Lehrbuch der Variationsrechnung

Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat: quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus, ope Methodi maximorum et minimorum aeque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. Euler.

Lehrbuch
der
Variationsrechnung

von

Adolf Kneser
Professor an der Universität Breslau

Zweite umgearbeitete Auflage
Mit 13 Abbildungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ISBN 978-3-663-00750-0 ISBN 978-3-663-02663-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-02663-1
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1925

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Begriff und Grundregeln der Variationsrechnung.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachste Extremsaufgabe der Variationsrechnung.

Dritter Abschnitt.

Hinreichende Bedingungen des einfachsten freien Extrems.

Vierter Abschnitt.

Gebundene Extreme.

Fünfter Abschnitt.

Das Extrem der Integrale, welche höhere Ableitungen der Unbekannten enthalten.

Sechster Abschnitt.

Die allgemeinste Aufgabe der Variationsrechnung mit einer Unabhängigen.

Siebenter Abschnitt.

Das Extrem von vielfachen Integralen.

Achter Abschnitt.

Unstetige Aufgaben und Lösungen.

Erster Abschnitt.

Begriff und Grundregeln der Variationsrechnung.

§ 1.

Begriff der Variation.

In der Differentialrechnung führt man, um das Verhalten einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu untersuchen, an Stelle der Differenz $f(x+dx)-f(x)$, in der dx einen beliebigen Zuwachs der Unabhängigen x bedeutet, einen abgekürzten Ausdruck derselben, $df(x)=f'(x)dx$, ein, dessen Verhalten für das Verhalten der Differenz in gewissem Sinne maßgebend ist, und der vor jener den Vorzug einfacher Rechenregeln voraus hat, nach denen ein Algorithmus, eben die Differentialrechnung ausgebildet werden kann. In der Variationsrechnung sieht man den Wert einer veränderlichen Größe nicht als bestimmt an durch den Wert einer Unabhängigen, von der jene wie $f(x)$ von x abhängt, sondern als abhängig von veränderlichen Abhängigkeitsverhältnissen; für den Zuwachs, den eine Änderung dieser Verhältnisse hervorruft, wird ein dem Differential verwandter abgekürzter Ausdruck eingeführt, die Variation, die ebenfalls einfachen Rechenregeln unterworfen ist und zur Ausbildung eines Algorithmus, der Variationsrechnung, Veranlassung gibt.

Sei z. B. ein ebener Bogen 12 gegeben, auf dem der Punkt 0 veränderlich ist, so daß zwischen seinen Koordinaten x, y ein bestimmtes Abhängigkeitsverhältnis besteht. Ersetzt man den Bogen 12 durch einen benachbarten $1'2'$, auf dem der Punkt $0'$ läuft, so wird beim Übergang von 0 zu $0'$ das Abhängigkeitsverhältnis zwischen x und y geändert, und man kann fragen: wie ändert sich beim Übergang von der Kurve 12 zur Kurve $1'2'$ die Krümmung und Richtung im Punkte 0, die Länge des Bogens 10 und des ganzen Bogens 12. Sollen alle diese Fragen bestimmt sein, so ist nicht nur der Bogen 12 als Ganzes durch $1'2'$ zu ersetzen, sondern eine Regel zu geben, nach der jedem Punkte 0 ein bestimmter Punkt $0'$ entspricht. Das kann z. B. so geschehen, daß der Bogen 12, wenn

$$y = f(x)$$

seine Gleichung, x_1 und x_2 die Abszissen seiner Endpunkte sind, auf der x-Strecke $x_1 \ldots x_2$ durch die Kurve

$$\bar{y} = f(x) + \theta(x)$$

ersetzt, und dem Punkte 0 oder (x, y) der Punkt $0'$ mit den Koordinaten $(x, \bar{y})$ zugeordnet wird. Dann ist z. B.

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{dy}{dx} + \theta'(x)$$

der neue Wert, in den dy/dx beim Übergang von 0 zu $0'$ übergeht, und die Bogenlänge 12 erhält, wenn sie in $1'2'$ übergeführt wird, den Zuwachs

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{y}}{dx}\right)^2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Aus der Form dieses Ausdrucks könnte man in jedem besonderen Falle durch besondere Betrachtungen Schlüsse ziehen, z. B. darüber, ob eine Zunahme oder Abnahme der Länge eintritt. Um zu bequemer und allgemeiner Rechnung zu gelangen, betrachten wir kleine Änderungen des Zusammenhangs zwischen x und y, die von einem Parameter abhängen, und setzen etwa $\theta(x) = \varepsilon\psi(x)$, wobei der Parameter ε von x unabhängig ist und, wenn er klein wird, die ganze Änderung klein macht; setzen wir $\varepsilon = 0$, so kommen wir auf die ursprüngliche Kurve 12 zurück. Unter diesen Annahmen werden die an der Kurve $1'2'$ gebildeten Größen Funktionen von ε, und für den Zuwachs, z. B. der Ordinate y beim Übergang zu $\bar{y}$, bildet man nach dem Verfahren der Differentialrechnung als abgekürzten Ausdruck das Differential

$$\frac{\partial(\bar{y} - y)}{\partial\varepsilon} \cdot d\varepsilon = \psi(x)\, d\varepsilon,$$

das wir δy nennen wollen. Allgemein kann man bei irgend einer Größe U, die beim Übergang von 0 zu $0'$ in $\overline{U}$ übergeht, zur Untersuchung ihres Verhaltens das Differential

$$\frac{\partial(\overline{U} - U)}{\partial\varepsilon} d\varepsilon = \frac{\partial\overline{U}}{\partial\varepsilon} d\varepsilon$$

mit dem Werte $\varepsilon = 0$ benutzen; dieses nennen wir eine Variation der Größe U und setzen

$$\delta U = \frac{\partial(\overline{U} - U)}{\partial \varepsilon}\bigg|^{\varepsilon=0} d\,\varepsilon.$$

Dabei kann auch allgemeiner als bisher $\theta(x) = \psi(x, \varepsilon)$ gesetzt werden, wobei $\psi(x, 0) = 0$ sei; man hat dann

$$(1) \qquad \frac{\partial(\bar{y} - y)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad \delta y = \frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|^{\varepsilon=0} d\,\varepsilon,$$

ferner

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left\{\frac{d\bar{y}}{dx} - \frac{dy}{dx}\right\} = \frac{\partial^2 \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon\, \partial x},$$

also nach Definition des Zeichens δ

$$(2) \qquad \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\partial^2 \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon\, \partial x}\bigg|^{\varepsilon=0} d\,\varepsilon.$$

Nun ist allgemein, wenn x und ε voneinander unabhängig sind,

$$\frac{\partial^2 \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon\, \partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{d\,\varepsilon}\right),$$

und in dieser Gleichung kann $\varepsilon = 0$ gesetzt werden; die Gleichungen (1) und (2) geben also

$$(3) \qquad \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,\delta y}{dx}.$$

Dabei ist zu bemerken, daß x beim Übergang von 0 zu 0′ ungeändert bleibt; daraus folgt

$$\frac{\partial(\bar{x} - x)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \delta x = 0.$$

Das Variationszeichen ist hier also mit dem der Ableitung nach einer unvariierten Größe vertauschbar.

Wir wollen ferner annehmen, daß die Punkte 1 und 1′ sowie 2 und 2′ dieselbe Abszisse haben, also

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \delta x_1 = \delta x_2 = 0.$$

Dann sind die in der gewöhnlichen Weise abgegrenzten Inhalte der Kurven 12 und 1′2′

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} \bar{y}\,dx;$$

also folgt

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = d\,\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} (\bar{y} - y)\,dx\bigg|^{\varepsilon=0} = d\,\varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,dx\bigg|^{\varepsilon=0},$$

oder nach (1)

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} y\, d x = \int_{x_1}^{x_2} \delta\, y\, d x.$$

Dabei kann y hier wie in der Formel (3) durch irgend eine Größe U, deren Wert durch den Gesamtverlauf der Kurve 12 bestimmt wird, ersetzt werden; geht sie in $\overline{U}$ über, wenn der Bogen $1'2'$ zugrunde gelegt wird, so ist

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\int_{x_1}^{x_2} \overline{U} d x - \int_{x_1}^{x_2} U d x\right]\Bigg|^{\varepsilon = 0} d \varepsilon = \delta \int_{x_1}^{x_2} U d x,$$

$$d \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{d \overline{U}}{d x} - \frac{d U}{d x}\right)\Bigg|^{\varepsilon = 0} = \delta \frac{d U}{d x};$$

anderseits ist nach Definition

$$\delta U = \frac{\partial (\overline{U} - U)}{\partial \varepsilon}\Bigg|^{\varepsilon = 0} d \varepsilon, \tag{4}$$

und die Ableitungen nach x und ε sind vertauschbar, da x von ε nicht abhängt; also folgt

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U d x = \int_{x_1}^{x_2} \delta\, U d x, \quad \delta \frac{d U}{d x} = \frac{d \delta U}{d x}. \tag{5}$$

Das Zeichen δ ist also mit dem Zeichen der Integration und der Ableitung nach einer unvariierten Veränderlichen vertauschbar.

Allgemeiner sei die Variation als ein an einer bestimmten Stelle gebildetes Differential nach Parametern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ definiert, die Formel (4) also ersetzt durch die allgemeinere:

$$\delta U = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial (\overline{U} - U)}{\partial \varepsilon_{\mathfrak{a}}} \partial \varepsilon_{\mathfrak{a}}\Bigg|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0}, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots;$$

dann zerfallen in den Formeln (5) die rechte wie die linke Seite in Summanden, deren jeder sich auf eine der Größen $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ bezieht; entsprechende Summanden rechts und links sind gleich, die Gleichungen (5) bleiben also bei Bestand. Sind ferner $U, V, \ldots$ beliebig viele durch den Verlauf der Kurve 12 bestimmte Größen und Φ eine der Variation nicht unterworfene Funktion, so ist

$$\delta \Phi(U, V, \ldots) = \frac{\partial \Phi}{\partial U} \delta U + \frac{\partial \Phi}{\partial V} \delta V + \cdots; \tag{6}$$

denn setzt man

$$d\,\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial\,\varepsilon_1} + d\,\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial\,\varepsilon_2} + \cdots = \delta',$$

so ist nach Definition

$$\delta\,\Phi(U,\ V, \ldots) = \delta'\,[\Phi(\overline{U},\ \overline{V}, \ldots) - \Phi(U,\ V, \ldots)]\,|^{\varepsilon_a = 0},$$

$$\delta'\,\overline{U}\,|^{\varepsilon_a = 0} = \delta\,U, \quad \delta'\,\overline{V}\,|^{\varepsilon_a = 0} = \delta\,V, \ldots;$$

anderseits lehrt die Differentialrechnung

$$\delta'\,\Phi(\overline{U},\ \overline{V}, \ldots) = \overline{\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,U}}\,\delta'\,\overline{U} + \overline{\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,V}}\,\delta'\,\overline{V} + \cdots;$$

setzt man hier allgemein $\varepsilon_a = 0$, so folgt die Gleichung (6).

Sei z. B.

$$F(U) = \sqrt{1 + U^2}, \quad U = \frac{d\,y}{d\,x} = y',$$

dann findet man nach den Formeln (6) und (5)

$$\delta\sqrt{1 + y'^2} = \frac{y'\,\delta\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,\frac{d\,\delta\,y}{d\,x},$$

und weiter findet man nach (5) die Variation der Bogenlänge

$$\delta\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + y'^2}\,d\,x = \int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,\frac{d\,\delta\,y}{d\,x}\,d\,x$$

und mittels einer Teilintegration

$$(7) \qquad \delta\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + y'^2}\,d\,x = \frac{y'\,\delta\,y}{\sqrt{1 + y'^2}}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2}\delta\,y\,\frac{d}{d\,x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)d\,x,$$

wohl gemerkt, unter der Annahme $\delta\,x_1 = \delta\,x_2 = 0$, d. h. daß die verglichenen Bögen dieselben Endabszissen haben. Die Gleichung (7) gibt, wenn wir $\delta\,y$ als kleine den Übergang vom Bogen 12 zum Nachbarbogen kennzeichnende Größe ansehen, eine annähernde, aber gut bezeichnende Darstellung für den Zuwachs der Bogenlänge in ähnlicher Weise, wie man die Differenz zweier benachbarter Funktionswerte durch das Differential annähernd kennzeichnet.

In allgemeinster Weise kann das Variationszeichen δ mit seinen Rechenregeln wie folgt eingeführt werden. Im Gebiet beliebig vieler Veränderlicher x, y, ... sei eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ dadurch gegeben, daß x, y, ... Funktionen von Unabhängigen t, u, v, ... sind; letztere sind auf ein bestimmtes Gebiet $\mathfrak{T}$ beschränkt. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ sei eingebettet in eine Schar von Mannigfaltigkeiten $\overline{\mathfrak{M}}$, die von unabhängigen Parametern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ abhängen und alle demselben Gebiet $\mathfrak{T}$ entsprechen; sie gehen in $\mathfrak{M}$ über, wenn man $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ setzt. Ein Teil der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, der sich einerseits auf eine Stelle, anderseits auf die ganze Mannigfaltigkeit zurückführen kann, sei $\mathfrak{M}_0$ und entspreche einem Teil $\mathfrak{T}_0$ des Gebietes $\mathfrak{T}$, womit dann auf jeder Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ ein entsprechender Teil $\overline{\mathfrak{M}}_0$ definiert ist. Sei dann U eine Größe, die einen bestimmten Wert erhält, sobald $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{M}$ gegeben sind; $\overline{U}$ sei der entsprechende Wert mit $\mathfrak{T}_0$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ gebildet, der offenbar von den Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ abhängt. Dann setzen wir

$$\delta U = \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 d\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 d\varepsilon_2 + \cdots,$$

wobei die Fußmarke 0 bedeute, daß $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ gesetzt wird.

Aus dieser Definition folgt zunächst die Gleichung (6) auf Grund der dort durchgeführten Erwägung, also die Formel

$$\text{(A)} \qquad \delta \Phi(U, V, \ldots) = \frac{\partial \Phi}{\partial U} \delta U + \frac{\partial \Phi}{\partial V} \delta V + \cdots,$$

in der die Funktion Φ von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nicht abhängt; die Größen $U, V, \ldots$ können jede mit einem entsprechenden besonderen Gebiet $\mathfrak{T}_0$ gebildet sein.

Sodann sei $\mathfrak{T}_0$ von den Parametern $t', u', \ldots$ abhängig; ist $\mathfrak{T}_0$ eine einzelne Stelle des Gebiets $\mathfrak{T}$, so kann auch $t' = t$, $u' = u, \ldots$ angenommen werden. Die Parameter $t', u', \ldots$ seien ebenfalls wie immer $\mathfrak{T}_0$, für alle Mannigfaltigkeiten $\overline{\mathfrak{M}}$ gleich gewählt, also von den Parametern ε unabhängig. Wenn dann

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t'} dt' + \frac{\partial U}{\partial u'} du' + \cdots$$

gesetzt wird, so ist aus der Differentialrechnung, da die Ableitung d mit dem Zeichen

$$\delta' = d\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + d\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} + \cdots$$

vertauscht werden kann, ersichtlich

$$d\delta' \overline{U} = \delta' d \overline{U};$$

also folgt, wenn man $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ setzt,

$$\text{(B)} \qquad d\delta U = \delta d U,$$

wobei sich das Differentialzeichen d, wir wiederholen es, auf unvariierte Unabhängige bezieht.

Endlich werde U über das Gebiet $\mathfrak{T}'$ nach $t', u', \ldots$ integriert; dann gibt die Regel für die Vertauschung von Differentialen mit dem Zeichen der bestimmten Integration

$$\text{(C)} \qquad \delta \int_{\mathfrak{T}'} U dt\, du \cdots = \int_{\mathfrak{T}'} \delta\, U dt\, du \cdots,$$

und auch hier ist das Integrationsgebiet unvariiert.

Auf den Formeln (A), (B), (C) beruht der Algorithmus der Variationsrechnung, der im Grunde in dem der Differential- und Integralrechnung enthalten ist. Aber es ist ein Unterschied in der Anwendung zu beachten. In der Differentialrechnung ist das Differential, das man sucht, durch die gestellte Aufgabe bestimmt. In der Variationsrechnung handelt es sich zunächst darum, Variationen gewissen Forderungen gemäß zu konstruieren; die Funktionen der Parameter ε, die in unseren Definitionen auftreten, sind meist in weitem Umfange willkürlich, und man sucht die Variation zusammengesetzter Ausdrücke auf die Variation einfacher zurückzuführen.

Der Hauptzweck der Variationsrechnung besteht in der Lösung von Aufgaben des Extrems, des Größten und Kleinsten von Größen, die so wie U definiert sind, z. B. der Bogenlänge, wenn man die kürzeste Linie sucht. Man bettet dann die gesuchte, gefunden gedachte Kurve oder Mannigfaltigkeit in eine Schar von Parametern ε abhängender Nachbarkurven oder Nachbarmannigfaltigkeiten ein, auf die die Variationsrechnung angewandt werden kann, und erhält dann als notwendige Bedingung des Extrems, daß die Variation $\delta U = 0$ zu setzen ist; sie ist ja ein Differential nach den Größen ε, das an der Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ notwendig verschwindet, wenn hier ein Extrem der Größe U gegenüber den Größen $\overline{U}$ erreicht werden soll. Wenn aber die Extremsaufgaben in der Differentialrechnung nur die nächstliegenden Beispiele für die Anwendung bieten, haben sie in der Variationsrechnung beherrschende Wichtigkeit, so daß das klassische Werk von Euler über Variationsrechnung, in dem der Algorithmus allerdings noch nicht vorkommt, aber die Aufgaben behandelt werden, die noch heute den Hauptgegenstand der Variationsrechnung bilden, den Titel trägt: Methode, die Kurven mit Extremseigenschaften zu finden, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietatibus gaudentes, 1744.

§ 2.

Einfachste besondere Variationen.

Wir beginnen mit der Variation von durch ebene Kurven bestimmten Größen. Eine ebene Kurve $\mathfrak{C}$ stellen wir meist in der Form

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

dar, wobei x und y rechtwinklige Koordinaten sind. Punkte auf ihnen bezeichnen wir im allgemeinen durch Ziffern 0, 1, ..., und die zugehörigen Werte von Koordinaten und Parametern tragen die betreffende Ziffer als Fußmarke, so daß z. B. der Bogen 0 1 die Endpunkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) hat, die den Parameterwerten t_0 und t_1 entsprechen. Auch in Substitutions- und Integralzeichen benutzen wir die Ziffern, so daß z. B.

$$\varphi(t)\Big|_0^1 = \varphi(t_1) - \varphi(t_0), \quad \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,dt = \int_0^1 x\,dt$$

gesetzt wird; numerische Werte der Integrationsgrenzen kommen in der allgemeinen Theorie nicht vor.

Stetige Funktionen von einer oder mehreren Unabhängigen wie $\varphi(t)$, $\psi(t)$, nennen wir an einer Stelle regulär, wenn sie in einer gewissen Umgebung derselben stetige erste Ableitungen besitzen; den Bogen 0 1 auf der Kurve $\mathfrak{C}$ oder (1) nennen wir regulär, wenn $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ regulär sind und die Ableitungen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ auf ihr nicht zugleich verschwinden, so daß immer

$$\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0.$$

I. Die Kurve $\mathfrak{C}$ betten wir nun in eine zur Bildung von Variationen geeignete Schar von Kurven ein, indem wir

$$\bar{x} = \varphi(t) + \theta(t, \varepsilon), \quad \bar{y} = \psi(t) + \lambda(t, \varepsilon)$$

setzen, wobei $\theta(t, 0) = \lambda(t, 0) = 0$ ist und die Funktionen θ und λ regulär sind, wenn t die Strecke $t_0 \ldots t_1$ durchläuft und $|\varepsilon|$ unter einer gewissen Schranke liegt.

Z. B. wird man in vielen Fällen

$$\theta(t, \varepsilon) = \varepsilon\,\theta(t), \quad \lambda(t, \varepsilon) = \varepsilon\,\lambda(t)$$

setzen können; ist dabei

$$\theta(t_0) = \theta(t_1) = \lambda(t_0) = \lambda(t_1) = 0,$$

so haben die variierten Kurven mit $\mathfrak{C}$ die festen Endpunkte 0 und 1 gemein, und es ist

$$\delta t = 0, \quad \delta x = \theta(t)\, d\varepsilon, \quad \delta y = \lambda(t)\, d\varepsilon,$$
$$\delta x_0 = \delta x_1 = \delta y_0 = \delta y_1 = 0.$$

Ableitungen nach t bezeichnen wir stets durch Akzente; auf einer Strecke, auf der $x' \neq 0$, setzen wir $p = y'/x'$ und finden nach der Formel (A) des § 1 sofort

$$(2) \qquad \delta p = \delta\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{x'\,\delta y' - y'\,\delta x'}{x'^2},$$

nach (B)

$$\delta x' = \frac{d\,\delta x}{d t}, \quad \delta y' = \frac{d\,\delta y}{d t};$$

die Formel (2) kann man schreiben

$$(3) \qquad \delta p = \frac{d\,\delta y}{d x} - p\,\frac{d\,\delta x}{d x},$$

indem man x als Unabhängige durch Auflösung der Gleichung

$$x - \varphi(t) = 0$$

nach t als Funktion von x einführt. Wir benutzen hier wie noch häufig den Satz von der Existenz der impliziten Funktionen:

Ist die Funktion $F(x, y, z, \ldots)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0, y = y_0, \ldots$ regulär, und ist an dieser Stelle

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0, \quad F_x(x_0, y_0, \ldots) \neq 0, \quad F(x_0, y_0, \ldots) = 0,$$

so gibt es eine an der Stelle $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ reguläre Funktion $\varphi(y, z, \ldots)$, die für alle hinreichend kleinen Werte von $|y - y_0|$, $|z - z_0|, \ldots$ die Gleichung

$$F(\varphi, y, z, \ldots) = 0$$

erfüllt; alle Wertsysteme $x, y, \ldots$, die den Wert $F(x, y, \ldots) = 0$ liefern, und in denen $|x - x_0|$, $|y - y_0|, \ldots$ eine gewisse Schranke nicht übersteigen, erfüllen dann die Gleichung

$$x = \varphi(y, z, \ldots).$$

Hier wie auch fernerhin bezeichnen wir Teilableitungen nach dem Muster der Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, z, \ldots)}{\partial x} = F_x(x, y, z \ldots).$$

Wenn die Funktionen $F_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_{n+k})$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$, an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots x_{n+k} = x_{n+k}^0$ regulär sind und verschwinden; wenn ferner an dieser Stelle die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

von Null verschieden ist, so gibt es n an der Stelle $x_{n+1} = x^0_{n+1}$, $\dots x_{n+k} = x^0_{n+k}$ reguläre Funktionen $\varphi_\mathfrak{a}(x_{n+1}, \dots x_{n+k})$, die in einer gewissen Umgebung dieser Stelle die Gleichungen

$$F_\mathfrak{a}(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, x_{n+1}, \dots x_{n+k}) = 0$$

erfüllen; alle Wertsysteme, für die die Gleichungen

$$F_\mathfrak{a}(x_1, x_2, \dots x_{n+k}) = 0$$

bestehen und die Größen $|x_\mathfrak{b} - x^0_\mathfrak{b}|$, $\mathfrak{b} = 1, 2, \dots, n+k$ gesetzt, unter gewissen Schranken liegen, erfüllen dann auch die Gleichungen

$$x_\mathfrak{a} = \varphi_\mathfrak{a}(x_{n+1}, \dots x_{n+k}).$$

Haben wir hiernach x an Stelle von t als Unabhängige eingeführt, so können der Gleichung (3) entsprechend, wenn auch p in t regulär ist und

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p'}{x'} = q$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\delta p' = \frac{d\,\delta p}{dt}, \quad \delta q = \frac{d\,\delta p}{dx} - q\,\frac{d\,\delta x}{dx}$$

angesetzt werden usf.

II. Von besonderer Wichtigkeit ist die Variation von Integralen der Form

$$J_{01} = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,dt = \int_0^1 F(x, y, x', y')\,dt,$$

in denen die Funktion F an allen auf dem Bogen $\mathfrak{C}$ vorkommenden Stellen x, y, x', y' regulär ist; Beispiele dafür bieten das Längen- und das Inhaltsintegral

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \quad \int y\,dx = \int y\,x'\,dt.$$

Diese beiden haben eine Eigenschaft, die bei den meisten wichtigen Integralen J vorausgesetzt werden muß: sie sind von der Wahl des Parameters t unabhängig.

Um einzusehen, wann dies allgemein zutrifft, gehen wir davon aus, daß, wenn τ eine neue Integrationsveränderliche ist, aus der Gleichung

$$\int_{t_0}^{t} F(x, y, x', y')\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau$$

durch Ableitung folgt

$$F(x, y, x', y') = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt};$$

dabei ist

$$\frac{dx}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = x'$$

oder, wenn

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\alpha}$$

gesetzt wird,

$$\alpha F(x, y, x', y') = F(x, y, \alpha x', \alpha y'). \tag{4}$$

Wenn die Größen t und τ zugleich wachsen, ist α positiv; wir wollen uns auf diesen Fall beschränken und nennen die Funktion F, wenn die Gleichung (4) gilt, positiv homogen in den Unabhängigen x' und y'. Ein Fall, in welchem α nicht negativ sein darf, liegt z. B. vor, wenn wir mit positiver Quadratwurzel

$$F(x, y, x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

setzen; bei negativen α hätte man die Gleichung

$$F(x, y, \alpha x', \alpha y') = -\alpha F(x, y, x', y').$$

Wenn $F(x, y, x', y')$ nur positiv homogen vorausgesetzt wird, liegt die Anschauung zugrunde, daß F durch die Richtung (x', y'), d. h. die Richtung der Tangente der Kurve $\mathfrak{C}$ im Sinne wachsender t bestimmt ist, und zwar bis auf einen positiven Faktor. Man schließt aus der Gleichung (4) auch bei Beschränkung auf positive Werte α durch Ableitung nach α, x' und y'

$$\begin{aligned} F(x, y, x', y') &= x' F_{x'} + y' F_{y'}, \\ F_{x'}(x, y, x', y') &= F_{x'}(x, y, \alpha x', \alpha y'), \\ F_{y'}(x, y, x', y') &= F_{y'}(x, y, \alpha x', \alpha y'). \end{aligned} \tag{5}$$

Die Ableitungen $F_{x'} = \partial F/\partial x'$ und $F_{y'} = \partial F/\partial y'$ sind also positiv homogen von der Stufe Null, F selbst von der ersten Stufe bezüglich der Unabhängigen x', y'.

Differenziert man die Gleichungen (5) nach α, indem man die ersten Ableitungen von F als regulär, d. h. die zweiten Ableitungen als stetig voraussetzt, und setzt dann $\alpha = +1$, so ergibt sich

$$0 = x' F_{x'x'} + y' F_{x'y'},$$
$$0 = x' F_{y'x'} + y' F_{y'y'};$$

es gibt also eine Größe $F_1 = F_1(x, y, x', y')$, die die Gleichungen

$$(6) \qquad F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2}$$

erfüllt und in den betrachteten Wertsystemen (x, y, x', y') stetig ist, da x' und y' nicht zugleich verschwinden. Sie ist regulär, wenn auch die dritten Ableitungen von F stetig sind.

Ebenso ergibt sich, wenn man in den Gleichungen (5) nach x und y ableitet, daß $F_{xx'}$ $F_{xy'}$, $F_{yx'}$, $F_{yy'}$ positiv homogene Funktionen erster Stufe von x' und y' sind, die Gleichungen wie

$$(7) \qquad F_x = x' F_{xx'} + y' F_{xy'} \text{ usw.}$$

erfüllen.

Der Fall der vollen Homogeneität, d. h. daß in der Gleichung (4) auch negative Werte von α zulässig sind, tritt bei rationalen Funktionen ein, z. B. beim Inhaltsintegral, bei dem $F = yx'$ zu setzen ist.

Im Falle positiver Homogeneität kann man setzen

$$J_{01} = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,dt = \int_0^1 F(x, y, dx, dy),$$

wobei nun dx und dy die in der Integrationsrichtung gebildeten Differentiale nach einem beliebigen, von 0 nach 1 hin wachsenden Parameter bedeuten; das Integral erhält so eine von der Wahl des Parameters unabhängige, invariante Gestalt.

III. Beim Rechnen in Sonderfällen ist es bisweilen zweckmäßig, dem Integral J eine nicht homogene Form zu geben, in der x als Integrationsveränderliche erscheint.

Setzt man bei der Annahme $x' > 0$ etwa

$$F(x, y, 1, p) = f(x, y, p), \quad p = \frac{y'}{x'}, \quad dx = x'\,dt,$$

so ist nach (4)

$$F(x, y, x', y')\,dt = f(x, y, p)\,dx,$$
$$F(x, y, x', y') = f(x, y, p)\,x'.$$

Differenziert man nach x' und y', so folgt

$$(6) \qquad F_{x'} = f - p f_p, \quad F_{y'} = f_p;$$

ferner ist offenbar, soweit x in der Integrationsrichtung wächst,

(7) $$\int F(x, y, x', y')\,dt = \int f(x, y, p)\,dx.$$

Wo $x' < 0$ ist, setzt man

$$F(x, y, -1, -p) = \bar{f}(x, y, p), \quad dx = x'\,dt$$

und findet dann

$$F(x, y, x', y') = -x'\bar{f}(x, y, p)$$
$$\int F\,dt = -\int \bar{f}(x, y, p)\,dx,$$

wobei in der Richtung abnehmender x integriert wird. Im Falle der vollen Homogeneität ist $f = -\bar{f}$; im Falle des Längenintegrals hat man $F(x, y, -x', -y') = F(x, y, x', y')$, also $f = \bar{f}$, und die nicht homogene Form des Integranden ist verschieden, je nach dem Vorzeichen der Größe dx oder x'.

IV. Die zunächst wichtige Aufgabe besteht in der Variation des Integrals

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y')\,dt,$$

in dem F in x' und y' positiv homogen erster Stufe und mit den ersten und zweiten Ableitungen nach allen vier Unabhängigen längs des regulären Bogens $\mathfrak{C}$ regulär sei; auf diesem seien auch x' und y' regulär, x'' und y'' also stetig. Läßt man den Parameter t unvariiert, setzt also $\delta t = 0$, so geben die Formeln (A), (B), (C) sofort

$$\delta J_{01} = \int_0^1 (F_x \delta x + F_y \delta y + F_{x'} \delta x' + F_{y'} \delta y')\,dt,$$

und da nach eben jenen Formeln $\delta x' = d\delta x/dt$, $\delta y' = d\delta y/dt$ zu setzen ist, kann man schreiben

$$\delta J_{01} = \int_0^1 \left(F_x \delta x + F_y \delta y + F_{x'} \frac{d\delta x}{dt} + F_{y'} \frac{d\delta y}{dt}\right) dt.$$

Da nun bei den geltenden Voraussetzungen die Größe

(8) $$\frac{dF_{x'}}{dt} = F'_{x'} = F_{x'x}x' + F_{x'y}y' + F_{x'x'}x'' + F_{x'y'}y''$$

gebildet werden kann und in t stetig ist, so gibt eine Teilintegration

(9) $$\delta J_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 \left\{\left(F_x - \frac{dF_{x'}}{dt}\right)\delta x + \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dt}\right)\delta y\right\} dt.$$

Wir setzen und finden nach (8)

$$P = F_x - F'_{x'} = (F_{xy'} - F_{yx'})\,y' + y' F_1 (x'y'' - x''y'),$$

oder, wenn

$$T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1 (x'y'' - x''y')$$

gesetzt wird,

$$P = F_x - F'_{x'} = y'T; \tag{10}$$

ebenso ergibt sich

$$Q = F_y - F'_{y'} = -x'T, \tag{11}$$

und die Gleichung (9) wird

$$\delta J_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 (P\delta x + Q\delta y)\,dt \tag{12}$$

$$= F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 T(y'\delta x - x'\delta y)\,dt;$$

die Gleichungen (10) und (11) geben die Identität

$$x'P + y'Q = 0. \tag{13}$$

Als Beispiel betrachten wir das Bogenintegral

$$J = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \quad F = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ = s'$$

mit stets positiver Quadratwurzel gebildet, und finden

$$F_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

$$\delta J_{01} = \frac{x'\delta x + y'\delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 dt\left\{\delta x\left(\frac{x'}{s'}\right)' + \delta y\left(\frac{y'}{s'}\right)'\right\},$$

$$P = -\left(\frac{x'}{s'}\right)', \quad Q = -\left(\frac{y'}{s'}\right)'.$$

Nun ist offenbar

$$F_{x'y'} = \frac{-x'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}, \quad F_1 = \frac{1}{s'^3}, \quad T = \frac{x'y'' - x''y'}{s'^3} = \frac{1}{s'}\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'};$$

also ist $T = 1/\varrho$ die Krümmung mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem in einem Kurvenpunkte die Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt gegen die Richtung wachsender t um 90° im positiven oder negativen Sinne gedreht ist; positiv ist der Drehsinn, in welchem die positive x-Achse um 90° gedreht in die positive y-Achse übergeht. Die Formel (12) gibt jetzt

$$\delta J_{01} = \frac{x'\delta x + y'\delta y}{s'}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{\varrho}(y'\delta x - x'\delta y).$$

Man variiere z. B. mit festen Endpunkten, so daß δx und δy an den Stellen 0 und 1 verschwinden; die Formel

$$\delta J_{01} = \int_0^1 \frac{dt}{\varrho}(y'\delta x - x'\delta y)$$

zeigt dann, daß die Variation der Länge immer positiv ist, wenn ϱ längs des Bogens $\mathfrak{C}$ positiv und der Vektor (x', y') gegen den Variationsvektor $(\delta x, \delta y)$ oder δ überall im positiven Sinne um weniger als 180° gedreht ist. Zeigt der Vektor δ immer nach einer Seite der Kurve $\mathfrak{C}$ und ist kein Wendepunkt vorhanden, so hat die Variation der Bogenlänge ein festes Vorzeichen, und zwar das positive, wenn der Vektor δ nach der konvexen Seite weist, entgegen der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkte hin.

Ist $\mathfrak{C}$ eine Gerade, so sind x'/s' und y'/s' Festwerte, und man erhält, wenn t die Richtung wachsender t bedeutet,

$$\delta J_{01} = \frac{x'\delta x + y'\delta y}{s'}\Big|_0^1 = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}\cos(t, \delta)\Big|_0^1,$$

womit eine Formel für die infinitesimale Längenänderung einer geraden Strecke erhalten ist.

V. Eine Verallgemeinerung liegt nahe. Hat man im Gebiet beliebig vieler Veränderlicher $x, y, z, \ldots$ eine einfache Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$, auf der t der unabhängige Parameter, $x, y, \ldots$ sowie $x', y', \ldots$ aber reguläre Funktionen von t sind, und ist $F(x, y, z, \ldots x', y', z', \ldots)$ eine mit den ersten Ableitungen reguläre Funktion in den auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ erreichten Wertsystemen $x, y, \ldots, x', y', \ldots$, so findet man auf Grund der Formeln (A), (B), (C), indem man t unvariiert läßt,

$$\delta \int_0^1 F(x, y, z, \ldots x', y', z', \ldots) = \int_0^1 \left(F_x \delta x + F_{x'} \frac{d\delta x}{dt} + \cdots\right) dt$$

$$= F_{x'}\delta x + \cdots \Big|_0^1 + \int_0^1 dt\{P\delta x + Q\delta y + R\delta z + \cdots\},$$

wobei gesetzt ist

$$P = F_x - F'_{x'}, \quad Q = F_y - F'_{y'}, \quad R = F_z - F'_{z'}, \ldots$$

Ist nun weiter F positiv homogen erster Stufe in $x', y', z', \ldots$, also bei positiven Werten von α

$$F(x, y, z, \ldots, \alpha x', \alpha y', \alpha z', \ldots) = \alpha F(x, y, \ldots x', y', z', \ldots),$$

so gibt die Ableitung nach α

$$F = x' F_{x'} + y' F_{y'} + z' F_{z'} + \cdots,$$

und die Ableitung dieser Gleichung nach t gibt

$$\begin{aligned} F' &= x'' F_{x'} + \cdots + x' F'_{x'} + \cdots, \\ &= x' F_x + \cdots + x'' F'_{x'} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei den hingeschriebenen gleichgeformte Glieder in y, z, ... beizufügen sind; man findet also die Identität

$$x'(F_x - F'_{x'}) + y'(F_y - F'_{y'}) + \cdots = 0$$

oder

$$Px' + Qy' + Rz' + \cdots = 0.$$

Die Gleichungen (8) und die Rechnungen mit T sind auf den Fall der Kurve $\mathfrak{C}$ in der xy-Ebene beschränkt.

VI. Führen wir die nicht homogene Form des Integrals J ein, so ergibt sich nach (6)

$$P = x' f_x - \frac{d(f - p f_p)}{dt} = x'\left(f_x - \frac{d(f - p f_p)}{dx}\right),$$

$$Q = x'\left(f_y - \frac{d f_p}{dx}\right), \quad P = -Qp,$$

$$\delta J_{01} = \delta \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, p)\, dx = \delta \int_{t_0}^{t_1} f(x, y, p)\, x'\, dt,$$

$$= (f - p f_p)\,\delta x + f_p\, \delta y \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(f_y - \frac{d f_p}{dx}\right)(\delta y - p\, \delta x)\, dx.$$

Hier erscheint ein Integral nach x, und x wird variiert; bei der Bildung der Variation ist aber, um sicher zu gehen, immer erst x und y durch die unvariierte Größe t ausgedrückt zu denken.

Haben wir allgemeiner ein Integral

$$\int F(x, y_1, y_2, \ldots, x', y_1', \ldots)\, dt$$

zu variieren, so setzen wir, um nicht homogen zu rechnen,

$$p_\mathfrak{a} = \frac{y'_\mathfrak{a}}{x'}, \quad F = f(x, y_1, \ldots p_1, p_2, \ldots)\, x',$$

und finden

$$\frac{\partial F}{\partial y'_\mathfrak{a}} = \frac{\partial f}{\partial p_\mathfrak{a}} = f_{p_\mathfrak{a}}, \quad F_{x'} = f - p_1 f_{p_1} - p_2 f_{p_2} - \cdots,$$

$$\delta \int_0^1 f(x, y_1, y_2, \ldots p_1, p_2, \ldots)\, dx = \left\{ f\,\delta x + \sum_\mathfrak{a} f_{p_\mathfrak{a}} (\delta y_\mathfrak{a} - p_\mathfrak{a}\, \delta x) \right\} \Big|_0^1$$

$$+ \int_0^1 dx \sum_\mathfrak{a} \left(f_{y_\mathfrak{a}} - \frac{d f_{p_\mathfrak{a}}}{dx}\right)(\delta y_\mathfrak{a} - p_\mathfrak{a}\, \delta x).$$

VII. Unter diese Formeln fällt im besonderen der Fall, daß der Integrand F Parameter enthält, die von t unabhängig, aber verfügbar sind; ist z. B. $y_2 = a$ ein solcher und $y_1 = y$, so ist längs der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ überall $y_2' = 0$ zu setzen und auch längs der variierten Kurven $y_2' = 0$, $dy_2/dt = 0$ zu setzen. So findet man z. B.

$$\delta \int_0^1 F(x, y, x', y', a)\, dt = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1$$
$$+ \int_0^1 dt \{F_a \delta a + P \delta x + Q \delta y\};$$

der Summand

$$\delta a \int_0^1 dt \frac{\partial F}{\partial a}$$

tritt zu dem früheren Ausdruck der Variation hinzu.

§ 3.

Bildung von Variationen geforderter Art.

I. Es kann sein, daß die zu variierende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ schon einer Schar von solchen von vornherein eingebettet ist, und es ist dann unter Umständen von Belang zu wissen, ob der Übergang von $\mathfrak{C}$ zu den Nachbarmannigfaltigkeiten als Variation im Sinne des § 1 aufzufassen und der Algorithmus des Zeichens δ anzuwenden ist.

Sei durch Gleichungen wie

$$\bar{x} = \xi(\tau, a, b, \ldots), \quad \bar{y} = \eta(\tau, a, b, \ldots) \ldots$$

eine Kurvenschar definiert; auf jeder von diesen Kurven werde einer τ-Strecke $\tau_0 \ldots \tau_1$ entsprechend ein Bogen $\mathfrak{C}'$ abgegrenzt, so daß τ_0 und τ_1 Funktionen der Parameter $a, b, \ldots$ sind, etwa

$$\tau_0 = \varphi(a, b, \ldots), \quad \tau_1 = \psi(a, b, \ldots).$$

Eine besondere Kurve sei

$$x = \xi(t, a_0, b_0, \ldots), \quad y = \eta(t, a_0, b_0, \ldots)$$

und an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0, \ldots$ sei $\tau = t$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_1$; der auf dieser Kurve abgegrenzte Bogen sei der zu variierende und heiße $\mathfrak{C}$. Alle eingeführten Funktionen seien an den zu betrachtenden Stellen regulär.

Setzen wir dann allgemein die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \tau - t, & t, & 1 \\ \tau_0 - t_0, & t_0, & 1 \\ \tau_1 - t_1, & t_1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

an, so wird zwischen t und dem auf irgend einem Bogen $\mathfrak{C}'$ waltenden Parameter τ eine solche Beziehung hergestellt, daß, wenn $t = t_0$ oder $t = t_1$ ist, entsprechend $\tau = \tau_0$ und $\tau = \tau_1$ wird; die Bögen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ sind umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen; man hat etwa

$$\tau = \tau(t, a, b, \ldots).$$

Man kann daher schreiben

$$\xi(\tau, a, b, \ldots) = \Xi(t, a, b, \ldots), \quad \eta(\tau, a, b, \ldots) = \mathrm{H}(t, a, b, \ldots), \ldots$$
$$\bar{x} = \Xi(t, a, \ldots), \quad \bar{y} = \mathrm{H}(t, a, \ldots), \ldots$$

und wenn man $a - a_0 = \varepsilon_1$, $b - b_0 = \varepsilon_2, \ldots$ setzt, kann man das Variationszeichen δ nach § 1 definieren und erhält

$$\delta x = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon_{\mathfrak{a}}} d\varepsilon_{\mathfrak{a}} \Bigg|^{\varepsilon=0} = \Xi_a(t, a_0, \ldots)\, da + \Xi_b(t, a_0, \ldots)\, db + \cdots,$$

$$\delta y = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon_{\mathfrak{a}}} d\varepsilon_{\mathfrak{a}} \Bigg|^{\varepsilon=0} = \mathrm{H}_a(t, a_0, \ldots)\, da + \mathrm{H}_b(t, a_0, \ldots)\, db + \cdots,$$

usf. Dabei ist

$$\frac{\partial \Xi}{\partial a} = \frac{\partial \xi(\tau, a, \ldots)}{\partial a} = \xi_\tau \frac{\partial \tau}{\partial a} + \xi_a \text{ usf.};$$

da nun offenbar

$$\delta\tau = \tau_a(t, a_0, b_0, \ldots)\, da + \tau_b(t, a_0, b_0, \ldots)\, db + \cdots,$$
$$\delta\tau_0 = \varphi_a(a_0, b_0, \ldots)\, da + \varphi_b(a_0, b_0, \ldots)\, db + \cdots,$$
$$\delta\tau_1 = \psi_a(a_0, b_0, \ldots)\, da + \psi_b(a_0, b_0, \ldots)\, db + \cdots$$

zu setzen ist, hat man

$$\delta x = \xi_\tau \delta\tau + \xi_a da + \xi_b db + \cdots \Big|^{t=\tau,\ a=a_0, \ldots}$$

und im besonderen

$$\delta x_0 = \xi_\tau \delta\tau_0 + \xi_a da + \cdots \Big|^{t=t_0,\ a=a_0, \ldots}$$

nebst entsprechenden Gleichungen für y und t_1.

Hiermit ist klar, daß die Bögen $\mathfrak{C}'$ vollkommen als Variationen des Bogens $\mathfrak{C}$ im Sinne des § 1 aufgefaßt werden können. Das nach a, b, … genommene Differential einer von dem Bogen $\mathfrak{C}$ bestimmten Größe an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0, \ldots$ kann also als Variation betrachtet und nach den Regeln der §§ 1 und 2 berechnet werden; im besonderen gilt dies, indem wir uns auf die xy-Ebene beschränken, von dem Differential eines Integrals der Form

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{d\tau}, \frac{d\bar{y}}{d\tau}\right) d\tau;$$

ist J^0 sein Wert auf dem Bogen $\mathfrak{C}$, so hat man an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0, \ldots$ die Formel

$$\frac{\partial J}{\partial a} da + \frac{\partial J}{\partial b} db + \cdots = \delta J^0 = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1$$

$$+ \int_0^1 (P \delta x + Q \delta y) dt,$$

wobei in den Ausdrücken für δx_0, $\delta x_1, \ldots$ immer

$$\delta = da \frac{\partial}{\partial a} + db \frac{\partial}{\partial b} + \cdots \Big|^{a = a_0,\, b = b_0, \ldots}$$

und z. B. $x_0 = \xi(\varphi, a, b, \ldots)$ gesetzt wird.

Natürlich bleibt diese Rechnung gültig, wenn es sich um einfache Mannigfaltigkeiten in einem mehr als zweistufigen Gebiet z. B. im Raume handelt, wobei die Gleichungen

$$x = \xi(t, a, \ldots), \quad y = \eta(t, a, \ldots), \quad z = \zeta(t, a, \ldots)$$

vorlägen.

II. Wir haben schon gelegentlich bemerkt, daß es leicht ist, einen ebenen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ so zu variieren, daß die Endpunkte 0 und 1 festbleiben; man braucht nur, wenn $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Gleichungen des Bogens $\mathfrak{C}$ sind,

$$\bar{x} = x + \varepsilon_1 \theta_1(t) + \varepsilon_2 \theta_2(t) + \cdots, \quad \bar{y} = y + \varepsilon_1 \lambda_1(t) + \varepsilon_2 \lambda_2(t) + \cdots$$

zu setzen, und die Annahmen

$$\theta_\alpha(t_0) = \theta_\alpha(t_1) = \lambda_\alpha(t_0) = \lambda_\alpha(t_1) = 0$$

einzuführen; die Mehrzahl der Parameter kann dazu dienen, weitere Bedingungen zu erfüllen.

Aber es kommt auch vor, daß man bei den Nachbarkurven etwa den Anfangspunkt 0 festhalten, den Endpunkt 2 auf einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ laufen lassen will; seien etwa

$$x_2 = \mathfrak{f}(\tau), \quad y_2 = \mathfrak{g}(\tau)$$

die Gleichungen der Kurve $\mathfrak{K}$ und sei etwa

$$x_1 = \mathfrak{f}(\tau_1), \quad y_1 = \mathfrak{g}(\tau_1).$$

Dann wählen wir beliebige reguläre Funktionen $\theta(t)$ und $\lambda(t)$ so, daß

$$\lambda(t_0) = \theta(t_0) = 0, \quad \theta(t_1) = \lambda(t_1) = 1$$

ist; wir setzen ferner

$$\bar{x} = x + \theta(t)\,[\mathfrak{f}(\tau) - \mathfrak{f}(\tau_1)],$$
$$\bar{y} = x + \lambda(t)\,[\mathfrak{g}(\tau) - \mathfrak{g}(\tau_1)]$$

und nehmen $\tau - \tau_1$ als Größe ε der allgemeinen Theorie des § 1. Offenbar ist

$$\bar{x}(t_1) = \mathfrak{f}(\tau), \quad \bar{y}(t_1) = \mathfrak{g}(\tau), \quad \bar{x}(t_0) = \varphi(t_0), \quad \bar{y}(t_0) = \psi(t_0),$$

d. h. die Nachbarkurve geht von 0 zur Kurve $\mathfrak{K}$, und man hat die Gleichungen

$$\delta x = d\tau \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau}\Big|^{\tau=\tau_1} = \theta(t)\,\mathfrak{f}'(\tau_1)\,d\varepsilon,$$
$$\delta y = d\tau \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \tau}\Big|^{\tau=\tau_1} = \lambda(t)\,\mathfrak{g}'(\tau_1)\,d\varepsilon,$$

$$\delta x_1 = \mathfrak{f}'(\tau_1)\,d\varepsilon, \quad \delta y_1 = \mathfrak{g}'(\tau_1)\,d\varepsilon, \quad \mathfrak{f}'(\tau_1)\,\delta y_1 - \mathfrak{g}'(\tau_1)\,\delta x_1 = 0.$$

Gilt also längs der Kurve $\mathfrak{K}$ die Differentialbeziehung

$$A\,dx + B\,dy = 0, \quad A\,\mathfrak{f}'(\tau_1) + B\,\mathfrak{g}'(\tau_1) = 0,$$

so folgt auch $A\,\delta x_1 + B\,\delta y_1 = 0$.

In derselben Weise kann man Variationen herstellen, bei denen eine, zwei oder drei beliebige Gleichungen

$$\mathfrak{G}_\alpha(x_2, y_2, x_3, y_3) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

zwischen den Koordinaten der Endpunkte des Nachbarbogens 23 vorgeschrieben sind. Man denkt die diesen Gleichungen unterworfenen Größen durch Unabhängige $\sigma, \tau, \ldots$ ausgedrückt, deren Anzahl drei, zwei, eins sein kann und die verschwinden, wenn der Punkt 2 in 0 und 3 in 1 übergeht, etwa in der Form

$$x_2 = \mathfrak{f}^2(\sigma, \tau, \ldots), \quad y_2 = \mathfrak{g}^2(\sigma, \tau, \ldots), \quad x_3 = \mathfrak{f}^3(\sigma, \tau, \ldots),$$
$$y_3 = \mathfrak{g}^3(\sigma, \tau, \ldots),$$

und setzt mit je zwei der eingeführten Funktionen θ und λ

$$\bar{x} = x + \theta^0(t)\,\{\mathfrak{f}^2(\sigma, \tau, \ldots) - x_0\} + \theta^1(t)\,\{\mathfrak{f}^3(\sigma, \tau, \ldots) - x_1\},$$
$$\bar{y} = y + \lambda^0(t)\,\{\mathfrak{g}^2(\sigma, \tau, \ldots) - y_0\} + \lambda^1(t)\,\{\mathfrak{g}^3(\sigma, \tau, \ldots) - y_1\},$$

dann sind $\sigma, \tau, \ldots$ die Größen ε, und man findet

$$\delta x = \theta^0(t)\,d\mathfrak{f}^2(\sigma, \tau, \ldots) + \theta^1(t)\,d\mathfrak{f}^3(\sigma, \tau, \ldots)\,\big|^{\sigma=\tau\cdots=0}$$

und im besonderen

$$\delta x_0 = d\mathfrak{f}^2\,\big|^{\sigma=\tau=\cdots=0}, \quad \delta x_1 = d\,\mathfrak{f}^3(\sigma, \ldots)\,\big|^{\sigma=\cdots=0};$$

ebenso ergibt sich

$$\delta y_0 = d\mathfrak{g}^2 |^{\sigma=\cdots=0}, \qquad \delta y_1 = d\mathfrak{g}^3 |^{\sigma=\cdots=0},$$

woraus nach Definition der Funktionen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ folgt

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}_a}{\partial x_2}\delta x_0 + \frac{\partial \mathfrak{G}_a}{\partial y_2}\delta y_0 + \frac{\partial \mathfrak{G}_a}{\partial x_3}\delta x_1 + \frac{\partial \mathfrak{G}_a}{\partial y_3}\delta y_1 = 0$$

bei den Werten $x_2 = x_0$, $y_2 = y_0$, $x_3 = x_1$, $y_3 = y_1$.

Nach Definition der Funktionen $\mathfrak{f}^2$, $\mathfrak{g}^2$, $\mathfrak{f}^3$, $\mathfrak{g}^3$ sind die Differentiale $d\mathfrak{f}^2, \ldots$ die allgemeinsten, die für $\delta x_0, \ldots$ gesetzt, die Gleichungen (1) erfüllen; die hergestellten Variationen $\delta x_0, \ldots$ erfüllen also die Gleichungen (1) ebenfalls in der allgemeinsten Weise.

III. Endlich sei die reguläre Kurve $\mathfrak{C}$, die, wenn $\mathfrak{f}$ an den betrachteten Stellen regulär ist, auf der Fläche

$$\text{(2)} \qquad f(x, y, z) = 0$$

liegt, so zu variieren, daß auch die Nachbarkurven dieser Fläche angehören; die Gleichungen der Kurve $\mathfrak{C}$ seien $x = \mathfrak{f}(t)$, $y = \mathfrak{g}(t)$, $z = \mathfrak{h}(t)$. Man fordert dann die Gleichung

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$$

und setzt mit willkürlichen regulären Funktionen $\theta(t)$ und $\lambda(t)$

$$\bar{x} = x + \varepsilon\theta(t), \quad \bar{y} = y + \varepsilon\lambda(t), \quad \bar{z} = z + \omega(t, \varepsilon);$$

dann kann $\omega(t, \varepsilon)$ aus der Definitionsgleichung

$$\text{(3)} \qquad f(x + \varepsilon\theta(t), \quad \lambda + \varepsilon\lambda(t), \quad z + \omega) = 0$$

bestimmt werden, wenn an der betrachteten Stelle

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$$

ist; das lehrt der Satz über die Existenz der impliziten Funktionen, wie er in § 2 ausgesprochen wurde, da die Ableitung der linken Seite der Gleichung (3) nach ω an der Stelle $\varepsilon = \omega = 0$ offenbar $\partial f/\partial z$ ist; ω ergibt sich als reguläre Funktion von ε und t, da die linke Seite der Gleichung (3) regulär in t, ε und ω ist. Die hiermit definierten Variationen

$$\delta x = \theta(t)\,d\varepsilon, \quad \delta y = \lambda(t)\,d\varepsilon, \quad \delta z = \omega_\varepsilon(t, 0)\,d\varepsilon$$

erfüllen offenbar, wie die Differentiation der Gleichung (3) nach ε zeigt, die Gleichung

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0.$$

Ist die Ungleichung (4) nicht längs der ganzen Kurve, die man variieren will, erfüllt, so zerlegt man diese in solche Teile, daß längs jedes einzelnen von ihnen eine der Größen $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ von Null verschieden bleibt. Ist diese Teilung möglich, so variiere man jeden der Teile in der angegebenen Weise, indem man z durch x oder y ersetzt, und die Endwerte der Variationen eines Teiles als Anfangswerte für den folgenden nimmt. Ist (x, y, z) dieser Anfangspunkt und sind p, q, r drei Größen, die die Gleichung

$$p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}+r\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

an dieser Stelle erfüllen, so kann man z. B. bei der Annahme (4)

$$\delta x = p\,d\varepsilon, \quad \delta y = q\,d\varepsilon$$

setzen und erhält dann nach obigem Verfahren von selbst

$$\omega_\varepsilon(t, 0) = r, \quad \delta z = r\,d\varepsilon,$$

womit die Möglichkeit des angedeuteten Übergangs von einem Teil zum anderen gesichert ist.

Jetzt kann man mit dem Zeichen δ an den aneinander gebundenen Größen ebenso operieren wie bei freien Größen, und es gilt dabei immer die Gleichung (5). Hat man z. B. die Bogenlänge einer auf der Fläche (2) gelegenen Kurve zu variieren, so bildet man, $s' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ gesetzt,

$$\delta\int_0^1\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\int_0^1\frac{x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z'}{s'}\,dt$$

$$=\frac{x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z}{s'}\bigg|_0^1-\int_0^1\left[\left(\frac{x'}{s'}\right)'\delta x+\left(\frac{y'}{s'}\right)'\delta y+\left(\frac{z'}{s'}\right)'\delta z\right]dt$$

oder, wenn man t als Bogenlänge, $s' = 1$ nimmt,

$$\delta\int_0^1 ds = x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z\Big|_0^1-\int_0^1(x''\delta x+y''\delta y+z''dz)\,dt.$$

Die hier erschienenen dreigliedrigen Ausdrücke haben geometrische Bedeutung, weil sie gegenüber einer Koordinatenwandlung invariant bleiben; vor dem Integralzeichen stehen die Projektionen des Vektors δ oder $(\delta x, \delta y, \delta z)$ auf die Tangente, gebildet in den Endpunkten; unter dem Integralzeichen steht das innere Produkt des Vektors δ und des Krümmungsradius der betrachteten Kurve, vom Kurvenpunkt nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gezogen.

§ 4.

Invariante Bildungen.

I. In der in § 2, IV. für die Variation eines längs des Bogens $\mathfrak{C}$ genommenen Integrals erhaltenen Formel

$$(1)\qquad \begin{gathered} \delta J_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 T(y'\delta x - x'\delta y)\,dt, \\ T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') \end{gathered}$$

haben die beiden unter dem Integralzeichen erscheinenden Größen bemerkenswerte Eigenschaften bei einer Transformation der Größen x, y, t.

Setzt man

$$w = y'\delta x - x'\delta y,$$

so ist die Größe

$$w\,dt = dy\,\delta x - dx\,\delta y$$

zunächst bei Einführung eines neuen Parameters an Stelle von t wie die Differentiale dx und dy invariant. Sie ist außerdem bei einer Koordinatentransformation invariant als äußeres Produkt der infinitesimalen Vektoren (dx, dy) und $(\delta x, \delta y)$ oder als Flächeninhalt des von diesen bestimmten Parallelogramms mit einem geometrisch deutbaren Vorzeichen. Nimmt man t als Bogenlänge und nennt t auch die Richtung wachsender t, N diejenige Normalrichtung, die gegen t im negativen Drehsinne um 90^0 gedreht ist, also zu t liegt wie die x-Achse zur y-Achse, so ist

$$x' = \cos(xt), \quad y' = \cos(yt), \quad y' = \cos(xN), \quad -x' = \cos(yN),$$

also ist

$$w = \delta x \cos(xN) + \delta y \cos(yN)$$

die Komponente des Vektors δ oder $(\delta x, \delta y)$ nach der Richtung N, oder, wenn man will, der Normalabstand der Kurve $\mathfrak{C}$ von einer unendlich nahen Nachbarkurve. Der Parallelogramminhalt $w\,dt = dy\,\delta x - dx\,\delta y$ ist positiv oder negativ, je nachdem von den Vektoren (dx, dy) und $(\delta x, \delta y)$ der erste gegen den zweiten im positiven oder negativen Sinne um weniger als 180^0 gedreht erscheint.

Aber die Größe w ist noch in allgemeinerem Sinne invariant. Führen wir für x und y durch Gleichungen

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v)$$

neue Veränderliche ein, so werde

$$F(x, y, x', y') = \Phi(u, v, u', v');$$

man erhält dann die Gleichungen

$$\Phi_{u'} = F_{x'}\frac{\partial x'}{\partial u'} + F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial x'},\ \Phi_{v'} = F_{x'}\frac{\partial x'}{\partial v'} + F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial v'},$$

oder, da offenbar

(2) $$x' = x_u u' + x_v v',\ y' = y_u u' + y_v v',\ \delta x = x_u \delta u + x_v \delta v,$$
$$\delta y = y_u \delta u + y_v \delta v,$$
$$\frac{\partial x'}{\partial u'} = x_u,\ \frac{\partial x'}{\partial v'} = x_v,\ \frac{\partial y'}{\partial u'} = y_u,\ \frac{\partial y'}{\partial v'} = y_v$$

zu setzen ist,

(3) $$\Phi_{u'}\delta u + \Phi_{v'}\delta v = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y.$$

Nun ist offenbar der Formel (1) zufolge, indem man F durch Φ ersetzt,

(4) $$\delta J_{01} = \delta\int_0^1 \Phi(u, v, u', v')\,dt = \Phi_{u'}\delta u + \Phi_{v'}\delta v\Big|_0^1 + \int_0^1 T_\Phi(v'\delta u - u'\delta v)\,dt,$$

wobei

$$T_\Phi = \Phi_{uv'} - \Phi_{vu'} + \Phi_1(u'v'' - u''v'),\ \Phi_1 v'^2 = \Phi_{u'u'}$$

gesetzt ist, und die Gleichungen (2) ergeben

(5) $$w = \begin{vmatrix} x_u\delta u + x_v\delta v & x_u u' + x_v v' \\ y_u\delta u + y_v\delta v & y_u u' + y_v v' \end{vmatrix} = (x_u y_v - x_v y_u)\,\omega = \varDelta\,.\,\omega$$

mit den Zeichen

$$\omega = v'\delta u - u'\delta v,\ \varDelta = x_u y_v - x_v y_u;$$

somit folgt

$$\int_0^1 T_\Phi\,\omega\,dt = \int_0^1 T_\Phi\frac{w}{\varDelta}\,dt;$$

die Gleichungen (1), (3) und (4) ergeben aber

$$\int_0^1 Tw\,dt = \int_0^1 T_\Phi\,\omega\,dt = \int_0^1 T_\Phi\frac{w}{\varDelta}\,dt.$$

Läßt man jetzt die Stelle 1 auf der Kurve $\mathfrak{C}$ laufen, so ergibt sich, indem man nach der oberen Grenze des Integrals differenziert,

(6) $$Tw = T_\Phi\cdot\frac{w}{\varDelta},\ T = T_\Phi\,.\,\varDelta^{-1}.$$

Nach einer in der Algebra üblichen Bezeichnung werden wir T als Invariante vom Gewicht -1, die Verbindung $F_{x'}\delta x$

$+ F_{y'} \delta y$ nach (3) als absolute Invariante, w nach (5) als Invariante vom Gewicht Eins bezeichnen. Endlich ergeben die oben angegebenen Ausdrücke von $\Phi_{u'}$, $\Phi_{v'}$, $\partial x'/\partial u'$ usf.

$$\begin{aligned}
\Phi_{u'} &= F_{x'} x_u + F_{y'} y_u, \\
\Phi_{u'u'} &= F_{x'x'} x_u^2 + 2 F_{x'y'} x_u y_u + F_{y'y'} y_u^2 \\
&= F_1 (y' x_u - x' y_u)^2 = F_1 [(y_u u' + y_v v') x_u - (x_u u' + x_v v') y_u]^2 \\
&= F_1 v'^2 (x_u y_v - x_v y_u)^2 = F_1 v'^2 \Delta^2.
\end{aligned}$$

Setzen wir also der Definition

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2}$$

entsprechend wie oben

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_{u'u'}}{v'^2} = -\frac{\Phi_{u'v'}}{u'v'} = \frac{\Phi_{v'v'}}{v'^2},$$

so folgt

$$F_1 = \Phi_1 \Delta^{-2};$$

F_1 ist Invariante vom Gewicht -2.

II. Eine wichtige geometrische Anwendung der Formel (6) ergibt sich, wenn J wieder die Bogenlänge einer auf der Fläche $z = f(x, y)$ liegenden Kurve $\mathfrak{K}$ bedeutet. Setzt man $p = f_x$, $q = f_y$, $dz = p\,dx + q\,dy$, so ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2},$$

also das Längenintegral

$$J = \int F^0(x, y, x', y')\,dt = \int \sqrt{x'^2 (1 + p^2) + 2pq\,x'y' + (1 + q^2)\,y'^2}\,dt;$$

wenn wir den Absatz I anwenden, ersetzen wir F durch F^0, um den Buchstaben F der üblichen Bezeichnung gemäß anderweitig verwenden zu können. Anderseits seien auf der betrachteten Fläche x, y, z Funktionen der Unabhängigen u und v; dann wird $dx = x_u\,du + x_v\,dv$ usf.

$$ds = \Phi(u, v, u', v')\,dt = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

wobei

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

gesetzt ist. Man findet dann sofort

$$\Phi_{u'} = \frac{E u' + F v'}{\sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}},$$

$$\Phi_{u'v'} = \frac{-(EG - F^2)\,u'v'}{\sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}^{\,3}},$$

$$\Phi_1 = \frac{EG - F^2}{\Phi^3}, \quad \Phi = \sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2},$$

und weiter

$$
(7)\qquad \begin{aligned} T_\Phi = {} & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F u' + G v'}{\Phi}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E u' + F v'}{\Phi}\right) \\ & + \frac{E G - F^2}{\Phi^3}(u' v'' - u'' v'). \end{aligned}
$$

Um nun die Formel (5) benutzen zu können, erinnern wir an die geometrische Bedeutung, die jetzt die Größe $\varDelta = x_u y_v - x_v y_u$ hat. Ist nämlich N eine Normalenrichtung der Fläche, so gibt jeder Fortgang auf der Fläche die Gleichung

$$
\cos(x N) d x + \cos(y N) d y + \cos(z N) d z = 0,
$$

in der $dx = x_u du + x_v dv$ usf. mit willkürlichen du, dv gesetzt werden kann. Setzt man $du = 0$ oder $dv = 0$, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich bei passender Wahl der Normalenrichtung N ergibt

$$
(8)\qquad \cos(z N) = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{\sqrt{E G - F^2}},
$$

$$
E G - F^2 = \begin{vmatrix} y_u z_u \\ y_v z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u z_u \\ x_v z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix}^2.
$$

Die Normale N liegt zu den Richtungen, die auf der Fläche durch die Beziehungen $du > 0$, $dv = 0$ und $du = 0$, $dv > 0$ bestimmt werden, wie die z-Achse zu den Achsen x und y. Die Formel (6) kann also geschrieben werden

$$
(9)\qquad T_\Phi = T_{F0} \sqrt{E G - F^2} \cos(z N).
$$

Jetzt geht der unter (6) angegebene Ausdruck T_Φ in T_{F0} über, wenn man u, v, E, F, G durch x, y, $1 + p^2$, pq, $1 + q^2$ ersetzt; wir bilden ihn, indem wir den Koordinatenanfangspunkt in den betrachteten Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, die z-Achse in die Richtung N legen. Dann ist, da im allgemeinen die Formeln

$$
\pm\cos(x N) = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \pm\cos(y N) = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},
$$

$$
\pm\cos(z N) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}
$$

gelten, $p = q = 0$, und auch die Größen E_u, E_v, F_u, F_v, G_u, G_v verschwinden sämtlich mit p und q; die Größen Φ und

$EG - F^2$ gehen in $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ und 1 über; die Gleichung (7) gibt also einfach

$$T_{F0} = \frac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}.$$

Nehmen wir jetzt als Unabhängige t die Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{K}$, so daß

$$x'^2 + y'^2 + (px' + qy')^2 = 1$$

wird, so folgt

$$T_{F0} = x'y'' - x''y'.$$

Das ist aber allgemein nichts anderes als die Krümmung der Projektion der betrachteten Kurve $\mathfrak{K}$ auf die xy-Ebene, in unserem Falle also auf die Tangentialebene der Fläche im betrachteten Punkte; diese nennt man die geodätische Krümmung der Kurve und bezeichnet sie durch $1/\varrho_g$. Sie ist positiv oder negativ, je nachdem die Richtung vom betrachteten Punkte nach dem Krümmungsmittelpunkte der bezeichneten Projektion hin zur Richtung wachsender t und zur z-Achse oder der Richtung N ebenso oder entgegengesetzt liegt wie die Achsen der Koordinaten y, x, z in dieser Folge. Da nun $\cos(zN) = +1$ ist, ergibt die Formel (9)

$$\sqrt{EG - F^2}\,\frac{1}{\varrho_g} = T_\Phi,$$

$$(10)\qquad \frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Fu' + Gv'}{\Phi}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Eu' + Fv'}{\Phi}\right) + \frac{EG - F^2}{\Phi^3}(u'v'' - u''v')\right\}.$$

Damit ist ein bei beliebigen krummlinigen Koordinaten u, v gültiger Ausdruck der geodätischen Krümmung gefunden, aus dem zugleich der Lehrsatz von Minding ersichtlich wird, daß die geodätische Krümmung eine Biegungsinvariante ist, d. h. nur von den Größen E, F, G und ihren Ableitungen abhängt.

III. Die Formel (5) ergibt nach (8)

$$w\,dt = \omega\sqrt{EG - F^2}\cos(zN)\,dt, \quad w = y'\delta x - x'\delta y,$$
$$\omega = v'\delta u - u'\delta v.$$

Dabei ist die Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Fläche $z = f(x,y)$ variiert gedacht und damit auch ihre Projektion auf die xy-Ebene, die wir als Kurve $\mathfrak{C}$ in Nr. I nehmen können. Faßt man das in Nr. I erwähnte unendlich kleine Parallelogramm, dessen Inhalt $w\,dt$ ist, als Projektion einer Figur auf der Fläche auf, so ist der Inhalt letzterer Figur, mit $\cos(zN)$ vervielfacht, der Inhalt der Projektion; die Gleichung (4) zeigt also, daß $w\sqrt{EG-F^2}\,dt$ der Inhalt des Parallelogramms ist, das von ds, dem Bogenelement der Kurve $\mathfrak{K}$, und dem Vektor $(\delta x, \delta y, \delta z)$ bestimmt wird, der von einem Punkte der Kurve $\mathfrak{K}$ zu dem entsprechenden variierten Punkte hinführt.

Diese Infinitesimalbetrachtung dient nur zur Erläuterung, wenn wir die Variation des Inhalts eines auf der Fläche $z = f(x, y)$ liegenden Flächenstücks betrachten. Dieser Inhalt, der von der geschlossenen Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzt werde, wird durch das Doppelintegral

$$J = \iint \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

definiert, das wir, wenn eine Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \sqrt{EG-F^2}$$

gilt, mittels der Gaußschen Integraltransformation in ein Integral längs der Kurve $\mathfrak{K}$ verwandeln können:

$$J = \iint \frac{\partial L}{\partial u}\,du\,dv = \int_{\mathfrak{K}} L\,dv,$$

ebenso ergibt sich, wenn eine Funktion M der Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \sqrt{EG-F^2}$$

gemäß bestimmt wird,

$$J = \iint \frac{\partial M}{\partial v}\,du\,dv = -\int_{\mathfrak{K}} M\,du,$$

also

$$J = \iint \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \tfrac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}} (Lv' - Mu')\,dt.$$

Setzen wir jetzt $2\Phi = Lv' - Mu'$, so ergibt sich $\Phi_1 = 0$,

$$2\,T_\Phi = \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial u} = 2\sqrt{EG-F^2},$$

also nach I., wenn wir ein Stück der Kurve $\mathfrak{K}$ variieren, dessen Endpunkte festbleiben,

$$\text{(11)} \qquad \delta J = \int T_\Phi\,\omega\,dt = \int \sqrt{EG-F^2}\,\omega\,dt,$$

und hiermit ist die Variation des Flächeninhalts mit Rücksicht auf die oben gegebene Deutung des Integrationselements im letzten Integral in anschaulich deutbare Form gebracht.

IV. Variiert man einen ebenen Bogen $\mathfrak{C}$ und stellt das System der Nachbarkurven her, so kann man in mannigfaltiger Weise andere Variationen bilden, die zu denselben Nachbarkurven führen.

Seien wieder 0 und 1 die Endpunkte des regulären Bogens $\mathfrak{C}$, der durch Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dargestellt werde; die Nachbarkurven seien durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \theta(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \theta(t, \varepsilon) = \bar{\varphi}(t) \\ \bar{y} &= y + \lambda(t, \varepsilon) = \psi(t) + \lambda(t, \varepsilon) = \bar{\psi}(t) \end{aligned}$$

gegeben; dabei sei

$$\theta(t, 0) = \lambda(t, 0) = 0.$$

Dann setzt man

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\varphi}(t + \tau), \quad \bar{\bar{y}} = \bar{\psi}(t + \tau),$$

$$(12) \qquad \tau = \tau(t, \varepsilon), \quad \tau(t, 0) = 0, \quad \tau(t_0, \varepsilon) = \tau(t_1, \varepsilon) = 0.$$

Die Größe $t + \tau$ durchläuft bei diesen Festsetzungen mit t zugleich die Strecke $t_0 \dots t_1$; der Ort der Punkte $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ fällt also mit dem der Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$, der allgemeinen Nachbarkurve, zusammen. Man findet nun offenbar

$$\frac{\partial(\bar{\bar{x}} - x)}{\partial \varepsilon} = \varphi'(t + \tau)\tau_\varepsilon(t, \varepsilon) + \theta_t(t + \tau, \varepsilon)\tau_\varepsilon(t, \varepsilon) + \theta_\varepsilon(t + \tau, \varepsilon);$$

bezeichnet man die dem Übergang vom Punkte (x, y) zu $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ entsprechende Variation durch δ_1, so ergibt sich hiernach

$$\delta_1 x = d\varepsilon \left. \frac{\partial(\bar{\bar{x}} - x)}{\partial \varepsilon} \right|^{\varepsilon = 0} = [\varphi'(t)\tau_\varepsilon(t, 0) + \theta_\varepsilon(t, 0)]\, d\varepsilon;$$

es ist ja $\theta_t(t, 0) = 0$. Ebenso erhält man eine Gleichung für $\delta_1 y$; man kann schreiben

$$(13) \qquad \delta_1 x = x' \tau_\varepsilon(t, 0)\, d\varepsilon + \delta x, \quad \delta_1 y = y' \tau_\varepsilon(t, 0)\, d\varepsilon + \delta y$$

und erhält hieraus beiläufig

$$y' \delta_1 x - x' \delta_1 y = y' \delta x - x' \delta y = w;$$

die Größe w ist auch beim Ersatz von δ durch δ_1 invariant. Die Variationsvektoren $(\delta x, \delta y)$ oder δ und $(\delta_1 x, \delta_1 y)$ oder δ_1 haben also dieselbe Komponente nach der Normalen der Kurve $\mathfrak{C}$, was geometrisch ersichtlich ist. In Fig. 1 ist 01 die Normale, die Strecke $01 = w$, 03 und 04 sind die Vektoren δ_1 und δ, $06 = \delta x$, $64 = \delta y$, $07 = \delta_1 x$, $73 = \delta_1 y$. Natürlich ist 01 nur in der Grenze die gemeinsame Komponente von δ und δ_1, wenn $d\varepsilon$ unendlich abnimmt.

Die letzten Gleichungen (12) geben beiläufig

$$\tau_\varepsilon(t_0, 0) = \tau_\varepsilon(t_1, 0) = 0,$$

also

$$\delta x_0 = \delta_1 x_0, \quad \delta y_0 = \delta_1 y_0, \quad \delta x_1 = \delta_1 x_1, \quad \delta y_1 = \delta_1 y_1;$$

die Nachbarbögen haben bei beiden Variationen auch dieselben Endpunkte und die Endwerte der Variationen sind dieselben.

Die Funktion $\tau(t, \varepsilon)$ ist noch weithin willkürlich. Man kann z. B. die Gleichung

$$(14) \qquad x' \delta_1 x + y' \delta_1 y = 0$$

fordern; das gibt nach (13)

$$(x'^2 + y'^2)\tau_\varepsilon(t, 0) + x'\theta_\varepsilon(t, 0) + y'\lambda_\varepsilon(t, 0) = 0,$$

und man kann etwa setzen

$$\tau(t, \varepsilon) = -\varepsilon \cdot \frac{x'\theta_\varepsilon(t, 0) + y'\lambda_\varepsilon(t, 0)}{x'^2 + y'^2}.$$

Allerdings sind die Gleichungen $\tau(t_0, \varepsilon) = \tau(t_0, \varepsilon) = 0$ nur dann erfüllt, wenn schon die Gleichungen

$$x'\delta x + y'\delta y\,\big|^{0,1} = 0$$

gelten, der ursprüngliche Variationsvektor δ also in den Endpunkten normal zur Kurve $\mathfrak{C}$ gerichtet ist, oder wenn die Endpunkte festbleiben. In letzterem Falle kann also eine beliebige Variation durch eine solche, bei der die Gleichung (14) gilt, ersetzt werden.

Eine Variation in der xy-Ebene, bei der immer die Gleichung

$$x'\delta x + y'\delta y = 0$$

gilt, heißt eine Normalvariation. Die Definition

$$y'\delta x - x'\delta y = w$$

gibt bei ihr

$$\delta x = \frac{y' w}{x'^2 + y'^2}, \quad \delta y = \frac{-x' w}{x'^2 + y'^2},$$

also wenn t die Bogenlänge bedeutet

$$\delta x = y' w = w \cos(xN), \quad \delta y = -x' w = w \cos(yN);$$

der Vektor δ ist in Fig. 1 dann 01. Bleiben die Endpunkte fest, so kann w bis auf den Faktor $d\varepsilon$ als eine beliebige für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwindende Funktion von t und ε mit dem Faktor $d\varepsilon$ angenommen werden, z. B. $w = d\varepsilon \,.\, \omega(t)$, wenn

$\omega(t_0) = \omega(t_1) = 0$; die Kurvenschar, innerhalb deren man variiert, wird durch die Gleichungen

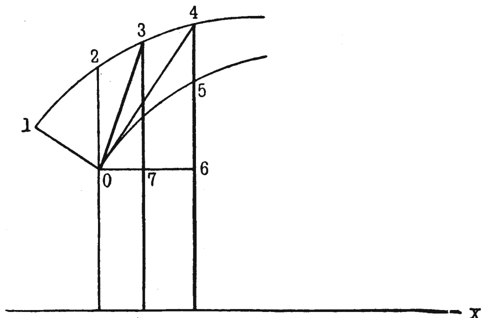
$$\bar{x} - x = \frac{y' \varepsilon \omega(t)}{x'^2 + y'^2}, \quad \bar{y} - y = \frac{-x' \varepsilon \omega(t)}{x'^2 + y'^2}$$

gegeben.

Die Formel

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1 + \int_0^1 T w \, dt = \int_0^1 T w \, dt$$

Fig. 1.



gibt z. B., wenn J die Bogenlänge ist, also

$$F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

gesetzt wird,

$$\delta J_{01} = \int_0^1 \frac{x' y'' - x'' y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} w \, dt = \int_0^1 \frac{w}{\varrho} ds,$$

wobei ds das Bogenelement, $1/\varrho$ die Krümmung bedeutet.

Eine Normalvariation auf einer Fläche, die wir uns wie in Nr. II dargestellt denken, wäre eine solche, bei der der Variationsvektor δ oder $(\delta x, \delta y, \delta z)$ auf der Richtung der variierten Kurve senkrecht steht; das gibt die Bedingung

$$\delta u (E u' + F v') + \delta v (F u' + G v') = 0,$$

die erfüllt ist, wenn

$$\delta u = \lambda (F u' + G v'), \quad \delta v = -\lambda (E u' + F v')$$

gesetzt werden kann; in diesem Falle ergibt sich, wenn dt als Bogenelement $= ds$ genommen wird,

$$v' \delta u - u' \delta v = \lambda = \omega.$$

Nennen wir ν die Länge des Variationsvektors mit dem Vorzeichen der Größe ω, so ist

$$\nu^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = E \delta u^2 + 2 F \delta u \delta v + G \delta v^2,$$

also nach den vorhergehenden Gleichungen

$$\nu^2 = \omega^2 (E G - F^2), \quad \omega = \frac{\nu}{\sqrt{E G - F^2}},$$

und die Formel

$$\delta \int_0^1 \Phi \, dt = \Phi_{u'} \delta u + \Phi_{v'} \delta v \Big|_0^1 + \int_0^1 T_\Phi \omega \, dt$$

gibt nach (10) für die Variation der Bogenlänge bei festen Endpunkten den Ausdruck

(15) $$\delta \operatorname{arc} 01 = \delta \int_0^1 \Phi\, dt = \int_0^1 \frac{\nu\, ds}{\varrho_g}.$$

In den jetzigen Bezeichnungen gibt die Formel (11) für die Variation des Flächeninhalts

(16) $$\delta J = \int \nu\, ds,$$

womit beide Variationen invariant, also anschaulich dargestellt sind.

Die geometrische Bedeutung des Vorzeichens der Größen ω und ν ergibt sich aus der leicht zu bestätigenden Gleichung

$$\begin{vmatrix} \cos(xN) & \cos(yN) & \cos(zN) \\ dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} = -\omega\, dt;$$

ν ist negativ, wenn die Normale N nach Nr. II (8) definiert, die Richtung wachsender t und die Richtung des Variationsvektors entgegengesetzt liegen wie die Achsen x, y, z.

V. Man kann durch andere Besonderung der Funktion τ bewirken, daß immer die Gleichung $\delta_1 x = 0$ gilt, also nach (13)

$$x' \tau_\varepsilon(t, 0) + \theta_\varepsilon(t, 0) = 0$$

ist; auf einer Strecke, wo x' nicht verschwindet, kann man etwa

$$\tau(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon\, \theta_\varepsilon(t, 0)}{x'}$$

setzen; die Endbedingungen (12) sind erfüllt, wenn $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ ist. Nennen wir die so bestimmte Variation δ_1 etwa δ_0, so ist offenbar nach (13)

$$\delta_0 y = \delta y - p\, \delta x, \quad \delta_0 x = 0,$$

die Variation δ_0 heißt eine abgestumpfte. In Fig. 1 ist $64 = \delta y$, $65 = p\, \delta x$, $01 = \delta_0 y$, und die Strecken 01 und 54 sind gleich bis auf Größen von der Ordnung der Größe $d\varepsilon^2$. Da die allgemeine Gleichung

(17) $$\delta J_{01} = (f - p f_p)\, \delta x + f_p\, \delta y \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(f_y - \frac{d f_p}{dx}\right)(\delta y - p\, \delta x)\, dx$$

gilt, kann man im Falle $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ schreiben

$$(18) \qquad \delta\int_0^1 f(x,y,p)\,dx = f_p\delta_0 y\Big|_0^1 + \int_0^1\left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right)\delta_0 y\,dx,$$

eine Formel, mit der man häufig die Variationsrechnung beginnt, indem man zunächst abgestumpfte Variationen betrachtet. Im Falle beliebiger Endvariationen kann man die Formel (18) auch schreiben

$$(19) \qquad \delta\int_0^1 f(x,y,p)\,dx = f\delta x\Big|_0^1 + f_p\delta_0 y\Big|_0^1 + \int_0^1\left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right)\delta_0 y\,dx,$$

und die naheliegende Verallgemeinerung ist, $p_\alpha = dy_\alpha/dx$ gesetzt,

$$(20) \qquad \delta\int_0^1 f(x,y_1,y_2,\ldots p_1,p_2,\ldots)\,dx = f\delta x\Big|_0^1 + \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\delta_0 y_\alpha$$

$$+ \int_0^1 \sum_\alpha\left\{\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right\}\delta_0 y_\alpha\,dx.$$

Die geometrische Bedeutung der Variationen $\delta_0 y$ ist wieder leicht ersichtlich: $\delta_0 y$ ist der Abstand zweier Nachbarkurven in der Richtung der y-Achse, 54 in Fig. 1.

Selbständig kann man die Formel (19) aus der Formel (18) ableiten, indem man nur die abgestumpfte Variation $\delta_0 y$ mittels eines Parameters ε einführt und das Integral

$$\overline{J} = \int_{x_0}^{x_1} f(\overline{x},\overline{y},\overline{p})\,dx$$

als Funktion von ε und den Integrationsgrenzen x_0 und x_1 betrachtet. Man hat dann die Gleichungen

$$d\overline{J} = \frac{\partial \overline{J}}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial \overline{J}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \overline{J}}{\partial \varepsilon}d\varepsilon,$$

und wenn man $\varepsilon = 0$ setzt,

$$\delta_0 J = \frac{\partial \overline{J}}{\partial \varepsilon}\Big|^{\varepsilon=0} d\varepsilon, \quad \frac{\partial \overline{J}}{\partial x_0}\Big|^{\varepsilon=0} = -f(x,y,p)\Big|^0,$$

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial x_1}\Big|^{\varepsilon=0} = f(x,y,p)\Big|^1,$$

also, wenn man δx_α für dx_α schreibt,

$$\delta J = d\overline{J}\Big|^{\varepsilon=0} = f(x,\,y,\,p)\delta x\Big|_0^1 + \delta_0 J,$$

was die Formel (19) bedeutet. Ebenso ergibt sich, unabhängig von allgemeinen Variationen, nur mittels abgestumpfter die allgemeine Formel (20).

Übrigens kann man auch bei einer beliebigen Variation für die Operation δ_0 Regeln ableiten, indem man allgemein definiert

$$\delta_0 U = \delta U - \frac{dU}{dx}\delta x;$$

man findet dann offenbar

$$\begin{aligned}\delta_0\left(\frac{dU}{dx}\right) &= \frac{\delta U'}{x'} - \left(\frac{U'}{x'}\right)'\frac{\delta x}{x'} - \frac{U'}{x'^2}\delta x' \\ &= \frac{\delta U'}{x'} - \frac{1}{x'}\left(\frac{U'\delta x}{x'}\right)' = \frac{d\,\delta_0 U}{dx},\end{aligned}$$

so daß die Operationen δ_0 und d/dx vertauschbar sind. Setzt man

$$\frac{dU}{dx} = V, \quad U = U(x) = \int_{x_0}^{x} V\,dx, \quad \delta_0\,U(x_0) = 0,$$

so folgt hieraus

$$\delta_0 \int_{x_0}^{x} V\,dx = \int_{x_0}^{x} \delta_0 V\,dx;$$

also ist δ_0 auch mit der Integration nach x, deren Grenzen $\delta_0 x = \delta_0 x_0 = 0$ geben, vertauschbar.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachste Extremsaufgabe der Variationsrechnung.

§ 5.

Hilfssätze aus der Differentialrechnung.

Werde das Extrem einer Funktion von mehreren Veränderlichen gesucht, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen. Genauer suchen wir notwendige Bedingungen dafür, daß eine Funktion $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m)$ an der Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_m = 0$ oder $\varepsilon = 0$, wo sie regulär sei, ein Extrem besitze. Sind die Größen ε zunächst frei veränderlich, so setze man $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_m = 0$; ist dann

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 \neq 0,$$

wobei die Fußmarke 0 das System $\varepsilon = 0$ bedeute, so wird $F(\varepsilon_1, 0, \dots 0)$ bei beliebig kleinen Werten von ε_1, also in beliebiger Nähe der Stelle $\varepsilon = 0$ sowohl größer wie kleiner als

$$F(0, 0, \dots 0) = F_0,$$

womit das Extrem an der Stelle $\varepsilon = 0$ ausgeschlossen ist. Notwendige Bedingungen des betrachteten freien Extrems sind also die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_m}\right)_0 = 0.$$

Jetzt sei $m > n$ und seien die Größen ε den Bedingungsgleichungen

(1) $$G_\mathfrak{a}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m) = 0, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \dots n$$

unterworfen, deren linke Seiten ebenfalls an der Stelle $\varepsilon = 0$ regulär seien; wir setzen

$$\left(\frac{\partial G_{\mathfrak{a}}}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = a_{\mathfrak{a}1}, \; \left(\frac{\partial G_{\mathfrak{a}}}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = a_{\mathfrak{a}2}, \ldots$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = c_1, \; \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = c_2, \ldots$$

Die Gleichungen (1) seien nun nach irgend n der in ihnen vorkommenden Größen ε auflösbar, z. B. nach den $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$, die dann als Funktionen von $\varepsilon_{n+1}, \ldots \varepsilon_m$ erscheinen:

(2) $$\varepsilon_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(\varepsilon_{n+1}, \ldots \varepsilon_m).$$

Nach den Sätzen der Differentialrechnung (§ 2, I) über die Existenz impliziter Funktionen ist das sicher, wenn die Determinante $|a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}|$ nicht verschwindet:

$$\operatorname{Det}|a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alsdann gibt es an der Stelle $\varepsilon = 0$ reguläre Funktionen $\varphi_{\mathfrak{a}}$, die für $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ gesetzt die Gleichungen (1) erfüllen, und jedes diese Gleichungen erfüllende Wertsystem ε, in welchem alle $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots |\varepsilon_m|$ unter einer gewissen Schranke liegen, erfüllt auch die Gleichungen (2). Aus letzterem Umstande folgt, daß die Größe

$$F(\varphi_1, \ldots \varphi_n, \quad \varepsilon_{n+1}, \ldots \varepsilon_m)$$

als Funktion der Größen $\varepsilon_{n+1}, \ldots \varepsilon_m$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Extrem haben muß, so daß nach dem, was vorher über freie Extreme festgestellt wurde, die Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial \varepsilon_{n+k}}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{n+k}}\right)_0 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots m - n$$

gelten, oder

(3) $$\sum_{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial \varepsilon_{n+k}}\right)_0 + c_{n+k} = 0.$$

Differenziert man ferner die Gleichungen (1), in denen $\varepsilon_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}$ gesetzt wird, nach ε_{n+k}, so ergibt sich

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial \varepsilon_{n+k}} + \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial \varepsilon_{n+k}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots m - n,$$

also an der Stelle $\varepsilon = 0$

(4) $$\sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} \left(\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial \varepsilon_{n+k}}\right)_0 + a_{\mathfrak{b}, n+k} = 0.$$

Die Gleichungen (3) und (4) ergeben als notwendige Bedingung des in Rede stehenden Extrems das Verschwinden gewisser Determinanten:

$$(5)\qquad \operatorname{Det}\begin{vmatrix} c_{\mathfrak{a}} & c_{n+k} \\ a_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{b},n+k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \ldots & c_n & c_{n+k} \\ a_{11} \ldots & a_{1n} & a_{1,n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \ldots & a_{nn} & a_{n,n+k} \end{vmatrix} = 0.$$

Ordnet man nach den Größen der letzten Spalte, so sieht man, daß Größen A, $B_{\mathfrak{a}}$ existieren, die von k unabhängig sind und die Gleichungen

$$A\,c_{n+k} + \sum_{\mathfrak{a}} B_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a},n+k} = 0, \quad k = 1, \ldots m - n$$

geben; dabei ist

$$A = \operatorname{Det}|a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}| \neq 0.$$

Die Größen A, $B_{\mathfrak{a}}$ hängen, was für uns besonders wichtig sein wird, nur von den Größen $c_{\mathfrak{a}}$ und $a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ ab, nicht aber von c_{n+k}, $a_{\mathfrak{a},n+k}$.

§ 6.

Das einfachste Extrem in der Variationsrechnung.

Sei die Aufgabe vorgelegt, die gegebenen Punkte 0 und 1 in der Ebene durch eine solche Kurve $\mathfrak{C}$ zu verbinden, daß das Integral

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y')\,dt = \int_0^1 f(x, y, p)\,dx$$

ein Größtes oder Kleinstes werde; z. B. wenn $F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ gesetzt wird, soll die kürzeste Linie 0 1 gefunden werden. Damit das Integral J einen sicheren Sinn habe, nehmen wir an, die gesuchte, jetzt gefunden gedachte Kurve $\mathfrak{C}$ sei regulär, x und y seien Funktionen von t auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$; dabei sei immer $t_0 < t_1$, d. h. wir wählen den Parameter so, daß er in der Integrationsrichtung wächst; der Vektor (x', y') geht dann in der Richtung wachsender Werte von t. Die Funktion F sei, wie im ersten Abschnitt meistens, positiv homogen bezüglich der Unabhängigen x', y'; dann gilt dasselbe von $F_{x'}$ und $F_{y'}$; sei ferner F regulär in den auf der Kurve $\mathfrak{C}$ vorkommenden Wertsystemen x, y, x', y'.

Wir variieren nun die Kurve $\mathfrak{C}$ mit festen Endpunkten, so daß

$$\bar{x} = x + \theta(t, \varepsilon), \quad \bar{y} = y + \lambda(t, \varepsilon)$$

gesetzt wird mit den Bedingungen

$$\theta(t, 0) = \lambda(t, 0) = \theta(t_0, \varepsilon) = \lambda(t_0, \varepsilon) = 0.$$

Das Integral J_{01} geht dabei über in ein Integral

$$\bar{J}_{01} = \int_0^1 F\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt,$$

eine an der Stelle $\varepsilon = 0$ reguläre Funktion von ε, die für $\varepsilon = 0$ den Wert J_{01} annimmt, also an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Extrem haben soll. Das gibt nach § 5 die Gleichung

$$\left.\frac{\partial \bar{J}_{01}}{\partial \varepsilon}\right|^{\varepsilon = 0} = 0,$$

oder auch in der Bezeichnung des ersten Abschnittes

$$d\varepsilon \left.\frac{\partial(\bar{J}_{01} - J_{01})}{\partial \varepsilon}\right|^{\varepsilon = 0} = \delta J_{01} = 0,$$

dabei ist

$$\delta x_0 = \delta x_1 = \delta y_0 = \delta y_1 = 0.$$

Nun ist nach § 2, IV

$$\delta J_{01} = \int_0^1 T w\, dt, \quad w = y' \delta x - x' \delta y, \quad T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1 (x' y'' - x'' y'),$$

wobei aber schon vorausgesetzt ist, daß $\mathfrak{C}$ nicht nur regulär, sondern auch stetig gekrümmt sei, d. h. daß x'' und y'' existieren und stetig sind. Dies wollen wir auch für die gesuchte, gefunden gedachte Kurve $\mathfrak{C}$ voraussetzen; dann finden wir die Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} T w\, dt = 0$$

als notwendige Bedingung des gesuchten Extrems.

Hier kann nun w als eine mit $d\varepsilon$ multiplizierte beliebige auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ reguläre Funktion, etwa $w = \varphi(t)\, d\varepsilon$, gelten, für die $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0$ ist; man kann ja

$$\bar{x} - x = \frac{\varepsilon\, \varphi(t)\, y'}{x'^2 + y'^2}, \quad \bar{y} - y = \frac{-\varepsilon\, \varphi(t)\, x'}{x'^2 + y'^2}$$

setzen und findet dann

$$\delta x = \frac{\varphi(t)\, y'\, d\varepsilon}{x'^2 + y'^2}, \quad \delta y = \frac{-\varphi(t)\, x'\, d\varepsilon}{x'^2 + y'^2}, \quad y'\delta x - x'\delta y = \varphi(t)\, d\varepsilon = w$$

und weiß jetzt, daß die Gleichung

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} T\varphi(t)\, dt = 0$$

bei jeder Wahl von $\varphi(t)$ nach den soeben gestellten Forderungen gelten muß.

Hier ergibt sich der Hauptthilfssatz der Variationsrechnung; aus der Gleichung (1) folgt

$$T = 0,$$

wenn T eine auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ gegebene stetige Funktion von t bedeutet, und $\varphi(t)$ als stetige Funktion auf derselben Strecke beliebig gewählt werden darf.

In der Tat, wäre z. B. $T > 0$ an der Stelle $t = t_2$, wobei $t_0 < t_2 < t_1$, so gilt dasselbe für eine Strecke

$$t_2 - \alpha \leqq t \leqq t_2 + \alpha,$$

in der α hinreichend klein positiv und natürlich so gewählt wird, daß

$$t_0 < t_2 - \alpha, \quad t_1 > t_2 + \alpha.$$

Setzen wir nun $\varphi(t) = 0$ auf den Strecken $t_0 \ldots t_2 - \alpha$ und $t_2 + \alpha \ldots t_1$, und ferner auf der Strecke $t_2 - \alpha \ldots t_2 + \alpha$ etwa

$$\varphi(t) = \bigl(t - (t_2 - \alpha)\bigr)^k (t_2 + \alpha - t)^k, \quad k > 2,$$

so ist $\varphi(t)$ auf der ganzen Strecke $t_0 \ldots t_1$ mit den Ableitungen bis zur Ordnung $k - 1$ stetig, genügt also, wenn $k > 2$, den oben an $\varphi(t)$ gestellten Anforderungen sowie derjenigen, daß die bei der Variation auftretenden Nachbarkurven stetig gekrümmt seien, und man findet

$$\int_{t_0}^{t_1} T\varphi(t)\, dt = \int_{t_2-\alpha}^{t_2+\alpha} (t - t_2 + \alpha)^k (t_2 + \alpha - t)^k\, T\, dt,$$

also, da T und $\varphi(t)$ zwischen den Werten $t_2 - \alpha$ und $t_2 + \alpha$ positiv sind,

$$\int_{t_0}^{t_1} T\varphi(t)\, dt > 0,$$

entgegen der vorausgesetzten Gleichung (1). Ebenso findet man einen Widerspruch gegen diese Gleichung, wenn T zwischen t_0

und t_1 irgendwo negativ ist. Somit folgt für die ganze Strecke $t_0 \ldots t_1$ die Gleichung

$$T = 0,$$

womit der Hauptsatz bewiesen ist.

Soll also eine reguläre, stetig gekrümmte Kurve 01 ein Extrem des Integrals J_{01} liefern, so muß längs ihrer die Gleichung

$$T = 0$$

bestehen; man nennt sie dann Extremale des Integrals J. Da ferner

$$T y' = P = F_x - \frac{d F_{x'}}{d t}, \quad - T x' = Q = F_y - \frac{d F_{y'}}{d t},$$

so gelten längs einer Extremale die Eulerschen Differentialgleichungen

$$F_x - \frac{d F_{x'}}{d t} = 0, \quad F_y - \frac{d F_{y'}}{d t} = 0$$

die offenbar beide wesentlich dasselbe aussagen. In nichthomogener Schreibweise, $F = f(x, y, p)\, x'$ gesetzt, folgt hieraus

$$f_x - \frac{d(f - p f_p)}{d x} = 0, \quad f_y - \frac{d f_p}{d x} = 0, \tag{2}$$

was eine in zwei Formen geschriebene Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen x und y bedeutet.

Nimmt man t als Bogenlänge s und nennt ϑ den Winkel, um den man eine Halbgerade aus der positiven x-Achse heraus drehen muß, um sie in die Richtung des Vektors (x', y') zu bringen, so ist

$$x' y'' - x'' y' = \frac{d \vartheta}{d s}, \quad \frac{d x}{d s} = \cos \vartheta, \quad \frac{d y}{d s} = \sin \vartheta,$$

und die Gleichung

$$T = 0$$

ergibt

$$\frac{d \vartheta}{d s} = - \frac{F_{x y'} - F_{y x'}}{F_1} = \Phi(x, y, \vartheta);$$

für x, y, ϑ als Funktion von s hat man also drei simultane gewöhnliche Differentialgleichungen.

II. Die Verallgemeinerung dieser Betrachtung liegt nahe. Hat man die Variation eines Integrals

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, z, \ldots, x', y', z', \ldots)\, d t$$

auf die Form

$$\delta J_{01} = A\,\delta x + B\,\delta y + \cdots\Big|_0^1 + \int_0^1 dt\,(P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z + \cdots)$$

gebracht, und soll δJ_{01} bei festen Endpunkten, übrigens aber freier Variation der Größen $x, y, \ldots$, verschwinden, so setzt man zunächst $\delta y = \delta z = \cdots = 0$ und findet die Gleichung

$$\delta J_{01} = \int_0^1 P\,\delta x\,dt = 0.$$

Da nun $\delta x = \varphi(t)\,d\varepsilon$ gesetzt werden kann mit den Bedingungen $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0$, so gibt der Hauptsatz, falls P längs der gesuchten einfachen Mannigfaltigkeit stetig ist, die Gleichung

$$P = 0,$$

der sich durch entsprechende Erwägung die Gleichungen

$$Q = R = \cdots = 0$$

anreihen. Dabei ist es unerheblich, ob man schon weiß, daß $P = F_x - F'_{x'}$ ist usf., was sich übrigens nach § 2, V. beweisen läßt.

III. Die beim Beweis des Hauptsatzes benutzte Funktion $\varphi(t)$ hat kein einheitliches analytisches Bildungsgesetz; es ist aber einigermaßen bedeutsam, den Beweis mittels einer einheitlichen analytischen Funktion zu führen, wodurch eine gewisse Verschärfung des Satzes erreicht wird.

Sei $F(t)$ auf der Strecke $t_0 \leqq t \leqq t_1$ stetig und $t_0 < s < t_1$; dann gilt die Formel

$$\lim_{c=+\infty} \int_{t_0}^{t_1} c\,F(t)\,e^{-c^2(t-s)^2}\,dt = F(s)\sqrt{\pi}. \tag{3}$$

In der Tat findet man, indem man $c(t-s) = u$ setzt,

$$\int_{t_0}^{t_1} c\,F(t)\,e^{-c^2(t-s)^2}\,dt = \int_{c(t_0-s)}^{c(t_1-s)} e^{-u^2}\,F\left(s + \frac{u}{c}\right)du. \tag{4}$$

Ist nun ε beliebig klein positiv gegeben, so kann man g so groß positiv wählen, daß, wenn $u_1 \geqq g$, $u_2 \leqq -g$, immer die Ungleichungen

$$\int_g^{u_1} e^{-u^2}\,du < \varepsilon, \quad \int_{u_2}^{-g} e^{-u^2}\,du < \varepsilon$$

gelten. Dann ist in der Gleichung

$$(5)\qquad \int_{-g}^{+g} e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du + \eta = \sqrt{\pi} + \eta$$

immer $|\eta| \leqq 2\varepsilon$. Ist g so bestimmt, so wähle man c positiv so groß, daß $c(t_1 - s) > g$, $c(t_0 - s) < -g$; diese Ungleichungen bleiben bei Bestand, wenn man c nachträglich vergrößert. Jetzt kann man nach (4) und (5) schreiben

$$\int_{t_0}^{t_1} c\,F(t)\,e^{-c^2(t-s)^2}\,dt = \int_{-g}^{+g}\left[F\left(s+\frac{u}{c}\right) - F(s)\right]e^{-u^2}\,du$$

$$+ F(s)(\sqrt{\pi} + \eta) + \int_{c(t_0-s)}^{-g} F\left(s+\frac{u}{c}\right)e^{-u^2}\,du + \int_{g}^{c(t_1-s)} F\left(s+\frac{u}{c}\right)e^{-u^2}\,du;$$

ist auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ immer $|F(t)| < M$, so sind die letzten beiden Glieder zusammen absolut nicht größer als $2M\varepsilon$, ebenso das Glied $F(s).\eta$. In dem ersten Gliede kann man durch Vergrößerung von c wegen der Stetigkeit der Funktion F bewirken, daß für alle u zwischen $-g$ und $+g$ die Ungleichung

$$\left|F\left(s+\frac{u}{c}\right) - F(s)\right| < \varepsilon$$

gilt; dann ist das erste Glied absolut kleiner als

$$\varepsilon\int_{-g}^{+g} e^{-u^2}\,du < \varepsilon\sqrt{\pi}.$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\int_{t_0}^{t_1} c\,F(t)\,e^{-c^2(t-s)^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,F(s) + \varrho,$$

wobei

$$|\varrho| < \varepsilon(\sqrt{\pi} + 4M).$$

Durch Vergrößerung von c kann also $|\varrho|$ beliebig klein gemacht werden; die Gleichung (3) ist bewiesen.

Gilt nun, $\alpha = 1, 2, \ldots k$ gesetzt, die Gleichung

$$(6)\qquad \int_{t_0}^{t_1} T\varphi(t)\,dt = 0$$

auch nur für jede analytische auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ reguläre Funktion $\varphi(t)$, bei der $\varphi^{(\mathfrak{a})}(t_0) = \varphi^{(\mathfrak{a})}(t_1) = 0$ ist, so kann man

$$\varphi(t) = \left\{\frac{(t-t_0)(t_1-t)}{(s-t_0)(t_1-s)}\right\}^k c\, e^{-c^2(t-s)^2} = \varphi(t, s),$$

$$F(t) = T\left\{\frac{(t-t_0)(t_1-t)}{(s-t_0)(t_1-s)}\right\}^k$$

setzen und findet dann, da offenbar $F(s) = T(s)$ ist,

$$\text{(7)} \qquad \lim_{c=+\infty} \int_{t_0}^{t_1} T\varphi(t)\,dt = \sqrt{\pi}\, T(s),$$

also nach (6), wenn diese Gleichung gilt, $T(s) = 0$, womit der Hauptthilfssatz von neuem in dem Sinne bewiesen ist, daß die Voraussetzung nur für analytische Funktionen $\varphi(t)$ der bezeichneten Art erfüllt zu sein braucht.

IV. Von der Gleichung (7) wollen wir eine Anwendung machen, die später von Nutzen sein wird. Die Funktionen $T(t), T_1(t), \ldots T_m(t)$ seien auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ stetig; setzen wir in den Bezeichnungen des § 5

$$c_{\mathfrak{m}} = \int_{t_0}^{t_1} T(t)\,\theta_{\mathfrak{m}}(t)\,dt, \quad a_{\mathfrak{a}\mathfrak{m}} = \int_{t_0}^{t_1} T_{\mathfrak{a}}(t)\,\theta_{\mathfrak{m}}(t)\,dt,$$

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots n, \quad \mathfrak{m} = 1, \; 2, \ldots m, \; m > n,$$

wobei $\theta_{\mathfrak{m}}$ willkürliche auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ stetige Funktionen bedeuten, die an den Stellen $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden, so werde vorausgesetzt, daß, sobald bei irgend einer Wahl der willkürlichen Funktionen $\theta_{\mathfrak{m}}$

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Det}\,|a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}| \neq 0$$

ist, eine der Gleichungen

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{Det}\begin{vmatrix} c_{\mathfrak{a}} & c_{n+k} \\ a_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{b},\,n+k}\end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, \ldots m-n$$

gelte, deren linke Seiten Determinanten $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, die aus der $m(n+1)$-gliedrigen Matrix

$$\begin{vmatrix} c_{\mathfrak{m}} \\ a_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}} \end{vmatrix}$$

entspringen.

Jetzt werde in der Bezeichnung der Nr. II

$$\theta_{\mathfrak{m}}(t) = \varphi(t, s_{\mathfrak{m}})$$

gesetzt, wobei immer $t_0 < s_{\mathfrak{m}} < t_1$ sei. Man findet dann nach II unmittelbar

$$\lim_{c=+\infty} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{m}} = \sqrt{\pi}\, T_{\mathfrak{a}}(s_{\mathfrak{m}}), \qquad \lim_{c=+\infty} c_{\mathfrak{m}} = \sqrt{\pi}\, T(s_{\mathfrak{m}});$$

wenn es also möglich ist, die Stellen $s_{\mathfrak{b}}$ so zu wählen, daß

$$\mathrm{Det}\,|T_{\mathfrak{a}}(s_{\mathfrak{b}})| \neq 0, \quad \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots n,$$

so ist die Voraussetzung (8) bei hinreichend großen Werten von c erfüllt, und die Gleichung (9) ergibt

$$\begin{vmatrix} T(s_1) \ldots T(s_n)\, T(s_{n+k}) \\ T_1(s_1) \ldots T_1(s_n)\, T_1(s_{n+k}) \\ \vdots \\ T_n(s_1) \ldots T_n(s_n)\, T_n(s_{n+k}) \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots m-n,$$

oder es besteht bei willkürlichen Werten von s eine Gleichung

$$A\,T(s) + B_1 T_1(s) + \cdots + B_n T_n(s) = 0$$

mit von s unabhängigen Werten A, $B_{\mathfrak{a}}$; dabei ist

$$A = \mathrm{Det}\,|T_{\mathfrak{a}}(s_{\mathfrak{b}})| \neq 0.$$

§ 7.

Beispiele zu den Eulerschen Differentialgleichungen.

Den Ergebnissen von § 6, I. gemäß wollen wir die Aufgabe, das Integral

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y')\, dt$$

zum Extrem zu machen, immer kurz durch die Gleichungen

$$\delta \int F(x, y, x', y')\, dt = 0, \quad \delta \int f(x, y, p)\, dx = 0$$

andeuten. Wir suchen in den folgenden Beispielen zunächst immer das Extrem bei gegebenen Endpunkten 0 und 1.

Dann hat auch jeder Teilbogen des gesuchten Bogens, für sich betrachtet, die gesuchte Extremseigenschaft, wenn sie für den ganzen Bogen vorhanden ist; man kann also immer unter 01 einen Teil des gesuchten Bogens verstehen.

I. Die kürzeste Linie in der Ebene zu finden:

$$\delta \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 0, \quad \delta \int \sqrt{1 + p^2}\, dx = 0, \quad F = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Da F von x und y frei ist, sind beide Eulersche Differentialgleichungen integrierbar,

$$\frac{d F_{x'}}{d t} = \frac{d F_{y'}}{d t} = 0, \quad F_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \text{const.},$$
$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \text{const.}$$

Die Größe $y'/x' = p$ ist konstant; die Extremalen sind Gerade. Man findet ferner

$$F_1 = \frac{-F_{y'x'}}{x'y'} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}, \quad T = \frac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} = \frac{1}{\varrho};$$

also die Krümmung der Extremalen verschwindet.

II. Die kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche zu finden, auf der

$$d s = \sqrt{E d u^2 + 2 F du\, dv + G d v^2},$$
$$\delta J = \delta \int d s = \delta \int \Phi(u, v, u', v')\, d t$$

gesetzt wird; x, y, z sind rechtwinklige Koordinaten. Nach § 4, II. ist

$$T_\Phi = \frac{1}{\varrho_g} \sqrt{E G - F^2};$$

die Gleichung $T_\Phi = 0$ ergibt also

$$\frac{1}{\varrho_g} = 0;$$

die Extremalen, die man geodätische Linien nennt, haben die geodätische Krümmung 0. Ihre Projektion auf die Tangentialebene der Fläche in einem allgemeinen Punkte hat in diesem einen Wendepunkt.

In rechtwinkligen Koordinaten setzt man, indem man nach § 3, III. auf der Fläche variiert,

$$J = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d t, \quad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\delta J_{01} = \frac{x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z}{s'}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 d t \left\{\delta x \left(\frac{x'}{s'}\right)' + \delta y \left(\frac{y'}{s'}\right)' + \delta z \left(\frac{z'}{s'}\right)'\right\},$$

oder wenn man t als Bogenlänge und die Endpunkte fest nimmt,

$$\delta J_{01} = -\int_0^1 d t (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z). \tag{1}$$

Nun sei $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche; dann ist bei beliebiger Wahl von $\lambda = \lambda(t)$

$$\int_0^1 dt \cdot (\lambda f_x \delta x + \lambda f_y \delta y + \lambda f_z \delta z)\, dt = 0,$$

also nach (1)

$$(2)\quad \delta J_{01} = -\int_0^1 dt \{(x'' - \lambda f_x)\delta x + (y'' - \lambda f_y)\delta y + (z'' - \lambda f_z)\delta z\}.$$

Jetzt wählen wir λ so, daß längs der gesuchten, gefunden gedachten Kurve

$$(3)\qquad z'' - \lambda f_z = 0$$

ist, soweit f_z von Null verschieden ist; wir beschränken uns, gemäß der Vorbemerkung zu Anfang dieses Paragraphen, auf einen Bogen 01, auf dem $f_z \neq 0$, und sehen auf ihm die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ als nach z aufgelöst an, so daß jetzt eine Extremsaufgabe im Gebiet der Größen x, y vorliegt. Wir finden dann nach (2) und (3)

$$\delta J_{01} = \int_0^1 dt \{(x'' - \lambda f_x)\delta x + (y'' - \lambda f_y)\delta y\} = 0.$$

Nach § 6, II ergibt sich hieraus

$$(4)\qquad x'' - \lambda f_x = y'' - \lambda f_y = 0,$$

also

$$x'' : y'' : z'' = f_x : f_y : f_z.$$

Nun sind bei jeder Raumkurve x'', y'', z'' die Komponenten des Vektors, der längs der Hauptnormale eines allgemeinen Punktes von diesem zum Krümmungsmittelpunkt führt; die Hauptnormale fällt also mit der Flächennormale zusammen.

Die Gleichungen (3) und (4) haben zusammengenommen eine symmetrische Form, sind aber in verschiedener Weise begründet; hier liegt das einfachste Beispiel der Multiplikatorenmethode von Lagrange vor.

III. Die kleinste Drehfläche, deren Meridian zwei gegebene Punkte verbindet.

Der Inhalt der Drehfläche ist, wenn als Achse die x-Achse genommen wird,

$$2\pi \int y\, ds;$$

also fordert man

$$\delta\int y\,ds = 0,\quad \delta\int y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 0,\quad s' = \sqrt{x'^2+y'^2},$$

$$F = y\sqrt{x'^2+y'^2},\quad F_1 = \frac{y}{\sqrt{x'^2+y'^2}^3},\quad F_{x'} = \frac{y\,x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

$$T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = -\frac{x'}{s'} + y\cdot\frac{x'y''-x''y'}{s'^3},$$

und die Gleichung $T = 0$ gibt

$$\frac{y}{\varrho} - \frac{dx}{ds} = 0,\quad \varrho = y\frac{ds}{dx};$$

der Krümmungsradius ist gleich der bis zur x-Achse gezogenen Normale. Nimmt man $t = x$, so wird die Gleichung der Extremalen

(5) $$s'^3 T = -s'^2 + y\,y'' = -1 - y'^2 + y\,y'' = 0,$$

also differenziert

$$-y'y'' + y\,y''' = 0,\quad \frac{y''}{y} = \text{const.} = \frac{1}{a^2};$$

a ist ein reell positiver Festwert, da $y\,y''$ nach (5) positiv ist; als allgemeine Lösung ergibt sich also mit den Festwerten A und b

$$y = A\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x-b}{a};$$

die Gleichung (5) ergibt, $x = b$ gesetzt,

$$-1 + A/a^2 = 0,$$

also, wenn die Kurve in der Halbebene $y > 0$ liegt, $A = a$,

$$y = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x-b}{a};$$

das ist die Gleichung einer Kettenlinie mit der x-Achse als Grundlinie. Da x in F nicht vorkommt, kann man auch von der Gleichung

$$F_{x'} = \frac{y\,x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \text{const.}$$

ausgehen und findet dasselbe Ergebnis wie vorher; aus dieser Gleichung geht auch hervor, daß, von unerheblichen Sonderfällen abgesehen, x' längs der ganzen Extremale von Null verschieden sein muß.

IV. Das Euler-Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung bei ebener Bewegung eines Punktes.

Die Extremsforderung lautet

$$\delta \int v\, d s = 0,$$

wobei $d s^2 = d x^2 + d y^2$ und, wenn U das Potential der wirkenden Kräfte, m die Masse ist, die Geschwindigkeit v durch die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{m v^2}{2} = U + h, \quad v = \sqrt{\frac{2(U+h)}{m}} \tag{6}$$

als Funktion von x und y erklärt wird; h ist eine Konstante, U_x und U_y sind die Komponenten der wirkenden Kraft nach den Bezugsachsen x und y. Man hat also zu setzen

$$F = v\sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad T = v_x \frac{d y}{d s} - v_y \frac{d x}{d s} + v\frac{x' y'' - x'' y'}{s'^3} = 0,$$

oder

$$\frac{m v^2}{\varrho} = - U_x \frac{d y}{d s} + U_y \frac{d x}{d s}.$$

Hier steht rechts die Komponente der Kraft nach der Normale der Bahnkurve, die die Krümmung der Bahn bestimmt; für die tangentiale Kraftkomponente gibt die Gleichung (6)

$$U_x \frac{d x}{d s} + U_y \frac{d y}{d s} = m v \frac{d v}{d s} = m \frac{d v}{d \tau},$$

wenn die Zeit τ durch die Gleichung $d\tau = d s / v$ als Hilfsgröße eingeführt wird. Die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten sind die Eulerschen Gleichungen:

$$F_x = v_x s', \quad F_{x'} = \frac{v x'}{s'}, \quad v_x s' - \frac{d}{d t}\left(v \frac{d x}{d s}\right) = 0,$$

oder

$$v \frac{d}{d s}\left(v \frac{d x}{d s}\right) = v v_x;$$

führt man $d\tau$ ein und benutzt den Wert von v^2, so folgt

$$m \frac{d^2 x}{d \tau^2} = U_x,$$

und ebenso

$$m \frac{d^2 y}{d \tau^2} = U_y.$$

Hat man im besonderen

$$U + h = f(x) + g(y),$$

so findet man

$$m \frac{d x}{d \tau} \frac{d^2 x}{d \tau^2} = f'(x) \frac{d x}{d \tau}, \quad m \frac{d y}{d \tau} \frac{d^2 y}{d \tau^2} = g'(y) \frac{d y}{d \tau},$$

also integriert, wenn c_1 und c_2 Festwerte sind,

$$m\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = f(x) + c_1, \quad m\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = g(y) + c_2,$$

$$\frac{d\tau}{\sqrt{m}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x)+c_1}} = \frac{dy}{\sqrt{g(y)+c_2}};$$

die Gleichung der lebendigen Kraft gibt $c_1 + c_2 = 0$, und die Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)+c_1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{g(y)-c_1}}$$

besteht also für die Extremalen der Aufgabe

$$\delta \int \sqrt{f(x)+g(y)}\,\sqrt{dx^2+dy^2} = 0.$$

Deutet man x und y als krummlinige Koordinaten auf einer Fläche, deren Bogenelement

$$ds = \sqrt{f(x)+g(y)}\,\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ist und die man als Liouvillesche Flächen bezeichnet, so sieht man, daß auf diesen die geodätischen Linien durch Quadraturen dargestellt werden können.

V. Eine Kurve von gegebener Länge zu ziehen, welche von einem gegebenen Punkte 0 ausgeht, auf einer festen, durch diesen gehenden Geraden endigt, ohne daß die Lage des Endpunktes vorgeschrieben wäre, und welche mit der Geraden einen möglichst großen Flächenraum einschließt.

Wir verwandeln die Aufgabe durch ein Verfahren, das man den Eulerschen Kunstgriff nennt. Es seien für den Augenblick u, y rechtwinklige Koordinaten, x sei die von 0 aus gemessene Länge der gesuchten Kurve, $y = 0$ die feste Gerade, l die vorgeschriebene Bogenlänge. Sind x, y rechtwinklige Koordinaten in einer zweiten Ebene, so entspricht einem stetig gekrümmten Bogen $\mathfrak{B}$ in der ersten Ebene ein ebensolcher $\mathfrak{B}'$ in der zweiten Ebene. Letzterer ist so zu wählen, daß das Integral

$$J = \int y\,du$$

ein Extrem wird. Nun ist offenbar

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - p^2, \tag{7}$$

man kann also setzen

$$J = \int y\sqrt{1-p^2}\,dx.$$

Von $\mathfrak{B}'$ sind in der zweiten Ebene die Endpunkte gegeben; denn dem Punkte 0 entspricht das Wertsystem $x = 0$, $y = 0$, dem Endpunkte des Bogens $\mathfrak{B}$ das System $x = l$, $y = 0$; in der zweiten Ebene hat man also eine Extremumsaufgabe der bisher betrachteten Art zu lösen.

Der Integrand von J in der neuen Form ist nun von x frei; man hat also das erste Integral

$$F_{x'} = f - p f_p = \text{const.},$$

und, da

$$f = y\sqrt{1-p^2}, \qquad F = y\sqrt{x'^2 - y'^2},$$

ergibt sich, unter a, b, c fortan Festwerte verstanden,

$$\frac{y x'}{\sqrt{x'^2 - y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-p^2}} = a.$$

Hieraus schließt man leicht

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad y = a \sin \frac{x+b}{a};$$

d. h. in der zweiten Ebene sind die Extremalen Sinuslinien. Weiter ergibt die Gleichung (7)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \sin^2 \frac{x+b}{a}, \qquad u - c = \pm\, a \cos \frac{x+b}{a},$$

$$y^2 + (u-c)^2 = a^2.$$

In der ersten Ebene erhält man somit als Kurven $\mathfrak{B}$, welche möglicherweise das gesuchte Extremum liefern, die Halbkreise, deren Mittelpunkte auf der festen Geraden $y = 0$ liegen.

VI. Einen Drehkörper von gegebener Oberfläche und größtmöglichem Rauminhalt zu konstruieren, dessen Oberfläche der Drehachse genau zweimal begegnet.

Sind u, y rechtwinklige Koordinaten in der Meridianebene, $y = 0$ die Rotationsachse, so hat man auf dieser die Punkte 01 so zu bestimmen, daß das Integral

$$\int_0^1 y\sqrt{dy^2 + du^2}$$

einen vorgeschriebenen Wert ω hat, und

$$J = \int_0^1 y^2\,du$$

ein Extrem wird. Wir wenden wieder den Eulerschen Kunstgriff an und setzen

$$x = \int_0 y \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,u}\right)^2}\, d\,u,$$

indem bis zu einem veränderlichen Punkte des Bogens 0 1 integriert wird; dann hat man

$$(8)\qquad \begin{aligned} d\,x^2 &= y^2\,(d\,u^2 + d\,y^2), \quad d\,u = \sqrt{-d\,y^2 + \left(\frac{d\,x}{y}\right)^2}, \\ J &= \int y^2 \sqrt{\frac{1}{y^2} - p^2}\, d\,x, \quad p = \frac{d\,y}{d\,x}. \end{aligned}$$

Deutet man wieder x und y als rechtwinklige Koordinaten in einer zweiten Ebene, so entsprechen den Punkten 0 und 1 der ersten die Punkte

$$x = y = 0, \quad x = \omega, \quad y = 0,$$

welche gegeben sind. In der zweiten Ebene ist also zwischen gegebenen Punkten die Kurve zu finden, welche das transformierte Integral J zu einem Extrem macht. Die Quadratwurzel im Integral J hat das Vorzeichen von $d\,u$, kann also nicht überall negativ sein, wenn in der $x\,u$-Ebene $u_1 > u_0$, was wir annehmen. Da der Integrand von x frei ist, findet man sofort die Integralgleichung

$$y\sqrt{1 - p^2 y^2} + \frac{y^3 p^2}{\sqrt{1 - p^2 y^2}} = a = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2 p^2}},$$

$$-\frac{d\,x}{a^2} = \frac{-\frac{y}{a}\, d\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}}, \qquad b - \frac{x}{a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}.$$

Die Extremalen in der zweiten Ebene sind also gewisse, leicht zu kennzeichnende Ellipsen. Für diejenigen, welche durch den Punkt $x = y = 0$ gehen, erhält man $b^2 = 1$. Da nun offenbar

$$-2\left(b - \frac{x}{a^2}\right)\frac{d\,x}{a^2} = -\frac{2\,y\,d\,y}{a^2}$$

und y im Punkte $x = y = 0$ mit x wächst, so folgt $b = +1$. Nach (8) hat man ferner

$$\frac{y^2 dy^2}{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2} = y^2(du^2 + dy^2), \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}} = a\,du,$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2} = \frac{u}{a} + b.$$

Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, dessen Zentrum auf der Drehachse liegt. Der gesuchte Körper kann daher, wenn er überhaupt existiert, und sein Meridian stetig gekrümmt ist, nur die Kugel sein.

VII. Das Hamiltonsche Prinzip faßt die Gleichungen der Mechanik in der Forderung zusammen, die Variation eines gewissen Integrals bei festen Endwerten der auftretenden räumlich definierten Größen und der Zeit solle verschwinden. In seiner allgemeinsten Fassung sagt es folgendes aus. Wird die Lage eines Massensystems bestimmt durch die Werte der n Größen $q_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n$), ist t die Zeit und wird

$$\dot{q}_\mathfrak{a} = \frac{dq_\mathfrak{a}}{dt}$$

gesetzt; sind endlich 0 und 1 Anfangs- und Endlage des Systems, so soll bei geeigneter Wahl der Funktion H, des kinetischen Potentials, die Gleichung

$$\delta \int_0^1 H(q_\mathfrak{a}, \dot{q}_\mathfrak{a})\,dt = 0 \tag{9}$$

gelten; dabei sei

$$\delta q_\mathfrak{a}\,|^{0,1} = 0, \quad \delta t\,|^{0,1} = 0.$$

Für gewöhnlich sagt man, die Zeit t solle überhaupt nicht variiert werden, so daß sie als unvariierter Parameter gelten könnte. Man erhält dieselben Ergebnisse und eine bessere Einsicht in gewisse Zusammenhänge, wenn man auch die Zeit variiert, und einen anderen unvariierten Parameter τ einführt; es sei

$$\frac{dq_\mathfrak{a}}{d\tau} = q'_\mathfrak{a}, \quad \frac{dt}{d\tau} = t', \quad \dot{q}_\mathfrak{a} = \frac{q'_\mathfrak{a}}{t'},$$

$$H\left(q_\mathfrak{a}, \frac{q'_\mathfrak{a}}{t'}\right)t' = F(q_\mathfrak{a}, t, q'_\mathfrak{a}, t'); \tag{10}$$

dann lautet jetzt das Prinzip

$$\delta \int_0^1 F(q_\alpha, t, q'_\alpha, t')\, d\tau = 0 \tag{11}$$

und F ist in den Größen q'_α, t' homogen von erster Stufe. Die Gleichung (9) gibt die Variationsaufgabe (11) in nicht homogener Form; man kann die Größen q_α, t mit den am Ende des § 2 behandelten y_α, x identisch setzen und die dortigen Formeln anwenden.

Die Eulerschen Gleichungen der Aufgabe (11) sind offenbar

$$\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial q'_\alpha} = 0, \quad F_t - \frac{d F_{t'}}{d\tau} = 0. \tag{12}$$

Nun ist $F = t' H$, $t' d\tau = dt$; die ersten dieser Gleichungen sind also auch

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0; \tag{13}$$

sie sind die Bewegungsgleichungen in der zweiten Form von Lagrange. Die letzte Gleichung (12) hat eine besondere Stellung; nach (10) ist offenbar

$$-F_{t'} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} - H = E, \quad F_t = t' \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Die Größe E heißt die Energie des Systems und die letzte Gleichung (12) lautet jetzt

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{dE}{dt} = 0.$$

Ist H von t frei, so folgt $E = \text{const.}$; das System ist konservativ. Immer aber ist die Energiegleichung die der Größe t entsprechende Eulersche Gleichung der Variationsaufgabe, die das Hamiltonsche Prinzip stellt, wie erst Helmholtz bemerkt hat.

Aus der nach § 2, V. geltenden Identität

$$\sum_\alpha q'_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial q'_\alpha}\right) + t'\left(F_t - \frac{d F_{t'}}{d\tau}\right) = 0$$

ersieht man, daß die Energiegleichung aus den Bewegungsgleichungen (13) erhalten wird, indem man diese mit $\dot{q}_\alpha$ vervielfacht und addiert.

