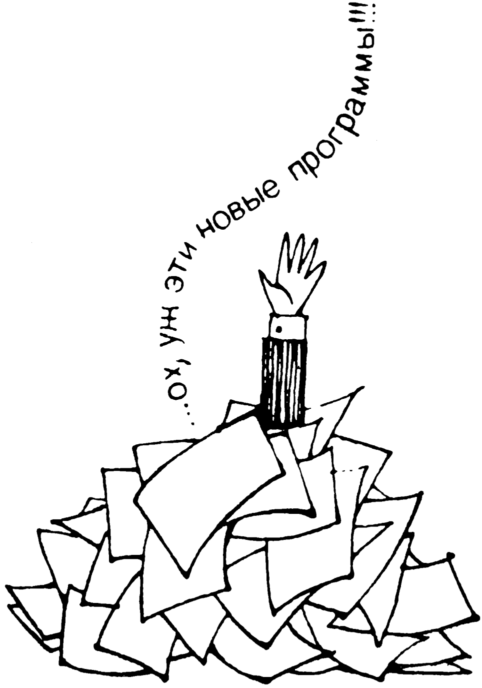


В. Г. БОЛТЯНСКИЙ,
Г. Г. ЛЕВИТАС

МАТЕМАТИКА АТАКУЕТ РОДИТЕЛЕЙ



МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕДАГОГИКА»
1973


...ох, уж эти новые программы!!!

Ох, уж эти новые программы!

Лето выдалось жаркое. Лишь одна неделя была дождливой. И случилось так, что именно в это время на туристском пароходе оказались работники просвещения. Старый педагог-математик Петр Иванович, преподаватель литературы Григорий Андреевич и учительница биологии Анна Александровна с мужем-инженером скучали в своей каюте. Юрий Алексеевич (так звали инженера) подшучивал над своими попутчиками, говоря, что если собираются педагоги, то сразу начинается педсовет,— нет бы отдохнуть в каникулы от работы.

И правда, на какую бы тему они ни говорили, разговор в конце концов переходил на школу. Вот и в этот совсем уже непогожий день мужчины поначалу говорили о футболе.

— Нет, вы как хотите,— перебила мужской разговор Анна Александровна,— а у меня этот футбол в печенках сидит. Мой Леня все время проводит у телевизора и в результате — чуть не схватил тройку по математике.

— Вам хорошо,— возразил Григорий Андреевич.— У вас муж инженер. Он может помочь сыну,— конечно, когда нет футбола. А мне каково! Недавно Сеня просит помочь решить задачу. Смотрю я — и ничего не понимаю. Какие-то множества, высказывания. А ведь это — IV класс! Наворочали черт знает что! Какие-то пустые множества. Это из высшей математики, что ли?

— Ну, нет,— возразил инженер,— нам высшую математику сам профессор Иванов читал. Никаких множеств там не было, ни пустых, ни полных.

— Да-с, увлеклись наши ученые, увлеклись,— в раздумье промолвил Петр Иванович.— Не нужны все эти выкрутасы. Я как-никак сорок с лишним лет в школе математику преподавал. Все-таки главное — научить детей навыкам счета и решению задач. Да и задачи теперь не те пошли... Помню, мне еще в гимназии на экзамене попалась задачка: купец продал столько фунтов чая, сколько членов имеет геометрическая прогрессия, коей третий член равен наибольшему члену бинома Ньютона, причем в показателе бинома стоит цена одного фунта чая, а...

— Извините, что перебиваю вас,— возразил инженер,— но такие «шитые» задачи, по-моему, никому не нужны.

— Вот и ошибаетесь, батенька. Очень они способствуют развитию. А арифметические задачи? Знаете, до революции задачник Верещагина был. Иной раз семь потов сойдет, пока вопросы к задаче поставишь.

— Ну, хитрых арифметических задач и сейчас хватает,— возразил Юрий Алексеевич.— Помню, Ленька был в V классе, придет ко мне с задачкой, так мне что приходилось делать? Сначала уравнение составлю, решу его, а потом думаю, как же теперь по вопросам решить. Мало того, учительница у них требовала, чтоб знали, какого типа задача. Так что, может, правильно, что теперь новая программа и новые учебники будут. Говорят, в них все задачи уравнениями решать надо.

— Ты уж молчи,— напустилась на инженера жена.— Знаем мы про эти новые учебники. Читали! В «Правде» статья была. Называлась, кажется, «Математика для мамы». И уж так там досталось новым учебникам — лучше бы их и не писали. С I класса надумали вводить и иксы, и геометрию, и чуть ли не высшую математику. Безобразие! Родители не могут решать задачи, которые первоклассникам задают в школе!

— Ну, положим, высшей математики в первых классах не будет,— сказал Петр Иванович,— это вы уж чересчур. Я хоть сейчас и на пенсии, но за школьными делами слежу. Так что насчет высшей математики в начальных классах — это вы зря. Но вот в старших классах, говорят, высшую математику введут. И, по-моему, лишнее все это. Изучить ее хорошо в школе все равно не смогут, только по верхам пройдут. Гораздо полезнее школьников элементарной математике научить. Вот в прошлом году принимал я вступительные экзамены в одном институте. Так там на письменном дали систему показательных уравнений. Верите ли, всего несколько человек и решили-то. И то небось с частными репетиторами занимались.

— А наш Леня без репетитора занимался. Только перед экзаменом Николай Николаевич его проверил,— похвалилась Анна Александровна.

— Это кто, наш сосед по столику? — спросил Григорий Андреевич.

— Да. Он наш давний знакомый. Долгое время работал со мной в одной школе — математику вел. А потом защитил диссертацию, сейчас работает в Академии педагогических наук.

— Слушайте! — воскликнул Григорий Андреевич.— А не позвать ли его к нам? Раз математик, да еще в академии, пусть и отвечает за все эти фокусы в новых программах!

— Это идея! — поддержала его Анна Александровна.— Как это я сразу не додумалась? Юра, сходи к Николаю Николаевичу, попроси его к нам на огонек. Надеюсь, вы не против? — обратилась она к Петру Ивановичу.

— Что вы, мне это очень интересно.

— Тем более что все равно дождь,— добавил Юрий Алексеевич, выходя из каюты. Через некоторое время он вернулся вместе с Николаем Николаевичем.

— Простите нас, ради бога, Николай Николаевич!— обратилась к нему Анна Александровна.— У нас тут дискуссия по поводу новых программ по математике. Объясните, пожалуйста, для чего они понадобились.

— Охотно. Вы слышали об открытии Уотсона и Крика и о дальнейших успехах молекулярной биологии?

— Простите, мы хотим про ма-те-ма-ти-ку,— нараспев произнесла Анна Александровна.— А биологию я сама в школе преподаю, дайте хоть немного отдохнуть от нее.

— Не спешите, не спешите. Так вот, вы, конечно, слышали о расшифровке структуры молекулы ДНК, о тонкой структуре гена, о механизме биосинтеза белка и их практических применениях — хотя бы в селекции и практической генетике...

— Но, Николай Николаевич,— поддержал супругу инженер,— конечно, мы знаем, что физика и математика сыграли в этих открытиях далеко не последнюю роль, однако...

— Я говорю совсем не об этом. Что бы вы сказали, если бы в школьных учебниках биологии эти научные факты отсутствовали?

— Я бы сказала, что эти учебники и программа курса биологии отстали от жизни.

— Благодарю вас. А вы, дорогой Юрий Алексеевич, что бы вы сказали, если бы в школьных учебниках физики ни слова не говорилось об открытии Басова и Прохорова — я имею в виду лазеры — и о тех практических применениях этого открытия, которые имеются уже сегодня?

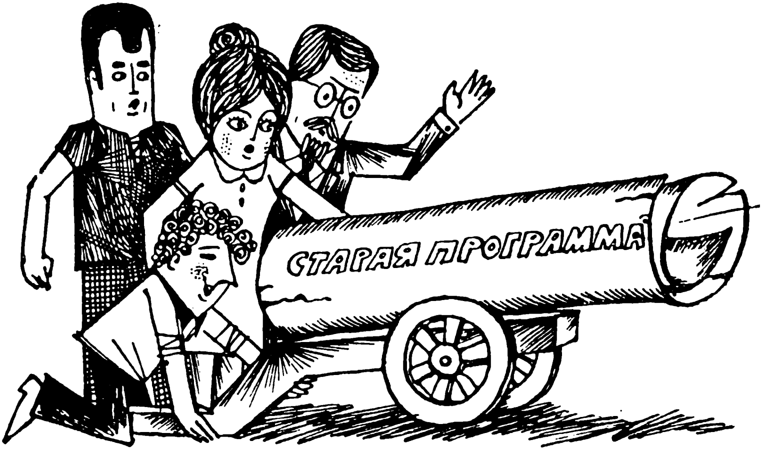
— Лазеры — не моя специальность, я инженер-механик. Но я вашу мысль понимаю. Такой курс физики не отвечал бы требованиям современности, и программу пришлось бы изменить и дополнить.

— Ну вот, Анна Александровна, вы с супругом помогли мне ответить на поставленный вопрос.

— Нет, нет, я с вами решительно не согласен,— заявил доселе молчавший Григорий Андреевич.— Я хоть и литератор, но думаю, что не ошибусь, если скажу, что математика — это не физика и не биология. Физика и биология, как вы сами признали, резко шагнули вперед за последнее время. А что в математике? Те же квадратные уравнения, та же теорема Пифагора! Зачем же здесь-то менять программу?

— Вот именно,— поддержала его Анна Александровна.— Математика столетиями не меняется. Что ж, теперь квадратные уравнения по-другому решают или теорему Пифагора иначе формулируют? Ничего подобного. Все осталось таким же, как и сто лет назад.

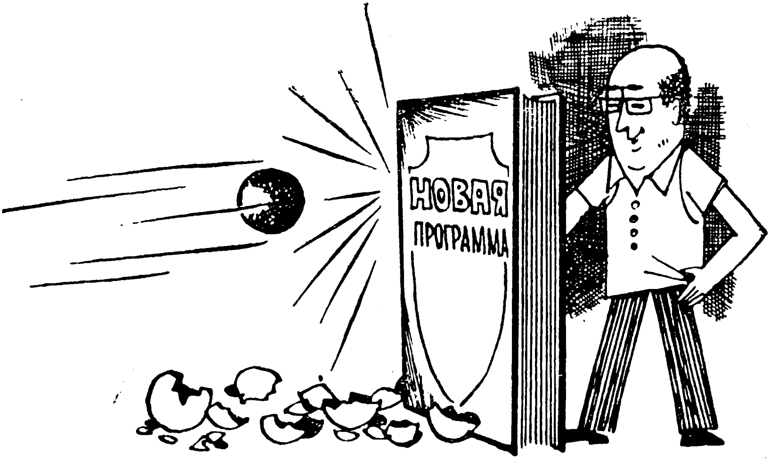
— О, вы несколько поспешили в своих выводах,— улыбнулся Николай Николаевич.— В том-то и дело, что школьный курс математики безнадежно отстал от науки сегодняшнего дня. Да какое там сегодняшнего! Мы преподаем детям математику начала XVII века! Именно так, не удивляйтесь. Возьмите арифметику: все, чему мы учим в школе, было, по существу, известно еще в глубокой древности. Такие же задачи, как в наших задачниках, можно найти в вавилонских клинописных табличках и в египетских папирусах. А геометрия? Наверное, у всех на зубах навязло поучение о том, что Евклид создал свои «Начала» более двух тысяч лет



назад и что в его книгах содержалась буквально вся геометрия, изучаемая сегодня в школе. И самым новейшим, самым, если можно сказать, современным в действовавшем до сих пор школьном курсе математики была алгебра: отрицательные числа, буквенные обозначения, уравнения, координаты, понятие функции. Но это и есть начало XVII века. В работах Франсуа Виета и Рене Декарта все это уже было.

Может быть, я чуть-чуть преувеличиваю: были в школьном курсе математики отдельные кусочки, относящиеся к более позднему времени. Например, понятие о показательной и тригонометрических функциях окончательно оформилось в XVIII веке в трудах Леонарда Эйлера. Но это не меняет дела: та математика, которую до сих пор изучали в школе, по своему духу относится к XVII столетию.

— Браво, браво! — захлопала в ладоши Анна Александровна.— Мне кажется, вы великолепно изложили аргументы против самого себя. Вы нас убедили, что



школьная математика окончательно сформировалась еще в XVII, ну пусть даже в XVIII столетии. С тех пор ее научились хорошо преподавать, написали хорошие учебники. Все мы изучали математику по учебникам Киселева. Они просуществовали несколько десятилетий, еще моя мама по ним училась. Зачем же теперь все ломать? Совершенно ясно: не нужно было менять программу по математике!

Николай Николаевич невозмутимо продолжал:

— Вы делаете явно неправильные выводы из приведенных аргументов. Школьная математика действительно за эти три века почти не изменилась, но наука математика претерпела за это время глубочайшие изменения. Ее потрясли великие открытия — достаточно назвать имена Ньютона, Эйлера, Гаусса, Галуа, Лобачевского, Римана и многих других, в том числе советских математиков, из которых я назову, например, Лузина, Виноградова, Понтрягина, Колмогорова. Современная математика такова, что без нее не обходятся даже такие науки, которые не так давно противопоставлялись математике.

В медицине все больше применяются методы диагностики с применением электронных вычислительных машин. И надо сказать, что эти машины иногда ставят диагноз лучше врачей. Был недавно в одной из клиник такой случай. Туда привезли больного лет сорока с инсультом. Инсульт был по внешним признакам нетяжелый, и врачи решили лечить его консервативным методом, дав больному полный покой. Но на всякий случай все результаты анализов сообщили диагностической машине. Она дала ответ: «При консервативном лечении — смерть, при трепанации черепа — жизнь». Врачи только посмеялись над странным предсказанием. Но к утру было уже не до смеха — состояние больного резко ухудшилось, наступили нарушения дыхания, и пришлось подключить аппарат «искусственные легкие». И тогда решили последовать совету машины. Сделали трепанацию черепа и отсосали кровь с пораженного участка. Что бы вы думали? Ожил больной! Теперь это, вероятно, самый горячий сторонник применения математики в медицине.

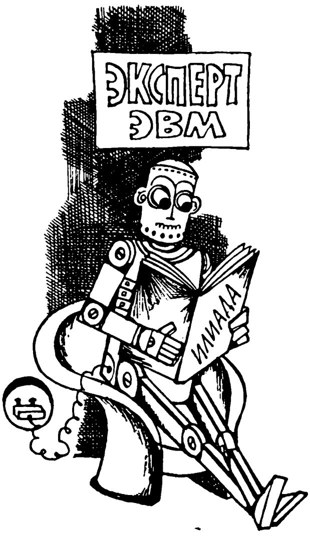
— Я слышал,— прервал рассказ Григорий Андреевич,— что машины применяют и в гуманитарных дисциплинах. Но как именно? Вы не могли бы рассказать?

— Ну, только очень кратко. Среди литературоведов шли споры относительно Гомера. Мнения были разные, в том числе, что не один человек, а многие писали «Илиаду». Предложили это произведение электронной вычислительной машине для стилистического анализа. Машина дала ответ: «Все песни «Илиады» принадлежат одному автору».

С помощью электронных вычислительных машин группа лингвистов и математиков проанализировала особенности пушкинского и лермонтовского стиха в романе «Евгений Онегин» и поэме «Тамбовская казначейша». Общеизвестно и то, что машины используются для перевода с одного языка на другой. Машины применяются также в археологии для классификации находок и их научной обработки. Вторжение математики в область гуманитарных наук так прочно, что математику стали изучать на филологических факультетах.

— Да, да, да,— подхватил Григорий Андреевич,— дочь моих знакомых учится на филфаке МГУ, занимается структурной лингвистикой. У нее большие трудности с математикой.

— Ну вот, видите! А вот еще примеры. Мне рассказывал знакомый следователь об изысканиях по поводу привлечения электронных вычислительных машин к идентификации преступников. Криминалисты и раньше, исследуя, например, взломанные сейфы, говорили о «почерке» преступника; теперь с помощью электронных вычислительных машин этому термину удается придать точный смысл. Я уже не говорю о внедрении математики в производство. На



ряде предприятий есть уже свои вычислительные центры. Многие цехи перешли на автоматическое управление с использованием вычислительных машин. А планирование! Из каких именно шахт на какие именно заводы возить уголь? От правильного решения этой задачи зависит многое. А как ее решить? Понятно, что тут возможны тысячи разных вариантов. Только привлечение вычислительных машин позволило решить эту проблему планирования в полном объеме. Машины перебирают все заслуживающие внимания варианты и предлагают наилучший. Кстати, способы отбора заслуживающих внимания вариантов рассматриваются в новой математической науке — линейном программировании, начала которой были заложены в 40-х годах советским математиком Канторовичем. Это только один пример оптимального планирования с использованием математики.

Создание электронных вычислительных машин ознаменовало начало величайшей научно-технической революции. Если паровая машина увеличила в тысячи раз физические силы человека, то вычислительные машины в тысячи раз умножили мыслительные возможности людей. Сейчас мы находимся в самом начале этого пути. Предсказать, что смогут сделать вычислительные машины в 2000 году, не рискнет и самый смелый фантаст. А ведь ребята, которые сейчас учатся в школе, будут работать не только в 2000, но и в 2020.

— Но все, что вы рассказываете,— заметил Юрий Алексеевич,— относится к вычислительным машинам. Вероятно, можно в особых вузах или техникумах готовить специалистов по работе на них. При чем тут средняя школа?

— Дело не только в появлении новой вычислительной техники. Жизнь непрерывно ставит перед математикой различные проблемы, и это привело к созданию новых отраслей математики. Математическое программирование, теория игр, исследование операций — еще 40 лет назад о них никто ничего не знал, а сейчас число публикаций по этим вопросам составляет почти половину всех вышедших по математике работ. Происходит бурный процесс математизации наук: возникли математическая экономика, математическая биология, математическая теория управления, математическая лингвистика и т. п. Произошло смещение центра тяжести интересов и в самой математике. Так что представление о математике как о застывшей науке глубоко ошибочно. Математика находит применение во все новых аспектах человеческой деятельности. И поэтому знания, необходимые для такой деятельности, должны иметь всеобщее распространение. Так что создание специальной сети вузов и техникумов — это не выход. Школьники не должны оставаться в неведении по поводу нового лица и новых достижений математики. Ведь, кажется,— улыбнулся Николай Николаевич,— по отношению к курсу биологии и физики подобное положение вещей вызывало у вас решительное осуждение?

— Ну и что же,— не сдавалась Анна Александровна.— Введите в разных классах по нескольку часов, чтобы просто, ярко и доходчиво рассказать — разумеется, в самых общих чертах — о современных достижениях вашей науки. Основа-то в школьном курсе математики есть.

— Действительно,— поддержал жену Юрий Алексеевич,— ведь, скажем, о лазерах в курсе физики говорится не столь уж подробно. Никому же не придет в голову давать школьникам полную теорию вопроса, основанную на идеях квантовой физики. Речь идет лишь об общем описании явления, так сказать, на пальцах. Ну и, разумеется, о практических применениях.

— Ну, вот видите, менять программу было незачем. Просто чуть-чуть дополнить — и все. А вы поспешили, перегнули палку — ну, согласитесь же!

— Постойте, постойте! Для начала отметим, что вы начинаете сдавать позиции. Значит, «немножко» изменить, т. е. все же изменить, программу было необходимо.

— Рано празднуете победу,— сказал долго молчавший Петр Иванович.— Отдельные изменения в программе по математике происходили постоянно, сколько я себя помню. Это еще не означает того переворота, который устраиваете вы. Если бы речь шла о добавлении в разных классах по нескольку часов, как предлагает Анна Александровна, это не вызвало бы протеста ни у кого.

— А как,— повернулся к нему Николай Николаевич,— как вы предлагаете рассказать в этих небольших добавлениях о богатстве современной математики, о новых методах, новых подходах, о новых идеях и теориях?

— Так это лучше знать вам — математикам,— сказал Григорий Андреевич.— Могут же физики коротко рассказать о лазерах. Вот писатель Тендряков предлагает вообще все школьные предметы излагать обзорно — читали в журнале «Москва»?

— К сожалению,— отвечал Николай Николаевич,— этого сделать нельзя. Математика изучает (в части, касающейся алгебры и математического анализа) количественные отношения в реальных явлениях, она дает методы количественного описания явлений — методы, применяемые затем в физике, химии, биологии и других науках. И если о конкретном явлении можно кратко рассказать в порядке общего знакомства, то о методах математического расчета кратенько рассказывать бесполезно. Методы ведь применять надо, а для этого нужно овладевать ими. Согласитесь, было бы мало пользы, если вместо того, чтобы научить школьников решать квадратные уравнения, мы прочли бы им краткую лекцию о роли уравнений в математике и их применениях.

— Ну,— сказал Петр Иванович,— ваш пример неубедителен. Здесь ведь теоретических трудностей немного, а просто нужно набить руку, решая большое число задач.

— Хорошо, приведу другой пример. Из вашей области, Анна Александровна.

— Очень интересно.

— Вам случалось вести расчеты, связанные с частотой наследования от родителей одного или нескольких признаков? Скажем, как в классических опытах Менделя с горохом, речь может идти о наследовании желтой или зеленой окраски горошин, а также о наследовании гладкой или морщинистой их поверхности. Нередко интересно проследить, какова будет судьба трех и более элементарных признаков, как они будут комбинироваться у потомков.

— Видите ли, самой мне не приходилось проводить такие расчеты. Но я много об этом читала, а об опытах Менделя рассказывала ребятам на уроках. Мне кажется, здесь математика какая-то не очень убедительная. В простых случаях все ясно и без математики. А вот в случае сложной комбинации наследуемых признаков все как-то расплывчато. Иногда частоты появления признаков надо складывать, иногда умножать, а иной раз из одной частоты вычитают другую. Похоже, что здесь не заранее вычисляют частоту наследования, а просто подгоняют под результат, наблюдаемый в опыте.

— Спасибо,— сказал Николай Николаевич,— вы мне очень помогли.

— Не понимаю.

— Сейчас объясню. Дело в том, что в математике есть понятие вероятности, которое как раз и означает ожидаемую частоту наступления события. Выведены совершенно четкие правила, по которым вычисляется частота одновременного наступления различных событий (скажем, растение наследует и гладкую форму и желтый цвет горошины), или частота наступления хотя бы одного из этих двух событий, или наступления только первого из этих двух событий и т. д. Изучением этих и ряда более сложных закономерностей занимается специальная математическая дисциплина — теория вероятностей. Ее зарождение связано с именами Паскаля и Лапласа, ее существенное развитие на современном этапе — с именами академика Колмогорова и других советских математиков. Так вот, если бы в школе изучали теорию вероятностей — хотя бы в небольшом объеме,— то у вас не было бы сомнений при подсчетах частоты наследования той или иной комбинации признаков. Это чистая теория вероятностей, и, конечно, там ничего не подгоняется под ответ, все выводится строго по правилам. Выходит, не только математикам нужна теория вероятностей, но и биологам.

— Да, здесь я, пожалуй, вас поддержу,— сказал Юрий Алексеевич.— Надо в школе поговорить о вероятностях, да и задачки порешать. Комбинаторика тоже нужна. И, пожалуй, инженерам не меньше, чем селекционерам.

— А скажите, Юрий Алексеевич,— оживился Николай Николаевич,— как вы полагаете, можно ли в школе рассказывать о вероятностях обзорно? Дескать, придумали математики вот такую теорию, вот чем она занимается и вот как применяется. А?

— Конечно, нельзя,— ответил за инженера Петр Иванович.— От такого знакомства толку не будет. Надо научить решать задачи, да с пониманием дела решать. А иначе и времени не стоит тратить.

— Ну, что вы скажете, Анна Александровна?

— Да, пожалуй, по поводу вероятностей я могла бы с вами согласиться. Это, видимо, полезно.

—Но то, что относится к теории вероятностей, относится и к целому ряду других вопросов. Совершенно необходимо более глубоко изучать понятие функции. Ведь именно идея функциональной зависимости величин и лежит в основе большинства приложений математики. И врач, рассматривающий график изменения температуры больного, и физик, изучающий таблицу с результатами опытов, и экономист, изучающий взаимную связь различных показателей работы предприятия, и, уж конечно, всякий специалист, переводящий свою задачу на язык электронной машины,— все они имеют дело с функциональной зависимостью. Недаром умение чертить графики функций стало обязательным в школе. Но глубоко усвоить понятие функции можно, лишь познакомившись с тем, как изучает их современная математика. А для этого надо знать, хотя бы в виде предварительного знакомства, дифференциальное и интегральное исчисления.

У многих людей эти области математики вызывают мистический ужас. Между тем эти области не слишком сложны и овладеть их основными идеями куда проще, чем научиться решать специально подобранные замысловатые тригонометрические уравнения. При правильном отборе материала вполне можно сделать эти науки доступными для школьников.

И наконец, теория множеств. Эта область математики возникла не очень давно — всего сто лет назад. Сначала она казалась чем-то экзотическим, не имеющим отношения к обычной математике. Но постепенно стало ясно, что, подобно мольеровскому герою, всю жизнь говорившему прозой и не знавшему об этом, математика и ее приложения все время имели дело с множествами и операциями над ними. Только слова применялись другие, в каждой области свои. И это затрудняло работу, так как приходилось наряду с естественными трудностями сталкиваться с необходимостью перевода с одного языка на другой. Вы, конечно, слышали, что сравнительно недавно — в прошлом веке —

обнаружены племена, у которых было несколько сортов чисел: одни для счета людей, другие для счета животных, третьи применялись при подсчете домашних предметов или оружия... Легко представить себе, как это неудобно. Скажем, у вас есть несколько луков (и, конечно, стрелы к ним) и к вам подходит группа охотников. Хватит ли всем луков? Надо сосчитать. Но ведь охотников вы считаете на одном числовом «языке», а луки считаете совсем другими числами. Так что мало посчитать, надо еще перевести с одного числового языка на другой. Неудобно, правда? Примерно то же происходило (да еще и сейчас происходит) с понятиями теории множеств. Чтобы всем было понятно, о чем идет речь, я приведу бытовые примеры. Мы говорим не множество волков, а стая волков, не множество инструментов, а набор инструментов, не множество людей, а коллектив и т. д.

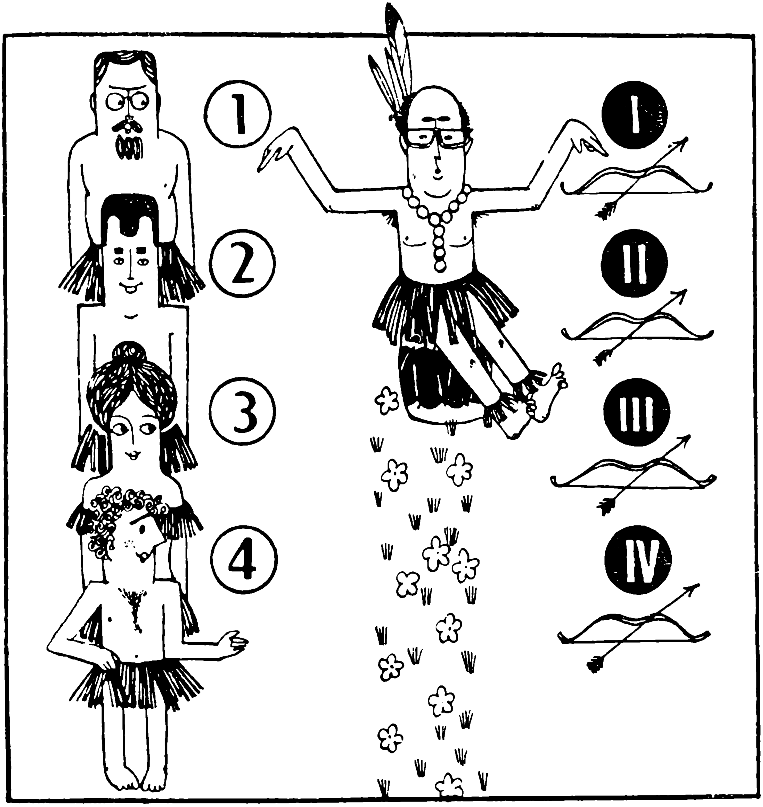
Пока речь идет об обычном употреблении этих слов, все так и остается, но если мы хотим какие-нибудь множества изучать с помощью математики, то весьма полезно применять к ним общие для всех множеств законы. А такие есть, и ими занимается теория множеств. Курс математики в школе до сих пор выглядел весьма разрозненным, правда ведь, Петр Иванович? Теория множеств дает возможность придать этому курсу единство, пронизать его сквозными линиями в большей степени, чем это было раньше.

— А время-то, время откуда на все это взять? — спросил Петр Иванович.— Опять интенсификация урока и увеличение домашних заданий?

— Опять за счет отдыха детей? За счет прогулок, свежего воздуха?

— И, конечно, за счет чтения? — подхватили Анна Александровна и Григорий Андреевич.

— А учитель и так задыхается,— добавил Петр Иванович.— Почти что каждый день новый материал.



— Уфф, сколько ужасов вы тут наговорили,— покачал головой Николай Николаевич.— А между тем ничего такого не будет: новая программа вовсе не должна приводить к увеличению загруженности учащихся. Уроки нужно будет строить, конечно, не совсем так, как раньше.

— Это, батенька, хорошие слова, и ничего больше. Дети все те же, и все те же 45 минут на уроке. В чем же разница? — недовольно произнес Петр Иванович.

— Разница в еще большем упоре на сознательность обучения. Если до сих пор мы часто говорили себе: «Пусть ученик сначала выучит правило, а потом я ему объясню, что оно значит», то теперь этот прием становится недопустимым. Вообще, делается меньшая ставка на выучивание математического материала и большая — на его постепенную отработку. Это, конечно, повышает требования к построению урока, о чем я и сказал. А новый материал — он ведь пойдет за счет ликвидации излишеств старой программы.

— В этом вы правы. Мы как раз перед вашим приходом говорили о диких задачах по арифметике и о вычурных системах показательных уравнений.

— Вот, вот. А чего стоит целая наука о том, как можно и как нельзя записывать вычисление площади прямоугольника (скажем, со сторонами 2 метра и 3 метра):

$$2\ \textit{м} \cdot 3\ \textit{м} = 6\ \textit{кв. м},$$
$$2\ \textit{м}^2 \cdot 3 = 6\ \textit{м}^2 \text{ —}$$

или еще как-нибудь,— добавил Николай Николаевич.— Да и разве только это? Очень много частностей, условностей загромождали курс математики. Новая программа делает его значительно более стройным, обозримым, более современным. Ученики получат в руки могучие методы решения задач; те задачи, которые раньше решались искусственными путями, теперь будут решаться совершенно естественно.

— Ничего,— подмигнул Петр Иванович,— вместо них придумают другие заковыристые задачи.

Все засмеялись.

— И вот еще что я хотел сказать. Обыкновенно беспокоятся о математическом развитии тех детей, которые после школы выбирают деятельность, связанную с точными науками. Мне же кажется ничуть не менее важным дать хорошие математические знания тем, кто не пойдет в такие вузы, не будет работать на заводах точной механики или в планово-экономических центрах.

В наше время каждый молодой человек должен знать интегралы в не меньшей степени, чем стихи Пушкина. Прошло то время, когда в понятие общей культуры входили только знания по гуманитарным предметам. Школа обязана дать основные знания и из математики.

— Я вот сейчас вспоминаю о своем разговоре с одной учительницей,— задумчиво произнес Петр Иванович.— Было это лет пять назад. С большим сожалением говорила она о том, что почти весь IV класс уходит на повторение материала первых трех классов. Вот я и подумал, что, может, вы правы: найдется необходимое время на все эти новшества.

— Да разве только в IV классе? — воскликнул Николай Николаевич.— Повторение вообще занимало непростительно много времени. Это было расплатой за плохое построение курса.

— Ну, вообще не повторять все-таки нельзя,— сказала Анна Александровна.

— Разумеется. Но повторение и новый материал не должны быть оторваны друг от друга. И тогда на повторении мы сэкономим массу времени. А дети не будут относиться к повторению как к жвачке.

— Скажите, пожалуйста,— спросил Юрий Алексеевич,— почему вы так уверены, что новый материал, включенный теперь в программы, окажется доступным для детей? Это как-нибудь проверялось?

— Да, проверялось. Я уже не говорю о том, что введению новой программы предшествует ее двухгодичная апробация.

— Как двухгодичная? — не понял Юрий Алексеевич.

— Вот как. Например, программы для IV класса введены в 1970/71 учебном году. В 1968/69 учебном году они проверялись в нескольких школах, а в 1969/70 учебном году — уже в нескольких районах страны. Такая проверка позволяет улучшить и сами программы, и учебники, и методику преподавания. То же было с новыми учебниками для первых трех классов, да и со всеми вновь вводимыми учебниками. Но это еще не все. Новые программы для старших классов прошли основательную проверку в математических школах. Там были и дифференциалы, и интегралы, и многое другое. Короче говоря, нет ни одного вопроса в новой программе, который бы не изучался в математических школах.

— Э, куда хватили, батенька,— проворчал Петр Иванович,— математические школы. Там дети-то какие.