Der zunächst gewöhnlich behandelte Fall des Hamiltonschen Prinzips ist der, daß man

$$H = T + U$$

setzt, wobei T, die lebendige Kraft, eine quadratische Form der Größen $\dot{q}_\alpha$ ist und U, das Potential, allein von den Größen q_α abhängt; dann gilt die Gleichung

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2\,T$$

und die Energie wird $E = T - U$, d. h. die Summe der kinetischen und potentiellen Energie; sie ist in einem konservativen System festwertig.

VIII. Setzt man das bisher betrachtete dynamische System unter die Wirkung eines beliebigen äußeren Kraftfeldes, das beim Übergang von q_α zu $q_\alpha + d\,q_\alpha$ die Arbeit

$$\alpha = \sum_\alpha Q_\alpha\, d\,q_\alpha$$

leistet, so lautet das verallgemeinerte Hamiltonsche Wirkungsprinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H\,d\,t + \mathfrak{A} = 0, \tag{14}$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Summe der Arbeiten bedeutet, die in der Zeitstrecke $t_0 \ldots t_1$ bei den jeweiligen Verschiebungen δ gebildet wird. Der Begriff der Arbeit setzt voraus, daß die Zeit festgehalten, die Größe α in einem bestimmten Zeitpunkt gebildet wird; bei der Variation δ, die sich auch auf die Zeit erstreckt, hat man also die bei ungeänderter Zeit erfolgenden Variationen, die abgestumpften nach § 4, IV. zu nehmen; die der allgemeinen Variation δ entsprechende virtuelle Arbeit ist also

$$\alpha = \sum_\alpha Q_\alpha\, \delta_0\, q_\alpha = \sum_\alpha Q_\alpha\,(\delta\, q_\alpha - \dot{q}_\alpha\, \delta\, t),$$

also

$$\mathfrak{A} = \int_{t_0}^{t_1} \alpha\, d\,t = \int_{t_0}^{t_1} d\,t \sum_\alpha Q_\alpha\,(\delta\, q_\alpha - \dot{q}_\alpha\, \delta\, t).$$

Variiert man nun so, daß die Größen $\delta\, q_\alpha$, $\delta\, t$ in der Anfangs- und Endlage, d. h. für $t = t_0$ und $t = t_1$, verschwinden, so findet man nach VII. aus der Gleichung (14)

$$\int_{t_0}^{t_1} d\,t \Big\{\delta\, t\,(\mathfrak{T} - \sum_\alpha Q_\alpha\, \dot{q}_\alpha) + \sum_\alpha (\mathfrak{P}_\alpha + Q_\alpha)\, \delta\, q_\alpha\Big\} = 0,$$

wobei

$$\mathfrak{P}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\,t}\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \mathfrak{T} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{d\,E}{d\,t}, \quad E = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} - H$$

gesetzt ist; aus der Freiheit der Variationen δq_α, δt ergeben sich nach dem Haupthilfssatze die allgemeineren Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_\alpha Q_\alpha \dot{q}_\alpha.$$

Die letzte Gleichung ist die Energiegleichung; sie liefert, wenn H von t frei ist, die Rechtfertigung dafür, daß E als Energie bezeichnet wird, da ihr Differential

$$dE = \sum_\alpha Q_\alpha d q_\alpha$$

die in dem Zeitelement dt geleistete Arbeit des äußeren Kraftfeldes Q_α ist.

Diese Betrachtung umfaßt auch die Grundlagen der relativistischen Dynamik im Sinne der besonderen Relativitätslehre. Man nimmt hier bei der Bewegung eines Punktes mit der Ruhmasse m und den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, wenn die Lichtgeschwindigkeit $= 1$ gesetzt wird, nach Planck als Wirkungsintegral das Integral der Eigenzeit

$$-\int m\sqrt{1 - v^2}\,dt, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

ist $X dx + Y dy + Z dz$ die Arbeit der äußeren Kraft bei einer nur räumlichen Verschiebung des Punktes, so hat man als allgemeineres Wirkungsprinzip anzusetzen

$$0 = -\delta\int_{t_0}^{t_1} m\sqrt{1 - v^2}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dt\,\{X(\delta x - \dot{x}\,\delta t)$$
$$+ Y(\delta y - \dot{y}\,\delta t) + Z(\delta z - \dot{z}\,\delta t\},$$

woraus sich nach den obigen Formeln, indem noch $T = \dot{x} X + \dot{y} Y + \dot{z} Z$ gesetzt wird, die Bewegungsgleichungen ergeben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = X, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = Y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = Z,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = T.$$

Die ersten drei Gleichungen sind die Impulsgleichungen, die letzte ist die Energiegleichung. Die Größe T ist die Leistung oder der Effekt der Kraft (X, Y, Z) bei der wirklichen Bewegung; sie wird mit den Kraftkomponenten zu dem Kraftleistungstensor zusammengefaßt, dessen Komponenten den Zeitableitungen des Impulstensors

$$m\frac{dx}{d\sigma}, \quad m\frac{dy}{d\sigma}, \quad m\frac{dz}{d\sigma}, \quad m\frac{dt}{d\sigma}$$

gleich sind, wobei

$$d\sigma = dt\sqrt{1 - v^2}$$

das bei der Lorentztransformation invariante Element der Eigenzeit bedeutet.

Das Arbeitselement bei beliebiger raumzeitlicher Variation δ hat die Form

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - T\delta t,$$

wie in der gewöhnlichen Mechanik.

§ 8.

Extreme bei veränderlichen Endpunkten.

Ein Extrem mit veränderlichen Endpunkten wird gefordert, wenn unter allen Kurven 0 1, deren Endkoordinaten einer Anzahl von Gleichungen

$$(1) \qquad G_\alpha(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$$

unterworfen sind, diejenige gesucht wird, die den größten oder kleinsten Wert des Integrals

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y')\,dt$$

ergibt. Ist die Anzahl der Gleichungen (1) vier, so kommt man auf den Fall gegebener Endwerte $x_0, \ldots y_1$ zurück; jetzt möge diese Anzahl kleiner sein; z. B. sei der Anfangspunkt 0 an die Kurve

$$(2) \qquad \mathfrak{f}(x_0, y_0) = 0$$

gebunden, x_1 und y_1 gegeben; oder es seien zwei Gleichungen

$$(3) \qquad \mathfrak{f}(x_0, y_0) = 0, \quad \mathfrak{g}(x_1, y_1) = 0$$

gegeben, man hat dann die gesuchte Kurve von einem nicht vorgeschriebenen Punkte der Kurve (2) nach einem gegebenen Punkte oder irgendwie von der ersten der Kurven (3) zur zweiten hin zu ziehen.

Zunächst muß im allgemeinsten Falle (1) die gesuchte Kurve auch gegenüber den Nachbarkurven mit denselben Endpunkten das Extrem der Größe J_{01} liefern; denn hält man die Endkoordinaten in einem die Gleichungen (1) erfüllenden Wertsystem fest, so bleiben diese Gleichungen erfüllt. Die gesuchte Kurve 0 1 muß also nach § 6 ein Stück einer Extremale sein, wenn wir sie wieder als stetig und stetig gekrümmt annehmen und aufsuchen. Aber die Gleichungen (1) geben für die Lage dieses Bogens nähere

Bestimmungen. Nach § 3, II. kann man den gesuchten und gefunden gedachten Bogen 0 1, den wir wieder $\mathfrak{C}$ nennen, so variieren, d. h. in eine Schar von Nachbarkurven einbetten, daß auch die Endpunkte dieser letzteren die Gleichungen (1) auf die allgemeinste Weise erfüllen; man kann bezüglich dieser Kurvenschar das Zeichen δ nach seinen Regeln anwenden und findet wie immer

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1 + \int_0^1 (P \delta x + Q \delta y) \, dt,$$

wobei $\delta x_{01}, \ldots \delta y_1$ die Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial G_\alpha}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial G_\alpha}{\partial y_1} \delta y_1 = 0$$

in allgemeinster Weise erfüllen. Nun muß der Bogen 0 1 Stück einer Extremale, also $P = Q = 0$ sein; somit folgt als Extremsbedingung

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1 = 0$$

bei den Bedingungen (4).

Liegt der Sonderfall einer einzigen Gleichung (1) mit festen Werten von x_1 und y_1 vor, so findet man

$$(5) \qquad F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|^0 = 0$$

bei der Bedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \delta y \Big|^0 = 0;$$

hat das Integral J die nicht homogene Form

$$J = \int f(x, y, p) \, dx,$$

so lautet die Gleichung (5)

$$(f - p f_p) \delta x + f_p \delta y \Big|^0 = 0.$$

Die hierdurch bestimmte besondere Beziehung der Kurve $\mathfrak{f}(x, y) = 0$ zu der sie im Punkte (x_0, y_0) schneidenden Extremale, bezeichnen wir mit dem Worte *transversal*: die Kurve wird von der Extremale transversal geschnitten, und ist *Transversale der Extremalen*. Es handelt sich hier offenbar nur um eine Beziehung der Vektoren (x', y') und $(\delta x, \delta y)$, die zur Extremale und Transversale im Punkte 0 tangential liegen. Die oben erhaltene notwendige Bedingung des Extrems kann für den vorliegenden Sonderfall folgendermaßen ausgesprochen werden. *Soll das Integral J zum Extrem gemacht werden durch eine Kurve $\mathfrak{C}$, die von einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ nach einem*

gegebenen Punkte hingeht, so muß die Kurve $\mathfrak{C}$ Extremale sein und in ihrem Anfangspunkte die Kurve $\mathfrak{K}$ transversal schneiden.

Ebenso leicht findet man, daß das Extrem des Integrals J, wenn es von einer Kurve, die zwei gegebene Kurven verbindet, geliefert werden soll, als notwendig fordert, daß die gesuchte Kurve Extremale sei und die beiden gegebenen Kurven transversal schneide: hat man die Bedingungen (3), so findet man

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1 = 0 \tag{6}$$

bei den in allgemeinster Weise erfüllten Bedingungen

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y_0} \delta y_0 = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial y_1} \delta y_1 = 0. \tag{7}$$

Diese sind im besonderen erfüllt, wenn entweder $\delta x_0 = \delta y_0 = 0$ oder $\delta x_1 = \delta y_1 = 0$ gesetzt wird; also ergeben sich aus der Gleichung (6) die besonderen

$$F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|^0 = 0, \quad F_{x'} \delta z + F_{y'} \delta y \Big|^1 = 0,$$

die erste mit der ersten, die zweite mit der zweiten der Gleichungen (7) verbunden; die transversale Lage muß bei jeder der Kurven $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$, also im Anfangs- und Endpunkt des Extremalenbogens 01 gefordert werden.

I. Bei den in § 7 behandelten Beispielen

$$\delta \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 0, \quad \delta \int y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 0$$

oder allgemeiner bei der Aufgabe

$$\delta \int \varphi(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 0$$

ist die Transversalitätsbeziehung

$$\varphi(x, y) \frac{x' \delta x + y' \delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0,$$

ist also immer erfüllt, wenn

$$x' \delta x + y' \delta y = 0,$$

d. h. wenn Extremale und Transversale aufeinander senkrecht stehen; die Transversalitätsbeziehung bleibt bestehen, wenn man die Richtungen (x', y') und $(\delta x, \delta y)$ vertauscht. Das ist aber bei anderen Beispielen nicht der Fall.

Bei den geodätischen Linien auf einer beliebigen Fläche, also der Aufgabe

$$\delta \int \Phi\, dt = \delta \int \sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}\, dt = 0,$$

ist die Transversalitätsgleichung

$$\Phi_{u'}\delta u + \Phi_{v'}\delta v = 0, \qquad \delta u(Eu' + Fv') + \delta v(Fu' + Gv') = 0;$$

nach den in § 4, II. angegebenen Ausdrücken der Größen E, F, G kann man hierfür schreiben

$$(8) \qquad dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0,$$

wobei $dx = x_u du + x_v dv$, $\delta x = x_u \delta u + x_v \delta v, \ldots$ gesetzt ist. Die Gleichung (8) besagt offenbar, daß die Richtungen d und δ aufeinander senkrecht stehen. Auch hier gehen also die Richtungen der Extremale und Transversale symmetrisch in die Transversalitätsgleichung ein.

II. Die Drehfläche kleinsten Widerstandes zu finden. Gesucht wird der Drehkörper, der mit festliegender Drehachse und fester Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit fortschreitend in der Richtung der Achse den kleinsten Widerstand erfährt, wenn jedes Oberflächenelement einen Normalwiderstand erleidet, der der Größe des Elements und einer gewissen Funktion $\varphi(u)$ der absolut genommenen normalen Geschwindigkeitskomponente u proportional ist.

Ist die x-Achse die Drehachse, ds ein Element des Meridians der gesuchten Fläche, so ist $2\pi y ds$ der Inhalt einer von zwei benachbarten Breitenkreisen bedeckten Zone derselben. Eine Normale des Meridians in der xy-Ebene sei N; dann ist

$$\cos(xN) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(yN) = -\frac{dx}{ds},$$

also $u = v\,dy/ds$, und der Normalwiderstand auf einer Zone gibt nach der x-Achse die Komponente

$$2\pi y ds\,\varphi(u)\cos(xN) = 2\pi y\,dy\,\varphi(v\,dy/ds).$$

Man setzt nun nach Newton $\varphi(u) = u^2$, nach neueren Annahmen von Lössl und Duchemin

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(u) = \frac{u}{1+u^2},$$

und findet die Aufgabe

$$\delta\int y\,dy\,\varphi\left(v\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Nach Newton erhält man

$$\delta\int\frac{y\,dy^3}{ds^2} = 0$$

oder, wenn man $dy = p\,dx$ einführt,

$$\delta\int\frac{yp^3dx}{1+p^2} = 0$$

und in jedem Falle eine Aufgabe der Form

(9) $$\delta \int y\,\psi(p)\,dx = 0.$$

Die erste der Eulerschen Gleichungen in der nicht homogenen Form § 6 (2) gibt, $f = y\,\psi(p)$ gesetzt,

$$f - p f_p = \text{const.} = a, \quad y = \frac{a}{\psi(p) - p\,\psi'(p)} = \theta(p);$$

hieraus folgt, indem man $p = t$ als Parameter nimmt,

$$p\,\frac{dx}{dp} = \theta'(p), \quad x = \int \frac{\theta'(p)}{p}\,dp.$$

Im Newtonschen Falle ergibt sich so mit den Festwerten a und b

$$y = \frac{a(1+p^2)^2}{2p^3}, \quad x = b + \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4\,p^4} + \frac{1}{p^2} + \lg p\right).$$

Der Ausdruck für x zeigt, daß p im Endlichen längs eines regulären Extremalenbogens weder verschwindet noch unendlich wird. Läßt man p alle positiven Werte durchlaufen, so erhält man eine Kurve, die, wie die Gleichungen

$$\frac{dx}{dp} = \frac{a(1+p^2)(p^2-3)}{2\,p^3}, \quad \frac{dy}{dp} = \frac{a(1+p^2)(p^2-3)}{2\,p^4}$$

zeigen, an der Stelle $p = \sqrt{3}$ einen Rückkehrpunkt besitzt, sonst überall y als reguläre Funktion von x definiert. Da ferner aus der letzten Gleichung leicht gefunden wird

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2\,p^5}{a(1+p^2)(p^2-3)},$$

so kehrt die Kurve, wenn $a > 0$ und damit y positiv ist, der x-Achse die hohle oder erhabene Seite zu, je nachdem $p < \sqrt{3}$ oder $p > \sqrt{3}$ ist.

Als Bedingung der transversalen Lage findet man für die allgemeine Aufgabe (9)

$$[\psi(p) - p\,\psi(p)]\,\delta x + \psi'(p)\,\delta y = 0,$$

im Newtonschen Falle

$$-2p\,\delta x + (p^2+3)\,\delta y = 0;$$

wenn $p = \operatorname{tg}\varphi$, $\delta y = \operatorname{tg}\omega \,.\, \delta x$ gesetzt wird, also φ und ω die hohlen Winkel der nach wachsenden gezogenen Tangenten der Extremale und der Transversale mit der x-Achse bedeuten, folgt

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{3+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{2+\cos^2\varphi}.$$

Die Transversalitätsbeziehung ist also in den Richtungen der beiden bezeichneten Tangenten keineswegs symmetrisch. Da aber φ nur von ω abhängt, ist klar, daß eine Gerade von allen zu ihr transversal liegenden Extremalen unter demselben Winkel geschnitten wird.

§ 9.

Die Brachistochrone.

I. Hat man nach § 3, II. zu einem Bogen 01 Nachbarkurven und Variationen mit veränderlichen Endpunkten hergestellt, so können diese benutzt werden, um das gegen das bisher betrachtete etwas allgemeinere Integral

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y', x_0, x_1, y_0, y_1)\, dt$$

zu variieren, d. h. sein Differential nach den dort eingeführten Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ zu bilden. Die End koordinaten $x_0, \ldots y_1$ sind ja als reguläre Funktionen der ε gegeben; man kann also $\delta x_0, \ldots \delta y_1$ bilden und, wenn in obigem Integral die Funktion F an allen in Betracht kommenden Systemen ihrer Unabhängigen regulär ist, findet man

$$\delta J_{01} = \int_0^1 \delta F\, dt, \quad \delta F = F_x \delta x + F_{x'} \delta x' + F_{x_0} \delta x_0 + F_{x_1} \delta x_1 + \cdots,$$

wobei in den weggelassenen Gliedern nur x durch y ersetzt ist. Man findet nun in gewohnter Weise

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1 + \int_0^1 dt \{P \delta x + Q \delta y$$
$$+ F_{x_0} \delta x_0 + F_{x_1} \delta x_1 + \cdots\}$$

oder, da $\delta x_0, \ldots \delta y_1$ nach § 3, II. von t unabhängige Differentiale werden,

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + \ldots \Big|_0^1 + \int_0^1 dt (P \delta x + Q \delta y) + \delta x_0 \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_0} dt$$
$$+ \delta x_1 \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_1} dt + \cdots$$

Soll J_{01} durch die gesuchte, gefunden gedachte Kurve zum Extrem gemacht werden, so variiert man auch hier zunächst mit festen

Endpunkten, findet $P = Q = 0$, d. h. daß die Kurve Extremale sein muß, und erhält dann bei allgemeiner zulässiger Variation

$$\delta J_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y \Big|_0^1 + \delta x_0 \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_0} dt + \delta y_0 \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y_0} dt$$

$$+ \delta x_1 \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_1} dt + \delta y_1 \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y_1} dt;$$

dieser Ausdruck $= 0$ gesetzt bei allen zulässigen Variationen $\delta x_0, \ldots \delta y_1$, gibt weitere notwendige Bedingungen des gesuchten Extrems.

Sei z. B. im besonderen

$$F = \Phi(x - x_0, x', y'),$$

dann ist für die Extremalen

$$(1) \quad F_x = -F_{x_0}, \quad F_x - F'_{x'} = 0, \quad F_{y'} = \text{const.}, \quad F_{y'}\Big|_0^1 = 0,$$

und der Ausdruck

$$\delta J_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y \Big|_0^1 + \delta x_0 \int_0^1 F_{x_0} dt$$

kann nach den Gleichungen (1) geschrieben werden

$$\begin{aligned} \delta J_{01} &= F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y \Big|_0^1 - \delta x_0 \int_0^1 F_x dt \\ &= F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y \Big|_0^1 - \delta x_0 F_{x'} \Big|_0^1 \\ &= F_{x'}\Big|^1 (\delta x_1 - \delta x_0) + F_{y'}\Big|^1 (\delta y_1 - \delta y_0). \end{aligned}$$

Kann man nun bei den vorgelegten Endbedingungen so variieren, daß ein beliebiger der Punkte 0 und 1 festbleibt, z. B. wenn die Punkte 0 und 1 beziehentlich an die Kurven $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ gebunden sind, so findet man

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y \,|^1 = 0, \quad F_{x'}|^1 \delta x_0 + F_{y'}|^1 \delta y_0 = 0,$$

d. h. die Fortgangsrichtungen der Kurven $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ in den Punkten 0 und 1 sind parallel.

II. Wir wenden diese allgemeinen Betrachtungen an auf die Aufgabe der Brachistochrone, eine Kurve 01 zu finden, auf welcher ein schwerer Punkt gleitend in der kürzesten Zeit von 0 nach 1 gelangt.

Sei die x-Achse die Richtung der Schwere, g ihre Konstante; dann wird die Geschwindigkeit v eines schweren Punktes von der Masse 1, der im Punkte 0 mit der Geschwindigkeit v_0 beginnt, durch die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{v^2}{2} = (x - x_0)\,g + \frac{v_0^2}{2}$$

bestimmt. Da nun die Zeit, in der eine Kurve durchlaufen wird, sich durch das Integral

$$J = \int \frac{ds}{v}$$

ausdrückt, so sieht man, daß die Aufgabe

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x - \alpha}} = 0$$

gestellt ist, wobei

$$\alpha = x_0 - \frac{v_0^{2}}{2g}.$$

Man findet für eine Kurve, auf der $x - \alpha \neq 0$, der Integrand also in ihren Elementen regulär bleibt, die Eulersche Gleichung

$$F_{y'} = \text{const.} = c, \quad \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = c\sqrt{x - \alpha} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Die Größe $|c\sqrt{x - \alpha}|$ ist also nicht größer als 1; setzt man demgemäß

$$2\,c^2 (x - \alpha) = 1 - \cos u, \quad a = \frac{1}{2\,c^2},$$

so folgt

$$p = \sqrt{\frac{x - \alpha}{2\,a - (x - \alpha)}}, \quad dy = a(1 - \cos u)\,du,$$

$$x = \alpha = a(1 - \cos u), \quad y = b + a(u - \sin u), \quad b = \text{const.};$$

die Extremalen sind Zykloiden, deren Spitze im Punkte $x = \alpha$, $y = b$ liegt; dieser liegt, da $\alpha < x_0$, höher als der Punkt 0 und gehört dem Bogen 01 nicht an, so daß auf diesem keine Singularität des Integranden $ds/\sqrt{x - \alpha}$ auftritt. Die Transversalitätsbeziehung besteht offenbar im senkrechten Schnitt.

Eine besondere Betrachtung erfordert der eigentlich nächstliegende Fall $v_0 = 0$. Da in diesem die Aufgabe

$$\delta \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}} = 0$$

gestellt ist, wird der Integrand an der Stelle 0 singulär, so daß die allgemeine Theorie nicht anwendbar ist. Sei dann 2 irgend ein

Punkt der gesuchten, gefunden gedachten Kurve; in ihm herrscht nach (2) die Geschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{2(x_2 - x_0)g},$$

und die Kurve 21 liefert notwendig gegenüber anderen Kurven mit denselben Endpunkten auch ein Extrem des Integrals J_{21}, da $J_{01} = J_{02} + J_{21}$ ist und eine Abänderung des Bogens 21 auch als eine solche des Bogens 01 gelten kann, bei der die Strecke 02 festbleibt. Längs des Stückes 21 ist also, da $v_2 > 0$ ist, nach der vorhergehenden Betrachtung die gesuchte Kurve eine Zykloide, deren Spitze auf der Höhe

$$x = x_2 - \frac{v_2^2}{2g} = x_0$$

liegt. Da man nun den Punkt 2 auf der gesuchten, gefunden gedachten Kurve beliebig nahe an 0 heranrücken kann, muß der Bogen 01 ganz einer Zykloide angehören, deren Spitze der Punkt 0 ist:

$$x - \left(x_2 - \frac{v_2^2}{2g}\right) = x - x_0 = a(1 - \cos u),$$
$$y = y_0 + a(u - \sin u).$$

Soll nun die Brachistochrone für den Übergang von einer Kurve $\mathfrak{K}_0$ bis zu einer Kurve $\mathfrak{K}_1$ gefunden werden, wobei die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben sei, so bietet das Integral

$$J = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x - x_0 + v_0^2/2g}}$$

genau den unter Nr. I betrachteten Fall dar; wir schließen aus den dortigen Sätzen, daß die Tangenten der Kurven $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ in den Punkten 0 und 1 parallel sein müssen; halten wir 0 fest und lassen nur den Punkt 1 auf der Kurve $\mathfrak{K}_1$ beweglich, so folgt, daß der Extremalenbogen 01 in 1 die Kurve $\mathfrak{K}_1$ unter rechtem Winkel schneidet; das sind die Ergebnisse von Lagrange.

Aber der Fall $v_0 = 0$ muß wieder besonders betrachtet werden wegen der Singularität des Integranden $ds/\sqrt{x - x_0}$ an der Stelle 0. Jedenfalls ist auch jetzt 01 ein Zykloidenbogen mit der Spitze 0, der die Kurve $\mathfrak{K}_1$ unter rechtem Winkel schneidet; man hat daher die Gleichungen

(3) $\qquad x_1 - x_0 = a(1 - \cos u_1), \quad y_1 - y_0 = a(u_1 - \sin u_1).$

Die geforderte Extremseigenschaft dieses Bogens kann nun so ausgenutzt werden, daß man a, u_1, x_1, y_1 sich ändern läßt und die entsprechende Gleichung $dJ_{01} = 0$ bildet. Beziehen sich die Differentiale dx_1 und dy_1 auf den Fortgang längs der Kurve $\mathfrak{K}_1$, so ist dabei wegen der Transversalitätsbeziehung im Punkte 1

$$x'_1\, dx_1 + y'_1\, dy_1 = 0,$$

$$x'_1 = 2a \sin\frac{u_1}{2} \cos\frac{u_1}{2}, \quad y'_1 = 2a \sin^2\frac{u_1}{2},$$

$$dx_1 + \operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\, dy_1 = 0. \tag{4}$$

Man findet ferner

$$ds = 2a \sin\frac{u}{2}\, du, \quad \sqrt{x - x_0} = \sqrt{2a} \sin\frac{u}{2},$$

$$J_{01} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}} = \sqrt{2a} \int_0^{u_1} du = u_1 \sqrt{2a};$$

die Gleichung, die das Extrem fordert, ist also

$$dJ_{01} = 0, \quad 2a\, du_1 + u_1\, da = 0. \tag{5}$$

Endlich ergeben die Gleichungen (3), wenn dx_0 und dy_0 auf den Fortgang längs der Kurve $\mathfrak{K}_0$ bezogen werden,

$$dy_1 - dy_0 = da(u_1 - \sin u_1) + 2a \sin^2\frac{u_1}{2}\, du_1,$$

$$dx_1 - dx_0 = da(1 - \cos u_1) + 2a \sin\frac{u_1}{2} \cos\frac{u_1}{2}\, du_1.$$

Vervielfacht man die erste dieser Gleichungen mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}u_1$ und addiert sie zur zweiten, so folgt nach (4) und (5)

$$-dy_0 - \operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\, dx_0 = 2a \operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\, du_1 + \operatorname{tg}\frac{u_1}{2} \cdot u_1\, da$$

$$- da\,.\,2 \sin\frac{u_1}{2} \cos\frac{u_1}{2} \operatorname{tg}\frac{u_1}{2} + 2\, da\,.\, \sin^2\frac{u_1}{2} = 0,$$

was zusammen mit der Gleichung (5) ergibt

$$dy_0 : dx_0 = dy_1 : dx_1,$$

d. h. die Tangenten der Kurven $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ in den Endpunkten 0 und 1 sind auch jetzt parallel.

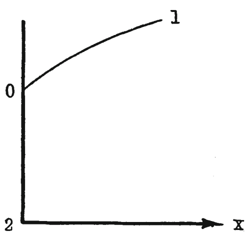
§ 10.

Allgemeine Transversalität.

I. Die Aufgabe der Drehfläche kleinsten Widerstandes (§ 8, II.) wird in belangreicher Weise abgeändert, wenn man nicht den Widerstand einer Zone der Drehfläche betrachtet, sondern den Drehkörper durch eine zur Fortschreitrichtung senkrechte Ebene, eine kreisförmige Stirnfläche abschließt und verlangt, daß der Gesamtwiderstand der Stirnfläche und einer angrenzenden Zone zusammengenommen ein Minimum werde.

Sei wieder 01 der gesuchte Meridianbogen, 2 der Koordinatenanfangspunkt, der Punkt 1 (Fig. 2) gegeben, der Punkt 0 auf der y-Achse gesucht, und man sucht das Widerstandsintegral $J_{20} + J_{01}$ zum Extrem zu machen;

Fig. 2.



$$J = \int \frac{y p^3}{1 + p^2} d x = \int \frac{y d y}{1 + 1/p^2}.$$

Auf der Strecke 02 hat man $x' = 0$, $p = \infty$ zu setzen, also

$$J_{20} = \int_0^{y_0} y \, d y = \frac{y_0^2}{2},$$

und bei Verschiebung des Punktes 0 ergibt sich

$$\delta J_{20} = y_0 \delta y_0.$$

Die Strecke 01 muß Bogen einer Extremale sein, da das Extrem jedenfalls auch gegenüber solchen Verschiebungen gesucht wird, bei denen die Punkte 0 und 1 fest bleiben. Man wird daher in der gewöhnlichen Bezeichnung setzen dürfen

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1;$$

als notwendige Bedingung des gesuchten Extrems der Größe $J_{20} + J_{01}$ ergibt sich

$$\delta J_{20} + \delta J_{01} = 0,$$

und, da offenbar

$$\delta x_1 = \delta y_1 = \delta x_0 = 0$$

ist, bleibt nur übrig

$$y \delta y - y \frac{1 + 3/p^2}{(1 + 1/p^2)^2} \delta y \Big|^0 = 0,$$

oder auch einfach

$$(1 + p^2) - p^4 - 3 p^2 = 0, \quad p^2 - 1 = 0, \quad p = \pm 1.$$

Das heißt, die Extremale setzt sich an die Stirnfläche unter einem Winkel von 45°.

II. Die durchgeführte Betrachtung ist Sonderfall der folgenden allgemeineren. Sei das Extrem einer Größe

$$z = f(a, b, \ldots) + \int_0^1 F(x, y, x', y')\, dt$$

gesucht, wobei $a, b, \ldots$ irgendwelche Parameter sind, von denen die Lage des Punktes 0 abhängt, so daß

$$\delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial a} da + \frac{\partial x_0}{\partial b} db + \cdots,$$

$$\delta y_0 = \frac{\partial y_0}{\partial a} da + \frac{\partial y_0}{\partial b} db + \cdots$$

zu setzen ist; in der unter I. behandelten Aufgabe hätte man z. B. $a = y_0$, $f(a, b, \ldots) = \frac{1}{2} y_0^2$ zu nehmen. Die gesuchte Kurve 01 muß, wie in jenem Beispiele, Extremale sein, so daß

$$\delta J_{01} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^1$$

ist und als Extremsbedingung der Größe z folgt, wenn der Punkt 1 fest gegeben ist,

$$\delta z = \delta f - F_{x'} \delta x - F_{y'} \delta y \,|^0 = 0.$$

Läßt man den Punkt 1 in die Lage 0 rücken, so wird $J_{01} = 0$; es ist also $\delta z_0 = \delta f$ zu setzen und man findet als Extremsbedingung an der Stelle 0

(1) $$- \delta z + F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y = 0.$$

Man kann diese Formel mit Rücksicht auf spätere Verallgemeinerungen, indem man

$$\Omega = \lambda [- z' + F(x, y, x', y')]$$

setzt, auch schreiben

$$\Omega_{z'} \delta z + \Omega_{x'} \delta x + \Omega_{y'} \delta y = 0;$$

ist $f(a, b, \ldots) = 0$, so kommt man auf die gewöhnliche Transversalität des § 8 zurück, indem an der Stelle 0 immer $\delta z = 0$ zu setzen ist.

Die Eigenart dieser Aufgaben wird deutlich, wenn wir in der Größe

$$z = f(a, b, \ldots) + \int_0^1 F\, dt$$

den Punkt 1 als veränderlich ansehen; in bezug auf die Änderung von t gilt die Gleichung

$$- z' + F(x, y, x', y') = 0$$

oder, invariant bezüglich des Parameters t geschrieben,

(2) $$- dz + F(x, y, dx, dy) = 0.$$

Nehmen wir z als dritte Koordinate im Raume, so ist der Punkt (x, y, z) an Raumkurven gebunden, die der Mongeschen Differentialgleichung (2) unterworfen sind. Die Extremsaufgabe bei gegebener Stelle 1 fordert dann, von der gegebenen Mannigfaltigkeit der Wertsysteme (x_0, y_0, z_0) aus, die wir $\mathfrak{M}$ nennen, auf einer Raumkurve, die die Mongesche Gleichung erfüllt, einen auf der Geraden $x = x_1$, $y = y_1$ gelegenen Punkt mit größter oder kleinster z-Koordinate zu erreichen. Hier ordnet sich die gewöhnliche Extremsaufgabe bei festen Punkten 0, 1 in der Weise ein, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ sich in den einen festen Punkt $(x_0, y_0, 0)$ zurückbildet.

Im Falle der Stirnfläche bei der Drehfläche kleinsten Widerstandes sucht man z. B. im Raum eine Kurve, die von der Parabel

$$x = 0, \quad z = \frac{y^2}{2}$$

als Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ausgeht, die Gleichung

$$dz = \frac{y\,dy}{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

erfüllt und auf der Geraden $x = x_1$, $y = y_1$ den kleinsten Wert von z erzielt.

Die Gleichung (1) kann nun als verallgemeinerte Transversalitätsbedingung gelten, unter der die gesuchte Raumkurve von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ausstrahlt; ist diese in einer Ebene $z =$ const. gelegen, so ist $\delta z = 0$, und man kommt auf die gewöhnliche Transversalität zurück.

III. Eine weitere Aufgabe, bei der die allgemeinere Transversalität zur Geltung kommt, ist folgende Abänderung der Aufgabe der kürzesten Linie. Durch den Punkt 2 geht eine Kurve $\mathfrak{K}$; auf dieser soll der Punkt 0 so gewählt werden, daß, wenn 1 ein gegebener Punkt ist, die Linie 201, in der 20 der Linie $\mathfrak{K}$ angehört, möglichst kurz ist. Natürlich muß 01 eine gerade Strecke sein. Setzt man

$$J = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und nennt J^0 die Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{K}$, so ist

$$z = J^0_{20} + J_{01}$$

zum Minimum zu machen. Ist 3 ein allgemeiner Punkt der Geraden 01, und setzen wir $x = x_3$, $y = y_3$, so ist

$$-dz + dJ_{03} = 0, \quad -dz + \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$$

die Mongesche Gleichung; die ihr unterworfenen Raumkurven haben die Eigentümlichkeit, gegen die z-Ebene unter 45^0 geneigt zu sein; die Extremalen werden Gerade im Raum, die ebenfalls diese Neigung haben. $\mathfrak{M}$ ist die Raumkurve, die vom Punkte 2 aus immer unter 45^0 gegen die xy-Ebene geneigt so verläuft, daß $\mathfrak{K}$ ihre Projektion ist, also auf dem der z-Achse parallelen Zylinder durch $\mathfrak{K}$. Von dieser soll eine Gerade, ebenfalls in der angegebenen Neigung, nach einem, wenn die z-Achse nach oben geht, möglichst tief auf der Geraden $x = x_1$, $y = y_1$ gelegenen Punkte hingezogen werden.

Die allgemeinere Transversalitätsbedingung für den Punkt 0 lautet

$$-\delta z + \frac{x' \delta x + y' \delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0. \tag{3}$$

Auf $\mathfrak{M}$ ist nun, wenn δ einen infinitesimalen Fortgang bedeutet, $\delta z = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = \delta J_{20}^0$; die Gleichung (3) gibt damit

$$1 = \frac{x' \delta x + y' \delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\,\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}.$$

Die Vektoren (x', y') und $(\delta x, \delta y)$ haben also gleiche Richtung; die Gerade 01 muß, wenn sie das gesuchte Extrem des Weges 021 liefern soll, die Kurve $\mathfrak{K}$ tangential verlassen.

Übrigens findet man ebenso bei der allgemeinen Aufgabe

$$\delta J = \delta \int F\, dt = 0,$$

daß die allgemeine Transversalitätsbedingung

$$-\delta z + F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y = 0, \tag{4}$$

die Berührung zwischen der Kurve $\mathfrak{K}$ und der von ihr ausgehenden Extremale bedeutet, wenn in der oben gebrauchten Bezeichnung

$$z = J_{20}^0 + J_{01}$$

gesetzt wird. Man findet dann

$$\delta z = F_{x'}^0 \delta x + F_{y'}^0 \delta y,$$

und die Gleichung (4) ist jedenfalls erfüllt, wenn

$$F_{x'}^0 = F_{x'}, \quad F_{y'}^0 = F_{y'},$$

d. h. wenn der Vektor (x', y') auf der Extremale derselbe ist wie auf der Kurve $\mathfrak{K}$.

Dritter Abschnitt.

Hinreichende Bedingungen des einfachsten freien Extrems.

§ 11.

Erster Einbettungssatz.

Sei in dem $(n+1)$-stufigen Raum der Größen $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ eine Schar von einfachen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ durch die Gleichungen

$$x_\mathfrak{a} = \xi_\mathfrak{a}(t, a_1, a_2, \dots a_n), \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \dots n+1$$

und die Ungleichungen

$$(1) \qquad |a_\mathfrak{b} - a_\mathfrak{b}^0| < c, \quad t_0 - c_1 \leqq t \leqq t_1 + c_1, \quad \mathfrak{b} = 1, 2 \dots n$$

bestimmt; unter den letzteren Annahmen seien $\xi_\mathfrak{a}$ reguläre Funktionen ihrer Unabhängigen; c und c_1 seien beliebig kleine positive Festwerte; die Strecke $t_0 \dots t_1$ heiße T. Es sei ferner bei den Annahmen (1) immer

$$(2) \qquad \frac{\partial(\xi_1, \dots \xi_{n+1})}{\partial(t, a_1, \dots a_n)} \neq 0.$$

Die besondere Mannigfaltigkeit, die durch die Beziehungen

$$t_0 \leqq t \leqq t_1, \quad a_\mathfrak{b} = a_\mathfrak{b}^0$$

bestimmt wird, heiße $\mathfrak{M}^0$. Sie schneide sich selbst nicht, auch wenn man sie auf die ganze Strecke $t_0 - c_1 \dots t_1 + c_1$ ausdehnt; d. h. auf dieser Strecke sollen die Gleichungen

$$\xi_\mathfrak{a}(t', a_1^0, \dots a_n^0) = \xi_\mathfrak{a}(t'', a_1^0, \dots a_n^0)$$

nur dann zusammen bestehen, wenn $t' = t''$. Die allgemeine Stelle der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$ nennen wir

$$\mathfrak{x}_\mathfrak{a} = \xi_\mathfrak{a}(t, a_1^0, \dots a_n^0)$$

und behaupten jetzt: wählt man den positiven Festwert γ hinreichend klein, so wird das Gebiet

$$(3) \qquad |x_\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_\mathfrak{a}| < \gamma, \quad t_0 \leqq t \leqq t_1$$

von den Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ genau einfach bedeckt.

I. Wir zeigen zunächst, daß das Gebiet (3) von den Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ überhaupt ausnahmslos bedeckt wird.

Der Satz von der Existenz der impliziten Funktionen (§ 2, I.) lehrt auf Grund der Voraussetzung (2), daß auf $\mathfrak{M}^0$ zu jeder Stelle $\mathfrak{x}_\alpha = \xi_\alpha(\mathfrak{t}, a_1^0, \ldots a_n^0)$ eine solche positive Größe 2ε gefunden werden kann, daß die Gleichungen

$$(4) \qquad x_\alpha = \xi(t, a_1, \ldots a_n)$$

bei der Annahme

$$(5) \qquad |x_\alpha - \mathfrak{x}_\alpha| < 2\varepsilon$$

nach den Größen t, $a_\mathfrak{b}$ aufgelöst werden können. Man kann dann eine Größe δ so bestimmen, daß bei der Annahme

$$0 \leqq |\mathfrak{t}^0 - \mathfrak{t}| < \delta, \quad \xi_\alpha(\mathfrak{t}^0, a_1^0, \ldots a_n^0) = \mathfrak{x}_\alpha^0$$

die Ungleichungen

$$|\mathfrak{x}_\alpha^0 - \mathfrak{x}_\alpha| < \varepsilon$$

gelten; dann folgt aus der Ungleichung

$$(6) \qquad |x_\alpha - \mathfrak{x}_\alpha^0| < \varepsilon$$

immer auch die Ungleichung (5), und die Gleichungen (4) sind nach t, $a_\mathfrak{b}$ auch unter der Annahme (6) auflösbar, wenn $\mathfrak{x}_\alpha^0$ irgend eine der t-Strecke $\mathfrak{t} - \delta \ldots \mathfrak{t} + \delta$ angehörige Stelle von $\mathfrak{M}^0$ bedeutet. Die Größe ε hat für diese ganze Strecke dieselbe Bedeutung wie vorher 2ε für die einzelne Stelle $\mathfrak{x}_\alpha$.

Nehmen wir also z. B. $\mathfrak{t} = t_0$, so folgt: Von der Anfangsstelle $(t_0, a_\mathfrak{b}^0)$ aus kann auf $\mathfrak{M}^0$ eine solche Strecke $t_0 \ldots t'$ abgegrenzt werden, daß eine bestimmte Größe ε gewählt werden kann, die folgendes leistet: ist $\mathfrak{x}_\alpha^0$ irgend eine Stelle der abgegrenzten Strecke, so sind die Gleichungen $x_\alpha = \xi_\alpha(t, a_1, \ldots a_n)$ nach t, $a_\mathfrak{b}$ auflösbar, sobald $|x_\alpha - \mathfrak{x}_\alpha^0| < \varepsilon$.

Sei nun t'' die obere Grenze der Werte t', für die in dieser Weise eine Größe ε gefunden werden kann. Dann kann in der obigen Betrachtung für $\mathfrak{x}_\alpha$ die Stelle

$$\mathfrak{x}_\alpha = \xi_\alpha(t'', a_1^0, \ldots a_n^0)$$

genommen und die Größen ε' und δ' so bestimmt werden, daß die Gleichungen $x_\alpha = \xi_\alpha(t, a_1, \ldots a_n)$ nach $t, a_1, \ldots a_n$ auflösbar sind bei den Annahmen

$$|x_\alpha - \bar{\mathfrak{x}}_\alpha| < \varepsilon' \quad \bar{\mathfrak{x}}_\alpha = \xi_\alpha(\bar{t}, a_1^0, \ldots a_n^0), \quad |\bar{t} - t''| < \delta'.$$

Wie klein nun auch δ' ist, fordert doch der Begriff der oberen Grenze, daß es Stellen t' gibt, die in die Strecke $t'' - \delta' \ldots t''$ hineinfallen; die Größen t' kommen ja ihrer oberen Grenze beliebig nahe. Ist dann ε^0 die kleinere der Größen ε und ε', so ist für die ganze Strecke $t_0 \ldots t'' + \delta'$, oder wenn $t'' = t_1$, für die ganze Strecke T die Auflösbarkeit der Gleichungen $x_\mathfrak{a} = \xi_\mathfrak{a}$ gesichert, sobald $\mathfrak{x}_\mathfrak{a}$ irgend eine Stelle dieser Strecke ist und

(7) $$|x_\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_\mathfrak{a}| < \varepsilon^0$$

genommen wird. Das wäre aber, wenn $t'' < t_1$, ein Widerspruch gegen die Definition des Wertes t''; ein solcher ist im Innern der Strecke T unmöglich. Wäre $t'' = t_1$, so ergäbe sich die Auflösbarkeit der Gleichungen $x_\mathfrak{a} = \xi_\mathfrak{a}$ bei der Annahme (7) für die ganze Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$. Dies ist hiermit als der einzig mögliche Fall erwiesen: es gibt eine Größe γ, derart, daß die Gleichungen $x_\mathfrak{a} = \xi_\mathfrak{a}$ auflösbar sind, sobald

$$|x_\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_\mathfrak{a}| < \gamma,$$

wobei $\mathfrak{x}_\mathfrak{a}$ eine beliebige Stelle der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$ bedeutet. Das durch diese Ungleichungen bestimmte Gebiet nennen wir $[\gamma]$.

II. Ein zweiter Hilfssatz, den wir beweisen wollen, besagt, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$, sobald die Differenzen $|a_\mathfrak{b} - a_\mathfrak{b}^0|$ unter einer gewissen Schranke liegen, von keiner Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ mehr geschnitten wird. Anderenfalls gäbe es unzählige Wertsysteme t', $a_\mathfrak{b}'$, in denen t' der Strecke $t_0 - c_1 \ldots t_1 + c_1$ angehört und Werte t'' der Strecke T, derart, daß nicht alle Differenzen $a_\mathfrak{b}' - a_\mathfrak{b}^0$ verschwänden und die Beziehungen

(8) $$\xi_\mathfrak{a}(t', a_1', \ldots a_n') = \xi_\mathfrak{a}(t'', a_1^0, \ldots a_n^0), \quad \lim a_\mathfrak{b}' = a_\mathfrak{b}^0$$

bestünden; die Werte t' hätten einen Häufungspunkt auf der Strecke $t_0 - c_1 \ldots t_1 + c_1$, etwa t^0, und man könnte aus der Reihe der die Gleichungen (8) erfüllenden Systeme t', $a_\mathfrak{b}'$ unendlich viele herausgreifen, die $\lim t' = t^0$ ergäben. Dann wäre wegen der Stetigkeit der Funktionen $\xi_\mathfrak{a}$

$$\lim \xi_\mathfrak{a}(t', a_1', \ldots a_n') = \xi_\mathfrak{a}(t^0, a_1^0, \ldots a_n^0),$$

also nach (8) auch

(9) $$\lim \xi_\mathfrak{a}(t'', a_1^0, \ldots a_n^0) = \xi_\mathfrak{a}(t^0, a_1^0, \ldots a_n^0).$$

Nun haben auch die der Strecke T angehörigen Werte t'', da ihrer unendlich viele sind, auf der Strecke T einen Häufungspunkt t^1; man kann daher aus der Reihe der Werte t'', für die die Gleichung (8) gilt, derart unendlich viele aussuchen, daß

$$\lim \xi_\mathfrak{a}(t'', a_1^0, \ldots a_n^0) = \xi_\mathfrak{a}(t^1, a_1^0, \ldots a_n^0)$$

wird. Aus der nach (9) folgenden Gleichung

$$\xi_\mathfrak{a}(t^0, a_1^0, \ldots a_n^0) = \xi_\mathfrak{a}(t^1, a_1^0, \ldots a_n^0)$$

ergibt sich aber $t^0 = t^1$ auf Grund der bisher noch nicht benutzten Voraussetzung, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$, auch über die Strecke $t_0 - c_1 \ldots t_0 + c_1$ ausgedehnt, schneide sich selbst nicht. Es gibt also auf der Strecke T einen Wert t^0, derart, daß bei beliebig kleinen Werten der Differenzen

$$|t' - t^0|, \quad |a'_\mathfrak{b} - a^0_\mathfrak{b}|, \quad |t'' - t^0|,$$

und von Null verschiedenem Wert von mindestens einer der Differenzen $a'_\mathfrak{b} - a^0_\mathfrak{b}$ die Gleichungen

$$\xi_\mathfrak{a}(t', a'_1, \ldots a'_n) = \xi_\mathfrak{a}(t'', a^0_1, \ldots a^0_n)$$

bestehen.

III. Das ist aber unmöglich wegen der Voraussetzung (2). Auf die Gleichungen (8) kann nämlich, da $\xi_\mathfrak{a}$ reguläre Funktionen ihrer Unabhängigen sind, der Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewandt werden; setzt man

$$\xi_{\mathfrak{a}\,0} = \frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial t}, \quad \xi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = \frac{\partial \xi_\mathfrak{a}}{\partial a_\mathfrak{b}},$$

so ist

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_\mathfrak{a}(t'', a^0_1, \ldots a^0_n) - \xi_\mathfrak{a}(t', a'_1, \ldots a'_n) \\ &= (t'' - t')\,\xi_{\mathfrak{a}\,0}(t''', a''_1, \ldots a''_n) + \sum_\mathfrak{b} (a^0_\mathfrak{b} - a'_\mathfrak{b})\,\xi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}(t''', a''_1, \ldots a''_n), \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist

$$t''' = \theta t'' + (1 - \theta) t', \quad a''_\mathfrak{b} = \theta a^0_\mathfrak{b} + (1 - \theta) a'_\mathfrak{b},$$

und θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Diese Werte liegen bei den geltenden Voraussetzungen beliebig nahe den Werten t^0, $a^0_\mathfrak{b}$; die Determinante der $(n+1)^2$ Größen

$$\xi_{\mathfrak{a}0}(t''', a''_1, \ldots a''_n), \quad \xi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}(t''', a''_1, \ldots a''_n)$$

hat einerseits den Gleichungen (8) zufolge, da die Differenzen $t'' - t'$, $a''_\mathfrak{b} - a'_\mathfrak{b}$ nicht alle verschwinden, den Wert Null; sie unterscheidet sich anderseits beliebig wenig von der Determinante der Größen

$$\xi_{\mathfrak{a}\,0}(t^0, a^0_1, \ldots a^0_n), \quad \xi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}(t^0, a^0_1, \ldots a^0_n),$$

d. h. der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\xi_1, \ldots \xi_{n+1})}{\partial(t, a_1, \ldots a_n)}$$

an der Stelle $t = t^0$, $a_\mathfrak{b} = a^0_\mathfrak{b}$. Diese ist aber nach (2) von Null verschieden; wir stoßen auf einen Widerspruch.

Damit ist die Behauptung des Absatzes II, unser zweiter Hilfssatz bewiesen, von dessen Unrichtigkeit wir versuchsweise ausgingen.

IV. Jetzt können wir beweisen, daß die Gebiete $[\gamma]$ bei hinreichend kleinen Werten von γ von den Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ nur einfach bedeckt werden. Entgegengesetztenfalls gäbe es im Gebiet $[\gamma]$ bei beliebig kleinem γ eine Stelle $\bar{x}_\mathfrak{a}$, für die

$$\bar{x}_\mathfrak{a} = \xi_\mathfrak{a}(t', a_1', \dots a_n') = \xi_\mathfrak{a}(t'', a_1'', \dots a_n'')$$

wäre, und die Differenzen $t' - t''$, $a_\mathfrak{b}'' - a_\mathfrak{b}$ nicht alle verschwänden. Greifen wir irgendwie unendlich viele Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$ heraus, bei denen die sie umfassenden Gebiete $[\gamma]$ beliebig klein werden, so müssen sie einen Häufungspunkt auf $\mathfrak{M}$ haben; denn in der Nähe eines nicht auf $\mathfrak{M}$ liegenden Häufungspunktes bleiben die Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$, wie der Häufungspunkt selbst, außerhalb aller Gebiete $[\gamma]$, in denen γ hinreichend klein ist. Nennen wir, wenn die Stelle $\mathfrak{x}_\mathfrak{a}$ die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$ durchläuft, das Minimum der stetigen Funktion $\sum (x_\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_\mathfrak{a})^2$ den kleinsten Abstand des Punktes $x_\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}^0$, so ist dieser stetig, erreicht also auf jeder abgeschlossenen Punktmenge, z. B. der Menge aller Häufungspunkte der Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$, ein Minimum μ; dieses ist also von Null verschieden, wenn keiner der Häufungspunkte auf $\mathfrak{M}_0$ liegt. Dann können aber im Gebiet $[\frac{1}{2}\mu]$ nur endlich viele Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$ liegen, entgegen der Voraussetzung. Die Häufungspunkte der Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$ müssen also der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^0$ beliebig nahe kommen, und mindestens einer von ihnen auf $\mathfrak{M}^0$ liegen.

Sei nun $x_\mathfrak{a}^0$ die auf $\mathfrak{M}^0$ liegende Häufungsstelle der Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$; man nähere sich ihr mit einer unendlichen Reihe von Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$; die zugehörigen $(2n+2)$-gliedrigen Wertsysteme $(t', t'', a_\mathfrak{b}', a_\mathfrak{b}'')$ haben dann auch mindestens eine Häufungsstelle $(\tau', \tau'', \alpha_\mathfrak{b}', \alpha_\mathfrak{b}'')$; man kann dann aus jener Reihe der Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$ eine ebenfalls unendliche so herausgreifen, daß in ihr

$$\lim t' = \tau', \quad \lim t'' = \tau'', \quad \lim a_\mathfrak{b}' = \alpha_\mathfrak{b}', \quad \lim a_\mathfrak{b}'' = \alpha_\mathfrak{b}''$$

ist. Beim unendlichen Fortgang in jener Reihe kommt man aber auf alle Fälle der Stelle $x_\mathfrak{a}^0$ beliebig nahe; also folgt

$$\lim \xi_\mathfrak{a}(t', a_1', \dots a_n') = \xi_\mathfrak{a}(\tau', \alpha_1', \dots \alpha_n') = x_\mathfrak{a}^0$$
$$\lim \xi_\mathfrak{a}(t'', a_1'', \dots a_n'') = \xi_\mathfrak{a}(t'', \alpha_1', \dots \alpha_n'') = x_\mathfrak{a}^0.$$

Nun kann man

$$x_\mathfrak{a}^0 = \xi(t^0, a_1^0, \dots a_n^0)$$

setzen; daraus folgt nach II.

$$\alpha_\mathfrak{b}' = \alpha_\mathfrak{b}'' = a_\mathfrak{b}^0;$$

anderenfalls würde $\mathfrak{M}^0$ geschnitten von Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$, in denen $a_\mathfrak{b} - a_\mathfrak{b}^0$ beliebig kleine Größen sind.

Jetzt also sehen wir: in jeder Nähe des Wertsystems t^0, $a_\mathfrak{b}^0$ gibt es Paare von Systemen t', $a'_\mathfrak{b}$ und t'', $a''_\mathfrak{b}$, die die Gleichungen

$$(10) \qquad \xi_\mathfrak{a}(t', a'_1, \dots a'_n) = \xi_\mathfrak{a}(t'', a''_1, \dots a''_n)$$

liefern, ohne daß alle Differenzen $t' - t''$, $a'_\mathfrak{b} - a''_\mathfrak{b}$ verschwinden.

Von hier aus kommen wir wieder nach der im Absatz III gebrauchten Methode zum Widerspruch. Für die Gleichungen (10) schreiben wir

$$(t' - t'')\,\xi_{\mathfrak{a}0}(t''', a'''_1, \dots a'''_n) + \sum_\mathfrak{b} \xi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t''', a'''_1, \dots a'''_n)(a'_\mathfrak{b} - a''_\mathfrak{b}) = 0;$$

$$t''' = \theta t' + (1 - \theta)\, t'', \quad a'''_\mathfrak{b} = \theta\, a'_\mathfrak{b} + (1 - \theta)\, a''_\mathfrak{b}.$$

Da nicht alle Größen $t' - t''$, $a'_\mathfrak{b} - a''_\mathfrak{b}$ verschwinden, so verschwindet die Determinante der Größen

$$\xi_{\mathfrak{a}0}(t''', a'''_1, \dots a'''_n), \quad \xi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t''', a'''_1, \dots a'''_n);$$

die Größen t''', $a'''_\mathfrak{b}$ liegen aber wie t', $a'_\mathfrak{b}$ und t'', $a''_\mathfrak{b}$ beliebig nahe bei t^0, $a^0_\mathfrak{b}$, und die Determinante der Größen

$$\xi_{\mathfrak{a}0}(t^0, a^0_1, \dots a^0_n), \quad \xi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t^0, a^0_1, \dots a^0_n)$$

ist von Null verschieden nach Voraussetzung (2).

Die Annahme, bei beliebig kleinen Werten γ enthalte das Gebiet $[\gamma]$ Stellen $\bar{x}_\mathfrak{a}$, ist also unhaltbar. Bei hinreichend kleinen Werten von γ wird das Gebiet $[\gamma]$ von den Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ genau einfach bedeckt.

§ 12.

Grundzüge der Weierstraßschen Theorie.

Bei der Aufgabe

$$(1) \qquad \delta \int F(x, y, x', y')\, dt = 0$$

sei $\mathfrak{C}$ ein sich selbst nicht schneidender regulärer Extremalenbogen, der in eine Schar ebensolcher Bögen eingebettet werden kann. Diese seien durch die Gleichungen

$$(2) \qquad x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a)$$

auf der Strecke $t_0 - c_1 \leqq t \leqq t_1 + c_1$ dargestellt; c_1 sei positiv, ξ und η regulär. Der Bogen $\mathfrak{C}$ habe die Gleichungen

$$x = \xi(t, a_0), \quad y = \eta(t, a_0)$$

und erstrecke sich über die Strecke $t_0 \leqq t \leqq t_1$; die Kurvenschar werde durch die Ungleichung

$$(3) \qquad |a - a_0| < \alpha, \quad \alpha > 0$$

begrenzt. Wir nehmen ferner an, bei hinreichend kleinen Werten von α und c_1 sei

$$\varDelta(t, a) = \xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t \neq 0;$$

das ist offenbar der Fall, wenn auf der Strecke $t_0 \ldots t_1$ die besondere Ungleichung

$$\varDelta(t, a_0) \neq 0$$

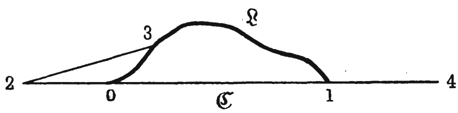
gilt. Erinnern wir noch daran, daß zufolge der vorausgesetzten Regularität der Bögen (2) unter den Annahmen (3) und $t_0 - c_1 \leqq t \leqq t_1 + c_1$ die Ungleichung

$$\xi_t^2 + \eta_t^2 > 0$$

gilt. Die Endpunkte des Bogens ℭ, also die Punkte $[\xi(t_0, a_0), \eta(t_0, a_0)]$ und $[\xi(t_1, a_0), \eta(t_1, a_0)]$ nennen wir 0 und 1.

Im besonderen mögen die Kurven (2) alle durch einen bestimmten Punkt 2 der Kurve $x = \xi(t, a_0)$, $y = \eta(t, a_0)$ oder ℭ hindurchgehen, wobei $t_2 < t_0$, also bei hinreichend kleinen Werten von c_1 nach $t_2 < t_0 - c_1$ sein wird. Die Größe t_2 wird auf den Kurven (2) verschieden und eine reguläre Funktion von a sein. Von den Gleichungen

Fig. 3.



$$x_2 - \xi(t_2, a) = 0,$$
$$y_2 - \eta(t_2, a) = 0$$

kann mindestens eine nach t_2 als reguläre Funktion von a auflösen, da ξ_t und η_t nicht zugleich verschwinden; dann kann man nach a differenzieren, und erhält

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \xi_t(t_2, a)\frac{d t_2}{d a} + \xi_a(t_2, a) &= 0, \\ \eta_t(t_2, a)\frac{d t_2}{d a} + \eta_a(t_2, a) &= 0, \end{aligned}$$

und schließt hieraus

$$\varDelta(t_2, a) = 0.$$

Die Gesamtheit der Kurven (2) nennen wir dann ein **Feld von Extremalen**; sie bedecken nach § 11 genau einfach ein Gebiet

$$|x - \xi(t, a_0)| < \gamma, \quad |y - \eta(t, a_0)| < \gamma,$$

wo $t_0 \leqq t \leqq t_1$ und γ ein hinreichend kleiner positiver Festwert ist; dieses Gebiet ist nach § 11 durch $[\gamma]$ zu bezeichnen.

In diesem sei 𝔎 irgend eine zusammenhängende Kurve mit den Endpunkten 0 und 1, die aus einer endlichen Anzahl regulärer Stücke besteht. Sie werde vom Punkte 3 durchlaufen. Dieser bestimmt dann in jeder seiner Lagen eine durch ihn hindurchgehende Extremale des Feldes. In Fig. 3 sind die Extremalen als Gerade gezeichnet, wie auch später geschehen soll; die Figur stellt die Weierstraßsche Konstruktion dar.

Hier ist nun $\overline{J}_{23}$, worin der Strich wie fortan immer die Integration längs einer Extremale bedeute, eine reguläre Funktion von x und y. Denn aus den Gleichungen

$$x = \xi(t_3, a), \quad y = \eta(t_3, a)$$

kann man, da $\Delta(t_3, a) \neq 0$ ist, t_3 und a als in der Umgebung jeder bestimmten Stelle 3 reguläre Funktionen von x und y bestimmen nach dem Satz von der Existenz der impliziten Funktionen; da nun t_2 in a regulär ist, so ist

$$\overline{J}_{23} = \int_{t_2}^{t_3} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\, dt \tag{5}$$

in a und t_3, also auch in x und y regulär.

Um das vollständige Differential dieser Größe in übersichtliche Form zu bringen, kann nach § 3, I. das Variationszeichen benutzt werden; wir setzen

$$\delta = dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$$

und finden dann nach der Grundformel (§ 2, IV.)

$$\delta \overline{J}_{23} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|^3$$

oder

$$d\overline{J}_{23} = F_{x'}\, dx + F_{y'}\, dy. \tag{6}$$

Man kann diese Formel aber auch durch Rechnung aus der Gleichung (5) ableiten; diese gibt offenbar, wenn $t = t_3$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial \overline{J}_{23}}{\partial t} = F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t),$$

$$\frac{\partial \overline{J}_{23}}{\partial a} = \int_{t_2}^{t} \frac{\partial F(\xi, \ldots)}{\partial a} - \frac{dt_2}{da} F[\xi(t_2, a), \ldots \eta_t(t_2 a)].$$

Verwandelt man in der letzten Gleichung das Integral wie bei der gewöhnlichen Umformung von δJ, indem man δ durch $\partial/\partial a$ ersetzt, so fällt das Integralzeichen weg, und man findet

$$\frac{\partial \overline{J}_{23}}{\partial a} = F_{x'}(\xi, \ldots)\xi_a + F_{y'}(\xi, \ldots)\eta_a \Big|_{t_2}^{t}$$
$$- \frac{dt_2}{da}[\xi_t F_{x'}(\xi, \ldots) + \eta_t F_{y'}(\xi, \ldots)] \Big|^{t_2}.$$

Hier fallen nach (4) die für $t = t_2$ gebildeten Glieder weg, und man erhält durch Zusammenstellung der letzten Gleichungen

$$d\bar{J}_{23} = \frac{\partial \bar{J}_{23}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{J}_{23}}{\partial a} da = F_{x'}(\xi_t dt + \xi_a da) + F_{y'}(\eta_t dt + \eta_a da),$$

d. h. die Gleichung (6).

Jetzt seien längs der im Gebiet $[\gamma]$ von 0 nach 1 hinlaufenden Kurve $\mathfrak{L}$, die aus einer endlichen Anzahl regulärer Stücke besteht, x und y Funktionen des Parameters τ, 3 sei der laufende Punkt auf der Kurve, durch den wir, und das ist die Weierstraßsche Konstruktion, eine Feldextremale legen, auf die wir das Integral $\bar{J}_{23}$ beziehen. Längs der Kurve $\mathfrak{L}$ integriert, erhält man

$$J_{03} = \int_{\tau_0}^{\tau} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau, \quad \frac{dJ_{03}}{d\tau} = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

und die Gleichung (6) ergibt

$$\frac{d\bar{J}_{23}}{d\tau} = F_x(x, y, x', y') \frac{dx}{d\tau} + F_{y'}(x, y, x', y') \frac{dy}{d\tau},$$

wobei $x' = \xi_t$, $y' = \eta_t$ die auf die Extremale 23 im Punkte 3 bezogenen Größen sind. Die letzten Gleichungen ergeben für die Weierstraßsche Größe

$$W(\tau) = J_{03} - \bar{J}_{23}$$

unmittelbar, indem wir x_τ für $dx/d\tau$ setzen usf.,

$$(7) \quad \frac{dW(\tau)}{d\tau} = F(x, y, x_\tau, y_\tau) - x_\tau F_{x'}(x, y, x', y') - y_\tau F_{y'}(x, y, x', y');$$

die rechte Seite dieser Gleichung heiße $\mathfrak{E}$ oder ausführlich $\mathfrak{E}(x, y, x', y', x_\tau, y_\tau)$. Sie kann an endlich vielen Stellen, da nämlich, wo zwei reguläre Stücke der Kurve $\mathfrak{L}$ zusammenstoßen, bestimmte endliche Sprünge machen, bleibt also in der gewöhnlichen Weise integrierbar, so daß das Integral die stetige Funktion $W(\tau)$ ist.

Ist nun $\tau = \tau_0$, so liegt der Punkt 3 in der Lage 0, so daß $J_{03} = 0$, $\bar{J}_{23} = \bar{J}_{20}$ wird; somit folgt

$$W(\tau_0) = -\bar{J}_{20};$$

wird $\tau = \tau_1$ gesetzt, so ist die Extremale 23 wiederum diejenige, deren Teil der Bogen $\mathfrak{C}$ ist, und wir finden

$$W(\tau_1) = J_{01} - \bar{J}_{21}$$

oder, da bei der festgesetzten Lage der Stellen 2, 0, 1 immer

$$\bar{J}_{21} = \bar{J}_{20} + \bar{J}_{01}$$

zu setzen ist,

$$W(\tau_1) = J_{01} - \bar{J}_{01} - \bar{J}_{20}.$$

Mit dem obigen Wert von $W(\tau_0)$ ergibt sich hieraus

$$W(\tau_1) - W(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dW}{d\tau} d\tau = J_{01} - \bar{J}_{01}$$

oder nach (7)

$$J_{01} - \bar{J}_{01} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{E}\left(x, y, x', y', \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau.$$

Jetzt erinnern wir uns des ursprünglichen Sinnes der Extremsaufgabe (1). Ist die Differenz $J_{01} - \bar{J}_{01}$ immer positiv, so wird J_{01} durch den Extremalenbogen 01 ein Minimum gegenüber allen stückweise regulären Kurven $\mathfrak{L}$, die ebenfalls die Endpunkte 0 und 1 haben und einem gewissen, den Bogen 01 umfassenden Gebiet $[\gamma]$ angehören; ist jene Differenz immer negativ, so liegt ein Maximum des Integrals J_{01} vor. Ist es also möglich, das Integral

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{E}\, d\tau$$

als immer positiv oder immer negativ nachzuweisen, so ist gezeigt, daß das gesuchte Extrem in der Tat vom Bogen $\mathfrak{C}$ in gewissem Sinne geliefert wird.

Wir können hiernach schon jetzt zwei zusammen hinreichende Bedingungen des Extrems aussprechen.

A. Jacobische Bedingung. Der sich selbst nicht schneidende reguläre Extremalenbogen 01 sei eingebettet in eine Schar von Extremalen, die alle durch einen festen Punkt 2 gehen, der auf der Verlängerung des Extremalenbogens 01 über einen seiner Endpunkte hinausliegt. Werden die Extremalen durch die Gleichungen $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$ dargestellt, und ist $a = a_0$ auf der Extremale 01, so sei

$$\Delta(t, a_0) = \xi_t(t, a_0)\,\eta_a(t, a_0) - \xi_a(t, a_0)\,\eta_t(t, a_0)$$

auf dem Bogen 01 von Null verschieden.

B. Weierstraßsche Bedingung. Für die zum Vergleich herangezogenen Kurven sei immer

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{E}\, d\tau$$

von Null verschieden und festen Vorzeichens.

Die Jacobische Bedingung kann in folgender Weise abgeändert werden. Verschwindet die Größe $\Delta(t, a_0)$ auf der Extremale, der der Bogen 01 angehört in der Richtung 201 zuerst wieder im Punkte 4, so heißen 2 und 4 konjugierte Punkte; in dieser Bezeichnung ist die Jacobische Bedingung jedenfalls dann erfüllt, wenn der Bogen 01 auf der Extremale, der er angehört, zwischen zwei konjugierten Punkten liegt.

II. Für die Kurve $\mathfrak{L}$ können, ohne die erhaltenen Ergebnisse zu gefährden, allgemeinere Stetigkeitseigenschaften zugelassen werden als bisher. Es genügt z. B. anzunehmen, daß die vorderen Ableitungen

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(\tau+\varepsilon)-\varphi(\tau)}{\varepsilon} = x_\tau = \varphi'(\tau), \quad \varepsilon > 0,$$

$$\lim \frac{\psi(\tau+\varepsilon)-\psi(\tau)}{\varepsilon} = y_\tau = \psi'(\tau)$$

endlich bestimmt und integrierbar sind und auch bei Ecken die Eigenschaft

$$\lim_{\varepsilon=0} \varphi'(\tau+\varepsilon) = \varphi'(\tau), \quad \varepsilon > 0 \tag{8}$$

aufweisen. Damit sind unzählige, auch unendlich gehäufte Ecken der Kurve $\mathfrak{L}$ keineswegs ausgeschlossen; da nach wachsenden Werten von τ integriert wird, sind diese Größen bei der Bildung des Integrals J längs der Kurve $\mathfrak{L}$ zu nehmen.

Ist dann $F(x, y, x_\tau, y_\tau)$ an den längs der Kurve $\mathfrak{L}$ erreichten Stellen im Gebiet der vier Unabhängigen regulär, und setzt man

$$F(x, y, x_\tau, y_\tau) = F(\varphi, \psi, \varphi', \psi') = \Phi(\tau),$$

so ist auf der Strecke $\tau_0 \ldots \tau_1$ immer

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_4) - \Phi(\tau_5) = {} & [F_x](x_4 - x_5) + [F_y](y_4 - y_5) \\ & + [F_{x'}]\big((x_\tau)_4 - (x_\tau)_5\big) + [F_{y'}]\big((y_\tau)_4 - (y_\tau)_5\big), \end{aligned} \tag{9}$$

wobei in den eckig eingeklämmerten Funktionszeichen ein Unabhängigensystem von der Form

$$\theta\,\varphi(\tau_4) + (1-\theta)\,\varphi(\tau_5), \quad \theta\,\psi(\tau_4) + (1-\theta)\,\psi(\tau_5),$$

$$\theta\,\varphi'(\tau_4) + (1-\theta)\,\varphi'(\tau_5), \quad \theta\,\psi'(\tau_4) + (1-\theta)\,\psi'(\tau_5), \quad 0 < \theta < 1$$

zu nehmen ist. Hieraus ersieht man, daß auch $\Phi(\tau)$ integrierbar ist, sobald $F(x, y, x_\tau, y_\tau)$, als Funktion des Vektors (x_τ, y_τ) betrachtet, auch regulär bleibt für alle Richtungen dieses Vektors, die in den hohlen Winkel zwischen zwei auf der Kurve $\mathfrak{L}$ erreichten Lagen des Vektors (x_τ, y_τ) hineinführen. Denn die Integrierbarkeit bedeutet, daß die Gesamtlänge der Strecken, in denen die Schwankung einer der Größen x_τ und y_τ einen festen Wert überschreitet, beliebig herabgedrückt werden kann; da nun $\Phi(\tau)$ nur mit einer der Größen x_τ und y_τ unstetig wird, zeigt die Formel (9) die Integrierbarkeit der Größe $\Phi(\tau)$ wie auch die Gleichung

$$\lim_{\varepsilon=0} \Phi(\tau+\varepsilon) = \Phi(\tau), \quad \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Man kann daher das Integral

$$\Psi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} F(x, y, x_\tau, y_\tau)\, d\tau, \quad \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \Phi(\tau)\, d\tau = M\varepsilon$$

bilden, wobei M nach (10), wenn $\varepsilon > 0$ und $\lim \varepsilon = 0$ wird, dem Werte $\Phi(\tau)$ zustrebt, so daß sich die gewöhnliche Gleichung

$$\frac{d\,\Psi(\tau)}{d\tau} = \Phi(\tau)$$

ergibt.

Erwähnen wir noch, daß die von $\varphi'(\tau)$ und $\psi'(\tau)$ geforderten Eigenschaften jedenfalls vorliegen, wenn diese Funktionen von beschränkter Schwankung sind, d. h. als Summen je zweier monotoner Funktionen darstellbar, wobei an Unstetigkeitsstellen immer $x_\tau = \varphi'(\tau+0)$ usf. zu nehmen ist. Die allgemeinen Funktionen nennen wir Funktionen wie $\varphi'(\tau)$.

Ist ferner $G(x, y)$ eine reguläre Funktion von x und y, so wird wie gewöhnlich die Gleichung

$$-G(x, y) + G(x+h, y+k) = h\, G_x(\bar{x}, \bar{y}) + k\, G_y(\bar{x}, \bar{y})$$

bestehen, wobei

$$\bar{x} = x + \theta h, \quad \bar{y} = y + \theta k$$

ist und θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Setzt man dann

$$x + h = \varphi(\tau+\theta_1), \quad y + k = \psi(\tau+\theta_1), \quad x = \varphi(\tau), \; y = \psi(\tau),$$

$$G(x, y) - G(x_0, y_0) = \Theta(\tau),$$

so folgt

$$\frac{\Theta(\tau+\theta_1) - \Theta(\tau)}{\theta_1} = \frac{\varphi(\tau+\theta_1) - \varphi(\tau)}{\theta_1} G_x(\bar{x}, \bar{y})$$

$$+ \frac{\psi(\tau+\theta_1) - \psi(\tau)}{\theta_1} G_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

also, wenn $\theta_1 > 0$ und $\lim \theta_1 = 0$ wird, die gewöhnliche Gleichung

$$\Theta'(\tau) = G_x . \varphi'(\tau) + G_y . \psi'(\tau),$$

wobei $\Theta'(\tau)$ die von $\varphi'(\tau)$ und $\psi'(\tau)$ geforderten Eigenschaften besitzt und die vordere Ableitung bedeutet.

Setzt man daher

$$\varDelta(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} [G_x \psi'(\tau) + G_y \psi'(\tau)]\, dt,$$

so folgt mit vorderen Ableitungen $\varDelta'(\tau) = \Theta'(\tau)$.

Um hieraus die Gleichung $\varDelta(\tau) = \Theta(\tau)$ zu erschließen, muß man davon ausgehen, daß die Funktion $f(\tau)$ ein Festwert ist, auch wenn nur ihre vordere Ableitung auf der Strecke $\tau_0 \ldots \tau_1$ überall verschwindet. Das folgt daraus, daß die Funktion $f(\tau) + \alpha(\tau - \tau_0)$, wenn α ein positiver Festwert ist, eine positive vordere Ableitung hat, also mit τ wächst; ebenso nimmt $f(\tau) - \alpha(\tau - \tau_0)$ bei wachsenden Werten von τ ab, so daß die Ungleichungen

$$f(\tau) + \alpha(\tau - \tau_0) > f(\tau_0) > f(\tau) - \alpha(\tau - \tau_0),$$
$$\alpha(\tau - \tau_0) > f(\tau_0) - f(\tau) > -\alpha(\tau - \tau_0)$$

folgen, also, wenn man α beliebig klein nimmt, $f(\tau) = f(\tau_0)$. Dies angewandt auf die Differenz $\varDelta(\tau) - \Theta(\tau)$, ergibt sich

$$G(x, y) - G(x_0, y_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} [G_x \varphi'(\tau) + G_y \psi'(\tau)]\, d\tau.$$

Ferner ist a nach Nr. I in x und y regulär auf dem Gebiet $[\gamma]$; die Größe $da/d\tau$ hat also die von $\varphi'(\tau)$ geforderten Eigenschaften, und wenn sie auf einer τ-Strecke verschwinden sollte, wäre $a = \text{const.}$

Nimmt man endlich für die soeben betrachtete Funktion $G(x, y)$ die nach I in x und y reguläre Größe $\bar{J}_{23}$, so folgt wie früher

$$\frac{d\bar{J}_{23}}{d\tau} = F_{x'} \frac{dx}{d\tau} + F_{y'} \frac{dy}{d\tau}. \tag{11}$$

Mit der Gleichung (10) zusammen ergibt sich jetzt

$$\frac{d(J_{03} - \bar{J}_{23})}{d\tau} = \mathcal{E}$$

$$= F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}\right) - \frac{dx}{d\tau} F_{x'}(x, y, x', y') - \frac{dy}{d\tau} F_{y'}(x, y, x', y'),$$

und die rechte Seite ist integrierbar. Da nun oben $\Psi(\tau) = J_{03}$ gesetzt werden darf, so kann man wie gewöhnlich integrieren:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d J_{03}}{d\tau}\, d\tau = J_{03};$$

da ferner $d\overline{J}_{23}/d\tau$ nach (11) eine Größe wie $\varphi'(\tau)$ ist, hat man ebenso

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\overline{J}_{23}}{d\tau}\, d\tau = \overline{J}_{23}\Big|_{\tau_0}^{\tau}$$

zu setzen, womit sich die Weierstraßsche Formel

$$W\Big|_{\tau_0}^{\tau_1} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{E}\, d\tau$$

ergibt. Die im Abschnitt I entwickelte Theorie erstreckt sich also auch auf Kurven $\mathfrak{L}$, längs deren die Koordinaten als Funktionen eines Parameters τ Ableitungen von den oben für $\varphi'(\tau)$ geforderten Eigenschaften besitzen.

§ 13.

Umformung der Weierstraßschen Bedingung.

I. Um die Weierstraßsche Bedingung unmittelbar anwendbar zu machen, untersuchen wir die Größe $\mathfrak{E}$ näher. In ihr und F lassen wir die stets wiederkehrenden Unabhängigen x, y weg und beginnen mit der Identität

$$F(x', y') - x' F_{x'}(x', y') - y' F_{y'}(x', y') = 0.$$

Aus ihr folgt

$$\mathfrak{E} = F(x_\tau, y_\tau) - F(x', y') - (x_\tau - x') F_{x'}(x', y') \\ - (y_\tau - y') F_{y'}(x', y').$$

Die Größe $\mathfrak{E}$ ist also der Rest in der Taylorschen Entwicklung der Größe $F(x_\tau, y_\tau)$ nach den Differenzen $x_\tau - x'$ und $y_\tau - y'$; nach der allgemeinen Restformel, die für Funktionen zweier Unabhängiger beim Abbruch nach den linearen Gliedern gilt, kann man schreiben

$$\text{(1)}\quad \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\{(x_\tau - x')^2 F_{x'x'}(u, v) + 2(x_\tau - x')(y_\tau - y') F_{x'y'}(u, v) \\ + (y_\tau - y')^2 F_{y'y'}(u, v)\},$$

wobei die Mittelwerte u, v durch die Gleichungen

$$\text{(2)}\quad u = (1-\theta) x' + \theta x_\tau, \quad v = (1-\theta) y' + \theta y_\tau$$

mit der Bestimmung $0 < \theta < 1$ erklärt sind. Nun ist allgemein

$$F_{x'x'} = y'^2 F_1(x', y'), \quad F_{x'y'} = -x'y' F_1(x', y'),$$
$$F_{y'y'} = x'^2 F_1(x', y');$$

der Ausdruck (1) gibt also, da

$$\begin{vmatrix} x_\tau - x' & u \\ y_\tau - y' & v \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_\tau & x' \\ y_\tau & y' \end{vmatrix}^2$$

gesetzt werden kann,

$$(3) \qquad \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2} F_1(u, v)(x_\tau y' - y_\tau x')^2 = \mathfrak{E}(x, y, x', y', x_\tau, y_\tau).$$

Die Größe $\mathfrak{E}$ hat also, wenn sie nicht verschwindet, das Vorzeichen der Größe $F_1(u, v)$.

Der Vektor (u, v) kann genauer geometrisch gekennzeichnet werden. Der Punkt (u, v) liegt den Gleichungen (2) zufolge auf der endlichen geraden Strecke zwischen den Punkten (x', y') und (x_τ, y_τ); läßt man also die drei Vektoren (x', y'), (x_τ, y_τ) und (u, v) von irgend einem Punkte ausgehen, so liegt der letzte innerhalb des hohlen Winkels zwischen den beiden ersteren, falls diese nicht zusammenfallen. Hat also die Größe F_1, gebildet für eine in diesen hohlen Winkel hineinweisende Richtung, ein festes Vorzeichen, so ist dieses auch das Vorzeichen der Größe $\mathfrak{E}$.

Setzen wir ferner wie früher

$$F(x, y, x', y') = x' f(x, y, p), \quad F(x, y, x_\tau, y_\tau) = x_\tau f(x, y, \bar{p}),$$

so folgt an einer Stelle, wo $x' \neq 0$ ist,

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \tau x_\tau f(x, y, \bar{p}) - \big(f(x, y, p) - p f_p(x, y, p)\big) x_\tau \\ \qquad\qquad - f_p(x, y, p) x_\tau \cdot \bar{p}, \\ \quad = x_\tau \{f(x, y, \bar{p}) - f(x, y, p) - (\bar{p} - p) f_p(x, y, p)\} \\ \quad = \tfrac{1}{2}(\bar{p} - p)^2 x_\tau f_{pp}(x, y, p^0), \end{cases}$$

wobei p^0 einen Mittelwert zwischen p und $\bar{p}$ bedeutet.

II. Die Formeln (3) und (4) wie auch schon der ursprüngliche Ausdruck der Größe $\mathfrak{E}$ zeigen, daß diese jedenfalls dann verschwindet, wenn die Vektoren (x', y') und (x_τ, y_τ) dieselbe, nicht entgegengesetzte Richtung haben. Wir nennen dies das ordentliche Verschwinden der Größe $\mathfrak{E}$; jedes andere Verschwinden heiße außerordentlich. In ersterem Falle ist $x_\tau y' - y_\tau x' = 0$ und x' hat das Vorzeichen mit x_τ gemein. Ist letzteres nicht der Fall, die Vektoren (x', y') und (x_τ, y_τ) also entgegengesetzt gerichtet, so braucht $\mathfrak{E}$ nicht zu verschwinden, da Gleichungen wie

$$F_{x'}(x, y, x', y') = F_{x'}(x, y, -x', -y'),$$
$$F_{y'}(x, y, x', y') = F_{y'}(x, y, -x', -y')$$

keineswegs erfüllt zu sein brauchen; F, $F_{x'}$ und $F_{y'}$ setzen wir ja im allgemeinen nur als positiv homogen voraus.

Will man nun die Weierstraßsche Bedingung erfüllen, also dem Integral

$$\int \mathfrak{E}\, d\tau \tag{5}$$

ein festes Vorzeichen sichern, so liegt es am nächsten, vorauszusetzen, daß die Größe $\mathfrak{E}$ für die zugelassenen Kurven $\mathfrak{L}$ ihr Vorzeichen nicht wechselt. Weiter muß dann noch der Fall ausgeschlossen werden, daß $\mathfrak{E}$ längs der ganzen Kurve $\mathfrak{L}$ verschwinde. Dies kann jedenfalls nicht so geschehen, daß $\mathfrak{E}$ überall ordentlich verschwindet; in diesem Falle wäre ja auf der Strecke $\tau_0 \ldots \tau_1$ überall

$$\begin{aligned} x_\tau y' - x' y_\tau &= \left(\xi_t \frac{dt}{d\tau} + \xi_a \frac{da}{d\tau}\right)\eta_t \\ &\quad - \left(\eta_t \frac{dt}{d\tau} + \eta_a \frac{da}{d\tau}\right)\xi_t \\ &= -(\xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t)\frac{da}{d\tau} = 0, \end{aligned}$$

also, wenn die Jacobische Bedingung erfüllt ist, d. h.

$$\varDelta(t, a) \neq 0$$

ist,

$$\frac{da}{d\tau} = 0.$$

Dann wäre a von τ unabhängig, und da $a = a_0$ ist für $\tau = \tau_0$, lägen alle Punkte der Kurve $\mathfrak{L}$ auf der Extremale $a = a_0$; die Kurve $\mathfrak{L}$ fiele mit dem Bogen $\mathfrak{C}$ zusammen. Dies gilt auch für den allgemeineren Fall § 12, II, da, wie dort bemerkt, $da/d\tau$ eine Funktion wie $\varphi'(\tau)$ ist.

Das Integral (5) kann hiernach, wenn ein Zeichenwechsel der Größe $\mathfrak{E}$ ausgeschlossen ist, nur dann vielleicht verschwinden, wenn außerordentliches Verschwinden der Größe $\mathfrak{E}$ zugelassen wird. Ist dies ausgeschlossen, so ist jenes Integral sicher von Null verschieden, die Weierstraßsche Bedingung erfüllt. Man kann ihr also folgende engere, aber für die Anwendung bequeme Form geben.

B′. Weierstraßsche Bedingung. Die Größe $\mathfrak{E}$ wechselt bei den zum Vergleich zugelassenen Kurven $\mathfrak{L}$ ihr Vorzeichen nicht und verschwindet auf ihnen nur in ordentlicher Weise.

Diese Bedingung reicht mit der Jacobischen, § 12 (A), zusammen hin, das Extrem gegenüber den zugelassenen Kurven $\mathfrak{L}$ zu sichern. Da nun eine Gleichung des § 12 lautete

$$J_{01} - \bar{J}_{01} = \int_0^1 \mathfrak{E}\, d\tau,$$

so geben positive Werte der Größe $\mathfrak{E}$ ein Minimum, negative ein Maximum des Integrals J_{01}. Die Formel (3) zeigt ferner, daß $\mathfrak{E}$ das Vorzeichen mit einem gewissen Werte von F_1 gemein hat. Hat diese Größe ein festes Vorzeichen für alle Richtungen, die in einem Punkte des Gebiets $[\gamma]$ hineinweisen in den hohlen Winkel zwischen den in diesem Punkte wachsenden Werten von τ und t entsprechenden Richtungen der zugelassenen Kurve $\mathfrak{L}$ und der Feldextremale, so hat die Größe $\mathfrak{E}$ eben dies Vorzeichen.

Setzt man z. B.

$$F(x, y, x', y') = f(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

und ist die Funktion $f(x, y)$ an den betrachteten Stellen positiv, so hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}\left\{1 - \frac{x' x_\tau + y' y_\tau}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}}\right\} \cdot f(x, y) \\ &= \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}\,(1 - \cos\omega)\, f(x, y), \end{aligned}$$

wobei ω den hohlen Winkel der beiden Vektoren (x', y') und (x_τ, y_τ) bedeutet, so daß $\cos\omega = 1$ nur werden kann, wenn $\omega = 0$, jene Vektoren also dieselbe, nicht entgegengesetzte Richtung haben. Die Größe $\mathfrak{E}$ kann hier also überhaupt nur ordentlich verschwinden; den Kurven $\mathfrak{L}$ braucht außer den Stetigkeitseigenschaften keine Beschränkung auferlegt zu werden. Um das Extrem zu sichern, reicht die Jacobische Bedingung aus.

III. Das Gebiet $[\gamma]$ nennen wir eine weitere Nachbarschaft des Bogens 01; wird dieser vom Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durchlaufen, so ist $[\gamma]$ der Inbegriff der Punkte, für welche

$$|x - \mathfrak{x}| < \gamma, \quad |y - \mathfrak{y}| < \gamma; \tag{6}$$

in einer solchen Nachbarschaft sollte bisher immer die Kurve $\mathfrak{L}$ verlaufen. Jetzt führen wir den Begriff einer engeren Nachbarschaft ein und sagen, $\mathfrak{L}$ verlaufe in einer solchen, wenn zu jedem dieser Kurve angehörigen Punkte (x, y) ein Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ des Bogens 01 existiert, der mit jenem die Ungleichungen (6) erfüllt und in der Beziehung steht, daß die nach wachsenden t und τ gerichteten Tangenten der Kurven $\mathfrak{L}$ und 01 einen Winkel, der kleiner als die positive Konstante γ_1 ist, bilden; wir sagen dann, die Kurve $\mathfrak{L}$ liege in einer engeren Nachbarschaft $[\gamma, \gamma_1]$. Ist nun die Differenz $J_{01} - \overline{J}_{01}$ von festem Vorzeichen bei allen in einem gewissen Gebiet $[\gamma]$ verlaufenden Kurven $\mathfrak{L}$, so sagen wir, der Bogen 01 liefere ein starkes Extrem des Integrals J; gilt dies nur für alle Kurven $\mathfrak{L}$, die einer gewissen engeren Nachbarschaft $[\gamma, \gamma_1]$ angehören, so sagen wir, liege ein schwaches Extrem vor.

Im Punkte (x, y) bildet, wenn wir uns auf eine engere Nachbarschaft beschränken, die durch ihn gehende Extremale des Feldes mit der Tangente des Bogens 01 im zugehörigen Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ einen Winkel, der unter einer beliebig vorgeschriebenen Schranke bleibt, sobald γ_1 hinreichend klein gewählt wird; dies folgt aus der Stetigkeit der Größen ξ_t, η_t im Gebiet $[\gamma]$ und daraus, daß in ihm die Größe $\xi_t^2 + \eta_t^2$ nicht verschwindet, woraus auch die Stetigkeit der Größen $\xi_t/\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}$ und $\eta_t/\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}$ folgt. Die auf den Punkt (x, y) bezüglichen Vektoren (x_τ, y_τ) und (ξ_t, η_t) sind dann also beliebig wenig gegeneinander geneigt, sobald auch γ_1 hinreichend klein genommen wird. In den hohlen Winkel dieser Vektoren geht der Vektor (u, v) hinein, der nach Nr. I in der Formel

$$\mathcal{E}(x, y, x', y', x_\tau, y_\tau) = (x_\tau y' - x' y_\tau)^2 F_1(x, y, u, v)$$

auftritt; die Größe $\mathcal{E}$ in der Theorie des § 12 wird also nur für solche Vektorenpaare (x', y') und (x_τ, y_τ) gebildet, die in der Richtung beliebig wenig voneinander abweichen; sie kann nur in ordentlicher Weise verschwinden, wenn die Größe F_1 längs der Extremale 01 von Null verschieden ist; denn dann gilt dasselbe bei hinreichend kleinen Werten γ und γ_1 von $F_1(x, y, u, v)$. Liegt also die Vergleichskurve $\mathfrak{L}$ in einer hinreichend engen engeren Nachbarschaft des Extremalenbogens 01, und ist F_1 auf diesem von Null verschieden, so verschwindet $\mathcal{E}$ nur in ordentlicher Weise; nach II ist dann also das schwache Extrem des Integrals J gesichert. Die von F_1 geforderte Eigenschaft nennen wir die Legendresche Bedingung; sie genügt, wie man sieht, mit der Jacobischen zusammen, um das schwache Extrem zu sichern, auch wenn die Größe $\mathfrak{G}$ im übrigen außerordentlich verschwinden kann.

Erinnert man sich des in Nr. I gegebenen Ausdrucks (4) sowie der allgemeinen Beziehung

$$F_1 = \frac{1}{x'^3} f_{pp},$$

wenn $F = x' f(x, y, p)$ gesetzt wird, so kann für den Fall, daß längs des Bogens 01 als Unabhängige überall x genommen werden kann, die Legendresche Bedingung des Minimums in der Form $f_{pp} > 0$, die des Maximums in der Form $f_{pp} < 0$ geschrieben werden und genügt, mit der Jacobischen Bedingung für das schwache Extrem bei festen Endpunkten in der Aufgabe

$$\delta \int f(x, y, p)\, d x = 0.$$

§ 14.

Anwendungen.

In allen Anwendungen der Theorie auf Beispiele ist die Untersuchung, ob die Jacobische Bedingung erfüllt ist, oder die Bestimmung der Paare konjugierter Punkte, gegebenenfalls der Nachweis, daß keine solchen vorliegen, das Wichtigste und der fesselnde analytische Teil der Aufgabe.

Konjugiert nannten wir die Punkte 2 und 4, wenn durch ersteren alle Kurven $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$ hindurchgehen und die Größe $\Delta(t, a) = \xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t$ auf der Kurve $a = a_0$ fortgehend im Punkte 4 zuerst wieder verschwindet. Wenn nun die Gesamtheit der den Bogen 24 umgebenden Extremalen durch die Gleichungen

$$x = \mathfrak{x}(t, b, c), \quad y = \mathfrak{y}(t, b, c)$$

dargestellt werden kann, so erhält man die Ausdrücke ξ und η, indem man b und c passend gewählten Funktionen eines Parameters a gleichsetzt; dann ist

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_t\, d t + \xi_a\, d a = \mathfrak{x}_t\, d t + \mathfrak{x}_b\, d b + \mathfrak{x}_c\, d c, \\ \eta_t\, d t + \eta_a\, d a = \mathfrak{y}_t\, d t + \mathfrak{y}_b\, d b + \mathfrak{y}_c\, d c. \end{cases}$$

Ferner sind

$$x_2 = \xi(t_2, a), \quad y_2 = \eta(t_2, a)$$

Festwerte; man hat also die Gleichungen

$$(2)\qquad \xi_t\, d t + \xi_a\, d a\,|^2 = 0, \quad \eta_t\, d t + \eta_a\, d a\,|^2 = 0.$$

Ferner erhält man die Gleichung $\varDelta(t_4, a_0) = 0$, wenn man die Gleichungen

$$\xi_t\, d\,t + \xi_a\, d\,a|^4 = 0, \quad \eta_t\, d\,t + \eta_a\, d\,a|^4 = 0 \tag{3}$$

mit $a = a_0$ ansetzt und dann $d\,t$ und $d\,a$ eliminiert. Den Identitäten (1) zufolge erhält man also die Bedingung dafür, daß die Punkte 2 und 4 konjugiert sind, indem man aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}_t\, d\,t + \mathfrak{x}_b\, d\,b + \mathfrak{x}_c\, d\,c|^2 &= 0, \\ \mathfrak{x}_t\, d\,t + \mathfrak{x}_b\, d\,b + \mathfrak{x}_c\, d\,c|^4 &= 0, \\ \mathfrak{y}_t\, d\,t + \mathfrak{y}_b\, d\,b + \mathfrak{y}_c\, d\,c|^2 &= 0, \\ \mathfrak{y}_t\, d\,t + \mathfrak{y}_b\, d\,b + \mathfrak{y}_c\, d\,c|^4 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

die Differentiale $d\,t_2$, $d\,t_4$, $d\,b$, $d\,c$ eliminiert. Man findet so die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_t(t_2, b, c) & 0 & \mathfrak{x}_b(t_2, b, c) & \mathfrak{x}_c(t_2, b, c) \\ \mathfrak{y}_t(t_2, b, c) & 0 & \mathfrak{y}_b(t_2, b, c) & \mathfrak{y}_c(t_2, b, c) \\ 0 & \mathfrak{x}_t(t_4, b, c) & \mathfrak{y}_b(t_4, b, c) & \mathfrak{y}_c(t_4, b, c) \\ 0 & \mathfrak{y}_t(t_4, b, c) & \mathfrak{y}_b(t_4, b, c) & \mathfrak{y}_c(t_4, b, c) \end{vmatrix} = 0,$$

und t_4 muß die von t_2 aus nach oben zuerst kommende Wurzel sein.

Setzt man

$$\frac{\partial(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial(t, b)} = \theta_1(t, b, c), \quad \frac{\partial(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial(t, c)} = \theta_2(t, b, c),$$

so kann die erhaltene Gleichung auch geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} \theta_1(t_2, b, c) & \theta_1(t_4, b, c) \\ \theta_2(t_2, b, c) & \theta_2(t_4, b, c) \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

I. Bei der Aufgabe der kürzesten Linie

$$\delta \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\,t = 0$$

sind die durch den Punkt $x = y = 0$ gehenden Geraden etwa durch die Gleichungen

$$x = \xi = t, \quad y = \eta = a\,t$$

dargestellt; $a = 0$ gebe die zu untersuchende Extremale, die x-Achse. Man findet

$$\varDelta(t, a) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)} = t,$$

also von Null verschieden, sobald $t > 0$. Es gibt also keine konjugierten Punkte, und jedes Stück der positiven x-Achse gibt ein starkes Minimum der Länge, da

$$\mathfrak{E} = \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}\left\{1 - \frac{x' x_\tau + y' y_\tau}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}}\right\}$$

nach § 13, II positiv ist und nur ordentlich verschwindet. Die Legendresche Bedingung des Minimums ist erfüllt:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} > 0.$$

Die gerade Strecke ist also die kürzeste und gibt ein starkes Minimum der Länge gegenüber allen Kurven $\mathfrak{L}$ mit denselben Endpunkten, die einer weiteren Nachbarschaft der Strecke angehören.

II. Die Aufgabe

$$\delta \int y^n \, ds = 0$$

umfaßt für $n = 1$ die Aufgabe der kleinsten Drehfläche, für $n = \frac{1}{2}$ das Eulersche Prinzip der kleinsten Wirkung für den freien Fall, für $n = -\frac{1}{2}$ die Aufgabe der Brachistochrone. Die konjugierten Punkte können hier immer durch eine geometrische Konstruktion gefunden werden.

Da

$$F = y^n \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

gibt die eine Eulersche Gleichung $F_{x'} = \text{const.}$, also etwa, wenn c ein Festwert ist,

$$y^n \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = c^n, \quad y^{2n} = c^{2n} + c^{2n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

setzt man $y = c\bar{y}$, $x = c\bar{x}$, so folgt

$$\bar{y}^{2n} = 1 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)^2. \tag{6}$$

Ist $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist $\varphi(\bar{x} + \bar{c})$ eine mit einem Festwert behaftete, und $\bar{c} = -b/c$ gesetzt, ist

$$y = c\varphi\left(\frac{x - b}{c}\right) \tag{7}$$

eine mit zwei Festwerten behaftete Gleichung von Extremalen. Im Falle $n = 1$ findet man nach (6)

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \bar{y};$$

eine Lösung der Gleichung (6) ist also $\mathfrak{Cof}(\bar{x}+\bar{c})$; für die Extremalen findet man damit

$$y = c\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x-b}{c};$$

sie sind Kettenlinien mit der x-Achse als Basis.

Für die durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden Extremalen (7) findet man

$$y_0 = c\,\varphi\left(\frac{x_0-b}{c}\right),$$

also, wenn wir $x-b=c\,u$, $x_0-b=c\,u_0$ setzen,

$$d\,c\left(\varphi(u_0)-u_0\,\varphi'(u_0)\right)+d\,b\,.\,\varphi'(u_0)=0. \tag{8}$$

Jetzt ergibt sich mit dem für den konjugierten Punkt nach (4) geltenden Ansatz

$$d\,y=0,\quad d\,x=0$$

eine Gleichung derselben Form wie (8),

$$d\,c\left(\varphi(u)-u\,\varphi'(u)\right)+d\,b\,\varphi'(u)=0;$$

also als Bedingungsgleichung der konjugierten Punkte

$$\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}-u=\frac{\varphi(u_0)}{\varphi'(u_0)}-u_0; \tag{9}$$

die Punkte selbst sind

$$x_0=b+c\,u_0,\ y_0=c\,\varphi(u_0);\quad x=b+c\,u,\ y=c\,\varphi(u).$$

Nun ist die Gleichung der Tangente der Extremale (7) mit X und Y als laufenden Koordinaten im Punkte mit dem Parameterwert u

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y \\ c & c\,\varphi'(u)\end{vmatrix}=0;$$

ihr Schnittpunkt mit der Abszissenachse $Y=0$ hat also die Abszisse

$$X=-c\,u-b+\frac{c\,\varphi(u)}{\varphi'(u)},$$

und, wenn wir u durch u_0 ersetzen, erhalten wir die Abszisse

$$X_0=-c\,u_0-b+\frac{c\,\varphi(u_0)}{\varphi'(u_0)}.$$

Ist die Gleichung (9), die die Paare konjugierter Punkte kennzeichnet, erfüllt, so ist $X=X_0$; die Tangenten konjugierter Punkte schneiden sich auf der x-Achse. Das ist die Lindelöfsche Konstruktion konjugierter Punkte.

Im Falle $n = \frac{1}{2}$, also beim Prinzip der kleinsten Wirkung im Falle der Schwere, deren Richtung die y-Achse gibt, findet man nach (6)

$$\tfrac{1}{2}\, d\bar{x} = \frac{d\bar{y}}{2\sqrt{\bar{y}-1}};$$

als Lösung kann

$$\frac{\bar{x}}{2} = \sqrt{\bar{y}-1}, \quad \varphi(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1$$

genommen werden; die Extremalen sind

$$y = c\left[\left(\frac{x-b}{2c}\right)^2 + 1\right],$$

also Parabeln, deren Leitlinie die x-Achse ist, deren Achsen der y-Achse parallel laufen. Die mechanische Grundlage ist die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form

$$\frac{m v^2}{2} = g y,$$

und das Prinzip lautet:

$$\delta \int v\, ds = 0.$$

Die x-Achse ist die Gerade, auf der bei der festgesetzten Konstanten der lebendigen Kraft $v = 0$ wird. Zwei auf ihr sich schneidende Tangenten der Wurfparabel berühren diese in konjugierten Punkten. Da nun der Brennpunkt der Pol der Leitlinie ist, sieht man, daß die Verbindungslinie zweier konjugierter Punkte durch den Brennpunkt der Parabel geht und die Tangenten in konjugierten Punkten sich rechtwinklig schneiden.

Die Größe $\mathfrak{E}$ kann nach I bei diesen Aufgaben im Gebiet $x > 0$ nur ordentlich verschwinden; ein zwischen zwei konjugierten Punkten liegender Bogen der Extremale liefert ein starkes Extrem.

III. Die Aufgabe, die Kugel als Drehfläche von größtem Rauminhalt bei gegebener Oberfläche nachzuweisen, führt nach § 9, VI auf die Extremalen der Aufgabe

$$\delta \int y\sqrt{1-p^2y^2}\, dx = 0,$$

die durch den Punkt $0\,(x = y = 0)$ gehen; sie werden durch die Gleichung

$$\text{(10)} \qquad \frac{x^2}{a^2} = 2x - y^2, \quad \left(\frac{x-a^2}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

dargestellt. Ob sie das gesuchte Extrem wirklich liefern, ist hier nicht durch unmittelbare Anwendung der Theorie des § 12 zu entscheiden, da der Integrand an Stellen, wo $1 - p^2 y^2 = 0$ ist, singulär wird. Man kann aber den Grundgedanken der Theorie anwenden, nachdem man die in Betracht kommenden Ausdrücke durch Rückgang auf die ursprünglichen Veränderlichen y, u regularisiert hat.

In der uy-Ebene ziehen wir eine Kurve $\mathfrak{L}$ vom Punkte $y = u = 0$ oder 0 aus durch das Gebiet $y > 0$, bis sie zum ersten Mal wieder die Achse $u = 0$ erreicht; sei dabei

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} y \sqrt{\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau = \omega.$$

Ihr entspricht in der xy-Ebene eine Kurve $\mathfrak{L}_1$ vermöge der Gleichungen

$$x = \int_{\tau_0}^{\tau} y \sqrt{\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau, \quad y = y$$

mit positiver Quadratwurzel; es ist also

$$x \geqq \int_{\tau_0}^{\tau} y \left|\frac{dy}{d\tau}\right| d\tau \geqq \int_{\tau_0}^{\tau} y \frac{dy}{d\tau}\, d\tau \geqq \frac{y^2}{2}. \tag{11}$$

Die Kurve $\mathfrak{L}_1$ liegt also im ersten Quadranten ($x > 0$, $y > 0$) und auf der hohlen Seite, im Innern der Parabel $2x = y^2$. Dieses Innere wird von den Ellipsen (10) genau einfach bedeckt, da sich aus der Gleichung (10), wenn $y^2 < 2x$, ein einziger positiver Wert von a^2 ergibt; sei $a > 0$.

Geht die Kurve $\mathfrak{L}$ von 0 aus eine Strecke weit geradlinig parallel zur y-Achse, so daß hier $du/d\tau = 0$ ist, so gilt in der Beziehung (11) eine Strecke weit das Gleichheitszeichen; die Kurve $\mathfrak{L}_1$ geht in der xy-Ebene eine Strecke weit längs der Parabel $2x = y^2$. Ist aber $du/d\tau$ eine Strecke weit positiv gewesen, so gilt in (11) nur das Ungleichheitszeichen; $\mathfrak{L}_1$ verläuft dann ständig im Innern der Parabel, so daß durch den auf ihr laufenden Punkt 3 jeweils eine bestimmte Ellipse (10) geht. Setzen wir dann

$$J = \int y \sqrt{1 - y^2 p^2}\, dx, \quad F = y \sqrt{x'^2 - y^2 y'^2}$$

und bedenken, daß längs der Extremale (10) offenbar

$$\sqrt{1-y^2p^2} = \pm y/a$$

ist, die Wurzel also, wenn $y > 0$, das Vorzeichen nicht wechselt, und, da sie nach § 7, VI nicht überall negativ sein kann, immer positiv ist, so folgt

$$\bar{J}_{03} = \int\limits_0^x \frac{y^2}{a} dx = \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{3a^2},$$

und man bestätigt nach (10) leicht, indem man den Punkt 3 unabhängig läßt,

$$F_{x'} = a, \quad F_{y'} = -ay^2 p, \quad d\bar{J}_{03} = F_{x'}dx + F_{y'}dy.$$

Anderseits ist, längs der Kurve $\mathfrak{L}_1$ integriert,

$$J_{03} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} y\sqrt{1-y^2\bar{p}^2}\,\frac{dx}{d\tau}\,d\tau, \quad \bar{p}\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau},$$

also, indem man $F_{x'}$ und $F_{y'}$ ausrechnet,

$$\frac{d(J_{03}-\bar{J}_{03})}{d\tau} = \mathfrak{E} = -y\left\{\frac{1-y^2p\bar{p}}{\sqrt{1-y^2p^2}} - \sqrt{1-y^2\bar{p}^2}\right\}\frac{dx}{d\tau}.$$

Die Quadratwurzel im Nenner ist, wie gesagt, positiv. Weiter liegt für jede in Betracht kommende Richtung die Größe

$$yp = y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\sqrt{dy^2+du^2}}$$

zwischen den Grenzen ± 1; dasselbe gilt von

$$y\bar{p} = \frac{dy}{d\tau} : \sqrt{\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2},$$

also ist

$$1 - y^2p\bar{p} \geqq 0.$$

Da ferner $dx/d\tau > 0$, abgesehen vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve $\mathfrak{L}_1$, so ist $\mathfrak{E}$ negativ, wenn $\sqrt{1-y^2\bar{p}^2}$ negativ zu nehmen ist; man hat ja

$$\sqrt{1-y^2\bar{p}^2}\,\frac{dx}{d\tau} = y^2\frac{du}{d\tau}$$

zu setzen, so daß das Vorzeichen nicht willkürlich, sondern durch die Kurve $\mathfrak{L}$ bestimmt ist. Ist aber

$$\sqrt{1-y^2\bar{p}^2} \geqq 0,$$

so folgt aus der allgemeinen mit positiven Wurzeln gebildeten Ungleichung

$$1-\alpha\beta \geqq \sqrt{1-\alpha^2}\,\sqrt{1-\beta^2},$$

in der $|\alpha| \leqq 1$, $|\beta| \leqq 1$ ist, daß $\mathfrak{E}$ nie positiv ist und nur verschwindet, wenn $p=\bar{p}$ ist. Da nun, abgesehen von den Endpunkten $dx/d\tau$ stets positiv ist und längs der Extremale in der Richtung vom Punkte 0 her wächst, so fallen die Richtungen (x', y') und $(dx\, d\tau,\ dy/d\tau)$, wenn $p=\bar{p}$ ist, zusammen; die Größe $\mathfrak{E}$ verschwindet auf der Kurve $\mathfrak{L}_1$ nur in ordentlicher Weise.

Das kann wieder nicht überall längs der ganzen Kurve $\mathfrak{L}_1$ geschehen; die Gleichung

$$y=\sqrt{2x-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

gäbe ja

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{-2x}{a^3 y}\frac{da}{d\tau}+p\frac{dx}{d\tau},\quad \frac{dy}{d\tau}=p\frac{dx}{d\tau},$$

also, da x positiv bleibt, sobald $\mathfrak{L}_1$ die Parabel $y^2=2x$ verlassen hat, $da/d\tau=0$. Das bedeutet wie in der allgemeinen Theorie das völlige Zusammenfallen der Kurve $\mathfrak{L}_1$ mit einer Extremale; in jedem anderen Falle verschwindet $\mathfrak{E}$ nicht überall und ist im übrigen nur negativ; also folgt, wenn man längs der ganzen Kurve $\mathfrak{L}_1$ integriert, d. h. bis zum Endpunkte $x=\omega$, $y=0$, den wir 4 nennen,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_4}\mathfrak{E}\,d\tau<0,\quad J_{04}-\bar{J}_{04}<0.$$

Das längs der Extremale genommene Integral $\bar{J}_{04}$ ist damit als Maximum erwiesen; die Kugel hat größeren Rauminhalt als eine Drehfläche von gleichem Flächeninhalt, die der Drehachse nicht mehr als zweimal begegnet.

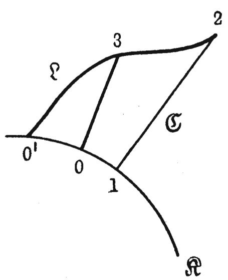
Die Meridiane der zum Vergleich herangezogenen Flächen brauchen nur die in § 12, II. von $\mathfrak{L}$ geforderten Stetigkeitseigenschaften zu besitzen.

§ 15.

Extreme bei Veränderlichkeit eines Endpunktes.

Sei wie in § 9 die Aufgabe gestellt, auf einer gegebenen regulären Kurve $\mathfrak{K}$ den Punkt 1 so zu bestimmen, daß die von ihm nach dem gegebenen Punkte 2 gezogene Kurve $\mathfrak{C}$ das Integral J_{12} zum Extrem macht (Fig. 4). Gewisse notwendige Bedingungen, die die Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllen muß, kennen wir: $\mathfrak{C}$ muß eine Extremale sein, die im Punkte 1 die Kurve $\mathfrak{K}$ transversal schneidet. Wir entwickeln jetzt hinreichende Bedingungen dafür, daß das gesuchte Extrem wirklich vorliegt, daß also, wenn 0 ein allgemeiner Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$ ist und längs einer Kurve $\mathfrak{L}$ oder 02 integriert wird, die Differenz $J_{02} - \bar{J}_{12}$ ein festes Vorzeichen aufweist und nicht verschwindet.

Fig. 4.



Zu diesem Zweck konstruieren wir eine Schar von Extremalen, die von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal ausstrahlen, und nennen sie wieder ein Feld. Ist längs der Kurve $\mathfrak{K}$ etwa

$$x_0 = \mathfrak{f}(\theta), \quad y_0 = \mathfrak{g}(\theta),$$

so genügt es, die Gleichung

$$(1) \qquad F_{x'}(x_0, y_0, x', y') \frac{d x_0}{d\theta} + F_{y'}(x_0, y_0, x', y') \frac{d y_0}{d\theta} = 0$$

mit der Unbekannten $y'/x' = p$ anzusetzen; ist im Punkt 1 auf der Kurve $\mathfrak{C}$ z. B. $x' \neq 0$, so kann man

$$F = f(x, y, p)x', \quad F_{x'} = f - p f_p, \quad F_{y'} = f_p$$

ansetzen und findet als Ableitung der linken Seite der Gleichung (1) nach p

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(F_{x'} \frac{d x_0}{d\theta} + F_{y'} \frac{d y_0}{d\theta}\right) = \left(-p \frac{d x_0}{d\theta} + \frac{d y_0}{d\theta}\right) f_{pp}.$$

Jetzt nehmen wir an, daß die Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ im Punkte 1 nicht in Berührung stehen; dann ist die Klammer in der letzten Gleichung rechts von Null verschieden, also auch die ganze rechte Seite, sobald $f_{pp} \neq 0$, oder auch sobald die Größe F_1 längs der Kurve $\mathfrak{C}$ nicht verschwindet, was wir annehmen wollen. Man kann dann die Gleichung (1) in der Umgebung des auf $\mathfrak{C}$ bezüglichen Wertsystems (x_0, y_0, x_0', y_0') und, wenn $|\theta - \theta_1|$ klein genug ist, nach p auflösen, und in jedem Punkte 0 eine Extremale konstruieren, für die $y_0' : x_0' = p$ ist. Längs dieser sei

$$x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a);$$

man könnte $a = \theta_0 = \theta$ setzen, und es sei $a_0 = \theta_1$, so daß auf dem Bogen $\mathfrak{C}$ die Gleichungen

$$x = \xi(t, a_0), \quad y = \eta(t, a_0)$$

gelten.

Nun sei, und das ist wieder die Jacobische Bedingung,

$$\varDelta(t, a_0) = \xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t \big|^{a = a_0}$$

von Null verschieden längs des Bogens 12, wie dies im Punkte 1 sicher ist, da die Kurven 𝔈 und 𝔎 sich nicht berühren sollen. Dann ist auch

$$\varDelta(t, a) \neq 0$$

längs der Kurven des Feldes, sobald dieses hinreichend eingeschränkt wird, und für eine t-Strecke, die die auf 𝔈 bezügliche Strecke $t_1 t_2$ nach oben und unten um ein gewisses Stück überragt. Damit sind die Bedingungen erfüllt, aus denen nach den Einbettungssätzen des § 11 geschlossen werden kann, daß eine gewisse weitere Umgebung des Bogens 12 von den Feldkurven genau einfach bedeckt wird; sie werde wie früher durch $[\gamma]$ bezeichnet. Ihr gehört eine gewisse Umgebung des Punktes 1 auf der Kurve 𝔎 an, und wir ziehen die Kurve 𝔏 immer nur innerhalb des Gebiets $[\gamma]$, so daß sie in einem Punkte $0'$ der bezeichneten Umgebung von 𝔎 ausgeht.

Jetzt ist leicht zu übersehen, daß die Theorie des § 12 sich mit leichter Abänderung wiederholen läßt. Sei $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ längs des Bogens $0'2$ der Kurve 𝔏. Durch jeden ihrer Punkte, den Punkt 3 z. B., geht, da wir uns im Gebiet $[\gamma]$ befinden, eine einzige Feldextremale, die im Punkte 0 von 𝔎 ausstrahle. Setzen wir dann

$$J_{0'3} = \int_{\tau_0}^{\tau_3} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau,$$

und ist das längs der Feldextremale erstreckte Integral

$$\bar{J}_{03} = \int_{t_0}^{t_3} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\, dt;$$

setzen wir ferner

$$\delta = d\tau \, \frac{d}{d\tau}\Big|^{\tau = \tau_3},$$

so ist offenbar

$$\delta J_{0'3} = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau \Big|^{3}, \tag{2}$$

$$\delta \bar{J}_{03} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^3.$$

An den Stellen 0 gilt aber die Transversalitätsbeziehung

$$F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y = 0;$$

also folgt

$$\delta \overline{J}_{03} = F_{x'}\,\delta x + F_{y'}\,\delta y|^3.$$

Dies gibt, mit der Gleichung (2) verbunden,

$$\delta(J_{0'3} - \overline{J}_{03}) = d\tau\Big[F\Big(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\Big) - \frac{dx}{d\tau} F_{x'}(x, y, x'\, y')$$
$$- \frac{dy}{d\tau} F_{y'}(x, y, x', y')\Big],$$

oder in der früheren Bezeichnung

$$\frac{d(J_{0'3} - \overline{J}_{03})}{d\tau} = \mathcal{E}\Big(x, y, x', y', \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\Big)\Big|^3.$$

Läßt man nun τ_3 von τ_0 bis τ_2 laufen, so ist der Anfangswert der Größe $J_{0'3} - \overline{J}_{03}$, da beide Summanden verschwinden, Null; der Endwert ist offenbar $J_{0'2} - \overline{J}_{12}$, d. h. die Größe, deren Verhalten das Extrem erweist, wenn es vorliegt. Man findet also

$$J_{0'2} - \overline{J}_{12} = \int\limits_{0'}^{2} \mathcal{E}\Big(x, y, x', y', \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\Big)\, d\tau.$$

Das Extrem gegenüber der zugelassenen Kurven $\mathfrak{L}$, die noch irgendwie beschränkt werden können und vielleicht müssen, ist gesichert, wenn diese Größe ein festes Vorzeichen hat und nie verschwindet, es sei denn, daß $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{C}$ zusammenfallen. Hier greift nun in vollem Umfang die Erörterung des § 12 statt: zunächst kann $\mathcal{E}$ nicht längs der Kurve $\mathfrak{L}$ überall ordentlich verschwinden; das gäbe ja, da

$$\frac{dx}{d\tau} = \xi_t \frac{dt}{d\tau} + \xi_a \frac{da}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \eta_t \frac{dt}{d\tau} + \eta_a \frac{da}{d\tau}$$

gesetzt werden kann,

$$\begin{vmatrix} x', & y' \\ \dfrac{dx}{d\tau}, & \dfrac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \xi_t, & \eta_t \\ \xi_a \dfrac{da}{d\tau}, & \eta_a \dfrac{da}{d\tau} \end{vmatrix} = \frac{da}{d\tau}\, \Delta(t, a) = 0,$$

also

$$\frac{da}{d\tau} = 0,$$

Da nun der Endwert von a an der Stelle $\tau = \tau_2$ offenbar a_0 ist, so müßte ständig $a = a_0$ sein und $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{C}$ zusammenfallen. Es genügt also, um das Extrem zu sichern, die Kurven $\mathfrak{L}$ so zu beschränken, daß die Größe $\mathfrak{E}$ auf ihnen nur ordentlich verschwindet und das Zeichen nicht wechselt; dann hat das Integral

$$\int \mathfrak{E}\, d\tau$$

ein festes Vorzeichen bei den zugrunde gelegten Kurven $\mathfrak{L}$ und das Extrem ist gesichert. Hinreichend für das Extrem, wenn der Anfangspunkt auf einer Kurve $\mathfrak{K}$ verfügbar, der Endpunkt gegeben ist, sind also wieder zwei Bedingungen.

A. Jacobische Bedingung. Der untersuchte Extremalenbogen ist einzubetten in eine Schar von solchen, die alle von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal ausstrahlen, und, wenn sie durch die Gleichungen

$$x = \xi(t, a), \; y = \eta(t, a)$$

dargestellt werden, wobei $a = a_0$ die untersuchte Extremale sei, längs dieser die Ungleichung

$$\varDelta(t, a_0) = \xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t |^{a_0} \neq 0$$

ergeben.

B. Weierstraßsche Bedingung. Die zum Vergleich herangezogenen Kurven müssen bewirken, daß an ihnen die Größe $\mathfrak{E}$ nur in ordentlicher Weise verschwindet und das Vorzeichen nicht wechselt. Hinsichtlich der Beziehungen zwischen der Weierstraßschen und der Legendreschen Bedingung gilt dasselbe wie in § 13; ebenso betreffs der starken und schwachen Extreme.

Kommen wir, auf der Kurve $\mathfrak{C}$ in der Richtung 12 fortgehend, an der Stelle 4 oder $t = t_4$ zum ersten Male zu der Gleichung

$$\varDelta(t_4, a_0) = 0,$$

so heißt 4 der extremale Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$, der auf der Extremalen 12 nach der einen Seite hin liegt, und folgende Formulierung ist möglich.

A′. Jacobische Bedingung. Der zur Kurve $\mathfrak{K}$ transversal liegende Extremalenbogen, der untersucht wird, enthalte den extremalen Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ nicht.

II. Die ganze Betrachtung bleibt ohne wesentliche Abänderung gültig, wenn es sich um das Extrem einer Größe

$$z = z_0 + J_{02}$$

handelt, und die gesuchte Kurve 02 von der Kurve $\mathfrak{K}$ ausgehen und im Punkte 2 endigen soll; z_0 muß irgendwie mit der Lage des Anfangspunktes auf $\mathfrak{K}$ gegeben sein. Nach § 10 hat man im

Punkte 0 als notwendige Bedingung des Extrems die allgemeinere Transversalitätsbedingung

(3) $$-\delta z_0 + F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\,|^0 = 0,$$

und natürlich muß 02 ein Extremalenbogen sein. Jetzt ist nach der allgemeinen Variationsformel

$$\delta z = \delta z_0 + \delta J_{02} = \delta z_0 + (F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y)\Big|_0^2,$$

also nach (3)

(4) $$\delta z = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\,|^2.$$

Indem man in der Gleichung (3) den Punkt 0 veränderlich nimmt, kann man diese Gleichung nach p auflösen; dann erhält man in jedem Punkte der Kurve $\mathfrak{K}$ eine Anfangsrichtung einer Extremale, die in allgemeiner Transversalitätsbeziehung zu der Kurve $\mathfrak{K}$ steht. Die linke Seite der Gleichung (3) nach p differenziert, gibt nämlich

$$\frac{1}{x'}(F_{x'y'}\delta x + F_{y'y'}\delta y) = F_1(x'\delta y - y'\delta x),$$

also etwas von Null Verschiedenes, wenn F_1, wie wir immer annehmen, in den Elementen der untersuchten Extremale von Null verschieden ist, und die Extremale sich mit $\mathfrak{K}$ im Punkte 0 nicht berührt; in letzterem Falle, der in § 10 erwähnt ist und zunächst ausgeschlossen bleibe, ist die Richtung der ausstrahlenden Extremale unmittelbar gegeben. Die so konstruierten Extremalen bilden dann wieder ein Feld; bei der dreistufigen Auffassung der Aufgabe, die wir in § 10 entwickelt haben, strahlen sie von einer Raumkurve transversal aus im allgemeineren Sinne des Wortes.

Die besondere Lage des Punktes 0, die zu der untersuchten Extremale gehört, sei 1; dann ist der Bogen 12 wieder in ein Feld eingebettet, dessen Kurven durch Gleichungen wie

$$x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a)$$

dargestellt werden. Erfüllen diese die Jacobische Bedingung

$$\xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t \neq 0$$

längs des Bogens 12, so wird eine Umgebung des Bogens 12 einfach von den Feldkurven bedeckt. Die Vergleichskurve $\mathfrak{L}$ gehe von einer Stelle 0′ aus und ende in 2; wird sie vom Punkte 3 durchlaufen, dessen Lage vom Parameter τ abhängt, so findet man, J längs $\mathfrak{L}$ integriert,

$$\frac{d}{d\tau}(z_{0'} + J_{0'3}) = F(x, y, x_\tau, y_\tau)$$

und, indem $\delta = d\tau . d/d\tau$ gesetzt wird, nach (4), indem man J auf die Feldextremale 03 bezieht,

$$\frac{d}{d\tau}(z_0 + \overline{J}_{03}) = F_{x'}\frac{dx}{d\tau} + F_{y'}\frac{dy}{d\tau},$$

also

$$\frac{d}{d\tau}(z_{0'} + J_{0'3} - z_0 - \overline{J}_{03}) = \mathfrak{E}\left(x, y, x', y', \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right).$$

Von jetzt ab bleibt alles wie früher: mit der Jacobischen Bedingung zusammen reicht die Weierstraßsche hin, um das Extrem der Größe z zu sichern; letztere sagt wie früher, daß auf den zum Vergleich herangezogenen Kurven $\mathfrak{L}$ die Größe $\mathfrak{E}$ nicht außerordentlich verschwinden darf.

III. Bedeutet die allgemeinere Transversalität die Berührung zwischen der Kurve $\mathfrak{K}$ und der ausstrahlenden Extremale, so wird im Berührungspunkte

$$\xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t = 0$$

werden; es wird keine Umgebung $[\gamma]$ des Bogens 12 von den Feldkurven eindeutig bedeckt, sondern nur eine solche des Bogens $1'2$, wenn $1'$ auf 12 beliebig nahe bei 1 liegt. Solange die Kurve $\mathfrak{L}$ in dieser Umgebung verläuft, bleibt die bisherige Betrachtung gültig, insbesondere die Konstruktion des zu jedem Punkte 3 gehörigen Extremalenbogens 03. Läßt sich nun eine Umgebung des Punktes 1 angeben, in welcher die Kurve $\mathfrak{K}$ ein Gebiet abgrenzt, das von den Feldextremalen genau doppelt bedeckt wird, so wird beim Fortgang des Punktes 3 auf der Kurve $\mathfrak{L}$ nach der Lage 1 hin die Kurve 03 nicht aufhören, eindeutig bestimmt zu sein, und die bisherigen Schlüsse bleiben wieder ungeändert.

Die doppelte Bedeckung einer Seite eines regulären, hinreichend kleinen Stückes der Kurve $\mathfrak{K}$ durch eine Schar diese berührender ebenfalls regulärer Kurven ist eine allgemeine infinitesimalgeometrische Tatsache, die sich leicht erweisen läßt.

Sei y in der Umgebung der Stelle 1 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ eine reguläre Funktion von x, etwa $y = f(x)$, und werde die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte (x, y) berührt von der Kurve $Y = \Phi(X, x)$; setzt man

$$\frac{\partial \Phi(X, x)}{\partial X} = \Phi_1(X, x), \qquad \frac{\partial \Phi(X, x)}{\partial x} = \Phi_2(X, x),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \Phi_{11} \text{ usf.},$$

so ist allgemein

(5) $$y = \Phi(x, x), \quad y' = f'(x) = \Phi_1(x, x).$$

Wir untersuchen nun den Schnitt der Kurve $Y = \Phi(X, x_1)$ mit der benachbarten Kurve $Y = \Phi(X, x)$ und finden für X, Y als Koordinaten des Schnittpunktes, die von x abhängen,

(6) $$-Y + \Phi(X, x_1) = 0, \quad -Y + \Phi(X, x) = 0.$$

Ein solcher Schnittpunkt ist, wenn $|x - x_1| < \varepsilon$ und ε klein genug ist, vorhanden. Differenziert man nämlich die erste Gleichung (5) und berücksichtigt die zweite, so folgt

(7) $$y' = \Phi_1(x, x) + \Phi_2(x, x), \quad y' = \Phi_1(x, x), \quad \Phi_2(x, x) = 0;$$

die zweite Gleichung (5) gibt ferner

$$y'' = \Phi_{11}(x, x) + \Phi_{12}(x, x).$$

Wäre nun $\Phi_{12}(x, x) = 0$, so folgte $y'' = \Phi_{11}(x, x)$; die Kurven $y = f(x)$ und $Y = \Phi(X, x)$ hätten eine Berührung zweiter Ordnung. Schließen wir dies aus, so folgt für die Umgebung der Stelle 1

$$\Phi_{12}(x, x) \neq 0.$$

Sei etwa $\Phi_{12}(x_1, x_1) > 0$; dann ist in einer Umgebung der Stelle 1, auf die wir uns beschränken, immer $\Phi_{12}(x, x) > 0$.