Старого учителя поддержали все. Но Николай Николаевич не сдавался и на этот раз:

— Математические школы тоже разные бывают. Есть, конечно, широкоизвестные школы. В них такой большой наплыв, что они могут себе позволить отбирать математически одаренных детей. Но во многих — и очень многих — математических школах учатся обычные дети. Да и потом дело вовсе не в этом. Ведь никто и не собирается во всех школах преподавать математику так, как в математических. Но это все же был опыт, показывающий, как дети усваивают новые идеи, что для них оказывается более трудным, в какой последовательности надо излагать новый материал и т. д.

— Николай Николаевич, мы вас замучили. Но еще один вопрос,— сказала Анна Александровна.— Раньше родители могли оказывать детям необходимую помощь в учебе. А как будет теперь? Ведь мы по новой программе, понятно, никогда не учились. Как же дети будут учиться, если им не к кому обратиться дома за помощью?

— Любезная Анна Александровна, а знаете ли вы, например, что такое деление на части и что такое деление по содержанию? — спросил Николай Николаевич.

— Понятия не имею, — удивилась она.

— А в каком классе дочь ваша учится? Вот-вот. А когда она начинала изучать деление, вас, несомненно, вызывали на родительское собрание, и учительница объясняла, что такое деление на части, что такое деление по содержанию и как отвечать на недоумение вашей дочери по этому поводу.

— Не помню. Но вообще-то, вызывали и по разным вопросам инструктировали.

— Вот видите. Младшему школьнику обязательно нужна родительская помощь, в том числе в частных вопросах, определяемых методикой преподавания. И никогда родители не смогли бы ее оказывать, если бы не такие инструктажи. Так что ваши сетования на трудность новой программы для родителей объясняются только слабой связью со школой. Где есть такая связь, там родители получают все необходимые разъяснения и о высказываниях, и о множествах, и обо всем прочем. Кстати, сейчас выходят очень обстоятельные книги для учителей. Их тоже должны читать родители.

— Что книжка, — вздохнул Григорий Андреевич. — Книжке вопроса не задашь, а задашь, так она не ответит.

— Николай Николаевич, — сказал инженер, — ехать нам еще долго, погода плохая. Может быть, вы расскажете нам о новой программе подробнее? Тем более что у Григория Андреевича сын в V класс переходит, у нас младшая дочка вот-вот окончит детсад и тоже в школу пойдет.

— Ну, что же, — с готовностью ответил Николай Николаевич, — завтра и начнем. Поскольку в нашем распоряжении четыре дня... Гм, какие же вопросы мы сможем обсудить? Да, пожалуй, вот так будет лучше всего: мы проведем четыре беседы:

1. Высказывания.
2. Множества.
3. Новое в школьном курсе алгебры.
4. Новое в школьном курсе геометрии.

— Не понимаю,— удивилась Анна Александровна,— куда девалась арифметика? Или в ней все осталось по-прежнему?

— Дело в том, что теперь такого отдельного предмета — арифметики — в школе нет. В младших классах — с I по III — идет предмет «Математика». В нем изучаются начала арифметики, алгебры и геометрии. В IV классе фактически выделяются два предмета: один — «Арифметика и начала алгебры», второй — «Геометрия». С VI класса математика делится на две дисциплины: геометрию, которая идет до окончания школы, и алгебру, которую в IX классе сменяет предмет «Алгебра и начала анализа».

Об арифметике как таковой мне вам рассказывать особенно нечего: тут, по сравнению со старой программой, мало что изменилось. Та же таблица умножения, те же задачи. Больше того, материал существенно упрощен, так как более трудные задачи ученики решают с иксом.

— Ну, с иксом-то мы как-нибудь решим,— заверил Григорий Андреевич.— Я хоть и литератор, а в своем классе всегда приходится заниматься всем понемногу. На уровне VI класса тяну.

— Простите, простите,— сказал инженер. —А где же в программе наших бесед анализ? Я очень надеялся услышать от вас, как это вы ухитритесь изложить его школьникам. По-моему, это совершенно недопустимо — заставлять детей изучать такой сложный курс. Два года математического анализа — с ума сойти!

— Да, но не думайте, что все эти два года дети будут учить только дифференциалы и интегралы. За это время будут изложены в том же курсе такие вопросы, как показательная и логарифмическая функции, вся тригонометрия, комбинаторика. Однако изучаться они будут с более современной точки зрения именно благодаря использованию понятий математического анализа. В нашем плане этого, однако, нет. Видите ли, времени у нас в обрез: четыре дня — и мы в Москве. А длительные беседы, конечно, недопустимы — мы все же на отдыхе! К тому же мы в неравноправном положении.— В голосе Николая Николаевича зазвучали шутливые нотки.— У меня работа чисто физическая: ходи и говори. А вот вам придется работать умственно: надо во всем разобраться и понять. Так что изложить все новые вопросы программы я не успею. Мы ограничимся первыми пятью классами. Здесь кончается начальный этап обучения математике. Дальше, с VI, как я уже говорил, начинается раздельное преподавание алгебры и геометрии. При этом происходит переход на новую, более трудную ступень обучения, связанную с большей систематичностью и дедуктивностью изложения. Но об этом мы будем говорить завтра.

Беседа первая. «Высказывания»

Когда назавтра Николай Николаевич пришел в каюту к своим любознательным слушателям, все уже ждали его.

— Прежде всего,— начал он,— я хочу задать вопрос уважаемому Петру Ивановичу. Скажите, как по вашему мнению, должны ли оканчивающие среднюю школу уметь делать правильные логические выводы, должны ли они знать, что такое условие и заключение теоремы, должны ли?..

— Ну, что за вопрос, батенька, конечно, должны,— нетерпеливо перебил Петр Иванович.

— В таком случае еще вопрос. А где в школьном курсе их учат умению делать правильные логические выводы, рассуждать?

— Ну, специально этому не учат, но при доказательстве теорем и решении задач в геометрии учащиеся следуют образцам рассуждений, которые дает учитель и которые они читают в учебнике, и постепенно сами... Да и в алгебре приходится рассуждать, и в арифметике при решении задач тоже ведь подумать надо.

— Спасибо, — улыбнулся Николай Николаевич.— Итак, школьники должны научиться делать правильные умозаключения, должны в конце концов усвоить основные правила логического вывода, но их этому в школе специально не учат, и приобрести эти умения они могут лишь, так сказать, попутно, стихийно — по мере решения задач и выучивания доказательства теорем. Вряд ли кто-либо из вас сочтет такое положение вещей нормальным. Детей надо научить сознательно делать правильные умозаключения, надо указать им основные правила, помогающие верно рассуждать. Новая программа по математике именно из этого и исходит. В новых учебниках излагаются первоначальные сведения, относящиеся к математической логике — науке, содержащей концентрированное выражение законов дедуктивного мышления. Это означает, что учащиеся получат первоначальные представления о том, какие приемы рассуждения позволяют делать правильные умозаключения, а какие приемы недопустимы, так как могут привести к ложным выводам, к ошибкам.

Приведу один простой шуточный пример, ярко показывающий, что приемы правильного логического мышления вовсе не столь очевидны и просты. Этот пример известен еще из глубокой древности.

Один житель острова Крит сказал: «Все критяне лжецы».

Но ведь сам он критянин и, значит, лжец. Значит, он сказал неправду. Выходит, все критяне правдивы.

Но тогда и он правдив и потому сказал правду. А если он сказал правду, то получается, что все критяне все-таки лжецы.

Значит, и он лжец и потому сказал неправду. Посему все критяне правдивы.

И он правдив — все критяне лжецы.

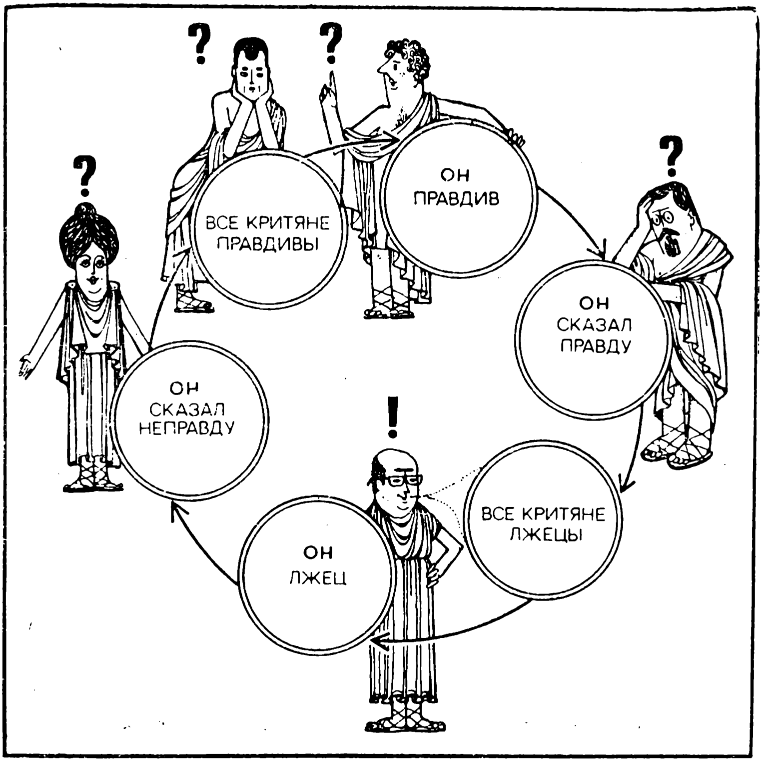
Тогда и он лжец...

Как же выбраться из заколдованного круга? Я не буду рассказывать разгадку этого софизма. Скажу только, что правила математической логики позволяют совершенно ясно и четко объяснить, в чем здесь дело. Есть и много других софизмов — так называются рассуждения, приводящие к явно нелепым выводам,— и, надо сказать, школьники очень любят их разгадывать. А разгадка любого софизма должна состоять всегда в том, чтобы показать, где мы неправильно рассуждали, где применили незаконный прием умозаключения.

Математическая логика помогает избежать ошибок в выводах, умозаключениях. Эту весьма сложную науку не предполагается изучать в школе в большом объеме, но некоторые первоначальные сведения из нее нужны каждому. Школьники часто обращаются к учителям и родителям с вопросами о том, можно ли так рассуждать, сделать такой-то вывод и т. д.

Значит, надо вооружить их пониманием — хотя бы в самых общих чертах — точных законов логического, дедуктивного мышления.

Одной из важных черт современной математики, вели-



чественное здание которой строится на строгой логической основе, является применение аксиоматического метода. Впервые аксиоматический метод был систематически применен для построения научной теории древнегреческим ученым Евклидом. В своей книге «Начала», написанной свыше 2000 лет назад, он сделал попытку построить геометрию как чисто дедуктивную науку, изложенную на базе небольшого числа исходных первоначальных положений — аксиом.

Исходная позиция Евклида была примерно следующей. К тому времени основным способом получения новых фактов в геометрии стал *дедуктивный метод,* т. е. логический вывод новых положений — теорем — из уже известных фактов. Взяв какую-либо теорему, можно составить список тех фактов, которые требуются для логического вывода — доказательства — этой теоремы. Факты, вошедшие в этот список, в свою очередь, можно вывести из еще более простых фактов и т. д.

Этот процесс не бесконечен. В конце концов, проделав такой анализ для всех теорем геометрии, удается выделить небольшой список первоначальных фактов — аксиом, из которых можно логически вывести — доказать — все теоремы геометрии.

Сам Евклид не сумел провести эту точку зрения до конца и дать полный список аксиом, из которых можно было бы чисто логически вывести все теоремы элементарной геометрии. Это было сделано лишь на рубеже XIX и XX столетий великим немецким математиком Давидом Гильбертом, который подвел окончательный итог двухтысячелетнего аксиоматического исследования геометрии, начатого Евклидом. Но заслуга открытия аксиоматического метода, служащего мощным орудием современной математики и других наук, принадлежит Евклиду.

Кстати, не следует думать, что т о л ь к о геометрия строится на аксиоматической основе. Не меньшее значение аксиоматический метод имеет в алгебре и других направлениях современной математики. Конечно, курс математики должен познакомить школьников с этим методом, составляющим замечательное завоевание человеческой мысли. И это знакомство должно быть более глубоким, чем прежде. Изучение аксиоматического метода и простейших фактов математической логики начинается, как, впрочем, и по старой программе, с VI класса. Но если раньше эти сложности сваливались на бедных шестиклассников как снег на голову, то теперь в начальных классах предусматривается серьезная подготовка к их восприятию, постепенный ввод учащихся в трудности алгебры и геометрии.

— Вы меня извините, Николай Николаевич, но это все общие соображения и пожелания. А как все это осуществить? Как подготовить детей к восприятию сложных понятий математической логики? Что для этого сделано в новых программах и учебниках? — спросил инженер.

— Минуточку терпения. Именно к этому я и собираюсь переходить. С этой целью в учебники IV и V классов введены такие понятия, как высказывания, математические предложения, истинность и ложность.

Давайте разберемся по порядку. Высказывание — это любая фраза, относительно которой можно четко и недвусмысленно судить, истинна она или ложна. Например, в сегодняшнем меню я видел рассольник. Фраза «В сегодняшнем меню имеется рассольник» — высказывание, притом истинное,— конечно, если указано, что речь идет о таком-то дне и о таком-то пароходе. Но фраза «Мы сегодня будем есть рассольник» не является высказыванием, поскольку неизвестно пока, так ли это. А вдруг рассольник не удастся и мы выберем на обед что-нибудь другое.

— Выходит, фразы, построенные в будущем времени, вообще не могут быть высказываниями? — спросил литератор.

— Ну, почему же? Если такие фразы выражают научно обоснованное предвидение, то они являются высказываниями. Например, предсказание о том, что луч света за ближайшую секунду пройдет расстояние около 300 000 километров,— это высказывание, и притом истинное. А что он пройдет за секунду всего 3 километра — это тоже высказывание, и притом ложное. Разумеется, не являются высказываниями вопросительные предложения: о них нельзя сказать, истинные они или ложные, так как в них ничего не утверждается. Вот еще несколько примеров высказываний — вы уж сами решите, какие из них истинны, а какие ложны:

Корова — домашнее животное.
Луна больше Земли.
Число 17 не делится без остатка на 8.
Самолеты движутся по рельсам.

А вот несколько фраз, которые не являются высказываниями, хотя в них нечто и утверждается (ведь по поводу этих фраз невозможно добиться однозначного суждения — одному покажутся они истинными, другие в этом усомнятся):

Число 0,01 очень мало.
Погода сегодня великолепная.
Днестр переплыть трудно.
Сладости полезны.

— Я только не понимаю, какое это имеет отношение к математике,— сказала долго молчавшая Анна Александровна.— Ведь то, о чем вы рассказываете, относится к любому предмету.

— Да, и в том числе к математике. Понятие высказывания — первичное понятие, и если мы хотим научить школьника рассуждать, то должны начинать с него. Разумеется, полученные знания помогут школьнику сознательнее воспринимать не только математику — тут я с вами вполне согласен.

В математике встречаются разные виды высказываний — здесь есть и аксиомы, и определения, и теоремы (в том числе формулы, равенства и неравенства). Ученик должен уметь разбираться в них, отличать верные (истинные) высказывания от неверных (ложных). В начальной школе он овладевает знанием многих фактов — многих истинных высказываний в математике. Тут и знаменитое дважды два четыре, и вся таблица умножения, и первоначальные геометрические сведения. Поэтому в IV классе, когда вводится понятие высказывания, ученику уже есть на что опереться.

— А уравнение — это тоже высказывание? — спросил Петр Иванович.

— Нет. Вот посмотрите,— и Николай Николаевич написал:

$$x+2=13.$$

Можно ли сказать, верно это или нет?

— Нельзя, конечно,— ответил Петр Иванович.— Мы ведь не знаем, чему равен икс.

— Как это не знаем?— возмутилась Анна Александровна.— Икс равен одиннадцати.

— Простите, давайте разберемся, откуда вы взяли, что $x=11$. Для этого вы произвели какие-то действия, т. е. вы **решили** это уравнение. Вообразите, что какой-то ученик неправильно решил это уравнение и сказал, что здесь икс равен пятнадцати (т. е. он не вычел от тринадцати два, а прибавил). Ясно, что этот спор вы решите проверкой, т. е. посмотрите, что получится при $x=11$ и что получится при $x=15$. Если вместо икса подставить в наше уравнение число 11, то получится $11+2=13$, т. е. получится верное высказывание. Если же подставить вместо икса число 15, то получится $15+2=13$, т. е. получится ложное высказывание. Как видите, уравнение $x+2=13$ нельзя считать высказыванием, так как оно не может быть признано ни истинным, ни ложным, пока нам не сказано, чему равен икс.

В уравнении кроме чисел и знаков действий содержится еще неизвестная величина (обычно обозначаемая буквой x). Если вместо икса мы подставим одно число (скажем, $x=11$ в случае рассмотренного уравнения), то получится верное числовое равенство. Как вы знаете, такое число называется **корнем** рассматриваемого уравнения. Если же вместо икса подставить другое число (скажем, $x=15$), то получится ложное высказывание — и это будет означать, что подставленное на этот раз число не является корнем уравнения. Если хотите, уравнение можно считать как бы вопросительным предложением: когда вам говорят, что дано *уравнение* $x+2=13$, то подразумевается неявно поставленный **вопрос** «Каковы корни этого уравнения?». Иначе говоря, само слово «уравнение» означает, что вы **интересуетесь** нахождением всех его корней. Эту эмоциональную, как бы вопросительно-побудительную окраску слова «уравнение» не следует забывать.

Кстати, по поводу вопросительности уравнения полезно обсудить сомнение, которое часто возникает у учащихся. Например, спрашивают: является ли

$$x+2=2+x$$

уравнением или нет? Думаю, что вопрос неправильно поставлен. Ведь слово «уравнение» показывает наше отношение к этому равенству. Если мы хотим назвать это уравнением, то это значит, что мы интересуемся, каковы его корни, и ответ будет звучать так: «любое число является корнем этого уравнения». Если же мы хотим сказать, что равенство $x+2=2+x$ является тождеством (в старших классах этот термин применяется), то это будет также означать наше отношение к этому равенству: мы хотим подчеркнуть, что это равенство справедливо для всех чисел, т. е. для любого значения икса. Итак, слово «уравнение» или «тождество» показывает различие в нашем отношении к написанному равенству.

Это различие сказывается еще и в том, что если уравнение нельзя назвать высказыванием, то тождество, напротив, всегда представляет собой высказывание. Возьмем для примера коммутативный (или переместительный) закон сложения: *для любых чисел a, b справедливо равенство:*

$$a+b=b+a.$$

Ясно, что это есть высказывание (притом истинное).

Перейдем теперь к вопросу о классификации верных высказываний.

Любое высказывание в математике либо объясняет значение слова — термина, либо формулирует некоторые свойства чисел, фигур и т. п. Термины вводятся определениями. Свойства либо декларируются без доказательства (тогда это аксиомы), либо доказываются (тогда это теоремы). Предположим, я не знаю, что такое четное число. Анна Александровна, объясните мне, пожалуйста, что это такое.

— Ну, это два, четыре, двадцать четыре, — пожала плечами Анна Александровна.

Мужчины улыбнулись — все, кроме невозмутимого Николая Николаевича.

— Значит, четных чисел всего три: два, четыре и двадцать четыре? — спросил он.

— Да нет же,— я могу назвать их сколько угодно.

— Все не назовете,— улыбнулся Петр Иванович.

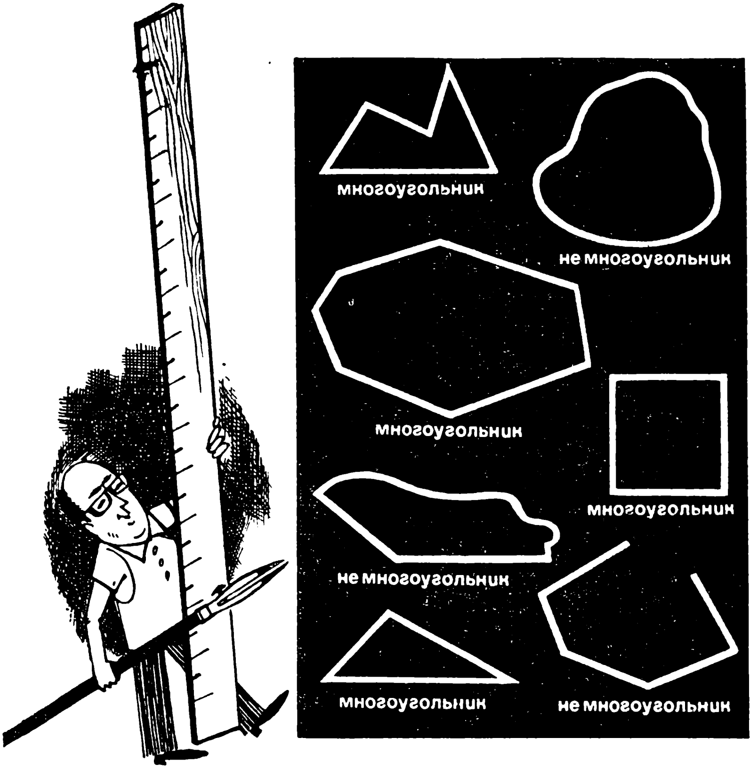
— Да,— сказал Николай Николаевич,— в данном случае это не метод.

— Четное число,— сказал инженер,— делится на два.

— Вот, вот. Только для школьников понятнее, если в определении звучит слово «называется»: четным называется целое число, делящееся на два. Как видите, здесь есть слово «называется». Это довольно типичная, хотя и не обязательная, особенность определений. Можно то же определение высказать и иначе: четное число — это число, делящееся на два. Но ученик должен понять, что в определении обязательно есть определяемый термин (в данном случае это — «четное число») и обязательно есть точная его характеристика (в данном случае указывается, что это — «целое число, делящееся на два»). За первые пять лет обучения дети знакомятся со многими определениями. Например, они узнают, что называется наибольшим общим делителем, параллельными прямыми, периметром многоугольника и т. д.

Перейдем к аксиомам и теоремам.

Классический пример: через две точки проходит единственная прямая линия. Мы принимаем это утверждение без доказательства, считаем его аксиомой. Напротив, теорема — это утверждение, которое доказывается, выводится из аксиом и ранее установленных теорем. Так обстоит дело в математической науке. В школьной математике не все столь определенно. Например, в V классе дети доказывают теорему о том, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°. Однако они не отдают себе отчета, какие аксиомы и теоремы при этом используются, а просто привлекают



для доказательства известный им материал. Сами термины «определение», «аксиома», «теорема» прозвучат позже, в VI классе. Но на самом деле эти виды предложений появляются раньше. И называются они одинаково — правила.

Всем памятна зубрежка правил. Но теперь мы хотим обойтись без зубрежки. Как это можно сделать, легко понять на простом примере: давайте попробуем сформулировать определение вилки. Можно сказать, что это предмет, употребляемый во время еды и приготовления пищи, у которого рабочая часть состоит из длинных параллельных зубьев. Конечно, к этому можно и придраться: например, потребовать уточнения, какие зубья мы считаем длинными. Но, разумеется, это верное определение. Между тем никогда нас не учили этому правилу, этому определению. Просто дело в том, что каждый из нас хорошо знаком с вилкой, и если бы дети столько же работали с каждым математическим понятием, сколько мы работаем вилкой, тогда, конечно, зубрежка была бы ненужной.

Вот так и строится новая программа, особенно программа первых пяти классов: постепенно, без зубрежки, в процессе выполнения упражнений дети усваивают правила обращения с математическими понятиями. Например, в IV классе изучается многоугольник. При этом в учебнике определения многоугольника нет. Значит, и с ученика это определение спрошено не будет. Но зато ученик должен успеть привыкнуть к этому понятию настолько, чтобы безошибочно узнавать многоугольники в простых случаях.

Если мы хотим избежать в старших классах неоправданных перегрузок, то мы должны с I класса приучать ребят думать. Центр тяжести здесь перемещается. Раньше основные трудности были в арифметических задачах и примерах в десять-пятнадцать действий. Теперь основное — постижение логики математики. В частности, работа с правилами (определениями, аксиомами и теоремами) — очень важный вид деятельности ученика.

— Да, все это совсем не просто,— промолвил Григорий Андреевич.

— Но как интересно. Большое спасибо вам за беседу, Николай Николаевич,— добавила Анна Александровна.

— Э, нет. Так легко вы от меня не отделаетесь,— засмеялся Николай Николаевич, вынимая из бокового кармана исписанный лист бумаги.— Все равно дождь, на палубе мокро. Получайте домашнее задание.

1. Вашему сыну задали проработать текст, связанный с понятием прямоугольника, но не содержащий определения этого понятия. Он честно все выучил и решил упражнения. Однако, как вы выяснили, он не совсем ясно понимает, что такое прямоугольник: он не признал квадрат прямоугольником. Что вы будете делать?

2. Вашей дочери дали задание выделить условие (то, что дано) и заключение (то, что требуется доказать) в теореме: «Числа, кончающиеся на нуль, делятся на десять». Она делает ошибку, говоря: «Условие: число делится на десять; заключение: число оканчивается на нуль». Как вы объясните ей верный ответ? Какие примеры аналогичных теорем приведете?

3. Ваш сын, придя из школы, обратился к вам с вопросом:

— Нам сказали, что аксиомы нельзя доказать, и дали аксиому: «Через две точки проходит только одна прямая». А разве нельзя этого доказать? Приложил линейку и проверил, что вторая прямая пойдет по первой. Вот и доказательство!

Что вы скажете сыну?

— Это к какому же сроку все сделать? — спросил Григорий Андреевич.

— К какому хотите. Дело добровольное. В конце поездки я вам вручу решения всех заданий — этого и следующих,— а также разгадку софизма о критянах.

Беседа вторая. «Множества»

— Итак, сегодня разговор о множествах. Эта тема не стоит в программе отдельно. Уже с I класса дети постепенно приучаются к словам «множество» и «элемент множества». В IV и V классах несколько уроков специально отводятся этому вопросу. А в дальнейшем весь курс должен быть пронизан теоретико-множественными представлениями. Это — существенная черта новой программы, не затрудняющая, а облегчающая ее изучение.

Вспомните, как трудно давались детям такие понятия, как геометрическое место точек, геометрическое преобразование, функция, область определения функции. А теперь все это получает единый смысл. Усвоив понятие множества, школьник будет в старших классах сознательно применять его в перечисленных, да и во многих других вопросах.

И геометрическое место точек, и область определения функции будут теперь изучаться с точки зрения общего понятия множества, станут в сознании учащихся частными случаями понятия множества. А частные случаи уже знакомого общего понятия усваиваются гораздо естественнее, проще, прочнее, сознательнее.

Важно понять, что изучение множеств само по себе не расширяет программу. Это просто более общий язык. Конечно, мы не предлагаем полностью отказаться от использования синонимов слова «множество». По-прежнему стадо коров ученик в жизни будет называть стадом. Но мы хотим, чтобы на уроке математики он говорил о «множестве коров». Для IV класса издана специальная таблица о множествах. Я изобразил ее на листочке,— и Николай Николаевич вынул из кармана рисунок.— Как видите, здесь и коровы, и кошки, и лошади, и самолеты. Спрашиваем на уроке: как называется множество коров? Стадо, говорят. А множество коней? Табун. А множество самолетов? Звено. А нет ли здесь такого множества, которое не имеет особого названия? Есть, например, множество кошек. Дети убеждаются в многозначности слова «множество», в его большой общности.

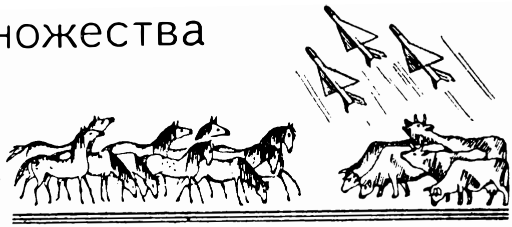
Затем мы спрашиваем о множестве животных темной окраски, о множестве вообще всех животных на таблице. Специального названия оно, конечно, не имеет. И не требуется каждое множество как-нибудь специально называть. Да и не хватит слов. Другое дело — обозначить множество буквой. В каждой новой задаче буквы могут использоваться заново, т. е. букву, которой обозначалось множество в одной задаче, можно в новой задаче использовать для обозначения другого множества. Так что букв нам хватит. А не хватит — можно писать буквы с индексами: A_1, A_2, A_3 и т. д. Конечно, глядя на букву A, нельзя без объяснений понять, о каком именно множестве идет речь; буква A может обозначать любое множество, любую точку так же, как, например, слово «табун» может обозначать любое множество лошадей. Если мы хотим пояснить, какое множество имеется в виду, мы можем это сделать по-раз-

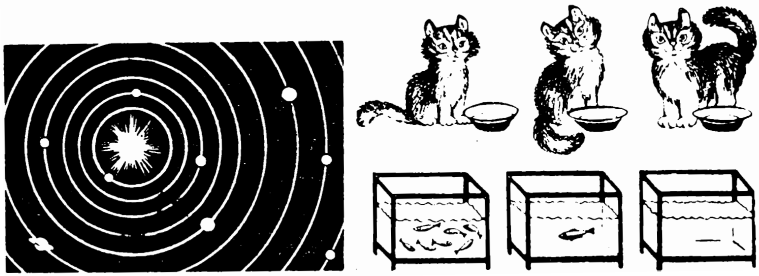
Множества

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots$

$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 2n+2, \ldots$

$5, 10, 15, 20, \ldots, 5n, \ldots$





ному. Можем нарисовать группу детей и рядом поставить букву *A*. Тогда *A* — это группа детей, изображенных на рисунке. Можно описывать множества словами: *A* — множество детей на рисунке, *B* — множество пассажиров этой каюты, *C* — множество женщин в этой каюте, *D* — множество грибов, собранных в прошлое воскресенье людьми из множества *B*. Впрочем, может быть, вы не собирали грибов в прошлое воскресенье. Тогда множество *D* будет пустым. Я вижу улыбки на ваших лицах. Да, да, это то самое пустое множество, которое вначале вызывает испуг у родителей. Часто спрашивают, зачем вводить такое странное понятие — «пустое множество», и добавляют: множество — ведь это значит много!

Однако когда я называл один за другим свои примеры, я следил за вашей реакцией: *A* — множество детей, *B* — множество пассажиров этой каюты, *C* —

множество женщин в этой каюте. И пока я не сказал о грибах, вы спокойно воспринимали мои примеры. А разве так уж много женщин в этой каюте? Важно понять, что, хотя слова «много» и «множество» имеют общий корень, они выражают разные понятия. Вот еще пример. Решая какую-нибудь задачу, мы хотим найти все ее решения, т. е. найти множество всех ее решений. А если задача не имеет решений? Удобнее считать, что у такой задачи множество решений пустое, чем говорить, что у задачи «нет множества решений». Так что если вы не собирали грибов в прошлое воскресенье, то множество D — пустое. Этот факт записывают так: $D=\varnothing$.

С помощью знака равенства можно записывать и непустые множества. Например, если B — множество пассажиров этой каюты, то можно это записать так: $B=\{$А. А., Ю. А., П. И., Г. А.$\}$. Вы, конечно, понимаете, что я употребил инициалы; моих инициалов здесь нет, так как я — пассажир другой каюты, я ваш гость.

Заметьте, при обозначении множеств ни круглых, ни квадратных скобок не употребляют — только фигурные.

До V класса дети имеют дело только с конечными множествами. А вот в V появляются множества бесконечные, и тут возникают трудности при записи. Например, что означает запись $B=\{1, 2, 3,...\}$? Возможно, что так обозначено множество, состоящее из всех десяти цифр, которое мы не захотели вписать до конца, т. е. множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$. Но возможно, что таким способом обозначено множество всех чисел первой сотни — его можно было бы записать также в виде $\{1, 2, 3,..., 100\}$ — или множество всех натуральных чисел.

Таким образом, многоточие всегда означает, что в множестве имеется целый ряд невыписанных элементов. Но чтобы было точно известно, о каком множестве идет речь, надо обязательно пояснить, что означает многоточие, пояснить, какие именно элементы за этим многоточием скрываются. Зная только несколько элементов множества (скажем, 1, 2, 3), но не имея дополнительных разъяснений, мы можем только догадываться, какое взято множество, но эта догадка может нас и подвести.

Вот еще пример.— Николай Николаевич написал

$$C = \{2, 3, 5, \ldots\}$$

и вновь обратился к своим слушателям.— Можете ли вы узнать, о каком множестве идет речь?

— Мне кажется, это нетрудно,— сказал инженер.— Следует обратить внимание на то, что число 3 больше, чем 2, на единицу, а следующее число 5 больше его предыдущего 3 уже на два. Поэтому следующее число будет больше, чем 5, уже на три, следующее будет больше на четыре и т. д. Мы получаем возможность выписать сколько угодно элементов этого множества:

$$C = \{2, 3, 5, 8, 12, 17, \ldots\}.$$

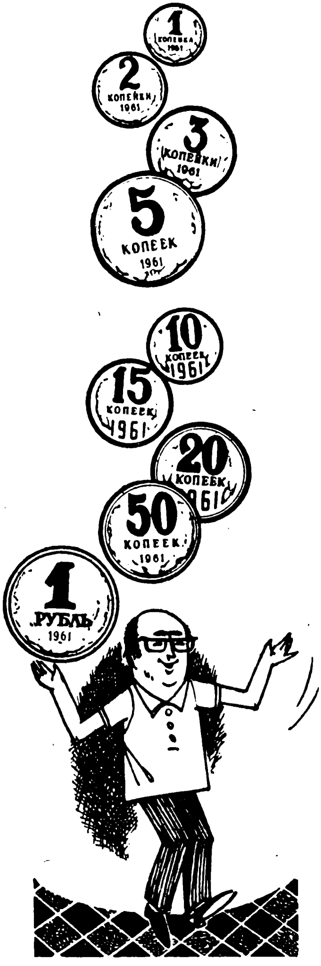
— Э, батенька, можно сделать и более естественное предположение. Заметьте, что 2, 3, 5 — это три первых простых числа.

— Простых? — переспросила Анна Александровна.

— Да.— Петр Иванович посмотрел на нее поверх очков.— Простым называется такое натуральное число, большее единицы, которое не делится ни на какие натуральные числа, кроме единицы и самого себя. Так вот, заметив, что 2, 3, 5 — это три первых простых числа, естественно предположить, что C — множество всех простых чисел:

$$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}.$$

— Ну, вот видите,— торжествовал Николай Николаевич,— вывод ясен: перечисление нескольких элементов не определяет без дополнительных пояснений того множества, в записи которого используется многоточие. А иногда, зная лишь несколько элементов множества, вообще нелегко догадаться, о каком множестве идет речь.



Есть, между прочим, такая загадка-шутка: угадать, какое множество я задумал, если

его первый элемент 1,
второй элемент 2,
третий элемент 3,
четвертый элемент 5,
следующий 10...

Николай Николаевич с удовлетворением отметил недоумение на лицах слушателей и продолжал:

— Следующий элемент 15,
затем 20,
затем 50 копеек
и, наконец, рубль.

Вот видите, вы не сразу поняли, что речь идет о множестве монет разного достоинства.

Теперь обратите внимание — иногда я употреблял в своей речи слово «элемент». Я не ошибусь, утверждая, что ни у кого из вас это слово не вызвало протеста, хотя я и не дал ему никакого определения. Точно так же, исподволь, слова «множество» и «элемент» воспринимаются и детьми. Множество, конечно, если оно не пустое, состоит из элементов. А пустое множество не имеет ни одного элемента. Запись множества с помощью фигурных скобок должна содержать перечень его элементов.

Элементы множества нередко обозначают малыми буквами латинского алфавита. Запись $a \in A$ читается так: «элемент a принадлежит множеству A», а запись $a \notin A$ читается: «элемент a не принадлежит множеству A».

Мы уже говорили о бесконечных множествах. Натуральный ряд

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

(т. е. множество всех натуральных чисел) является бесконечным множеством. Множество

$$\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$$

всех простых чисел также бесконечно. Дальнейшими примерами бесконечных множеств могут служить множество

$$\{2, 4, 6, \ldots\}$$

всех четных чисел, множество

$$\{1, 3, 5, \ldots\}$$

всех нечетных чисел, множество

$$\{10, 20, 30, \ldots\}$$

всех чисел, делящихся на 10 (т. е. оканчивающихся нулем), и т. д.

Отметим еще одну деталь, связанную с обозначением бесконечных множеств. Обычно буквой n обозначают произвольное натуральное число. Тогда $2n$ будет обозначать произвольное *четное* число, а $2n-1$ — произвольное *нечетное* число (здесь, конечно, речь идет о положительных четных и нечетных числах, так как отрицательных чисел четвероклассники еще не знают). В самом деле, если вместо n брать последовательно числа 1, 2, 3 и т. д., то выражение $2n$ будет принимать значения 2, 4, 6 и т. д., т. е. выражение $2n$ будет последовательно «пробегать» все четные числа. Ну, а выражение $2n-1$ будет принимать значения 1, 3, 5 и т. д., т. е. выражение $2n-1$ будет последовательно «пробегать» все нечетные числа. Поэтому выражение $2n$ называют формулой четного числа, а выражение $2n-1$ — формулой нечетного числа. В связи с этим при записи бесконечных множеств — или, лучше сказать, бесконечных последовательностей — часто указывают «n-й член» (или «общий член») соответствующей последовательности, т. е. пишут

$N=\{1, 2, 3,..., n,...\}$ — множество всех натуральных чисел;

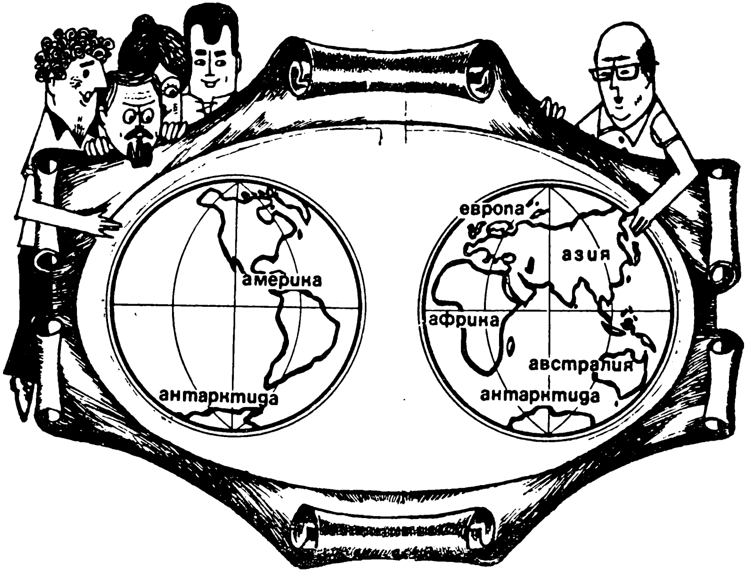
$\{2, 4, 6,..., 2n,...\}$ — множество всех четных чисел;

$\{1, 3, 5,..., 2n-1,...\}$ — множество всех нечетных чисел.

А вот формулы для n-го простого числа не существует, так что записать множество всех простых чисел с указанием общего члена невозможно.

Вот и все, что должен знать о множествах ученик IV класса: обозначение множества заглавными (или, как еще говорят, «большими») буквами латинского алфавита, обозначение элементов строчными («малыми») буквами латинского алфавита, употребление фигурных скобок для обозначения множеств, понятие о бесконечных множествах, употребление многоточия для невыписанных элементов, знак пустого множества и знак принадлежности элемента множеству.

Этот материал получает развитие в V классе. Там учащиеся знакомятся с пересечением и объединением множеств. Пересечение двух множеств — это их общая



часть, т. е. множество, состоящее из элементов, входящих в оба данных множества: и в то и в другое. Пусть, например, A — множество школьных учителей, находящихся здесь, а B — это множество математиков, находящихся здесь... Видите, Петр Иванович улыбается. Он — элемент каждого из этих множеств. И других общих элементов нет. Значит, Петр Иванович — пересечение этих множеств. Точнее говоря, пересечением этих множеств является множество, состоящее из одного элемента — Петра Ивановича.

Еще пример — на этот раз из географии. Пусть M — множество частей света, полностью расположенных в Восточном полушарии Земли, т. е.

$M = \{$ Европа, Азия, Африка, Австралия $\}$.

Заметим, что Антарктида не лежит полностью в Восточном полушарии и поэтому

Антарктида $\notin M$.

Теперь рассмотрим множество N, состоящее из частей света, перерезаемых экватором:

$N = \{$ Америка, Африка, Азия $\}$.

Найдем пересечение множеств M и N. Пересечение — это общая часть двух множеств. Значит, в данном случае в пересечение войдут части света, полностью лежащие в Восточном полушарии и пересекаемые экватором, т. е. Африка и Азия.

Пересечение множеств обозначается знаком $\cap$, похожим на перевернутую букву U латинского алфавита. Теперь мы можем рассмотренные примеры записать так:

$\{$Анна Александровна, Петр Иванович, Григорий Андреевич$\} \cap \{$ Петр Иванович, Николай Николаевич $\} = \{$ Петр Иванович$\}$.

$\{$Европа, Азия, Африка, Австралия $\} \cap \{$ Америка, Африка, Азия$\} = \{$ Азия, Африка$\}$.

Еще пример. Каково пересечение множества частей света, целиком лежащих в Западном полушарии, и множества частей света, целиком лежащих в Южном полушарии?

В Западном полушарии лежит целиком только Америка. В Южном — только Австралия и Антарктида. Так что получается пустое пересечение:

$\{$ Америка$\} \cap \{$ Австралия, Антарктида $\} = \varnothing$.

Множества, у которых пустое пересечение, называют *непересекающимися*. Например, множество рыб и множество домашних животных не пересекаются, т. е. имеют пустое пересечение. А множество млекопитающих и множество домашних животных пересекаются: собака, например, принадлежит тому и другому множеству, входит в их пересечение.

Теперь перейдем к объединению. Объединение двух (или нескольких) множеств — это множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств. Вот простенькая задача, иллюстрирующая это определение.

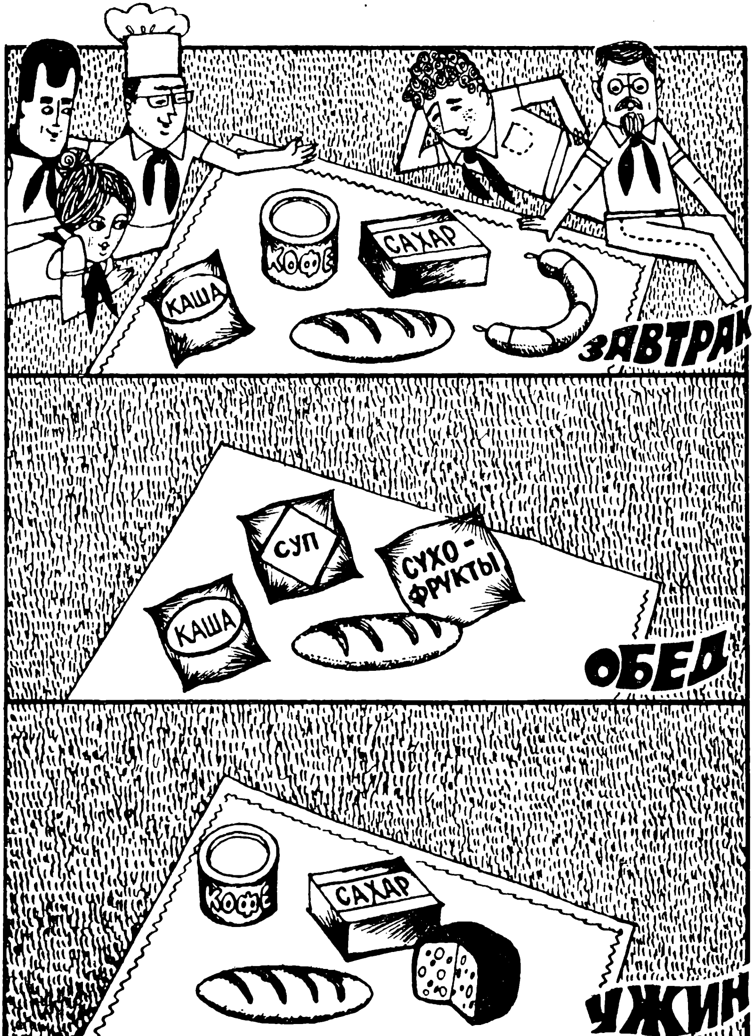
Туристы на завтрак ели кашу из концентрата и пили сладкий растворимый кофе с хлебом и колбасой. В обед они ели суп и кашу из концентратов и пили компот из сухофруктов; суп они ели с хлебом. В ужин они пили сладкий растворимый кофе с хлебом и сыром. После ужина главный повар похода доложил начальнику, что вся провизия съедена. Спрашивается, какие продукты были у туристов утром? Ответ, конечно, такой: концентрат каши, концентрат супа, растворимый кофе, сухофрукты, сахар, хлеб, колбаса и сыр. Чтобы перевести эту задачу на язык множеств, обозначим буквой A множество названий продуктов, использованных при приготовлении завтрака, через B — множество названий продуктов, потребовавшихся при приготовлении обеда, и через C — множество названий продуктов, съеденных во время ужина. Тогда

$A = \{$концентрат каши, растворимый кофе, сахар, хлеб, колбаса$\}$;

$B = \{$концентрат супа, концентрат каши, сухофрукты, хлеб$\}$;

$C = \{$растворимый кофе, хлеб, сыр, сахар$\}$.

В задаче спрашивается, что было у туристов перед завтраком (так как за день, судя по докладу повара, они съели все). Ответом на вопрос будет объединение множеств A, B и C, т. е. множество, состоящее из названий всех продуктов, входящих хотя бы в одно из этих множеств. Обозначается объединение множеств знаком $\cup$, похожим на латинское U. Итак, нас интересует множество



КАША
КОФЕ
САХАР
ЗАВТРАК
СУП
СУХО-ФРУКТЫ
КАША
ОБЕД
КОФЕ
САХАР
УЖИН

$A \cup B \cup C = \{$концентрат каши, растворимый кофе, сахар, хлеб, колбаса$\} \cup$

$\cup \{$концентрат супа, концентрат каши, сухофрукты, хлеб$\} \cup$

$\cup \{$растворимый кофе, хлеб, сыр, сахар$\}$.

Чтобы найти результат, перепишем сначала элементы первого множества, потом недостающие из второго, потом недостающие из третьего:

$A \cup B \cup C = \{$концентрат каши, растворимый кофе, сахар, хлеб, колбаса, концентрат супа, сухофрукты, сыр$\}$.

Еще задача: утром я езжу в бассейн на автобусе, оттуда на работу троллейбусом и метро, а вечером еду домой на метро и на автобусе. На каких видах транспорта я езжу?

Эту задачу вы решите к завтрашнему дню. А сейчас я дам и остальные — для желающих. Но прежде напомню еще одно понятие, изучаемое в курсе V класса. Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Записывается это так: $A \subset B$ (читается: «множество A является подмножеством множества B»). Пустое множество считается подмножеством любого множества.

После этого Николай Николаевич вынул из кармана очередной листок с заданием.

1. Пусть $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{1, 2, 6\}$, $F = \{2, 6\}$, $K = \{2\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \varnothing$.

Верны ли утверждения: $E \subset D$, $F \subset D$, $K \subset D$, $M \subset D$, $N \subset D$, $F \subset E$, $K \subset E$, $K \subset F$, $N \subset K$, $K \subset K$, $N \subset N$?

2. Составьте все подмножества множества $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 10\}$, состоящие из четырех элементов.

3. Составьте все подмножества следующих множеств:

$A = \varnothing$, $B = \{0\}$, $C = \{0, 1\}$, $D = \{0, 3, 6\}$.

4. Докажите, что если A является подмножеством множества B и B является подмножеством множества A, то $A = B$.

5. Напишите пересечение и объединение для каждой из следующих пар множеств, описанных в задании 1:

D и E; E и N; E и E.

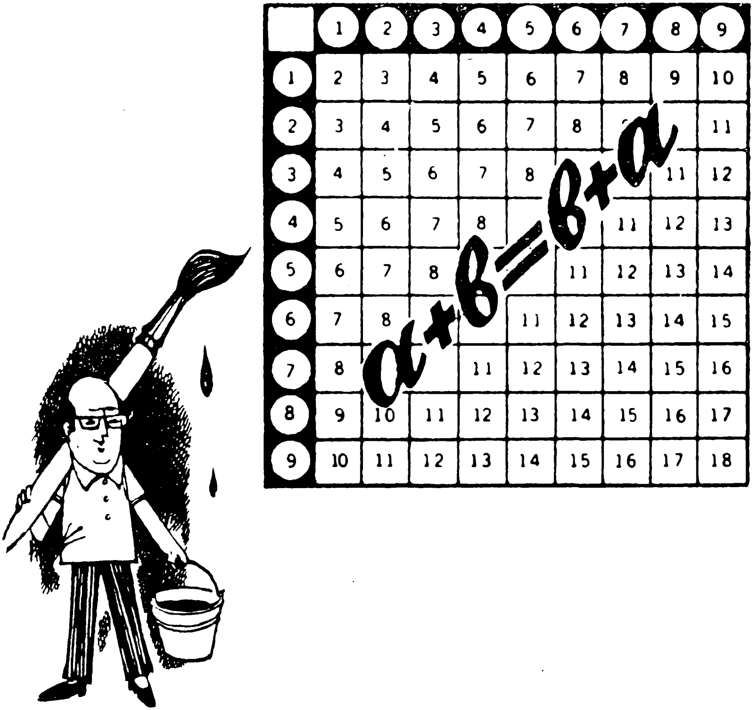
Беседа третья. «Новое в школьном курсе алгебры»

— Весь школьный курс алгебры,— начал Николай Николаевич,— пронизан несколькими идейными нитями, из которых я отмечу три основные. Это, во-первых, постепенное обобщение понятия числа, во-вторых, решение уравнений различных типов и, в-третьих, изучение элементарных функций. Разумеется, эти идеи можно найти и в курсе алгебры, изучавшемся в наших школах по старой программе, но теперь они получают более глубокое развитие.

Мы уже говорили о том, что по новой программе уравнения изучаются в школе значительно раньше. В IV классе они уже применяются систематически, а привычка обозначать неизвестную величину буквой x вырабатывается у учащихся даже с I класса. Такое «омоложение» темы об уравнениях способствует постепенному и более глубокому их усвоению. У учащихся же это не вызывает дополнительных трудностей, поскольку материал, связанный с уравнениями, вводится постепенно. Кроме того, значительно упрощается решение наиболее сложных арифметических задач, которые теперь решаются с применением уравнений.

Если к этому добавить, что в старших классах будет уменьшено число «вычурных» уравнений, решаемых сложными и искусственными приемами, то станет ясно, что темы об уравнениях, построенные в соответствии с новой программой, дают упрощение школьного курса математики. Высвобождающееся время можно будет использовать для более глубокого усвоения основных, принципиальных вопросов, связанных с уравнениями, и для изучения тех новых разделов, о которых мы уже говорили.

Примерно то же, только в еще большей степени, относится к изучению функций и графиков. Раньше использование графических представлений происходило эпизодически, отдельными небольшими «островками» в курсе математики. Это приводило к тому, что учащиеся, как правило, не умели графически мыслить и, в результате, курс математики усваивался труднее: ведь графические представления, благодаря их большой наглядности, облегчают понимание наиболее трудных разделов учения о функциях. Ясно поэтому, что темы, развивающие графическое мышление, должны пронизывать курс целиком, а не входить отдельными островками. Из этого и исходит новая программа. Графики нужны инженеру и врачу, диспетчеру и экономисту, нормировщику и токарю, научному работнику и руководителю предприятия. И неудивительно, что новые учебники для IV и V классов много говорят о графиках, графическом осмыслении формул, графическом решении уравнений. Как и темы о решении уравнений, графический материал значительно «омолодился»: он изучается теперь не в VI, а уже в IV классе. Этим, благодаря большой наглядности графического материала, тоже достигается облегчение нового курса математики по сравнению с прежним: ведь чис-



ло часов и количество материала в целом осталось примерно таким же, но материал во многом стал проще, нагляднее. Конечно, новизна материала и непривычное построение курса вызывают определенные трудности у учителей и родителей, но для учащихся этот материал, несомненно, проще.

Однако в сегодняшней беседе мы уделим основное внимание не уравнениям, не функциям и графикам, а первой идейной линии, отмеченной мною,— постепенному обобщению понятия числа...

— Как вы знаете,— продолжал после некоторой паузы Николай Николаевич,— запас чисел, изучаемых в школе, возникает не сразу: сначала учащиеся знакомятся с натуральными числами, затем к ним присоединяются дробные и, наконец, отрицательные числа, чем завершается построение поля рациональных чисел.

— Значит, не только биологи говорят на своих уроках о полях, но и математики? — удивилась Анна Александровна.

— Да, представьте себе. Только в числовом поле «растут» не злаки, а числа. Но об этом я упомянул лишь попутно. Так вот, в V классе учащиеся уже имеют полный «запас» рациональных чисел. Ну, а в старших классах пойдет разговор уже о действительных (т. е. не только рациональных, но и иррациональных) числах и о числах комплексных. Очень важно заметить, что постепенно расширяющийся запас чисел изучается не только в том отношении, какие числа в него входят, но и в отношении действий над этими числами и законов действий. Этот материал и раньше изучался в школе, но знакомство с ним было очень беглым, формальным, и в результате учащиеся не отдавали себе ясного отчета, где и когда они используют те или иные свойства действий. В результате дети не понимали смысла проводимых алгебраических преобразований и потому допускали ошибки в вычислениях и при решении примеров. Новая программа требует сознательного, глубокого усвоения свойств действий и их роли в алгебре. Вот обо всем этом мы и поговорим сегодня подробнее. Как вы знаете, множество

$$N=\{1, 2, 3, \ldots\}$$

всех натуральных чисел называется *натуральным рядом*. Уже в I классе дети знакомятся с четырьмя арифметическими действиями над натуральными числами. Это — сложение, вычитание, умножение и деление.

Однако нужно иметь в виду, что сложение и умножение в множестве натуральных чисел выполнимы всегда (т. е. для любых двух чисел), а вычитание и деление — не всегда. Возьмите числа 2 и 5. Сложить их можно — будет семь. Перемножить тоже можно — будет десять. А вот вычесть два из пяти можно — будет три,— но пять из двух нельзя. Разделить же ни два на пять, ни пять на два не удается.

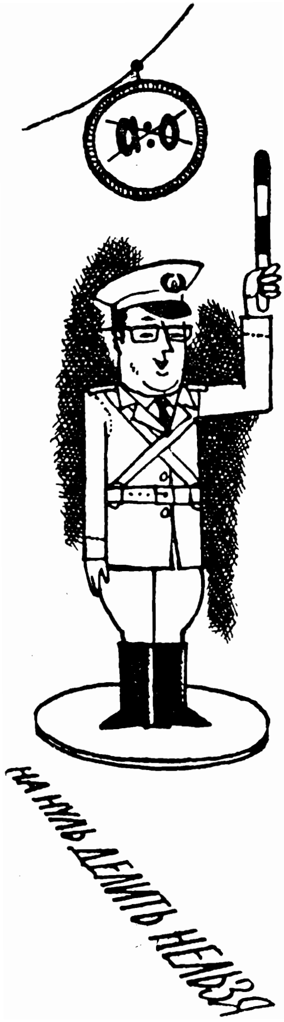
— Как это не удается! — возмутилась Анна Александровна.— И вычесть можно пять из двух — получится минус три,— и разделить можно. Вот, пожалуйста: $2-5=-3$; $2:5={}^2/_5$.

— То, что вы написали, совершенно правильно. Но ведь мы говорим о начальном обучении, и вы должны учесть, что в это время дети еще не знают ни дробей, ни отрицательных чисел. Поэтому они и не могут выполнить этих действий. Иными словами, в самом множестве натуральных чисел, не выходя за его пределы, действия $2-5$ или $\frac{2}{5}$ невыполнимы. Как видите, не все дозволено в множестве натуральных чисел!

Но вот с III класса вводятся дроби. Теперь хоть два дели на пять, хоть пять на два. Мы получаем возможность делить любое число на любое. Остается только одно запрещение, причем остается навеки: *на нуль делить нельзя.*

В V классе появляются отрицательные числа. Теперь уже можно неограниченно выполнять все четыре арифметических действия — кроме, разумеется, деления на нуль.

Весьма существенным является то, что, начиная с I класса и до завершения построения поля рациональных чисел в V классе, изучение все расширяющегося запаса чисел тесно увязывается с законами действий: коммутативным, ассоциативным, дистрибутивным. Обычно в школе их называли иначе: переместительный,



сочетательный и распределительный законы. Когда мы говорим, что операция подчиняется коммутативному (переместительному) закону, это значит, что если числа a и b, участвующие в операции, поменять местами, то результат не изменится, причем это должно быть верно для **любых** чисел a и b. Коммутативному закону подчиняются и сложение чисел, и умножение, т. е. $a+b=b+a$, $ab=ba$. Напротив, вычитание и деление некоммутативны, т. е. равенства $a-b=b-a$ и $a:b=b:a$ в общем случае (т. е. для **любых** чисел a и b) неверны. Хотя при $a=b$ равенство $a-b=b-a$ справедливо, мы не можем считать вычитание коммутативной операцией, так как не для любых чисел a и b равенство $a-b=b-a$ верно. Например, $3-6\neq 6-3$. То же относится и к делению.

Теперь об ассоциативности. Предположим, нам нужно прибавить к числу a сумму чисел b и c. Это можно сделать так: сложить b и c и затем осуществить требуемое сложение. Например, $8+(2+4)=$ $=8+6=14$. Но можно поступить и иначе: прибавить к числу a сначала первое слагаемое, а затем к получившейся сумме прибавить второе слагаемое. Например, в нашем случае это даже удобнее: $8+(2+4)=(8+2)+4=10+4=14$. Аналогично можно поступать и при умножении: $8\cdot(2\cdot4)=(8\cdot2)\cdot4$. В общем случае эти равенства записываются так:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,\quad a(bc)=(ab)c.$$

Это и есть ассоциативные (сочетательные) законы сложения и умножения.

Вычитание и деление — неассоциативные операции. Например, $8-(4-2)=6$, но $(8-4)-2=2$, так что $8-(4-2)\neq(8-4)-2$. Аналогично в случае деления.

Если коммутативный и ассоциативный законы формулируются отдельно для сложения и умножения, то дистрибутивный (распределительный) закон связывает сложение и умножение вместе. Чтобы его пояснить, возьмем такой пример. Пусть нужно умножить число 14 на сумму чисел 2 и 4. Это можно сделать по-разному. Можно вначале найти сумму чисел 2 и 4 и потом выполнить умножение: $14(2+4)=14\cdot6=84$. Но можно поступить и иначе: умножить 14 на 2, потом умножить 14 на 4 и наконец сложить полученные произведения: $14\cdot2+14\cdot4=28+56=84$. Результат получился один и тот же, т. е. $14(2+4)=14\cdot2+14\cdot4$. Вообще, для любых чисел a, b, c справедливо равенство

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Это и есть дистрибутивный закон (или, как еще говорят, свойство дистрибутивности умножения относительно сложения). Отметим, что имеет место также дистрибутивность умножения относительно вычитания:

$$a(b-c)=ab-ac.$$

Например, $7(5-2)=7\cdot5-7\cdot2$. Деление же недистрибутивно ни относительно сложения, ни относительно вычитания. Вот подтверждающие примеры:

$$8:(4+2)=1\frac{1}{3},\ \text{а}\ 8:4+8:2=6;$$
$$8:(4-2)=4,\ \text{а}\ 8:4-8:2=-2.$$

Впрочем, деление подчиняется так называемой правой дистрибутивности: для любых чисел a, b, c, где $c \neq 0$, справедливы равенства

$$(a+b):c=a:c+b:c,\quad (a-b):c=a:c-b:c.$$

Например, $(20+30):10=50:10=5$, $20:10+30:10=$ $=2+3=5$, т. е. $(20+30):10=20:10+30:10$.

Все это, как вы видите, обычный школьный материал. Новое состоит лишь в том, что теперь дети будут изучать его более внимательно.

Иногда говорят, что нельзя вводить в школу новых слов: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность; что нужно оставить старые названия: переместительность, сочетательность, распределительность. Однако это устаревающая точка зрения. Ведь никто не видит вреда в том, что дети на уроках биологии произносят название «дезоксирибонуклеиновая кислота», а на уроках физики говорят о трансформаторах и аккумуляторах. Возражение, что у этой кислоты нет русского, «понятного» названия, неосновательно. Название можно было бы и придумать. Придумали же старые методисты названия: переместительный, сочетательный и распределительный. Это было сделано, чтобы детям было легче. Вот и для ДНК можно придумать понятное название, а аккумулятор можно было бы называть накопителем. Но вряд ли это целесообразно. Во всем мире дезоксирибонуклеиновая кислота называется именно так. И во всем мире, в том числе и в нашей, советской математической науке, переместительный закон называется коммутативным, сочетательный — ассоциативным, а распределительный — дистрибутивным. Всюду, кроме школы. Можно возразить, что дезоксирибонуклеиновая кислота изучается лишь в X классе, а законы действий — в IV. Верно, но ведь ученики IV класса лихо говорят о лазерах и гиперболоидах, о космосе, о лайнерах, совершающих перелеты между городами, и о многом другом. Вряд ли три новых слова их испугают. Да и трудно сказать, так ли уж «понятно» слово «распределительность». Кто-нибудь из детей, возможно, скажет, что скорее равенство $a+(b+c)=(a+b)+c$ можно назвать распределительностью, так как здесь по-разному «распределяются» скобки в левой и в правой частях равенства.

— Простите, что я вас перебиваю,— вмешался Петр Иванович.— Но мне припомнилось, как один шестиклассник назвал ассоциативный закон $a+(b+c)=(a+b)+c$ переместительным: он сказал, что скобки в нем «перемещаются». Так что тут я вполне к вам присоединяюсь.

— Однако школьные традиции живучи, и даже в новых учебниках пока остались старые названия этих законов.

Тот факт, что новая программа предусматривает более серьезное изучение этих законов, чем прежде, далеко не случаен. С их помощью удается привести в систему, казалось бы, разрозненные правила алгебры. Вот мы и хотим, чтобы дети понимали, откуда что берется. Запомнить здесь нужно не так уж много: коммутативные законы сложения и умножения, ассоциативные законы сложения и умножения, дистрибутивный закон и еще чуть-чуть: роль нуля при сложении и роль единицы при умножении. Вот полный перечень всех этих законов:

$$a+b=b+a;\quad ab=ba;$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c;\quad a(bc)=(ab)c;$$
$$a(b+c)=ab+ac;$$

$$a+0=a;\ a\cdot 1=a;$$

$$a+(-a)=0;\ a\cdot\frac{1}{a}=1 \text{ при } a\neq 0.$$

Кстати, Анна Александровна, я могу теперь точно ответить вам, что такое *поле* в математическом понимании. Поле — это такое множество чисел, в котором для любого числа a имеется также противоположное число $-a$, для любого числа $a\neq 0$ имеется обратное число $\frac{1}{a}$ и при этом справедливы все перечисленные законы. Например, все рациональные числа (целые и дробные, положительные и отрицательные) этими свойствами обладают. Поэтому это множество чисел и называют *полем* рациональных чисел.

— Простите, Николай Николаевич, я хоть и инженер — вроде бы с математикой в дружбе,— а одной вещи не понимаю. Где же у вас отмечена роль нуля при умножении? Где записано, что произведение любого числа на нуль равно нулю?

— Видите ли, Юрий Алексеевич, это уже можно доказать на основании перечисленных законов. Кстати, эти законы называют в математике аксиомами поля. Иными словами, равенство $a\cdot 0=0$ не включено в сводку основных законов, в список аксиом, потому что это теорема, и мы сейчас докажем ее. Для этого рассмотрим произведение чисел a и b. Его можно записать так: $ab=a(b+0)$, поскольку $b=b+0$. Но $a(b+0)=ab+a\cdot 0$, согласно дистрибутивному закону. Мы получили, что $ab=ab+a\cdot 0$. Если теперь из обеих частей этого равенства вычесть ab (или, что то же самое, прибавить число $-ab$), то после приведения подобных членов (которое сводится к применению ассоциативного и коммутативного законов сложения и к применению равенства $a+(-a)=0$) мы получим $a\cdot 0=0$, что и требовалось доказать. Я вовсе не хочу сказать, что эту теорему нужно доказывать в I или даже в V классе. Я привел ее доказательство только для того, чтобы чуть-чуть приоткрыть перед вами пути построения алгебры.

— И, если позволите, еще один вопрос,— не унимался Юрий Алексеевич.— При решении уравнений мы часто применяем следующее правило: «Если произведение ab равно нулю, то обязательно хотя бы одно из чисел a или b должно быть равно нулю». Вот я и хочу у вас спросить: это что же, новая аксиома, которую надо будет ввести в старших классах, или это тоже может быть доказано на основании уже перечисленных аксиом?

— Да, да, Юрий Алексеевич, может быть доказано. Вопрос очень интересный, и я с удовольствием приведу доказательство. Итак, пусть $ab=0$. Возьмем число a. Если оно равно нулю, то ваше утверждение, Юрий Алексеевич, справедливо. Значит, нужно лишь рассмотреть случай, когда $a\neq 0$, и доказать, что в этом случае обязательно $b=0$. Так как $a\neq 0$, то можно рассмотреть число $\frac{1}{a}$. Умножим на это число обе части исходного равенства $ab=0$, т. е. напишем $\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0$. Мы уже знаем, что произведение любого числа на нуль равно нулю, так что можно написать $\frac{1}{a}(ab)=0$. Применяя ассоциативный закон, получаем $(\frac{1}{a}\cdot a)b=0$, откуда $(a\cdot\frac{1}{a})\,b=0$, или $1\cdot b=0$, и, значит, $b=0$. Вот и все доказательство.

— Ну что ж, батенька,— вступил в разговор Петр Иванович,— это все очень убедительно. Кстати, я вижу и еще одно применение этих аксиом. Я имею в виду разложение на множители — знаете, сколько мучений оно доставляет школьникам! Эта тема трудна не только тем, кто плохо знает формулы. Даже вынесение за скобки проходило обычно весьма негладко. А между тем вынесение за скобки — это простое применение дистрибутивного закона:

$$ab+ac=a(b+c).$$

Раньше я так ясно себе это не представлял.

— Позвольте, позвольте,— вдруг спохватилась Анна Александровна.— Ваша система аксиом явно недостаточна: в ней же ничего не говорится о вычитании и делении!

— Вы правы, о вычитании и делении ничего не сказано. И тем не менее новых аксиом добавлять не нужно. Начнем с вычитания. Кто мне скажет, как проверить справедливость равенства $20-2=18$?