Jetzt vergleichen wir die Kurve $Y = \Phi(X, x)$ mit der Kurve $\mathfrak{K}$, die wir in der Form

$$\bar{y} = f(X)$$

darstellen; dann ist, indem X festgehalten wird, $Y = \bar{y}$ für $x = X$; im übrigen ist

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \Phi_2(X, x), \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \Phi_{22}(X, x),$$

und da aus der letzten Gleichung (7) folgt

$$\Phi_{21}(x, x) + \Phi_{22}(x, x) = 0,$$

so ist $\Phi_{22}(x, x)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle 1 negativ, etwa im Gebiet $|x - x_1| < \varepsilon$, und wegen der Stetigkeit gilt dies bei hinreichender Beschränkung der Größe ε und wenn auch X jenem Gebiet angehört, auch von $\Phi_{22}(X, x)$. Da nun nach (7)

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=X} = \Phi_2(X, X) = 0$$

ist, so folgt, daß

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \lesseqgtr 0,$$

je nachdem $x \gtrless X$; mithin ist auch die Größe $Y - \bar{y}$, die für $x = X$ verschwindet, negativ sowohl wenn $x > X$ ist, als auch wenn $x < X$ ist; sie hat, wenn x das Gebiet $|x - x_1| < \varepsilon$ durchläuft, das Maximum Null an der Stelle $x = X$. Die Ordinatenlinie, deren Abszisse den Festwert X hat, wird also auf dem Gebiet $y < \bar{y}$ von den Kurven $Y = \Phi(X, x)$, die den Werten $x > X$ und $x < X$ entsprechen, je eine Strecke weit einfach, also im ganzen doppelt bedeckt. Da nun der Wert von $\partial^2 Y / \partial x^2$, wenn $|x - x_1| < \varepsilon$ und $|X - x_1| < \varepsilon$ ist, unter einer negativen festen Schranke liegt, so kann die Ausdehnung der doppelt bedeckten Strecke auf den betrachteten Ordinatenlinien überall gleich genommen werden; an die Kurve $\mathfrak{K}$ grenzt also nach der Seite abnehmender y hin ein Gebiet, das von den Kurven $Y = \Phi(X, x)$ doppelt bedeckt ist und, solange $|x - x_1|$ sei, auch nicht mehrfach. Im Falle $\Phi_{12}(x_1, x_1) < 0$ liegt das Gebiet nach der Seite wachsender y hin.

§ 16.

Beispiele zum veränderlichen Anfangspunkt.

Zur Bestimmung des extremalen Brennpunktes in Einzelfällen dient die Bemerkung, daß die Gleichung $\Delta(t, a) = 0$ durch Elimination der Differentiale aus den Gleichungen

$$(1) \qquad dx = \xi_t\,dt + \xi_a\,da = 0, \quad dy = \eta_t\,dt + \eta_a\,da = 0$$

entsteht. Sind die Extremalen des Feldes durch Gleichungen

$$x = \mathfrak{x}(t, c_1, c_2, \ldots c_k), \quad y = \mathfrak{y}(t, c_1, c_2, \ldots c_k)$$

definiert, wobei zwischen den Festwerten c etwa $k - 1$ Gleichungen

$$(2) \qquad f_{\mathfrak{a}}(c_1, c_2, \ldots c_k) = 0, \quad \sum_{\mathfrak{b}}^{1,k} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}}{\partial c_{\mathfrak{b}}}\,dc_{\mathfrak{b}} = 0, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots k - 1,$$

bestehen, so sind die Gleichungen (1) gleichwertig mit den Differentialgleichungen (2), vermehrt um die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_t\,dt + \sum_{\mathfrak{b}}^{1,k} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial c_{\mathfrak{b}}}\,dc_{\mathfrak{b}} = 0, \quad \mathfrak{y}_t\,dt + \sum_{\mathfrak{b}}^{1,k} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial c_{\mathfrak{b}}}\,dc_{\mathfrak{b}} = 0,$$

aus denen dann die $k + 1$ Differentiale dt, $dc_{\mathfrak{b}}$ eliminiert werden; die erhaltene Gleichung ergibt für t, also den Wert, der dem Brennpunkte zugehört, dieselbe Bestimmung wie die Gleichung $\Delta(t, a) = 0$.

I. Sei wieder die Aufgabe

$$\delta \int y^n \, ds = 0$$

gegeben; $\mathfrak{K}$ sei die Kurve

$$y_0 = f(x_0);$$

die Extremalen sind durch die Gleichungen

$$y = c\,\varphi(t), \quad x = b + ct \tag{3}$$

darzustellen; man muß ferner die Gleichungen

$$f(x_0) = c\,\varphi(t_0), \quad x_0 = b + ct_0 \tag{4}$$

ansetzen, und die Transversalitätsbedingung an der Kurve $\mathfrak{K}$ gibt, da $dy/dx = \varphi'(t)$ ist,

$$1 + f'(x_0)\,\varphi'(t_0) = 0. \tag{5}$$

Die Festwerte $c_\mathfrak{b}$ sind hier x_0, t_0, b, c, zwischen denen die Gleichungen (4), (5) bestehen; die Gleichungen (3) ergeben, indem man $dx = dy = 0$ setzt,

$$c\,\varphi'(t)\,dt + \varphi(t)\,dc = 0, \quad db + c\,dt + t\,dc = 0$$

oder, dt eliminiert,

$$\bigl(\varphi(t) - t\,\varphi'(t)\bigr)\,dc - \varphi'(t)\,db = 0. \tag{6}$$

Die Gleichungen (4) ergeben

$$\begin{aligned} -f'(x_0)\,dx_0 + c\,\varphi'(t_0)\,dt_0 + \varphi(t_0)\,dc &= 0, \\ -dx_0 + db + c\,dt_0 + t_0\,dc &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

also t_0 eliminiert,

$$\bigl(\varphi'(t_0) - f'(x_0)\bigr)\,dx_0 + \bigl(\varphi(t_0) - t_0\,\varphi'(t_0)\bigr)\,dc - \varphi'(t_0)\,db = 0. \tag{8}$$

Endlich folgt nach (5), indem man dt_0 aus einer der Gleichungen (7) entnimmt

$$\begin{aligned} &\left(\frac{f'(x_0)\,\varphi''(t_0)}{c} + f''(x_0)\,\varphi'(t_0)\right) dx_0 \\ &\quad - \frac{f'(x_0)}{c}\,\varphi''(t_0)\,(t_0\,dc - db) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Determinante der Faktoren von dx_0, dc, db in den Gleichungen (6), (8), (9) gibt, gleich Null gesetzt, eine Gleichung der Form

$$A\bigl(\varphi(t) - t\,\varphi'(t)\bigr) + B\,\varphi'(t) = 0,$$

wobei die Größen A und B linear in der Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ sind, d. h. in der Größe

$$\frac{f''(x_0)}{[1 + f'(x_0)^2]^{3/2}}$$

sind mit Koeffizienten, die nur von t_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, also von der Richtung der Tangente der Kurve $\mathfrak{K}$ abhängen. Für t_0 und x_0 sind die Werte zu nehmen, die diese Größen auf der untersuchten Kurve $\mathfrak{C}$ oder im Punkte 1 haben. Hält man die Tangente der Kurve $\mathfrak{K}$ in diesem Punkte fest und verfügt über ihre Krümmung, so kann die Größe A/B einen gegebenen Wert erhalten. Durch solche Verfügung kann man also erreichen, daß auf der Extremale $\mathfrak{C}$ ein gegebener Punkt 2 der extremale Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ wird. Liegt der Punkt 3 auf der Extremale $\mathfrak{C}$ zwischen 1 und 2, so liefert der Bogen 13 das geforderte Extrem, und zwar bei vorliegender Aufgabe ein starkes.

II. Im Falle $n = 0$, d. h. bei der Aufgabe der kürzesten Linie, ist alles explizite durchzuführen. Die Extremalen der Aufgabe

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{1 + p^2}\, dx = 0$$

sind die Geraden $y = ax + b$; auf der Kurve $y_0 = f(x_0)$ senkrecht stehen sie, wenn

$$1 + a f'(x_0) = 0, \quad y - f(x_0) = a(x - x_0).$$

Differenziert man nach a und x_0, indem man $dx = dy = 0$ setzt, so folgt

$$f'(x_0)\, da + a f''(x_0)\, dx_0 = 0$$
$$-f'(x_0)\, dx_0 = (x - x_0)\, da - a\, dx_0.$$

Hieraus folgt für den Brennpunkt

$$x - x_0 = \frac{(f'(x_0) - a) f'(x_0)}{a f''(x_0)} = -\frac{1 + f'(x_0)^2}{f'(x_0) f''(x_0)},$$
$$y - y_0 = a(x - x_0) = \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)},$$

d. h. (x, y) ist der Krümmungsmittelpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$. Die Normale dieser Kurve im Punkte 1, bis zum Punkte 2 verlängert, gibt also im Sinne des starken Extrems die kürzeste Verbindung des Punktes 2 mit der Kurve $\mathfrak{K}$, wenn der Krümmungsmittelpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte 1 der Strecke 12 nicht angehört.

III. Ein Beispiel zu dem Falle der allgemeineren Transversalität, also zu § 15, II., bietet die in § 10 behandelte Aufgabe der zweckmäßigsten Geschoßspitze. Hier kann nach § 10

$$z = \frac{y_0^2}{2} + J_{02}$$

gesetzt werden, und die allgemeinere Transversalität bedeutet, daß die Extremalen unter 45^0 gegen die Stirnfläche, die Kurve $\mathfrak{K}$

geneigt sind. Allgemein können die Extremalen mit c und b als Festwerten in der Form

$$x = b + \frac{1}{2} c \left(\frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \lg t \right),$$
$$y = \frac{c(1+t^2)^2}{2t^3}$$

dargestellt werden, wobei $t = p$ wird. In den Punkten $(0, y_0)$ soll also $p = 1 = t$ werden; das gibt

$$y_0 = 2c, \; b + \frac{7}{8} c = 0,$$

also

$$x = y_0 \left(-\frac{7}{16} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \lg t \right) \right),$$
$$y = \frac{y_0(1+t^2)^2}{2t^3};$$

die rechten Seiten dieser Gleichungen sind $\xi(t, a)$ und $\eta(t, a)$, indem man einfach $a = y_0$ setzt. Dann findet man aber

$$\varDelta(t, a) = y_0 \left(-\frac{3}{t^5} - \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t} \right) \left(-\frac{11t}{16} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{t^2} - t \lg t \right) \right).$$

Nun gehört der Bogen 02 zu derjenigen Hälfte der Extremale, auf der $p < \sqrt{3}$ ist; dem Sinne der Aufgabe gemäß muß der Bogen 02 im Sinne abnehmender t gezogen werden; dann ist auf ihm immer $t \leqq 1$, also $\lg t \leqq 0$. Die Größe $\varDelta(t, a)$ besteht dann aus zwei entschieden negativen Faktoren und verschwindet nicht; die Jacobische Bedingung ist beliebig weit hin erfüllt. Da die Größe $\mathfrak{E}$ außerordentlich verschwinden kann, ist nur ein schwaches Extrem bei der vorliegenden Aufgabe gesichert, dieses aber für einen beliebig weit ausgedehnten Extremalenbogen.

§ 17.

Der zweite Einbettungssatz.

In den Beispielen übersieht man meist ohne Schwierigkeit, daß man irgend einen beliebig ausgedehnten Bogen einer Extremale in ein Feld einbetten kann; doch ist ein allgemeiner Beweis dafür, daß dies immer geschehen kann, erwünscht. Ein solcher kann aus den bekannten Sätzen über die Existenz von Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen abgeleitet werden.

Sei durch die Gleichungen

$$x_\mathfrak{a} = \mathfrak{x}_\mathfrak{a}(t), \quad \mathfrak{a} = 1, \ldots n,$$

auf der t-Strecke $t_0 \ldots t_1$, die wir T nennen, eine einfache Mannigfaltigkeit von Stellen im n-stufigen Raum der Größen $x_{\mathfrak{a}}$ definiert, die die Gleichungen

$$\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{d t} = f_{\mathfrak{a}}(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{1}$$

erfüllt und $\mathfrak{M}$ heiße; die Funktionen $f_{\mathfrak{a}}$ seien in allen Stellen $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}}$ regulär, so daß positive Größen A und ε derart gefunden werden können, daß

$$\left|\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\right| < A, \quad |f_{\mathfrak{a}}(x_1, x_2, \ldots x_n)| < A,$$

sobald die Ungleichungen

$$|x_{\mathfrak{a}} - \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}| < \varepsilon$$

gelten, in denen $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$ irgend eine Stelle der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist. Alsdann gibt es nur von A und ε abhängige positive Größen δ und ζ von der Beschaffenheit, daß, wenn t^0 irgend eine Stelle der Strecke T ist und $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^0$ die zugehörigen Werte $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$, auf der Strecke

$$|t - t^0| < \delta, \tag{2}$$

soweit sie der Strecke T angehört, die Größen $x_{\mathfrak{a}}$ auf eine einzige Weise als reguläre, die Gleichungen (1) erfüllende Funktionen von t bestimmt werden können, die für $t = t^0$ die Werte $x_{\mathfrak{a}}^0$ annehmen, die den Ungleichungen

$$|x_{\mathfrak{a}}^0 - \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^0| < \zeta$$

gemäß beliebig gewählt sind. In diesem Gebiet sind die Größen $x_{\mathfrak{a}}$ auch stetige Funktionen der Anfangswerte $x_{\mathfrak{a}}^0$.

Nun kann man offenbar die Strecke T mit endlich vielen Strecken (2) bedecken, die teilweise aufeinander übergreifen; die entsprechenden Werte von t^0 seien $t_1^0, t_2^0, \ldots t_k^0$, die wir als Mittelwerte der Strecken (2) bezeichnen, die zugehörigen Werte $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^0$ seien $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^{01}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^{02}, \ldots$ Wir können dann diese Strecken weiter so wählen, daß immer

$$|t_{\mathfrak{b}+1}^0 - t_{\mathfrak{b}}^0| < \delta.$$

Jetzt bilden wir irgend ein Lösungssystem $x_{\mathfrak{a}}^{(1)}$ der Gleichungen (1), das auf der Strecke

$$|t - t_1^0| < \delta$$

definiert ist durch die Anfangswerte und die beigefügten Beziehungen

$$x_{\mathfrak{a}}^{(1)}(t_1^0) = x_{\mathfrak{a}}^{01}; \quad |x_{\mathfrak{a}}^{01} - \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^{01}| < \zeta_1, \quad \zeta_1 < \zeta.$$

Wir zeigen, daß dasselbe über die ganze Strecke T hin als reguläres Funktionensystem fortgesetzt werden kann, wenn ζ_1 hinreichend klein gewählt wird.

Dann erfüllt nämlich, wegen der Stetigkeit der Lösungen in den Anfangswerten x_α^{01}, das Wertsystem $x_\alpha^{(1)}(t_2^0)$, das im Falle $x_\alpha^{01} = \mathfrak{x}_\alpha^{01}$ in $\mathfrak{x}_\alpha^{02}$ übergeht, die Beziehung

$$|x_\alpha^{(1)}(t_2^0) - \mathfrak{x}_\alpha^{02}| < \zeta_2, \quad \zeta_2 < \zeta,$$

wobei ζ_2 mit ζ_1 beliebig klein gemacht werden kann. Man kann daher auf der Strecke $|t - t_2^0| < \delta$ ein Lösungssystem $x_\alpha^{(2)}$ durch die für $t = t_2^0$ geltenden Anfangswerte

$$x_\alpha^{02} = x_\alpha^{(1)}(t_2^0) = x_\alpha^{(2)}(t_2^0)$$

definieren. Wo die Strecken $|t - t_1^0| < \delta$ und $|t - t_2^0| < \delta$ übereinandergreifen, sind die Lösungen $x_\alpha^{(1)}$ und $x_\alpha^{(2)}$ identisch wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösungen der Gleichungen (1) durch ihre Anfangswerte.

So fortfahrend, können wir ζ_2 durch passende Wahl von ζ_1 beliebig herabdrücken, also bewirken, daß die Größen

$$|x_\alpha^{(2)}(t_3^0) - \mathfrak{x}_\alpha^{03}| < \zeta_3 < \zeta$$

werden, wobei ζ_3 durch Verkleinerung von ζ_2, also mittelbar durch Verkleinerung von ζ_1 der Null beliebig genähert werden kann. Wir können daher auf der Strecke $|t - t_3^0| < \delta$ ein Lösungssystem $x_\alpha^{(3)}$ durch die Gleichungen

$$x_\alpha^{(3)}(t_3^0) = x_\alpha^{(2)}(t_3^0)$$

definieren, das mit $x_\alpha^{(2)}$ überall dort übereinstimmt, wo die Gebiete $|t - t_2^0| < \delta$ und $|t - t_3^0| < \delta$ aufeinander übergreifen. Hiermit ist für den von den Strecken

$$|t - t_1^0| < \delta, \quad |t - t_2^0| < \delta, \quad |t - t_3^0| < \delta$$

bedeckten Teil des Gebiets T ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem x_α hergestellt. Auf diese Weise kann man fortfahren, indem bei jedem Schritte vielleicht die Größe ζ_1 verkleinert werden muß. Da aber die Anzahl der Schritte endlich, $= k$ ist, so erhält man schließlich einen solchen Wert ζ_1, daß bei der Annahme

$$|x_\alpha^{01} - \mathfrak{x}_\alpha^{01}| < \zeta_1$$

jedes durch die Festsetzung

$$x_\alpha(t_1^0) = x_\alpha^{01}$$

bestimmte Lösungssystem $x_\alpha^{(1)}$ über die ganze Strecke T regulär fortgesetzt werden kann.

Will man das erhaltene Ergebnis auf die Extremalen der bisher betrachteten Variationsaufgabe anwenden, so schreibt man ihre Gleichung etwa in der Weierstraßschen Form

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = 0 \tag{3}$$

und nimmt für t die Bogenlänge; das gibt die Gleichungen

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad x'x'' + y'y'' = 0;$$

letztere ergibt mit der Gleichung (3) für x'' und y'' Ausdrücke mit dem Nenner

$$F_1(x'^2 + y'^2) = F_1,$$

also reguläre Funktionen von x, y, x', y', etwa

$$\frac{dx'}{dt} = \Phi(x, y, x'\, y'), \quad \frac{dy'}{dt} = \Psi(x, y, x'\, y'),$$

und diesen Gleichungen fügt man die weiteren

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y'$$

hinzu, so daß vier Gleichungen von der Form (1) entstehen, die die oben geforderten Eigenschaften besitzen, indem man x, y, x', y' für x_1, x_2, x_3, x_4 nimmt.

Man schließt also aus dem obigen allgemeinen Einbettungsergebnis, daß jeder beliebig ausgedehnte Extremalenbogen, in dessen Elementen $F(x, y, x', y')$ regulär und F_1 von Null verschieden ist, in eine Schar von Extremalenbögen derselben Beschaffenheit eingebettet werden kann. Aus dieser Schar wird ein Feld ausgesondert, wenn man z. B. für $t = t_0$ die Anfangswerte $x = x_0$ und $y = y_0$ festhält; oder wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ durch den Anfangspunkt des betrachteten Extremalenbogens geht und vom Punkte 0 durchlaufen wird, wobei $y_0 = \varphi(x_0)$ sei, setzt man, um $(y'/x')_0$ zu bestimmen, die Gleichung

$$F_{x'} + F_{y'}\varphi'(x_0)\Big|^0 = 0, \quad f - pf_p + f_p\varphi'(x_0)\Big|^0 = 0$$

an, deren linke Seite x' und y' nur in der Verbindung $p = y'/x'$ enthält und nach p differenziert

$$(\varphi'(x_0) - p)f_{pp}$$

ergibt, also eine von Null verschiedene Größe, sobald $\mathfrak{K}$ und die Extremale sich nicht berühren; F_1 und damit f_{pp} ist ja von Null verschieden. Die Anfangswerte von x' und y' wählt man dann der Gleichung $p = y'/x'$ gemäß. Dieselbe Betrachtung gilt bei der Annahme allgemeinerer Transversalität

$$-\delta z_0 + F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|^0 = 0, \quad \delta y_0 - \varphi'(x_0)\delta x_0 = 0,$$

da hier die Auflösung nach p ebenfalls gelingt. Sollen die Feldextremalen, wie am Ende des § 10, die Kurve $\mathfrak{K}$ berühren, so ist der Anfangswert von y'/x' von vornherein gegeben und gleich dem Werte von dy/dx längs der Kurve $\mathfrak{K}$.

Damit ist gezeigt, daß der betrachtete Extremalenbogen in seiner ganzen Ausdehnung einem Felde von jeder der betrachteten Arten eingebettet werden kann; die Aufstellung und Diskussion der Jacobischen Bedingung ist für die ganze Ausdehnung des Bogens möglich.

§ 18.

Die Jacobische lineare Differentialgleichung.

Die konjugierten Punkte erscheinen auch als Nullstellen der Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Seien wiederum

$$x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a)$$

die Gleichungen einer einstufigen Schar von regulären Extremalenbögen, auf denen überall F_1 von Null verschieden sei. Dann kann man an einer Stelle, an der $\xi_t \neq 0$ ist, die Gleichung $x - \xi(t, a) = 0$ nach t auflösen, diese Größe als Funktion von x und a und damit auch $y = \eta(t, a) = \psi(x, a)$ als Funktion von x und a bestimmen. Dabei ist dann

$$\xi_t \frac{\partial t}{\partial a} + \xi_a = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \eta_t \frac{\partial t}{\partial a} + \eta_a = -\frac{\Delta(t, a)}{\xi_t} = \frac{\xi_a \eta_t - \xi_t \eta_a}{\xi_t}.$$

Da nun $y = \psi(x, a)$ eine Extremalenschar darstellt, so erfüllt die Größe ψ, für y gesetzt, die Eulersche Gleichung

$$f_y - \frac{d f_p}{dx} = 0,$$

in der wieder die Bezeichnung $x' f(x, y, p) = F(x, y, x', y')$ gilt, und hieraus folgt, indem man nach a differenziert und $\partial \psi / \partial a = \varphi(x)$ setzt, für $\varphi(x)$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der $\varphi''(x)$ den Faktor $f_{pp} = x'^3 F_1$ hat, der also von Null verschieden ist, während die Faktoren von $\varphi'(x)$ und $\varphi(x)$ reguläre Funktionen von x sind. Man kann die Gleichung also auf die Form

$$\text{(1)} \qquad \varphi'' + L\varphi' + M\varphi = 0$$

bringen, in der L und M reguläre Funktionen von x sind. Diese Gleichung wird auch als Variationsgleichung der **Eulerschen** bezeichnet.

Schreibt man $\partial/\partial a = \delta_0$, so kann man mit dem Zeichen δ_0 wie in § 3 operieren und erhält, indem man die Zeichen δ_0 und d/dx vertauscht,

$$\delta_0 f_y - \frac{d\,\delta_0 f_p}{dx} = \delta_0\left(f_y - \frac{d f_p}{dx}\right) = 0,$$

$$f_{yy}\delta_0 y - f_{yp}\delta_0 p - \frac{d}{dx}(f_{py}\delta_0 y + f_{pp}\delta_0 p) = 0.$$

Setzt man hier $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ für $\delta_0 y$ und $\delta_0 p = d\,\delta_0 y/dx$, so erhält man die Gleichung (1), die in eine lineare Differentialgleichung für $\varDelta(t, a)$ übergeführt werden kann.

Diese Umformung wird übersichtlicher, wenn wir die Größe

$$T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y')$$

variieren; längs der Extremale, von der wir ausgehen, ist $T = 0$. Nun wird nach § 4, V. die abgestumpfte Variation δ_0 allgemein durch die Gleichung

$$\delta_0 u = \delta u - \frac{du}{dx}\delta x$$

definiert; man hat also

$$\delta_0 y = \delta y - \frac{y'}{x'}\delta x = -\frac{w}{x'},$$

(2)

$$\delta_0 p = \frac{d\,\delta_0 y}{dx} = \frac{-x'w' + wx''}{x'^3},$$

und da nach § 2 die Gleichung

$$Q = -x'T = x'\left(f_y - \frac{df_p}{dx}\right), \quad T = -\left(f_y - \frac{df_p}{dx}\right)$$

gilt, so folgt

$$\delta T = \delta_0 T + \frac{dT}{dx}\delta x = \delta_0 T = -\delta_0\left(f_y - \frac{df_p}{dx}\right);$$

längs der Extremale verschwindet ja natürlich dT/dx. Weiter ergibt sich, indem man die Operation δ_0 durchführt und $f_{pp} = F_1 x'^3$ einsetzt,

$$-\delta T = \delta_0 f_y - \frac{d\,\delta_0 f_p}{dx} = f_{yy}\delta_0 y - \frac{df_{py}}{dx}\delta_0 y$$

$$-\frac{1}{x'}\frac{d}{dt}[F_1(-x'w' + wx'')].$$

Beim Differenzieren im letzten Gliede fällt w' weg; somit bleibt nach (2) eine Identität

$$(3)\qquad \delta T = F_2 w - \frac{d(F_1 w')}{dt},$$

in der F_2 von den Variationen frei und allein durch die auf die betrachtete Extremale bezüglichen Größen x, y, x', y', x'', y'' bestimmt ist. Wir werden diese Größe später allgemein bestimmen; auch hier könnte man sie in den Größen $f, f_{yy}, f_{yp}, f_{pp}$ ausdrücken.

Setzt man nun wieder $\delta = da . \partial/\partial a$, und geht von der Extremale $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$ aus, so wird

$$w = da(\eta_t \xi_a - \xi_t \eta_a) = y'\delta x - x'\delta y = -\Delta(t, a)\,da,$$

und gilt natürlich die Gleichung $\delta T = 0$; die Größe $\Delta(t, a)$ erfüllt also die lineare Differentialgleichung

$$F_2 w - \frac{d(F_1 w')}{dt} = 0,$$

deren Form sich noch in folgender Weise abändern läßt.

Sei t die Bogenlänge, θ der Richtungswinkel der nach wachsenden Werten von t gezogenen Tangente, also

$$(4)\qquad \begin{gathered} x' = \xi_t = \cos\theta, \quad y' = \eta_t = \sin\theta, \quad x'' = -\sin\theta . \theta', \\ y'' = \cos\theta . \theta', \quad x'y'' - x''y' = \theta'. \end{gathered}$$

Dann gehen wir nach § 3 von der Eulerschen Gleichung in der Form

$$x'y'' - x''y' = \frac{F_{xy'} - F_{yx'}}{-F_1} = \Psi(x, y, x', y')$$

aus und setzen $\Psi(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = \Phi(x, y, \theta)$; offenbar folgt

$$\theta' = \Phi(x, y, \theta) = \frac{1}{\varrho},$$

wobei ϱ den Krümmungsradius der Extremale mit gewissem Vorzeichen bedeutet, und θ kann als Funktion von t und a betrachtet werden; sei $\Phi(x, y, \theta) = \Omega(t, a)$. In dieser Auffassung finden wir nach (4)

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\xi_{ta} = -\sin\theta . \theta_a, \quad \eta_{ta} = \cos\theta . \theta_a, \\ &\Delta(t, a) = \cos\theta . \eta_a - \sin\theta . \xi_a, \\ &\Delta_t = -(\cos\theta . \xi_a + \sin\theta . \eta_a)\theta' + \cos\theta . \eta_{at} - \sin\theta . \xi_{at}, \end{aligned}$$

also nach (5)

$$\Delta_t = -(\xi_a \cos\theta + \eta_a \sin\theta)\,\Omega(t, a) + \theta_a.$$

Weiter differenzierend erhält man

$$\theta_t = \Omega,$$

$$\Omega_t = \Psi_x x' + \Psi_y y' + \Psi_{x'} x'' + \Psi_{y'} y'' = \Phi_x x' + \Phi_y y' + \Phi_\theta \theta'$$
$$= \Psi_x x' + \Psi_y y' + (\Psi_{y'} x' - \Psi_{x'} y')\,\theta',$$

$$\theta_{at} = \Omega_a = \Phi_x . \xi_a + \Phi_y . \eta_a + \Phi_\theta . \theta_a,$$

$$\Delta_{tt} = -(\xi_a \cos\theta + \eta_a \sin\theta)(\Phi_x \cos\theta + \Phi_y \sin\theta + \Phi_\theta \theta')$$
$$+ (\xi_a \sin\theta - \eta_a \cos\theta)\,\theta'^2 + \Phi_x . \xi_a + \Phi_y . \eta_a + \Phi_\theta . \theta_a$$

oder, wenn man die Ausdrücke von Δ und Δ_t benutzt, um ξ_a, η_a, θ_a wegzuschaffen,

$$\Delta_{tt} = -\Phi^2 \Delta + \Phi_x(\xi_a \sin^2\theta - \eta_a \sin\theta\cos\theta)$$
$$+ \Phi_y(-\xi_a \sin\theta\cos\theta + \eta_a \cos^2\theta)$$
$$+ \Phi_\theta[-(\xi_a \cos\theta + \eta_a \sin\theta)\,\theta' + \theta_a]$$
$$= (-\Phi^2 - \Phi_x \sin\theta + \Phi_y \cos\theta)\,\Delta + \Phi_\theta \Delta_t,$$

womit die Jacobische lineare Differentialgleichung in neuer Form erscheint; t ist, wir wiederholen es, die Bogenlänge auf der Extremale. Ist ν die gegen die Richtung wachsender t auf einer Extremale um 90^0 im positiven Sinne gedrehte Normale und zugleich die in dieser Richtung längs der Normalen gemessene Länge, so kann man

$$\frac{d\Phi}{d\nu} = -\sin\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

setzen; es ist ja

$$\frac{dx}{d\nu} = -\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\nu} = \cos\theta;$$

die Jacobische Gleichung kann also geschrieben werden

$$\Delta_{tt} = \left(-\Phi^2 + \frac{d\Phi}{d\nu}\right)\Delta + \Phi_\theta \Delta_t.$$

Gehen nun die Extremalen $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$ durch einen festen Punkt $t = t_0$, $a = a_0$, und verschwindet $\Delta(t, a)$ zum ersten Male wieder für $t = t_1$, wobei $t_1 > t_0$ sei, so entsprechen den Werten t_0 und t_1 auf der Extremale $a = a_0$ konjugierte Punkte; man findet also den zu $t = t_0$ konjugierten Punkt in der Richtung $dt > 0$, indem man die auf t_0 nach oben hin folgende Nullstelle desjenigen Integrals der Jacobischen Gleichung sucht, das an der Stelle $t = t_0$ verschwindet. Das stimmt zu der leicht ersichtlichen geometrischen Bedeutung der Größe

$$\Delta\, da = \xi_a\, da \cdot \frac{dx}{d\nu} + \eta_a\, da \cdot \frac{dy}{d\nu},$$

die offenbar als Projektion der Strecke $(\xi_a d\,a, \eta_a d\,a)$ auf die Richtung ν angesehen werden kann, oder auch als Normalabstand der beiden zu a und $a + d\,a$ gehörigen Kurven der Extremalenschar.

II. Als Anwendung betrachten wir die dynamische Stabilität bei der Bewegung eines Punktes von der Masse Eins unter Wirkung einer vom Potential U herrrührenden Kraft. Die Gleichung der lebendigen Kraft gibt für die Geschwindigkeit v bei festem h

$$\frac{v^2}{2} = U + h, \quad v = \sqrt{2(U+h)} = \varphi(x,y)$$

und das Euler-Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung lautet

$$\delta \int v\,d\,s = \delta \int \varphi(x,y)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\,t = 0.$$

Offenbar findet man, wenn für $d\,t$ das Bogenelement $d\,s$ gesetzt wird,

$$\Psi(x, y, x', y') = \frac{F_{xy'} - F_{yx'}}{-F_1} = \frac{-y'\varphi_x + x'\varphi_y}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,\nu}$$

$$= \Phi(x, y, \theta) = \frac{-\varphi_x \sin\theta + \varphi_y \cos\theta}{\varphi},$$

$$\Phi_\theta = \frac{-\varphi_x\cos\theta - \varphi_y\sin\theta}{\varphi} = -\frac{1}{\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,s},$$

$$\frac{d\Phi}{d\nu} = \frac{d}{d\,\nu}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,\nu}\right) = \frac{1}{\varphi^2}\left[\varphi\frac{d^2\varphi}{d\,\nu^2} - \left(\frac{d\,\varphi}{d\nu}\right)^2\right],$$

also

$$-\Phi^2 + \frac{d\Phi}{d\nu} = -\frac{2}{\varphi^2}\left(\frac{d\,\varphi}{d\nu}\right)^2 + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{d^2\varphi}{d\,\nu^2}\right).$$

Nun ist $U + h = \frac{1}{2}\varphi^2$, also weiter

$$\frac{d\,U}{d\nu} = \varphi\frac{d\,\varphi}{d\nu}, \quad \frac{d^2\,U}{d\nu^2} = \left(\frac{d\,\varphi}{d\nu}\right)^2 + \varphi\frac{d^2\varphi}{d\,\nu^2},$$

$$\frac{1}{\varphi^2}\frac{d^2 U}{d\,\nu^2} = \left(\frac{1}{\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\nu}\right)^2 + \frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{d\,\nu^2},$$

$$-\Phi^2 + \frac{d\Phi}{d\nu} = -\frac{3}{\varphi^2}\left(\frac{d\,\varphi}{d\nu}\right)^2 + \frac{1}{\varphi^2}\frac{d^2 U}{d\,\nu^2},$$

und da längs der Extremale

$$\frac{1}{\varrho} = \Phi(x, y, \theta) = \frac{1}{\varphi}\frac{d\,\varphi}{d\,\nu} \tag{6}$$

zu setzen ist, findet man schließlich

$$\text{(7)} \qquad \frac{d^2\Delta}{ds^2} + \frac{1}{v}\frac{dv}{ds}\frac{d\Delta}{ds} + \left(\frac{3}{\varrho^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2U}{d\nu^2}\right)\Delta = 0.$$

Sei z. B. $U = r^n$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $n < 0$ und betrachtet man die Extremale $r = \text{const.}$, d. h. die Kreisbahn des bewegten Punktes unter der Wirkung einer Zentralkraft, die zu r^{n-1} proportional ist. Aus der Gleichung

$$\frac{v^2}{2} = r^n + h = \frac{\varphi^2}{2}$$

folgt, daß v auf dieser Bahn fest, also $dv/dt = 0$ ist. Man hat ferner

$$\frac{d}{d\nu} = \pm \frac{d}{dr}, \quad \frac{d^2U}{d\nu^2} = n(n-1)r^{n-2};$$

$|\varrho| = r$ ist der Radius der Kreisbahn, und die Eulersche Gleichung (6) gibt

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{dU}{d\nu} = \pm n r^{n-1}, \quad v^2 = -n r^n;$$

also folgt

$$\frac{3}{\varrho^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2U}{d\nu^2} = \frac{3}{r^2} - \frac{n(n-1)r^{n-2}}{-n r^n} = \frac{n+2}{r^2};$$

die Gleichung (7) wird

$$\frac{d^2\Delta}{ds^2} + \frac{n+2}{r^2}\Delta = 0.$$

Eine z. B. an der Stelle $s = 0$ verschwindende Lösung dieser Gleichung ist

$$\sin\frac{\sqrt{n+2}\,s}{r};$$

da nun Δ nach I. dem Normalabstande zweier benachbarter Extremalen proportional ist, so gibt die Gleichung

$$\sin\frac{\sqrt{n+2}\,s}{r} = 0, \quad s = \frac{k\pi r}{\sqrt{n+2}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

die Punkte, in denen die Kreisbahn von benachbarten Bahnkurven, die zu derselben Konstanten der lebendigen Kraft gehören, geschnitten wird. Konjugiert zum Punkte $s = 0$ ist der Punkt

$$s = \frac{\pi r}{\sqrt{n+2}};$$

zu diesem konjugiert der Punkt

$$s = \frac{2\pi r}{\sqrt{n+2}} \text{ usf.}$$

Ist $n + 2 < 0$, so treten keine konjugierten Punkte auf.

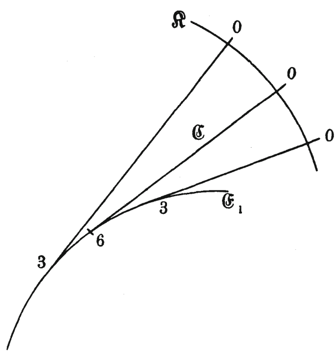
§ 19.

Hüllen und Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung.

I. Wenn auf den betrachteten Strecken der Extremalen $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$ die Größe F_1 von Null verschieden ist, sind die in § 18 eingeführten Größen Φ und $d\Phi/dv$ reguläre Funktionen von t; die Lösung der Jacobischen Differentialgleichung verschwindet dann also nicht mit ihrer Ableitung zugleich; wo $\varDelta(t, a) = 0$ ist, da ist $\varDelta_t(t, a) \neq 0$.

Mögen nun die betrachteten Extremalen von einer Kurve $\mathfrak{K}$ (Fig. 5) transversal ausstrahlen, wobei die Kurve auch in einen Punkt entarten kann, und sei auf der Kurve $a = a_0$ etwa $t = t_6$ der erste mit wachsenden Werten t von $\mathfrak{K}$ aus erreichte Wert, für den

Fig. 5.



(1) $\varDelta(t_6, a_0) = 0, \quad \varDelta_t(t_6, a_0) \neq 0;$

sei also 6 der extremale Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$, oder konjugiert zum Punkte 0 auf der Extremale $\mathfrak{E}(a = a_0)$. Dann kann die Gleichung

(2) $$\varDelta(t, a) = 0$$

nach (1) in der Umgebung der Stelle $t = t_6$, $a = a_0$ nach t aufgelöst werden; setzt man die so definierte nach § 2, I. reguläre Funktion von a für t in den Ausdrücken $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$, so ergibt sich

$$\frac{dx}{da} = \xi_t \frac{dt}{da} + \xi_a = \frac{\xi_a \varDelta_t - \xi_t \varDelta_a}{\varDelta_t},$$

$$\frac{dy}{da} = \eta_t \frac{dt}{da} + \eta_a = \frac{\eta_a \varDelta_t - \eta_t \varDelta_a}{\varDelta_t};$$

x, y seien die Koordinaten des Punktes 3, der für $a = a_0$ in die Lage 6 fällt. Wegen der Gleichung (2) findet man sofort

(3) $$\eta_t \frac{dx}{da} - \xi_t \frac{dy}{da} = 0;$$

wenn die Größen $x_a = dx/da$ und $y_a = dy/da$ nicht zugleich verschwinden, beschreibt der Punkt 3 eine reguläre Kurve $\mathfrak{C}$, die von den Extremalen $x = \xi$, $y = \eta$ berührt wird; sie ist die Hülle der Extremalenschar.

Ist zunächst für alle kleinen Werte von $|a - a_0|$ immer $x_a = y_a = 0$, so entartet die Kurve $\mathfrak{C}$ in einen Punkt; auf allen Extremalen ist derselbe feste Punkt 6 Brennpunkt oder konjugierter Punkt. Faßt man nun die Extremalenbögen 03 als Variationen voneinander auf, d. h. setzt man

$$\delta = da \cdot \frac{d}{da}$$

und bedenkt, daß im Punkte 0 die Transversalitätsbedingung erfüllt ist, so ist nach der oft gebrauchten Formel § 2 (12)

$$\delta J_{03} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \,|^3;$$

wäre aber der Punkt 3 fest, so folgte

$$\delta x = \delta y = 0, \quad \delta J_{03} = 0, \quad J_{03} = \text{const.}$$

Geht also eine Schar regulärer Extremalenbögen durch zwei feste Punkte 0 und 6, so hat das längs ihrer gebildete Integral J_{06} auf allen denselben Wert.

II. Nehmen wir weiter an, daß die Größen x_a und y_a an der Stelle 6 nicht zugleich verschwinden; dasselbe gilt von ξ_t und η_t nach Voraussetzung. Ist daher z. B. $\xi_t \neq 0$, so muß auch der Gleichung (3) zufolge $x_a \neq 0$, also $\xi_t x_a \gtrless 0$ sein, und zwar gilt zu beiden Seiten des Wertes $a = a_0$ entweder das obere oder das untere Zeichen. Sei zunächst $\xi_t x_a > 0$; dann haben die Vektoren (x', y') und (x_a, y_a) dieselbe, nicht entgegengesetzte Richtung; also folgt

$$(4) \quad \begin{aligned} F_{x'}(x, y, x_a, y_a) &= F_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t), \\ F_{y'}(x, y, x_a, y_a) &= F_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t), \\ F(x, y, x_a, y_a) &= x_a F_{x'}(x, y, x_a, y_a) + y_a F_{y'}(x, y, x_a, y_a) \\ &= x_a F_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t) + y_a F_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t). \end{aligned}$$

Auf der Hälfte der Hülle $\mathfrak{C}$, die durch die Ungleichung $a < a_0$ gekennzeichnet wird, ist nun die Richtung wachsender a die Richtung von 3 nach 6 hin; in dem längs der Kurve $\mathfrak{C}$ gebildeten Integral

$$J_{36} = \int_3^6 F(x, y, x', y')\, dt$$

ist also für (x', y') der wachsenden Werten von a entsprechende Vektor (x_a, y_a) zu nehmen, und man erhält, wenn $a = a_3$ ist,

$$J_{36} = \int_a^{a_0} F(x, y, x_a, y_a)\,da,$$

$$\frac{dJ_{36}}{da} = -F(x, y, x_a, y_a)$$

und nach (4)

$$\frac{dJ_{36}}{da} = -x_a F_{x'} - y_a F_{y'}, \tag{5}$$

wobei genauer $F_{x'} = F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)$ usf. zu setzen ist.

Wenn dagegen $a > a_0$ genommen ist, entspricht die Richtung von 6 nach 3 hin zunehmenden Werten von a; in dem Integral

$$J_{63} = \int_6^3 F(x, y, x', y')\,dt$$

ist also, wenn man $t = a$ nehmen will, für (x', y') die Richtung zunehmender a zu nehmen, also

$$J_{63} = \int_{a_0}^{a} F(x, y, x_a, y_a)\,da, \qquad \frac{dJ_{63}}{da} = F(x, y, x_a, y_a)$$

und nach (4)

$$\frac{dJ_{63}}{da} = x_a F_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t) + y_a F_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t). \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) vertauschen sich in der Weise, daß die erste für $a > a_0$, die zweite für $a < a_0$ gilt, wenn wir jetzt $\xi_t x_a < 0$ annehmen für $a \gtrless a_0$. Dann ist der Vektor (ξ_t, η_t) gleichgerichtet mit dem Vektor $(-x_a, -y_a)$; daraus folgt

$$F_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t) = F_{x'}(x, y, -x_a, -y_a),$$
$$F_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t) = F_{y'}(x, y, -x_a, -y_a),$$

also wegen der Homogenität

$$F(x, y, -x_a, -y_a) = -x_a F_{x'} - y_a F_{y'}.$$

Jetzt werde, um das Integral J_{63} im Falle $a < a_0$ zu bilden, die Integrationsveränderliche $a = -\tau$ gesetzt, so daß τ in der Richtung 63 wächst; dann ist

$$J_{63} = \int_{\tau_6}^{\tau} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}\,\frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = -\int_{a_0}^{a} F(x, y, -x_a, -y_a)\,da,$$

also nach (7)

$$\frac{dJ_{63}}{da} = -F(x, y, -x_a, -y_a) = x_a F_{x'} + y_a F_{y'},$$

d. h. hier gilt die Gleichung (6). Ebenso findet man jetzt im Falle $a > a_0$

$$J_{36} = -\int_a^{a_0} F(x, y, -x_a, -y_a)\, da$$

$$\frac{dJ_{36}}{da} = F(x, y, -x_a, -y\ ) = -x_a F_{x'} - y_a F_{y'},$$

d. h. die Gleichung (5).

Zusammenfassend können wir sagen: in jedem Falle, wo nicht x_a und y_a im Punkte 6 beide verschwinden, gibt es eine durch den Punkt 6 abgegrenzte Hälfte der Kurve $\mathfrak{C}$, die wir $\mathfrak{C}_1$ nennen, und auf der eine der Beziehungen

$$\xi_t x_a (a - a_0) < 0, \quad \eta_t y_a (a - a_0) < 0$$

gilt und ferner die Gleichung

$$\frac{dJ_{36}}{da} = -x_a F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) - y_a F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t).$$

Auf der anderen Hälfte gilt die Gleichung

$$\frac{dJ_{63}}{da} = x_a F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) + y_a F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t \eta_t).$$

III. Jetzt gilt, da die Extremalen von $\mathfrak{K}$ transversal ausstrahlen, die Gleichung

$$\delta J_{03} = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta_y \,|^3;$$

liegt eine allgemeinere Transversalität vor, so handelt es sich um das Extrem einer Größe

$$z = z_0 + J_{03},$$

und man findet

$$\delta z = \delta z_0 + F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \,\Big|_0^3;$$

die allgemeinere Transversalität aber gibt

$$-\delta z_0 + F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \,|^0 = 0,$$

also

$$\delta z = F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \,|^3.$$

Ohne Gebrauch des Variationszeichen finden wir, indem wir a als Unabhängige einführen, von der auch die Grenzen t_0 und $t = t_3$ abhängen,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{J}_{03}}{da} &= \frac{d}{da}\int_{t_0}^{t} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\,dt \\ &= F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\frac{dt}{da} - F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\Big|^0 \frac{dt_0}{da} \\ &+ \int_{t_0}^{t} (F_x \xi_a + F_y \eta_a + F_{x'} \xi_{ta} + F_{y'} \eta_{ta})\,dt\end{aligned}$$

oder, indem man die gewöhnliche Teilintegration vollzieht,

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{da} = F(\xi, ..)\frac{dt}{da} - F(\xi, ..)\Big|^0 \frac{dt_0}{da} + F_{x'}\xi_a + F_{y'}\eta_a\Big|_0^3,$$

da das übrigbleibende Integral wegen der Eulerschen Gleichungen wegfällt. Benutzen wir die Homogeneität des Ausdrucks F, so folgt

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{da} = F_{x'}\left(\xi_a + \xi_t\frac{dt}{da}\right) + F_{y'}\left(\eta_a + \eta_t\frac{dt}{da}\right)\Big|_0^3,$$

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz_0}{da} - \left(F_{x'}\frac{dx}{da} + F_{y'}\frac{dy}{da}\right)\Big|^0 + \left(F_{x'}\frac{dx}{da} + F_{y'}\frac{dy}{da}\right)\Big|^3.$$

Hier verschwinden die auf den Punkt 0 bezüglichen Glieder infolge der Transversalität, sei sie allgemeiner oder besonderer Art; es bleibt also

$$\frac{dz}{da} = \left(F_{x'}\frac{dx}{da} + F_{y'}\frac{dy}{da}\right)\Big|^3,$$

und im gewöhnlichen Falle $z_0 = 0$ folgt

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{da} = F_{x'}\frac{dx}{da} + F_{y}\frac{dy}{da}.$$

Diese Formel, zusammengestellt mit der Gleichung (5), gibt für den Fall, daß der Punkt 3 auf $\mathfrak{E}_1$ liegt,

$$\frac{d(\overline{J}_{03} + J_{36})}{da} = 0, \quad \overline{J}_{03} + J_{36} = \text{const.},$$

wobei J_{36} längs des Bogens $\mathfrak{E}_1$ genommen ist. Läßt man den Punkt 3 in die Lage 6 rücken, so wird $J_{36} = 0$, $\overline{J}_{03} = \overline{J}_{06}$; also folgt

$$\overline{J}_{03} + J_{36} = \overline{J}_{06}, \tag{7}$$

die verallgemeinerte Evoluteneigenschaft unserer Hülle; im allgemeineren Falle hat man die Gleichung

$$z_0 + \bar{J}_{03} + J_{36} = z_{00} + \bar{J}_{06},$$

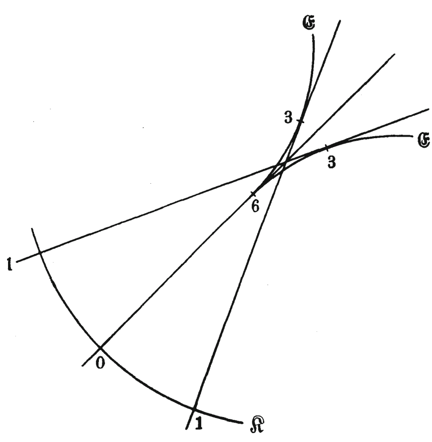
wobei z_{00} sich auf die Extremale $\mathfrak{E}$ oder $a = a_0$ bezieht. Ist J die Bogenlänge, so ist $\mathfrak{E}$ die gewöhnliche Evolute der Kurve $\mathfrak{K}$.

Jetzt kann die Kurve 036, welche aus dem Extremalenbogen 03 und dem der Kurve $\mathfrak{E}$ angehörigen Stücke 36 besteht, als der engeren Nachbarschaft des Bogens 06 angehörig aufgefaßt werden; denn sobald der Abstand 36 hinreichend klein geworden ist, sind die Tangenten des Bogens 36 von der des Punktes 6, und die Tangenten der Extremale 03, welche stetig in den Bogen 06 übergeht, von den Tangenten des letzteren beliebig wenig verschieden. Der Bogen 036 gehört also zu denjenigen Kurven $\mathfrak{L}$, mit denen man den Bogen 06 vergleichen müßte, wenn dieser das Integral J auch nur zu einem schwachen Extrem machen sollte im Vergleich zu anderen die Kurve $\mathfrak{K}$ und den Punkt 6 verbindenden Linien. Dann müßte die Differenz

$$\bar{J}_{06} - J_{036} = \bar{J}_{06} - (\bar{J}_{03} + J_{36})$$

ein festes Vorzeichen haben, ohne zu verschwinden, während sie nach (7) den Wert Null hat. Der Extremalenbogen 06 liefert also sicher kein Extrem des Integrals J, auch kein schwaches; das Extrem hört vielmehr in der durch die Gleichung (7) näher bezeichneten Weise im Punkte 6 auf. Hiermit ist, die Existenz des Feldes vorausgesetzt, folgendes Ergebnis bewiesen.

Fig. 6.



Wird die reguläre Kurve $\mathfrak{K}$ von der Extremale $\mathfrak{E}$ im Punkte 0 transversal geschnitten und letztere vom Punkte 5 durchlaufen, so hört der Bogen 05 auf, ein schwaches Extrem des Integrals J unter den vom Punkte 5 zur Kurve $\mathfrak{K}$ gehenden Linien zu liefern, sobald der Punkt 5 in den Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ hereinrückt. Dasselbe gilt, wenn die

Kurve $\mathfrak{K}$ sich in einen Punkt 0 zusammenzieht, bezüglich des Extrems unter den die festen Punkte 0 und 5 verbindenden Kurven, sobald der Punkt 5 in den zu 0 konjugierten Punkt übergeht.

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn die stets vorhandene Hülle der Kurven des Feldes im Brennpunkte einen Rückkehrpunkt von besonderer Art besitzt; das ist der Fall, da die Größen dx/da und dy/da beide das Vorzeichen im Punkte 6 wechseln. Dann kann es sein, daß (Fig. 6) kein Gebiet $\mathfrak{E}_1$ existiert. In diesem Falle lehrt unsere Betrachtung, daß in beliebiger Nähe des von zwei konjugierten Punkten begrenzten Extremalenstückes andere solche liegen, welche mit jenem den Anfangspunkt gemein haben und so beschaffen sind, daß sie sicher kein Extremum mehr liefern. In Fig. 6 z. B. hat man offenbar

$$\bar{J}_{13} = \bar{J}_{06} + J_{63}.$$

§ 20.

Anwendungen.

I. Wir betrachten zunächst wieder den Meridian der Drehfläche kleinsten Widerstandes,

$$\delta \int \frac{y p^3 \, dx}{1 + p^2} = 0.$$

Eine Ähnlichkeitstransformation, deren Grundpunkt auf der x-Achse liegt und die Abszisse x_0 hat, wird durch die Gleichungen

$$\bar{y} = \alpha y, \quad \bar{x} - x_0 = \alpha(x - x_0), \quad \bar{x} = \alpha x - (\alpha - 1) x_0$$

definiert. Hat man also durch die Gleichungen

$$y = \frac{a(1 + p^2)^2}{2 p^3}, \quad x = b + \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4 p^4} + \frac{1}{p^2} + \lg p\right)$$

eine Extremale dargestellt, so beschreibt der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ ebenfalls eine Extremale. Eine beliebige Tangente einer solchen hat, wenn X, Y laufende Koordinaten sind, die Gleichung

$$Y - y = p(X - x),$$

schneidet also die x-Achse in einem Punkte T, dessen Abszisse

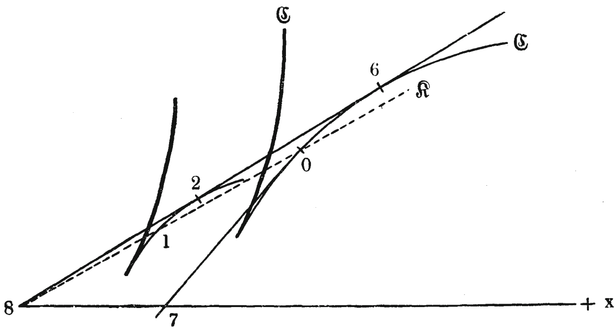
$$X = x - \frac{y}{p}$$

ist. Da nun hiernach

$$\frac{dX}{dp} = \frac{y}{p^2},$$

und die Werte $p = 0$, $p = +\infty$ für X die entsprechenden $-\infty$, $+\infty$ ergeben, so durchläuft der Punkt T, wenn a und damit y positiv ist, die x-Achse genau einmal im positiven Sinne, wenn p wachsend alle positiven Werte, der Berührungspunkt der betrachteten Tangente also (§ 8, II) die ganze Kurve durchläuft.

Fig. 7.



Jetzt sei (Fig. 7) eine Gerade 𝔎 unter dem spitzen Winkel ψ gegen die $+x$-Achse geneigt; dann wird sie von einer Extremalen 𝔈 im Punkte 0 transversal geschnitten, wenn in diesem die Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2p}{3+p^2} = \frac{p}{1+\frac{1}{2}(1+p^2)}$$

besteht, welche offenbar

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\psi < p$$

ergibt. Zu einem gegebenen Werte von $\operatorname{tg}\psi$ gehören zwei reelle Werte von p, deren Produkt 3 ist, sobald die Ungleichung

$$\operatorname{tg}\psi < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \psi < 30^0$$

besteht; einer jener Werte, den wir zur Konstruktion von 𝔈 benutzen, ist daher kleiner als $\sqrt{3}$ und gehört zu einem Punkte desjenigen Zweiges der Extremale, dessen Stücke ein Minimum des Widerstandes (§ 18) ergeben. Ist ferner 7 der Schnittpunkt der Tangente der Extremale im Punkte 0 mit der x-Achse, 8 der Schnittpunkt dieser mit der Geraden 𝔎, so liegt nach (1) der Punkt 7 rechts von 8, d. h. nach der positiven Seite hin. Durchläuft daher ein Punkt die konstruierte Extremale 𝔈 von 0 aus in der Richtung wachsender x, also abnehmender p, so bewegt sich der Punkt T von der Lage 7 aus nach $-\infty$ hin, erreicht also inzwischen die Lage 8; der Berührungspunkt der durch 8 gehenden Tangente der Kurve $\mathfrak{C}$ sei 6.

Den Punkt 8 mache man nun zum Zentrum einer Schar von Ähnlichkeitstransformationen; dieselben führen die Kurve $\mathfrak{C}$ in eine Schar von Extremalen über, welche die Gerade $\mathfrak{K}$ transversal schneiden und die Tangente 68 berühren. Letztere vertritt also die Hülle $\mathfrak{E}$ der allgemeinen Theorie, 6 ist der Brennpunkt der Geraden $\mathfrak{K}$ auf der Kurve $\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{E}_1$ ist die Strecke 68. Ist 2 irgend ein Punkt dieser Strecke, und schneidet die in ihm berührende Extremale der konstruierten Schar die Gerade $\mathfrak{K}$ im Punkte 1, so gilt für das Widerstandsintegral die Gleichung

$$\bar{J}_{12} + J_{26} = \bar{J}_{06},$$

wobei J_{26} längs der Geraden 68 gebildet wird. Läßt man daher den Punkt 5 längs der Kurve $\mathfrak{C}$ laufen, so gibt der Bogen 05 ein schwaches Minimum des Widerstandes, verglichen mit den vom Punkte 5 nach der Geraden $\mathfrak{K}$ gezogenen Kurven, so lange der Punkt 5 dem Bogen 06 angehört; rückt er in die Lage 6 hinein, so zeigt die obige Gleichung, in welcher Weise schon für den Bogen 06 die Minimumseigenschaft verlorengeht.

Die hier angewandte Methode zur Konstruktion und Begrenzung eines Feldes kann auf jede Aufgabe übertragen werden, bei welcher die Extremalen einer Schar durch eine bekannte kontinuierliche Gruppe von Transformationen ineinander übergehen. Wo die Bahnkurven der Transformation die Extremalen der Schar berühren, liegen die Singularitäten des Feldes.

II. Auf der Drehfläche

$$z = f(r), \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

sei die kürzeste, d. h. geodätische Linie zu bestimmen:

$$\delta\int ds = \delta\int F(r, \varphi, r', \varphi')\,dt = 0,$$

$$F\,dt = \sqrt{dr^2[1 + f'(r)^2] + r^2 d\varphi^2}.$$

Man findet sofort die Clairautsche Formel

$$\frac{dF_{\varphi'}}{dt} = \text{const.} = a, \quad \frac{r^2 d\varphi}{ds} = a, \tag{2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{a^2[1 + f'(r)^2]}. \tag{3}$$

Die Fläche habe ungefähr die Gestalt des Drehparaboloids, dessen Drehachse die z-Achse ist; $f(r)$ und $f'(r)$ seien auf der Strecke

$r = 0 \cdots + \infty$ stetig und regulär, $f'(0) = f(0) = 0$. Dann zeigt die Gleichung (3), daß r als Funktion von φ nirgends singulär wird; ist $a > 0$, so umwindet die geodätische Linie die Fläche nach (2) ständig im Sinne wachsender φ. Dabei kann r wachsen oder abnehmen; rechnen wir die Quadratwurzel stets positiv, so ist

$$(4) \qquad d\varphi = \pm \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1+f'(r)^2}{r^2-a^2}}\,dr, \quad d\varphi > 0, \quad dr \gtrless 0.$$

Um reelle Veränderliche zu behalten, muß $r \geqq a$ sein; ist irgendwo $a < r$, $r = r_1$, $\varphi = \varphi_1$, $dr/d\varphi < 0$, so hat das Integral

$$\int_a^{r_1} \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1+f'(r)^2}{r^2-a^2}}\,dr = \varphi^* - \varphi_1$$

einen endlichen positiven Wert, d. h. φ wächst von φ bis φ^* und dabei geht r von r_1 bis a herab; die Kurve erreicht den Wendekreis $r = a$, in welchem $dr/d\varphi = 0$ wird; dabei ist nach (3)

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{[1+f'(r)^2](4r^3 - 2a^2 r) - 2f'(r)f''(r)(r^2-a^2)}{[1+f'(r)^2]^2},$$

$r = a$ gesetzt, positiv; $dr/d\varphi$ wechselt also an der Stelle $r = a$, $\varphi = \varphi^*$ das Vorzeichen. Ebenso erreicht man den Kreis $r = a$ im Sinne abnehmender φ fortschreitend, wenn an der Stelle $r = r_1$, $\varphi = \varphi_1$ die Ungleichung $dr/d\varphi > 0$ bestünde. Ein Zeichenwechsel der Größe $dr/d\varphi$ ist nur, wenn $r = a$ wird, möglich; die geodätische Linie erreicht also in ihrem Wendekreis $r = a$ genau einmal mit dem Werte $\varphi = \varphi^*$; wenn $\varphi < \varphi^*$, nimmt r mit wachsenden Werten von φ ab; wenn $\varphi > \varphi^*$, nimmt r zu. Entsprechend beiden Fällen gilt in der Gleichung (4) das untere und das obere Vorzeichen; sind (r_0, φ_0) und (r, φ) zwei durch den Berührungspunkt mit dem Wendekreise getrennte Punkte der Kurve und ist $\varphi_0 < \varphi^*$, $\varphi > \varphi^*$, so folgt

$$\varphi_0 - \varphi^* = -\int_a^{r_0} \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1+f'(r)^2}{r^2-a^2}}\,dr,$$

$$\varphi - \varphi^* = +\int_a^{r} \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1+f'(r)^2}{r^2-a^2}}\,dr,$$

$$(5) \qquad \varphi - \varphi_0 = \int_a^{r} \frac{d}{r}\sqrt{\frac{1+f'(r)^2}{r^2-a^2}}\,dr + \int_a^{r_0} \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1+f'(r)^2}{r^2-a^2}}\,dr.$$

Jetzt denken wir den Punkt (r_0, φ_0) oder 0 fest, den Festwert a beweglich; dann können die letzte Gleichung und die Gleichung

$$r = t$$

als Sonderfall der allgemeinen Gleichungen $x = \xi(t, a)$, $y = \eta(t, a)$ bei der Annahme $y = \varphi$, $x = r$ angesehen werden; man erhält

$$\Delta(t, a) = \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \psi(r, a) + \psi(r_0, a), \tag{6}$$

wobei gesetzt ist

$$\psi(r, a) = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^r \frac{a}{r} \sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - a^2}}\, dr = \frac{\partial}{\partial a} \int_1^{r/a} \frac{a}{u} \sqrt{\frac{1 + f'(au)^2}{u^2 - 1}}\, du.$$

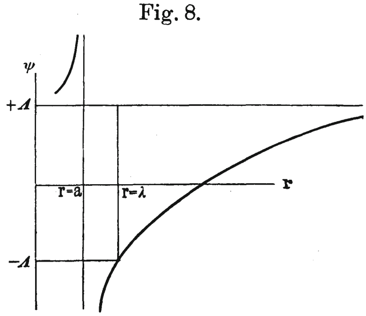
Die Differentiation kann trotz der Singularität $u = 1$ in der gewöhnlichen Weise unter dem Integralzeichen durchgeführt werden, etwa indem man $u = \operatorname{Cos} v$ setzt, womit die Singularität verschwindet; man findet

$$\psi(r, a) = -\sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - a^2}} + \int_a^r \frac{f'(r) f''(r)\, dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)[1 + f'(r)^2]}},$$

$$\frac{\partial \psi(r, a)}{\partial r} = \frac{r \sqrt{1 + f'(r)^2}}{\sqrt{r^2 - a^2}^3} > 0, \quad \psi(a + 0, a) = -\infty. \tag{7}$$

Die Größe $\psi(+\infty, a) = \Delta$ ist, wenn $f'(+\infty)$ endlich bestimmt oder unendlich ist, endlich oder positiv unendlich; ist sie positiv endlich, so wird der Verlauf der Größe $\psi(r, a)$ als Funktion von r auf der Strecke $r \geqq a$ durch Fig. 8 dargestellt, und es gibt einen bestimmten Wert $r = \lambda$, für den $\psi(\lambda, a) = -\Delta$ ist. Ist dann $r_0 < \lambda$, so ist

Fig. 8.



$$\psi(r_0, a) < -\Delta;$$

da allgemein $\psi(r_0, a) < \Delta$, so folgt für $r > a$ allgemein

$$\psi(r, a) + \psi(r_0, a) < 0.$$

Ist dagegen $r_0 > \lambda$, so ist

$$\psi(r_0, a) > -\Delta,$$

und da $\psi(r, a)$ von $-\infty$ bis $+\Delta$ beständig wächst, so gibt es einen bestimmten Wert r, für den die Gleichung

$$\psi(r_0, a) + \psi(r, a) = 0$$

besteht; dasselbe gilt für den Fall $\varDelta = +\infty$, in welchem $\lambda = a$ gesetzt werden kann, für jeden Wert $r_0 > a$.

Diese Gleichung gibt nun nach (6) die Bedingung dafür, daß (r, φ) und (r_0, φ_0) konjugierte Punkte sind; im Gebiet $r_0 > \lambda$ hat also für den Fall $\varDelta > 0$ jeder Punkt unserer Kurve einen konjugierten, der von ihm durch den Berührungspunkt mit dem Wendekreise $r = a$ getrennt ist. Im Falle $\varDelta = +\infty$ hat jeder Punkt einen konjugierten von der eben bezeichneten Lage. In diesen Fällen existiert auch eine Hülle $\mathfrak{E}$ im Sinne des § 19; denn die Gleichung

$$\psi(r_0, a) + \psi(r, a) = 0$$

kann der Beziehung (7) zufolge nach r aufgelöst werden; setzt man demgemäß r als Funktion von a in die Gleichung (5) ein, so erhält man r und φ, d. h. die Koordinaten eines Punktes der Hülle $\mathfrak{E}$ als Funktionen von a.

Die hiermit gegebene Methode, konjugierte Punkte und Hüllen festzustellen, die Kobersche Methode, ist in vielen Fällen anwendbar, in denen die Extremalen durch Quadraturen darstellbar sind, insbesondere bei Fragen der dynamischen Stabilität, wenn die Bahnkurven durch einen Sonderfall des Prinzips der kleinsten Wirkung festgelegt werden.

Ist die oben betrachtete Fläche ein Paraboloid, etwa $z = r^2$, so findet man leicht $\varDelta = +\infty$; jede geodätische Linie des Paraboloids, abgesehen von den Meridianen, berührt einen Wendekreis, und wird durch den Berührungspunkt in zwei solche Hälften zerlegt, daß zu jedem Punkt der einen Hälfte ein konjugierter auf der anderen Hälfte vorhanden ist.

III. Wir deuten noch eine weitere allgemeine Methode an, die Existenz konjugierter Punkte nachzuweisen.

Bei der Aufgabe

$$\delta \int f(y, p)\, dx = 0$$

findet man aus der Eulerschen Gleichung

$$f - p f_p = a = \text{const.} \tag{8}$$

Man denke sich aus dieser Gleichung $y = Y(p, a)$ ausgerechnet; dann wird offenbar

$$dx = \frac{dy}{p}, \quad x = \int \frac{Y_p}{p}\, dp = X(p, a)$$

zu setzen sein; aus der Gleichung

$$Y_p = p X_p \tag{9}$$

folgt dann

$$Y_{pa} - p X_{pa} = 0. \tag{10}$$

Nun sei

$$x_0 = X(p_0, a), \quad y_0 = Y(p_0, a)$$

der feste Punkt 0, durch den die Extremalen der betrachteten Schar hindurchgehen; man findet dann offenbar

$$0 = X_p(p_0, a)\frac{\partial p_0}{\partial a} + X_a(p_0\, a), \quad 0 = Y_p(p_0, a)\frac{\partial p_0}{\partial a} + Y_a(p_0, a),$$

also nach (9), indem man die erste dieser Gleichungen mit $-p_0$ vervielfacht zur zweiten addiert,

$$Y_a - p X_a \Big|^0 = 0. \tag{11}$$

Jetzt betrachten wir in der Größe

$$\varDelta^0 = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(p, a)} = X_p\left(Y_a - \frac{Y_p}{X_p} X_a\right),$$

für die nach (9) auch

$$\varDelta^0 = X_p(Y_a - p X_a) = Y_p\left(\frac{Y_a}{p} - X_a\right) \tag{12}$$

geschrieben werden kann, den zweiten Faktor; er gibt nach (10) die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y_a}{p} - X_a\right) = \frac{Y_{ap}}{p} - X_{ap} - \frac{Y_a}{p^2} = -\frac{Y_a}{p^2},$$

also nach (11)

$$\frac{Y_a}{p} - X_a = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{-Y_a}{p^2}\, dp. \tag{13}$$

Die Gleichung (8) gibt aber, Y für y gesetzt und nach a differenziert,

$$(f_y - p f_{yp}) Y_a = 1;$$

dabei kann die Eulersche Gleichung im vorliegenden Falle in der Form

$$f_y - p f_{py} - f_{pp}\frac{dp}{dx} = 0$$

geschrieben werden; somit folgt

$$Y_a f_{pp}\frac{dp}{dx} = 1$$

und nach (13) und (12)

$$\frac{Y_a}{p} - X_a = \int_{p_0}^{p} \frac{-dp}{p^2 f_{pp} \frac{dp}{dx}} = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p^2 f_{pp}},$$

$$\varDelta^0 = -Y_p \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p^2 f_{pp}}.$$

Ersetzt man nun p durch eine beliebige Unabhängige t, in der

$$x = X = \xi(t, a), \quad y = Y = \eta(t, a)$$

zu setzen ist, so ist

$$\varDelta = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(p, a)} \frac{dp}{dt}, \quad Y_p \frac{dp}{dt} = \eta_t,$$

also

$$\varDelta(t, a) = \varDelta^0 \frac{dp}{dt} = -\eta_t \int_{t_0}^{t} \frac{x'^3 dt}{y'^2 f_{pp}}$$

oder, wenn wir wieder

$$F = x' f(y, p), \quad F_{y'y'} = x'^2 F_1$$

setzen, woraus $f_{pp} = x'^3 F_1$ folgt,

$$\varDelta(t, a) = -\eta_t \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\eta_t^2 F_1} = -y' \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{y'^2 F_1}.$$

Diese Formel gewinnt aber erst Bedeutung, wenn man t-Strecken betrachtet, auf denen $y' = 0$, das Integral unendlich wird. Der Integrand hat ein festes Vorzeichen, da wir ein solches für die Größe F_1 auf den betrachteten Extremalenbögen immer fordern. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Unendlichkeitsstellen bewegt sich also der Wert des Integrals in dem Ausdruck $\varDelta(t, a)$ einsinnig, geht also von $-\infty$ bis $+\infty$ oder umgekehrt, und muß dabei den Wert Null durchschreiten, womit dann eine Nullstelle der Größe $\varDelta(t, a)$, der gewünschte konjugierte Punkt, gefunden ist.

§ 21.

Zweite Variation; Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung.

Das Zeichen δ bedeutet das vollständige Differential nach den unabhängigen Parametern ε_1 $\varepsilon_2, \ldots$, die in den Differenzen $\overline{x} - x$ und $\overline{y} - y$ erscheinen, wenn die Punkte (x, y) und $(\overline{x}, \overline{y})$, bestimmt durch die gemeinsame Unabhängige t, Kurven durchlaufen, deren zweite in die erste übergeht, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ gesetzt wird, was wir durch den Zeiger $|^0$ andeuten; ist Φ irgend eine durch die erste Kurve und analog auch durch die zweite Kurve bestimmte Größe, so ist

$$\delta \Phi = d\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + d\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} + \cdots \Big|^0 .$$

Hiernach ist klar, was man sinngemäß unter der zweiten Variation $\delta^2 \Phi$ verstehen muß:

$$\delta^2 \Phi = \delta(\delta \Phi) = d\varepsilon_1 \delta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \Big|^0 \right] + d\varepsilon_2 \delta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} \Big|^0 \right] + \cdots,$$

$$\delta \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \Big|^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1^2} \Big|^0 d\varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \Big|^0 d\varepsilon_2 + \cdots$$

$$\delta^2 \Phi = d\varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1^2} \Big|^0 + d\varepsilon_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_2^2} \Big|^0 + 2\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \Big|^0 + \cdots$$

Die Größen

$$\delta^2 x = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \varepsilon_1^2} \Big|^0 d\varepsilon_1^2 + \cdots, \quad \delta^2 y = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \varepsilon_1^2} \Big|^0 d\varepsilon_1^2 + \cdots$$

verschwinden, wenn die Parameter ε in den Differenzen $\bar{x} - x$, $\bar{y} - y$ nur linear auftreten, was bei den bisher betrachteten Kurvenscharen häufig angenommen werden kann.

Allgemein ist die zweite Variation von Φ das vollständige zweite Differential der Größe Φ, genommen an der Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$. Ist sie eine positiv oder negativ definite quadratische Form der Unabhängigen $d\varepsilon$, so ist Φ innerhalb der betrachteten Kurvenschar auf der ersten Kurve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdots = 0$ ein Minimum oder Maximum; daraus folgt aber nicht, daß diese Kurve ein starkes oder schwaches Extrem der Größe Φ gegenüber allen Kurven einer engeren oder weiteren Nachbarschaft im Sinne des § 14 liefert. Kann man die Kurve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ in zwei verschiedene Scharen einbetten, in denen $\delta^2 \Phi$ verschiedenes Vorzeichen gewinnt, so ist sicher kein Extrem der Größe Φ im Sinne der Variationsrechnung vorhanden. In dieser Weise benutzen wir die Theorie der zweiten Variation, um die Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung des Extrems nachzuweisen.

I. Zu diesem Zweck untersuchen wir die zweite Variation der Größe

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y')\, dt,$$

also die erste Variation der Größe

$$\delta J_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y \Big|_0^1 + \int_0^1 (P\delta x + Q\delta y)\,dt$$

oder, indem wir die Integrationsgrenzen und das Substitutionszeichen an den aus dem Integral heraustretenden Gliedern, die sich immer wiederholen, weglassen, und die Beziehungen

$$P = F_x - F'_{x'} = y'T,\quad Q = F_y - F'_{y'} = -x'T,\quad w = y'\delta x - x'\delta y$$

benutzen, der Größe

$$\delta J = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y + \int Tw\,dt,$$

d. h.

(1) $\delta(\delta J) = \delta^2 J = F_{x'}\delta^2 x + F_{y'}\delta^2 y + \delta F_{x'}\delta x + \delta F_{y'}\delta y + \delta\int Tw\,dt;$

offenbar wird

$$\delta\int Tw\,dt = \int (T\delta w + w\delta T)\,dt$$

zu setzen sein. Nehmen wir an, daß die zugrunde gelegte Kurve 01 Extremale sei, längs ihrer also $T = 0$, so folgt

$$\delta\int Tw\,dt = \int \delta T . w\,dt. \tag{2}$$

Für die vom Integralzeichen freien Glieder erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$F_{x'x'} = y'^2 F_1,\quad F_{x'y'} = -x'y'F_1,\quad F_{y'x'} = x'^2 F_1$$

und der mit der Eulerschen Gleichung $T = 0$ gleichwertigen Beziehung

$$F_{xy'} + x'y''F_1 = F_{yx'} + y'x''F_1 \tag{3}$$

die folgende Umformung:

$$\begin{aligned}\delta F_{x'}\delta x + \delta F_{y'}\delta y &= F_{xx'}\delta x^2 + (F_{yx'} + F_{xy'})\delta x\delta y + F_{yy'}\delta y^2\\ &\quad + F_1(y'^2\delta x\delta x' - x'y'\delta x\delta y' - x'y'\delta y\delta x' + x'^2\delta y\delta y')\\ &= F_{xx'}\delta x^2 + (F_{yx'} + F_{xy'})\delta x\delta y + F_{yy'}\delta y^2\\ &\quad + F_1(y'\delta x - x'\delta y)(y'\delta x' - x'\delta y').\end{aligned}$$

Nun ist

$$w = y'\delta x - x'\delta y,\quad w' = y'\delta x' - x'\delta y' + y''\delta x - x''\delta y;$$

das letzte mit F_1 behaftete Glied kann also geschrieben werden:

$$F_1 w w' - F_1(y'\delta x - x'\delta y)(y''\delta x - x''\delta y).$$

Setzen wir also mit Berücksichtigung der Gleichung (3)

$$L = F_{xx'} - F_1 y'y'',\quad M = F_{xy'} + x'y''F_1 = F_{yx'} + x''y'F_1,$$
$$N = F_{yy'} - F_1 x'x'',$$

so ergibt sich

(4) $\delta F_{x'}\delta x + \delta F_{y'}\delta y = L\delta x^2 + 2M\delta x\delta y + N\delta y^2 + F_1 w w'.$

Um nun auch die Größe (2) umzuformen, erinnern wir an die in § 18 abgeleitete Identität

$$\delta T = F_2 w - \frac{d(F_1 w')}{dt}, \tag{5}$$

in der noch F_2 explizite zu bestimmen ist. Die Gleichung gilt für jede Variation, wobei F_2 immer dieselbe Größe bleibt; man kann also z. B. eine Normalvariation durch die Gleichungen

$$\delta x = X\omega, \quad \delta y = Y\omega, \quad X = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad Y = \frac{-x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

bestimmen und unter ω einen Festwert verstehen; dann ist

$$y'\delta x - x'\delta y = w = \omega\sqrt{x'^2+y'^2},$$

$$\delta T = F_2\omega\sqrt{x'^2+y'^2} - \omega\frac{d}{dt}\left(F_1\frac{d}{dt}\sqrt{x'^2+y'^2}\right).$$

Anderseits ist allgemein, da $T = 0$ ist,

$$\delta P = \delta(y'T) = y'\delta T,$$
$$\delta Q = \delta(-x'T) = -x'\delta T,$$

$$\delta T = \frac{y'\delta P - x'\delta Q}{x'^2+y'^2} = \frac{X\delta P + Y\delta Q}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \tag{6}$$

Dabei ist

$$\delta P = \delta F_x - \frac{d\,\delta F_{x'}}{dt} = \left(F_{xx} - \frac{dF_{xx'}}{dt}\right)\delta x + \left(F_{xy} - \frac{dF_{x'y}}{dt}\right)\delta y$$
$$- \frac{d}{dt}(F_{x'x'}\delta x' + F_{x'y'}\delta y') + (F_{xy'} - F_{yx'})\delta y',$$

$$\delta Q = \left(F_{yx} - \frac{dF_{xy'}}{dt}\right)\delta x + \left(F_{yy} - \frac{dF_{yy'}}{dt}\right)\delta y$$
$$- \frac{d}{dt}(F_{y'x'}\delta x' + F_{y'y'}\delta y') + (F_{yx'} - F_{xy'})\delta x';$$

hier ist $\delta x' = X'\omega$, $\delta y' = Y'\omega$ zu setzen, und da die Gleichung $XX' + YY' = 1$ gilt, findet man

$$F_{x'x'}\delta x' + F_{x'y'}\delta y' = F_1(y'^2 X' - x'y'Y')\omega = 0,$$

und ebenso verschwindet der entsprechende Ausdruck in δQ. Man erhält also nach (6)

$$X \delta P + Y \delta Q = \omega \left\{ \left(F_{xx} - \frac{d F_{xx'}}{d t} \right) X^2 + 2 \left(F_{xy} - \frac{d F_{xy'}}{d t} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d F_{yx'}}{d t} \right) X Y + \left(F_{yy} - \frac{d F_{yy'}}{d t} \right) Y^2 \right\}$$

$$= \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \delta T = \omega \left\{ F_2 (x'^2 + y'^2) - \sqrt{x'^2 + y'^2} \frac{d}{d t} \left(F_1 \frac{d}{d t} \sqrt{x'^2 + y'^2} \right) \right\},$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \frac{d}{d t} \left(F_1 \frac{d}{d t} \sqrt{x'^2 + y'^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^2} \left\{ \left(F_{xx} - \frac{d F_{xx'}}{d t} \right) y'^2 \right.$$

$$\left. - 2 x' y' \left(F_{xy} - \frac{d F_{xy'}}{d t} - \frac{d F_{yx'}}{d t} \right) + x'^2 \left(F_{yy} - \frac{d F_{yy'}}{d t} \right) \right\}.$$

Mit diesem Wert geben die Formeln (1), (2), (4) und (5)

$$\delta^2 J = F_{x'} \delta^2 x + F_{y'} \delta^2 y + L \delta x^2 + 2 M \delta x \delta y + N \delta y^2$$

$$+ F_1 w w' + \int w \left(F_2 w - \frac{d (F_1 w')}{d t} \right) d t,$$

oder nach einer Teilintegration

$$\delta^2 J = F_{x'} \delta^2 x + F_{y'} \delta^2 y + L \delta x^2 + 2 M \delta x \delta y + N \delta y^2$$

$$+ \int (F_2 w^2 + F_1 w'^2)\, d t,$$

im besonderen, wenn die Variationen an den Endpunkten 0 und 1 verschwinden, und wieder genau geschrieben wird

$$(7) \quad \delta^2 J_{01} = \int_0^1 (F_1 w'^2 + F_2 w^2)\, d t = \int_0^1 w \left(F_2 w - \frac{d (F_1 w')}{d t} \right) d t.$$

II. Jetzt seien wieder auf der betrachteten Extremale 0 und 6 konjugierte Punkte, $x = \xi(t, a)$, $\eta = \eta(t, a)$ seien die Gleichungen der Schar der durch den Punkt 0 gehenden Extremalen. Dann hat nach § 18 die Differentialgleichung

$$F_2 w - \frac{d (F_1 w')}{d t} = 0$$

die Lösung $\varDelta(t, a_0)$, die an den Stellen 0 und 6 verschwindet; dabei ist nach § 18

$$\varDelta_t(t_6, a_0) \neq 0,$$

so daß $\Delta(t, a_0)$ an der Stelle 6 das Vorzeichen wechselt. Der Bogen 0 2 reiche über den Punkt 6 hinaus, und auf ihm sei, wie immer, $F_1 \neq 0$, ξ und η regulär; außer 6 sei auf diesem Bogen kein zum Punkte 0 konjugierter, also keine Nullstelle der Größe $\Delta(t, a_0)$ vorhanden.

Ist dann ε ein hinreichend kleiner Festwert, so hat die Gleichung

$$(F_2 - \varepsilon)\, w - \frac{d\,(F_1 w')}{d\,t} = 0 \tag{8}$$

nach dem zweiten Einbettungssatze (§ 17) ein an der Stelle 0 verschwindendes und auf der Strecke 0 2 reguläres Integral $w = \omega$; man braucht diese Gleichung nur durch die Gleichungen

$$\frac{d\,\varepsilon}{d\,t} = 0, \quad \frac{d\,w}{d\,t} = w'$$

zu einem simultanen System der in § 17 betrachteten Form zu ergänzen und dann ε als Anfangswert einer der Unbekannten anzusehen, um die Existenz des Integrals ω nach § 17 sicherzustellen. Dasselbe hat, weil von dem zum Werte $\varepsilon = 0$ gehörigen Integral $w = \Delta(t, a_0)$ beliebig wenig abweichend, auf der Strecke 0 2 eine einzige von 0 verschiedene Nullstelle 7, die, wenn $\lim \varepsilon = 0$ wird, mit 6 zusammenfällt. Bildet man nun die Normalvariation

$$\delta x = \frac{X\,\omega\, d\,\varepsilon_1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \delta y = \frac{Y\,\omega\, d\,\varepsilon_1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

so ergibt die Formel (7), da

$$y'\,\delta x - x'\,\delta y = \omega\, d\,\varepsilon_1$$

zu setzen ist, und ω Lösung der Gleichung (8) ist,

$$\delta^2 J_{0\,7} = \int_0^7 \omega \left(F_2 - \frac{d\,(F_1\,\omega')}{d\,t}\right) d\,t \,.\, d\,\varepsilon_1^2 = d\,\varepsilon_1^2 \,.\, \varepsilon \int_0^7 \omega^2\, d\,t.$$

Setzt man noch auf der Strecke 7 2 die Gleichungen

$$\delta x = \delta y = 0$$

an, so hat man, da der Punkt 7 bei hinreichend kleinem Wert von ε dem Bogen 0 2 angehört,

$$\delta^2 J_{0\,2} = \delta^2 J_{0\,7} = d\,\varepsilon_1^2 \,.\, \varepsilon \int_0^7 \omega^2\, d\,t.$$

Diese Größe hat offenbar das Vorzeichen mit ε gemein; durch die Gleichungen

$$\bar{x} - x = \frac{\varepsilon_1 X \omega}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \bar{y} - y = \frac{\varepsilon_1 Y \omega}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

wird also der Bogen 0 2 einer Schar von Nachbarkurven eingebettet, die je nach der Wahl von ε eine positive oder negative zweite Variation ergeben, so daß das Integral J_{02} auf der betrachteten Extremale gebildet, das eine Mal ein Maximum, das andere Mal ein Minimum gegenüber den Nachbarkurven bildet. Das in der Aufgabe $\delta J = 0$ gesuchte Extrem wird also von dem Bogen 0 2 sicher nicht geliefert. Damit ist die Jacobische Bedingung in bestimmtem Sinne als notwendig nachgewiesen: um das Integral J durch einen im Punkte 0 beginnenden Extremalenbogen 0 2 zum Extrem zu machen, darf man nicht mit dem Punkte 2 über den zum Punkte 0 konjugierten Punkt 6 hinausgehen.

Das Ergebnis des § 19, daß schon der Bogen 0 6 kein Extrem liefert, geht weiter, schließt aber einen Ausnahmefall aus.

III. Aus der abgeleiteten Form der zweiten Variation $\delta^2 J$ kann geschlossen werden, daß dieselbe bei festen Endpunkten ein festes Vorzeichen hat, wenn die Integrationsstrecke 2 3 zwischen zwei konjugierten Punkten, etwa 0 und 6, in der bisherigen Bezeichnung enthalten ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der in I. erhaltenen Formel

$$\delta^2 J_{23} = \int_2^3 (F_2 w^2 + F_1 w'^2)\, dt$$

aus und addieren zu ihr die Gleichung

$$0 = \int_2^3 \frac{d(u w^2)}{dt}\, dt = u w^2 \Big|_2^3 = \int_2^3 (u' w^2 + 2 u w w')\, dt;$$

es ergibt sich

$$\delta^2 J_{23} = \int_2^3 dt \{F_1 w'^2 + 2 u w w' + (F_2 + u') w^2\},$$

und in diesem Ausdruck hat der Integrand das Vorzeichen der Größe F_1, wenn man u als reguläre Funktion auf der Strecke $t_2 \ldots t_3$ so bestimmen kann, daß die Gleichung

(9) $$(F_2 + u') F_1 - u^2 = 0$$

gilt; dann ist einfach

$$\delta^2 J_{23} = \int_2^3 F_1 \left(w' + \frac{u w}{F_1} \right)^2 d t. \tag{10}$$

Die Gleichung (9) kann aber, wie jede Gleichung von der Form

$$u' = L u^2 + M,$$

auf eine lineare Differentialgleichung zurückgeführt werden; setzt man

$$u = -\frac{1}{L} \frac{v'}{v}, \quad v = c^{-\int L u d t},$$

so ergibt sich

$$v'' - \frac{L'}{L} v' + L M v = 0.$$

In unserem Falle ist

$$L = \frac{1}{F_1}, \quad N = -F_2$$

zu setzen, und man findet

$$v'' + \frac{F_1'}{F_1} v - \frac{F_2}{F_1} v = 0, \quad (F_1 v')' - F_2 v = 0,$$

also die Gleichung, deren Lösung nach § 18 die Größe $\varDelta(t, a_0)$ ist, die auf der Strecke 2 3 bei den geltenden Annahmen nicht verschwindet. Da nun auch F_1 auf den betrachteten Extremalenstücken stets als von Null verschieden vorausgesetzt wird, so ist die Größe

$$u = -\frac{1}{F_1} \frac{\varDelta_t(t, a_0)}{\varDelta(t, a_0)}$$

auf der Strecke 2 3 regulär und die Darstellung (10) ist gesichert.

IV. Die durchgeführten Entwicklungen gestalten sich äußerlich etwas einfacher, wenn man die nichthomogene Form des Integranden in J und abgestumpfte Variationen δ_0 benutzt. Bleiben die Endpunkte von vornherein fest, so ist, wie schon benutzt wurde,

$$\delta^2 J = \delta \int T w d t = \int \delta T w d t = \int \delta_0 T w d t,$$

$$F = x' f(x, y, p), \quad w = -x' \delta_0 y, \quad T = f_y - \frac{d f_p}{d x}, \quad \frac{d \delta_0}{d x} = \delta_0 \frac{d}{d x},$$

$$\delta^2 J = \int \delta_0 y \left(\delta_0 f_y - \frac{d \delta_0 f_p}{d x} \right) d x = -\delta_0 f_p$$

$$+ \int (\delta_0 f_y \delta_0 y + \delta_0 f_p \delta_0 p) d x = \int (A \delta_0 y^2 + 2B \delta_0 y \delta_0 p + C \delta_0 p^2) d x,$$

wobei immer zwischen denselben Grenzen integriert wird und

$$A = f_{yy}, \quad B = f_{yp}, \quad C = f_{pp}$$

gesetzt ist. Eine nochmalige Teilintegration, bei der die aus dem Integralzeichen heraustretenden Glieder verschwinden, ergibt

$$\delta^2 J = \int\left\{\left(A - \frac{dB}{dx}\right)\delta_0 y^2 + C\delta_0 p^2\right\}dx,$$

entsprechend der Formel (7). Addiert man die Gleichung

$$\int \frac{d(u\delta_0 y^2)}{dx}\,dx = \int\left(\frac{du}{dx}\delta_0 y^2 + 2u\delta_0 y\,\delta_0 p\right)dx = 0,$$

so folgt

$$\delta^2 J = \int\left\{\left(A - \frac{dB}{dx} + \frac{du}{dx}\right)\delta_0 y^2 + 2u\delta_0 y\,\delta_0 p + C\delta_0 p^2\right\}dx.$$

Der Integrand ist ein vollständiges Quadrat, wenn die Gleichung

$$C\left(A - \frac{dB}{dx} + \frac{du}{dx}\right) = u^2$$

angesetzt wird. Setzt man weiter

$$u = -\frac{C}{v}\frac{dv}{dx},$$

so folgt

$$\frac{d}{dx}\left(C\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dB}{dx} - A\right)v = 0. \tag{11}$$

Nimmt man anderseits an, $y = \varphi(x, a)$ sei eine Lösung der Eulerschen Gleichung

$$f_y - \frac{df_p}{dx} = 0,$$

so folgt, indem man nach a differenziert und die Ableitung nach a mit der Ableitung d/dx vertauscht,

$$A\varphi_a + B\varphi_{ax} - \frac{d(B\varphi_a + C\varphi_{ax})}{dx} = 0,$$

oder

$$\left(A - \frac{dB}{dx}\right)\varphi_a - \frac{d(C\varphi_{ax})}{dx} = 0,$$

d. h. eine Lösung der Gleichung (11) ist $v = \partial\varphi/\partial a$. Auf einer Strecke, auf der diese Größe nicht verschwindet, kann man die zweite Variation auf eine Form bringen, in der sie offenbar das Vorzeichen mit der Größe $C = f_{pp}$ gemein hat.

§ 22.

Der Transversalensatz und die Normalkoordinaten in einem Felde.

I. Seien wieder

$$(1) \qquad x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a)$$

die Gleichungen der Extremalen eines Feldes, die also von einem festen Punkte 0 ausgehen, oder von einer Kurve $\mathfrak{K}$, deren allgemeiner Punkt 0 sei, transversal im engeren oder weiteren Sinne ausstrahlen, so daß die Gleichung

$$(2) \qquad -\delta z_0 + (F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y)|^0 = 0$$

gilt, in der z_0 eine Ortsfunktion auf der Kurve $\mathfrak{K}$ oder auch identisch $z_0 = 0$ sein kann. Es sei möglich, z_0 ebenso wie t_0 als reguläre Funktion von a auszudrücken, indem man etwa für a einen Parameter nimmt, der die Lage des Punktes 0 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ bestimmt. Dann kann man, unter 1 den allgemeinen Punkt (t, a) verstehend,

$$z = z_0 + \bar{J}_{01} = \zeta(t, a)$$

setzen. Deuten wir jetzt x, y, z als rechtwinklige Raumkoordinaten und geht die z-Achse lotrecht nach oben, so geben die Gleichungen

$$(3) \qquad x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a), \quad z = \zeta(t, a)$$

bei festem Wert von a eine Raumkurve, die wir nach § 10, II. als räumliche Extremale bezeichnen können; sie strahlt von der Raumkurve $\mathfrak{K}'$ aus, deren Gleichungen

$$x = \xi(t_0, a), \quad y = \eta(t_0, a), \quad z = z_0$$

bei veränderlichem Wert von a sind, und deren lotrechte Projektion die Kurve $\mathfrak{K}$ ist; dabei gilt die Gleichung (2), in der δ den Fortgang auf der Kurve $\mathfrak{K}'$ bedeutet, x' und y' sich auf die Extremalen (1) beziehen. Natürlich kann $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{K}$ zusammenfallen oder in einen Punkt entarten. Die Gesamtheit der räumlichen Extremalen (3) bildet eine Fläche $\mathfrak{F}$, die wir ein räumliches Feld nennen wollen. Entsprechend der Umgebung jedes Wertsystems (t, a), in welchem $\Delta(t, a) \neq 0$, erhalten wir, da t und a hier als reguläre Funktionen von x und y darstellbar sind, ein Flächenstück, auf welchem z eine reguläre Funktion von x und y ist; an einer Stelle, an der $\Delta(t, a) = 0$ ist, läuft eine Hülle der ebenen Feldextremalen, deren eine Seite nach

§ 15, III. von den Extremalen doppelt bedeckt wird; die Hülle ist also Projektion einer singulären Linie der Fläche $\mathfrak{F}$, von der zwei Flächenstücke nach einer Seite hin ausgehen, also einer Rückkehrkante; ein Rückkehrpunkt der Hülle bleibe als Ausnahmefall beiseite.

Die schon in den §§ 14 und 15 benutzte Haupteigenschaft der Größe z besteht nun in der Gleichung

$$-\delta z + F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y = 0, \tag{4}$$

in der

$$\delta = dt\frac{\partial}{\partial t} + da\frac{\partial}{\partial a}$$

gesetzt werden kann; δ bedeutet also einen beliebigen Fortgang auf der Fläche $\mathfrak{F}$. Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der Formel

$$\delta \overline{J}_{01} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_0^1$$

und der Gleichung (2); sie kann auch, wie in § 14, durch unmittelbare Differentiation des Ausdrucks

$$\overline{J}_{01} = \int_{t_0}^{t} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\,dt$$

ohne den Algorithmus des Zeichens δ erhalten werden. Man kann die Gleichung (4) auch so aussprechen, daß beim Fortgang längs der Fläche $\mathfrak{F}$ überall die allgemeinere Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

Schneiden wir nun die Fläche $\mathfrak{F}$ mit einer wagerechten Ebene $z = \text{const.} = z_1$, so erhalten wir eine Schnittkurve, die mit ihrer Projektion auf die xy-Ebene, die wir $\mathfrak{P}$ nennen, kongruent ist, und längs deren $\delta z = 0$, also auch

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y = 0 \tag{5}$$

ist, also die engere Transversalitätsbedingung erfüllt ist. Diese hier selbstverständlich erscheinende Bemerkung ergibt einen inhaltreichen Satz, den T r a n s v e r s a l e n s a t z, wenn wir wieder in die xy-Ebene zurückgehen.

Längs der Kurve $\mathfrak{P}$ ist $z = z_1$, d. h. wenn wir sie als Ort der Punkte 1 ansehen, hat die Größe

$$z = z_0 + \overline{J}_{01},$$

gebildet längs der Extremalen des Feldes, überall denselben Wert; man ist vom Punkte 0 auf jeder dieser Kurven bis zu dem Punkte 1 gegangen, in welchem die Größe z den festen

Wert z_1 hat, und der Ort der so erhaltenen Punkte 1 ist die Kurve $\mathfrak{P}$, die nach (5) von den Feldextremalen transversal geschnitten wird. Dabei macht es nichts aus, ob die Extremale 0 1 zwischen 0 und 1 einmal eine Hülle, die entsprechende räumliche Extremale eine Rückkehrkante der Fläche $\mathfrak{F}$ berührt hat.

Sei im besonderen $z_0 = 0$; dann hat man folgenden Satz. Strahlen eine Schar von Extremalen in den Punkten 0 von einer Kurve $\mathfrak{K}$ transversal aus, und bestimmt man auf jeder von ihnen den Punkt 1 so, daß das längs ihrer gebildete Integral $\overline{J}_{01}$ einen und denselben festen Wert erhält, so wird auch der Ort der Punkte 1 von den Extremalen transversal geschnitten. Die Kurve $\mathfrak{K}$ kann in einen Punkt 0 entarten, von dem dann die Extremalen ausgehen.

Man erkennt hier die Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Gauß, daß eine Schar gleichlanger geodätischer Bögen, die auf der ihre Anfangspunkte enthaltenden Linie senkrecht stehen, auch den Ort ihrer Endpunkte unter rechtem Winkel schneiden; bei geodätischen Linien fällt ja die transversale Lage mit der senkrechten zusammen.

II. Aber die Willkür, die in der Wahl der Funktion z_0 bleibt, führt auch im Bereich der geodätischen Linien über den Gaußschen Lehrsatz hinaus.

Sei z. B. J wieder das Bogenintegral einer auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{f}$ liegenden Kurve und z_0 die Länge der Kurve $\mathfrak{K}$ von einem festen Punkte 2 ab gemessen; die allgemeinere Transversalität bedeutet dann nach § 10, III., daß die Feldextremalen die Kurve $\mathfrak{K}$ berühren. Dann ist $z_0 + \overline{J}_{01}$ die Länge des auf der Fläche $\mathfrak{f}$ gespannten unausdehnbaren Fadens, der von der Kurve $\mathfrak{K}$ abgewickelt wird. Unser allgemeiner Transversalensatz ergibt dann, daß der Ort der Endpunkte des Fadens von diesem überall unter rechtem Winkel geschnitten wird, wie in der Ebene.

Andere Anwendungen bietet die geometrische Optik. Die Lichtstrahlen in der Ebene, die optisch ungleichartig, aber isotrop sei, gestalten sich, dem Fermatschen Prinzip gemäß, nach der Forderung

$$\delta \int v\, ds = 0, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

wenn $v = v(x, y)$ den reziproken Wert der Lichtgeschwindigkeit bedeutet; das Integral

$$J = \int v\, ds$$

ist dann die verbrauchte Zeit. Die Kurve $\mathfrak{K}$ trenne nun die Gebiete $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{G}$, in denen die Lichtgeschwindigkeiten $1/v$ und $1/V$ seien. Im Gebiet $\mathfrak{G}$ mögen Lichtstrahlen von einem Punkte oder senkrecht von einer Kurve $\mathfrak{K}_2$ ausgehen, deren Punkte 2 seien, also transversal bezüglich des Integrals

$$\mathfrak{J} = \int V\,ds;$$

sie mögen auf die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte 0 auffallen und bis zum Punkte 1 weitergehen; dann verlangt das Fermatsche Prinzip

$$\delta \int_2^0 V\,ds + \delta \int_0^1 v\,ds = 0; \tag{6}$$

die verbrauchte Zeit ist

$$\mathfrak{J} + J = \int_2^0 V\,ds + \int_0^1 v\,ds.$$

In den Gebieten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ sind die Lichtstrahlen Extremalen der Integrale $\mathfrak{J}$ und J; der Punkt 0 ist nicht vorgeschrieben; also gibt die Gleichung (6)

$$V \frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\Bigg|_2^0 + v\,\frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\Bigg|_0^1 = 0.$$

Ist der Punkt 1 vorgeschrieben, so folgt auf Grund der vorausgesetzten Transversalität an der Kurve $\mathfrak{K}_2$

$$V \frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\Bigg|^0 - v\,\frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\Bigg|^0 = 0; \tag{7}$$

dabei beziehen sich x', y' im ersten Summanden auf den Strahl im Gebiet $\mathfrak{G}$, im zweiten Summanden auf den Strahl im Gebiet $\mathfrak{g}$. Sind T und t die Richtungen derselben nach wachsenden Werten des Parameters t, also von 2 nach 0 hin und von 0 nach 1 hin, so folgt, da δx, δy sich auf die Trennungslinie $\mathfrak{K}$ beziehen, deren Richtung δ sei,

$$V_0 \cos(T\delta) = v_0 \cos(t\delta), \tag{8}$$

also das gewöhnliche Brechungsgesetz.

Setzen wir nun

$$z_0 = \int_2^0 V\,ds,$$

so bedeutet die Gleichung (6) offenbar

$$\delta z_0 = F_{x'}\,\delta x + F_{y'}\,\delta y\,|^0,$$

wobei x', y' der Richtung t zugehören. Hier liegt also, dem Brechungsgesetz gemäß, für den Strahl im Gebiet $\mathfrak{g}$ die allgemeinere Transversalität vor, und der Transversalitätssatz zeigt für das von der Kurve $\mathfrak{K}_2$ ausgehende Strahlensystem, daß der Ort der nach fester Zeit

$$z_0 + \overline{J}_{01} = \overline{\mathfrak{J}}_{20} + \overline{J}_{01}$$

erreichten Punkte, die Welle, die Lichtstrahlen senkrecht schneidet; diese gingen von einer Kurve senkrecht aus und werden gebrochen.

Man übersieht leicht, daß die Gleichungen (7) und (8) auch im Falle $v = V$ die Reflexion darstellen, wie sie sich aus dem Fermatschen Prinzip ergibt. Daraus erhält man dann durch mehrfache Anwendung der obigen Betrachtung den Satz, daß Lichtstrahlen, die senkrecht von einer Kurve oder von einem Punkte ausstrahlen, nach beliebig vielen Brechungen und Reflexionen in isotropen Mitteln die Wellenfront senkrecht schneiden.

Die Bedingung, senkrecht von einer Kurve auszustrahlen, die auch in der Ebene weggelassen werden kann, muß hinzugefügt werden, um den Satz auf den Raum übertragbar zu gestalten.

Gehen die Extremalen schließlich alle durch einen festen Punkt 1, so schließt man nach der für einen Sonderfall in § 19, I. gebrauchten Methode, daß die Größe $z_0 + \overline{J}_{01}$ auf ihnen allen denselben Wert erhält. Gehen Lichtstrahlen z. B. von einem festen Punkte aus und vereinigen sich wieder in einem festen Punkte, so ist die zugehörige Zeit, in der sie von dem ersten zum zweiten festen Punkte gelangen, bei allen dieselbe.

III. Betrachten wir jetzt die Feldextremalen

$$x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a) \tag{9}$$

auf solchen Strecken, auf denen $F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) \neq 0$, und zwar positiv bleibt und $\Delta(t, a) \neq 0$ ist. Auf der Extremale $a = a_0$ oder $\mathfrak{C}$ sei 23 ein Bogen, der diese Forderung erfüllt; dabei sei $t_2 < t_3$. Entartet die Ausgangskurve nicht in einen Punkt und wird sie nicht von den Feldextremalen berührt, so kann der Punkt 2 nach § 15 auch auf der Kurve $\mathfrak{K}$ selbst liegen. Nach dem ersten Einbettungssatze (§ 11) kann dann der Bogen 23 mit einem Gebiet $\mathfrak{G}$ umgeben werden, dessen Punkte den Wertsystemen t, a eindeutig umkehrbar entsprechen. Da ferner, wenn 1 der allgemeine Punkt auf den Feldextremalen ist und

$$u = z_0 + \overline{J}_{01}, \quad v = a \tag{10}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\,|^1$$

von Null verschieden ist, so kann man die erste Gleichung (10) im Gebiet $\mathfrak{G}$ nach t auflösen, und dann mittels der Gleichungen (9) die Größen x und y als Funktionen von u und v darstellen, und zwar im Gebiet $\mathfrak{G}$ mit eindeutig umkehrbarer Beziehung der Systeme (x, y) und (u, v), da t und u bei festem Wert von a oder v einander eindeutig umkehrbar entsprechen. Die Größen u, v heißen die Normalkoordinaten des Feldes. Durch Einsatz der in u, v ausgedrückten Werte x, y erhalte man

$$F(x, y, x', y') = G(u, v, u', v'); \tag{11}$$

dann ist längs einer Feldextremale $v' = 0$ und z_0 von v allein abhängig, also, wenn die Punkte 4 und 1 auf derselben Kurve $v =$ const. dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehören, und $t_4 < t_1$ ist,

$$u = z_0 + \int_0^4 F(x, y, x', y')\,dt + \int_4^1 F(x, y, x', y')\,dt,$$

und wenn man im letzten Integral die Gleichung (11) benutzt und u für t als Integrationsveränderliche einführt,

$$u = z_0 + \int_0^4 F\,dt + \int_4^1 G(u, v, u', 0)\,dt$$

$$= z_0 + \int_0^4 F\,dt + \int_4^1 G(u, v, 1, 0)\,du.$$

Differenziert man nach u, so folgt

$$1 = G(u, v, 1, 0),$$

oder auch, wenn bei der Annahme $u' > 0$ allgemein $G(u, v, u', v') = u' g(u, v, s)$, $s = dv/du$ gesetzt wird,

$$1 = g(u, v, 0). \tag{12}$$

Da ferner nach dem Transversalensatze die Extremalen $v =$ const. die Kurven $u =$ const. transversal im engeren Sinne schneiden und der maßgebende Ausdruck $F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y$ nach § 3 eine Invariante ist, also

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y = G_{u'}\delta u + G_{v'}\delta v,$$

so muß die Gleichung

$$G_{u'}\delta u + G_{v'}\delta v = (g - s g_s)\delta u + g_s \delta v = 0$$

durch die Annahme $s=0$, $\delta u=0$ erfüllt werden, und es ergibt sich

$$g_s(u, v, 0)=0. \tag{13}$$

Ist z. B. J das Bogenintegral auf einer Fläche, auf der x und y krummlinige Gaußsche Koordinaten sind, also

$$F(x, y, x', y')dt=\sqrt{\mathfrak{e}\,dx^2+2\mathfrak{f}\,dx\,dy+\mathfrak{g}\,dy^2},$$

mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ als Funktionen von x und y, so ist auch

$$G(u, v, u', v')dt=\sqrt{\mathfrak{e}_0\,du^2+2\mathfrak{f}_0\,du\,dv+\mathfrak{g}_0\,dv^2},$$

wobei $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$ nur von u und v abhängen; man hätte

$$g(u, v, s)=\sqrt{\mathfrak{e}_0+2\mathfrak{f}_0 s+\mathfrak{g}_0 s^2}$$

zu setzen und die Gleichungen (12), (13) ergäben

$$\mathfrak{e}_0=1, \quad \mathfrak{f}_0=0,$$

$$G(u, v, u', v')\,dt=\sqrt{du^2+\mathfrak{g}_0\,dv^2}.$$

Man erhält so die Gaußsche Form des Bogenelements bei der Voraussetzung, daß $v=$ const. geodätische Linien, $u=$ const. ihre rechtwinkligen Trajektorien, also Transversalen nach unserer Bezeichnung sind.

IV. Verbindet man die Gleichungen (12) und (13), so folgt, daß die Taylorsche Entwicklung der Größe $g(u, v, s)$ nach Potenzen von s die folgende Gestalt hat:

$$g(u, v, s)=1+\frac{s^2}{2}g_{ss}(u, v, \theta s); \tag{14}$$

dabei ist $0<\theta<1$, und die Formel gilt, wenn s eine den Wert $s=0$ enthaltende Strecke $\mathfrak{S}$ durchläuft, auf der die Größen $g(u, v, s)$, $g_s(u, v, s)$, $g_{ss}(u, v, s)$ stetig sind.

Sind nun die Punkte 2 3 außer durch den Extremalenbogen 2 3 durch eine dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehörige Kurve $\mathfrak{L}$ verbunden, längs deren x und y und damit u und v Funktionen eines Parameters τ sind, und in deren von 2 nach 3 hin gerichteten Bogenelementen immer

$$G(u, v, du, dv)=g(u, v, s)du$$

gesetzt werden kann, die zugehörigen Werte von s aber der Strecke $\mathfrak{S}$ angehören, so folgt

$$
\begin{aligned}
J_{23} &= \int_{\tau_2}^{\tau_3} g(u, v, s) \frac{du}{d\tau} d\tau \\
(15) \qquad &= \int_{\tau_2}^{\tau_3} \frac{du}{d\tau} d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, \theta s) \frac{du}{d\tau} d\tau \\
&= \overline{J}_{23} + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, \theta s) \frac{du}{d\tau} d\tau,
\end{aligned}
$$

die Differenz $J_{23} - \overline{J}_{23}$ hat also ein festes Vorzeichen, wenn dies von der Größe $g_{ss}(u, v, \theta s)$ gilt, und das Extrem des Integrals J ist beim Vergleich der Extremale mit den Kurven $\mathfrak{L}$ auf eine neue Weise nachgewiesen.

Um das Vorzeichen der Größe g_{ss} zu bestimmen, gehen wir davon aus, daß

$$\frac{g_{ss}(u, v, s)}{u'^3} = G_1(u, v, u', v')$$

zu setzen ist, wobei G_1 aus G ebenso gebildet ist wie F_1 aus F, d. h.

$$G_{u'u'}(u, v, u', v') = v'^2 G_1(u, v, u', v');$$

die Größen F_1 und G_1 stehen aber nach § 3 in dem Zusammenhang

$$G_1 = F_1 \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2;$$

die Größen G_1 und F_1 haben also dasselbe Vorzeichen, wenn die Wertepaare (u', v') und (x', y') geometrisch dieselbe Richtung darstellen, d. h. wenn

$$x' = x_u u' + x_v v', \qquad y' = y_u u' + y_v v'$$

ist. Das Element $du > 0$, $dv = \theta s du$ stellt nun eine Richtung dar, die in den hohlen Winkel zwischen den Richtungen $du > 0$, $dv = 0$ und $du > 0$, $dv = s du$ hineinweist; diese Richtungen sind diejenigen der Feldextremale nach wachsenden t genommen, und der Kurve $\mathfrak{L}$ in der Richtung 23 genommen. Ist also für alle diese Richtungen F_1 stets positiv oder stets negativ, so gilt dasselbe von $g_{ss}(u, v, \theta s)$ und damit nach (15) von $J_{23} - \overline{J}_{23}$, womit das Extrem unter der Jacobischen und Legendreschen Bedingung nachgewiesen ist.

Die bisherige Betrachtung muß ergänzt werden, wenn auf der Kurve $\mathfrak{L}$ Punkte vorkommen sollten, in denen $du = 0$ ist, d. h. die Transversale $u = \text{const.}$ berührt wird. Schreibt man die maßgebende Größe in der Form

$$(16) \qquad J_{23} - \bar{J}_{23} = \int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} \left[G\left(u, v, \frac{du}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}\right) - \frac{du}{d\tau} \right] d\tau,$$

so sieht man, daß der Integrand überall positiv ist, wo $du/d\tau$ verschwindet oder negativ ist. Sobald $du/d\tau$ wieder positiv ist, kann man nach (14)

$$G\left(u, v, \frac{du}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}\right) - \frac{du}{d\tau} = \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, \theta s) \frac{du}{d\tau}$$

setzen; hat also G_1 in den betrachteten Bogenelementen das positive Vorzeichen, so ist der Integrand in der Gleichung (16) durchweg positiv, das Minimum ist gesichert. Ein starkes Maximum könnte auf diese Weise nicht nachgewiesen werden, ist ja auch bei durchweg positivem Integranden unmöglich, da man durch vergrößerte Länge der Kurve $\mathfrak{L}$ immer das Integral J_{23} vermehren könnte.

§ 23.

Die Jacobi-Hamiltonsche Methode.

I. Beim Fortgang auf der Fläche $\mathfrak{S}$, dem dreistufig räumlichen Felde, besteht nach § 22, I. überall die Gleichung

$$(1) \qquad -\delta z + F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y = 0,$$

wobei die Größen x', y' sich auf die durch den betreffenden Punkt gehende Feldextremale beziehen. Schreibt man also die Gleichung der Fläche in der Form $z = f(x, y)$ und setzt wieder $p = \partial f / \partial x$, $q = \partial f / \partial y$, so gilt allgemein die Gleichung

$$-dz + p\,dx + q\,dy = 0;$$

da nun δ in der Gleichung (1) und d dasselbe bedeuten, folgt

$$(2) \qquad p = F_{x'}, \quad q = F_{y'},$$

und auf den rechten Seiten dieser Gleichungen erscheinen die Größen x', y' nur in der Verbindung $y'/x' = \mathfrak{p}$. Kann man diese Größe eliminieren, so ergibt sich für die Fläche $\mathfrak{S}$ eine partielle Differentialgleichung

$$(3) \qquad \Phi(x, y, p, q) = 0.$$

Die Elimination ist möglich, wenn wir wie bisher annehmen, in den Elementen der Feldextremalen sei $F_1 \neq 0$; denn offenbar ist

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y'} = \frac{1}{x'},$$

$$F_{y'y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y'} = \frac{1}{x'} \frac{\partial F_{y'}}{\partial \mathfrak{p}} = x'^2 F_1, \quad \frac{\partial F_{y'}}{\partial \mathfrak{p}} = x'^3 F_1;$$

ist also $x' \neq 0$, so kann man $\mathfrak{p}$ aus der zweiten Gleichung (2) bestimmen und in die erste einsetzen; ist $y' \neq 0$, so kann man ebenso x'/y' neben x und y als Unabhängige in $F_{x'}$ und $F_{y'}$ betrachten und aus der ersten Gleichung (2) bestimmen.

Werde bei diesen Eliminationen gefunden:

$$\mathfrak{p} = \frac{y'}{x'} = \mathfrak{F}(x, y, q), \quad \frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{x'}{y'} = \mathfrak{G}(x, y, p),$$

dann erscheint die Gleichung (3) in der Form

(4) $$\mathfrak{F}(x, y, q)\, \mathfrak{G}(x, y, p) = 1.$$

Sei nun U irgend eine Lösung der Gleichung

(5) $$\Phi(x, y, U_x, U_y) = 0,$$

die in einem gewissen Gebiet der xy-Ebene regulär ist; wenn auf den dies Gebiet durchsetzenden Feldkurven keine der Größen $x' = \xi_t$, $y' = \eta_t$ verschwindet, kann man die gewöhnliche Differentialgleichung

(6) $$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{F}(x, y, U_y)$$

ansetzen; aus ihr folgt nach der Definition der Funktion $\mathfrak{F}$

(7) $$U_y = F_{y'}(x, y, x', y'),$$

wobei x', y' irgend zwei Größen sind, deren Verhältnis y'/x' den in der Gleichung (6) auftretenden Wert dy/dx hat. Da ferner die Gleichungen (4) und (3) dasselbe bedeuten, so folgt aus der Gleichung (5)

$$\mathfrak{F}(x, y, U_y)\, \mathfrak{G}(x, y, U_x) = 1,$$

also nach (6)

(8) $$\frac{dx}{dy} = \mathfrak{G}(x, y, U_x),$$

und nach der Art, wie das Funktionszeichen $\mathfrak{G}$ eingeführt ist, folgt hieraus

(9) $$U_x = F_{x'}(x, y, x', y')$$

mit derselben Bedeutung der Größen x', y' wie in der Gleichung (7).

Die gleichwertigen gewöhnlichen Differentialgleichungen (6) und (8) haben nun eine Schar von Lösungen

$$\varphi(x, y, a) = 0, \tag{10}$$

in denen a die Integrationskonstante bedeutet, und die ein gewisses Gebiet $\mathfrak{g}$ der xy-Ebene einfach bedecken, so daß $a = \psi(x, y)$ als reguläre Ortsfunktion aufgefaßt werden kann. Sei ferner t die Bogenlänge auf einer der Kurven (10), die wir $\mathfrak{K}$ nennen wollen, gemessen von einer beliebigen regulären Kurve ab, die jede Kurve $\mathfrak{K}$ einmal in dem Gebiet $\mathfrak{g}$ durchschneidet, dann ist $x' = dx/dt$ und $y' = dy/dt$ gesetzt,

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

und auch die Größen x', y' sind im Gebiet $\mathfrak{g}$ reguläre Funktionen von x und y. Dasselbe gilt dann von den Größen $F_{x'}$ und $F_{y'}$, und die Gleichungen (7) und (9) lehren bei dieser Auffassung

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x},$$

dabei kann man setzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} &= F_{xx'} + F_{x'x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + F_{x'y'}\frac{\partial y'}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} &= F_{xy'} + F_{y'x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + F_{y'y'}\frac{\partial y'}{\partial x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Berücksichtigt man nun die aus der Homogeneität der Funktion F folgenden Gleichungen

$$x'F_{x'x'} + y'F_{x'y'} = 0, \quad x'F_{x'y'} + y'F_{y'y'} = 0,$$
$$F_x = x'F_{xx'} + y'F_{xy'},$$

vervielfacht die Gleichungen (11) mit x' und y' und addiert, so folgt

$$x'\frac{\partial F_{x'}}{\partial x} + y'\frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{dF_{x'}}{dt} = F_x;$$

auf dieselbe Weise ergibt sich aus den entsprechenden Ausdrücken für $\partial F_{y'}/\partial x$ und $\partial F_{y'}/\partial y$ die Gleichung

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = F_y.$$

Die Kurven $\mathfrak{K}$, die durch Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung erhalten wurden, sind also Extremalen des Integrals

$$J = \int F(x, y, x', y')\,dt,$$

und da die Gleichungen

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y = 0, \quad \delta U = 0$$

dasselbe bedeuten, sind die Kurven $U =$ const. die Transversalen der Kurvenschar $\mathfrak{K}$.

Durchschneidet man die Kurven $\mathfrak{K}$ mit einer Kurve $\mathfrak{L}$, die jeder von ihnen nur einmal begegnet, und zwar in einem Punkte 0, der $t = t_0$, $U = U_0$ ergibt, so daß t_0 eine eindeutige Funktion von a ist, so gilt auf der Kurve $\mathfrak{L}$ die Gleichung

$$(12) \qquad \delta U_0 = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta x \,|^0,$$

und. da auf jeder Kurve $\mathfrak{K}$ offenbar

$$\frac{dU}{dt} = U_x x' + U_y y' = x' F_{x'} + y' F_{y'} = F(x, y, x', y')$$

ist, so folgt

$$U = U_0 + \int_{t_0}^{t} F(x, y, x', y')\, dt = U_0 + \overline{J}_{01}.$$

Die Gleichung (12) kann dann als allgemeinere Transversalitätsbedingung bezüglich der Größe U aufgefaßt werden, und die Fläche $z = U(x, y)$ ist eine Fläche $\mathfrak{S}$ im Sinne des § 22, ein räumliches Feld von Extremalen des Integrals J. Unter diesen Begriff fällt also jede Fläche, die die Differentialgleichung

$$\Phi(x, y, p, q) = 0,$$

die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung der Variationsaufgabe $\delta J = 0$, erfüllt.

II. Enthält die Größe U einen willkürlichen Festwert c, der in ihr aber nicht so auftrete, daß $\partial U/\partial c$ konstant ist, so kann man ohne Integration eine zweistufige Schar von Extremalen, also eine in gewissen Gebieten allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung herstellen.

In den Gleichungen

$$(13) \qquad U_x = F_{x'}, \quad U_y = F_{y'}$$

kann nämlich, wenn ihre rechten Seiten als Funktionen von x, y und $\mathfrak{p} = y'/x'$ angesehen werden, für $\mathfrak{p}$ der Ausdruck (6) eingesetzt und jetzt x, y als frei veränderlich angesehen werden, wobei $\mathfrak{p}$ von c abhängen wird; man erhält dann, indem man nach c differenziert,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial c} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial c}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial c} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial c},$$

und die Gleichungen

$$F_{x'y'} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y'} = \frac{1}{x'} \frac{\partial F_{x'}}{\partial \mathfrak{p}},$$

$$F_{y'y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y'} = \frac{1}{x'} \frac{\partial F_{y'}}{\partial \mathfrak{p}}$$

ergeben

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial c} = x' F_{x'y'} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial c}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial c} = x' F_{y'y'} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial c};$$

wenn man die aus der Homogeneität der Funktion F folgende Gleichung

$$x' F_{x'y'} + y' F_{y'y'} = 0$$

berücksichtigt und die letzten Gleichungen mit x' und y' vervielfacht und addiert, so folgt

$$x' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial c} + y' \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial c} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial c} = b,$$

wobei b einen Festwert bedeutet. Diese Gleichung gilt also für die Kurven, auf die sich in den Gleichungen (13) die Größen x', y' beziehen, die Kurven $\mathfrak{K}$. Diese Schar ist jetzt von c abhängig; eine zweifach unendliche Schar von Extremalen ist also durch die Gleichung $\partial U/\partial c = b$ dargestellt, sobald man eine mit dem Festwert c behaftete Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung gefunden hat, bei der $\partial U/\partial c$ von x und y nicht unabhängig ist.

III. Als Beispiel betrachten wir wie in § 7, IV. das Prinzip der kleinsten Wirkung für die ebene Bewegung eines Punktes unter Wirkung einer Kraft, deren x-Komponente nur von x, deren y-Komponente nur von y abhängt, deren Potential also die Form $f(x) + \mathfrak{f}(y)$ hat, oder, was dasselbe bedeutet, die geodätische Linie auf den Liouvilleschen Flächen:

$$\delta \int \sqrt{f(x) + \mathfrak{f}(y)} \; \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 0,$$

$$F_{x'} = \sqrt{f(x) + \mathfrak{f}(y)} \; \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = U_x,$$

$$F_{y'} = \sqrt{f(x) + \mathfrak{f}(y)} \; \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = U_y;$$

die Elimination von y'/x' ergibt

$$U_x^2 + U_y^2 = f(x) + \mathfrak{f}(y).$$

Man findet eine mit dem Festwerte c behaftete Lösung, indem man setzt

$$U_x^2 = f(x) + c, \quad U_y^2 = \mathfrak{f}(y) - c,$$
$$U = \int \sqrt{f(x) + c}\, dx + \int \sqrt{\mathfrak{f}(y) - c}\, dy;$$

für die Extremalen findet man nach II.

$$2\frac{\partial U}{\partial c} = \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)+c}} - \int \frac{\mathfrak{f}'(y)dy}{\sqrt{\mathfrak{f}(y)-c}} = \text{const.} = b,$$

übereinstimmend mit § 7, IV.

§ 24.

Verallgemeinerung und kanonische Differentialgleichungen.

I. Die Verallgemeinerung der Jacobi-Hamiltonschen Methode liegt nahe und möge für Aufgaben in $n+1$ Veränderlichen angedeutet werden. Gestellt sei die Aufgabe

$$\delta \int F(x, y, z, \ldots x', y', z', \ldots) dt = 0,$$

in der F in den Ableitungen positiv homogen von erster Stufe, also $F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}, \ldots$ nur von den Verhältnissen $\mathfrak{p} = y'/x'$, $\mathfrak{q} = z'/x', \ldots$ abhängig sein mögen, und n die Anzahl der Größen $y, z, \ldots$ sei. Man eliminiere dann $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ aus den Gleichungen

$$(1) \qquad F_{x'} = \frac{\partial V}{\partial x} = V_x, \quad F_{y'} = V_y, \quad F_{z'} = V_z, \ldots$$

und erhalte eine Gleichung

$$\Phi(x, y, z, \ldots V_x, V_y, V_z, \ldots) = 0.$$

Ist V irgend eine Lösung derselben, so berechne man $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ aus den letzten n Gleichungen (1), womit dann die erste durch diese Werte von selbst erfüllt ist; man erhalte

$$\mathfrak{p} = \frac{dy}{dx} = \mathfrak{f}(x, y, z, \ldots), \quad \mathfrak{q} = \frac{dz}{dx} = \mathfrak{g}(x, y, z, \ldots), \ldots$$

und denke dies System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch eine n-fach unendliche Schar von Kurven, d. h. von einfachen Mannigfaltigkeiten im Gebiet der Größen $x, y, z, \ldots$

$$(2) \quad \varphi_1(x, y, z, \ldots a_1, a_2, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y, z, \ldots a_1, a_2, \ldots) = 0$$

mit den Festwerten $a_1, a_2, \ldots$ integriert. Sei t auf jeder dieser Kurven die Bogenlänge, gerechnet von einer sie je einmal treffenden stetigen n-stufigen Mannigfaltigkeit aus, d. h. sei $x'^2 + y'^2 + \cdots = 1$; dann sind in einem gewissen Gebiet $x', y', z', \ldots$

reguläre Funktionen von $x, y, z, \ldots$ und in dieser Auffassung findet man den Gleichungen (1) zufolge

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_{x'}}{\partial z} = \frac{\partial F_{z'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_{y'}}{\partial z} = \frac{\partial F_{z'}}{\partial y},$$

also

$$\begin{aligned} x' \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} + y' \frac{\partial F_{x'}}{\partial y} + z' \frac{\partial F_{x'}}{\partial z} + \cdots &= \frac{d F_{x'}}{d t} \\ = x' \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} + y' \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + z' \frac{\partial F_{z'}}{\partial x} + \cdots & \end{aligned} \tag{3}$$

Anderseits ist offenbar in derselben Auffassung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} &= F_{x'x} + F_{x'x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + F_{x'y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + F_{x'z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \cdots, \\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} &= F_{xy'} + F_{y'x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + F_{y'y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + F_{y'z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \cdots, \\ \frac{\partial F_{z'}}{\partial x} &= F_{xz'} + F_{z'x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + F_{z'y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + F_{z'z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \cdots, \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

und wegen der Homogeneität der Funktion F gilt die Gleichung

$$F_x = x' F_{xx'} + y' F_{xy'} + z' F_{xz'} + \cdots;$$

vervielfacht man also die Gleichungen (4) mit $x', y', z' \ldots$ und addiert, so ergibt sich nach (3)

$$F_x = \frac{d F_{x'}}{d t},$$

und ebenso natürlich

$$F_y = \frac{d F_{y'}}{d t}, \quad F_z = \frac{d F_{z'}}{d t}, \ldots$$

Die Kurven (2), auf die sich die Größen $x', y', z' \ldots$ beziehen, sind also Extremalen des Integrals

$$\int F\, d t. \tag{5}$$

Eine $2n$-fach unendliche Schar von solchen findet man, wenn V mit n Festwerten $c_1, \ldots c_n$ behaftet ist; aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_\mathfrak{a}} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial \mathfrak{p}} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial c_\mathfrak{a}} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial \mathfrak{q}} \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial c_\mathfrak{a}} + \cdots, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n$$

und ähnlichen Gleichungen ergibt sich leicht

$$x' \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial c_\mathfrak{a}} + y' \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial c_\mathfrak{a}} + z' \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial c_\mathfrak{a}} + \cdots = 0;$$

auf den Kurven (2) ist also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial c_\mathfrak{a}}\right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial c_\mathfrak{a}} = b_\mathfrak{a} = \text{const.}, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n,$$

womit ersichtlich wird, daß durch eine mit n Festwerten behaftete Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung die Extremalen des Integrals (5) in gewisser Weise ohne Integration dargestellt werden können.

II. Denkt man sich allgemein aus den Gleichungen

$$\eta = F_{y'}, \quad \zeta = F_{z'}, \ldots$$

die Größen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, ... durch $x, y, \ldots \eta, \zeta, \ldots$ ausgedrückt und in die Größe $F_{x'}$ eingesetzt, so erhalte man

$$F_{x'} = -H(x, y, z, \ldots, \eta, \zeta, \ldots).$$

Nun besteht die Gleichung

$$F = x' F_{x'} + y' F_{y'} + \cdots,$$

also wenn man, was angeht,

$$\text{(6)} \qquad \begin{gathered} F = x' f(x, y, z, \ldots, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots), \quad F_{y'} = f_\mathfrak{p} = \eta, \\ F_{z'} = f_\mathfrak{q} = \zeta, \ldots \end{gathered}$$

setzt,

$$\text{(7)} \qquad F_{x'} = f - \mathfrak{p} f_\mathfrak{p} - \mathfrak{q} f_\mathfrak{q} - \cdots = -H(x, y, \ldots \eta, \zeta, \ldots).$$

In dieser Umformung kann man $x', y', \ldots$ sowie $\mathfrak{p} = y'/x'$, $\mathfrak{q} = z'/x', \ldots$ als frei veränderlich betrachten, und man kann die letzte Gleichung in dieser Auffassung differenzieren; so ergibt sich

$$\begin{gathered} f_x dx + f_y dy + \cdots + f_\mathfrak{p} d\mathfrak{p} + f_\mathfrak{q} d\mathfrak{q} + \cdots \\ - \mathfrak{p}\, d\eta - \mathfrak{q}\, d\zeta - \cdots - \eta\, d\mathfrak{p} - \zeta\, d\mathfrak{q} - \cdots \\ = -H_x dx - H_y dy - \cdots - H_\eta d\eta - H_\zeta d\zeta - \cdots, \end{gathered}$$

also, da links die Glieder mit $d\mathfrak{p}$, $d\mathfrak{q}$, ... sich heben, und die Größen $x, y, \ldots \eta, \zeta, \ldots$ als unabhängig gelten können,

$$\text{(8)} \qquad f_x = -H_x, \quad f_y = -H_y, \ldots \quad \mathfrak{p} = H_\eta, \quad \mathfrak{q} = H_\zeta, \ldots$$

Jetzt lauten die Eulerschen Gleichungen der Aufgabe

$$\delta \int F\, dt = 0, \quad \delta \int f\, dx = 0$$

wie folgt:

$$f_y = \frac{d f_\mathfrak{p}}{dx}, \quad f_z = \frac{d f_\mathfrak{q}}{dx}, \cdots;$$

benutzt man also die Gleichungen (6), (7), (8), um H, η, $\zeta, \ldots$ einzuführen, und wiederholt die zweite Hälfte der Gleichungen (8), so ergibt sich

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\zeta}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, & \cdots \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial \eta}, & \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta}, & \cdots, \end{aligned}$$

d. h. man ersetzt die Eulerschen Gleichungen durch ein kanonisches Gleichungssystem, in welchem die Größen η, $\zeta, \ldots$ an Stelle der Größen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}, \ldots$ eingeführt sind.

Dies Ergebnis läßt sich aber auch erreichen, ohne daß, wie bisher, eine der Veränderlichen wie x bevorzugt wird. Aus den Gleichungen

$$\text{(10)}\qquad \xi = F_{x'}, \quad \eta = F_{y'}, \quad \ldots$$

ergibt sich zunächst die Identität

$$\text{(11)}\qquad \xi x' + \eta y' + \cdots = F,$$

also

$$\begin{aligned} &\xi\, dx' + x'\, d\xi + \eta\, dy' + y'\, d\eta + \cdots \\ &= F_x\, dx + F_y\, dy + \cdots + F_{x'}\, dx' + F_{y'}\, dy' + \cdots, \end{aligned}$$

oder auch nach (10)

$$\text{(12)}\qquad x'\, d\xi + y'\, d\eta + \cdots - F_x\, dx - F_y\, dy - \cdots = 0.$$

Anderseits ergebe sich aus den $n+1$ Gleichungen (10) durch Elimination der n Größen y'/x', $z'/x', \ldots$ die Gleichung

$$\Phi(x, y, \ldots \xi, \eta, \ldots) = 0;$$

dann folgt

$$\Phi_\xi\, d\xi + \Phi_\eta\, dy + \cdots + \Phi_x\, dx + \Phi_y\, dy + \cdots = 0,$$

und da in dieser Gleichung wie der Gleichung (12) die Größen x, $y, \ldots$ und außerdem n der $n+1$ Größen ξ, $\eta, \ldots$ willkürlich genommen werden können, kann man z. B. alle Differentiale $= 0$ setzen, bis auf dx und $d\xi$, und erhält dann

$$x'\, d\xi - F_x\, dx = 0, \quad \Phi_\xi\, d\xi + \Phi_x\, dx = 0,$$

also

$$x' : \Phi_\xi = -F_x : \Phi_x;$$

ersetzt man dx durch dy, so ergibt sich ebenso

$$x' : \Phi_\xi = -F_y : \Phi_y = y' : \Phi_\eta \text{ usf.}$$

Nun bleiben die Gleichungen (10), (11) erfüllt, wenn man alle Größen x', $y', \ldots$ mit einem und demselben Faktor vervielfacht; ein besonderes System dieser Größen erfüllt also die Gleichungen

$$x' = \Phi_\xi, \quad y' = \Phi_\eta, \ldots \tag{13}$$

und dann ist auch

$$-F_x = \Phi_x, \quad -F_y = \Phi_y, \ldots \tag{14}$$

Jetzt gehen wir wieder auf die frühere Bedeutung der Größen $x', y', \ldots \xi, \eta$ zurück und erinnern daran, daß die Eulerschen Gleichungen der Aufgabe

$$\delta \int F\,dt = 0$$

in der Form

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad F_x - \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad F_y - \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \ldots$$

geschrieben werden können; auch in ihnen können die Größen $x', y', \ldots$ mit einem beliebigen Faktor vervielfacht werden, indem man für t eine andere Unabhängige einführt; da die Gleichungen (10), (11) nach wie vor erfüllt sind, kann man für jeden Wert von t die Größen $x', y' \ldots$ mit den durch die Gleichungen (13), (14) gekennzeichneten zusammenfallen lassen, und erhält so die Eulerschen Gleichungen in der kanonischen Form

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \ldots$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \ldots$$

III. Die der nichthomogenen Form der Variationsaufgabe entsprechenden kanonischen Gleichungen können der Gleichung (7) zufolge als Folgen der Forderung

$$\delta \int f\,dx = \delta \int (\eta \mathfrak{p} + \zeta \mathfrak{q} + \cdots - H)\,dx = 0, \qquad \mathfrak{p} = \frac{dy}{dx}, \quad \ldots$$

aufgefaßt werden; man erhält sie auch in der Tat durch Anwendung des gewöhnlichen Verfahrens, indem man x unvariiert läßt:

$$\begin{aligned}
\delta \int f\,dx = & \int \Big\{ \mathfrak{p}\,\delta\eta + \mathfrak{q}\,\delta\zeta + \cdots + \eta \frac{d\,\delta y}{dx} + \zeta \frac{d\,\delta z}{dx} + \cdots \\
& \qquad - H_y\,\delta y - H_z\,\delta z - \cdots - H_\eta\,\delta\eta - H_\zeta\,\delta\zeta - \cdots \Big\}\,dx \\
= & \;\eta\,\delta y + \zeta\,\delta z + \cdots + \int \Big\{ (\mathfrak{p} - H_\eta)\,\delta\eta + (\mathfrak{q} - H_\zeta)\,\delta z + \cdots \\
& \qquad - \left(\frac{d\eta}{dx} + H_y\right)\delta y - \left(\frac{d\zeta}{dx} + H_z\right)\delta z - \cdots \Big\}\,dx;
\end{aligned}$$

setzt man die Faktoren der Variationen unter dem Integralzeichen $= 0$, so erhält man die kanonischen Gleichungen

$$\mathfrak{p} = \frac{dy}{dx} = H_\eta, \quad \frac{d\eta}{dx} = -H_y, \ldots$$

Jetzt übersieht man leicht, unter welchen Bedingungen man die Größen $y, z, \ldots, \eta, \zeta, \ldots$ durch neue Veränderliche $\bar{y}, \bar{z}, \ldots, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \ldots$ derart ausdrücken kann, daß die kanonischen Gleichungen auch in den neuen Veränderliche ihre kanonische Gestalt behalten; diese Größen sind dann neue kanonische Veränderliche. Sei

$$H(y, z, \ldots, \eta, \zeta, \ldots) = \bar{H}(\bar{y}, \bar{z}, \ldots, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \ldots),$$

dann brauchen nur die Variationsaufgaben

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\delta \int \left(\eta \frac{dy}{dx} + \zeta \frac{dz}{dx} + \cdots - H\right) dx = 0, \\ &\delta \int \left(\bar{\eta} \frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{\zeta} \frac{d\bar{z}}{dx} + \cdots - \bar{H}\right) dx = 0 \end{aligned}$$

dieselben Extremalen zu ergeben. Erstere Aufgabe hat aber die Extremalen mit der Aufgabe

$$(16) \qquad \delta \int \left(\eta \frac{dy}{dx} + \zeta \frac{dz}{dx} + \cdots - H - \frac{d\Psi}{dx}\right) dx = 0$$

gemein, worin $\Psi = \Psi(x, y, z, \ldots, \eta, \zeta, \ldots)$ eine beliebige Funktion ist; denn das letzte Glied gibt zur Variation des zwischen den Stellen 0 und 1 erstreckten Integrals nur den Beitrag

$$\delta \int_0^1 \frac{d\Psi}{dx} dx = \delta \Psi \Big|_0^1,$$

der verschwindet, wenn man die Variationen $\delta y, \ldots, \delta \eta, \ldots$ an den Enden 0, 1 verschwinden läßt; das darf man aber nach § 3 bei der Ableitung der Eulerschen Gleichungen, so daß diese ihre Form durch das hinzugefügte Glied $d\Psi/dx$ nicht ändern. Es genügt also, daß die Aufgabe (16) mit der zweiten Aufgabe (15) dieselben Extremalen ergibt, was jedenfalls sicher ist, wenn

$$\begin{aligned} &\eta \frac{dy}{dx} + \zeta \frac{dz}{dx} + \cdots - H - \frac{d\Psi(y, \ldots \eta, \ldots)}{dx} \\ &\qquad = \bar{\eta} \frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{\zeta} \frac{d\bar{z}}{dx} + \cdots - \bar{H}, \end{aligned}$$

also, da $H = \bar{H}$ gesetzt wurde, wenn

$$\eta\, dy + \zeta\, dz + \cdots - d\Psi = \bar{\eta}\, d\bar{y} + \bar{\zeta}\, d\bar{z} + \cdots$$

Besteht diese Gleichung, so nennt man den Übergang von den ursprünglichen zu den neuen Veränderlichen eine Berührungstransformation, und es ist bewiesen, daß kanonische Gleichungen durch eine Berührungstransformation wieder in kanonische Gleichungen übergehen.

§ 25.

Allgemeine Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Als Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung einer Variationsaufgabe läßt sich jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung auffassen, und die Entwicklungen der §§ 23 und 24 stehen in engster Beziehung zu der Integrationsmethode von Cauchy.

Sei eine beliebige solche Gleichung, die die Unbekannte z nicht enthält, in zwei Unabhängigen

$$(1) \qquad \Phi(x, y, p, q) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial x};$$

ihre Lösung wird, wenn x, y, z rechtwinklige Raumkoordinaten sind, durch eine Fläche $\mathfrak{F}$ dargestellt, deren Tangentialebene die Gleichung

$$(2) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

hat. Durch irgend einen festen Punkt (x, y, z) geht eine Schar möglicher Tangentialebenen von Flächen $\mathfrak{F}$, die Ebenen (2), in denen die Größen p, q durch die Gleichung (1) verbunden sind. Diese Ebenen umhüllen einen Kegel $(\mathfrak{T})$. Zwei benachbarte von ihnen schneiden sich in einer Geraden $\mathfrak{G}$, auf der außer der Gleichung (2) noch die Gleichung

$$0 = (\xi - x)\, dp + (\eta - y)\, dq$$

gilt; in dieser sind, da x, y, z festgehalten werden, die Differentiale durch die Formel

$$\Phi_p\, dp + \Phi_q\, dq = 0, \quad dp : dq = \Phi_q : -\Phi_p$$

verbunden.

Seien nun x', y', z' rechtwinklige Koordinaten in einem System, dessen Achsen den bisher gebrauchten gleichgerichtet, dessen Anfangspunkt aber der Punkt (x, y, z) ist; dann gelten auf der Geraden $\mathfrak{G}$ die Gleichungen

$$(3) \qquad z' = p x' + q y', \quad \Phi_q x' - \Phi_p y' = 0.$$

Aus ihnen und der Gleichung (1) kann man p und q im allgemeinen eliminieren, und erhält dann eine Gleichung

$$\Psi(x, y, x', y', z') = 0, \tag{4}$$

die in den gestrichenen Größen linear homogen gemacht werden kann, da in den Gleichungen (3) nur die Verhältnisse dieser Größen auftreten. Die Elimination würde nicht gelingen, wenn Φ_p und Φ_q von p und q unabhängig, die Gleichung (1) also linear wäre; diesen Fall schließen wir aus. Löst man die Gleichung (4) nach z' auf, so ergebe sich

$$z' = F(x, y, x', y'),$$

wobei F wiederum in x', y' homogen und von erster Stufe sein müßte; das ist dann die Gleichung des Kegels mit der Spitze (x, y, z), auf dem die Geraden $\mathfrak{G}$ liegen. Seine Tangentialebene im gestrichenen System hat, wenn ξ', η', ζ' laufende Koordinaten sind, die Gleichung

$$\zeta' = F_{x'}\xi' + F_{y'}\eta';$$

da nun offenbar

$$\zeta' = \zeta - z, \quad \xi' = \xi - x, \quad \eta' = \zeta - y$$

zu setzen ist, hat diese Ebene im ursprünglichen Koordinatensystem die Gleichung

$$\zeta - z = F_{x'}(\xi - x) + F_{y'}(\eta - y),$$

die mit der Gleichung (2) zusammenfällt; somit ergibt sich

$$p = F_{x'}, \quad q = F_{y'}. \tag{5}$$

Jede Fläche $\mathfrak{F}$ berührt nun, wenn (x, y, z) einer ihrer Punkte ist, den zugehörigen Kegel $(\mathfrak{T})$; in der gemeinsamen Berührungsebene liegt eine bestimmte Erzeugende des Kegels. Geht man in ihrer Richtung auf der Fläche $\mathfrak{F}$ fort, so erhält man eine Kurve, die man als Charakteristik bezeichnet; die Fläche $\mathfrak{F}$ wird so mit Charakteristiken bedeckt. Sei dt das Bogenelement einer von ihnen; dann können die Größen dx/dt, dy/dt, dz/dt als Funktionen von x und y angesehen werden, und der Punkt $(x + dx/dt,\ y + dy/dt,\ z + dz/dt)$ liegt auf der Tangente der Charakteristik, also einer Tangente der Fläche $\mathfrak{F}$, die zugleich Erzeugende des Kegels $(\mathfrak{T})$ ist, der zu dem jeweils betrachteten Punkte der Fläche gehört. Man darf also in den obigen Entwicklungen

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}$$

setzen und findet dann den Gleichungen (5) zufolge

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x};$$

weiter geben, wie in § 23, die Gleichungen

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial x} = F_{x'x} + F_{x'x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + F_{x'y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} = F_{y'x} + F_{y'x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + F_{y'y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

indem man mit x' und y' vervielfacht und addiert

$$x'\frac{\partial F_{x'}}{\partial x} + y'\frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = \frac{dF_{x'}}{dt} = F_x,$$

und ebenso findet man

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = F_y.$$

Die Projektionen der Charakteristiken auf die xy-Ebene sind also Extremalen des Integrals

$$J = \int F\,dt,$$

und da längs ihrer die Gleichung

$$z' = F(x, y, x', y'), \quad z = J$$

gilt, so sind die Charakteristiken selbst räumliche Extremalen des Integrals J.

Ziehen wir ferner auf der Fläche $\mathfrak{F}$ eine Kurve $\mathfrak{L}$, die die Charakteristiken in den Punkten 0 durchschneidet, und ist auf diesen 1 ein allgemeiner Punkt, auf den wir x, y, z beziehen, so ist allgemein

$$z = z_0 + \int_0^1 F\,dt = z_0 + \bar{J}_{01},$$

wobei der Querstrich wieder die Integration längs der Extremale bedeutet; im Punkte 0 aber gilt, wenn δ den Fortgang auf der Kurve $\mathfrak{L}$ bedeutet, die Gleichung

$$\delta z_0 = p\,\delta x + q\,\delta y\,|^0,$$

also nach (5)

$$-\delta z_0 + F_{x'}\Big|^0 \delta x_0 + F_{y'}\Big|^0 \delta y_0 = 0,$$

d. h. eine allgemeine Transversalitätsbeziehung, der gemäß die ebenen Extremalen von der Projektion der Kurve $\mathfrak{L}$ auf die xy-Ebene ausstrahlen. Die Gesamtheit der Charakteristiken, d. h. die Fläche $\mathfrak{F}$, bildet also genau eine Fläche $\mathfrak{S}$ im Sinne des § 22, I.

ein räumliches Feld des Integrals J. Ein solches Feld ist also jede Fläche, die die gegebene partielle Differentialgleichung erfüllt.

Haben wir hier die Charakteristiken zuerst geometrisch definiert, so lassen sich jetzt auch ihre bekannten analytischen Eigenschaften besonders leicht ableiten. Die Gleichungen (3) ergeben zunächst unmittelbar

$$\frac{x'}{\Phi_p} = \frac{y'}{\Phi_q} = \frac{z'}{p\Phi_p + q\Phi_q}. \tag{6}$$

Bedeutet weiter δ den Fortgang auf der Fläche $\mathfrak{F}$, so ergeben die Gleichungen

$$z' = px' + qy', \quad z' = F(x, y, x', y') \tag{7}$$

die Folgerungen

$$\delta z' = p\,\delta x' + q\,\delta y' + x'\,\delta p + y'\,\delta q,$$
$$\delta z' = F_{x'}\,\delta x' + F_{y'}\,\delta y' + F_x\,\delta x + F_y\,\delta y,$$

also, da $p = F_{x'}$ und $q = F_{y'}$ ist,

$$F_x\,\delta x + F_y\,\delta y - x'\,\delta p - y'\,\delta q = 0. \tag{8}$$

Anderseits ergibt die Gleichung $\Phi = 0$, die die Fläche $\mathfrak{F}$ erfüllt,

$$\Phi_x\,\delta x + \Phi_y\,\delta y + \Phi_p\,\delta p + \Phi_q\,\delta q = 0, \tag{9}$$

und die ersten Gleichungen (6) führen, wenn man $x' = \Lambda\Phi_p$, $y' = \Lambda\Phi_q$ setzt, von den Gleichungen (8), (9) zu der Folgerung

$$F_x\,\delta x + F_y\,\delta y = -\Lambda(\Phi_x\,\delta x + \Phi_y\,\delta y),$$

und da δx und δy unabhängige Differentiale sind, folgt hieraus

$$\frac{x'}{\Phi_p} = \frac{y'}{\Phi_q} = \frac{-F_x}{\Phi_x} = \frac{-F_y}{\Phi_y}. \tag{10}$$

Die Eulerschen Gleichungen können aber in der Form

$$\frac{dp}{dt} = F_x, \quad \frac{dq}{dt} = F_y$$

geschrieben werden; mittels ihrer erhält man aus der Beziehung (10) und der ersten Gleichung (7) die gewöhnlichen Gleichungen der Charakteristiken:

$$\frac{dx}{\Phi_p} = \frac{dy}{\Phi_q} = \frac{dz}{p\Phi_p + q\Phi_q} = -\frac{dp}{\Phi_x} = -\frac{dq}{\Phi_y}.$$

Dritter Abschnitt.

Gebundene Extreme.

§ 26.

Die allgemeine isoperimetrische Aufgabe.

I. Die isoperimetrische Aufgabe im engeren Sinne verlangt, zwei gegebene Punkte 0, 1 durch eine solche Kurve von gegebener Länge zu verbinden, daß das längs ihrer gebildete Integral

$$J_{01} = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

einen extremen Wert gegenüber allen gleichlangen Bögen 01 hat. Ein solches Extrem nennen wir ein gebundenes, die bisher betrachteten sind demgegenüber freie Extreme. Die nächstliegende Verallgemeinerung besteht darin, daß man das Extrem des Integrals J_{01} sucht, wenn der Wert eines anderen Integrals,

$$K_{01} = \int_0^1 G(x, y, x', y')\, dt,$$

erstreckt längs derselben Kurve 01 und aller, mit denen wir sie vergleichen, denselben Wert hat. Auch das bezeichnen wir als isoperimetrische Aufgabe.

Sei nun auf der gesuchten, gefunden gedachten Kurve $\mathfrak{C}$, deren Endpunkte 0 und 1 seien, die Strecke 23 so gewählt, daß auf ihr die Größe x' nicht verschwindet, also

$$F(x, y, x', y') = x' f(x, y, p), \quad G(x, y, x', y') = x' g(x, y, p),$$
$$p = \frac{dy}{dx}$$

gesetzt werden kann; die Integrale, längs dieser Kurve gebildet, bezeichnen wir durch $\overline{J}$ und $\overline{K}$. Dann hat der Bogen 23 offenbar dieselbe Extremseigenschaft wie der ganze Bogen 01; denn verbindet man die Punkte 2 und 3 mit irgend einer solchen Kurve

243, daß $K_{243} = \overline{K}_{23}$ ist, so hat das Integral $\overline{K}_{02} + K_{243} + \overline{K}_{31}$, den gegebenen Wert $\overline{K}_{01}$, und das Vorzeichen der Differenz $J_{02431} - \overline{J}_{01} = \overline{J}_{02} + J_{243} + \overline{J}_{31} - \overline{J}_{01}$ ist dasselbe wie das der ihr gleichen $J_{243} - \overline{J}_{23}$; ist erstere z. B. immer positiv, so gilt dasselbe von $J_{243} - \overline{J}_{23}$, womit die Extremseigenschaft des Bogens 23 ersichtlich wird. Wir erhalten demnach notwendige Eigenschaften des Bogens 23, wenn wir annehmen, das Integral

$$\overline{J}_{23} = \int_2^3 f(x, y, p)\,dx$$

habe einen Extremwert verglichen mit allen Kurven 243, für die

$$K_{243} = \overline{K}_{23}$$

ist.

Jetzt sei die Kurve 243 durch die Gleichung

$$\overline{y} = y + \varepsilon_1 \theta_1(x) + \varepsilon_2 \theta_2(x)$$

definiert, wobei θ_1, θ_2 reguläre Funktionen, ε_1 und ε_2 Festwerte sind und die Gleichungen

$$\theta_1(x_2) = \theta_1(x_3) = \theta_2(x_2) = \theta_2(x_3) = 0$$

gelten. Dann werden die Integrale

$$J_{243} = \int_2^3 f(x, \overline{y}, \overline{p})\,dx = \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

$$K_{243} = \int_2^3 g(x, \overline{y}, \overline{p})\,dx = \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

gesetzt werden können; dabei sind die Funktionen Φ und Ψ in der Nähe der Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ regulär, wenn die Funktionen f und g, wie wir annehmen wollen, in den Elementen des Bogens 23 regulär sind. Setzen wir nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, so geht die Kurve 243 in den ursprünglichen Bogen 23 über; also muß $\Phi(0, 0)$ ein Extremwert der Funktion $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sein bei der Bedingung

$$\Psi(\varepsilon_1\ \varepsilon_2) = \overline{K}_{23} = \Psi(0, 0), \tag{1}$$

in der rechts eine von ε_1 und ε_2 unabhängige Größe steht. Kann man aus dieser Gleichung ε_2 als reguläre Funktion von ε_1 ausrechnen, so ergibt sich, diesen Wert in Φ eingesetzt, die gewöhnliche Extremsbedingung der Differentialrechnung

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varepsilon_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0 \left(\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 = 0,$$

wobei die Fußmarke 0 fortan die Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ bedeute; aus der Gleichung (1) folgt

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \left(\frac{d\,\varepsilon_2}{d\,\varepsilon_1}\right)_0 = 0;$$

vervielfacht man die letzten Gleichungen mit $(\partial \Psi / \partial \varepsilon_2)_0$ und $(\partial \Phi / \partial \varepsilon_2)_0$, so ergibt sich

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = 0.$$

Um diese Gleichung in handliche Form zu bringen, benutzen wir die Variationsrechnung. Indem wir zunächst ε_1 und ε_2 als Unabhängige betrachten, haben wir nach den früheren Definitionen (§ 2)

$$\delta y = \theta_1(x)\,d\,\varepsilon_1 + \theta_2(x)\,d\,\varepsilon_2, \quad \delta x = 0, \quad \delta y\,|^{2,3} = 0,$$

$$\delta J_{23} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 d\,\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 d\,\varepsilon_2,$$

und die gewöhnliche Variationsformel gibt anderseits

$$\delta J_{23} = \int_2^3 \left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right) \delta y\, d x;$$

daraus folgt für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_2^3 \left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right) \theta_1(x)\, d x, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_2^3 \left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right) \theta_2(x)\, d x,$$

und ebenso natürlich

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_2^3 \left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right) \theta_1(x)\, d x, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_2^3 \left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right) \theta_2(x)\, d x.$$

Wenn nun die Kurve $\mathfrak{C}$, wie wir annehmen wollen, nicht Extremale des Integrals K im Sinne der früher benutzten Begriffe ist, so verschwindet die Größe

$$g_y - \frac{d g_p}{d x}$$

nicht längs des Bogens 23, und man kann die Funktion $\theta_2(x)$ so wählen, daß die Größe

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_2^3 \left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right) \theta_2(x)\, d x = A$$

von Null verschieden ist; damit ist dann als möglich erwiesen, die Gleichung $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ nach ε_2 aufzulösen, wie es oben vorausgesetzt wurde. Setzt man noch

$$\int_2^3 \left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right) \theta_2(x)\, d x = -B,$$

so gibt die Gleichung (2) mit Berücksichtigung der Werte (3) und (4)

$$0 = A \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + B \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\Bigg|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0},$$

$$0 = \int_2^3 \left\{A\left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right) + B\left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right)\right\} \theta_1(x)\, d x.$$

Diese Gleichung muß also, wenn die Kurve $\mathfrak{C}$ das gesuchte Extrem liefern soll, notwendig bei willkürlicher Wahl der stetigen Funktion $\theta_1(x)$ bestehen; der Hauptbilfssatz der Variationsrechnung (§ 6) gibt also, wenn die Kurve $\mathfrak{C}$ stetig gekrümmt vorausgesetzt wird,

$$A\left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right) + B\left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right) = 0$$

oder auch, da $A \neq 0$ ist,

$$f_y - \frac{d f_p}{d x} + \lambda\left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right) = 0, \tag{5}$$

wobei λ einen Festwert, die isoperimetrische Konstante bedeutet. Diese Gleichung, die Eulersche Gleichung der isoperimetrischen Aufgabe, ist mit der Funktion $h = f + \lambda g$ genau so gebildet, wie die Eulersche Gleichung der Aufgabe

$$\delta \int f(x, y, p)\, d x = 0$$

mit der Funktion f. Wir drücken die isoperimetrische Aufgabe durch die Gleichungen

$$\delta \int f\, d x = 0, \quad \delta \int g\, d x = 0$$

aus; die Extremalen sind dann dieselben wie die der Aufgabe

$$\delta \int (f + \lambda g)\, d x = 0.$$

Mit den homogenen Funktionen F und G geschrieben ist nun

$$F_y - \frac{d F_{y'}}{d t} = x'\left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right), \quad F_x - \frac{d F_{x'}}{d t} = -y'\left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right),$$

und analoge Gleichungen gelten für G und g; setzt man also

$$H(x, y, x', y') = F(x, y, x', y') + \lambda G(x, y, x', y'),$$

so gibt die Gleichung (5) die beiden Eulerschen Gleichungen

$$H_x - \frac{d H_{x'}}{dt} = 0, \quad H_y - \frac{d H_{y'}}{dt} = 0. \tag{6}$$

Dies alles gilt zunächst nur für eine Strecke der Kurve $\mathfrak{C}$, auf der $x' \neq 0$ ist; genau dieselben Ergebnisse liefert aber eine Strecke, auf der $y' \neq 0$ ist; greifen zwei solche Strecken übereinander, so verschwindet in dem gemeinsamen Teil die Größe $G_y - d\,G_{y'}/dt$ nicht überall; die Gleichung

$$F_y - \frac{d F_{y'}}{dt} + \lambda\left(G_y - \frac{d G_{y'}}{dt}\right) = 0$$

kann also nicht für zwei verschiedene Werte von λ gelten; dieser Wert ist auf den übereinandergreifenden Bögen derselbe. Da man nun die ganze Kurve $\mathfrak{C}$ in endlich viele Bögen zerlegen kann, auf denen entweder x' oder y' nicht verschwindet, so sind die Gleichungen (6) mit einem festen Wert von λ für die ganze Kurve $\mathfrak{C}$ erwiesen.

Man erhält dies Ergebnis mit einem Schlage für die ganze Kurve $\mathfrak{C}$, wenn man von den Variationsformeln

$$\delta J_{01} = \int_0^1 T_F w\, dt, \quad \delta K_{01} = \int_0^1 T_G w\, dt$$

ausgeht, in denen

$$w = y'\delta x - x'\delta y, \quad T_F = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y')$$

gesetzt ist und T_G entsteht, indem man F in T_F durch G ersetzt. Man bettet den Bogen 0 1 in eine Schar von Nachbarbögen ein, die durch die Gleichungen

$$\bar{x} - x = \frac{\omega y'}{x'^2 + y'^2}, \quad \bar{y} - y = \frac{-\omega x'}{x'^2 + y'^2} \tag{7}$$

definiert sind; dabei sei

$$\omega = \varepsilon_1 \theta_1(t) + \varepsilon_2 \theta_2(t), \quad \theta_1(t_0) = \theta_2(t_0) = \theta_1(t_1) = \theta_2(t_1) = 0,$$

offenbar ist dann nach (7)

$$\delta x = \left(\theta_1(t)\, d\varepsilon_1 + \theta_2(t)\, d\varepsilon_2\right) \frac{y'}{x'^2 + y'^2},$$

$$\delta y = \left(\theta_1(t)\, d\varepsilon_1 + \theta_2(t)\, d\varepsilon_2\right) \frac{-x'}{x'^2 + y'^2},$$

$$w = \theta_1(t)\, d\varepsilon_1 + \theta_2(t)\, d\varepsilon_2. \tag{8}$$

Setzt man nun wieder

$$\int_0^1 F\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt = \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

$$\int_0^1 G\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt = \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

so ist nach der immer geltenden Definition der Variation

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 d\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 d\varepsilon_2 = \delta J_{01} = \int_0^1 T_F w\, dt,$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 d\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 d\varepsilon_2 = \delta K_{01} = \int_0^1 T_G w\, dt,$$

und die Gleichung (8) ergibt

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_0^1 T_F \theta_1(t)\, dt, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_0^1 T_F \theta_2(t)\, dt,$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_0^1 T_G \theta_1(t)\, dt, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \int_0^1 T_G \theta_2(t)\, dt.$$

Auch jetzt gilt wie früher die Gleichung

$$(9) \qquad 0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0,$$

und die Größe

$$\int_0^1 T_G \theta_2(t)\, dt$$

wird bei passender Wahl von $\theta_2(t)$ von Null verschieden, sobald T_G nicht durchweg längs der Kurve $\mathfrak{C}$ verschwindet, d. h. wenn diese nicht Extremale des Integrals K ist; die Gleichung (9) ergibt wie oben die isoperimetrische Regel

$$T_F + \lambda T_G = 0,$$

oder in verständlicher Bezeichnung

$$T_H = 0, \quad H_{xy'} - H_{yx'} + H_1(x'y'' - x''y') = 0;$$

das ist eine notwendige Folge der Forderung

$$\delta \int H\, dt = 0, \quad \delta J + \lambda \delta K = 0.$$

Der Fall $\lambda = 0$ würde besagen, daß $\mathfrak{C}$ zugleich Extremale des Integrals J im Sinne der Aufgabe $\delta J = 0$ wäre; dies ausgeschlossen könnte man die Extremale der isoperimetrischen Aufgabe auch durch die Gleichung

$$\delta K + \frac{1}{\lambda}\,\delta J = 0$$

kennzeichnen, die man auch erhalten würde, wenn das Extrem des Integrals K_{01} bei gegebenem Wert des Integrals J_{01} gesucht würde. In diesem Sinne kann man in der isoperimetrischen Aufgabe die Rollen der Integrale J und K vertauschen, ohne daß die Extremalen sich ändern.

II. Das erste Beispiel gibt die isoperimetrische Aufgabe im engsten Sinne des Wortes, die Aufgabe der Königin Dido: die Kurve 0 1 zu finden, die bei gegebener Länge mit einer gegebenen Kurve 0 1 zusammen, z. B. mit der Sehne 0 1 den größten Flächeninhalt des Segments umschließt. Durchläuft ein Punkt den Bogen 0 1, so überstreicht seine Verbindungslinie mit dem Koordinatenanfangspunkt die mit einem Vorzeichen behaftete Fläche

$$J_{01} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x\,y' - y\,x')\,d\,t;$$

diese unterscheidet sich von dem positiv oder negativ genommenen Segment um die Fläche des Dreiecks 2 0 1, wenn 2 der Koordinatenursprung ist, d. h. um eine von der Wahl des Bogens 0 1 unabhängige Größe; man erhält also ein Extrem des Segments, indem man das Extrem des Integrals J_{01} sucht. Da nun

$$K = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\,t$$

zu setzen ist, findet man

$$H = \frac{1}{2}(x\,y' - y\,x') + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad H_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}} = \frac{H_{x'x'}}{y'^2},$$

$$T_H = 1 + \frac{\lambda\,(x'\,y'' - x''\,y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}} = 0.$$

Hier steht neben λ die Krümmung der gesuchten Kurve, positiv oder negativ, je nachdem die Richtung zum Krümmungsmittelpunkt hin gegen die Richtung wachsender Werte von t um 90^0 im positiven oder negativen Sinne gedreht ist; entsprechend beiden Fällen muß λ negativ oder positiv sein. Die Extremale ist also ein Kreis vom Radius $|\lambda|$, der mit wachsenden Werten von t im positiven oder negativen Sinne umlaufen wird, je nachdem λ negativ oder positiv ist.

Natürlich kann man auch ausrechnen

$$H_x - H'_{x'} = y' - \lambda\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)' = 0,$$

$$H_y - H'_{y'} = -x' - \lambda\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)' = 0$$

und findet durch Integration, wenn a, b Festwerte sind,

$$(10) \qquad x - a = -\frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad y - b = \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2.$$

In den Gleichungen (10) stehen rechts neben λ die Richtungskosinus derjenigen Normalrichtung, die gegen die Tangentialrichtung $dt > 0$ um 90^0 im positiven Sinne gedreht ist, woraus wiederum die angegebene Bedeutung des Vorzeichens der Größe λ ersichtlich wird.

Die zweite sehr bekannte isoperimetrische Aufgabe ist die Bestimmung der Kettenlinie: die schwer gedachte homogene Linie gegebener Länge zwischen gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt möglichst tief liegt. Ist die y-Achse lotrecht nach oben gerichtet, so ist

$$\int y\,ds : \int ds$$

die Höhe des Schwerpunktes; da das Integral im Nenner einen gegebenen Wert haben soll, wird ein gebundenes Extrem des Zählers gesucht:

$$\delta\int y\,ds = 0, \quad \delta\int ds = 0;$$

also findet man die Extremalen aus der Forderung

$$\delta\int (y+\lambda)\,ds = 0,$$

die nach § 7, III. mit Festwerten a, b ergibt

$$y + \lambda = a\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x-b}{a}.$$

womit der Name der Kettenlinie gerechtfertigt wird.

Drittens suchen wir die Kurve kürzesten Umrings oder die Lösung der isoperimetrischen Aufgabe auf beliebig gegebener Fläche. Sei auf dieser

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Bogenelement; indem wir den Buchstaben F, G ihre bisherige Bedeutung nehmen und sie durch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ersetzen, suchen wir das Extrem des Integrals

$$J = \int \mathfrak{F}(u, v, u', v')\, dt = \int (U v' - V u')\, dt$$

bei gegebenem Wert von

$$K = \int \mathfrak{G}(u, v, u', v') = \int \sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}\, dt;$$

dabei seien U, V irgend zwei solche Funktionen von u und v, daß

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{1}{2}\sqrt{E G - F^2}. \tag{11}$$

Dann gibt die Gaußsche Integraltransformation für das längs einer geschlossenen Linie erstreckte Integral J den Wert

$$J = \iint du\, dv \left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) = \iint \sqrt{E G - F^2}\, du\, dv,$$

erstreckt über das Innere der geschlossenen Linie, so daß die ausgesprochene Aufgabe des gebundenen Extrems in der Tat die isoperimetrische im engeren Sinne des Wortes ist.

Nun gibt die isoperimetrische Regel

$$T_{\mathfrak{F}} + \lambda T_{\mathfrak{G}} = 0,$$

und nach § 4, II. ist

$$T_{\mathfrak{G}} = \frac{\sqrt{E G - F^2}}{\varrho_g},$$

wobei ϱ_g den Radius der geodätischen Krümmung bedeutet; nach (11) ist offenbar

$$T_{\mathfrak{F}} = \sqrt{E G - F^2};$$

somit folgt

$$\frac{1}{\varrho_g} + \lambda = 0,$$

d. h. die Kurven kürzesten Umrings sind die Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

III. Man übersieht leicht, daß die unter I. aufgestellte isoperimetrische Regel auch auf Extreme übertragen werden kann, die durch mehrere isoperimetrische Bedingungen gebunden sind. Sei z. B.

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, y, x', y')\, dt$$

zum Extrem zu machen bei vorgegebenen Werten der beiden Integrale

$$K_{01} = \int_0^1 G(x, y, x', y')\,dt, \quad K_{01}^0 = \int_0^1 G^0(x, y, x', y')\,dt;$$

dann variiert man wieder den Gleichungen (7) gemäß und setzt dabei

$$\omega = \varepsilon_1 \theta_1(t) + \varepsilon_2 \theta_2(t) + \varepsilon_3 \theta_3(t), \quad \theta_\alpha(t_0) = \theta_\alpha(t_1) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Man erhält zunächst

$$\int_0^1 F\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt = \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

$$\int_0^1 G\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt = \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2\, \varepsilon_3),$$

$$\int_0^1 G^0\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt = \Psi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

und hat eine Bedingung dafür aufzustellen, daß bei den Bedingungen

$$(12) \quad \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \Psi(0, 0, 0), \quad \Psi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \Psi^0(0, 0, 0)$$

die Größe $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ für die gesuchte, gefunden gedachte Kurve $\mathfrak{C}$, d. h. an der Stelle $\varepsilon_\alpha = 0$ ein Extrem habe.

Dabei ist davon auszugehen, daß jetzt

$$w = \theta_1(t)\,d\varepsilon_1 + \theta_2(t)\,d\varepsilon_2 + \theta_3(t)\,d\varepsilon_3$$

zu setzen ist und demnach, wenn die Fußmarke 0 wieder das Wertsystem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ bedeutet, die Gleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_\alpha}\right)_0 = \displaystyle\int_0^1 T_F\, \theta_\alpha(t)\,dt, \\ \left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_\alpha}\right)_0 = \displaystyle\int_0^1 T_G\, \theta_\alpha(t)\,dt, \quad \left(\dfrac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_\alpha}\right)_0 = \displaystyle\int_0^1 T_{G^0} \theta_\alpha(t)\,dt \end{cases}$$

gelten. Wäre nun bei willkürlicher Wahl der Funktionen $\theta(t)$ eine Funktionaldeterminante

$$\left(\frac{\partial(\Psi, \Psi^0)}{\partial(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)}\right)_0 = 0,$$

so würde das nach I. bedeuten, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ Extremale der isoperimetrischen Aufgabe

$$\delta \int G\,dt = 0, \quad \delta \int G^0\,dt = 0$$

wäre; schließen wir dies aus, so können aus den Gleichungen (12) z. B. ε_2 und ε_3 als Funktionen von ε_1 berechnet und in den Ausdruck $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ eingesetzt werden, und die Extremsbedingung lautet dann

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \left(\frac{d\,\varepsilon_2}{d\,\varepsilon_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3}\right) \left(\frac{d\,\varepsilon_3}{d\,\varepsilon_1}\right)_0 = 0.$$

Aus den Gleichungen (12) erhält man aber Gleichungen derselben Form, in denen Φ durch Ψ und Ψ^0 ersetzt ist; das gibt

$$\left(\frac{\partial(\Phi, \Psi, \Psi^0)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}\right)_0 = 0,$$

oder auch

$$A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + B\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + C\left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = 0, \tag{14}$$

wobei

$$A = \left(\frac{\partial(\Psi, \Psi^0)}{\partial(\varepsilon_2, \varepsilon_3)}\right)_0$$

bei der eingeführten Voraussetzung von Null verschieden ist. Die Größen A, B, C sind ferner als Determinanten des Systems

$$\begin{matrix} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_3}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_3}\right)_0 \end{matrix}$$

von $\theta_1(t)$ unabhängig; letztere Funktion bleibt willkürlich, und wir haben nach (13) und (14) die Gleichung

$$\int_0^1 (A\,T_F + B\,T_G + C\,T_{G^0})\,\theta_1(t)\,dt = 0,$$

also nach dem Haupthilfssatz

$$A\,T_F + B\,T_G + C\,T_{G^0} = 0$$

oder, wenn

$$B/A = \lambda, \quad C/A = \lambda^0$$

gesetzt wird,

$$T_F + \lambda\,T_G + \lambda^0\,T_{G^0} = 0, \quad T_{F+\lambda G+\lambda^0 G^0} = 0,$$

d. h. die Folge der Forderung

$$\delta \int (F + \lambda\,G + \lambda^0\,G^0)\,dt = 0$$

im Sinne des freien Extrems.

Die zu diesem Ergebnis führende Betrachtung ist ein Sonderfall der allgemeinen in § 5 durchgeführten. Man setze dort

$$n = 2, \quad m = 3, \quad k = 1,$$

und für

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad G_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad G_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

die Größen

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \Psi^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

ferner

$$a_{11} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0, \quad a_{12} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0, \quad a_{13} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_3}\right)_0,$$

$$a_{21} = \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_1}\right)_0, \quad a_{22} = \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_2}\right)_0, \quad a_{23} = \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \varepsilon_2}\right)_0,$$

$$c_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0, \quad c_2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0, \quad c_3 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3}\right)_0,$$

dabei ist $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$. Es gibt also von a_{13}, a_{23}, c_3 unabhängige Größen A, B_1, B_2, derart, daß $A \neq 0$ und

$$A c_3 + B_1 a_{13} + B_2 a_{23} = 0$$

ist. Das gilt bei jeder Wahl der Funktion $\theta_3(t)$, von der nur a_{13}, a_{23}, c_3 abhängen, A, B_1, B_2 unabhängig sind, d. h.

$$\int_0^1 (A\, T_F + B_1\, T_G + B_2\, T_{G^0})\, \theta_3(t)\, dt = 0,$$

woraus wieder nach dem Hauptthilfssatz (§ 6) das obige Ergebnis folgt.

IV. Als Beispiel betrachten wir die elastische Linie: eine Kurve gegebener Länge soll zwei Punkte, in gegebenen Richtungen von ihnen ausgehend, verbinden und das Integral

$$J = \int \frac{d s}{r^2}$$

zum Extrem machen, wobei $d s$ das Bogenelement, r den Krümmungsradius bedeutet. Sei längs der gesuchten Kurve

$$\frac{d x}{d s} = \cos \theta, \quad \frac{d y}{d s} = \sin \theta,$$

dann ist

$$\frac{1}{r} = \frac{d \theta}{d s};$$

sind 0 und 1 Anfangs- und Endpunkt, l die vorgeschriebene Länge, so ist

$$J_{01} = \int_0^l \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds,$$

und vorgeschrieben sind die Gleichungen

$$(15) \qquad x_1 - x_0 = \int_0^l \cos\theta\, ds, \quad y_1 - y_0 = \int_0^l \sin\theta\, ds.$$

Sieht man s, θ als Koordinaten in einer neuen Ebene an, so sucht man in dieser zwischen den Punkten $(0, \theta_0)$ und (l, θ_1) die Kurve, die das Integral J_{01} bei den beiden isoperimetrischen Forderungen (15) zum Extrem macht. Man setzt also an

$$\delta \int_0^l \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds + \lambda\delta \int_0^l \cos\theta\, ds + \lambda^0\delta \int_0^l \sin\theta\, ds = 0$$

und findet, $\theta' = d\theta/ds$ gesetzt,

$$(16) \qquad -\lambda \sin\theta + \lambda^0 \cos\theta - 2\theta'' = 0,$$

oder mit neuen Festwerten α, β, γ

$$\theta'' = \alpha \sin(\theta - \beta), \quad \frac{\theta'^2}{2} = \alpha\cos(\theta - \beta) + \gamma.$$

Das ist, wenn man s als Zeit deutet, die Gleichung des mathematischen Pendels, durch die die Größen $\cos\theta$ und $\sin\theta$ als elliptische Funktionen von s definiert werden; die elastische Kurve wird dann durch die Gleichungen

$$(17) \qquad x = x_0 + \int_0^s \cos\theta\, ds, \quad y = y_0 + \int_0^s \sin\theta\, ds$$

dargestellt. Schreibt man die Gleichung (16) in der Form

$$-\lambda \sin\theta\, ds + \lambda^0 \cos\theta\, ds = 2\, d\theta',$$

so folgt nach (17) mit c als Festwert

$$-\lambda y + \lambda^0 x + c = 2\theta' = \frac{2}{r};$$

die Krümmung ist dem Abstand von einer festen Geraden proportional.

§ 27.

Hinreichende Bedingungen des gebundenen Extrems.

Sei 12 ein regulärer Bogen einer Extremale $\mathfrak{C}$, auf ihr der Punkt 0 beliebig nahe bei dem Punkt 1 außerhalb der Strecke 12 gelegen, so daß die Punkte 012 in dieser Anordnung aufeinanderfolgen; der Parameter t wachse von 0 nach 1 hin.

Durch den Punkt 0 gehe ein zweifach unendliches Büschel von Extremalen, die mit Festwerten a, b durch die Gleichungen

$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b) \tag{1}$$

dargestellt werden; $a = a_0$, $b = b_0$ gebe die Kurve $\mathfrak{C}$. Längs irgend einer dieser Extremalen laufe der veränderliche Punkt 3 und werde das Integral

$$\overline{K}_{03} = \int_{t_0}^{t} G(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\, dt = \omega(t, a, b)$$

gebildet, das offenbar ebenso wie ξ, η eine reguläre Funktion von t, a, b längs des Extremalenbogens 012 und seiner Nachbarbögen ist; die untere Grenze t_0 dürfen wir ja als reguläre, die Gleichungen

$$x_0 = \xi(t_0, a, b), \quad y_0 = \eta(t_0, a, b)$$

erfüllende Funktion von a und b betrachten. Es werde ferner angenommen, die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(t, a, b)} = \begin{vmatrix} \xi_t & \eta_t & \omega_t \\ \xi_a & \eta_a & \omega_a \\ \xi_b & \eta_b & \omega_b \end{vmatrix} = \Delta(t, a, b)$$

sei auf der Strecke $t_0 < t \leqq t_2$ von Null verschieden, was wir als Jacobische Bedingung bezeichnen. Dann kann längs der Raumkurve

$$x = \xi(t, a_0, b_0), \quad y = \eta(t, a_0, b_0), \quad z = \omega(t, a_0, b_0)$$

das von den Punkten $t = t_1$ und $t = t_2$, die wir 1′ und 2′ nennen, begrenzte Stück, dessen Projektion der Extremalenbogen 12 ist, nach dem ersten Einbettungssatze (§ 10) in ein Gebiet $\mathfrak{G}$ eingeschlossen werden, das von den Raumkurven

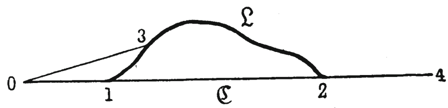
$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b), \quad z = \omega(t, a, b)$$

genau einfach erfüllt wird.

In der xy-Ebene seien nun die Punkte 1 und 2 durch eine solche Kurve $\mathfrak{L}$ verbunden (Fig. 9), daß das längs ihrer gebildete

Integral K_{12} denselben Wert hat wie das längs der Kurve $\mathfrak{C}$ gebildete $\overline{K}_{12}$. Sei 3 ein allgemeiner Punkt der Kurve $\mathfrak{L}$ und werde in ihm immer

Fig. 9.



$$z = K_{13} + \overline{K}_{01}$$

als dritte Koordinate aufgetragen, K_{13} gebildet längs der Kurve $\mathfrak{L}$; dann erscheint $\mathfrak{L}$ als Projektion einer Raumkurve $\mathfrak{L}'$, die die Punkte $1'$ und $2'$ verbindet; denn im Punkte 2 hätte man

$$z = K_{12} + \overline{K}_{01} = \overline{K}_{01} + \overline{K}_{12}$$

zu nehmen, was die z-Ordinate des Punktes $2'$ ist. Die Kurve $\mathfrak{L}$ sei so beschaffen, daß die Kurve $\mathfrak{L}'$ ganz dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört, eine Voraussetzung, deren Sinn wir später erläutern wollen.

Jedenfalls ist es möglich, durch den Punkt 3 in jeder seiner Lagen eine solche Extremale der Schar (1) zu legen, daß die Gleichung

$$\overline{K}_{03} = \overline{K}_{01} + K_{13} = \omega(t, a, b) \tag{2}$$

gilt; die mittlere Größe ist ja die z-Koordinate des Punktes der Kurve $\mathfrak{L}'$, dessen Projektion 3 ist, und durch jeden Punkt der Kurve $\mathfrak{L}'$ geht, weil sie im Gebiet $\mathfrak{G}$ verläuft, eine bestimmte Extremale der Schar (1), die wir zu Raumkurven durch die Gleichung $z = \omega$ umgebildet haben. Es ist möglich, wie wir sagen wollen, die Weierstraßsche Konstruktion auszuführen; dabei sind die zu jedem Punkte 3 gehörigen Werte t, a, b reguläre Funktionen der Koordinaten x, y, z des Punktes 3; infolgedessen ist auch die Größe

$$\overline{J}_{03} = \int_{t_0}^{t} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\, dt$$

eine reguläre Funktion der unabhängig gedachten x, y, z.

Jetzt untersuchen wir die Größe

$$W(\tau) = \overline{J}_{01} + J_{13} - \overline{J}_{03},$$

die überstrichenen Integrale längs der Feldextremalen, das ungestrichene längs der Kurve $\mathfrak{L}$ gebildet, auf welcher τ der Parameter sei, der die Lage des Punktes 3 bestimmt. Dann ist

$$W(\tau_1) = 0, \quad W(\tau_2) = \overline{J}_{01} + J_{12} - \overline{J}_{02} = J_{12} - \overline{J}_{12};$$

ein beständiges Vorzeichen der Größe $W(\tau_2)$ besagt also, daß das gesuchte gebundene Extrem des Integrals J gegenüber den betrachteten Kurven $\mathfrak{L}$ vom Extremalenbogen 12 geliefert wird.

Um dieses Vorzeichen zu erkennen, bilden wir

$$(3)\qquad \frac{dW}{d\tau} = \frac{dJ_{13}}{d\tau} - \frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau} = F(x, y, x_\tau, y_\tau) - \frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau};$$

die Ableitung $d\overline{J}_{03}/d\tau$ bilden wir mittels der Variationsrechnung, indem wir

$$\delta = d\tau \frac{d}{d\tau}$$

setzen, und finden

$$\delta\overline{J}_{03} = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_0^3 + \int_0^3 (P\delta x + Q\delta y)\,dt,$$

$$P = F_x - F'_{x'},\quad Q = F_y - F'_{y'},$$

wobei die auf die Stelle 0 bezüglichen Glieder außerhalb des Integralzeichens wegfallen. Ebenso ist

$$\delta\overline{K}_{03} = G_{x'}\delta x + G_{y'}\delta y\Big|^3 + \int_0^3 (R\delta x + S\delta y)\,dt;$$

dabei sind

$$P + \lambda R = 0,\quad Q + \lambda S = 0$$

die Gleichungen der konstruierten Extremale 03. Somit folgt

$$\delta\overline{J}_{03} + \lambda\delta\overline{K}_{03} = H_{x'}\delta x + H_{y'}\delta y\Big|^3,\quad H = F + \lambda G,$$

oder bei der Bedeutung des Zeichens δ

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau} + \lambda\frac{d\overline{K}_{03}}{d\tau} = H_{x'}\frac{dx}{d\tau} + H_{y'}\frac{dy}{d\tau}.$$

Die **Weierstraß**sche Konstruktion oder die Gleichung (2) gibt aber

$$\frac{d\overline{K}_{03}}{d\tau} = \frac{dK_{13}}{d\tau} = G(x, y, x_\tau, y_\tau);$$

somit folgt

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau} = -\lambda G(x, y, x_\tau, y_\tau) + H_{x'}x_\tau + H_{y'}y_\tau$$

und der Gleichung (3) zufolge

$$\frac{dW}{d\tau} = H(x, y, x_\tau, y_\tau) - x_\tau H_{x'}(x, y, x', y') - y_\tau H_{y'}(x, y, x', y'),$$

wobei natürlich $x' = \xi_t$, $y' = \eta_t$ gesetzt wird. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist die für die Funktion H gebildete Größe

$$\mathcal{E}(x, y, x', y', x_\tau, y_\tau),$$

und es ergibt sich somit

$$W(\tau_2) = J_{12} - \overline{J}_{12} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{E}\,d\tau.$$

Damit ist, wie im Falle des freien Extrems, die Entscheidung über das Extrem auf die Untersuchung des Vorzeichens oder möglichen Verschwindens der Größe $\mathfrak{E}$ zurückgeführt.

Man übersieht leicht, welche Eigenschaften in dieser Rechnung von der Kurve $\mathfrak{L}$ gefordert werden. Besteht sie aus einer endlichen Anzahl regulärer Stücke, so ist alles gesichert. Aber man kann sie wie in § 12, II. allgemeiner nehmen; es ist nur nötig, daß längs ihrer x und y stetige Funktionen eines Parameters τ sind, die integrierbare, z. B. mit beschränkter Schwankung behaftete Ableitungen x_τ, y_τ der dort näher bezeichneten Beschaffenheit besitzen. Ist $\varphi(x, y)$ eine reguläre Funktion von x und y, so müssen nur, wenn 3, 4 irgend zwei Punkte der Kurve $\mathfrak{L}$ sind, die Gleichungen

$$\frac{d\,\varphi(x, y)}{d\tau} = \varphi_x \cdot x_\tau + \varphi_y \cdot y_\tau,$$

$$\varphi(x_3, y_3) - \varphi(x_4, y_4) = \int_{\tau_3}^{\tau_4} (\varphi_x \cdot x_\tau + \varphi_y \cdot y_\tau)\, d\tau$$

angewandt werden können.

Die früher (§ 13) abgeleiteten Eigenschaften der Größe $\mathfrak{E}$ können angewandt werden; um eine bestimmte Unterlage zu schaffen, werden wir annehmen, auf der Kurve $\mathfrak{C}$ verschwinde die Größe $H_1 = H_{x'x'}/y'^2$ nicht. Ist dann außerordentliches Verschwinden der Größe $\mathfrak{E}$ entweder überhaupt oder durch besondere Wahl der Kurven $\mathfrak{L}$ ausgeschlossen, so kann die Größe $\mathfrak{E}$ das Vorzeichen nicht wechseln und nur ordentlich verschwinden. Das Extrem oder das beständige Vorzeichen der Größe $W(\tau_2)$ könnte nur gefährdet werden, wenn die Größe $\mathfrak{E}$ längs der Kurve $\mathfrak{L}$ überall ordentlich verschwände, d. h. wenn überall

$$(4) \qquad x_\tau = \frac{d\xi}{d\tau} = m\xi_t, \quad y_\tau = \frac{d\eta}{d\tau} = m\eta_t, \quad m > 0$$

wäre. Nun gibt die Gleichung

$$\omega(t, a, b) = \overline{K}_{03} = \overline{K}_{01} + K_{13}$$

offenbar

$$\frac{d\omega}{d\tau} = G(x, y, x_\tau, y_\tau),$$

also nach (4)

$$\frac{d\omega}{d\tau} = m\,G(x, y, \xi_t, \eta_t) = m\,\omega_t,$$

und man hätte die drei Gleichungen

$$\xi_t \frac{dt}{d\tau} + \xi_a \frac{da}{d\tau} + \xi_b \frac{db}{d\tau} = m\,\xi_t,$$

$$\eta_t \frac{dt}{d\tau} + \eta_a \frac{da}{d\tau} + \eta_b \frac{db}{d\tau} = m\,\eta_t,$$

$$\omega_t \frac{dt}{d\tau} + \omega_a \frac{da}{d\tau} + \omega_b \frac{db}{d\tau} = m\,\omega_t,$$

aus denen sich, da der Jacobischen Bedingung zufolge die Determinante $\varDelta(t, a, b)$ von Null verschieden ist, notwendig

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{db}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} - m = 0$$

ergeben würde. Da nun a_0 und b_0 die Anfangswerte von a und b für $\tau = \tau_1$ sind, würde allgemein folgen $a = a_0$, $b = b_0$; die Kurve $\mathfrak{L}$ wäre mit $\mathfrak{C}$ identisch. Abgesehen von diesem trivialen Fall hat also die Größe $W(\tau_2) = J_{12} - \overline{J}_{12}$, ohne zu verschwinden, das Vorzeichen der Größe $\mathcal{E}$; das gebundene Extrem ist gesichert, und zwar das Minimum oder Maximum, je nachdem die Größen $\mathcal{E}$ und H_1 in der Nähe der Stelle $x' = x_\tau$, $y' = y_\tau$ positiv oder negativ sind.

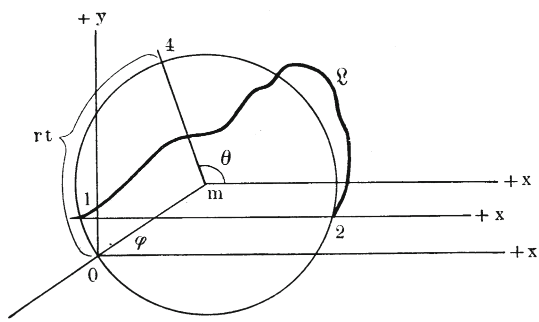
II. Erörtern wir nun noch den Inhalt der eingeführten Voraussetzungen. Als hinreichende Bedingungen des Extrems haben wir zunächst die der Aufgabe gemäß abgeänderte Jacobische Bedingung, und, ganz wie bei den Aufgaben des freien Extrems, die Forderung, daß die Größe $\mathcal{E}$ längs der zum Vergleich herangezogenen Kurve $\mathfrak{L}$ festes Vorzeichen behalte; wir wissen nach § 13, wie diese Forderung erfüllt werden kann. Aber es kommt noch ein Neues hinzu; die Kurve $\mathfrak{L}'$ muß im Gebiet $\mathfrak{G}$ liegen oder jedenfalls muß die Weierstraßsche Konstruktion längs der Kurve $\mathfrak{L}$ überall ausführbar sein. Verläuft die Kurve $\mathfrak{L}$ zunächst, wie es beim freien Extrem verlangt wurde, in einer weiteren Nachbarschaft der Kurve $\mathfrak{C}$ oder des Bogens 1 2, und liegt jedesmal der Punkt 3 einem Punkte 5 des Bogens 1 2 nahe, so kann es doch sehr wohl sein, daß der Wert K_{13} von $\overline{K}_{15}$ erheblich abweicht; dann wird vielleicht die Kurve $\mathfrak{L}'$ mit der z-Koordinate von $\mathfrak{C}'$ erheblich abweichen und das Gebiet $\mathfrak{G}$ verlassen. Um dies mit Sicherheit zu verhindern, muß in der allgemeinen Theorie etwa der Integralwert $\overline{K}_{15}$ auf der Kurve $\mathfrak{C}$ aufgetragen gedacht werden und die Kurve $\mathfrak{C}$ dann stetig in $\mathfrak{L}$ übergeführt werden, wobei die aufgetragenen Werte an ihren Punkten haften bleiben oder nur wenig verändert werden. Sei K das Längenintegral; dann stellen wir uns $\mathfrak{C}$ als unausdehnbaren Faden vor, der in die Lage $\mathfrak{L}$ übergeführt wird, wobei dann zugleich die isoperimetrische Bedingung erfüllt bleibt; hierdurch ist natürlich die Gesamtheit der Vergleichskurven $\mathfrak{L}$ eingeschränkt; bleibt die Kurve $\mathfrak{L}$ dabei in hinreichend enger Nachbarschaft des Bogens $\mathfrak{C}$, so bleibt $\mathfrak{L}'$ im Gebiet $\mathfrak{G}$. Oder man nehme von vornherein die Kurve $\mathfrak{L}$ in einer nach § 18 engeren Nachbarschaft des Bogens $\mathfrak{C}$; dann werden von selbst die Größen K_{15} und $\overline{K}_{13}$ beliebig wenig verschieden ausfallen bei hinreichend enger Fassung der Nachbarschaft. Das schwache Extrem ist also auf alle Fälle gesichert, wenn die Jacobische und die auf $\mathcal{E}$ bezügliche Bedingung erfüllt sind.

§ 28.

Beispiele des gebundenen Extrems.

I. In wichtigen Sonderbeispielen kann man die Möglichkeit der Weierstraßschen Konstruktion allgemein nachweisen, z. B. bei der isoperimetrischen Aufgabe im engeren Sinne des Wortes (§ 26, II.), deren Extremalen Kreise sind; K ist das Bogenintegral. Sei 0 der Koordinatenanfangspunkt, 1 2 irgend ein Kreisbogen, der

Fig. 10.



einem durch 0 gehenden Kreise angehört (Fig. 10), dessen Mittelpunkt m die Koordinaten a, b habe. Dann kann man setzen

$$(1) \qquad x = a + c\cos\theta, \quad y = b + c\sin\theta, \quad c^2 = a^2 + b^2,$$

und θ ist der Winkel, den der Radius von der zur $+x$-Achse parallelen Lage mx ausgehend im positiven Drehsinne beschreiben muß, um seinen Endpunkt in den jeweils betrachteten Punkt 4 des Kreises zu bringen. Ist ferner φ der Winkel, um den die x-Achse gedreht werden muß, um in die Richtung $0m$ zu kommen, so ist

$$a = c\cos\varphi, \quad b = c\sin\varphi$$

und der Radius $m0$ ist demnach um $\varphi + \pi$ gegen mx im positiven Sinne gedreht. Setzt man daher

$$t = \pi + \varphi - \theta, \quad \theta = \pi + \varphi - t,$$

so ist rt der im negativen Sinne vom Punkte 0 ab gemessene Kreisbogen 04 und man hat nach (1) zu setzen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\overline{K}_{03} = \omega = ct, \quad \xi(t, a, b) = a - a\cos t - b\sin t, \\ &\eta(t, a, b) = b - b\cos t + a\sin t. \end{aligned}$$

Seien nun die Punkte 1 und 2 durch irgend eine Kurve $\mathfrak{L}$ verbunden, deren Länge dieselbe ist wie die des Kreisbogens 12; ist 3 ein beliebiger Punkt der Kurve $\mathfrak{L}$, so ist die Länge $l = \overline{K}_{01} + K_{13}$ auf alle Fälle größer als der geradlinige Abstand 03; es ist also ausnahmslos möglich, zwei Kreisbögen 03 zu konstruieren, deren Länge l ist. Wir nehmen von diesen denjenigen, der von 0 nach 3 hin durchlaufen denselben Umlaufssinn ergibt, wie 012 auf dem Kreisbogen, dessen Extremseigenschaft wir untersuchen wollen. Die ausgewählten Kreisbögen 03 gehen stetig ineinander über, wenn der Punkt 3 die Kurve $\mathfrak{L}$ durchläuft; dabei sind offenbar a, b, c und die Bogenlänge ct, also auch t reguläre Funktionen der Koordinaten des Punktes 3; die Weierstraßsche Konstruktion ist vollkommen durchgeführt.

Jetzt findet man aus den Werten (2) unmittelbar

$$\Delta(t, a, b) = \begin{vmatrix} 1-\cos t & \sin t & at/c \\ -\sin t & 1-\cos t & bt/c \\ a\sin t - b\cos t & a\cos t + b\sin t & c \end{vmatrix};$$

dabei sind die beiden unsere Aufgabe beherrschenden Integrale

$$J = \tfrac{1}{2}\int (xy' - yx')\,dt, \quad K = \int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant, ebenso das System der Kreise durch einen Punkt, sowie die Größe $\omega = rt$; ξ, η sowie a, b transformieren sich wie die Koordinaten eines Punktes, etwa in ξ^0, η^0 und a^0, b^0, und man findet danach

$$\Delta = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(t, a, b)} = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(\xi^0, \eta^0, \omega)}\,\frac{\partial(\xi^0, \eta^0, \omega)}{\partial(t, a^0, b^0)}\,\frac{\partial(t, a^0, b^0)}{\partial(t, a, b)}.$$

Nun ist aber bei einer Drehung des Koordinatensystems

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(\xi^0, \eta^0, \omega)} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi^0, \eta^0)} = 1, \quad \frac{\partial(t, a^0, b^0)}{\partial(t, a, b)} = \frac{\partial(a^0, b^0)}{\partial(a, b)} = 1;$$

daraus folgt, daß auch

$$\varDelta = \frac{\partial(\xi^0, \eta^0, \omega)}{\partial(t, a^0, b^0)}$$

invariant ist. Man darf also, indem man $\varDelta$ für eine bestimmte Extremale bildet, das Koordinatensystem so legen, daß $b = 0$, $a = c$ wird und findet dann

$$\varDelta(t, a, b) = \begin{vmatrix} 1 - \cos t & \sin t & t \\ -\sin t & 1 - \cos t & 0 \\ c \sin t & c \cos t & c \end{vmatrix} = r(2 - 2\cos t - t \sin t)$$

$$= c \sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right).$$

Diese Größe ist, wenn $0 < t < 2\pi$, von Null verschieden; der Kreisbogen 12 bietet also in der Tat das gebundene Extrem des Inhaltsintegrals dar.

Die Extremale wurde bei wachsenden Werten von t im negativen Sinne durchlaufen; nach § 26, II. ist also $\lambda > 0$ zu nehmen. Das Integral J gibt den negativen Flächeninhalt. Die Größe $\mathfrak{E}$ hat dasselbe Vorzeichen wie

$$H_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3};$$

für den negativen Inhalt sind also die hinreichenden Bedingungen des Minimums, für den positiven Inhalt die des Maximums erfüllt.

II. Ebenso kann man auch bei der Aufgabe der Kettenlinie

$$\delta \int y\, ds = 0, \quad \delta \int ds = 0$$

die Weierstraßsche Konstruktion immer durchführen. Das beruht darauf, daß stets zwischen zwei Punkten eine Kette von gegebener Länge aufgehängt werden kann, sobald diese Länge größer ist als der Abstand der beiden Punkte. Sind diese (x_0, y_0) und (x_3, y_3), so hat man für die sie verbindende Extremale die Gleichungen

$$y_0 + \lambda = a \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{x_0 - b}{a}, \quad y_3 + \lambda = a \operatorname{\mathfrak{Cof}} \frac{x_3 - b}{a},$$

und wenn l die gegebene Länge ist,

$$l = a\left(\operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{x_3 - b}{a} - \operatorname{\mathfrak{Sin}} \frac{x_0 - b}{a}\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$l^2-(y_3-y_0)^2=2a^2\left(-1+\mathfrak{Cof}\,\frac{x_3-x_0}{a}\right)$$
$$=4a^2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{x_3-x_0}{2a}$$

oder, $x_3-x_0=2a\alpha$ gesetzt,

$$\frac{l^2-(y_3-y_0)^2}{(x_3-x_0)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\,\mathfrak{Sin}^2\alpha. \tag{3}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist größer als 1, da die Ungleichung

$$l^2>(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2$$

gilt, und die Funktion $\mathfrak{Sin}\,\alpha/\alpha$ wächst mit positiv wachsenden Werten von α von 1 ins Unendliche; die Gleichung (3) hat also genau eine positive Wurzel α, aus der sich der Wert $a=(x_3-x_0)/2\alpha$ ergibt.

Liegen also die Punkte 0 1 2 in dieser Folge auf einer Kettenlinie, und sind die Punkte 1 2 durch eine Linie $\mathfrak{L}$ verbunden, auf der der Punkt 3 läuft, so ist $\overline{K}_{01}+K_{13}$ immer größer als der gerade Abstand 0 3; es gibt also stets eine nach unten konvexe Kettenlinie 0 3, deren Länge $\overline{K}_{01}+K_{13}$ ist, worin die Weierstraßsche Konstruktion besteht. Weiter kann man setzen

$$x=\xi(t,a,b)=t,\ y=\eta(t,a,b)=y_0+a\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{t-b}{a}-\mathfrak{Cof}\,\frac{t_0-b}{a}\right),$$
$$\omega=a\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{t-b}{a}-\mathfrak{Sin}\,\frac{t_0-b}{a}\right);$$

nimmt man noch $au=t-b$, $au_0=t_0-b$, so findet man

$$\varDelta(t,a,b)=-\begin{vmatrix}\mathfrak{Cof}\,u-\mathfrak{Cof}\,u_0-(u\,\mathfrak{Sin}\,u-u_0\,\mathfrak{Sin}\,u_0), & \mathfrak{Sin}\,u-\mathfrak{Sin}\,u_0\\ \mathfrak{Sin}\,u-\mathfrak{Sin}\,u_0-(u\,\mathfrak{Cof}\,u-u_0\,\mathfrak{Cof}\,u_0), & \mathfrak{Cof}\,u-\mathfrak{Cof}\,u_0\end{vmatrix},$$

und wenn man u allein sich ändern läßt,

$$\frac{\partial\varDelta}{\partial u}=\mathfrak{Sin}\,(u-u_0)-(u-u_0)\,\mathfrak{Cof}\,(u-u_0),$$
$$\frac{\partial^2\varDelta}{\partial u^2}=-(u-u_0)\,\mathfrak{Sin}\,(u-u_0).$$

Die zweite Ableitung ist also immer negativ, ebenso, wenn $u>u_0$, auch die erste Ableitung und die Größe $\varDelta$ selbst, die also nicht verschwindet. Die Jacobische Bedingung des Extrems ist immer erfüllt; ein beliebig langes Stück der Kettenlinie gibt die tiefstmögliche Lage des Schwerpunkts bei gegebener Länge.

III. Der erste von 0 aus aus der Extremale $\mathfrak{E}$ im Sinne wachsender t erreichte Punkt 6, in welchem $\Delta(t, a, b) = 0$ wird, heißt der mit 0 konjugierte Punkt; die Jacobische Bedingung verlangt, daß der betrachtete Extremalenbogen 12 zwischen zwei konjugierten Punkten 0 und 6 verbleibe. Die Auffindung der konjugierten Punkte ist im allgemeinen eine von besonderer Natur der gestellten Aufgabe abhängige Sonderaufgabe; doch läßt sich für gewisse Arten von Aufgaben eine allgemeine Methode, von C. Lindemann herrührend, angeben, die häufig die Diskussion möglich macht.

In den Integranden F und G fehle die Größe x, so daß man nichthomogen

$$J = \int f(y, p)\, dx, \quad K = \int g(y, p)\, dx$$

ansetzen kann. Die eine der Eulerschen Gleichungen gibt

$$h - p h_p = \text{const.} = a, \quad h = f + \lambda g,$$

woraus man ableite

$$y = \Phi(a, \lambda, p);$$

daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = p = \Phi_p \frac{dp}{dx}, \quad x = \int \frac{\Phi_p\, dp}{p} = \Psi(a, \lambda, p).$$

Für die durch den Punkt 0 hindurchgehenden Extremalen findet man

(4) $\quad y_0 = \Phi(a, \lambda, p_0), \quad x - x_0 = \Psi(a, \lambda, p) - \Psi(a, \lambda, p_0)$

und, indem wir $p = t$ als Unabhängige nehmen,

$$\omega = \int_{p_0}^{p} g(y, p) \frac{dx}{dp}\, dp = \int_{p_0}^{p} g(\Phi, p)\, \Psi_p\, dp;$$

a, λ sind die Festwerte a, b der allgemeinen Theorie. Benutzt man nun die Gleichungen

(5) $$\omega_p = g(y, p) \frac{dx}{dp} = g(y, p)\, \xi_p, \quad \eta_p = p\, \xi_p,$$

so findet man, $g(y, p) = g$ gesetzt,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_p & \eta_p & \omega_p \\ \xi_a & \eta_a & \omega_a \\ \xi & \eta_\lambda & \omega_\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \eta_p & 0 \\ \xi_a - \dfrac{\eta_a}{p} & \eta_a & \omega_a - \dfrac{g\,\eta_a}{p} \\ \xi_\lambda - \dfrac{\eta_\lambda}{p} & \eta_\lambda & \omega_\lambda - \dfrac{g\,\eta_\lambda}{p} \end{vmatrix}$$

$$= -p\,\xi_p \begin{vmatrix} \xi_a - \left(\dfrac{\eta_a}{p}\right) & \omega_a - \left(\dfrac{g\,\eta_a}{p}\right) \\ \xi_\lambda - \left(\dfrac{\eta_\lambda}{p}\right) & \omega_\lambda - \left(\dfrac{g\,\eta_\lambda}{p}\right) \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (5) ergibt sich aber

$$\eta_{ap} - p\,\xi_{ap} = 0, \quad \omega_{ap} = g\,\xi_{ap} + g_y\,\eta_a\,\xi_p,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\xi_a - \frac{\eta_a}{p}\right) = \frac{\eta_a}{p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial p}\left(\omega_a - \frac{g\,\eta_a}{p}\right) = \frac{g\,\eta_a}{p^2}$$

und ebenso

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\xi_\lambda - \frac{\eta_\lambda}{p}\right) = \frac{\eta_\lambda}{p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial p}\left(\omega_\lambda - \frac{g\,\eta_\lambda}{p}\right) = \frac{g\,\eta_\lambda}{p^2}.$$

Ferner folgt aus den Gleichungen

$$x_0 = \xi(p_0, a, \lambda), \quad y_0 = \eta(p_0, a, \lambda),$$

da x_0 und y_0 festgehalten werden,

$$\xi_a\Big|^0 + \xi_p\Big|^0 \frac{\partial p_0}{\partial a} = 0, \quad \eta_a\Big|^0 + \eta_p\Big|^0 \frac{\partial p_0}{\partial a} = 0,$$

$$\omega_a = \frac{\partial}{\partial a}\int_{p_0}^{p} g\,\xi_p\,dp = \int_{p_0}^{p} \frac{\partial(g\,\xi_p)}{\partial a}\,dp - g\,\xi_p\Big|^0 \frac{\partial p_0}{\partial a},$$

$$\omega_a\Big|^0 = -g\,\xi_p\Big|^0 \frac{\partial p_0}{\partial a} = -\frac{g\,\eta_p}{p}\Big|^0 \frac{\partial p_0}{\partial a} = \frac{g\,\eta_a}{p}\Big|^0,$$

$$\left(\omega_a - \frac{g\,\eta_a}{p}\right)\Big|^0 = 0, \quad \left(\xi_a - \frac{\eta_a}{p}\right)\Big|^0 = 0,$$

nebst ähnlichen Gleichungen, in denen nur a durch λ ersetzt ist. Jetzt ergeben die Gleichungen (6), (7)

$$\xi_a - \frac{\eta_a}{p} = \int_{p_0}^{p} \frac{\eta_a}{p^2}\,dp, \qquad \xi_\lambda - \frac{\eta_\lambda}{p} = \int_{p_0}^{p} \frac{\eta_\lambda\,dp}{p^2},$$

$$\omega_a - \frac{g\,\eta_a}{p^2} = \int_{p_0}^{p} \frac{g\,\eta_a}{p^2}\,dp, \quad \omega_\lambda - \frac{g\,\eta_\lambda}{p} = \int_{p_0}^{p} \frac{g\,\eta_\lambda\,dp}{p^2}$$

und die Gleichung $h - p\,h_p = a$, in der man $y = \eta(a, \lambda, p)$ gesetzt denkt, ergibt, indem man nach a und λ differenziert,

$$(h_y - p\,h_{py})\,\eta_a = 1, \quad (h_y - p\,h_{yp})\,\eta_\lambda + g - p\,g_p = 0,$$

$$\eta_\lambda = -\eta_a(g - p\,g_p);$$

da ferner die Eulersche Gleichung in den Formen

$$h_y - \frac{d\,h_p}{dx} = 0, \quad h_y - p\,h_{py} - h_{pp}\frac{dp}{dx} = 0$$

geschrieben werden kann, erhält man

$$\eta_a = \frac{1}{h_y - p\,h_{py}} = \frac{1}{h_{pp}}\frac{dx}{dp}$$

und für $\varDelta$ schließlich

$$\varDelta(p, a, \lambda) = -p\,\xi_p \begin{vmatrix} \int\limits_{p_0}^{p} \frac{\eta_a}{p}\,dp, & \int\limits_{p_0}^{p} \frac{(g - p\,g_p)\,\eta_a}{p^2}\,dp, \\ \int\limits_{p_0}^{p} \frac{g\,\eta_a}{p^2}\,dp, & \int\limits_{p_0}^{p} \frac{g\,(g - p\,g_p)\,\eta_a}{p^2}\,dp, \end{vmatrix}$$

$$= -\,\eta_p \begin{vmatrix} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{p^2\,h_{pp}}, & \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g - p\,g_p}{p^2\,h_{pp}}\,dx, \\ \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g\,dx}{p^2\,h_{pp}}, & \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g\,(g - p\,g_p)}{p^2\,h_{pp}}\,dx \end{vmatrix}.$$

Schreibt man für die hier auftretende Determinante

$$-\frac{\varDelta}{\eta_p} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = A\,\varDelta_0$$

und bezeichnet durch Striche die Ableitungen nach irgend einer Unabhängigen, von der auch p abhängt, so ist

$$A'D' = B'C'$$

und man findet

$$\begin{aligned}
\varDelta_0' &= \left(D - \frac{B\,C}{A}\right)' = D' + \frac{B\,C\,A'}{A^2} - \frac{BC' + CB'}{A} \\
&= \frac{B'\,C'}{A'} + \frac{B\,C\,A'}{A^2} - \frac{BC' + CB'}{A} \\
&= \frac{A^2B'C' + B\,C\,A'^2 - A\,B\,A'\,C' - A\,C\,A'B'}{A^2A'} \\
&= \frac{(A\,B' - BA')(AC' - CA')}{A^2A'},
\end{aligned}$$

was die Diskussion des in $\varDelta$ enthaltenen Faktors $\varDelta_0$ erleichtert. Da nun offenbar die Integrale B und C identisch werden, sobald $g_p = 0$, also g Funktion von y allein ist, so erscheint die noch brauchbarere Formel

$$\varDelta_0' = \frac{(A\,B' - BA')^2}{A^2A'}. \tag{8}$$

Führt man für p eine Unabhängige u in die Integrale A, B, C, D ein, so ist offenbar

$$\varDelta^{(u)} = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(u, a, \lambda)} = \varDelta \cdot \frac{dp}{du} = -A\,\eta_u \varDelta_0.$$

Jetzt ist der günstigste Fall der, daß $\varDelta_0$ an kenntlichen Stellen unendlich wird und der Gleichung (8) gemäß mit angebbarem Vorzeichen der Ableitung von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, also auch verschwindet, womit dann ein konjugierter Punkt nachgewiesen ist.

IV. Dieses Verfahren, konjugierte Punkte zu bestimmen, läßt sich völlig durchführen bei der Aufgabe der kleinsten Drehfläche von gegebener Fläche des Meridians:

$$\delta \int y\,ds = 0, \quad \delta \int y\,dx = 0, \quad h = y\sqrt{1+p^2} + \lambda y, \; g = y.$$

Man findet für die Extremalen

$$h - p h_p = \lambda y + \frac{y^2}{\sqrt{1+p^2}} = -a = \text{const},$$

$$p = \frac{\sqrt{y^2 - (\lambda y + a)^2}}{\lambda y + a}, \quad x = \int \frac{(\lambda y + a)\,dy}{\sqrt{y^2 - (\lambda y + a)^2}},$$

und setzt

$$y = \frac{a}{\lambda^2 - 1}(\sin u - \lambda), \quad \lambda y + a = \frac{a}{\lambda^2 - 1}(\lambda \sin u - 1),$$

$$dy = \frac{a \cos u\,du}{\lambda^2 - 1}, \quad dx = \frac{a}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}}(\lambda \sin u - 1)\,du,$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}\cos u}{1 - \lambda \sin u}, \quad dp = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}\,(\lambda - \sin u)\,du}{(1 - \lambda \sin u)^2},$$

$$x = \frac{a}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}}(-u - \lambda \cos u) + \text{const}.$$

Wir betrachten die Schar, die durch die Gleichungen

$$x = \xi(u, a, \lambda) = x_0 + \frac{a}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}}(-u - \lambda \cos u)\Big|_{u_0}^{u},$$

$$y_0 = \frac{a}{\lambda^2 - 1}(\sin u_0 - \lambda),$$

$$y = \frac{a}{\lambda^2 - 1}(\sin u - \lambda) = \eta(u, a, \lambda), \quad \eta_a = \frac{\sin u - \lambda}{\lambda^2 - 1}$$

definiert wird und an der Stelle $u = u_0$ durch den gegebenen Punkt (x_0, y_0) geht. Die drei maßgebenden Integrale sind

$$\int_{p_0}^{p} A_p\,dp = \frac{-1}{(\lambda^2-1)^{3/2}} \int_{u_0}^{u} \frac{(\sin u - \lambda)^2}{\cos^2 u}\,du = A,$$

$$\int_{p_0}^{p} B_p\,dp = \frac{-a}{(\lambda^2-1)^{5/2}} \int_{u_0}^{u} \frac{(\sin u - \lambda)^3}{\cos^2 u}\,du = B = C,$$

$$\int_{p_0}^{p} C_p\,dp = \frac{-a^2}{(\lambda^2-1)^{7/2}} \int_{u_0}^{u} \frac{(\sin u - \lambda)^4}{\cos^2 u}\,du = D,$$

$$\varDelta^{(u)} = \frac{-a\cos u}{\lambda^2-1}\cdot \varDelta_0 A.$$

Dabei ist A_u negativ, die Formel (8) gibt also für $d\varDelta^0/du$ ein festes Vorzeichen.

Wenn nun $\alpha = (n+\frac{1}{2})\pi$ und n eine ganze Zahl ist, so entwickeln sich die Integranden der Integrale A, $B = C$, D in der Form

$$\frac{l_0}{(u-\alpha)^2} + \mathfrak{P}(u-\alpha), \quad \frac{m_0}{(u-\alpha)^2} + \mathfrak{P}(u-\alpha),$$
$$\frac{n_0}{(u-\alpha)^2} + \mathfrak{P}(u-\alpha),$$

und $\mathfrak{P}$ bedeutet verschiedene Potenzreihen; dabei ist $l_0 n_0 = m_0^2$, die Größen A, B, D sind also ebenfalls meromorphe Funktionen von u und entwickeln sich in der Form

$$\frac{-l_0}{u-\alpha} + \mathfrak{P}(u-\alpha), \quad \frac{-m_0}{u-\alpha} + \mathfrak{P}(u-\alpha), \quad \frac{-n_0}{u-\alpha} + \mathfrak{P}(u-\alpha);$$

die Verbindung $AD - B^2$ erhält die Form

$$A\varDelta_0 = \frac{\varphi(\alpha)}{u-\alpha} + \mathfrak{P}(u-\alpha),$$

wobei $\varphi(\alpha)$ ein, wie man leicht übersieht, von Null verschiedener Festwert ist. Daraus sieht man, daß $\varDelta^{(u)}$, wie zu erwarten ist, regulär bleibt an der Stelle α, die Größe $A\varDelta_0$ aber einfach unendlich wird, also, wenn u den Wert α reell durchschreitet, von $+\infty$ zu $-\infty$ oder umgekehrt umspringt. Da nun $d\varDelta_0/du$ festes Vorzeichen besitzt, so geht die Größe $\varDelta_0$ auf der Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stellen α von $-\infty$ bis $+\infty$ oder umgekehrt, erreicht also auch den Wert Null, so daß dann

$\Delta^{(u)} = 0$ wird und ein konjugierter Punkt, erscheint, in unserem Falle zwischen $u = \frac{1}{2}\pi$ und $u = \frac{3}{2}\pi$, wenn u_0 im ersten Quadranten liegt.

§ 29.

Notwendigkeit der Jacobischen Bedingung; Hüllen.

Wir betrachten jetzt die in § 27 benutzte Extremalenschar in der Umgebung eines zum gemeinsamen Ausgangspunkt konjugierten Punktes, fassen die Untersuchung aber gleich möglichst allgemein.

I. Sei die Extremalenschar

$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b) \tag{1}$$

mit einer auf ihnen aufgetragenen Größe

$$z = \omega(t, a, b) \tag{2}$$

gegeben, so daß wir auch von einer zweifach unendlichen Raumkurvenschar sprechen können.

Verschwinde die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \omega)}{\partial(t, a, b)} = \Delta(t, a, b)$$

an der Stelle $t = t_6$, $a = a_0$, $b = b_0$ und sei dabei

$$\Delta_t(t_6, a_0, b_0) \neq 0.$$

Dann kann man t als an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0$ reguläre Funktion von a und b durch die Gleichung

$$\Delta(t, a, b) = 0 \tag{3}$$

bestimmen.

Wir suchen nun eine Hülle der Raumkurven, die durch die beiden Gleichungen (1), (2) definiert werden, oder eine Hülle ebener Kurven (1), die von jeder der Eingehüllten in einem der Gleichung (3) unterworfenen Punkte berührt werden. Längs einer solchen müßten, um zunächst die Berührung zu sichern, wenn τ der unabhängige Parameter ist, die Gleichungen

$$\begin{gathered} \frac{dx}{d\tau} = m\,\xi_t, \quad \frac{dy}{d\tau} = m\,\eta_t, \\ 0 = \xi_t\left(\frac{dt}{d\tau} - m\right) + \xi_a \frac{da}{d\tau} + \xi_b \frac{db}{d\tau}, \\ 0 = \eta_t\left(\frac{dt}{d\tau} - m\right) + \eta_a \frac{da}{d\tau} + \eta_b \frac{db}{d\tau} \end{gathered} \tag{4}$$

bestehen. Wenn aber im Berührungspunkt die Gleichung (3) gilt, und die Determinanten des Schemas

$$\begin{matrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \end{matrix}$$

nicht sämtlich für $t = t_6$, $a = a_0$, $b = b_0$ verschwinden, was wir annehmen wollen, so folgt aus den Gleichungen (4)

$$(5) \qquad 0 = \omega_t\left(\frac{dt}{d\tau} - m\right) + \omega_a \frac{da}{d\tau} + \omega_b \frac{db}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau} = m\,\omega_t$$

und sichert mit den Gleichungen (4) zusammen die Berührung einer Raumkurve mit den dreidimensionalen Extremalen (1), (2).

Man kann für die Gleichungen (4), (5) auch schreiben

$$(6) \qquad \frac{\xi_a\,da + \xi_b\,db}{\xi_t} = \frac{\eta_a\,da + \eta_b\,db}{\eta_t} = \frac{\omega_a\,da + \omega_b\,db}{\omega_t};$$

denkt man sich hier für t den Wert aus der Gleichung (3) eingesetzt, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen a und b; die eine der beiden unter (6) zusammengefaßten Aussagen folgt, wie vorher schon bemerkt, aus der anderen auf Grund der Gleichung (3) und der eingeführten Voraussetzungen. Die Gleichung (6) gibt db/da oder da/db als an der Stelle $a = a_0$, $b = b_0$ reguläre Funktion von a und b, kann also so integriert werden, daß eine der Größen a, b reguläre Funktion der anderen, z. B. b Funktion von a wird; die Gleichung (3) gibt dann auch für t eine reguläre Funktion, und die mit diesen Werten von t, a, b gebildeten Gleichungen

$$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b), \quad z = \omega(t, a, b)$$

definieren die gesuchte Hülle $\mathfrak{E}$, deren Existenz unter den geltenden Voraussetzungen bewiesen ist.

Wäre im Punkte 6 längs der Kurve $\mathfrak{E}$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = 0,$$

so würde aus den Gleichungen (4), da ξ_t und η_t nicht zugleich verschwinden, $m = 0$, also nach (5) auch

$$\frac{dz}{d\tau} = 0$$

folgen; die Kurve $\mathfrak{E}$ hätte an der Stelle 6 einen Rückkehrpunkt, könnte auch in den Punkt 6 zusammenschrumpfen. Von diesem Falle abgesehen, wechselt m im Punkt 6 das Vorzeichen nicht, und kann den Gleichungen (4) zufolge positiv gemacht werden, indem man nötigenfalls den Parameter τ durch $-\tau$ ersetzt. Die Richtung wachsender τ längs der Kurve $\mathfrak{C}$ stimmt dann in jedem Punkte mit der Richtung wachsender t auf der in diesem Punkte berührenden Extremale $x = \xi$, $y = \eta$ überein.

II. Bisher ist davon, daß unsere Kurven Extremalen sein sollen, noch kein Gebrauch gemacht. Jetzt folgen mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$x_\tau = m\,\xi_t, \quad y_\tau = m\,\eta_t, \quad m > 0$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t) &= F_{x'}(x, y, x_\tau, y_\tau), \\ F_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t) &= F_{y'}(x, y, x_\tau, y_\tau), \\ G_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t) &= G_{x'}(x, y, x_\tau, y_\tau), \\ G_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t) &= G_{y'}(x, y, x_\tau, y_\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

Nun sei auf der Extremale $x = \xi$, $y = \eta$ etwa 7 der Berührungspunkt mit $\mathfrak{C}$; eine Größe $u = u_7$ sei so definiert, daß bei Verschiebung des Punktes 7 die Gleichung

$$\delta u + \lambda\delta z = \delta u + \lambda\delta\omega = H_{x'}\delta x + H_{y'}\delta y\,\big|^7 \tag{8}$$

gilt; λ ist natürlich derjenige Wert der isoperimetrischen Konstanten, der zu der im Punkte 7 berührenden Extremale gehört, und man kann

$$\delta = d\tau\,\frac{d}{d\tau}$$

setzen. Eine solche Größe u ist z. B. $\bar{J}_{07}$, wenn die betrachteten Extremalen alle, wie in § 27, von dem festen Punkte 0 ausstrahlen. Für $\delta\omega$ findet man aber, da für ω die Gleichung $\omega_t = G(x, y, \xi_t, \eta_t)$ gilt, nach (7) die Formel

$$\begin{aligned} \delta\omega = \frac{d\omega}{d\tau}\,d\tau &= m\,\omega_t d\tau = mG(x, y, \xi_t, \eta_t)\,d\tau \\ &= G(x, y, m\xi_t, m\eta_t)\,d\tau = G(x, y, x_\tau, y_\tau)\,d\tau \\ &= \{G_{x'}(x, y, \xi_t, \eta_t)\,x_\tau + G_{y'}(x, y, \xi_t, \eta_t)\,y_\tau\}\,d\tau; \end{aligned} \tag{9}$$

in der Gleichung (8) heben sich also die mit λ vervielfachten Glieder und es bleibt nach (9)

$$\delta u = F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y, \quad \frac{du}{d\tau} = F_{x'}\,.\,x_\tau + F_{y'}\,.\,y_\tau = F(x, y, x_\tau y_\tau),$$

oder, wenn das Integral J_{87} von einem festen Punkt 8 der Kurve $\mathfrak{C}$ aus längs dieser gebildet wird und $\tau_8 < \tau_7$ ist,

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{dJ_{87}}{d\tau}, \quad u\,\Big|^7 = J_{87} + \text{const.}$$

Die Beziehung (9) gibt ebenso für $z = \omega$, indem K längs der Kurve $\mathfrak{C}$ gebildet wird,

$$\frac{dz}{d\tau} = G(x, y, x_\tau, y_\tau) = \frac{dK_{87}}{d\tau}, \quad z\Big|^7 = K_{87} + \text{const.}$$

Läßt man den Punkt 7 in die Lage 8 rücken, so wird $J_{87} = K_{87} = 0$; also folgen bei der festgesetzten Lagenbeziehung $\tau_8 < \tau_7$ die Gleichungen

$$u\Big|_8^7 = u_7 - u_8 = J_{87},$$

$$z\Big|_8^7 = z_7 - z_8 = K_{87}.$$

Hierin spricht sich aus, was man die doppelte Evoluteneigenschaft der Projektion der Kurve $\mathfrak{C}$ auf die xy-Ebene nennt; sind 7 und 8 zugleich die Projektionen der bisher so bezeichneten Punkte auf die xy-Ebene und gehen die Extremalen von dem festen Punkte 0 aus, so daß

$$u_7 = \overline{J}_{07}, \quad z_7 = \overline{K}_{07}$$

gesetzt werden kann, so hat man die Gleichungen

$$\overline{J}_{07} = \overline{J}_{08} + J_{87}, \quad \overline{K}_{07} = \overline{K}_{08} + K_{87}.$$

Hiermit wird zugleich das Aufhören der Extremseigenschaft ersichtlich: auf jeder ebenen Extremale der betrachteten Schar sind 0 und 7 konjugierte Punkte; ein von zwei solchen begrenzter Bogen bietet die isoperimetrische Extremseigenschaft nicht mehr dar, da die Extremale 08 mit dem Hüllenbogen 87 eine Verbindung 07 herstellt, die für beide Integrale K und J denselben Wert ergibt, wie der Extremalenbogen 07. Die Jacobische Bedingung ist also in bestimmtem Sinne notwendig.

Bemerken wir noch, daß bei der Betrachtung dieses Paragraphen die Beschaffenheit der Größen ξ, η, ω benutzt, aber nicht verlangt wird, daß $\Delta(t, a, b)$ auf der Integrationsstrecke überall von Null verschieden sei; das ist nur in einer Umgebung der Stelle 6 nötig. Hat man mehrere Nullpunkte dieser Größe, so ergibt sich in der Umgebung jedes von ihnen eine Hülle.

§ 30.

Verallgemeinerungen, veränderliche Grenzen.

I. Die allgemeinste Form der Größen u und z oder ω, auf die die Sätze des § 29 angewandt werden können, findet man in folgender Weise. Sei 3 ein allgemeiner Punkt auf der Extremale

$x = \xi$, $y = \eta$, und 0 (x_0, y_0) auf jeder von ihnen ein besonderer Punkt. Letzterer kann erstens überhaupt fest, zweitens an eine Kurve gebunden, drittens in einem ebenen Gebiet frei wählbar sein; er ist dann an eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von der Stufe 0, 1 oder 2 gebunden. Wir setzen nun

$$u = u_0 + \overline{J}_{03}, \quad z = z_0 + \overline{K}_{03},$$

wobei u_0, z_0 beliebige Funktionen der Lage des Punktes (x_0, y_0) sind, und die Integrale $\overline{J}$ und $\overline{K}$, wie immer, längs der Extremalen $x = \xi$, $y = \eta$ gebildet werden. Dann ist allgemein, indem δ den Fortgang von einem Bogen 03 zu einem benachbarten bezeichnet,

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta u_0 + \delta \overline{J}_{03}, \\ &= \delta u_0 + F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y \Big|_0^3 + \int_0^3 dt (P \delta x + Q \delta y), \\ \delta z &= \delta z_0 + \delta \overline{K}_{03}, \\ &= \delta z_0 + G_{x'} \delta x + G_{y'} \delta y \Big|_0^3 + \int_0^3 dt (R \delta x + S \delta y), \end{aligned}$$

also, wenn λ die zu der betrachteten Kurve 03 gehörige isoperimetrische Konstante ist, so daß $P + \lambda R = Q + \lambda S = 0$ ist,

$$\delta u + \lambda \delta z = \delta u_0 + \lambda \delta z_0 + H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y \Big|_0^3.$$

Soll nun die in § 29, II. geforderte Gleichung (8) gelten, so muß die Gleichung

$$(1) \qquad -(\delta u_0 + \lambda z_0) + H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y \,|^0 = 0$$

bestehen, d. h. eine verallgemeinerte Transversalitätsbedingung, an der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Ist diese ein fester Punkt, so ist die Bedingung von selbst erfüllt. Ist $\mathfrak{M}$ eine Kurve, und $u_0 = z_0 = 0$, so hat man die Transversalitätsbedingung

$$(2) \qquad H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y = 0$$

entsprechend dem Falle, daß eine von der Kurve $\mathfrak{M}$, und zwar von einem nicht gegebenen Punkte 0 derselben, nach einem gegebenen Punkte 1 hin eine Kurve 01 gezogen werden soll, die das gebundene Extrem darbietet, gegenüber den Nachbarkurven, die ebenfalls von der Kurve $\mathfrak{M}$ nach dem Punkte 1 hingezogen werden; das Extrem ist dadurch gebunden, daß die Größe

$$z = z_0 + K_{01}$$

einen vorgeschriebenen Wert hat. Ist $u_0 = 0$, $z_0 \neq 0$, so hat man die allgemeinere Transversalität

$$(3) \qquad -\lambda \delta z_0 + H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y \,|^0 = 0,$$

die zwischen den Bedingungen (1) und (2) in der Mitte steht; sie tritt auf, wenn nicht K_{01}, sondern $z_0 + K_{01}$, das Integral längs der Vergleichskurve genommen, einen vorgeschriebenen Wert haben soll.

Für alle diese Fälle ist die in II. durchgeführte Entwicklung gültig, weil sie gleich für den allgemeinsten Fall gilt; in allen drei Fällen bilden die Extremalen $x = \xi$, $y = \eta$, wie wir sagen wollen, ein Feld, und zwar ein Kegelfeld, keilförmiges oder Feld mit Bodenfläche, je nachdem $\mathfrak{M}$ von der Stufe 0, 1, 2 ist. Die entsprechenden Transversalitätsbedingungen sind die Gleichungen (1), (2), (3).

II. Daß für die allgemeinste Extremsaufgabe mit einem auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ veränderlichen Anfangspunkt die Transversalitätsbedingung

$$-\delta u_0 - \lambda \delta z_0 + H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y = 0$$

auch notwendig ist, kann leicht in ähnlicher Weise wie bei den Aufgaben des freien Extrems gezeigt werden.

Zunächst ist klar, daß die gesuchten Kurven überhaupt Extremalen sein müssen. Denn ist 12 die gesuchte Kurve, so daß 1 eine besondere Lage des Punktes 0 ist, so fordert das gesuchte Extrem als Sonderfall die Eigenschaft, daß bei fester Lage des Punktes 0 in der Lage 1 das Integral J_{12} ein Extrem sein muß bei festgehaltenem Wert von K_{12}; die Werte u_0 und z_0 sind ja bei dieser Voraussetzung fest. Hieraus folgt nach § 27, daß die gesuchte Kurve Extremale sein muß. Dies festgestellt, kann man die Kurve 02 so variieren, daß der Anfangspunkt 1 sich in eine allgemeine der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ angehörige Nachbarlage 0 verschiebt, und daß dabei die allgemeinere isoperimetrische Bedingung, $z_0 + K_{02}$ habe den vorgeschriebenen Wert $z_1 + \overline{K}_{12}$, erfüllt ist. Man braucht zu diesem Zweck nur die gesuchte, gefunden gedachte Extremalenstrecke 12 zu variieren gemäß den Formeln

$$\begin{aligned}
&\bar{x} - x = (x_0 - x_1)\theta_1(t) + (y_0 - y_1)\theta_2(t) + \varepsilon\,\theta_3(t),\\
&\bar{y} - y = (y_0 - y_1)\lambda_1(t) + (y_0 - y_1)\lambda_2(t) + \varepsilon\,\lambda_3(t),\\
&\theta_1(t_1) = 1, \quad \theta_1(t_2) = 0, \quad \theta_2(t_1) = 0,\\
&\theta_2(t_2) = 0, \quad \theta_3(t_1) = \theta_3(t_2) = 0,\\
&\lambda_1(t_1) = 0, \quad \lambda_1(t_2) = 0, \quad \lambda_2(t_1) = 1,\\
&\lambda_2(t_2) = 0, \quad \lambda_3(t_1) = \lambda_3(t_2) = 0.
\end{aligned}$$

Die Differenzen $x_0 - x_1$ und $y_0 - y_1$ sind, wenn $\mathfrak{M}$ eine Kurve ist, längs deren τ der unabhängige Parameter ist, Funktionen von τ, die für $\tau = \tau_1$ verschwinden; man kann daher setzen

$$\delta = d\tau \frac{d}{d\tau} + d\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Bigg|^{\tau=\tau_1,\ \varepsilon=0}.$$

Ist der Punkt x_0, y_0 frei beweglich, so kann man etwa $\sigma = x_0 - x_1$, $\tau = y_0 - y_1$ setzen und schreiben

$$\delta = d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + d\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Bigg|^{\sigma=\tau=\varepsilon=0}.$$

Jetzt nimmt man für ε eine solche Funktion von τ oder von σ und τ, daß die isoperimetrische Bedingung

$$z_0 + K_{01} = z_0 + \int_0^2 G\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right) dt = z_1 + \int_1^2 G(x, y, x', y')\, dt$$

erfüllt ist. Dies kann erreicht werden, wenn die Ableitung der mittleren Größe nach ε an der Stelle $\tau = 0$ oder $\sigma = \tau = 0$ von Null verschieden ist. Diese Ableitung ist aber

$$\int_0^2 \big(R\theta_3(t) + S\lambda_3(t)\big)\, dt,$$

also jedenfalls bei passender Wahl von $\theta_3(t)$ und $\lambda_3(t)$ von Null verschieden, wenn nicht etwa längs der gesuchten, gefunden gedachten Kurve 12 überall $R = S = 0$, d. h. diese Kurve Extremale des Integrals K im Sinne des freien Extrems ist. Diese Möglichkeit haben wir immer aus der allgemeinen Theorie ausgeschlossen; von ihr abgesehen, ist es also möglich, ε in der gewünschten Weise zu bestimmen, d. h. so zu variieren, daß die isoperimetrische Bedingung der Aufgabe von den der Variation zugrunde liegenden Nachbarkurven erfüllt wird. Ist dies geschehen, so findet man als notwendige Bedingung des Extrems

$$(4)\qquad \delta u = \delta u_0 + F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\Big|_1^2 + \int_1^2 (P\delta x + Q\delta y)\, dt = 0;$$

dabei gibt die erfüllte isoperimetrische Bedingung

$$(5)\qquad \delta z = \delta z_0 + G_{x'}\delta x + G_{y'}\delta y\Big|_1^2 + \int_1^2 (R\delta x + S\delta y)\, dt = 0.$$

Nun wissen wir schon, daß die gesuchte Kurve Extremale sein muß, so daß die Gleichungen

$$P + \lambda R = Q + \lambda S = 0$$

gelten; an der Stelle 2 verschwinden die Variationen; somit ergeben die Gleichungen (4), (5)

$$0 = \delta u + \lambda \delta z = [\delta u_0 + \lambda \delta z_0 - (H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y)]|^1,$$

und das ist wieder die allgemeinste Transversalitätsbedingung, von der wir in Nr. I gesprochen haben. Dieselbe ist also in der Tat notwendige Bedingung des gesuchten gebundenen Extrems bei allgemeinster Fassung der Aufgabe: die gesuchte Kurve geht von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ nach einem gegebenen Punkte hin.

III. Endlich ist leicht zu übersehen, daß die in § 27 aufgestellten hinreichenden Bedingungen des Extrems auch für die jetzt vorliegenden abgeänderten Aufgaben ihre Bedeutung behalten. Die Weierstraßsche Konstruktion besteht auch hier darin, daß durch jeden Punkt der Vergleichskurve $\mathfrak{L}$, die von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, dem Orte der Punkte 0, deren einer 1 ist, nach dem gegebenen Punkte 2 hingeht und die isoperimetrische Bedingung erfüllt, eine Feldextremale von einer bestimmten Eigenschaft gelegt werden kann, deren Festwerte a, b, sowie der zum betrachteten Punkte 3 gehörige Wert t reguläre Funktionen von x_3, y_3 sind. Die verlangte Eigenschaft besteht, wenn 3 der allgemeine Punkt der Kurve $\mathfrak{L}$, und $0'$ ihr Anfangspunkt auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist (Fig. 4, S. 96), in der Gleichung

$$z_{0'} + K_{0'3} = z_0 + \overline{K}_{03}, \tag{6}$$

wobei fortan das ungestrichene Integral längs der Kurve $\mathfrak{L}$, das gestrichene längs der Feldextremale genommen wird. Setzen wir dann

$$W(\tau) = J_{0'3} - \overline{J}_{03} + u_{0'} - u_0,$$

so ist

$$W(\tau_0) = 0, \quad W(\tau_2) = J_{0'2} - \overline{J}_{02} + u_{0'} - u_1;$$

letztere Größe entscheidet durch ihr Vorzeichen über das Vorliegen des gesuchten Extrems. Die Gleichung

$$\frac{dW}{d\tau} = F(x, y, x_\tau, y_\tau) - \frac{d(\overline{J}_{03} + u_0)}{d\tau} \tag{7}$$

bleibt offenbar gültig; an Stelle der ähnlichen Formeln des § 27 treten die Gleichungen

$$\delta(u_0 + \overline{J}_{03}) = \delta u_0 + (F_{x'} \delta x + F_{y'} \delta y)\Big|_0^3 + \int_0^3 (P \delta x + Q \delta y)\, dt,$$

$$\delta(z_0 + \overline{K}_{03}) = \delta z_0 + (G_{x'} \delta x + G_{y'} \delta y)\Big|_0^3 + \int_0^3 (R \delta x + S \delta y)\, dt;$$

addiert man die letzte, mit λ vervielfacht, zur vorletzten, so fallen die Integrale und die auf den Punkt 0 bezüglichen Glieder wegen der Transversalitätsbedingung

$$-(\delta u_0 + \lambda \delta z_0) + H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y = 0$$

weg, und man findet

$$\frac{d(u_0 + \overline{J}_{03})}{d\tau} + \lambda \frac{d(z_0 + \overline{K}_{03})}{d\tau} = H_{x'} \frac{dx}{d\tau} + H_{y'} \frac{dy}{d\tau}. \tag{8}$$

Die Weierstraßsche Konstruktion gibt aber nach (6)

$$\frac{d(z_0 + \overline{K}_{03})}{d\tau} = \frac{d(z_{0'} + K_{0'3})}{d\tau} = G(x, y, x_\tau, y_\tau);$$

somit folgt nach (8) und (7)

$$\frac{d(u_0 + \overline{J}_{03})}{d\tau} = -\lambda G(x, y, x_\tau, y_\tau) + H_{x'} x_\tau + H_{y'} y_\tau,$$

$$\frac{dW}{d\tau} = H(x, y, x_\tau, y_\tau) - H_{x'} x_\tau - H_{y'} y_\tau = \mathcal{E},$$

wie in der früheren Theorie. Jetzt bleibt alles wie dort; das Extrem ist gesichert unter den dort angegebenen Bedingungen: Jacobische Bedingung, Vorzeichen der Größe $\mathcal{E}$, Möglichkeit der Weierstraßschen Konstruktion.

§ 31.

Beispiele des gebundenen Extrems und seiner Grenzen.

Die Jacobische Bedingung hört zuerst auf, erfüllt zu sein, in dem ersten Punkte, für den

$$\Delta(t, a_0, b_0) = 0$$

ist, d. h. dem ersten, den man von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ aus im Sinne wachsender t fortgehend erreicht. In seiner Umgebung findet sich nach § 29 im allgemeinen eine Hülle der Feldextremalen, die von ihm ausgeht. Wir nennen ihn den extremalen Brennpunkt der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, wenn diese mindestens von erster Stufe ist; ist $\mathfrak{M}$ ein fester Punkt, so ist dieser Punkt der konjugierte nach § 29. Die Jacobische Bedingung lautet dann dahin, daß der Extremalenbogen vor dem extremalen Brennpunkte sein Ende haben muß, wenn das Extrem gesichert sein soll.

I. Bei der isoperimetrischen Aufgabe im engeren Sinne des Wortes

$$\delta \int (x y' - y x') \, dt = 0, \quad \delta \int \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt = 0$$

ist nach § 28, I. für die Schar der durch einen festen Punkt 0 gehenden Extremalen

$$\varDelta(t, a, b) = c \sin \frac{t}{2} \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right);$$

für den konjugierten Punkt ist zunächst $t = 2\pi$ zu setzen, d. h. er fällt mit dem Punkte 0 zusammen; in ihm entartet die Hülle, und die doppelte Evoluteneigenschaft spricht sich dahin aus, daß jeder dieser Kreise einer einfachen Schar von Kreisen desselben Radius angehört, die, einmal umlaufen, denselben Wert des Inhalts wie der Bogenlänge liefern. Hier tritt der in der allgemeinen Theorie ausgeschlossene Fall ein, daß die Determinanten der Matrix

$$\begin{matrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \end{matrix}$$

identisch verschwinden; die Differentialgleichung zwischen a und b ist die Identität $0 = 0$.

Belangreicher ist der zweite konjugierte Punkt, in welchem der zweite Faktor der Größe $\varDelta$ verschwindet, also $t = 2\alpha$ und α der Winkel ist, für den $\alpha = \operatorname{tg} \alpha$, also ungefähr $\alpha = 256^0$. Hier kann nach der Schlußbemerkung des § 29 eine Hülle erwartet werden, obwohl der Bogen von $t = 0$ bis $t = 2\alpha$ nicht mehr überall die Jacobische Bedingung erfüllt. Die Differentialgleichung zwischen a und b wird nach den Formeln von § 28, I.

$$\frac{\xi_a\, d a + \xi_b\, d b}{\xi_t} = \frac{\omega_a\, d a + \omega_b\, d b}{\omega_t},$$

$$\frac{(1 - \cos 2\alpha)\, d a - \sin 2\alpha\, d b}{a \sin 2\alpha - b \cos 2\alpha} = \frac{a\, d a + b\, d b}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\, d a + (1 - \cos 2\alpha)\, d b}{b \sin 2\alpha + a \cos 2\alpha};$$

im Falle $b = 0$, $a > 0$ hat man

$$\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - 1 \right) d a = d b, \quad \alpha - 1 = \frac{d b}{d a},$$

d. h. die Richtung des Ortes der Mittelpunkte (a, b) bildet mit dem von 0 aus gezogenen Radiusvektor einen festen Winkel, der Ort ist eine logarithmische Spirale. Eine ebensolche Kurve beschreibt auch der konjugierte Punkt selbst: für ihn ist

$$x = a - a \cos 2\alpha - b \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \{ a \sin \alpha - b \cos \alpha \},$$
$$y = b - b \cos 2\alpha + a \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \{ a \cos \alpha + b \sin \alpha \},$$

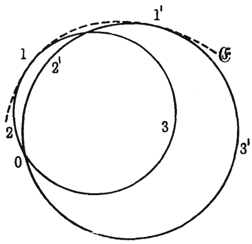
also wenn

$a = c\cos\varphi,\quad b = c\sin\varphi,\quad c = c_0\, e^{m\varphi},\quad c_0 = \text{const.},\quad m = \text{const.}$

gesetzt werden kann,

$$x = 2\, c_0 \sin\alpha \,.\, e^{m\varphi} \sin(\alpha - \varphi),\quad y = 2\, c_0 \sin\alpha \,.\, e^{m\varphi} \cos(\alpha - \varphi),$$

Fig. 11.



was offenbar wieder eine logarithmische Spirale ergibt.

Die doppelte Evoluteneigenschaft (Fig. 11) spricht sich in folgender Weise aus. Wird die Hülle in den Punkten 1 und 1′ von den Kreislinien 0 2 1 3 0 und 0 2′ 1′ 3′ 0 berührt und bedeuten arc und area Bogen und die vom Radiusvektor aus dem Punkte 0 überstrichene Fläche, so ist

$$\text{arc}\ \ 0\,2\,1\,3\,0\,2\,1 - \text{arc}\ \ 0\,2'\,1'\,3'\,0\,2'\,1' = \text{arc}\ \ 1\,1',$$

$$\text{area}\,0\,2\,1\,3\,0\,2\,1 - \text{area}\,0\,2'\,1'\,3'\,0\,2'\,1' = \text{area}\,1\,1',$$

wobei rechts 1 1′ auf die Spirale zu beziehen ist. Das ist natürlich durch Rechnung leicht zu bestätigen.

II. Wir betrachten weiter die isoperimetrische Aufgabe in zwei besonderen Fassungen mit veränderlichem Endpunkt: Sei 1 ein gegebener, 0 ein gesuchter Punkt der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$, und sei die Kurve 0 1 oder $\mathfrak{C}$ so zu ziehen, daß der von $\mathfrak{K}$ und 0 1 begrenzte Inhalt ein Maximum wird bei gegebener Länge a) der beiden Bögen 0 1 auf den Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ zusammengenommen, b) des $\mathfrak{C}$-Bogens 0 1 für sich allein.

In beiden Fällen sucht man das Extrem der Größe

$$u = \frac{1}{2}\int_1^0 (x\,dy - y\,dx)_{\mathfrak{K}} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x\,dy - y\,dx)_{\mathfrak{C}},$$

wobei die Fußmarken $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ die Kurve bezeichnen, längs deren man integriert; das zweite Integral ist

$$J_{01} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x\,y' - y\,x')\,dt$$

in der Bezeichnung der allgemeinen Theorie, das erste ist u_0, d. h. der Wert von u, wenn der Endpunkt der Kurve $\mathfrak{C}$ in den Anfangspunkt 0 rückt. Dabei ist gegeben im Falle a) die Größe

$$z = \int_1^0 \left(\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}\right)_{\mathfrak{K}} + \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = z_0 + K_{01},$$

im Falle b) nur K_{01}. Auf der Kurve $\mathfrak{K}$ sei τ ein in der Richtung 1 0 wachsender Parameter, also

$$u_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_0} (x\,y_\tau - y\,x_\tau)\,d\,\tau, \quad z_0 = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_0} \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}\,d\,\tau;$$

variieren wir den Punkt 0, indem wir den zugehörigen Wert $\tau = \tau_0$ um $d\,\tau$ vermehren, so folgt

$$(1) \qquad \delta\,u_0 = \frac{1}{2}(x\,y_\tau - y\,x_\tau)\big|^0\,d\,\tau, \quad \delta\,z_0 = \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}\big|^0\,d\,\tau,$$

und die allgemeine Transversalitätsbedingung im Falle a) wird

$$-\delta\,u_0 - \lambda\,\delta\,z_0 + H_{x'}\,\delta\,x + H_{y'}\,\delta\,y\big|^0 = 0,$$

$$H = \frac{1}{2}(x\,y' - y\,x') + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \delta\,x = x_\tau\,d\,\tau, \quad \delta\,y = y_\tau\,d\,\tau,$$

oder nach (1), alles auf den Punkt 0 bezogen,

$$-\frac{1}{2}(x\,y_\tau - y\,x_\tau) - \lambda\sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2} + \left(-\frac{y}{2} + \frac{\lambda\,x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)x_\tau$$
$$+\left(\frac{x}{2} + \frac{\lambda\,y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)y_\tau = 0,$$

oder einfach

$$1 = \frac{x'\,x_\tau + y'\,y_\tau}{\sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Im Punkte 0 fallen also die Richtungen wachsender t und τ zusammen; der gesuchte Kreisbogen berührt die Kurve $\mathfrak{K}$ und geht in der Richtung 1 0 längs der Kurve $\mathfrak{K}$ vom Punkte 0 weiter.

Im Falle b) hat man in den obigen Formeln nur $\delta\,z_0 = 0$, also

$$-\delta\,u_0 + H_{x'}\,\delta\,x + H_{y'}\,\delta\,y = 0$$

zu setzen und findet daraus

$$x'\,x_\tau + y'\,y_\tau = 0;$$

der Kreisbogen $\mathfrak{C}$ geht im Punkte 0 normal von der Kurve $\mathfrak{K}$ aus.

Jetzt werde ein Koordinatensystem $\bar{x}$, $\bar{y}$ mit dem Anfangspunkt 0 eingeführt und die $\bar{x}$-Achse habe die Richtung wachsender τ längs der Kurve $\mathfrak{K}$; die Achsenpaare x, y und x, $\bar{y}$ seien gleich orientiert, und σ sei der Winkel, um den die $\bar{x}$-Achse im positiven Sinne gegen die x-Achse gedreht ist, also wenn für τ die Bogenlänge genommen wird,

$$x_\tau = \cos\sigma, \quad y_\tau = \sin\sigma.$$

Dann ist

$$x = x_0 + \bar{x}\cos\sigma - \bar{y}\sin\sigma, \quad y = y_0 + \bar{x}\sin\sigma + \bar{y}\cos\sigma.$$

Für die vom Punkte 0 ausgehenden Extremalen kann man nun

$$\varrho = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = a\sin t$$

setzen, wobei t der absolut genommene Winkel ist, um den sich der Radiusvektor 03 gegen die Anfangsrichtung $dt > 0$ im Punkte 0 gedreht hat, wenn der Punkt 3 in der Richtung wachsender t fortgeht; dabei ist im Falle a)

$$\bar{x} = \varrho\cos t, \quad \pm\bar{y} = \varrho\sin t,$$

im Falle b) dagegen

$$\bar{x} = e_1\varrho\sin t, \quad \bar{y} = e_2\varrho\cos t,$$

wobei $e_\alpha = \pm 1$. Man erhält also in letzterem Falle, den wir genauer verfolgen,

$$\begin{aligned}
& x = \xi(t, a, b) = x_0 + a e_1 \sin^2 t\cos\sigma - a e_2 \sin t\cos t\sin\sigma, \\
(2)\quad & y = \eta(t, a, b) = y_0 + a e_1 \sin^2 t\sin\sigma + a e_2 \sin t\cos t\cos\sigma, \\
& z = \omega(t, a, b) = a t,
\end{aligned}$$

wobei $b = \tau$ gesetzt ist, und $d\sigma/d\tau = \sigma_\tau$ die Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ bedeutet.

Die Determinante $\Delta(t, a, b)$ setzt sich jetzt aus folgenden neun Gliedern zusammen:

Ableitungen nach t:

$$\begin{aligned}
& 2 a e_1 \sin t\cos t\cos\sigma - a e_2(\cos^2 t - \sin^2 t)\sin\sigma, \\
& 2 a e_1 \sin t\cos t\sin\sigma + a e_2(\cos^2 t - \sin^2 t)\cos\sigma, \quad a;
\end{aligned}$$

Ableitungen nach a:

$$e_1\sin^2 t\cos\sigma - e_2\sin t\cos t\sin\sigma, \quad e_1\sin^2 t\sin\sigma + e_2\sin t\cos t\cos\sigma, \quad t;$$

Ableitungen nach b oder τ:

$$\begin{aligned}
& x_{0\tau} - a e_1\sin^2 t\sin\sigma\,.\,\sigma_\tau - a e_2\sin t\cos t\cos\sigma\,.\,\sigma_\tau, \\
& y_{0\tau} + a e_1\sin^2 t\cos\sigma\,.\,\sigma_\tau - a e_2\sin t\cos t\sin\sigma\,.\,\sigma_\tau, \quad 0.
\end{aligned}$$

Wegen der wie in § 28, I. leicht zu ersehenden Invarianz der Gleichung $\Delta = 0$ gegenüber einer Transformation der Koordinaten x, y kann man nun annehmen, im Punkte 0 sei $\sigma = 0$, also $x_{\tau 0} = 1$, $y_{\tau 0} = 0$; dann wird die Determinante der angegebenen neun Größen einfach

$$\Delta(t, a, b) = \begin{vmatrix} a\, e_1 \sin 2t, & a\, e_2 \cos 2t, & a \\ e_1 \sin^2 t, & e_2 \sin t \cos t, & t \\ 1 - a\, e_2 \sin t \cos t \,.\, \sigma_\tau, & a\, e_1 \sin^2 t \,.\, \sigma_\tau, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a\, e_2}{2}(2t\cos 2t - \sin 2t) + a^2 \sigma_\tau \sin t(-t\cos t + \sin t).$$

Nun ist σ_τ der reziproke Wert des Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte 0 mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gegen die Richtung wachsender τ im positiven oder negativen Drehsinn um 90^0 gedreht ist, oder je nachdem die $\bar{y}$-Koordinate des Krümmungsmittelpunktes positiv oder negativ ist, und die Gleichung $\bar{y} = e_2 \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \sin t$ zeigt, daß e_2 positiv oder negativ ist, je nachdem die Extremale in der Richtung $dt > 0$ verfolgt, von 0 nach der Richtung $+\bar{y}$ oder $-\bar{y}$ fortgeht. Die Größe $e_2\, \sigma_\tau$ ist also positiv oder negativ, je nachdem die bezeichnete Fortgangsrichtung der Extremale nach der konkaven oder konvexen Seite der Kurve $\mathfrak{K}$ hinführt. Entsprechend diesen Fällen hat man also zur Bestimmung des extremalen Brennpunktes die Gleichung

$$2t\cos 2t - \sin 2t \pm \frac{2a}{R} \sin t(-t\cos t + \sin t) = 0$$

mit dem oberen oder unteren Vorzeichen; R ist der Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte 0, und a der Durchmesser des betrachteten Kreises, endlich $2t$ der Zentriwinkel des Bogens von 0 bis zum Brennpunkt hin.

Im Falle $R = \infty$, d. h. wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ in der Umgebung der Stelle 0 geradlinig läuft, bleibt die Gleichung

$$2t\cos 2t - \sin 2t = 0,$$

die wieder als kleinste positive Wurzel $2t = \beta = 256^0$ ergibt. Hier kann eine Hülle mit doppelter Evoluteneigenschaft leicht hergestellt werden. Die Gleichungen (1) werden nämlich, da man $y_0 = 0$, $\sigma = 0$ setzen kann, mit geändertem Sinn des Buchstabens b und den Werten $e_1 = 1$, $e_2 = -1$

$$(3) \qquad \xi_1 = b - \frac{1}{2} a \cos 2t, \quad \eta = -\frac{1}{2} a \sin 2t, \quad \omega = a t.$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{\xi_a\, d\, a + \xi_b\, d\, b}{\xi_t} = \frac{\eta_a\, d\, a + \eta_b\, d\, b}{\eta_t}$$

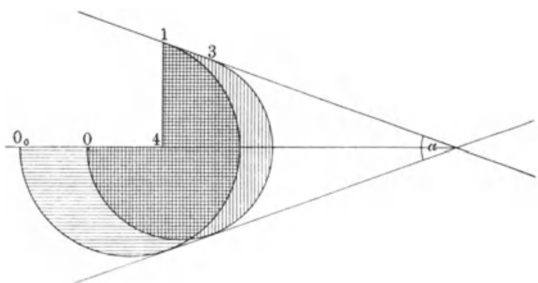
mit $t = \frac{1}{2}\beta$ ist leicht zu integrieren und gibt für $d\,a/d\,b$ den festen Wert $2\cos\beta$.

Eine solche Beziehung zwischen a und b sondert aus der zweifach unendlichen Schar von Kreisen (3) eine einfach unendliche von solchen aus, welche zwei feste Gerade berühren; ist α der hohle Winkel derselben, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\cos\beta = \cos(\beta - \pi), \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2} - \beta = 14^0.$$

An dieser Schar kann das Aufhören des Extrems mit elementaren Mitteln zur Anschauung gebracht (Fig. 12) werden. Sind näm-

Fig. 12.



lich 1, 3 zwei auf demselben Schenkel des Winkels α liegende Punkte und 3 dem Scheitel näher gelegen als 1, sind ferner 0_0, 0 die Schnittpunkte der durch 1, 3 gehenden Kreise der Schar mit der Halbierungslinie des Winkels α, und haben die Bögen $1\,0_0$, $3\,0$ den Zentriwinkel β, so sind der Bogen $1\,0_0$ und die zusammengesetzte Linie $1\,3\,0$ von gleicher Länge; wenn von 1 auf die Halbierungslinie des Winkels α das Lot $1\,4$ gefällt wird, so sind die horizontal schraffierte Figur $1\,0_0\,4\,1$ und die vertikal schraffierte $1\,3\,0\,4\,1$ von gleicher Fläche, so daß der Bogen $1\,0_0$ sicher kein Extrem der Fläche bei vorgeschriebener Bogenlänge liefert. Die Kurve $\mathfrak{K}$ ist natürlich die gebrochene Linie $0_0\,0\,4\,1$, die Hülle die Gerade $1\,3$.