Посыпались предложения:

— Взять двадцать предметов, а потом отложить два и пересчитать оставшиеся.

— Вычесть из двадцати восемнадцать.

— Прибавить два к восемнадцати.

— Так,— подытожил Николай Николаевич.— Значит, либо проверять на вещах само действие «двадцать минус два», либо проделывать другие операции. Одна из них — снова вычитание, зато другая — сложение. Вот она-то меня и интересует, так как она сводит действие вычитания к сложению, о котором мы уже говорили: $20-2=18$, так как $2+18=20$.

Вообще, *равенство $a-b=c$ означает то же самое, что и равенство $a=b+c$.* Это и есть определение вычитания. Оно позволяет все свойства вычитания доказывать с помощью свойств сложения, так что новых аксиом, говорящих о «законах вычитания», добавлять не нужно.

Для примера докажем дистрибутивность умножения относительно вычитания:

$$x(y-z)=xy-xz.$$

Мы знаем, что $a=b-c$, когда $a+c=b$. Значит, чтобы доказать, что $x(y-z)=xy-xz$, достаточно установить справедливость равенства $x(y-z)+xz=xy$. Однако $x(y-z)+xz=x[(y-z)+z]$, а это выражение, в самом деле, равно xy (так как в квадратных скобках получится y).

Обратите внимание еще на равенство

$$a+(-a)=0.$$

Это равенство находится в вышеуказанном списке аксиом. Оно позволяет рассматривать минус не только как обозначение действия вычитания, но и в совершенно новом смысле. Число $-a$ — это число, противоположное числу a. Если a равно 2, то $-a$ равно -2, а если a равно -3, то $-a$ равно 3. Написанное равенство означает, что $-a=0-a$, т. е. что разность $0-a$ можно записать как $-a$.

Докажем в качестве примера, что

$$a-b=a+(-b).$$

Чтобы это доказать, надо установить, что $[a+(-b)]+b=a$. В самом деле: $[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+[b+(-b)]=a+0=a$. Какие аксиомы сложения использовались в этом доказательстве, вы легко проследите сами.

Доказанное равенство $a-b=a+(-b)$ означает, что вычитание сводится к сложению, и это делает понятным, почему не нужны аксиомы, описывающие свойства вычитания.

— Ну, что же, в этом мы как будто разобрались,— сказала Анна Александровна.— А вот я вас попрошу объяснить, почему нельзя делить на нуль.

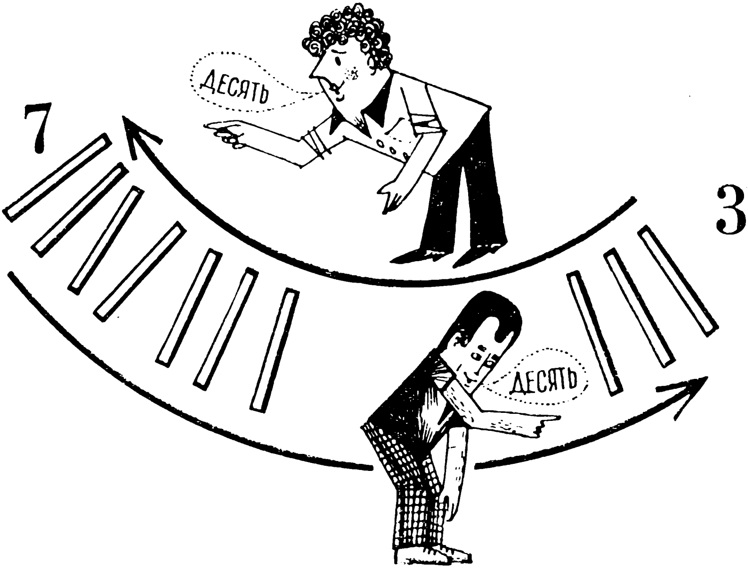
— С удовольствием. Равенство $a:b=c$ означает, что $a=bc$.

— Это так же, как с вычитанием и сложением?

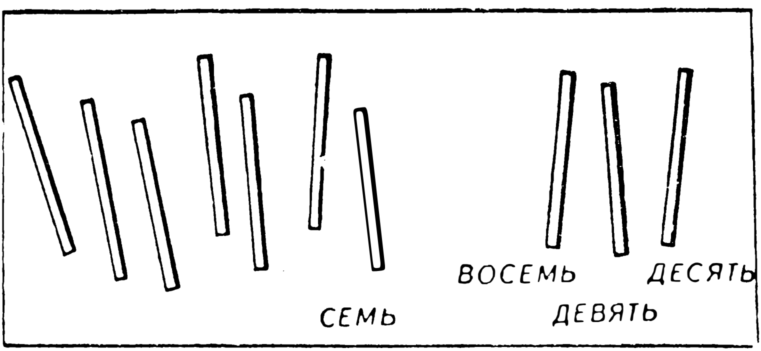
— Да, да. Например, $6:2=3$, так как $2\cdot3=6$; или, скажем, $2:5=0{,}4$, так как $5\cdot 0{,}4=2$. Но, например, $8:0$ нельзя приравнять ни к какому числу. Ведь если бы такое число a существовало, т. е. $8:0=a$, то получилось бы, что $8=0\cdot a=0$. Как видите, это невозможно: 8 ведь не равно нулю. Вот и получается, что «частному» $8:0$ нельзя придать никакого смысла. Правда, если нуль делить на нуль, то такого противоречия не получается. Смотрите: если $0:0=a$, то должно быть $0=0\cdot a$. Все как будто правильно. Но в равенстве $0=0\cdot a$ число a может быть любым. Ведь и $0\cdot 21=0$, и $0\cdot 45=0$, и $0\cdot 0=0$. Поэтому действие $0:0$ не может дать определенного результата. И оно не рассматривается, как бессмысленное. Вот и получается, что если $a\neq 0$, то записи $a:0$ нельзя придать никакого смысла, а действие $0:0$ тоже смысла не имеет. Итак, на нуль делить нельзя.

— То, что вы нам сегодня сообщили,— сказал Юрий Алексеевич,— нам нужно, так сказать, для общего развития. А для чего все это ученикам первых пяти классов? По-вашему получается, что законы арифметических действий нужно учить, так как они пригодятся где-то в дальнейшем и, может быть, для доказательства некоторых совершенно очевидных теоремок, вроде $a\cdot 0=0$.

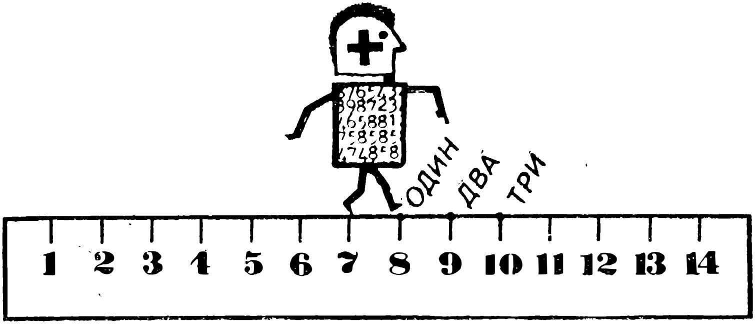
— Ну, нет. Это было бы преждевременным заключением. Сейчас я собираюсь показать вам, что эти законы используются буквально на каждом шагу. И начну прямо с I класса. Там вначале изучаются сложение и вычитание чисел первого десятка, т. е. однозначных чисел, а затем — первой сотни, т. е. двузначных чисел. Результат сложения чисел первого десятка поясняется подсчетом предметов. Сколько будет $7+3$? Отсчитываем семь палочек. Затем отсчитываем отдельно три палочки. Получившиеся кучки из палочек объединяем. Пересчитываем, сколько их всего. Вот и получается, что $7+3$ будет 10. Этот способ можно усовершенство-



7
ДЕСЯТЬ
3
ДЕСЯТЬ



ВОСЕМЬ
ДЕСЯТЬ
СЕМЬ
ДЕВЯТЬ



вать: отсчитав семь палочек, прибавить к ним три, присчитывая их: «восемь, девять, десять». Но это уже следующий этап, так как здесь число 3 не фигурирует в явном виде, и ученик должен параллельно с отсчетом «восемь, девять, десять» вести про себя, внутри себя, отсчет «один, два, три», иначе он не остановится вовремя. Так что при этом способе играют большую роль навыки счета.

Наряду с палочками важнейшим инструментом для счета должна стать линейка. Нет, не логарифмическая, а самая обычная масштабная линейка с сантиметровыми делениями. С ее помощью к семи прибавить три легче, чем устным присчитыванием. Делается это так: отмечаем первое слагаемое 7 и от него шагаем на три единицы вправо. Основное облегчение в том, что при таком способе считать можно не «восемь, девять, десять», а «один, два, три». Конечно, для этого нужно знать две важные вещи: что числа обозначаются точками на прямой и что чем больше число, тем правее его обозначение.

И уже здесь, на этом этапе, широко применяется коммутативность сложения. Согласитесь, если вам дадут пример 3+29, вы будете не к трем присчитывать двадцать девять, а к двадцати девяти три. И детей мы учим пример $2+6$ решать не присчитыванием шести единиц к двум: «три, четыре, пять, шесть, семь, восемь», а двух единиц к шести: «семь, восемь». Но для этого приходится пользоваться коммутативностью сложения: $2+6=6+2$. В том, что этот закон справедлив, дети убеждаются уже при первом способе вычислений — на палочках. Прикладывая к шести палочкам две, а затем наоборот — к двум палочкам шесть, они оба раза получают одну и ту же кучку палочек. Убедившись, что закон $a+b=b+a$ справедлив, дети применяют его, чтобы выполнить сложение наиболее удобным способом. В конце концов, в результате частого применения, в результате большой тренировки, дети постепенно выучивают такую таблицу сложения:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	4	5	6	7	8	9	10		
4	5	6	7	8	9	10			
5	6	7	8	9	10				
6	7	8	9	10					
7	8	9	10						
8	9	10							
9	10								

Очень полезно поработать с такой табличкой. Можно рассмотреть, как устроены строки и столбцы, с чего начинается каждый столбец, почему каждое следующее число в столбце на единицу больше предыдущего, почему одни строки длиннее, другие короче. А кроме того, можно обратить внимание на диагонали, заметив, что именно по диагонали расположены внутри таблицы повторяющиеся числа. Почему число 4 повторяется внутри таблицы три раза? Потому что $4=1+3$, $4=2+2$, $4=3+1$. Как видно, две из этих трех записей очень похожи. В них проявил себя коммутативный закон сложения.

В этой таблице выявлен состав каждого числа. Например, число 6 встречается в ней пять раз, так как $6=5+1=4+2=3+3=2+4=1+5$. Эта задача — разбиение числа на два слагаемых — очень важная.

Весьма существенно, что эту же табличку можно использовать и для вычитания чисел. Например, $10-4=6$, так как 10 стоит на перекрестке 4 и 6. Мы знаем, в чем тут секрет: $10=4+6$, и поэтому $10-4=6$. Вот и первоклассника мы учим связи между сложением и вычитанием. Мы объясняем ему, что в нашем примере нужно искать 10 в той же строке, где слева стоит четверка, а потом посмотреть, что над этой десяткой. Конечно, можно вычитать и не по табличке, а снова на палочках, или на линейке, или устным отсчитыванием. Но в любом случае ученик должен видеть связь между высказыванием $10-4=6$ и высказыванием $10=4+6$.

Но как узнать, понимает ли он эту связь? Для этого надо время от времени спрашивать, как проверяется вычитание,— до тех пор, пока вы не убедитесь, что это прочно усвоено. Напомню еще раз, что каждое вычитание можно проверить сложением: правильность выполнения действия $a-b=c$ проверяется через $b+c=a$.

До сих пор мы говорили о сложении внутри первого десятка, т. е. о таком сложении, когда не только слагаемые, но и сумма не превышает десяти. Но очень скоро арсенал первоклассника расширяется: он учится складывать любые числа от 1 до 10, а также прибавлять и вычитать нуль. Тем самым он овладевает содержанием правила $a+0=a$, откуда немедленно получается $a-0=a$. Замечу, что некоторые педагоги и методисты трактуют эти правила как «прибавление ничего» и «вычитание ничего». Эта трактовка, однако, очень вредна. Она приучает школьника к мысли, что нуль — это ничто. Между тем нуль — это число, играющее в математике важную роль. Так что подобные разъяснения недопустимы. Это — типичный пример вульгаризации математики. Вместо этого нужно лишь предложить детям запомнить, что прибавление нуля не изменяет слагаемого: если к какому-нибудь числу прибавить нуль, то получится исходное число. Это и будет рассказ об аксиоме $a+0=a$ для I класса.

Выходя за пределы первого десятка, дети прежде всего учатся складывать любые числа от 0 до 10. При этом сумма может принимать значения от 0 до 20. Таблица сложения становится теперь более громоздкой. А палочки считать или с линейкой работать тоже хлопотно: можно ошибиться из-за длительных присчитываний. Ясно, что ребенок должен научиться устному счету в этих пределах. Посмотрим, как это делается.

Как мы, взрослые, стали бы искать в уме сумму $250+56$? Вероятно, сначала мы прибавили бы к 250 число 50. Будет 300. Да еще 6 — будет 306. Вот так:

$$250+56=250+(50+6)=(250+50)+6=300+6=306.$$

— Как видите,— продолжал он,— здесь использован ассоциативный закон сложения: $a+(b+c)=(a+b)+c$, причем он применен в случае, когда $a=250$, $b=50$ и $c=6$. Примерно так же овладевают счетом в пределах 20 первоклассники.

Как, например, объяснить им, что $7+5=12$? Вот тут-то и придет на помощь ассоциативность сложения. Надо прибавить к 7 не сразу 5, а сначала 3 и затем 2:

$$7+5=7+(3+2)=(7+3)+2=10+2=12.$$

Однако как ребенок догадывается, что 5 надо записать в виде $3+2$, а не, скажем, $4+1$? Для этого дети должны прочно усвоить состав каждого числа до 10, и особенно состав числа 10. Тогда операции, подобные этой, будут выполняться почти автоматически.

Но, предположим, у ребенка ничего не получается. Пусть, например, он никак не может сосчитать, сколько будет $8+6$. Или, может быть, он нашел на палочках, что это будет 14, но не может объяснить, почему должен получиться именно такой ответ. Вы можете направить его на путь истинный такой последовательностью вопросов:

$8+6$ — это больше, чем 10?

Что нужно прибавить к 8, чтобы получилось 10?

А нам сколько нужно прибавить к 8?

После этого вы предлагаете прибавить 6 к 8 не сразу, а по частям: вначале 2, а потом все остальное. Вот и получится:

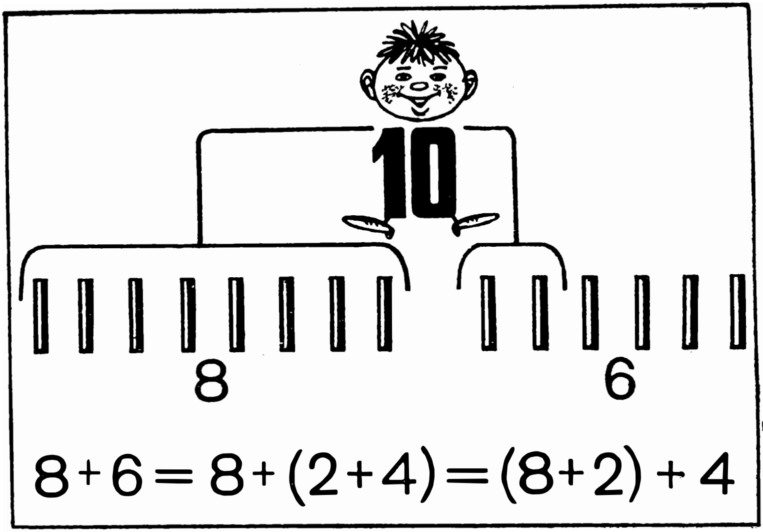
$$8+6=8+(2+4)=(8+2)+4=10+4=14.$$

Если вы будете терпеливо повторять с ребенком эту последовательность умственных действий при каждом затруднении, он постепенно усвоит ее, и притом вполне сознательно.

— Так сколько же таких правил нужно усваивать, и притом вполне сознательно? — спросил Григорий Андреевич.

— Приятно заметить, что по новой программе ребенку придется усвоить всего четыре таких правила для всех примеров на сложение и вычитание. И это вместо двух десятков различных правил старой программы.

Эти четыре правила говорят о прибавлении числа к сумме и суммы к числу, а также о вычитании числа



из суммы и суммы из числа. Вот первые два правила:

Чтобы прибавить сумму к числу, можно прибавить к этому числу одно из слагаемых, а потом к результату прибавить второе слагаемое.

Чтобы прибавить число к сумме, можно прибавить его к одному из слагаемых, а затем к получившемуся результату прибавить второе слагаемое.

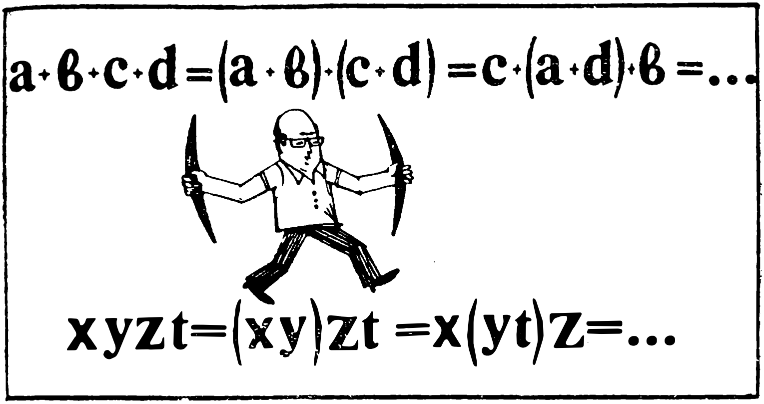
В буквах в общем виде эти правила выглядят так:

$$a+(b+c)=(a+b)+c;$$

$$(a+b)+c=(a+c)+b.$$

Первая строчка — это просто ассоциативный закон, а вторая получается так,— и Николай Николаевич написал:

$$(a+b)+c=(b+a)+c=b+(a+c)=(a+c)+b.$$



— Здесь я воспользовался сначала коммутативностью сложения, затем ассоциативностью и, наконец, снова коммутативностью. Эти формулировки могут показаться несколько сложными. Следует, однако, заметить, что прямым следствием коммутативного и ассоциативного законов является следующая теорема: *«Любую сумму, состоящую из конечного числа слагаемых, можно писать, как угодно меняя порядок слагаемых и как угодно их группируя».*

Один из примеров на применение этого правила мы уже имели. Рассмотрим еще пример, причем решим его двумя способами, пользуясь обоими указанными выше правилами:

$$7+8=7+(3+5)=(7+3)+5=10+5=15;$$

$$7+8=(2+5)+8=(2+8)+5=10+5=15.$$

С помощью этих правил можно складывать и не только однозначные числа: $13+5=(10+3)+5=10+(3+5)=10+8=18.$

Еще два правила касаются вычитания. Эти правила таковы:

$$(a+b)-c+(a-c)+b;$$

$$a-(b+c)=(a-b)-c.$$

Их легко объяснить ребенку, манипулируя с кучками предметов, кучками палочек. Ну а вам я предложу в сегодняшней «домашней работе» доказать их в общем виде. Нужны же эти правила в таких, скажем, примерах:

$$12-5=(10+2)-5=(10-5)+2=5+2=7;$$

$$14-6=14-(4+2)=(14-4)-2=10-2=8.$$

Разумеется, с таким же успехом можно было бы в первом примере применить второе правило, а во втором — первое.

Эти приемы сложения и вычитания применяются и при вычислениях столбиком. Так, в примере

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}467\\859\end{array}\\ \hline 1326\end{array}$$

полные вычисления используют упомянутое ранее обобщение коммутативного и ассоциативного законов сложения.

Вот эти вычисления:

$$467+859=(460+7)+(850+9)=(460+850)+$$
$$+(7+9)=\ldots$$

Николай Николаевич прервал свои выкладки и сказал:

— Как видите, применяя ассоциативный и коммутативный законы сложения, мы получили, что можно отдельно складывать десятки и отдельно единицы. При сложении столбиком учащийся обычно не задает себе вопроса «почему так можно делать?», а сразу именно так и поступает: складывает отдельно единицы с единицами. Будем вычислять дальше:

$$(460+850)+(7+9)=(460+850)+16=(460+850+10)+6=(46+85+1)10+\mathbf{6}.$$

Здесь кроме ассоциативного закона применен еще и дистрибутивный. Две цифры я написал жирнее, чем другие. Это те самые «шесть пишем, один в уме», которые говорит про себя (а на первых порах вслух или шепотом) учащийся. Иными словами, в разряде единиц получается 6 и, кроме того, к числу десятков надо прибавить еще единицу («один в уме»). Теперь подсчитаем число десятков:

$$46+85+1=(40+6)+(80+5)+1=(40+80)+(6+5+1)=(40+80)+12=(40+80+10)+2=(4+8+\mathbf{1})10+\mathbf{2}.$$

Мы получили следующий шаг при сложении столбиком: два пишем, один в уме.

Иначе говоря, результат сложения теперь уже выглядит так:

$$467+859=[(4+8+1)10+2]10+6=(4+8+1)100+26.$$

Остается найти число сотен: $4+8+1=13$, и результат готов: $467+859=1326$. Как видите, законы сложения и умножения нужны начиная с I класса, нужны они и при действиях с многозначными числами в III и следующих классах.

С помощью небольшого числа законов сложения можно создать в сознании младшего школьника действительную основу, на которую он всегда сможет опереться, если забудет какой-нибудь конкретный факт. То же можно сказать и об умножении. Раньше школьники самым безбожным образом путали умножение числа на сумму и умножение числа на произведение, делая такие, например, вопиющие ошибки:

$$a(bc)=(ab)\cdot(ac),\ a(b+c)=ab+c.$$

Опыт преподавания по новой программе подтверждает, что эти ошибки происходили от отсутствия знания ассоциативного закона умножения и дистрибутивного закона. В самом деле, что мог противопоставить учитель этим ошибкам ученика, если правила не были сформулированы в кратком и сжатом виде? Теперь же учитель имеет возможность показать запись этих законов в виде формул на доске, в таблице, в учебнике:

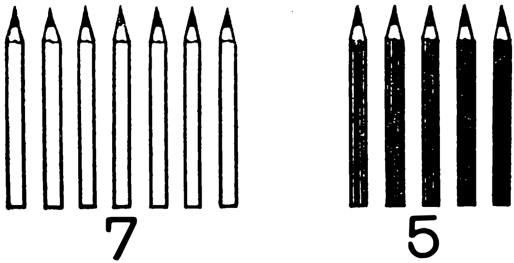
$$a(bc)=(ab)c,\quad a(b+c)=ab+ac.$$

Он может предложить ученику сопоставить его выкладки с этими законами.

— Еще один вопрос,— перебил Петр Иванович.— Вы показали нам, как убедить детей в справедливости коммутативного закона сложения и равенства $a+0=a$. А как пояснить им остальные законы арифметических действий?

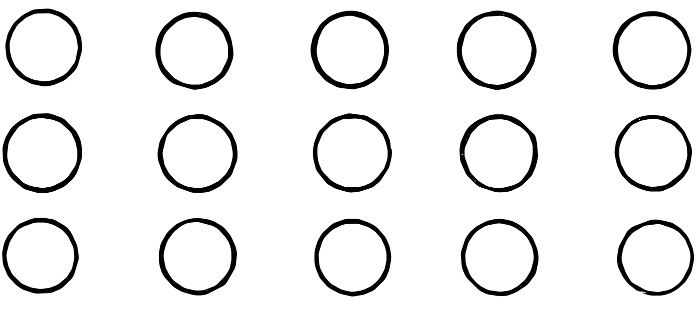
— Ассоциативность сложения поясняется на группах предметов. Если в одной кучке у вас 7 зеленых карандашей, в другой же 5 карандашей — 3 синих и 2 красных, то, очевидно, безразлично, каким способом подсчитывать общее число карандашей: присчитать к 7 все 5 сразу или сначала присчитать 3 синих, а потом, после передышки, 2 красных. Вот и вышло, что $7+(3+2)=$ $=(7+3)+2$.

Теперь об умножении. Умножение вводится как краткая запись сложения одинаковых чисел: $8\cdot3=$ $=8+8+8$, $1\cdot5=1+1+1+1+1$. Произведение числа на единицу, скажем $5\cdot1$, нуждается в особом определении, так как в записи $5\cdot1=5$ нет никакой суммы, нет сложения одинаковых слагаемых. Мы, *по определению,* считаем, что $a\cdot1=a$. Это аналогично равенству $a+0=a$.



$$7+5=7+(3+2)=(7+3)+2$$

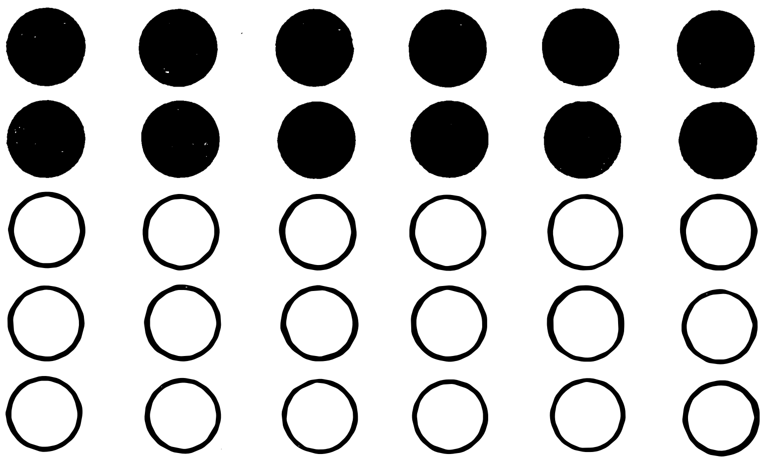
Коммутативный закон умножения $ab=ba$ легче всего пояснить, если одно из чисел (скажем, b) равно единице. Тогда, например, $4\cdot 1=4$ по принятому соглашению, а $1\cdot 4=1+1+1+1=4$ в силу определения произведения как суммы одинаковых слагаемых. Итак, $4\cdot 1=4$ и $1\cdot 4=4$, т. е. $4\cdot 1=1\cdot 4$; вообще, $a\cdot 1=1\cdot a$. А вот как объяснить, например, что $3\cdot 5=5\cdot 3$? Для этого мы построим такую фигуру. В ней 5 столбцов по 3 кружка; значит, всего $3+3+3+3+3$ кружков, т. е. $3\cdot 5$ кружков.



Но можно подсчитать кружки и иначе: в этой фигуре три строчки по пять кружков, значит, всего $5+5+5$, т. е. $5\cdot3$ кружков. И так как оба эти произведения обозначают одно и то же число кружков, то $5\cdot3=3\cdot5$.

Аналогично разъясняется и дистрибутивный закон. Например, чтобы пояснить равенство $6\cdot(2+3)=6\cdot2+6\cdot3$, построим такую фигуру. Здесь 6 столбцов, причем в каждом столбце имеется $2+3$ кружков. Значит, всего здесь $6(2+3)$ кружков. Но можно сказать, что здесь 6 столбцов по 2 черных кружка и 6 столбцов по 3 белых кружка, т. е. что здесь $6\cdot2$ черных кружков и $6\cdot3$ белых кружков, а всего $6\cdot2+6\cdot3$ кружков. Вот и получилось, что $6(2+3)=6\cdot2+6\cdot3$.

И наконец, ассоциативный закон умножения. Поясним его на примере: $3\cdot(5\cdot2)=(3\cdot5)\cdot2$. Что такое $5\cdot2$? Это $5+5$. Значит, $3\cdot(5\cdot2)=3\cdot(5+5)$, а это, согласно дистрибутивному закону, равно $3\cdot5+3\cdot5$. Мы получили сумму двух одинаковых слагаемых, каждое из которых



равно $3\cdot5$, т. е. эту сумму можно записать как $(3\cdot5)\cdot2$. Вот и получилось, что $3\cdot(5\cdot2)=(3\cdot5)\cdot2$.

В заключение беседы Николай Николаевич вручил своим слушателям очередное задание.

1. Доказать, что:

а) $a+(b-a)=b$;

б) $(a+b)-c=(a-c)+b$;

в) $a-(b+c)=(a-b)-c$;

г) $a-a=0$;

д) если $a-b=0$, то $a=b$;

е) если $a=b$, то $a+c=b+c$ и $ac=bc$;

ж) если $a+c=b+c$, то $a=b$;

з) $a(-b)=-ab$;

и) $(-a)\cdot(-b)=ab$;

к) если $ac=bc$ и $c\neq0$, то $a=b$.

2. Доказать, что справедливы следующие равенства (в которых числа b и d предполагаются отличными от нуля):

а) если $ad=bc$, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

б) $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$

(основное свойство дроби);

в) $\frac{a}{b}\cdot b=a$;

г) $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$;

д) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

е) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$;

ж) $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$.

3. Ваш сын вычисление суммы $\frac{3}{8}+\frac{1}{16}$ провел так:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3\cdot 16+1\cdot 8}{8\cdot 16}=\frac{48+8}{128}=\frac{56}{128}=\frac{7}{16}.$$

Что вы ему скажете?

4. Ваш сын не понимает, почему деление числа на дробь $\frac{a}{b}$ всегда можно заменить умножением того же числа на обратную дробь $\frac{b}{a}$ (где оба числа a и b отличны от нуля). Как вы ему это объясните?

Беседа четвертая. «Новое в школьной геометрии»

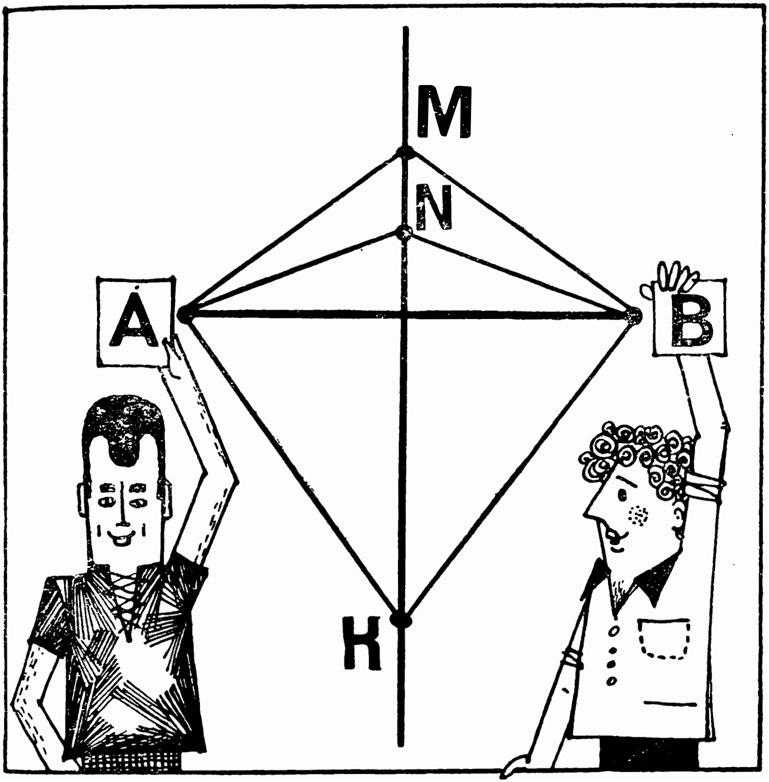
— Сегодня наша тема,— начал Николай Николаевич,— точечные множества, или геометрические фигуры. Вот видите, уже здесь ощущается преимущество языка новой программы перед старой. Геометрия, изолированный ранее курс, стала теперь ближе к алгебре в понимании ребенка: алгебра изучает числовые, а геометрия — точечные множества. Стали естественнее определения. Раньше ученик говорил, что геометрия — это наука о геометрических фигурах, а геометрические фигуры — это предмет геометрии. За пределы этого порочного круга он выйти не мог. Сейчас у него есть определение геометрической фигуры через понятие множества и понятие точки.

Например, я уже упоминал о так называемых геометрических местах точек. Этот термин укрепился в геометрии со времен Аристотеля. Он считал, что поскольку геометрическая точка не имеет размеров, то, сколько бы мы точек ни «прикладывали» друг к другу, ничего, кроме точки, и не получим. Значит, линию, по мнению Аристотеля, нельзя «составить» из отдельных точек.

Отсюда и возник тезис о том, что линия не может считаться состоящей из точек, а лишь представляет собой м е с т о, где могут находиться точки. Вот и стали в геометрии называть линии, встречающиеся при решении задач на построение, *геометрическими местами точек*. Эти представления, идущие от идеалистических течений древнегреческой философии, давно преодолены в математике. Мы сейчас считаем любую линию, любую поверхность состоящей из точек, т. е. считаем ее м н о ж е с т в о м точек. Отрезок, луч, прямая линия, круг, окружность, угол и другие фигуры представляют собой бесконечные множества точек.

В последнее время и в школе стали рассматривать «геометрические места» с более современной точки зрения — как множества точек, обладающих некоторым свойством. Но вопрос этот оставался трудным для учащихся, и не случайно. Если геометрическое место точек — это просто множество точек, то один из терминов лишний. Вместе с тем в описании геометрического места есть вреднейшие слова: иногда говорят, например, что геометрическое место точек — это множество точек, о б л а д а ю щ и х н е к о т о р ы м с в о й с т в о м. Получается, что бывают множества, элементы которых обладают некоторым общим свойством, но бывают и такие множества, элементы которых никаким общим для них свойством не обладают. Это разрушает правильное представление о множестве как о собрании элементов по некоторому закону, т. е. по признаку, свойству, общему для всех его элементов. Достаточно сказать, что все точки, составляющие множество M, обладают уже тем общим свойством, что они принадлежат этому множеству. Здесь виден идейный вред понятия геометрического места точек.

Кроме того, «геометрические места» способствуют укоренению одной существенной ошибки. Есть, например, такая теорема: «Множеством точек, одинаково



удаленных от концов отрезка, является перпендикуляр к этому отрезку, проведенный через его середину»,— Николай Николаевич сделал чертеж.

— Здесь отмечено несколько точек на перпендикуляре, и нужно доказать, что каждая из них одинаково удалена от концов отрезка, что, вообще, каждая точка перпендикуляра одинаково удалена от точек A и B, т. е. $MA=MB$, $NA=NB$, $KA=KB$ и т. д. Но предположим, мы это доказали. Дальше что? Многие ученики считают, что дальше ничего, что теорема доказана. Это — распространеннейшая ошибка. Разберем, в чем она заключается. Мы хотели доказать, что проведенный перпендикуляр и множество точек, одинаково удаленных от концов этого отрезка,— это одно и то же. А доказали пока лишь то, что каждая точка перпендикуляра одинаково удалена от концов отрезка, т. е. принадлежит множеству точек, одинаково удаленных от концов отрезка. А верно ли обратное, т. е. каждая ли точка, одинаково удаленная от концов отрезка, лежит на этом перпендикуляре?

Это вопрос, требующий отдельного рассмотрения, вопрос, без решения которого доказательство не может считаться законченным.

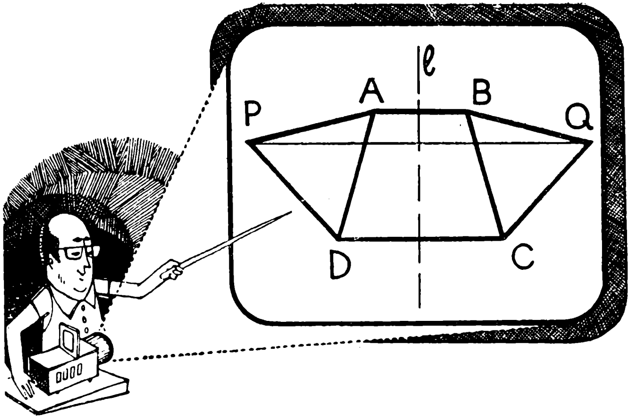
Ученики не очень хорошо улавливают эту мысль, но если объяснить ее с более общих позиций — не через пресловутые «геометрические места», а через множества,— то все это оказывается куда более понятным. Нам нужно доказать равенство (т. е. совпадение) двух множеств: P равно Q. В нашем случае P — это множество точек, лежащих на перпендикуляре; Q — это множество всех точек, одинаково удаленных от концов данного отрезка. Но что такое равные множества? Это множества, состоящие из одних и тех же элементов, одних и тех же точек. Итак, нужно доказать, что каждая точка множества P принадлежит множеству Q и что каждая точка множества Q принадлежит множеству P. А пока доказано лишь то, что каждая точка множества P принадлежит множеству Q, т. е. что каждая точка перпендикуляра одинаково удалена от концов отрезка. Нужно еще доказать, что каждая точка множества Q принадлежит множеству P, т. е., что каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, принадлежит этому перпендикуляру. Вот и вся премудрость.

Но все же только для этого, только для правильного понимания «геометрических мест», да еще для определения геометрической фигуры вряд ли стоило бы использовать множества в геометрии. Здесь преследуются более глубокие цели.

Дело в том, что курс геометрии по новой программе с самого начала и до последнего, X класса пронизан идеей широкого применения геометрических преобразований, которые служат подлинным фундаментом нового курса геометрии. Но добиться правильного понимания существа геометрических преобразований, добиться сознательного и успешного применения их при решении геометрических задач и доказательстве теорем невозможно без овладения школьниками языком теории множеств. Вот и получается, что учение о множествах — фундамент всей геометрии по новой программе. Это можно считать первой основной отличительной чертой новой программы.

Я уже упомянул,— продолжал Николай Николаевич,— о второй основной черте — о широком использовании геометрических преобразований. Рассмотрим этот вопрос подробнее. По существу, речь идет о переосмыслении всех геометрических представлений учащихся, о переводе всего геометрического мышления, мировоззрения учащихся на новые рельсы.

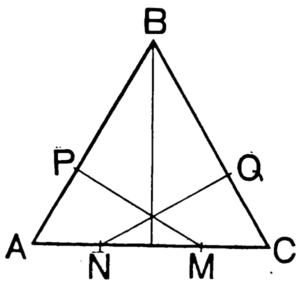
Чтобы было ясно, о чем идет речь, рассмотрим такую задачу: «На боковых сторонах равнобочной трапеции построены вне ее равносторонние треугольники и третьи их вершины соединены отрезком; надо доказать, что этот отрезок параллелен основаниям трапеции». Вот чертеж, иллюстрирующий эту задачу. Раньше учащиеся для ее решения рассматривали углы, треугольники; решение было довольно длинным. Между тем факт, который нужно доказать, очень прост, нагляден и, по существу, заранее очевиден. И убедить в его справедливости можно любого ученика, знающего, что такое трапе-



ция. Надо провести прямую l через середины оснований трапеции — она на рисунке проведена пунктиром — и перегнуть чертеж по этой прямой. Тогда левая и правая половины чертежа совместятся и сразу станет ясно, что прямые AB, CD и PQ перпендикулярны l и потому параллельны между собой. В этом рассуждении шла речь о перегибании чертежа по прямой l, т. е. об *осевой симметрии* — симметрии относительно прямой l. Это одно из очень важных и часто применяемых геометрических преобразований.

Идея заключается в том, чтобы эту наглядность чертежа, эту бросающуюся в глаза его симметричность принять не отдельно стоящей от доказательства (видишь одно, а рассуждаешь совсем по-другому!), а использовать эту симметричность чертежа как основу доказательства. Это очень существенно. Часто ведь бывает так, что ученик не понимает связи между тем, что он доказывает, и тем, как это делается. Так рождается формализм в знаниях, оторванность их от реального содержания. Важно сделать чертеж подлинной опорой для ученика.

Вот еще пример. На основании равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AM и CN, а на боковых сторонах — равные отрезки AP и CQ. Надо доказать, что отрезки PM и QN пересекаются на высоте этого треугольника. С точки зрения обычной наглядности, простого здравого смысла все ясно: левая и правая половины чертежа симметричны относительно высоты, так что прямые PM и QN симметричны и, значит, пересекаются на высоте. А попробуйте доказать «старыми» методами: одна пара равных треугольников, вторая, третья... Сложновато! Можно привести такие же примеры, относящиеся и к другим геометрическим преобразованиям: повороту, центральной симметрии, параллельному переносу. И эти примеры вовсе не специально подобраны: большинство задач проще решается с помощью преобразований, чем с помощью традиционных «цепочек» равных треугольников. Правда, такой способ решения непривычен (и, может быть, поэтому не сразу оценивается учителями и родителя-



ми), но ведь учащиеся-то будут только это изучать, для них это будет основной способ геометрического рассуждения, это будет их «геометрическое мировоззрение».

А для того, чтобы учащиеся действительно усвоили эту новую (новую не для них, а для нас!) методику решения задач и рассуждения, нужно постепенно и возможно раньше знакомить их с этими идеями, с примерами симметрии и других геометрических преобразований. Это и осуществлено в новой программе. Уже в пятых классах учащиеся узнают обо всех основных геометрических преобразованиях плоскости и применяют их для решения задач и доказательства теорем. Такова вторая линия построения курса геометрии по новой программе.

А третья — и здесь новая программа вполне едина как по отношению к алгебре, так и к геометрии — состоит в возможно более раннем введении геометрических понятий в школе. Мы начинали геометрию в VI классе, и это очень поздно. Начинать нужно с I класса. Опыт показывает, что ничего недоступного в этом нет. В начальной школе от ребенка требуется немного: вырезáть геометрические фигуры, чертить их, узнавать. В IV и V классах ребята уже начинают приучаться к элементам рассуждений в геометрии: я упоминал, что в V классе доказывается теорема о сумме углов треугольника; в IV — о равенстве вертикальных углов. А с VI класса начинается систематический курс. Но вы представляете себе, насколько подготовленными будут наши шестиклассники для такого курса? Чтобы представить это более отчетливо, я расскажу подробнее, в каком классе что проходится. Это вам важно знать как родителям.

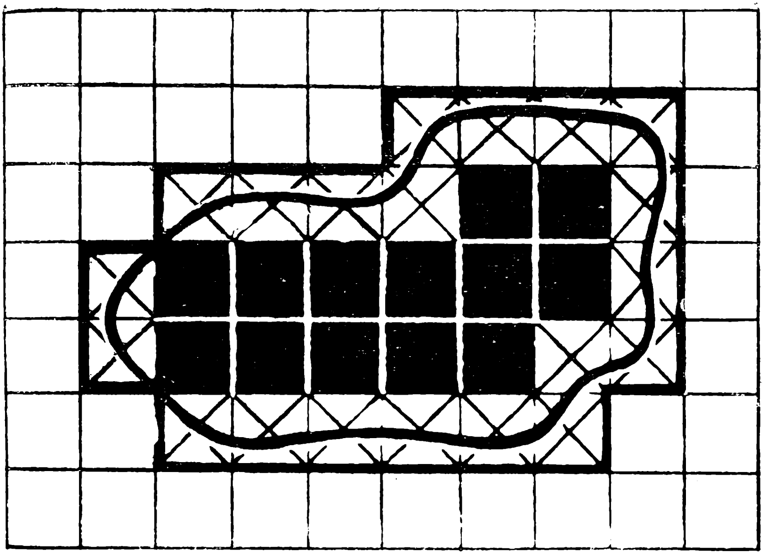
Начнем с I класса. Здесь ребенок учится различать и изображать прямые, кривые и ломаные линии, отрезки прямой, многоугольники, измерять длину отрезка линейкой, выяснять, на сколько один отрезок больше другого (это называется разностным сравнением отрезков в отличие от кратного сравнения, при котором выясняют, во сколько раз один отрезок больше другого). Подчеркиваю, что собственно вычислительных и измерительных задач в I классе немного и все они выполняются с помощью линейки. Кроме того, первоклассник должен знать, как сгибами наметить на листе бумаги прямой угол, и должен уметь отличить прямой угол от непрямого. Наконец, он знакомится с понятием прямоугольника и квадрата и учится изображать их на бумаге в клетку.

Перейдем ко II классу. Здесь новый материал по геометрии таков: увеличение и уменьшение отрезка в несколько раз, кратное сравнение отрезков, деление отрезка на равные части, понятия острого и тупого угла, знакомство с видами треугольников: остроугольным, прямоугольным, тупоугольным, разносторонним, равнобедренным и равносторонним. Кроме того, ученик должен уметь измерить периметр многоугольника, т. е. найти длину ломаной, ограничивающей многоугольник. Эта операция сводится к измерению отрезков: нужно измерить линейкой каждое звено ломаной (т. е. каждую сторону многоугольника), а затем сложить результаты. Далее, мы учим второклассника вычислять периметр прямоугольника с использованием его свойств: измеряются только две соседние стороны, а затем сумма их длин удваивается. Во II классе дети также учатся владеть циркулем: они чертят окружность и должны понимать, что такое окружность, круг, центр окружности, радиус окружности. Они должны уметь разделить круг на две и на четыре равные части перегибанием листа бумаги. Особо нужно оговорить, в каком смысле дети должны понимать, что такое центр, радиус и т. д. Здесь пока еще не идет речь о знании точного текста определения и умении применить его. Пока проверка понимания идет так. Ученику говорят: отступи от последней строки, написанной тобой в тетради, на 10 клеток вниз, а от левого края листа на 8 клеток и в этом месте поставь точку; обозначь эту точку буквой *О*; начерти окружность радиусом 3 *см* с центром в точке *О;* прочерти какой-нибудь радиус этой окружности; обозначь второй конец радиуса буквой *А*; напиши, принадлежит ли точка *А* начерченной окружности, принадлежит ли она начерченному кругу; принадлежит ли точка *О* начерченной окружности, начерченному кругу; отметь на чертеже точку *В,* принадлежащую кругу, но не принадлежащую окружности. Если все это выполняется правильно,— значит, понимание достигнуто.

Теперь обратимся к геометрическому материалу III класса. Здесь происходит первоначальное знакомство с понятием площади. При этом площадь произвольной фигуры отыскивается палеткой, а площадь прямоугольника вычисляется также и по формуле. Я расскажу об этом подробнее.

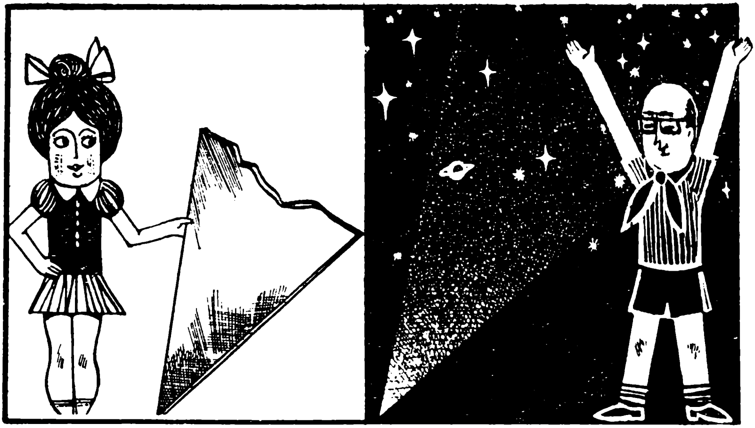
Видите ли, площадь фигуры — это, с интуитивной точки зрения, характеристика того, как много места занимает фигура, насколько большую часть плоскости она покрывает. Площадь характеризуется числом единичных квадратов, помещающихся в этой фигуре. Поэтому самый естественный метод отыскания площади данной фигуры — наложение на нее квадратной сетки.— Николай Николаевич нарисовал фигуру неправильной формы и изобразил наложенную на нее сетку.

— Лист прозрачной бумаги с нанесенной на нее сеткой и есть палетка,— сказал он.— Давайте подсчитаем, какая площадь у фигуры на моем рисунке. Полных квадратов внутри фигуры тринадцать, неполных — двадцать. Неполные квадраты содержатся в фигуре одни больше, чем наполовину, другие меньше, чем наполовину. Будем считать, что двадцать неполных квад-



ратов — это приблизительно десять полных. Итого получаем 13+10, т. е. 23 единицы площади. Если бы это была, например, сантиметровая сетка, то ответ был бы таков — площадь фигуры примерно равна 23 *кв. см*. Можно повторить измерение, накладывая сетку по-другому. И если получатся не вполне одинаковые результаты, то не следует настаивать на одном из них: все они приближенные. При таком изложении ученики хорошо воспринимают формулу площади прямоугольника. Прямоугольники подбираются в III классе таким образом, чтобы длины их сторон выражались целыми числами: 1, 2, 3, 4 *см* и т. д.

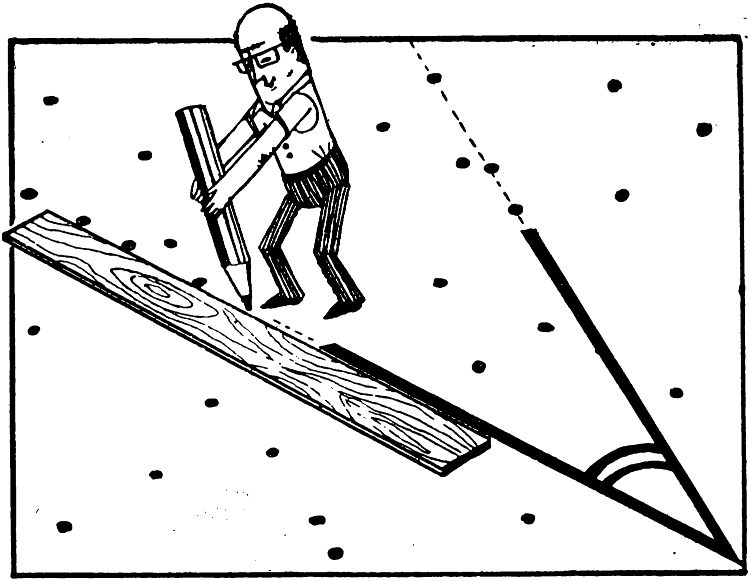
Кроме изучения площадей ученики III класса повторяют пройденное, решают новые задачи с применением ранее изученного материала. Например, решается



задача деления окружности циркулем на 6 частей и на 3 части.

Дальше — IV класс. Здесь рассматриваются такие геометрические понятия, как точка, отрезок, прямая, луч, ломаная, многоугольник, его периметр, угол и все его виды, биссектриса угла, градусное измерение углов, смежные и вертикальные углы, перпендикулярные прямые, расстояние от точки до прямой. Изучается также понятие равенства фигур. Кроме того, впервые рассматривается пространственное тело — прямоугольный параллелепипед — и понятие объема.

Здесь очень много такого, о чем говорилось в начальной школе. Но подходы меняются. Знания, которые получил ребенок в начальной школе, обычно сводились к практическому оперированию с геометрическими фигурами — к навыкам работы с ними. А нам нужно постепенно добираться до логики геометрии, до использования симметрии и других геометрических преобразований для установления свойств фигур, для доказательства основополагающих геометрических фактов.



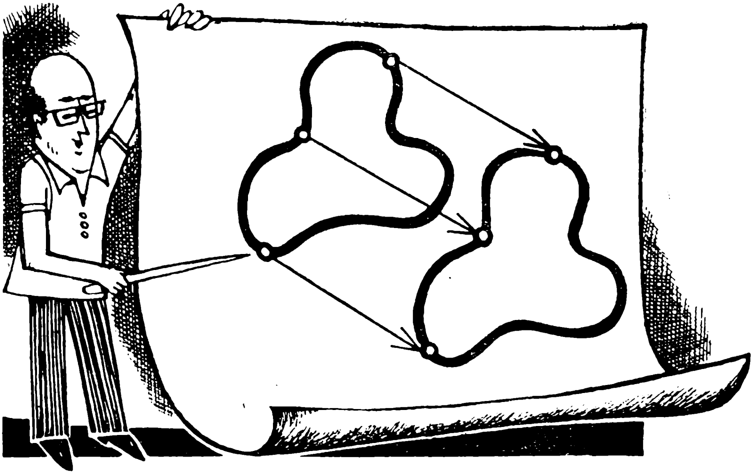
Возьмем, к примеру, понятие угла. Для третьеклассника угол — это нечто нарисованное или, скажем, вырезанное из бумаги. Для четвероклассника угол — это абстрактное геометрическое понятие, а вовсе не его бумажная или рисованная модель. Математический угол бесконечен. Это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки. Всякая же материальная модель угла поневоле конечна. Вот мы и приучаем детей в IV классе мысленно продолжать модель угла. Вот начертите угол,— и он передал карандаш Григорию Андреевичу. Тот очень аккуратно провел два отрезка с общей концевой точкой.

— Да. Именно так мы всегда и изображаем угол. Но дополните этот чертеж новыми точками.— Николай Николаевич поставил на чертеже несколько точек.—

Угол — это фигура, т. е. множество точек. Спрашивается, какие из отмеченных точек являются его элементами, принадлежат этому углу? Для решения вопроса придется прочертить лучи — стороны угла — до краев листа. И вот ответ на вопрос о формировании абстрактного понятия «угол». Ученик, продолжая стороны, будучи вынужден это делать не по указанию учителя, а исходя из смысла задачи, начинает овладевать абстрактным понятием бесконечности. То же относится и к работе с бесконечным лучом и с бесконечной прямой. Кроме того, прибегая примерно к таким же методам, мы добиваемся понимания того, что у математической линии нет толщины, а у точки вообще нет никаких измерений. Так что, как видите, ученик проникает в смысл абстрактных понятий геометрии. В IV классе уже звучат определения некоторых геометрических понятий (например, луча или угла), но есть и такие понятия, которые не получают определений, например «отрезок» и «многоугольник». Таким образом, пока происходят лишь отдельные вкрапления логических элементов в изложение курса геометрии.

На том же примерно уровне происходит преподавание и в V классе. Здесь большее место занимают построения, но не только циркулем и линейкой, а также рейсшиной и угольником. Изучаются взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей, элементы треугольника, параллельные прямые. Наконец, учащиеся узнают о том, что сумма углов любого треугольника равна 180°. И хотя слово «теорема» еще не произносится, но это — самая настоящая теорема. Ведь справедливость этого утверждения устанавливается не измерением углов треугольника с помощью транспортира, а общим рассуждением (доказательством), которое приведено в тексте учебника.

Изучаются в V классе и признаки равенства треугольников. Но самое главное заключается в том, что



пятиклассники начинают систематически изучать и применять геометрические преобразования: симметрию, поворот и перенос.

— Все-таки я очень боюсь за этот материал,— сказал Григорий Андреевич,— смогу ли я помочь сыну? Он у меня как раз в V пойдет.

— Я много думал на эту тему после наших бесед,— отвечал Николай Николаевич.— И придумал вот что. Я дам вам небольшой словарик терминов, которые встречаются в новой программе для I—V классов. Впрочем, некоторые термины встретятся позже, в более старших классах.— Николай Николаевич вынул несколько исписанных листков и взглянул на часы.— Вы знаете, мы Москву прозеваем. Пожалуй, придется оставить вас без домашнего задания.

— Без домашнего задания мы, может, и обойдемся,— сказал Григорий Андреевич.— Но все-таки, каковы будут ваши напутствия?

— Во-первых, не сеять вокруг себя, и в том числе в среде детей, недоверия к новым программам. Все новое пробивает себе дорогу с трудом. И здесь есть трудности. Не сразу станут идеальными учебники, не привыкли еще к новой программе учителя. Но это очень важное дело — новые программы в средней школе. И оно нуждается во всеобщей поддержке. Второе, как вы выразились, напутствие состоит в совете: держите теснейшую связь со школой. Ни один квалифицированный лектор и методист не сможет ввести вас в такие детали, касающиеся вашего ребенка, как это сделает учитель. У учителя вы получите и конкретные указания о методике изучения того или иного вопроса. Такая связь со школой была нужна всегда, а особенно необходима она теперь. И третье: читайте книги — учебник вашего сына или дочери, книги для учителя и специальные книги для родителей. Ну, желаю вам успеха... А вот и Химки. Видите, впереди шпиль?

С левого борта на пароход надвигалась Москва.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Решение софизма о критянах (стр. 29).

Текст софизма неявно исходит из того, что каждый критянин либо может быть лжецом (и в таком случае он *всегда* говорит неправду), либо правдивым человеком (в этом случае он *всегда* говорит правду). Иными словами, возможность, что критянин иногда говорит правду, а иногда неправду, полностью исключается. Проследим теперь за текстом софизма.

Существуют две взаимоисключающие друг друга возможности: либо критянин, о котором идет речь в софизме (обозначим его буквой x), правдив, либо он является лжецом. Рассмотрим обе возможности. Допустим, что x правдив. Тогда он сказал правду, т. е. его высказывание («все критяне лжецы») истинно. Но так как сам x — критянин, то выходит, что и он лжец, а это противоречит сделанному допущению. Итак, допущение, что x правдив, приводит к противоречию и должно быть отброшено.

Отсюда уже ясно, что истинным должно быть высказывание «x — лжец». Проследим, что в этом случае действительно никакого противоречия не возникает. Так как x — лжец, то он сказал неправду, т. е. его высказывание («все критяне лжецы») ложно. Но тогда истинным является отрицание этого высказывания, т. е. истинно высказывание:

не все критяне лжецы. Но что это значит? Это значит, что имеется (хотя бы один) правдивый критянин. Итак, среди критян имеются и правдивые люди, и лжецы (например, сам x), так что x сказал неправду (как и подобает лжецу). На этом все и кончается.

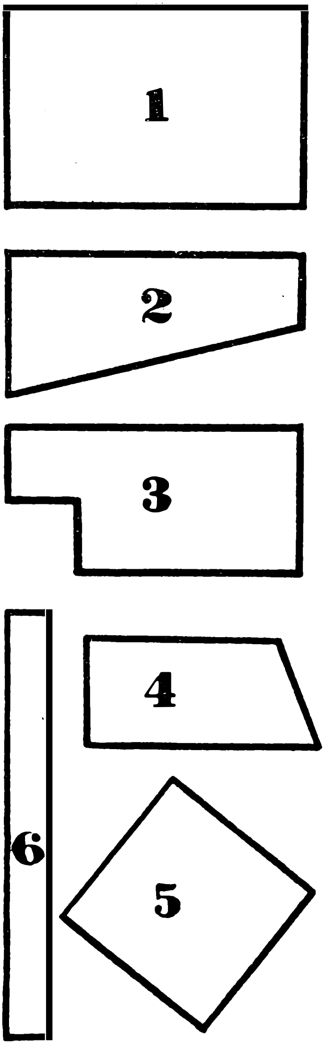
Как видите, ошибка заключается в четвертой фразе софизма: из того, что высказывание «все критяне лжецы» неверно, нельзя сделать вывод «значит, все критяне правдивы». Правильным будет вывод «значит, не все критяне лжецы».

Решение задания (стр. 41).

1. Требуется провести некоторую работу с определением прямоугольника, однако не заучивая это определение наизусть. Делать это лучше всего так. Вы кладете перед сыном текст учебника: «У прямоугольника четыре угла, и все они прямые» — и даете сыну чертежный угольник. Затем вы показываете ему чертежи различных геометрических фигур, среди которых обязательно должны быть прямоугольники разной вытянутости, четырехугольники, у которых не все углы прямые, а также многоугольники с прямыми углами, не являющиеся прямоугольниками. Сын ваш должен сказать, какие из этих фигур прямоугольники, каждый раз ссылаясь на лежащий перед ним текст. Это значит, что вначале он должен проверять выполнение первого условия (четыре угла). Если у многоугольника не четыре угла, то это не прямоугольник, а если четыре угла, то еще нельзя сказать, прямоугольник ли это: нужно проверять, все ли углы прямые. Вот как должен выглядеть ответ применительно к приведенным здесь чертежам:

Фигура 1 — четырехугольник. Все углы у нее прямые. Значит, это — прямоугольник.

Фигура 2 — четырехугольник. У нее только два угла прямые, а два другие — непрямые. Значит, это не прямоугольник.



Фигура 3 — шестиугольник. У нее не 4, а 6 углов. Значит, это не прямоугольник.

Фигура 4 — четырехугольник. Два угла у нее прямые, а два непрямые. Значит, это не прямоугольник.

Фигура 5 — четырехугольник. Все углы у нее прямые. Значит, это прямоугольник.

Фигура 6 — прямоугольник, так как у нее четыре угла и все углы прямые.

Очень важно, чтобы ваш сын каждый раз выверял прямые углы чертежным угольником.

Кроме этой работы, очень полезно задавать такие вопросы:

Известно, что у многоугольника все углы прямые. Является ли он прямоугольником? (Ответ. Неизвестно, так как не сказано, сколько у него углов.)

Известно, что у многоугольника четыре угла. Является ли он прямоугольником? (Ответ. Неизвестно, так как мы не знаем, прямые ли у него углы.)

Обратите внимание вашего сына на то, что квадрат (фигура 5) — тоже прямоугольник; что вообще всякий квадрат является прямоугольником, но не всякий прямоугольник — квадрат.

2. Ошибка вашей дочери объясняется тем, что в этом случае верны оба утверждения: прямое и обратное. Вот она их и перепутала. Поэтому объяснить ее ошибку лучше всего на примере теоремы, для которой обратная «теорема» неверна.

Прежде всего, ошибку надо зафиксировать, т. е. текст задания и ответ вашей дочери нужно записать. После этого дайте ей такой текст: *«Число, кончающееся на 5, делится* *на* 5». Спросите, верно ли это, попросите подтвердить примером и запишите пример в такой форме: «725 кончается на 5; значит, 725 делится на 5». А теперь попросите выделить условие и заключение в вашем утверждении. Если ваша дочь повторит ошибку (т. е. и здесь перепутает условие и заключение), то это приведет к нелепости: «Дано, что число делится на 5; надо доказать, что оно кончается на 5». Неправильность этого утверждения показывается примером: число 10. Оно делится на 5, но доказать, что оно кончается на 5, не удастся (ведь кончается оно все же нулем). Добейтесь правильного ответа на свой вопрос, а затем сравните его с записанным ответом на школьное задание.

3. Вы можете привести следующие доводы:

во-первых, жизни не хватит, чтобы проверить в с е пары точек,

во-вторых, не существует столь длинной линейки, чтобы проверить пару точек, из которых одна лежит на Земле, а вторая — на Луне,

в-третьих, предложите вашему сыну попробовать проверить пару точек, лежащих внутри вашей квартиры, но разделенных стеной.

Р е ш е н и е з а д а ч и (стр. 54).

В этой задаче легко написать ответ:

$\{$автобус, троллейбус, метро$\}$.

Но будет лучше, если вы напишете полное решение, использующее знак объединения множеств:

$\{$автобус$\} \cup \{$троллейбус, метро$\} \cup \{$метро, автобус$\} =$
$= \{$автобус, троллейбус, метро$\}$.

О т в е т ы и р е ш е н и я к з а д а н и ю (стр. 54—55).

1. Верны утверждения: $K \subset D$, $M \subset D$, $N \subset D$, $F \subset E$, $K \subset E$, $K \subset F$, $N \subset K$, $K \subset K$, $N \subset N$.

2. $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 10\}$, $\{1, 2, 4, 6\}$, $\{1, 2, 4, 10\}$, $\{1, 2, 6, 10\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 10\}$, $\{1, 3, 6, 10\}$, $\{1, 4, 6, 10\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{2, 3, 4, 10\}$, $\{2, 3, 6, 10\}$, $\{2, 4, 6, 10\}$, $\{3, 4, 6, 10\}$, итого 15 подмножеств.

3. У множества A одно подмножество — само пустое множество A.

У множества B два подмножества $\varnothing$ и $\{10\}$.

У множества C четыре подмножества: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.

У множества D восемь подмножеств: $\varnothing$, $\{0\}$ $\{3\}$, $\{6\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 6\}$, $\{3, 6\}$, $\{0, 3, 6\}$. Вообще, если множество состоит из n элементов, то у такого множества 2^n подмножеств (это нетрудно доказать с помощью метода математической индукции, изучаемого в старших классах).

4. Поскольку $A \subset B$, каждый элемент множества A является элементом множества B; поскольку $B \subset A$, каждый элемент множества B является элементом множества A. Значит, A и B состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A=B$.

5. $D \cap E = \{1, 2\}$; $D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $E \cap N = \varnothing$; $E \cup N = \{1, 2, 6\}$; $E \cap E = \{1, 2, 6\}$; $E \cup E = \{1, 2, 6\}$.

Решение задания (стр. 83—84).

1. а) Обозначим число $b-a$ через c, т. е. напишем $b-a=c$.
Это равенство означает, что $a+c=b$. Если в этом равенстве $a+c=b$ заменить c через $b-a$, то мы и получим:

$a+(b-a)=b$.

б) Чтобы доказать справедливость равенства $(a+b)-c=(a-c)+b$, надо установить, что

$a+b=[(a-c)+b]+c$. Но

$[(a-c)+b]+c=[b+(a-c)]+c=b+[(a-c)+c]=b+[c+(a-c)]=b+a$ (см. задачу a).

в) Чтобы доказать справедливость равенства $a-(b+c)=(a-b)-c$, надо установить, что

$[a-(b+c)]+c=a-b$.

В свою очередь, чтобы установить правильность этого равенства, надо доказать, что

$\{[a-(b+c)]+c\}+b=a$. Но

$\{[a-(b+c)]+c\}+b=[a-(b+c)]+(c+b)=(b+c)+[a-(b+c)]=a$ (см. задачу a).

г) $a-a=0$, так как $a+0=a$.

д) Если $a-b=0$, то $a=b+0=b$.

е) Равенство $a+c=a+c$ очевидно. Но так как, по условию, $a=b$, то можно во второй части этого равенства заменить a на b; получится: $a+c=b+c$, что и требовалось. Равенство $ac=bc$ доказывается так же.

ж) Достаточно показать, что $(a+c)-c=a$.

з) Нам надо доказать, что число $a(-b)$ равно $0-ab$, т. е. что $ab+a(-b)=0$. Но, согласно дистрибутивному закону, $ab+a(-b)=a[b+(-b)]=a\cdot 0=0$.

и) Докажем, что число $(-a)(-b)$ противоположно числу $-ab$, т. е. что $(-a)(-b)+(-ab)=0$. Число $-ab$ можно записать в виде $(-a)b$ (см. задачу з). Поэтому $(-a)(-b)+$ $+(-ab)=(-a)(-b)+(-a)b=(-a)[(-b)+b]=(-a)\cdot 0=0$. Итак, равенство $(-a)(-b)+(-ab)=0$ доказано. Кроме того, справедливо равенство $ab+(-ab)=0$. Следовательно,

$$(-a)(-b)+(-ab)=ab+(-ab).$$

Но тогда $(-a)(-b)=ab$ (см. задачу ж).