III. Bildeten die betrachteten Extremalen nach § 30, I. keilförmige Felder, so wollen wir noch kurz eine Aufgabe behandeln, bei der ein Feld mit Bodenfläche auftritt.

Sei die Kurve 0 1 von gegebener Länge zu finden, die in einem nicht vorgeschriebenen Punkte 0 beginnt, im gegebenen Punkt 1 endigt und das Integral

$$J = \int_0^1 y\, x'\, d\, t$$

zum Extrem macht, d. h. den von der Ordinate eines Kurvenpunktes bestrichenen Flächeninhalt. Da keine Summanden u_0 und z_0 vorkommen, lautet die Transversalitätsbedingung einfach

$$H_{x'}\,\delta\, x + H_{y'}\,\delta\, y = 0, \quad \left(y + \frac{\lambda\, x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)\delta\, x + \frac{\lambda\, y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,\delta\, y = 0.$$

Da die Variationen $\delta\, x$ und $\delta\, y$ im Punkte 0 beliebig sind, so folgt für diesen Punkt

$$H_{x'} = H_{y'} = 0, \quad y' = 0, \quad y + \lambda = 0,$$

d. h. im Punkte 0 hat die Extremale, die ja ein Kreis vom Radius $|\lambda|$ ist, eine zur x-Achse parallele Tangente, und der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der x-Achse. Man kann daher die Feldextremalen durch die Gleichungen

$$x = x_0 + y_0 \sin t, \quad y = y_0 \cos t$$

ersetzen und die von 0 beginnende Bogenlänge ist dann $\omega = y_0\, t$. Offenbar kann man $a = x_0$, $b = y_0$ setzen und findet dann

$$\frac{\partial\,(\xi,\, \eta,\, \omega)}{\partial\,(t,\, a,\, b)} = \begin{vmatrix} 1 & \sin t & b \cos t \\ 0 & \cos t & -b \sin t \\ 0 & t & b \end{vmatrix} = b\,(\cos t + t \sin t).$$

Der extremale Brennpunkt liegt also an der Stelle $t = \gamma$, wenn $\gamma = -\cot \gamma$ ist, was etwa $\gamma = 160^0$ ergibt. Hat der Bogen 0 1 einen Zentriwinkel $< 160^0$, so ist das gesuchte Extrem gesichert.

Die Differentialgleichung

$$\frac{\xi_a\, d\, a + \xi_b\, d\, b}{\xi_t} = \frac{\eta_a\, d\, a + \eta_b\, d\, b}{\eta_t}$$

gibt für $d\, a : d\, b$ ein festes durch γ ausdrückbares Verhältnis; man erhält eine Hülle, die immer von der Eingehüllten im Brennpunkt berührt wird, wenn der Punkt 0 eine gewisse Gerade durchläuft, nämlich diejenige, deren Gleichung

$$x_0 \cos \gamma + y_0 = \text{const.} = C$$

ist; die Gleichung der Hülle ist dann

$$x \sin \gamma + y \cos \gamma = C.$$

§ 32.

Die isoperimetrische Eigenschaft des Vollkreises und der Vollkugel.

Die altbekannten Eigenschaften des vollen Kreises, bei gegebenem Umfang die größte Fläche, und der Vollkugel, bei gegebener Oberfläche den größten Rauminhalt darzubieten, können unseren Betrachtungen in folgender Weise eingeordnet werden.

I. Sei eine beliebige aus endlich vielen regulären Stücken bestehende geschlossene Kurve $\mathfrak{L}$ von der Länge l gegeben; sie zerfalle durch die Punkte 0 und 1 in zwei Stücke von der Länge $\frac{1}{2}l$, die wir $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ nennen; der Abstand 01 sei a. Wir konstruieren auf den beiden Seiten der Geraden 01 die Kreisbögen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von der Länge $\frac{1}{2}l$; der $\mathfrak{K}_1$ enthaltende Kreis werde in der Richtung $0\mathfrak{K}_1 1$, d. h. den Bogen $\mathfrak{K}_1$ von 0 nach 1 hin durchlaufend positiv umkreist; dann wird der $\mathfrak{K}_2$ enthaltende Kreis in der Richtung $0\mathfrak{K}_2 1$ negativ umkreist. Faßt man diese Kreise als Extremalen der Aufgabe

$$\delta\int\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = 0, \quad \delta\int\sqrt{dx^2+dy^2} = 0$$

auf, wobei das zweite Integral die isoperimetrische Bedingung liefert, so ist nach § 26, II. im ersten Falle $\lambda < 0$, im zweiten $\lambda > 0$, und da

$$H = \frac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda\sqrt{x'^2+y'^2}, \quad H_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{x'^2+y'^2}^{\,3}}$$

zu setzen ist, so ist für $\mathfrak{K}_1$ die Bedingung des Maximums, für $\mathfrak{K}_2$ die des Minimums erfüllt; also folgt nach § 28, I.

$$J(0\,\mathfrak{K}_1\,1) > J(0\,\mathfrak{L}_1\,1), \quad J(0\,\mathfrak{K}_2\,1) < J(0\,\mathfrak{L}_2\,1),$$

oder auch

$$J(1\,\mathfrak{K}_2\,0) > J(1\,\mathfrak{L}_2\,0),$$

also

$$J(0\,\mathfrak{K}_1\,1) + J(1\,\mathfrak{K}_2\,0) > J(0\,\mathfrak{L}_1\,1) + J(1\,\mathfrak{L}_2\,0).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung geht nun in ihr Entgegengesetztes über, wenn man $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ vertauscht; sie wird also positiv, wenn man nötigenfalls $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ vertauscht. Alsdann stellt sie den positiv genommenen Inhalt der Kurve $\mathfrak{L}$ dar, d. h. das Integral $J(\mathfrak{L})$ in solchem Sinne erstreckt, daß es positiv oder allenfalls verschwindend ausfällt. Die linke Seite ist von selbst positiv, da der Weg $0\,\mathfrak{K}_1\,1\,\mathfrak{K}_2\,0$ eine positive Umkreisung der aus zwei Segmenten bestehenden, von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ begrenzten Fläche $\mathfrak{S}$ bedeutet.

Jetzt bleibt nur zu zeigen, daß eine Kreislinie von der Länge l größeren Inhalt als die Fläche $\mathfrak{S}$ hat. Sei α der gemeinsame Zentriwinkel der Bögen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, also deren Radius $l/2\alpha$; dann ist der Inhalt jedes der Segmente

$$\frac{1}{2}\mathfrak{S} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{l}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{l}{2\alpha}\right)^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l^2}{8}\,\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2}.$$

Die Ableitung des zweiten Bruches rechts ist aber

$$-\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2\cos\alpha - 2\alpha\sin\alpha}{\alpha^4} = \frac{-2\alpha^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha^4}$$
$$= \frac{4}{\alpha^3}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

verschwindet also auf der Strecke $0 < \alpha < 2\pi$ nur an der Stelle $\alpha = \pi$, an der der zweite Faktor positiv ist, so daß die ganze Größe von positiven zu negativen Werten bei wachsenden Werten von α übergeht; $\mathfrak{S}$ hat also an der Stelle $\alpha = \pi$ ein Maximum. Dann schließen sich aber beide Bögen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zu einem vollen Kreise zusammen und der Kreis von der Länge l hat einen Inhalt

$$\pi l^2 > \mathfrak{S} > J(0\,\mathfrak{L}_1\,1) + J(1\,\mathfrak{L}_2\,0),$$

d. h. größer als der positive Inhalt der Kurve $\mathfrak{L}$.

II. Die Oberfläche eines sonst beliebigen Körpers werde von jeder Ebene $x =$ const. in einer geschlossenen Kurve geschnitten, die aus einer endlichen Anzahl regulärer Stücke besteht. Sei s die Bogenlänge auf dieser Kurve, $U(x)$ die Länge ihres Umfangs, $Q(x)$ ihr Flächeninhalt. Dann kann man setzen

$$Q(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{U(x)}\left(y\frac{\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

indem man y und z in den Punkten der Oberfläche als Funktionen von x und s ansieht, die nach s periodisch mit der Periode $U(x)$ sind. Der Sinn des Wachsens der Größe s sei so gewählt, daß das Integral $Q(x)$ positiv herauskommt, sei also der positive Umlaufssinn der yz-Ebene. Führt man die Veränderliche $\sigma = s/U(x)$ ein, so erhält man

$$Q(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y\frac{\partial z}{\partial \sigma} - z\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right) d\sigma,$$

(1)
$$Q'(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right) d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma\,\partial x} - z\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \sigma}\right) d\sigma.$$

Nun ist

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma\,\partial x} - z\frac{\partial^2 y}{\partial \sigma\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(y\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right),$$

und da y und z nach σ die Periode 1 haben, ist offenbar

$$\int_0^1 d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(y\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(y\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1 = 0,$$

also bleibt

$$\frac{1}{2}\int_0^1 d\sigma\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma\,\partial x} - z\frac{\partial^2 y}{\partial \sigma\,\partial x}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \sigma} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right) d\sigma,$$

und die Formel (1) gibt

(2)
$$Q'(x) = \int_0^1 \frac{\partial(y,\, z)}{\partial(y,\, \sigma)}\, d\sigma = \int_0^{U(x)} A\,ds, \quad A = \frac{\partial(y,\, z)}{\partial(x,\, s)}.$$

Sei weiter

$$B = \frac{\partial(z,\, x)}{\partial(x,\, s)} = -\frac{\partial z}{\partial s}, \quad C = \frac{\partial(x,\, y)}{\partial(x,\, s)} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

also $B^2 + C^2 = 1$; dann ist das Element der Oberfläche

$$d\mathfrak{S} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dx\,ds = \sqrt{1 + A^2}\, dx\,ds,$$

also die Oberfläche selbst, wenn der Körper sich von $x = x_0$ bis $x = x_1$ erstreckt,

(3)
$$S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{U(x)} \sqrt{1 + A^2}\, ds.$$

Die Größen

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{1 + A^2}}$$

sind nach bekannten Formeln die Richtungskosinus einer bestimmten Normale der Oberfläche, die wir n nennen; ist A von s unabhängig, so gilt dasselbe von $\cos(n\,x)$, wie es z. B. bei Drehflächen mit der x-Achse als Figurachse eintritt. In diesem Falle gibt die Formel (2)

$$(4)\qquad Q'(x) = A\,U(x), \quad \int_0^{U(x)} \sqrt{1 + A^2}\,d\,s = \sqrt{U(x)^2 + Q'(x)^2}.$$

Setzt man nun allgemein

$$(5)\qquad t = \int_0^s A\,d\,s, \quad \int_0^s \sqrt{1 + A^2}\,d\,s = \int_0^s \sqrt{d\,s^2 + d\,t^2},$$

und bestimmt den Winkel ω auf der Strecke $0 \ldots \pi$ durch die Gleichung

$$\cos\omega = \frac{s\,d\,s + t\,d\,t}{\sqrt{s^2 + t^2}\,\sqrt{d\,s^2 + d\,t^2}},$$

so findet man

$$(6)\qquad d\left\{\int_0^s \sqrt{d\,s^2 + d\,t^2} - \sqrt{s^2 + t^2}\right\} = (1 - \cos\omega)\sqrt{d\,s^2 + d\,t^2}.$$

Diese Größe ist positiv und verschwindet nur für $\omega = 0$, kann also, über die Strecke $s = 0 \ldots U(x)$ integriert, nur dann Null ergeben, wenn überall $\omega = 0$, $\cos\omega = 1$, also $s\,d\,t - t\,d\,s = 0$ oder $t = c\,s$ ist, wobei c einen Festwert bedeutet; dann gibt die erste Gleichung (5) den schon erwähnten Fall $A = c$. Tritt er nicht ein, so gibt die Gleichung (6), indem man $s = U(x)$ setzt,

$$\int_0^{U(x)} \sqrt{1 + A^2}\,d\,s - \sqrt{U(x)^2 + Q'(x)^2} > 0;$$

hieraus folgt nach (3)

$$(7)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1} d\,x \int_0^{U(x)} \sqrt{1 + A^2}\,d\,s \geqq \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{U(x)^2 + Q'(x)^2}\,d\,x,$$

und das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn auf der x-Strecke $x_0 \ldots x_1$ überall A von s unabhängig ist, so daß dann die Gleichungen (4) gelten würden.

Jetzt konstruiere man über der Strecke $x_0 \ldots x_1$ mit der x-Achse als Figurachse einen Drehkörper, dessen zu x gehöriger Querschnitt ein Kreis vom Inhalt $Q(x)$, also vom Radius

$$\sqrt{Q(x)/\pi}$$

und vom Umfang

$$U_1(x) = 2\sqrt{\pi\,Q(x)}$$

ist. Dieser Drehkörper hat denselben Rauminhalt wie der gegebene Körper, nämlich

$$\int_{x_0}^{x_1} Q(x)\, d\, x\,;$$

die Oberfläche ist aber nach (3) und (4) gegeben durch die Formel

(8) $$S_1 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{U_1(x)^2 + Q'(x)^2}\, d\, x.$$

Nach der in I. bewiesenen isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises ist nun $U_1(x) \leqq U(x)$, und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn auch am ursprünglichen Körper zu der Abszisse x sich ein kreisförmiger Querschnitt ergibt; ist dies nicht überall der Fall, so ergeben also die Gleichungen (7) und (8) die Folgerung

$$S > S_1.$$

Zu dem gegebenen Körper haben wir also einen inhaltsgleichen Drehkörper von kleinerer Oberfläche konstruiert. Unter den Drehkörpern hat aber nach § 14, III. die Kugel bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche; mithin hat auch der gegebene Körper größere Oberfläche als die inhaltsgleiche Kugel. Vergrößert man letztere so, daß ihre Oberfläche der des gegebenen Körpers gleich wird, so wächst ihr Rauminhalt; der gegebene Körper hat also kleineren Inhalt als die an Oberflächeninhalt gleiche Kugel.

§ 33.

Die Jacobi-Hamiltonsche Methode bei der isoperimetrischen Aufgabe.

Sei bei der isoperimetrischen Aufgabe

$$\delta J = \delta \int F\, d\, t = 0, \quad \delta K = \delta \int G\, d\, t = 0$$

irgend ein Feld gegeben, d. h. zweifach unendlich viele Extremalen

(1) $$x = \xi(t, a, b), \quad y = \eta(t, a, b), \quad z = \omega(t, a, b)$$

gegeben, auf denen wir eine Größe J nach der Gleichung

(2) $$u = \theta(t, a, b)$$

aufgetragen denken, so daß wir auch von vierstufigen Extremalen im Raume der Größen x, y, z, u sprechen können. Das bedeutet also, daß die Größen ξ, η die Eulerschen Differentialgleichungen erfüllen, daß die Gleichungen

(3) $$\omega_t = G(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t), \quad \theta_t = F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)$$

gelten, und daß auf einer null-, ein- oder zweistufigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, dem Orte der Punkte 0 oder (x_0, y_0, z_0, u_0), deren jeder einer der Extremalen (1), (2) angehört, die Transversalitätsbedingung

(4) $$-\delta u_0 - \lambda \delta z_0 + (H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y)|^0 = 0$$

gilt, wobei λ die isoperimetrische Konstante derjenigen Extremale ist, auf der der jeweils betrachtete Punkt 0 liegt.

Ist nun 1 ein allgemeiner Punkt einer solchen, so ist nach (3)

(5) $$u_1 = u_0 + J_{01}, \quad z_1 = z_0 + K_{01};$$

geht man daher auf der Extremale (1), (2) im Punkte 1 fort, so findet man zunächst nach (3) unmittelbar

(6) $$-u_t - \lambda z_t + H_{x'} \xi_t + H_{y'} \eta_t = 0,$$

wobei immer $x' = \xi_t$, $y' = \eta_t$ zu setzen ist. Setzt man ferner

$$\delta' = da \frac{\partial}{\partial a} + db \frac{\partial}{\partial b},$$

so geben die Gleichungen (5)

$$\delta' u = \delta' u_0 + F_{x'} \delta' x + F_{y'} \delta' y|_0^1 + \int_0^1 dt (P \delta' x + Q \delta' y),$$

$$\delta' z = \delta' z_0 + G_{x'} \delta' x + G_{y'} \delta' y|_0^1 + \int_0^1 dt (R \delta' x + S \delta' y),$$

und weiter, da

$$P + \lambda R = Q + \lambda S = 0$$

ist, die Folgerung

$$\delta' u + \lambda \delta' z = \delta' u_0 + \lambda \delta' z_0 + (H_{x'} \delta' x + H_{y'} \delta' y)|_0^1;$$

nach (6) folgt hieraus, wenn man jetzt

$$\delta = \delta' + dt \frac{\partial}{\partial t}$$

setzt,

$$\delta u + \lambda \delta z = \delta u_0 + \lambda \delta z_0 + (H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y)|_0^1,$$

und da sich der Gleichung (4) zufolge rechts die auf die Stelle 0 bezüglichen Glieder heben, gilt für den Fortgang von der allgemeinen Stelle 1 aus die Gleichung

$$-\delta u - \lambda \delta z + H_{x'} \delta x + H_{y'} \delta y = 0;$$

das Zeichen δ bedeutet hier den allgemeinsten infinitesimalen Fortgang auf der dreifachen Mannigfaltigkeit (1), (2) im Raume der vier Größen x, y, z, u. Durch sie wird also $u = V(x, y, z)$ in der Weise bestimmt, daß die Gleichungen

$$V_x = H_{x'}, \quad V_y = H_{y'}, \quad V_z = -\lambda \tag{7}$$

bestehen, deren rechte Seiten x' und y' nur in der Verbindung $p = y'/x'$ enthalten. Eliminiert man p und λ, so erhält man die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung

$$\Psi(V_x, V_y, V_z, x, y) = 0.$$

Sei umgekehrt V irgend eine Lösung dieser Gleichung; dann kann man aus zweien der Gleichungen (7) die Größen p und λ als Funktionen von x, y, z bestimmen, und die dritte Gleichung ist dann erfüllt. Setzt man nun

$$\Phi(x, y, z, x', y', z') = -\lambda z' + H(x, y, x', y'),$$

so daß die Gleichungen (7) die Form

$$V_x = \Phi_{x'}, \quad V_y = \Phi_{y'}, \quad V_z = \Phi_{z'} \tag{8}$$

annehmen, so lehren die Schlüsse von § 24, I. ohne jede Änderung, daß mit den erwähnten Werten von p und λ die Gleichungen

$$\Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \quad \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0, \quad \Phi_z - \Phi'_{z'} = 0 \tag{9}$$

gelten, d. h. die Gleichungen

$$H_x - H'_{x'} = 0, \quad H_y - H'_{y'} = 0, \quad \lambda' = 0;$$

jede Lösung V definiert also eine Schar von Extremalen im xyz-Raume, die von jeder Fläche $V = \text{const.}$ transversal ausstrahlen: geben doch die Gleichungen (7), indem man $\delta V = 0$ setzt,

$$\Phi_{x'}\,\delta x + \Phi_{y'}\,\delta y + \Phi_{z'}\,\delta z = 0,$$

oder

$$H_{x'}\,\delta x + H_{y'}\,\delta y - \lambda\,\delta z = 0.$$

Das wichtigste für die Anwendungen ist aber wieder, daß, wenn V zwei Festwerte α, β enthält, die durch die Gleichungen (9) definierte Extremalenschar die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha_0, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta_0$$

erfüllt, deren rechte Seiten wiederum Festwerte sind. In der Tat findet man aus der ersten der Gleichungen (8), indem man $\Phi_{x'}$ durch p allein ausgedrückt denkt,

$$V_{x\alpha} = \frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}, \quad V_{y\alpha} = \frac{\partial \Phi_{y'}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_{y'}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}; \tag{10}$$

p und λ sind dabei die durch zwei der Gleichungen (8) definierten Werte, die natürlich ebenso wie V im allgemeinen von α und β abhängen. Nun ist offenbar

$$\Phi_{x'y'} = \frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{1}{x'} \frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial p}, \quad \Phi_{y'y'} = \frac{\partial \Phi_{y'}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{1}{x'} \frac{\partial \Phi_{y'}}{\partial p},$$

$$\Phi_{x'y'} = H_{x'y'}, \quad \Phi_{y'y'} = H_{y'y'}, \quad \frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial \lambda} = G_{x'}, \quad \frac{\partial \Phi_{y'}}{\partial \lambda} = G_{y'};$$

die Gleichungen (10) geben also

$$x' V_{x\alpha} + y' V_{y\alpha} = (x' G_{x'} + y' G_{y'}) \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha},$$

und da ferner

$$V_{z\alpha} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}$$

zu setzen ist, folgt schließlich

$$x' V_{x\alpha} + y' V_{y\alpha} + z' V_{z\alpha} = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} (-z' + x' G_{x'} + y' G_{y'}) = 0,$$

$$V_{x\alpha} = \alpha_0,$$

wie behauptet, und ebenso ergibt sich

$$V_{x\beta} = \beta_0.$$

Diese Gleichungen definieren eine vierfache Schar dreistufiger Extremalen. Die ebenen Extremalen hängen, wie die Eulerschen Gleichungen zeigen, von zwei Integrationskonstanten und von λ ab; z_0 kommt noch als vierte Konstante hinzu.

Eine Lösung V der zuletzt betrachteten Art heißt eine vollständige Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung. Ihre Herstellung wird erleichtert durch den Ansatz

$$V = \alpha z + W(x, y, \beta);$$

man findet dann $\lambda = -\alpha$,

$$W_x = H_{x'}, \quad W_y = H_{y'},$$

wobei rechts λ durch $-\alpha$ zu ersetzen ist. Die übrigbleibende Differentialgleichung für W ist also zugleich die Jacobi-Hamiltonsche, die bei der Aufgabe

$$\delta \int (F + \lambda G) dt = 0$$

nach der früheren Theorie (§ 23) auftritt.

Bei der Aufgabe der Kettenlinie z. B.:

$$\delta \int y\, ds = 0, \quad \delta \int ds = 0$$

hat man

$$\Phi = -\lambda z' + (y+\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}$$

zu setzen und findet die Gleichungen

$$V_z = -\lambda, \quad V_x = \frac{(y+\lambda)x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad V_y = \frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}};$$

bei der Annahme $V = \alpha z + W(x, y)$ ergibt sich

$$\lambda = -\alpha, \quad W_x^2 + W_y^2 = (y-\alpha)^2.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$W_x = \beta, \quad W_y = \sqrt{(y-\alpha)^2 - \beta^2},$$

also jedenfalls, wenn

$$W = \beta x + \int \sqrt{(y-\alpha)^2 - \beta^2}\, dy$$

angenommen wird. Die Gleichung der Extremalen ist dann

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta_0, \quad x - \int \frac{\beta\, dy}{\sqrt{(y-\alpha)^2-\beta^2}} = \beta_0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = z + \int \frac{(y-\alpha)\, dy}{\sqrt{(y-\alpha)^2-\beta^2}} = z + \sqrt{(y-\alpha)^2-\beta^2} = \alpha_0.$$

Setzt man also

$$\frac{y-\alpha}{\beta} = \mathrm{Cos}\, t,$$

so ergibt sich eine bekannte Formelgruppe:

$$\begin{aligned} x - \beta_0 &= \beta t, \\ y - \alpha &= \beta\, \mathrm{Cos}\, \frac{x-\beta_0}{\beta}, \\ z - \alpha_0 &= \beta\, \mathrm{Sin}\, \frac{x-\beta_0}{\beta}, \end{aligned}$$

in der z die Bogenlänge der Kettenlinie bedeutet.

Fünfter Abschnitt.

Das Extrem der Integrale, welche höhere Ableitungen der Unbekannten enthalten.

§ 34.

Invariante Form des Integrals.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein reguläres Stück einer ebenen Kurve, längs dessen x und y als stetige Funktionen eines Parameters t darstellbar, und ihre Ableitungen bis zur $n$ten Ordnung einschließlich ebenfalls stetige Funktionen von t sind. Die Funktion

$$F(x, x', x'', \dots x^{(n)}, y, y', y'', \dots y^{(n)})$$

sei für jedes durch ein Element des Bogens $\mathfrak{B}$ definierte Wertsystem ihrer Argumente regulär, und von den Größen x', y' sei an jeder Stelle des Bogens mindestens eine von Null verschieden. Wir betrachten nur solche Integrale

$$J = \int F d t,$$

deren Wert durch die Kurve $\mathfrak{B}$ allein bestimmt ist, nicht aber von der speziellen Natur des Zusammenhanges zwischeu x, y und t abhängt. Sind dann x und y längs des Bogens $\mathfrak{B}$ Funktionen des Parameters θ, welche dieselben Eigenschaften haben wie die vorher eingeführten des Parameters t, und sind 0 und 1 irgend zwei Punkte des Bogens $\mathfrak{B}$, so muß die Gleichung

$$J_{01} = \int_0^1 F(x, x', \dots y^{(n)})\, d t = \int_0^1 F\left(x, \frac{d x}{d \theta}, \cdots \frac{d^n y}{d \theta^n}\right) d \theta$$

bestehen. Die Werte der Veränderlichen t und θ werden durch die Punkte der Kurve einander zugeordnet, so daß z. B. θ als Funktion von t angesehen werden kann; läßt man die obere Grenze des Integrals sich ändern und differenziert nach dem zu ihr gehörigen Werte von t, so ergibt sich

$$F(x, x', \dots y^{(n)}) = F\left(x, \frac{dx}{d\theta}, \cdots \frac{d^n y}{d\theta^n}\right) \frac{d\theta}{dt},$$

oder

$$(1) \qquad F\left(x, \frac{dx}{dt}, \cdots \frac{d^n y}{dt^n}\right) dt = F\left(x, \frac{dx}{d\theta}, \cdots \frac{d^n y}{d\theta^n}\right) d\theta.$$

Im besonderen kann an einer Stelle, für welche x' nicht verschwindet, $\theta = x$ gesetzt, d. h. y als Funktion von x betrachtet werden, deren Ableitungen bis zur $n$ten Ordnung als ganze Funktionen von $x, x', \dots x^{(n)}, y, y', \dots y^{(n)}$, dividiert durch Potenzen von x', darstellbar, also stetige Funktionen von x sind. Da nun

$$\frac{dx}{d\theta} = 1, \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} = \cdots = \frac{d^n x}{d\theta^n} = 0,$$

so hat man der Gleichung (1) zufolge

$$F(x, x', \dots y^{(n)})\, dt = F\left(x, 1, 0, \dots 0, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) dx,$$

oder in neuer Bezeichnung

$$F(x, x', \dots y^{(n)})\, dt = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) dx, \quad J = \int f\, dx.$$

Sei nun im besonderen τ Funktion von t, ε ein Festwert und

$$\theta = t + \varepsilon\tau, \quad x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta)$$

gesetzt, so daß die Gleichung (1) die folgende Form annimmt:

$$(2) \qquad F[\varphi(t + \varepsilon\tau), \dots \psi^{(n)}(t + \varepsilon\tau)]\left(1 + \varepsilon\frac{d\tau}{dt}\right)$$
$$= F\left[\varphi(t + \varepsilon\tau), \frac{d\varphi(t + \varepsilon\tau)}{dt}, \cdots \frac{d^n \varphi(t + \varepsilon\tau)}{dt^n}\right].$$

Diese Gleichung wollen wir nach ε ableiten und dann $\varepsilon = 0$ setzen. Man kann diese Rechnung beiderseits mit dem Variationszeichen $\delta = \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}$ durchführen, das aber rechts und links verschiedene Bedeutung von $\delta x'$ und $\delta y'$ fordert, weil links auch t variiert werden muß. Rechts hat man etwa

$$\bar{x} = \varphi(t + \varepsilon\tau), \quad \bar{y} = \psi(t + \varepsilon\tau),$$
$$\delta x = \tau\varphi'(t)\, d\varepsilon, \quad \delta y = \tau\psi'(t)\, d\varepsilon$$

zu setzen und findet als das gesuchte mit dem Wert $\varepsilon = 0$ gebildete Differential

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{0,n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}\delta x^{(\mathfrak{a})} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}\delta y^{(\mathfrak{a})}\right\} = d\varepsilon \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a})} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}(y'\tau)^{(\mathfrak{a})}\right\};$$

links hätte man

$$\delta t = \tau\, d\varepsilon, \quad \delta x = x'\delta t, \quad \delta y = y'\delta t$$

und, da jetzt das Zeichen δ mit dem der Ableitung nach t nicht zu vertauschen ist,

$$\delta x' = \frac{d\,\delta x}{dt} - x'\frac{d\,\delta t}{dt} = x''\delta t$$

und ebenso

$$\delta x^{(\mathfrak{a}-1)} = x^{(\mathfrak{a})}\delta t, \quad \delta y^{(\mathfrak{a}-1)} = y^{(\mathfrak{a})}\delta t,$$

also

$$\delta F = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}x^{(\mathfrak{a}+1)} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}y^{(\mathfrak{a}+1)}\right\}\delta t = \frac{dF}{dt}\cdot\tau\, d\varepsilon$$

zu setzen, und offenbar ist

$$\delta(1 + \varepsilon\tau') = \tau'\, d\varepsilon;$$

das für $\varepsilon = 0$ gebildete Differential der linken Seite der Gleichung (2) ist also

$$d\varepsilon\left(\tau\frac{dF}{dt} + F\tau'\right) = (F\tau)'\, d\varepsilon,$$

und wir haben die Gleichung

$$(F\tau)' = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a})} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}(y'\tau)^{(\mathfrak{a})}\right\},$$

oder mit unbestimmtem Integralzeichen

$$(3) \qquad F\tau = \int dt \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a})} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}(y'\tau)^{(\mathfrak{a})}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verwandeln wir mittels der Identität

$$\int v u^{(\mathfrak{a})} dt = v u^{(\mathfrak{a}-1)} - v' u^{(\mathfrak{a}-2)} + v'' u^{(\mathfrak{a}-3)} - \dots$$
$$+ (-1)^{\mathfrak{a}-1} v^{(\mathfrak{a}-1)} u + (-1)^{\mathfrak{a}} \int v^{(\mathfrak{a})} u\, dt,$$

deren Richtigkeit, wenn u und v beliebige Funktionen von t sind, offenbar wird, wenn man beide Seiten nach t differenziert. Setzt man im besonderen

$$v = \frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}, \quad u = x'\tau,$$

so ergibt sich

$$\int \frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a})}\,dt = \frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a}-1)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a}-2)} + \cdots$$
$$+ (-1)^{\mathfrak{a}} \int \frac{d^{\mathfrak{a}}}{dt^{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}\right) x'\tau\,dt.$$

Dabei muß natürlich jede der neu auftretenden Ableitungen nach t existieren und integrierbar sein; um dies zu bewirken, soweit es nötig ist, führen wir die neue Annahme ein, daß die Ableitungen von x und y bis zur $2n$ten Ordnung einschließlich endlich und stetig seien.

Alsdann kann man die erhaltene Formel für $\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n$ bilden; addiert man, so erscheint rechts die Größe $(x'\tau)^{(\mathfrak{b})}$ mit dem Faktor

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{b}+1)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{b}+2)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{b}+3)}} - \cdots;$$

setzt man daher allgemein

$$P_m = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\,n-m} (-1)^{\mathfrak{a}} \frac{d^{\mathfrak{a}}}{dt^{\mathfrak{a}}}\frac{\partial F}{\partial x^{(m+\mathfrak{a})}}, \quad Q_m = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\,n-m} (-1)^{\mathfrak{a}} \frac{d^{\mathfrak{a}}}{dt^{\mathfrak{a}}}\frac{\partial F}{\partial y^{(m+\mathfrak{a})}},$$

$$\text{(4)} \qquad \begin{gathered} P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \quad P_n = \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}, \quad Q_n = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}, \\ P_m = \frac{\partial F}{\partial x^{(m)}} - \frac{dP_{m+1}}{dt}, \quad Q_m = \frac{\partial F}{\partial y^{(m)}} - \frac{dQ_{m+1}}{dt}, \end{gathered}$$

so nimmt die Gleichung (3) folgende Form an:

$$\text{(5)} \qquad \begin{gathered} 0 = \int (Px' + Qy')\tau\,dt \\ + \sum_{\mathfrak{a}}^{1,\,n} \{P_{\mathfrak{a}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a}-1)} + Q_{\mathfrak{a}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a}-1)}\} - F\tau. \end{gathered}$$

Alle außerhalb des Integralzeichens stehenden Glieder können nun in ein lineares Aggregat der Größen $\tau, \tau', \ldots \tau^{(n-1)}$ verwandelt werden, dessen Koeffizienten von τ unabhängig sind. Es sei z. B. $\tau^{(k)}$ die höchste Ableitung von τ, deren Faktor nicht identisch verschwindet; dann hat das Aggregat die Form

$$T = M\tau^{(k)} + N\tau^{(k-1)} + \cdots,$$

seine Ableitung nach t ist

$$T' = M\tau^{(k+1)} + (M' + N)\tau^{(k)} + \cdots,$$

und die weggelassenen Glieder enthalten nur Ableitungen von τ, deren Ordnung kleiner als k ist. Die Gleichung (5) ergibt daher, differenziert,

$$0 = (Px' + Qy')\tau + M\tau^{(k+1)} + \cdots$$

Da nun die Größen $\tau, \tau', \ldots \tau^{(n)}$ an irgend einer Stelle des Bogens $\mathfrak{B}$ willkürliche Werte erhalten können, so ist die letzte Gleichung nur dadurch möglich, daß der Koeffizient jeder in ihr vorkommenden Ableitung für sich verschwindet. Speziell würde sich, da $\tau^{(k+1)}$ sicher nur in einem Gliede vorkommt, ergeben

$$M = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. Das Aggregat T muß also identisch verschwinden, d. h. man hat die Identitäten

$$(6) \qquad F\tau = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} \{P_{\mathfrak{a}}(x'\tau)^{(\mathfrak{a}-1)} + Q_{\mathfrak{a}}(y'\tau)^{(\mathfrak{a}-1)}\},$$

$$(7) \qquad Px' + Qy' = 0.$$

Vergleicht man in der Gleichung (6) beiderseits die Faktoren von $\tau^{(\mathfrak{b})}$, so ergibt sich für $\mathfrak{b} > 1$

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}+1,n} \{P_{\mathfrak{a}}x^{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1)} + Q_{\mathfrak{a}}y^{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1)}\}\binom{\mathfrak{a}-1}{\mathfrak{b}} = 0.$$

Setzt man τ in der Gleichung (6) konstant, so folgt

$$(8) \qquad F = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} (P_{\mathfrak{a}}x^{(\mathfrak{a})} + Q_{\mathfrak{a}}y^{(\mathfrak{a})});$$

vergleicht man beiderseits die Faktoren von $\tau^{(n-1)}$, so ergibt sich für $n > 1$ die Identität

$$(9) \qquad P_n x' + Q_n y' = 0, \quad x'\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} + y'\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach $x^{(n)}$ und $y^{(n)}$, so erhält man die Gleichungen

$$x'\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\partial x^{(n)}} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\partial y^{(n)}} = 0,$$

$$x'\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\partial x^{(n)}} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}} = 0;$$

da nun x' und y' längs jeder betrachteten Kurve nicht zugleich verschwinden, gibt es eine endliche, in den Größen $x, \ldots x^{(n)}$, $y, \ldots y^{(n)}$ stetige Größe F_1, derart, daß

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\partial x^{(n)}} = y'^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^{(n)}\partial y^{(n)}} = -x'y'F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}} = x'^2 F_1;$$

ist im besonderen $t = x$, $x' = 1$, also

$$F = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

so ist

$$F_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial (d^n y/dx^n)^2}.$$

§ 35.

Das Extrem der betrachteten Integrale.

I. Bildet man das im Sinne des § 34 invariante Integral

$$J = \int F(x, x', \dots x^{(n)}, y, y' \dots y^{(n)})\, dt$$

längs einer Kurve $\mathfrak{C}$, die in eine Schar von einem Parameter ε abhängiger Kurven eingebettet ist und für den Wert $\varepsilon = 0$ erhalten wird, und ist $\bar{J}$ das längs einer Scharkurve gebildete Integral J, wobei auch die Endwerte von $x, \dots x^{(n-1)}, y, \dots y^{(n-1)}$ von ε abhängen, während die t-Strecke ungeändert bleibt, so sei wiederum

$$\delta J = \frac{\partial(\bar{J} - J)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{d\varepsilon}^{\varepsilon=0}$$

oder auch, wenn die Kurvenschar von mehreren Parametern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ abhängt,

$$\delta J = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial(\bar{J} - J)}{\partial \varepsilon_{\mathfrak{a}}}\, d\varepsilon_{\mathfrak{a}} \bigg|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0}$$

Dann findet man wie im ersten Abschnitt

$$\delta J = \int \delta F\, dt = \int dt \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}\, \delta x^{(\mathfrak{a})} + \frac{\partial F}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}\, \delta y^{(\mathfrak{a})} \right),$$

und es ist ebenfalls, wie früher,

$$\delta x^{(\mathfrak{a})} = \frac{d^{(\mathfrak{a})}\delta x}{dt^{\mathfrak{a}}}, \quad \delta y^{(\mathfrak{a})} = \frac{d^{\mathfrak{a}}\delta y}{dt^{\mathfrak{a}}}.$$

Die Teilintegration, die in § 34 von der Gleichung (3) zur Gleichung (5) führte, ergibt, indem man $x'\tau$ und $y'\tau$ durch δx und δy ersetzt, und die Integrationsgrenzen 0 und 1 andeutet,

$$\delta J_{01} = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} (P_{\mathfrak{a}}\, \delta x^{(\mathfrak{a}-1)} + Q_{\mathfrak{a}}\, \delta y^{(\mathfrak{a}-1)}) \Big|_0^1 + \int_0^1 dt (P \delta x + Q \delta y).$$

Jetzt sei die Aufgabe gestellt, die Punkte 0 und 1 durch eine Kurve $\mathfrak{C}$ zu verbinden, die ein Extrem des Integrals J_{01} ergibt gegenüber anderen Kurven 01, die in den Endpunkten mit $\mathfrak{C}$ eine Berührung $(n-1)$ter Ordnung aufweist. Eine solche liegt im Punkte 0 z. B. vor, wenn auf der Kurve $\mathfrak{C}$ und der zum Vergleich herangezogenen die Größen $x_0, x'_0, \dots x_0^{(n)}, y_0, y'_0, \dots y_0^{(n)}$

dieselben Werte haben; denn aus ihnen lassen sich, wenn z. B. $x_0' \neq 0$ ist, die Größen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3}, \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

zusammensetzen, so daß sie auf beiden Kurven dieselben Werte erhalten, womit die Berührung $(n-1)$ter Ordnung gesichert ist. Setzt man also z. B. mit Funktionen φ, ψ, deren $n$te Ableitungen noch stetig sind,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \varepsilon (t - t_0)^n (t_1 - t)^n \varphi(t), \\ \bar{y} &= y + \varepsilon (t - t_0)^n (t_1 - t)^n \psi(t), \end{aligned}$$

so beschreibt der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, wenn t von t_0 bis t_1 läuft, eine der Kurven, denen gegenüber die Kurve $\mathfrak{C}$ das Extrem des Integrals J liefern soll, und offenbar ist

$$\delta x_0 = \delta x_0' = \cdots = \delta x_0^{(n-1)} = \delta y_0 = \delta y_0' = \cdots = \delta y_0^{(n-1)} = 0,$$

$$\delta J = \int_0^1 (P \delta x + Q \delta y)\, dt;$$

die Extremseigenschaft fordert $\delta J = 0$. Sei im besonderen $\psi(t) = 0$; dann muß

$$\int_0^1 P (t - t_0)^n (t_1 - t)^n \varphi(t)\, dt = 0$$

sein, woraus nach dem Haupthilfssatze $P = 0$ folgt; ebenso mit Q arbeitend erhält man das System der Eulerschen Gleichungen

$$P = Q = 0,$$

die der Identität § 34, (7) zufolge miteinander wesentlich zusammenfallen. Kurven in der xy-Ebene, die diese Gleichungen erfüllen, heißen Extremalen. Kann man $x = t$ setzen und nimmt man $F dt = f dx$, so ergibt sich die ursprüngliche Eulersche Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots = 0,$$

wobei

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots$$

zu setzen ist.

Aus der Form der Ausdrücke P und Q ist ersichtlich, daß die Gleichungen

$$P = Q = 0$$

$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$mal integriert werden können, wenn die Größen x, x', $\ldots x^{(\mathfrak{a}-1)}$, y, y', $\ldots y^{(\mathfrak{b}-1)}$ in der Funktion F nicht vorkommen; fehlen z. B. x und y, so hat man den letzten Relationen § 34, (4) zufolge die Integrale

$$(1)\qquad P_1 = \text{const.},\quad Q_1 = \text{const.}$$

Setzt man im besonderen

$$(2)\qquad x = t,\quad F\,dt = f(x, y, y', \ldots y^{(n)})\,dx,$$

und kommt x in dem Ausdruck f nicht explizite vor, so hat man zunächst das erste der Integrale (1). Die Gleichung (8) des § 34 geht aber bei der Annahme (2), da

$$\frac{\partial F}{\partial x''} = \frac{\partial F}{\partial x'''} = \cdots = 0,$$

in die besondere Form

$$f = P_1 + \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} Q_{\mathfrak{a}}\, y^{(\mathfrak{a})}$$

über; dabei ist

$$Q_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial f}{\partial y^{(\mathfrak{a})}} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(\mathfrak{a}+1)}} + \frac{d^2}{dx^2}\,\frac{\partial f}{\partial y^{(\mathfrak{a}+2)}} - \cdots;$$

das bezeichnete Integral kann daher geschrieben werden

$$(3)\qquad f - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} Q_{\mathfrak{a}}\, y^{(\mathfrak{a})} = \text{const.}$$

und findet sich in dieser Form schon bei Euler.

Erstes Beispiel. Die Lage eines Systems aufeinander wirkender Massen sei durch einen Parameter y bestimmt, x sei die Zeit, Y eine Funktion von x und $-Y\,dy$ die von gegebenen äußeren Kräften bei einer Verschiebung des Systems geleistete Arbeit. Dann hat das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip nach Helmholtz folgende Form:

$$\delta \int (H + Yy)\,dx = 0;$$

dabei ist H, das kinetische Potential, eine gegebene Funktion von y und den Ableitungen dieser Größe nach der Zeit, und enthalte x nicht explizite. Im gewöhnlichen Falle der älteren Dynamik ist H die Differenz der potentiellen und kinetischen Energie des Systems. Sieht man x und y als Funktionen eines Parameters t an, so hat man

$$(H + Yy)\,dx = F\,dt,\quad F = (H + Yy)\,x',$$

$$(4)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dY}{dx}\,yx' = \frac{d}{dt}(Yy) - Yy'.$$

Nach den allgemeinen Gleichungen § 34, (4), (8) ist ferner

$$P_1 x' = F - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} Q_{\mathfrak{a}} y^{(\mathfrak{a})} + \cdots, \quad P = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d P_1}{d t},$$

und die weggelassenen Glieder enthalten nur die zweite und höhere Ableitungen von x als Faktor; setzt man daher

$$(5) \qquad x = t, \quad x' = 1, \quad x'' = x''' = \cdots = 0,$$

so folgt

$$(6) \qquad P_1 = H + Y y - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} Q_{\mathfrak{a}} y^{(\mathfrak{a})},$$

und für die Extremalen erhält man

$$Q = Y + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d Q_1}{d x} = 0, \quad P = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d P_1}{d x} = 0.$$

Letztere Gleichung kann nach (4), (6) geschrieben werden

$$(7) \qquad Y \frac{d y}{d x} + \frac{d}{d x}\left(H - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} Q_{\mathfrak{a}} y^{(\mathfrak{a})}\right) = 0,$$

dabei ist der Annahme (5) gemäß für $\mathfrak{a} > 0$

$$y^{(\mathfrak{a})} = \frac{d^{\mathfrak{a}} y}{d x^{\mathfrak{a}}}, \quad Q_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial H}{\partial \dfrac{d^{\mathfrak{a}} y}{d x^{\mathfrak{a}}}} - \frac{d}{d x} \frac{\partial H}{\partial \dfrac{d^{\mathfrak{a}+1} y}{d x^{\mathfrak{a}+1}}} + \cdots$$

Die Gleichung (7) zeigt, daß man die Größe

$$\mathfrak{E} = H - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} Q_{\mathfrak{a}} y^{(\mathfrak{a})}$$

als Energie des Systems anzusehen hat; denn man hat für jedes Zeitelement

$$d\mathfrak{E} = - Y d y,$$

d. h. $d\mathfrak{E}$ ist der von außen her geleisteten Arbeit gleich. Das Energieprinzip ergibt sich also als Folge des Hamiltonschen Prinzips. Sind äußere Kräfte nicht vorhanden, so folgt

$$\mathfrak{E} = \text{const.};$$

das Energieprinzip erscheint dann als Sonderfall der Eulerschen Integralgleichung (3).

Diese Entwicklung kann sofort auf den Fall übertragen werden, daß das Massensystem von mehreren Parametern $y, z, \ldots$ abhängt, indem man den hingeschriebenen Glieder beifügt, in denen y durch $z, \ldots$ ersetzt ist; kommen auch von ihnen im kinetischen Potential keine höheren als die $n$ten Ableitungen nach der Zeit vor, so erhält man für die Energie den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = H - \sum_{\alpha}^{1,n} (Q_\alpha y^{(\alpha)} + R_\alpha z^{(\alpha)} + \cdots),$$

wobei

$$R_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \frac{d^\alpha z}{dx^\alpha}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \frac{d^{\alpha+1} z}{dx^{\alpha+1}}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial H}{\partial \frac{d^{\alpha+2} z}{dx^{\alpha+2}}} - \cdots$$

und analoge Größen für die übrigen Parameter einzuführen sind.

Zweites Beispiel. Eine ebene Kurve 0 1 zu finden, die mit ihrer Evolute und ihren in den Punkten 0 und 1 gezogenen Normalen einen möglichst kleinen Flächenraum einschließt.

Ist r der Krümmungsradius, ds das Bogenelement, so ist die definierte Fläche die Summe aller unendlich schmalen Dreiecke vom Inhalt $\frac{1}{2} r\,ds$. Da nun

$$\pm r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}, \quad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

so handelt es sich darum, das Integral

$$J = \int \frac{(x'^2 + y'^2)^2\,dt}{x'y'' - x''y'}$$

zum Extrem zu machen. Der Integrand ist von x und y frei, es bestehen daher die Integralgleichungen (1) oder

$$P_1 = a, \quad Q_1 = b.$$

Die Identität (8) oder

$$F = P_1 x' + Q_1 y' + P_2 x'' + Q_2 y''$$

führt ferner, da

$$P_2 = \frac{\partial F}{\partial x''} = \frac{y'(x'^2 + y'^2)^2}{(x'y'' - x''y')^2}, \quad Q_2 = \frac{\partial F}{\partial y''} = \frac{-x'(x'^2 + y'^2)^2}{(x'y'' - x''y')^2},$$

zu dem Ergebnis

$$F = ax' + by' - F, \quad 2F = ax' + by'.$$

Setzt man $x = t$, $y' = p$, so kann man für diese Gleichung schreiben

$$2(1 + p^2)^2 = (a + bp)\frac{dp}{dx}, \quad dx = \frac{a + bp}{2(1 + p^2)^2}\,dp,$$

und hieraus folgt

$$dy = p\,dx = \frac{(a + bp)p\,dp}{2(1 + p^2)^2}.$$

Aus dx und dy kann leicht eine rational integrierbare lineare Verbindung mit festwertigen Koeffizienten gebildet werden; da nämlich, wenn α, β, γ Festwerte sind, die Identität

$$d\left(\frac{\alpha+\beta p+\gamma p^2}{1+p^2}\right)=\frac{\beta+2(\gamma-\alpha)p-\beta p^2}{(1+p^2)^2}\,dp$$

besteht, so ist der Ausdruck

$$2(b\,dx-a\,dy)=\frac{ab+(b^2-a^2)p-abp^2}{(1+p^2)^2}\,dp,$$

der in den vorigen übergeht, wenn

$$\beta=ab,\quad \gamma=\frac{b^2}{2},\quad \alpha=\frac{a^2}{2}$$

gesetzt wird, rational integrierbar, und man erhält

$$4(b\,dx-a\,dy)=d\left[\frac{(a+bp)^2}{1+p^2}\right]=d\left[\frac{(a\,dx+b\,dy)^2}{dx^2+dy^2}\right].$$

Nun stellen die Gleichungen

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\xi=bx-ay,\quad \sqrt{a^2+b^2}\,\eta=ax+by$$

eine Transformation rechtwinkliger Koordinaten dar, so daß

$$dx^2+dy^2=d\xi^2+d\eta^2;$$

die obige Gleichung kann daher geschrieben werden

$$4\sqrt{a^2+b^2}\,d\xi=d\left[\frac{(a^2+b^2)\,d\eta^2}{d\xi^2+d\eta^2}\right],$$

woraus durch Integration folgt

$$\xi+c=\tfrac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{d\eta^2}{d\xi^2+d\eta^2},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\sqrt{\frac{\xi+c}{\tfrac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}-(c+\xi)}}.$$

Hieraus ergibt sich nach § 12, daß die gesuchten Kurven, d. h. die Extremalen, Zykloiden sind. Wenn in den Endpunkten die Tangenten nicht vorgeschrieben sind, so muß bei den erlaubten Variationen der Ausdruck

$$P_1\,\delta x+Q_1\,\delta y+P_2\,\delta x'+Q_2\,\delta y'\Big|_0^1$$

verschwinden; sind nun die Punkte 0 und 1 gegeben, also

$$\delta x_0=\delta y_0=\delta x_1=\delta y_1=0,$$

so muß die Gleichung

$$P_2\,\delta x'+Q_2\,\delta y'\Big|_0^1=0$$

bei beliebigen Variationen $\delta x'$, $\delta y'$ bestehen, da über diese frei verfügt werden kann. Somit folgt

$$\left.\frac{y'(x'^2+y'^2)^2}{x'y''-x''y'}\right|^{0,1}=0,\quad \left.\frac{-x'(x'^2+y'^2)^2}{x'y''-x''y'}\right|^{0,1}=0;$$

die Punkte 0 und 1 müssen daher Rückkehrpunkte der Zykloide sein.

§ 36.

Integrabilitätsbedingungen.

Betrachten wir y als Funktion von x und setzen demgemäß $x = t$, so erfüllen die Extremalen die Gleichung

$$(1)\qquad Q(f)=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=0,$$

welche für $n=0$ eine endliche Gleichung, im allgemeinen aber eine Differentialgleichung $2n$ter Ordnung darstellt. Die Größe $y^{(2n)}$ kommt offenbar nur im letzten Gliede vor, und zwar mit dem Faktor

$$(-1)^n\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}};$$

die Ordnung der Differentialgleichung erniedrigt sich also dann und nur dann, wenn die Funktion f von $y^{(n)}$ in linearer Weise abhängt, so daß man setzen kann

$$f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = g(x, y, \ldots y^{(n-1)}) + y^{(n)} h(x, y, \ldots y^{(n-1)}).$$

In diesem Falle ist das Integral J nach Euler durch ein anderes zu ersetzen, dessen Integrand von $y^{(n)}$ frei ist; setzt man nämlich die Gleichung

$$(2)\qquad \int f\,dx = G(x, y, \ldots y^{(n-1)}) + \int H(x, y, \ldots y^{(n-1)})\,dx$$

an oder, was dasselbe bedeutet,

$$g\,dx + h\,dy^{(n-1)} = H\,dx + \left\{\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}y'+\frac{\partial G}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial G}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}\right\}dx + \frac{\partial G}{\partial y^{(n-1)}}\,dy^{(n-1)},$$

so braucht man nur, was mittels einer Quadratur möglich ist, G als Funktion der Unabhängigen $x, y, \ldots y^{(n-1)}$ so zu bestimmen, daß

$$\frac{\partial G}{\partial y^{(n-1)}} = h(x, y, \ldots y^{(n-1)}),$$

und außerdem

$$H = g(x, y, \dots y^{(n-1)}) - \frac{\partial G}{\partial x} - \sum_{\mathfrak{a}}^{0, n-2} \frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{a})}} y^{(\mathfrak{a}+1)}$$

zu setzen; dann besteht die Gleichung (2) und liefert die angegebene Transformation des Integrals J. Geht man zum bestimmten Integral über, so ergibt sich

$$J_{01} = G(x, y, \dots y^{(n-1)})\Big|_0^1 + \int_0^1 H(x, y, \dots y^{(n-1)})\, dx;$$

bei vorgeschriebenen Werten der Größen $y, y', \dots y^{(n-1)}$ an den Stellen 0 und 1 sind daher die Integrale

$$J, \quad \int H(x, y, \dots y^{(n-1)})\, dx$$

gleichzeitig Extreme.

Schreibt man ferner die Gleichung (2) in der Form

$$f = H + \frac{dG}{dx}$$

und betrachtet Q als ein durch die Gleichung (1) definiertes Operationszeichen, so ergibt sich

$$Q(f) = Q\left(\frac{dG}{dx}\right) + Q(H).$$

Der erste Summand auf der rechten Seite verschwindet identisch; denn setzt man

$$\Phi = \frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \sum_{\mathfrak{a}}^{0, n-1} \frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{a})}} y^{(\mathfrak{a}+1)},$$

so ist offenbar für $\mathfrak{b} = 1, 2, \dots n-1$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(\mathfrak{b})}} = \frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{b}-1)}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{b})}},$$

also

$$\frac{d^{\mathfrak{b}}}{dx^{\mathfrak{b}}}\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(\mathfrak{b})}} = \frac{d^{\mathfrak{b}}}{dx^{\mathfrak{b}}}\frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{b}-1)}} + \frac{d^{\mathfrak{b}+1}}{dx^{\mathfrak{b}+1}}\frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{b})}}.$$

Setzt man hier für $\mathfrak{b}$ nacheinander die angegebenen Werte und addiert die erhaltenen Gleichungen, indem man sie mit dem Faktor $(-1)^{\mathfrak{b}}$ versieht, zu den Identitäten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y}, \quad (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial G}{\partial y^{(n-1)}},$$

die aus der Definition von Φ folgen, so heben sich rechts alle Glieder paarweise weg, und man erhält das Resultat

$$(3) \qquad Q(\Phi) = Q\left(\frac{d\,G}{d\,x}\right) = 0; \quad Q(f) = Q(H).$$

Der Ausdruck $Q(f)$ enthält daher, da H von $y^{(n)}$ frei ist, auch $y^{(2n-1)}$ nicht, wenn in ihm $y^{(2n)}$ nicht vorkommt. Im allgemeinen wird $y^{(2n-2)}$ in dem Ausdruck $Q(H)$ auftreten; ist es nicht der Fall, so kann die soeben für f durchgeführte Schlußreihe auf den Ausdruck H angewandt werden, und man erhält

$$\int H\,d\,x = G_1(x, y, \ldots y^{(n-2)}) + \int H_1(x, y, \ldots y^{(n-2)})\,d\,x,$$
$$Q(f) = Q(H) = Q(H_1).$$

Die Größe $Q(f)$ enthält dann keine höhere als die $(2n-4)$te Ableitung von y; ist sie auch von dieser frei, so kann man dasselbe Verfahren fortsetzen. Die höchste in dem Ausdruck $Q(f)$ vorkommende Ableitung von y ist daher stets von gerader Ordnung, etwa $y^{(2m)}$; dann hat man

$$(4) \qquad J = G(x, y, \ldots y^{(n-1)}) + \sum_{\alpha}^{1,\,n-m-1} G_\alpha(x, y, \ldots y^{(n-\alpha-1)})$$
$$+ \int H_{n-m-1}(x, y, \ldots y^{(m)})\,d\,x,$$
$$Q(f) = Q(H) = \cdots = Q(H_{n-m-1}),$$

und die Ausdrücke G, H, G_1, H_1, $\ldots$ G_{n-m-1}, H_{n-m-1} können mit Hilfe von $n-m$ Quadraturen hergestellt werden.

In dem besonderen Falle $m = 0$ hätte man

$$Q(f) = Q(H_{n-1}) = \frac{\partial H_{n-1}}{\partial y};$$

wenn daher die Größe $Q(f)$ identisch verschwindet, so ist H_{n-1} von y frei, und die Gleichung (4) ergibt

$$(5) \qquad J = G(x, y, \ldots y^{(n-1)}) + \sum_{\alpha}^{1,\,n-1} G_\alpha(x, y, \ldots y^{(n-\alpha-1)})$$
$$+ \int H_{n-1}(x)\,d\,x;$$

$f(x, y, \ldots y^{(n)})$ ist daher der vollständige Differentialquotient der rechten Seite nach x. Damit ist bewiesen, daß die Identität

$$(6) \qquad Q(f) = 0$$

die Integrabilitätsbedingung darstellt; wenn sie vorausgesetzt wird, ist die Funktion f unbeschränkt integrabel, und ihr Integral ist in der Gleichung (5) explizite dargestellt. Die Aufgabe, das Integral J bei vorgeschriebenen Werten der Größen $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ an den Endpunkten zu einem Extrem zu machen, verliert offenbar ihren Sinn, weil J durch diese Werte schon bestimmt ist.

Daß die Gleichung (6) auch eine notwendige Bedingung der Integrabilität der Funktion f ist, lehren die Schlüsse, welche zu der Gleichung (3) führten.

§ 37.

Hinreichende Bedingungen des Extrems.

Führt man als Parameter t die Bogenlänge ein, so gilt die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Differenziert man dieselbe $(m-1)$mal nach t, so ergibt sich

$$x' x^{(m)} + y' y^{(m)} + \cdots = 0 \tag{1}$$

und die weggelassenen Glieder enthalten nur Ableitungen von niedrigerer als der $m$ten Ordnung. Ist daher z. B. x' von Null verschieden, so sind die Größen $x'', x''', \ldots x^{(m)}$ durch die Größen $y', y'', \ldots y^{(m)}$ rational ausdrückbar, und das Umgekehrte gilt, wenn y' nicht verschwindet. Man setze ferner

$$\omega = \int_0^t (x' y'' - x'' y')\, dt = \int_0^t \frac{x' y'' - x'' y'}{x'^2 + y'^2}\, dt = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'} \Big|_0^t;$$

dann ist

$$\omega' = x' y'' - x'' y'$$

die Krümmung der Kurve positiv oder negativ genommen, je nachdem der Krümmungsradius zur Richtung wachsender t ebenso oder entgegengesetzt liegt, wie die $+y$-Achse zur $+x$-Achse; ω ist daher der Winkel, den die Richtung wachsender t beschreibt, positiv oder negativ genommen, je nachdem diese Richtung im positiven oder negativen Sinne sich dreht, und man hat, wenn $x'_0 = \cos\alpha$, $y'_0 = \sin\alpha$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$x' = \cos(\omega + \alpha), \quad y' = \sin(\omega + \alpha).$$

Weiter ergibt die Gleichung für ω', wenn man differenziert,

$$\omega^{(m-1)} = -y' x^{(m)} + x' y^{(m)} + \cdots, \tag{2}$$

und die weggelassenen Glieder sind von derselben Beschaffenheit wie in der Gleichung (1). Bestimmt man aus dieser und der

Gleichung (2) die Größen $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, so ist die Determinante der Koeffizienten $+1$; durch die Größen ω, ω', ... $\omega^{(m-1)}$ sind daher die Größen x', x'', ... $x^{(m)}$, y', y'', ... $y^{(m)}$ in eindeutiger Weise bestimmt. Haben die ersteren Größen für zwei von demselben Punkte ausgehende Bogenelemente dieselben Werte, so haben die Elemente eine Berührung $m$ter oder eine Oskulation $(m-1)$ter Ordnung; man nennt daher die Größe $\omega^{(\alpha)}$, d. h. den $(\alpha-1)$ten Differentialquotienten der Krümmung nach der Bogenlänge, eine Oskulationsinvariante αter Ordnung. Dieselbe Eigenschaft, durch Übereinstimmung die Berührung bis zu einer gewissen Ordnung zu sichern, haben im besonderen Falle, daß x' längs eines Bogens nicht verschwindet, auch z. B. die Größen

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots; \tag{3}$$

stimmen sie bis zur $m$ten Ableitung überein, so hat man eine Oskulation $(m-1)$ter Ordnung.

Die Eulersche Differentialgleichung in y ist nun im allgemeinen von der Ordnung $2n$; durch die Forderung, eine gegebene Extremale $\mathfrak{C}$ im Punkte 0 in der $(n-1)$ten Ordnung zu berühren, werden von den Größen (3) genau $n-1$ festgelegt; von den $2n-1$ Integrationskonstanten, die in einer durch den festen Punkt 0 gehenden Extremale verfügbar sind, bleiben also n übrig, etwa a, b, ... k.

Die Kurve $\mathfrak{C}$ erscheint so als Mitglied einer Schar

$$x = \xi(t, a, b, \ldots k), \quad y = \eta(t, a, b, \ldots k) \tag{4}$$

und die Größen

$$\xi\Big|^0, \ \frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|^0, \ldots \frac{\partial^{n-1}\xi}{\partial t^{n-1}}\Big|^0, \ \eta\Big|^0, \ \frac{\partial \eta}{\partial t}\Big|^0, \ldots \frac{\partial^{n-1}\eta}{\partial t^{n-1}}\Big|^0$$

sind, wenn t die vom Punkte 0 gemessene Bogenlänge ist, durch die festgelegten $n-1$ Oskulationsinvarianten bestimmt, also von a, b, ... k unabhängig, so daß die Gleichungen

$$\xi_a\Big|^0 = \xi'_a\Big|^0 = \cdots = \xi_a^{(n-1)}\Big|^0 = \eta_a\Big|^0 \cdots \eta_a^{(n-1)}\Big| = 0 \tag{5}$$

gelten und gültig bleiben, wenn man a durch irgend eine der Größen b, c, ... k ersetzt.

Es seien nun 0, 1, 2 drei in der Richtung wachsender t aufeinanderfolgende Punkte der Kurve $\mathfrak{C}$, 3 ein veränderlicher, dem

Argument t zugehöriger Punkt einer beliebigen Kurve (4), längs deren das Integral $\overline{J}_{03}$ gebildet werde; dann ist offenbar

$$\frac{\partial \overline{J}_{03}}{\partial t} = F(\xi, \xi', \ldots \eta^{(n)})\Big|^3$$

oder nach § 34, (8)

$$\frac{\partial \overline{J}_{03}}{\partial t} = \sum_{\alpha}^{1,n} (P_\alpha \xi^{(\alpha)} + Q_\alpha \eta^{(\alpha)})\Big|^3;$$

ferner erhält man

$$\frac{\partial \overline{J}_{03}}{\partial a} = \int_0^3 dt \left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi_a + \frac{\partial F}{\partial x'}\xi'_a + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta_a^{(n)}\right),$$

wobei unter den Funktionszeichen P, Q, F die Werte (4) einzusetzen sind. Integriert man in der letzten Gleichung partiell nach der Methode des § 34, so ergibt sich

$$\frac{\partial \overline{J}_{03}}{\partial a} = \sum_{\alpha}^{1,n} (P_\alpha \xi_a^{(\alpha-1)} + Q_\alpha \eta_a^{(\alpha-1)})\Big|_0^3 + \int_0^3 (P\xi_a + Q\eta_a)\, dt,$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen der Extremalen und die Formeln (5)

$$(6) \qquad \frac{\partial \overline{J}_{03}}{\partial a} = \sum_{\alpha}^{1,n} (P_\alpha \xi_a^{(\alpha-1)} + Q_\alpha \eta_a^{(\alpha-1)})\Big|^3,$$

wobei natürlich a durch $b, c, \ldots k$ ersetzt werden kann.

Sind die Größen $t, a, b, \ldots k$ reguläre Funktionen einer Veränderlichen τ, so folgt aus den letzten Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau} = \sum_{\alpha}^{1,n} \left\{ P_\alpha \left(\xi^{(\alpha)}\frac{dt}{d\tau} + \xi_a^{(\alpha-1)}\frac{da}{d\tau} + \cdots\right)\right.$$

$$\left. + Q_\alpha\left(\eta^{(\alpha)}\frac{dt}{d\tau} + \eta_a^{(\alpha-1)}\frac{da}{d\tau} + \cdots\right)\right\} = \sum_{\alpha}^{1,n}\left(P_\alpha \frac{dx^{(\alpha-1)}}{d\tau} + Q_\alpha \frac{dy^{(\alpha-1)}}{d\tau}\right)\Big|^3.$$

Jetzt seien die Punkte 1 und 2 durch eine Kurve $\mathfrak{L}$ verbunden, welche folgende Eigenschaften hat und der Kurve $\mathfrak{C}$ im Sinne folgender Bestimmung benachbart ist. Die $n-1$ ersten Oskulationsinvarianten $\omega, \omega', \ldots \omega^{(n-2)}$ stimmen in den Punkten 1 und 2 mit denen der Kurve $\mathfrak{C}$ überein und $\omega^{(n-1)}$ sei längs der Kurve $\mathfrak{L}$ eine Funktion $\varphi'(\tau)$ im Sinne des § 12, II. Deuten wir $x, y, \omega, \omega', \ldots \omega^{(n-2)}$ als Koordinaten in einem $(n+1)$-stufigen Raume $\mathfrak{R}$, in welchem dann jeder der Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ eine einfache Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{L}'$ entspricht, so liege $\mathfrak{L}'$ ganz in einer Umgebung $[\varepsilon]$ der Kurve $\mathfrak{C}'$ nach der Bezeichnung des § 11; über ε werde gleich genauer verfügt. Wenn dann die Determinante

$$\varDelta = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega, \omega', \ldots \omega^{(n-2)})}{\partial(t, a, b, \ldots k)}$$

längs der Kurve $\mathfrak{C}$ zwischen den Punkten 1 und 2 überall von Null verschieden ist, so sagen wir, die Jacobische Bedingung sei erfüllt.

Man kann dann nach dem ersten Einbettungssatze des § 11 die Größe ε so wählen, daß das Gebiet $[\varepsilon]$ genau einfach bedeckt wird von den Mannigfaltigkeiten, die im Raume $\mathfrak{R}$ den Extremalen

$$x = \xi(t, a, b, \ldots k), \quad y = \eta(t, a, b, \ldots k) \tag{8}$$

ebenso entsprechen, wie $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{L}'$ den Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$. Liegt die Kurve $\mathfrak{L}'$ in diesem Gebiet $[\varepsilon]$, so kann man immer eine der Schar (8) angehörige Extremale 03 konstruieren, welche mit der Kurve $\mathfrak{L}$ in einer Berührung $(n-1)$ter Ordnung steht. Dann sei τ der vom Punkte 1 ab gerechnete Bogen der Kurve $\mathfrak{L}$; nach dem Obigen hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\tau}, \quad x'' = \frac{d^2x}{d\tau^2}, \quad \ldots \quad x^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}x}{d\tau^{n-1}}, \\ y' &= \frac{dy}{d\tau}, \quad y'' = \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad \ldots \quad y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

so daß sich für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots n-1$ ergibt:

$$\frac{dx^{(\alpha-1)}}{d\tau} = \frac{d^\alpha x}{d\tau^\alpha}, \quad \frac{dy^{(\alpha-1)}}{d\tau} = \frac{d^\alpha y}{d\tau^\alpha}.$$

Nun sind, da $\varDelta$ nicht verschwindet, die Größen $t, a, b, \ldots k$ reguläre Funktionen von $x, y, \omega, \ldots \omega^{(n-2)}$ in der Umgebung der dem Bogen 12 und der Kurve $\mathfrak{C}$ zugehörigen Wertsysteme, mithin auch ihre Ableitungen nach τ Funktionen $\varphi'(\tau)$ im Sinne des § 12, II.; die Formel (7) kann also angewandt werden und ergibt mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen (9)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}_{03}}{d\tau} &= \sum_{\alpha}^{1,n-1}(P_\alpha x^{(\alpha)} + Q_\alpha y^{(\alpha)}) + P_n \frac{dx^{(n-1)}}{d\tau} + Q_n \frac{dy^{(n-1)}}{d\tau}, \\ &= \sum_{\alpha}^{1,n-1}(P_\alpha x^{(\alpha)} + Q_\alpha y^{(\alpha)}) + P_n \frac{d^n x}{d\tau^n} + Q_n \frac{d^n y}{d\tau^n}. \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$F = F(x, x', \dots y^{(n)}), \quad \overline{F} = F\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \dots \frac{d^n y}{d\tau^n}\right),$$

$$p = x^{(n)}, \quad q = y^{(n)}, \quad \bar{p} = \frac{d^n x}{d\tau^n}, \quad \bar{q} = \frac{d^n y}{d\tau^n}$$

und benutzt die Identität (8) des § 34, so folgt

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau} = F + \frac{\partial F}{\partial p}(\bar{p} - p) + \frac{\partial F}{\partial q}(\bar{q} - q).$$

Anderseits erhält man für das längs der Kurve $\mathfrak{L}$ gebildete Integral J

$$\frac{dJ_{13}}{d\tau} = \overline{F};$$

somit folgt:

$$(10) \quad \frac{d(J_{13} - \overline{J}_{03})}{d\tau} = \overline{F} - F - \frac{\partial F}{\partial p}(\bar{p} - p) - \frac{\partial F}{\partial q}(\bar{q} - q) = \mathcal{E}.$$

Nun geht die Extremale 0 3 in $\mathfrak{C}$ über, wenn diese im Punkte 3 mit der Kurve $\mathfrak{L}$ eine Oskulation $(n-2)$ter Ordnung hat, also z. B., wenn der Punkt 3 die Lagen 1 und 2 annimmt; Anfangs- und Endwert der Größe $J_{13} - \overline{J}_{03}$ sind daher folgende:

$$J_{13} - \overline{J}_{03}\Big|^{\tau_1} = -\overline{J}_{01}$$

$$J_{13} - \overline{J}_{03}\Big|^{\tau_2} = J_{12} - \overline{J}_{01} - \overline{J}_{12} = \overline{J}_{02}.$$

Daraus folgt, daß die Differenz

$$J_{13} - \overline{J}_{03}\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = J_{12} - \overline{J}_{12}$$

dasselbe Vorzeichen wie die Größe $\mathcal{E}$ hat, wenn diese für alle zum Vergleich herangezogenen Kurven $\mathfrak{L}$ ein festes Vorzeichen besitzt, ohne jemals in der ganzen Länge einer solchen Kurve zu verschwinden. Dann liefert die Kurve $\mathfrak{C}$ ein Maximum oder Minimum des Integrals J gegenüber allen Kurven $\mathfrak{L}$, je nachdem $\mathcal{E}$ negativ oder positiv ist. Daß übrigens das Vorzeichen der Größe $\mathcal{E}$ fest ist, folgt jedenfalls, wenn F_1 als von Null verschieden vorausgesetzt ist. Man kann nämlich offenbar entwickeln

$$\overline{F} = F + \frac{\partial F}{\partial p}(\bar{p} - p) + \frac{\partial F}{\partial q}(\bar{q} - q) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\right)_m (\bar{p} - p)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)_m (\bar{p} - p)(\bar{q} - q) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\right)_m (\bar{q} - q)^2,$$

wobei das angeheftete m bedeutet, daß für p und q ein gewisses System von Werten

$$p_m = p + \theta(\bar{p} - p), \quad q_m = q + \theta(\bar{q} - q)$$

zu nehmen ist, in welchen θ zwischen 0 und $+1$ liegt. Da nun aber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = y'^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q} = -x' y' F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = x'^2 F_1,$$

so ergibt die Gleichung (10)

$$\mathfrak{E} = {}^1/_2 (F_1)_m \{y'(\bar{p} - p) - x'(\bar{q} - q)\}^2.$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß eine Extremale wenigstens stückweise stets mit einem Felde umgeben werden kann. Ist z. B. x_0' von Null verschieden, so kann man für $a, b, \ldots k$ die für $x = t$ gebildeten Größen

$$y_0^{(n)} = \left.\frac{d^n y}{d x^n}\right|^0, \quad y_0^{(n+1)} = \left.\frac{d^{n+1} y}{d x^{n+1}}\right|^0, \quad \ldots \quad y_0^{(2n-1)} = \left.\frac{d^{2n-1} y}{d x^{2n-1}}\right|^0$$

einführen; die Größe Δ ist dann in der Nähe der Stelle 0 von Null verschieden, wenn dies für die Determinante

$$\frac{\partial(y, y', \ldots y^{(n-1)})}{\partial(y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots y_0^{(2n-1)})}$$

gilt. Daß diese aber nicht identisch verschwindet, sieht man aus den Taylorschen Entwicklungen

$$y = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\infty} y_0^{(\mathfrak{a})} \frac{(x - x_0)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}, \quad y^{(\mathfrak{b})} = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\infty} y_0^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})} \frac{(x - x_0)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!},$$

welche zeigen, daß in ihr die niedrigste Potenz des Arguments $x - x_0$ folgenden Koeffizienten hat:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(2n-2)!} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!} \end{vmatrix}.$$

Daß diese Größe nicht verschwindet, ist leicht zu zeigen und folgt indirekt daraus, daß es möglich ist, eine ganze rationale Funktion $(2n-1)$ten Grades so zu bestimmen, daß sie nebst ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$ten Ordnung an zwei Stellen gegebene Werte annimmt.

Damit ist gezeigt, daß ein hinreichend kleines Stück einer Extremale, auf welchem F_1 von Null verschieden ist, immer ein Extrem der definierten Art liefert.

§ 38.

Besondere invariante Darstellung.

Im Falle $n = 2$ bringen wir nach Radon die Variation δJ auf eine für die Anwendungen nützliche Form, indem wir statt der Ableitungen nach t die gegenüber Koordinatenverwandlungen invarianten Größen einführen, die Richtung und Krümmung kennzeichnen.

Das gegenüber der Parametertransformation invariante Integral J kann, indem man $t = x$ nimmt, in die Form

$$J = \int \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx$$

gebracht werden. Setzt man nun

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}, \quad \varkappa = \frac{d\theta}{ds}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \varkappa, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta,$$

so kann man offenbar schreiben

$$J = \int \mathfrak{F}(x, y, \theta, \varkappa)\, ds,$$

oder, da das Integral gegenüber der Parametertransformation invariant ist, bei allgemeinster Wahl des Parameters t

$$J = \int \mathfrak{F}(x, y, \theta, \varkappa) \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int \mathfrak{F} s'\, dt.$$

Nun bedeute der Punkt die Ableitung nach s, also, wenn $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ gesetzt wird,

$$\dot{x} = \frac{x'}{s'}, \quad \frac{y'}{s'} = \dot{y} \text{ usf.},$$

und sei mit der früheren Bedeutung des Zeichens w

$$\omega = \dot{x}\delta y - \dot{y}\delta x = -\frac{w}{s'}, \quad \tilde{\omega} = \dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y;$$

dann ist

(1) $\qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1, \quad \delta x = -\omega\dot{y} + \tilde{\omega}\dot{x}, \quad \delta y = \omega\dot{x} + \tilde{\omega}\dot{y},$

und weiter

(2) $$\begin{aligned}\frac{\delta x'}{s'} &= (\delta x)^{\cdot} = -\omega\ddot{y} - \dot{\omega}\dot{y} + \tilde{\omega}\ddot{x} + \dot{\tilde{\omega}}\dot{x},\\ \frac{\delta y'}{s'} &= (\delta y)^{\cdot} = \quad \omega\ddot{x} + \dot{\omega}\dot{x} + \tilde{\omega}\ddot{y} + \dot{\tilde{\omega}}\dot{y},\end{aligned}$$

$$s'\delta s' = x'\delta x' + y'\delta y', \quad \frac{\delta s'}{s'} = \dot{x}(\delta x)^{\cdot} + \dot{y}(\delta y)^{\cdot},$$

also, da $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$ ist,

$$\frac{\delta s'}{s'} = \dot{\tilde{\omega}} - \omega(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}).$$

Offenbar ist nun

(3) $$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \dot{\theta} = \varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y},$$

also endlich

(4) $$\frac{\delta s'}{s'} = \dot{\tilde{\omega}} - \omega\varkappa.$$

Aus der Definition

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$$

folgt ferner

(5) $$\delta\theta = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^2 + y'^2} = \dot{x}(\delta y)^{\cdot} - \dot{y}(\delta x)^{\cdot},$$

also nach (1) und (2)

(6) $$\delta\theta = \dot{\omega} + \tilde{\omega}\varkappa.$$

Endlich ist

$$\varkappa = \frac{\theta'}{s'}, \quad \delta\varkappa = \frac{\delta\theta'}{s'} - \frac{\theta'}{s'}\frac{\delta s'}{s'} = (\delta\theta)^{\cdot} - \varkappa\frac{\delta s'}{s'},$$

also nach (4)

(7) $$\delta\varkappa = (\delta\theta)^{\cdot} - \varkappa(\dot{\tilde{\omega}} - \omega\varkappa).$$

Die Formeln (3), (4), (6), (7) führen nun zu der gesuchten Darstellung der Variation

(8) $$\delta\int\mathfrak{F}s'dt = \int\delta\mathfrak{F}ds + \int\mathfrak{F}\frac{\delta s'}{s'}ds$$

$$= \int(\mathfrak{F}_x\delta x + \mathfrak{F}_y\delta y + \mathfrak{F}_\theta\delta\theta + \mathfrak{F}_\varkappa\delta\varkappa)ds + \int\mathfrak{F}(\dot{\tilde{\omega}} - \omega\varkappa)ds.$$

Achten wir hier in den Variationen auf die mit $\tilde{\omega}$ behafteten Glieder, so erhalten wir

$$\delta x = \dot{x}\tilde{\omega} + \cdots, \quad \delta y = \dot{y}\tilde{\omega} + \cdots, \quad \delta\theta = \varkappa\tilde{\omega} + \cdots = \dot{\theta}\tilde{\omega} + \cdots,$$
$$\delta\varkappa = (\tilde{\omega}\varkappa)^{\cdot} - \varkappa\dot{\tilde{\omega}} + \cdots = \dot{\varkappa}\tilde{\omega} + \cdots;$$

die mit $\tilde{\omega}$ behafteten Glieder unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der Gleichung (8) sind also einfach

$$\tilde{\omega}(\mathfrak{F}_x \dot{x} + \mathfrak{F}_y \dot{y} + \mathfrak{F}_\theta \dot{\theta} + \mathfrak{F}_\varkappa \dot{\varkappa}) + \mathfrak{F}\dot{\tilde{\omega}} = (\mathfrak{F}\tilde{\omega})^{\cdot},$$

und die Formel (8) gibt

$$\delta\int \mathfrak{F}\, ds = \mathfrak{F}\tilde{\omega} + \int ds\,\{[-\dot{y}\mathfrak{F}_x + \dot{x}\mathfrak{F}_y - \varkappa(\mathfrak{F} - \varkappa\mathfrak{F}_\varkappa)]\,\omega + \mathfrak{F}_\theta\dot{\omega} + \mathfrak{F}_\varkappa \ddot{\omega}\},$$

oder nach zwei Teilintegrationen, die $\dot{\omega}$ und $\ddot{\omega}$ unter dem Integralzeichen zum Wegfall bringen,

$$\delta\int \mathfrak{F}\, ds = \mathfrak{F}\tilde{\omega} + \mathfrak{F}_\varkappa\dot{\omega} + (\mathfrak{F}_\theta - \dot{\mathfrak{F}}_\varkappa)\,\omega + \int \mathfrak{T}\,\omega\, ds,$$

wobei

$$\mathfrak{T} = -\dot{y}\mathfrak{F}_x + \dot{x}\mathfrak{F}_y - \varkappa(\mathfrak{F} - \varkappa\mathfrak{F}_\varkappa) - \frac{d}{ds}(\mathfrak{F}_\theta - \dot{\mathfrak{F}}_\varkappa) \tag{9}$$

gesetzt ist. Nimmt man für $\tilde{\omega}$, ω, $\dot{\omega}$ die Werte aus den Gleichungen (1), (2), (5), so ergibt sich

$$\delta\int \mathfrak{F}\, ds = \mathfrak{P}\,\delta x + \mathfrak{Q}\,\delta y + \mathfrak{F}_\varkappa\,\delta\theta + \int \mathfrak{T}\,\omega\, ds, \tag{10}$$

wobei

$$\mathfrak{P} = \dot{x}(\mathfrak{F} - \varkappa\mathfrak{F}_\varkappa) - \dot{y}(\mathfrak{F}_\theta - \dot{\mathfrak{F}}_\varkappa),$$
$$\mathfrak{Q} = \dot{y}(\mathfrak{F} - \varkappa\mathfrak{F}_\varkappa) + \dot{x}(\mathfrak{F}_\theta - \dot{\mathfrak{F}}_\varkappa)$$

gesetzt ist, und offenbar die Identität

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{P}\dot{x} + \mathfrak{Q}\dot{y} + \mathfrak{F}_\varkappa\dot{\theta} = \mathfrak{P}\cos\theta + \mathfrak{Q}\sin\theta + \varkappa\mathfrak{F}_\varkappa \tag{11}$$

sich ergibt.

Schreibt man ferner die Gleichung (10) in der Form

$$\delta\int \mathfrak{F}\, ds = \int ds\,\{\mathfrak{T}(\dot{x}\,\delta y - \dot{y}\,\delta x) + \dot{\mathfrak{P}}\,\delta x + \dot{\mathfrak{Q}}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta\dot{x} + \mathfrak{Q}\,\delta\dot{y} + (\mathfrak{F}_\varkappa\,\delta\theta)^{\cdot}\}$$

und variiert jetzt so, daß δx und δy willkürliche Festwerte sind, so erhält man, da $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\theta$, $\delta\varkappa$ verschwinden,

$$\delta\int \mathfrak{F}\, ds = \int(\mathfrak{F}_x\,\delta x + \mathfrak{F}_y\,\delta y)\, ds = \int\{(\mathfrak{T}\dot{x} + \dot{\mathfrak{P}})\,\delta x + (-\mathfrak{T}\dot{y} + \dot{\mathfrak{Q}})\,\delta y\}\, ds,$$

und da diese Gleichung bei beliebigen Integrationsstrecken gilt, folgen die Identitäten

$$\begin{aligned} \dot{x}\,\mathfrak{T} &= \mathfrak{T}\cos\theta = \mathfrak{F}_x - \frac{d\mathfrak{P}}{ds}, \\ -\dot{y}\,\mathfrak{T} &= -\mathfrak{T}\sin\theta = \mathfrak{F}_y - \frac{d\mathfrak{Q}}{ds}, \end{aligned} \tag{12}$$

die natürlich auch durch Rechnung zu bestätigen sind.

Geht man auf die früheren Formeln

$$J = \int \mathfrak{F} s' dt = \int F dt,$$

$$\delta J = P_1 \delta x + Q_1 \delta y + P_2 \delta x' + Q_2 \delta y' + \int (P \delta x + Q \delta y) dt$$

zurück, so findet man durch Betrachtung besonderer Variationen und mittels des Haupthilfssatzes leicht

$$P_1 = \mathfrak{P}, \quad Q_1 = \mathfrak{Q}, \quad P_2 \delta x' + Q_2 \delta y' = \mathfrak{F}_\varkappa \delta \theta, \quad P = -\mathfrak{T} y',$$
$$Q = \mathfrak{T} x',$$

was sich auch rechnerisch bestätigen läßt. Die Identität (11) ist wesentlich die Gleichung § 34, (8).

II. Der unter (10) für $\mathfrak{T}$ gegebene Ausdruck zeigt, da $\mathfrak{T} = 0$ die Eulersche Gleichung ist, daß die Extremalen der Aufgabe

$$\delta \int f(\varkappa) ds = 0, \quad \delta \int f\left(\frac{x' y'' - x'' y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3}\right) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 0$$

durch Quadraturen bestimmt werden können.

Man erhält für diesen Fall

$$\mathfrak{T} = -\varkappa [f - \varkappa f'(\varkappa)] + \frac{d^2 f'(\varkappa)}{ds^2} = 0,$$

also wenn man

$$f'(\varkappa) = u, \quad \varkappa [f - \varkappa f'(\varkappa)] = \varphi(u)$$

setzt, wobei $\varphi(u)$ nach einer Elimination bekannt ist,

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \varphi(u), \quad s = \int du \left[\int \varphi(u) du\right]^{-1},$$

womit dann auch $\varkappa$ und weiter die Größen

$$\theta = \int \varkappa ds, \quad x = \int \cos\theta ds, \quad y = \int \sin\theta ds$$

durch Quadraturen und Auflösung von Gleichungen bestimmt sind.

In Beispielen kann es zweckmäßiger sein, die nach (12) folgenden Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{P}}{ds} = \frac{d\mathfrak{Q}}{ds} = 0 \tag{13}$$

zu benutzen. Sei z. B.

$$J = \int (x' y'' - x'' y')^{1/3} dt = \int \varkappa^{1/3} ds$$

zum Extrem zu machen; es ist die Affinlänge, eine gegenüber den inhaltstreuen affinen Transformationen der Ebene invariante Größe.

Man findet aus den Gleichungen (13), unter a_0, b_0, a, A Festwerte verstanden,

$$\frac{2}{3}\cos\theta\,.\,\varkappa^{1/3}+\sin\theta\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}\varkappa^{-2/3}\right)=a_0,$$

$$\frac{2}{3}\sin\theta\,.\,\varkappa^{1/3}-\cos\theta\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}\varkappa^{-2/3}\right)=b_0,$$

$$\frac{2}{3}\varkappa^{1/3}=a_0\cos\theta+b_0\sin\theta,\quad\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^{1/3}=A\cos(\theta-a).$$

Bei einer gewissen Lage des Koordinatensystems kann

$$(14)\qquad d\bar{x}=\cos(\theta-a)\,ds,\quad d\bar{y}=\sin(\theta-a)\,ds$$

gesetzt werden; man findet also

$$d\bar{x}=\frac{d(\theta-a)}{A^3\cos^2(\theta-a)},\quad d\bar{y}=-\frac{d\cos(\theta-a)}{A^3\cos^3(\theta-a)}$$

$$(15)\qquad \bar{x}-a_1=\frac{1}{A^3}\operatorname{tg}(\theta-a),\quad \bar{y}-b_1=\frac{1}{2A^3}\frac{1}{\cos^2(\theta-a)}$$

$$1+A^6(\bar{x}-a_1)^2=2A^3(\bar{y}-b_1).$$

Die Extremalen sind Parabeln, deren Achsen der $\bar{y}$-Achse parallel laufen; diese Richtung ist aber beliebig, da a ein willkürlicher Integrationsfestwert ist: Sie sind die allgemeinsten Parabeln der Ebene, die ja durch vier Festwerte bestimmt sind.

Die ursprünglichen Koordinaten x, y, bei denen $dx=\cos\theta\,ds$, $dy=\sin\theta\,ds$ ist, erhalten wir nach (14) durch die Transformationsformeln

$$x=\bar{x}\cos a-\bar{y}\sin a,\quad y=\bar{x}\sin a+\bar{y}\cos a;$$

soll daher eine Extremale von dem Element (x_0, y_0, θ_0) ausgehen, d. h. vom Punkte (x_0, y_0) mit dem Richtungswinkel θ_0, so geben die Gleichungen (15) mit neuer Bezeichnung

$$(16)\qquad \begin{aligned} x-x_0&=\frac{b}{2}\{2[\operatorname{tg}(\theta-a)-\operatorname{tg}(\theta_0-a)]\cos a\\ &\qquad -[\operatorname{tg}^2(\theta-a)-\operatorname{tg}^2(\theta_0-a)]\sin a\},\\ y-y_0&=\frac{b}{2}\{2[\operatorname{tg}(\theta-a)-\operatorname{tg}(\theta_0-a)]\sin a\\ &\qquad +[\operatorname{tg}^2(\theta-a)-\operatorname{tg}^2(\theta_0-a)]\},\end{aligned}$$

oder kurz

$$x=\xi(t,a,b),\quad y=\eta(t,a,b),\quad \theta=t.$$

Eine leichte Rechnung ergibt

$$\varDelta(t, a, b) = \frac{\partial(\xi, \eta, \theta)}{\partial(t, a, b)} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(a, b)}$$
$$= \frac{b}{4}\{\operatorname{tg}(t-a) - \operatorname{tg}(t_0 - a)\}^3.$$

Sei nun, wenn die Extremale und das Anfangselement vorliegt, durch Drehung des Bezugssystems $t_0 = a = 0$ gemacht; dann zeigen die Gleichungen (16), daß die Parabel vom Punkte 0 aus ins Unendliche durchlaufen wird, wenn t, von $t_0 = 0$ ausgehend, bis zu dem Werte $t = \frac{1}{2}\pi$ wächst. Auf dieser Strecke bleibt dann auch $\varDelta$ von Null verschieden; die Jacobische Bedingung (§ 37) bleibt beliebig weithin erfüllt; die Parabel gibt, von irgend einem ihrer Punkte ab beliebig weit verfolgt, stets ein Extrem der Affinlänge.

III. Lassen wir Extremalen entweder von einem festen Anfangselement (x_0, y_0, θ_0) oder von einer einfachen oder zweifachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ im Gebiet der Größen (x_0, y_0, θ_0) so ausstrahlen, daß längs ihrer die Transversalitätsbedingung

$$\mathfrak{P}\delta x + \mathfrak{Q}\delta y + \mathfrak{F}_\varkappa \delta\theta = 0$$

erfüllt ist, so gilt für das längs ihrer genommene Integral $\bar{J}$ die Formel

$$(17)\quad \delta \bar{J}_{03} = \mathfrak{P}\delta x + \mathfrak{Q}\delta y + \mathfrak{F}_\varkappa \delta\theta\,\Big|_0^3 = \mathfrak{P}\delta x + \mathfrak{Q}\delta y + \mathfrak{F}_\varkappa \delta\theta\,\Big|^3.$$

Geht der Endpunkt 3 dabei längs einer Kurve $\mathfrak{L}$, auf der τ die Bogenlänge, $0'$ der Anfangspunkt auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ sei, so ist

$$d J_{0'3} = \mathfrak{F}\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{d\tau}\right) d\tau,$$

und die Formel (17) gibt, wenn die Extremale und die Kurve $\mathfrak{L}$ sich im Punkte 3 berühren,

$$\frac{d\bar{J}_{03}}{d\tau} = \mathfrak{P}\left(x, y\, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)\frac{dx}{d\tau} + \mathfrak{Q}\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)\frac{dy}{d\tau}$$
$$+ \mathfrak{F}_\varkappa\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)\frac{d\theta}{d\tau};$$

also folgt in der Bezeichnung des § 37

$$d J_{0'3} - d\bar{J}_{03} = \mathfrak{E}\, d\tau = [\mathfrak{F}(x, y, \theta, \theta_\tau) - \mathfrak{P}x_\tau - \mathfrak{Q}y_\tau - \mathfrak{F}_\varkappa \theta_\tau]\, d\tau$$

oder, da $\dot{x} = x_\tau$, $\dot{y} = y_\tau$ ist, der Identität (11) zufolge

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F}(x, y, \theta, \theta_\tau) - \mathfrak{F}(x, y, \theta, \varkappa) - \mathfrak{F}_\varkappa(\theta_\tau - \varkappa)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}_{\varkappa\varkappa}(x, y, \theta, \varkappa_m)(\theta_\tau - \varkappa)^2,$$

wobei $\varkappa_m$ zwischen θ_τ und $\varkappa$ liegt, und hieraus ergibt sich, wie früher, in § 12 z. B., wenn der Punkt 3 auf $\mathfrak{L}$ in die Endlage 2 und gleichzeitig auf $\mathfrak{M}$ der Punkt 0 in die Lage 1 rückt, wenn ferner $\mathfrak{L}$ und die Extremale 12 sich im Punkte 2 berühren,

$$J_{0'2} - \bar{J}_{12} = \int_{0'}^{2} \mathfrak{G}\, d\tau,$$

woraus man nach § 37, die Jacobische Bedingung erfüllt gedacht, die Extremseigenschaft des Extremalenbogens 12 erschließt.

Im Falle des II. Absatzes ist $\mathfrak{F} = \varkappa^{1/3}$, also

$$\mathfrak{F}_{\varkappa\varkappa} = -\frac{2}{9}\varkappa^{-5/3}, \quad \mathfrak{G} \leqq 0.$$

Integriert man also längs einer Parabel in solcher Richtung, daß die Affinlänge positiv ausfällt, so hat diese Größe ein schwaches Maximum.

IV. Die von $\mathfrak{M}$ transversal ausstrahlenden Extremalen bilden Felder von verschiedenem Typus. Ist $\mathfrak{M}$ ein festes Linienelement (x_0, y_0, θ_0), so haben wir ein konisches oder Kegelfeld, dessen zweifach unendlich viele Extremalen einander im Punkte (x_0, y_0) berühren. Diese Felder benutzt man zum Nachweis des Extrems, wenn die Aufgabe gestellt ist, zwei gegebene Linienelemente (x_0, y_0, θ_0) und (x_2, y_2, θ_2) durch eine Kurve der gesuchten Extremseigenschaft zu verbinden.

Ist $\mathfrak{M}$ eine einfache Mannigfaltigkeit, z. B. x_0, y_0 gegeben und θ_0 beliebig, so haben wir ein Keilfeld, und dieses dient der Aufgabe, das Element (x_2, y_2, θ_2) mit dem Punkte (x_0, y_0), ohne in diesem eine Richtung vorzuschreiben, zu verbinden, so daß diese Kurve das Extrem des Integrals J liefert. Ist auf $\mathfrak{M}$ der Punkt (x_0, y_0) nicht fest, sondern läuft er auf einer Kurve $\mathfrak{C}$, so ist die entsprechende Aufgabe die, von einem nicht vorgeschriebenen Punkte der Kurve $\mathfrak{C}$ die gesuchte Kurve nach dem Element (x_2, y_2, θ_2) zu ziehen, wobei in jedem Punkte der Kurve $\mathfrak{C}$ eine Ausgangsrichtung vorgeschrieben ist.

Wenn endlich $\mathfrak{M}$ im $xy\theta$-Raume eine Fläche bedeutet, so ist in einem Gebiet der xy-Ebene für jeden Punkt (x_0, y_0) eine Ausgangsrichtung θ_0 vorgeschrieben; die gesuchte Kurve soll von einem nicht vorgeschriebenen Punkte (x_0, y_0) mit der zugehörigen Ausgangsrichtung ausgehend nach dem Element (x_2, y_2, θ_2) hingezogen werden und dabei das Extrem der Größe J liefern. Die bezeichnete Fläche im $xy\theta$-Raume heißt die Bodenfläche des Feldes; man spricht von einem Bodenfelde.

Die Weierstraßsche Konstruktion, d. h. die Konstruktion der durch jeden auf der Kurve $\mathfrak{L}$ liegenden Punkt 3 gehenden Extremale 30 hat zur Voraussetzung, daß die Raumkurve $\mathfrak{L}'$, die erhalten wird, wenn man in jedem Punkte der Kurve $\mathfrak{L}$ den zugehörigen Richtungswinkel θ als dritte Koordinate aufträgt, im Innern des von den Feldextremalen eindeutig bedeckten Gebiets im $xy\theta$-Raume verlaufe. Im Falle des Kegelfeldes genügt es hierfür, die Kurve $\mathfrak{L}$ von einem zwischen 1 und 2 liegenden Punkte 1′ der Extremale 12 berührend ausgehen zu lassen und das Extremalenstück 11′ der Kurve $\mathfrak{L}$ zuzurechnen. Dann wird unter der Jacobischen Bedingung der Schlußbetrachtung des § 37 zufolge und nach dem ersten Einbettungssatze eine Umgebung des räumlichen Bogens, der dem Bogen 1′2 entspricht, wenn man den Richtungswinkel als dritte Koordinate aufträgt, eindeutig von den Feldextremalen im $xy\theta$-Raume bedeckt und so ein voller Nachweis für die Extremseigenschaft des Bogens 1′2 möglich gemacht.

Verschwindet die in der Jacobischen Bedingung auftretende Determinante, also im Falle $n = 2$ die Größe

$$\Delta(t, a, b) = \frac{\partial(\xi, \eta, \theta)}{\partial(t, a, b)},$$

von $\mathfrak{M}$ aus auf einer Feldextremale nach wachsenden t fortschreitend zum erstenmal an der Stelle 4, so kann man, wie bei der isoperimetrischen Aufgabe, im allgemeinen aus den zweifach unendlich vielen Feldextremalen einfach unendlich viele aussondern, die im $xy\theta$-Raume eine Hülle mit Evoluteneigenschaft haben. Hat man eine solche Hülle, auf der 5 ein fester Punkt und die Richtung 45 mit der Richtung wachsender t im Punkte 4 übereinstimmt, so hat man, längs der Hülle integrierend,

$$dJ_{45} = -\mathfrak{F}(x, y, \theta, \varkappa)\, ds$$

und längs der Extremale

$$d\bar{J}_{04} = \mathfrak{P}\, dx + \mathfrak{Q}\, dy + \mathfrak{F}_\varkappa\, d\theta\,|^4.$$

Nun gilt aber die Identität

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{P}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Q}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{F}_\varkappa \frac{d\theta}{ds},$$

also die Gleichung

$$d\overline{J}_{04} + d J_{45} = 0,$$

woraus die Evoluteneigenschaft folgt.

V. Endlich deuten wir noch die Jacobi-Hamiltonsche Methode für die invariante Form des Integrals an. Man setze

$$V_x = \mathfrak{P}, \quad V_y = \mathfrak{Q}, \quad V_\theta = \mathfrak{F}_\varkappa \tag{18}$$

und eliminiere die Größen $\varkappa$ und $\dot{\varkappa}$; dann erhält man die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung in der Form

$$\Phi(V_x, V_y, V_\theta, x, y) = 0.$$

Ist nun V irgend eine Lösung dieser Gleichung, so kann man an jeder Stelle (x, y, θ) die Werte $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$ so bestimmen, daß die Gleichungen (18) gelten; damit sind dann auch die Verhältnisse $d\theta/dx$ und $d\theta/dy$ als Funktionen von x, y, θ bestimmt, so daß man Gleichungen

$$\frac{dx}{d\theta} = \mathfrak{f}(x, y, \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = \mathfrak{g}(x, y, \theta) \tag{19}$$

und entsprechend im $xy\theta$-Raum zweifach unendlich viele Kurven erhält, die die Flächen $V = \text{const.}$ so durchschneiden, daß die Gleichung

$$\mathfrak{P}\,\delta x + \mathfrak{Q}\,\delta y + \mathfrak{F}_\varkappa\,\delta\theta = 0$$

gilt, wenn

$$V_x\,\delta x + V_y\,\delta y + V_\theta\,\delta\theta = 0$$

gesetzt wird; also transversal. Es zeigt sich, daß diese Kurven wirklich Extremalen des Integrals J sind.

Sehen wir $\varkappa$ und $\dot{\varkappa}$ und damit auch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{F}_\varkappa$ als Funktionen von x, y, θ an, so zeigen die Gleichungen (18)

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathfrak{F}_\varkappa}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathfrak{F}_\varkappa}{\partial y}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{P}}{ds} &= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \theta}\dot{\theta} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varkappa}{\partial x}\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} &= \mathfrak{P}_x + \mathfrak{P}_\varkappa \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + \mathfrak{P}_{\dot\varkappa} \frac{\partial \dot\varkappa}{\partial x}, \\
\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} &= \mathfrak{Q}_x + \mathfrak{Q}_\varkappa \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + \mathfrak{Q}_{\dot\varkappa} \frac{\partial \dot\varkappa}{\partial x}, \\
\frac{\partial \mathfrak{F}_\varkappa}{\partial x} &= \mathfrak{F}_{\varkappa x} + \mathfrak{F}_{\varkappa\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial x},
\end{aligned} \tag{20}
$$

und die Gleichung

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{P}\dot x + \mathfrak{Q}\dot y + \varkappa \mathfrak{F}_\varkappa$$

gibt nebst den Ausdrücken von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{F}_x = \mathfrak{P}_x \dot x + \mathfrak{Q}_x \dot y + \varkappa \mathfrak{F}_{\varkappa x}, \quad \mathfrak{P}_\varkappa \dot x + \mathfrak{Q}_\varkappa \dot y = -\varkappa \mathfrak{F}_{\varkappa\varkappa}, \\
\mathfrak{P}_{\dot\varkappa} \dot x + \mathfrak{Q}_{\dot\varkappa} \dot y = 0.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Vervielfacht man also die Gleichungen (20) mit $\dot x$, $\dot y$, $\varkappa$, so folgt

$$\frac{d\mathfrak{P}}{ds} = \mathfrak{F}_x.$$

Ebenso erhält man natürlich

$$\mathfrak{F}_y - \frac{d\mathfrak{Q}}{ds} = 0;$$

d. h. die durch die Differentialgleichungen (19) definierten Kurven sind Extremalen des Integrals J.

Längs dieser Kurven ist, wenn V einen willkürlichen Festwert c enthält,

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \text{const.};$$

denn differenziert man längs einer Extremale, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\frac{\partial V}{\partial c} &= V_{xc}\dot x + V_{yc}\dot y + V_{\theta c}\varkappa \\
&= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial c}\dot x + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial c}\dot y + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varkappa}{\partial c}\varkappa.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Die Größe c kommt aber in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{F}_\varkappa$ nur vor, sofern sie in $\varkappa$ und $\dot\varkappa$ steckt; es ist also

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial c} = \mathfrak{P}_\varkappa \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \mathfrak{P}_{\dot\varkappa} \frac{\partial \dot\varkappa}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial c} = \mathfrak{Q}_\varkappa \frac{\partial \varkappa}{\partial c} + \mathfrak{Q}_{\dot\varkappa} \frac{\partial \dot\varkappa}{\partial c}, \\
\frac{\partial \mathfrak{F}_\varkappa}{\partial c} = \mathfrak{F}_{\varkappa\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial c}
\end{gathered}
$$

zu setzen, und jetzt lehren die letzten Gleichungen (21), daß die rechte Seite der Gleichung (22) verschwindet; also in der Tat ist

$\partial V/\partial c$ festwertig. Enthält die Größe V zwei Festwerte c_1 und c_2, so stellen die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = b_1 = \text{const.}, \quad \frac{\partial V}{\partial c_2} = b_2 = \text{const.},$$

wenn links keine der Größen c_1 und c_2 weggefallen ist, eine vierfach unendliche Schar von Extremalen dar, also in gewissem Sinne alle.

VI. Als Beispiel diene die Aufgabe

$$\delta \int \varkappa^{-1} ds = 0,$$

also die schon behandelte der Kurve, die mit ihrer Evolute und den Endnormalen die kleinste Fläche einschließt. Man findet sofort

$$\begin{aligned} V_x &= \mathfrak{P} = 2\varkappa^{-1}\cos\theta + 2\varkappa^{-3}\dot{\varkappa}\sin\theta, \\ V_y &= \mathfrak{Q} = 2\varkappa^{-1}\sin\theta - 2\varkappa^{-3}\dot{\varkappa}\cos\theta, \\ V_\theta &= \mathfrak{F}_\varkappa = -\varkappa^{-2} \end{aligned}$$

und hieraus die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung

$$V_x \cos\theta + V_y \sin\theta = 2\sqrt{-V_\theta}.$$

Setzt man, unter a, b Festwerte verstanden,

$$V = ax + by - f(\theta),$$

so wird jene Gleichung erfüllt bei der Annahme

$$a\cos\theta + b\sin\theta = 2\sqrt{f'(\theta)},$$

oder, indem man $a = 2\sqrt{c_1}\cos c_2$, $b = 2\sqrt{c_1}\sin c_2$ setzt,

$$f'(\theta) = c_1\cos^2(\theta - c_2), \quad f(\theta) = c_1\,\frac{2(\theta - c_2) + \sin 2(\theta - c_2)}{4}.$$

Man erhält dann

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = \frac{x\cos c_2 + y\sin c_2}{\sqrt{c_1}} - \frac{2(\theta - c_2) + \sin 2(\theta - c_2)}{4} = b_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial c_2} = 2\sqrt{c_1}(-x\sin c_2 + y\cos c_2) - c_1\,\frac{-2 - \cos 2(\theta - c_2)}{2} = b_2;$$

mit neuen Festwerten α, β, γ, der Bezeichnung $2(\theta - c_2) - \pi = u$ und dem Koordinatensystem

$$x\cos c_2 + y\sin c_2 = \bar{x}, \quad -x\sin c_2 + y\cos c_2 = \bar{y},$$

ergibt sich weiter

$$\bar{x} - \alpha = \gamma(u - \sin u), \quad \bar{y} - \beta = \gamma(1 - \cos u);$$

die Extremalen sind Zykloiden.

Das einfachste Kegelfeld erhält man, indem man x_0, y_0 festlegt und θ beliebig läßt; die Transversalitätsgleichung ist dann

$$\mathfrak{F}_\varkappa \delta \theta = 0, \quad \varkappa^{-2} = 0, \quad \varkappa = \infty.$$

Die Krümmung $\varkappa$ wird aber nur in den Spitzen unendlich; das Feld wird gebildet von den Zykloiden, deren Spitze der Punkt (x_0, y_0) ist. Ist also die Aufgabe gestellt, von diesem Punkte in nicht vorgeschriebener Richtung ausgehend die Kurve nach einem gegebenen Linienelement (x_1, y_1, θ_1) hinzuziehen, die das gesuchte Extrem liefert, so ist die Lösung eine Zykloide mit einer Spitze im Punkte (x_0, y_0), wie schon in § 35 gefunden wurde.

§ 39.

Gebundene Extreme.

Eine verallgemeinerte isoperimetrische Aufgabe liegt vor, wenn das Extrem des Integrals J gesucht wird, während der Wert eines anderen von derselben Form

$$K = \int G(x, x', \ldots x^{(n)}, y, y', \ldots y^{(n)})\, dt$$

vorgeschrieben ist; dabei habe G dieselben Eigenschaften, welche für F vorausgesetzt wurden und die Identität § 34 (3) hervorriefen. Insbesondere seien die Größen G_1, $R = R_0, R_1, \ldots R_n$, $S = S_0, S_1, \ldots S_n$ ebenso aus der Funktion G gebildet, wie F_1, $P_0, \ldots Q_n$ aus F, so daß die Identitäten

$$G = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} (R_{\mathfrak{a}} x^{(\mathfrak{a})} + S_{\mathfrak{a}} y^{(\mathfrak{a})}),$$

$$R = R_0 = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n} (-1)^{\mathfrak{a}} \frac{d^{\mathfrak{a}}}{dt^{\mathfrak{a}}} \frac{\partial G}{\partial x^{(\mathfrak{a})}}, \quad S = S_0 = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,n} (-1)^{\mathfrak{a}} \frac{d^{\mathfrak{a}}}{dt^{\mathfrak{a}}} \frac{\partial G}{\partial y^{(\mathfrak{a})}}$$

bestehen. Das gesuchte Extrem kann, wenn dieselben Stetigkeitseigenschaften der gesuchten Kurve wie in § 34 und 35 verlangt werden, nur geliefert werden durch Stücke der Extremalen des Integrals $J + \lambda K$, wobei λ eine Konstante bedeutet, also durch Kurven, welche den Gleichungen

$$P + \lambda R = 0, \quad Q + \lambda S = 0$$

genügen und bei willkürlichen Werten von λ im allgemeinen von $2n+1$ Konstanten abhängen. Dies lehrt die Argumentation des § 26 mit einer sehr leichten Modifikation; ein anderer auf allgemeineren Prinzipien beruhender Beweis wird in § 42 enthalten sein.

Um hinreichende Bedingungen des Extrems abzuleiten, nehmen wir an, durch den Punkt 0 gehe eine $(n+1)$fache Schar von Extremalen, welche durch die Gleichungen

$$x = \xi(t, a, b, \dots k, \lambda), \quad y = \eta(t, a, b, \dots k, \lambda)$$

dargestellt werden, 1 und 2 seien wie in § 34 zwei Punkte einer bestimmten dieser Extremalen, welche durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet werde, und $\mathfrak{L}$ eine Kurve 1 2, welche dem der Kurve $\mathfrak{C}$ angehörigen Bogen 1 2 in derselben Weise wie in § 37 benachbart ist, und außerdem die Gleichung

$$K_{12} = \overline{K}_{12} \tag{1}$$

ergibt, wobei links über $\mathfrak{L}$, rechts über $\mathfrak{C}$ integriert wird. Ist 0 3 eine Extremale der Schar, längs deren die Integrale $\overline{J}_{03}$, $\overline{K}_{03}$ gebildet sind, ist ferner 3 ein Punkt der Kurve $\mathfrak{L}$, und sind a, b, $\dots k$, λ Funktionen der Größe τ, welche dieselbe Bedeutung habe wie in § 37, so hat man an Stelle der Gleichung § 37, (6)

$$\frac{d\overline{J}_{03}}{d\tau} = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n}\left(P_{\mathfrak{a}}\frac{dx^{(\mathfrak{a}-1)}}{d\tau} + Q_{\mathfrak{a}}\frac{dy^{(\mathfrak{a}-1)}}{d\tau}\right)\Bigg|^{3} + \int_0^3 dt\left(P\frac{dx}{d\tau} + Q\frac{dy}{d\tau}\right), \tag{2}$$

und analog

$$\frac{d\overline{K}_{03}}{d\tau} = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n}\left(R_{\mathfrak{a}}\frac{dx^{(\mathfrak{a}-1)}}{d\tau} + S_{\mathfrak{a}}\frac{dy^{(\mathfrak{a}-1)}}{d\tau}\right)\Bigg|^{3} + \int_0^3 dt\left(R\frac{dx}{d\tau} + S\frac{dy}{d\tau}\right). \tag{3}$$

Wir bestimmen nun die Extremale 0 3 durch die Forderung, daß sie nicht nur zur Kurve $\mathfrak{L}$ dieselbe geometrische Beziehung haben soll wie in § 37, sondern außerdem der Größe $\overline{K}_{03} + K_{32}$, deren letzter Summand sich auf $\mathfrak{L}$ bezieht, einen konstanten Wert geben soll. Das ist möglich, wenn längs der Kurve $\mathfrak{C}$, abgesehen vom Punkte 0, die Funktionaldeterminante

$$\varDelta^0 = \frac{\partial(\xi, \eta, \omega, \omega', \dots \omega^{(n-2)}, \overline{K}_{03})}{\partial(t, a, b, \dots k, \lambda)}$$

von Null verschieden ist. Dann kann man nämlich die Größen ξ, η, ω, $\dots \omega^{(n-2)}$, $\overline{K}_{04}$, welche zu irgend einer zwischen 1 und 2 liegenden Stelle 4 der Kurve $\mathfrak{C}$ gehören, durch Abänderung der Argumente $t, a, \ldots k, \lambda$ um beliebig gegebene Beträge wachsen lassen, solange diese gewisse Grenzen nicht überschreiten; z. B. kann man, wenn der Punkt 3 auf der Kurve $\mathfrak{L}$ dem Punkte 4 benachbart ist, die Größen $\xi, \ldots \omega^{(n-2)}$ in die entsprechenden, auf der Kurve $\mathfrak{L}$ zum Punkte 3 gehörigen, $\overline{K}_{04}$ aber in den benachbarten Wert $\overline{K}_{03} = \overline{K}_{01} + K_{13}$ übergehen lassen, in welchem sich der erste Summand auf $\mathfrak{C}$, der zweite auf $\mathfrak{L}$ bezieht. Alsdann ist $\mathfrak{C}$ nach (1) Anfangs- und Endlage der Extremale 0 3, und es ist

$$(4) \qquad \frac{d(\overline{K}_{03} + K_{32})}{d\tau} = \frac{d\overline{K}_{03}}{d\tau} - G\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \cdots \frac{d^n y}{d\tau^n}\right)\Bigg|^3 = 0.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit λ und addiert ihn zu dem analogen, mit J gebildeten, so ergibt sich den Gleichungen (2), (3) zufolge, indem die Bezeichnungen des § 37 gelten,

$$\frac{d(\overline{J}_{03} + J_{32})}{d\tau} = F + \lambda G + \frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial p}(\bar{p} - p)$$
$$+ \frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial q}(\bar{q} - q) - \overline{F} - \lambda \overline{G} = -\mathcal{E}^0.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist der nach § 37 definierte Ausdruck $-\mathcal{E}$, gebildet für die Funktion $F + \lambda G$ an Stelle von F; hat derselbe ein festes Vorzeichen, so gilt dasselbe von der Differenz $J_{12} - \overline{J}_{12}$. Ist ferner $F_1 + \lambda G_1$ längs der Kurve $\mathfrak{C}$ von Null verschieden und sind $\bar{p} - p$ und $\bar{q} - q$ hinreichend klein, so verschwindet $\mathcal{E}^0$ nach § 37 nur dann längs der ganzen Kurve $\mathfrak{L}$, wenn außer den Gleichungen § 37 (9) noch folgende gelten

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} = x^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{d\tau^n} = y^{(n)};$$

dann hat man für $\alpha = 1, 2, \ldots n - 1$

$$\omega_t^{(\alpha-1)} \frac{dt}{d\tau} + \omega_a^{(\alpha-1)} \frac{da}{d\tau} + \cdots + \omega_\lambda^{(\alpha-1)} \frac{d\lambda}{d\tau} = \omega_t^{(\alpha-1)}$$

nebst zwei weiteren Gleichungen, die entstehen, wenn man in der letzten $\omega^{(\alpha-1)}$ durch ξ und η ersetzt. Ferner ist nach (4)

$$\frac{d\overline{K}_{03}}{d\tau} = -\frac{dK_{32}}{d\tau} = G(x, x', \ldots x^{(n)}, y, \ldots y^{(n)}) = \frac{\partial \overline{K}_{03}}{\partial t}.$$

Diese Gleichung gibt, wenn man sie in der Form

$$\frac{\partial \overline{K}_{03}}{\partial t}\frac{d t}{d \tau}+\frac{\partial \overline{K}_{03}}{\partial a}\frac{d a}{d \tau}+\cdots=\frac{\partial \overline{K}_{03}}{\partial t}$$

schreibt, zusammen mit den $n+1$ vorhergehenden $n+2$ lineare homogene Gleichungen für die Größen

$$\frac{d t}{d \tau}-1, \quad \frac{d a}{d \tau}, \quad \frac{d b}{d \tau}, \ldots \frac{d \lambda}{d \tau},$$

deren Determinante Δ^0, also von Null verschieden ist. Diese Größen verschwinden also, d. h. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ fallen zusammen, wenn $\mathcal{E}^0$ überall verschwindet.

Hinreichende Bedingungen dafür, daß der Bogen 12 ein gewisses Extrem liefere, bestehen also darin, daß Δ^0 von Null verschieden und $\mathcal{E}^0$ von festem Vorzeichen sei; erstere Größe kann auch hier mit einem beliebigen Parameter t gebildet werden.

Als Beispiel nehmen wir nochmals (§ 26) die Aufgabe vor, die Gleichgewichtsfigur einer ebenen elastischen Feder bei gegebenen Endpunkten und Endtangenten zu bestimmen, wenn die potentielle Energie, auf die Einheit der Bogenlänge bezogen, durch das Quadrat der Krümmung gemessen wird.

Die gegebene Länge der Feder ist

$$K=\int \sqrt{x'^2+y'^2}\, d t,$$

die Energie, wenn ϱ den Krümmungsradius bedeutet,

$$J=\int \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}\, d t}{\varrho^2};$$

dabei ist

$$\varrho^2=\frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x' y''-x'' y')^2}, \quad F+\lambda G=\sqrt{x'^2+y'^2}\left(\frac{1}{\varrho^2}+\lambda\right).$$

Da x und y in den Integranden nicht vorkommen, hat man für die Extremalen des Integrals $J+\lambda K$ nach § 35, (1) die beiden ersten Integrale

$$P_1+\lambda R_1=a, \quad Q_1+\lambda S_1=b;$$

da ferner

$$P_2+\lambda R_2=\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial x''}=\frac{-2 y'(x' y''-x'' y')}{(x'^2+y'^2)^{5/2}},$$

$$Q_2+\lambda S_2=\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y''}=\frac{2 x'(x' y''-x'' y')}{(x'^2+y'^2)^{5/2}},$$

so ergibt die Identität (7) oder

$$F + \lambda G = (P_1 + \lambda R_1)x' + (Q_1 + \lambda S_1)y' + (P_2 + \lambda R_2)x'' + (Q_2 + \lambda S_2)y''$$

mit Berücksichtigung des Ausdruckes für ϱ^2 die Gleichung

$$\left(\frac{1}{\varrho^2} + \lambda\right)\sqrt{x'^2 + y'^2} = a x' + b y' + \frac{2\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\varrho^2},$$

$$\lambda - \frac{a x' + b y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{1}{\varrho^2},$$

oder, wenn α und $\omega + \alpha$ die Richtungswinkel im Punkte 0 und im allgemeinen sind, und ds das Bogenelement ist,

$$(5) \qquad \lambda - a\cos(\omega + \alpha) - b\sin(\omega + \alpha) = \frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2,$$

$$(6) \qquad ds = \frac{d\omega}{\sqrt{\lambda - a\cos(\omega + \alpha) - b\sin(\omega + \alpha)}}.$$

Da nun

$$x = \int \cos(\omega + \alpha)\, ds, \quad y = \int \sin(\omega + \alpha)\, ds,$$

so ergibt sich

$$x = x_0 + \int\limits_{\alpha}^{\omega + \alpha} \frac{\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{\lambda - a\cos\omega - b\sin\omega}},$$

$$y = y_0 + \int\limits_{\alpha}^{\omega + \alpha} \frac{\sin\omega\, d\omega}{\sqrt{\lambda - a\cos\omega - b\sin\omega}}.$$

Diese Gleichungen stellen eine Schar von Extremalen dar, welche vom Punkte 0 mit derselben Richtung ausgehen, also, wenn man λ, a, b veränderlich läßt, eine Schar von der in der allgemeinen Theorie verlangten Beschaffenheit. Als Parameter t erscheint die Größe ω selbst; man hat daher

$$\Delta^0 = \frac{\partial(x, y, \omega, \overline{K}_{03})}{\partial(\omega, a, b, \lambda)} = \frac{\partial(x, y, \overline{K}_{03})}{\partial(a, b, \lambda)},$$

und aus der Formel (6) ergibt sich

$$\overline{K}_{03} = \int\limits_{\alpha}^{\omega + \alpha} \frac{d\omega}{\sqrt{\lambda - a\cos\omega - b\sin\omega}} = s.$$

Die Berechnung von Δ^0 bietet offenbar keine Schwierigkeit dar; setzt man

$$\sqrt{\lambda - a\cos\omega - b\sin\omega} = \psi,$$

$$A = \int_\alpha^{\omega+\alpha} \frac{\cos^2\omega\, d\omega}{\psi^3}, \quad B = \int_\alpha^{\omega+\alpha} \frac{\sin\omega\cos\omega\, d\omega}{\psi^3}, \quad C = \int_\alpha^{\omega+\alpha} \frac{\sin^2\omega\, d\omega}{\psi^3},$$

$$M = \int_\alpha^{\omega+\alpha} \frac{\cos\omega\, d\omega}{\psi^3}, \quad N = \int_\alpha^{\omega+\alpha} \frac{\sin\omega\, d\omega}{\psi^3},$$

so ist

$$-8\Delta^0 = \begin{vmatrix} A & B & M \\ B & C & N \\ M & N & A+C \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & M \\ B & C & N \\ M & N & 0 \end{vmatrix} + (A+C)(AC-B^2).$$

Die Größe $\mathfrak{G}^0$ ist positiv, da

$$\frac{\partial^2(F+\lambda G)}{\partial q^2} = \frac{\partial^2(F+\lambda G)}{\partial y''\partial y''} = \frac{2x'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{5}{2}}}$$

positiv ist; es ist also ein Minimum der potentiellen Energie und damit stabiles Gleichgewicht vorhanden, wenn die Gleichung $\Delta^0 = 0$ längs der Feder nur die Wurzel $t = 0$ besitzt.

Sechster Abschnitt.

Die allgemeinste Aufgabe der Variationsrechnung mit einer Unabhängigen.

§ 40.

Die Lösungen von Differentialgleichungssystemen als Funktionen der Integrationskonstanten.

I. Für gewisse Aufgaben der Variationsrechnung ist es wichtig, daß die Größen $x_\mathfrak{a}$, wenn sie durch Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} = f_\mathfrak{a}(t, x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n,$$

und die Anfangswerte

$$(2) \qquad x_\mathfrak{a}(t_0) = x_{\mathfrak{a}0}$$

bestimmt sind, ebenso wie die Ableitungen $d x_\mathfrak{a}/d t$ als Funktionen von t und den Anfangswerten $x_{\mathfrak{a}0}$ nicht nur stetig, sondern auch unter den nächstliegenden Voraussetzungen regulär sind. Die Stetigkeit folgt leicht aus den bekannten Beweisen für die Existenz der Lösungen; die Existenz stetiger Ableitungen nach den Anfangswerten $x_{\mathfrak{a}0}$ bedarf eines Beweises, der nicht ganz einfach ausfällt. Dabei wollen wir annehmen, daß die Funktionen $f_\mathfrak{a}$ in dem in Betracht kommenden Wertgebiet der Unabhängigen stetige Ableitungen nicht bloß erster, sondern auch zweiter Ordnung besitzen; wir setzen

$$\frac{\partial f_\mathfrak{a}}{\partial t} = f_{\mathfrak{a}0}, \quad \frac{\partial f_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}} = f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \quad \frac{\partial^2 f_\mathfrak{a}}{\partial t \partial x_\mathfrak{b}} = f_{\mathfrak{a}0\mathfrak{b}}, \quad \frac{\partial^2 f_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b} \partial x_\mathfrak{c}} = f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},$$
$$\mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n.$$

Die durch die Gleichungen (1) und (2) definierten Funktionen $x_\mathfrak{a}$ nennen wir

$$x_\mathfrak{a}(t) = X_\mathfrak{a};$$

werden in der Gleichung (2) die Größen $x_{\mathfrak{a}0}$ durch andere Werte $x_{\mathfrak{a}0}^1$ ersetzt, so ergebe sich

$$x_{\mathfrak{a}}(t) = X_{\mathfrak{a}}^1.$$

Im besonderen sei

$$x_{10}^1 = x_{10} + \tau, \quad x_{20}^1 = x_{20}, \quad \ldots \quad x_{n0}^1 = x_{n0},$$

so daß nur der Anfangswert x_{10} geändert wird. Setzen wir dann

$$\xi_{\mathfrak{a}}(t) = \frac{X_{\mathfrak{a}}^1 - X_{\mathfrak{a}}}{\tau}, \tag{3}$$

so ist

$$\xi_1(t_0) = 1, \quad \xi_2(t_0) = \xi_3(t_0) = \cdots = \xi_n(t_0) = 0,$$

und das für $X_{\mathfrak{a}}$ wie für $X_{\mathfrak{a}}^1$ geltende Gleichungssystem (1) gibt

$$\frac{d\xi_{\mathfrak{a}}}{dt} = \frac{f_{\mathfrak{a}}(t, X_1^1, \ldots X_n^1) - f_{\mathfrak{a}}(t, X_1, \ldots X_n)}{\tau},$$

$$= \frac{f_{\mathfrak{a}}(t, X_1 + \tau\xi_1, \ldots X_n + \tau\xi_n) - f_{\mathfrak{a}}(t, X_1, \ldots X_n)}{\tau}.$$

Setzen wir daher weiter bei beliebigen Werten ζ

$$\frac{f_{\mathfrak{a}}(t, X_1 + \tau\zeta_1, \ldots X_n + \tau\zeta_n) - f_{\mathfrak{a}}(t, X_1, \ldots X_n)}{\tau} = F_{\mathfrak{a}}(t, \tau, \zeta_1, \ldots \zeta_n), \tag{4}$$

so folgen die Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_{\mathfrak{a}}}{dt} = F_{\mathfrak{a}}(t, \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n). \tag{5}$$

Unser Ziel ist nun, zu beweisen, daß die Größen $\xi_{\mathfrak{a}}$ bei beliebigen innerhalb eines gewissen Gebiets gelegenen Wertsystemen t, $x_{\mathfrak{a}0}$ sich, wenn $\lim \tau = 0$ wird, bestimmten endlichen Grenzen annähern. Die Definitionen (3) zeigen dann, daß die Größen $X_{\mathfrak{a}}$ nicht nur stetige, sondern auch nach x_{10} und ebenso dann nach $x_{\mathfrak{a}0}$ differenzierbare Funktionen der Größen t, $x_{\mathfrak{a}0}$ sind; die Ableitungen der Größen $X_{\mathfrak{a}}$ nach $x_{\mathfrak{b}0}$ erweisen sich dann ebenfalls leicht als stetig. Zu diesem Zweck kommt es darauf an, die Gleichungen (5) an der Stelle $\tau = 0$ zu untersuchen und zu zeigen, daß ihre rechten Seiten in allen ihren Unabhängigen, auch wenn $\tau = 0$ wird, regulär sind.

II. Untersuchen wir also die Funktionen $F_{\mathfrak{a}}$ und ihre ersten Ableitungen auch für die Stelle $\tau = 0$, indem wir uns, unter α, β, γ positive Festwerte verstanden, auf ein Gebiet

$$|t - t_0| < \alpha, \quad |\tau| < \beta, \quad |\zeta_{\mathfrak{a}}| < \gamma \tag{6}$$

beschränken, in welchem die Ausdrücke

$$f_{\mathfrak{a}}(t, X_1 + \tau\zeta_1, \ldots), \quad f_{\mathfrak{a}}(t, X_1, \ldots)$$

in t, τ, $\zeta_\mathfrak{a}$ regulär bleiben. Dann hat der Ausdruck $F_\mathfrak{a}(t, \tau, \zeta_1, \ldots)$, nach (4) die Form

$$F_\mathfrak{a}(t, \tau, \zeta_1, \ldots) = \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}, \quad \varphi(\tau) = f_\mathfrak{a}(t, \tau, X_1 + \tau\zeta_1, \ldots);$$

also folgt

$$\lim_{\tau=0} F_\mathfrak{a}(t, \tau, \zeta_1, \ldots) = \varphi'(0) = \sum_{\mathfrak{b}}^{1,n} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t, X_1, \ldots X_n)\zeta_\mathfrak{b};$$

solange $\tau \neq 0$ ist, bleibt $F_\mathfrak{a}(t, \tau, \zeta_1, \ldots \zeta_n)$ in allen Unabhängigen stetig; setzt man also

$$(7) \quad F_\mathfrak{a}(t, 0, \zeta_1, \ldots \zeta_n) = \varphi'(0) = \sum_{\mathfrak{b}}^{1,n} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t, X_1, \ldots X_n)\zeta_\mathfrak{b},$$

so ist $F_\mathfrak{a}$ in dem Gebiet (6) als eine auch für $\tau = 0$ stetige Funktion definiert.

Was ferner die Ableitung nach irgend einer Größe $\zeta_\mathfrak{b}$, z. B. ζ_1 anbelangt, so ist offenbar, solange $\tau \neq 0$ ist,

$$\frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial \zeta_1} = f_{\mathfrak{a}1}(t, X_1 + \tau\zeta_1, \ldots X_n + \tau\zeta_n).$$

Diese Größe hat, wenn $\lim \tau = 0$ wird, einen Grenzwert $f_{\mathfrak{a}1}(t, X_1, \ldots X_n)$, und dieser ist die an der Stelle $\tau = 0$ genommene Ableitung $\partial F_\mathfrak{a}/\partial \zeta_1$, wie die Gleichung (7) zeigt. Die Ableitung $\partial F_\mathfrak{a}/\partial \zeta_1$ existiert also überall und ist auch für $\tau = 0$ stetig, ebenso natürlich allgemein $\partial F_\mathfrak{a}/\partial \zeta_\mathfrak{b}$.

Das entsprechende gilt von der Ableitung

$$\frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\Big\{f_{\mathfrak{a}0}(t, X_1 + \tau\zeta_1, \ldots) - f_{\mathfrak{a}0}(t, X_1, \ldots)$$
$$+ \sum_{\mathfrak{b}}^{1,n} [f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t, X_1 + \tau\zeta_1, \ldots) - f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(t, X_1, \ldots)] \frac{dX_\mathfrak{b}}{dt}\Big\};$$

sie ist endlich und stetig, solange $\tau \neq 0$, und ihr Grenzwert ist

$$\lim_{\tau=0} \frac{\partial F_\mathfrak{a}}{\partial t} = \sum_{\mathfrak{b}}^{1,n} f_{\mathfrak{a}0\mathfrak{b}}(t, X_1, \ldots)\zeta_\mathfrak{b} + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{1,n} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}(t, X_1, \ldots)\zeta_\mathfrak{c}\frac{dX_\mathfrak{b}}{dt}.$$

Das ist aber nach (7) genau die Ableitung

$$\frac{\partial F_\mathfrak{a}(t, 0, \zeta_1, \ldots)}{\partial t} = \sum_{\mathfrak{b}}^{1,n} f_{\mathfrak{a}0\mathfrak{b}}(t, X_1, \ldots)\zeta_\mathfrak{b} + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{1,n} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}(t, X_1, \ldots)\zeta_\mathfrak{b}\frac{dX_\mathfrak{c}}{dt},$$

so daß auch die Ableitung $\partial F_\mathfrak{a}/\partial t$ als überall, auch für $\tau = 0$ existierend und stetig erkannt ist.

Endlich ist, $\tau \neq 0$ vorausgesetzt,

$$\frac{\partial F_a}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} \sum_b^{1,n} f_{ab}(t, X_1 + \tau \zeta_1, \ldots) \zeta_b$$
$$- \frac{1}{\tau^2} \{ f_a(t, X_1 + \tau \zeta_1, \ldots) - f_a(t, X_1, \ldots) \};$$

die Taylorsche Entwicklung nach τ gibt aber

$$f_a(t, X_1 + \tau \zeta_1, \ldots) = f_a(t, X_1, \ldots) + \tau \sum_b^{1,n} f_{ab}(t, X_1, \ldots) \zeta_b$$
$$+ \frac{\tau^2}{1.2} \sum_{b,c}^{1,n} f_{abc}(t, X_1 + \tau \theta \zeta_1, \ldots X_n + \tau \theta \zeta_n) \zeta_b \zeta_c,$$

wobei $0 < \theta < 1$; ebenso folgt

$$\sum_b^{1,n} f_{ab}(t, X_1 + \tau \zeta_1, \ldots) \zeta_b = \sum_b^{1,n} f_{ab}(t, X_1, \ldots) \zeta_b$$
$$+ \tau \sum_{b,c}^{1,n} [f_{abc}(t, X_1 + \theta^0 \tau \zeta_1, \ldots X_n + \theta^0 \tau \zeta_n) \zeta_b \zeta_c],$$

wobei $0 < \theta^0 < 1$; daraus folgt, wenn man die vorkommenden Doppelsummen gleicher Gestalt einfach als $\Sigma(\theta)$ und $\Sigma(\theta^0)$ unterscheidet,

$$\frac{\partial F_a}{\partial \tau} = \sum_{b,c} (\theta^0) - \frac{1}{2} \sum_{b,c} (\theta),$$

also

$$(8) \qquad \lim_{\tau = 0} \frac{\partial F_a}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sum_{b,c} (0) = \frac{1}{2} \sum_{b,c}^{1,n} f_{abc}(t, X_1, \ldots X_n) \zeta_b \zeta_c.$$

Anderseits findet man offenbar, indem man wiederum die Maclaurinsche Reihe nach τ ansetzt, und die Gleichung (7) berücksichtigt,

$$\frac{f_a(t, X_1 + \tau \zeta_1, \ldots) - f_a(t, X_1, \ldots)}{\tau} = \sum_b^{1,n} f_{ab}(t, X_1, \ldots) \zeta_b$$
$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{b,c}^{1,n} f_{abc}(t, X_1 + \bar\theta \tau \zeta_1, \ldots X_n + \bar\theta \tau \zeta_n) \zeta_b \zeta_c,$$
$$F_a(t, 0, \zeta_1, \ldots) = \sum_b^{1,n} f_{ab}(t, X_1, \ldots) \zeta_b,$$

wobei $0 < \bar\theta < 1$; hieraus folgt

$$\frac{F_a(t, \tau, \zeta_1, \ldots) - F_a(t, 0, \zeta_1, \ldots)}{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{b,c}^{1,n} f_{abc}(t, X_1 + \bar\theta \tau \zeta_1, \ldots) \zeta_b \zeta_c.$$

Dieser Ausdruck strebt, wenn $\lim \tau = 0$ wird, einer bestimmten endlichen Grenze zu, und zwar dem Werte (8); damit ist die Existenz der Ableitung $\partial F_{\mathfrak{a}}/\partial \tau$ an der Stelle $\tau = 0$ bewiesen und zugleich die Beziehung

$$\left(\frac{\partial F_{\mathfrak{a}}}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \lim_{\tau=0} \frac{\partial F_{\mathfrak{a}}(t, \tau, \ldots)}{\partial \tau},$$

d. h. die Stetigkeit dieser Ableitung an der Stelle $\tau = 0$.

Jetzt ist vollständig gezeigt, daß alle Teilableitungen der Funktionen $F_{\mathfrak{a}}(t, \tau, \zeta_1, \ldots \zeta_n)$ im ganzen Gebiet (6) mit Einschluß der Stellen, für die $\tau = 0$ ist, existieren und stetig sind.

III. Um nun den in Absatz I angekündigten Beweis durchzuführen, gehen wir davon aus, daß das Gleichungssystem

$$\frac{d\xi_{\mathfrak{a}}}{dt} = F_{\mathfrak{a}}(t, \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n), \quad \frac{d\tau}{dt} = 0$$

genau die Eigenschaften besitzt, die wir beim Beweis der Existenz ihrer Lösungen am besten gebrauchen können und beim zweiten Einbettungssatze gebraucht haben: ihre rechten Seiten sind in einem gewissen Gebiet (6), d. h.

$$|t - t_0| < \alpha, \quad |\tau| < \beta, \quad |\xi_{\mathfrak{a}}| < \gamma, \quad \gamma > 1$$

regulär und es gibt daher ein Integralsystem $\xi_{\mathfrak{a}}^0$, das die Anfangsbedingungen

$$t = t_0, \quad \xi_1^0 = 1, \quad \xi_2^0 = \cdots = \xi_n^0 = 0, \quad \tau = 0$$

erfüllt. Nimmt man statt des Anfangswertes $\tau = 0$ einen hinreichend kleinen von Null verschiedenen τ, so sind die Lösungen $\xi_{\mathfrak{a}}$ stetige Funktionen von τ, die, wenn $\lim \tau = 0$ wird, in die Werte $\xi_{\mathfrak{a}}^0$ übergehen. Jene Lösungen $\xi_{\mathfrak{a}}$ kennen wir aber schon nach (3); die Werte

$$\xi_{\mathfrak{a}}(t) = \frac{X_{\mathfrak{a}}^1 - X_{\mathfrak{a}}}{\tau}$$

streben also, wenn $\lim \tau = 0$ wird, gegen bestimmte Grenzwerte $\xi_{\mathfrak{a}}^0(t)$; die Ableitungen $\partial X_{\mathfrak{a}}/\partial x_{1\,0}$ existieren also und sind stetige Funktionen von t in einem Gebiet $|t - t_0| < \alpha$.

Was von $\partial X_{\mathfrak{a}}/\partial x_{1\,0}$ bewiesen ist, gilt natürlich auch von jeder Ableitung $\partial X_{\mathfrak{a}}/\partial x_{\mathfrak{b}\,0}$.

Will man diese Ableitungen endlich auch als stetig in den Größen $x_{\mathfrak{b}0}$ erkennen, so ist davon auszugehen, daß in einem Gleichungssystem

$$\frac{d x_\mathfrak{a}}{dt} = f_\mathfrak{a}(t, x_1, x_2, \ldots x_n, a, b, c, \ldots),$$

dessen rechte Seiten von Festwerten $a, b, c, \ldots$ in stetiger Weise abhängen, die Differenzierbarkeit nach diesen Größen nicht vorausgesetzt zu werden braucht, um die Stetigkeit der Integrale nach $a, b, c, \ldots$ zu erkennen. Für den Existenzbeweis der Lösungen kommt nur in Betracht, daß die Größen $f_\mathfrak{a}$, $\partial f_\mathfrak{a}/\partial t$, $\partial f_\mathfrak{a}/\partial x_\mathfrak{b}$ stetig sind und in einem gewissen Gebiet der Größen t, $x_\mathfrak{a}$ unter einer Schranke A liegen; die Integrale $x_\mathfrak{a}$ lassen sich durch Reihen darstellen, die in einer von A abhängigen t-Strecke gleichmäßig konvergieren, und zwar besser als eine allein von A abhängige Reihe. Ändert man daher die Festwerte $a, b, c, \ldots$ so wenig, daß die Größe A ihre Bedeutung behält, so bleiben die für $x_\mathfrak{a}$ erhaltenen Reihen gleichmäßig konvergent, geben also in $a, b, c, \ldots$ stetige Summen.

Diese Bemerkung wenden wir auf die Funktionen $F_\mathfrak{a}(t, \tau, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$ an, die bezüglich der Größen $x_{\mathfrak{a}0}$ ebenso wie die Lösungen $X_\mathfrak{a}$ stetig sind, wenngleich zunächst noch ihre Differenzierbarkeit zweifelhaft bleibt. Die Differentialgleichungen

$$\frac{d \xi_\mathfrak{a}}{dt} = F_\mathfrak{a}(t, \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$$

definieren also ihre Lösungen auch als stetige Funktionen der Größen $x_{\mathfrak{a}0}$, und diese Lösungen sind ja bei gewissen Anfangswerten und für $\tau = 0$ die Größen $\partial X_\mathfrak{a}/\partial x_{\mathfrak{b}0}$.

IV. Man schließt aus dem erhaltenen Ergebnis unmittelbar, daß, wenn die rechten Seiten des Systems

$$(9) \qquad \frac{d x_\mathfrak{a}}{dt} = f_\mathfrak{a}(t, x_1, x_2, \ldots x_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$$

mit ihren Ableitungen auch in den Parametern ε regulär sind, die durch Anfangsbedingungen

$$x_\mathfrak{a}(t_0) = x_{\mathfrak{a}0}$$

gekennzeichneten Lösungen, in denen $x_{\mathfrak{a}0}$ von den ε unabhängige Größen sind, reguläre Funktionen der Größen t und ε sind, wobei t eine beliebige Strecke durchläuft, auf der jene Lösungen regulär und die zugehörigen Wertsysteme dem Regularitätsgebiet der Funktionen $f_\mathfrak{a}$ angehören. Man braucht nur, um dies Ergebnis auf den erhaltenen Sätzen zu erhalten, das Gleichungsystem (9) in der Form

$$\frac{d x_\alpha}{d t} = f_\alpha, \quad \frac{d \varepsilon_1}{d t} = 0, \quad \frac{d \varepsilon_2}{d t} = 0, \ldots$$

zu schreiben; $\varepsilon_1, \ldots$ sind dann die Anfangswerte der gleichbezeichneten Unbekannten dieses Systems, die natürlich ihren Anfangswerten immer gleichbleiben.

§ 41.

Die Mayerschen Aufgaben.

I. In den früheren Abschnitten suchten wir ausnahmslos das Extrem von bestimmten Integralen, deren Integrand von einem oder mehreren unbekannten Funktionsverhältnissen abhing. Die entsprechende Aufgabe hat aber auch Bedeutung, wenn wir das Extrem einer Größe suchen, die durch eine oder mehrere Differentialgleichungen bestimmt wird, deren Gestalt von unbekannten Funktionsverhältnissen bedingt wird; diese Verhältnisse suchen wir so zu bestimmen, daß ein extremer Wert jener Größe an einer bestimmten Stelle herauskommt.

Die einfachste der früheren Aufgaben setzte etwa

$$d z = F(x, y, d x, d y)$$

und suchte das Extrem der Größe z, indem für y eine passend gewählte Funktion von x gesetzt wurde. Jetzt seien die Größen x, y, z durch eine Gleichung

$$(1) \qquad d z = F(x, y, z, d x, d y)$$

verbunden, in der F wie früher eine positiv-homogene Funktion der Differentiale dx, dy sei; mit beliebiger Wahl des unabhängigen Parameters t kann man dann

$$(2) \qquad z' = F(x, y, z, x', y')$$

schreiben, und die Aufgabe ist, x und y als Funktionen von t so zu bestimmen, daß der durch diese Gleichung und eine passende Anfangsbedingung bestimmte Wert von z an einer gegebenen Stelle ein Extrem wird. Seien z. B. in der xy-Ebene die Punkte 0 und 1 durch eine solche Kurve $\mathfrak{C}$ zu verbinden, daß die durch die Gleichungen (1), (2) bestimmte Größe z, die im Punkte 0, d. h. für $x = x_0$, den Wert z_0 besitzt, an der Stelle 1 einen möglichst großen oder möglichst kleinen Wert z_1 annehme; dann liegt die einfachste Art der Aufgaben vor, die man als Mayersche bezeichnet, die aber schon von Euler erfolgreich behandelt sind.

Diese Aufgaben können auf Grund des § 40 der Variationsrechnung, dem Algorithmus des Zeichens δ zugänglich gemacht werden. Man bette wie früher die gesuchte, gefunden gedachte Kurve 01 in eine Schar von Nachbarkurven ein, die vom Punkte $\bar{x}$, $\bar{y}$ durchlaufen werden; dabei sei ε ein Festwert, θ und θ^0 willkürliche Funktionen, und

$$\bar{x} - x = \varepsilon\,\theta(t), \quad \bar{y} - y = \varepsilon\,\theta^0(t), \quad \theta(t_0) = \theta(t_1) = \theta^0(t_0) = \theta^0(t_1) = 0.$$

Weiter sei $\bar{z}$ durch die Gleichung

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}\right), \quad \bar{z}\Big|^0 = z_0 \tag{3}$$

definiert; nach § 40, IV. ist, wenn die Funktion F mit ihren ersten Ableitungen nach $\bar{z}$, t und ε stetig, F auf den in Betracht kommenden Gebieten regulär ist, $\bar{z}$ eine reguläre Funktion von ε, so daß nach der bisherigen Bedeutung des Zeichens δ die Größe

$$\delta z = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varepsilon}\Bigg|^{\varepsilon=0} d\varepsilon$$

gebildet werden kann, und in t regulär ist, da dies von $\theta(t)$ und $\theta^0(t)$ vorausgesetzt wird; die auf F bezügliche Regularitätsvoraussetzung ist jedenfalls erfüllt, wenn $F(x, y, z, x', y')$ in den der Kurve $\mathfrak{C}$ zugehörigen Systemen (x, y, z, x', y') mit ihren Ableitungen regulär ist und ebenso die Funktionen $\theta(t)$ und $\theta^0(t)$.

Die Gleichung (3) ergibt nun mittels des Zeichens δ

$$\delta z' = \frac{d\,\delta z}{dt} = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z + F_{x'}\,\delta x' + F_{y'}\,\delta y'.$$

Diese Gleichung vervielfacht man nach Lagrange mit einem zweckmäßig zu wählenden Multiplikator λ und integriert teilweise; man erhält

$$\lambda\,\delta z' = (\lambda\,\delta z)' - \lambda'\,\delta z = \lambda\,(F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z + F_{x'}\,\delta x' + F_{y'}\,\delta y')$$

und, da nach (3) $\delta z_0 = 0$, da ferner offenbar

$$\delta x_0 = \delta x_1 = \delta y_0 = \delta y_1 = 0$$

zu setzen ist,

$$\lambda\,\delta z\,|^1 = \int_0^1 \{\lambda(F_x\,\delta x + \cdots + F_{y'}\,\delta y') + \lambda'\,\delta z\}\,dt$$

$$= \lambda(F_{x'}\,\delta x + F_{y'}\,\delta y)\Big|_0^1 + \int_0^1 \{[\lambda F_x - (\lambda F_{x'})']\,\delta x$$

$$+ [\lambda F_y - (\lambda F_{y'})']\,\delta y + (\lambda F_z + \lambda')\,\delta z\}\,dt,$$

$$= \int_0^1 dt\,\{[\lambda F_x - (\lambda F_{x'})']\,\delta x + (\lambda F_y - (\lambda F_{y'})'\}\,\delta y$$

$$+ (\lambda F_z + \lambda')\,\delta z\}.$$

Jetzt wähle man λ so, daß die Gleichung

$$\lambda' + F_z\,\lambda = 0$$

besteht, wodurch

$$(4) \qquad \lambda = C e^{-\int_{t_0}^{t} F_z\,dt}$$

bis auf den festwertigen Faktor C bestimmt wird; man erhält so schließlich

$$\lambda\,\delta z\,|^1 = \int_0^1 dt\,\{[\lambda F_x - (\lambda F_{x'})']\,\delta x + [\lambda F_y - (\lambda F_{y'})']\,\delta y\}.$$

Soll nun der Wert z_1 ein Extrem sein, so muß er es im besonderen gegenüber den Werten $\overline{z_1}$ sein; diese sind Funktionen von ε, die also für $\varepsilon = 0$ ein Extrem z_1 haben; somit folgt als notwendige Bedingung des gesuchten Extrems

$$\frac{\partial \bar z}{\partial \varepsilon}\Big|^1 = 0, \quad \delta z\,|^1 = 0,$$

$$\int_0^1 dt\,\{[\lambda F_x - (\lambda F_{x'})']\,\delta x + [\lambda F_y - (\lambda F_{y'})']\,\delta y\} = 0.$$

Nun ist

$$\delta x = \theta(t)\,d\varepsilon, \quad \delta y = \theta^0(t)\,d\varepsilon;$$

bei der Willkürlichkeit der Funktionen θ und θ^0 ergibt also der Haupthilfssatz (§ 6) unmittelbar die Gleichungen

$$(5) \qquad \lambda F_x - (\lambda F_{x'})' = 0, \quad \lambda F_y - (\lambda F_{y'})' = 0,$$

die mit der Definition (4) zugleich die gesuchten Kurven, die Extremalen bestimmen.

Die älteste Aufgabe dieser Art, ist die von Euler behandelte der Kurve größter Endgeschwindigkeit eines schweren Punktes mit Rücksicht auf den Luftwiderstand. Ist die x-Achse die Richtung der Schwere, g die Schwerkraftkonstante, die Masse des Punktes die Einheit, z seine lebendige Kraft, $f(z)$ der Luftwiderstand, so gibt die Gleichung der lebendigen Kraft in differentieller Form

$$dz = g\,dx - f(z)\sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad z' = g\,x' - f(z)\sqrt{x'^2 + y'^2};$$

eine Kurve 0 1 wird gesucht, auf der der Massenpunkt von der Lage 0 aus fallend die Endlage 1 mit größtmöglicher Endgeschwindigkeit erreicht. Die Gleichungen (5) geben, unter a, b Festwerte verstanden, da F_x und F_y verschwinden,

$$\text{(6)} \qquad \lambda g - \lambda f(z)\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a, \quad \lambda f(z)\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = b.$$

Durch Division ergibt sich, $p = y'/x'$ gesetzt,

$$\frac{g\sqrt{1+p^2}}{p f(z)} - \frac{1}{p} = \frac{a}{b}, \quad p = \varphi(z),$$

wobei $\varphi(z)$ als bekannt angesehen werden kann; anderseits ist

$$\frac{dz}{dx} = g - f(z)\sqrt{1+p^2} = g - f(z)\sqrt{1 + \varphi(z)^2};$$

also folgt

$$x = \int \frac{dz}{g - f(z)\sqrt{1+\varphi(z)^2}}, \quad y = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{g - f(z)\sqrt{1+\varphi(z)^2}},$$

und für λ geben die Gleichungen (6), indem man $f(z)$ eliminiert,

$$\lambda = \frac{1}{g}\left(a + \frac{b}{p}\right).$$

Setzt man die Aufgabe (2) in der etwas allgemeineren Form

$$0 = \Phi(x, y, z, x', y', z')$$

an, wobei Φ in den gestrichenen Größen positiv homogen von erster Stufe sei, so ergibt die Variationsrechnung

$$\lambda(\Phi_x\,\delta x + \Phi_y\,\delta y + \Phi_z\,\delta z + \Phi_{x'}\,\delta x' + \Phi_{y'}\,\delta y' + \Phi_{z'}\,\delta z') = 0,$$

$$[\lambda(\Phi_{x'}\,\delta x + \Phi_{y'}\,\delta y + \Phi_{z'}\,\delta z)]' + [\lambda\,\Phi_x - (\lambda\,\Phi_{x'})']\,\delta x$$
$$+ [\lambda\,\Phi_y - (\lambda\,\Phi_{y'})']\,\delta y + [\lambda\,\Phi_z - (\lambda\,\Phi_{z'})']\,\delta z = 0.$$

Da nun sachgemäß

$$\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = \delta x_1 = \delta y_1 = 0$$

zu setzen ist, folgt durch Integration von 0 bis 1

$$\lambda \Phi_{z'} \delta z \Big|^{1} + \int_0^1 dt (P \delta x + Q \delta y + R \delta z) = 0,$$

$$P = \lambda \Phi_x - (\lambda \Phi_{x'})', \quad Q = \lambda \Phi_y - (\lambda \Phi_{y'})', \quad R = \lambda \Phi_z - (\lambda \Phi_{z'})'.$$

Jetzt bestimme man λ durch die lineare Differentialgleichung $R = 0$; dann bleibt

$$\lambda \Phi_{z'} \delta z \Big|^{1} = -\int_0^1 (P \delta x + Q \delta y) dt,$$

und bei der Willkürlichkeit der Variationen δx und δy ergibt der Hauptbilfssatz $P = Q = 0$.

Dabei gilt stillschweigend die Voraussetzung, daß $\Phi_{z'}$ längs der gesuchten, gefunden gedachten Kurve nicht verschwinde; nur bei dieser Annahme erhält man für z eine Differentialgleichung, die die Anwendung der Sätze des § 40 gestattet, die nämlich für z einen in x, y, z, x', y' regulären Wert ergibt.

Berücksichtigt man noch die Gleichung

$$x' \Phi_{x'} + y' \Phi_{y'} + z' \Phi_{z'} = \Phi = 0$$

und die nach § 2 bei willkürlicher Wahl von x, y, z als Funktionen von t geltende Gleichung

$$x' (\Phi_x - \Phi'_{x'}) + y' (\Phi_y - \Phi'_{y'}) + z' (\Phi_z - \Phi'_{z'}) = 0,$$

so ergibt sich

(7) $$x' P + y' Q + z' R = 0,$$

wobei x, y, z, x', y', z' nur durch die Gleichung $\Phi = 0$ gebunden sind.

II. Derselbe Rechenmechanismus läßt sich anwenden, wenn das Extrem einer Größe u gesucht wird, die mit einer anderen Größe z zusammen durch ein System von zwei Differentialgleichungen bestimmt wird, die von einem unbekannten, dem gesuchten Abhängigkeitsverhältnis zwischen anderen Größen abhängen. Sei z. B. $t = x$, $y' = dy/dx = p$ usf. gesetzt, und se

(8) $$u' = f(x, y, p, z, u), \quad z' = g(x, y, p, z, u);$$

die Abhängigkeit zwischen y und x sei gesucht, f und g gegeben. In der xy-Ebene liege die gesuchte Kurve 0 1, die wir in gewohnter Weise variieren, etwa so, daß

(9) $$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \varepsilon \theta(x) + \varepsilon^0 \theta^0(x),$$
$$\theta(x_0) = \theta(x_1) = \theta^0(x_0) = \theta^0(x_1) = 0;$$

u_0 und z_0 seien gegeben, u_1 zum Extrem zu machen. Die Aufgabe kann in zwei wesentlich verschiedenen Bedeutungen endgültig formuliert werden, je nachdem z_1 nicht gegeben oder gegeben ist. Als Beispiel des ersten Falles kann z. B. die Aufgabe

$$u = \int f\left(x, y, \frac{d y}{d x}, z\right) d x, \quad z = \int \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2}\, d x$$

gelten, in der das Extrem eines Integrals gesucht wird, dessen Integrand auch Funktion der Bogenlänge ist. Der zweite Fall tritt ein, wenn bei eben dieser Aufgabe die Bogenlänge 0 1 vorgeschrieben ist; wir haben dann eine Aufgabe isoperimetrischer Art.

Im ersten Falle kann in der Variation (9) einfach $\varepsilon^0 = 0$ bleiben und die Grundgleichungen (8) geben

$$\lambda \delta u' = (\lambda \delta u)' - \lambda' \delta u = \lambda (f_y \delta y + f_p \delta p + f_z \delta z + f_u \delta u),$$
$$\mu \delta z' = (\mu \delta z)' - \mu' \delta z = \mu (g_y \delta y + g_p \delta p + g_z \delta z + g_u \delta u),$$

also von x_0 bis x_1 integriert, alle Variationen an der Stelle 0 und δy an der Stelle 1 verschwindend gedacht,

$$\lambda \delta u \Big|^1 = \int_{x_0}^{x_1} d x [\lambda f_y \delta y + \lambda f_p \delta p + \lambda f_z \delta z + (\lambda' + \lambda f_u) \delta u],$$

$$\mu \delta z \Big|^1 = \int_{x_0}^{x_1} d x [\mu g_y \delta y + \mu g_p \delta p + \mu g_z \delta z + (\mu' + \mu g_u) \delta u]$$

oder nach weiterer Teilintegration, bei der die aus den Integralzeichen heraustretenden Größen verschwinden,

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned} \lambda \delta u \Big|^1 &= \int_{x_0}^{x_1} d x \{[\lambda f_y - (\lambda f_p)'] \delta y + \lambda f_z \delta z + (\lambda' + \lambda f_u) \delta u\}, \\ \mu \delta z \Big|^1 &= \int_{x_0}^{x_1} d x \{[\mu g_y - (\mu g_p)'] \delta y + \mu g_z \delta z + (\mu' + g_u) \delta u\}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun λ und μ durch die Gleichungen

$$\text{(11)} \quad \lambda' + \lambda f_u + \mu' + \mu g_u = 0, \quad \lambda f_z + \mu g_z = 0, \quad \mu \Big|^1 = 0$$

und finden,

$$\lambda f + \mu g = F(x, y, p, z, u)$$

gesetzt, indem wir die Gleichungen (10) addieren,

$$\text{(12)} \quad \lambda \delta u \Big|^1 = \int_{x_0}^{x_1} d x \left(F_y - \frac{d F_p}{d x}\right) \delta y.$$

Jetzt ist δy, der Beziehung (9) gemäß, willkürlich; der Haupthilfssatz führt also von der Extremsbedingung

$$\delta u \Big|^1 = 0$$

zu der Folgerung

$$(13) \qquad F_y - \frac{d F_p}{d x} = 0, \quad \lambda f_y + \mu g_y - \frac{d(\lambda f_p + \mu g_p)}{d x} = 0,$$

die mit den Gleichungen (8) und (11) zur Bestimmung von y, z, u, λ, μ als Funktionen von x führt.

Wesentlich anders ist im zweiten Falle zu verfahren, wenn z_1 gegeben ist; dann muß die allgemeine Variationsform

$$\delta y = \varepsilon \theta(x) + \varepsilon^0 \theta^0(x)$$

beibehalten werden, und die Gleichung $z_1 =$ const. gibt eine Beziehung

$$\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \varepsilon^0} d\varepsilon^0 = 0.$$

Eine solche Beziehung kann nach § 40 angesetzt werden, da ja die auf eine Nachbarkurve bezüglichen Größen $\bar{u}$ und $\bar{z}$ durch das Gleichungssystem

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = f(x, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z}, \bar{u}), \quad \frac{d\bar{z}}{dx} = g(x, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z}, \bar{u})$$

definiert werden, die bei den nötigen Regularitätsannahmen bezüglich der Größen f und g die Werte $\overline{u_1}$ und $\overline{z_1}$ als reguläre Funktionen von ε und ε^0 an der Stelle $\varepsilon = \varepsilon^0 = 0$ ergeben.

Jetzt sei λ^0, μ^0 ein zweites Lösungssystem der Differentialgleichungen (11); der Bedingung $\mu\,|^1 = 0$ entspreche die Festsetzung

$$\mu^0 \Big|^1 = 0.$$

Sei ferner

$$\lambda^0 f + \mu^0 g = F^0;$$

dann geben die Gleichungen (10), (12)

$$\lambda^0 \delta u\,|^1 = \int_{x_0}^{x_1} dx \left(F_y^0 - \frac{d F_p^0}{d x}\right) \delta y$$

oder ausführlicher mit der Gleichung (12) zusammen

$$\lambda\,\delta u\Big|^1 = d\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} dx\left(F_y - \frac{dF_p}{dx}\right)\theta(x) + d\varepsilon^0\int_{x_0}^{x_1} dx\left(F_y - \frac{dF_p}{dx}\right)\theta^0(x)dx,$$

$$\lambda^0\delta u\Big|^1 = d\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} dx\left(F_y^0 - \frac{dF_p^0}{dx}\right)\theta(x) + d\varepsilon^0\int_{x_0}^{x_1} dx\left(F_y^0 - \frac{dF_p^0}{dx}\right)\theta^0(x)dx.$$

Nennen wir bei festgehaltener Funktion $\theta^0(x)$ die Faktoren von $d\varepsilon^0$ etwa $-b$ und a, setzen ferner

$$a\lambda + b\lambda^0 = \bar\lambda,\quad a\mu + b\mu^0 = \bar\mu,\quad aF + bF^0 = \bar\lambda f + \bar\mu g = G,$$

so ergibt sich

$$\bar\lambda\,\delta u\Big|^1 = d\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} dx\left(G_y - \frac{dG_p}{dx}\right)\theta(x).$$

Von der Funktion $\theta(x)$ sind a und b, also G unabhängig; $\theta(x)$ ist willkürlich; also gibt die Extremsbedingung

$$\delta u\Big|^1 = 0$$

nach dem Haupthilfssatz

$$G_y - \frac{dG_p}{dx} = 0,\quad \bar\lambda f_y + \bar\mu g_y - \frac{d(\bar\lambda f_p + \bar\mu g_p)}{dx} = 0,$$

eine Gleichung, die merkwürdigerweise genau die Form (13) zeigt.

Diese Gleichung wäre inhaltlos, wenn sich bei jeder Wahl der Funktion $\theta^0(x)$ immer $a = b = 0$ ergäbe; dann wäre aber nach dem Haupthilfssatz

$$F_y - \frac{dF_p}{dx} = 0,\quad F_y^0 - \frac{dF_p^0}{dx} = 0,$$

womit sich wieder dasselbe Ergebnis wie früher fände, sogar in vielfacher Form und ohne eine besondere Nebenerscheinung des Extrems auszudrücken.

§ 42.

Die allgemeinste Mayersche Aufgabe.

Alle in § 41 sowie überhaupt bisher behandelten Aufgaben sind Sonderfälle der folgenden sehr allgemeinen. Es seien $y_0, y_1, \dots y_n$ unbekannte Funktionen eines Parameters t auf der Strecke $t_0 \dots t_1$, die den $r+1$ Gleichungen

(1) $\qquad \varphi_\alpha(y_0, y_1, \dots y_n, y_0', y_1', \dots y_n') = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots r$

unterworfen sind. Diese unbekannten Funktionen sollen so bestimmt werden, daß der Wert von y_0 für $t = t_1$ ein Extrem wird. Die Funktionen $\varphi_{\mathfrak{a}}$ seien in den Größen y' positiv homogen von erster Stufe. Um sicheren Boden zu gewinnen, setzen wir ferner voraus, die Größen y seien reguläre, auch mit stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktionen von t; durchläuft letztere Größe die Strecke von t_0 bis t_1, so seien durch jene Funktionen stets solche Wertsysteme

$$(2) \qquad y_0, \dots y_n, y'_0, \dots y'_n$$

definiert, für welche sämtliche Funktionen $\varphi_{\mathfrak{a}}$ regulär sind; die Gesamtheit dieser Wertsysteme heiße $\mathfrak{G}$. Setzt man sodann

$$\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}, \quad \bar{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y'_{\mathfrak{b}}},$$

$$\mathfrak{a} = 0, 1, \dots r, \quad \mathfrak{b} = 0, 1, \dots n,$$

so sei die Determinante

$$(3) \qquad \sum \pm \bar{\varphi}_{00} \bar{\varphi}_{11} \dots \bar{\varphi}_{rr} = \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_r)}{\partial(y'_0, y'_1, \dots y'_r)}$$

für die bezeichneten Wertsysteme (2) von Null verschieden, die Gleichungen (1) also nach $y'_0, y'_1, \dots y'_r$ auflösbar. Alle Werte $y_0, y_1, \dots y_n$ seien an der Stelle $t = t_0$ gegeben; an der Stelle $t = t_1$ seien $y_1, y_2, \dots y_s, y_{r+1}, \dots y_n$ gegeben, dagegen die Größen $y_{s+1}, y_{s+2}, \dots y_r$ nicht vorgeschrieben, wobei allgemein die Beziehung

$$0 \leqq s \leqq r < n$$

gilt, und im Falle $r = s$ alle Unbekannten außer y_0 auch für $t = t_1$ gegeben sind.

Allgemein bezeichne jeder der Zeiger $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$ fortan eine bestimmte Zahlenreihe, und zwar sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}, \mathfrak{e} &= 0, 1, \dots r, \\ \mathfrak{b} &= 0, 1, \dots n, \\ \mathfrak{c} &= s+1, s+2, \dots r, \\ \mathfrak{d} &= r+1, r+2, \dots n, \\ \mathfrak{g}, \mathfrak{f} &= 0, 1, \dots s. \end{aligned}$$

Um nun zu untersuchen, ob ein Funktionensystem von der angegebenen Beschaffenheit ein Extrem des Wertes von y_0 für $t = t_1$ ergibt, ersetzen wir dasselbe durch das System $\bar{y}_{\mathfrak{b}} = y_{\mathfrak{b}} + \Delta y_{\mathfrak{b}}$, für welches in dem ganzen Intervall von t_0 bis t_1 die Gleichungen

$$(4) \qquad \varphi_{\mathfrak{a}}(y_{\mathfrak{b}} + \Delta y_{\mathfrak{b}}, \quad y'_{\mathfrak{b}} + \Delta y'_{\mathfrak{b}}) = 0,$$

an den Grenzen aber die Gleichungen

$$(5)\quad \Delta y_{\mathfrak{b}}\Big|^{t_0} = 0,\ \Delta y_{\mathfrak{b}}\Big|^{t_1} = 0,\ \Delta y_1\Big|^{t_1} = 0,\ \Delta y_2\Big|^{t_1} = \cdots = \Delta y_s\Big|^{t_1} = 0$$

bestehen. Sind dann die Größen $\Delta y_{\mathfrak{b}}$ als Funktionen von t gegeben, so sind die Größen $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots \Delta y_r$ durch ein System von $r+1$ Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt, und zwar völlig, da ihre Werte für $t = t_0$ gegeben sind; aus den letzten Relationen (5) sieht man, daß, sobald s von Null verschieden ist, die Größen $\Delta y_{\mathfrak{b}}$ nicht völlig willkürliche Funktionen von t sein können, da jene Gleichungen im allgemeinen nicht zu erwarten sind. Da die Determinante (3) von Null verschieden ist, kann man die Gleichungen (4) nach $\Delta y'_{\mathfrak{a}}$ auflösen.

Im besonderen werde nun gesetzt

$$\Delta y_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{m}}^{0,m} \varepsilon_{\mathfrak{m}} u_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{m}};$$

dabei seien $\varepsilon_{\mathfrak{m}}$ Festwerte, $u_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{m}}$ reelle, zwischen t_0 und t_1 reguläre Funktionen von t, welche für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden. Dann sind nach § 40 die Größen $\Delta y_{\mathfrak{a}}$ in den Größen $\varepsilon_{\mathfrak{m}}$ regulär und man kann mit dem gewöhnlichen Begriff der Variation

$$\delta y_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{m}}^{0,m} \frac{\partial \Delta y_{\mathfrak{b}}}{\partial \varepsilon_{\mathfrak{m}}}\, d\,\varepsilon_{\mathfrak{m}}\Big|^{\varepsilon = 0}$$

setzen, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß zwischen den Größen $\varepsilon_{\mathfrak{m}}$ nachträglich eine Abhängigkeit festgesetzt wird zu dem Zweck, die Gleichungen

$$\Delta y_1\Big|^{t_1} = \Delta y_2\Big|^{t_1} = \cdots = \Delta y_s\Big|^{t_1} = 0,$$

d. h. die letzten s Gleichungen (5) zu erfüllen, was wir vorläufig als noch nicht geschehen annehmen; im übrigen geben die ersten beiden Gleichungen (5) natürlich

$$\delta y_{\mathfrak{b}}\Big|^{t_1} = 0.$$

Mittels der bekannten Rechenregeln des Zeichens δ ergeben die Gleichungen (4)

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} (\varphi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\, \delta y_{\mathfrak{b}} + \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\, \delta y'_{\mathfrak{b}}) = 0,$$

also, wenn man mit irgendwelchen Faktoren $\mu_{\mathfrak{a}}$ vervielfacht und addiert,

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} (\varphi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\, \delta y_{\mathfrak{b}} + \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\, \delta y'_{\mathfrak{b}}) = 0$$

oder, nach der für das Zeichen δ geltenden Operationsregel,

$$(6)\quad 0 = \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \delta y_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\mu_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \frac{d(\mu_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})}{dt}\right] + \frac{d}{dt} \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \delta y_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.$$

Bestimmen wir nun die Multiplikatoren so, daß

$$(7)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\mu_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} - \frac{d(\mu_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}})}{dt}\right] = 0, \quad \mathfrak{e} = 0, 1, \ldots r,$$

so sind hiermit $r+1$ lineare homogene Differentialgleichungen angesetzt, in welchen die Determinante der Koeffizienten der Größen $\mu'_{\mathfrak{a}}$ den Wert

$$\sum \pm \overline{\varphi}_{00} \overline{\varphi}_{11} \cdots \overline{\varphi}_{rr}$$

hat, also nicht verschwindet. Man kann daher $r+1$ Integralsysteme

$$(8)\qquad \mu_{\mathfrak{a}0}, \mu_{\mathfrak{a}1}, \ldots \mu_{\mathfrak{a}r}$$

bestimmen, in denen der zweite Zeiger die Systeme, der erste die Glieder innerhalb eines Systems unterscheidet, und annehmen, daß die Determinante

$$D(\mu) = \sum \pm \mu_{00} \mu_{11} \cdots \mu_{rr} \Big|^{t_1}$$

von Null verschieden ist. Daß die Größen μ in dem ganzen Intervall von t_0 bis t_1 stetige Funktionen von t sind, folgt daraus, daß die Gleichungen (7) für die Größen $\mu'_{\mathfrak{a}}$ lineare Formen der Argumente $\mu_{\mathfrak{a}}$ ergeben, deren Koeffizienten in dem bezeichneten Intervall regulär sind. Die Gleichung (6) ergibt jetzt

$$0 = \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,n} \delta y_{\mathfrak{d}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} - \frac{d(\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}})}{dt}\right] + \frac{d}{dt} \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \delta y_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$
$$\mathfrak{e} = 0, 1, \ldots r$$

also auch, indem man von t_0 bis t_1 integriert,

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \delta y_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \Big|_{t_1}^{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,n} \delta y_{\mathfrak{d}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} - \frac{d(\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}})}{dt}\right]$$

oder, da die Größen $\delta y_{\mathfrak{b}}$ für $t = t_0$ verschwinden,

$$(9)\qquad \begin{aligned} &- \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \delta y_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \Big|^{t_1} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,n} \delta y_{\mathfrak{d}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} - \frac{d(\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}})}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Setzen wir, um hier die keiner Beschränkung unterworfenen Variationen $\delta y_{s+1}, \delta y_{s+2}, \ldots \delta y_r$ aus den $s+1$ ersten Gleichungen wegzuschaffen,

$$(10) \qquad \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \Big|^{t_1} = 0, \quad \mathfrak{c} = s+1, \ldots r, \quad \mathfrak{g} = 0, 1, \ldots s,$$

so kann dieser Forderung durch passende Wahl der Größen (8) stets genügt werden, ohne daß die Determinante $D(\mu)$ verschwindet, und die ersten $s+1$ Gleichungen (9) ergeben, da die Größen $\delta y_{\mathfrak{d}}$ für $t = t_1$ verschwinden,

$$(11) \qquad \sum_{\mathfrak{f}}^{0,s} \delta y_{\mathfrak{f}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}} \Big|^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,n} \delta y_{\mathfrak{d}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\frac{d(\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}})}{dt} - \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} \right],$$

$$\mathfrak{g} = 0, 1, \ldots s.$$

Die Determinante der $(s+1)^2$ Größen

$$(12) \qquad \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}} \Big|^{t_1}$$

ist von Null verschieden. Denn zunächst gilt dies von der Determinante der $(r+1)^2$ Größen,

$$(13) \qquad \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{i}} \Big|^{t_1}, \quad \mathfrak{e}, \mathfrak{i} = 0, 1, \ldots r,$$

deren Wert offenbar

$$\sum \pm \mu_{00} \mu_{11} \ldots \mu_{rr} \sum \pm \overline{\varphi}_{00} \overline{\varphi}_{11} \ldots \overline{\varphi}_{rr} \Big|^{t_1}$$

ist. In dem System (13) verschwinden nun nach (10) die Glieder, in welchen $\mathfrak{e}$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots s$, und $\mathfrak{i}$ eine der Zahlen $s+1, s+2, \ldots r$ ist, also, wenn der Zeiger $\mathfrak{e}$ für jede einzelne Zeile fest bleibt, alle Glieder, welche den ersten $s+1$ Zeilen und den letzten $r-s$ Spalten angehören. Die Determinante ist also das Produkt der beiden Determinanten, welche aus den in den ersten $s+1$ Zeilen und Spalten und den in den letzten $r-s$ Zeilen und Spalten stehenden Gliedern gebildet sind. Erstere ist aber die Determinante der Größen (12); sie kann also nicht den Wert Null haben. Aus den Gleichungen (11) lassen sich daher die $s+1$ Größen $\delta y_{\mathfrak{f}}$ in folgender Form berechnen:

$$\delta y_{\mathfrak{f}} \Big|^{t_1} = \sum_{\mathfrak{g}}^{0,s} c_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}} \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,n} \delta y_{\mathfrak{d}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} - \frac{d(\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}})}{dt} \right];$$

wenn man allgemein setzt

$$\nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}} = \sum_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{o}, s} c_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}\, \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}, \quad \mathfrak{a} = 0, \ldots r,$$

so ergibt sich

$$(14) \qquad \delta y_{\mathfrak{f}}\Big|^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1, n} \delta y_{\mathfrak{d}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0, r} \left[\nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}}\, \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} - \frac{d(\nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}})}{dt}\right].$$

Dabei bilden die Größen

$$\nu_{0\mathfrak{f}}, \nu_{1\mathfrak{f}}, \ldots \nu_{r\mathfrak{f}}$$

ein System von Lösungen der Gleichungen (7), da dies von jedem der Systeme

$$\mu_{0\mathfrak{g}}, \mu_{1\mathfrak{g}}, \ldots \mu_{r\mathfrak{g}}$$

gilt; vervielfacht man ferner die Gleichungen (10) mit $c_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}$ und summiert über $\mathfrak{g}$, so ergibt sich

$$\sum_{\mathfrak{g}}^{0, s} c_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0, r} \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\Big|^{t_1} = 0$$

oder

$$\sum_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \sum_{\mathfrak{g}} c_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}}\, \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}\Big|^{t_1} = \sum_{\mathfrak{a}} \nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\Big|^{t_1} = 0.$$

Da nun $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ dasselbe Ziffernsystem bedeuten, so bleiben die Gleichungen (10) erhalten, wenn man μ durch ν ersetzt. Der Vollständigkeit halber setzen wir noch

$$\nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}, \quad \nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} = \mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{c} = s+1, \ldots r, \quad \mathfrak{d} = r+1, \ldots n,$$

dann sind die $(r+1)^2$ Größen $\nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}}$ linear durch die $\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}}$ mittels des Koeffizientensystems

$$\begin{matrix} c_{00} & c_{01} \ldots c_{0s} & 0 & 0 \ldots \\ c_{10} & c_{11} \ldots c_{1s} & 0 & 0 \ldots \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s0} & c_{s1} \ldots c_{ss} & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 1 \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

ausgedrückt, dessen Determinante den Wert

$$\sum \pm c_{00}\, c_{11} \ldots c_{ss}$$

hat, also bei der Entstehungsweise der Größen c von Null verschieden ist. Es ist daher auch die Determinante

$$\sum \pm \nu_{00}\, \nu_{11} \ldots \nu_{rr}\Big|^{t_1}$$

von Null verschieden, und die Größen. ν haben alle für die Größen μ vorausgesetzten Eigenschaften.

Die vorgelegte Extremsaufgabe verlangt nun, daß δy_0 verschwinde, wenn alle Größen Δy für $t = t_0$, und alle mit Ausnahme von Δy_0, Δy_{s+1}, Δy_{s+2}, $\ldots \Delta y_r$ für $t = t_1$ verschwinden. Bei der oben definierten Abänderung Δ verschwinden für $t = t_1$ die Größen $\Delta y_\mathfrak{v}$ ebenso wie $u_{\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}}$ von selbst; es bleiben also nur die Gleichungen

$$(15) \qquad \Delta y_1 \Big|^{t_1} = \Delta y_2 \Big|^{t_1} = \cdots = \Delta y_s \Big|^{t_1} = 0,$$

unter deren Voraussetzung Δy_0 ein Extrem an der Stelle

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m$$

haben, δy_0 verschwinden soll. Nun ist nach Definition

$$d \Delta y_\mathfrak{v} \Big|^{\varepsilon = 0} = \delta y_\mathfrak{v} .$$

Sieht man daher die Größen u als fest, die Größen ε als verfügbar an, so lehren die Sätze des § 5, daß aus den Gleichungen

$$(16) \qquad \delta y_1 \Big|^{t_1} = \delta y_2 \Big|^{t_1} = \cdots = \delta y_s \Big|^{t_1} = 0,$$

wenn man sie als lineare Relationen zwischen den Größen $d\varepsilon$ ansieht, die Gleichung

$$(17) \qquad \delta y_0 \Big|^{t_1} = 0$$

folgen muß. Um die Gleichungen (15) erfüllen zu können, verfügen wir über die bisher unbestimmte Anzahl der Größen ε so, daß sie die Anzahl jener Gleichungen übersteigt und setzen

$$m = s,$$

so daß

$$\delta y_\mathfrak{v} = \sum_{\mathfrak{g}}^{0,\,s} d\varepsilon_\mathfrak{g} \, . \, u_{\mathfrak{v}\,\mathfrak{g}}.$$

Dabei ist zu beachten, daß der gewöhnliche Satz über das gebundene Extrem einer Funktion von mehreren Unabhängigen nur dann anzuwenden ist, wenn aus den s Gleichungen (15) eine der Größen ε als reguläre Funktion der s übrigen auszurechnen ist, d. h. wenn von den Determinanten s ter Ordnung aus der Matrix

$$(18) \qquad \frac{\partial \Delta y_\mathfrak{m}}{\partial \varepsilon_\mathfrak{g}} \Big|^{\varepsilon = 0} = \frac{\partial \delta y_\mathfrak{m}}{\partial d \varepsilon_\mathfrak{g}}, \quad \mathfrak{m} = 1, 2, \ldots s, \; \mathfrak{g} = 0, 1, \ldots s,$$

mindestens eine nicht verschwindet. Wir machen diese Voraussetzung zunächst und kommen auf ihre Bedeutung zurück. Setzen wir ferner

$$W_{\mathfrak{f}}(u_{\mathfrak{g}}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,\,n} u_{\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\,r} \left[\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \varphi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}} - \frac{d(\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}})}{dt} \right],$$

so ergeben die Formeln (14)

$$\delta y \Big|^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,\,n} \left(\sum_{\mathfrak{g}}^{0,\,s} d\,\varepsilon_{\mathfrak{g}} \,.\, u_{\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}} \right) \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\,r} \left[\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \varphi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}} - \frac{d(\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}})}{dt} \right]$$

$$= \sum_{\mathfrak{g}}^{0,\,s} d\,\varepsilon_{\mathfrak{g}} \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,\,n} u_{\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\,r} \left[\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \varphi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}} - \frac{d(\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}})}{dt} \right]$$

$$= \sum_{\mathfrak{g}}^{0,\,s} d\,\varepsilon_{\mathfrak{g}} \,.\, W_{\mathfrak{f}}(u_{\mathfrak{g}}), \quad \mathfrak{f} = 0, 1, \ldots s;$$

bei der angegebenen Beziehung zwischen den Gleichungen (16), (17) folgt daher

$$\begin{vmatrix} W_0(u_0) & W_0(u_1) \ldots & W_0(u_s) \\ W_1(u_0) & W_1(u_1) \ldots & W_1(u_s) \\ \vdots & & \\ W_s(u_0) & W_s(u_1) \ldots & W_s(u_s) \end{vmatrix} = 0;$$

die letzten s Zeilen dieser Determinante bilden die Matrix (18).

Die Funktionen u sind nun keinen anderen Beschränkungen unterworfen, als stetig zu sein, stetige erste Ableitungen zu haben, und für $t = t_0$ und $t = t_1$ zu verschwinden; sind daher C von den Funktionen $u_{\mathfrak{d}0}$ unabhängige Größen, so hat man

$$\sum_{\mathfrak{f}}^{0,\,s} C_{\mathfrak{f}}\, W_{\mathfrak{f}}(u_0) = 0$$

oder nach der Definition der Ausdrücke W

$$\sum_{\mathfrak{f}}^{0,\,s} C_{\mathfrak{f}} \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{d}}^{r+1,\,n} u_{\mathfrak{d}0} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,\,r} \left[\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \varphi_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}} - \frac{d(\nu_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}}\, \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}})}{dt} \right] = 0$$

oder endlich, wenn man

$$\sum_{\mathfrak{f}}^{0,s} C_{\mathfrak{f}} \nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}} = \lambda_{\mathfrak{a}}$$

setzt,

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mathfrak{b}}^{r+1,n} u_{\mathfrak{b}0} \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\lambda_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \frac{d(\lambda_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})}{dt}\right] = 0.$$

Läßt man alle Größen $u_{\mathfrak{b}0}$ bis auf eine identisch verschwinden, so ergeben sich hieraus durch den Hauptbilfssatz des § 6 die Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\lambda_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \frac{d(\lambda_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})}{dt}\right] = 0, \tag{19}$$

da wir voraussetzen, daß die Größen y, y', y'' längs der betrachteten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ stetige Funktionen von t sind. Sodann sind die Größen $\lambda_{\mathfrak{a}}$ in derselben Weise aus den Größen $\nu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}}$ zusammengesetzt, wie diese aus den Größen $\mu_{\mathfrak{a}\mathfrak{f}}$; die oben durchgeführte Argumentation lehrt daher, daß die Größen $\lambda_{\mathfrak{a}}$ Lösungen des Systems (7) sind, welche den Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \lambda_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \Big|^{t_1} = 0, \quad \mathfrak{c} = s+1,\ s+2, \ldots r \tag{20}$$

genügen; fügt man jenes System zu den erwiesenen Gleichungen (19), so sieht man, daß die $r+1$ Größen $\lambda_{\mathfrak{a}}$ den $n+1$ Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{a}}^{0,r} \left[\lambda_{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \frac{d(\lambda_{\mathfrak{a}} \overline{\varphi}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})}{dt}\right] = 0, \quad \mathfrak{b} = 0,\ 1, \ldots n \tag{21}$$

genügen. Das Zusammenbestehen der letzten beiden Gleichungssysteme bildet also für eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von den angegebenen Stetigkeitseigenschaften eine notwendige Bedingung des gesuchten Extrems.

Die Größen $C_{\mathfrak{f}}$ sind offenbar die Determinanten $s$ter Ordnung aus der Matrix (18); sollten sie alle verschwinden, so wären die Gleichungen (21) zunächst inhaltlos, da $\lambda_{\mathfrak{a}} = 0$ wäre. Gibt es bei dieser Annahme eine verschwindende Determinante $k$ter Ordnung, die eine nicht verschwindende Unterdeterminante $(k-1)$ter Ordnung besitzt, so erhält man eine Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{n}}^{1,k} B_{\mathfrak{n}} W_{\alpha_{\mathfrak{n}}}(u_{\mathfrak{g}}) = 0,$$

in der die Größen $B_{\mathfrak{n}}$ von $u_{\mathfrak{g}}$ nicht abhängen und nicht alle verschwinden. Das gibt aber wieder eine Gleichung der Form (21), in der die Größen λ_a nicht sämtlich identisch verschwinden; dabei ist von der Extremforderung noch gar kein Gebrauch gemacht. Die Gleichungen (21) gelten also immer, bilden nur in dem letzterwähnten Ausnahmefall für das Extrem keine besondere Eigenschaft.

Setzt man

$$\Omega = \sum_{a}^{0,r} \lambda_a \varphi_a, \quad \Omega_b = \frac{\partial \Omega}{\partial y'_b},$$

so ist offenbar

$$\Omega = 0$$

und werden die erhaltenen Gleichungen

$$(22) \qquad \Omega_c \Big|^{t_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_b} - \frac{d\Omega_b}{dt} = 0, \quad c = s+1, \dots r.$$

Die letzten dieser Gleichungen sind voneinander abhängig; denn da die Funktionen φ_a und damit auch Ω in bezug auf die Argumente y'_b homogen sind, so hat man aus denselben Gründen wie in § 41, I. bei der Annahme $\Omega = 0$ und beliebigen Werten von λ_a die Gleichung

$$\sum_b y'_b \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_b} - \frac{d\Omega_b}{dt}\right) = 0.$$

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß die ganze Schlußkette bis zu den Gleichungen (20), (21) nirgends benutzt, daß φ_{ab} und $\overline{\varphi}_{ab}$ Ableitungen einer Funktion φ_a sind; maßgebend sind nur die Gleichungen

$$(23) \qquad \sum_{b}^{1,n} (\varphi_{ab}\,\delta y_b + \overline{\varphi}_{ab}\,\delta y'_b) = 0,$$

die ihren Sinn behalten, wenn man von einer beliebigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ im Gebiet der Größen y_b ausgeht, und diese in eine Schar von Nachbarmannigfaltigkeiten einbettet, die von Parametern ε abhängen, womit die Variationen bestimmt sind. Man darf daher die Gleichungen (20), (21) auch dann anwenden, wenn die Aufgabe $\delta y_0 = 0$ durch vielleicht nicht integrierbare Bedingungsgleichungen von der Form (23) gebunden wird. Solche Aufgaben kommen in der Mechanik vor.

Sind die Größen y_b, λ_a als Funktionen von t so bestimmt, daß die Bedingungsgleichungen $\varphi_a = 0$ und die Gleichungen (22) erfüllt sind, so nennen wir die einfache Mannigfaltigkeit der den verschiedenen Werten von t entsprechenden Wertsysteme y_b, λ_a eine Extremale.

§ 43.

Beispiele.

I. Ein wichtiger, in den früheren Abschnitten allein behandelter Sonderfall ist der, daß eine der Gleichungen $\varphi_\alpha = 0$ die Form

$$\varphi_0 = y_0' - \psi(y_1, y_2, \ldots, y_1', \ldots y_n') = 0$$

hat, und y_0 in den übrigen nicht vorkommt; die erste der Gleichungen § 42 (21) lautet dann einfach

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = 0.$$

Man kann daher, indem man

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = l_1, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = l_2, \quad \ldots \quad \frac{\lambda_r}{\lambda_0} = l_r$$

setzt, die Differentialgleichungen des Problems aus der Formel

$$\delta \int (\psi + l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \cdots + l_r \varphi_r)\, dt = 0$$

erhalten. Wäre $\lambda_0 = 0$, so hätte man eine Mannigfaltigkeit im Gebiet der Größen $y_1, y_2, \ldots y_n$, für welche die Bedingungen des Extrems einer der Größen

$$y_1 \Big|^{t_1}, \quad y_2 \Big|^{t_1}, \quad \ldots \quad y_n \Big|^{t_1}$$

bei gegebenen Werten der übrigen erfüllt sind. Dieser Fall ist als Ausnahme zu betrachten.

II. Das Prinzip der kleinsten Aktion in seiner weiteren, von Lagrange gegebenen Form sagt folgendes aus. Die Lage eines Massensystems sei durch die Parameter $y, z, \ldots$ bestimmt, x sei die Zeit, T die lebendige Kraft, $Y\delta y + Z\delta z + \cdots$ die Arbeit der wirkenden Kräfte beim Übergang von der Lage $(y, z, \ldots)$ zu der benachbarten $(y + \delta y, z + \delta z, \ldots)$. Vergleicht man dann die natürliche Bewegung des Systems im Gebiet der Variablen $y, z, \ldots$ mit einer benachbarten, nur mathematisch konstruierten, welche dieselbe Anfangs- und Endlage wie jene hat und so beschaffen ist, daß beim Übergang von der einen zur anderen Bewegung die Gleichung

$$(1) \qquad \delta T = Y\delta y + Z\delta z + \cdots$$

besteht, so ist das Zeitintegral der lebendigen Kraft bei der natürlichen Bewegung ein Minimum:

$$\delta \int T\,d\,x = 0.$$

Die Größe x kann hier nicht als unabhängige Variable genommen werden, da ihr Wert für die Endlage des Systems nicht vorgeschrieben ist; man muß also alle Größen x, y, z, ... als Funktionen eines Parameters t ansehen, der bei allen verglichenen Bewegungen dieselben Anfangs- und Endwerte t_0, t_1 hat. Dann ist die Anzahl der Unbekannten um zwei größer als die der Parameter y, z, ...; die Anzahl der gegebenen Gleichungen ist zwei, da man neben der Beziehung (1) die Definitionsgleichung der Aktion u,

$$\frac{d\,u}{d\,t} = T\frac{d\,x}{d\,t},$$

zu berücksichtigen hat; es ist daher

$$r = 1, \quad s = 0.$$

Nach der allgemeinen Regel hat man die mit λ vervielfachte Gleichung (1) nach t zu integrieren, und zu der Gleichung

$$\delta \int T\,d\,x = \int_{t_0}^{t_1} \delta\left(T\frac{d\,x}{d\,t}\right) d\,t = 0$$

zu addieren:

$$\int_{x_0}^{x_1} \{\delta\,T(x' + \lambda) + T\delta\,x' + \lambda\,(Y\delta\,y + Z\delta\,z + \cdots)\}\,d\,t = 0;$$

die übliche partielle Integration ergibt mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\delta\,x\,\Big|^{t_0} = \delta\,y\,\Big|^{t_0} = \delta\,z\,\Big|^{t_0} = \cdots = \delta\,y\,\Big|^{t_1} = \delta\,z\,\Big|^{t_1} = \cdots = 0$$

ein Ergebnis von der Form

$$\delta\,x\left\{T + (\lambda + x')\frac{\partial\,T}{\partial\,x'}\right\}\Big|^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} d\,t\,\{\xi\,\delta\,x + \eta\,\delta\,y + \zeta\,\delta\,z + \cdots\} = 0,$$

und man hat dann die Gleichungen

$$\xi = \eta = \zeta = \cdots = 0$$

anzusetzen. Beschränken wir uns auf den gewöhnlichen Fall, daß T eine quadratische Form der Größen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots$ sei, deren Koeffizienten nur von $y, z, \ldots$ abhängen, etwa

$$T = \Phi\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots\right),$$

so hat man offenbar

$$(2) \qquad T = \frac{\Phi(y', z', \ldots)}{x'^2},$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = -\frac{2T}{x'}.$$

Man erhält daher als die der Größe x entsprechende Gleichung § 42 (20)

$$(3) \qquad T - (\lambda + x') \cdot \frac{2T}{x'}\Bigg|^{t_1} = 0, \quad 2\lambda + x'\Bigg|^{t_1} = 0.$$

Ferner hat man die Differentialgleichung

$$\xi = -\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}\left\{(\lambda + x')\frac{\partial T}{\partial x'}\right\} = 0,$$

oder

$$T - 2(\lambda + x')\frac{T}{x'} = \text{const.};$$

die Gleichung (3) ergibt daher allgemein

$$(4) \qquad 2\lambda + x' = 0.$$

Sodann ergibt die angedeutete Teilintegration

$$\eta = -\lambda Y + (\lambda + x')\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left\{(\lambda + x')\frac{\partial T}{\partial y'}\right\};$$

da nun der Gleichung (2) zufolge, wenn

$$\frac{dy}{dx} = p$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$x'\frac{\partial T}{\partial y'} = \frac{\partial T}{\partial p}$$

gilt, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichung (4)

$$\begin{aligned}\eta &= -\lambda\, Y - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial p}\right)\\ &= -\lambda \left\{ Y + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)\right\}\\ &= -\lambda \left\{ Y + \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial p}\right\}.\end{aligned}$$

Analoge Form haben die Ausdrücke $\zeta, \ldots$, und man erhält die Lagrangeschen Gleichungen

$$Y + \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial p}, \ldots \tag{5}$$

Sind die Parameter $y, z, \ldots$ nicht völlig frei verfügbar, sondern Bedingungsgleichungen

$$Y_1\,\delta y + Z_1\,\delta z + \cdots = 0, \quad Y_2\,\delta y + Z_2\,\delta z + \cdots = 0, \cdots$$

unterworfen, deren linke Seiten nicht notwendig Variationen endlicher Ausdrücke zu sein brauchen, so braucht man diese Gleichungen nur zu differenzieren, um auf eine Aufgabe der bisher betrachteten Art zu kommen; man erhält

$$\begin{aligned}&Y_1\,\delta y' + Z_1\,\delta z' + \cdots + Y_1'\,\delta y + \cdots = 0,\\ &Y_2\,\delta y' + Z_2\,\delta z' + \cdots + Y_2'\,\delta y + Z_2'\,\delta z + \cdots = 0, \cdots\end{aligned}$$

und dieses System ist dem vorigen äquivalent, da die Variationen $\delta y, \delta z, \ldots$ für $t = t_0$ verschwinden. Man hat dann die obigen Werte von $\eta, \zeta, \ldots$ nur um die Summanden

$$\begin{aligned}&\lambda_1\, Y_1' - \frac{d(\lambda_1 Y_1)}{dt} + \lambda_2\, Y_2' - \frac{d(\lambda_2 Y_2)}{dt} + \cdots\\ &\qquad = -\lambda_1' Y_1 - \lambda_2' Y_2 - \cdots\\ &\lambda_1\, Z_1' - \frac{d(\lambda_1 Z_1)}{dt} + \lambda_2\, Z_2' - \frac{d(\lambda_2 Z_2)}{dt} + \cdots\\ &\qquad = -\lambda_1' Z_1 - \lambda_2' Z_2 - \cdots\end{aligned}$$

zu vermehren; die Gleichungen (5) werden daher

$$Y + \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\lambda_1'}{\lambda}\, Y_1 - \frac{\lambda_2'}{\lambda}\, Y_2 - \cdots = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)$$

usf.

Als Anwendung betrachten wir eine Kugel vom Radius a, welche, ohne zu gleiten, auf der yz-Ebene des Koordinatensystems rollt, und diese im Punkte (y, z) berührt; θ, φ, ψ seien die Eulerschen Winkel, welche die Lage dreier in der Kugel festen, aufeinander senkrechten Richtungen gegen das Koordinatensystem bestimmen. Ist dann M die Masse der Kugel und m ihr Trägheitsmoment bezüglich eines Durchmessers, so ist

$$2T = M\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}$$

$$+ m\left\{\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx} - \cos\theta\,\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right\},$$

und es gelten bei einer Rollbewegung die geometrisch leicht ersichtlichen Bedingungsgleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta y &= -a\sin\varphi\sin\theta\,\delta\psi + a\cos\varphi\,\delta\theta, \\ \delta z &= a\cos\varphi\sin\theta\,\delta\psi + a\sin\varphi\,\delta\theta, \end{aligned}$$

deren Multiplikatoren λ_1, λ_2 seien. Die Arbeit der wirkenden Kräfte sei

$$Y\delta y + Z\delta z + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi + \Theta\,\delta\theta;$$

dann ergibt die obige Regel, wenn man

$$\lambda\mu = \lambda_1', \quad \lambda\nu = \lambda_2'$$

setzt, die Bewegungsgleichungen

$$M\frac{d^2 y}{dx^2} = Y + \mu, \quad M\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \nu,$$

$$m\left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - \sin\theta\,\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\psi}{dx}\right) = -\mu a\cos\varphi - \nu a\sin\varphi + \Theta,$$

$$m\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx} - \cos\theta\,\frac{d\varphi}{dx}\right) = \mu a\sin\varphi\sin\theta - \nu a\cos\varphi\sin\theta + \Psi,$$

$$m\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx} - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dx}\right) = \Phi;$$

hierzu kommen die Gleichungen (6), in welchen man das Zeichen δ durch d/dx ersetzen kann.

III. Es sei eine Funktion von zwei Integralen der früher immer betrachteten Form

$$u = \int F(x, y, x', y')\,dt, \quad v = \int G(x, y, x', y')\,dt,$$

etwa $w = f(u, v)$ zum Extrem zu machen, bei gegebenen Anfangs- und Endwerten von x und y. Schreibt man die Definitionsgleichungen in der Form

$$w' = f_u u' + f_v v', \quad u' - F(x, y, x', y') = 0,$$
$$v' - G(x, y, x', y') = 0,$$

und setzt

$$\Omega = \lambda(w' - f_u u' - f_v v') + \mu[F(x, y, x', y') - u']$$
$$+ \nu[G(x, y, x', y') - v'],$$

so ergibt sich

$$\Omega_w - \Omega'_{w'} = -\lambda' = 0,$$
$$\Omega_v - \Omega'_{v'} = \lambda(f_{uv}u' + f_{vv}v') - \lambda f'_v - \nu' = -\nu' = 0;$$

λ, ν und ähnlich μ sind Festwerte. Die auf x und y bezüglichen Gleichungen werden

$$\Omega_x - \Omega'_{x'} = \mu(F_x - F'_{x'}) + \nu(G_x - G'_{x'}) = 0,$$
$$\mu(F_y - F'_{y'}) + \nu(G_y - G'_{y'}) = 0.$$

Man erhält also als Lösungen der gegebenen Aufgabe die Extremalen der einfacheren

$$\delta\int(\lambda F + \mu G)\,dt = 0,$$

ein auch bei Euler begegnendes Ergebnis.

§ 44.

Felder und Jacobi-Hamiltonsches Verfahren bei der Mayerschen Aufgabe.

I. Sei wieder die allgemeine Mayersche Aufgabe durch die Gleichungen

(1) $\qquad \varphi_{\mathfrak{a}}(y_0, y_1, \dots y_n, y'_0, y'_1, \dots y'_n) = 0, \quad \mathfrak{a} = 0, 1, \dots r$

gegeben, deren linke Seiten in den Ableitungen $y'_{\mathfrak{b}} = dy_{\mathfrak{b}}/dt$ positiv homogen von erster Stufe seien; man setze

(2) $$\Omega = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r}\lambda_{\mathfrak{a}}\varphi_{\mathfrak{a}}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r}\lambda_{\mathfrak{a}}\frac{\partial\varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y'_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{a}}^{0,r}\lambda_{\mathfrak{a}}\frac{\partial\varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y'_{\mathfrak{b}}} = \Omega_{\mathfrak{b}},$$
$$\mathfrak{b} = 0, 1, \dots n,$$

und nenne Extremale jede einfache Mannigfaltigkeit im Gebiet der Größen $y_{\mathfrak{b}}$, für die neben den Gleichungen (1) bei passender Wahl der Multiplikatoren λ als Funktionen von t die Gleichungen

(3) $$\frac{\partial\Omega}{\partial y_{\mathfrak{b}}} - \frac{d\Omega_{\mathfrak{b}}}{dt} = 0$$

gelten.

Eine $(n-1)$-fache Schar von Extremalen werde mit den zugehörigen Multiplikatoren dargestellt durch die Gleichungen

$$y_{\mathfrak{b}} = \theta_{\mathfrak{b}}(t, a_1, a_2, \dots a_{n-1}), \quad \lambda_{\mathfrak{a}} = \zeta_{\mathfrak{a}}(t, a_1, a_2, \dots a_{n-1}),$$

in denen längs der einzelnen Extremale t allein veränderlich, a_1, $a_2, \ldots$ festwertig sind. Denkt man diese Werte sowie $y'_\mathfrak{b} = \partial \theta_\mathfrak{b} / \partial t$ in die Gleichungen (1) eingesetzt und differenziert nach einer der Größen a, so ergibt sich

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial \varphi_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{b}} \frac{\partial \theta_\mathfrak{b}}{\partial a} + \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial \varphi_\mathfrak{a}}{\partial y'_\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \theta_\mathfrak{b}}{\partial t\, \partial a} = 0$$

oder nach (2) auch

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial \Omega}{\partial y_\mathfrak{b}} \frac{\partial \theta_\mathfrak{b}}{\partial a} + \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} \frac{\partial^2 \theta_\mathfrak{b}}{\partial t\, \partial a} = 0. \tag{4}$$

Setzt man daher

$$\delta' = d a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + d a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + d a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

so ist dieses Zeichen mit dem der Ableitung nach t, also mit $d = dt . \partial / \partial t$ vertauschbar, und die den verschiedenen Parametern a entsprechenden Gleichungen (4) ergeben, indem man $\theta_\mathfrak{b}$ durch $y_\mathfrak{b}$ ersetzt,

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial \Omega}{\partial y_\mathfrak{b}} \delta' y_\mathfrak{b} + \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} \frac{\partial \delta' y_\mathfrak{b}}{\partial t} = 0$$

oder auch

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_\mathfrak{b}} - \frac{d \Omega_\mathfrak{b}}{dt} \right) \delta' y_\mathfrak{b} + \frac{d}{dt} \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} \delta' y_\mathfrak{b} = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) folgt

$$\frac{d}{dt} \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} \delta' y_\mathfrak{b} = 0. \tag{5}$$

Weiter besteht wegen der Homogeneität der Größen $\varphi_\mathfrak{a}$ und Ω die Identität

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} y'_\mathfrak{b} = 0, \tag{6}$$

also um so mehr

$$\frac{d}{dt} \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} d y_\mathfrak{b} = 0. \tag{7}$$

Setzt man daher

$$\delta = dt \frac{d}{dt} + \delta', \quad \delta y_\mathfrak{b} = y'_\mathfrak{b} dt + \delta' y_\mathfrak{b},$$

und addiert die Gleichungen (5) und (7), so folgt

$$\frac{d}{dt} \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega_\mathfrak{b} \delta y_\mathfrak{b} = 0,$$

und da d den Fortgang längs einer Extremale der Schar bedeutet, kann man dies Ergebnis so aussprechen, daß die Größe

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, \delta y_{\mathfrak{b}}$$

längs jeder Extremale festwertig ist; im besonderen verschwindet sie längs einer ganzen Extremale, wenn dies an einer Stelle stattfindet.

Man definiere nun durch die Gleichungen

$$t = \tau = \tau(a_1, a_2, \dots a_{n-1}) \tag{8}$$

eine $(n-1)$-fache Schar von Stellen auf den betrachteten Extremalen. Dann zeigt die Gleichung (5), daß die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, \delta' y_{\mathfrak{b}} = 0,$$

wenn sie unter der Annahme (8) gilt, für alle in Betracht kommenden Werte der Veränderlichen a und t gilt. Addiert man zu ihr die Gleichung (6), mit dt vervielfacht, so erhält man, dt unabhängig von den Parametern a gedacht, die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, \delta y_{\mathfrak{b}} = 0 \tag{9}$$

allgemein, d. h. für unabhängige Werte t, $a_1, \dots a_{n-1}$.

Man kann dies Ergebnis auch so aussprechen, daß in der Voraussetzung nur die Gleichung (9) vorkommt, die man zunächst für die Mannigfaltigkeit (8) annehme; da die Gleichung (6) allgemein ergibt

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \theta_{\mathfrak{b}}}{\partial t} = 0,$$

so folgt

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} d\tau \frac{\partial y_{\mathfrak{b}}}{\partial t}\, \Omega_{\mathfrak{b}} = 0.$$

Wenn also für das Gebiet (8), auf dem

$$\delta = d\tau \frac{\partial}{\partial t} + \delta'$$

gesetzt wird, die Gleichung (9) gilt, so folgt für je eine Stelle jeder Extremale der Schar

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, \delta' y_{\mathfrak{b}} = 0,$$

also die Beziehung, aus der wir oben die Gleichung (9) für unabhängige t, a_1, ... a_{n-1} abgeleitet haben. Das heißt, gilt die Gleichung (9) auf dem Gebiet $t = \tau(a_1, a_2, \ldots a_{1-n})$, so gilt sie allgemein für unabhängige t, a_1, ... a_{n-1}; wir nennen dann die Gesamtheit der Extremalen

$$y_{\mathfrak{b}} = \theta_{\mathfrak{b}}(t, a_1; a_2, \ldots a_{n-1})$$

ein Feld. Für diesen Begriff ist es wesentlich, daß die Anzahl der Parameter a gerade $n-1$ ist, wovon aber in der bisherigen Schlußkette kein Gebrauch gemacht wurde.

Als Beispiel können wir die einfachste Aufgabe des freien Extrems

$$z' - \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0, \quad \delta z = 0$$

nehmen und als Mayersche Aufgabe auffassen, wobei

$$\Omega = \lambda(z' - \sqrt{x'^2 + y'^2}), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = \lambda, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \lambda = \text{const.}$$

zu setzen ist. Die das Feld kennzeichnende Gleichung ist

$$(10) \qquad \delta z - \frac{x'}{z'}\delta x - \frac{y'}{z'}\delta y = 0;$$

die Extremalen im xyz-Raume sind Gerade, die unter 45° gegen die xy-Ebene geneigt sind. Die Gleichung (10) besagt, daß die Richtung δ senkrecht steht auf einer Richtung n, für die

$$\cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz) = \frac{x'}{z'} : \frac{y'}{z'} : -1,$$

also, da

$$1^2 + \left(\frac{x'}{z'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{z'}\right)^2 = 2$$

ist,

$$\cos(nz) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}.$$

Längs einer Extremalen ist also das Flächenelement, in das die möglichen Richtungen δ hineinführen, von fester Richtung und Lage: die Extremalen eines Feldes bilden eine abwickelbare Fläche; die Regelfläche, die das Feld bildet, hat längs jeder Erzeugenden eine feste Tangentialebene.

II. Aus den $n+1$ Gleichungen

$$(11) \qquad y_{\mathfrak{b}} = \theta_{\mathfrak{b}}(t, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}), \quad \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n,$$

die ein Feld darstellen, kann man die n Größen t, $a_1, \dots a_{n-1}$ eliminiert denken und erhalte so eine Gleichung

$$\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0.$$

Wenn also δ wieder den Fortgang längs der durch die Gleichungen (11) definierten n-fachen Mannigfaltigkeit bedeutet, so folgt

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{b}}} \delta y_{\mathfrak{b}} = 0. \tag{12}$$

Nehmen wir nun in den Begriff des Feldes die Bestimmung auf, daß durch die Gleichungen (11) eine n-fache Mannigfaltigkeit im Gebiet der Größen $y_{\mathfrak{b}}$ definiert werde, so sind n der Größen $\delta y_{\mathfrak{b}}$ als unabhängig zu betrachten. Verbindet man also die Gleichung (12) mit der das Feld kennzeichnenden

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}} \delta y_{\mathfrak{b}} = 0,$$

so folgt, daß die Koeffizienten der Größen $\delta y_{\mathfrak{b}}$ in beiden proportional sein müssen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \dots : \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \Omega_0 : \Omega_1 : \dots : \Omega_n. \tag{13}$$

In den Verhältnissen auf der rechten Seite kommen nun die Ableitungen $y'_{\mathfrak{b}}$ nur in ihren n Verhältnissen, ebenso die $r+1$ Multiplikatoren $\lambda_{\mathfrak{a}}$ nur in ihren r Verhältnissen vor; diese $n+r$ Verhältnisse kann man aus $n+r+1$ Gleichungen eliminiert denken, der Proportion (13), die n Gleichungen vertritt, und den $r+1$ Gleichungen $\varphi_{\mathfrak{a}} = 0$, in denen ebenfalls die Ableitungen $y'_{\mathfrak{b}}$ nur in ihren Verhältnissen auftreten. Als Ergebnis der Elimination erhält man eine partielle Differentialgleichung mit der Unbekannten Φ, in der diese selbst nicht vorkommt und ihre Ableitungen $\partial\Phi/\partial y_{\mathfrak{b}}$ nur in ihren Verhältnissen, also etwa eine Gleichung

$$F(y_0, y_1, \dots y_n, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_n) = 0,$$

wobei

$$\psi_{\mathfrak{c}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{c}}} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}, \quad \mathfrak{c} = 1, 2, \dots n$$

gesetzt ist, die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung.

Hiermit ist gezeigt, daß jedes Feld im Sinne unserer Definition, als Mannigfaltigkeit im Gebiet der $n+1$ Größen $y_{\mathfrak{b}}$ aufgefaßt, erhalten werden kann, indem man eine Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung einem Festwerte gleichsetzt.

Sei umgekehrt $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n)$ irgend eine Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung. Dann bestimme man wieder an irgend einer Stelle der Mannigfaltigkeit

$$\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = C = \text{const.} \tag{14}$$

aus den $n + r + 1$ Gleichungen

$$\varphi_{\mathfrak{a}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \dots : \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \Omega_0 : \Omega_1 : \dots : \Omega_n \tag{15}$$

mit Ausschluß einer von ihnen $n + r$ Größen, nämlich die n Verhältnisse der Größen $y'_{\mathfrak{b}}$ und die r Verhältnisse der Größen $\lambda_{\mathfrak{a}}$; bei der Bedeutung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung, die die Größe Φ erfüllt, gilt dann auch die letzte der Gleichungen (15) und die Beziehung (14) spielt zunächst keine Rolle; $y_0, \dots y_n$ können als Unabhängige betrachtet werden. Jeder Stelle im Gebiet dieser $n + 1$ Größen ist durch das mehrfache Verhältnis

$$y'_0 : y'_1 : \dots : y'_n = d\,y_0 : d\,y_1 : \dots : d\,y_n$$

eine Richtung zugeordnet, und durch jede Stelle geht demnach, d. h. vermöge der Integration eines simultanen Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen den $n + 1$ Größen y, eine einfache Mannigfaltigkeit, für die die Gleichungen (15) bei passender Wahl der Größen $\lambda_{\mathfrak{a}}$ gelten. Diese ist, wie wir zeigen wollen, Extremale der Mayerschen Aufgabe $\varphi_{\mathfrak{a}} = 0$.

In der Tat kann man nach (15) setzen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{b}}} = \mu\,\Omega_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}}^{0, r} \mu\,\lambda_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y'_{\mathfrak{b}}};$$

mit der Bezeichnung

$$\mu\,\lambda_{\mathfrak{a}} = \lambda^0_{\mathfrak{a}}, \quad \Omega^0 = \sum_{\mathfrak{a}}^{0, r} \lambda^0_{\mathfrak{a}}\,\varphi_{\mathfrak{a}}, \quad \Omega^0_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}}^{0, r} \lambda^0_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y'_{\mathfrak{b}}}$$

ergeben sich dann die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{b}}} = \Omega^0_{\mathfrak{b}}, \quad \frac{\partial \Omega^0_{\mathfrak{b}}}{\partial y_{\mathfrak{c}}} = \frac{\partial \Omega^0_{\mathfrak{c}}}{\partial y_{\mathfrak{b}}}, \tag{16}$$

in denen wegen der Homogeneität der Funktionen $\varphi_{\mathfrak{a}}$ nur die Verhältnisse der $y'_{\mathfrak{b}}$ vorkommen; wegen eben dieser Eigenschaft gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial y_{\mathfrak{c}}} = \sum_{\mathfrak{b}}^{0, n} \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_{\mathfrak{b}}\,\partial y_{\mathfrak{c}}} y'_{\mathfrak{b}}, \quad \sum_{\mathfrak{b}}^{0, n} y'_{\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_{\mathfrak{b}}\,\partial y'_{\mathfrak{c}}} = 0. \tag{17}$$

Nun werde der in den Größen y' waltende Parameter t etwa als Wert einer Funktion des Ortes $t\,(y_0, y_1, \ldots y_n)$ aufgefaßt; dann sind auch die Größen $y'_\mathfrak{b} = d\,y_\mathfrak{b}/d\,t$ Funktionen des Ortes und der Verhältnisse $y'_\mathfrak{b} : y'_\mathfrak{c}$, also schlechthin Funktionen der Größen $y_0, \ldots y_n$, die man nach diesen differenzieren kann; man kann daher folgende Gleichungen mit Berücksichtigung der Beziehungen (16) ansetzen:

$$\frac{\partial \Omega_0{}^0}{\partial y_0} = \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_0\,\partial y_0} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_0\,\partial y'_0}\frac{\partial y'_0}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_0\,\partial y'_1}\frac{\partial y'_1}{\partial y_0} + \cdots$$

$$\frac{\partial \Omega_0{}^0}{\partial y_1} = \frac{\partial \Omega_1{}^0}{\partial y_0} = \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_1\,\partial y_0} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_1\,\partial y'_0}\frac{\partial y'_0}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_1\,\partial y'_1}\frac{\partial y'_1}{\partial y_0} + \cdots$$

. . . .

$$\frac{\partial \Omega_1{}^0}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_1\,\partial y_1} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_1\,\partial y'_0}\frac{\partial y'_0}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_1\,\partial y'_1}\frac{\partial y'_1}{\partial y_1} + \cdots$$

$$\frac{\partial \Omega_1{}^0}{\partial y_2} = \frac{\partial \Omega_2{}^0}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_2\,\partial y_1} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_2\,\partial y'_0}\frac{\partial y'_0}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_2\,\partial y'_1}\frac{\partial y'_1}{\partial y_1} + \cdots$$

usf. Hieraus folgt, indem man von der ersten Gleichung (17) ausgeht,

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial y_0} = \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial^2 \Omega^0}{\partial y'_\mathfrak{b}\,\partial y_0} y'_\mathfrak{b} = \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial \Omega_0{}^0}{\partial y_\mathfrak{b}} y'_\mathfrak{b} = \frac{d\,\Omega_0{}^0}{d\,t};$$

denn auf der rechten Seite verschwinden die Glieder mit dem Faktor $\partial y'_\mathfrak{b}/\partial y_0$ wegen der zweiten Gleichung (17). Ebenso findet man allgemein

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial y_\mathfrak{b}} = \frac{d\,\Omega^0_\mathfrak{b}}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial \Omega^0}{\partial y'_\mathfrak{b}}\right).$$

Da nun Ω^0 ein Ausdruck von der Form des vorher betrachteten Ω ist, nur mit vielleicht anderen Multiplikatoren gebildet, so ist gezeigt, daß die konstruierten einfachen Mannigfaltigkeiten Extremalen der ursprünglichen Variationsaufgabe

$$\delta\,y_0 = 0, \quad \varphi_\mathfrak{a} = 0$$

sind.

Sie erfüllen im besonderen die Gleichungen

$$\Omega^0 = 0, \quad \sum_\mathfrak{b}^{0,n} \Omega^0_\mathfrak{b}\, y'_\mathfrak{b} = 0,$$

also nach (16) auch

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\mathfrak{b}}\, y'_\mathfrak{b} = 0, \quad \frac{d\,\Phi}{d\,t} = 0;$$

längs jeder von ihnen ist also $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = \text{const.} = C$; die hierdurch definierte n-stufige Mannigfaltigkeit ist also von ∞^{n-1} Extremalen bedeckt und diese bilden ein Feld, da beim Fortgang längs der von ihnen erfüllten Mannigfaltigkeit die nach (16) gleichwertigen Beziehungen

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{b}}} \delta y_{\mathfrak{b}} = 0, \quad \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}^0 \, \delta y_{\mathfrak{b}} = 0$$

gelten, deren letztere nach Nr. I das Feld kennzeichnet.

Also kurz: Ist $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n)$ eine Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung, so kann im Gebiet der $n+1$ Größen $y_0, y_1, \dots y_n$ jeder n-stufige Raum $\Phi = \text{const.}$ als Extremalenfeld dargestellt werden.

Projiziert man das Feld auf den n-stufigen Raum der Größen $y_1, \dots y_n$, so werden in diesem die Projektionen der Räume $y_0 = \text{const.}$ von den n-stufigen Extremalen im engeren Sinne transversal geschnitten, d. h. so, daß die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{c}}^{1,n} \Omega_{\mathfrak{c}}^0 \, \delta y_{\mathfrak{c}} = 0$$

gilt, wenn $\delta y_0 = 0$ ist. Das entspricht dann dem Umstand, daß im zweiten Abschnitt, wenn U eine Lösung der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung war, die Linien $U = \text{const.}$ von den Extremalen eines Feldes transversal geschnitten wurden.

III. Die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung wurde oben in der Form

$$\begin{gathered} F(y_0, y_1, \dots y_n, z_1, z_2, \dots z_n) = 0, \\ z_{\mathfrak{p}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{p}}} : \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}, \quad \mathfrak{p} = 1, 2, \dots n \end{gathered} \tag{18}$$

geschrieben, so daß $n+1$ die Anzahl der Unabhängigen ist. Man kann diese um Eins vermindern, indem man durch die zusammenbestehenden Gleichungen

$$\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) - c = 0, \quad y_0 = \psi(y_1, y_2, \dots y_n, c) \tag{19}$$

ein Funktionszeichen ψ erklärt; offenbar ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_{\mathfrak{p}}} = z_{\mathfrak{p}}, \tag{20}$$

und die Gleichung (18) wird

$$F\left(\psi, y_1, y_2, \dots y_n, \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \dots \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\right) = 0. \tag{21}$$

Von ihr sei ψ irgend eine mit einem Festwert c behaftete Lösung; wenn dann das Funktionszeichen Φ durch das Zusammenbestehen der Gleichungen (19) erklärt wird, so gelten wieder die Gleichungen (20), und Φ ist eine Lösung der Gleichung (18). Die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung kann also durch die Forderung ersetzt werden, eine Lösung der Gleichung (21) zu finden, die einen willkürlichen Festwert enthält.

In dem besonderen Falle, daß y_0 in den Ausdrücken φ_α nicht vorkommt, kommt ψ selbst in der Gleichung (21) nicht vor, so daß, wenn ψ eine Lösung ist, sofort $\psi - c$ eine mit einem Festwert behaftete Lösung ist, also $\Phi = y_0 - \psi$ gesetzt werden kann. Das ist der Fall der Lagrangeschen Aufgabe nach § 43, bei der man etwa setzt

$$\varphi_0 = -y_0' + f(y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n'),$$
$$\varphi_\mathfrak{p} = \varphi_\mathfrak{p}(y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n'), \quad \mathfrak{p} = 1, 2, \dots r,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = 0, \quad \Omega_0 = -\lambda_0, \quad \lambda_0' = 0, \quad \lambda_0 = 1,$$
$$\Omega = -y_0' + f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r = -y_0' + F,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = -1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \dots \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial \psi}{\partial y_n},$$

und die in ψ geschriebene Jacobi-Hamiltonsche Gleichung entsteht durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r, y_2'/y_1', y_3'/y_1', \dots y_n'/y_1'$, also von $n + r - 1$ Größen aus den $n + r$ Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_\mathfrak{e}} = \frac{\partial F}{\partial y_\mathfrak{e}'}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \dots \varphi_r = 0, \mathfrak{e} = 1, 2, \dots n.$$

Unter diese Vorschrift fallen die Jacobi-Hamiltonschen Verfahren der früheren Abschnitte.

Im allgemeinen ist beim Übergang von Φ zu ψ die Veränderliche y_0 bevorzugt. Genau die entsprechenden Betrachtungen lassen sich für jede der Größen $y_1, y_2, \dots y_n$ anstellen, so daß man im allgemeinen n verschiedene Gestalten der Jacobi-Hamiltonschen Methode erhält.

IV. Als Beispiel betrachten wir die kürzeste Linie im Raume; man fordert

$$\delta \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \delta u = 0;$$

als Mayersche Aufgabe ausgesprochen, ergibt diese Forderung

$$\Omega = \lambda (u' - \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}), \quad n = 3, \quad r = 0;$$

längs der Extremalen findet man, indem man $u = y_0$, $x = y_1$, $y = y_2$, $z = y_3$ setzt,

$$\lambda' = 0, \quad \left(\frac{\lambda x'}{u'}\right)' = \left(\frac{\lambda y'}{u'}\right)' = \left(\frac{\lambda z'}{u'}\right)' = 0.$$

Man kann $\lambda = 1$ setzen, und wenn man die Extremalen aus dem vierstufigen $xyzu$-Raum auf den gewöhnlichen xyz-Raum projiziert, erhält man Gerade mit aufgetragener Länge, indem die vierte Koordinate gewissermaßen durch eine angeschriebene Zahl ersetzt wird. Die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} : \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -1 : \frac{x'}{u'} : \frac{y'}{u'} : \frac{z'}{u'},$$

also

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2,$$

und, wenn $\Phi = -u + \psi(x, y, z)$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x'}{u'}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y'}{u'}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{z'}{u'}. \tag{22}$$

Die auf den dreistufigen xyz-Raum projizierten Geraden eines Feldes werden also von den Flächen $\psi = \text{const.}$ oder $u = \text{const.}$ senkrecht geschnitten.

Trägt man auf den Normalen einer Fläche $\psi = \text{const.}$ die Längen, gemessen von einer anderen solchen Fläche, als u-Koordinaten auf, so erhält man eine Schar von dreistufigen Gebieten im $xyzu$-Raum, die die kennzeichnende Gleichung des Feldes erfüllen: die Gleichungen (22) geben

$$\delta u = \psi_x \,\delta x + \psi_y \,\delta y + \psi_z \,\delta z = \frac{x'}{u'}\,\delta x + \frac{y'}{u'}\,\delta y + \frac{z'}{u'}\,\delta z$$

oder auch

$$\Omega_{u'}\,\delta u + \Omega_{x'}\,\delta x + \Omega_{y'}\,\delta y + \Omega_{z'}\,\delta z = 0.$$

V. Um einzusehen, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung als Jacobi-Hamiltonsche Gleichung einer Mayerschen Aufgabe aufgefaßt werden kann, machen wir der Gleichung (18) entsprechend den Ansatz

$$\begin{aligned} &p_0\,dy_0 + p_1\,dy_1 + \cdots + p_n\,dy_n = 0, \\ &F(y_0, y_1, \ldots y_n, p_0, p_1, \ldots p_n) = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

und F sei bezüglich der Größen p homogen von erster Stufe. Wir setzen dann $\partial F/\partial p_{\mathfrak{b}} = P_{\mathfrak{b}}$ und betrachten im $(n+1)$-stufigen Raume der Größen $y_0, y_1, \ldots y_n$ den Kegel $\mathfrak{K}$, dessen Spitze ein allgemeiner Punkt $(y_0, \ldots y_n)$ ist, und dessen Erzeugende durch die Gleichungen

(24) $$\frac{\mathfrak{y}_0 - y_0}{P_0} = \frac{\mathfrak{y}_1 - y_1}{P_1} = \cdots = \frac{\mathfrak{y}_n - y_n}{P_n}$$

mit $\mathfrak{y}$ als laufenden Koordinaten definiert werden. Die zweite Gleichung (23) ergibt nun, wenn $y_0, \ldots y_n$ festgehalten werden,

$$P_0\, d p_0 + P_1\, d p_1 + \cdots + P_n\, d p_n = 0,$$

und da wegen der Homogeneität der Funktion F auch die Gleichung

$$P_0 p_0 + P_1 p_1 + \cdots + P_n p_n = F = 0$$

gilt, folgt in demselben Sinne, d. h. $d y_{\mathfrak{b}} = 0$ gesetzt,

(25) $$p_0\, d P_0 + p_1\, d P_1 + \cdots + p_n\, d P_n = 0.$$

Aus den Gleichungen (24) folgt hiernach

(26) $$p_0 (\mathfrak{y}_0 - y_0) + p_1 (\mathfrak{y}_1 - y_1) + \cdots + p_n (\mathfrak{y}_n - y_n) = 0;$$

diese Gleichung stellt einen n-stufigen Raum R_n im Gebiet der $n+1$ Größen $y_{\mathfrak{b}}$ dar, der also die Mannigfaltigkeit (24), eine Gerade, eine Erzeugende des Kegels $\mathfrak{K}$, wie wir sagen können, enthält. Aber der allgemeine Raum R_n enthält auch die der Geraden (24) benachbarten Erzeugenden des Kegels $\mathfrak{K}$; denn ist eine solche

$$\frac{\mathfrak{y}_0 - y_0}{P_0 + d P_0} = \frac{\mathfrak{y}_1 - y_1}{P_1 + d P_1} = \cdots = \frac{\mathfrak{y}_n - y_n}{P_n + d P_n},$$

so ergibt die Gleichung (25) wiederum das Ergebnis (26).

Durch die Gleichungen (24) werden nun etwa ∞^s verschiedene Erzeugende des Kegels $\mathfrak{K}$ definiert, wobei die Zahl s verschieden ausfallen kann; die Wertmannigfaltigkeit der Verhältnisse $P_0 : P_1 : \ldots : P_n$ braucht ja keineswegs immer n zu sein. An Punkten enthält die Kegelfläche dann ∞^{s+1}, wird also durch $n + 1 - (s + 1) = n - s$ Gleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt, die in die Form

$$\varphi_{\mathfrak{e}} (y_0, y_1, \ldots y_n, \mathfrak{y}_0 - y_0, \ldots \mathfrak{y}_n - y_n) = 0, \quad \mathfrak{e} = 0, 1, \ldots n - s - 1$$

gebracht werden können, wobei die Funktionen $\varphi_{\mathfrak{e}}$ in den Größen $\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}} - y_{\mathfrak{b}}$ homogen von erster Stufe sind; denn mit dem Punkte $\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}}$ liegt der Punkt $\bar{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{b}}$ auf der Kegelfläche $\mathfrak{K}$, wenn die Proportion

$$\mathfrak{y}_0 - y_0 : \mathfrak{y}_1 - y_1 : \ldots = \bar{\mathfrak{y}}_0 - y_0 : \bar{\mathfrak{y}}_1 - y_1 : \ldots$$

gilt. Jede einzelne Gleichung $\varphi_\mathfrak{e} = 0$ stellt dann eine Kegelfläche mit ∞^{n-1} Erzeugenden dar; die allen diesen Kegeln gemeinsamen Erzeugenden sind also diejenigen des Kegels $\mathfrak{K}$. Benachbarte Erzeugende des letzteren sind auch benachbarte Erzeugende jedes Kegels $\varphi_\mathfrak{e} = 0$, und für diese gilt die Gleichung des Tangentialraumes $n$ter Stufe

$$(\mathfrak{y}_0 - y_0)\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial \mathfrak{y}_0} + (\mathfrak{y}_1 - y_1)\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial \mathfrak{y}_1} + \cdots + (\mathfrak{y}_n - y_n)\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial \mathfrak{y}_n} = 0$$

oder auch, wenn wir

$$\mathfrak{y}_\mathfrak{b} - y_\mathfrak{b} = y'_\mathfrak{b}, \quad \varphi_\mathfrak{e} = \varphi_\mathfrak{e}(y_0, \ldots y_n, y'_0, \ldots y'_n)$$

setzen,

$$(27) \qquad (\mathfrak{y}_0 - y_0)\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial y'_0} + (\mathfrak{y}_1 - y_1)\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial y'_1} + \cdots + (\mathfrak{y}_n - y_n)\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial y'_n} = 0.$$

Diese sämtlichen $n - s$ ebenen Räume $n$ter Stufe gehen also durch die einer bestimmten Erzeugenden des Kegels $\mathfrak{K}$ benachbarten hindurch, ebenso wie dies für den Raum (26) schon feststeht.

Nun liegen ∞^s Gerade auf dem Kegel $\mathfrak{K}$; unter den einer bestimmten von ihnen benachbarten können also $s + 1$ linear unabhängige ausgesucht werden, und durch diese gehen im $(n + 1)$-stufigen Raume von den ∞^n durch die Spitze des Kegels gehenden n-stufigen ebenen Räumen $\infty^{n-(s+1)}$, die ihrerseits durch $n - s$ linear unabhängige von ihnen linear dargestellt werden können, z. B. durch die Räume (27), wenn wir sie linear unabhängig annehmen. Im besonderen gilt dies von dem Raume (26), der ja die einer bestimmten Erzeugenden des Kegels $\mathfrak{K}$ benachbarten enthält; man kann also solche Faktoren $\lambda_\mathfrak{e}$ einführen, daß bei unabhängigen $\mathfrak{y}$ die folgende Gleichung besteht:

$$\sum_\mathfrak{b}^{0,n} p_\mathfrak{b}(\mathfrak{y}_\mathfrak{b} - y_\mathfrak{b}) = \sum_\mathfrak{e}^{0,n-1-1} \lambda_\mathfrak{e} \sum_\mathfrak{b}^{0,n} (\mathfrak{y}_\mathfrak{b} - y_\mathfrak{b})\frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial y'_\mathfrak{b}};$$

aus dieser folgt offenbar

$$p_\mathfrak{b} = \sum_\mathfrak{e}^{0,n-s-1} \lambda_\mathfrak{e} \frac{\partial \varphi_\mathfrak{e}}{\partial y'_\mathfrak{b}}.$$

Wenn wir nun noch $n - s = r + 1$ und den Gleichungen (23) entsprechend

$$p_\mathfrak{b} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n$$

setzen, so haben wir genau dieselbe Funktion Φ eingeführt, die bei der Mayerschen Aufgabe

$$\varphi_{\mathfrak{a}}(y_0, y_1, \dots y_n, y'_0, y'_1, \dots y'_n) = 0, \quad \mathfrak{a} = 0, 1, \dots r$$

als Unbekannte der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung erscheint: man setzte ja

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{a}}^{0, r} \lambda_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}}{\partial y'_{\mathfrak{b}}}$$

und eliminierte mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen die Größen λ und y'.

Hiermit ist auch ein bestimmtes Verfahren gegeben, um die gegebene partielle Differentialgleichung als Jacobi-Hamiltonsche darzustellen: die zugehörige Mayersche Aufgabe findet man durch den Eliminationsprozeß, der zu den Gleichungen $\varphi_{\mathfrak{c}} = 0$ führt. Nach der Anzahl dieser Gleichungen zerfallen die partiellen Differentialgleichungen in wohlabgegrenzte Klassen.

§ 45.

Hinreichende Bedingungen des Extrems und Brennpunkte.

Bei der Mayerschen Extremsaufgabe vergleicht man ein Stück $\mathfrak{C}$ einer Extremale mit einer anderen einfachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ im Gebiet der $n+1$ Größen $y_{\mathfrak{b}}$, längs deren diese Größen die Werte $Y_{\mathfrak{b}}$ haben und Funktionen einer Unabhängigen τ sein mögen, die die $r+1$ Gleichungen

$$\varphi_{\mathfrak{a}}\left(Y_0, Y_1, \dots Y_n, \frac{dY_0}{d\tau}, \frac{dY_1}{d\tau}, \dots \frac{dY_n}{d\tau}\right) = 0, \quad \mathfrak{a} = 0, 1, \dots r$$

erfüllen. Es handelt sich darum, zu zeigen, daß, wenn man y_0 und Y_0 in dem Endpunkt des Extremalenstücks $\mathfrak{C}$ und dem der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ betrachtet, die Differenz $y_0 - Y_0$ bei allen in gewisser Weise zu kennzeichnenden Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{L}$ ein festes Vorzeichen besitzt, womit dann der durch die Extremale $\mathfrak{C}$ gegebene Wert y_0 als Extrem erscheinen würde.

Die Extremale $\mathfrak{C}$ sei in ein Feld eingebettet, auf das sich die Zeichen $y_{\mathfrak{b}}$ und $y'_{\mathfrak{b}}$ beziehen mögen; in ihm sei wieder mit Festwerten a

$$y_{\mathfrak{b}} = \theta_{\mathfrak{b}}(t, a_1, a_2, \dots a_{n-1}), \quad \mathfrak{b} = 0, 1, \dots n.$$

Die Weierstraßsche Konstruktion besteht hier darin, daß, wenn möglich, zu jedem auf $\mathfrak{L}$ erreichten Wertsystem $Y_{\mathfrak{b}}$ eine

Extremale des Feldes und eine ihr angehörige Stelle gesucht wird, für welche die n Gleichungen

$$y_{\mathfrak{c}} = Y_{\mathfrak{c}}, \quad \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n$$

gelten, so daß $y_{\mathfrak{c}}$ und y_0 als $n+1$ Funktionen von τ erscheinen und die n Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{d\, y_{\mathfrak{c}}}{d\,\tau} = \frac{d\, Y_{\mathfrak{c}}}{d\,\tau}$$

hinzugefügt werden können, während $y_0 - Y_0$ im allgemeinen von Null verschieden bleibt. Da nun das Wertsystem $y_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n$) dem Felde angehört, so bewirkt die Änderung von τ einen Fortgang längs des Feldes, und in der für diesen Fortgang kennzeichnenden Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, \delta\, y_{\mathfrak{b}} = 0,$$

in der die Größen $\Omega_{\mathfrak{b}}$ natürlich mit den auf das Feld bezüglichen Werten $y_{\mathfrak{b}}$ und $y'_{\mathfrak{b}}$ zu bilden sind, kann man $\delta\, y_{\mathfrak{b}} = d\, y_{\mathfrak{b}}/d\,\tau \,.\, d\,\tau$ setzen, also

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}} \frac{d\, y_{\mathfrak{b}}}{d\,\tau} = 0.$$

Benutzt man die n Gleichungen (1), so folgt hieraus

$$(2) \qquad \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}} \frac{d\, Y_{\mathfrak{b}}}{d\,\tau} + \Omega_0 \left(\frac{d\, y_0}{d\,\tau} - \frac{d\, Y_0}{d\,\tau}\right) = 0.$$

Da ferner schon aus Homogeneitätsgründen die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, y'_{\mathfrak{b}} = 0$$

besteht, kann man den Ausdruck

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}} \frac{d\, Y_{\mathfrak{b}}}{d\,\tau} = \sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}} \left(\frac{d\, Y_{\mathfrak{b}}}{d\,\tau} - y'_{\mathfrak{b}}\right)$$

auffassen als den Inbegriff der linearen Glieder in der Taylorschen Entwicklung der Größe

$$\mathfrak{Q}\left(y, \frac{d\,Y}{d\,\tau}\right) = \Omega\left(y, \frac{d\,Y}{d\,\tau}\right) - \Omega\,(y, y'),$$

wobei natürlich jeder Buchstabe y, Y die mit den $n+1$ Zeigern $0, 1, \ldots n$ versehenen ihm gleichen vertreten soll; man entwickelt nach den Differenzen $\frac{d Y_\mathfrak{b}}{d \tau} - y'_\mathfrak{b}$. Hieraus folgt, daß die Größe

$$\Omega\left(y, \frac{d Y}{d \tau}\right) - \sum_{\mathfrak{b}}^{0, n} \Omega_\mathfrak{b} \frac{d Y_\mathfrak{b}}{d \tau} = \mathfrak{G}\left(y, y', \frac{d Y}{d \tau}\right)$$

als Restglied jener Entwicklung und quadratische Form der Größen $y' - d Y / d \tau$ dargestellt werden kann, wodurch es möglich wird, das Vorzeichen dieser Größe zu diskutieren.

Jetzt ergibt die Gleichung (2)

$$(3) \qquad \Omega_0 \frac{d (y_0 - Y_0)}{d \tau} = \mathfrak{G} - \Omega\left(y, \frac{d Y}{d \tau}\right) + \Omega\left(Y, \frac{d Y}{d \tau}\right),$$

da das zuletzt hinzugefügte Glied verschwindet. Da ferner die Größen $y_\mathfrak{b}$ bis auf y_0 mit den gleichbezifferten Y übereinstimmen, so kann man setzen

$$\Omega\left(Y, \frac{d Y}{d \tau}\right) - \Omega\left(y, \frac{d Y}{d \tau}\right) = -(Y_0 - y_0)\Psi,$$

und die Größe Ψ ist endlich, solange die Differenz $(y_0 - Y_0)$ eine gewisse Schranke nicht übersteigt. Beschränkt man daher den Extremalenbogen $\mathfrak{E}$ durch die Annahme, Ω_0 verschwinde nicht auf ihm, so kann man die Gleichung (3) in der Form

$$\frac{d}{d \tau}\left\{(y_0 - Y_0) e^{\int \Psi \Omega_0^{-1} d \tau}\right\} = \frac{\mathfrak{G} e^{\int \Psi \Omega_0^{-1} d \tau}}{\Omega_0}$$

schreiben. Diese Gleichung gibt Aufschluß über das Vorzeichen der Größe $y_0 - Y_0$ am Ende der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$, wenn $\mathfrak{G}$ längs ihrer ein festes Vorzeichen hat und nicht überall verschwindet, wenn ferner $y_0 - Y_0$ am Anfangspunkt von $\mathfrak{L}$ verschwindet oder das Vorzeichen des Produktes $\Omega_0 \mathfrak{G}$ hat und absolut genommen längs der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ unter einer gewissen Schranke bleibt. Die Gleichung zeigt, daß dann das Vorzeichen der Größen $y_0 - Y_0$ und $\Omega_0 \mathfrak{G}$ auch am Endpunkt von $\mathfrak{L}$ dasselbe ist. Damit ist das Extrem nachgewiesen.

Die Aufgabe des zweiten Abschnitts würde in unseren jetzigen Bezeichnungen lauten:

$$y_0 = \int F(y_1, y_2, y'_1, y'_2)\, dt, \quad \varphi_1 = -y'_0 + F;$$

man kann $\lambda = 1$ nehmen und findet dann $\Omega_0 = -1$. Die Differenz $y_0 - Y_0$ ergibt sich als positiv, wenn $-\mathfrak{G}$ positiv ist, d. h. dem Maximum entspricht ein negativer Wert $\mathfrak{G}$, ganz wie früher.

II. Die durchgeführte Schlußreihe beruht auf der Möglichkeit der Weierstraßschen Konstruktion, und diese kann mittels des ersten Einbettungssatzes (§ 11) als möglich nachgewiesen werden, wenn eine Bedingung erfüllt ist, die wir sachgemäß als die Jacobische Bedingung bezeichnen können.

Man setze

$$\Delta_0 = \Delta_0(t, a_1, a_2, \dots a_{n-1}) = \frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n)}{\partial(t, a_1, a_2, \dots a_{n-1})}$$

und nehme an, auf der Extremale $\mathfrak{E}$ sei

$$a_1 = a_1^0, \quad a_2 = a_2^0, \quad \dots \quad a_{n-1} = a_{n-1}^0.$$

Wenn dann, und das ist die Jacobische Bedingung, die Größe $\Delta_0(t, a_1^0, \dots a_{n-1}^0)$ längs der betrachteten einstufigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$ von Null verschieden ist, so kann die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}'$, die durch die Gleichungen

$$y_\mathfrak{c} = \theta_\mathfrak{c}(t, a_1^0, a_2^0, \dots a_{n-1}^0), \quad \mathfrak{c} = 1, 2, \dots n$$

im Gebiet der Größen $y_1, y_2, \dots y_n$ definiert wird und als eine Projektion von $\mathfrak{E}$ angesehen werden kann, nach dem ersten Einbettungssatze mit einem solchen Gebiet $\mathfrak{G}$ umgeben werden, daß jede Stelle desselben auf genau einer der Mannigfaltigkeiten $y_\mathfrak{c} = \theta_\mathfrak{c}(t, a_1, \dots a_{n-1})$ liegt, daß also die dieser Gleichung entsprechenden Werte $t, a_1, \dots a_{n-1}$ eindeutige Funktionen des Ortes im Gebiet der Größen $y_1, \dots y_n$ sind, und regulär, da diese Eigenschaft nach Voraussetzung den Funktionen $\theta_\mathfrak{c}$ zukommt. Gebe nun die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$, das wollen wir annehmen, nur Wertsysteme $Y_1, \dots Y_n$, die im Innern des Gebiets $\mathfrak{G}$ liegen; dann erscheinen die durch die Gleichungen $Y_\mathfrak{c} = \theta_\mathfrak{c}(t, a_1, \dots a_{n-1})$ definierten Werte $t, a_1, \dots a_{n-1}$ als reguläre Funktionen von τ, soweit $Y_\mathfrak{c}$ diese Eigenschaft haben, und die Weierstraßsche Konstruktion mit ihren Folgen ist gesichert.

Mittels dieser Grundgedanken kann jedes Feld benutzt werden, um bei einer bestimmten Art von Extremsaufgaben hinreichende Bedingungen des Extrems aufzustellen. Die Aufgabe, um die es sich bei einem gegebenen Felde handeln kann, ist in folgender Weise zu formulieren. Werde auf dem Felde etwa durch eine Gleichung $t_0 = T(a_1, a_2, \dots a_{n-1})$ eine $(n-1)$-stufige Mannigfaltigkeit von Stellen

$$y_\mathfrak{b} = \theta_\mathfrak{b}(t_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}),$$

die wir $\mathfrak{M}$ nennen, herausgehoben, der die Anfangsstelle 0 des Bogens $\mathfrak{E}$ angehöre; dann sucht man das Extrem der Größe y_0

an der Stelle $y_{\mathfrak{c}} = y_{\mathfrak{c}}^{(1)}$, das von irgend einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ geliefert wird, die an dem Gebiet $\mathfrak{M}$ beginnt, und unter Umständen noch gewissen Beschränkungen unterworfen wird. Damit ist im Sinne des § 42 die Annahme $r = s$ gemacht; Größen $y_{\mathfrak{c}}$, deren Endwerte verfügbar bleiben, kommen nicht vor.

III. Neben der Determinante Δ_0 betrachten wir die ähnlich gebildeten

$$\Delta_{\mathfrak{b}} = \frac{\partial(\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_{\mathfrak{b}-1}, \theta_{\mathfrak{b}+1}, \ldots \theta_n)}{\partial(t, a_1, a_2, \ldots a_{n-1})},$$

die zu jener in einfachen Beziehungen stehen. Aus der das Feld kennzeichnenden Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} \Omega_{\mathfrak{b}}\, \delta y_{\mathfrak{b}} = 0$$

folgen nämlich, wenn für δ eines der Operationszeichen

$$dt\frac{\partial}{\partial t}, \quad da_1\frac{\partial}{\partial a_1}, \quad \ldots\; da_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$$

genommen wird, die Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{c}}^{1,n} \Omega_{\mathfrak{c}} \frac{\partial \theta_{\mathfrak{c}}}{\partial t} = -\Omega_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial t},$$

$$\sum_{\mathfrak{c}}^{1,n} \Omega_{\mathfrak{c}} \frac{\partial \theta_{\mathfrak{c}}}{\partial a_{\mathfrak{e}}} = -\Omega_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial a_{\mathfrak{e}}}, \qquad \mathfrak{e} = 1, 2, \ldots n-1.$$

Addiert man daher in der Determinante

$$\Omega_1 \Delta_0 = \begin{vmatrix} \Omega_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial t}, & \Omega_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial a_1}, & \cdots & \Omega_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial a_{n-1}} \\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial a_1}, & \cdots & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial a_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\theta_n}{\partial t}, & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial a_1}, & \cdots & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial a_{n-1}} \end{vmatrix}$$

zur ersten Zeile die zweite mit Ω_2 vervielfacht, die dritte mit Ω_3 vervielfacht usf., so ergibt sich

$$\Omega_1 \Delta_0 = -\Omega_0 \Delta_1;$$

ähnlich würde man allgemein erhalten

$$(4) \qquad \Omega_{\mathfrak{b}} \Delta_0 = (-1)^{\mathfrak{b}}\, \Omega_0 \Delta_{\mathfrak{b}}.$$

Führen wir daher für die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ die neue Voraussetzung ein, daß auf ihr alle Größen $\Omega_{\mathfrak{b}}$ von Null verschieden sind, so verschwinden die sämtlichen Determinanten $\Delta_{\mathfrak{b}}$ nur gleichzeitig. Beginnt $\mathfrak{C}$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, so nennen wir den ersten von $\mathfrak{M}$ ausgehend erreichten Punkt, in welchem $\Delta_{\mathfrak{b}} = 0$ ist, einen Brennpunkt der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$.

Wenn in ihm $t = t_1$ ist und die Ungleichung

$$\frac{\partial \Delta_0 (t, a_1^0, \ldots a_{n-1}^0)}{\partial t}\Bigg|^{t_1} \neq 0$$

gilt, kann man in der Umgebung des Wertsystems $a_1 = a_1^0, \ldots a_{n-1} = a_{n-1}^0$ die Größe t so als Funktion $\mathfrak{t}(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ bestimmen, daß immer

$$(5) \qquad \Delta_0 (\mathfrak{t}, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0$$

ist. Dann wird durch die Gleichungen

$$y_{\mathfrak{b}} = \theta_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{t}, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}), \quad \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n$$

eine $(n-1)$-stufige Mannigfaltigkeit von Brennpunkten im Gebiet der $n+1$ Größen $y_{\mathfrak{b}}$ definiert, aus denen wir eine einfache Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$ aussondern wollen.

In einem jener ∞^{n-1} Brennpunkte längs der Extremale, auf der er liegt, fortgehend, ist t um dt zu vermehren, $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ ungeändert zu lassen; längs irgend einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$ fortgehend sind t und $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ zugleich um Differentiale zu vermehren, und zwar t um das der Gleichung (5) gemäß bestimmte Differential $d\mathfrak{t}$. Jetzt suchen wir zu erreichen, daß $\mathfrak{E}$ in jedem Punkte von der zugehörigen Extremale, auf der dieser Punkt Brennpunkt ist, berührt werde; das gibt die Proportion

$$(6) \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial t} : \cdots : \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial t} = d\theta_1 : \ldots : d\theta_{n-1},$$

wobei gesetzt ist

$$d\theta_{\mathfrak{b}} = \frac{\partial \theta_{\mathfrak{b}}}{\partial t} d\mathfrak{t} + \frac{\partial \theta_{\mathfrak{b}}}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial \theta_{\mathfrak{b}}}{\partial a_{n-1}} da_{n-1},$$

$$d\mathfrak{t} = -\left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_{n-1}} da_{n-1}\right) : \frac{\partial \Delta_0}{\partial t}.$$

Diese Proportion bedeutet offenbar, indem man $t = \mathfrak{t}$ nach (5) eingesetzt denkt, $n-2$ homogene lineare Gleichungen zwischen den Differentialen $da_1, da_2, \ldots da_{n-1}$, die, wenn man durch irgend ein $da_{\mathfrak{e}}$ dividiert, $n-2$ gewöhnliche Differentialgleichungen ergeben, durch die die Größen $a_1, \ldots a_{n-1}$ als Funktionen einer von ihnen bei gegebenen Anfangswerten bestimmt werden; als Anfangswertsystem nehmen wir $a_1 = a_1^0, \ldots a_{n-1} = a_{n-1}^0$. Damit ist eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ festgelegt, die den Brennpunkt der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ enthält.

Die Proportion (6) läßt nun zwei Erweiterungen zu.

Schreiben wir nämlich die Gleichungen (6) in der Form

$$\mu \frac{\partial \theta_{\mathfrak{e}}}{\partial t} d t = \frac{\partial \theta_{\mathfrak{e}}}{\partial t} d t + \frac{\partial \theta_{\mathfrak{e}}}{\partial a_1} d a_1 + \cdots + \frac{\partial \theta_{\mathfrak{e}}}{\partial a_{n-1}} d a_{n-1},$$

$$\mathfrak{e} = 1, 2, \ldots n-1,$$

so ergibt die Gleichung $\Delta_0 = 0$, daß man auch $\mathfrak{e} = n$ setzen darf; das so erhaltene, in den Größen $(1-\mu) d t$, $d a_1$, $\ldots d a_{n-1}$ homogene System von n Gleichungen hat ja gerade die Determinante Δ_0. Weiter gilt jetzt nach (4) auch die Gleichung $\Delta_n = 0$; man kann also auch $\mathfrak{e} = 0$ setzen, da das mit den Werten $\mathfrak{e} = 0, 1, \ldots n-1$ erhaltene Gleichungssystem mit den Unbekannten $(1-\mu) d t$, $d a_1, \ldots d a_{n-1}$ die Determinante Δ_n hat. Damit ist gezeigt, daß man die Proportion (6) zu der inhaltreicheren

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} : \frac{\partial \theta_1}{\partial t} : \cdots : \frac{\partial \theta_n}{\partial t} = d \theta_0 : d \theta_1 : \cdots : d \theta_n \tag{7}$$

ergänzen kann, und so zeigt sie, daß die im Gebiet der Größen $y_0, \ldots y_n$ liegende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ in jedem Punkte von der Feldextremale, deren Brennpunkt er ist, berührt wird; $\mathfrak{G}$ ist eine Hülle einer gewissen Schar von einfach unendlich vielen Feldextremalen, zu denen $\mathfrak{C}$ gehört.

Sei nun $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$ irgend eine Stelle der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$, τ längs dieser ein unabhängiger Parameter; dann gehört diese Stelle auch einer Feldextremalen an, so daß man, indem man auf diese wie immer die Größen $y_{\mathfrak{b}}$, $y'_{\mathfrak{b}}$ bezieht, $y_{\mathfrak{b}} = Y_{\mathfrak{b}}$ setzen kann, und die Proportion (7) ergibt

$$y'_0 : y'_1 : \cdots : y'_{\mathfrak{e}} = \frac{d Y_0}{d \tau} : \frac{d Y_1}{d \tau} : \cdots \frac{d Y_n}{d \tau}.$$

Die Größen Y, $d Y / d \tau$ erfüllen also die Gleichungen

$$\varphi_{\mathfrak{a}}\left(Y_0, Y_1, \ldots Y_n, \frac{d Y_0}{d \tau}, \frac{d Y_1}{d \tau}, \ldots \frac{d Y_n}{d \tau}\right) = 0,$$

wenn noch angenommen wird, daß der Parameter τ in derselben Richtung wächst wie längs der berührenden Feldextremale der Parameter t, d. h. es sei immer

$$y'_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{d Y_{\mathfrak{b}}}{d \tau} \geqq 0,$$

was nötigenfalls bewirkt wird, indem man τ durch $-\tau$ ersetzt.

Jetzt ist leicht ersichtlich zu machen, wie das bei der Mayerschen Aufgabe $\varphi_{\mathfrak{a}} = 0$ geforderte Extrem der Größe y_0 bei vorgegebenen Endwerten aller Größen $y_1, \ldots y_n$ an der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$ aufhört. Seien auf dieser 1 und 2 zwei Brennpunkte auf Extremalen, die in den Stellen 0_1 und 0_2 von $\mathfrak{M}$ ausgehen und sei $\tau_1 < \tau_2$. Verfolgt man das Extremalenstück $0_1 1$ und das $\mathfrak{E}$-Stück 1 2, so hat man in ihm nach dem, was über den Sinn wachsender τ festgesetzt wurde, eine reguläre einstufige Mannigfaltigkeit, längs deren die Größe y_0, die von dem der Stelle 0_1 entsprechenden Anfangswertsystem ausgehend an der Stelle 2 erhalten wird, den Wert $Y_0 (\tau = \tau_2)$ annimmt. Genau denselben Wert erhält man aber an der Stelle 2, wenn man mit der Stelle 0_2 beginnend längs der Extremale $0_2 2$ fortschreitet; die definierten Wege $0_1 1 2$ und $0_2 2$ geben also denselben Wert von y_0, so daß die Extremale $0_2 2$ jedenfalls kein Extrem liefert, wenn man sie mit den an der Stelle 2 endigenden, auf $\mathfrak{M}$ beginnenden Mannigfaltigkeiten erster Stufe vergleicht.

Ist die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ein fester Punkt im Raume der $n + 1$ Größen $y_{\mathfrak{b}}$, so hört an einem Brennpunkt das Extrem der folgenden in gewissem Sinne einfachsten Mayerschen Aufgabe auf: Die gegebene Stelle $(y_0^0, y_1^0, \ldots y_n^0)$ mit einer Stelle $(y_0^1, y_1^1, \ldots y_n^1)$ gemäß den Gleichungen $\varphi_{\mathfrak{a}} = 0$ zu verbinden, so daß $y_1^1, \ldots y_n^1$ gegeben, y_0^1 ein Extrem sei. Die in § 42 eingeführten Zahlen r und s sind ja gleich.

IV. Um überhaupt die Mannigfaltigkeit der möglichen Felder zu übersehen, stellen wir die Anzahl der in der allgemeinsten Extremale verfügbaren Festwerte fest.

Erinnern wir uns zunächst der Identität

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} y'_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_{\mathfrak{b}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_{\mathfrak{b}}} \right) = 0, \ \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n,$$

so kann von den $n + 1$ Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_{\mathfrak{b}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_{\mathfrak{b}}} = 0$$

eine, etwa die zum Werte $\mathfrak{b} = n$ gehörige weggelassen werden, wenn $y'_n \neq 0$ ist. Bei dieser Annahme kann auch $y_n = x = t$ als Unabhängige eingeführt werden, so daß allgemein

$$y'_{\mathfrak{c}} = \frac{d y_{\mathfrak{c}}}{d x}, \quad \mathfrak{c} = 0, 1, \ldots n - 1$$

gesetzt wird, und man hat die $n+r+1$ Gleichungen

$$\varphi_\mathfrak{a} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_\mathfrak{c}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y'_\mathfrak{c}} = 0, \quad \mathfrak{a} = 0, 1, \ldots r.$$

Ersetzt man die ersten $r+1$ Gleichungen durch die allgemeineren

$$\frac{d\varphi_\mathfrak{a}}{dx} = 0,$$

so hat man $n+r+1$ Gleichungen, aus denen sich die ebenso vielen Größen $y''_\mathfrak{c}$, $\lambda'_\mathfrak{a}$ als Funktionen von x, $y_\mathfrak{c}$, $y'_\mathfrak{c}$, $\lambda_\mathfrak{a}$ ergeben; $y_\mathfrak{c}$ und λ ergeben sich also durch Integration als Funktionen von x und $2n+r+1$ Integrationskonstanten, etwa den $2n+r+1$ Anfangswerten der Größen $y_\mathfrak{c}$, $y'_\mathfrak{c}$, $\lambda_\mathfrak{a}$. Die $r+1$ Gleichungen $\varphi_\mathfrak{a} = 0$ führen aber die Anzahl jener Festwerte auf $2n$ zurück; da ferner die Multiplikatoren $\lambda_\mathfrak{a}$ immer mit einem willkürlichen Festwert vervielfacht werden können, ohne daß die Werte der $y_\mathfrak{c}$ sich ändern, so sind für die Extremale als einfache Mannigfaltigkeit im Gebiet der Größen $y_\mathfrak{b}$ oder x, $y_\mathfrak{c}$ nur $2n-1$ Festwerte wesentlich, etwa die Anfangswerte der n Größen $y_\mathfrak{c}$ und der $n-1$ Größen λ_0/λ_r, λ_1/λ_r, $\ldots$ λ_{r-1}/λ_r, y'_{r+1}, $\ldots$ y'_{n-1}. Letztere nennen wir die zweite Gruppe der Festwerte.

Um nun ein Feld auszusondern, müssen $n-1$ unabhängige Parameter übrig bleiben. Die hiernach vorhandenen Möglichkeiten teilen wir in der Weise ein, daß die für den Wert $x = x_0$ geltenden Anfangswerte der n Größen $y_\mathfrak{c}$ entweder alle fest bleiben, oder an eine Mannigfaltigkeit von $k$ten Stufe gebunden werden, wobei $k = 1, 2, \ldots n-1$ sein kann. Von den Festwerten der zweiten Gruppe sind noch $n-1-k$ frei, die übrigen durch die Forderung festgelegt, daß die herzustellende Schar von ∞^{n-1} Extremalen ein Feld bilden soll. Hierfür genügt die das Feld kennzeichnende Gleichung

$$\Omega_n \delta x + \sum_\mathfrak{c}^{0,\, n-1} \Omega_\mathfrak{c} \delta y_\mathfrak{c} = 0, \tag{8}$$

wobei

$$\Omega_n = -\sum_\mathfrak{c}^{0,\, n-1} \Omega_\mathfrak{c} y'_\mathfrak{c}$$

gesetzt werden kann und die Änderung δ sich auf die freibleibenden Festwerte bezieht. Außerdem aber ist noch nötig, daß, wenn $a_1, \ldots a_{n-1}$ die freibleibenden Festwerte sind, und schließlich

$$y_n = x = t, \quad y_\mathfrak{c} = \theta_\mathfrak{c}(t, a, a_2, \ldots a_{n-1})$$

gesetzt wird, die Determinante

$$\Delta_0 = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n)}{\partial(t, a_1, \ldots a_{n-2}, a_{n-1})} = \frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1})}{\partial(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})}$$

nicht identisch verschwinde; nur wenn diese Unabhängigkeitsbedingung, wie wir sie nennen wollen, erfüllt ist, kann die obige Theorie des Feldes entwickelt werden.

Seien nun zunächst die auf den Anfangswert $x = x_0$ bezüglichen Anfangswerte der n Größen $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ festgelegt; bezieht man dann sachgemäß das Zeichen δ auf die Änderung der übrigen $n - 1$ Integrationskonstanten, so ist an der Stelle $x = x_0$ offenbar

$$\delta x = \delta y_0 = \delta y_1 = \cdots = \delta y_{n-1} = 0;$$

die Gleichung (8) ist erfüllt, die durch eine feste Anfangsstelle im Gebiet der $n + 1$ Größen $x_1, y_\mathfrak{c}$ bilden, die Unabhängigkeitsbedingung als erfüllt vorausgesetzt, ein Feld.

Seien allgemeiner die Anfangswerte $y_\mathfrak{b}$ als Funktionen von k Parametern $t_1, t_2, \ldots t_k$ auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ gegeben; von den Integrationskonstanten der zweiten Gruppe sollen womöglich $n - 1 - k$ verfügbar bleiben. Dann hat man auf der Ausgangsmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ zu setzen

$$\delta y_\mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{e}}^{1,k} a_{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}\, d t_\mathfrak{e}, \quad \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n,$$

wobei $a_{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}$ Funktionen der Parameter $t_1, t_2, \ldots t_k$ sind; die Gleichung (8), die das Feld kennzeichnet, ist also erfüllt, wenn auf $\mathfrak{M}$ die k Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{0,n} a_{\mathfrak{b}\mathfrak{e}} \Omega_\mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{e} = 1, 2, \ldots k$$

gelten. Hierdurch werden k Integrationskonstante der zweiten Gruppe als Funktionen der $n - 1 - k$ übrigen, die wir $t_{k+1}, \ldots t_{n-1}$ nennen wollen, und der Größen $t_1, t_2, \ldots t_k$ festgelegt, und die kennzeichnende Gleichung (8) gilt für das $(n - 1)$-stufige Gebiet der Größen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, so daß die entsprechenden Extremalen ein Feld bilden, sobald die Unabhängigkeitsbedingung erfüllt ist.

Hiermit sind, entsprechend den Werten $k = 1, 2, \ldots n - 1$ und dem vorher besonders betrachteten Falle fester Anfangswerte aller Größen $y_\mathfrak{c}$, im ganzen n besondere Arten von Feldern gekennzeichnet. Bei der einfachsten Aufgabe des freien Extrems, wie sie im zweiten und dritten Abschnitt behandelt wurde, und die als Mayersche Aufgabe etwa durch die Gleichung

$$\varphi_0 = -z' + F(x, y, x', y') = 0$$

ausgesprochen wird, hat man $r = 0$, $n = 2$; an Feldern gibt es nach § 15, II. die konischen, in denen ein fester Ausgangspunkt (x_0, y_0, z_0) vorliegt, und, da k nur $= 1$ sein kann, die keilförmigen, bei denen Extremalen von einer Kurve im xyz-Raum transversal ausstrahlen. Bei der einfachsten isoperimetrischen Aufgabe ist etwa

$$\varphi_0 = -z' + F(x, y, x', y') = 0,$$
$$\varphi_1 = -u' + G(x, y, x', y') = 0$$

zu setzen, also $n = 3$, $r = 1$; man hat außer den Kegelfeldern den Möglichkeiten $k = 1, 2$ entsprechend die keilförmigen und die Felder mit Bodenfläche.

V. Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe kürzester Affinlänge

$$\delta J = \delta \int \sqrt{(x'y'' - x''y')^3}\, dt = 0,$$

die ganz zweckmäßig als Mayersche Aufgabe gefaßt werden kann:

$$-J' + \sqrt[3]{x'^2 + y'^2}\, \sqrt[3]{\theta'} = 0, \quad y' - x' \operatorname{tg} \theta = 0,$$

$$\Omega = \lambda_0 \left(-J' + \sqrt[3]{x'^2 + y'^2}\, \sqrt[3]{\theta'}\right) + \lambda (y' - x' \operatorname{tg} \theta) = 0;$$

in der allgemeinen Theorie ist

$$y_0 = J, \quad y_1 = x, \quad y_2 = y, \quad y_3 = \theta$$

zu setzen.

Die auf J bezügliche Eulersche Gleichung gibt $\lambda_0' = 0$, also etwa $\lambda_0 = 1$; übrigens gelten die Gleichungen

$$\Omega_{x'} = a, \quad \Omega_{y'} = b, \quad \Omega_{\theta'} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x'^2 + y'^2}\, (\theta')^{-\frac{2}{3}}, \tag{9}$$

wobei a, b Festwerte sind; setzt man

$$\frac{3}{2} a = \sqrt[3]{A^{-1}} \cos \alpha, \quad \frac{3}{2} b = \sqrt[3]{A^{-1}} \sin \alpha, \quad \theta = t,$$

so erhält man für die Extremalen

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2} A \left\{ 2 \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos^2(\theta - \alpha)} \right\} \Big|_{\theta_0}^{\theta}, \\ (10) \qquad y - y_0 &= \frac{1}{2} A \left\{ 2 \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos^2(\theta - \alpha)} \right\} \Big|_{\theta_0}^{\theta}, \\ \theta &= \theta, \quad J - J_0 = A^{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \Big|_{\theta_0}^{\theta}, \end{aligned}$$

woraus beiläufig die Parabel als Projektion auf die xy-Ebene ersichtlich wird. Die Transversalitätsbedingung wird nach (9), wenn $\delta J_0 = 0$ gesetzt wird,

$$(11) \qquad \cos\alpha\,\delta x + \sin\alpha\,\delta y + \frac{1}{2} A \frac{\delta\theta}{\cos^2(\theta-\alpha)} = 0.$$

Wir konstruieren ein Feld, in welchem $\mathfrak{M}$ eine zweistufige Mannigfaltigkeit, $k = 2$ ist, und setzen

$$(12) \qquad x_0 = t_2 \cos t_1, \quad y_0 = t_2 \sin t_1, \quad \theta_0 = t_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Dem entspricht folgende Extremsaufgabe: es wird die ebene Kurve gesucht, die von einem nicht vorgeschriebenen Kreise einer konzentrischen Schar berührend ausgeht, und in einem gegebenen Punkte mit gegebener Richtung endet: y_1, y_2, y_3 haben vorgeschriebene Endwerte; $y_0 = J$ soll Extrem werden.

Drückt man aus den Gleichungen (12) die Größen δx, δy, $\delta\theta$ durch dt_1 und dt_2 aus, setzt sie in die Gleichung (11) und setzt sodann die Faktoren von dt_1 und dt_2 beide $= 0$, so ergibt sich:

$$\alpha = t_1 - \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2} A = t_2;$$

die Parabeln des Feldes berühren die Kreise in ihren Scheitelpunkten, die Parabelachsen also liegen radial.

Man erhält jetzt nach (10) Gleichungen von der Form

$$x = \xi(\theta, \theta_0, t_2), \quad y = \eta(\theta, \theta_0, t_2),$$

$\theta_0 = t_1 - \frac{1}{2}\pi$ und t_2 sind die $n - 1 = 2$ Parameter des Feldes. Die Gleichung $\varDelta_0 = 0$ der allgemeinen Theorie ist also, da $\theta = t$,

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \theta)}{\partial(\theta, \theta_0, t_2)} = 0, \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\theta_0, t_2)} = 0;$$

das gibt ausgerechnet

$$3 - 4\sin^4(\theta - \theta_0) = 0, \quad \theta - \theta_0 = \gamma = 68^0\,32'.$$

Der Parabelbogen, der als Lösung der gestellten Extremsaufgabe erscheint, gibt also nur so lange ein übrigens schwaches Extrem, als die Tangente sich nicht um mehr als $68^0\,32'$ gedreht hat.

Das Aufhören des Extrems kann auch völlig ersichtlich gemacht werden. Eine diesem Zwecke dienende Hülle von Feldparabeln findet man durch den Ansatz

$$0 = \begin{vmatrix} \xi_{t_2}\,dt_2 + \xi_{\theta_0}\,d\theta_0 & \eta\;\; dt_2 + \eta_{\theta_0}\,d\theta_0 \\ \xi_\theta & \eta_0 \end{vmatrix}$$

mit dem Werte $\theta = \theta_0 + \gamma$; das gibt

$$\frac{d t_2}{t_2} = d\theta_0 \cdot \frac{\operatorname{tg}\gamma (2\sin^2\gamma - 3)}{1 - 2\sin^2\gamma} = \operatorname{tg}\mu . d\theta_0, \quad \mu = 77^0 48'.$$

Da nun t_2 und $t_1 = \theta_0 + \frac{1}{2}\pi$ die Polarkoordinaten des Berührungspunktes, also Scheitels der Feldextremale sind, so beschreibt dieser eine logarithmische Spirale. Setzt man ferner auch in den Gleichungen (10) für θ den Wert $\theta_0 + \gamma$, so findet man, daß auch die Brennpunkte oder Berührungspunkte mit der Hülle auf einer logarithmischen Spirale liegen; das ist also auch die Gestalt der Hülle. Die Mittelpunkte beider Spiralen fallen zusammen.

VI. Daß die Unabhängigkeitsbedingung erfüllt ist, beweisen wir noch in einem etwas verwickelteren Falle, woraus man die Notwendigkeit eines solchen Beweises ersehen wird. Bei der gegenwärtigen Lage der Theorie muß in jedem Einzelfalle die Unabhängigkeitsbedingung als erfüllt nachgewiesen werden, was, wenn man die Aufgabe einigermaßen beherrscht, meist leicht ist.

Es sei das Extrem des Integrals

$$w = \int f(x, y, y', v, v')\, dx$$

bei der Bedingungsgleichung

$$v' = g(x, y, y', v) \tag{13}$$

und gegebenen Anfangs- und Endwerten der Größen x, y, v zu finden; λ sei der eine Multiplikator, der andere kann $= 1$ gesetzt werden, so daß

$$\Omega = w' - f + \lambda (v' - g);$$

dann kann man, indem die Fußmarke 0 sich stets auf die Anfangsstelle $x = x_0$ bezieht, die Größen y_0, v_0, y'_0, λ_0 als Festwerte der Extremalen, y'_0, λ_0 als die der zweiten Gruppe ansehen und hat demnach

$$\Delta = \frac{\partial (y_0, v_0, y, v)}{\partial (y_0, v_0, y'_0, \lambda_0)} = \frac{\partial (y, v)}{\partial (y'_0, \lambda_0)}$$

zu untersuchen. Bestimmt man nun die Größe μ durch die Gleichung

$$\mu' + \mu \frac{\partial g}{\partial v} = 0,$$

und setzt

$$G = \mu \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\mu \frac{\partial g}{\partial y'}\right),$$

so folgt offenbar, indem man die Gleichung (13) nach λ_0 differenziert,

$$(14)\quad \begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial\lambda_0}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\mu\frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}\right)+\left\{\mu\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{\partial g}{\partial y'}\right)\right\}\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\mu\frac{\partial g}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}\right)+G\frac{\partial y}{\partial\lambda_0},\end{aligned}$$

und diese Gleichung bleibt gültig, wenn λ_0 durch y_0' ersetzt wird. Bezeichnen wir nun allgemein durch $[x-x_0]_k$ den Rest einer nach Potenzen von $x-x_0$ fortschreitenden Taylorschen Entwicklung, die bis zur Potenz $(x-x_0)^{k-1}$ hingeschrieben ist, so ist

$$(15)\quad y = y_0 + y_0'(x-x_0)+[x-x_0]_2$$

und für $x=x_0$, da hier auch v für y gesetzt werden kann,

$$\frac{\partial v}{\partial\lambda_0}=\frac{\partial v}{\partial y_0'}=\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}=\frac{\partial y}{\partial y_0'}=0;$$

integriert man daher die Gleichung (14) nach x, so folgt

$$\mu\frac{\partial v}{\partial\lambda_0}=\mu\frac{\partial g}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}+\int_{x_0}^{x}G\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}\,dx,$$

$$\mu\frac{\partial v}{\partial y_0'}=\mu\frac{\partial g}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial y_0'}+\int_{x_0}^{x}G\frac{\partial y}{\partial y_0'}\,dx,$$

und hieraus

$$\mu\varDelta=\frac{\partial y}{\partial y_0'}\int_{x_0}^{x}G\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}\,dx-\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}\int_{x_0}^{x}G\frac{\partial y}{\partial y_0'}\,dx.$$

Substituiert man in dieser Gleichung der Entwicklung (15) gemäß

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda_0}=L(x-x_0)^l+[x-x_0]_{l+1},\quad \frac{\partial y}{\partial y_0'}=x-x_0+[x-x_0]_2,$$

und setzt

$$G=M(x-x_0)^m+[x-x_0]_{m+1},$$

wobei L und M nicht verschwinden, so ist $l\geqq 2$ und man erhält

$$\begin{aligned}\mu\varDelta &= (x-x_0+\cdots)\int_{x_0}^{x}\{LM(x-x_0)^{l+m}+\cdots\}\,dx\\ &\quad-[L(x-x_0)^l+\cdots]\int_{x_0}^{x}\{M(x-x_0)^{m+1}+\cdots\}\,dx\\ &= LM(x-x_0)^{l+m+2}\left(\frac{1}{l+m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+[x-x_0]_{l+m+3}.\end{aligned}$$

Da nun die Differenz

$$\frac{1}{l+m+1} - \frac{1}{m+2} = \frac{1-l}{(m+2)(l+m+1)}$$

von Null verschieden ist, so kann $\varDelta$ nur dann identisch verschwinden, wenn eine der Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_0} = 0, \quad G = 0$$

längs der betrachteten Extremale für alle Werte von x besteht. Die zweite Gleichung gibt den Fall, der in der allgemeinen Theorie immer ausgeschlossen wurde: die betrachteten Kurven wären schon Extremalen der einfacheren Aufgabe

$$-v' + g(x, y, y', v) = 0.$$

Siebenter Abschnitt.

Das Extrem von vielfachen Integralen.

---

§ 46.

Invariante Doppelintegrale.

I. Eine Oberfläche $\mathfrak{S}$ sei dadurch definiert, daß die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z Funktionen zweier Parameter u, v gleichgesetzt werden; die Ableitungen nach letzteren seien in der gewöhnlichen Weise durch Fußmarken bezeichnet, so daß

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_v, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x_{uu} \ldots$$

Wir betrachten dann solche über die Fläche $\mathfrak{S}$ hin gebildete Doppelintegrale

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Phi(x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, \ldots)\, du\, dv,$$

in denen unter dem Funktionszeichen Φ auch alle Größen vorkommen können, die aus den hingeschriebenen entstehen, indem man x durch y, z ersetzt; das Integral sei durch die Fläche $\mathfrak{S}$ allein bestimmt, nicht aber von der besonderen Natur des Zusammenhanges zwischen x, y, z einerseits und u, v anderseits; erhält man die Fläche $\mathfrak{S}$ auch, indem man x, y, z als Funktionen der Parameter p, q darstellt, so sei

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Phi(x, x_p, x_q, x_{pp}, x_{pq}, x_{qq}, \ldots)\, dp\, dq,$$

wobei, wie die Bezeichnung andeutet, über das der Fläche $\mathfrak{S}$ entsprechende Gebiet in den Veränderlichen p, q integriert wird. Sieht man letztere als Funktionen von u und v an, deren Funktionaldeterminante positiv sei, so ergibt die letzte Gleichung

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Phi(x, x_p, x_q, x_{pp}, x_{pq}, x_{qq}, \ldots) \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)}\, du\, dv;$$

hieraus folgt, indem man die Fläche $\mathfrak{S}$ durch einen beliebig kleinen Teil ersetzt, die Identität

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\Phi(x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, \ldots)\\ &= \Phi(x, x_p, x_q, x_{pp}, x_{pq}, x_{qq}, \ldots)\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)}.\end{aligned}$$

Wenn die Funktion Φ so beschaffen ist, daß diese Relation für jede beliebige Fläche $\mathfrak{S}$ besteht, können aus ihr eine Reihe nützlicher Identitäten abgeleitet werden.

Es sei im besonderen durch die Gleichungen

$$x = f(p, q), \quad y = g(p, q), \quad z = h(p, q),$$

deren rechte Seiten mit allen nachher vorkommenden Ableitungen in einem gewissen Gebiet reguläre Funktionen sind, ein Flächenstück $\mathfrak{S}_0$ definiert, dessen Elemente nur solche Wertsysteme

$$x, x_p, x_q, x_{pp}, x_{pq}, x_{qq}, \ldots$$

ergeben, in welchen die Funktion Φ regulär ist. Dasselbe Flächenstück wird dann auch durch die Gleichungen

$$x = f(u + \varrho, v + \sigma), \quad y = g(u + \varrho, v + \sigma), \quad z = h(u + \varrho, v + \sigma)$$

dargestellt, in welchen ϱ, σ reguläre Funktionen von u, v bedeuten, welche wir als klein ansehen wollen; sie seien etwa mit einem festwertigen Faktor ε behaftet, der beliebig klein gemacht werden kann; $[\varepsilon]_2$ bedeute immer den Rest in einer nach Potenzen von ε fortschreitenden Reihe, der nach dem linearen Gliede übrig bleibt. Die Wertsysteme p, q und u, v, welche demselben Punkte von $\mathfrak{S}_0$ zugehören, sind dann durch die Gleichungen

$$p = u + \varrho, \quad q = v + \sigma$$

verbunden, und die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 + \varrho_u & \sigma_u \\ \varrho_v & 1 + \sigma_v \end{vmatrix} = 1 + \varrho_u + \sigma_v + [\varepsilon]_2$$

ist positiv. Setzt man ferner

$$\begin{gathered}\xi = \varrho f_p(u, v) + \sigma f_q(u, v),\\ \eta = \varrho g_p(u, v) + \sigma g_q(u, v), \quad \zeta = \varrho h_p(u, v) + \sigma h_q(u, v),\end{gathered}$$

so hat man die Taylorschen Entwicklungen

$$\begin{gathered}x = f(u, v) + \xi + [\varepsilon]_2,\\ y = g(u, v) + \eta + [\varepsilon]_2, \quad z = h(u, v) + \zeta + [\varepsilon]_2;\end{gathered}$$

aus diesen folgen unmittelbar, indem man nach u und v differenziert, die Gleichungen

$$x_u - f_p(u, v) = \xi_u + [\varepsilon]_2, \quad x_v - f_q(u, v) = \xi_v + [\varepsilon]_2,$$
$$x_{uu} - f_{pp}(u, v) = \xi_{uu} + [\varepsilon]_2,$$
$$x_{uv} - f_{pq}(u, v) = \xi_{uv} + [\varepsilon]_2, \quad x_{vv} - f_{qq}(u, v) = \xi_{vv} + [\varepsilon]_2,$$

nebst ähnlichen, in denen x, ξ, f durch y, η, g oder z, ζ, h ersetzt ist, und die vorausgesetzte Identität (1) ergibt

$$\begin{aligned} & \Phi[f(p, q), f_p(p, q) \ldots] \, (1 + \varrho_u + \sigma_v + [\varepsilon]_2) \\ & = \Phi(x, x_u, \ldots) \\ (2) \qquad & = \Phi\left[f(u + \varrho, v + \sigma), \frac{\partial f(u + \varrho, v + \sigma)}{\partial u}, \ldots\right] \\ & = \Phi[f(u, v) + \xi + [\varepsilon]_2, f_p(u, v) + \xi_u + [\varepsilon]_2, \ldots]. \end{aligned}$$

Der letzte dieser Ausdrücke kann geschrieben werden

$$\Phi + \Phi_x \xi + \Phi_y \eta + \Phi_z \zeta + \Phi_{x_u} \xi_u + \Phi_{y_u} \eta_u + \Phi_{z_u} \zeta_u + \Phi_{x_v} \xi_v$$
$$+ \Phi_{y_v} \eta_v + \Phi_{z_v} \zeta_v + [\varepsilon]_2,$$

wobei die Größen unter den Funktionszeichen Φ seien

$$(3) \qquad \begin{aligned} & x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \\ & x_u = f_p(u, v), \quad x_v = f_q(u, v), \quad x_{uu} = f_{pp}(u, v), \ldots \end{aligned}$$

Anderseits kann man entwickeln

$$\Phi[f(p, q), \; f_p(p, q), \ldots] = \Phi + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial v} + [\varepsilon]_2,$$

wobei rechts ebenfalls unter dem Zeichen Φ die Größen (3) einzusetzen sind. Läßt man daher in der Gleichung (2) die Glieder $[\varepsilon]_2$ weg, so ergibt sich

$$\Phi_x \xi + \Phi_{x_u} \xi_u + \Phi_{x_v} \xi_v + \Phi_{x_{uu}} \xi_{uu} + \Phi_{x_{uv}} \xi_{uv} + \Phi_{x_{vv}} \xi_{vv} + \cdots$$
$$= \Phi(\varrho_u + \sigma_v) + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial(\varrho \Phi)}{\partial u} + \frac{\partial(\sigma \Phi)}{\partial v};$$

rechts sind wieder den hingeschriebenen die Glieder beizufügen, die aus ihnen entstehen, indem man x, ξ durch y, η oder z, ζ ersetzt. Die linke Seite dieser Gleichung transformieren wir mittels der Identitäten

$$\Phi_{x_u} \xi_u = \frac{\partial(\xi \Phi_{x_u})}{\partial u} - \xi \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u},$$

$$\Phi_{x_{uu}} \xi_{uu} = \frac{\partial(\Phi_{x_{uu}} \xi_u)}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\xi \frac{\partial \Phi_{x_{uu}}}{\partial u}\right) + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{x_{uu}}}{\partial u^2}$$

und der dieser analogen und setzen

$$P = \Phi_x - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v} + \frac{\partial^2 \Phi_{x_{uu}}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{x_{uv}}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \Phi_{x_{vv}}}{\partial v^2};$$

Q und R entstehen aus P, indem man x durch y und durch z ersetzt. Dann erhalten wir mit Rücksicht auf die Form der Größen $\xi, \eta, \ldots$ eine Gleichung

$$(4) \quad \begin{aligned} P\xi + Q\eta + R\zeta &= \frac{\partial}{\partial u}(A\varrho + B\sigma + C\varrho_u + D\sigma_u + E\varrho_v + F\sigma_v) \\ &+ \frac{\partial}{\partial v}(A'\varrho + B'\sigma + C'\varrho_u + D'\sigma_u + E'\varrho_v + F'\sigma_v), \end{aligned}$$

wobei die Größen $A, A', B, B', \ldots$ von ϱ und σ unabhängig sind. Nun sind ϱ, σ, abgesehen von dem in ihnen enthaltenen Faktor ε, willkürliche Funktionen; also können in der erhaltenen Gleichung die Faktoren der Größen $\varrho, \sigma, \varrho_u, \sigma_u, \varrho_v, \sigma_v, \varrho_{uu}, \varrho_{uv}, \ldots$ beiderseits gleichgesetzt werden, von denen links nur ϱ und σ vorkommen. Rechts müssen also zunächst die Faktoren der nach ausgeführter Differentiation erscheinenden zweiten Ableitungen von ϱ und σ verschwinden; das gibt

$$C = D = E' = F' = 0, \quad E + C' = F + D' = 0,$$

und die rechte Seite wird

$$\frac{\partial}{\partial u}(A\varrho + B\sigma + E\varrho_v + F\sigma_v) + \frac{\partial}{\partial v}(A'\varrho + B'\sigma - E\varrho_u - F\sigma_u).$$

Hier sind die Faktoren von $\varrho_u, \varrho_v, \sigma_u, \sigma_v$

$$A - E_v = A' + E_u = B - F_v = B' + F_u = 0;$$

daraus folgt

$$A_u + A'_v = B_u + B'_v = 0;$$

mithin verschwinden rechts die Faktoren von ϱ und σ; die linke Seite verschwindet also bei willkürlichen Werten von ϱ und σ; das gibt

$$(5) \quad P x_u + Q y_u + R z_u = 0, \quad P x_v + Q y_v + R z_v = 0.$$

Enthält die Funktion Φ nur erste Ableitungen $x_u, x, \ldots$, so läßt sich die Formel (4) in einfacher Form vollständig hinschreiben; man hat nur die Formeln

$$\Phi_{x_u} \xi_u = \frac{\partial(\xi \Phi_{x_u})}{\partial u} - \xi \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u}, \quad \Phi_{x_v} \xi_v = \frac{\partial(\xi \Phi_{x_v})}{\partial v} - \xi \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v}$$

und die ähnlichen anzuwenden und findet für die Gleichung (4)

$$P\xi + Q\eta + R\zeta = \frac{\partial}{\partial u}(\varrho\Phi - \xi\Phi_{x_u} - \eta\Phi_{y_u} - \zeta\Phi_{z_u})$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}(\sigma\Phi - \xi\Phi_{x_v} - \eta\Phi_{y_v} - \zeta\Phi_{z_v}),$$

und wenn man rechts die Faktoren von ϱ_u, ϱ_v, σ_u, σ_v gleich Null setzt, erhält man die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{aligned} \Phi &= x_u\Phi_{x_u} + y_u\Phi_{y_u} + z_u\Phi_{z_u} = x_v\Phi_{x_v} + y_v\Phi_{y_v} + z_v\Phi_{z_v},\\ 0 &= x_u\Phi_{x_v} + y_u\Phi_{y_v} + z_u\Phi_{z_v} = x_v\Phi_{x_u} + y_v\Phi_{y_u} + z_v\Phi_{z_u}. \end{aligned}$$

In diesem Falle läßt sich auch die Form der Funktion Φ vollständig und übersichtlich angeben; setzt man

$$\Phi(x, 1, 0, y, 0, 1, z, p, q) = f(x, y, z, p, q),$$

und führt das besondere Unabhängigensystem

$$u = x,\quad v = y,\quad p = z_u = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = z_v = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ein, wobei die Annahme

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$$

gelte, so ist

$$\iint \Phi(x, x_u, x_v, \ldots)\, du\, dv = \iint f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$
$$= \iint f(x, y, z, p, q)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$
$$-z_u + p x_u + q y_u = -z_v + p x_v + q y_v = 0,$$

also, wenn man

$$X = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},\quad Y = -\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},\quad Z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

setzt,

$$\iint \Phi(x, x_u, x_v, \ldots)\, du\, dv = \iint f\left(x, y, z, -\frac{X}{Z}, -\frac{Y}{Z}\right) Z\, du\, dv,$$

und da diese Gleichung für beliebig kleine Teile der Fläche $\mathfrak{S}$ gebildet werden kann, folgt schließlich

$$(7)\quad \Phi(x, x_u, x_v, \ldots) = Zf\left(x, y, z, -\frac{X}{Z}, -\frac{Y}{Z}\right) = \mathfrak{F}(x, y, z, X, Y, Z),$$

wobei $\mathfrak{F}$, da $Z > 0$ sein soll, in den Größen X, Y, Z positiv homogen von erster Stufe ist.

II. Diese wichtigen Formeln sind nach zwei Seiten hin zu verallgemeinern. Zunächst ist offenbar gleichgültig, ob neben x

noch zwei Größen y und z oder deren mehr erscheinen. Man könnte die Formeln auch ableiten, wenn es sich um ein Doppelintegral in einem mehr als dreistufigen Raume handelte, also um ein Integral

$$\iint du\, dv\, \Phi(x, y, z, w, x_u, \ldots w_u, w_v, w_{uu}, \ldots).$$

In der Formel (7) sind dann für X, Y, Z die Determinanten der Matrices

$$\left\|\begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} x_u & y_u & w_u \\ x_v & y_v & w_v \end{matrix}\right\| \tag{8}$$

zu nehmen; an Stelle von p und q treten dann die Größen $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ im Falle des vierstufigen $xyzw$-Raumes.

Eine besondere Betrachtung ist aber nötig, um von den beiden Unabhängigen u, v zu einem System von n unabhängigen $u_1, \ldots u_n$ überzugehen, wobei ein n-faches Integral

$$\iint \cdots \int du_1 \ldots du_n\, \Phi\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_{\mathfrak{a}}}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}}, y, \frac{\partial y}{\partial u_{\mathfrak{a}}}, \ldots\right)$$

vorliege, in dem die Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ alle Zahlen der Reihe $1, \ldots n$ bezeichnen können, $x, y, \ldots$ aber Größen in beliebiger Anzahl $> n$ sind.

Führt man hier die neuen Unabhängigen

$$p_{\mathfrak{a}} = u_{\mathfrak{a}} + \varrho_{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots n$$

ein, und sind $\varrho_{\mathfrak{a}}$ Funktionen wie oben ϱ und σ, so ist auch hier

$$\frac{\partial(p_1, \ldots p_n)}{\partial(u_1, \ldots u_n)} = 1 + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \varrho_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} + [\varepsilon]_2$$

zu setzen, und die Größen $P, Q, \ldots$ sind gebildet nach der Formel

$$P = \Phi_x - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} \frac{\partial \Phi_{x_{\mathfrak{a}}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \Phi_{x_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}};$$

dabei ist $x_{\mathfrak{a}} = \partial x/\partial u_{\mathfrak{a}}$, $x_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \partial^2 x/\partial u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}$ gesetzt und in der zweiten Summe sind alle gleichen oder ungleichen Paare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ je einmal anzusetzen; $Q, R, \ldots$ entstehen, indem man x durch y, $z, \ldots$ ersetzt; man setzt ferner

$$\xi = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} \frac{\partial x}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \varrho_{\mathfrak{a}}, \quad \eta = \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} \frac{\partial y}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \varrho_{\mathfrak{a}}, \ldots$$

und erhält der Gleichung (4) entsprechend die Formel

$$P\xi + Q\eta + \cdots = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{\partial}{\partial u_{\mathfrak{a}}}\left(A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, \varrho_{\mathfrak{b}} + A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \frac{\partial \varrho_{\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\right), \tag{9}$$

in der rechts alle Summationsbuchstaben die Reihe 1, 2, … n bedeuten, und die Größen A von den Funktionen ϱ nicht abhängen.

Nun sind ϱ ebenso wie ihre ersten und zweiten Ableitungen willkürliche Größen; auf der rechten Seite der Gleichung (9) müssen zunächst alle Ableitungen wie $\partial^2 \varrho_{\mathfrak{b}}/\partial u_{\mathfrak{a}} \partial u_{\mathfrak{c}}$ wegfallen.

Diese Größe kommt, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}$, zweimal vor; $\partial^2 \varrho_{\mathfrak{b}}/\partial u_1 \partial u_2$ z. B., wenn $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{c} = 2$, und wenn $\mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{c} = 1$ ist. Dagegen kommt $\partial^2 \varrho_{\mathfrak{b}}/\partial u_1^2$ nur einmal vor, wenn $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{c} = 1$ ist. Die Koeffizienten sind also $A_{1\mathfrak{b}2} + A_{2\mathfrak{b}1}$ und $A_{1\mathfrak{b}1}$; diese müssen verschwinden, und so ergeben sich die allgemeinen Gleichungen

$$A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = 0, \quad A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + A_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = 0. \tag{10}$$

Ferner hat die Größe $\partial \varrho_1/\partial u_{\mathfrak{c}}$, die links auch nicht vorkommt, rechts den Faktor

$$A_{\mathfrak{c}1} + \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial A_{\mathfrak{a}1\mathfrak{c}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = 0;$$

daraus folgt

$$\sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial A_{\mathfrak{c}1}}{\partial u_{\mathfrak{c}}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} \frac{\partial^2 A_{\mathfrak{a}1\mathfrak{c}}}{\partial u_{\mathfrak{a}} \partial u_{\mathfrak{c}}} = 0, \tag{11}$$

wobei in der zweiten Summe $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ unabhängig voneinander die Reihe 1, 2, … n durchlaufen. In ihr kommt z. B. das Differentialzeichen $\partial^2/\partial u_3 \partial u_4$ zweimal vor, wenn $\mathfrak{a} = 3$, $\mathfrak{c} = 4$ ist und wenn $\mathfrak{a} = 4$, $\mathfrak{c} = 3$ ist; die zugehörigen Glieder sind

$$\frac{\partial^2 A_{314}}{\partial u_3 \partial u_4} + \frac{\partial^2 A_{413}}{\partial u_3 \partial u_4};$$

ihre Summe ist $= 0$ nach der zweiten Formel (10), und ebenso verschwinden Glieder wie

$$\frac{\partial^2 A_{\mathfrak{a}1\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}^2} = 0.$$

Die Formel (11) gibt also

$$\sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial A_{\mathfrak{c}1}}{\partial u_{\mathfrak{c}}} = 0$$

und ebenso hat man die allgemeinere Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial A_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{c}}} = 0. \tag{12}$$

Diese Größen sind aber in der Gleichung (9) rechts die Faktoren von $\varrho_{\mathfrak{b}}$; diese Größen, die links auch vorkommen, fallen also rechts weg, mithin auch links, und man erhält die Gleichung

$$P\xi + Q\eta + \cdots = 0$$

bei willkürlichen Funktionen ϱ, also nach der Definition der Größen ξ, η, ...

$$P \frac{\partial x}{\partial u_a} + Q \frac{\partial y}{\partial u_a} + \cdots = 0, \quad a = 1, 2, \cdots n. \tag{13}$$

Sollten sich also bei einer Aufgabe die Gleichungen $P = Q = \cdots = 0$ ergeben, deren Anzahl k ist, so sind in Wahrheit im allgemeinen n von ihnen Folgen der $k - n$ übrigen.

Treten keine zweiten Ableitungen der Größen x, y, ... auf, so gilt die Formel (7) mit der Maßgabe, daß für X, Y, Z, die mit wechselndem Vorzeichen genommenen Determinanten einer Matrix genommen werden, die aus der ersten Matrix (8) entsteht, indem man die Zahl der Zeilen auf n vermehrt, für u, v einfach u_1, u_2, ... u_n nimmt, und jeder der Größen x, y, ... eine Spalte entsprechen läßt.

§ 47.

Variationen und Extreme von Doppelintegralen.

I. Längs eines Flächenstückes $\mathfrak{S}$, das von der Kurve $\mathfrak{C}$ umrandet wird, seien die Koordinaten x, y, z nebst allen vorkommenden Ableitungen reguläre Funktionen von u und v; durch $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir auch das entsprechende Gebiet in einer uv-Ebene, durch $\mathfrak{C}$ dessen Randlinie. Dann kann auf das Integral

$$J = \iint_{\mathfrak{S}} \Phi(x, x_u, x_v, y, y_u, y_v, z, z_u, z_v)\, du\, dv$$

der Begriff der Variation nach § 1 unmittelbar angewandt werden, indem man die Fläche $\mathfrak{S}$ in eine von einem oder mehreren Parametern ε abhängige Schar von Nachbarflächen einordnet. Sei etwa, wenn x, y, z auf die Fläche $\mathfrak{S}$ bezogen werden,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \varepsilon_1 \theta_1(u, v) + \varepsilon_2 \theta_2(u, v) + \cdots,\\ \bar{y} &= y + \varepsilon_1 \lambda_1(u, v) + \varepsilon_2 \lambda_2(u, v) + \cdots,\\ \bar{z} &= z + \varepsilon_1 \mu_1(u, v) + \varepsilon_2 \mu_2(u, v) + \cdots,\end{aligned}$$

wobei die Funktionen θ, λ, μ im uv-Gebiet $\mathfrak{S}$ mit den nötigen Regularitätseigenschaften definiert seien. Dann ist der Ort des Punktes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ eine der Fläche $\mathfrak{S}$ benachbarte, die in jene übergeht, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ gesetzt wird, und nach der allgemeinen Definition

$$\delta = d\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + d\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} + \cdots \Big|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0}$$

findet man, wenn

$$\bar{J} = \iint_{\mathfrak{S}} \Phi(\bar{x}, \bar{x}_u, \bar{x}_v, \ldots)\, du\, dv$$

gesetzt wird,

$$\delta J = \iint_{\mathfrak{S}} \delta \Phi\, du\, dv, \quad \delta x_u = \frac{\partial \delta x}{\partial u}, \cdots$$

$$= \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \Phi_x \delta x + \Phi_{x_u} \frac{\partial \delta x}{\partial u} + \Phi_{x_v} \frac{\partial \delta x}{\partial v} + \cdots \right\} du\, dv,$$

wobei, wie immer, die weggelassenen Glieder aus den hingeschriebenen entstehen, indem man x durch y und z ersetzt. Die Formeln

$$\Phi_{x_u} \frac{\partial \delta x}{\partial u} = \frac{\partial (\Phi_{x_u} \delta x)}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} \delta x$$

und ähnliche ergeben

$$\text{(1)} \quad \delta J = \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \delta x \left(\Phi_x - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v} \right) + \cdots + \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} \right\} du\, dv$$

mit der Bezeichnung

$$U = \Phi_{x_u} \delta x + \Phi_{y_u} \delta y + \Phi_{z_u} \delta z, \qquad V = \Phi_{x_v} \delta x + \Phi_{y_v} \delta y + \Phi_{z_v} \delta z.$$

Jetzt gibt die Gaußsche Integraltransformation in der uv-Ebene die beiden allgemeinen Gleichungen

$$\iint_{\mathfrak{S}} \frac{\partial U}{\partial u}\, du\, dv = \int_{\mathfrak{C}} U\, dv,$$

$$\iint_{\mathfrak{S}} \frac{\partial V}{\partial u}\, du\, dv = -\int_{\mathfrak{C}} V\, du,$$

wobei rechts längs der Randlinie $\mathfrak{C}$ im positiven Sinne integriert wird; ist t ein in diesem Sinne bei einmaligem Umlauf von 0 bis t_0 wachsender Parameter, so ist genauer

$$\int_{\mathfrak{C}} U\, dv = \int_0^{t_0} U \frac{dv}{dt}\, dt, \quad \int_{\mathfrak{C}} V\, du = \int_0^{t_0} V \frac{du}{dt}\, dt.$$

In diesem Sinne werde stets die Integration längs der Kurve $\mathfrak{C}$ verstanden; der entsprechende Umlaufssinn der Kurve $\mathfrak{C}$ im xyz-Raume werde ebenfalls als positiver Umlaufssinn bezeichnet und stets als Integrationsrichtung genommen. Dann erhält man für δJ der Formel (1) zufolge den Ausdruck

$$\delta J = \int_{\mathfrak{C}} (U dv - V du) + \iint_{\mathfrak{S}} (P\delta x + Q\delta y + R\delta z)\, du\, dv$$

mit den Zeichen P, Q, R des vorigen Paragraphen. Benutzt man nun die Gleichungen

$$X = y_u z_v - y_v z_u, \quad Y = z_u x_v - z_v x_u, \quad Z = x_u y_v - x_v y_u,$$
$$\Phi(x, x_u, x_v, \ldots) = \mathfrak{F}(x, y, z, X, Y, Z),$$

so findet man

$$(2)\quad \begin{aligned} \Phi_{x_u} &= y_v \mathfrak{F}_Z - z_v \mathfrak{F}_Y, & \Phi_{y_u} &= z_v \mathfrak{F}_X - x_v \mathfrak{F}_Z, & \Phi_{z_u} &= x_v \mathfrak{F}_Y - y_v \mathfrak{F}_X, \\ \Phi_{x_v} &= z_u \mathfrak{F}_Y - y_u \mathfrak{F}_Z, & \Phi_{y_v} &= x_u \mathfrak{F}_Z - z_u \mathfrak{F}_X, & \Phi_{z_v} &= y_u \mathfrak{F}_X - x_u \mathfrak{F}_Y, \end{aligned}$$

$$U = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ x_v & y_v & z_v \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ -x_u & -y_u & -z_u \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix},$$

$$U dv - U du = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix}$$

und endlich, immer mit dem festgesetzten Sinn der Integration über die Randlinie $\mathfrak{C}$,

$$(3)\quad \delta J = \int_{\mathfrak{C}} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix} + \iint_{\mathfrak{S}} (P\delta x + Q\delta y + R\delta z)\, du\, dv.$$

II. Die hergestellte Form der Variation δJ dient vor allem dazu, eine Extremsaufgabe zu lösen. Sei die Fläche $\mathfrak{S}$ gesucht, die im Vergleich zu allen benachbarten gewisser Art, z. B. denen, die ebenfalls die Randlinie $\mathfrak{C}$ haben, dem Integral J einen extremen Wert gibt. Dann muß dies im besonderen innerhalb jeder Schar von Nachbarflächen gelten, in die wir die Fläche $\mathfrak{S}$ eingebettet haben; innerhalb dieser Schar ist aber J eine Funktion der Parameter ε, die an der Stelle $\varepsilon = 0$ den gewünschten Extremwert annimmt. Nach der gewöhnlichen Regel der Differentialrechnung ist also $\delta J = 0$ zu setzen, und hieraus sind wie in den früheren Abschnitten Folgerungen zu ziehen.

Zu diesem Zwecke muß der Haupthilfssatz (§ 6) auf Doppelintegrale ausgedehnt werden, was leicht ist. Sei M eine bestimmte stetige Funktion des Ortes auf der Fläche $\mathfrak{S}$ und so beschaffen, daß immer die Gleichung

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} M\varphi(u, v)\,du\,dv = 0,$$

sobald φ eine beliebige, am Rande $\mathfrak{C}$ verschwindende Funktion ist, die mit ihren Ableitungen bis zu irgend einer Ordnung k hinauf auf der Fläche $\mathfrak{S}$, d. h. im uv-Gebiet $\mathfrak{S}$ stetig ist. Dann ist überall auf diesem Gebiet $M = 0$. Denn wäre z. B. M positiv an einer Stelle im Innern des Gebiets $\mathfrak{S}$, also auch für ein Gebiet

$$u_0 \leqq u \leqq u_1, \quad v_0 \leqq v \leqq v_1,$$

so setze man in diesem Gebiet

$$\varphi(u, v) = (u - u_0)^{k+1}(u_1 - u)^{k+1}(v - v_0)^{k+1}(v_1 - v)^{k+1},$$

außerhalb desselben im Gebiet $\mathfrak{S}$ überall $\varphi(u, v) = 0$. Dann erfüllt diese Größe die gestellten Forderungen und das Integral

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} M\varphi(u, v)\,du\,dv = \int\limits_{u_0}^{u_1} du \int\limits_{v_0}^{v_1} M\varphi(u, v)\,dv$$

ist sicher positiv, entgegen der Voraussetzung. Im Innern des Gebiets $\mathfrak{S}$ ist also notwendig $M = 0$, und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit dann auch auf dem Rande $\mathfrak{C}$.

Sei ferner auch N auf der Fläche $\mathfrak{S}$ stetig und verschwinde nicht überall, φ_1 und φ_2 seien beliebige Funktionen wie $\varphi(u, v)$. Wenn dann immer die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \iint\limits_{\mathfrak{S}} M\varphi_1(u, v)\,du\,dv & \iint\limits_{\mathfrak{S}} N\varphi_1(u, v)\,du\,dv \\ \iint\limits_{\mathfrak{S}} M\varphi_2(u, v)\,du\,dv & \iint\limits_{\mathfrak{S}} N\varphi_2(u, v)\,du\,dv \end{vmatrix} = 0$$

gilt, folgt wie in § 26 die Gleichung $M + \lambda N = 0$ mit festem λ auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$; man braucht nur φ_2 so zu wählen, daß

$$A = \iint\limits_{\mathfrak{S}} N\varphi_2(u, v)\,du\,dv \neq 0$$

ist und findet dann eine Gleichung

$$\iint (AM + BN)\,\varphi_1(u, v)\,du\,dv = 0,$$

in der B wie A von der Wahl der Funktion φ_1 unabhängig, und zwar

$$B = -\iint\limits_{\mathfrak{S}} M\varphi_2(u, v)\,du\,dv$$

ist, und dann gibt die soeben durchgeführte Abänderung des Haupthilfssatzes

$$AM + BN = 0, \quad M + \lambda N = 0, \quad \lambda = B/A,$$

wie behauptet war.

III. Die auf Doppelintegrale bezüglichen Extremsaufgaben lassen sich jetzt ganz wie früher die auf einfache Integrale bezüglichen behandeln. Soll J ein Extrem werden, so muß $\delta J = 0$ sein; bleibt die Randlinie fest, so verschwinden auf ihr δx, δy, δz und gilt die Gleichung

$$(4) \qquad \delta J = \iint_{\mathfrak{S}} (P\delta x + Q\delta y + R\delta z)\, du\, dv = 0.$$

Nun setze man z. B.

$$\bar{x} - x = \varepsilon\theta(u, v), \quad \bar{y} - y = \bar{z} - z = 0,$$

wobei $\theta(u, v)$ am Rande $\mathfrak{C}$ verschwinde; dann ist

$$\delta x = \theta(u, v)\, d\varepsilon, \quad \delta y = \delta z = 0$$

und die Gleichung (4) gibt

$$\iint_{\mathfrak{S}} P\theta(u, v)\, du\, dv = 0.$$

Die gesuchte, gefunden gedachte Fläche $\mathfrak{S}$ gebe auch für die zweiten Ableitungen von x, y, z nach u und v stetige Werte; dann ist P stetig und der erweiterte Haupthilfssatz gibt $P = 0$. Ebenso findet man offenbar

$$(5) \qquad P = Q = R = 0,$$

was aber nach den Identitäten (6) des § 46 nur eine Gleichung bedeutet. Diese ist eine partielle Differentialgleichung für z als Funktion von x und y, wenn man

$$u = x, \quad v = y, \quad p = z_u, \quad q = z_v,$$

$$\Phi(x, 1, 0, y, 0, 1, z, p, q) = f(x, y, z, p, q)$$

setzt,

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0.$$

Damit sind die Eulerschen Gleichungen für das Doppelintegral J gefunden; Extremale ist eine Fläche, die sie erfüllt.

Ist die Randlinie in gewissem Umfang frei wählbar, z. B. nur auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{M}$ zu wählen, so muß zunächst das Extrem des Integrals J auch gegenüber Nachbarkurven mit derselben Randlinie vorliegen, die Eulerschen Gleichungen (5) also erfüllt sein; bei beliebigen Verschiebungen des Randes $\mathfrak{C}$ ergibt sich nach (3) und wegen der geforderten Extremseigenschaft

$$\delta J = \int_{\mathfrak{C}} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Hier sind δx, δy, δz Variationen, die bei einer Verschiebung der Kurve $\mathfrak{C}$ auf der Fläche $\mathfrak{M}$ auftreten; sind auf dieser α und β die Unabhängigen, so hat man

$$\delta x = x_\alpha \delta \alpha + x_\beta \delta \beta, \quad \delta y = y_\alpha \delta \alpha + y_\beta \delta \beta, \quad \delta z = z_\alpha \delta \alpha + z_\beta \delta \beta$$

zu setzen und die Gleichung (6) hat die Form

$$\int_{\mathfrak{C}} (A \delta \alpha + B \delta \beta) \, dt = 0,$$

wobei t wie früher ein längs der Kurve $\mathfrak{C}$ maßgebender Parameter ist. Jetzt ergibt bei der Willkürlichkeit der Variationen $\delta \alpha$ und $\delta \beta$ der ursprüngliche Haupthilfssatz der Variationsrechnung

$$A = B = 0,$$

also auch $A \delta \alpha + B \delta \beta = 0$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung nennen wir die Transversalitätsbedingung; sie gibt eine Beziehung zwischen der auf der Fläche $\mathfrak{M}$ möglichen allgemeinen Verschiebung δ, der Richtung der Kurve $\mathfrak{C}$, die von der Differentialen d abhängt, und den Größen X, Y, Z die, wie die Formeln

$$x_u X + y_u Y + z_u Z = x_v X + y_v Y + z_v Z = 0$$

zeigen, den Richtungskosinus der Fläche $\mathfrak{S}$ proportional sind. Ist also die Randlinie des gesuchten Flächenstücks $\mathfrak{S}$ auf der Fläche $\mathfrak{M}$ frei wählbar, so besteht eine notwendige Extremsbedingung darin, daß die Extremale die Fläche $\mathfrak{M}$ transversal schneidet.

IV. Endlich ist die formale Behandlung der isoperimetrischen Aufgaben vom vierten Abschnitt hierher insofern zu übertragen, als die isoperimetrische Regel ihre Bedeutung im wesentlichen behält.

Werde das Extrem des Integrals

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Phi(x, x_u, x_v, \ldots)\, d u\, d v$$

gesucht bei gegebenem Werte des Integrals

$$K = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Psi(x, x_u, x_v, \ldots)\, d u\, d v$$

und fester Randlinie $\mathfrak{C}$. Man setze etwa

$$\bar{x} - x = \varepsilon_1\, \theta_1(u, v) + \varepsilon_2\, \theta_2(u, v), \quad \bar{y} - y = \bar{z} - z = 0;$$

in der gewohnten Bezeichnung seien die mit $\bar{x}$ an Stelle von x gebildeten Integrale J und K

$$\bar{J} = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \bar{K} = g(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Dann ist

$$\delta J = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 d\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 d\varepsilon_2 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} P\, \delta x\, d u\, d v$$

$$= \iint P(\theta_1\, d\varepsilon_1 + \theta_2\, d\varepsilon_2)\, d u\, d v,$$

wobei die Fußmarke 0 das Wertsystem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ bedeutet, also

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} P\, \theta_1(u, v)\, d u\, d v, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} P\, \theta_2(u, v)\, d u\, d v.$$

Gehen ferner P, Q, R in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ über, wenn Φ durch Ψ ersetzt wird, so folgt ebenso

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \mathfrak{P}\, \theta_1(u, v)\, d u\, d v, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \mathfrak{P}\, \theta_2(u, v)\, d u\, d v.$$

Nun soll $f(0, 0)$ ein Extremwert von $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sein bei der Bedingung $g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{const.}$; also gibt die Differentialrechnung

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \iint\limits_{\mathfrak{S}} P\, \theta_1\, d u\, d v & \iint\limits_{\mathfrak{S}} P\, \theta_2\, d u\, d v \\ \iint\limits_{\mathfrak{S}} \mathfrak{P}\, \theta_1\, d u\, d v & \iint\limits_{\mathfrak{S}} \mathfrak{P}\, \theta_2\, d u\, d v \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn $\mathfrak{P}$ nicht etwa auf der Fläche $\mathfrak{S}$ verschwindet, diese also nicht Extremale des Integrals K ist, folgt hieraus nach Absatz II

$$P + \lambda\, \mathfrak{P} = 0, \quad \lambda = \text{const.}$$

und die Identitäten (6) des § 46 geben dann sofort

$$Q + \lambda \mathfrak{Q} = 0, \quad R + \lambda \mathfrak{R} = 0,$$

womit die isoperimetrische Regel auf Doppelintegrale übertragen ist.

§ 48.

Beispiele.

I. Die Aufgabe der kleinsten Fläche bei gegebener Randlinie verlangt, mit positiver Quadratwurzel

$$\delta \iint_{\mathfrak{S}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = 0$$

zu machen, wenn $\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$ das Bogenelement der gesuchten Fläche $\mathfrak{S}$ ist, also

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Mit den bisherigen Bezeichnungen

$$X = y_u z_v - y_v z_u, \quad Y = z_u x_v - z_v x_u, \quad Z = x_u y_v - x_v y_u$$

findet man

$$EG - F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

kann also in obigem Doppelintegral

$$\Phi(x, x_u, x_v, \ldots) = \mathfrak{F}(X, Y, Z) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

setzen. Die Formeln § 47 (2) ergeben dann

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \Phi_{x_u} &= -z_v \mathfrak{F}_Y + y_v \mathfrak{F}_Z = -z_v \eta + y_v \zeta, \\ \Phi_{x_v} &= z_u \mathfrak{F}_Y - y_u \mathfrak{F}_Z = z_u \eta - y_u \zeta; \end{aligned}$$

dabei sind

$$\xi = \mathfrak{F}_X = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \eta = \mathfrak{F}_Y, \quad \zeta = \mathfrak{F}_Z$$

offenbar die Richtungskosinus einer Normale der Fläche $\mathfrak{S}$.

Da $\Phi_x = 0$ ist, so geben die Gleichungen (1)

$$P = -\frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v} = (\eta z_v - \zeta y_v)_u - (\eta z_u - \zeta y_u)_v = 0$$

als erste Eulersche Gleichung der Aufgabe. Man kann sie, indem man ausdifferenziert und umstellt, auch in der Form

$$\eta_u z_v - \eta_v z_u - (\zeta_u y_v - \zeta_v y_u) = 0$$

schreiben oder

$$P = \frac{\partial(\eta, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\zeta, y)}{\partial(u, v)} = 0,$$

woraus ihre Invarianz gegenüber einer Transformation der Parameter u, v ersichtlich wird.

In dieser Gleichung ist x bevorzugt; werden ebenso y und z bevorzugt, so erhält man die weiteren Eulerschen Gleichungen

$$Q = \frac{\partial(\zeta, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\xi, z)}{\partial(u, v)} = 0,$$

$$R = \frac{\partial(\xi, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\eta, x)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Vervielfacht man diese Gleichungen mit ξ, η, ζ und addiert, so ergibt sich

$$(2) \qquad P\xi + Q\eta + R\zeta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ x_v & y_v & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x_u & y_u & z_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung behält ihre Form nicht nur bei einer Parametertransformation, bei der die Größen ξ, η, ζ ungeändert bleiben, sondern auch bei einer Koordinatentransformation. Die Größen jeder Zeile der beiden Determinanten dritter Ordnung transformieren sich wie die Koordinaten eines Punktes; die Determinante bleibt also bei einer Koordinatentransformation, die die Orientierung der Achsen nicht ändert, ungeändert.

Jetzt nehmen wir zunächst $u = x$, $v = y$, und setzen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = t,$$

dann wird mit positiver Quadratwurzel

$$\xi = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \eta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\xi_u = \frac{-r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \cdots, \quad \eta_u = \frac{-s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \cdots, \quad \zeta_u = \cdots$$

$$\xi_v = \frac{-s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \cdots, \quad \eta_v = \frac{-t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad , \quad \zeta_v = \cdots$$

und die weggelassenen Glieder haben solche Form, daß sie verschwinden, wenn $p = q = 0$ gesetzt wird. Offenbar ist ferner

$$x_u = 1, \quad y_u = 0, \quad z_u = p, \quad x_v = 0, \quad y_v = 1, \quad z_v = q.$$

Legen wir daher den Koordinatenanfangspunkt in einen Punkt der Fläche, die xy-Ebene in seine Tangentialebene, so wird $p = q = 0$, und die Gleichung (2) nimmt folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -r & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -s & -t & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad -(r+t) = 0.$$

Nun wird die Fläche $\mathfrak{S}$ in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes bis auf Glieder höherer Ordnung in x und y durch die Gleichung

$$z = \frac{1}{2}(r x^2 + 2 s x y + t y^2)$$

dargestellt; r und t sind also die Krümmungen der Schnitte $z = {}^1/_2\, r x^2$ und $z = {}^1/_2\, t y^2$, positiv oder negativ, je nachdem der betreffende Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder negativen Hälfte der z-Achse liegt. Dabei kann das Koordinatensystem um die z-Achse beliebig gedreht werden, ohne seine bisher benutzten Eigenschaften einzubüßen; die Summe der Krümmungen zweier aufeinander senkrechter Normalschnitte der Fläche $\mathfrak{S}$ ist immer Null, im besonderen auch bei den Hauptschnitten: Sind ϱ und ϱ' die Hauptkrümmungsradien mit ihrem Vorzeichen, so ist

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = 0.$$

Die Extremalen sind Minimalflächen, ihre mittlere Krümmung verschwindet.

Der Ausdruck $P\xi + \cdots$ werde einmal wie bisher, dann mit einem anderen Parametersystem gebildet und das Parametersystem jeweils als Fußmarke beigefügt; dann folgt aus der Gleichung (2) unmittelbar, da ξ, η, ζ von der Wahl der Parameter unabhängige Größen sind,

$$(P\xi + Q\eta + R\zeta)_{\bar{u}\bar{v}} = (P\xi + Q\eta + R\zeta)_{uv} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

also, wenn im besonderen $\bar{u} = x$, $\bar{v} = y$ gesetzt wird,

$$(P\xi + Q\eta + R\zeta)_{xy} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = (P\xi + Q\eta + R\zeta)_{uv}$$

oder, da eine gewisse Normalenrichtung die Gleichung

$$(3)\qquad \sqrt{EG-F^2}\cos(zN) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

liefert,

$$(P\xi + Q\eta + R\zeta)_{xy}\cos(zN) = \frac{(P\xi + Q\eta + R\zeta)_{uv}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Nehmen wir nun links das oben eingeführte xyz-System, so wird in dem betrachteten, also einem beliebigen Punkte

$$\cos(zN) = 1, \quad (P\xi + Q\eta + R\zeta)_{xy} = -\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right);$$

also folgt die allgemeine Formel

$$(\qquad \sqrt{EG-F^2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) = -(P\xi + Q\eta + R\zeta)_{uv}$$

$$= -\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix},$$

wobei ϱ und ϱ' positiv zu nehmen sind, wenn die betreffenden Krümmungsmittelpunkte nach der durch die Gleichung (3) definierten Richtung N hin liegen.

Die Transversalitätsbedingung lautet

$$\begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0;$$

d. h. wird die kleinste Fläche gesucht, deren Rand auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{M}$ verlaufen soll, so müssen die Richtung δ, d. h. eine beliebige zur Fläche $\mathfrak{M}$ tangentiale Richtung, die Richtung der Randlinie und die Normale der Extremale in einer Ebene liegen; die Minimalfläche steht auf der Fläche $\mathfrak{M}$ senkrecht.

II. Die Gestalt eines Tropfens wird nach Gauß durch die Lösung folgender Extremsaufgabe bestimmt. Die potentielle Energie bestehe aus dem von der Schwerkraft herrührenden Teil und einem der Oberfläche proportionalen, von den Kapillarkräften herrührenden Teil; ist die Oberfläche teils frei, teils durch eine Wand bestimmt, so hat man die entsprechenden Oberflächenteile mit verschiedenen Proportionalitätsfaktoren in Ansatz zu bringen. Die Gleichgewichtsfigur eines Tropfens von unzusammendrückbarer Flüssigkeit wird bestimmt durch die Forderung, die potentielle Energie bei gegebenem Rauminhalt zum Extrem zu machen.

Sei $d\,S$ das Element der freien Oberfläche, $d\,S_0$ das Element der an die Wand grenzenden Oberfläche, $d\tau$ das Raumelement, die z-Achse die Richtung der Schwere, A, B, C Festwerte, dann wird das Extrem der Größe

$$J = A\int d\,S + B\int d\,S_0 + C\int z\,d\,\tau$$

bei gegebenem Werte des Integrals

$$K = \int d\,\tau$$

gesucht.

Die Gesamtoberfläche bestehe aus den Teilen S und S_0, deren Elemente $d\,S$ und $d\,S_0$ sind, und über die mit diesen Elementen immer integriert wird; ein Integral mit dem Element $d\tau$ bezieht sich stets auf den ganzen Raum der Flüssigkeit.

Dann kann man zunächst die in J und K vorkommenden Raumintegrale mittels der Gaußschen Integraltransformation in Oberflächenintegrale verwandeln. Sind N und N_0 die äußeren Normalen der Flüssigkeit auf den Flächen S und S_0, so findet man nach der allgemeinen Formel

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,d\,\tau = \int \varphi \cos(z\,N)\,d\,S,$$

indem immer die Fußmarke 0 bei den Elementen der Wand angebracht wird, die Gleichungen

$$\int z\,d\,\tau = \int \frac{z^2}{2}\cos(z\,N)\,d\,S + \int \frac{z_0^2}{2}\cos(z\,N_0)\,d\,S_0,$$

$$\int d\,\tau = \int x\cos(x\,N)\,d\,S + \int x_0\cos(x\,N_0)\,d\,S_0$$

und, indem man in der letzten Formel x durch y und z ersetzt,

$$3\int d\,\tau = \int d\,S[x\cos(x\,N) + y\cos(y\,N) + z\cos(z\,N)]$$
$$+ \int d\,S_0[x_0\cos(x\,N_0) + y_0\cos(y\,N_0) + z_0\cos(z\,N_0)].$$

Man wähle nun auf den Oberflächen S und S_0 die Parametersysteme u, v und u_0, v_0 so, daß immer mit positiver Wurzel die Werte

$$\cos(z\,N) = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos(z\,N_0) = \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}}$$

gelten; natürlich ist, wie immer,

$$X = \frac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)}, \quad X_0 = \frac{\partial(y_0,\,z_0)}{\partial(u_0,\,v_0)} \text{ usf.}$$

gesetzt; es sollen also immer die Richtungen $v = 0$, $du > 0$, $u = 0$, $dv > 0$ und N wie die Achsen x, y, z orientiert sein und entsprechend auf der Oberfläche S_0. Dann entspricht dem positiven Umlauf um einen Punkt (u, v) der uv-Ebene ein Umlauf auf der Fläche S, der um die Normale N positiv herumgeht, und Entsprechendes gilt für die Oberfläche S_0. Stoßen nun, wie wir annehmen wollen, beide Flächenteile in einer geschlossenen Linie $\mathfrak{C}$ zusammen, so umkreist diese, entsprechend dem positiven Umlauf ihres Bildes in der uv-Ebene durchlaufen, die Normalen N im positiven Sinne, und Entsprechendes gilt wieder für die Fläche S_0 und die Normalen N_0. Nun geht irgend ein Umlauf der Linie $\mathfrak{C}$ positiv um die Normalen N und zugleich negativ um die Normalen N_0 herum oder umgekehrt; die beiden, den positiven Umlaufssinnen in der uv-Ebene und der $u_0 v_0$-Ebene entsprechenden Umläufe der Linie $\mathfrak{C}$ sind also entgegengesetzt, so daß man auf ihr zwar

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

zu setzen hat, in den Variationsformeln des § 48 aber

$$(5) \qquad dx = -dx_0, \quad dy = -dy_0, \quad dz = -dz_0,$$

da in diesen die Differentiale dx usf. immer der positiven Umkreisung der jeweils betrachteten Fläche entsprechen.

Nach diesen Vorbereitungen ist die Aufgabe mittels der Formeln des § 48 leicht zu lösen, wenn wir noch

$$dS = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

$$dS_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}\, du_0\, dv_0 = \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}\, du_0\, dv_0$$

setzen; es ergibt sich dann

$$J = A \iint\limits_S \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\, du\, dv + B \iint\limits_{S_0} \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}\, du_0\, dv_0$$
$$+ C \iint\limits_S \frac{z^2}{2} Z\, du\, dv + C \iint\limits_{S_0} \frac{z_0^2}{2} Z_0\, du_0\, dv_0,$$

$$K = \frac{1}{3} \iint\limits_S (xX + yY + zZ)\, du\, dv$$
$$+ \frac{1}{3} \iint\limits_{S_0} (x_0 X_0 + y_0 Y_0 + z_0 Z_0)\, du_0\, dv_0.$$

Bilden wir nun aus den Integralen

$$(6)\qquad A\iint\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,du\,dv+C\iint\frac{z^2}{2}Z\,du\,dv,$$
$$\iint\frac{1}{3}(xX+yY+zZ)\,du\,dv$$

nach § 48 die Größen P, Q, R, die für das zweite Integral durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden mögen, und die, wenn überall die Fußmarke 0 erscheint und A durch B ersetzt wird, in P_0, $\mathfrak{P}_0, \ldots$ übergehen mögen, so ergibt sich nach § 47 (3) unmittelbar

$$\delta J = A\int_{\mathfrak{C}}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ dx & dy & dz\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$
$$+B\int_{\mathfrak{C}}\frac{1}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}}\begin{vmatrix}\delta x_0 & \delta y_0 & \delta z_0\\ dx_0 & dy_0 & dz_0\\ X_0 & Y_0 & Z_0\end{vmatrix}$$
$$+C\int_{\mathfrak{C}}\frac{z^2}{2}(\delta x\,dy-\delta y\,dx)+C\int_{\mathfrak{C}}\frac{z_0^2}{2}(\delta x_0\,dy_0-\delta y_0\,dx_0)$$
$$+\iint_S(P\delta x+Q\delta y+R\delta z)\,du\,dv$$
$$+\iint_{S_0}(P_0\delta x_0+Q_0\delta y_0+R_0\delta y_0)\,du_0\,dv_0,$$

$$\delta K=\frac{1}{3}\int_{\mathfrak{C}}\begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ dx & dy & dz\\ x & y & z\end{vmatrix}+\frac{1}{3}\int_{\mathfrak{C}}\begin{vmatrix}\delta x_0 & \delta y_0 & \delta z_0\\ dx_0 & dy_0 & dz_0\\ x_0 & y_0 & z_0\end{vmatrix}$$
$$+\iint_S(\mathfrak{P}\delta x+\mathfrak{Q}\delta y+\mathfrak{R}\delta z)\,du\,dv$$
$$+\iint_{S_0}(\mathfrak{P}_0\delta x_0+\mathfrak{Q}_0\delta y_0+\mathfrak{R}_0\delta z_0)\,du_0\,dv_0.$$

Hier geben die Gleichungen (5) eine Vereinfachung; variieren wir die Randlinie $\mathfrak{C}$, so sind δx, δy, δz dieselben Größen wie δx_0, δy_0, δz_0; in δJ heben sich also die mit C behafteten Glieder und in δK die ersten beiden Determinanten.

Jetzt halten wir zunächst S_0 und $\mathfrak{C}$ fest; auch bei den dann noch möglichen Änderungen der Fläche S, die K ungeändert lassen, muß J einen Extremwert haben. Damit haben wir eine isoperimetrische Aufgabe wie in § 47, III.; es ergeben sich also für die Extremalen mit einem Festwert λ die Gleichungen

$$P + \lambda \mathfrak{P} = Q + \lambda \mathfrak{Q} = R + \lambda \mathfrak{R} = 0.$$

Ist nun S eine diese Gleichungen erfüllende Extremale, so geben die allgemeinen Formeln für δJ und δK mit Berücksichtigung der Gleichungen (4)

$$\delta J + \lambda \delta K = A \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$- B \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \end{vmatrix}$$

$$+ \iint_{S_0} [(P_0 + \lambda \mathfrak{P}_0) \delta x_0 + (Q_0 + \lambda \mathfrak{Q}_0) \delta y_0 + (R_0 + \lambda \mathfrak{R}_0) \delta z_0]\, du_0\, dv_0.$$

Jetzt variieren wir die Punkte (x_0, y_0, z_0) sachgemäß so, daß sie auf der Fläche S_0 fortschreiten; ebenso kann die Kurve $\mathfrak{C}$ nur auf einer über den benetzten Teil erweiterten Fläche S_0, der festen Wand, fortschreiten. Wir haben also etwa

$$\delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u_0} \delta u_0 + \frac{\partial x_0}{\partial v_0} \delta v_0$$

usf. zu setzen, und jetzt geben die Identitäten (6) des § 46

$$P_0 \frac{\partial x_0}{\partial u_0} + Q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u_0} + R_0 \frac{\partial z_0}{\partial u_0} = 0$$

usf.; also folgt

$$(P_0 + \lambda \mathfrak{P}_0) \delta x_0 + (Q_0 + \lambda \mathfrak{Q}_0) \delta y_0 + (R_0 + \lambda \mathfrak{R}_0) \delta z_0 = 0.$$

Ferner gilt längs der Kurve $\mathfrak{C}$ die Gleichung

$$(7) \qquad X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z = 0.$$

Das gesuchte Extrem fordert ferner, daß bei allen zulässigen Variationen $\delta J = 0$ sei, während der isoperimetrischen Bedingung zufolge auch $\delta K = 0$ sein muß; der obige Ausdruck für $\delta J + \lambda \delta K$ gibt also für alle zulässigen, d. h. die Gleichung (7) erfüllenden Variationen der Randlinie die Forderung

$$(8) \qquad A \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$- B \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist die Gleichung (7) erfüllt, so sind die Variationen längs der Randlinie im übrigen willkürlich.

Es muß zwar dafür gesorgt sein, daß das Raumintegral K seinen Wert behält; das kann aber immer geschehen, indem man einer beliebigen die Randlinie in willkürlicher Weise auf der Fläche S_0 verschiebenden Variation eine andere beifügt, die die Randlinie ungeändert läßt; bei der so erhaltenen Gesamtvariation sind dann δx, δy, δz auf der Randlinie dieselben Größen wie vorher.

Schreibt man nun die Gleichung (8) in der Form

$$\int_{\mathfrak{C}} (l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z) = 0$$

und addiert zu ihr die mit einem zu bestimmenden Faktor $\varLambda$ vervielfachte und über $\mathfrak{C}$ integrierte Gleichung (7), so erhält man

$$\int_{\mathfrak{C}} \{(l + \varLambda X_0)\,\delta x + (m + \varLambda Y_0)\,\delta y + (n + \varLambda Z_0)\,\delta z\} = 0.$$

Jetzt werde $\varLambda$ auf einer Strecke, auf der Z_0 nicht verschwindet, so gewählt, daß

$$n + \varLambda Z_0 = 0;$$

dann sind, da nur die Gleichung (7) zu erfüllen ist, δx und δy unabhängige Variationen und der Haupthilfssatz ergibt

$$l + \varLambda X_0 = 0, \quad m + \varLambda Y_0 = 0,$$

oder, indem man die Werte l, m, n aus der Gleichung (8) entnimmt,

$$\frac{A(Z\,dy - Y\,dz)}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} - \frac{B(Z_0\,dy - Y_0\,dz)}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}} = -\varLambda X_0,$$

$$\frac{A(X\,dz - Z\,dx)}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} - \frac{B(X_0\,dz - Z_0\,dx)}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}} = -\varLambda Y_0,$$

$$\frac{A(Y\,dx - X\,dy)}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} - \frac{B(Y_0\,dx - X_0\,dy)}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}} = -\varLambda Z_0.$$

Vervielfacht man diese Gleichungen mit $Z_0\,dy - Y_0\,dz$, $X_0\,dz - Z_0\,dx$, $Y_0\,dx - X_0\,dy$, wendet den Multiplikationssatz der Matrices an auf die Matrixprodukte

$$\left\|\begin{matrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ dx & dy & dz \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ dx & dy & dz \end{matrix}\right\|^2$$

und benutzt die Gleichungen

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = X_0\,dx + Y_0\,dy + Z_0\,dz = 0,$$

so ergibt sich

$$\frac{A(XX_0+YY_0+ZZ_0)(dx^2+dy^2+dz^2)}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

$$-B\sqrt{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}(dx^2+dy^2+dz^2)=0$$

oder einfach

$$A\cos(NN_0)-B=0,$$

natürlich längs der Linie $\mathfrak{C}$. An der Trennungslinie schneiden sich also die freie Flüssigkeitsoberfläche und die Wand unter festem Winkel.

Endlich sind noch die Größen P, Q, R, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ für die Integrale (5) unmittelbar nach den Formeln (4) und (1) zu berechnen; man findet, da

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{EG-F^2}$$

ist,

$$P\xi+Q\eta+R\zeta=\left[-A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)+Cz\right]\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$\mathfrak{P}\xi+\mathfrak{Q}\eta+\mathfrak{R}\zeta=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

und für die Extremalen gilt hiernach die Gleichung

$$-A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)+Cz+\lambda=0;$$

die mittlere Krümmung ändert sich proportional der lotrechten Erhebung.

Setzt man übrigens $C=0$, so erhält man die Lösung der isoperimetrischen Aufgabe, eine Oberfläche bei gegebenem Rauminhalt extrem zu machen; die gesuchten Flächen müssen festwertige mittlere Krümmung besitzen.

§ 49.

Hinreichende Bedingungen des Extrems und Transversalen.

I. Ein Extremalenstück $\mathfrak{S}$ sei das dem Werte $a=a_0$ entsprechende einer Schar von Stücken $\mathfrak{S}'$, die durch Gleichungen

(1) $$x=\mathfrak{x}(u,v,a),\quad y=\mathfrak{y}(u,v,a),\quad z=\mathfrak{z}(u,v,a)$$

dargestellt sind mit der Bedingung

(2) $$\frac{\partial(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{\partial(u,v,a)}\neq 0$$

für alle Wertsysteme u, v, a, die den betrachteten Stücken entsprechen. Es sei möglich, das Stück $\mathfrak{S}$ mit einem Raumgebiet $\mathfrak{G}$

zu umgeben, durch dessen Punkte je ein Mitglied der Schar (1) hindurchgeht; bei den nötigen Regularitätseigenschaften der Funktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind dann die zu jedem Punkte (x, y, z) gehörigen Werte u, v, a, die die Beziehungen (1) ergeben, im Gebiet $\mathfrak{G}$ reguläre Funktionen von x, y, z. Die Extremalenstücke (1) bilden, wie wir sagen wollen, ein Feld, das, solange die Ungleichung (2) gilt, regulär bleibt, was wir für das Gebiet $\mathfrak{G}$ annehmen.

Wir beschreiben nun um einen beliebigen Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$ eine Kugel, die im Gebiet $\mathfrak{G}$ liegt und von jeder Fläche $\mathfrak{S}'$ in einer geschlossenen Linie $\mathfrak{L}'$ durchsetzt wird; das von dieser umrandete Stück der Fläche $\mathfrak{S}'$ heiße $\mathfrak{R}'$. Für zwei äußerste Werte von a, etwa a_1 und a_2, wird die Kugel von den zugehörigen Flächen $\mathfrak{S}'$ berührt, und $\mathfrak{R}'$ schrumpft in einen Punkt ein. Dann ist das Integral

$$J_{\mathfrak{R}'} = \iint\limits_{\mathfrak{R}'} \Phi\,(x, x_u, x_v, \ldots)\,du\,dv = \iint\limits_{\mathfrak{R}'} \mathfrak{F}(x, y, z, X, Y, Z)\,du$$

eine Funktion von a, und indem wir $\delta = da\,.\,\partial/\partial a$ setzen, geben die allgemeinen Formeln des § 47, da es sich um Extremalen handelt,

$$\delta J_{\mathfrak{R}'} = \int\limits_{\mathfrak{L}'} \begin{vmatrix} \delta x, & \delta y, & \delta z \\ dx, & dy, & dz \\ \mathfrak{F}_X, & \mathfrak{F}_Y, & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Integriert man diesen mit dem Faktor da behafteten Differentialausdruck nach a von a_1 bis a_2, so erhält man

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \delta J_{\mathfrak{R}'} = J_{\mathfrak{R}'}\Big|_{a_1}^{a_2} = 0. \tag{4}$$

Nun ist

$$\delta y\,dz - \delta z\,dy = d\,S \cos(x\,N),$$

wenn $d\,S$ das Flächenelement der Kugel, N ihre Normale bedeutet, und die entsprechenden Gleichungen gelten mit bevorzugter Stellung der Buchstaben y und z; die Gleichungen (3) und (4) können also geschrieben werden

$$\delta J_{\mathfrak{R}'} = \int\limits_{\mathfrak{L}'} d\,S\,[\mathfrak{F}_X \cos(x\,N) + \mathfrak{F}_Y \cos(y\,N) + \mathfrak{F}_Z \cos(z\,N)],$$

$$0 = \int d\,S\,[\mathfrak{F}_X \cos(x\,N) + \mathfrak{F}_Y \cos(y\,N) + \mathfrak{F}_Z \cos(z\,N)],$$

das letzte Integral erstreckt über die Oberfläche der Kugel. Aus dieser Gleichung folgt aber mittels der **Gaußschen** Integraltransformation, unter $d\tau$ das Raumelement verstanden,

$$(5) \qquad 0 = \int d\tau \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_X}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_Y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_Z}{\partial z} \right).$$

Wäre nun im Mittelpunkt unserer Kugel, also in einem beliebigen Punkte der Fläche $\mathfrak{S}$ z. B.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_X}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_Y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_Z}{\partial z} > 0,$$

so gälte dieselbe Gleichung bei den obwaltenden Stetigkeitseigenschaften, und da u, v, a reguläre Funktionen von x, y, z sind, auch für das ganze Innere der Kugel, sobald deren Radius hinreichend klein genommen wäre; die Gleichung (5) wäre unmöglich. Aus diesem Widerspruch folgt für jeden Punkt der Fläche $\mathfrak{S}$

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_X}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_Y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_Z}{\partial z} = 0,$$

und da jedes der Flächenstücke $\mathfrak{S}'$ die maßgebenden Eigenschaften mit $\mathfrak{S}$ gemein hat und mit einem entsprechenden, vielleicht engeren Gebiet $\mathfrak{G}$ umgeben werden kann, so gilt die erhaltene Gleichung für jeden Punkt eines Stückes $\mathfrak{S}'$, also im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$, und die Gleichung

$$(7) \qquad \int d\,S[\mathfrak{F}_X \cos(x\,N) + \mathfrak{F}_Y \cos(y\,N) + \mathfrak{F}_Z \cos(z\,N)] = 0$$

gilt, integriert über irgend eine geschlossene Fläche im Innern des Gebiets $\mathfrak{G}$, deren äußere Normale N sei; sind auf ihr etwa u^0, v^0 die unabhängigen Parameter, so kann man auch schreiben

$$(8) \qquad \iint d\,u^0\,d\,v^0 \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^0} & \frac{\partial y}{\partial u^0} & \frac{\partial z}{\partial u^0} \\ \frac{\partial x}{\partial v^0} & \frac{\partial y}{\partial v^0} & \frac{\partial z}{\partial v^0} \\ \mathfrak{F}_X & \mathfrak{F}_Y & \mathfrak{F}_Z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\iint d\,u^0\,d\,v^0 (X^0\,\mathfrak{F}_X + Y^0\,\mathfrak{F}_Y + Z^0\,\mathfrak{F}_Z) = 0;$$

die dritte Zeile der Determinante enthält Funktionen des Ortes, die durch das Feld allein bestimmt sind, und die Größen X^0, ... sind ebenso an der geschlossenen Oberfläche gebildet wie X, ... an der Extremale des Feldes.

Betrachten wir im Gebiet $\mathfrak{G}$ im besonderen die Kurven, die durch die Differentialgleichungen

$$(9) \qquad \frac{dx}{\mathfrak{F}_X} = \frac{dy}{\mathfrak{F}_Y} = \frac{dz}{\mathfrak{F}_Z}$$

definiert sind; sie heißen die Transversalen des Feldes. Auf einer von solchen Kurven gebildeten Fläche ist offenbar immer

$$\cos(xN)\,dx + \cos(yN)\,dy + \cos(zN)\,dz = 0,$$

also

$$\mathfrak{F}_X \cos(xN) + \mathfrak{F}_Y \cos(yN) + \mathfrak{F}_Z \cos(zN) = 0.$$

Ziehen wir daher durch die Punkte des Randes eines beliebigen, dem Stück $\mathfrak{S}$ angehörigen Teilstückes $\mathfrak{S}_0$ die Transversalen, und schneiden diese auf einem Stücke $\mathfrak{S}'$ den Rand eines Teilgebiets $\mathfrak{S}_0'$ aus, und wenden wir die Formel (7) auf das von $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_0'$ und der Transversalenröhre begrenzte Raumgebiet an, so folgt

$$(10) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}_0} dS[\mathfrak{F}_X \cos(xN) + \cdots] + \int\limits_{\mathfrak{S}_0'} dS[\mathfrak{F}_X \cos(xN) + \cdots] = 0.$$

Nun sei etwa auf $\mathfrak{S}_0$

$$\cos(xN) = \varepsilon\xi, \quad \cos(yN) = \varepsilon\eta, \quad \cos(zN) = \varepsilon\zeta$$

mit der Bezeichnung

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \xi = X/\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \ \ldots;$$

dann geht, indem man $\mathfrak{S}_0$ stetig in $\mathfrak{S}_0'$ überführt, die äußere Normale N des betrachteten Raumgebiets in die innere Normale an der Fläche $\mathfrak{S}_0'$ über; also folgt für diese

$$\cos(xN) = -\varepsilon\xi, \quad \cos(yN) = -\varepsilon\eta, \quad \cos(zN) = -\varepsilon\zeta;$$

da ferner

$$dS = du\,dv\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \quad X\mathfrak{F}_X + Y\mathfrak{F}_Y + Z\mathfrak{F}_Z = \mathfrak{F},$$

so gibt die Gleichung (10) schließlich

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_0} \mathfrak{F}\,du\,dv - \int\limits_{\mathfrak{S}_0'} \mathfrak{F}\,du\,dv = 0,$$

oder

$$J_{\mathfrak{S}_0} = \iint\limits_{\mathfrak{S}_0} \Phi\,du\,dv = \iint\limits_{\mathfrak{S}_0'} \Phi\,du\,dv = J_{\mathfrak{S}_0'}.$$

Das heißt: eine Transversalenröhre schneidet auf den Feldextremalen Stücke aus, die denselben Wert von J ergeben. Das ist offenbar das Analogon des Transversalensatzes des § 16; der Satz rührt von Radon her.

Hat man z. B.

$$\mathfrak{F} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad J = \int d\,S,$$

so daß die Extremalen Minimalflächen sind, so drücken die Gleichungen (9) aus, daß

$$dx : dy : dz = X : Y : Z$$

ist; die Transversalen stehen auf den Extremalen senkrecht. In einer Schar von Minimalflächenstücken werden also durch Röhren, die aus orthogonalen Trajektorien gebildet sind, im allgemeinen gleich große Flächenstücke ausgeschnitten.

II. Zerlegen wir die Integrationsoberfläche in der Gleichung (7) in zwei Teile $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ durch eine Kurve $\mathfrak{R}$, der ein bestimmter Umlaufssinn beigelegt wird, so geht dieser positiv herum um die Normalen N der einen Hälfte, negativ um die der anderen Hälfte. Verstehen wir also unter N immer die Normale, die von $\mathfrak{R}$ bei dem festgesetzten Umlaufssinn positiv umkreist wird, so kann die Gleichung (7) in der Form

$$\int_{\mathfrak{S}_1} d\,S\,[\mathfrak{F}_X \cos(xN) + \cdots] = \int_{\mathfrak{S}_2} d\,S\,[\mathfrak{F}_X \cos(xN) + \cdots]$$

geschrieben werden, oder auch, wenn X^0, Y^0, Z^0 auf die Integrationsoberfläche bezogen werden,

$$\int_{\mathfrak{S}_1} (X^0 \mathfrak{F}_X + Y^0 \mathfrak{F}_Y + Z^0 \mathfrak{F}_Z)\,du\,dv$$
$$= \int_{\mathfrak{S}_2} (X^0 \mathfrak{F}_X + Y^0 \mathfrak{F}_Y + Z^0 \mathfrak{F}_Y)\,du\,dv,$$

worin sich der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz ausspricht: der Wert des Integrals ist bei beliebigen Integrationsflächen mit derselben Randlinie derselbe.

Im besonderen nehmen wir für $\mathfrak{S}_1$ das von der Randlinie $\mathfrak{C}$ umschlossene Extremalenstück $\mathfrak{S}$, für $\mathfrak{S}_2$ eine im Gebiet $\mathfrak{G}$ verlaufende Fläche $\mathfrak{T}$ mit derselben Randlinie $\mathfrak{C}$. Dann ist nach dem Unabhängigkeitssatz, da an der Fläche $\mathfrak{S}$ offenbar $X^0 = X$, $Y^0 = Y$, $Z^0 = Z$ zu setzen ist,

$$\iint_{\mathfrak{T}} (X^0 \mathfrak{F}_X + Y^0 \mathfrak{F}_Y + Z^0 \mathfrak{F}_Z)\,du\,dv$$

$$= \iint_{\mathfrak{S}} (X \mathfrak{F}_X + Y \mathfrak{F}_Y + Z \mathfrak{F}_Z)\,du\,dv = \iint_{\mathfrak{S}} \mathfrak{F}\,du\,dv = J_{\mathfrak{S}};$$

anderseits ist offenbar

$$J_{\mathfrak{T}} = \iint_{\mathfrak{T}} \mathfrak{F}(x,\, y,\, z,\; X^0, Y^0,\, Z^0)\, du\, dv;$$

also folgt, wenn der letzte Integrand $\mathfrak{F}^0$ geschrieben wird,

$$J_{\mathfrak{T}} - J_{\mathfrak{S}} = \iint_{\mathfrak{T}} (\mathfrak{F}^0 - X^0 \mathfrak{F}_X - Y^0 \mathfrak{F}_Y - Z^0 \mathfrak{F}_Z)\, du\, dv,$$

oder, wenn

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, y, z,\, X,\, Y,\, Z,\, X^0,\, Y^0,\, Z^0) = \mathfrak{F}^0 - X^0 \mathfrak{F}_X - Y^0 \mathfrak{F}_Y - Z^0 \mathfrak{F}_Z$$

gesetzt wird,

$$J_{\mathfrak{T}} - J_{\mathfrak{S}} = \iint_{\mathfrak{T}} \mathcal{E}\, du\, dv.$$

Hat diese Differenz ein festes Vorzeichen, ohne je zu verschwinden, solange die Flächen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ nicht völlig zusammenfallen, so ist das gewünschte Extrem des Integrals J für das Flächenstück $\mathfrak{S}$ nachgewiesen. Wir haben also auch hier zwei zusammen hinreichende Bedingungen des Extrems: die Jacobische Bedingung, nach der das Flächenstück $\mathfrak{S}$ in ein Feld ohne Singularitäten eingebettet sein muß, und die Weierstraßsche, das feste Vorzeichen des Integrals

$$\iint \mathcal{E}(x,\, y,\, z,\;\, X,\, Y,\, Z,\;\, X^0,\;\, Y^0,\;\, Z^0)\, du\, dv$$

erstreckt über die Fläche, auf die sich die Größen X^0, Y^0, Z^0 beziehen, während X, Y, Z mit der durch den Punkt $(x,\, y,\, z)$ gehenden Feldextremale gebildet sind; das Integral darf auch nicht verschwinden.

Die Stetigkeitseigenschaften der Fläche $\mathfrak{T}$, die zu verlangen sind, müssen nur so weit reichen, daß dieselbe mit $\mathfrak{S}$ zusammen einen einteiligen oder mehrteiligen Raum begrenzt, auf den die Gaußsche Integraltransformation angewandt werden kann; dann sind die durchgeführten Betrachtungen hinreichend begründet.

III. Um die Weierstraßsche Bedingung handlich zu machen, gehen wir aus von den Gleichungen

$$\mathfrak{F} = X \mathfrak{F}_X + Y \mathfrak{F}_Y + Z \mathfrak{F}_Z,$$
$$\mathcal{E} = \mathfrak{F}^0 - \mathfrak{F} - (X^0 - X)\mathfrak{F}_X - (Y^0 - Y)\mathfrak{F}_Y - (Z^0 - Z)\mathfrak{F}_Z,$$

nach denen $\mathcal{E}$ als Restglied in der Taylorschen Entwicklung der Größe $\mathfrak{F}^0$ nach Potenzen von $X^0 - X, \ldots$ erscheint; man kann daher setzen

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E} = {} & \mathfrak{F}^1_{XX}(X^0 - X)^2 + \mathfrak{F}^1_{YY}(Y^0 - Y)^2 + \mathfrak{F}^1_{ZZ}(Z^0 - Z)^2 \\ & + 2\mathfrak{F}^1_{YZ}(Y^0 - Y)(Z^0 - Z) + 2\mathfrak{F}^1_{ZX}(Z^0 - Z)(X^0 - X) \\ & + 2\mathfrak{F}^1_{XY}(X^0 - X)(Y^0 - Y), \end{aligned}$$

wobei der Zeiger 1 bedeutet, daß für die allgemeinen Unabhängigen X, Y, Z die besonderen Werte

$$\theta X^0 + (1-\theta) X, \quad \theta Y^0 + (1-\theta) Y, \quad \theta Z^0 + (1-\theta) Z$$

zu setzen sind, in denen θ ein positiver echter Bruch ist. Maßgebend für das Vorzeichen der Größe $\mathcal{E}$ ist also dasjenige der quadratischen Form

$$\mathfrak{F}_{XX}\alpha^2 + \mathfrak{F}_{YY}\beta^2 + \mathfrak{F}_{ZZ}\gamma^2 + 2\mathfrak{F}_{YZ}\beta\gamma + 2\mathfrak{F}_{ZX}\gamma\alpha + 2\mathfrak{F}_{XY}\alpha\beta,$$

die sich wegen der Gleichungen

$$X\mathfrak{F}_{XX} + Y\mathfrak{F}_{XY} + Z\mathfrak{F}_{XZ} = 0$$

usf. auf eine Form von zwei Unabhängigen zurückführen läßt. Hat sie ein festes Vorzeichen, so gilt dasselbe mit demselben Vorzeichen von $\mathcal{E}$.

Diese Größe verschwindet aber offenbar, wenn

$$(11) \qquad X^0 = \mu X, \quad Y^0 = \mu Y, \quad Z^0 = \mu Z, \quad \mu > 0,$$

das nennen wir wieder das ordentliche Verschwinden. Ein solches Ereignis kann nicht auf der ganzen Fläche $\mathfrak{T}$ eintreten, wenn diese überhaupt von $\mathfrak{S}$ verschieden ist. Sind nämlich u_0, v_0 die Unabhängigen auf der Fläche $\mathfrak{T}$, so sind die den Gleichungen

$$x(u_0, v_0) = \mathfrak{x}(u, v, v), \quad y(u_0, v_0) = \mathfrak{y}(u, v, a),$$
$$z(u_0, v_0) = \mathfrak{z}(u, v, a)$$

entsprechenden Werte u, v, a Funktionen von u_0, v_0 und man hätte in diesem Sinne

$$dx = \mathfrak{x}_u\, du + \mathfrak{x}_v\, dv + \mathfrak{x}_a\, da$$

usf. Vervielfacht man mit diesen Größen die Gleichungen (11), so ergibt sich

$$0 = \mu(X\mathfrak{x}_a + Y\mathfrak{y}_a + Z\mathfrak{z}_a)\, da$$

oder

$$\mu \frac{\partial(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\partial(u, v, a)}\, da = 0,$$

also, da die hier auftretende Funktionaldeterminante der Jacobischen Bedingung zufolge von Null verschieden ist und dasselbe von μ gilt, $da = 0$. Auf der ganzen Fläche $\mathfrak{T}$ wäre a festwertig, also $v = a_0$, da dieser Wert am Rande auftritt; $\mathfrak{T}$ fiele mit $\mathfrak{S}$ zusammen. Die Größe $\mathcal{E}$ kann somit, abgesehen von diesem belanglosen Falle nicht auf der ganzen Fläche $\mathfrak{T}$ in ordentlicher Weise verschwinden.

Weiß man also, daß die Größe $\mathfrak{E}$ auf der Fläche $\mathfrak{T}$ nur vielleicht in ordentlicher Weise verschwindet und festes Vorzeichen besitzt, so ist mit Hilfe der Jacobischen Bedingung das Extrem gesichert: das Integral

$$J_{\mathfrak{T}} - J_{\mathfrak{S}} = \iint\limits_{\mathfrak{T}} \mathfrak{E}\, d\,u\, d\,v$$

hat ein festes Vorzeichen, ohne zu verschwinden. Je nachdem $\mathfrak{E}$ positiv oder negativ ist, liegt ein Minimum oder Maximum vor.

IV. Nehmen wir als Beispiel wieder die Minimalflächen, so ist mit positiver Wurzel

$$\mathfrak{F} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\mathfrak{E} = \sqrt{X^0 X^0 + Y^0 Y^0 + Z^0 Z^0} - \frac{X X^0 + Y Y^0 + Z Z^0}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$= \sqrt{X^0 X^0 + Y^0 Y^0 + Z^0 Z^0}\, \{1 - \cos(N N^0)\},$$

wobei

$$\cos(x N) = X / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(x N^0) = X^0 / \sqrt{X^0 X^0 + Y^0 Y^0 + Z^0 Z^0} \text{ usf.}$$

gesetzt ist. Die Größe $\mathfrak{E}$ ist also niemals negativ und verschwindet nur, wenn $\cos(N N^0) = +1$, d. h. überhaupt nur in ordentlicher Weise. Das Extrem ist somit hier schon durch die Jacobische Bedingung allein gesichert.

Felder von Minimalflächenstücken sind leicht herzustellen, da es vielerlei Transformationsgruppen gibt, die Minimalflächen in Minimalflächen überführen. Wenn z. B. von irgend einem solchen Flächenstück keine Tangente durch den Punkt 0 geht, kann man es einer stetigen Reihe von Ähnlichkeitstransformationen mit 0 als Ähnlichkeitszentrum unterwerfen und erhält dadurch ein singularitätenfreies Feld; ein Minimalflächenstück der bezeichneten Art bietet also in der Tat ein Extrem der Fläche dar. Dasselbe gilt, wenn ein Minimalflächenstück keine einer bestimmten Richtung $\mathfrak{r}$ parallele Tangente darbietet; man erhält ein Feld, das die Jacobische Bedingung erfüllt, durch Parallelverschiebung in der Richtung $\mathfrak{r}$. Ähnliche Ergebnisse lassen sich im Anschluß an die Drehungen und Spiraltransformationen aufstellen.

§ 50.

Theorie der zweiten Variation.

I. Es sei

$$e_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = e_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, 3)$$

irgend ein symmetrisches Größensystem; bestehen dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} &e_{\mathfrak{a}1} a + e_{\mathfrak{a}2} b + e_{\mathfrak{a}3} c = 0, \\ &e_{\mathfrak{a}1} \alpha + e_{\mathfrak{a}2} \beta + e_{\mathfrak{a}3} \gamma = 0, \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1}$$

setzt man

$$b\gamma - c\beta = X, \quad c\alpha - a\gamma = Y, \quad a\beta - b\alpha = Z,$$

und ist mindestens eine dieser Größen von Null verschieden, so folgt

$$e_{\mathfrak{a}1} : e_{\mathfrak{a}2} : e_{\mathfrak{a}3} = X : Y : Z,$$

oder auch

$$e_{11} : e_{12} : e_{13} = X^2 : XY : XZ, \quad e_{21} : e_{22} : e_{23} = YX : Y^2 : YZ,$$
$$e_{31} : e_{32} : e_{33} = ZX : ZY : Z^2;$$

es gibt daher eine solche endliche Größe m, daß die folgenden Gleichungen bestehen:

$$e_{11} = m X^2, \quad e_{12} = m XY, \quad e_{13} = m XZ, \quad e_{22} = m Y^2,$$
$$e_{23} = m YZ, \quad e_{33} = m Z^2.$$

Von dieser allgemeinen Bemerkung machen wir Gebrauch bei den Gleichungen, welche aus den Gleichungen (6) des § 46 durch Differentiation nach $x_u, y_u, \ldots z_u$ folgen. Wir setzen zur Abkürzung

$$x_u = a, \; y_u = b, \; z_u = c, \quad x_v = \alpha, \; y_v = \beta, \; z_v = \gamma.$$

Differenzieren wir die erwähnten Gleichungen nach a und α, so erhalten wir die acht Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a\Phi_{aa} + b\Phi_{ba} + c\Phi_{ca}, \\ \Phi_{\alpha} &= a\Phi_{a\alpha} + b\Phi_{b\alpha} + c\Phi_{ca}, \\ 0 &= \alpha\Phi_{aa} + \beta\Phi_{ba} + \gamma\Phi_{ca}, \\ 0 &= \alpha\Phi_{a\alpha} + \beta\Phi_{b\alpha} + \gamma\Phi_{c\alpha} + \Phi_{a}, \\ \Phi_{a} &= \alpha\Phi_{\alpha a} + \beta\Phi_{\beta a} + \gamma\Phi_{\gamma a}, \\ 0 &= \alpha\Phi_{\alpha\alpha} + \beta\Phi_{\beta\alpha} + \gamma\Phi_{\gamma\alpha}, \\ 0 &= a\Phi_{\alpha a} + b\Phi_{\beta a} + c\Phi_{\gamma a} + \Phi_{\alpha}, \\ 0 &= a\Phi_{\alpha\alpha} + b\Phi_{\beta\alpha} + c\Phi_{\gamma\alpha}. \end{aligned} \tag{2}$$

Diesen reihen sich 16 andere an, welche entstehen, wenn man die zweiten Fußmarken a und α gleichzeitig durch b und β oder durch c und γ ersetzt und dieselben Verwandlungen in den vorkommenden ersten Ableitungen macht. Letztere sind leicht zu eliminieren; man erhält offenbar die Gleichungen

$$a(\Phi_{a\alpha}+\Phi_{\alpha a})+b(\Phi_{b\alpha}+\Phi_{\beta a})+c(\Phi_{c\alpha}+\Phi_{\gamma a})=0,$$
$$\alpha(\Phi_{a\alpha}+\Phi_{\alpha a})+\beta(\Phi_{b\alpha}+\Phi_{\beta a})+\gamma(\Phi_{c\alpha}+\Phi_{\gamma a})=0,$$

aus denen wieder vier ähnliche durch die oben angegebenen Substitutionen entstehen. Die so erhaltenen sechs Gleichungen bilden ein System der Form (1), wenn man den Größen $e_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ folgende Werte gibt:

$$\begin{array}{lll} 2\Phi_{a\alpha}, & \Phi_{b\alpha}+\Phi_{\beta a}, & \Phi_{c\alpha}+\Phi_{\gamma a}, \\ \Phi_{a\beta}+\Phi_{\alpha b}, & 2\Phi_{b\beta}, & \Phi_{c\beta}+\Phi_{\gamma b}, \\ \Phi_{a\gamma}+\Phi_{\alpha c}, & \Phi_{b\gamma}+\Phi_{\beta c}, & 2\Phi_{c\gamma}; \end{array}$$

es folgt daher nach der obigen allgemeinen Bemerkung, daß eine gewisse Größe Φ^0_{12} folgenden Gleichungen genügt:

$$\Phi_{a\alpha}=\Phi^0_{12}X^2,\ \Phi_{b\alpha}+\Phi_{\beta a}=2\Phi^0_{12}XY,\ \Phi_{c\alpha}+\Phi_{\gamma a}=2\Phi^0_{12}XZ,$$
$$\Phi_{a\beta}+\Phi_{\alpha b}=2\Phi^0_{12}YX,\ \Phi_{b\beta}=\Phi^0_{12}Y^2,\ \Phi_{c\beta}+\Phi_{\gamma b}=2\Phi^0_{12}YZ,$$
$$\Phi_{a\gamma}+\Phi_{\alpha c}=2\Phi^0_{12}ZX,\ \Phi_{b\gamma}+\Phi_{c\beta}=2\Phi^0_{12}ZY,\ \Phi_{c\gamma}=\Phi^0_{12}Z^2.$$

Die von ersten Ableitungen der Funktion Φ freien der Gleichungen (2) und der aus ihnen abgeleiteten, 12 an der Zahl, zerfallen ebenso in zwei Systeme von der Form (1), in welchen die Größen $e_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ durch eines der folgenden beiden Größensysteme ersetzt sind:

$$\begin{array}{lll} \Phi_{aa}, & \Phi_{ab}, & \Phi_{ac}, \\ \Phi_{ba}, & \Phi_{bb}, & \Phi_{bc}, \\ \Phi_{ca}, & \Phi_{cb}, & \Phi_{cc}; \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \Phi_{\alpha\alpha}, & \Phi_{\alpha\beta}, & \Phi_{\alpha\gamma}, \\ \Phi_{\beta\alpha}, & \Phi_{\beta\beta}, & \Phi_{\beta\gamma}, \\ \Phi_{\gamma\alpha}, & \Phi_{\gamma\beta}, & \Phi_{\gamma\gamma}; \end{array}$$

es gibt daher solche Größen Φ^0_{11}, Φ^0_{22}, daß folgende Gleichungen bestehen:

$$\Phi_{aa}=\Phi^0_{11}X^2,\ \Phi_{ab}=\Phi^0_{11}XY,\ \Phi_{ac}=\Phi^0_{11}XZ,\ \Phi_{bb}=\Phi^0_{11}Y^2,$$
$$\Phi_{bc}=\Phi^0_{11}YZ,\ \Phi_{cc}=\Phi^0_{11}Z^2;$$

$$\Phi_{\alpha\alpha}=\Phi^0_{22}X^2,\ \Phi_{\beta\beta}=\Phi^0_{22}Y^2,\ \Phi_{\gamma\gamma}=\Phi^0_{22}Z^2,\ \Phi_{\beta\gamma}=\Phi^0_{22}YZ,$$
$$\Phi_{\gamma\alpha}=\Phi^0_{22}ZX,\ \Phi_{\alpha\beta}=\Phi^0_{22}XY.$$

Aus einigen von diesen und den obigen analogen Gleichungen kann offenbar mit der Bezeichnung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = H^2, \quad \Phi_{11} = \Phi_{11}^0 H^2, \quad \Phi_{12} = \Phi_{12}^0 H^2,$$
$$\Phi_{22} = \Phi_{22}^0 H^2$$

geschlossen werden

$$(3) \qquad \Phi_{11} = \Phi_{aa} + \Phi_{bb} + \Phi_{cc}, \quad \Phi_{22} = \Phi_{\alpha\alpha} + \Phi_{\beta\beta} + \Phi_{\gamma\gamma},$$
$$\Phi_{12} = \Phi_{a\alpha} + \Phi_{b\beta} + \Phi_{c\gamma}.$$

Beispiel. Setzt man, wie in der Aufgabe der kleinsten Fläche,

$$\Phi = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

so erhält man aus den Definitionen der Größen X, Y, Z unmittelbar

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_u^2} = \Phi_{aa} = \frac{y_v^2 + z_v^2}{\Phi} - \frac{(y_v Z - z_v Y)^2}{\Phi^3},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_u \partial x_v} = \Phi_{a\alpha} = \frac{-y_u y_v - z_u z_v}{\Phi} + \frac{(y_v Z - z\ Y)(y_u Z - z_u Y)}{\Phi^3},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_v^2} = \Phi_{\alpha\alpha} = \frac{y_u^2 + z_u^2}{\Phi} - \frac{(y_u Z - z_u Y)^2}{\Phi^3}.$$

In jedem dieser Ausdrücke verschiebe man gleichzeitig die Buchstaben x, y, z und X, Y, Z zyklisch; dann erhält man Φ_{bb}, Φ_{cc}, $\Phi_{b\beta}$, $\Phi_{c\gamma}$, $\Phi_{\beta\beta}$, $\Phi_{\gamma\gamma}$, und die Gleichungen (3) ergeben

$$\Phi_{11} = \frac{G}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Phi_{12} = \frac{-F}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Phi_{22} = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die Größen Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22} hängen offenbar von der Wahl des Unabhängigensystems u, v ab, haben aber gewisse von diesem unabhängige Eigenschaften. Wenn insbesondere die Form

$$\psi = \Phi_{11} h^2 + 2\Phi_{12} hk + \Phi_{22} k^2$$

definit ist, so gilt, wie wir zeigen wollen, dasselbe von der entsprechend gebildeten Form ψ^0, zu welcher man von einem anderen System unabhängiger Veränderlicher r, s gelangt. Die Form ψ ist nämlich dann und nur dann definite, wenn dies von der Form

$$\theta = \Phi_{aa} h^2 + 2\Phi_{a\alpha} hk + \Phi_{\alpha\alpha} k^2 = X^2 \psi / H^2$$

gilt; setzt man nun

$$\frac{\partial x}{\partial r} = l, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = m, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = n, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \lambda, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \mu, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \nu,$$

so hat man

$$l = a u_r + \alpha v_r, \quad \lambda = a u_s + \alpha v_s$$

sowie zwei ähnliche Gleichungen, die aber a und α nicht enthalten, und es gilt zufolge der für die Funktion Φ eingeführten Voraussetzung die Identität

$$\Phi(x, a, \alpha, y, b, \beta, z, c, \gamma) = \Phi(x, l, \lambda, y, m, \mu, z, n, \nu) \frac{\partial(r, s)}{\partial(u, v)}$$

oder kürzer geschrieben

$$\Phi = \Phi^0 . \varrho.$$

Hieraus folgt, da Φ^0 die Größen a und α nur in den Argumenten l, λ enthält:

$$\begin{aligned}
\Phi_a &= \left(\Phi_l^0 \frac{\partial l}{\partial a} + \Phi_\lambda^0 \frac{\partial \lambda}{\partial a}\right) \varrho = \varrho(\Phi_l^0 u_r + \Phi_\lambda^0 u_s), \\
\Phi_{aa} &= \varrho(\Phi_{ll}^0 u_r^2 + 2\Phi_{l\lambda}^0 u_r u_s + \Phi_{\lambda\lambda}^0 u_s^2), \\
\Phi_{a\alpha} &= \varrho(\Phi_{ll}^0 u_r v_r + \Phi_{l\lambda}^0 [u_r v_s + u_s v_r] + \Phi_{\lambda\lambda}^0 u_s v_s), \\
\Phi_{\alpha\alpha} &= \varrho(\Phi_{ll}^0 v_r^2 + 2\Phi_{l\lambda}^0 v_r v_s + \Phi_{\lambda\lambda}^0 v_s^2).
\end{aligned}$$

Die Form θ ist also mit der Form

$$\varrho(\Phi_{ll}^0 h_0^2 + 2\Phi_{l\lambda} h_0 k_0 + \Phi_{\lambda\lambda}^0 k_0^2) = \varrho\,\theta^0$$

identisch, wenn man setzt

$$h_0 = u_r h + v_r k, \quad k_0 = u_s h + v_s k,$$

und die Formen θ und θ^0 sind stets zugleich definite. Von letzterer unterscheidet sich aber die Form ψ^0 nur um einen positiven Faktor, womit die ausgesprochene Behauptung erwiesen ist. Die Vorzeichen von ψ und ψ^0 sind identisch oder verschieden, je nachdem die Funktionaldeterminante ϱ positiv oder negativ ist.

II. Der Begriff der zweiten Variation ist hier wie bei den einfachen Integralen durch die Gleichung

$$\delta(\delta M) = \delta^2 M$$

unmittelbar gegeben, da die Operation δ durch die Gleichung

$$\delta = d\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + d\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} + \cdots \Big|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0}$$

definiert war. Wir wollen annehmen, die Variationen δx, δy, δz seien in den Größen ε_1, ε_2, ... linear; dann ist offenbar

$$\delta(\delta x) = \delta(\delta x_u) = \cdots = 0,$$

und da

$$\delta J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \delta \Phi \, du \, dv$$

gesetzt wurde, folgt

$$\delta^2 J = \delta \iint \delta \Phi \, du \, dv = \delta(\delta J);$$

da ferner nach § 47 geschrieben werden kann

$$\delta J = \int\limits_{\mathfrak{C}} (U dv - V du) + \iint\limits_{\mathfrak{S}} du \, dv (P \delta x + Q \delta y + R \delta z),$$

das Zeichen δ aber mit dem der vorkommenden Integrationen vertauschbar ist, so folgt

$$\delta^2 J = \int\limits_{\mathfrak{C}} (\delta U dv - \delta V du) + \iint\limits_{\mathfrak{S}} du \, dv (\delta P \delta x + \delta Q \delta y + \delta R \delta z).$$

Verschwinden die Größen δx, δy, δz längs der Randlinie $\mathfrak{C}$, so gilt dasselbe von δU und δV, da jedes Glied dieser Ausdrücke eine jener drei Variationen als Faktor enthält, und es bleibt

$$\delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} du \, dv (\delta P \delta x + \delta Q \delta y + \delta R \delta z).$$

Diesen Ausdruck gestalten wir um unter der Voraussetzung

$$(4) \qquad \delta x = \xi \omega, \quad \delta y = \eta \omega, \quad \delta z = \zeta \omega; \quad \xi = X/H, \ldots$$

eine solche Variation heiße nach Analogie des in § 4, IV. eingeführten Begriffs eine Normalvariation. Bei einer solchen schneidet die Verbindungslinie der Punkte (x, y, z) und $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$ die Fläche $\mathfrak{S}$ senkrecht, und der Abstand der beiden Punkte ist $\pm \omega$, je nachdem die Richtung vom ersten zum zweiten mit der Normale N, deren Richtungskosinus ξ, η, ζ sind, übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Wenn dann δx, δy, δz an der Randlinie verschwinden, so gilt dasselbe von ω. Bei der Bezeichnung

$$\Omega = \xi \delta P + \eta \delta Q + \zeta \delta R$$

hat man dann

$$\delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Omega \omega \, du \, dv.$$

Der Ausdruck Ω ist, wie man leicht übersieht, in bezug auf die Größe ω und ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung linear homogen.

Um ihn übersichtlich zu gestalten, differenzieren wir die Gleichungen (4), wodurch wir erhalten

$$\delta a = \omega_u \xi + \omega \xi_u, \quad \delta b = \omega_u \eta + \omega \eta_u, \quad \delta c = \omega_u \zeta + \omega \zeta_u,$$
$$\delta \alpha = \omega_v \xi + \omega \xi_v, \quad \delta \beta = \omega_v \eta + \omega \eta_v, \quad \delta \gamma = \omega_v \zeta + \omega \zeta_v.$$

Sodann werde eine abgekürzte Bezeichnung für dreigliedrige lineare Ausdrücke eingeführt, deren Argumente δx, δy, δz oder ξ, η, ζ oder die Ableitungen eines dieser Größensysteme nach u oder v sind; als Koeffizienten treten hauptsächlich zweite Ableitungen von Φ auf. Wir bezeichnen ein solches Trinom durch sein eingeklammertes erstes Glied und setzen fest, daß in allen Koeffizienten eines Trinoms die erste Fußmarke von Φ stets dieselbe sein soll, die zweite aber die Werte x, y, z oder a, b, c oder α, β, γ durchläuft. So ist z. B.

$$[\Phi_{a\alpha}\,\delta x] = \Phi_{a\alpha}\,\delta x + \Phi_{a\beta}\,\delta y + \Phi_{a\gamma}\,\delta z,$$
$$[\Phi_{\beta a}\,\xi_u] = \Phi_{\beta a}\,\xi_u + \Phi_{\beta b}\,\eta_u + \Phi_{\beta c}\,\zeta_u.$$

In derselben Weise können wir auch solche Trinome darstellen, deren Koeffizienten aus den bisher betrachteten durch Differentiation nach u oder v entstehen, z. B.

$$\left[\frac{\partial \Phi_{a\alpha}}{\partial u}\,\xi\right] = \frac{\partial \Phi_{a\alpha}}{\partial u}\,\xi + \frac{\partial \Phi_{a\beta}}{\partial u}\,\eta + \frac{\partial \Phi_{a\gamma}}{\partial u}\,\zeta.$$

Offenbar kann die zweite Fußmarke von Φ innerhalb der Klammer stets nur a oder x oder α sein, während die erste jede der neun in Φ auftretenden Größen bezeichnen kann.

In dieser Bezeichnung gilt, da

$$P = \Phi_x - \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v},$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}\delta P = {} & [\Phi_{xx}\,\delta x] + [\Phi_{xa}\,\delta a] + [\Phi_{x\alpha}\,\delta \alpha] \\ & - \frac{\partial}{\partial u}\{[\Phi_{ax}\,\delta x] + [\Phi_{aa}\,\delta a] + [\Phi_{a\alpha}\,\delta \alpha]\} \\ & - \frac{\partial}{\partial v}\{[\Phi_{\alpha x}\,\delta x] + [\Phi_{\alpha a}\,\delta a] + [\Phi_{\alpha\alpha}\,\delta \alpha]\};\end{aligned}$$

hieraus erhält man die Größen δQ und δR, indem man in den ersten Fußmarken die Buchstaben x, a, α gleichzeitig durch y, b, β

oder z, c, γ ersetzt, alles andere aber ungeändert läßt. Wir fassen nun zunächst die Glieder ins Auge, welche die Trinome

$$(5) \qquad [\Phi_{xa}\,\delta a] - \frac{\partial}{\partial u}[\Phi_{ax}\,\delta x]$$

ergeben. Offenbar ist

$$\frac{\partial}{\partial u}[\Phi_{ax}\,\delta x] = \left[\frac{\partial \Phi_{ax}}{\partial u}\,\delta x\right] + [\Phi_{ax}\,\delta a];$$

lassen wir daher Glieder weg, welche nach der Substitution (4) den Faktor ω enthalten, so liefern die Aggregate (5) und die ihnen analogen in δQ und δR zu der Summe Ω den Beitrag

$$\xi\,\{[\Phi_{xa}\,\delta a] - [\Phi_{ax}\,\delta a]\} + \eta\,\{[\Phi_{ya}\,\delta a] - [\Phi_{bx}\,\delta a]\}$$
$$+ \zeta\,\{[\Phi_{za}\,\delta a] - [\Phi_{cx}\,\delta a]\}$$

oder, indem man abermals Glieder mit dem Faktor ω abscheidet,

$$\omega_u\,\{\xi\,([\Phi_{xa}\,\xi] - [\Phi_{ax}\,\xi]) + \eta\,([\Phi_{ya}\,\xi] - [\Phi_{bx}\,\xi])$$
$$+ \zeta\,([\Phi_{za}\,\xi] - [\Phi_{cx}\,\xi])\},$$

und dieser Ausdruck verschwindet, da z. B. ξ^2 und $\xi\eta$ mit den Faktoren

$$\Phi_{xa} - \Phi_{ax}, \quad \Phi_{xb} - \Phi_{ay} + \Phi_{ya} - \Phi_{bx}$$

behaftet sind, deren Wert Null ist. Die Glieder (5) und ebenso die Glieder

$$[\Phi_{a\alpha}\,\delta\alpha] - \frac{\partial}{\partial v}[\Phi_{\alpha x}\,\delta x]$$

geben also mit den ihnen analogen in δQ und δR für Ω einen Beitrag, der ω enthält, vervielfacht mit einer von ω unabhängigen Größe. Dasselbe gilt von den Gliedern $[\Phi_{xx}\,\delta x]$, $[\Phi_{yx}\,\delta x]$, $[\Phi_{zx}\,\delta x]$; man kann daher setzen

$$\Omega - \omega(\cdots) = -\xi\left\{\frac{\partial}{\partial u}([\Phi_{aa}\,\delta a] + [\Phi_{a\alpha}\,\delta\alpha])\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}([\Phi_{\alpha a}\,\delta a] + [\Phi_{\alpha\alpha}\,\delta\alpha])\right\}$$
$$-\eta\left\{\frac{\partial}{\partial u}([\Phi_{ba}\,\delta a] + [\Phi_{b\alpha}\,\delta\alpha])\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}([\Phi_{\beta a}\,\delta a] + [\Phi_{\beta\alpha}\,\delta\alpha])\right\}$$
$$-\zeta\left\{\frac{\partial}{\partial u}([\Phi_{ca}\,\delta a] + [\Phi_{c\alpha}\,\delta\alpha])\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}([\Phi_{\gamma a}\,\delta a] + [\Phi_{\gamma\alpha}\,\delta\alpha])\right\}.$$

Benutzt man die Gleichungen (4), so wird der Faktor von $-\xi$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\omega\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi_u]+\omega_u\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi]+\omega\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi_v]+\omega_v\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi]\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\omega\,[\Phi_{\alpha a}\,\xi_u]+\omega_u\,[\Phi_{\alpha a}\,\xi]+\omega\,[\Phi_{\alpha\alpha}\,\xi_v]+\omega_v\,[\Phi_{\alpha\alpha}\,\xi]\right\}.$$

Die Definition der Größe Φ_{11} nach I. ergibt aber

$$[\Phi_{a a}\,\xi_u]=\Phi_{11}\,(\xi^2\,\xi_u+\xi\,\eta\,\eta_u+\xi\,\zeta\,\zeta_u)=0;$$
$$[\Phi_{a a}\,\xi]\;=\Phi_{11}\,(\xi^3+\xi\,\eta^2+\xi\,\zeta^2)=\Phi_{11}\,\xi;$$

ebenso erhält man

$$[\Phi_{\alpha\alpha}\,\xi_v]=0,\quad [\Phi_{\alpha\alpha}\,\xi]=\Phi_{22}\,\xi;$$

der Faktor von $-\xi$ ist also

$$\frac{\partial}{\partial u}\{\Phi_{11}\,\omega_u\,\xi+\omega\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi_v]+\omega_v\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi]\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\{\Phi_{22}\,\omega_v\,\xi+\omega\,[\Phi_{\alpha a}\,\xi_u]+\omega_u\,[\Phi_{\alpha a}\,\xi]\}.$$

Weiter gilt nach Absatz I. die Identität

$$[\Phi_{a\alpha}\,\xi]+[\Phi_{\alpha a}\,\xi]=2\,\Phi_{12}\,\xi;$$

der Ausdruck (5) kann daher wie folgt geschrieben werden:

$$\xi\,(\Phi_{11}\,\omega_{uu}+2\,\Phi_{12}\,\omega_{uv}+\Phi_{22}\,\omega_{vv})$$

$$+\,\omega_u\left\{[\Phi_{a\alpha}\,\xi_v]+\frac{\partial}{\partial y}\,[\Phi_{\alpha a}\,\xi]+\frac{\partial\,(\Phi_{11}\,\xi)}{\partial u}\right\}$$

$$+\,\omega_v\left\{[\Phi_{\alpha a}\,\xi_u]+\frac{\partial}{\partial u}\,[\Phi_{a\alpha}\,\xi]+\frac{\partial\,(\Phi_{22}\,\xi)}{\partial v}\right\}+\omega\,(\cdots).$$

Eine weitere Verkürzung ergibt die Identität

$$[\Phi_{a\alpha}\,\xi_v]+[\Phi_{\alpha a}\,\xi_v]=2\,\Phi_{a\alpha}\,\xi_v+(\Phi_{a\beta}+\Phi_{\alpha b})\,\eta_v+(\Phi_{a\gamma}+\Phi_{\alpha c})\,\zeta_v$$
$$=2\,\Phi_{12}(\xi^2\,\xi_v+\xi\,\eta\,\eta_v+\xi\,\zeta\,\zeta_v)=0,$$

und die analoge

$$[\Phi_{a a}\,\xi_u]+[\Phi_{a a}\,\xi_u]=0;$$

der Faktor von $-\xi\,\omega_u$ wird daher einfach

$$\left[\frac{\partial\,\Phi_{\alpha a}}{\partial v}\,\xi\right]+\frac{\partial\,(\Phi_{11}\,\xi)}{\partial u},$$

und in dem ganzen Aggregat Ω erscheint ω_u mit dem Faktor

$$-\xi\frac{\partial(\Phi_{11}\xi)}{\partial u}-\eta\frac{\partial(\Phi_{11}\eta)}{\partial u}-\zeta\frac{\partial(\Phi_{11}\zeta)}{\partial u}$$

$$-\xi\left[\frac{\partial\Phi_{\alpha a}}{\partial v}\xi\right]-\eta\left[\frac{\partial\Phi_{\beta a}}{\partial v}\xi\right]-\zeta\left[\frac{\partial\Phi_{\gamma a}}{\partial v}\xi\right]$$

$$=-\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial u}-\left\{\frac{\partial\Phi_{\alpha a}}{\partial v}\xi^2+\frac{\partial\Phi_{\beta b}}{\partial v}\eta^2+\frac{\partial\Phi_{\gamma c}}{\partial v}\zeta^2\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(\Phi_{\alpha b}+\Phi_{\beta a})}{\partial v}\xi\eta+\frac{\partial(\Phi_{\alpha c}+\Phi_{\gamma a})}{\partial v}\xi\zeta+\frac{\partial(\Phi_{\beta c}+\Phi_{\gamma b})}{\partial v}\eta\zeta\right\}.$$

Diese Größe kann nach der Definition der Größen Φ_{11}, Φ_{12} geschrieben werden

$$-\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial u}-\left[\frac{\partial(\Phi_{12}\xi^2)}{\partial v}\xi^2+2\frac{\partial(\Phi_{12}\xi\eta)}{\partial v}\xi\eta+\cdots\right]$$

$$=-\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial u}-\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial v}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2$$

$$-2\Phi_{12}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi\xi_v+\eta\eta_v+\zeta\zeta_v)$$

$$=-\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial u}-\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial v}.$$

Analog ergibt sich als Faktor von ω_v der Ausdruck

$$-\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial u}-\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial v},$$

und man erhält schließlich

$$\Omega=\omega(\cdots)-\omega_u\left(\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial u}+\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial v}\right)-\omega_v\left(\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial u}+\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial v}\right)$$

$$(6)\qquad -\Phi_{11}\omega_{uu}-2\Phi_{12}\omega_{uv}-\Phi_{22}\omega_{vv}$$

$$=\Phi_0\omega-\frac{\partial}{\partial u}(\Phi_{11}\omega_u+\Phi_{12}\omega_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\Phi_{12}\omega_u+\Phi_{22}\omega_v).$$

Der explizite Ausdruck für Φ_0 ist aus der durchgeführten Rechnung leicht zu entnehmen; man erhält ihn, indem man, bevor die Differentiation nach u und v ausgeführt wird, δx, δy, δz, δa, δb, δc, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ durch ξ, η, ζ, ξ_u, η_u, ζ_u, ξ_v, η_v, ζ_v ersetzt, aus dem ursprünglichen Ausdruck

$$\Omega=\xi\left(\delta\Phi_x-\frac{\partial\delta\Phi_a}{\partial u}-\frac{\partial\delta\Phi_\alpha}{\partial v}\right)+\eta\left(\delta\Phi_y-\frac{\partial\delta\Phi_b}{\partial u}-\frac{\partial\delta\Phi_\beta}{\partial v}\right)$$

$$+\zeta\left(\delta\Phi_z-\frac{\partial\delta\Phi_c}{\partial u}-\frac{\partial\delta\Phi_\gamma}{\partial v}\right).$$

III. Beispiel. Um Φ_0 bei der Aufgabe der Minimalfläche zu berechnen, beachten wir zunächst, daß die Identität

$$x_u \xi + y_u \eta + z_u \zeta = 0$$

bei der vorliegenden Normalvariation ergibt

$$x_u \delta \xi + y_u \delta \eta + z_u \zeta + \xi (\xi \omega_u + \omega \xi_u) + \cdots = 0$$

oder

$$x_u \delta \xi + y_u \delta \eta + z_u \delta \zeta = - \omega_u;$$

ebenso erhält man die Gleichung

$$x_v \delta \xi + y_v \delta \eta + z_v \delta \zeta = - \omega_v.$$

Hieraus und aus der Identität

$$\xi \delta \xi + \eta \delta \eta + \zeta \delta \zeta = 0$$

folgt, daß die Größen $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$ und ihre Ableitungen nach u, v in keinem Gliede den Faktor ω enthalten, sondern in den Ableitungen dieser Größe homogen linear sind. Der Koeffizient von ω in dem Ausdruck Ω ist daher derselbe wie in dem erweiterten

$$\Omega + P \delta \xi + Q \delta \eta + R \delta \zeta = \delta (P \xi + Q \eta + R \zeta). \tag{7}$$

Nun hat man nach § 48, I. bei der vorausgesetzten Form von Φ die Identität

$$P \xi + Q \eta + R \zeta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x_u & y_u & z_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x_v & y_v & z_v \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix};$$

die rechte Seite der Gleichung (7) setzt sich daher aus sechs Determinanten zusammen, welche aus den hingeschriebenen entstehen, indem man jeweils den Gliedern einer Horizontalreihe das Zeichen δ vorsetzt. Von diesen Determinanten liefern aber bei der angegebenen Beschaffenheit der Variationen $\delta \xi$, $\delta \xi_u$, $\delta \xi_v$, ... nur die folgenden beiden Glieder mit dem Faktor ω:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \delta x_u & \delta y_u & \delta z_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \delta x_v & \delta y_v & \delta z_v \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi & \cdots \\ \omega \xi_u + \xi \omega_u & \cdots \\ \xi_v & \cdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi & \cdots \\ \omega \xi_v + \xi \omega_v & \cdots \\ \xi_u & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= 2 \omega \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}$$

und man erhält schließlich

$$\Phi_0 = 2\,\Sigma \pm \xi\,\eta_u\,\zeta_v,$$

$$\Omega = 2\,\omega\,\Sigma \pm \xi\,\eta_u\,\zeta_v - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\,\omega_u - F\,\omega_v}{\sqrt{E\,G - F^2}}\right)$$
$$- \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-F\,\omega_u + E\,\omega_v}{\sqrt{E\,G - F^2}}\right).$$

Die Fläche, für welche die Größe Ω gebildet ist, sei, was bisher nicht vorausgesetzt wurde, speziell eine Extremale, d. h. eine Minimalfläche. Auf einer solchen können die Veränderlichen u, v so gewählt werden, daß

$$F = 0, \quad E = G, \quad \frac{\xi \pm \eta i}{1 - \zeta} = u \pm v i,$$

$$\xi = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad \eta = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad \zeta = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2};$$

es folgt dies leicht aus dem Verschwinden der mittleren Krümmung. In diesen Veränderlichen nimmt der Ausdruck Ω folgende besondere Form an:

$$\Omega = \frac{-8\,\omega}{(1 + u^2 + v^2)^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}.$$

Wenn also im Innern eines Minimalflächenstücks eine geschlossene Linie $\omega = 0$ liegt, und ω der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{8\,\omega}{(1 + u^2 + v^2)^2} = 0$$

genügt, so wird das Minimalflächenstück im allgemeinen kein Minimum der Oberfläche mehr liefern.

IV. Aus den Formeln (5) und (6)

$$\delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Omega\,\omega\,du\,dv = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \omega \left\{ \Phi_0\,\omega - \frac{\partial}{\partial u}(\Phi_{11}\,\omega_u + \Phi_{12}\,\omega_v) \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial v}(\Phi_{21}\,\omega_u + \Phi_{22}\,\omega_v) \right\} du\,dv$$

ergibt sich, da ω am Rande verschwindet, durch Gaußsche Integraltransformation, angewandt auf die letzten Glieder,

$$\text{(7)} \qquad \delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} (\Phi_0\,\omega^2 + \Phi_{11}\,\omega_u^2 + 2\,\Phi_{12}\,\omega_u\,\omega_v + \Phi_{22}\,\omega_v^2)\,du\,dv.$$

Diese Größe ist nun ihrer ursprünglichen Definition nach, da J ein invariantes Integral ist, von der Wahl der Parameter unabhängig. Sind daher p, q neue Parameter und Φ_0', Φ_{11}', ... die ihnen entsprechend gebildeten Größen wie Φ_0, Φ_{11}, ..., so ergibt sich

$$(8)\qquad \delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} (\Phi_0' \omega^2 + \Phi_{11}' \omega_p^2 + 2\Phi_{12}' \omega_p \omega_q + \Phi_{22} \omega_q^2)\, dp\, dq.$$

Anderseits folgt nach (7), indem man

$$\omega_u = \omega_p p_u + \omega_q q_u, \quad \omega_v = \omega_p p_v + \omega_q q_v$$

einsetzt,

$$(9)\qquad \delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} (\Phi_0 \omega^2 + A\omega_p^2 + 2B\omega_p \omega_q + C\omega_q^2) \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)}\, dp\, dq,$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \Phi_{11} p_u^2 + 2\Phi_{12} p_u p_v + \Phi_{22} p_v^2, \\ B &= \Phi_{11} p_u q_u + \Phi_{12}(p_u q_v + p_v q_u) + \Phi_{22} p_v q_v, \\ C &= \Phi_{11} q_u^2 + 2\Phi_{12} q_u q_v + \Phi_{22} q_v^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun in den Ausdrücken (8) und (9) unter dem Integralzeichen die Faktoren entsprechender Glieder ω^2, ω_p^2, $\omega_p \omega_q$, ω_q^2 gleich, so ergibt sich

$$\Phi_0' = \Phi_0 \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)}, \quad \Phi_{11}' = A \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)}, \quad \Phi_{12}' = B \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)},$$
$$\Phi_{22}' = C \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)}.$$

Diese Formeln werden zwar bei der Willkürlichkeit der Größe ω durch die Identität der Größen (8) und (9) zunächst nur wahrscheinlich gemacht; man bestätigt sie aber nachträglich leicht aus den Definitionsgleichungen (3), die wir oben in Absatz I zugrunde gelegt haben.

Die Ausdrücke für A, B, C ergeben jetzt offenbar

$$\varDelta^{-2}(C\, dp^2 - 2B\, dp\, dq + A\, dq^2) = \Phi_{22}\, du^2 - 2\Phi_{12}\, du\, dv + \Phi_{22}\, dv^2,$$

wie ersichtlich wird, wenn rechts die Ausdrücke

$$du = \frac{q_v\, dp - p_v\, dq}{\varDelta}, \quad dv = \frac{q_u\, dp + p_u\, dq}{\varDelta}, \quad \varDelta = \frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)}$$

eingesetzt werden; somit folgt

$$\begin{aligned} &\varDelta^{-1}\{\Phi_{22}'\, dp^2 - 2\Phi_{12}'\, dp\, dq + \Phi_{11}'\, dq^2\} \\ &\qquad = \Phi_{22}\, du^2 - 2\Phi_{12}\, du\, dv + \Phi_{11}\, dv^2. \end{aligned}$$

In dem besonders belangreichen Falle, daß die Form

$$\Psi(h, k) = \Phi_{11} h^2 + 2\Phi_{12} hk + \Phi_{22} k^2$$

definite ist, lehrt die Flächentheorie, daß man eine reelle Transformation der Veränderlichen u, v in p, q von der Art finden kann, daß

$$\Phi'_{12} = 0, \quad \Phi'_{11} = \Phi'_{22}$$

wird; man braucht nur die Form

$$\Phi_{22}\, du^2 - 2\,\Phi_{12}\, du\, dv + \Phi_{11}\, du^2$$

als Quadrat des Bogenelements einer Fläche anzusehen und auf dieser isotherme Koordinaten p, q einzuführen.

Denken wir uns demgemäß schon in den Formeln (6) und (7) die Veränderlichen u, v so gewählt, daß

$$\Phi_{12} = 0, \quad \Phi_{11} = \Phi_{22} = M^2$$

wird, so ergibt sich

$$\delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Omega\,\omega\, du\, dv = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \omega \left\{ \Phi_0\, \omega - \frac{\partial (M\omega_u)}{\partial u} - \frac{\partial (M\omega_v)}{\partial v} \right\} du\, dv$$

$$= \iint\limits_{\mathfrak{S}} [\Phi_0\, \omega^2 + M^2(\omega_u^2 + \omega_v^2)]\, du\, dv.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} [(M\omega)_u]^2 &= M^2\omega_u^2 + 2\,M M_u\, \omega\, \omega_u + M_u^2\, \omega^2 \\ &= M^2\omega_u^2 + (M M_u\, \omega^2)_u - \omega^2 (M M_u)_u + M_u^2\, \omega^2 \\ &= M^2\omega_u^2 + (M M_u\, \omega^2)_u - \omega^2 M M_{uu}, \end{aligned}$$

und hierin kann u durch v ersetzt werden; setzt man also $M\omega = \tilde{\omega}$, so wird

$$\Phi_0\, \omega^2 + M^2(\omega_u^2 + \omega_v^2) = \tilde{\omega}_u^2 + \tilde{\omega}_v^2 + \left[\frac{\Phi_0}{M^2} + \frac{M_{uu} + M_{vv}}{M}\right]\tilde{\omega}^2$$
$$+ (M M_u\, \omega^2)_u + (M M_v\, \omega^2)_v.$$

Das über $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral der letzten beiden Glieder verschwindet, da ω auf dem Rande verschwindet; also bleibt ein Ausdruck von der Form

$$\delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} (p\,\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}_u^2 + \tilde{\omega}_v^2)\, du\, dv,$$

und auch $\tilde{\omega}$ verschwindet auf dem Rande, so daß man setzen kann

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} \tilde{\omega}_u^2\, du\, dv = -\iint\limits_{\mathfrak{S}} \tilde{\omega}\, \tilde{\omega}_{uu}\, du\, dv,$$

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} \tilde{\omega}_v^2\, du\, dv = -\iint\limits_{\mathfrak{S}} \tilde{\omega}\, \tilde{\omega}_{vv}\, du\, dv,$$

$$\delta^2 J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \tilde{\omega} \left(p\,\tilde{\omega} - \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial v^2}\right) du\, dv.$$

§ 51.

Zweite Variation und Extrem.

I. Wir vergleichen nochmals das über die Fläche $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral

$$J = \iint_{\mathfrak{S}} \Phi(x,\ x_u,\ \ldots)\, du\, dv$$

mit demjenigen, das eine auf dasselbe uv-Gebiet bezogene Nachbarfläche ergibt, also

$$J^0 = \iint \Phi(x^0,\ x_u^0,\ \ldots)\, du\, dv$$

und setzen

$$x^0 = x + \varDelta x,\quad x_u^0 = x_u + \varDelta x_u = x_u + \frac{\partial \varDelta x}{\partial u} \text{ usf.}$$

Da die Funktion Φ für jedes auf der Fläche $\mathfrak{S}$ erreichte Wertsystem $x, y, \ldots z_v$ regulär ist, kann man die Größe

$$\Phi(x + \varDelta x,\ \ldots\ z_v + \varDelta z_v)$$

in eine Taylorsche Reihe entwickeln, in welcher die Glieder, die in den Größen $\varDelta$ von erstem und zweitem Grade sind, ausgeschrieben, die Glieder höheren Grades aber mittels der Lagrangeschen Restformel zu einem Ausdruck

$$\varrho(\varDelta x,\ \varDelta x_u,\ \ldots\ \varDelta z_v)$$

zusammengefaßt werden, der eine kubische Form der neun Größen $\varDelta$ ist. Die Koeffizienten derselben sind gewisse Ableitungen von Φ, gebildet für ein Wertsystem

$$x + \theta \varDelta x,\ \ldots,\ x_u + \theta \varDelta x_u,\ \ldots,\ z_v + \theta \varDelta z_v,$$

in welchem θ zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt; da nun die Ableitungen der Funktion Φ auf der Fläche $\mathfrak{S}$ endlich und stetig sind, so liegen die Koeffizienten der Form ϱ dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Grenze, die von der Wahl des betrachteten Flächenelements unabhängig ist. Dasselbe gilt von den Koeffizienten der kubischen Form der Argumente $\omega, \omega_u, \omega_v$, in welche ϱ bei der besonderen Annahme

$$(1) \qquad \varDelta x = \omega \xi,\quad \varDelta y = \omega \eta,\quad \varDelta z = \omega \zeta$$

übergeht. Da nun die Größen

$$\frac{\omega\, \omega_u}{\omega^2 + \omega_u^2 + \omega_v^2},\quad \frac{\omega\, \omega_v}{\omega^2 + \omega_u^2 + \omega_v^2},\quad \frac{\omega_u\, \omega_v}{\omega^2 + \omega_u^2 + \omega_v^2},$$

wenn ω, ω_u, ω_v nicht zugleich verschwinden, dem Intervall von -1 bis $+1$ angehören, so kann man die Größe

$$\frac{\varrho}{\omega^2 + \omega_u^2 + \omega_v^2}$$

auch als lineare Form der Größen ω, ω_u, ω_v auffassen, deren Koeffizienten zwischen endlichen, von ω unabhängigen Grenzen liegen. Der absolute Wert dieses Ausdrucks wird also bei der Annahme

$$(2) \qquad |\omega| < \varepsilon_0, \quad |\omega_u| < \varepsilon_0, \quad |\omega_v| < \varepsilon_0$$

mit ε_0 unendlich klein.

Jetzt sei $\varphi(\omega, \omega_u, \omega_v)$ eine quadratische Form, welche auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$ endliche und stetige Koeffizienten hat und definite ist; dann besteht für beliebige Werte ω, ω_u, ω_v, welche nicht alle verschwinden, die Ungleichung

$$\left| \frac{\varphi(\omega, \omega_u, \omega_v)}{\omega^2 + \omega_u^2 + \omega_v^2} \right| > \gamma,$$

in welcher rechts eine von u, v, ω unabhängige positive Größe steht. Hieraus folgt, daß die Größe

$$\frac{\varphi(\omega, \omega_u, \omega_v) + \varrho}{\omega^2 + \omega_u^2 + \omega_v^2}$$

bei der Annahme (2) das Vorzeichen der Form φ hat, sobald ε_0 hinreichend klein angenommen wird. Der Zähler dieses Ausdrucks hat daher, auch wenn die Größen ω, ω_u, w_v zugleich verschwinden dürfen, niemals ein anderes Vorzeichen als die Form φ.

Diese allgemeine Betrachtung benutzen wir zur Bestimmung des Vorzeichens der Größe $\Delta J = J^0 - J$ bei der Annahme (1).

Setzen wir jetzt

$$\bar{x} - x = \varepsilon\,\omega\,\xi, \quad \bar{y} - y = \varepsilon\,\omega\,\eta, \quad \bar{z} - z = \varepsilon\,\omega\,\zeta,$$

und ist $\bar{J}$ das mit $\bar{x}$ usf. gebildete Integral J, so ist

$$(3) \qquad \delta x = d\varepsilon\,.\,\omega\,\xi, \quad \delta y = d\varepsilon\,.\,\omega\,\eta, \quad \delta z = d\varepsilon\,.\,\omega\,\zeta,$$

und man erhält die Taylorschen Glieder ersten und zweiten Grades in der Entwicklung von $J^0 - J$, indem man in den auf ε bezüglichen, an der Stelle $\varepsilon = 0$ gebildeten Differentialen

$$d\bar{J} = \delta J, \quad d^2\bar{J} = \delta^2 J$$

einfach $d\varepsilon = 1$ setzt, was durch die Fußmarke 1 angedeutet werde. Die erste Variation verschwindet, wenn $\mathfrak{S}$ eine Extremale ist und die Größen Δ oder ω am Rande verschwinden.

Somit erhält man

$$J^0 - J = \Delta J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} du\,dv \{ \tfrac{1}{2}(\delta^2 \Phi)_1 + \varrho \}$$

oder, da

$$\delta^2 J = \iint \delta^2 \Phi\, du\, dv$$

bei der Annahme (3) nach § 50 umgeformt werden kann,

$$(\delta^2 J)_1 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} \Omega\, \omega\, du\, dv = \iint\limits_{\mathfrak{S}} du\, dv\, \{ \Phi_0\, \omega^2 + \psi(\omega_u, \omega_v) \},$$

wobei gesetzt ist

$$\psi(h, k) = \Phi_{11} h^2 + 2\,\Phi_{12} h k + \Phi_{22} k^2;$$

und

$$2 \Delta J = \iint\limits_{\mathfrak{S}} du\, dv \{ \Phi_0\, \omega^2 + \psi(\omega_u, \omega_v) + 2\,\varrho \}.$$

Da ferner bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Größe ω die Gleichung

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} du\, dv \left[\frac{\partial(\alpha\,\omega^2)}{\partial u} + \frac{\partial(\beta\,\omega^2)}{\partial v} \right] = 0$$

gilt, wenn α und β beliebige, auf der Fläche $\mathfrak{S}$ stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen von u und v sind, so erhält man, indem man die letzten beiden Gleichungen addiert,

$$(4)\quad (\delta^2 J)_1 = \iint\limits_{\mathfrak{S}} du\, dv\, \theta(\omega, \omega_u, \omega_v), \quad 2 \Delta J = (\delta^2 J)_1 + 2 \iint\limits_{\mathfrak{S}} \varrho\, du\, dv$$

mit der Bezeichnung

$$\theta(h, k, l) = (\Phi_0 + \alpha_u + \beta_v) h^2 + 2\,\alpha h k + 2\,\beta h l + \psi(k, l).$$

Gelingt es daher, die Funktionen α und β so zu bestimmen, daß die Form θ auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$ definite ist, so hat ΔJ ein festes Vorzeichen; damit ist ein Kriterium für das Eintreten des Extrems abgeleitet, das wir nach Brunacci benennen wollen. Dasselbe ist auch bei isoperimetrischen Aufgaben anzuwenden; denn verschwindet die mit ΔJ ähnlich gebildete Größe ΔK, so ist

$$\Delta J = \Delta(J + \lambda K), \quad \delta(J + \lambda K) = 0,$$

und die Formeln bleiben gültig, wenn man rechts Φ durch $\Phi + \lambda \Psi$ ersetzt.

Das Extrem, welches durch ein festes Vorzeichen der Größe ΔJ unter den eingeführten Voraussetzungen gesichert ist, hat einen besonderen Charakter und ist dem schwachen Extrem der § 17 verwandt. Man vergleicht die Fläche $\mathfrak{S}$ mit allen, welche durch eine hinreichend kleine Normalverschiebung, also durch Verschiebung jedes Punktes in normaler Richtung aus ihr entstehen; dabei bleiben nicht nur die Größe der Verschiebung, sondern auch die absoluten Werte ihrer Ableitungen nach u und v unter einer gewissen Grenze. Letztere Größen brauchen übrigens nur solche Eigenschaften zu haben, daß die über die Fläche $\mathfrak{S}$ erstreckten Integrale ganzer rationaler Funktionen von ω, ω_u, ω_v einen Sinn behalten und nach den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung, insbesondere durch Teilintegration, umgestaltet werden können. Das hiermit definierte Extrem reicht für viele Anwendungen, insbesondere die mechanischen, aus; übrigens dürfte unschwer zu zeigen sein, daß durch eine Normalvariation der betrachteten Art jede Fläche entsteht, welche hinsichtlich ihrer Punkte und Tangentialebenen von $\mathfrak{S}$ hinreichend wenig abweicht.

Um nun die Brunaccische Bedingung für die Anwendung geeignet zu machen, gehen wir davon aus, daß die Form $\psi(k, l)$ offenbar, wenn die Bedingung erfüllbar sein soll, definite sein muß; dann ist

$$\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2 > 0$$

und die Form $\theta(h, k, l)$ ist ebenfalls definite, wenn ihre Determinante das Vorzeichen der Form ψ hat. Um dies zu erreichen, kann die Gleichung

$$(\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2)(\Phi_0 + \alpha_u + \beta_v) - \Phi_{11}\beta^2 + 2\Phi_{12}\alpha\beta - \Phi_{22}\alpha^2$$
$$= \gamma(\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2)$$

angesetzt werden, in welcher γ einen Festwert bedeutet, dessen Vorzeichen mit dem der Form ψ übereinstimmt; denn die linke Seite ist die Determinante der Form θ. Setzt man hier

$$\alpha = \frac{\sigma}{w}, \quad \beta = \frac{\tau}{w},$$

so ergibt sich

$$(\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2)\,[\Phi_0 w^2 + w\,(\sigma_u + \tau_v)]$$
$$+ \sigma\,[-(\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2)\,w_u + \Phi_{12}\tau - \Phi_{22}\sigma]$$
$$+ \tau\,[-(\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2)\,w_v - \Phi_{11}\tau + \Phi_{12}\sigma]$$
$$= \gamma w^2(\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2);$$

diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$\sigma = -\Phi_{11}w_u - \Phi_{12}w_v, \quad \tau = -\Phi_{21}w_u - \Phi_{22}w_v,$$
$$\Phi_0 w + \sigma_u + \tau_v = \gamma w,$$

oder auch, wenn w ein Integral der Gleichung

$$(5)\quad \begin{aligned}(\Phi_0 - \gamma) w - \frac{\partial}{\partial u}(\Phi_{11} w_u + \Phi_{12} w_v) \\ - \frac{\partial}{\partial v}(\Phi_{21} w_u + \Phi_{22} w_v) = 0\end{aligned}$$

ist, und σ, τ durch die vorausgehenden Gleichungen definit werden. Gelingt es also, ein auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$ nicht verschwindendes, mit seinen ersten Ableitungen stetiges Integral der Gleichung (5) zu finden, so wird bei der obigen Bestimmung der Funktionen α, β die Form $\theta(h, k, l)$ definit positiv, und die Brunaccische Bedingung des oben definierten Extrems ist erfüllt.

Eine nähere Diskussion ist überflüssig, wenn Φ_0 auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$ das Vorzeichen der Form ψ hat; dann ist die Form $\Phi_0 h^2 + \psi(k, l)$ schon definit, so daß einfach $\alpha = \beta = 0$ gesetzt werden kann. Nimmt die Größe Φ_0 auch Werte von anderem Vorzeichen an, so ist die Beziehung der Gleichung (4) zur Gleichung $\Omega = 0$ zu beachten, in welche sie übergeht, indem man $\gamma = 0$, $w = \omega$ setzt. Hat die Gleichung $\Omega = 0$ ein auf der Fläche $\mathfrak{S}$ nirgends verschwindendes Integral w, so findet man leicht

$$w^2 \theta(h, k, l) = \psi(wk - w_u h,\ wl - w_v k);$$

die Größe $(\delta^2 J)_1$ hat also der Gleichung (4) zufolge das Vorzeichen der Form ψ und verschwindet nur, wenn auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$

$$w\omega_u - w_u \omega = w\omega_v - w_v \omega = 0,$$

d. h. w und ω sich nur um einen festwertigen Faktor unterscheiden. Das ist, da ω am Rande verschwindet, nur möglich, wenn überall $\omega = 0$.

V. In gewissen Fällen kann man aus der Existenz eines auf der Fläche $\mathfrak{S}$ nicht verschwindenden Integrals der Gleichung $\Omega = 0$ auf ein ebensolches der Gleichung (5) schließen, z. B. wenn bei angemessener Wahl der Parameter u, v nach § 50, IV.

$$\Omega = -p\omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}, \quad \psi(k, l) = k^2 + l^2,$$

gesetzt wird, und p auf der Fläche $\mathfrak{S}$ regulär und positiv ist; dies trifft nach § 50 bei den Minimalflächen zu. Alsdann kann man annehmen, daß auch die Größe $p - \gamma$ auf der Fläche $\mathfrak{S}$ positiv ist und folgenden Satz von Schwarz anwenden. In dem der Fläche $\mathfrak{S}$ entsprechenden Gebiet $\mathfrak{U}$ sei die Größe p regulär und positiv; φ sei eine im Gebiet $\mathfrak{U}$ mit ihren ersten

Ableitungen stetige, am Rande desselben, aber nicht überall im Innern verschwindende Funktion von u und v. Setzt man dann

$$J_0 = \iint\limits_{\mathfrak{U}} p\,\varphi^2\,du\,dv, \quad J_1 = \iint\limits_{\mathfrak{U}} du\,dv\,(\varphi_u^2 + \varphi_v^2),$$

so hat der Quotient $J_0 : J_1$ ein bestimmtes endliches Maximum c. Wenn c ein echter Bruch ist, existiert ein stetiges, mit stetigen ersten Ableitungen versehenes Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + p\,\omega = 0,$$

welches auf dem Gebiet $\mathfrak{U}$ überall von Null verschieden ist.

Aus diesem Satze folgt zunächst, wenn $p = +1$ gesetzt wird, daß das Verhältnis

$$\iint\limits_{\mathfrak{U}} \varphi^2\,du\,dv : \iint\limits_{\mathfrak{U}} (\varphi_u^2 + \varphi_v^2)\,du\,dv$$

ein bestimmtes, endliches Maximum m hat, bei jeder Wahl der Funktion φ also in der Form $\mu\,m$ geschrieben werden kann, wenn μ der Ungleichung

$$0 < \mu \leqq 1$$

genügt. Setzt man sodann $p = -\Phi_0$ und $p = -\Phi_0 + \gamma$, und bezeichnet die zugehörigen Werte von J_0 und c durch die Fußmarken 0 und γ, so ist offenbar, da J_1 von p nicht abhängt,

$$\frac{J_{0\gamma}}{J_1} = \frac{J_{00}}{J_1} + \gamma\,\mu\,m, \tag{6}$$

also wenn $\gamma > 0$

$$\frac{J_{0\gamma}}{J_1} \geqq \frac{J_{00}}{J_1}, \quad c_\gamma \geqq c_0.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{\gamma=0} c_\gamma = c_0; \tag{7}$$

denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine solche positive Konstante γ^0, daß, wie klein auch γ^1 gewählt werden möge, immer Werte γ vorhanden sind, für welche die Ungleichungen

$$c_\gamma - c_0 > \gamma^0, \quad \gamma < \gamma^1 \tag{8}$$

bestehen. Für diejenige Funktion φ, welche dem Verhältnis $J_{0\gamma} : J_1$ seinen größten Wert c_γ gibt, wäre dann aber der Beziehung (6) zufolge

$$\frac{J_{00}}{J_1} = c_\gamma - \gamma\,\mu\,m, \quad c_\gamma - \gamma\,\mu\,m \leqq c_0, \quad c_\gamma - c_0 \leqq \gamma\,\mu\,m,$$

was, da γ^1 beliebig klein sein kann, der ersten Ungleichung (8) widerspricht; ein analoger Widerspruch würde sich für $\gamma < 0$ ableiten lassen, indem man c_0 und c_γ vertauscht. Die Beziehung (7) ist somit bewiesen; ist c_0 ein echter Bruch, so gilt dasselbe bei hinreichend kleinen Werten γ von c_γ, und die Gleichung (5) hat ein in dem Gebiet $\mathfrak{U}$ oder auf der Fläche $\mathfrak{S}$ nicht verschwindendes Integral.

Bei den Minimalflächen ist nun, wenn $\omega = \varepsilon\,\varphi$ gesetzt wird,

$$\delta^2 J = (J_1 - J_{00})\,\varepsilon^2;$$

diese Größe könnte, wenn $c_0 \geqq 1$, negativ werden oder verschwinden, ohne daß ω identisch verschwände. Das ist nach dem Obigen unmöglich, $\delta^2 J$ vielmehr positiv, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ ein auf der Fläche $\mathfrak{S}$ nicht verschwindendes Integral besitzt, also im besonderen, wenn die Fläche $\mathfrak{S}$ mit einem Felde umgeben werden kann. Bei letzterer Voraussetzung ist daher c_0 und damit auch c_γ ein echter Bruch, das Minimum des Flächeninhalts im definierten Sinne also gesichert.

§ 52.

Formale Entwicklungen.

I. Sind wie stets in diesem Abschnitt x, y, z Funktionen der unvariierten Unabhängigen u, v auf einer Fläche $\mathfrak{S}$, die variiert wird, so gelten mit der Bezeichnung

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

die Gleichungen

$$z_u = p\,x_u + q\,y_u, \quad z_v = p\,x_v + q\,y_v,$$

und geben durch Variation

$$(1)\qquad \begin{aligned} \delta z_u &= p\,\delta x_u + q\,\delta y_u + x_u\,\delta p + y_u\,\delta q, \\ \delta z_v &= p\,\delta x_v + q\,\delta y_v + x_v\,\delta p + y_v\,\delta q. \end{aligned}$$

In einem Gebiet, in welchem die Größe

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

nicht verschwindet, kann man auch u und v als Funktionen von x und y ansehen, und die Teilableitungen u_x, u_y, v_x, v_y bilden, die die Gleichungen

$$x_u\,u_x + x_v\,v_x = 1, \quad y_u\,u_x + y_v\,v_x = 0,$$
$$y_u\,u_y + y_v\,v_y = 1$$

erfüllen. Vervielfacht man also die Gleichungen (1) mit u_x, v_x, so ergibt sich

$$u_x \delta z_u + v_x \delta z_v = \frac{\partial \delta z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x}$$

$$= p\left(\frac{\partial \delta x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial \delta y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \delta p$$

oder

$$(2) \qquad \delta p = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - p\frac{\partial \delta x}{\partial x} - q\frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

und ebenso, wenn man die Gleichungen (1) mit u_y, v_y vervielfacht,

$$(3) \qquad \delta q = \frac{\partial \delta z}{\partial y} - p\frac{\partial \delta x}{\partial y} - q\frac{\partial \delta y}{\partial y}.$$

Weiter kann man offenbar setzen

$$\delta x_u = \frac{\partial \delta x}{\partial u} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} x_u + \frac{\partial \delta x}{\partial y} y_u,$$

$$\delta x_v = \frac{\partial \delta x}{\partial v} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} x_v + \frac{\partial \delta x}{\partial y} y_v;$$

hieraus folgt

$$y_v \delta x_u - y_u \delta x_v = (x_u y_v - x_v y_u)\frac{\partial \delta x}{\partial x} = D\frac{\partial \delta x}{\partial x},$$

und ebenso, von δy_u und δy_v ausgehend

$$x_u \delta y_v - x_v \delta y_u = (x_u y_v - x_v y_u)\frac{\partial \delta y}{\partial y} = D\frac{\partial \delta y}{\partial y}.$$

Nun ist die Summe der linken Seiten der letzten beiden Gleichungen

$$\delta(x_u y_v - x_v y_u) = \delta D;$$

somit folgt

$$(4) \qquad \delta D = D\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right).$$

Geht man im Falle $D > 0$ von der Formel

$$\iint f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = \iint f D\, du\, dv$$

aus und setzt demgemäß das Integrationselement

$$dx\, dy = D\, du\, dv,$$

so kann man für die Gleichung (4) auch schreiben

$$(5) \qquad \delta(dx\, dy) = dx\, dy\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right).$$

II. Die erhaltenen Formeln kann man benutzen, um die Variation des Integrals

$$J = \iint f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = \iint \Phi(x, x_u, x_v, \ldots)\, du\, dv$$

so auszudrücken, daß nur die Veränderlichen x, y vorkommen und nur nach ihnen differenziert wird; das kann unter Umständen ebenso zweckmäßig sein, wie wir bei einfachen Integralen auch die nichthomogene Form des Integrals benutzten. Offenbar kann man in dem Sinne, wie wir immer variieren, setzen

$$\delta \iint f\, dx\, dy = \delta \iint f D\, du\, dv = \iint \delta f D\, du\, dv + \iint f \delta D\, du\, dv,$$

also nach (4) und (5)

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta \iint f\, dx\, dy &= \iint \delta f\, dx\, dy + \iint f \delta (dx\, dy) \\ &= \iint \delta f\, dx\, dy + \iint f \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) dx\, dy. \end{aligned}$$

Setzt man hier noch

$$\delta f = f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z + f_p \delta p + f_q \delta q$$

und benutzt die Formeln (2) und (3), so erscheint die Variation δJ in nichthomogener Form, ohne sichtbare Spur der Unabhängigen u, v.

III. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn wir, ähnlich wie in § 4, V. **abgestumpfte** Variationen nach der Definition

$$\delta_0 U = \delta U - \frac{\partial U}{\partial x} \delta x - \frac{\partial U}{\partial y} \delta y,$$

im besonderen

$$(7)\qquad \delta_0 z = \delta z - p \delta x - q \delta y$$

einführen. Das Zeichen δ_0 ist mit denen der Teilableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ vertauschbar; denn man findet, $r = \partial p/\partial x$ usf. gesetzt,

$$\frac{\partial \delta_0 z}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - p \frac{\partial \delta x}{\partial x} - q \frac{\partial \delta y}{\partial x} - r \delta x - s \delta y$$

und nach (2)

$$\begin{aligned} \delta_0 \frac{\partial z}{\partial x} = \delta_0 p &= \delta p - r \delta x - s \delta y \\ &= \frac{\partial \delta z}{\partial x} - p \frac{\partial \delta x}{\partial x} - q \frac{\partial \delta y}{\partial x} - r \delta x - s \delta y, \end{aligned}$$

also wirklich

$$\frac{\partial \delta_0 z}{\partial x} = \delta_0 \frac{\partial z}{\partial x} = \delta_0 p.$$

In der zu den Gleichungen (2) und (3) führenden Schlußreihe kann aber z eine beliebige Funktion von x und y bedeuten, z. B. die mittelbar oder unmittelbar von x und y abhängige Größe U; also folgt ebenso

$$\frac{\partial \delta_0 U}{\partial x} = \delta_0 \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Die geometrisch-anschauliche Bedeutung der Variation δ_0 ist an der Formel (7) leicht zu übersehen. Die Komponente des Variationsvektors $(\delta x, \delta y, \delta z)$ nach einer Normale der Fläche $\mathfrak{S}$, des Ortes der Punkte (x, y, z), ist

$$v = \frac{-p\,\delta x - q\,\delta y + \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

und da $1/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ der Richtungskosinus dieser Normale nach der z-Achse ist, so ist $v\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ die Strecke parallel der z-Achse, deren Projektion auf die Normale v ist. Daraus wird klar, daß

$$\delta_0 z = -p\,\delta x - q\,\delta y + \delta z = v\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

der parallel der z-Achse gemessene Abstand der beiden Flächen ist, die Orte der Punkte (x, y, z) und $(x + \delta x, \ y + \delta y, \ z + \delta z)$ sind, der ursprünglichen $\mathfrak{S}$ und der variierten. Damit stimmen die Gleichungen

$$\delta_0 x = \delta_0 y = 0 \tag{8}$$

überein, die sich aus der Definition des Zeichens δ_0 ergeben: δ_0 bedeutet den Fortgang parallel der z-Achse.

Mit Benutzung des Zeichens δ_0 gibt nun die Gleichung (6)

$$\begin{aligned}
\delta \iint f\,dx\,dy &= \iint \delta_0 f\,dx\,dy + \iint\left(\delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy \\
&\qquad + \iint f\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) dx\,dy \\
&= \iint \delta_0 f\,dx\,dy + \iint\left(\frac{\partial (f\,\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial (f\,\delta y)}{\partial y}\right) dx\,dy;
\end{aligned} \tag{9}$$

die Größen $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ sind hier natürlich in dem Sinne gebildet, daß z, p, q als Funktionen von x und y betrachtet werden.

Weiter ist offenbar nach (8)

$$
(10) \quad \begin{aligned} \delta_0 f &= f_z \delta_0 z + f_p \delta_0 p + f_q \delta_0 q = f_z \delta_0 z + f_p \frac{\partial \delta_0 z}{\partial x} + f_q \frac{\partial \delta_0 z}{\partial y} \\ &= \left(f_z - \frac{\partial f_p}{\partial x} - \frac{\partial f_q}{\partial y}\right) \delta_0 z + \frac{\partial (f_p \delta_0 z)}{\partial x} + \frac{\partial (f_q \delta_0 z)}{\partial y}. \end{aligned}
$$

Nun gibt aber die Gaußsche Integraltransformation

$$
(11) \quad \iint_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\mathfrak{C}} (U dy - V dx),
$$

wobei rechts über die Randlinie $\mathfrak{C}$ in einem bestimmten Sinne integriert wird; den Ausdruck $\partial U / \partial x + \partial V / \partial y$ nennt man die Divergenz des Vektors U, V; das Doppelintegral einer Divergenz ist also der Gleichung (11) gemäß einem Linienintegral gleich.

Hiernach ergeben die Gleichungen (9) und (10)

$$
\begin{aligned} \delta \iint f\, dx\, dy &= \iint \left(f_z - \frac{\partial f_p}{\partial x} - \frac{\partial f_q}{\partial y}\right) (\delta z - p\, \delta x - q\, \delta y)\, dx\, dy \\ &\quad + \int \left\{ (f \delta x + f_p \delta_0 z)\, dy - (f \delta y + f_q \delta_0 z)\, dx \right\}, \\ &\qquad \delta_0 z = \delta z - p\, \delta x - q\, \delta y; \end{aligned}
$$

damit ist die Variation des Doppelintegrals in nichthomogener Form, allein in den Unabhängigen x, y ohne eine Spur der unvariierten Größen u, v ausgedrückt, die nur im Hintergrund als unentbehrliche Beweismittel bleiben; beruht doch die Definition aller Variationen δ auf einem System unvariierter Unabhängiger u, v.

IV. Diese Betrachtungen lassen sich unschwer auf Räume beliebig vieler Stufen übertragen. Bezeichne das Zeichen über dem Integralzeichen seine Vielfachheit; dann handle es sich um das über ein Gebiet $\mathfrak{S}$ der Größen $x_1, \ldots x_n$, z erstreckte n-fache Integral

$$
J = \int_{\mathfrak{S}}^{(n)} f(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n)\, dx_1, dx_2, \ldots dx_n,
$$

$$
p_\alpha = \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}, \quad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n);
$$

sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ unvariierte Unabhängige bei Variation der n-stufigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$, so kann man setzen

$$
J = \int_{\mathfrak{S}}^{(n)} f D\, du_1, du_2, \ldots du_n,
$$

wobei

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots u_n)}$$

und positiv sei; offenbar findet man

(12) $$\delta J = \int^{(n)} \delta f D\, d u_1, \dots d u_n + \int^{(n)} f \delta D\, d u_1, \dots d u_n,$$

(13) $$\delta D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta x_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial \delta x_1}{\partial u_2}, & \dots & \frac{\partial \delta x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_n}{\partial u_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} + \cdots,$$

wobei $n-1$ ähnlich gebildete Determinanten hinzuzufügen sind, in denen in der zweiten, dritten Zeile usf. die Zeichen $\partial x_\mathfrak{a}/\partial u_\mathfrak{b}$ durch $\partial \delta x_\mathfrak{a}/\partial u_\mathfrak{b}$ ersetzt sind.

Nun ist offenbar, indem bei der Annahme $D > 0$ auch die Größen $u_\mathfrak{a}$ als Funktionen der Unabhängigen $x_\mathfrak{b}$ aufgefaßt werden können,

$$\frac{\partial \delta x_1}{\partial u_\mathfrak{a}} = \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_\mathfrak{a}} + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_\mathfrak{a}} + \cdots;$$

die erste Determinante des Ausdrucks δD kann also in n Determinanten zerlegt werden, die die Faktoren $\partial \delta x_1/\partial x_\mathfrak{a}$ enthalten; diese sind vervielfacht mit den Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_2}, & \dots & \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix},$$

von denen die dem Werte $\mathfrak{a} = 1$ entsprechende D ist, die übrigen aber verschwinden; das erste Glied des obigen Ausdrucks δD ist also einfach

$$D \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1};$$

nimmt man die entsprechend gebildeten Glieder alle zusammen, so gibt die Formel (13)

$$\delta D = D\left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \delta x_n}{\partial x_n}\right);$$

wenn man will, kann man diese Formel als Ausdruck für die Variation des Elements der n-fachen Integration auffassen:

$$d x_1 \dots d x_n = D\, d u_1 \dots d u_n,$$

$$\delta (d x_1 \dots d x_n) = d x_1\, d x_2 \dots d x_n \left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \delta x_n}{\partial x_n}\right).$$

Die Gleichung (12) kann jetzt offenbar geschrieben werden

$$\delta J = \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \delta f\, d x_1\, d x_2 \dots d x_n$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} f \left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \delta x_n}{\partial x_n}\right) d x_1\, d x_2 \dots d x_n;$$

führen wir noch die abgestumpfte Variation nach der Gleichung

$$\delta_0 U = \delta U - \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} \frac{\partial U}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} \tag{14}$$

ein, so ergibt sich

$$\delta J = \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \delta_0 f\, d x_1\, d x_2 \dots d x_n + \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} \frac{\partial (f \delta x_{\mathfrak{a}})}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\, d x_1\, d x_2 \dots d x_n; \tag{15}$$

das ist die Variationsformel von Ostrogradsky.

Um mit ihr rechnen zu können, muß noch gezeigt werden, daß die Zeichen $\partial/\partial x_{\mathfrak{a}}$ und δ_0 vertauschbar sind, und das gelingt durch ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie zu den Gleichungen (2) und (3) geführt haben, indem man neben den Größen $\partial x_{\mathfrak{a}}/\partial u_{\mathfrak{b}}$ auch $\partial u_{\mathfrak{a}}/\partial x_{\mathfrak{b}}$ einführt. Man erhält so zunächst

$$\delta p_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \delta z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}}^{1,n} p_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}},$$

$$\delta_0 p_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \delta z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}} \left(p_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial p_{\mathfrak{a}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \delta x_{\mathfrak{b}}\right);$$

nun ist aber

$$\frac{\partial p_{\mathfrak{a}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial p_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}},$$

also folgt aus der vorletzten Gleichung

$$\delta_0 p_{\mathfrak{a}} = \delta_0 \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial \delta z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial (p_{\mathfrak{b}} \delta x_{\mathfrak{b}})}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial \delta_0 z}{\partial x_{\mathfrak{a}}}.$$

Ersetzt man hier z durch die beliebige von $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängige Größe U, so bleibt alles ungeändert und man erhält für die unter (14) erklärte Variation die Formel

$$\frac{\partial \delta_0 U}{\partial x_\alpha} = \delta_0 \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}.$$

Hieraus folgt, da offenbar

$$\delta_0 x_\alpha = 0$$

zu setzen ist,

$$\delta_0 f = f_z \delta_0 z + \sum_\alpha^{1,n} f_{p_\alpha} \delta_0 p_\alpha = f_z \delta_0 z + \sum_\alpha^{1,n} f_{p_\alpha} \frac{\partial \delta_0 z}{\partial x_\alpha}$$

$$= f_z \delta_0 z + \sum_\alpha^{1,n} \frac{\partial (f_{p_\alpha} \delta_0 z)}{\partial x_\alpha} - \sum_\alpha^{1,n} \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial x_\alpha} \delta_0 z;$$

die Formel (15) ergibt also

$$\text{(16)} \qquad \delta J = \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \Big(f_z - \sum_\alpha^{1,n} \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial x_\alpha} \Big) \delta_0 z \, dx_1 \dots dx_n$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \sum_\alpha^{1,n} \frac{\partial (f \delta x_\alpha + f_{p_\alpha} \delta_0 z)}{\partial x_\alpha} dx_1 \dots dx_n.$$

Das Gebiet $\mathfrak{S}$, als Bereich der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ oder auch $u_1, \dots u_n$ aufgefaßt, werde nun von einem Randgebiet $\mathfrak{R}$ begrenzt, auf dem $v_1, \dots v_{n-1}$ Unabhängige seien; bezeichnet man die den Differentialsystemen

$$\begin{aligned} &dv_1 > 0, \quad dv_2 = dv_3 = \cdots = dv_{n-1} = 0, \\ &dv_1 = 0, \quad dv_2 > 0, \quad dv_3 = \cdots = dv_{n-1} = 0, \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &dv_1 = dv_2 = \cdots = dv_{n-2} = 0, \quad dv_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

entsprechenden Zuwüchse der Größe u_α durch $d_1 u_\alpha, d_2 u_\alpha, \dots d_{n-1} u_\alpha$, und nennt $d_n u_\alpha$ den Zuwachs beim Fortgang von dem betrachteten Punkte des Gebiets $\mathfrak{R}$ in das Innere des Gebiets $\mathfrak{S}$ hinein, so sei immer

$$\begin{vmatrix} d_1 u_1, & d_2 u_1, & \dots & d_n u_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ d_1 u_n, & d_2 u_n, & \dots & d_n u_n \end{vmatrix} > 0.$$

Wir definieren ferner

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}^{(n-1)} M\,d\,x_2 \ldots d\,x_n = \int\limits_{\mathfrak{R}}^{(n-1)} M \frac{\partial(x_2, \ldots x_n)}{\partial(v_1, \ldots v_{n-1})}\, d\,v_1\, d\,v_2 \ldots d\,v_{n-1},$$

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}^{(n-1)} M\,d\,x_1\,d\,x_3 \ldots d\,x_n = \int\limits_{\mathfrak{R}}^{(n-1)} M \frac{\partial(x_1, x_3, \ldots x_n)}{\partial(v_1, v_2, \ldots v_{n-1})}\, d\,v_1\, d\,v_2 \ldots d\,v_{n-1}$$

usf., so daß links immer die Reihenfolge der Differentiale wesentlich ist.

Mit diesen Festsetzungen und Bezeichnungen lautet nun die Gaußsche Integraltransformation in den Gebieten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ wie folgt:

$$\int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial U_n}{\partial x_n}\right) d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_n$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{R}}^{(n-1)} (U_1\, d\,x_2\, d\,x_3 \ldots d\,x_n - U_2\, d\,x_1\, d\,x_3 \ldots d\,x_n + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\, U_n\, d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_{n-1}).$$

Den Integranden des n-fachen Integrals nennt man die Divergenz eines Vektors $(U_1, U_2, \ldots U_n)$; ihr Integral über $\mathfrak{S}$ kann in ein Integral über $\mathfrak{R}$ verwandelt werden. Verschwinden die Größen U_α sämtlich auf dem Gebiet $\mathfrak{R}$, so hat das n-fache Integral den Wert Null.

Angewandt auf die Formel (16) ergibt die Gaußsche Integraltransformation

$$\delta J = \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(n)} \left(f_z - \sum_{\alpha}^{1,n} \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) \delta_0 z\, d\,x_1\, d\,x_2 \ldots d\,x_n$$

$$+ \sum_{\alpha}^{1,n} \int\limits_{\mathfrak{R}}^{(n-1)} (f\,\delta\,x_\alpha + f_{p_\alpha}\,\delta_0 z)\,(-1)^{\alpha-1}\, d\,x_1 \ldots d\,x_{\alpha-1}\, d\,x_{\alpha+1} \ldots d\,x_n;$$

wählt man die Variationen so, daß $\delta\,x_\alpha$ und $\delta_0 z$ auf dem Randgebiet $\mathfrak{R}$ verschwinden, so bleibt nur der erste Summand dieses Ausdrucks, und eine Extremsforderung $\delta J = 0$ gibt bei der Willkürlichkeit von $\delta_0 z$ auf Grund einer leichten Übertragung des Hauptthilfssatzes die Differentialgleichung

$$f_z - \sum_{\alpha}^{1,n} \frac{\partial f_{p_\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0.$$

§ 53.

Erhaltungssätze.

I. Wenn die Grundgleichungen der Mechanik aus einem Prinzip der kleinsten Wirkung von der Form

$$\delta \int H(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)\, dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots$$

abgeleitet werden, in welchem q die Parameter des bewegten Systems sind, und t die Zeit bedeutet, so erscheint die Gleichung der Energie in der Form

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} - H\right\} = 0;$$

die integrierte Gleichung

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} - H = \text{const.}$$

ergibt die Erhaltung der Energie, die nur gilt, weil die Zeit t in H nicht explizite vorkommt. Die Energiegleichung würde eine inhaltlose Identität werden, wenn H in den Größen $\dot{q}$ homogen von erster Stufe wäre, oder wenn das Wirkungsintegral bei beliebiger Transformation der Unabhängigen t invariant bliebe.

Fragen, die in einem gewissen Entwicklungsstadium der Relativitätslehre auftauchten, lassen es erwünscht erscheinen, die obigen Bemerkungen auf Doppel- oder mehrfache Integrale, deren Variation verschwindend gesetzt wird, zu übertragen.

Wir betrachten z. B. ein Doppelintegral im Raume der $n+2$ Größen $x, t, y_1, y_2, \ldots y_n$, setzen allgemein

$$y'_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x}, \quad \dot{y}_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial t},$$

und fordern, indem der Buchstabe y immer die Gesamtheit der Größen y_α bedeutet,

$$\delta \iint f(y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots y'_n, \dot{y}_1, \ldots \dot{y}_n)\, dx\, dt = 0$$

oder kürzer

$$\delta \iint f(y, y', \dot{y})\, dx\, dt = 0; \tag{1}$$

die Eulerschen Gleichungen sind offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots n.$$

Aus ihnen können gewisse, der Energiegleichung entsprechende Verbindungen abgeleitet werden.

Zu diesen Zwecken denken wir alle $n+2$ Größen x, t, y_α durch zwei unvariierte Unabhängige u, v ausgedrückt und setzen

$$D = \frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)}, \quad x_n = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \text{usf.};$$

dann ist die Variationsaufgabe (1)

$$\delta \iint f D \, d u \, d v = 0$$

und die den Größen x und t entsprechenden Eulerschen Gleichungen sind, da x und t in f nicht explizite vorkommen,

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial(fD)}{\partial x_u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial(fD)}{\partial x_v} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial(fD)}{\partial t_u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial(fD)}{\partial t_v} = 0;$$

dabei sind in der Größe fD die Unabhängigen $y, y_u, y_v, x_u, x_v, t_u, t_v$ eingeführt und durch sie y' und $\dot{y}$ ausgedrückt zu denken. In dieser Auffassung gelten die Gleichungen

$$y_u = y' x_u + \dot{y} t_u, \quad y_v = y' x_v + \dot{y} t_v$$

und weiter, indem man nach x_u und x_v ableitet,

$$0 = y' + \frac{\partial y'}{\partial x_u} x_u + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_u} t_u, \quad 0 = \frac{\partial y'}{\partial x_u} x_v + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_u} t_v,$$
$$0 = \frac{\partial y'}{\partial x_v} x_u + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_v} t_u, \quad 0 = y' + \frac{\partial y'}{\partial x_v} x_v + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_v} t_v.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich

$$D \frac{\partial y'}{\partial x_u} + y' t_v = 0, \quad D \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_u} - y' x_v = 0$$

oder verallgemeinerungsfähig geschrieben

$$(2) \qquad D \frac{\partial y'}{\partial x_u} + y' M(x_u) = 0, \quad D \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_u} + \dot{y} M(t_u) = 0,$$

wobei wir unter $M(x_u)$ die zu x_u gehörige Adjunkte in der Determinante D usf. verstehen, so daß

$$D = x_u M(x_u) + t_u M(t_u), \quad 0 = x_v M(x_u) + t_v M(t_u) \text{ usf.}$$

Jetzt bilden wir die Ausdrücke

$$\frac{\partial(fD)}{\partial x_u} = f M(x_u) + \Sigma D \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x_u} + \Sigma D \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial(fD)}{\partial x_v} = f M(x_v) + \Sigma D \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x_v} + \Sigma D \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_v},$$

also nach (2)

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial (fD)}{\partial x_u} &= M(x_u)\left(f - \Sigma y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) - M(t_u)\,\Sigma y' \frac{\partial f}{\partial \dot y},\\ \frac{\partial (fD)}{\partial x_v} &= M(x_v)\left(f - \Sigma y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) - M(t_v)\,\Sigma y' \frac{\partial f}{\partial \dot y}.\end{aligned}$$

Da nun offenbar

$$(4)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial M(x_u)}{\partial u} + \frac{\partial M(x_v)}{\partial v} &= t_{vu} - t_{uv} = 0,\\ \frac{\partial M(t_u)}{\partial u} + \frac{\partial M(t_v)}{\partial v} &= x_{uv} - x_{vu} = 0,\end{aligned}$$

$$D\,du = M(x_u)\,dx + M(t_u)\,dt, \quad D\,dv = M(x_v)\,dx + M(t_v)\,dt,$$

so ergeben die Gleichungen (3)

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial (fD)}{\partial x_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial (fD)}{\partial x_v} = -M(x_u)\frac{\partial}{\partial u}\left(-f + \Sigma y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$-M(t_u)\frac{\partial}{\partial u}\Sigma y' \frac{\partial f}{\partial \dot y} - M(x_v)\frac{\partial}{\partial v}\left(-f + \Sigma y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) - M(t_v)\frac{\partial}{\partial v}\Sigma y' \frac{\partial f}{\partial \dot y}$$

$$= -D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-f + \Sigma y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\Sigma y' \frac{\partial f}{\partial \dot y}\right\},$$

und man erhält die der Veränderlichen x entsprechende Eulersche Gleichung in der Form

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-f + \Sigma y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\Sigma y' \frac{\partial f}{\partial \dot y} = 0;$$

ebenso entspricht der Größe t die Gleichung

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\Sigma \dot y \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-f + \Sigma \dot y \frac{\partial f}{\partial \dot y}\right) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, in denen eine Divergenz gleich Null gesetzt wird, sind die dem betrachteten Integral zugehörigen Erhaltungssätze, die dem Satze von der Erhaltung der Energie entsprechen. Sie werden in einem Falle inhaltlose Identitäten, dann nämlich, wenn das Integral

$$J = \iint f(y, y', \dot y)\,dx\,dt$$

gegenüber einer beliebigen Transformation der Unabhängigen x, t invariant ist, diese also dem Integral dieselbe Eigenschaft geben, wie die unvariierten Unabhängigen u, v in § 46. Dann gelten den dortigen Gleichungen (6) gemäß die Identitäten

$$-f+\Sigma y'\frac{\partial f}{\partial y'}=0, \quad -f+\Sigma \dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=0,$$

$$\Sigma y'\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\Sigma \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

und die Gleichungen (5), (6) werden offenbar inhaltlos. Diese Beschaffenheit des Integrals J wird in der Relativitätslehre gefordert, wenn x, t die Unabhängigen in einer auf zwei Stufen beschränkten Raumzeitwelt sind, die dem Wirkungsprinzip $\delta J=0$ unterworfen ist; hier sind also Erhaltungssätze im Sinne der gewöhnlichen Mechanik nicht zu erwarten.

II. Die durchgeführten Betrachtungen bleiben mit leichter Abänderung gültig, wenn statt der zwei Unabhängigen x, t deren beliebig viele, etwa $x_1, x_2, \ldots x_r$ zu grunde liegen, also wenn eine Variationsaufgabe

$$\delta \int^{(r)} f(y_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})\, d x_1\, d x_2 \ldots d x_r = 0 \tag{7}$$

vorliegt, in der $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots r$ und

$$y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}=\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}}$$

gesetzt ist. Für u und v sind dann r unvariierte Größen u_1, $u_2, \ldots u_r$ einzuführen; die Funktionaldeterminante D wird

$$D=\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots x_r)}{\partial(u_1, u_2, \ldots u_r)}=\operatorname{Det} x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}},$$

indem $x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}=\partial x_{\mathfrak{b}}/\partial u_{\mathfrak{c}}$ und $\mathfrak{c}=1, 2, \ldots r$ gesetzt wird.

Die Gleichungen (2) werden

$$D\frac{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}}+M(x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}})\, y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}=0,$$

wobei $M(x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}})=\partial D/\partial x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ die Adjunkte von $x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ in der Determinante D ist. Den Gleichungen (4) entspricht die Jacobische, für beliebige Funktionaldeterminanten gültige Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{c}}^{1,r}\frac{\partial}{\partial u_{\mathfrak{c}}} M(x_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}})=0;$$

den Eulerschen Gleichungen (5) und (6) entsprechend ergibt sich

$$\sum_{\mathfrak{b}}^{1,r}\frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\left(-f\delta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}+\sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}\right)=0, \quad \mathfrak{c}=1, 2, \ldots r, \tag{8}$$

wobei $\delta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ Null oder Eins bedeutet, je nach dem $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ verschieden oder gleich sind. Hiermit haben wir als Folge der Eulerschen Gleichungen r Gleichungen erhalten, in denen eine Divergenz gleich Null gesetzt wird.

Rechnet man die linke Seite der letzten Gleichung aus, so ergibt sich die Identität

$$
(9) \qquad \sum_{\mathfrak{b}}^{1,r} \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\left(- f \delta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} + \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}\right)
$$

$$
= - \frac{\partial f}{\partial x_{\mathfrak{c}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \sum_{\mathfrak{a}} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}
$$

$$
= - \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}}} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} - \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}} \frac{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{c}}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}
$$

$$
+ \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}
$$

$$
= - \sum_{\mathfrak{a}} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}} \right\};
$$

es ist ja $\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}/\partial x_{\mathfrak{c}} = \partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}/\partial x_{\mathfrak{b}}$.

Man kann diese Identität auch daraus ableiten, daß die linken Seiten der Gleichungen (8), mit D vervielfacht, die Größen

$$
\sum_{\mathfrak{b}}^{1,r} \frac{\partial}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial (f D)}{\partial x_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}
$$

sind, die $= 0$ gesetzt, die auf $x_{\mathfrak{c}}$ bezügliche Eulersche Gleichung der Variationsaufgabe

$$
\delta \int^{(r)} f(y_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) D\, d u_1 \ldots d u_r = 0
$$

liefern, die mit der Aufgabe (7) wesentlich identisch ist. Das letzte Integral behält seine Form, wenn man für $u_1, \ldots u_r$ andere unabhängige Parameter einführt. Die Beziehungen (9) ergeben sich so als Sonderfälle der Identitäten § 46 (13), indem man schließlich $u_{\mathfrak{b}} = x_{\mathfrak{b}}$ setzt, so daß $D = 1$ wird.

Inhaltlos werden die Gleichungen (8), wenn das Integral

$$
\int^{(r)} f(y_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})\, d x_1 \ldots d x_r
$$

bezüglich der Unabhängigen x invariant ist im Sinne des § 46 oder, was dasselbe besagt, im Sinne der Relativitätslehre kovariant ist. Dann geben die dortigen Gleichungen (6), sinngemäß verallgemeinert, die Identitäten

$$-f\,\delta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} + \sum_{\mathfrak{a}}^{1,n} y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}} = 0;$$

die Erhaltungssätze (8) werden reine Identitäten bei willkürlicher Wahl der Funktionen $y_{\mathfrak{a}}$.

III. Um endlich auch den Fall zu umfassen, in welchem zweite Ableitungen im Integranden vorkommen, knüpfen wir am besten an die Formel (9) des § 46 an, aus der wir aber nur die Definition der Größen $A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ entnehmen wollen, ohne daß die Formel zunächst gilt.

Die dort verschwindende Größe

$$L = \Phi_x \xi + \sum_{\mathfrak{a}} \Phi_{x_{\mathfrak{a}}} \xi_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \Phi_{x_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}} \xi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \cdots - \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial (\Phi \varrho_{\mathfrak{a}})}{\partial u_{\mathfrak{a}}},$$

$$\xi_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \xi}{\partial u_{\mathfrak{a}}}, \quad \xi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}},$$

in der die weggelassenen Glieder aus den hingeschriebenen entstehen, indem man x, ξ durch y, η usf. ersetzt, kann zur Definition der Größen $A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ auch ohne die Voraussetzungen des § 46 benutzt werden, indem man einfach ansetzt

$$L = P\xi + Q\eta + \cdots - \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{\partial}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \left(A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, \varrho_{\mathfrak{b}} + A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \frac{\partial \varrho_{\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{c}}} \right),$$

was auf Grund der Formeln

$$\xi = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial x}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \varrho_{\mathfrak{a}}, \quad \eta = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial y}{\partial u_{\mathfrak{a}}} \varrho_{\mathfrak{a}}, \quad \ldots$$

$$\Phi_{x_{\mathfrak{a}}} \xi_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial (\Phi_{x_{\mathfrak{a}}} \xi)}{\partial u_{\mathfrak{a}}} - \xi \frac{\partial \Phi_{x_{\mathfrak{a}}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}, \quad \ldots$$

offenbar möglich ist bei willkürlicher Wahl der Funktionen $\varrho_{\mathfrak{a}}$. Nun sieht man aber aus dem ersten Ausdruck von L, daß eine beliebig herausgegriffene Größe $\varrho_{\mathfrak{c}}$ vorkommt mit dem Faktor

$$\Phi_x \frac{\partial x}{\partial u_{\mathfrak{c}}} + \sum_{\mathfrak{a}} \Phi_{x_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial^2 x}{\partial u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{c}}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \Phi_{x_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}} \frac{\partial^3 x}{\partial u_{\mathfrak{a}}\, \partial u_{\mathfrak{b}}\, \partial u_{\mathfrak{c}}} + \cdots - \frac{\partial \Phi}{\partial u_{\mathfrak{c}}} = 0;$$

also kommt $\varrho_{\mathfrak{c}}$ auch in dem zweiten Ausdruck für L nicht vor, und das gibt die Gleichung

$$P \frac{\partial x}{\partial u_{\mathfrak{c}}} + Q \frac{\partial y}{\partial u_{\mathfrak{c}}} + \cdots = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial A_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die links stehenden Verbindungen von P, Q, ..., also der linken Seiten der Eulerschen Differentialgleichungen, als Divergenzen dargestellt werden können.

Aus den Eulerschen Gleichungen der Variationsaufgabe

$$\delta \int^{(n)} \Phi(x, x_{\mathfrak{a}}, x_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \ldots y, y_{\mathfrak{a}}, y_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \ldots)\, d u_1\, d u_2 \ldots d u_n = 0,$$

d. h. den Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad \ldots$$

folgen also die Erhaltungssätze

$$\text{(10)} \qquad \sum_{\mathfrak{a}}^{1, n} \frac{\partial A_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = 0, \quad \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n.$$

Diese werden aber inhaltlos, wenn das Integral

$$\int^{(n)} \Phi\, d u_1 \ldots d u_n$$

gegenüber einer Verwandlung der Unabhängigen u invariant ist, wie es in § 46 vorausgesetzt wurde; denn dann sind nach § 46 (12) die Gleichungen (10) reine Identitäten bei beliebiger Wahl der Funktionen x, y, ...

Die hier wieder benutzten Zeichen $u_1, \ldots u_n$ entsprechen den $x_1, \ldots x_n$ des Absatzes II., die Zeichen $x, y, \ldots \Phi$ den dortigen y, f. Im Falle $n = 2$ und wenn in der Bezeichnung des Absatzes I. die Aufgabe

$$\delta \iint f(y, y', \dot{y}, y'', \dot{y}', \ddot{y})\, d x\, d t = 0$$

vorliegt, sind die Erhaltungsgleichungen

$$\left(f - y' f_{y'} - y'' f_{y''} - \dot{y}' f_{\dot{y}'} + y' \frac{\partial f_{y''}}{\partial x}\right)'$$
$$+ \left[- y' f_{\dot{y}} - \dot{y}' f_{\ddot{y}} + y' \left(\frac{\partial f_{\dot{y}'}}{\partial x} + \frac{\partial f_{y''}}{\partial t}\right)\right]^{\cdot} = 0,$$

wobei jedes mit y behaftete Glied so viel Glieder mit $y_{\mathfrak{a}}$ bedeutet, wie Größen $y_{\mathfrak{a}}$ vorhanden sind, und eine ähnlich gebaute Gleichung mit Vertauschung von x und t, sowie von Punkt und Strich. Die Ausrechnung gibt für die linke Seite der hingeschriebenen Gleichung

$$y' \left(f_y - \frac{\partial f_{y'}}{\partial x} - \frac{\partial f_{\dot{y}}}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_{y''}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{\dot{y}'}}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial f_{\ddot{y}}}{\partial t^2}\right) = 0,$$

was eine Summe über alle $y_{\mathfrak{a}}$ bedeutet, also wirklich die erwartete Verbindung der linken Seiten der Eulerschen Gleichungen.

Achter Abschnitt.

Unstetige Aufgaben und Lösungen.

§ 54.

Freie Extreme an gebrochenen Linien.

I. Die Entwicklungen der ersten Abschnitte geben nicht immer eine Lösung der ursprünglichen Extremsaufgabe, zwischen zwei gegebenen Punkten eine Kurve zu ziehen, welche ein freies oder gebundenes Extrem des Integrals J liefert. Es wurde nur gezeigt, daß die gesuchte Kurve, wenn sie gewisse Stetigkeitseigenschaften haben soll, nichts anderes sein kann, als ein reguläres Stück einer Extremale; sodann wurden Bedingungen des Extrems abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die beiden gegebenen Endpunkte der gesuchten Kurve schon durch einen von Singularitäten freien Bogen einer Extremale verbunden seien. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, was schon bei einfachen Aufgaben vorkommt, so kann das gesuchte Extrem von einer Kurve mit den vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften nicht geliefert werden, und so kommt man zu der Frage, ob nicht eine mit Singularitäten, z. B. Ecken behaftete Kurve die vorgelegte Aufgabe löst. Gelingt es, diese Frage zu beantworten, indem man bestimmte Gattungen von Singularitäten zuläßt, so hat man zwar auch noch keine unfehlbare Methode zur Bestimmung des gesuchten Extrems, aber der Kreis der Fälle, in denen die Aufgabe gelöst werden kann, erweitert sich.

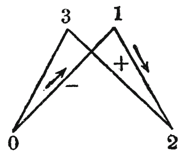
Im besonderen fragen wir, wann das Integral

$$J = \int F\,dt$$

zu einem Extrem gemacht wird durch eine Kurve, welche aus einer endlichen Anzahl in Ecken zusammenstoßender Stücke besteht, deren jedes die früher für die ganze Kurve geforderten Eigenschaften besitzt; d. h. längs jedes Stückes seien x und y stetige, mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene

Funktionen eines Parameters t. Für jedes einzelne dieser Stücke bleiben die Betrachtungen des zweiten Abschnitts gültig, da man die Ecken ungeändert lassen und die Variation auf das Innere der Stücke beschränken kann; jedes von ihnen muß daher ein Bogen einer Extremale sein. Auf den in der Ecke 1 zusammenstoßenden Bögen seien die Punkte 0 und 2 so nahe der Ecke angenommen, daß die Bögen 0 1 und 1 2 kein Paar konjugierter Punkte enthalten (Fig. 13). Dann können die Punkte 0 und 2 mit jedem von 1 hinreichend wenig entfernten Punkte 3 durch Extremalen 0 3 und 3 2 verbunden werden, und diese können nach § 2 als Variation der Bögen 0 1 und 1 2 betrachtet werden. Die gebrochene Linie 0 1 2 als Teil der gesuchten Kurve kann daher, indem die Variationsformeln des § 2 für jeden der Teile 0 1 und 0 2 gültig bleiben, durch 0 3 2 ersetzt werden. So ergeben sich die Formeln

Fig. 13.



$$\delta \bar{J}_{01} = F_{x'}^{-}\,\delta x + F_{y'}^{-}\,\delta y \,\Big|^{1},$$

$$\delta \bar{J}_{12} = -F_{x'}^{+}\,\delta x - F_{y'}^{+}\,\delta y \,\Big|^{1},$$

wobei das oben angeheftete Zeichen — oder + entscheidet, ob die bezeichnete Größe für den Bogen 0 1 oder den Bogen 1 2 gebildet ist. Die letzten Gleichungen ergeben hiernach

$$\delta \bar{J}_{012} = (F_{x'}^{-} - F_{x'}^{+})\,\delta x + (F_{y'}^{-} - F_{y'}^{+})\,\delta y \,\Big|^{1}.$$

Dieses Differential muß verschwinden, wenn die Kurve, welcher der Linienzug 0 1 2 angehört, ein Extrem des Integrals J ergeben soll. Ist daher der Eckpunkt 3 in der Nähe der Lage 1 frei verfügbar, die Größen δx_1, δy_1 also voneinander unabhängig, so müssen (§ 7) die Koeffizienten der linearen Glieder verschwinden, und man erhält den Satz von Erdmann

(1) $$F_{x'}^{-} = F_{x'}^{+}, \quad F_{y'}^{-} = F_{y'}^{+}.$$

Wenn dagegen der Eckpunkt von vornherein an die Kurve

(2) $$h(x_1, y_1) = 0$$

gebunden ist, so daß die Gleichung

$$0 = h_x(x_1, y_1)\,\delta x_1 + h_y(x_1, y_1)\,\delta y_1$$

besteht, so ergibt sich als Bedingung des Extrems

$$\begin{vmatrix} F_{x'}^{-} - F_{x'}^{+} & F_{y'}^{-} - F_{y'}^{+} \\ h_x(x_1, y_1) & h_y(x_1, y_1) \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. daß bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes 1 auf der Kurve (2) die Gleichung

$$F_{x'}^{-}\,\delta x_1 + F_{y'}^{-}\,\delta y_1 = F_{x'}^{+}\,\delta x_1 + F_{y'}^{+}\,\delta y_1 \tag{3}$$

gilt.

Bezeichnet man die Strecke 13 durch δs, und nimmt an, daß t auf jeder der Extremalen 01 und 12 den Bogen bedeute, der immer in der Richtung von 0 über 1 nach 2 hin wachse, so kann man drei Winkel σ, θ_+, θ_- einführen, welche folgende Gleichungen erfüllen:

$$\delta x_1 = \delta s \cos\sigma, \quad \delta y_1 = \delta s \sin\sigma,$$
$$x'_- = \cos\theta_-, \quad y'_- = \sin\theta_-, \quad x'_+ = \cos\theta_+, \quad y'_+ = \sin\theta_+.$$

Man definiere ferner die Größen u, v durch die Gleichungen

$$\delta x_1 = x'_+ u + x'_- v, \quad \delta y_1 = y'_+ u + y'_- v; \tag{4}$$

dann ergibt sich leicht

$$u = \frac{\delta s \sin(\sigma - \theta_-)}{\sin(\theta_+ - \theta_-)}, \quad v = \frac{\delta s \sin(\sigma - \theta_+)}{\sin(\theta_- - \theta_+)}$$

und diese Größen sind den Loten proportional, welche vom Punkte 3 auf die Extremalen 01 und 12 gefällt werden können. Dabei ergeben die Gleichungen (4)

$$(F_{x'}^{-} - F_{x'}^{+})\,\delta x_1 + (F_{y'}^{-} - F_{y'}^{+})\,\delta y_1$$
$$= u(x'_+ F_{x'}^{-} + y'_+ F_{y'}^{-} - F^+) - v(x'_- F_{x'}^{+} + y'_- F_{y'}^{+} - F^-)$$
$$= -u\,\mathfrak{E}(x_1, y_1, x'_-, y'_-, x'_+, y'_+) + v\,\mathfrak{E}(x_1, y_1, x'_+, y'_+, x'_-, y'_-),$$

oder in kurzer Bezeichnung

$$= -u\,\mathfrak{E}^- + v\,\mathfrak{E}^+$$

und dieser Ausdruck muß nach dem Obigen bei jeder erlaubten Verschiebung des Eckpunktes verschwinden. Sind δx_1, δy_1 und damit u, v willkürliche Größen, so folgt

$$\mathfrak{E}^- = \mathfrak{E}^+ = 0.$$

II. Erstes Beispiel. Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Euler-Jacobischen Form bei der Zentralbewegung eines freien Punktes in der Ebene. Die Abstoßung sei z. B. der Entfernung proportional; setzt man

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so ist das Potential $c r^2$ und das bezeichnete Prinzip sagt aus, daß die Bahnkurven das Integral

$$\int \sqrt{c r^2 + h}\ \sqrt{d x^2 + d y^2}$$

zum Minimum machen, wobei h die Konstante der lebendigen Kraft bedeutet. Nimmt man im besonderen $h = 0$ an, so sind unter den hierdurch definierten Bahnkurven die vom Kraftzentrum ausgehenden Radien enthalten, längs deren der bewegte Punkt sich dem Zentrum asymptotisch annähern kann, und man hat zu setzen

$$F = (x^2 + y^2) \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Die Gleichungen (1) ergeben, wenn r von Null verschieden ist,

$$\frac{x'_-}{\sqrt{x'^2_- + y'^2_-}} = \frac{x'_+}{\sqrt{x'^2_+ + y'^2_+}}, \quad \frac{y'_-}{\sqrt{x'^2_- + y'^2_-}} = \frac{y'_+}{\sqrt{x'^2_+ + y'^2_+}},$$

d. h. die Richtungen $+$, $-$ fallen zusammen. Eine Ecke kann also nur im Kraftzentrum ($r = 0$) auftreten. Für irgend zwei von ihm ausgehende Radien sind die Gleichungen (1) erfüllt. Da nun die Radien die einzigen Bahnkurven sind, welche bei der Voraussetzung $h = 0$ durch das Kraftzentrum gehen, so kann eine gebrochene Linie nur dann ein Extrem liefern, wenn sie aus zwei im Zentrum zusammenstoßenden geraden Stücken besteht.

Ähnliche Betrachtungen kann man anstellen, wenn die Kraft einer beliebigen Potenz der Entfernung proportional ist; man hat dann das Integral

$$\int (x^2 + y^2)^n \sqrt{d x^2 + d y^2}$$

zu einem Minimum zu machen.

Zweites Beispiel. Die kürzeste Linie auf der Fläche, deren Bogenelement durch die Formel

$$d s^2 = E d x^2 + 2 E d x\, d y + G d y^2$$

gegeben wird, kann nirgends eine frei verfügbare Ecke aufweisen, solange $E G - F^2$ von Null verschieden ist. Denn die Gleichungen (1) würden erfordern

$$E\left(\frac{d x}{d s}\right)_- + F\left(\frac{d y}{d s}\right)_- = E\left(\frac{d x}{d s}\right)_+ + F\left(\frac{d y}{d s}\right)_+,$$

$$F\left(\frac{d x}{d s}\right)_- + G\left(\frac{d y}{d s}\right)_- = F\left(\frac{d x}{d s}\right)_+ + G\left(\frac{d y}{d s}\right)_+,$$

woraus bei der angegebenen Voraussetzung folgen würde

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_- - \left(\frac{dx}{ds}\right)_+ = \left(\frac{dy}{ds}\right)_- - \left(\frac{dy}{ds}\right)_+ = 0.$$

Wohl aber kann eine Ecke auftreten, wenn verlangt wird, die Punkte 0 und 2 durch die kürzeste Linie zu verbinden, welche mit einer gegebenen Kurve einen nicht vorgeschriebenen Punkt 1 gemein hat. Bezeichnet D den Zuwachs in bestimmter Richtung längs dieser Kurve, Ds das Bogenelement, so muß die Größe

$$\left\{E\left(\frac{dx}{ds}\right)_- + F\left(\frac{dy}{ds}\right)_-\right\} Dx + \left\{F\left(\frac{dx}{ds}\right)_- + G\left(\frac{dy}{ds}\right)_-\right\} Dy$$

der Gleichung (3) zufolge ihren Wert behalten, wenn man die Fußmarke — durch + ersetzt. Sind —, + die dem Fortgang 0 1 2 entsprechenden Richtungen der geodätischen Kurven 0 1, 1 2, so ist jene Größe $Ds \cos(Ds, -)$; man erhält somit

$$\cos(Ds, -) = \cos(Ds, +),$$

wobei die hohlen Winkel gemeint sind. Die Richtungen —, + der geodätischen Linien liegen also symmetrisch zur Richtung der gegebenen Kurve, die beiden Bögen 0 1, 1 2 also auf derselben Seite dieser Kurve und bilden gleiche spitze Winkel mit ihr.

III. Eine anschauliche Bedingung für das Auftreten von Extremen an gebrochenen Linien läßt sich nach Caratheodory angeben, wenn man die Kurve

$$F(x, y, x', y') = 1 \tag{5}$$

betrachtet, indem man x, y fest läßt und x', y' als laufende rechtwinklige Koordinaten auf der Kurve ansieht. Diese Kurve heißt die Indikatrix oder Eichlinie der Variationsaufgabe

$$\delta \int F(x, y, x', y')\, dt = 0.$$

Eine Tangente derselben wird durch die Gleichung

$$(\xi - x') F_{x'} + (\eta - y') F_{y'} = 0$$

mit ξ und η als laufenden Koordinaten dargestellt; oder auch nach (5)

$$\xi F_{x'} + \eta F_{y'} = 1. \tag{6}$$

Sind nun bei den Richtungen x'_-, y'_- und x'_+, y'_+ die Erdmannschen Bedingungen

$$F_{x'}^- = F_{x'}^+, \quad F_{y'}^- = F_{y'}^+$$

erfüllt, und schneiden die in diesen Richtungen vom Koordinatenursprung aus gezogenen Geraden die Kurve (5) in den Punkten (x_0', y_0') und (x_1', y_1'), wobei

$$x_0' = \alpha_0 x_-', \quad y_0' = \alpha_0 y_-', \quad x_1' = \alpha_1 x_+', \quad y_1' = \alpha_1 y_+',$$
$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 > 0$$

gesetzt werden kann, so sind die Tangenten der Eichlinie in diesen Punkten

$$\xi F_{x'}^- + \eta F_{y'}^- = 1, \quad \xi F_{x'}^+ + \eta F_{y'}^+ = 1,$$

also identisch; die Eichlinie hat eine Doppeltangente, deren Berührungspunkte vom Koordinatenursprung in den Richtungen —, + liegen.

Führt man in die Gleichung (5) Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$x' = \varrho \cos\theta, \quad y' = \varrho \sin\theta$$

ein, so ergibt sich wegen der Homogeneität

$$\varrho = \frac{1}{F(x,\ y,\ \cos\theta,\ \sin\theta)}.$$

Will man also eine Variationsaufgabe herstellen, bei der die oben besprochene Erscheinung auftritt, so sei

$$\varrho = \varphi(x,\ y,\ \cos\theta,\ \sin\theta) \tag{7}$$

die in Polarkoordinaten geschriebene Gleichung einer Kurve mit Doppeltangente, die dem Punkte (x, y) zugeordnet ist, φ positiv homogen in $\cos\theta$ und $\sin\theta$. Dann setze man einfach

$$F\left(x,\ y,\ \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)$$
$$= \left[\varphi\left(x,\ y,\ \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)\right]^{-1}$$

oder auch

$$F(x,\ y,\ x',\ y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}\left[\varphi\left(x,\ y,\ \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)\right]^{-1},$$

und die gewünschte Aufgabe ist hergestellt: ihre Eichlinie ist die Kurve (7).

IV. Die Eichlinie gibt auch eine geometrische Deutung der Größe $\mathcal{E}$. Sei (x_1', y_1') ein beliebiger Punkt der Eichlinie; sein

Abstand von der Tangente des Punktes (x', y') ist der Gleichung (6) zufolge

$$\frac{x_1' F_{x'} + y_1' F_{y'} - 1}{\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}} = \frac{x_1' F_{x'} + y_1' F_{y'} - F(x, y, x_1', y_1')}{\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}}$$

$$= \frac{-\mathcal{E}(x, y, x', y', x_1', y_1')}{\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}}$$

oder auch, wenn $x_\tau' = \alpha x_1'$, $y_\tau = \alpha y_1'$, $\alpha > 0$ gesetzt wird,

$$\frac{-\mathcal{E}(x, y, x', y', x_\tau, y_\tau)}{\alpha\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}}.$$

Wenn daher die Tangente der Eichlinie im Punkte (x', y') der Kurve außerhalb ihres Berührungspunktes nicht wieder begegnet, behält $\mathcal{E}$ stets das Vorzeichen bei und verschwindet nur ordentlich; die durch den Punkt (x, y) oder P gehende Extremale, auf die sich x' und y' beziehen, bietet also eine Strecke weit ein starkes Extrem dar; sie ist *stark*, wie wir sagen wollen; im entgegengesetzten Falle sprechen wir von einer *schwachen* Extremale. Hat also die Eichlinie, wie wir jetzt annehmen wollen, eine einzige in A und B berührende Doppeltangente und ist O der Koordinatenursprung, so gehen schwache Extremalen vom Punkte $P(x, y)$ nur in den Richtungen aus, die von O in den hohlen Winkel AOB hineingehen; in den erhabenen Winkel AOB gehen die Richtungen der starken Extremalen hinein. Im Punkte P ändert also eine durch ihn gehende Extremale die Eigenschaft des starken oder schwachen, oder sie bleibt beiderseits stark.

§ 55.

Gebundene Extreme an gebrochenen Linien.

1. Es sei, wie im vierten Abschnitt, das Integral

$$J = \int F\,dt$$

bei vorgeschriebenem Wert des Integrals

$$K = \int G\,dt$$

zu einem Extrem zu machen. Längs einer durch den Punkt 1 gehenden Extremale $\mathfrak{E}$ sei in der Umgebung desselben y als reguläre Funktion von x darstellbar und die Größe

$$F_{y'y'} + \lambda\, G_{y'y'} = x'^2 H_1$$

von Null verschieden; dann ist nach § 40 die Gesamtheit aller Extremalen in der Umgebung des Punktes 1 und der Kurve $\mathfrak{C}$ in der Form

$$y = \Phi(x, a, b, \lambda)$$

darstellbar und die Funktion Φ ist in der Umgebung des durch die Kurve $\mathfrak{C}$ definierten Wertsystems $(x_1, a^0, b^0, \lambda^0)$ regulär. Speziell betrachten wir alle Extremalen, welche durch 1 und noch einen der Kurve $\mathfrak{C}$ angehörigen Punkt 0 gehen, so daß die Gleichungen

$$(1) \qquad y_1 = \Phi(x_1, a, b, \lambda), \quad y_0 = \Phi(x_0, a, b, \lambda)$$

die Größen a und b als Funktionen von λ definieren, sobald die Determinante

$$\Psi(x_0, x_1, a^0, b^0, \lambda^0) = \begin{vmatrix} \Phi_a(x_1, a^0, b^0, \lambda^0), & \Phi_b(x_1, a^0, b^0, \lambda^0) \\ \Phi_a(x_0, a^0, b^0, \lambda^0), & \Phi_b(x_0, a^0, b^0, \lambda^0) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Da man nun offenbar setzen kann

$$\Phi(x, a, b, \lambda) = y_1 + a + b(x - x_1) + [x - x_1]_2,$$

womit die erste Gleichung (1) auf $a = 0$ führt, so folgt

$$\Phi_a(x, a, b, \lambda) = 1 + [x - x_1]_2,$$

$$\Phi_b(x, a, b, \lambda) = x - x_1 + [x - x_1]_2;$$

jene Determinante erhält also die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 + [x_0 - x_1]_2, & x_0 - x_1 + [x_0 - x_1]_2 \end{vmatrix}$$

und ist von Null verschieden, sobald die Größe $|x_1 - x_0|$ hinreichend klein ist. Alsdann geben die Gleichungen (1)

$$0 = \Phi_a(x_1, a, b, \lambda)\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b(x_1, a, b, \lambda)\frac{db}{d\lambda} + \Phi_\lambda(x_1, a, b, \lambda),$$

$$0 = \Phi_a(x_0, a, b, \lambda)\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b(x_0, a, b, \lambda)\frac{db}{d\lambda} + \Phi_\lambda(x_0, a, b, \lambda),$$

außerdem hat man offenbar $\overline{K}_{01}$ als eine Funktion von λ anzusehen, für welche die Gleichung

$$\frac{d\overline{K}_{01}}{d\lambda} = \frac{\partial \overline{K}_{01}}{\partial a}\frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial \overline{K}_{01}}{\partial b}\frac{db}{d\lambda} + \frac{\partial \overline{K}_{01}}{\partial \lambda}$$

besteht, wenn die Teilableitungen in der Voraussetzung gebildet sind, daß x_0 und x_1, nicht aber y_0 und y_1 festgehalten werden. Hieraus folgt

$$0 = \begin{vmatrix} \Phi_a(x_0, a, b, \lambda), & \Phi_b(x_0, a, b, \lambda), & \Phi_\lambda(x_0, a, b, \lambda) \\ \Phi_a(x_1, a, b, \lambda), & \Phi_b(x_1, a, b, \lambda), & \Phi_\lambda(x_1, a, b, \lambda) \\ \dfrac{\partial \overline{K}_{01}}{\partial a} & \dfrac{\partial \overline{K}_{01}}{\partial b} & \dfrac{\partial \overline{K}_{01}}{\partial \lambda} - \dfrac{d\overline{K}_{01}}{d\lambda} \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} \varDelta(x_0, x_1) &= \frac{\partial[\Phi(x_0, a, b, \lambda),\ \Phi(x_1, a, b, \lambda),\ \overline{K}_{01}]}{\partial(a, b, \lambda)} \\ &= \frac{d\overline{K}_{01}}{d\lambda} \cdot \Psi(x_0, x_1, a, b, \lambda). \end{aligned}$$

Diese Größe verschwindet, wenn 0 und 1 kongugierte Punkte sind; sie ist nach § 45, VI. von Null verschieden, sobald der Abstand der Punkte 0 und 1 hinreichend klein ist, und

(2) $$a = a^0, \quad b = b^0, \quad \lambda = \lambda^0$$

gesetzt wird. In der dort behandelten Aufgabe ist die isoperimetrische als Sonderfall enthalten; auszuschließen ist nur der immer ausgeschlossene Ausnahmefall, daß die betrachteten Extremalen schon Extremalen des Integrals K im Sinne des freien Extrems wären. Da nun die Größe Ψ endlich ist, so folgt

(3) $$0 \gtrless \frac{d\overline{K}_{01}}{d\lambda}\bigg|^{a=a^0,\ b=b^0,\ \lambda=\lambda^0}$$

Anderseits ist offenbar

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{K}_{01}}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}\int_{x_0}^{x_1} g(x, y, p)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left\{g_y\left(\Phi_a\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b\frac{db}{d\lambda} + \Phi_\lambda\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + g_p\frac{d}{dx}\left(\Phi_a\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b\frac{db}{d\lambda} + \Phi_\lambda\right)\right\}dx \\ &= g_p\left(\Phi_a\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b\frac{db}{d\lambda} + \Phi_\lambda\right)\bigg|_{x_0}^{x_1} \\ &\qquad\qquad + \int_{x_0}^{x_1}\left(g_y - \frac{dg_p}{dx}\right)\left(\Phi_a\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b\frac{db}{d\lambda} + \Phi_b\right)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1}\left(g_y - \frac{dg_p}{dx}\right)\left(\Phi_a\frac{da}{d\lambda} + \Phi_b\frac{db}{d\lambda} + \Phi_\lambda\right)dx \end{aligned}$$

und ebenso

$$\frac{d\bar{J}_{01}}{d\lambda} = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{d f_p}{d x}\right)\left(\Phi_a \frac{d a}{d\lambda} + \Phi_b \frac{d b}{d\lambda} + \Phi_\lambda\right) d x;$$

die für jede Extremale geltende Gleichung

$$f_y - \frac{d f_p}{d x} + \lambda\left(g_y - \frac{d g_p}{d x}\right) = 0$$

ergibt somit

$$-\frac{d\bar{J}_{01}}{d\lambda} = \lambda \frac{d\bar{K}_{01}}{d\lambda}, \tag{4}$$

und da wir λ als von Null verschieden voraussetzen, ist auch die linke Seite dieser Gleichung von Null verschieden bei der Annahme (2).

Diese ganze Betrachtung werde für eine zweite Extremale $\mathfrak{E}_1$, auf welcher die Punkte 2 und 3 liegen, wiederholt; den zu dieser gehörigen Wert von λ bezeichnen wir durch λ_+^0, setzen der Symmetrie halber in den bisherigen Formeln λ_- für λ, und bezeichnen überhaupt durch die angehefteten Zeichen $-$, $+$, daß sich eine Größe auf die Kurve $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_1$ beziehen soll; man erhält dann die Gleichungen

$$\bar{J}_{23}(\lambda_+) = \bar{J}_{23}(\lambda_+^0) + (\lambda_+ - \lambda_+^0)\left(\frac{d\bar{J}_{23}}{d\lambda_+}\right)_{\lambda_+ = \lambda_+^0} + [\lambda_+ - \lambda_+^0]_2,$$

$$\bar{K}_{23}(\lambda_+) = \bar{K}_{23}(\lambda_+^0) + (\lambda_+ - \lambda_+^0)\left(\frac{d\bar{K}_{23}}{d\lambda_+}\right)_{\lambda_+ = \lambda_+^0} + [\lambda_+ - \lambda_+^0]_2.$$

Jetzt werde angenommen, die Kurven $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ seien Teile eines irgendwie zusammengesetzten Linienzuges, welcher, ohne die gewöhnlich geforderten Stetigkeitseigenschaften zu haben, das Integral J bei vorgeschriebenem Werte von K zum Extrem macht. Dann variiere man so, daß man die Bögen 23 und 01 der Kurven $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}$ durch andere Extremalenbögen mit denselben Endpunkten ersetzt, für welche die bisherigen Bezeichnungen gelten mögen. Da das Integral K längs der variierten Linie denselben Wert haben soll, wie längs der ursprünglichen, so hat man

$$\bar{K}_{01}(\lambda_-) + \bar{K}_{23}(\lambda_+) = \bar{K}_{01}(\lambda_-^0) + \bar{K}_{23}(\lambda_+^0) = \text{const.}$$

Bei den durch diese Gleichung gebundenen Werten λ_+, λ_- soll die Größe

$$\bar{J}_{01}(\lambda_-) + \bar{J}_{23}(\lambda_+)$$

ein Extrem an der Stelle $\lambda_- = \lambda_-^0$, $\lambda_+ = \lambda_+^0$ erreichen; daraus folgt nach § 2

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{d\bar{J}_{01}}{d\lambda_-}, & \dfrac{d\bar{J}_{23}}{d\lambda_+} \\ \dfrac{d\bar{K}_{01}}{d\lambda_-}, & \dfrac{d\bar{K}_{23}}{d\lambda_+} \end{vmatrix}$$

für $\lambda_- = \lambda_-^0$, $\lambda_+ = \lambda_+^0$. Hieraus folgt weiter nach (3) und (4), und den entsprechenden auf die Kurve 23 bezüglichen Beziehungen

$$0 = \frac{d\bar{K}_{01}}{d\lambda_-}\frac{d\bar{K}_{23}}{d\lambda_+}\begin{vmatrix} \lambda_-^0 & \lambda_+^0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda_-^0 = \lambda_+^0.$$

Diese Gleichung drückt den einfachsten Fall des von Mayer aufgestellten Gesetzes von der Erhaltung der isoperimetrischen Konstante aus, welche nach dem erhaltenen Ergebnis für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ denselben Wert hat.

Beispiel. Zwischen den Punkten 0 und 2 eine Linie gegebener Länge zu ziehen, welche durch den gegebenen Punkt 1 geht und mit der geraden Strecke 02 eine größtmögliche Fläche umschließt.

Hat die gesuchte Kurve zwischen 0 und 1, sowie zwischen 1 und 2 keine Unstetigkeit, so müssen die Bögen 01 und 12 Extremalen, also Kreise sein, auf Grund der Erwägungen, die in § 54 das entsprechende Resultat ergaben. Nach dem erhaltenen Satze besteht die gesuchte Linie notwendig aus zwei Kreisbögen 01, 12 von gleichem Radius. Läßt man diesen variieren, so sieht man leicht, daß die Gesamtlänge der beiden Bögen innerhalb gewisser Grenzen jeden Wert annehmen kann.

II. Die Extremalen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ mögen jetzt den Punkt 1 gemein haben; die Punkte 0 und 2 seien so nahe bei dem Punkte 1 gelegen, daß die durch sie gehenden Extremalen jeden Teil eines der Bögen 01 und 12, der die Punkte 0 und 2 nicht enthält, als reguläres Feld umgeben; das ist nach § 45, VI. möglich, wenn H_1 längs der Bögen 01 und 12 nicht verschwindet (Fig. 13). Stellt man die beiden Felder durch die Gleichungen

$$x = \xi_-(t_-, a_-, b_-), \quad y = \eta_-(t_-, a_-, b_-),$$
$$x = \xi_+(t_+, a_+, b_+), \quad y = \eta_+(t_+, a_+, b_+)$$

dar, so kann jeder von 1 hinreichend wenig verschiedene Punkt 3 mit 0 und 2 durch Extremalen der Felder verbunden werden.

Sieht man den Punkt 3 als in der Nähe der Lage 1 veränderlich an, so erhält man

$$(5)\qquad \frac{\partial \overline{K}_{03}}{\partial t_-} = G_- \Big|^3, \quad \frac{\partial \overline{K}_{03}}{\partial a_-} = \int\limits_0^3 [\xi_a(G_x - G'_{x'}) + \eta_a(G_y - G'_{y'})]_- \, dt_- + (\xi_a G_{x'} + \eta_a G_{y'})_- \Big|^3$$

nebst einer analogen Formel, in welcher a durch b ersetzt ist; wenn daher dem Übergang vom Punkte 1 zu 3 und vom Bogen 01 zu 03 die Zuwüchse δt_-, δa_-, δb_- entsprechen, so ist

$$\delta \overline{K}_{01} = G^-_{x'}\,\delta x + G^-_{y'}\,\delta y \Big|^1 + A_-\,\delta a_- + B_-\,\delta b_-,$$

wobei gesetzt ist

$$(6)\quad \delta x = (\xi_a \delta a + \xi_b \delta b + \xi_t \delta t)_-, \quad \delta y = (\eta_a \delta a + \eta_b \delta b + \eta_t \delta t)_-,$$

$$A_- = \int\limits_0^1 [\xi_a(G_x - G'_{x'}) + \eta_a(G_y - G'_{y'})]_- \, dt_-$$

und B_- aus A_- entsteht, indem man a durch b ersetzt. Analog ergibt sich

$$\delta \overline{K}_{12} = -\,G^+_{x'}\,\delta x - G^+_{y'}\,\delta y \Big|^1 + A_+\,\delta a_+ + B_+\,\delta b_+,$$

wobei die Größen δt_+, δa_+, δb_+, A_+, ... für die Extremale 12 die entsprechende Bedeutung haben wie δt_-, ... für 01, so daß

$$(7)\quad \delta x = (\xi_a \delta a + \xi_b \delta b + \xi_t \delta t)_+, \quad \delta y = (\eta_a \delta a + \eta_b \delta b + \eta_t \delta t)_+.$$

Soll nun J bei gegebenem Werte von K ein Extrem werden, so ist die aus den Extremalenbögen 03, 32 bestehende gebrochene Linie eine erlaubte Variation der gebrochenen Linie 012, wenn man die acht Größen δx, δy, $\delta a_{\pm}$, $\delta b_{\pm}$, $\delta t_{\pm}$ so bestimmt, daß die Gleichung

$$\delta \overline{K}_{01} + \delta \overline{K}_{12} = 0$$

besteht, oder

$$(8)\qquad \begin{aligned} 0 = (G^-_{x'} - G^+_{x'})\,\delta x + (G^-_{y'} - G^+_{y'})\,\delta y \Big|^1 \\ + A_-\,\delta a_- + B_-\,\delta b_- + A_+\,\delta a_+ + B_+\,\delta b_+. \end{aligned}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den unter (6) und (7) angeführten kann dazu dienen, fünf der acht Größen δ durch die drei übrigen auszudrücken. Nimmt man für letztere z. B. δx, δy, δa_+, so ist die Determinante der in den Größen δt_-, δa_-,

δb_-, δt_+, δb_+ linearen Glieder auf den rechten Seiten der bezeichneten fünf Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & A_- & B_- & 0 & B_+ \\ \xi_t^- & \xi_a^- & \xi_b^- & 0 & 0 \\ \eta_t^- & \eta_a^- & \eta_b^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_t^+ & \xi_b^+ \\ 0 & 0 & 0 & \eta_t^+ & \eta_b^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_- & B_- \\ \xi_t^- & \xi_a^- & \xi_b^- \\ \eta_t^- & \eta_a^- & \eta_b^- \end{vmatrix} \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, b)}\right]_+ .$$

Addiert man in der ersten Determinante rechts die zweite und dritte Horizontalreihe, mit $G_{x'}^-$ und $G_{y'}^-$ multipliziert, zur ersten, und bedenkt, daß die Ableitungen von ξ und η sich wie in den Gleichungen (6) auf den Punkt 1 beziehen, so zeigen die Gleichungen (5), daß die Determinante den Wert

$$\frac{\partial(\overline{K}_{01}, \xi_-, \eta_-)}{\partial(t_-, a_-, b_-)}$$

hat, d. h. der auf das Feld des Bogens 01 bezüglichen Größe Δ_- gleich, also von Null verschieden ist. Da ferner auch der Bogen 12 mit einem Felde umgeben ist, für welches die Größe

$$\frac{\partial(\xi_+, \eta_+, \overline{K}_{21})}{\partial(t_+, a_+, b_+)}$$

nicht verschwindet, so sind nach § 35 die Größen

$$\left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)}\right]_+, \quad \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, b)}\right]_+$$

nicht beide gleich Null; entweder also ist auch der zweite Faktor auf der rechten Seite der Gleichung (9) von Null verschieden, oder man erreicht dies, indem man a_+ und b_+ vertauscht. Man kann also stets fünf der Größen δ durch die drei übrigen, unter welchen δx und δy vorkommen, linear ausdrücken.

Ersetzt man nun in den Ausdrücken A, B das Funktionszeichen G durch F, so erhalte man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; die Gleichung der Extremalen liefert dann

$$(10)\qquad \begin{aligned} \lambda_- A_- + \mathfrak{A}_- = \lambda_- B_- + \mathfrak{B}_- = \lambda_+ A_+ + \mathfrak{A}_+ \\ = \lambda_+ B_+ + \mathfrak{B}_+ = 0, \end{aligned}$$

und nach Absatz I hat man für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$

$$\lambda_+ = \lambda_- .$$

Dem in der Gleichung (8) entwickelten Ausdruck $\delta \overline{K}_{01} + \delta \overline{K}_{12}$ entsprechend, erhält man ferner

$$\delta \overline{J}_{01} + \delta \overline{J}_{12} = (F_{x'}^{-} - F_{x'}^{+})\, \delta x + (F_{y'}^{-} - F_{y'}^{+})\, \delta y \Big|^{1}$$
$$+ \mathfrak{A}_{-}\, \delta a_{-} + \mathfrak{B}_{-}\, \delta b_{-} + \mathfrak{A}_{+}\, \delta a_{+} + \mathfrak{B}_{+}\, \delta b_{+};$$

vervielfacht man daher die Gleichung (8) mit λ und addiert sie zu der letzten, so ergibt sich, da $H = F + \lambda G$, nach (10)

$$(11) \qquad \delta \overline{J}_{01} + \delta \overline{J}_{12} = (H_{x'}^{-} - H_{x'}^{+})\, \delta x + (H_{y'}^{-} - H_{y'}^{+})\, \delta y \Big|^{1}.$$

Diese Größe muß, wenn das verlangte Extrem vorliegt, bei den Bedingungen (6), (7), (8) verschwinden für den Punkt 1. Je nachdem also der Punkt 1 frei beweglich oder an die Kurve

$$h(x, y) = 0$$

gebunden ist, erhält man die Beziehungen

$$H_{x'}^{-} - H_{x'}^{+} = H_{y'}^{-} - H_{y'}^{+} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} H_{x'}^{-} - H_{x'}^{+} & H_{y'}^{-} - H_{y'}^{+} \\ h_x & h_y \end{vmatrix} = 0.$$

Es gelten daher für einen Eckpunkt genau dieselben Beschränkungen wie nach § 54 im Falle des freien Extrems, wenn man F durch $F + \lambda G$ ersetzt.

Beispiel. Bei der isoperimetrischen Aufgabe im engeren Sinne des Wortes setzt man

$$H = y x' + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$H_{x'} = y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad H_{y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

das Verschwinden der Größe (11) ergibt also

$$(12) \qquad \lambda \left(\frac{x' \delta x + y' \delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)_{-} = \lambda \left(\frac{x' \delta x + y' \delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)_{+}.$$

Da nun λ von Null verschieden ist, so würde für eine frei verfügbare Ecke folgen

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)_{-} = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)_{+}, \quad \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)_{-} = \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)_{+},$$

d. h. die Richtungen der Extremalen 01 und 12 würden im Punkte 1 übereinstimmen, eine Unstetigkeit also nicht eintreten. Ist dagegen der Punkt 1 an eine Kurve $\mathfrak{K}$ gebunden, deren Bogenelement und Richtung Ds sei, und bezeichnen wir im Punkte 1 durch —, + die Richtungen der Extremalen 01 und 12 im Sinne 012, so ergibt die Gleichung (12) für die hohlen Winkel

$$\cos(Ds, -) = \cos(Ds, +).$$

Die Bögen 01 und 12 liegen daher wie in § 54, II. auf derselben Seite der Kurve $\mathfrak{K}$ und bilden mit deren Tangente gleiche, nach verschiedenen Seiten geöffnete spitze Winkel, d. h. sie liegen wie der einfallende und reflektierte Lichtstrahl.

Soll z. B. vom gegebenen Punkte 5 aus nach einem nicht vorgeschriebenen Punkte 1 der Kurve $\mathfrak{K}$ und wieder zum Punkte 5 zurück eine geschlossene Linie von gegebener Länge gezogen werden, die eine möglichst große Fläche umfaßt, so muß sie aus zwei Kreisbögen von gleichem Radius bestehen, welche mit der Kurve $\mathfrak{K}$ im angegebenen Sinne gleiche Winkel bilden.

§ 56.

Unstetige Aufgaben.

Bisher wurde die gewöhnliche Form der Aufgabe des freien oder gebundenen Extrems beibehalten und nach Lösungen gefragt, die Unstetigkeiten aufwiesen. Es kann aber auch eine Unstetigkeit in der Aufgabe liegen, die von vornherein auf unstetige Lösungen hinweist. Solche Aufgaben haben wir bei Gelegenheit der Einführung des Begriffs der allgemeineren Transversalität (§ 15, II., § 30, I.) zu behandeln gelernt, so daß hier nur noch ein systematischer Überblick nachzuholen bleibt.

I. Sei z. B. $F(x, y, x', y')$ unstetig in der besonderen Weise, daß die Ebene durch eine Kurve $\mathfrak{K}$ in die Gebiete $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{G}$ zerlegt wird, für die die verschiedenen Funktionen $\mathfrak{F}(x, y, x', y')$ und $F(x, y, x', y')$ maßgebend sind, so daß, wenn 0 ein Punkt des Gebiets $\mathfrak{g}$, 2 ein Punkt des Gebiets $\mathfrak{G}$ ist und 1 der Kurve $\mathfrak{K}$ angehört, das Extrem der Integralsumme

$$\int_0^1 \mathfrak{F}(x, y, x', y')\,dt + \int_1^2 F(x, y, x', y')\,dt$$

gesucht wird zwischen den Punkten 0 und 2; daß die gesuchte Kurve im Punkte 1 gebrochen ist, wird man von vornherein erwarten. Ein Sonderfall dieser Aufgabe ist in § 22, II. behandelt; durch die dortigen Betrachtungen findet man ohne weiteres für den Punkt 1, wenn δ den Fortgang auf der Kurve $\mathfrak{K}$ bedeutet,

$$(\mathfrak{F}_{x'} - F_{x'})\,\delta x + (\mathfrak{F}_{y'} - F_{y'})\,\delta y = 0,$$

also wieder etwas Ähnliches wie die Erdmannsche Eckenbedingung.

II. Eine andere Art gewissermaßen unstetiger Aufgaben verlangt, das Extrem eines Integrals der üblichen Form zu finden, wenn man teils längs einer gegebenen Kurve, etwa der Schranke eines Gebiets, teils längs einer gesuchten Kurve integriert. Auch diese Aufgaben sind schon im Anschluß an die allgemeinere Transversalität behandelt, z. B. als Stirnflächenaufgaben, wenn der kleinste Widerstand gesucht wurde (§ 10, II., III.). Ist z_0 der Anfangswert des zum Extrem zu machenden Integrals im Punkte 0 auf der Schranke, so hat man für die an dieser Stelle die Schranke verlassende Extremale die Transversalitätsbedingung

$$-\delta z_0 + F_{x'}\,\delta x + F_{y'}\,\delta y = 0, \tag{1}$$

wobei δ auf die Schranke, x', y' auf die Extremale zu beziehen sind. Bei den Aufgaben, die wir jetzt ins Auge fassen, ist z_0 das längs der Schranke genommene Integral

$$\int F\,dt,$$

also

$$\delta z_0 = F(x, y, \delta x, \delta y)$$

und die Bedingung (1) wird, wenn τ ein Parameter längs der Schranke und demgemäß

$$\delta x = x_\tau\,d\tau, \quad \delta y = y_\tau\,d\tau$$

gesetzt wird,

$$-F(x, y, x_\tau, y_\tau) + x_\tau F_{x'} + y_\tau F_{y'} = 0$$

oder

$$\mathcal{E}(x, y, x', y', x_\tau, y_\tau) = 0.$$

Hieraus erschließt man verschiedenes, je nach der Beschaffenheit der Größe $\mathcal{E}$. Verschwindet sie nur ordentlich, so folgt, daß Schranke und Extremale sich berühren; kann sie auch in außerordentlicher Weise verschwinden, so können (§ 10, II.) auch andere geometrische Beziehungen zwischen der Schranke und der Extremale zustande kommen.

Die Schar der in dieser Beziehung zur Schranke stehenden Extremalen bildet ein Feld, auf das die Weierstraßsche Theorie (§ 15, II.) anwendbar ist; haben die Extremalen eine Hülle, so muß man, um das gesuchte Extrem zu sichern, den Endpunkt der Extremale zwischen den Berührungspunkten mit Schranke und Hülle verbleiben lassen.

III. Ist bei der Schrankenaufgabe eine isoperimetrische Bedingung

$$z_0 + \int G(x, y, x', y')\,dt = \text{const.}$$

gegeben, und die Größe

$$u_0 + \int F(x, y, x', y')\,dt$$

zum Extrem zu machen, wobei z_0 und u_0 die längs der Schranke genommenen Integrale

$$\int G\,dt, \quad \int F\,dt$$

sind, so hat man in den Zeichen des § 27, wenn δ den Fortgang auf der Schranke und die Variation längs der Extremale bedeutet, die Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad -\delta z_0 + G_{x'}\delta x + G_{y'}\delta y + \int dt(R\delta x + S\delta y) = 0$$

und das Extrem fordert

$$(3) \qquad -\delta u_0 + F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y + \int dt(P\delta x + Q\delta y) = 0;$$

dabei ist

$$\delta z_0 = G(x, y, \delta x, \delta y), \quad \delta u_0 = F(x, y, \delta x, \delta y).$$

Längs der Extremalen bestehen nun die Gleichungen

$$P + \lambda R = 0, \quad Q + \lambda S = 0;$$

also folgt, indem man die mit λ vervielfachte Gleichung (2) zur Gleichung (3) addiert,

$$H(x, y, \delta x, \delta y) - H_{x'}(x, y, x', y')\delta x - H_{y'}(x, y, x', y')\delta y = 0,$$
$$H = F + \lambda G,$$

oder auch

$$\mathfrak{E}(x, y, x', y', \delta x, \delta y) = 0$$

mit der für die Funktion H gebildeten Größe $\mathfrak{E}$.

Die hieraus zu ziehenden Schlüsse sind dieselben wie in Absatz II; weiter kommt man aber durch den Satz von der Erhaltung der isoperimetrischen Konstanten (§ 55, I.), wenn mehrere Extremalenstücke an eine Schranke stoßen.

Bei der isoperimetrischen Aufgabe im engeren Sinne kann die Größe $\mathfrak{E}$ nach § 28, I. nur in ordentlicher Weise verschwinden; soll daher z. B. innerhalb eines ebenen Polygons eine geschlossene Linie von gegebener Länge und größtmöglichem Inhalt gezogen werden, und hat eine Kreislinie von der vorgeschriebenen Länge innerhalb des Polygons nicht Platz, so kann die gesuchte Linie nur aus Teilen der Polygonseiten und diese berührenden Kreisbögen von gleichem Radius bestehen.

Bei der Kurve kürzesten Umrings auf einer beliebigen Fläche (§ 26, II.) verschwindet die Größe $\mathfrak{G}$, solange $\sqrt{EG-F^2}$ von Null verschieden bleibt, nur in ordentlicher Weise. Gilt dies für ein Gebiet, welches von regulären Kurvenstücken begrenzt ist, und soll innerhalb desselben eine geschlossene Linie gegebenen Inhaltes und kleinstmöglicher Länge gezogen werden, so kann dieselbe nur aus Teilen der umschränkenden Kurvenstücke und Bögen festwertiger geodätischer Krümmung bestehen, welch letztere alle dieselbe Größe der geodätischen Krümmung aufweisen, und die Schranke, wo sie mit ihr zusammentreffen, berühren. Dieser Satz ist von Steiner aufgestellt worden.

Anmerkungen.

Das umfangreiche berichtende Schrifttum, an das viele Mathematiker in den letzten Jahrzehnten ihre Kräfte gewandt haben, bietet wenigstens den Nutzen, daß rein geschichtliche Zitate überflüssig geworden sind. So sei denn verwiesen auf die der Variationsrechnung gewidmeten Aufsätze in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften von Kneser (1904), Hahn und Zermelo (1904) und besonders auf die sehr vollständige Darstellung von Lecat in der französischen Ausgabe der Enzyklopädie (II, 6, Leipzig 1916). Sehr nützlich sind ferner die bibliographischen Werke:

Lecat, Bibliographie du calcul des variations 1850—1913. Gent und Paris 1913.

Lecat, Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850. Gent und Paris 1916. Mit Ergänzungen zu dem vorigen Werk.

Wir berichten ergänzend über die bisher behandelten Beispiele und Anwendungen der im vorliegenden Werk entwickelten Theorien, und führen vorweg die wichtigeren systematischen Darstellungen der Variationsrechnung auf.

Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Genf und Lausanne 1744.

Lindelöf, Leçons de calcul des variations. Mitarbeiter Moigno. Paris 1861. Gedruckt auf Kosten der Universität Helsingfors.

Sabinin, Kurs variacionnago isčislenija. Moskau 1893.

Bolza, Lectures on the calculus of variations. Chicago 1904.

Hancock, Lectures on the calculus of variations. Cincinnati 1904.

Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig 1909.

Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. Paris 1910.

Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni. 2 Bde. Bologna 1923, 1924.

Die erste Auflage des vorliegenden Lehrbuchs erschien im Jahre 1900.

I. Zu §§ 14 und 16.

Konjugierte Punkte, Brennpunkte und Hüllen in Einzelaufgaben des freien Extrems.

(1) Jacobi, Dynamik, 6. Vorl., Werke Suppl.-Bd., S. 46.

(2) Jacobi, Nachlaß, Über die Enveloppe der geodätischen Linien eines Rotationsellipsoids. Werke Bd. 7, S. 72.

(3) Lindelöf, Calcul des variations, S. 212. Paris 1861.

(4) v. Braunmühl, Über geodätische Linien auf Rotationsflächen und jene Einhüllenden derselben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden. Diss. München 1878.

(5) v. Braunmühl, Über Enveloppen geodätischer Linien. Mathem. Ann. Bd. 14, 1879.

(6) v. Braunmühl, Geodätische Linien auf dreiachsigen Flächen zweiter Ordnung. Mathem. Ann. Bd. 20, 1882.

(7) Kober, Konjugierte kinetische Brennpunkte. Diss. Breslau 1910.

(8) Koschmieder, Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung. Diss. Breslau 1913.

(9) Fleischmann, Die geodätischen Linien auf Rotationsflächen. Diss. Breslau 1915.

(10) C. Lindemann, Konjugierte Punkte bei Widerstandsaufgaben der Variationsrechnung. Diss. Breslau 1917.

(11) Kober, Beiträge zur Behandlung spezieller Variationsprobleme; Untersuchung konjugierter kinetischer Brennpunkte. Crelles Journ. Bd. 140.

(12) Koschmieder, Konjugierte Punkte und Enveloppen bei speziellen Variationsproblemen. Crelles Journ. Bd. 147.

(13) Koschmieder, Über die Brachistochrone in der speziellen Relativitätstheorie. Jahresber. d. deutsch. Mathem.-Verein. Bd. 33, 1924.

Nachdem Jacobi gleich bei der Bildung des Begriffs der konjugierten Punkte das schöne auf die Planetenbewegung bezügliche Ergebnis (1) erhalten hatte, gab sehr viel später Lindelöf mit der nach ihm benannten Konstruktion (3) das nächste schöne Beispiel.

Die geodätischen Linien auf Flächen zweiter Ordnung, mit denen sich auch Jacobi, wie der Nachlaß (2) zeigt, hinsichtlich der konjugierten Punkte beschäftigt hatte, wurden in dieser Richtung von v. Braunmühl eingehend bearbeitet, (4), (5), (6), einmal mit Benutzung hyperelliptischer Funktionen. Allgemeine und in vielen Einzelfällen durchgeführte Untersuchung der konjugierten Punkte geodätischer Linien auf sehr allgemeinen Drehflächen gibt Fleischmann (9); hier werden auch in vielen Fällen Hüllen bestimmt, bei denen der schon von Jacobi und v. Braunmühl bemerkte vierspitzige Typus eine Rolle spielt.

Im mathematischen Seminar der Universität Breslau, dem auch die Dissertation von Fleischmann entstammt, sind im Laufe der letzten zwanzig Jahre Aufgaben der Variationsrechnung aufgesucht und bearbeitet, bei denen die Bestimmung konjugierter Punkte und extremaler Brennpunkte gelingt, und möglichst auch Hüllen der einfachsten Felder hergestellt werden können. Die Ergebnisse liegen teilweise handschriftlich in Prüfungsarbeiten vor, die im wissenschaftlichen Prüfungsamt aufbewahrt werden; in letzterem Falle sind im folgenden nur die Namen der Verfasser genannt. Sehr viele dieser Aufgaben schließen sich an das Euler-Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung an (§ 7, IV.).

Dieses Prinzip kann in folgender Weise allgemein ausgesprochen und bewiesen werden. In § 7, VII. ist hervorgehoben, daß im Hamiltonschen Prinzip

$$\delta\int (T+U)\,dt = 0 \tag{1}$$

die Zeit t zugleich mit den Parametern q variiert werden darf; wobei aber δq_α und δt an den Enden der Integrationsstrecke verschwinden.

Läßt man letztere Voraussetzung an der oberen Grenze für δt fallen, so ergibt sich nach § 7, VII. mit F in der dortigen Bedeutung

$$\delta\int (T+U)\,dt = \Big(T+U-\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big)\delta t = F_{t'}\delta t,$$

da das in dieser Variation erscheinende Integral den Lagrangeschen Gleichungen zufolge verschwindet.

Wenn also

(2) $$T = \varphi(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots)$$

eine quadratische Form ist, folgt

(3) $$\delta \int (T + U)\,dt = -(T - U)\,\delta t.$$

Nun gilt bei der wirklichen Bewegung die Gleichung der lebendigen Kraft

(4) $$T = U + h, \quad T + U = 2T - h,$$

also nach (2)

$$dt = \sqrt{\frac{\varphi(dq_1, dq_2, \ldots)}{U + h}}, \quad t = \int dq_1 \sqrt{\frac{\varphi(1, dq_2/dq_1, dq_3/dq_1, \ldots)}{U + h}}.$$

Die hiermit gegebenen Werte von dt und δt denken wir in die Gleichung (3) eingesetzt, nehmen sodann die Größen δq_α beliebig, nur an den Enden verschwindend, und erhalten so nach (1) und (3)

$$\delta \int (2T - h)\,dt = -h\,\delta t, \quad \delta \int T\,dt = 0, \quad \delta \int (U + h)\,dt = 0,$$

oder nach (2) und (4)

$$\delta \int \sqrt{U + h}\,\sqrt{\varphi(dq_1, dq_2, \ldots)} = 0.$$

Diese Gleichung, aus der die Zeit verschwunden ist, gibt das Euler-Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung.

Hat man z. B. die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche unter der Wirkung einer Kraft, deren Potential U ist, zu untersuchen, und ist $d\sigma$ das Bogenelement auf der Fläche, so gibt dieses Prinzip

(5) $$\delta \int \sqrt{U + h}\,d\sigma = 0.$$

In der Ebene sei fortan immer $d\sigma = ds$; ferner x, y, r, θ rechtwinklige und Polarkoordinaten; die oben bezeichneten Aufgaben lassen sich dann kurz und übersichtlich bezeichnen.

Sei noch vorweg erwähnt, daß eine Aufgabe (5), wenn nach konjugierten Punkten gefragt wird, als Frage nach der dynamischen Stabilität nach Thomson-Tait (Natural philosophy, 2. Aufl., S. 346) und Frank (Monatsh. f. Mathem. u. Phys. Bd. 20, S. 172) aufgefaßt werden kann; sind konjugierte Punkte vorhanden, ist die Bahn in gewissem Sinne stabil, sonst unstabil (siehe auch § 18, II.).

A. Aufgaben der Form

$$\delta \int \sqrt{U+h}\, ds = 0.$$

1. $U = 1/r$, Planetenbewegung, Jacobi (1); Koschmieder (12) bestimmt Brennpunkte einer Geraden und Hülle.

2. $U = y^2$, Lösung in elementaren Funktionen, Hülle bestimmbar, Koschmieder (8).

$U = y^4$, $U = y^6$, $U = 1/r^4$, Lösung in elliptischen Funktionen. Koschmieder (8).

3. $U = \pm r^2$, $U = \pm r^n$, Kobersche Methode. Kober (7).

4. $U = y^{-2}$, Kober (11).

5. $U = y^{-1}$, Glatzel.

6. $U = \pm r^{-3}$, Lösung in elliptischen Funktionen. Merget.

B. Sonstige Aufgaben über dynamische Stabilität.

1. Maße auf drehbarem Stabe gleitend, Lösung in elliptischen Funktionen, Koschmieder (8).

2. Sphärisches Pendel. Pietsch.

3. Ein Punkt auf der Erdoberfläche, die Kraft dem Quadrat des Abstandes von der Erdachse umgekehrt proportional, nordwärts gerichtet. Darboux, Note XV in Despeyrous, Cours de mécanique II. Die Extremalen sphärische Kegelschnitte; die konjugierten Punkte sehr ähnlich wie nach Jacobi, A. 1. zu bestimmen; sie liegen mit einem Brennpunkt auf einem Großkreise. Krause.

4. Die relativistische Keplerellipse nach Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Hippe.

5. Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren, Newtonsches Kraftgesetz. Przewisinski.

C. Verschiedene Aufgaben.

1. Kurve kleinsten Trägheitsmoments

$$\delta \int x^2\, ds = 0.$$

Lösung in elliptischen Funktionen; Brennpunkt der Geraden. Hülle. Hansen.

2. Brachistochrone, Kraft nach festem Zentrum gerichtet, dem Abstand proportional. Nicolaus †.

3. Gewöhnliche Brachistochrone mit zugelassenen Unstetigkeiten. Brennpunkte verschiedener Kurven. Krahl.

4. Fläche kleinsten Widerstandes bei verschiedenen Widerstandsgesetzen. Lindemann (10), Kap. I.

5. Relativistische Brachistochrone. Lösung mittels elliptischer Funktionen. Koschmieder (13).

6. Aufgaben

$$\delta \int (p^2 - y^{2n})\, dx = 0, \quad p = dy/dx, \quad \delta \int (y^2 + \lambda)\, ds = 0,$$

erstere für $n = 1$ elementar, $n = 2$ mit elliptischen Funktionen. Aufgaben der dynamischen Stabilität, in denen ds durch $\sqrt{dx^2 - dy^2}$ ersetzt wird. Koschmieder (9), (13).

II.

Konjugierte Punkte, Brennpunkte und Hüllen bei isoperimetrischen Aufgaben, §§ 28, 31.

(14) Howe, Die Rotationsflächen, welche bei vorgeschriebener Flächengröße ein möglichst großes oder kleines Volumen enthalten. Diss. Berlin 1887.

(15) Hormann, Untersuchung über die Grenzen, zwischen denen die Unduloide und Nodoide, die von zwei festen Parallelkreisen begrenzt sind, bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen. Diss. Göttingen 1887.

(16) Kneser, Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung II. Mathem. Ann. Bd. 56.

(17) Kneser, Konjugierte Punkte beim isoperimetrischen Problem. Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterländ. Kultur Bd. 84, 1906.

(18) Born, Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum. Diss. Göttingen 1906.

(19) G. Weyl, Hinreichende Bedingungen des Extremums bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen. Crelles Journ. Bd. 152.

(20) Funk, Über die Stabilität der eingespannten Elastika. Jahresber. d. deutsch. Mathem.-Verein. Bd. 33, 1925.

Die Auffindung fruchtbarer Beispiele ist hier schwieriger und seltener gelungen, als beim freien Extrem. Folgende der bisher erzielten Ergebnisse seien hervorgehoben.

1. Die engere isoperimetrische Aufgabe

$$\delta \int y\, dx = 0, \quad \delta \int ds = 0$$

mit Berücksichtigung veränderlicher Grenzen. Kneser (16), (17). Angewandt wird der Eulersche Kunstgriff (§ 7, V.), der sich im Grunde als Behandlung besonderer Felder im Sinne der isoperimetrischen Aufgabe auffassen läßt.

2. Eine nichteuklidische Bogenlänge ist gegeben:

$$\delta \int y\, d x = 0, \quad \delta \int \sqrt{1 - p^2}\, d x = 0, \quad p = d y / d x.$$

Hüllen und doppelte Evoluteneigenschaft, elementare Funktionen. Koschmieder (8).

3. $$\delta \int p^2\, d x = 0, \quad \delta \int y^2\, d x = 0.$$

Elliptische Funktionen, Hüllen; Lindemannsche Methode (§ 28, III.). Koschmieder (8).

4. $$\delta \int y^2\, d x = 0, \quad \delta \int y\, d s = 0.$$

Älteste, von Weierstraß angeregte Bestimmung konjugierter Punkte; elliptische Integrale. Die maßgebende Determinante erscheint in der Form der Lindemannschen Methode. Howe (14); ähnlich gleichzeitig bei Hormann (15).

5. Die Brachistochrone bei gegebener Länge,

$$\delta \int \frac{d s}{\sqrt{y}} = 0, \quad \delta \int d s = 0.$$

Lindemannsche Methode. Nicolaus†.

6. Linie größten Trägheitsmoments bei gegebener Länge oder größter Drehkörper bei gegebener Länge des Meridians:

$$\delta \int y^2\, d x = 0, \quad \delta \int d s = 0.$$

Elliptische Funktionen, Hüllen. Koschmieder (8), (12).

7. $$\delta \int p^2\, d x = 0, \quad \delta \int y^6\, d x = 0.$$

Einfache Anwendung elliptischer Funktionen, Hüllen. Koschmieder (12).

8. Ebene Linie kleinsten Widerstands bei gegebenem Inhalt und verschiedenen Widerstandsgesetzen:

$$\delta \int f(p)\, d x = 0, \quad \delta \int y\, d x = 0, \quad p = d y / d x,$$

besonders einfach, wenn $f(p) = p^2$ gesetzt wird. Lindemann (10). Der extremale Brennpunkt einer Geraden. Schalla.

Diese Art von Aufgaben stammen aus Euler, Scientia navalis.

9. Ebene Linie kleinsten Widerstands bei gegebenem Inhalt ihrer Drehfläche:

$$\delta \int f(p)\, d x = 0, \quad \delta \int y\, d s = 0.$$

Lindemann (10).

10. Die engere isoperimetrische Aufgabe

$$\delta \int y\, d x = 0, \quad \delta \int d s = 0,$$

mit besonderer Berücksichtigung der Felder mit Bodenfläche und der entsprechenden besonderen Extremsaufgaben (§ 31, III.). G. Weyl (19).

Ähnliche Untersuchungen mit durchgehender Anwendung der Jacobi-Hamiltonschen Methode bei Otto.

11. Die elastische Linie bei verschiedenen Endbedingungen (§ 26, IV.); Versuche der Diskussion mittels elliptischer Integrale bei Born (18); ein bestimmtes Ergebnis bei Funk (20).

12. Stabilität der Kettenlinie auf dem Paraboloid in besonderen Fällen. Halfar.

III. Zu § 38 und § 45, V.

Konjugierte Punkte bei Integralen, die höhere Ableitungen enthalten und Mayerschen Aufgaben.

(13) Radon, Über das Minimum des Integrals

$$\int \mathfrak{F}(x, y, \theta, \varkappa)\, d s.$$

Sitzungsber. d. Wiener Akad., Mathem.-naturw. Klasse, Bd. 119, IIa, 1910.

(14) Blaschke, Über affine Geometrie. Ber. d. Sächs. Ges. Mathem.-Phys. Bd. 58, 1916.

(15) Verbeek, Über die Kurven kürzester Affinlänge. Diss.-Auszug. Breslau 1924.

1. Die Aufgaben

$$\delta \int \varkappa^n\, d s = 0$$

geben nach Radon (13) konjugierte Punkte, deren Verbindungslinie auf der Verbindungslinie der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte senkrecht steht.

2. Die Eulersche Aufgabe

$$\delta \int \varkappa\, d s = 0$$

(§ 35, zweites Beispiel) wird von Böttger† in einem Dissertationsentwurf 1916 zur Aufstellung und Untersuchung von Feldern der verschiedenen Typen benutzt. Felder von Extremalen mit festem Anfangselement und Felder, deren Kurven von einer gegebenen einfachen Kurve unter gegebenem Winkel ausstrahlen, geben vor der Singularität keinen Brennpunkt, wohl aber Felder, die im $x y \theta$-Raum von einer Bodenfläche ausstrahlen, z. B. wenn diese eine Wendelfläche ist. Die ebenen Extremalen berühren jede einen Kreis einer konzentrischen Schar; die Basen aller Zykloiden gehen durch den Mittelpunkt der Schar; die Berührungspunkte sind Scheitel der Zykloiden. Eine logarithmische Spirale tritt als Hülle mit mehrfacher Evoluteneigenschaft auf.

3. Die Kurve kürzester Affinlänge

$$\delta \int \varkappa^{1/3}\, d s = 0,$$

die übrigens auch schon bei Euler begegnet, wird in ähnlicher Weise von Böttger† behandelt; die Ergebnisse in § 45, V. rühren von ihm her. Dieselbe Aufgabe behandelt Verbeek (15) als Mayersche Aufgabe; es werden Felder verschiedener Typen untersucht, die auch Hüllen ergeben. Eine der entsprechenden Extremsaufgaben ist folgende: Von einem gegebenen Punkte soll, in vorgeschriebener Richtung ausgehend, an eine Parabel eine Kurve herangezogen werden, die die Parabel in der Richtung ihrer Achse trifft und ein Minimum affiner Länge besitzt. Die gesuchte Kurve schneidet die Parabel in affinnormaler Richtung. Eine weitere Aufgabe: Von einem gegebenen Punkte in vorgeschriebener Richtung ausgehend eine Kurve zu ziehen, die ein beliebiges Individuum einer einfach unendlichen Kurvenschar berührt und ein Minimum der Affinlänge liefert.

4. Die isoperimetrische Aufgabe

$$\delta \int \varkappa^{1/3}\, d s = 0, \qquad \delta \int y\, d x = 0;$$

die Extremalen sind die allgemeinsten Kegelschnitte der xy-Ebene. Konjugierte Punkte treten im einfachsten Falle nicht auf. Verbeek (15).