к) Так как $ac=bc$, то $ac-bc=0$, откуда $c(a-b)=0$ (см. стр. 67—68). Следовательно, либо $c=0$, либо $a-b=0$ (см. стр. 66). Но $c\neq 0$ по условию. Поэтому $a-b=0$, откуда находим, что $a=b$ (см. задачу д).

2. а) Обозначим число $\frac{a}{b}$ через p, т. е. напишем $\frac{a}{b}=p$. Это означает, по определению, что $a=bp$. Но нам дано, что $ad=bc$. Заменив здесь число a на bp, получим $bpd=bc$. Так как, по условию, $b\neq 0$, то отсюда вытекает, что $pd=c$ (см. задачу 1, к). Но равенство $pd=c$ означает, по определению, что $p=\frac{c}{d}$. Итак, $p=\frac{a}{b}$, $p=\frac{c}{d}$, и потому $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

б) Пусть $\frac{ad}{bd}=p$. Тогда, в силу определения, $ad=pbd$. Отсюда находим $a=pb$ (см. задачу 1, к). Следовательно, опять по определению, $\frac{a}{b}=p$. Тем самым требуемое равенство доказано.

в) Пусть $\frac{a}{b}=p$. Тогда $a=bp$. Заменив в последнем равенстве число p через $\frac{a}{b}$, получим $a=b\cdot\frac{a}{b}$, или $a=\frac{a}{b}\cdot b$.

г) Нужно доказать, что $(\frac{a}{b}\cdot c)\cdot b=ac$. Действительно: $(\frac{a}{b}\cdot c)\cdot b=(\frac{a}{b}\cdot b)\cdot c=ac$.

д) Нужно доказать, что $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot(bd)=ac$. Имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot(bd)=\frac{a}{b}\cdot\left[\frac{c}{d}\cdot(bd)\right]=\frac{a}{b}\cdot\left[\left(\frac{c}{d}\cdot d\right)\cdot b\right]=$$

$=\frac{a}{b}\cdot(cb)=\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)\cdot c=ac$. Здесь несколько раз использованы коммутативность и ассоциативность умножения.

е) Обозначим первое слагаемое через p. Тогда $a=bp$. Обозначим второе слагаемое через q. Тогда $c=dq$. Теперь рассмотрим правую часть: $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bp\cdot d+b\cdot dq}{bd}=$

$=\frac{bd(p+q)}{bd}=p+q$, что и требовалось доказать.

ж) Так как $(-a)(-b)=ba$ (см. задачу 1, u), то $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ (см. задачу 2, a). Далее, используя правую дистрибутивность деления (стр. 63), находим

$$(-a):b+a:b=[(-a)+a]:b=0:b=0,$$

т. е.

$\frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=0$, откуда $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$.

3. Не следует пользоваться общей формулой (см. задачу 2, e), когда знаменатели дробей имеют общий делитель. Нужно решать так:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{6+1}{16}=\frac{7}{16}.$$

4. Прежде всего нужно привести побольше примеров: показать, что умножение на одну вторую — все равно что деление на два, умножение на две пятых — все равно что деление на два с половиной. При этом нужно давать побольше примеров с десятичными дробями, с которыми школьник уже знаком (обратные числа изучаются в V классе, а десятичные дроби — в IV).

Если после разбора нескольких примеров ваш сын поверил в справедливость этого правила, можно попытаться объяснить ему доказательство правила в общем виде. Нам нужно доказать, что

$$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}.$$

Но для этого (по определению) нужно установить справедливость равенства

$$\left(a\cdot\frac{c}{b}\right)\cdot\frac{b}{c}=a.$$

Это равенство легко установить, пользуясь ассоциативным законом умножения и правилом умножения дробей:

$$\left(a\cdot\frac{c}{b}\right)\cdot\frac{b}{c}=a\cdot\left(\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}\right)=a\cdot1=a.$$

Словарь математических терминов[1]

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА — см. *Модуль числа.*

АБСЦИССА — см. *Прямоугольная система координат.*

АКСИОМА — предложение, принимаемое в данной математической теории без доказательства. Совокупность всех аксиом теории называется ее аксиоматикой. *Примеры* аксиом школьного курса математики:

$$a+b=b+a,$$
$$ab=ba,$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$a+0=a,$$
$$a\cdot 1=a,$$
$$a+(-a)=0,$$
$$a\cdot\frac{1}{a}=1, \text{ если } a\neq 0,$$

через две точки проходит единственная прямая линия,

через точку вне прямой a можно провести только одну прямую, параллельную прямой a.

АЛГЕБРА — область математики, занимающаяся исследованием абстрактных операций: не только над числами, но и над более сложными математическими объектами. В применении к школьному курсу — учение об общих свойствах чисел и многочленов.

---

[1] В словарь включены математические термины, встречающиеся в учебниках I—V классов, а также упомянутые в данной книге, и еще несколько, которые могут понадобиться родителям и учащимся. Курсивом обозначены ссылки на термины, включенные в словарь.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СУММА — несколько чисел или выражений, соединенных знаками (+) и минус (—), например, $a+b-c$, $a-b$, $-a+b+c-d$ и т. д. Таким образом, алгебраическая сумма объединяет в себе понятия суммы и разности. Название объясняется тем, что с помощью правила знаков алгебраическая сумма может быть преобразована в сумму:

$$-a+b-c-d=(-a)+b+(-c)+(-d).$$

АРИФМЕТИКА — наука о *числах* и действиях над числами. В применении к школьному курсу — учение о четырех действиях над неотрицательными *рациональными числами*, т. е. натуральными числами, нулем и положительными дробями (обыкновенными и десятичными).

АССОЦИАТИВНОСТЬ (сочетательность) сложения и умножения — свойства сложения и умножения, выражаемые равенствами

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a(bc)=(ab)c.$$

Эти равенства справедливы для любых чисел a, b, c (если речь идет о числах, изучаемых в школе). Например, согласно ассоциативности сложения $8+(2+5)=(8+2)+5$; согласно ассоциативности умножения $5\cdot(2\cdot8)=(5\cdot2)\cdot8$.

БЕСКОНЕЧНАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — см. *Десятичная дробь.*

БИССЕКТРИСА — 1) биссектриса *угла* — *луч*, исходящий из вершины угла и делящий его пополам; 2) биссектриса *треугольника* — отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины этого угла до противолежащей стороны треугольника; длину этого отрезка также называют биссектрисой треугольника. У треугольника три биссектрисы (по числу углов).

БОКОВАЯ СТОРОНА — сторона *треугольника* или *трапеции*, отличная от *основания*.

ВЕКТОРЫ — см. *Направленные отрезки.*

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ — два *угла*, меньшие *развернутого*, расположенные так, что *стороны* одного угла являются *лучами, противоположными* сторонам другого.

ВЕРШИНА ЛОМАНОЙ — см. *Ломаная линия.*

ВЕРШИНА МНОГОУГОЛЬНИКА — см. *Многоугольник.*

ВЕРШИНА МНОГОГРАННИКА — см. *Многогранник.*

ВЕРШИНА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА — см. *Равнобедренный треугольник.*

ВЗАИМНО-ОБРАТНЫЕ ЧИСЛА — см. *Обратные числа.*

ВЗАИМНО-ПРОСТЫЕ ЧИСЛА — натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1. Иначе говоря, это числа, не имеющие других общих натуральных делителей, кроме единицы. *Примеры:* 2 и 7, 1 и 5, 24 и 25.

ВНУТРЕННЯЯ ОБЛАСТЬ. Замкнутая линия l, не пересекающая самое себя, разбивает плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. К внешней области относятся те точки, из которых можно провести линию (ломаную), не пересекающую l и уходящую как угодно далеко от линии l. Остальные точки, не лежащие на линии l, принадлежат внутренней области. Из этих точек не удастся уйти как угодно далеко, не пересекая линию l.

В математике часто рассматривают объединение линии l и ее внутренней области. Если l — замкнутая ломаная линия, не пересекающая самое себя, то объединение линии l и ее внутренней области называется *многоугольником.* Если l — окружность, то объединение линии l и ее внутренней области называется *кругом.*

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ — нахождение *степени* числа.

ВРАЩЕНИЕ — см. *Поворот.*

ВЫНЕСЕНИЕ ЗА СКОБКИ — преобразование *алгебраической суммы* в произведение, основанное на применении *дистрибутивности.* Оно возможно в том случае, если у всех слагаемых есть общий множитель.

Примеры:

$2a+2b-2c=2(a+b-c)$,

$ax-bx=x(a-b)$,

$axy-xy^2+2xy^3=xy(a-y+2y^2)$,

$2ab+2a=2a(b+1)$.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК. Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, содержится в этой фигуре. Примерами выпуклых фигур могут служить круг, полуплоскость, угол, меньший развернутого. Многоугольник, являющийся выпуклой фигурой, называется выпуклым многоугольником. Если M — выпуклый многоугольник и AB — произвольная его сторона, то весь многоугольник M лежит по одну сторону от прямой AB. Это свойство является характеристическим: если оно выполняется для каждой стороны многоугольника, то этот многоугольник выпуклый.

Любой треугольник представляет собой выпуклую фигуру. Четырехугольник же (и многоугольники с бо́льшим числом вершин) может быть как выпуклым, так и невыпуклым. Примерами выпуклых четырехугольников являются параллелограммы (в частности, прямоугольники, ромбы, квадраты) и трапеции.

ВЫРАЖЕНИЕ — запись, состоящая из *чисел* (или букв, или чисел и букв) и *знаков* действий, указывающих, какие действия и в каком *порядке* следует выполнять над этими числами (буквами). Отдельное число (буква) также считается выражением. Если в выражении нет букв, а имеются только числа, то оно называется числовым выражением, а в противном случае — буквенным выражением.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ — фраза, относительно которой можно однозначно решить, истину или ложь она выражает. Восклицательная или вопросительная фраза высказыванием не является. Но и не любое повествовательное предложение будет высказыванием. *Примеры:*

Река Волга находится в Европе — высказывание (истинное);

Лев принадлежит к семейству кошачьих — высказывание (истинное);

Для любых чисел a и b справедливо равенство $(a-b)+(b-a)=0$ — высказывание (истинное);

Олень принадлежит к семейству кошачьих — высказывание (ложное);

Он — писатель — не высказывание, так как неизвестно, о ком идет речь, и потому невозможно установить, верно ли то, что утверждает эта фраза.

ВЫСОТА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА — см. *Высота трапеции.*

ВЫСОТА ПРЯМОУГОЛЬНИКА. Любые две параллельные между собой стороны *прямоугольника* можно условиться считать его основаниями. Тогда каждая из двух других сторон называется высотой прямоугольника. Основанием и высотой называют также не только сами стороны, но и их длины. Чаще всего прямоугольник изображают так, что две его стороны параллельны нижнему краю листа бумаги (или страницы). В таком случае основанием обычно считают нижнюю сторону прямоугольника, а перпендикулярную ей (вертикальную) сторону считают высотой. В известной теореме «*Площадь* прямоугольника равна произведению его основания на высоту» термины «основание» и «высота» означают, конечно, не сами стороны прямоугольника, а их длины.

Высоту прямоугольника нередко называют также его шириной.

ВЫСОТА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА. Любые две параллельные между собой *грани прямоугольного параллелепипеда* можно условиться считать его основаниями. Тогда каждое из *ребер,* перпендикулярных основаниям (т. е. каждое из ребер, соединяющих вершину одного основания с вершиной другого), называется высотой прямоугольного параллелепипеда. Высотой называют также не только эти ребра, но и их длину (все четыре ребра, соединяющих одно основание с другим, имеют одинаковую длину). Основанием же называют не только саму грань, но и ее *площадь.* Чаще всего прямоугольный параллелепипед рассматривают в таком положении, когда две его грани расположены в горизонтальной плоскости. В таком случае основанием обычно считают нижнюю грань, а перпендикулярные ей ребра считают высотами. В известной теореме «*Объем* прямоугольного параллелепипеда равен произведению его основания на высоту» термин «основание» означает, конечно, не саму грань, а ее площадь, и точно так же термин «высота» означает не само ребро, перпендикулярное основанию, а длину этого ребра.

ВЫСОТА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА — см. *Равнобедренный треугольник.*

ВЫСОТА ТРАПЕЦИИ. Две параллельные между собой стороны *трапеции* называют ее основаниями. Отрезок, перпендикулярный прямым, на которых расположены основания трапеции, и соединяющий точку одной из этих прямых с точкой второй прямой, называется высотой трапеции. Чаще всего высоту проводят из конца основания (в таком случае можно сказать, что высота — это перпендикуляр, опущенный из конца одного основания трапеции на прямую, на которой лежит второе основание). Основаниями и высотой называют не только сами указанные отрезки, но и их длины. Например, именно о длинах идет речь в известной теореме: «*Площадь* трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту».

Если трапеция является параллелограммом (т. е. не только одна пара ее противоположных сторон параллельна, но и другая пара сторон параллельна), то любые две противоположные стороны можно принять за основания, и тогда им будет соответствовать своя высота. Таким образом, у параллелограмма две высоты, причем, в случае, если параллелограмм не является ромбом, эти высоты не равны между собой.

ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА. Любую сторону треугольника можно условиться считать его основанием. Тогда перпендикуляр, опущенный из противолежащей вершины на прямую, на которой лежит основание треугольника, называется высотой. Основанием и высотой называют не только сами эти отрезки, но и их длины. У треугольника три высоты (по числу сторон). Чаще всего треугольник изображают так, что одна его сторона параллельна нижнему краю листа бумаги (или страницы). В таком случае основанием обычно считают нижнюю сторону треугольника, а перпендикуляр, опущенный из противолежащей (верхней) вершины, — высотой. В известной теореме «*Площадь* треугольника равна половине произведения его основания на высоту» термины «основание» и «высота» означают, конечно, не сами отрезки, а их длины.

ВЫСОТА ФИГУРЫ. Пусть F — плоская фигура. Для того чтобы можно было говорить о ее высоте, нужно указать на плоскости горизонтальное направление (чаще всего горизонтальным считают нижний край листа бумаги или тетради). Далее, нужно провести две горизонтальные прямые, зажимающие между собой фигуру F. Тогда расстояние между этими прямыми и будет высотой фигуры

F. Обычно понятие высоты применяется только к треугольникам или трапециям, у которых основание параллельно горизонтальной прямой. Объясняется это тем, что в указанных случаях существует простая формула, позволяющая вычислить площадь трапеции (или треугольника) по основаниям и высоте (см. статьи *Высота трапеции, Высота треугольника*). Для других фигур (даже, например, для четырехугольников общего вида) не существует простой формулы, позволяющей вычислить площадь по высоте и каким-либо другим данным. В связи с этим понятие высоты в таком общем понимании практически почти не применяется.

Для определения высоты пространственного тела нужно выбрать плоскость, которую мы условливаемся считать горизонтальной, и провести две горизонтальные плоскости, зажимающие между собой это тело; тогда расстояние между этими плоскостями и будет высотой тела. Обычно понятие высоты применяется только к призмам, пирамидам, усеченным пирамидам, цилиндрам, конусам, усеченным конусам, у которых основания расположены в горизонтальной плоскости, так как в этих случаях существуют простые формулы, позволяющие вычислить объем тела по высоте и площадям оснований. В других случаях понятие высоты практически почти не применяется.

ВЫЧИТАЕМОЕ — см. *Вычитание*.

ВЫЧИТАНИЕ — арифметическое действие, обозначаемое знаком минус. Вычитание определяется через *сложение:* по определению, $a - b = c$, если $a = c + b$. В равенстве $a - b = c$ число a носит название уменьшаемого, b — вычитаемого, c — разности.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА — *множество точек*. Геометрическими фигурами являются точка, пара точек, отрезок (так как он состоит из точек), треугольник, круг и т. д.

ГЕОМЕТРИЯ — область математики, занимающаяся исследованием различных пространств. В применении к школьному курсу — учение о точечных *множествах* — множествах, *элементами* которых являются *точки*. Если все точки этих множеств лежат в одной *плоскости*, то такие множества называются плоскими фигурами.

ГИПОТЕНУЗА — см. *Прямоугольный треугольник*.

ГРАДУС (угловой) — $^1/_{360}$ часть *полного угла*. Деление полного угла на 360 частей восходит к древности, когда считали, что в году 360 дней. Изображение года в виде круга, разделенного на 360 частей, и привело к созданию этой единицы измерения углов. В учебнике для IV класса градус определяется как $^1/_{90}$ часть прямого угла. Развернутый угол — половина полного; в нем 180°. Угол, меньший прямого (т. е. содержащий меньше 90°), называется острым. Угол, больший прямого, но меньший развернутого (больше 90°, но меньше 180°), называется тупым. Углы, содержа-

щие больше 180°, не имеют специального названия, о них говорят: углы, бóльшие развернутого.
ГРАНЬ — см. *Многогранник.*
ГРАФИК — геометрическая фигура (множество точек), создающая зрительное представление о характере изменения некоторой величины (точнее, о характере зависимости между величинами). Например, можно графически представить изменение температуры с течением времени, зависимость стоимости билета на самолет от расстояния и т. п. В математике чаще всего применяется графическое изображение функциональной зависимости с помощью системы координат. Средством графического изображения зависимости между величинами являются также различные диаграммы (секторные, линейные и т. п.).
ДВОЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО — запись одного из следующих видов: $a<x<b$, $a<x\leqslant b$, $a\leqslant x<b$, $a\leqslant x\leqslant b$. Каждое из этих двойных неравенств обозначает требование одновременного выполнения составляющих его неравенств; например, в неравенстве $a<x<b$ записано, что x больше a и в то же время меньше b. Таким образом, множество решений двойного неравенства (т. е. множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству) является *пересечением* множеств решений двух составляющих его неравенств. Отметим, что в двойном неравенстве число a не может быть больше b (так как иначе множество решений будет пустым). Равенство $a=b$ может быть допустимо только в случае двойного неравенства $a\leqslant x\leqslant b$; в этом случае $x=a=b$. Множество решений двойного неравенства $a\leqslant x\leqslant b$ при $a<b$ называется числовым отрезком; числа a и b называются концами этого отрезка.
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА — см. *Числовое поле.*
ДЕЛЕНИЕ — арифметическое действие, обозначаемое двоеточием или дробной чертой; деление определяется через *умножение:* по определению, $a:b=\frac{a}{b}=c$ означает, что $a=cb$ и $b\neq0$. Деление на нуль запрещено (т. е. «частному» $a:0$ не придается никакого смысла). В записи $a:b=c$ число a называется делимым, число b — делителем и число c — частным. Деление выполнимо не в любом числовом множестве. Например, в множестве *натуральных чисел* и в множестве целых чисел деление выполнимо не всегда, т. е. не всегда целое число можно разделить на целое число так, чтобы в частном получилось целое число. Если же при делении целого числа a на целое число b получается в частном целое число, то говорят, что a делится на b. В этом случае число a называют кратным числа b, число b называют делителем (а также множителем) числа a. Например, 20 кратно числу 2; 2 — делитель числа 20.
ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ. Любое натуральное (или даже целое)

число a можно разделить на натуральное число $b>1$ с остатком. Например, при делении 7 на 2 получается в частном 3 и в остатке 1. Это можно записать так: $7=2\cdot3+1$. Вообще, число q называется частным (неполным), а число r — остатком от деления числа a на число $b>1$, если $a=bq+r$, причем $0\leqslant r<b$. Например, запись $76=8\cdot9+4$ означает, что при делении числа 76 на 8 получается в частном 9 и в остатке 4. Эта же запись означает, что при делении числа 76 на 9 получается в частном 8 и в остатке 4. Запись же $31=3\cdot9+4$ означает лишь, что при делении числа 31 на 9 получается в частном 3 и в остатке 4 (при делении 31 на 3 получается в частном не 9, а 10: ведь остаток не может превышать частного). Запись $10=2\cdot3+4$ вообще не есть запись деления с остатком. Число a является кратным числа b в том и только в том случае, если при делении a на b остаток r оказывается равным нулю («деление без остатка»).

ДЕЛИМОЕ — см. *Деление*.

ДЕЛИМОСТЬ числа a на число b — термин, обозначающий, что натуральное число a делится на натуральное число b (см. *Деление*), т. е. что $a=kb$, k — натуральное число. Каждое натуральное число делится на себя и на единицу. Если других делителей число $a>1$ не имеет, то оно называется *простым числом*. В противном случае (т. е. если число $a>1$ имеет делитель, отличный от 1 и a) оно называется составным. Число 1 не считается ни простым, ни составным. Для того чтобы определить, делится ли число a на b, имеются признаки делимости, т. е. теоремы, позволяющие, не производя деления, сказать, делится ли число a на b. Вот признаки делимости на некоторые числа:

на 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются цифрами 0, 2, 4, 6 или 8. *Примеры:* 12, 750, 618;

на 3 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3. *Примеры:* 762, 27, 303, 111111111;

на 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются пятеркой или нулем. *Примеры:* 765, 380, 497 865;

на 4 делятся те и только те числа, две последние цифры которых образуют число, делящееся на 4. *Примеры:* 312, 504, 700;

на 10 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулем. *Примеры:* 40, 35 600;

на 25 делятся те и только те числа, которые оканчиваются одной из следующих комбинаций цифр: 00, 25, 50 или 75. *Примеры*: 700, 3425, 6750, 7875.

Перечисленные признаки делимости изучаются в школе. Укажем, еще один признак делимости:

на 11 делятся те и только те числа, у которых разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11. *Пример:* число 3 705 691 делится на 11, так как число $(1+6+0+3)-(9+5+7)=10-21=$ $=-11$ делится на 11.

ДЕЛИТЕЛЬ. Это слово имеет два значения: 1) делитель — это компонент действия деления (см. *Деление, Деление с остатком);* 2) делитель некоторого числа a — это число, на которое число a делится без остатка. *Пример:* 2, 1, 5, 10 — делители числа 10.

ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — форма записи дроби без знаменателя, с помощью запятой. При записи в этой форме используется основной принцип *десятичной системы счисления*: единица каждого разряда вдесятеро больше единицы соседнего разряда справа и вдесятеро меньше единицы соседнего разряда слева. Запятая служит для разделения целой и дробной части; иначе говоря, первый разряд слева от запятой обозначает целые единицы. *Пример:* 2876,531. Здесь 6 стоит в разряде единиц, и потому число имеет 6 единиц; далее имеется 7 десятков, 8 сотен и 2 тысячи. Передвигаясь от разряда единиц вправо, попадаем в дробную часть числа и по основному принципу десятичной системы счисления получаем, что 5 стоит в разряде десятых долей, 3 — в разряде сотых и 1 — в разряде тысячных долей. Итак, этой дробью записано число

$$2\cdot 1000+8\cdot 100+7\cdot 10+6+5\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{1000},$$

т. е. число $2876\frac{531}{1000}$.

Это пример конечной десятичной дроби, т. е. дроби, имеющей крайний знак, крайнюю правую цифру. Любую обыкновенную дробь, знаменатель которой не имеет других *простых делителей,* кроме 2 и 5, можно записать в виде конечной десятичной дроби. Для этого нужно лишь добиться, чтобы знаменатель оказался числом, записываемым единицей с нулями. *Примеры*:

$$\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{2}{10}=0{,}2;$$

$$\frac{21}{750}=\frac{7}{250}=\frac{7}{2\cdot 5^3}=\frac{7\cdot 2^2}{2\cdot 5^3\cdot 2^2}=\frac{28}{2^3\cdot 5^3}=\frac{28}{1000}=0{,}028.$$

Общее правило состоит в домножении числителя и знаменателя на недостающую в знаменателе степень двойки или пятерки. Тот же результат можно получить делением (в столбик) числителя на знаменатель, с приписыванием после запятой нужного числа нулей. В том случае, если знаменатель несократимой дроби имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, дробь не обращается в конечную десятичную. При делении (в столбик) числителя на знаменатель все время будут получаться отличные от нуля остатки и частное будет представлять собой бесконечную десятичную дробь, у которой некоторая группа цифр будет все время повторяться. *Пример*: $\frac{1}{7}=0{,}142857142857142857\ldots$ Такие бесконечные десятичные дроби называются периодическими, а повторяющаяся группа цифр — периодом. В приведенном примере период состоит из шести цифр: 142 857. Если у периодической десятичной дроби период начинается сразу после запятой, то такая десятичная дробь называется чистой периодической, а если не сразу после запятой, то смешанной периодической. Например, число $\frac{1}{15}$ обращается в смешанную периодическую дробь 0,066666. В математике рассматриваются и непериодические бесконечные десятичные дроби. Они изображают иррациональные числа, т. е. *действительные числа*, не представляющиеся в виде отношения двух целых чисел.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ — система записи чисел с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Основана на возможности представить (и притом единственным способом) любое натуральное число A в виде

$$A=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+$$
$$+a_1\cdot 10+a_0,$$

где каждое из выражений $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0$ обозначает какое-либо из целых чисел от 0 до 9. Если, например,

$$A=8\cdot 10^6+3\cdot 10^5+0\cdot 10^4+2\cdot 10^3+0\cdot 10^2+9\cdot 10+5,$$

то мы пишем сокращенно: $A=8302095$. В десятичной записи числа каждая цифра обозначает число соответствующих разрядных единиц. Именно, если у целого числа цифра стоит крайней справа, то она обозначает число единиц, если второй справа, то число десятков, и т. д. Эти места называются разрядами: разряд единиц, разряд десятков, разряд сотен и т. д. Практикуется также деление разрядов на классы: первые три разряда (справа) образуют класс единиц, следующие три — класс тысяч, следующие три — класс миллионов и т. д. Таким образом, единица каждого разряда вдесятеро больше единицы соседнего разряда справа и вдесятеро меньше единицы соседнего разряда слева. С помощью запятой в десятичной системе счисления записываются не только целые числа, но и *десятичные дроби*. *Примеры:*

$$2456=2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10+6;$$

$$47{,}38=4\cdot 10+7+3\cdot\frac{1}{10}+8\cdot\frac{1}{100};$$

$$0{,}5=5\cdot\frac{1}{10}.$$

ДИАГОНАЛЬ МНОГОУГОЛЬНИКА — *отрезок*, соединяющий две несоседние *вершины* многоугольника (т. е. две вершины, не являющиеся концами одной *стороны*). У треугольника нет диагоналей, у четырехугольника их две, у пятиугольника — пять.

ДИАМЕТР окружности (круга) — *отрезок*, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее *центр*. Диаметр можно провести из любой точки на окружности. Поэтому у окружности имеется бесконечно много диаметров, но все они между собой равны. Длина каждого из этих отрезков также называется диаметром окружности (круга). Диаметр равен двум *радиусам*.

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ — одна из *аксиом* арифметических действий, говорящая о связи между *умножением* и *сложением*:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Справедливо и свойство дистрибутивности умножения относительно вычитания:

$a(b-c)=ab-ac$. Свойство дистрибутивности умножения относительно *алгебраического сложения* имеет место для любого конечного числа слагаемых. ***Пример***:

$$3(2+5-6+7-1)=3\cdot2+3\cdot5-3\cdot6+3\cdot7-3\cdot1.$$

ДЛИНА ЛОМАНОЙ — сумма длин всех *звеньев ломаной*. Поскольку каждое звено ломаной представляет собой *отрезок*, нахождение длины ломаной основано на понятии *длины отрезка*. Существует также простой геометрический способ нахождения длины ломаной, называемый спрямлением ломаной.

ДЛИНА ОТРЕЗКА — число, показывающее, сколько раз в данном отрезке уложится единичный отрезок. Если единичный отрезок не укладывается в данном отрезке целое число раз без остатка, то для определения длины отрезка применяется специальная процедура, которая называется *процессом измерения*. В качестве единичного может быть выбран любой отрезок. Общепринятыми единицами длины (единичными отрезками) являются метр и его десятичные производные: километр (1000 *м*), дециметр $\left(\frac{1}{10}\text{ м}\right)$, сантиметр $\left(\frac{1}{100}\text{ м}\right)$, миллиметр $\left(\frac{1}{1000}\text{ м}\right)$, микрон $\left(\frac{1}{1\,000\,000}\text{ м}\right)$, миллимикрон $\left(\frac{1}{1\,000\,000\,000}\text{ м}\right)$. В астрономии употребляются также световой год — расстояние, проходимое за год световым лучом (равен 9460 млрд. *км*), парсек (30 840 млрд. *км*).

ДОЛЯ — результат раздробления целого (единицы) на несколько равных частей. В зависимости от того, на сколько равных частей раздробляется единица, доли называются вторыми, третьими и т. д. Запись: $^1/_2$, $^1/_3$ и т. д.

ДРОБЬ — сумма нескольких одинаковых *долей*. Записывается в виде $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа. Число a называется *числителем* дроби и обозначает число сложенных долей. Число b называется *знаменателем* дроби и показывает, какие именно доли складывались. С введением дробей расширяется множество чисел, до этого (в I и II классах) состоявшее лишь из натуральных чисел и нуля. Такое расширение продиктовано различными соображениями: потребностями измерения (см. *Процесс измерения*) и чисто математическими причинами, из которых в первую очередь назовем необходимость решать уравнения вида $ax=b$, где a и b — натуральные числа, и связанную с этим потребность делить любое натуральное число b на любое другое натуральное число a. Существенно, что с введением дробей возникает возможность не только любое натуральное число разделить на любое другое натуральное число, но и разделить любую дробь на любую дробь (отличную от нуля). Отметим также, что в виде дроби можно записать любое целое число: например, $5=\frac{5}{1}$ (см. *Десятичная дробь, Обыкновенная дробь, Смешанное число*).

В V классе, после введения отрицательных чисел, появляется возможность рассматривать дроби, числителями и знаменателями которых являются не только положительные, но и отрицательные числа, т. е. дробь принимает вид $\frac{a}{b}$, где a и $b \neq 0$ — любые *целые числа*. Числа, которые можно записать в виде обыкновенных дробей, называются *рациональными числами*.

ДУГА — часть кривой линии, расположенная между двумя точками (в частности, часть окружности между двумя ее точками). Эти две точки, определяющие дугу, называются ее концами.

ЕДИНИЦА — число, обладающее свойством $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (для любого a). Отсюда $a:a=1$ при $a \neq 0$ и $a:1=a$ при любом a.

ЕДИНИЦЫ ДЛИНЫ — см. *Длина отрезка*.

ЕДИНИЦА ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ — см. *Градус*.

ЕДИНИЦЫ ОБЪЕМА — см. *Объем*.

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ И РЕЗУЛЬТАТАМИ ДЕЙСТВИЙ — система утверждений о том, как изменятся результаты действий, если определенным образом изменить их компоненты. Перечислим эти утверждения (словесные формулировки относятся к положительным числам):

1. Если слагаемое увеличить на a, то сумма увеличится на a:

$(b+a)+c=(b+c)+a$.

2. Если слагаемое уменьшить на a, то сумма уменьшится на a:

$(b-a)+c=(b+c)-a$.

3. Если уменьшаемое увеличить на a или вычитаемое уменьшить на a, то разность увеличится на a:

$(b+a)-c=(b-c)+a$;

$b-(c-a)=(b-c)+a$;

4. Если уменьшаемое уменьшить на a или вычитаемое увеличить на a, то разность уменьшится на a:

$(b-a)-c=(b-c)-a$;

$b-(c+a)=(b-c)-a$.

5. Если сомножитель увеличить в a раз, то произведение увеличится в a раз:

$(ba)c=(bc)a$.

6. Если сомножитель уменьшить в a раз, то произведение уменьшится в a раз:

$$\frac{b}{a}c=\frac{bc}{a}.$$

7. Если делимое увеличить в a раз или делитель уменьшить в a раз, то частное увеличится в a раз:

$$\frac{ba}{c}=\left(\frac{b}{c}\right)a;$$

$$b:\left(\frac{c}{a}\right)=\left(\frac{b}{c}\right)a.$$

8. Если делимое уменьшить в a раз или делитель увеличить в a раз, то частное уменьшится в a раз:

$$\left(\frac{b}{a}\right):c=\frac{b}{c}:a; \quad \frac{b}{ca}=\frac{b}{c}:a.$$

Утверждения 1—8 основаны на свойствах *ассоциативности* и *коммутативности*.

Из *дистрибутивности* вытекает еще одна зависимость:

9. Если все слагаемые в *алгебраической сумме* увеличить (уменьшить) в a раз, то и сумма увеличится (уменьшится) в a раз:

$$ab-ac+ax-ay=(b-c+x-y)a;$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-\frac{y}{a}=\frac{b+c-y}{a}.$$

ЗАМКНУТАЯ ЛОМАНАЯ — см. *Ломаная линия.*

ЗВЕНО ЛОМАНОЙ — см. *Ломаная линия.*

ЗНАКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ — условные обозначения (символы), служащие для сокращенной записи математических понятий, предложений и вычислений. В основном делятся на три группы: 1) знаки математических объектов ($\triangle$, $\angle$), 2) знаки операций ($+$, $-$, $\cdot$, $:$), 3) знаки отношений между числами, множествами и т. п. ($=$, $>$, $\in$). Основные знаки, употребляющиеся в курсе математики I—V классов, сведены в следующую таблицу.

Написание знака	Его смысл	Пример использования знака
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	цифры	27 (число, содержащее 2 десятка и 7 единиц)
$\triangle$	треугольник	$\triangle ABC$ (треугольник ABC)
$\angle$	угол	$\angle ABC$ (угол ABC)
$^\circ$	градус	90° (90 градусов)
$+$	прибавить	$2+7$ (к 2 прибавить 7)
$-$	отнять	$3-1$ (от 3 отнять 1)
$\cdot$	умножить на	$5\cdot 7$ (5 умножить на 7)
$:$	разделить на	$12:3$ (12 разделить на 3)
—	дробная черта	$\frac{7}{11}$ (семь одиннадцатых)
,	запятая, отделяющая в десятичной записи целую часть от дробной	3,75 (три целых, семьдесят пять сотых)
$=$	равно	$2{,}5=\frac{5}{2}$ (две целых пять десятых равно пяти вторым)
$\neq$	не равно	$3\neq 8$ (три не равно восьми)

Написание знака	Его смысл	Пример использования знака
$>$	больше	$7>2$ (семь больше двух)
$<$	меньше	$3<1000$ (три меньше тысячи)
$\geqslant$	больше или равно	$a \geqslant b$ (число a больше или равно b)
$\leqslant$	меньше или равно	$a \leqslant b$ (число a меньше или равно b)
$(\ )$	скобки (для указания порядка выполнения действий)	$(a+b)c$ (сумма чисел a и b умножается на число c; без скобок порядок действий был бы другой)
$\mid\ \mid$	знак модуля	$\mid -5 \mid = 5$ (модуль числа -5 равен 5)
$\parallel$	параллельно	$AB \parallel CD$ (прямая AB параллельна CD)
$\nparallel$	не параллельно	$AB \nparallel CD$ (прямые AB и CD не параллельны)
$\perp$	перпендикулярно	$AB \perp CD$ (прямая AB перпендикулярна CD)
$\in$	принадлежит	$A \in M$ (точка A принадлежит множеству M)
$\{\ \}$	состоит из	$M = \{1, 2, 3\}$ (множество M состоит из чисел 1, 2, 3)
$\varnothing$	пустое множество	$A \cap B = \varnothing$ (множества A и B не пересекаются)
...	и т. д.	$M = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ (в записи множества M пропущены элементы)
$\supset$	содержит	$A \supset B$ (множество A содержит множество B)
$\subset$	содержится	$A \subset B$ (множество A содержится в множестве B)
$\cap$	пересечение множеств	$A \cap B$ (пересечение множеств A и B)
$\cup$	объединение множеств	$A \cup B$ (объединение множеств A и B)

ЗНАМЕНАТЕЛЬ — см. *Дробь.*
ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ — *число,* получающееся при замене всех букв, входящих в выражение, данными числами (значениями букв) и выполнении над этими числами всех указанных действий. Если выражение не содержит букв, то значение его получается в результате выполнения указанных в нем действий. В частности, если выражение состоит из единственного числа, то его значением будет это число. Если выражение состоит из одной буквы, то его значением является значение этой буквы.
ЗНАЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ — см. *Переменная.*
ИЗМЕРЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА — его длина и ширина, т. е. длины двух его соседних сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его измерений.
ИЗМЕРЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА — его длина, ширина и высота, т. е. длины трех его ребер, исходящих из одной вершины (или любых трех попарно непараллельных ребер). Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению всех трех его измерений. Площадь основания прямоугольного параллелепипеда равна произведению первых двух его измерений (длины и ширины).
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА — *действительные числа,* не являющиеся рациональными, т. е. не представляющиеся в виде отношения двух целых чисел. Всякое рациональное число записывается в виде либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дроби. Верно и обратное: если число записывается в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, то оно рационально. Отсюда вытекает, что иррациональными будут все те числа, которые записываются в виде бесконечной и притом непериодической десятичной дроби.

Примером может служить число 0,010100010000000100..., в котором единицы стоят на 2-, 4-, 8-, 16-м, ..., 2^n ...местах; здесь расстояния между двумя соседними единицами становятся все больше и больше, так что периодической повторяемости цифр нет (т. е. число иррационально). Число π, входящее в формулы для вычисления длины окружности и площади круга, тоже иррационально. Если n — натуральное число, не являющееся точным квадратом, то $\sqrt{n}$ — число иррациональное. Конечно, множество иррациональных чисел не исчерпывается этими примерами.
КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. Касательная удалена от центра окружности на расстояние, равное радиусу этой окружности. Иногда, по аналогии с этим определением, учащиеся полагают, что и вообще, в случае любой кривой линии, касательной будет всякая прямая, имеющая с этой кривой только одну общую точку. Однако это неверно. Например, парабола $y=x^2$ имеет с осью ор-

динат (т. е. с прямой $x=0$) только одну общую точку, но эта прямая, очевидно, не является касательной к параболе. О касательных к линиям, отличным от окружности, говорится только в старших классах (в связи с понятием производной).

КАТЕТ — см. *Прямоугольный треугольник.*

КВАДРАТ — четырехугольник, все стороны которого равны между собой и все углы которого прямые; является частным случаем прямоугольника, а также частным случаем ромба.

КЛАССЫ И РАЗРЯДЫ — см. *Десятичная система счисления.*

КОММУТАТИВНОСТЬ (переместительность) — свойство операции, состоящее в том, что результат не изменяется от перестановки компонентов. Этим свойством обладают сложение и умножение: $a+b=b+a$, $ab=ba$.

Им не обладает вычитание: $a-b \neq b-a$ в общем случае (равенство получается лишь при $a=b$). Не обладает им и деление: $a:b \neq b:a$ в общем случае (равенство получается лишь при $a=b \neq 0$).

КОНТУР МНОГОУГОЛЬНИКА — см. *Многоугольник.*

КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ — см. *Прямоугольная система координат.*

КООРДИНАТЫ — числа, определяющие положение точек на прямой, на плоскости и в пространстве. Положение точки на числовой прямой определяется одной координатой, на плоскости — двумя, в трехмерном пространстве — тремя координатами (см. *Прямоугольная система координат*).

КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ — значение *переменной,* при подстановке которого *уравнение* превращается в верное равенство.

КОСОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК — употребляемое иногда название непрямоугольных треугольников (т. е. *остроугольных* и *тупоугольных треугольников*).

КОЭФФИЦИЕНТ — числовой множитель в произведении, не содержащем других числовых множителей. Например, в выражении $5a^2bc$ коэффициент равен 5, в выражении $-3x(2x-5)$ коэффициент равен -3. Если в произведении имеется несколько числовых множителей, то для получения коэффициента надо эти числовые множители перемножить. Например, произведение $2x \cdot 3y$ надо записать в виде $6xy$, после чего можно будет сказать, что в этом выражении коэффициент равен 6. Наконец, если в произведении числовых множителей нет, то коэффициент в нем считается равным 1 или -1 в зависимости от знака: выражение $-a$ имеет коэффициент -1, а выражение xy имеет коэффициент 1.

КРАТНОЕ целого числа a, отличного от нуля,— такое целое число, которое делится на a без остатка. Кратным числа 0 считается только само число 0. Иначе говоря, целое число b называется кратным целого числа a, если существует такое целое число k, что $b=ka$. Например, все числа, оканчивающиеся нулем, являются кратными числа 10; число 10 является кратным чисел 1, 2, 5, 10, —1, —2, —5, —10. Если число $b \neq 0$ является кратным числа a, то a называется делителем числа b.

КРУГ — часть плоскости, ограниченная *окружностью*. Более точно, круг — это множество всех точек плоскости, лежащих внутри окружности и на самой окружности. Если окружность имеет центр O и радиус r, то определяемый ею круг считается имеющим центр O и радиус r. Этот круг состоит из всех точек (на плоскости), удаленных от O на расстояние, не превосходящее r. Таким образом, если K — круг с центром O и радиусом r, то соотношение $A \in K$ имеет место в том и только в том случае, если $OA \leqslant r$.

КУБ — тело, ограниченное шестью квадратами. Всякий куб является *прямоугольным параллелепипедом*. Куб — это такой прямоугольный параллелепипед, все три *измерения* которого одинаковы. Если ребро куба имеет длину a, то объем этого куба равен a^3.

ЛИНЕЙКА — инструмент для проведения прямых линий. При решении геометрических задач на построение считается, что с помощью линейки можно провести прямую через любые две данные точки, т. е. линейка считается неограниченно длинной. На практике, конечно, линейка имеет ограниченную длину, т. е. с ее помощью можно проводить лишь отрезки ограниченной длины. Обычно на линейку наносится мерная шкала (см. *Масштабная линейка*).

ЛОМАНАЯ ЛИНИЯ — конечное множество *отрезков*, которые можно занумеровать таким образом, что конец первого отрезка является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. Эти отрезки называются сторонами или звеньями, их концы — вершинами ломаной. Если при этом конец последнего отрезка совпадает с началом первого, то ломаная линия называется замкнутой. Ломаную линию обозначают перечислением всех ее вершин в том порядке, в котором они лежат на ней (см. также *Многоугольник, Периметр многоугольника*).

ЛУЧ — часть прямой, ограниченная точкой; эта точка называется началом луча и считается принадлежащей лучу. Если O — начало луча и A — какая-либо отличная от O точка этого луча, то этот луч содержит, кроме O, все те точки прямой OA, которые расположены по ту же сторону от O, что и точка A. Его называют «луч OA». Заметим, что лучи OA и AO различны (началом второго служит точка A).

Всякая точка, лежащая на прямой, делит ее на два луча (и является началом обоих лучей).

МАСШТАБНАЯ ЛИНЕЙКА — *линейка* с нанесенной на ней равномерной шкалой, обычно в сантиметрах или миллиметрах. Применяется как для проведения прямых, так и для измерений.

МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. В треугольнике три медианы. Они пересекаются в одной точке — центре тяжести треугольника. Длину медианы также называют медианой.

МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР — совокупность принятых в международной практике единиц измерения длины, площади и объема, имеющая в основе единицу длины — метр. Основной единицей площади является квадратный метр (квадрат со стороной в 1 *м*), единицей объема — кубический метр (куб с ребром 1 *м*). Остальные меры получаются из этих при помощи умножения и деления на степени числа 10. При этом употребляются приставки: милли- (тысячная доля), санти- (сотая доля), деци- (десятая доля), дека- (десять), гекто- (сто), кило- (тысяча) (см. также *Длина отрезка*).

С мерами объема связаны и меры веса: тонна (вес 1 *куб. м.* воды), килограмм (0,001 тонны).

МИНУТА УГЛОВАЯ — $^1/_{60}$ доля углового *градуса.*

МНОГОГРАННИК — часть пространства (тело), ограниченная конечным числом многоугольников. Эти многоугольники называются гранями многогранника, стороны граней — ребрами многогранника, концы ребер — вершинами многогранника.

МНОГОУГОЛЬНИК — лежащая в плоскости и не пересекающая самое себя замкнутая ломаная линия вместе с ее внутренней областью. Указанная ломаная называется контуром многоугольника, звенья этой ломаной называются сторонами многоугольника, а ее вершины — вершинами многоугольника. По числу вершин многоугольники делятся на треугольники, четырехугольники и т. д. Многоугольник с n вершинами называется n-угольником.

МНОЖЕСТВО — одно из важнейших понятий математики. Это понятие является первичным, т. е. не имеет определения. Для пояснения говорят, что слово «множество» употребляется в математике в таком же смысле, в каком мы говорим о наборе предметов, коллекции вещей и т. п. Множество может состоять из элементов произвольной природы. Но каждый раз, говоря о некотором множестве, мы должны точно знать, какие элементы в него входят и какие не входят. Это достигается перечислением элементов (если их немного) или указанием свойств, наличие которых является условием принадлежности элементов данному множеству. Например, множество прямоугольных треугольников — это множество, в которое входит каждый прямоугольный треугольник и не входит ни один элемент, не являющийся прямоугольным треугольником. Для удобства формулировок вводится понятие пустого множества — множества, не содержащего ни одного элемента. Таково, например, множество квадратов, имеющих острый угол (или множество волков, имеющих плавники). Множества обозначаются заглавными латинскими буквами, а элементы — строчными латинскими буквами. Запись $A=\{a, b, c\}$ обозначает, что множество A состоит из элементов a, b, c.

Если перечислить все элементы невозможно (ввиду того, что их слишком много или даже бесконечно много), в записи множества используют многоточие. Например, натуральный ряд (множество всех натуральных чисел) обозначают записью $N=\{1, 2, 3, \dots\}$ Однако при употреблении многоточия каждый раз необходимо указывать, что оно означает (см. стр. 45—46 в этой книге).

Запись $B=\varnothing$ означает, что B — пустое множество. Запись $a\in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A (см. *Подмножество, Пересечение множеств, Объединение множеств*).

МНОЖИМОЕ — первый *сомножитель*.

МНОЖИТЕЛЬ. Это слово употребляется в двух значениях: 1) второй из двух сомножителей в произведении; 2) множитель числа a — то же, что и делитель числа a (например, говорят о разложении числа на простые множители).

МОДУЛЬ ЧИСЛА (абсолютная величина числа) — расстояние от изображения числа на числовой оси до начала оси. Обозначается модуль числа x через $|x|$. Например, число 3 удалено от 0 на три единицы. Поэтому модуль числа 3 равен 3. На таком же расстоянии от начала находится на оси число — 3. Поэтому и его модуль равен 3, т. е. $|3|=3$, $|-3|=3$. Модуль нуля равен нулю. Можно дать следующее определение модуля числа (разумеется, равносильное предыдущему): модуль положительного числа равен самому этому числу, модуль нуля равен нулю, модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

$|-x|=|x|$,

$|x|$ — неотрицательное число (для любого x);

$|xy|=|x|\cdot|y|$,

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}.$$

Все эти свойства могут быть доказаны перебором возможностей (x положителен, y отрицателен; x положителен, $y=0$ и т. д.).

Расстояние между двумя точками a и b на числовой оси вычисляется как модуль их разности: $|a-b|$. Например, расстояние между 5 и 3 равно $|5-3|=|2|=2$, расстояние между 5 и -3 равно $|5-(-3)|=|5+3|=|8|=8$.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ двух или нескольких натуральных чисел — наибольшее из натуральных чисел, на которое делятся все данные числа. Обозначается НОД чисел a и b символом (a, b) или $D(a, b)$. Для отыскания $D(a, b)$ нужно разложить каждое из чисел a, b на простые множители и выписать все простые сомножители, входящие в оба разложения одновременно, причем каждый раз нужно брать наименьшую из степеней, в которых они входят в эти разложения; тогда произведение выписанных множителей и будет равно $D(a, b)$. Например, $12=2^2\cdot3$, $18=2\cdot3^2$. В НОД войдет и тройка, и двойка, причем обе в первой степени. Для чисел же $36=2^2\cdot3^2$ и $270=2\cdot3^3\cdot5$ НОД будет равен $2\cdot3^2=18$.

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ двух или нескольких натуральных чисел — наименьшее из *натуральных чисел,* делящихся одновременно на все эти числа. Обозначается НОК чисел a и b символом $[a, b]$ или $K(a, b)$. Для отыскания $K(a, b)$ нужно разложить каждое из чисел a, b на простые множители и выписать все простые сомножители, входящие хотя бы в одно из этих разложений, причем каждый раз нужно брать наибольшую из степеней, в которых они входят в эти разложения; тогда произведение выписанных множителей и будет равно $K(a, b)$. Например, $12=2^2\cdot3$, $18=2\cdot3^2$. Значит, $K(12, 18)=2^2\cdot3^2=36$. Для чисел же $108=2^2\cdot3^3$ и $120=2^3\cdot3\cdot5$ НОК имеет значение $2^3\cdot3^3\cdot5=1080$.

НАИМЕНЬШИЙ ОБЩИЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ данных дробей — НОК их знаменателей (см. *Наименьшее общее кратное*). Поскольку НОК знаменателей делится на каждый из знаменателей, каждую из данных дробей можно записать в виде дроби, знаменатель которой равен этому НОК. Поскольку НОК — наименьшее из чисел, делящихся на все данные знаменатели, такая операция в большинстве случаев экономнее, чем приведение всех дробей к другому общему знаменателю. Приведение дробей к общему знаменателю (наименьшему) используется при сложении, вычитании и сравнении дробей. *Примеры*:

$^1/_{24}+{}^1/_{16}={}^2/_{48}+{}^3/_{48}={}^5/_{48}$;

$^3/_{10}-{}^{13}/_{60}={}^{18}/_{60}-{}^{13}/_{60}={}^5/_{60}={}^1/_{12}$;

$^3/_4$ больше, чем $^2/_3$, так как $^3/_4={}^9/_{12}$, а $^2/_3={}^8/_{12}$. (Конечно, последнюю задачу можно решать и по-другому: $^3/_4$ ближе к единице, чем $^2/_3$).

НАКЛОННАЯ к данной прямой a — прямая, пересекающая прямую a и не перпендикулярная к ней.

НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ (или векторы) — отрезки, у которых различаются начало и конец. В написании начало ставится на первом, конец — на втором месте, а сверху ставится черточка (или стрелка). Так, отрезок AB и отрезок BA — это один и тот же отрезок; направленные же отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ различны. У первого начало находится в точке A, а конец в точке B, у второго наоборот. Направление вектора обозначается на чертеже стрелкой.

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА получаются последовательным прибавлением числа 1 к самому себе: $2=1+1$, $3=2+1$, $4=3+1$ и т. д. Множество $N=\{1, 2, 3, \dots\}$ всех натуральных чисел бесконечно, оно называется натуральным рядом. В школе натуральные числа изучаются ранее всех других чисел. Уже после этого вводится понятие *целого числа* и *дроби*. Поэтому часто произносимая фраза «Натуральные числа — это целые положительные числа» не может служить определением натуральных чисел; она лишь объясняет, какое место в множестве целых чисел они занимают. Отметим, что число нуль не является натуральным числом. Это важно знать школьнику, так как длительное время (до V класса) нуль — единственное известное ему целое число, не являющееся натуральным.

НАЧАЛО ЛУЧА — см. *Луч.*

НЕИЗВЕСТНЫЕ — см. *Равенство.*

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. Множество неотрицательных чисел включает в себя число *нуль* и все *положительные числа.* Например, число -2 отрицательное, а числа 0, 3, $1/2$ неотрицательные. Аналогично можно определить множество неположительных чисел: оно содержит все отрицательные числа и число нуль.

НЕРАВЕНСТВО — 1) *высказывание* одного из видов: «a больше b», «a меньше b», «a не больше b», «a не меньше b» (символически: $a>b$, $a<b$, $a\leqslant b$, $a\geqslant b$). Первые два типа неравенств называются иногда строгими неравенствами, третий и четвертый тип — нестрогими неравенствами. Неравенства $a>b$, $b<a$ означают, что число $a-b$ положительно (т. е. $a-b>0$); неравенства $a\geqslant b$, $b\leqslant a$ означают, что число $a-b$ неотрицательно (т. е. $a-b\geqslant 0$). Как и всякие высказывания, неравенства могут быть истинными и ложными. Например, $3>2$, $4\leqslant 5$, $6\geqslant 6$, $8>1$ — истинные высказывания (говорят еще: верные неравенства), $6>7$, $3\leqslant 2$ — ложные (неверные) неравенства. Важнейшие свойства неравенств: если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$; если $a>0$ и $b>0$, то $a+b>0$ и $ab>0$.

2) Если неравенство содержит переменную, то при одних значениях переменной оно может оказаться верным (т. е. будет истинным высказыванием), а при других значениях — неверным. Поэтому для неравенств, содержащих переменную, ставится задача решить это неравенство, т. е. установить, при каких значениях переменной оно становится верным высказыванием.

НЕСОКРАТИМАЯ ДРОБЬ — см. *Обыкновенная дробь.*

НЕЧЕТНОЕ ЧИСЛО — целое число, не делящееся на два. Общая запись: $2n+1$, где n — любое целое число. Иными словами, при любом целом n число $2n+1$ — нечетное, причем в таком виде может быть записано любое нечетное число. Общую запись нечетного числа дает и формула $2n-1$. Эта формула особенно удобна для выражения натуральных нечетных чисел: n-е натуральное нечетное число равно $2n-1$; например, 5 — третье натуральное нечетное число; $5=2\cdot 3-1$.

НУЛЬ — число, обладающее свойством $a+0=0+a=a$ (для любого a). Этим свойством обладает только число нуль: если для некоторого числа a справедливо равенство $a+x=a$, то отсюда следует, что $x=0$. Важное свойство нуля заключается в том, что $a\cdot 0=0\cdot a=0$ для любого числа a. Обратно, если $ab=0$, то хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, т. е. либо $a=b$, либо $b=0$, (либо оба они равны нулю). На этом свойстве произведения основан, в частности, один из методов решения уравнений. Если, например, $(x-1)(x+2)x=0$, то это значит, что либо $x-1=0$, (т. е. $x=1$), либо $x+2=0$ (т. е. $x=-2$), либо $x=0$.

ОБРАТНЫЕ ЧИСЛА. Если $a\neq 0$, то обратным ему называется число $\frac{1}{a}$. Числа a и $\frac{1}{a}$, произведение которых равно единице, называются взаимно-обратными числами. Примеры взаимно-обратных чисел: 2 и $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$ и 7, -3 и $-\frac{1}{3}$, 0,2 и $\frac{1}{0{,}2}=5$

$\frac{3}{7}$ и $\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$. Нуль обратного числа не имеет.

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ — множество, содержащее те и только те элементы, которые входят хотя бы в одно из данных множеств. Объединение множеств обозначается символом $\cup$, т. е. $A\cup B$ — объединение множеств A и B. *Примеры*: $\{1, a\}\cup\{2, 3\}\cup\{A, 4, 6\}=\{1, a, 2, 3, A, 4, 6\}$; $\{a, b, ?\}\cup\{a, c, ?, !\}=\{a, b, c, ?, !\}$; $\{1, 2, 3\}\cup\{1, 2, 3\}=\{1, 2, 3\}$; вообще, $A\cup A=A$. Объединение любого множества A и пустого множества считается равным множеству A, т. е. $A\cup\varnothing=A$.

ОБЪЕМ — числовая характеристика пространственных фигур (тел), показывающая (с интуитивной точки зрения), как много места занимает тело в пространстве. При изучении темы «Объем прямоугольного параллелепипеда» в IV классе вводится более конкретное определение: объем тела—это число, показывающее, сколько единиц объема в нем содержится. При этом под единицей объема понимается куб, ребром которого служит единичный отрезок. Общеприняты единицы объема: 1 *куб. мм*, 1 *куб. см* (он равен

1000 *куб. мм*); 1 *куб. дм* (литр, он равен 1000 *куб. см*); 1 *куб. м* (равен 1000 *куб. дм*).

ОБЫКНОВЕННАЯ ДРОБЬ (или просто *дробь*) — запись вида $\frac{a}{b}$, где a и b — целые числа ($b \neq 0$). Число a называется числителем, число b — знаменателем дроби $\frac{a}{b}$. *Примеры*: $\frac{3}{5}$, $\frac{-2}{7}$, $\frac{2}{-7}$, $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{6}{1}$. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными (т. е. изображающими одно и то же *рациональное число*), если $ad = bc$. Например, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{9}{12} = \frac{15}{20}$. Целые числа могут быть записаны в виде дробей $\left(\frac{0}{5} \text{ и } \frac{6}{1} — \text{целые числа } 0 \text{ и } 6\right)$, т. е. множество всех целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел. Если a и b не имеют общих делителей, отличных от ± 1, то дробь $\frac{a}{b}$ называется несократимой. Если $|a| < |b|$ (см. *Модуль числа*), то $\frac{a}{b}$ называется правильной дробью.

Отметим, что определения упрощаются, если рассматриваются только положительные дроби (IV класс), т. е. дроби с натуральными числителем и знаменателем.

Основное свойство дроби:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ если } c \neq 0.$$

Иначе говоря, если числитель и знаменатель дроби умножить (или разделить) на одно и то же число, не равное нулю, получится дробь, равная исходной. На этом основано сокращение дробей:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Действия над дробями выполняются следующим образом.

Сумма (разность) дробей с одинаковым знаменателем равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме (разности) числителей данных дробей:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}, \quad \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7},$$

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями выполняется с помощью приведения их к общему знаменателю (лучше всего к *наименьшему общему знаменателю*).

Примеры: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$;

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12};$$

Произведение дробей равно дроби с числителем, равным произведению числителей данных дробей, и со знаменателем, равным произведению знаменателей данных дробей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Пример: $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3\cdot7}{5\cdot6}=\frac{7}{10}$.

Деление дробей заменяется умножением *делимого* на число, обратное *делителю*:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Пример: $\frac{3}{8}:\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$

(см. также *Дробь, Смешанное число*).

ОКРУГЛЕНИЕ числа до тысячных (или, как еще говорят, до 0,001) — замена данного числа другим по следующим правилам:
1) все цифры, стоящие перед разрядом тысячных, сохраняются;
2) все цифры, стоящие после разряда тысячных, отбрасываются (заменяются нулями);
3) цифра в разряде тысячных сохраняется, если первая отбрасываемая цифра — 0, 1, 2, 3 или 4;
4) цифра в разряде тысячных увеличивается на единицу, если первая отбрасываемая цифра 5, 6, 7, 8 или 9.

Аналогично определяется округление до любого другого разряда (до сотых, до целых и т. п.).

Примеры:
1) округление числа 0,1893 до сотых дает 0,19;

2) округление числа 10, 12 до целых дает 10;
3) округление 28, 53 до целых дает 29;
4) округление 394 до сотен дает 400;
5) округление 21, 95 до десятых дает 22,0.

Существует еще «правило четной цифры», относящееся к случаю, если отбрасывается последняя пятерка, но оно в программу не вводится как имеющее ограниченное применение.

ОКРУЖНОСТЬ с данным центром O и данным радиусом r — множество точек плоскости, удаленных от точки O этой плоскости на расстояние r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ — предложение, вводящее новое понятие. В определении всегда присутствует определяемый термин.

Примеры:

1) угол, меньший прямого, называется острым углом;
2) несократимая дробь — это дробь, числитель и знаменатель которой *взаимно просты*.

ОРДИНАТА — см. *Прямоугольная система координат*.

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ — геометрическое преобразование плоскости, наглядно поясняемое перегибанием листа бумаги по некоторой прямой (называемой осью симметрии). При осевой симметрии каждая точка оси переходит в себя, а точка A, не лежащая на оси, переходит в такую точку B, что ось перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину. Важным свойством осевой симметрии является следующее: «если точка A переходит при осевой симметрии в точку B, то точка B переходит в точку A». Точки, переходящие друг в друга при осевой симметрии с осью l, называются симметричными относительно l.

Две симметричные точки одинаково удалены от любой точки оси симметрии. Обратно, если две различные точки A и B одинаково удалены хотя бы от двух точек M и N некоторой прямой l (т. е. $AM=BM$ и $AN=BN$), то A и B симметричны относительно l. Две фигуры называются симметричными относительно l, если каждая точка первой фигуры симметрична некоторой точке второй фигуры и каждая точка второй фигуры симметрична некоторой точке первой фигуры. Симметричные фигуры равны (они совмещаются при перегибании листа бумаги; см. *Равенство*). Если при симметрии относительно l некоторая фигура переходит сама в себя, то она называется симметричной относительно l, а прямая l называется осью симметрии этой фигуры. В этом случае прямая l разбивает фигуру на две части, которые симметричны друг другу относительно прямой l. Например, прямая линия симметрична относительно любого перпендикуляра к ней, отрезок симметричен относительно перпендикуляра, проведенного через середину этого отрезка, угол симметричен относительно биссектрисы, равнобедренный треугольник — относительно прямой, проходящей через его вершину и через середину основания, окружность и круг — относительно любой прямой, проходящей через центр. Прямоугольник имеет две оси симметрии, ромб — тоже две, квадрат — четыре. Прямая, луч и отрезок симметричны относительно оси, проходящей через них.

ОСИ КООРДИНАТ — см. *Прямоугольная система координат.*

ОСНОВАНИЕ — 1) прямоугольника — см. *Высота прямоугольника;* 2) прямоугольного параллелепипеда — см. *Высота прямоугольного параллелепипеда;* 3) равнобедренного треугольника — см. *Равнобедренный треугольник*; 4) степени — см. *Степень;* 5) трапеции и параллелограмма — см. *Высота трапеции*; 6) треугольника — см. *Высота треугольника.*

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ — см. *Обыкновенная дробь.*

ОСТАТОК — см. *Деление с остатком.*

ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК — треугольник, все три угла которого острые (см. *Прямоугольный треугольник* и *Тупоугольный треугольник).*

ОСТРЫЙ УГОЛ — угол, меньший прямого.

ОТНОШЕНИЕ ДВУХ ЧИСЕЛ — частное от деления первого из них на второе.

Примеры: отношение 2 к 3 равно $\frac{2}{3}$, отношение $\frac{-5}{3}$ к $\frac{1}{9}$ равно — 15, отношение 0 к 7 равно 0; отношение 7 к 0 и отношение 0 к 0 не существуют (см. *Деление).*

ОТРЕЗОК — часть прямой, ограниченная двумя точками. Точнее: отрезком AB называется фигура (множество точек), включающая в себя точку A, точку B, а также всякую точку прямой AB, лежащую между точками A и B. Точки A и B называются концами отрезка. Отрезок AB можно также обозначить BA. Кроме обозначения отрезка через наименования его концов (отрезок AB) употребительно и обозначение отрезка одной малой латинской буквой (отрезок a).

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА — см. *Положительные и отрицательные числа.*

ПАЛЕТКА — квадратная сетка для приближенного измерения площадей. Обычно наносится на прозрачный материал (см. стр. 94—95 этой книги).

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД — тело, ограниченное шестью *параллелограммами* (см. *Прямоугольный параллелепипед*).

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ — четырехугольник, каждая сторона которого параллельна противоположной ей стороне; является частным случаем трапеции: если у трапеции боковые стороны параллельны, она превращается в параллелограмм.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ — 1) параллельные прямые — прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек [1]; 2) параллельные отрезки и лучи — отрезки и лучи, лежащие на параллельных прямых; 3) параллельные грани параллелепипеда — грани, не имеющие общих точек; они лежат в параллельных (т. е. не пересекающихся) плоскостях.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС — геометрическое преобразование плоскости, при котором каждая точка перемещается на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. При параллельном переносе любая фигура переходит в равную ей фигуру.

ПЕРЕМЕННАЯ — буква в математическом предложении, вместо которой можно подставлять элементы какого-либо множества, например числа. Эти элементы называются значениями переменной. Например, в математическом предложении $a+b=b+a$ буквы a и b — переменные; вместо них можно подставлять числа. При каждом употреблении переменной необходимо указывать, из какого множества разрешается производить подстановку ее значений. Роль переменной аналогична роли местоимений в обычном языке.

ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНОСТЬ — см. *Коммутативность.*

ПЕРЕНОС — см. *Параллельный перенос.*

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ — две окружности, имеющие ровно две общих точки. Вообще возможны следующие четыре случая взаимного расположения двух окружностей: 1) совпадающие окружности (у них бесконечно много точек), 2) пересекающиеся окружности (две общих точки), 3) касающиеся окружности (окружности, имеющие ровно одну общую точку), 4) окружности, не имеющие общих точек.

Заметим, что эта геометрическая терминология (существующая по традиции) не совпадает с терминологией, связанной с множествами: если две окружности, рассматриваемые как множества точек, пересекаются в том смысле, что они имеют непустое пересечение, то это еще не означает, что они пересекаются в геометрическом смысле (они могут оказаться касающимися или совпадающими).

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ — две прямые, имеющие ровно одну общую точку (т. е. две несовпадающие прямые, имеющие непустое пересечение). Возможны, таким образом, следующие три случая взаимного расположения двух прямых (в одной плоскости): 1) совпадающие прямые (бесконечно много общих точек), 2) пересекающиеся прямые (одна общая точка), 3) прямые, не имеющие общих точек (параллельные). И здесь, как и в случае *пересекающихся окружностей,* эта традиционно установившаяся геометриче-

---

[1] Во многих отношениях полезно считать параллельными также и совпадающие прямые (т. е. считать, что каждая прямая параллельна самой себе). Однако в младших классах такая точка зрения не проводится.

ская терминология не совпадает с терминологией, связанной с множествами: если две прямые, рассматриваемые как множества точек, пересекаются в том смысле, что они имеют непустое пересечение, то это еще не означает, что они пересекаются в геометрическом смысле (они могут оказаться совпадающими).

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ — их общая часть. Пересечение множеств A и B состоит из элементов, каждый из которых одновременно является и элементом множества A, и элементом множества B. Пересечение обозначается символом $\cap$, т. е. $A \cap B$ — пересечение множеств A и B.

Пример: $\{1, 2, a, b\} \cap \{2, 3, a, c\} = \{2, a\}$,
$\{1, a\} \cap \{2, 3\} = \varnothing$,
$\{2, 7, 5\} \cap \{2, 7, 5\} = \{2, 7, 5\}$,
вообще, $A \cap A = A$.

Пересечение пустого множества с любым другим множеством пусто:

$A \cap \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$.

Два множества с непустым пересечением называются пересекающимися. Однако вопрос о пересечении прямых и окружностей рассматривается в геометрии несколько иначе (см. *Пересекающиеся окружности, Пересекающиеся прямые*).

ПЕРИМЕТР МНОГОУГОЛЬНИКА — сумма длин сторон многоугольника (т. е. длина ломаной, служащей контуром этого многоугольника).

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДРОБЬ — см. *Десятичная дробь*.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР к данной прямой (лучу, отрезку) — прямая (луч, отрезок), составляющая с данной прямой (лучом, отрезком) *прямой угол*.

ПЛАНИМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий плоские фигуры.

ПЛОСКОСТЬ — одно из основных неопределяемых понятий школьного курса геометрии. В IV—V классах ученик должен понимать, что плоскость бесконечна, что прямая, имеющая две общие точки с плоскостью, вся принадлежит этой плоскости, что плоскость «бесконечно тонка» (не имеет толщины).

ПЛОЩАДЬ — числовая характеристика плоских фигур, показывающая (с интуитивной точки зрения), как много места занимает фигура на плоскости. При изучении темы «Площадь прямоугольника» в III классе вводится более конкретное определение: площадь фигуры — это число, показывающее, сколько единиц площади в ней содержится. При этом под единицей площади понимается квадрат, стороной которого служит единичный отрезок. Общепринятые единицы площади: 1 *кв. мм*, 1 *кв. см* (равен 100 *кв. мм*), 1 *кв. дм* (равен 100 *кв. см*), 1 *кв. м* (равен 100 *кв. дм*), 1 *а* (*ар*, равен

100 *кв. м*), 1 *га* (гектар, равен 10 000 *кв. м*), 1 *кв. км* (равен 1 000 000 *кв. м*).

ПОВЕРХНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА (и вообще многогранника) — объединение всех его граней.

ПОВОРОТ (или вращение) с центром O на угол α — геометрическое преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в такую точку A', что: 1) $OA'=OA$; 2) $\angle AOA'=\alpha$.

При этом нужно еще указывать направление поворота: по или против часовой стрелки (в старших классах это достигается приписыванием углу поворота положительного или отрицательного значения). При повороте любая фигура переходит в равную ей фигуру.

ПОДМНОЖЕСТВО ДАННОГО МНОЖЕСТВА — множество, каждый элемент которого является элементом данного множества. Пустое множество считается подмножеством любого множества. Если A является подмножеством множества B, то это записывают так: $A \subset B$ (A включено в B, или, иначе, A содержится в B). Нельзя смешивать знаки $\subset$ и $\in$.

Примеры: $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\varnothing \subset A$, $\varnothing \subset \varnothing$, $\{1, 5\} \subset \{1, 5\}$. Вообще, $A \subset A$.

Пересечение двух множеств является подмножеством каждого из них: если $A \cap B = C$, то $C \subset A$, $C \subset B$. Если же $A \cup B = C$, то $A \subset C$, $B \subset C$ (см. *Объединение множеств*).

ПОДОБНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ — слагаемые, совпадающие между собой или отличающиеся числовыми множителями *(коэффициентами)*. Например, $5m$ и $-17m$; $-2{,}7x$ и $\frac{1}{3}x$; z и $7z$. Слагаемые, не содержащие букв, также подобны: 7 и 5, $-\frac{1}{3}$ и 7,6. Используя *коммутативность* и *ассоциативность сложения,* можно в алгебраической сумме, содержащей подобные слагаемые, сгруппировать их, например:

$$5m-2{,}7x+z+7-17m+7{,}6+\frac{1}{3}x+7z=$$

$$=(5m-17m)+\left(-2{,}7x+\frac{1}{3}x\right)+(z+7z)+(7+7{,}6).$$

Затем можно, используя дистрибутивность, записать каждую группу в виде одного слагаемого:

$$5m-17m=m(5-17)=m(-12)=-12m,$$
$$-2{,}7x+\frac{1}{3}x=x\left(-2{,}7+\frac{1}{3}\right)=x\cdot\left(-2\frac{11}{30}\right)=-2\frac{11}{30}x,$$
$$z+7z=z(1+7)=z\cdot 8=8z,$$
$$7+7{,}6=14{,}6.$$

В результате получается алгебраическая сумма, не содержащая подобных слагаемых; в рассмотренном случае получается сумма

$$-12m-2\frac{11}{30}x+8z+14{,}6.$$

Описанный процесс называется приведением подобных слагаемых.

ПОКАЗАТЕЛЬ СТЕПЕНИ — см. *Степень.*

ПОЛЕ — см. *Числовое поле.*

ПОЛНЫЙ УГОЛ — см. *Угол.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. Все действительные числа (см. *Числовое поле*) делятся на положительные, отрицательные и нуль. В частности, все натуральные числа, а также дроби с натуральными числителями и знаменателями являются положительными числами. Числа, *противоположные* положительным, называются отрицательными.

Ученик V класса должен знать, что

сумма, произведение и *частное* двух положительных чисел — числа положительные;

сумма двух отрицательных чисел — число отрицательное;

произведение и частное двух отрицательных чисел — числа положительные;

произведение и частное положительного и отрицательного числа — числа отрицательные.

ПОЛУПЛОСКОСТЬ — часть *плоскости,* ограниченная *прямой линией.* Всякая прямая делит плоскость на две полуплоскости; точки, принадлежащие одной и той же полуплоскости, обладают тем свойством, что соединяющий их отрезок не пересекает эту прямую.

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ в числовом выражении определяется следующими соглашениями [1]:

а) в выражении, не содержащем скобок, сначала выполняются *умножение* и *деление* (в том порядке, в котором они записаны), а затем *сложение* и *вычитание* (в том порядке, в котором они записаны);

б) в выражении, содержащем скобки, сначала выполняются действия в скобках, начиная от внутренних скобок.

В следующем примере порядок действий указан цифрами сверху:

$$a\overset{7}{-}b\overset{8}{+}[c\overset{4}{+}(d\overset{2}{-}e\overset{1}{\cdot}f\overset{3}{+}g)]\overset{5}{\cdot}n\overset{6}{:}i.$$

---

[1] Иногда можно этот порядок изменить, но всякий раз такое изменение должно опираться на законы действий. Например, в приводимом выражении можно поменять местами действия 6 и 7.

ПРАВИЛЬНАЯ ДРОБЬ — см. *Обыкновенная дробь.*
ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ — см. *Обыкновенная дробь, Десятичная дробь.*
ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ — см. *Делимость.*
ПРИЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ — углы, имеющие общую сторону и не имеющие общих внутренних точек.
ПРОИЗВЕДЕНИЕ — см. *Умножение.*
ПРОСТЫЕ ЧИСЛА — *натуральные числа,* имеющие ровно два различных натуральных делителя. Иными словами, натуральное число $a>1$ — простое, если оно не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и a. Из натуральных чисел первой сотни это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97. Все остальные числа первой сотни имеют не два натуральных делителя: число 1 имеет один делитель, а другие числа — более двух делителей (см. *Делимость*).
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЛУЧИ — два *луча* с общим *началом, объединение* которых есть *прямая линия.*
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА — два числа, сумма которых равна нулю: 5 и —5, —8,1 и 8,1, 0 и 0 и т. д. У каждого числа есть единственное противоположное число: у положительного — отрицательное, у отрицательного — положительное, у нуля — нуль. Два противоположных числа имеют равные модули.
ПРОЦЕНТ — сотая часть. Записывается символом %. Например, 5% от 8 — это 0,05 от 8. Найти $p\%$ от числа a — все равно что найти $\frac{p}{100}$ от a. Таким образом, $p\%$ от a равны $\frac{ap}{100}$. Например, 5% от 8 равны $\frac{5\cdot 8}{100}=0{,}4$.
ПРОЦЕНТНОЕ ОТНОШЕНИЕ — отношение чисел, выраженное в процентах. Например, отношение числа 2 к 4 равно 2/4, или 1/2, или 0,5, или 50% (см. *Процент*).
ПРОЦЕСС ИЗМЕРЕНИЯ — последовательное откладывание единицы измерения и ее частей на данном отрезке с целью определения *длины отрезка.* Процесс измерения проводится следующим образом. Сначала на данном отрезке AM откладываются последовательно отрезки AB, BC, CD,..., равные единице измерения. Допустим, что отложилось 4 таких отрезка и остался остаток EM, меньший единицы измерения. Тогда с точностью до единицы длина отрезка AM равна 4 (с недостатком) или 5 (с избытком). Записывают это в виде *двойного неравенства:*

$$4\leqslant AM<5$$

(первое неравенство нестрогое, так как, возможно, единица длины отложилась на AM ровно 4 раза без остатка, т. е. остаток оказался равным нулю).

Если мы хотим точнее узнать длину отрезка AM, то на полученном остатке EM последовательно откладываем отрезки EF, FG, GH,..., равные десятой части единицы измерения (например, если единицей измерения служит сантиметр, то на остатке откладываем миллиметровые отрезки). Допустим, что десятая часть единицы измерения отложилась на остатке EM 7 раз и остался новый остаток, теперь уже меньший, чем десятая часть единицы измерения. Тогда с точностью до 0,1 длина отрезка AM равна 4,7 (с недостатком) или 4,8 (с избытком):

$$4{,}7 \leqslant AM < 4{,}8.$$

Чтобы еще точнее узнать длину отрезка, надо откладывать на новом остатке отрезки, равные сотой части единицы измерения. Тогда мы узнаем длину отрезка AM с точностью до 0,01; например,

$$4{,}72 \leqslant AM < 4{,}73.$$

Затем можно произвести измерение длины с точностью до 0,001 и т. д.

Практически процесс измерения обязательно закончится через несколько шагов, так как измерительные приборы допускают лишь определенную точность измерения (например, штангенциркуль позволяет выполнять измерения с точностью до 0,01 *см*). Математически же процесс измерения может продолжаться неограниченно — с любой точностью. При этом представятся следующие возможности: 1) процесс измерения закончится через конечное число шагов (т. е. на каком-то шаге не получится остатка). Тогда мы будем точно знать длину отрезка AM в виде конечной десятичной дроби; 2) процесс измерения будет продолжаться неограниченно, т. е. на каждом шагу будет оставаться некоторый остаток. В таком случае длина отрезка AM будет представлять собой число, записываемое бесконечной десятичной дробью.

Второй случай, в свою очередь, можно разбить на два подслучая: 1) получающаяся бесконечная десятичная дробь будет периодической или смешанной периодической (см. *Десятичная дробь*). В таком случае длина отрезка AM — *рациональное число*. Например, если $AM = 1{,}33333...$, то можно написать $AM = 1\frac{1}{3}$. Ясно, что если бы в этом случае мы производили измерение не с помощью десятой части единицы измерения, а с помощью третьей части единицы измерения, то процесс измерения закончился бы на втором шаге; 2) длина отрезка выражается бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. является *иррациональным числом*. Например, в старших классах доказывается, что длина диагонали квадрата, сторона которого равна единице измерения, выражается *иррациональным* числом $\sqrt{2}$. Таким образом, построение полной математической теории измерения отрезков с необходимостью требует введения (в старших классах) иррациональных чисел.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ — одно из основных неопределяемых понятий школьной геометрии. Часто называется сокращенно: «прямая». В IV—V классах ученик должен знать, что через любые две точки проходит единственная прямая линия; прямая линия бесконечна. Кроме того, ученик должен представлять себе прямую бесконечно тонкой (не имеющей толщины).

ПРЯМОЙ УГОЛ — половина развернутого угла. См. *Угол.*

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ — один из способов установления соответствия между упорядоченными парами чисел и точками плоскости. Состоит в следующем. На плоскости выбирается пара взаимно перпендикулярных прямых (обычно — вертикальная и горизонтальная); на каждой из этих прямых выбирается положительное направление (обычно вправо и вверх); каждую из этих прямых считают числовой осью с началом в точке пересечения и с выбранной единицей масштаба (обычно единица выбирается одинаковой для обеих осей); одна из осей называется первой осью, или осью абсцисс (обычно это горизонтальная ось), другая — второй осью, или осью ординат; числа на первой оси называются абсциссами, или первыми координатами, на второй — ординатами, или вторыми координатами. Первая ось обычно обозначается Ox, вторая Oy. Так, точка A с первой координатой (абсциссой) 2 и второй координатой (ординатой) -3 обозначается $A(2, -3)$.
Плоскость, на которой задана система координат, называется координатной плоскостью.

ПРЯМОУГОЛЬНИК — четырехугольник, все углы которого прямые (см. также *Высота прямоугольника*).

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД — тело, ограниченное шестью *прямоугольниками* (см. также *Высота прямоугольного параллелепипеда*).

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК — *треугольник,* один из углов которого прямой. Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называются катетами; сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой.

ПУСТОЕ МНОЖЕСТВО — см. *Множество.*

РАВЕНСТВО — запись, состоящая из двух выражений и соединяющего их знака равенства (=). Равенство может быть числовым (если оба выражения числовые) или буквенным (если хотя бы одно из выражений буквенное). Числовые равенства всегда являются высказываниями — истинными или ложными: $2+3=5$, $2+3=17-12$, $2\cdot3=17-12$ и т. д.
Буквенное равенство называется *уравнением,* если поставлена задача найти те числовые значения букв, при подстановке которых получится верное числовое равенство. Буквы, участвующие в урав-

нении, называются **неизвестными**. (Впрочем, в старших классах рассматриваются также уравнения с буквенными данными; в таком случае должно быть указано, какие из входящих в уравнение букв считаются известными, а какие — неизвестными.) Обычно для обозначения неизвестных используются буквы x, y, z.
Буквенное равенство называется тождеством, если оно превращается в верное числовое равенство при любых значениях входящих в него букв. Например, законы арифметических действий

$a(bc)=(ab)c$, $a(b+c)=ab+ac$, $a\cdot 1=a$ и др.

являются тождествами. Тождествами являются также изучаемые в VI классе формулы сокращенного умножения.
Таким образом, относительно буквенных равенств типичны следующие две задачи: 1) решить уравнение, 2) доказать тождество. Само по себе буквенное равенство не может «сказать», уравнение оно или тождество. Мы должны обязательно указать наше отношение к этому равенству: если мы говорим, что это уравнение, то тем самым **ставим задачу** решить его, а если говорим, что это тождество, то тем самым **утверждаем** нечто (а именно то, что это равенство будет верным числовым равенством при подстановке вместо букв любых чисел).
РАВНЫЕ ФИГУРЫ — фигуры, которые можно наложить друг на друга так, что они совпадут всеми своими точками: каждая точка первой фигуры совпадет с какой-нибудь точкой второй фигуры, и каждая точка второй фигуры совпадет с какой-нибудь точкой первой фигуры. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками этих фигур с сохранением расстояний между точками.
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК — *треугольник*, две стороны которого равны между собой. Равные стороны равнобедренного треугольника называют боковыми сторонами, а третью сторону — основанием треугольника. Разумеется, как и во всяком треугольнике, в равнобедренном треугольнике имеются три вершины, три высоты, три медианы, три биссектрисы. Но если говорится просто о вершине равнобедренного треугольника, без указания ее обозначения, речь идет всегда о вершине, противолежащей основанию, точно так же если речь идет просто о высоте, без указания обозначения, то имеется в виду высота, проведенная к основанию. То же относится к биссектрисе и медиане.
Например: биссектриса равнобедренного треугольника является в то же время его медианой и высотой.
Если все три стороны треугольника равны между собой, он также равнобедренный (см. *Равносторонний треугольник*), однако если равносторонний треугольник мы хотим рассматривать как равно-

бедренный, то нужно указывать, какую сторону мы считаем основанием.

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК — *треугольник,* у которого все три стороны равны между собой. Всякий равносторонний треугольник является в то же время *равнобедренным треугольником.*

РАДИУС — расстояние от точки окружности до ее центра. Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, также называется радиусом (см. *Окружность, Круг*).

РАЗВЕРНУТЫЙ УГОЛ — угол, стороны которого — противоположные лучи, составляющие прямую линию. Развернутый угол занимает половину плоскости и равен половине полного угла.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА — представление его в виде произведения простых чисел. Примеры: $16=2\cdot2\cdot2\cdot2$, $180=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$. Разложение натурального числа (большего единицы) на простые множители всегда осуществимо и единственно (если не обращать внимания на порядок следования сомножителей). Осуществляется оно обычно так. Перебирая простые числа начиная от 2, находим наименьший простой множитель данного числа. Разделив данное число на этот простой множитель, получим частное, у которого таким же путем ищем еще один простой множитель, и т. д. Обычная форма записи этого процесса — столбиком.

Примеры:

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$144=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3=2^4\cdot3^2$

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$450=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=2\cdot3^2\cdot5^2$

999	3
333	3
111	3
37	37
1	

$999=3\cdot3\cdot3\cdot37=3^3\cdot37$

РАЗНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК — треугольник, у которого нет равных сторон.

РАЗНОСТЬ — см. *Вычитание.*
РАЗРЯДЫ — см. *Десятичная система счисления.*
РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОСТЬ — см. *Дистрибутивность.*
РАССТОЯНИЕ — 1) расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки; 2) расстоянием между двумя фигурами называется расстояние между двумя их ближайшими точками (если такие точки существуют). В частности, расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к этой прямой.
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА — числа, которые можно записать в виде отношения двух целых чисел. В множество рациональных чисел входят все целые числа, так как каждое из них можно записать в виде $\frac{n}{1}$, а также все обыкновенные дроби, все конечные десятичные дроби и все бесконечные периодические десятичные дроби:

$$5=\frac{5}{1},\ 0=\frac{0}{1},\ -6=\frac{-6}{1},\ 0{,}7=\frac{7}{10},\ 0,(3)=\frac{1}{3}$$

и т. д. Кроме рациональных чисел, в старших классах изучают действительные и комплексные числа (см. *Числовое поле*).
РЕБРО — см. *Многогранник.*
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА — значение переменной, при котором неравенство становится верным высказыванием (см. *Неравенство*).
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ — то же, что корень уравнения (см. *Уравнение*).
РОМБ — *четырехугольник*, все стороны которого равны. Всякий ромб является параллелограммом, всякий квадрат — ромбом.
СЕКУНДА УГЛОВАЯ — $^1/_{60}$ часть *минуты*: $1'=60''$.
СЕКУЩАЯ ОКРУЖНОСТИ — прямая, имеющая с окружностью две общие точки. Секущая удалена от центра окружности на расстояние, меньшее радиуса.
СИММЕТРИЯ ОСЕВАЯ — см. *Осевая симметрия.*
СКОБКИ — специальные знаки, употребляемые для обозначения *порядка действий*, а иногда и для других целей. В алгебре, например, фигурные скобки употребляются для записи множеств, круглые — для записи координат точек и т. д. В алгебре часто стоит задача раскрытия скобок. Если при этом выражение, заключенное в скобки, является слагаемым (см. *Алгебраическая сумма*), то различают два случая раскрытия скобки:

а) перед скобками стоит знак плюс (+) или не стоит никакого знака; в этом случае скобки просто опускают:

$$(a+b-c)+d=a+b-c+d; \quad d+(a+b-c)=d+a+b-c;$$

б) перед скобками стоит знак минус (—), в этом случае скобки опускают, меняя знак у каждого слагаемого в скобках:

$-(a+b-c)+d=-a-b+c+d$;
$d-(a+b-c)=d-a-b+c$.

Если выражение, стоящее в скобках, является множителем, скобки раскрывают по правилам *дистрибутивности*:

$a(b+c-d)=ab+ac-ad$;
$-a(b+c-d)=-ab-ac+ad$.

СЛАГАЕМОЕ — см. *Сложение.*
СЛОЖЕНИЕ — действие над числами (слагаемыми), дающее в результате новое число (сумму). Сложение обозначается знаком плюс, т. е. сумма чисел a и b обозначается через $a+b$.
Основные свойства сложения:

$a+b=b+a$ (коммутативность);
$a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность);
$a+0=a$;
$a+(-a)=0$ (последнее изучается только с V класса).

Сложение чисел первого десятка в десятичной системе счисления выполняется в соответствии с таблицей сложения:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Пользуясь приведенными основными свойствами сложения и таблицей сложения чисел первого десятка, а также способом записи чисел в *десятичной системе счисления,* можно вывести правила сложения многозначных чисел:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}5035\\1738\end{array}\\ \hline 6773\end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}384\\25\,806\end{array}\\ \hline 26\,190\end{array}$$

и т. д. (см. стр. 78—79 этой книги).

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ — два *угла,* меньшие *развернутого,* у которых одна *сторона* общая, а две другие — *противоположные лучи.*

Сумма смежных углов равна 180°.

СМЕШАННОЕ ЧИСЛО — сумма *целого числа* и *правильной дроби.* Записывается без знака сложения. *Примеры*: $2\frac{1}{3}$; $4\frac{1}{7}$.

СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ — см. *Обыкновенная дробь.*

СОМНОЖИТЕЛИ — см. *Умножение.*

СОЧЕТАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Ассоциативность.*

СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ. Для любых двух чисел a и b имеет место одно (и только одно) из трех соотношений: $a=b$, $a>b$, $a<b$. На *числовой прямой* (при обычном ее изображении) большее число располагается правее, чем меньшее. Всякое положительное число больше нуля (т. е. располагается справа от нуля), всякое отрицательное меньше нуля (располагается слева от нуля), всякое положительное число больше всякого отрицательного.

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ — частное от деления их суммы на их число.

Примеры: среднее арифметическое чисел 20 и 15 равно $\frac{20+15}{2}=$ $=17{,}5$; среднее арифметическое число 20, 15 и 40 равно $\frac{20+15+40}{3}=25$; среднее арифметическое всех чисел второго десятка равно

$$\frac{11+12+13+14+15+16+17+18+19+20}{10}=15{,}5.$$

СТЕПЕНЬ (с *натуральным* показателем) — сокращенное обозначение произведения одинаковых сомножителей: $4^5=4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4=1024$. Вообще a^n при натуральном $n>1$ — это произведение n сомножителей, каждый из которых равен a; кроме того, считают, по определению, что $a^1=a$.

В записи a^n число a называется основанием степени, а число n — показателем степени.

СТОРОНА МНОГОУГОЛЬНИКА — см. *Многоугольник.*

СТОРОНА УГЛА — см. *Угол.*

СУММА — см. *Сложение.*

ТЕОРЕМА — математическое предложение, справедливость которого устанавливается рассуждением на основе ранее установленных фактов (*аксиом* и *теорем*). Рассуждение, подтверждающее справедливость теоремы, называется ее доказательством.

ТОЖДЕСТВО — см. *Равенство*.

ТОЧКА — одно из основных, неопределяемых понятий школьного курса геометрии. В IV—V классах ученики должны понимать, что точка не имеет измерений — длины, ширины, толщины (см. также *Прямая линия, Плоскость*).

ТРАНСПОРТИР — прибор для измерения углов. В обычном варианте представляет собой модель развернутого угла, разделенного на градусы.

ТРАПЕЦИЯ — четырехугольник, две стороны которого параллельны. Параллельные стороны называются основаниями трапеции, а две другие стороны — ее боковыми сторонами.

ТРЕУГОЛЬНИК — *многоугольник* с тремя сторонами (см. *Высота треугольника*).

ТУПОЙ угол — см. *Угол*.

ТУПОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК — треугольник, один из углов которого тупой (см. *Остроугольный треугольник* и *Прямоугольный треугольник*).

УГОЛ — часть *плоскости*, ограниченная двумя *лучами* (стороны угла), имеющими общее начало (вершина угла). Стороны угла считаются принадлежащими углу. Точки, принадлежащие углу, но не лежащие на его сторонах, называются его внутренними точками. Два луча с общим началом выделяют на плоскости два угла (объединением которых служит вся плоскость). Сами лучи являются сторонами каждого из них. Угол обозначается тремя точками, причем средняя из них обозначает вершину угла, а две другие лежат на двух сторонах угла. Таким образом, запись $\angle ABC$ означает, что рассматривается угол с вершиной B, у которого сторонами являются лучи BA и BC. При этом надо дополнительно указать, какой из двух углов, определяемых лучами BA и BC, рассматривается. Чаще всего для указания того, какой из двух углов со сторонами BA и BC рассматривается, проводят дугу, соединяющую стороны угла и проходящую внутри рассматриваемого угла. Иногда угол отмечают цифрой, поставленной внутри этого угла (или и цифрой, и дугой).

Угол называется полным, если его лучи сливаются и каждая точка плоскости принадлежит углу. Все полные углы равны между собой. Угол называется нулевым, если его лучи сливаются и никакая точка плоскости (кроме точек этих слившихся лучей) не считается принадлежащей углу. Все нулевые углы равны между собой.

Угол называется развернутым, если его стороны образуют прямую линию. Развернутый угол равен половине полного угла, он представляет собой полуплоскость. Все развернутые углы равны между собой.

Прямым углом называется половина развернутого угла. Все прямые углы равны между собой.

Острым углом называется ненулевой угол, меньший прямого.

Тупым углом называется угол, больший прямого, но меньший развернутого.

Нулевой угол содержит 0°, полный угол — 360°, развернутый — 180°, прямой — 90°, острый — меньше 90°, но больше 0°, тупой — больше 90°, но меньше 180°.

УМЕНЬШАЕМОЕ — см. *Вычитание.*

УМНОЖЕНИЕ — действие над числами (сомножителями), дающее в результате новое число (произведение). Обозначается знаком умножения ($\times$), т. е. произведение чисел 2 и 7 обозначается через 2×7 или $2\cdot7$. Перед буквенными множителями знак умножения опускается: например: $2a=2\cdot a$, $ax=a\cdot x$.

Основные свойства умножения:

$ab=ba$ (коммутативность);

$a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность);

$a(b+c)=ab+ac$ (дистрибутивность);

$a\cdot1=a$;

$a\cdot\frac{1}{a}$ (если $a\neq0$).

Умножение чисел первого десятка в десятичной системе счисления выполняется по таблице умножения.

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Используя основные свойства умножения и сложения, таблицы умножения и сложения чисел первого десятка, а также правила записи чисел в *десятичной системе счисления,* можно вывести известные правила умножения столбиком.

УРАВНЕНИЕ — равенство, содержащее букву (неизвестное), о котором нужно узнать, при каких значениях неизвестного это равенство становится верным высказыванием. Такое значение неизвестного называется корнем (или решением уравнения). Решить уравнение — значит найти все его корни. *Примеры:* уравнение $x+2=3$ имеет корень 1 и других корней не имеет; уравнение $x \cdot x=3x$ имеет корни 0 и 3 и других корней не имеет; для уравнения $x+1=1+x$ корнем будет любое число; уравнение $x+1=x+2$ не имеет корней.

ФИГУРА — см. *Геометрическая фигура.*

ФОРМУЛА — равенство, содержащее буквенные обозначения некоторых величин и выражающее зависимость между этими величинами. Например, зависимость между площадью треугольника (S), его основанием (a) и высотой (h) записывается в виде формулы:

$$S = \frac{1}{2} ah.$$

К концу V класса ученик должен знать целый ряд формул, и среди них следующие: $s=v \cdot t$ (где t — время равномерного движения, v — скорость, s — пройденное расстояние);

$S=ab$ (где S — площадь прямоугольника, a — его длина, b — его ширина);

$S=a^2$ (где S — площадь квадрата, a — его сторона);

$V=abc$ (где V — объем прямоугольного параллелепипеда, a, b и c — его измерения);

$V=a^3$ (где V — объем куба, a — его ребро);

$A=\frac{N}{100} p$ (где A составляет $p\%$ от числа N);

$C=2\pi r$ (где C — длина окружности, r — ее радиус, $\pi \approx 3{,}14$;

$S=\pi r^2$ (где S — площадь круга, r — его радиус).

ХОРДА ОКРУЖНОСТИ — отрезок, концы которого лежат на окружности.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. Под этим названием объединяются все натуральные числа 1, 2, 3..., противоположные им числа —1, —2, —3,... и число 0. Сумма, разность и произведение целых чисел снова являются целыми числами. Деление же в множестве целых чисел осуществимо не всегда (например, частные 2:3 и (—5) : (—7) целыми числами не являются, т. е. в множестве целых чисел указанные деления неосуществимы).

ЦЕНТР ОКРУЖНОСТИ, КРУГА — см. *Окружность, Круг.*

ЦИРКУЛЬ — инструмент для проведения окружностей. С помощью циркуля можно построить окружность с данным центром O и данным радиусом r. С помощью циркуля можно также на любой данной фигуре F выделить все ее точки, удаленные от O на расстояние, равное r (для этого надо взять *пересечение* фигуры F с с указанной окружностью), на расстояние, меньшее r (это будут точки фигуры F, лежащие внутри окружности), на расстояние, большее r.

ЦИФРЫ — знаки, с помощью которых записываются числа. В *десятичной системе счисления* 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ЧАСТНОЕ — см. *Деление*.

ЧЕТНОЕ ЧИСЛО — целое число, делящееся на 2 без остатка. Общая запись: $2n$, где n — любое целое число. Иными словами, при любом целом n число $2n$ — четное, причем в таком виде может быть записано любое четное число. Если n — натуральное число, то выражение $2n$ равно n-му натуральному четному числу. Например, 6 — третье натуральное четное число: $6=2\cdot3$.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК — *многоугольник* с четырьмя сторонами (и четырьмя вершинами).

ЧИСЛИТЕЛЬ — см. *Дробь*.

ЧИСЛО — одно из основных, неопределяемых понятий школьного курса математики. Значительная часть курса арифметики и алгебры посвящена учению о числе. Пятиклассник должен знать свойства чисел, описанные в статьях *Сравнение чисел, Положительные и отрицательные числа, Сложение, Умножение*.

ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ — прямая, на которой выбраны точки, соответствующие числам 0 (начало отсчета) и 1. Направление от 0 к 1 называется положительным (или направлением возрастания). Каждой точке A числовой прямой соответствует некоторое действительное число x, называемое координатой точки A на числовой оси и определяемое следующим образом: число x положительно, если точка A лежит по ту же сторону от точки 0, что и 1, и отрицательно в противном случае; модуль числа x равен расстоянию между точками 0 и A (при условии, что за единицу измерения принят отрезок с концами в точках 0 и 1). Если x — координата точки A, то точка A называется изображением числа x. Каждое действительное число изображается некоторой точкой числовой прямой. Обычно при изображении числовой прямой на чертеже отмечают на ней точки, соответствующие целым числам 0, 1, 2, 3... и —1, —2, —3, ..., а положительное направление отмечают стрелкой.

ЧИСЛОВОЕ ВЫРАЖЕНИЕ — одно число или несколько чисел, соединенных знаками действий так, что известно, какие действия и в каком порядке нужно совершать.

ЧИСЛОВОЕ ПОЛЕ — множество, элементы которого называются **числами**, причем в этом множестве заданы операции и выполняются аксиомы, перечисляемые ниже. В поле отмечены два элемента, обозначаемые символами 0 и 1, и заданы следующие операции:

1) сложение (сопоставляющее каждым двум элементам a, b рассматриваемого множества некоторый элемент того же множества, обозначаемый через $a+b$);

2) умножение (сопоставляющее каждым двум элементам a, b рассматриваемого множества некоторый элемент того же множества, обозначаемый через ab);

3) взятие противоположного элемента (сопоставляющее каждому элементу a рассматриваемого множества некоторый элемент того же множества, обозначаемый через $-a$);

4) взятие обратного элемента (сопоставляющее каждому элементу $a \neq 0$ рассматриваемого множества некоторый элемент того же множества, обозначаемый через $\frac{1}{a}$).

Аксиомы поля:

$a+b=b+a$; $\quad ab=ba$;

$(a+b)+c=a+(b+c)$; $\quad (ab)c=a(bc)$;

$a+0=a$; $\quad a \cdot 1=a$;

$a+(-a)=0$; $\quad a \cdot \frac{1}{a}=1$ при $a \neq 0$.

$a(b+c)=ab+ac$.

Первым примером числового поля (с которым учащиеся знакомятся в V классе) является множество всех *рациональных чисел*. Позднее учащиеся узнают о *действительных числах*. О них лишь говорится, что они изображаются десятичными дробями — конечными или бесконечными,— но полного представления о свойствах действительных чисел и о действиях над ними учащиеся не получают (это выходит за рамки школьного курса). Все действительные числа (положительные и отрицательные) также образуют числовое поле. Наконец, полем является и множество всех комплексных чисел, о которых идет речь в X классе.

В математике известно бесконечное множество полей совершенно различной природы.

ЧИСЛОВОЙ ЛУЧ — *луч*, начальная точка которого считается соответствующей числу 0 и на котором отмечена еще одна точка, соответствующая числу 1. Каждой точке луча ставится в соответствие неотрицательное число (это делается так же, как и в случае *числовой прямой*).

ЭЛЕМЕНТ — см. *Множество*.

СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Григорьевич Болтянский
Герман Григорьевич Левитас

Математика атакует родителей

Редактор *М. С. Шадрина*
Художественный редактор *А. М. Головченко*
Художник *А. Астрецов*
Технический редактор *Т. Е. Прыткова*
Корректор *Т. Ф. Юдичева*

Сдано в набор 22/IX 1972 г. Подписано к печати 2/II 1973 г. 70×108¹/₃₂. Печ. л. 4,75 (6,65). Уч.-изд. л. 7,26. Бумага типогр. № 2. Тираж 80000 экз. (План 1972 г. № 50). А08238. Заказ № 1746. Цена 20 коп.

Издательство «Педагогика» Академии педагогических наук СССР и Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, 107066, Лефортовский пер., д. 8

Тип. изд-ва «Коммунар», Тула, Ф. Энгельса, 150.

51 (023)
Б-79

Болтянский В. Г., Левитас Г. Г.

Б 79 Математика атакует родителей. М., «Педагогика», 1973.

152 стр.

В книге в доступной и увлекательной форме рассказывается о причинах введения новых программ по математике, о новых направлениях в науке, об элементах теории множеств, элементах логики, о том новом, что появилось в алгебре и геометрии первых пяти лет обучения.

Книга адресована прежде всего родителям учащихся первых пяти классов.

Б $\frac{0641-018}{005(01)-73}$ 50—73

51 (023)

20 КОП.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕДАГОГИКА»