Д.И. Боднар

ВЕТВЯЩИЕСЯ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Д.И. Боднар

Ветвящиеся цепные дроби

Д.И.Боднар

ВЕТВЯЩИЕСЯ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Киев: Наук, думка, 1986.— 176 с.

Монография посвящена аналитической теории многомерных цепных дробей. Изучены свойства и установлены признаки сходимости числовых и некоторых типов функциональных ветвящихся цепных дробей. Перенесены на многомерный случай основные классические признаки сходимости непрерывных дробей — критерий Зейделя, признак Ворпитского, теорема Слешинского-Прингсгейма, признак Ван Флека, параболические теоремы и др. Рассмотрены многомерные аналоги положительно определенных дробей, J-дробей, g-дробей, C-дробей и др. Исследованы области сходимости и области устойчивости.

Для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теории функций, вычислительной математики и математической физики.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время интерес к цепным (непрерывным) дробям значительно возрос, о чем свидетельствуют многочисленные международные конференции, посвященные непрерывным дробям или тесно связанным с ними аппроксимациям Паде, а также выход нескольких монографий по данной тематике [56, 73, 75, 77, 81, 90 и др.].

Пожалуй, наиболее близким к цепным дробям является раздел теории приближения функций, где рассматриваются рациональные приближения со свободными полюсами. Здесь получены интересные результаты о связи структурных свойств функций со скоростью стремления к нулю наилучших рациональных приближений [23, 26 и др.], установлены скорости сходимости аппроксимаций Паде (см., например, [24, 25, 46, 53]), исследованы рациональные и наилучшие рациональные приближения некоторых функций или классов функций [21, 31, 51, 54, 63, 72 и др.]. Подробный библиографический обзор по аппроксимациям Паде изложен в [74]. Однако тесной взаимосвязи между цепными дробями и рациональными приближениями в настоящее время еще не установлено.

Говоря о непрерывных дробях, мы сравниваем их с такими средствами представления аналитических функций, как ряды или бесконечные произведения. Если степенной ряд, представляющий аналитическую функцию, сходится в круге, радиус которого определяется расстоянием до ближайшего полюса, и расходится вне этого круга, то разложения основных элементарных функций в цепные дроби, как правило, сходятся во всей комплексной плоскости за исключением полюсов функции. Однако общих теорем в этом плане еще не установлено. Непрерывные дроби представляют не только теоретический интерес, но и являются хорошим аппаратом вычислительной математики, обладающим свойством малого накопления погрешности в процессе вычислений. Разработаны эффективные алгоритмы для подсчета коэффициентов цепных дробей и их подходящих дробей.

В теории непрерывных дробей существуют два направления: теоретико-числовое и аналитическое. Первое направление занимается изучением регулярных цепных дробей, которые образуются при разложении действительных чисел по алгоритму Евклида. Здесь, главным образом, изучается степень приближения с помощью n-й аппроксиманты, рассматриваются приложения цепных дробей для решения диофантовых уравнений. Большой раздел представляет метрическая теория непрерывных дробей.

Второе направление занимается изучением таких вопросов, как разложения функций в цепные дроби, установление оценок погрешности приближения с помощью n-х аппроксимант, исследование свойств функций, представимых соответствующими типами непрерывных дробей, установление признаков сходимости и вычислительной устойчивости. Кроме того, здесь рассматриваются различные применения цепных дробей в анализе для аналитического продолжения функций, при исследовании устойчивости полиномов, для установления связей с проблемой моментов, с ортогональными полиномами и т. д.

Подробный исторический обзор, посвященный цепным дробям, изложен в работе [81], где отмечается большой вклад русских математиков П. Л. Чебышева [68, 69], А. А. Маркова [40] в создание аналитической теории непрерывных дробей.

В теоретико-числовом направлении для целей теории чисел были построены многомерные обобщения непрерывных дробей. Если цепные дроби применялись при решении линейных диофантовых уравнений с двумя переменными или уравнений Пеля, то усложнение диофантовых уравнений или рассмотрение систем диофантовых уравнений естественно приводило к более общим, чем цепные дроби, конструкциям. Одним из наиболее удачных обобщений является алгоритм Якоби — Перрона [79, 86], который можно применить также и в анализе для приближения вектор-функций одного переменного (см., например, [48]).

Используя интерпретацию цепной дроби в виде графа и рассматривая более общие графы типа дерева, В. Я. Скоробогатько дал определение многомерного аналога непрерывной дроби, который в первой публикации получил название ветвящейся цепной дроби (ВЦД). Некоторые частные случаи ветвящихся цепных дробей встречались и ранее: например, в работе [88] периодическая ВЦД возникла как композиция многомерных отображений Жуковского.

Фундаментальное значение в теории цепных дробей имеют рекуррентные формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей. Поэтому вполне естественно, что первые шаги в теории ВЦД были направлены на поиски аналогичных формул для ветвящихся цепных дробей. Разные варианты таких формул были установлены в [19]. Однако из-за своей громоздкости они оказались малоэффективными при исследовании сходимости ВЦД, хотя несколько первых признаков сходимости были установлены именно таким путем (см., например, теорему 3.1). Вопрос сходимости долгое время оставался открытым. В то же время велись разработки по применению аппарата ВЦД в теории чисел — для представления алгебраических иррациональностей высших степеней [19, 49], для решения диофантовых уравнений [39], в теории вероятностей — для изображения выходных вероятностей дискретного марковского процесса [19], в вычислительной математике — для решения систем линейных алгебраических уравнений [44], для разработки нелинейных численных методов решения дифференциальных уравнений и их систем [20, 38, 50 и др.], в анализе — для приближения функций многих переменных [19, 27, 34, 56], для решения проблемы моментов [18], в технике — для синтеза многополюсников [28, 76], для построения математической модели транзисторов [30]. Многие из этих результатов изложены в монографиях [19, 56], а также статьях, опубликованных в журнале «Вестник Львовского политехнического института» (см., например, № 141, 150, 169, 173, 182).

Данная монография посвящена аналитической теории ветвящихся цепных дробей. Главное внимание уделяется вопросам обоснования аппарата ВЦД, исследованию сходимости числовых и некоторых типов функциональных ветвящихся цепных дробей. В начале каждой главы приведена аннотация изложенного в ней материала. Поэтому на характеристике содержания останавливаться не будем. Во введении и при ссылках на введение применяется одинарная нумерация.

Основные результаты, изложенные в монографии, докладывались на различных семинарах и конференциях, многие из них публикуются здесь впервые. Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность всем участникам семинаров, принявших активное участие в обсуждении результатов работы, что, конечно, способствовало улучшению изложения материала. Особенно хотелось бы отметить ценные замечания и пожелания, высказанные С. М. Никольским, Л. Д. Кудрявцевым, В. К. Дзядыком, А. И. Степанцом, А. И. Янушаускасом, А. А. Гольдбергом. Автор выражает также глубокую благодарность В. Я. Скоробогатько за постоянное внимание к работе и Н. С. Боднар за помощь при подготовке рукописи к печати.

Ветвящиеся цепные дроби являются многомерными обобщениями цепных или, как их еще называют, непрерывных дробей. Литературы на русском языке, посвященной цепным дробям, очень мало, более того, это книги старого издания, представляющие в настоящее время библиографическую редкость. Имеющийся здесь пробел должен восполнить готовящийся в издательстве «Мир» перевод на русский язык монографии известных специалистов в этой области Уильяма В. Джоунса и В. Дж. Трона [81]. Мы приведем некоторые сведения из теории цепных дробей, далеко не претендующие на полноту или систематичность, но в какой-то степени необходимые для удобства читателя.

Непрерывную дробь определим с помощью композиций дробно-линейных отображений

$$t_0(z) = b_0 + z, \quad t_k(z) = a_k(b_k + z)^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где a_i, b_j $(i = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots)$ — комплексные числа; z — комплексная переменная, причем $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть

$$T_0(z) = t_0(z), \quad T_k(z) = T_{k-1}(t_k(z)) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Цепной дробью называется предел последовательности $T_k(0)$ при $k \to \infty$, т. е. выражение вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_k}{b_k + \cdots}}}. \tag{3}$$

Для удобной и экономной записи (3) будем в дальнейшем применять сокращенные обозначения, предложенные Роджерсом

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k}{b_k} + \cdots. \tag{4}$$

Существуют, но, к сожалению, многочисленные, обозначения цепных дробей (3), сходные с обозначениями, применяемыми для рядов, например:

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{K}} \frac{a_i}{b_i}, \quad b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{\Phi}} \frac{a_i}{b_i}, \quad b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{Z}} \frac{a_i}{b_i}.$$

Мы же, следуя монографии В. Я. Скоробогатька [56], для записи дроби (3) будем применять обозначение

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{a_i}{b_i}. \tag{5}$$

Конечные непрерывные дроби

$$f_n = b_0 + \overset{n}{\underset{i=1}{D}} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

называются n-ми подходящими дробями или n-ми аппроксимантами цепной дроби (5).

При изучении цепных дробей, как правило, ограничение $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ снимается. В этом случае может возникнуть неопределенность: $f_n = 0/0$. Тогда будем говорить, что f_n не имеет смысла.

Цепная дробь сходится, если все ее подходящие дроби имеют смысл или лишь конечное число подходящих дробей не имеет смысла и существует конечный предел последовательности f_n при $n \to \infty$.

Каждую n-ю аппроксиманту можно представить в виде отношения

$$f_n = \frac{A_n}{B_n}, \tag{7}$$

причем для вычисления A_n и B_n — n-го числителя и знаменателя справедливы рекуррентные формулы [65, 67]

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

при начальных условиях

$$A_0 = b_0, \quad A_{-1} = 1, \quad B_0 = 1, \quad B_{-1} = 0. \tag{9}$$

Данная монография посвящена аналитической теории ветвящихся цепных дробей. Поэтому во введении приведем некоторые результаты этого направления в теории непрерывных дробей.

Цепные дроби, у которых все соответствующие аппроксиманты совпадают, называются эквивалентными. Произвольную дробь, эквивалентную (5), можно записать в виде [87]

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{\rho_{i-1}\rho_i a_i}{\rho_i b_i}, \tag{10}$$

где ρ_i — некоторые отличные от нуля комплексные числа, $\rho_0 = 1$. Если обозначить C_n, D_n — n-й числитель и n-й знаменатель дроби (10), то справедливы соотношения [67]

$$C_n = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_n A_n, \quad D_n = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_n B_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Для цепных дробей с положительными членами справедливо свойство вилки, выраженное системой неравенств

$$f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}, \tag{12}$$

где k, j — произвольные натуральные числа. Вопрос сходимости таких дробей полностью решается следующим критерием.

Теорема 1 (Зейдель [92]). *Непрерывная дробь*

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{1}{b_i}, \tag{13}$$

элементами которой являются действительные положительные числа, сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i. \tag{14}$$

К числу наиболее употребительных классических признаков сходимости цепных дробей относятся, кроме критерия Зейделя, необходимый признак сходимости Коха [82], достаточные признаки сходимости Ворпитского [101], Слешинского — Прингсгейма [58, 89], теорема Ван Флека [97] и параболические теоремы [81]. Кроме перечисленных существует огромное множество других признаков сходимости (см., например, [81, 87, 100], а также [66, 78, 96] и др.). Собственно, большая часть всех работ по цепным дробям посвящена вопросу их сходимости.

Следуя [81], дадим определение области элементов, области значений и области сходимости цепной дроби (5), где, не ограничивая общности, положим $b_0 = 0$. Последовательности непустых множеств $\{\Omega_k\}$ и $\{V_i\}$, таких что $\varnothing \neq \Omega_k \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\varnothing = V_i \subset \hat{\mathbb{C}}$ $(k = 1, 2, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots)$ называются последовательностями областей элементов и областей значений цепной дроби ($\hat{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость)

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{a_i}{b_i}, \tag{15}$$

если

$$\frac{a_n}{b_n} \in V_{n-1} \text{ для } \langle a_n, b_n \rangle \in \Omega_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

и

$$t_n(V_n) \subseteq V_{n-1} \text{ для } \langle a_n, b_n \rangle \in \Omega_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Многие из существующих признаков сходимости цепных дробей с комплексными элементами являются признаками типа областей сходимости. Последовательность областей элементов $\{\Omega_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется последовательностью областей сходимости дроби (15), если условия $\langle a_n, b_n \rangle \in \Omega_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обеспечивают сходимость этой дроби. Чаще других рассматриваются случаи: $\Omega_n = \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (простая область сходимости), $\Omega_{2k-1} = \Omega_1$, $\Omega_{2k} = \Omega_2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (спаренные области сходимости). В частности, ответ на вопрос о наибольшей круговой области сходимости с центром в начале координат дает следующая теорема.

Теорема 2 (Ворпитский [101]). *Если для цепной дроби*

$$\left(1 + \overset{\infty}{\underset{k=2}{D}} \frac{c_k(z)}{1}\right)^{-1}, \tag{18}$$

где $c_k(z)$ — комплексные функции, заданные в области $D \subset \mathbb{C}$, выполняются условия

$$|c_k(z)| \leqslant \frac{1}{4} \quad (k = 2, 3, \ldots), \tag{19}$$

то

а) дробь (18) равномерно сходится в D;

б) областью значений является круг

$$|z - {}^4/_3| \leqslant {}^2/_3; \tag{20}$$

в) константа ${}^1/_4$ в (19) и область (20) являются наилучшими, т. е. константу нельзя увеличить, а область уменьшить.

Следующая теорема в литературе именуется теоремой Прингсгейма [89], хотя была установлена Слешинским [58] на 10 лет раньше. Аналогичная теорема была установлена также А. А. Марковым [40] для действительных элементов.

Теорема 3 (Слешинский — Прингсгейм [58, 89]). *Цепная дробь (5) с комплексными элементами сходится, если*

$$|b_n| \geqslant |a_n| + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Для n-х аппроксимант справедливо неравенство

$$|f_n| < 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Теорема 4 (Ван Флек [97]). *Пусть для элементов цепной дроби (13) выполняются условия*

$$b_i \neq 0, \quad |\arg b_i| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{23}$$

где ε — *произвольное как угодно малое действительное число* $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда

а) n-я аппроксиманта f_n *дроби (13) удовлетворяет условию*

$$f_n \neq 0, \quad |\arg f_n| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) существуют конечные пределы четных и нечетных аппроксимант;

в) для сходимости цепной дроби (13) необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|. \tag{24}$$

Подробный обзор по одному из очень важных направлений в исследовании сходимости цепных дробей, так называемым параболическим теоремам, изложен в монографии [81]. Мы сформулируем первый, полученный в этом направлении результат.

Теорема 5 (Скотт — Уолл [91]). *Множество точек* $S \subset \mathbb{C}$, *симметричное относительно действительной оси, является областью сходимости цепной дроби*

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{1}\right)^{-1} \tag{25}$$

тогда и только тогда, когда S — *ограниченное множество, принадлежащее параболической области*

$$P = \{z \in \mathbf{C} : |z| - \operatorname{Re} z \leqslant 1/2\}. \tag{26}$$

Более того, если $a_k \in P$ $(k = 2, 3, \ldots)$, *то дробь (25) сходится тогда и только тогда, когда*

а) существует индекс p, *такой что* $a_p = 0$;

б) все $a_p \neq 0$ *и ряд (24) расходится, где*

$$b_1 = 1, \; a_{p+1} = (b_p b_{p+1})^{-1} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Теорема 6 (Кох [82]). *Если ряд (24) сходится, то цепная дробь (13) с комплексными элементами расходится,* *более того,*

$$\lim_{k\to\infty} A_{2k} = F_0, \quad \lim_{k\to\infty} A_{2k+1} = F_1, \qquad (28)$$
$$\lim_{k\to\infty} B_{2k} = G_0, \quad \lim_{k\to\infty} B_{2k+1} = G_1$$

и выполняется соотношение

$$F_1G_0 - F_0G_1 = 1. \qquad (29)$$

Теорема 7 [100]. *Периодическая цепная дробь*

$$\frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \cdots$$

сходится для каждого $a \in \mathbb{C}$, *за исключением точек* $a = 1/4 - c$, *где* c — *произвольное действительное положительное число.*

При доказательстве сходимости цепных дробей существенно используются два фактора: во-первых, наличие рекуррентных соотношений (8), во-вторых, то, что совокупность дробно-линейных отображений образует группу. Заметим, что ни первое, ни второе не имеет места для ветвящихся цепных дробей.

Одним из методов доказательства сходимости цепных дробей является метод, основанный на применении фундаментальных неравенств. Так, были (см., например, [100]) доказаны теоремы 2, 5 и многие другие. Будем говорить, что непрерывная дробь (25) удовлетворяет фундаментальным неравенствам, если существуют такие действительные числа $r_p \geqslant 0$, что для элементов дроби a_p выполняются неравенства

$$r_p |a_p + a_{p+1} + 1| \geqslant r_p r_{p-2} |a_p| + |a_{p+1}| \quad (p = 1, 2, \ldots), \qquad (30)$$

где $a_1 = r_0 = r_{-1} = 0$.

Теорема 8 [100]. *Если для цепной дроби (25) выполняются фундаментальные неравенства, то все n-е знаменатели $B_n \neq 0$ и справедлива оценка*

$$|f_n - f_m| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} r_1 r_2 \ldots r_k. \qquad (31)$$

Существуют две интерпретации фундаментальных неравенств.

I интерпретация: если для дроби (25) выполняются фундаментальные неравенства и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_1 r_2 \ldots r_k$$

сходится, то цепная дробь (25) сходится.

II интерпретация: если для дроби (25) выполняются фундаментальные неравенства (30), где первые два неравенства строгие, то существуют пределы четных и нечетных подходящих дробей.

Пример 1. При выполнении условий теоремы Ворпитского цепная дробь (25) удовлетворяет фундаментальным неравенствам (30), где $r_p = p(p+2)^{-1}$, при выполнении условий параболической теоремы $r_p = 1$.

Рассмотрим некоторые типы функциональных цепных дробей.

Непрерывная дробь

$$\left(b_1 + z_1 + \underset{i=2}{\overset{\infty}{D}} \frac{-a_{i-1}^2}{b_i + z_i}\right)^{-1}, \tag{32}$$

где a_i, b_i — комплексные числа, z_i — комплексные переменные, называется положительно определенной, если неотрицательно определены действительные квадратичные формы

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \xi_k \xi_{k+1} \geqslant 0 \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{33}$$

где $\beta_k = \operatorname{Im} b_k$, $\alpha_k = \operatorname{Im} a_k$, $\xi_k \ (k = 1, 2, \ldots)$ — произвольные действительные числа.

Теорема 9 (Уолл—Венцель [100]). *Цепная дробь (32) положительно определена тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

а) $\beta_k \geqslant 0 \ (k = 1, 2, \ldots)$;

б) существуют действительные числа $g_i : 0 \leqslant g_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *такие, что* $\alpha_k^2 = \beta_k \beta_{k+1} (1 - g_{k-1}) g_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 10 [100]. *Если цепная дробь (32) положительно определена, тогда n-е знаменатели* $B_n(z) \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *в области* $\operatorname{Im} z_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Цепная дробь (32) называется J-дробью, если все $z_i = \zeta$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где ζ — комплексная переменная. Подробный обзор, посвященный положительно определенным дробям и J-дробям, изложен в монографии [100]. Большое внимание изучению действительных J-дробей уделяли П. Л. Чебышев [68, 69] и А. А. Марков [40].

Непрерывная дробь вида

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{(1 - g_{k-1}) g_k z}{1}\right)^{-1}, \tag{34}$$

где $0 \leqslant g_k \leqslant 1$, $z \in \mathbb{C}$, называется g-дробью.

Теорема 11 [100]. *Цепная дробь (34) равномерно сходится на каждом компакте области*

$$G = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1, \ |\arg(z+1)| < \pi\}.$$

Нам будут необходимы некоторые сведения о цепных последовательностях, более подробно изложенные в монографии [100].

Последовательность действительных неотрицательных чисел $\{a_k\}$ называется цепной, если существуют такие действительные числа

$$0 \leqslant g_n \leqslant 1 \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ что } a_k = (1 - g_{k-1}) g_k \\ (k = 1, 2, \ldots).$$

Числа g_n $(n = 0, 1, \ldots)$ называются параметрами цепной последовательности. Параметры определяются неоднозначно. Однако для каждой цепной последовательности $\{a_k\}$ всегда существуют так называемые минимальные параметры m_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и максимальные параметры M_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ такие, что $a_k = (1 - m_{k-1}) m_k$, $a_k = (1 - M_{k-1}) M_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $m_n \leqslant g_n \leqslant M_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ для всех других значений параметров данной цепной последовательности. Минимальные и максимальные параметры определяются однозначно по формулам

$$m_0 = 0, \quad m_{p+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } m_p = 1 \\ a_{p+1}(1 - m_p)^{-1}, & \text{если } m_p < 1 \end{cases} \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{35}$$

$$M_p = 1 - \frac{a_{p+1}}{1} \underset{-}{} \frac{a_{p+2}}{1} \underset{-}{} \frac{a_{p+3}}{1} \underset{-}{} \ldots \quad (p = 0, 1, \ldots). \tag{36}$$

Если $\{a_k\}$ — цепная последовательность, у которой $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $m_p = M_p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{1 - m_i}.$$

Последовательность $\{\alpha_k^2\}$ является цепной тогда и только тогда, когда для всех действительных значений ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ неотрицательно определены квадратические формы

$$\sum_{p=1}^{n} \xi_p^2 - 2 \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p \xi_p \xi_{p+1} \geqslant 0 \ (n = 2, 3, \ldots).$$

Если $\{\alpha_k^2\}$ — цепная последовательность и $\beta_k^2 \leqslant \alpha_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\{\beta_k^2\}$ — цепная последовательность.

Регулярной C-дробью называется дробь вида

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_k z}{1}, \tag{37}$$

где $a_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — комплексные числа, $z \in \mathbb{C}$.

S-дробью называется дробь (37), где $a_k > 0$. Очевидно, что g-дробь является частным случаем S-дроби.

Наиболее характерными и употребительными признаками сходимости C-дробей являются теорема Ван Флека о предельно периодических цепных дробях, когда существует $\lim a_k$ при $k \to \infty$, и кардиоидная теорема [81].

Для S-дробей характерной является следующая теорема.

Теорема 12 (**Стилтьес** [**60**]). *Для цепной дроби (37), где $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $z \in \mathbb{C}$, справедливы следующие утверждения:*

а) четные и нечетные подходящие дроби (37) равномерно сходятся на каждом компакте области

$$G = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| < \pi\}$$

к функции, голоморфной в G;

б) цепная дробь (37) сходится к голоморфной функции в G тогда и только тогда, когда расходится ряд (14), где b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ определяются согласно (27);

в) если цепная дробь (37) сходится в какой-либо точке области G, то она сходится в каждой точке области G.

Кроме перечисленных существуют и другие типы функциональных цепных дробей, например T-дроби [81], дроби, у которых разлагаются функции класса Герглотца [64, 100] и др.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Существуют два подхода к определению ветвящихся цепных дробей. Хронологично первым был подход, который предложил В. Я. Скоробогатько [56, 57]. Он основан на применении геометрических понятий типа графов. Второй подход, предложенный П. И. Боднарчуком [19], использует композиции многомерных дробно-линейных отображений.

Мы дадим определение ветвящихся цепных дробей с N ветками ветвления ($N \in \mathbb{N}$), следуя второму подходу. В § 1 рассмотрен также алгоритм разложения натурального числа k по степеням N с отличными от нуля коэффициентами, который используется для определения одного важного для дальнейшего изложения типа фигурных подходящих дробей.

В § 2 обоснованы формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей, которые будут существенно использоваться в гл. 4 для определения и изучения свойств многомерных положительно определенных дробей. Поэтому возникла необходимость в их строгом обосновании. Ранее аналогичные соотношения были предложены В. И. Шмойловым [32], правда, без указания формул для общих членов определителей.

В § 3 установлена формула разности двух не обязательно соседних подходящих дробей (3.3), которая существенно используется при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей. Первый вариант формулы типа (3.3) предложил И. Я. Олексив [15]. Дальнейшее ее усовершенствование было осуществлено Д. И. Боднаром и Н. А. Недашковским.

Четвертый параграф посвящен эквивалентным преобразованиям ветвящихся цепных дробей. П. И. Боднарчук [19, с. 55—56] доказал, что ВЦД (4.2) эквивалентна (1.9). Однако, как показывает пример, произвольное эквивалентное преобразование дроби (1.9) нельзя записать в виде (4.2). Установлены необходимые и достаточные условия, чтобы в виде (4.2) можно было записать произвольное эквивалентное преобразование ВЦД (1.9).

В § 5 изложены результаты, посвященные областям элементов и областям значений для ветвящихся цепных дробей. Теоремы 1.12—1.14, 1.20, 1.21 были установлены Е. А. Болтаровичем. В соответствующих разработках оказалась применимой методика исследования аналогичных вопросов в теории цепных дробей [80, 81].

§ 1. Определение ветвящейся цепной дроби. Подходящие дроби

Если $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — некоторый набор индексов ($i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$), то с целью сокращения записи в дальнейшем будем применять мультииндекс

$$i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k. \qquad (1.1)$$

Пусть b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$) — комплексные числа, $z_{i(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$) — комплексные переменные, причем $a_{i(k)} \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$) и пусть

$$\begin{gathered} t_0(z_1, z_2, \ldots, z_N) = b_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_N, \qquad (1.2) \\ t_{i(k)}(z_{i(k)1}, z_{i(k)2}, \ldots, z_{i(k)N}) = a_{i(k)}(b_{i(k)} + z_{i(k)1} + \cdots + \\ + z_{i(k)N})^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}) \end{gathered}$$

есть некоторая совокупность N-мерных дробно-линейных отображений. Обозначим $z_{i(k)}^{(r)}$ вектор из $\mathbb{C}^p$ ($p = N^r$, $r \in \mathbb{N}$) вида

$$z_{i(k)}^{(r)} = (z_{i(k)\underbrace{11\ldots1}_{r}}, z_{i(k)\underbrace{1\ldots12}_{r}}, \ldots, z_{i(k)\underbrace{NN\ldots N}_{r}}), \qquad (1.3)$$

в частности,

$$z^{(r)} = z_{\underbrace{11\ldots1}_{r}}, z_{\underbrace{1\ldots12}_{r}}, \ldots, z_{\underbrace{NN\ldots N}_{r}}),$$

где компоненты вектора (1.3) $z_{i(k)j(r)}$ ($j_s = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, r}$) естественным образом упорядочены, т. е. $z_{i(k)n(r)} \prec z_{i(k)m(r)}$, если $n(r) \prec m(r)$ и $n(r) \prec m(r)$, если $n_1 < m_1$ или существует такой индекс s ($1 \leqslant s < r$), что $n_p = m_p$ ($p = \overline{1, s}$) и $n_{s+1} < m_{s+1}$.

Пусть

$$\omega_{i(k)} = t_{i(k)}(z_{i(k)}^{(1)}) \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots). \qquad (1.4)$$

Определим $\omega_{i(k)}^{(r)}$ согласно (1.3). Тогда по аналогии с (2) рассмотрим композиции N-мерных дробно-линейных отображений

$$T_0(z^{(1)}) \equiv t_0(z^{(1)}),\ T_k(z^{(k+1)}) = T_{k-1}(w^{(k)}) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots) \quad (1.5)$$

и последовательность $\{T_k(0)\}$, где 0 берется из соответствующего пространства. Вычислим явные выражения для $T_k(0)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Имеем

$$T_0(0) = t_0(0) = b_0,$$
$$T_1(z^{(2)}) = t_0(w^{(1)}) = t_0(t_1(z_1^{(1)}),\ \ldots,\ t_N(z_N^{(1)})).$$

Поэтому

$$T_1(0) = t_0(t_1(0),\ \ldots,\ t_N(0)) = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}}.$$

Далее

$$T_2(z^{(3)}) = T_1(w^{(2)}) = t_0(t_1(w_1^{(1)}),\ \ldots,\ t_N(w_N^{(1)})) =$$
$$= t_0(t_1(t_{11}(z_{11}^{(1)}),\ \ldots,\ t_{1N}(z_{1N}^{(1)})),\ \ldots,\ t_N(t_{N1}(z_{N1}^{(1)}),\ \ldots,\ t_{NN}(z_{NN}^{(1)}))).$$

Поэтому

$$T_2(0) = t_0(t_1(t_{11}(0),\ \ldots,\ t_{1N}(0)),\ \ldots,\ t_N(t_{N1}(0),\ \ldots,\ t_{NN}(0))) = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2}}}$$

и т. д., используя обозначения (1.1), имеем

$$T_k(0) = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{N} \cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}}}. \quad (1.6)$$

Считаем, что $T_k(0)$ имеет смысл, если в процессе сворачивания дроби (1.6) у нас не возникнет неопределенность 0/0. Мы предполагаем, что $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ и $\frac{a_1}{0} + \frac{a_2}{0} + \cdots + \frac{a_n}{0} = \frac{0}{0}$, если $n > 1$. Если существует такой набор индексов $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$, что $b_{i(k)} = 0$, то, для того чтобы дробь (1.16) имела смысл, необходимо, чтобы

$$b_{i(k-1)j} \neq 0 \quad (j = \overline{1,\ N},\ j \neq i_k).$$

Ветвящйеся цепной дробью с N ветками ветвления называется выражение

$$b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}+\ddots+\sum\limits_{i_k=1}^{N}\cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}+\ddots}}}, \quad (1.7)$$

которое по аналогии с (4) и (5) компактно запишем в виде

$$b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}}+\dots+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}+\dots \quad (1.8)$$

или в виде

$$b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \quad (1.9)$$

Замечание 1.1. Определяя ВЦД с N ветками ветвления, как композицию N-мерных дробно-линейных отображений (1.2), мы естественно предполагали, так же как это делается в одномерном случае [81], что все

$$a_{i(k)}\neq 0 \quad (i_k=\overline{1,\ N},\ k=1,\ 2,\ \dots). \quad (1.10)$$

Впредь, рассматривая ВЦД (1.7), будем допускать и вырожденные случаи, когда ограничения (1.10) снимаются.

Бесконечную ВЦД (1.7) следует понимать как предел выражений (1.6) при $k\to\infty$. Поэтому предполагаем, что, начиная с некоторого номера k_0, все последующие $T_k(0)$ имеют смысл.

Элементы дроби (1.7) $a_{i(k)}$ называются k-ми частными числителями, $b_{i(k)}$ — k-ми частными знаменателями, b_0 — свободным членом; отношения $a_{i(k)}/b_{i(k)}$ называются k-ми частными звеньями. Совокупность всех k-х звеньев образует k-й этаж ветвящейся цепной дроби (1.7). Конечные ВЦД вида (1.6)

$$f_0=b_0,\quad f_n=b_0+\overset{n}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \quad (n=1,\ 2,\ \dots) \quad (1.11)$$

называются n-ми подходящими дробями или n-ми аппроксимантами дроби (1.9).

Пусть $\{i_k\}$ — фиксированный набор индексов $(k=1, 2, \ldots, i_k=\overline{1, N})$. Обычная цепная дробь

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} = \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} + \cdots + \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} + \cdots$$

называется $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots)$-веткой ветвящейся цепной дроби (1.9). Под длиной конечной ветки, т. е. конечной цепной дроби, подразумеваем количество ее этажей.

Характерной особенностью n-й подходящей дроби (1.11) ВЦД (1.9) является то, что все ее ветки имеют n этажей. Подходящие дроби можно конструировать и так, чтобы ее различные ветки имели не обязательно одинаковую длину. Такие аппроксиманты называются фигурными подходящими дробями ВЦД (1.9). Фигурные аппроксиманты можно конструировать по-разному. В некоторых задачах они возникают вполне естественно [1, 34].

Пример 1.1. Предположим, что каждая новая фигурная подходящая дробь образуется добавлением последующего звена в естественной записи ВЦД (1.7), т. е.

$$\tilde{f}_0 = b_0, \quad \tilde{f}_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad \tilde{f}_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}, \ldots,$$

$$\tilde{f}_N = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}, \tilde{f}_{N+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_{11}}{b_{11}}} + \sum_{i_1=2}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}, \ldots$$

Легко проверить, что в этом случае k-я фигурная аппроксиманта $\tilde{f}_k$ — это s-я обычная подходящая дробь, в которой все s-е частные звенья, следующие за $a_{r(s)}/b_{r(s)}$, заменены на $0/1$, где индексы $r_1, r_2, \ldots, r_s$ определяются из разложения числа k по степеням N с отличными от нуля коэффициентами

$$k = r_1N^{s-1} + r_2N^{s-2} + \cdots + r_s \quad (1 \leqslant r_p \leqslant N, \; p = \overline{1, s}). \tag{1.12}$$

Действительно, рассмотрим множество I_N наборов индексов $i(p)$, где $i_p = \overline{1, N}$, $p = 1, 2, \ldots$, и упорядочим его следующим образом:

$$\begin{cases} i(p) \prec j(q), & \text{если } p < q, \\ i(p) \prec j(p), & \text{если } i_1 < j_1, \\ i(p) \prec j(p), & \text{если существует } r\,(1 \leqslant r < p), \text{ что} \\ & i_k = j_k\,(k = \overline{1, r}) \text{ и } i_{r+1} < j_{r+1}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Пронумеруем элементы множества I_N с учетом введенного выше порядка и вычислим, какой номер получит элемент $r(s)$. Количество элементов $j(p)$, где $p < s$ будет $N + N^2 + \cdots + N^{s-1}$. Множество элементов $j(s)$, предшествующих

$r(s)$, разделим на группы: I группа — это $r(s)=r(s-1)j_s$, где $j_s<r_s$, II группа — это $r(s)=r(s-2)j_{s-1}j_s$, где $j_{s-1}<$ $<r_{s-1}$, j_s произвольное и т. д. s-я группа — это $j(s)$, где $j_1<r_1$, а все остальные j_p произвольные. Количество элементов в каждой группе будет соответственно (r_s-1), $N(r_{s-1}-1)$, $\ldots$, $N^{s-1}(r_1-1)$. Следовательно, элемент с индексом $r(s)$ получит номер

$$k=N+N^2+\cdots+N^{r-1}+(r_s-1)+N(r_{s-1}-1)+\cdots+$$
$$+N^{s-1}(r_1-1)+1=r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_s.$$

Мы приходим к разложению (1.12).

Таким образом,

$$\tilde{f}_k=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}+\cdots+\sum_{i_{s-1}=1}^{N}\frac{a_{i(s-1)}}{b_{i(s-1)}}+\sum_{i_s=1}^{N}\delta_k\left(\frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}\right), \tag{1.14}$$

$$\text{где } \delta_k\left(\frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}\right)=\begin{cases}a_{i(s)}/b_{i(s)}, & \text{если } i(s)\propto r(s)\\ 0/1, & \text{если } i(s)\not\propto r(s),\end{cases}$$

число s, индексы r_1, r_2, $\ldots$, r_s определяются по алгоритму (1.12), а порядок на множестве индексов — согласно (1.13).

Докажем, что коэффициенты r_1, r_2, $\ldots$, r_s разложения числа k по алгоритму (1.12) находятся однозначно. Доказываем от противного. Пусть число k имеет два представления

$$k=r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_s \quad (1\leqslant r_p\leqslant N,\ p=\overline{1,\ s}),$$
$$k=r'_1N^{s'-1}+r'_2N^{s'-2}+\cdots+r'_{s'} \quad (1\leqslant r'_p\leqslant N,\ p=\overline{1,\ s'}).$$

Предположим, что $s>s'$, тогда, исходя из первого представления, получим оценку $k\geqslant N^{s-1}+N^{s-2}+\cdots+1$, а из второго — оценку $k\leqslant N^{s'}+N^{s'-1}+\cdots+N$. Мы приходим к противоречию $N^{s-1}+N^{s-2}+\cdots+1\leqslant N^{s'}+N^{s'-1}+\cdots+$ $+N$ с условием $s>s'$. Следовательно, $s=s'$. Не ограничивая общности, считаем, что $r_1>r'_1$. Тогда, повторяя аналогичные соображения, получим $k\geqslant r_1N^{s-1}+N^{s-2}+N^{s-3}+$ $+\cdots+1$, $k\leqslant r'_1N^{s-1}+N^{s-1}+N^{s-2}+\cdots+N$, что противоречит условию $r_1>r'_1$.

Так как для произвольного натурального числа k существует элемент $r(s)$ множества I_N, имеющий порядковый номер k или, как было показано ранее,— порядковый номер $r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_s$, то отсюда следует, что $k=$ $=r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_s$. Это доказывает существование разложения (1.12) для произвольного $k\in\mathbb{N}$.

Пример 1.2. Определим k-ю фигурную подходящую дробь $\widetilde{F}_k$ ветвящейся цепной дроби (1.9) как конечную ВЦД, содержащую все те элементы $a_{i(p)}$, $b_{i(p)}$, сумма индексов которых $i_1 + i_2 + \cdots + i_p \leqslant k$, т. е.

$$\widetilde{F}_k = \overset{k}{\underset{p=1}{D}} \sum_{i_p=1}^{N} \gamma_k\left(\frac{a_{i(p)}}{b_{i(p)}}\right), \tag{1.15}$$

где $\gamma_k\left(\frac{a_{i(p)}}{b_{i(p)}}\right) = \begin{cases} a_{i(p)}/b_{i(p)}, & \text{если } i_1 + i_2 + \cdots + i_p \leqslant k, \\ 0/1, & \text{если } i_1 + i_2 + \cdots + i_p > k. \end{cases}$

Дроби f_k и $\widetilde{F}_k$ имеют смысл, если в процессе их сворачивания не возникнет неопределенность 0/0.

§ 2. Формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей

Так как подходящие дроби (1.11) и (1.14) ветвящейся цепной дроби (1.9) связаны соотношением

$$f_k = \widetilde{f}_l, \tag{2.1}$$

где

$$l = N + N^2 + \cdots + N^k, \tag{2.2}$$

то с целью избежания громоздких формулировок под k-й подходящей дробью ВЦД (1.9) в данном параграфе будем понимать фигурную подходящую дробь $\widetilde{f}_k$.

Сначала опишем алгоритм сворачивания дроби (1.14). Впредь запись $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ будет обозначать равенство двух дробей и выполнение условия $a = c$, $b = d$. Тождество

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{b_0 \prod_{k=1}^{n} b_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k=1,\, k\neq i}^{n} b_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k} \tag{2.3}$$

запишем в сокращенном виде

$$\frac{a}{b} \equiv b_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}. \tag{2.4}$$

Процесс сворачивания дроби (1.14) производится по следующему рекуррентному алгоритму:

$$\widetilde{f}_k = \frac{\widetilde{A}_k}{\widetilde{B}_k}, \tag{2.5}$$

где

$$\frac{\tilde{A}_k}{\tilde{B}_k} \equiv b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{b'_{i(1)}} \tag{2.6}$$

и

$$\frac{a'_{i(m)}}{b'_{i(m)}} \equiv \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)} b'_{i(m+1)}}{b_{i(m+1)} b'_{i(m+1)} + a'_{i(m+1)}} \tag{2.7}$$

$$(i_m = \overline{1, N},\ m = s-2,\ s-3,\ \ldots,\ 1),$$

$$\frac{a'_{i(s-1)}}{b'_{i(s-1)}} \equiv \begin{cases} 0/1, \text{ если } i(s-1) \succ r(s-1), \\ \sum\limits_{i_s=1}^{r_s} \dfrac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}, \text{ если } i(s-1) = r(s-1), \\ \sum\limits_{i_s=1}^{N} \dfrac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}, \text{ если } i(s-1) \prec r(s-1). \end{cases} \tag{2.8}$$

Индексы $r_1, r_2, \ldots, r_s$ определяются из разложения числа k по алгоритму (1.12).

Фактически алгоритм (2.5)—(2.8) вычисления подходящей дроби (1.14) эквивалентен тому, что мы выполняем постепенное сворачивание дроби (1.14) снизу — вверх таким образом, что никакое из отношений $a'_{i(m)}/b'_{i(m)}$ или $a_{i(s)}/b_{i(s)}$ при этом не заменяем ему соответственно равным отношением $\rho a'_{i(m)}/(\rho b'_{i(m)})$ или $\rho a_{i(s)}/(\rho b_{i(s)})$, где $\rho \neq 0, 1$, $m = \overline{1, s-1}$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, m}$, $i(s) \prec r(s)$. Если же при вычислении ВЦД (1.14) по алгоритму (2.5)—(2.8) вместо $a'_{i(m)}$ и $b'_{i(m)}$ (или $a_{i(s)}$ и $b_{i(s)}$) взять $\rho a'_{i(m)}$ и $\rho b'_{i(m)}$ (или $\rho a_{i(s)}$ и $\rho b_{i(s)}$) при одном допустимом наборе индексов, а все остальные элементы оставить без изменения, то окончательно получим

$$\tilde{f}_k = \frac{\rho \tilde{A}_k}{\rho \tilde{B}_k}.$$

Числитель отношения (2.6) $\tilde{A}_k$ называется k-м числителем, знаменатель $\tilde{B}_k$ — k-м знаменателем фигурной подходящей дроби (1.14). $\tilde{A}_k$ является полиномом от переменных b_0, $a_{i(p)}$, $b_{i(p)}$, а $\tilde{B}_k$ — полиномом от переменных $a_{i(p)}$, $b_{i(p)}$, за исключением $a_{i(1)}$ $(i_1 = \overline{1, N})$, где $i(p) \prec r(s)$. k-й числитель A_k и k-й знаменатель B_k подходящей дроби (1.11) соответственно равны $A_k = \tilde{A}_l$, $B_k = \tilde{B}_l$, где l определяется согласно (2.2).

Установим формулы для вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей ВЦД (1.9). Предварительно рассмотрим аналогичный вопрос для цепной дроби

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \frac{a_k}{b_k}. \tag{2.9}$$

Утверждение 1.1 [*100*]. n-е числители и n-е знаменатели непрерывной дроби (2.9) вычисляются по формулам

$$A_n = \Delta_n^{(0)}, \; B_n = \Delta_n^{(1)} \; (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.10}$$

где $\Delta_n^{(k)}$ $(k = 0, 1; \; n = 1, 2, \ldots)$ — трехдиагональные определители, составленные из элементов дроби (2.9):

$$\Delta_n^{(k)} = \begin{vmatrix} b_k & a_{k+1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ -1 & b_{k+1} & a_{k+2} & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & -1 & b_{k+2} & a_{k+3} & 0 & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & -1 & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 0 & -1 & b_n \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Раскрывая определитель $\Delta_n^{(k)}$ по последнему столбцу, получим рекуррентное соотношение

$$\Delta_n^{(k)} = b_n \Delta_{n-1}^{(k)} + a_n \Delta_{n-2}^{(k)} \; (k = 0, 1, n = 3, 4, \ldots). \tag{2.12}$$

Если положить

$$\Delta_0^{(0)} = b_0, \quad \Delta_{-1}^{(0)} = 1, \quad \Delta_0^{(1)} = 1, \quad \Delta_{-1}^{(1)} = 0, \tag{2.13}$$

то, как легко проверить, соотношения (2.12) будут выполняться и при $k = 0, 1, n = 1, 2$. Сравнивая формулы (2.12) и начальные значения (2.13) с (8) и (9), соответственно убеждаемся в справедливости (2.10). ■

Установим для ветвящейся цепной дроби (1.9) формулы типа (2.10). Здесь возникают некоторые трудности в связи с отсутствием для ВЦД рекуррентных соотношений вида (8).

Рассмотрим матрицы

$$C_i^k = \begin{Vmatrix} c_{ii} & c_{i\,i+1} & \ldots & c_{ik} \\ c_{i+1\,i} & c_{i+1\,i+1} & \ldots & c_{i+1\,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{ki} & c_{k\,i+1} & \ldots & c_{kk} \end{Vmatrix} \; (i = 0, 1, \; k = 1, 2, \ldots), \tag{2.14}$$

элементы которых связаны с компонентами ВЦД (1.14) следующим образом. Если p — произвольное натуральное число, такое что $1 \leqslant p \leqslant k$ и индексы $j_1, j_2, \ldots, j_m$ определяются из разложения числа p по алгоритму (1.12)

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \cdots + j_m \quad (1 \leqslant j_n \leqslant N,\ n = \overline{1, m}), \tag{2.15}$$

то

$$c_{pp} = b_{j(m)} \quad (p = \overline{1, k}), \tag{2.16}$$

$$c_{pq} = a_{j(m) i_{m+1}}, \text{ если } p = \overline{1, k},\ q = pN + i_{m+1},\ i_{m+1} = \overline{1, N}, \tag{2.17}$$

$$c_{00} = b_0,\ c_{0q} = a_q \quad (q = \overline{1, N}), \tag{2.18}$$

$$c_{q0} = -1\ (q = \overline{1, N}),\ c_{qp} = -1, \text{ если } p = \overline{1, k},$$
$$q = pN + i_{m+1}, \quad i_m = \overline{1, N}, \tag{2.19}$$

$c_{pq} = 0$ во всех остальных случаях.

Пример 1.3. В качестве иллюстрации рассмотрим случай $N = 2$, $k = 7$. Тогда по алгоритму (1.12) находим $k = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$. Следовательно, $c_{77} = b_{111}$ и

$$C_0^7 = \begin{Vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{111} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_{111} \end{Vmatrix}.$$

Отметим некоторые конструктивные особенности матриц C_0^k, непосредственно следующие из определения.

Свойство 1. Каждый q-й столбец матрицы C_0^k $(q = \overline{1, k})$ среди всех элементов, расположенных выше главной диагонали, содержит самое большее один отличный от нуля элемент c_{pq}, который определяется согласно (2.18), если $p = 0$, или согласно (2.17), если $p \geqslant 1$, где p находится из разложения

$$q = pN + i_{m+1}, \quad 1 \leqslant i_{m+1} \leqslant N. \tag{2.20}$$

Таким образом, определяя p из (2.20), имеем

$$c_{rq} = 0, \text{ если } 0 \leqslant r < p,\ p < r < q. \tag{2.21}$$

Действительно, из условия $r < p$ следует, что $r + 1 \leqslant p$ и $Nr + N \leqslant Np$. Поэтому $q = pN + i_{m+1} \geqslant Nr + N + i_{m+1} > Nr + N$ и согласно определению матрицы C_0^k элемент

$c_{rq}=0$. Аналогично, если $p<r<q$, то $p\leqslant r-1$ и $pN\leqslant rN-N$. Поэтому $q=pN+i_{m+1}\leqslant rN-N+i_{m+1}<rN+1$ и так как $q>r$, то согласно определению матрицы (2.14) $c_{rq}=0$.

Свойство 2. Каждый q-й столбец матрицы C_0^k, содержащий на главной диагонали частные знаменатели последних тупиковых звеньев k-й подходящей дроби (1.14), имеет ниже главной диагонали все элементы, равные нулю. Если

$$k=r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_s$$

разложение числа k по алгоритму (1.12), то, исходя из определения k-й фигурной подходящей дроби (1.14), заметим, что частные знаменатели последних тупиковых звеньев будут иметь согласно (1.13), (1.14) порядковые номера q, удовлетворяющие оценке

$$r_1N^{s-2}+r_2N^{s-3}+\cdots+r_{s-1}<q\leqslant r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_s. \tag{2.22}$$

Тогда $c_{rq}=0$, если $q<r\leqslant k$, q удовлетворяет неравенствам (2.22). Действительно, учитывая ограничения на q, получим

$$q\geqslant r_1N^{s-2}+r_2N^{s-3}+\cdots+r_{s-1}+1.$$

Поэтому

$$Nq+i_m\geqslant r_1N^{s-1}+r_2N^{s-2}+\cdots+r_{s-1}N+i_m+N>k, \tag{2.23}$$

где $1\leqslant i_m\leqslant N$. Так как согласно (2.19) $c_{rq}=-1$, если $q<r\leqslant k$, $r=Nq+i_m$, $1\leqslant i_m\leqslant N$, и $c_{rq}=0$ в противном случае, где $q<r\leqslant k$, то в силу (2.23) имеем $c_{rq}=0$ для всех $q<r\leqslant k$.

Теорема 1.1. *k-е числители $\tilde{A}_k$ и k-е знаменатели $\tilde{B}$ k-й фигурной подходящей дроби (1.14) ветвящейся цепной дроби (1.9) вычисляются по формулам*

$$\tilde{A}_k=\det C_0^k,\quad \tilde{B}_k=\det C_1^k\quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.24}$$

где C_i^k $(i=0,\ 1)$ — матрицы вида (2.14).

Доказательство теоремы проведем методом математической индукции по k.

При $k=1,\ 2$ имеем

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{B}_1}\equiv b_0+\frac{a_1}{b_1}\equiv\frac{b_0b_1+a_1}{b_1}\equiv\frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1\\ -1 & b_1\end{vmatrix}}{b_1},$$

$$\frac{\tilde{A}_2}{\tilde{B}_2}\equiv b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\equiv\frac{b_0b_1b_2+a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}\equiv\frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2\\ -1 & b_1 & 0\\ -1 & 0 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{vmatrix}}.$$

Предположим, что $\tilde{A}_n = \det C_0^n$ и $\tilde{B}_n = \det C_1^n$ для $n \leqslant k$. Докажем справедливость соответствующих формул для $n = k+1$. Разложим число k по алгоритму (1.12)

$$k = r_1 N^{s-1} + r_2 N^{s-2} + \cdots + r_s \quad (1 \leqslant r_p \leqslant N,\ p = \overline{1, s}).$$

Тогда

а) $k+1 = r_1 N^{s-1} + r_2 N^{s-2} + \cdots + r_s + 1$, если $r_s < N$;

б) $k+1 = r_1 N^{s-1} + r_2 N^{s-2} + \cdots + r_{m-1} N^{s-m+1} + (r_m + 1) \times N^{s-m} + N^{s-m-1} + N^{s-m-2} + \cdots + 1$, если существует m ($m = \overline{1, s-1}$), такое, что $r_p = N$, ($p = \overline{m+1, s}$), $r_m < N$;

в) $k+1 = N^s + N^{s-1} + \cdots + N + 1$, если $r_p = N$ ($p = \overline{1, s}$).

Пусть $c_{k+1,\, k+1} \neq 0$. Доказательство во всех трех случаях проводится аналогично. Для определенности рассмотрим случай а).

Введем обозначение

$$b^*_{r(s-1)} = b_{r(s-1)} + \frac{a_{r(s-1)r_s+1}}{b_{r(s-1)r_s+1}}. \tag{2.25}$$

Заметим, что согласно предположению $b_{r(s-1)r_s+1} = c_{k+1,\, k+1} \neq 0$. Рассмотрим ветвящуюся цепную дробь (1.14), у которой $b_{r(s-1)}$ заменено на $b^*_{r(s-1)}$, а все остальные элементы оставлены без изменения, и обозначим через $\tilde{A}^*_k$ и $\tilde{B}^*_k$ ее k-й числитель и знаменатель соответственно.

Аппроксиманту $\tilde{f}_{k+1}$ можно записать в виде (1.14), если вместо дроби

$$\frac{a_{r(s-1)}}{b^*_{r(s-1)} + \sum\limits_{j=1}^{r_s} \frac{a_{r(s-1)j}}{b_{r(s-1)j}}}$$

взять ей равное отношение

$$\frac{a_{r(s-1)} b_{r(s-1)r_s+1}}{b^*_{r(s-1)} b_{r(s-1)r_s+1} + \sum\limits_{j=1}^{r_s} \frac{a_{r(s-1)j} b_{r(s-1)r_s+1}}{b_{r(s-1)j}}}.$$

Это сразу следует из алгоритма (2.5)—(2.8) сворачивания ВЦД (1.14) и замечания после формулы (2.8). Поэтому

$$\tilde{A}_{k+1} = b_{r(s-1)r_s+1} A^*_k, \quad \tilde{B}_{k+1} = b_{r(s-1)r_s+1} B^*_k. \tag{2.26}$$

Определитель $\det C_0^{k+1}$ запишем в виде

$$\det C_0^{k+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & a_{r(s-1)} & a_{r(s-2)r_{s-1}+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & b_{r(s-1)} & 0 & \ldots & a_{r(s)} & a_{r(s-1)r_s+1} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{r(s-2)r_{s-1}+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & b_{r(s)} & 0 \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{r(s-1)r_s+1} \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

Из свойств 1, 2 матрицы C_0^{k+1} следует, что последний столбец содержит самое большее два отличных от нуля элемента $a_{r(s-1)r_s+1}$ и $b_{r(s-1)r_s+1}$. Это же самое относится и к последней строке. Вынесем из последнего столбца отличный от нуля множитель $b_{r(s-1)r_s+1}$. Если к столбцу, содержащему элемент $b_{r(s-1)}$, добавить последний столбец, предварительно разделенный на $b_{r(s-1)r_s+1}$, то согласно предположению индукции получим $b_{r(s-1)r_s+1}\tilde{A}_k^*$, что равно $\tilde{A}_{k+1}$ в силу (2.26).

Если же $b_{r(s-1)r_s+1} = 0$, то, сворачивая дробь

$$\cfrac{a_{r(s-1)}}{b_{r(s-1)} + \sum\limits_{j=1}^{r_s+1} \cfrac{a_{r(s-1)j}}{b_{r(s-1)j}}}$$

по алгоритму (2.5)—(2.8), получим

$$\frac{0}{a_{r(s-1)r_s+1}\prod\limits_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j}} \equiv \frac{0\cdot a_{r(s-1)r_s+1}\prod\limits_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j}}{1\cdot a_{r(s-1)r_s+1}\prod\limits_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j}}.$$

Предположим, что

$$a_{r(s-1)r_s+1}\prod_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j} \neq 0. \tag{2.28}$$

Пусть $m = k - r_s$. Рассмотрим m-ю фигурную подходящую дробь ВЦД (1.9) в смысле определения (1.14), в которой звено $a_{r(s-1)}/b_{r(s-1)}$ заменено на $0/1$, и обозначим $\tilde{C}_m$ и $\tilde{D}_m$

ее m-е числители и знаменатели соответственно. Тогда согласно замечанию после формулы (2.8) имеем

$$\begin{cases} \tilde{A}_{k+1} = a_{r(s-1)r_s+1} \prod_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j} \tilde{C}_m, \\ \tilde{B}_{k+1} = a_{r(s-1)r_s+1} \prod_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j} \tilde{D}_m. \end{cases} \tag{2.29}$$

Строка определителя (2.27), содержащая $b_{r(s-1)}$, имеет справа от этого элемента все нули, за исключением, возможно, последних $r_s + 1$ элементов $a_{r(s-1)1}, a_{r(s-1)2}, \ldots, a_{r(s-1)r_s+1}$. Каждый из последних $r_s + 1$ столбцов согласно свойствам матрицы C_0^{k+1} имеет самое большее два отличных от нуля элемента.

Для m-го числителя $\tilde{C}_m$ согласно предположению индукции справедлива формула $\tilde{C}_m = \det C_0^m$, где вместо $a_{r(s-1)}$ и $b_{r(s-1)}$ взято 0 и 1 соответственно. Раскрывая определитель $\det C_0^m$ по столбцу, содержащему $b_{r(s-1)} = 1$, убеждаемся в том, что он равен в случае, когда $b_{r(s-1)r_s+1} = 0$, определителю (2.27), деленному на выражение (2.28), если определитель (2.27) предварительно раскрыть по последнему столбцу, последней строке и оставшимся последним r_s столбцам.

Учитывая (2.29), получим $\tilde{A}_{k+1} = \det C_0^{k+1}$.

Если

$$a_{r(s-1)r_s+1} \prod_{j=1}^{r_s} b_{r(s-1)j} = 0,$$

то, как легко заметить ВЦД $\tilde{f}_{k+1}$ не имеет смысла, т. е. $\tilde{A}_{k+1} = 0$, $\tilde{B}_{k+1} = 0$. В этом случае из (2.27) следует, что $\det C_0^{k+1}$ тоже равен нулю.

Если $k + 1$ определяется по алгоритму б) или в), то доказательство проводится совершенно аналогично, даже немного проще. ■

Утверждение 1.2. Ветвящаяся дробь f_k (1.11) имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$(\det C_0^l)^2 + (\det C_1^l)^2 \neq 0,$$

где $l = N + N^2 + \cdots + N^k$.

Утверждение 1.3. Ветвящаяся цепная дробь $\tilde{f}_k$ (1.14) имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$(\det C_0^k)^2 + (\det C_1^k)^2 \neq 0.$$

§ 3. Формула разности двух подходящих дробей. Свойство вилки

Установим формулу разности двух подходящих дробей $f_n - f_m$, которая в дальнейшем будет существенно использоваться при изучении сходимости ВЦД.

Введем рекуррентно сокращенные обозначения

$$Q_{i(s)}^{(s)} = b_{i(s)}, \quad Q_{i(p)}^{(s)} = b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}, \tag{3.1}$$

где $s = 1, 2, \ldots, p = \overline{1, s-1}, \quad i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, s}$.

Пусть $n > m$, тогда, учитывая (3.1), на первом шаге получим

$$f_n - f_m = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)}} - \left(b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}}\right) =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(n)} \cdot Q_{i(1)}^{(m)}} (Q_{i(1)}^{(n)} - Q_{i(1)}^{(m)}).$$

Аналогично для произвольного $r < m$ устанавливается соотношение

$$Q_{i(r)}^{(n)} - Q_{i(r)}^{(m)} = -\sum_{i_{r+1}=1}^{N} \frac{a_{i(r+1)}}{Q_{i(r+1)}^{(n)} Q_{i(r+1)}^{(m)}} (Q_{i(r+1)}^{(n)} - Q_{i(r+1)}^{(m)}). \tag{3.2}$$

Последовательно применяя соотношение (3.2) и учитывая, что

$$Q_{i(m)}^{(n)} - Q_{i(m)}^{(m)} = \sum_{i_{m+1}=1}^{N} \frac{a_{i(m+1)}}{Q_{i(m+1)}^{(n)}},$$

после $(m+1)$-го шага окончательно получим

$$f_n - f_m = (-1)^m \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{r=1}^{m+1} a_{i(r)}}{\prod_{r=1}^{m+1} Q_{i(r)}^{(n)} \prod_{r=1}^{m} Q_{i(r)}^{(m)}}. \tag{3.3}$$

При выводе формулы (3.3) естественно предполагается, что все $Q_{i(r)}^{(s)} \neq 0$ ($i_r = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, s}$, $s = n, m$).

Утверждение 1.4. Пусть элементами ВЦД (1.9) являются положительные действительные числа. Тогда справедливо свойство вилки, выраженное системой неравенств

$$f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}, \tag{3.4}$$

где k, j — произвольные натуральные числа.

Доказательство. Так как все $a_{i(r)} > 0$, $Q_{i(r)}^{(s)} > 0$ ($i_r = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, s}$, $s = n, m$), то, положив в формуле (3.3) $n = 2k + 2$, $m = 2k$ или $n = 2j + 1$, $m = 2j - 1$, убеждаемся в том, что четные подходящие дроби монотонно возрастают, нечетные монотонно убывают. Если в (3.3) положить $n = 2j + 1$, $m = 2k$ или $n = 2k$, $m = 2j + 1$ в зависимости от того $2j + 1 > 2k$ или $2j + 1 < 2k$, то убеждаемся в том, что $f_{2j+1} > f_{2k}$ для произвольных натуральных j и k. ■

§ 4. Эквивалентные преобразования ветвящихся цепных дробей

Преобразование ВЦД, не изменяющее величин подходящих дробей, называется эквивалентным. Ветвящиеся цепные дроби, у которых все соответствующие аппроксимации совпадают, называются эквивалентными.

Напомним, что произвольное эквивалентное преобразование цепной дроби (5) можно записать в виде [87]

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_k \rho_{k-1} \rho_k}{b_k \rho_k}, \tag{4.1}$$

где $\rho_0 = 1$, $\rho_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) — произвольные комплексные числа.

Легко проверить, что ВЦД

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} \rho_{i(k-1)} \rho_{i(k)}}{b_{i(k)} \rho_{i(k)}}, \tag{4.2}$$

где $\rho_{i(0)} = 1$, $\rho_{i(k)} \neq 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$) — произвольные комплексные числа, эквивалентна ветвящейся цепной дроби (1.9). Если обозначить n-е подходящие дроби (1.9) и (4.2) через f_n и f'_n соответственно, то выполняются тождества

$$f_n = f'_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

Но не всякое эквивалентное преобразование ВЦД (1.9) можно записать в виде (4.2), если требовать только выполнения тождеств (4.3).

В качестве контрпримера достаточно рассмотреть цепную дробь

$$\frac{a}{1}+\frac{a}{1}+\frac{a}{1}+\cdots,$$

где $a \neq 0$. Если каждое a расписать в виде суммы $a = \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}a$ или $a=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}a$, получим две эквивалентные ветвящиеся цепные дроби с двумя ветками ветвления

$$\cfrac{\frac{1}{3}a}{1+\cfrac{\frac{1}{3}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{2}{3}a}{1+\ddots}}+\cfrac{\frac{2}{3}a}{1+\cfrac{\frac{1}{3}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{2}{3}a}{1+\ddots}},$$

$$\cfrac{\frac{1}{4}a}{1+\cfrac{\frac{1}{4}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{3}{4}a}{1+\ddots}}+\cfrac{\frac{3}{4}a}{1+\cfrac{\frac{1}{4}a}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{3}{4}a}{1+\ddots}}.$$

Ни одну из этих дробей нельзя преобразовать в другую, используя эквивалентные преобразования (4.2). Действительно, в этом случае должны выполняться, например, противоречивые равенства

$$\begin{cases}\frac{1}{3}a=\frac{1}{4}a\rho_{i(0)}\rho_1,\\ 1=1\cdot\rho_1,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\frac{1}{4}a=\frac{1}{3}a\rho_{i(0)}\rho_1,\\ 1=1\cdot\rho_1,\end{cases}$$

где $\rho_{i(0)}=1$, $a\neq 0$.

Вместе с ВЦД (1.9) рассмотрим произвольную ей эквивалентную ветвящуюся цепную дробь

$$b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}} \tag{4.4}$$

и обозначим f^*_k, $\tilde{f}^*_k$ ее k-е подходящие дроби, определяемые по (1.11) и (1.14) соответственно. Из определения эквивалентности следует, что должно выполняться равенство

$$f_k=f^*_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Но этого еще не достаточно, чтобы дробь (4.4) приняла вид (4.2) при некоторых значениях $\rho_{i(k)}$ $(i_k=\overline{1,\ N},\ k=1,\ 2,\ldots)$.

Утверждение 1.5. Произвольное эквивалентное преобразование ВЦД (1.9) можно записать в виде (4.2) тогда и только тогда, когда у данной и ей эквивалентной дроби совпадают все фигурные подходящие дроби вида (1.14), т. е.

$$\tilde{f}_k = \tilde{f}_k^* \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.5}$$

Доказательство. Предположим, что произвольную дробь, эквивалентную ВЦД (1.9), можно представить в виде (4.2). Тогда, последовательно сокращая k-ю фигурную подходящую дробь $\tilde{f}_k^*$ ВЦД (4.2) на отличные от нуля числа $\rho_{i(p)}$ ($p = \overline{1, s}$, $i(p) \dashv r(s)$, s, r_1, r_2, $\ldots$, r_s определяются согласно (1.12)) легко убеждаемся в справедливости (4.5).

Докажем обратное, т. е. что существуют отличные от нуля числа $\rho_{i(k)}$, такие, что

$$a_{i(k)}^* = a_{i(k)}\rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)}, \quad b_{i(k)}^* = b_{i(k)}\rho_{i(k)}, \tag{4.6}$$

где $i_k = \overline{1, N}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho_{i(0)} = 1$. Действительно, из равенства $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_1^*$ следует, что $a_1/b_1 = a_1^*/b_1^*$ или $a_1^*/a_1 = b_1^*/b_1 = \rho_1$. Если $a_1^* = 0$ и $b_1^* \neq 0$, то необходимо $a_1 = 0$ и $b_1 \neq 0$. Тогда $\rho_1 = b_1^*/b_1 \neq 0$. Если $a_1^* = 0$, $b_1^* = 0$, то ρ_1 — произвольное, отличное от нуля число. Если же $b_1^* = 0$, $a_1^* \neq 0$, то $\rho_1 = a_1^*/a_1 \neq 0$. Поэтому $a_1^* = a_1\rho_1\rho_{i(0)}$, $b_1^* = b_1\rho_1$, где $\rho_{i(0)} = 1$, $\rho_1 \neq 0$. Из равенства $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2^*$ и уже доказанного следует, что $a_2^* = \rho_2\rho_{i(0)}a_2$, $b_2^* = b_2\rho_2$, где $\rho_2 \neq 0$ и т. д. Таким образом, формулы (4.6) при $k = 1$ справедливы.

Предполагая, что соотношения (4.6) верны при $k \leqslant n$, докажем их справедливость при $k = n + 1$. Пусть $m = N + N^2 + \cdots + N^n$, $I(m) = \underbrace{11\ldots1}_{m}$. Рассмотрим фигурную подходящую дробь $\tilde{f}_{m+1}^*$ и перепишем ее компоненты с учетом (4.6), где $k \leqslant n$. Выполняя постепенное сокращение сверху — вниз на отличные от нуля числа $\rho_{i(p)}$ ($p = \overline{1, n}$, $i_p = \overline{1, N}$) и используя равенство (4.5) при $k = m + 1$, получим

$$\frac{a_{I(m)}}{b_{I(m)} + \dfrac{a_{I(m+1)}}{b_{I(m+1)}}} = \frac{a_{I(m)}}{b_{I(m)} + \dfrac{a_{I(m+1)}^*/\rho_{I(m)}}{b_{I(m+1)}^*}},$$

откуда

$$\frac{a_{I(m+1)}}{b_{I(m+1)}} = \frac{a_{I(m+1)}^*/\rho_{I(m)}}{b_{I(m+1)}^*}, \qquad \frac{a_{I(m+1)}^*}{\rho_{I(m)}a_{I(m+1)}} = \frac{b_{I(m+1)}^*}{b_{I(m+1)}} = \rho_{I(m+1)}.$$

Поэтому

$$a^*_{l(m+1)} = a_{l(m+1)}\rho_{l(m)}\rho_{l(m+1)}, \quad b^*_{l(m+1)} = \rho_{l(m+1)}b_{l(m+1)},$$

где $\rho_{l(m+1)} \neq 0$. Учитывая равенство $\tilde{f}_{m+2} = \tilde{f}^*_{m+2}$ и уже доказанные соотношения для $a^*_{l(m+1)}$ и $b^*_{l(m+1)}$ аналогичным образом устанавливаются формулы

$$a^*_{l(m)2} = a_{l(m)2}\rho_{l(m)}\rho_{l(m)2}, \quad b^*_{l(m)2} = \rho_{l(m)2}b_{l(m)2}$$

и т. д. Легко завершаем доказательство теоремы, убедившись в справедливости (4.6), где $k = m + 1$. ■

Учитывая замечание после формулы (2.8), несложно доказать справедливость соотношений вида (11) для ветвящихся цепных дробей. Пусть $\tilde{A}^*_k$, $\tilde{B}^*_k$ — k-й числитель и k-й знаменатель дроби $\tilde{f}^*_k$. Тогда справедливы формулы

$$\tilde{A}^*_k = \rho^{(1)}\rho^{(2)} \cdots \rho^{(s)}\tilde{A}_k, \quad \tilde{B}^*_k = \rho^{(1)}\rho^{(2)} \cdots \rho^{(s)}\tilde{B}_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\rho^{(p)} = \prod_{i(p)} \rho_{i(p)} \; (p = \overline{1, k-1}), \; \rho^{(s)} = \prod_{s \preceq r(s)} \rho_{i(s)}$$

произведения берутся по всевозможным допустимым наборам индексов, s, r_1, r_2, $\ldots$, r_s определяются согласно (1.12), $\tilde{A}_k$, $\tilde{B}_k$ — согласно (2.6). В частности, из (2.2) следует, что

$$A^*_k = \rho^{(1)}\rho^{(2)} \cdots \rho^{(k)}A_k, \quad B^*_k = \rho^{(1)}\rho^{(2)} \cdots \rho^{(k)}B_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\rho^{(p)} = \prod\limits_{i(p)} \rho_{i(p)} \quad (p = \overline{1, k})$.

Если в (4.2) числа $\rho_{i(k)}$ подобрать специальным образом, то дробь (1.9) можно привести к более простому виду, не изменяя величин ее аппроксимант.

Так, если все $a_{i(k)} \neq 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$), то, подставляя в (4.2) $\rho_{i(k)}$, последовательно найденные из системы уравнений

$$a_{i(k)}\rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)} = 1 \quad (i_k = \overline{1, N}, \; k = 1, 2, \ldots, \; \rho_{i(0)} = 1), \quad (4.7)$$

получим ВЦД, эквивалентную (1.9), все частные числители которой равны единице [19]. Решение системы уравнений (4.7) запишется в виде

$$\rho_{i(k)} = \prod_{p=1}^{k} (a_{i(p)})^{(-1)^{k+p-1}} \quad (i_k = \overline{1, N}, \; k = 1, 2, \ldots). \quad (4.8)$$

Следовательно, если все $a_{i(k)} \neq 0$, то, подставив в (4.2) $\rho_{i(k)}$, вычисленные по формулам (4.8), получим ВЦД, эквивалентную (1.9)

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{d_{i(k)}}, \tag{4.9}$$

где

$$d_{i(k)} = b_{i(k)} \prod_{p=1}^{k} (a_{i(p)})^{(-1)^{k+p-1}} \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.10}$$

Если же все $b_{i(k)} \neq 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$), то, подставляя в (4.2)

$$\rho_{i(k)} = (b_{i(k)})^{-1} \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4.11}$$

преобразуем (1.9) к эквивалентной ВЦД с частными знаменателями, равными единице [19],

$$b + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}, \tag{4.12}$$

где

$$c_{i(k)} = a_{i(k)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k-1)}^{-1} \ (i_k = \overline{1, N}, k = 1, 2, \ldots,\ b_{i(0)} = 1). \tag{4.13}$$

§ 5. Последовательности областей элементов и областей значений

Рассмотрим последовательности непустых множеств $\{\Omega_{i(k)}\}$ и $\{V_{i(k)}\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geq 1$), где все $\varnothing \neq V_{i(k)} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ и $\varnothing \neq \Omega_{i(k)} \subseteq \hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость.

Последовательность $\{\Omega_{i(k)}\}$ называется последовательностью областей элементов, $\{V_{i(k)}\}$ — последовательностью областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$, для ВЦД

$$a_0 \left(b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \right)^{-1}, \tag{5.1}$$

если

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \in V_{i(k)} \tag{5.2}$$

для $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle \in \Omega_{i(k)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1)$,

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} v_{i(k+1)}} \in V_{i(k)} \qquad (5.3)$$

для произвольных $v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$ и $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle \in \Omega_{i(k)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1)$. Условие (5.3) с учетом обозначений (1.2), (1.3) в дальнейшем будем записывать в виде

$$t_{i(k)}(V^{(1)}_{i(k)}) \subseteq V_{i(k)}.$$

Если $\{V_{i(k)}\}$ — последовательность областей значений, соответствующих последовательности областей элементов $\{\Omega_{i(k)}\}$, и если для каждой последовательности $\{V'_{i(k)}\}$ областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$, имеем

$$V_{i(k)} \subseteq V'_{i(k)} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1),$$

то $\{V_{i(k)}\}$ называется наилучшей последовательностью областей значений.

Аналогично $\{\Omega_{i(k)}\}$ называется наилучшей последовательностью областей элементов, соответствующей последовательности областей значений $\{V_{i(k)}\}$, если для произвольной последовательности областей элементов $\{\Omega'_{i(k)}\}$, соответствующих $\{V_{i(k)}\}$, выполняются условия

$$\Omega'_{i(k)} \subseteq \Omega_{i(k)} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1).$$

Теорема 1.2. *Пусть $\{\Omega_{i(k)}\}$ — некоторая последовательность областей элементов и $\{V_{i(k)}\}$ — некоторая последовательность соответствующих областей значений. Тогда*

1) *для произвольного $m \geqslant k$*

$$\frac{a_{i(k)}}{Q^{(m)}_{i(k)}} \in V_{i(k)} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1), \qquad (5.4)$$

если $\langle a_{i(p)}, b_{i(p)}\rangle \in \Omega_{i(p)}$ $(k \leqslant p \leqslant m, i_0=0, i_p=\overline{1, N}, p=\overline{k, m})$ и $Q^{(m)}_{i(k)}$ определяются согласно (3.1), причем $Q^{(0)}_{i(0)}=b_0$;

2) *последовательность*

$$W_{i(k)} = \left\{\frac{a_{i(k)}}{Q^{(m)}_{i(k)}} : \langle a_{i(p)}, b_{i(p)}\rangle \in \Omega_{i(p)}, p=\overline{k, m}, i_p=\overline{1, N}\right\} \qquad (5.5)$$

$(k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1, m \geqslant k$ — произ-

вольное) является последовательностью наилучших областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$.

Доказательство. 1. При $m=k$ согласно (3.1) $Q_{i(k)}^{(k)}=b_{i(k)}$ и (5.4) совпадает с (5.2). Для доказательства (5.4) используем метод математической индукции по $p=m-k$. Пусть $a_{i(r)}/Q_{i(r)}^{(s)}\in V_{i(r)}$ для произвольных наборов индексов, таких, что $s-r\leqslant p$. Тогда $a_{i(n)}/Q_{i(n)}^{(j)}\in V_{i(n)}$, где индексы произвольные и $j-n=p+1$. Действительно, согласно (3.1) имеем

$$\frac{a_{i(n)}}{Q_{i(n)}^{(j)}}=\frac{a_{i(n)}}{b_{i(n)}+\sum\limits_{i_{n+1}=1}^{N}\frac{a_{i(n+1)}}{Q_{i(n+1)}^{(j)}}}.$$

Остается учесть предположение индукции и свойство (5.3) областей значений.

2. То, что последовательность $\{W_{i(k)}\}$ является последовательностью областей значений, сразу следует из (5.3) и (3.1). Если $\{V_{i(k)}\}$ — произвольная последовательность областей значений, соответствующих $\{\Omega_{i(k)}\}$, то из (5.4) следует, что

$$W_{i(k)}\subseteq V_{i(k)}.$$

Поэтому $\{W_{i(k)}\}$ — наилучшая последовательность областей значений. ■

Обозначим K множество

$$K=\{V:V\subseteq\hat{\mathbb{C}},\ V\text{ — замкнутое множество, } \partial V\text{ — окружность либо прямая}\}.$$

Теорема 1.3. *Пусть* $\{\Omega_{i(k)}\}$ *— последовательность областей элементов,* $\{V_{i(k)}\}$ *— соответствующая последовательность областей значений и введены обозначения*

$$K_n=T_n(V^{(n+1)})\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где T_n *определяются по рекуррентной формуле (1.5),*

$$t_0(V^{(1)})=a_0(b_0+V_1+V_2+\cdots+V_N)^{-1},$$
$$t_{i(k)}(V_{i(k)}^{(1)})\quad(i_k=\overline{1,\ N},\ k=\overline{1,\ n})$$

определяются согласно (1.2), $V_{i(k)}^{(r)}$ *вводятся аналогично (1.3). Тогда*

1) $\qquad K_{n+1}\subseteq K_n\subseteq V_0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots);\qquad$ (5.6)

2) пусть $V_{i(k)}\in K$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0=0,\ i_k=\overline{1,\ N},$

$k \geqslant 1$), причем для каждого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ выполняется одно из условий:

а) все $V_{i(k)}$ ($i_k = \overline{1, N}$) — замкнутые круги,

б) если существует i_k, что $V_{i(k)}$ — внешность круга, то все остальные $V_{i(k-1)j}$ ($j = \overline{1, N}$, $j \neq i_k$) обязательно замкнутые круги, причем

$$r_{i(k)} > \sum_{j=1,\, j \neq i_k}^{N} r_{i(k-1)j},$$

где $r_{i(k)}$ — радиусы кругов в соответствующих областях

в) $V_{i(k)}$ ($i_k = \overline{1, N}$) либо круг, либо полуплоскость, причем угол наклона всех полуплоскостей к действительной оси один и тот же.

Если при некотором n_0 множество K_{n_0} является замкнутым кругом, то все K_n ($n \geqslant n_0$) — замкнутые круги.

Пусть R_n и C_n обозначают радиус и центр круга K_n, тогда существуют пределы

$$\lim_{n \to \infty} R_n = R, \quad \lim_{n \to \infty} C_n = C.$$

Доказательство. 1. Используя обозначения (1.3) и (1.5), имеем

$$K_{n+1} = T_{n+1}(V^{(n+2)}) =$$
$$= T_n\left(\frac{a^{(n+1)}}{b^{(n+1)} + {}_1V^{(n+1)} + {}_2V^{(n+1)} + \cdots + {}_NV^{(n+1)}}\right),$$

где ${}_kV^{(n+1)}$ — вектор вида (1.3) с фиксированным последним индексом k, т. е.

$${}_kV^{(n+1)} = (V_{\underbrace{11\ldots1}_{n+1}k}, V_{\underbrace{1\ldots12}_{n+1}k}, \ldots, V_{\underbrace{NN\ldots N}_{n+1}k}).$$

Для каждой компоненты вектора

$$\frac{a^{(n+1)}}{b^{(n+1)} + {}_1V^{(n+1)} + {}_2V^{(n+1)} + \cdots + {}_NV^{(n+1)}}$$

в силу (5.3) выполняется условие

$$\frac{a_{i(n+1)}}{b_{i(n+1)} + V_{i(n+1)1} + V_{i(n+1)2} + \cdots + V_{i(n+1)N}} \subseteq V_{i(n+1)},$$

откуда следует (5.6).

2. Выполнение условий а), б), в) гарантирует то, что $K_n \in K$. Из (5.6) следует, что R_n монотонно убывает для $n \geqslant n_0$. Из неравенства

$$|C_{n+m} - C_n| \leqslant R_{n+m} - R_n$$

следует, что существует $\lim C_n$ при $n \to \infty$.

Следующая теорема указывает, как построить $\{\Omega_{i(k)}\}$ по заданной последовательности $\{V_{i(k)}\}$, когда все $V_{i(k)}$ — круги.

Теорема 1.4. *Пусть* $\{V_{i(k)}\}$ — *последовательность кругов*

$$V_{i(k)} = \{w \in \mathbf{C} : |w - \Gamma_{i(k)}| \leqslant \rho_{i(k)}\}, \quad |\Gamma_{i(k)}| < \rho_{i(k)} \tag{5.7}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1,\ N},\ k \geqslant 1)$$

и

$$\Omega_{i(k)} = \{\langle a_{i(k)},\ b_{i(k)}\rangle : |a_{i(k)}(\bar{b}_{i(k)} + \bar{\Gamma}^*_{i(k)}) -$$
$$- \Gamma_{i(k)}(|b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)}|^2 - \rho^{*2}_{i(k)})| + |a_{i(k)}|\rho^*_{i(k)} \leqslant \rho_{i(k)}(|b_{i(k)} +$$
$$+ \Gamma^*_{i(k)}|^2 - \rho^{*2}_{i(k)})\ (k = 0,\ 1,\ \dots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1,\ N},\ k \geqslant 1), \tag{5.8}$$

где $\Gamma^*_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \Gamma_{i(k+1)},\ \rho^*_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)}.$

Тогда $\{V_{i(k)}\}$ *является последовательностью областей значений, соответствующих последовательности областей элементов* $\{\Omega_{i(k)}\}$.

Доказательство. Все $\Omega_{i(k)} \neq \varnothing$, так как в силу второго неравенства в (5.7) неравенство (5.8) выполняется при $a_{i(k)} = 0$. Из (5.8) следует, что необходимо $|b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)}| \geqslant \geqslant \rho^*_{i(k)}$. Если $a_{i(k)} \neq 0$, то

$$|b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)}| > \rho^*_{i(k)}. \tag{5.9}$$

Область $S_{i(k)} = b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} V_{i(k+1)}$, где рассматривается арифметическая сумма множеств $V_{i(k+1)}$, является кругом с центром в точке $b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)}$ и радиусом $\rho^*_{i(k)}$. Условие (5.9) гарантирует то, что $0 \notin S_{i(k)}$, если $a_{i(k)} \neq 0$.

Следовательно, множество $1/S_{i(k)}$ является кругом. Если $\gamma_{i(k)} = \arg(b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)})$, то точки

$$c_{i(k)} = b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)} - \rho^*_{i(k)} \exp(i\gamma_{i(k)}),$$
$$d_{i(k)} = b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)} + \rho^*_{i(k)} \exp(i\gamma_{i(k)})$$

являются концами диаметра круга $S_{i(k)}$ и поэтому в силу конформности дробно-линейного отображения, точки $1/c_{i(k)}$, $1/d_{i(k)}$ являются концами диаметра круга $1/S_{i(k)}$.

Рассмотрим круг $a_{i(k)}/S_{i(k)}$ и обозначим $p_{i(k)}$ и $q_{i(k)}$ его радиус и центр соответственно. Учитывая значения для $c_{i(k)}$ и $d_{i(k)}$, имеем

$$p_{i(k)} = \frac{|a_{i(k)}|\rho^*_{i(k)}}{|b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)}|^2 - \rho^{*2}_{i(k)}}, \quad q_{i(k)} = \frac{a_{i(k)}(\bar{b}_{i(k)} + \bar{\Gamma}^*_{i(k)})}{|b_{i(k)} + \Gamma^*_{i(k)}|^2 - \rho^{*2}_{i(k)}}.$$

Для выполнения условий (5.3) необходимо, чтобы

$$|\Gamma_{i(k)} - q_{i(k)}| + p_{i(k)} \leqslant \rho_{i(k)}.$$

После несложных вычислений отсюда получаем (5.8). ■

Теорема 1.5. *Пусть* $\{V_{i(k)}\}$ *— последовательность полуплоскостей*

$$V_{i(k)} = \{w : \operatorname{Re}(w \exp(-i\psi_k)) \geqslant -p_{i(k)}\}, \quad p_{i(k)} > 0$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1,\ N},\ k \geqslant 1) \tag{5.10}$$

и

$$\Omega_{i(k)} = \{\langle a_{i(k)},\ b_{i(k)}\rangle : |a_{i(k)}| - \operatorname{Re}(a_{i(k)} \exp(-i(\psi_k + \psi_{k+1})) \leqslant$$
$$\leqslant 2p_{i(k)} [\operatorname{Re}(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})) - p^*_{i(k)}]$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1,\ N},\ k \geqslant 1), \tag{5.11}$$

где $p^*_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} p_{i(k+1)}, \quad -\pi < \psi_k \leqslant \pi \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$

Тогда $\{V_{i(k)}\}$ *является последовательностью областей значений, соответствующих последовательности областей элементов* $\{\Omega_{i(k)}\}$.

Доказательство. Условия

$$\operatorname{Re}(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})) \geqslant p^*_{i(k)} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,$$
$$i_0 = 0,\ i_k = \overline{1,\ N},\ k \geqslant 1) \tag{5.12}$$

являются необходимыми для того, чтобы область (5.11) имела смысл. Если справедливо (5.12), то неравенства (5.11) выполняются, когда $a_{i(k)} = 0$ и поэтому $\Omega_{i(k)} \neq \varnothing$.

Пусть

$$\operatorname{Re}(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})) = p^*_{i(k)}. \tag{5.13}$$

Тогда

$$t_{i(k)}(V^{(1)}_{i(k)}) = \{w : \operatorname{Re}(w \exp i(\psi_{k+1} - \arg a_{i(k)})) \geqslant 0\}. \tag{5.14}$$

При выполнении равенства (5.13) область (5.11) будет непустым множеством лишь в том случае, если $\arg a_{i(k)} = \psi_k + \psi_{k+1}$. Выполнение последнего равенства с учетом (5.14) гарантирует включение (5.3). Так как $0 \in V_{i(k+1)}$, то отсюда следует справедливость (5.2).

Пусть

$$\operatorname{Re}(b_{i(k)} \exp(-i\psi_{k+1})) > p^*_{i(k)}.$$

Легко посчитать, что в этом случае

$$t_{i(k)}(V^{(1)}_{i(k)}) = \{w \in \mathbb{C} : |w - c_{i(k)}| < \rho_{i(k)}\},$$

где

$$\rho_{i(k)} = \frac{|a_{i(k)}|}{2\,[\operatorname{Re}(b_{i(k)}\exp(-i\psi_{k+1})) - p^*_{i(k)}]},$$
$$c_{i(k)} = \rho_{i(k)}\exp(i(\arg a_{i(k)} - \psi_{k+1})).$$

Тогда условие (5.3) будет выполняться, если $c_{i(k)} \in V_{i(k)}$ и для расстояния от точки $c_{i(k)}$ до границы области $V_{i(k)}$ справедливо неравенство $\min(|c_{i(k)} - v_{i(k)}|, v_{i(k)} \in \partial V_{i(k)}) \geqslant \rho_{i(k)}$. Подставляя значение для $c_{i(k)}$ в (5.10), получим

$$-\operatorname{Re}[a_{i(k)}\exp(-i(\psi_k + \psi_{k+1})) \leqslant$$
$$\leqslant p_{i(k)}[\operatorname{Re}(b_{i(k)}\exp(-i\psi_{k+1})) - p^*_{i(k)}].$$

Это неравенство следует из (5.11). Обозначим $d_{i(k)}$ точку из $\partial V_{i(k)}$, для которой

$$|d_{i(k)} - c_{i(k)}| = \min(|c_{i(k)} - v_{i(k)}|,\ v_{i(k)} \in \partial V_{i(k)}).$$

Несложно проверить, что

$$d_{i(k)} = \exp(i\psi_k)[-p_{i(k)} + i\operatorname{Im}(c_{i(k)}\exp(-i\psi_k)]$$

и

$$|d_{i(k)} - c_{i(k)}| = \rho_{i(k)}\cos(\arg a_{i(k)} - \psi_{k+1} - \psi_k) + p_{i(k)}.$$

Неравенство $|d_{i(k)} - c_{i(k)}| \geqslant \rho_{i(k)}$ эквивалентно (5.11).■

Области элементов для ВЦД

$$a_0\left(1 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1} \tag{5.15}$$

обозначим $E_{i(k)}$, т. е. предположим, что

$$a_{i(k)} \in E_{i(k)} \subseteq \mathbb{C}\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1).$$

Аналогично через $G_{i(k)}$ будем обозначать области элементов ВЦД

$$\left(b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}. \tag{5.16}$$

Приведем некоторые следствия теорем 1.4 и 1.5.

Следствие 1.1. Множества

$$V_{i(k)} = \left\{w : |w| \leqslant \frac{1}{2N}\right\}\quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1),$$

$$E_{i(k)} = \left\{ w : |w| \leqslant \frac{1}{4N} \right\} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1)$$

являются соответствующими областями значений и областями элементов ВЦД (5.15).

Следствие 1.2. Множества

$$V_{i(k)} = \left\{ w : |w| \leqslant \frac{1}{N} \right\},$$
$$\Omega_{i(k)} = \{\langle a_{i(k)},\ b_{i(k)} \rangle : |b_{i(k)}| \geqslant N\,|a_{i(k)}| + 1\}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1)$$

являются соответствующими областями значений и областями элементов ВЦД (5.1).

Следствие 1.3. Множества

$$V_{i(k)} = \{w : |w| \leqslant \rho_{i(k)}\},$$
$$G_{i(k)} = \left\{ w : |w| \geqslant \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \rho_{i(k+1)} + \frac{1}{\rho_{i(k)}} \right\}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1)$$

являются соответствующими областями значений и областями элементов для ВЦД (5.16).

Следствие 1.4. Множества

$$V_{i(k)} = V(\alpha) = \left\{ w : \operatorname{Re}(w \exp(-i\alpha) \geqslant -\frac{1}{2N} \cos\alpha \right\},$$
$$E_{i(k)} = E(\alpha) = \left\{ w : |w| - \operatorname{Re}(w \exp(-2i\alpha)) \leqslant \frac{1}{2N} \cos^2\alpha \right\}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1),$$

где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, являются соответствующими областями значений и областями элементов ВЦД (5.15).

Множество $E(\alpha)$ является параболической областью, ограниченной параболой, проходящей через точку $-\frac{1}{4N}$ с осью вдоль луча $\arg w = 2\alpha$ и фокусом в точке $-\frac{1}{4N} \times$ $\times \cos^2\alpha \exp(i2\alpha)$.

Рассмотрим вопрос о наилучших областях элементов.

Теорема 1.6. *Пусть* $\{V_{i(k)}\}$ — *заданная последовательность областей из* $\hat{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющая условию: если*

$$-1\in\sum_{i_{k+1}=1}^{N}V_{i(k+1)},\ \text{то}\ \infty\in V_{i(k)}\ \text{и если}\ \infty\in\sum_{i_{k+1}=1}^{N}V_{i(k+1)},$$

то $0\in V_{i(k)}$, *где рассматривается арифметическая сумма областей.*

Пусть

$$E^*_{i(k)}=\bigcap_{w}\{(1+w)V_{i(k)}:w\in V^*_{i(k)}\overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=}\sum_{i_{k+1}=1}^{N}V_{i(k+1)}\diagdown\{-1,\ \infty\}\}\bigcap V_{i(k)},\tag{5.17}$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0=0,\ i_k=\overline{1,\ N},\ k\geqslant 1,\ \{-1,\ \infty\}$ — *множество, состоящее из двух точек* -1 *и* ∞.

Если все $E^*_{i(k)}\neq\varnothing$, *то*

1) последовательность $\{V_{i(k)}\}$ *является последовательностью областей значений, соответствующих последовательности областей элементов* $\{E^*_{i(k)}\}$ *для ВЦД (5.15);*

2) $\{E^*_{i(k)}\}$ — *наилучшая последовательность областей элементов, соответствующая последовательности областей значений* $\{V_{i(k)}\}$.

Доказательство. Условие $E^*_{i(k)}\neq\varnothing$ является необходимым для областей элементов. Из определения $E^*_{i(k)}$ следует, что $E^*_{i(k)}\subseteq V_{i(k)}$. Таким образом, условие (5.2) выполняется.

Пусть $a_{i(k)}\in E^*_{i(k)}$, $a_{i(k)}\neq 0$, то для произвольного $w\in V^*_{i(k)}$ существует $u_w\in V_{i(k)}$, что $a_{i(k)}=u_w(1+w)$. Следовательно, для произвольных $w_{i(k+1)}\in V_{i(k+1)}$ таких, что

$$w=\sum_{i_{k+1}=1}^{N}w_{i(k+1)}\neq -1,\ \infty,$$

имеем

$$\frac{a_{i(k)}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N}w_{i(k+1)}}=\frac{a_{i(k)}}{1+w}=\frac{uw\,(1+w)}{1+w}=u_w\in V_{i(k)}.$$

С учетом условий теоремы получим $t_{i(k)}(V^{(1)}_{i(k)})\subseteq V_{i(k)}$. Таким образом, пункт 1) доказан.

Докажем пункт 2). Пусть $\{E'_{i(k)}\}$ — произвольная последовательность областей элементов, соответствующих областям значений $\{V_{i(k)}\}$. Тогда согласно (5.2) имеем $E'_{i(k)} \subset V_{i(k)}$. Из (5.3) следует, что для произвольного $a_{i(k)} \in E'_{i(k)}$ и произвольных $w_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$

$$\frac{a_{i(k)}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} w_{i(k+1)}} \in V_{i(k)}.$$

Следовательно, $E_{i(k)} \subseteq E^*_{i(k)}$ для всех наборов индексов. ■

Теорема 1.7. *Пусть* $\{V_{i(k)}\}$ — *заданная последовательность областей из* $\hat{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющая условию, если*

$$\infty \in \sum_{i_{k+1}=1}^{N} V_{i(k+1)}, \text{ то } 0 \in V_{i(k)}$$

и пусть

$$G^*_{i(k)} = \bigcap_{w} \left\{\frac{1}{V_{i(k)}} - w : w \in V^{*}_{i(k)} \overset{DF}{=} \sum_{i_{k+1}=1}^{N} V_{i(k+1)} - \{\infty\}\right\} \cap \frac{1}{V_{i(k)}}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1). \qquad (5.18)$$

Если все $G^*_{i(k)} \neq \varnothing$, *то*

1) последовательность $\{V_{i(k)}\}$ *является последовательностью областей значений, соответствующих последовательности областей элементов* $\{G^*_{i(k)}\}$ *для ВЦД (5.16);*

2) $\{G^*_{i(k)}\}$ — *наилучшая последовательность областей элементов, соответствующих последовательности областей значений* $\{V_{i(k)}\}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Действительно, из определения (5.18) следует, что $G^*_{i(k)} \subseteq 1/V_{i(k)}$, поэтому $1/b_{i(k)} \in V_{i(k)}$ и, таким образом, выполняется (5.2).

Пусть $b_{i(k)} \in G^*_{i(k)}$, тогда для произвольного $w \in V^*_{i(k)}$ существует $u_w \in V_{i(k)}$, что $b_{i(k)} = (1/u_w) - w$.

Следовательно, для произвольных $w_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$, таких, что

$$w = \sum_{i_{k+1}=1}^{N} w_{i(k+1)} \neq \infty,$$

имеем

$$\left(b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} w_{i(k+1)}\right)^{-1} = (b_{i(k)} + w)^{-1} = u_w \in V_{i(k)}.$$

Поэтому $t_{i(k)}(V^{(1)}_{i(k)}) \subseteq V_{i(k)}$.

Пусть $\{G'_{i(k)}\}$ — произвольная последовательность областей элементов, соответствующих последовательности областей значений $\{V_{i(k)}\}$. Тогда согласно (5.2) имеем $G'_{i(k)} \subseteq 1/V_{i(k)}$. Из (5.3) следует, что для произвольного $b_{i(k)} \in G'_{i(k)}$ и произвольных $w_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$

$$b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} w_{i(k+1)} \in \frac{1}{V_{i(k)}}.$$

Следовательно, $G_{i(k)} \subseteq G^*_{i(k)}$. ■

Следствие 1.5. Для того чтобы последовательность $\{V_{i(k)}\}$, удовлетворяющая условиям теорем 1.6 или 1.7 была последовательностью областей значений, соответствующих последовательности областей элементов $\{E_{i(k)}\}$ для ВЦД (5.15) или $\{G_{i(k)}\}$ для ВЦД (5.16), необходимо и достаточно, чтобы все $E^*_{i(k)} \neq \varnothing$ или все $G^*_{i(k)} \neq \varnothing$ соответственно, где $E^*_{i(k)}$, $G^*_{i(k)}$ определяются в терминах $\{V_{i(k)}\}$ согласно (5.17) или (5.18).

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Проблема сходимости цепных или ветвящихся цепных дробей заключается в том, чтобы на основании информации о коэффициентах дроби сделать вывод о ее сходимости или расходимости. Используя особые свойства сходимости голоморфных функций [22], эту задачу можно несколько упростить. Если, например, подходящие дроби являются голоморфными функциями в области D, то для доказательства равномерной сходимости дроби внутри D достаточно доказать равномерную ограниченность внутри этой области и исследовать сходимость на некотором подмножестве D. У Стилтьеса [60] в качестве подмножества рассматривается круг, у Витали [99] — бесконечное множество точек, имеющее предельную точку внутри области D. Дальнейшим развитием вопросов сходимости голоморфных функций является введение Монтелем так называемого нормального семейства аналитических функций [42].

Методика исследования сходимости последовательности голоморфных функций одного переменного в принципе переносится и на функции многих переменных. Трудности, которые здесь возникают, в основном связаны с теоремой единственности. Монтель [42] исследовал нормальные семейства аналитических функций двух переменных.

В работах А. А. Гончара и Е. А. Рахманова (см., например, [53]) эти результаты получили дальнейшее развитие. Из сходимости по емкости внутри области делается заключение о равномерной сходимости последовательности голоморфных или мероморфных функций внутри области. А. А. Гончар в работе [24] установил принципиальный результат: из голоморфности диагональных аппроксимаций Паде внутри области, удовлетворяющей некоторым дополнительным ограничениям, следует их равномерная сходимость внутри этой области. Эти соображения переносятся и на некоторые типы функциональных цепных дробей, например на дроби Чебышева, присоединенные цепные дроби. Однако в общем случае аналогичное утверждение для цепных дробей неверно: из голоморфности еще не следует сходимость. В качестве контрпримера достаточно взять S-дробь

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \frac{z}{b_k},$$

где $b_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, z принадлежит произвольному компакту области $G = \{z \in \mathbf{C}\colon z \neq 0, |\arg z| < \pi\}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда для этой дроби существуют конечные пределы четных и нечетных подходящих дробей.

Следовательно, общие методы исследования сходимости последовательности голоморфных функций упрощают, но не снимают проблему сходимости цепных или ветвящихся цепных дробей. Поэтому задача исследования сходимости, по крайней мере локальной, цепных дробей или их многомерных обобщений с учетом структурных особенностей этого аппарата является актуальной. Кроме того, условия голоморфности подходящих дробей тоже желательно формулировать на языке элементов цепных или ветвящихся цепных дробей.

При исследовании сходимости непрерывных дробей существенно используются линейные рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей и тот факт, что дробно-линейные отображения, лежащие в основе построения дроби, образуют группу, если в качестве групповой операции рассматривать композицию отображений.

Для ВЦД рекуррентные соотношения, аналогичные (8), несправедливы. Совокупность многомерных дробно-линейных отображений тоже не образует группы. Таким образом, разработка общих методов исследования сходимости ВЦД является актуальной задачей.

В работе С. Б. Стечкина и П. Л. Ульянова [59] изложены результаты, посвященные сходимости рядов, где по поведению подпоследовательности частных сумм на некотором подмножестве E делается заключение о поведении на этом подмножестве или на всем E всех частных сумм. Эти исследования представляют для нас большой интерес, так как условия сходимости или расходимости ветвящихся цепных дробей, как правило, формулируются на языке расходимости или сходимости рядов, составленных определенным образом из элементов дроби.

В § 1 определены различные виды сходимости ВЦД, доказаны две теоремы о взаимосвязи безусловной и фигурной сходимости с обычной сходимостью для ВЦД с положительными членами.

В § 2 дано определение и рассмотрены примеры максимантной и мажорантной ВЦД, дано определение аналога фундаментальных неравенств. Эти методы будут применяться при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей с комплексными компонентами.

При исследовании сходимости ВЦД с положительными элементами используются некоторые специальные неравенства, доказательству которых посвящен § 3. Эти неравенства представляют также самостоятельный интерес. В работах Р. И. Михальчука для них установлены континуальные аналоги.

В § 4, используя схему доказательства теоремы Монтеля, изложенную в первом издании учебника Б. В. Шабата [70, 71], приведено доказательство многомерного аналога этой теоремы.

§ 1. Различные виды сходимости ВЦД

Рассмотрим ВЦД с числовыми комплексными элементами

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \qquad (1.1)$$

Впредь будем всегда предполагать, говоря о различных видах сходимости ветвящихся цепных дробей, что все их подходящие дроби имеют смысл или лишь конечное число подходящих дробей не имеет смысла.

Говорят, что ВЦД (1.1) сходится, если существует и конечен предел последовательности ее подходящих дробей (1.11) гл. 1. Величину этого предела будем называть значением бесконечной дроби (1.1). Ветвящаяся цепная дробь (1.1) расходится, если бесконечное число ее подходящих дробей не имеет смысла или не существует единого конечного предела последовательности $\{f_k\}$, или $\lim f_k = \infty$ при $k \to \infty$. Из свойства вилки (3.4) гл. 1 следует предложение.

Предложение 2.1 [57]. ВЦД (1.1) с действительными положительными компонентами сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} (f_{2k+1} - f_{2k}) = 0.$$

Иногда удобно рассматривать более общее понятие сходимости ВЦД, которое, следуя О. Перрону [87], назовем сходимостью в широком смысле. Будем говорить, что ВЦД (1.1) сходится в широком смысле, если существует предел последовательности (1.11) гл. 1 при $n \to \infty$ (возможно, равный бесконечности)

Ветвящиеся цепные дроби вида

$$r_{i(m)} = b_{i(m)} + \underset{k=m+1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{1.2}$$

$(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ i_m = \overline{1, N})$ называются m-ми остатками ВЦД (1.1).

Ветвящаяся цепная дробь (1.1) называется безусловно сходящейся, если сама дробь (1.1) сходится и все ее m-е остатки (1.2) сходятся $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ i_m = \overline{1, N})$. Если ВЦД (1.1) сходится, а некоторые ее остатки расходятся, то она называется условно сходящейся.

Теорема 2.1 [5]. *Для ВЦД (1.1), у которой элементами являются действительные положительные числа, безусловная сходимость эквивалентна обычной сходимости.*

Доказательство. Необходимо только доказать, что из сходимости ВЦД (1.1) следует сходимость всех ее m-х остатков (1.2), где $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, m}$.

Рассмотрим ветвящуюся цепную дробь

$$b_{i(1)} + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \quad (i_1 = \overline{1, N}) \tag{1.3}$$

и обозначим ее n-е аппроксиманты $f_{i_1}^{(n)}$. Из свойства вилки (3.4) гл. 1 для ВЦД (1.3) следует, что существуют конечные пределы

$$\lim_{m\to\infty} f_{i(1)}^{(2m)} = G_{i(1)}, \quad \lim_{m\to\infty} f_{i(1)}^{(2m+1)} = F_{i(1)}$$

и выполняются неравенства

$$G_{i(1)} \leqslant F_{i(1)} \quad (i_1 = \overline{1, N}). \tag{1.4}$$

Так как ВЦД (1.1) сходится, то

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{F_{i(1)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{G_{i(1)}}.$$

Следовательно, в силу (1.4) для произвольного i_1 $(i_1 = \overline{1, N})$ $F_{i(1)} = G_{i(1)}$, что эквивалентно сходимости ВЦД (1.3). Аналогично доказывается сходимость ВЦД (1.2) для произвольного натурального m и произвольного набора индексов $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m$.

Будем говорить, что ВЦД (1.1) сходится абсолютно, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|, \tag{1.5}$$

составленный из ее подходящих дробей (1.11) гл. 1.

Пусть $\{\Phi_k^*\}$ — некоторым образом упорядоченная последовательность произвольных фигурных подходящих дробей ВЦД (1.1). Возможно, $\tilde{\Phi}_k = \tilde{f}_k$ или $\tilde{\Phi}_k = \tilde{F}_k$ (см. (1.14), (1.15), гл. 1), но не обязательно. Обозначим m_k и M_k минимальную и максимальную длины ветвей подходящей дроби $\tilde{\Phi}_k$. Предлагается, что $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Будем говорить, что ВЦД (1.1) сходится фигурно, если все $\tilde{\Phi}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеют смысл или лишь конечное число $\tilde{\Phi}_k$ не имеет смысла, минимальная длина m_k веток k-й фигурной подходящей дроби стремится к бесконечности при $k \to \infty$, существует и конечен предел последовательности $\tilde{\Phi}_k$ при $k \to \infty$.

Остановимся вкратце на взаимосвязи фигурной и обычной сходимости для ветвящихся цепных дробей с положительными членами.

Теорема 2.2 [3]. *Если ВЦД (1.1) с положительными действительными компонентами сходится, то она сходится фигурно и к тому же пределу.*

Доказательство. Рассмотрим конечную ВЦД

$$f_{2p+1} = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{2p+1} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b'_{i(k)}}, \tag{1.6}$$

где $b'_{i(k)} = b_{i(k)}$ $(k \leqslant 2p)$ и $b'_{i(2p+1)} \geqslant b_{i(2p+1)}$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, 2p+1})$.

Для ВЦД (1.6) по аналогии с (3.1) гл. 1 введем сокращенные обозначения $\hat{Q}_{i(k)}^{(2p+1)}$. Методом математической индукции легко проверить, что

$$\hat{Q}_{i(2k+1)}^{(2p+1)} \geqslant Q_{i(2k+1)}^{(2p+1)} \quad (k = \overline{0, m}).$$

Поэтому $f'_{2p+1} \leqslant f_{2p+1}$. Из свойства вилки (3.4) гл. 1 следует, что $f_{2p} \leqslant f'_{2p+1}$.

Для произвольного сколь угодно большого номера k существует такой номер p, зависящий от k, что для всех $n \geqslant k$ справедлива оценка

$$f_{2p} < \tilde{f}_n \leqslant f_{2p+1}. \tag{1.7}$$

Число p выбираем из условия

$$2p+1 \leqslant \min(m_n : n \geqslant k) \leqslant 2p+2.$$

Так как $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то и $p \to \infty$ при $n \to \infty$.

Оценка (1.7) следует из предыдущих рассуждений, если ввести соответствующие переобозначения таким образом, чтобы $\tilde{f}_n = f'_{2p+1}$. Поэтому из обычной сходимости в силу предложения 2.1 вытекает, что ВЦД (1.1) сходится фигурно и к тому же пределу. ■

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве контрпримера достаточно взять ВЦД с положительными действительными членами, фигурные подходящие дроби которой совпадают с четными или нечетными подходящими дробями. Пределы четных или нечетных подходящих дробей всегда существуют, сама же дробь может сходиться или расходиться.

Замечание 2.1. Если $\Phi_k = \tilde{f}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $\tilde{f}_k$-я фигурная подходящая дробь определяется согласно (1.14) гл. 1, то в силу теоремы 2.2 и соотношений (2.1) гл. 1 сходимость ВЦД (1.1) с положительными членами эквивалентна обычной сходимости.

Пусть $b_0(z)$, $a_{i(k)}(z)$, $b_{i(k)}(z)$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$ — некоторый набор комплексных функций, определенных в области $D \subset \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Рассмотрим функциональную ВЦД

$$b_0(z) + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)} \tag{1.8}$$

и обозначим $f_k(z)$ ее k-ю аппроксиманту, $A_k(z)$, $B_k(z)$ — k-й числитель и знаменатель соответственно.

Будем говорить, что ВЦД (1.8) равномерно сходится на множестве $E \subset D$, если начиная с некоторого номера n_0 всюду на E $B_k(z) \neq 0$ $(k \geqslant n_0)$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_1 \geqslant n_0$, что для всех n, $m \geqslant n_1$ и произвольного $z \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Если все сказанное выше справедливо для произвольного множества $E \Subset D$, то говорят, что ВЦД (1.8) равномерно сходится внутри области D. Здесь символ $E \Subset D$ означает, что $\overline{E} \subset D$, где $\overline{E}$ — замыкание E.

§ 2. Метод мажорант. Аналог метода фундаментальных неравенств

Для того чтобы убедиться в естественности приведенных ниже определений, изложенных в работе [10], вспомним, что мажорантным рядом для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \tag{2.1}$$

где $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — комплексные функции комплексного переменного z, заданные в некоторой области D, называется числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{2.2}$$

где $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, такие, что

$$|f_k(z)| \leqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Если обозначить S_n и s_n n-е частные суммы рядов (2.1) и (2.2), то условие (2.3) можно переписать следующим образом:

$$|S_k - S_{k-1}| \leqslant |s_k - s_{k-1}| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Определение (2.4) естественно обобщается и на ветвящиеся цепные дроби, если под S_k и s_k подразумевать k-е подходящие дроби данной и мажорантной ВЦД соответственно.

Ветвящаяся цепная дробь

$$d_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N_1} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}} \tag{2.5}$$

с числовыми комплексными элементами называется максимантой (минимантой) ВЦД (1.1) или (1.8), если для произвольного неотрицательного целого числа k справедливо соотношение

$$|f_k| \leqslant |g_k| \quad (|f_k| \geqslant |g_k|) \tag{2.6}$$

или

$$|f_k(z)| \leqslant |g_k| \quad (|f_k(z)| \geqslant |g_k|), \tag{2.7}$$

где $N_1 \in \mathbb{N}$, не обязательно равное N, и f_k, $f_k(z)$, g_k — k-е аппроксиманты ВЦД (1.1), (1.8) и (2.5) соответственно.

Пример 2.1. Несложно проверить, что максимантами ВЦД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{2.8}$$

с действительными положительными элементами являются цепные дроби, т. е. $N_1 = 1$, вида

$$b_0 + \frac{N}{\alpha_1} + \frac{N}{\beta_2} + \frac{N}{\alpha_3} + \frac{N}{\beta_4} + \cdots \tag{2.9}$$

или

$$b_0 + \frac{N}{0} + \frac{N}{\beta_2} + \frac{N}{0} + \frac{N}{\beta_4} + \cdots , \tag{2.10}$$

а минимантами — цепные дроби вида

$$b_0 + \frac{N}{\beta_1} + \frac{N}{\alpha_2} + \frac{N}{\beta_3} + \frac{N}{\alpha_4} + \cdots \tag{2.11}$$

или

$$b_0 + \frac{N}{\beta_1} + \frac{N}{0} + \frac{N}{\beta_3} + \frac{N}{0} + \cdots , \tag{2.12}$$

где N — число веток ветвления ВЦД (2.8) и $\alpha_k = \min(b_{i(k)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$, $\beta_k = \max(b_{i(k)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$ — соответственно минимальный и максимальный элементы ВЦД (2.8) на k-м этаже, минимум и максимум берутся по всевозможным наборам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, каждый из которых независимо пробегает значения от 1 до N.

Из сходимости максиманты ВЦД (1.1) или (1.8) еще не следует сходимость данной дроби.

Ветвящаяся цепная дробь (2.5) с комплексными числовыми элементами называется мажорантой (минорантой) ВЦД (1.1) или (1.8), если существуют такое неотрицательное число n_0 и положительная константа M, что для всех целых $n, m \geqslant n_0$ справедливо соотношение

$$|f_n - f_m| \leqslant M|g_n - g_m| (|f_n - f_m| \geqslant M|g_n - g_m|) \tag{2.13}$$

или

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant M|g_n - g_m| (|f_n(z) - f_m(z)| \geqslant M|g_n - g_m|), \tag{2.14}$$

где $N_1 \in \mathbb{N}$, не обязательно совпадающее с N, и f_n, $f_n(z)$, g_n — n-е подходящие дроби ВЦД (1.1), (1.8) и (2.5) соответственно.

Очевидны следующие утверждения.

Предложение 2.2. Если мажоранта (2.5) ВЦД (1.8) сходится, то сама дробь (1.8) равномерно сходится в области D.

Предложение 2.3. Если мажоранта (2.5) ВЦД (1.8) сходится абсолютно, то сама дробь (1.8) сходится абсолютно и равномерно.

Пример 2.2. Покажем, что мажорантой ВЦД (1.1) с комплексными компонентами, удовлетворяющими условиям

$$|b_{i(k)}| \geqslant N\,|a_{i(k)}| + 1 \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots), \tag{2.15}$$

является ВЦД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-|a_{i(k)}|}{|b_{i(k)}|}. \tag{2.16}$$

Действительно, если для ВЦД (2.16) по аналогии с (3.1) гл. 1 ввести рекуррентно сокращенные обозначения

$$\hat{Q}^{(s)}_{i(s)} = |b_{i(s)}|,\ \hat{Q}^{(s)}_{i(p)} = |b_{i(p)}| - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(p+1)}|}{\hat{Q}^{(s)}_{i(p+1)}} \tag{2.17}$$

$(s = 1, 2, \ldots, p = \overline{1, s-1},\ i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, s})$, то методом математической индукции легко проверить, что

$$|Q^{(s)}_{i(k)}| \geqslant \hat{Q}^{(s)}_{i(k)} > N\,|a_{i(k)}| \quad (k = s, s-1, \ldots, 1,\ i_k = \overline{1, N}). \tag{2.18}$$

Действительно, при $k = s$ имеем

$$|Q^{(s)}_{i(s)}| = |b_{i(s)}| = \hat{Q}^{(s)}_{i(s)} \geqslant N\,|a_{i(s)}| + 1 > N\,|a_{i(s)}|.$$

Предполагая, что неравенство (2.18) справедливо при $n = k + 1$, докажем его справедливость при $n = k$. Имеем

$$|Q^{(s)}_{i(k)}| = \left| b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{Q^{(s)}_{i(k+1)}} \right| \geqslant |b_{i(k)}| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(k+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(k+1)}|} \geqslant |b_{i(k)}| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(k+1)}|}{\hat{Q}^{(s)}_{i(k+1)}} = \hat{Q}^{(s)}_{i(k)} > |b_{i(k)}| - 1 \geqslant N\,|a_{i(k)}|.$$

Следовательно, $Q^{(s)}_{i(k)} \neq 0$, $\hat{Q}^{(s)}_{i(k)} > 0$. Поэтому для разностей двух подходящих дробей ВЦД (1.1) и (2.16) $f_n - f_m$, $g_n - g_m$, где $n > m$, можно воспользоваться формулой (3.3) гл. 1. Имеем

$$|f_n - f_m| \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{m+1} |a_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} |Q^{(n)}_{i(k)}| \prod_{k=1}^{m} |Q^{(m)}_{i(k)}|} \leqslant$$

$$\leqslant (-1)^{m+1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{m+1} (-|a_{i(k)}|)}{\prod\limits_{k=1}^{m+1} \hat{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod\limits_{k=1}^{m} \hat{Q}_{i(k)}^{(m)}} = -(g_n - g_m).$$

Второй метод, который мы будем использовать при исследовании сходимости ВЦД, хотя и тесно примыкающий к методу мажорант, все же в идейном отношении ближе к известному в теории цепных дробей методу фундаментальных неравенств (см. (30)). Его достоинством является то, что он дает возможность оценивать скорость сходимости ветвящихся цепных дробей.

Будем говорить, что для ВЦД (1.8) выполняются фундаментальные неравенства, если

$$Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0 \quad (k = \overline{1, s}, \quad i_k = \overline{1, N}, \quad s = 1, 2, \ldots) \tag{2.19}$$

и существуют положительные константы ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$\sum_{i_1=1}^{N} \left| \frac{a_{i(1)}(z)}{Q_{i(1)}^{(s)}} \right| \leqslant \rho_1 \ (s = 1, 2, \ldots), \tag{2.20}$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right| \leqslant \rho_{k+1} \left| b_{i(k)}(z) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right| \tag{2.21}$$

$(i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, s},\ s = 1, 2, \ldots)$.

Предложение 2.4 [37]. Пусть для ВЦД (1.8) выполняются фундаментальные неравенства (2.19)—(2.21).

Тогда (1.8) равномерно сходится в области D, если $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \rho_k = 0$, более того,

$$|f(z) - f_m(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{m+1} \rho_k, \tag{2.22}$$

где $f(z)$ — значение бесконечной ВЦД (1.8), $f_m(z)$ — ее m-я аппроксиманта.

Доказательство. Учитывая обозначения (3.1) гл. 1, условия (2.21) запишутся в виде

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k)}^{(s)} Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right|. \tag{2.23}$$

Так как все $Q_{i(p)}^{(s)} \neq 0$, то для разности двух подходящих дробей $f_n - f_m$ ВЦД (1.8) $(n > m)$ воспользуемся формулой (3.3) гл. 1. Записав произведения, стоящие в знаменателях формулы (3.3) гл. 1 в виде

$$Q_{i(1)}^{(n)} \prod_{k=1}^{r} \left(Q_{i(2k)}^{(n)} Q_{i(2k+1)}^{(n)}\right) \prod_{k=1}^{r} \left(Q_{i(2k-1)}^{(m)} Q_{i(2k)}^{(m)}\right),$$

если $m = 2r$, или в виде

$$Q_{i(1)}^{(m)} \prod_{k=1}^{r} \left(Q_{i(2k-1)}^{(n)} Q_{i(2k)}^{(n)}\right) \prod_{k=1}^{r-1} \left(Q_{i(2k)}^{(m)} Q_{i(2k+1)}^{(m)}\right),$$

если $m = 2r - 1$, после несложных выкладок с учетом (2.23) и (2.20) имеем

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{m+1} \rho_k,$$

откуда предельным переходом при $n \to \infty$ получим (2.22).

§ 3. Неравенства типа средних гармонических

Пусть R_+^n — множество n упорядоченных действительных положительных чисел, т. е.

$$R_+^n = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i > 0, \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Введем на R_+^n покомпонентно арифметические операции $x + y$, λx, где $\lambda \in R_+^1$.

Средним гармоническим n действительных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или элемента $x \in R_+^n$ называется число

$$x_{\text{ср}} = n\,(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \cdots + x_n^{-1})^{-1}.$$

Теорема 2.3 [6]. *Пусть $x, y \in R_+^n$, тогда справедливо неравенство*

$$x_{\text{ср}} + y_{\text{ср}} \leqslant (x + y)_{\text{ср}},$$

которое можно записать в эквивалентной форме

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\Big)^{-1} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^{-1}\Big)^{-1} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{-1}\Big)^{-1}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n = 1$ неравенство (3.1) очевидно, при $n = 2$ оно проверяется непосредственно с помощью элементарных вычислений.

Введя обозначения $\tilde{x}_{n-1}^{-1} = x_{n-1}^{-1} + x_n^{-1}$, $\tilde{y}_{n-1}^{-1} = y_{n-1}^{-1} + y_n^{-1}$ и используя предположение индукции. получим

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\Big)^{-1} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^{-1}\Big)^{-1} = \Big(\sum_{i=1}^{n-2} x_i^{-1} + \tilde{x}_{n-1}^{-1}\Big)^{-1} +$$
$$+ \Big(\sum_{i=1}^{n-2} y_i^{-1} + \tilde{y}_{n-1}^{-1}\Big)^{-1} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n-2} (x_i + y_i)^{-1} + (\tilde{x}_{n-1} + \tilde{y}_{n-1})^{-1}\Big)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{-1}\Big)^{-1}.$$

Последнее неравенство следует из (3.1), где $n = 2$ и вместо x_1, x_2, y_1, y_2 положено x_{n-1}, x_n, y_{n-1}, y_n соответственно.

Последовательно применяя (3.1), приходим к основному неравенству [6].

Теорема 2.4 (основное неравенство). *Пусть* $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$ $(j = \overline{1, k})$ — *некоторая совокупность элементов* R_+^n. *Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\text{ср}}^{(j)} \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{k} x^{(j)}\Big)_{\text{ср}}$$

или в эквивалентной форме

$$\sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{-1}\Big)^{-1} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\Big)^{-1}\Big)^{-1}. \qquad (3.2)$$

Утверждение 2.1. Пусть $x \in R_+^n$; тогда имеет место разложение единицы

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}\Big)^{-1}. \qquad (3.3)$$

Теорема 2.5. *Пусть* x, $\delta \in R_+^n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\delta_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}\Big)^{-1} \leqslant \frac{n}{n + \delta_{\text{ср}}}. \qquad (3.4)$$

Доказательство. В основном неравенстве (3.2) заменим k на n, n на $n + 1$ и введем обозначение

$$x_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \ (i, j = \overline{1, n}), \quad x_{n+1, j} = \delta_j^{-1} \ (j = \overline{1, n}).$$

Используя неравенство (3.2) и разложение единицы (3.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_{ij}^{-1}\right)^{-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1}+\frac{\delta_{\text{ср}}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{n+\delta_{\text{ср}}}\cdot\blacksquare$$

Следствие 2.1 [15]. Пусть $x\in R_+^n$ и δ — неотрицательное действительное число; тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\leqslant\frac{n}{n+\delta}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь вопрос об установлении оценки сверху для выражений

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\gamma+\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

где δ, γ — действительные неотрицательные числа; x, $y\in R_+^n$. Трудности, которые здесь возникают, хорошо прослеживаются уже для $n=2$.

Теорема 2.6. *Справедливо неравенство*

$$(1+\delta+x)^{-1}(1+\gamma+y)^{-1}+(1+\delta+x^{-1})^{-1}(1+\gamma+y^{-1})^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant\max\{(1+\delta)^{-1}(1+\gamma)^{-1},\ \ 2(2+\delta)^{-1}(2+\gamma)^{-1}\}, \tag{3.7}$$

где $\delta\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$, $x>0$, $y>0$ — произвольные действительные числа.

Доказательство. Очевидно,

$$\max\{(1+\delta)^{-1}(1+\gamma)^{-1},\ 2(2+\delta)^{-1}(2+\gamma)^{-1}\}=$$
$$=\begin{cases}(1+\delta)^{-1}(1+\gamma)^{-1}, & \text{если } \delta\gamma\leqslant 2,\\ 2(2+\delta)^{-1}(2+\gamma)^{-1}, & \text{если } \delta\gamma\geqslant 2.\end{cases}$$

При выполнении условия $\delta\gamma\geqslant 2$ неравенство (3.7) с помощью элементарных вычислений легко приводится к виду

$$(xy+x^{-1}y^{-1}-2)(\delta\gamma-2)+2(xy^{-1}+x^{-1}y-2)(1+\delta)\times$$
$$\times(1+\gamma)+(x+x^{-1}-2)[2(1+\gamma)+(1+\delta)(\delta\gamma-2)]+$$
$$+(y+y^{-1}-2)[2(1+\delta)+(1+\gamma)(\delta\gamma-2)]\geqslant 0.$$

Если же $\delta\gamma \leqslant 2$, то (3.7) преобразуется к очевидному неравенству

$$(xy^{-1}+x^{-1}y-2)(1+\gamma)(1+\delta)+(x+x^{-1}-2)(1+\delta)+ \\ +(y+y^{-1}-2)(1+\gamma)+(2+\delta)(2+\gamma)(2-\delta\gamma)\geqslant 0. \blacksquare$$

Неравенства типа (3.7) будут применяться в следующей главе для получения оценки разности между подходящими дробями ветвящихся цепных дробей с действительными положительными элементами. Они рассчитаны на многократное применение. Вид параметров δ, γ очень громоздкий, и установление неравенств $\delta\gamma \geqslant 2$ или $\delta\gamma \leqslant 2$ для наших целей не представляется возможным. Поэтому двузначность правой части (3.7) для нас совершенно не приемлема. Следовательно, необходимо углубить правую часть (3.7), не усложняя очень ее вида, с целью добиться единого аналитического выражения. Так как

$$(\delta+1)^{-1}(\gamma+1)^{-1}=(\delta+\gamma+1+\delta\gamma)^{-1}, \\ 2(2+\delta)^{-1}(2+\gamma)^{-1}=\left(\delta+\gamma+2+\frac{1}{2}\delta\gamma\right)^{-1},$$

то, полагая $\delta\gamma = z$, $\delta+\gamma=b$ и обозначая обратную величину к левой части (3.7) w, неравенство (3.7) запишем в виде

$$w \geqslant \begin{cases} b+1+z, & \text{если } 0\leqslant z\leqslant 2, \\ b+2+\frac{1}{2}z, & \text{если } 2\leqslant z. \end{cases} \tag{3.8}$$

Если в плоскости (z, w) начертить область (3.8), то исходя из геометрических соображений ясно, что наиболее простой областью, имеющей единое аналитическое выражение и содержащей (3.8), является угловая область

$$w \geqslant b+1+\frac{1}{2}z, \quad z\geqslant 0. \tag{3.9}$$

Тогда неравенство (3.7) запишется в виде

$$(1+\delta+x)^{-1}(1+\gamma+y)^{-1}+(1+\delta+x^{-1})^{-1}(1+\gamma+y^{-1})^{-1}\leqslant \\ \leqslant\left(1+\delta+\gamma+\frac{1}{2}\delta\gamma\right)^{-1}. \tag{3.10}$$

Можно установить и более точное неравенство, чем (3.10), если ограничивать w снизу гиперболой Γ, проходящей через точку $(0,\ b+1)$ в плоскости (z, w) и имеющей в качестве асимптоты прямую $w=b+2+\frac{1}{2}z$. Тогда получим неравенство

$$(1+\delta+x)^{-1}(1+\gamma+y)^{-1}+(1+\delta+x^{-1})^{-1}(1+\gamma+y^{-1})^{-1}$$
$$\leqslant \left(\delta+\gamma+\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2+2\delta\gamma+1}\right)^{-1},$$

которое имеет сложный вид, не пригодный для многократного применения.

Теорема 2.7. *Для произвольных неотрицательных действительных чисел δ, γ и элементов x, $y \in R^n_+$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\gamma+\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1} \leqslant \left(1+\delta+\gamma+\frac{\delta\gamma}{n}\right). \quad (3.11)$$

Доказательство. В основном неравенстве (3.2) заменим k на n, n на 4 и введем обозначения

$$x_{1j}=(\delta\gamma)^{-1},\ x_{2j}=\gamma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1},\quad x_{3j}=\delta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1},$$
$$x_{4j}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}\quad (j=\overline{1,n}).$$

Используя неравенство (3.2) и разложение единицы (3.3), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\delta\gamma+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}+\delta\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right]^{-1}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{4}x_{ij}^{-1}\right)^{-1}\leqslant\left[\left(\sum_{j=1}^{n}x_{1j}\right)^{-1}+\left(\sum_{j=1}^{n}x_{2j}\right)^{-1}+\left(\sum_{j=1}^{n}x_{3j}\right)^{-1}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n}x_{4j}\right)^{-1}\right]^{-1}\leqslant\left(\frac{\delta\gamma}{n}+\delta+\gamma+1\right)^{-1}$$

с учетом

$$\sum_{j=1}^{n}x_{4j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)^{-1}=1.$$

Знак $\leqslant$ в неравенстве (3.11) следует заменить знаком строгого неравенства $<$, если $n>1$.

Повторяя доказательство теоремы 2.7, получим более общее неравенство, которое будет применяться при установлении признака сходимости ВЦД с положительными компонентами, эквивалентного достаточности критерия Зейделя.

Следствие 2.2. Для произвольных неотрицательных действительных чисел δ, γ, μ и элементов x, $y \in R_+^n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left[1+\delta\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}+\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{y_i}{y_j}+\mu\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{y_i}{y_j}\right)\right]^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+\mu\right)^{-1}. \qquad (3.12)$$

Теорема 2.8. *Пусть δ, γ, μ — произвольные действительные неотрицательные числа и x, $y \in R_+^n$, такие, что выполняется одно из условий:*

а) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ *и* $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$

или

б) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ *и* $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$.

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left[1+\delta\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}+\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{y_i}{y_j}+\mu\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{y_i}{y_j}\right)\right]^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+n\mu\right)^{-1}. \qquad (3.13)$$

Доказательство. Заметим, что неравенство (3.13) является усилением неравенства (3.13) при введении дополнительных ограничений на параметры.

Для определенности предположим, что выполняется условие а). Покажем, что в этом случае имеет место неравенство

$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right), \qquad (3.14)$$

где $a_i = 1/x_i$, $b_i = 1/y_i$. Из условия а) теоремы следует, что существует такой номер r $(1 \leqslant r \leqslant n)$, что

$$\begin{cases} na_k-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i \geqslant 0 & (k=\overline{1,\ r}),\\ na_k-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i \leqslant 0 & (k=\overline{r+1,\ n}). \end{cases} \qquad (3.15)$$

Неравенство (3.14) запишем в эквивалентной форме

$$\sum_{k=1}^{r}b_k\left(na_k-\sum_{i=1}^{n}a_i\right) \leqslant \sum_{k=r+1}^{n}b_k\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-na_k\right).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{r}\left(na_k-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=\sum_{k=r+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-na_k\right),$$

то из условия $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ немедленно следует (3.14). Повторяя доказательство предыдущей теоремы с учетом неравенства (3.14), легко убеждаемся в справедливости неравенства (3.13). ■ •

Замечание 2.2. Как видно из доказательства теоремы 2.8, условие монотонности последовательности b_i в предположении, что последовательность a_i монотонно убывает, можно заменить более слабым условием, а именно

$$\max(b_i : i = \overline{1,\ r}) \leqslant \min(b_i : i = \overline{r+1,\ n}),$$

где r определяется таким образом, чтобы выполнялось неравенство (3.15).

Из приведенного доказательства заключаем, что если последовательности a_i, b_i одновременно монотонно возрастают или убывают, то неравенство (3.14) следует заменить на противоположное.

Теорема 2.9 [8]. *Пусть δ — неотрицательное действительное число, $x \in R_{+}^{n}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} \geqslant (\delta+1)^{-1}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Сначала непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости неравенства

$$\left(1+\delta+Ax+\frac{x}{y}\right)^{-1}+\left(1+\delta+Ay+\frac{y}{x}\right)^{-1} \geqslant \geqslant \left(1+\delta+A\frac{xy}{x+y}\right)^{-1}, \tag{3.17}$$

где $\delta \geqslant 0$, $A \geqslant 0$, $x > 0$, $y > 0$ — произвольные действительные числа. После несложных вычислений (3.17) приводится к виду

$$\delta^2+2\delta+2\delta A\frac{xy}{x+y} \geqslant 0.$$

Неравенство (3.16) докажем методом математической индукции. При $n=1$ это неравенство очевидно, при $n=2$ оно следует из неравенства (3.17), где $A=0$. Вводя обозначения $\tilde{x}_{n-1}^{-1}=x_{n-1}^{-1}+x_n^{-1}$, т. е. $\tilde{x}_{n-1}=\dfrac{x_{n-1}x_n}{x_{n-1}+x_n}$, используя неравество (3.17), где $A = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_{n-2}^{-1}$, $x = x_{n-1}$, $y = x_n$, и предположение индукции, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\tilde{x}_{n-1}}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_j} + 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_n}{x_j} + \frac{x_{n-1}}{x_n} + 1\right)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\tilde{x}_{n-1}}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\tilde{x}_{n-1}}{x_j} + \frac{\tilde{x}_{n-1}}{\tilde{x}_{n-1}}\right)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant (\delta + 1)^{-1}. \blacksquare$$

§ 4. Многомерный аналог теоремы Монтеля

Пусть D — некоторая область в $\mathbb{C}^n$. Будем говорить, что множество K компактно принадлежит области D ($K \Subset D$), если $\overline{K} \subset D$, где $\overline{K}$ — замыкание K. Рассмотрим последовательность $F = \{f_m(z),\ z \in D,\ m = 1, 2, \dots\}$ голоморфных функций в D. Последовательность F называется равномерно ограниченной внутри D, если для произвольного множества K, компактно принадлежащего D, существует константа $M = M(K)$, такая что

$$|f_m(z)| \leqslant M$$

для всех $z \in K$ и всех $f_m \in F$.

Семейство функций F называется равностепенно непрерывным внутри D, если для произвольного действительного $\varepsilon > 0$ и произвольного множества $K \Subset D$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что

$$|f_m(z') - f_m(z'')| < \varepsilon$$

для всех z', z'', таких что $|z' - z''| < \delta$, $z', z'' \in K$ и всех $f_m \in F$, где

$$|z' - z''| = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i' - z_i''|^2\right)^{1/2}.$$

Семейство функций F называется компактным в D, если из последовательности функций этого семейства можно выделить подпоследовательность $\{f_{m_k}\}$, равномерно сходящуюся на произвольном множестве $K \Subset D$.

В случае $n = 1$ справедливы следующие классические результаты, установленные соответственно в 1894, 1903, 1907 гг.

Теорема 2.10 (Стилтьес [95]). *Пусть* $F = \{f_m(z),\ z \in D,\ m = 1, 2, \ldots\}$ *— семейство голоморфных функций в области* D *и ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z) \tag{4.1}$$

равномерно сходится для всех z, *принадлежащих замкнутому кругу* $K_0 \Subset D$.

Если последовательность частных сумм ряда (4.1) равномерно ограничена внутри D, *то ряд (4.1) равномерно сходится на каждом множестве* $K \Subset D$ *к функции, голоморфной в* D.

Теорема 2.11 (Витали [99]). Если последовательность F функций, голоморфных в области D, компактна и сходится на некотором множестве $\Delta \subset D$, имеющем, по крайней мере, одну предельную точку, принадлежащую D, то эта последовательность равномерно сходится на каждом множестве $K \subset D$.

Теорема 2.12 (Монтель [41]). *Для того чтобы множество функций* F, *голоморфных в области* D, *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным внутри* D.

В настоящее время широко применяется следующая интерпретация этих теорем (см. [81]).

Теорема 2.13 (Стилтьес — Витали). *Пусть* $F = \{f_m(z),\ z \in D,\ m = 1, 2, \ldots\}$ *— семейство голоморфных функций в области* $D \subset \mathbb{C}$, *таких, что* $f_m(z) \neq a$, $f_m(z) \neq b$ *для всех* $z \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, *где* a *и* b *— комплексные числа* ($a \neq b$).

Пусть $\Delta \subset D$ *— бесконечное множество точек, имеющих по крайней мере одну предельную точку, принадлежащую* D.

Если последовательность F *сходится к конечному значению для всех* $z \in \Delta$, *то она равномерно сходится на каждом компакте области* D *к голоморфной функции в* D.

Рассмотрим вопрос о многомерном аналоге теоремы о компактности семейства голоморфных функций. При этом будем использовать методику доказательства теоремы Монтеля, предложенную в первом издании работы [70].

Теорема 2.14. *Если семейство функций* $F = \{f_m(z),\ z \in D,\ m = 1, 2, \ldots\}$, *голоморфных в* $D \subset \mathbb{C}^n$, *равномерно ограничено внутри* D, *то и семейство функций*

$$F_i = \left\{\frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i},\quad z \in D,\quad m = 1, 2, \ldots\right\} \ (i = \overline{1,n})$$

равномерно ограничено внутри D.

Доказательство. Пусть U — произвольный поликруг, такой, что $U \Subset D$

$$U = \{z : |z_i - a_i| < r_i, \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Тогда построим поликруг

$$V = \{z : |z_i - a_i| < R_i, \quad i = \overline{1, n}\},$$

такой, что $V \Subset D$ и $R_i > r_i$ $(i = \overline{1, n})$.

Согласно интегральной формуле Коши [71] для произвольных $z \in V$ и $f_m \in F$ имеем

$$\frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \cdots \int \frac{f_m(\xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(z_i - \xi_i) \prod_{k=1}^{n} (z_k - \xi_k)} \quad (i = \overline{1, n}),$$

где Γ — остов поликруга V. Пусть $z \in U$. Так как $|f_m(\xi)| \leqslant M(V)$, то

$$\left| \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i} \right| \leqslant \frac{M(V) \prod_{k=1}^{n} 2\pi R_k}{(2\pi)^n (R_i - r_i) \prod_{k=1}^{n} (R_k - r_k)} = M_1(U).$$

Следовательно, доказана равномерная ограниченность F_i в поликругах. Пусть $K \Subset D$. Покроем K поликругами. Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие $\{U_\nu\}_{\nu=1}^{s}$. Пусть

$$M_i(K) = \max(M_i(U_\nu) : \nu = \overline{1, s}).$$

Тогда для всех $z \in K$ и произвольной $f_m \in F$ имеем

$$\left| \frac{\partial f_m(z)}{\partial z_i} \right| \leqslant M_i(K) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Теорема 2.15. *Если семейство функций F голоморфных в $D \subset \mathbb{C}^n$ равномерно ограничено внутри D, то оно также и равностепенно непрерывно внутри D.*

Доказательство. Пусть $K \Subset D$. Обозначим через 2ρ расстояние между замкнутыми множествами $\overline{K}$ и ∂D, т. е.

$$2\rho = \inf\{|z - \xi| : z \in \overline{K}, \quad \xi \in \partial D\},$$

а через

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z_0 \in K} \{z : |z - z_0| < \rho\}.$$

Очевидно, $K^{(\rho)} \Subset D$. Из теоремы 2.14 следует, что существует константа M, что для всех $z \in K^{(\rho)}$ и произвольной $f_m \in F$

$$\left|\frac{\partial f_m}{\partial z_i}\right| \leqslant M \quad (i = \overline{1, n}).$$

Пусть z', z'' — произвольные точки из K, такие, что $|z' - z''| < \rho$. Соединим их отрезком прямой. Если $z \in [z', z'']$, то, очевидно, $z \in K^{(\rho)}$. Так как

$$\int\limits_{[z', z'']} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial z_i} dz_i = f_m(z'') - f_m(z'),$$

то

$$|f_m(z'') - f_m(z')| \leqslant \int\limits_{[z', z'']} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f_m}{\partial z_i}\right| |dz_i| \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |z_i'' - z_i'|.$$

Согласно неравенству Буняковского — Шварца

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i'' - z_i'| \leqslant \sqrt{n}\, |z'' - z'|.$$

Таким образом,

$$|f_m(z'') - f_m(z')| \leqslant M \sqrt{n}\, |z'' - z'|.$$

Если $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}, \rho\right\}$, то отсюда следует равностепенная непрерывность. ■

Теорема 2.16. *Если семейство функций F, голоморфных в $D \subset \mathbb{C}^n$, равномерно ограничено внутри D, то оно компактно в D.*

Доказательство. Докажем сначала, что если последовательность $f_m(z)$ сходится в каждой точке некоторого множества $E \subset D$, всюду плотного в D, то она равномерно сходится на каждом $K \Subset D$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и множество $K \Subset D$. Используя равностепенную непрерывность семейства F, выберем разбиение D на гиперкубы с гранями, параллельными координатным плоскостям и настолько мелкими, чтобы для произвольных z', $z'' \in K$, z', $z'' \in q_p$, где q_p — один из пронумерованных гиперкубов, выполнялись условия

$$|f_m(z'') - f_m(z')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Множество K покроем конечным числом гиперкубов q_p ($p = \overline{1, s}$). Так как E всюду плотно в D, то в каждом q_p

найдется точка $z^{(p)} \in E$. Так как $f_k(z)$ сходится на E, то существует такое число N, что

$$|f_r(z^{(p)}) - f_n(z^{(p)})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $r, n \geqslant N$ и каждого $z^{(p)} \in E$ $(p = \overline{1, s})$. Пусть z — произвольная точка из K. Существует точка $z^{(p)} \in E$, которая лежит в том же гиперкубе, что и z. Тогда для всех $r, n \geqslant N$ имеем

$$|f_r(z) - f_n(z)| \leqslant |f_r(z) - f_r(z^{(p)})| + |f_r(z^{(p)}) - f_n(z^{(p)})| + \\ + |f_n(z^{(p)}) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $f_m(z)$ равномерно сходится на K.

Теперь докажем, что из произвольной последовательности $f_m \in F$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится в каждой точке множества $E \subset D$, всюду плотного в D. В качестве E выберем множество точек $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in D, z_k = x_k + iy_k$ $(k = \overline{1, n})$, таких, что x_k, y_k — рациональные числа. Пусть $E = \{w_l\}_1^\infty$. Очевидно, E счетно и всюду плотно в D. Числовая последовательность $f_m(w_1)$ ограничена, так как $w_1 \subset D$. Из нее выделим сходящуюся подпоследовательность

$$f_{k1}(z) = f_{m_k}(z) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Числовая последовательность $f_{k1}(w_2)$ ограничена. Из нее выделим сходящуюся подпоследовательность $f_{k2}(z) = f_{n_k 1}(z)$. Последовательность $f_{k2}(z)$ сходится по крайней мере в точках w_1 и w_2 и т. д. Построим последовательность функций $f_{kn}(z)$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$.

Диагональная последовательность

$$f_{11}(z), \quad f_{22}(z), \ \ldots, \ f_{nn}(z), \ \ldots$$

сходится в каждой точке $w_k \in E$, так как по построению все члены этой последовательности, начиная с k-го, сходятся в точке w_k. ■

Замечание 2.3. В обычной формулировке, как известно, одно из важных свойств голоморфных функций — теорема единственности не переносится на многомерный случай. Например, функция $f(z) = z_n$ обращается в нуль в $(2n-2)$-мерном множестве $\{z \in \mathbb{C}^n : z_n = 0\}$, но не равна нулю тождественно.

Однако верно такое утверждение [71].

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$, $z_0 \in D$. Тогда $f(z) \equiv 0$ для всех $z \in D$, если $f(z) \equiv 0$ в некоторой $2n$-мерной окрестности точки z_0 или $f(z)\equiv 0$ в некоторой n-мерной действительной окрестности точки z_0, т. е. на множестве $\{z : x+iy \in D\subset \mathbb{C}^n,\ |x-x_0|<r,\ y=y_0\}$, или $f(z)\equiv 0$ в некоторой мнимой окрестности точки z_0, т. е. на множестве $\{z : x+iy\in D\subset \mathbb{C}^n,\ x=x_0,\ |y-y_0|<r\}$.

Теорема 2.17. *Пусть $F=\{f_m(z),\ z\in D,\ m=1, 2, \ldots\}$ — последовательность голоморфных функций в области $D\subset \mathbb{C}^n$, равномерно ограниченных внутри D.*

Если $f_m(z)$ сходится в каждой точке множества $\Delta\subset D$, являющегося $2m$-мерной окрестностью, m-мерной действительной или m-мерной комплексной окрестностью точки $z_0\in D$, то $f_m(z)$ сходится равномерно на произвольном множестве $K\Subset D$ к голоморфной функции в D.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что из последовательности $f_m(z)$ можно выделить подпоследовательность $f_{m_k}(z)$, равномерно сходящуюся на произвольном множестве $K\Subset D$. Согласно многомерному аналогу теоремы Вейерштрасса [71] $f(z)=\lim\limits_{k\to\infty} f_{m_k}(z)$ является голоморфной функцией в D. Для произвольной точки $z\in\Delta$ в силу условий теоремы имеем

$$\lim_{m\to\infty} f_m(z)=f(z).$$

Пусть S — произвольное множество, такое, что $S\Subset D$ и $S\supset K\cup\Delta$. Введем обозначение

$$\delta_p=\sup\{\,|f_p(z)-f(z)|,\quad z\in S\},\quad \delta=\overline{\lim_{p\to\infty}}\,\delta_p.$$

Если мы докажем, что $\delta=0$, то сможем заключить, что $f_m(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ на S. Пусть $p_1<p_2<\cdots$ — последовательность индексов, таких, что

$$\delta=\lim_{l\to\infty}\delta_{p_l}.$$

Из последовательности $\{f_{p_l}(z)\}$ выделим подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом $K'\Subset D$, в частности и на S, к аналитической функции в D. Пусть $f^*(z)$ — предел этой последовательности. Так как $f^*(z)=f(z)$ для произвольного $z\in\Delta$, то $f^*(z)=f(z)$ для произвольного $z\in D$ в силу теоремы единственности для голоморфных функций многих переменных [71].

Таким образом, $\delta=0$, так как

$$\lim_{l\to\infty}\delta_{p_l}=\delta=\sup(|f^*(z)-f(z)|,\quad z\in S)=0.\ \blacksquare$$

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

С учетом методов, изложенных во второй главе, здесь будут установлены признаки сходимости ВЦД, элементами которых есть действительные или комплексные числа и которые являются в основном дальнейшим развитием аналогичных результатов, изложенных в [56].

Первые признаки сходимости ВЦД приведены в монографии [19], где установлено несколько достаточных признаков сходимости ВЦД с положительными элементами общего вида, ранее изложенных в [55], доказана сходимость периодической ВЦД с положительными членами, исследована сходимость ВЦД специальной конструкции, являющейся разложением логарифмической производной решения одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (см. также [52]). Первые признаки сходимости ВЦД общего вида формулировались очень громоздко. Они свидетельствуют о сложности самого объекта исследований. В качестве примера рассмотрим ВЦД с положительными компонентами вида

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}. \tag{1.1}$$

Пусть (см. (2.4) гл. 1)

$$\frac{a'_{i(n)}}{b'_{i(n)}} \equiv \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{1}{b_{i(n+1)}} \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, n}).$$

Рассмотрим $(n+1)$-ю аппроксиманту ВЦД (1.1) и упорядочим согласно (1.13) гл. 1 ее частично свернутые звенья

$$\frac{a'_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}}{b'_{\underbrace{11\ldots1}_{n}}},\quad \frac{a'_{\underbrace{1\ldots12}_{n}}}{b'_{\underbrace{1\ldots12}_{n}}},\quad \ldots,\quad \frac{a'_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}}}{b'_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}}} \tag{1.2}$$

Пусть r — произвольное целое число $0 \leqslant r \leqslant N^n$ и $j_k (k = \overline{1, r})$ — произвольный набор натуральных чисел, таких, что $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant N^n$, если $r \geqslant 1$. Рассмотрим фигурную подходящую дробь ВЦД (1.1), совпадающую с ее n-ой аппроксимантой, у которой n-е звенья $1/b_{i(n)}$ заменены на $a'_{i(n)}/b'_{i(n)}$ соответственно ($i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$) и звенья, имеющие в (1.2) порядковые номера $j_1, j_2, \ldots, j_r$, заменены на $0/1$. Обозначим через $A_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$ и $B_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$ ее n-е числители и знаменатели.

Теорема 3.1 [55]. *ВЦД (1.1) сходится, если*

$$\prod_{i(n)} b'_{i(n)} > 1 + \frac{1}{B_n} \sum_{j(r)} B_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix} \prod_{i(n)} c_{i(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где произведения берутся по всевозможным наборам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$, суммирование производится по всевозможным $0 \leqslant r \leqslant N^n$ и $j_1, j_2, \ldots, j_r$, $c_{i(n)} = a'_{i(n)}$, если $i(n)$ в (1.2) имеет один из порядковых номеров $j_1, j_2, \ldots, j_r$ и $c_{i(n)} = b'_{i(n)}$ в противном случае, B_n — n-й знаменатель дроби (1.1).

При исследовании сходимости ВЦД возникли большие трудности, в связи с отсутствием для них линейных рекуррентных соотношений типа (8). Все поиски в это время были направлены на установление таких формул. Разные их варианты были предложены В. Я. Скоробогатько [57], И. Ф. Клюйником, И. П. Пустомельниковым (см. [19], с. 51—55). Однако из-за большой громоздкости их применение для исследования сходимости ВЦД оказалось затруднительным. Автор в работе [1] показал, что отношение двух линейно независимых решений линейных рекуррентных уравнений

$$y_n = a_n y_{n-1} + b_n y_{n-2} + c_n y_{n-3} \qquad (1.3)$$

является ветвящейся цепной дробью с двумя ветками ветвления специального вида. Следовательно, для подсчета числителей и знаменателей подходящих дробей общего вида ветвящихся цепных дробей формулы типа (1.3) несправедливы.

Обозначим α_k и β_k минимальный и максимальный k-й частный знаменатель ВЦД (1.1), т. е.

$$\alpha_k = \min (b_{i(k)} : i_p = \overline{1, N}, p = \overline{1, k}), \; \beta_k = \max (b_{i(k)} : i_p = \overline{1, N}, p = \overline{1, k}), \qquad (1.4)$$

где экстремумы берутся по всевозможным наборам индексов

$i_1, i_2, \ldots, i_k$, каждый из которых независимо пробегает значения от 1 до N.

Новый подход при исследовании сходимости ВЦД, использующий формулу типа (3.3) гл. 1, предложен в работе Д. И. Боднара и И. Я. Олексива [15], в которой было установлено, что ВЦД (1.1) сходится, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+1}$$

расходится, где α_k определяются согласно (1.4).

В работе [8] было установлено, что ВЦД (1.1) расходится, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k,$$

где β_k определяются согласно (1.4).

Возникла задача: будет ли условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

достаточным для сходимости ВЦД (1.1)?

В настоящее время эта задача еще не решена и все те признаки, которые приведены в § 1, являются отдельными этапами ее решения. В частности, для цепных дробей установлена теорема, эквивалентная критерию Зейделя.

В § 2 рассмотрены признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными элементами. Заметим, что теорема Зейделя для таких цепных дробей уже не справедлива.

В § 3 исследована сходимость ветвящихся цепных дробей с комплексными числовыми элементами. Установлены многомерные аналоги теорем Ван Флека [97, 98], Ворпитского [101], Прингсгейма [89], Слешинского — Прингсгейма [58, 89], Коха [82], параболической теоремы [81] и др.

В § 4 дано определение областей сходимости для ВЦД. Исследован вопрос об окрестностях и поликруговых окрестностях сходимости для ВЦД. Рассмотрен контрпример, построенный Е. А. Болтаровичем, указывающий на то, что, казалось бы, в естественной формулировке признак сходимости Лейтона — Уолла [83] о спаренных областях сходимости не переносится на ВЦД. В § 5 рассмотрены области устойчивости ВЦД.

§ 1. Признаки сходимости ВЦД с положительными членами

На языке сходимости или расходимости рядов, составленных определенным образом из элементов (1.4), сформулируем признаки расходимости или сходимости ВЦД (1.1).

Необходимые признаки сходимости

Теорема 3.2 [8]. *ВЦД (1.1) с положительными членами расходится, если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \tag{1.5}$$

сходится, где β_k определяются согласно (1.4).

Доказательство. Из формул (3.3) и (3.1) гл. 1 следует, что

$$f_{2m+1} - f_{2m} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=1}^{m} \left(Q_{i(2k)}^{(2m+1)} Q_{i(2k+1)}^{(2m+1)}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{m} \left(Q_{i(2k-1)}^{(2m)} Q_{i(2k)}^{(2m)}\right)^{-1} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}}\right)^{-1},$$

где

$$s = 2m + k - 2\left[\frac{k}{2}\right] \quad (k = \overline{2, 2m+1}). \tag{1.6}$$

Пусть s определяется согласно (1.6) и

$$M_k = \max\left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right),\quad k = \overline{2, 2m+1}.$$

При оценке снизу выражений

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left(M_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}}\right)^{-1}$$

воспользуемся неравенством (3.16) гл. 2. Последовательно применяя это неравенство, получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} \geqslant C \prod_{k=2}^{2m+1} (1 + M_k)^{-1}, \tag{1.7}$$

где C — положительная константа, такая, что

$$C \leqslant \sum_{i_1=1}^{N} (Q_{i(1)}^{(2m+1)})^{-1}.$$

В частности, как следует из свойства вилки, в качестве C можно взять вторую подходящую дробь ВЦД (1.1) без свободного члена.

Легко проверить, что максимантой (см. (2.10) гл. 2) для ВЦД $Q_{i(k)}^{(s)}$ является цепная дробь

$$\beta_k + \frac{N}{0} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{0} + \cdots + \frac{N}{\beta_s} = \beta_k + \beta_{k+2} + \cdots + \beta_s.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{2m+1} M_k \leqslant \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1}(\beta_k + \beta_{k+2} + \cdots + \beta_s),$$

то из сходимости ряда (1.5) следует, что

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} M_k < \infty.$$

Поэтому в силу неравенства

$$\prod_{k=2}^{2m+1} (1 + M_k) \leqslant \exp\Big(\sum_{k=2}^{2m+1} M_k\Big)$$

и оценки (1.7) заключаем, что ВЦД (1.1) расходится. ∎

Теорема 3.3. *ВЦД (1.1) с положительными членами расходится, если*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \beta_{k-1}\left(\beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_s}\right) < \infty, \quad (1.8)$$

где N — число веток ветвления дроби (1.1), α_k и β_k определяются согласно (1.4), s — согласно (1.6).

Доказательство. Повторяя доказательство предыдущей теоремы, более точно вычислим максиманту для ВЦД $Q_{i(k)}^{(s)}$, где s определяется согласно (1.6). Имеем

$$Q_{i(k)}^{(s)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k+1)}} + \cdots + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{1}{b_{i(s)}} \leqslant$$

$$< \beta_k + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{\alpha_{k+1}} + \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{1}{\beta_{k+2}} + \cdots + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{1}{\beta_s} =$$

$$= \beta_k + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \frac{N}{\alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\beta_s}.$$

Остается только заметить, что предел (1.8) всегда существует, так как с учетом свойства вилки (3.4) гл. 1 все члены, стоящие под знаком суммирования в (1.8), с ростом m монотонно возрастают. ■

Достаточные признаки сходимости

Теорема 3.4 [9]. *ВЦД (1.1) с действительными положительными элементами сходится, если*

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1} \left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \frac{N}{\beta_{k+3}} + \cdots + \frac{N}{\alpha_s} \right) = \infty, \quad (1.9)$$

где N — число веток дроби (1.1), α_k, β_k определяются согласно (1.4), s — согласно (1.6).

Доказательство. Повторяя начало доказательства теоремы 3.3, получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}} \prod_{k=2}^{2m+1} \left(m_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1},$$

где s определяется согласно (1.6) и

$$m_k = \min \left(b_{i(k-1)} Q_{i(k)}^{(s)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k} \right), \quad k = \overline{2, 2m+1}.$$

При оценке сверху выражений

$$\sum_{i_k=1}^{N} \left(m_k + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(s)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}} \right)^{-1}$$

воспользуемся неравенством (3.5) гл. 2. Последовательно применяя это неравенство, получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant C \prod_{k=2}^{2m+1} \frac{N}{N + m_k},$$

где C — положительная константа, такая, что $C \geqslant \sum_{i_1=1}^{N} \left(Q_{i(1)}^{(2m+1)} \right)^{-1}$.

В частности, как следует из свойства вилки, в качестве C можно взять первую подходящую дробь ВЦД (1.1) без свободного члена.

Вычислим миниманту ВЦД $Q_{i(k)}^{(s)}$ (s определяется согласно (1.6))

$$Q_{i(k)}^{(s)} = b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k+1)}} + \cdots + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{1}{b_{i(s)}} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_k + \frac{N}{\beta_k} + \frac{N}{\alpha_{k+1}} + \frac{N}{\beta_{k+2}} + \cdots + \frac{N}{\alpha_s}.$$

Если ввести обозначение

$$r_{k-1}(s) = \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \cdots + \frac{N}{\alpha_s}\right), \qquad (1.10)$$

то для разности двух подходящих дробей ВЦД (1.1) получим оценку

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant C \prod_{k=2}^{2p+1} \frac{N}{N + r_{k-1}(s)}. \qquad (1.11)$$

Рассмотрим два возможных случая:

а) существует бесконечное количество членов последовательности $r_{k-1}(s)$, ограниченных снизу некоторым числом r;

б) $\lim\limits_{s\to\infty\; k\to\infty} r_{k-1}(s) = 0$.

В случае а) имеем

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant C\left(\frac{N}{N+r}\right)^{f(m)},$$

где $f(m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Следовательно, ВЦД (1.1) сходится.

В случае б) последовательность $r_{k-1}(s)$ ограничена сверху некоторым числом R, так что

$$\frac{N}{N + r_{k-1}(s)} = 1 - \frac{r_{k-1}(s)}{N + r_{k-1}(s)} \leqslant 1 - \frac{r_{k-1}(s)}{N + R}$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{r_{k-1}(s)}{N+R}\right\}.$$

Таким образом,

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant C \exp\left\{-\frac{1}{N+R} \sum_{k=2}^{2m+1} r_k(s)\right\}.$$

Из условия (1.9) следует сходимость ВЦД (1.1). Как и при доказательстве теоремы 3.3, заметим, что предел (1.9) всегда существует.

Теорема 3.5 [9]. *ВЦД (1.1) с положительными компонентами сходится, если расходятся ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \frac{N}{\beta_{k+3}} + \dots\right). \tag{1.13}$$

Доказательство. Условие (1.12) в силу критерия Зейделя (теорема 1) является достаточным для того, чтобы члены ряда (1.13) имели смысл. Покажем, что расходимость ряда (1.13) эквивалентна выполнению условия (1.9). Для этого введем сокращенные обозначения

$$r_{k-1} = \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \frac{N}{\beta_{k+3}} + \dots\right) (k=2, 3, \dots). \tag{1.14}$$

Пусть выполняется условие (1.9). Так как с учетом обозначений (1.10)

$$\sum_{k=2}^{2m+1} r_{k-1}(s) =$$

$$= \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \frac{N}{\beta_{k+3}} + \dots + \frac{N}{\alpha_s}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{m+1} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{0} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \frac{N}{0} + \dots + \frac{N}{\alpha_s}\right) =$$

$$\sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}(\alpha_k + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_s),$$

то ряд (1.12) расходится и поэтому члены ряда (1.13) имеют смысл. Из свойства вилки следует, что $r_{k-1}(s) < r_{k-1} (k = \overline{2, 2m-1})$ и, следовательно, ряд (1.13) расходится.

Наоборот, из расходимости ряда (1.13) следует, что для произвольного индекса s_0 и положительной константы M существует такой номер n_0, что

$$\sum_{k=s_0}^{n_0} r_{k-1} \geqslant M.$$

Из сходимости цепных дробей r_{k-1} $(k = \overline{s_0, n_0})$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер s, такой, что

$$r_{k-1} - r_{k-1}(s) < \varepsilon \ (k = \overline{s_0, n_0}).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=s_0}^{n_0} r_{k-1}(s) = \sum_{k=s_0}^{n_0} r_{k-1} - \sum_{k=s_0}^{n_0} [r_{k-1} - r_{k-1}(s)] >$$
$$> M - \varepsilon(n_0 - s_0) \geqslant \frac{M}{2},$$

если ε необходимо взять достаточно малым. Поэтому выполняется условие (1.9). ■

Рассмотрим непрерывную дробь

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \frac{1}{b_k}, \tag{1.15}$$

где b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — действительные положительные числа. Применяя для дроби (1.15) теоремы 3.3 и 3.4, получим критерий сходимости, эквивалентный критерию Зейделя.

Следствие 3.1 [11]. Цепная дробь (1.15) с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} b_{k-1}\left(b_k + \frac{1}{b_{k+1}} + \frac{1}{b_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{b_s}\right) = \infty, \tag{1.16}$$

где s определяется согласно (1.6).

Учитывая критерий Зейделя и следствие 3.1, получим утверждение.

Следствие 3.2. Расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

с действительными положительными членами эквивалентна выполнению условия (1.16).

Теорема 3.6 [6]. *ВЦД (1.1) с положительными членами сходится, если расходится ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k S_{k-1}, \tag{1.17}$$

где α_k определяются согласно (1.4) и

$$S_k = \alpha_k + N^{-1}\alpha_{k-2} + N^{-2}\alpha_{k-4} + \cdots + N^{-[(k-1)/2]}\alpha_{k-2[(k-1)/2]}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Учитывая формулу разности двух подходящих дробей (3.3) гл. 1 для ВЦД (1.1), имеем

$$f_{2m+1} - f_{2m} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{2m+1} Q_{i(k)}^{(2m+1)} \prod_{k=1}^{2m} Q_{i(k)}^{(2m)}\right)^{-1}. \tag{1.19}$$

Предполагая, что везде в дальнейшем $i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}$ — произвольный фиксированный набор индексов ($i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, 2m+1}$), введем сокращенные обозначения

$$Q_{i(k)}^{(2m+1)} = Q_{i_k}, \quad Q_{i(k)}^{(2m)} = Q'_{i_k}, \quad b_{i(k)} = b_{i_k}, \tag{1.20}$$

$$\sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m+1)}} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i_k}}{Q_\tau} = \xi_{i_k}, \tag{1.21}$$

$$\sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m)}} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q'_{i_k}}{Q'_\tau} = \xi'_{i_k}. \tag{1.22}$$

Используя метод математической индукции, докажем, что произведения $\prod_{k=1}^{2s+1} Q_{i_k}$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$ являются полиномами от переменных ξ_{i_k} $(k = \overline{1, 2s+1})$ и параметра $Q_{i_{2s+1}}$ вида

$$\prod_{k=1}^{2s+1} Q_{i_k} = P_{i_{2s}} Q_{i_{2s+1}} + R_{i_{2s+1}} \quad (s = \overline{1, m}), \tag{1.23}$$

где $P_{i_{2s}} = P_{i_{2s}}(\xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \ldots, \xi_{i_{2s}})$, $R_{i_{2s+1}} = R_{i_{2s+1}}(\xi_{i_3}, \xi_{i_4}, \ldots, \xi_{i_{2s+1}})$ — полиномы от соответствующих переменных, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} P_{i_{2s}} = (b_{i_{2s-1}} b_{i_{2s}} + \xi_{i_{2s}}) P_{i_{2s-2}} + b_{i_{2s}} R_{i_{2s-1}}, \\ R_{i_{2s+1}} = \xi_{i_{2s+1}} (b_{i_{2s-1}} P_{i_{2s-2}} + R_{i_{2s-1}}) \\ \quad (s = \overline{1, m}) \end{cases} \tag{1.24}$$

при начальных условиях

$$R_{i_1} = 0, \quad P_{i_0} = 1. \tag{1.25}$$

Действительно, при $s = 1$, учитывая (3.1) гл. 1, получим

$$Q_{i_1} Q_{i_2} Q_{i_3} = \left(b_{i_1} Q_{i_2} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i_2}}{Q\tau} \right) Q_{i_3} =$$

$$= \left(b_{i_1} b_{i_2} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i_2}}{Q_\tau} \right) Q_{i_3} + b_{i_1} \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i_3}}{Q_\tau} =$$

$$= (b_{i_1} b_{i_2} + \xi_{i_2}) Q_{i_3} + b_{i_1} \xi_{i_3} = P_{i_2} Q_{i_3} + R_{i_3}.$$

Предполагая, что соотношения (1.24), (1.25) выполняются для произвольного $s \leqslant n$, покажем их справедливость при

$s=n+1$. Имеем

$$\prod_{k=1}^{2n+3} Q_{i_k}=\prod_{k=1}^{2n+1} Q_{i_k}Q_{i_{2n+2}}Q_{i_{2n+3}}=(P_{i_{2n}}Q_{i_{2n+1}}+R_{i_{2n+1}})\times$$
$$\times Q_{i_{2n+2}}Q_{i_{2n+3}}=(P_{i_{2n}}b_{i_{2n+1}}Q_{i_{2n+2}}+P_{i_{2n}}\xi_{i_{2n+2}}+$$
$$+R_{i_{2n+1}}Q_{i_{2n+2}})\,Q_{i_{2n+3}}=[(b_{i_{2n+1}}b_{i_{2n+2}}+\xi_{i_{2n+2}})\,P_{i_{2n}}+$$
$$+b_{i_{2n+2}}R_{i_{2n+1}}]\,Q_{i_{2n+3}}+\xi_{i_{2n+3}}(b_{i_{2n+1}}P_{i_{2n}}+R_{i_{2n+1}})=$$
$$=P_{i_{2n+2}}Q_{i_{2n+3}}+R_{i_{2n+3}}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\prod_{k=2}^{2s+2} Q'_{i_k}=P_{i_{2s+1}}G'_{i_{2s+2}}+R_{i_{2s+2}}\quad (s=\overline{1,m-1}),\qquad(1.26)$$

где $P_{i_{2s+1}}=P_{i_{2s+1}}(\xi'_{i_3},\xi'_{i_4},\ldots,\xi_{i_{2s+1}})$, $R_{i_{2s+2}}=R_{i_{2s+2}}(\xi'_{i_4},\xi'_{i_5},\ldots,$ $\ldots,\xi'_{i_{2s+2}})$ — полиномы от соответствующих переменных, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} P_{i_{2s+1}}=(b_{i_{2s+1}}b_{i_{2s}}+\xi'_{i_{2s+1}})\,P_{i_{2s-1}}+b_{i_{2s+1}}R_{i_{2s}}, \\ R_{i_{2s+2}}=\xi'_{i_{2s+2}}(b_{i_{2s}}P_{i_{2s-1}}+R_{i_{2s}})\quad (s=\overline{1,m-1}) \end{cases}\qquad(1.27)$$

при начальных условиях

$$P_{i_1}=1,\quad R_{i_2}=0.\qquad(1.28)$$

Пусть p_{i_k} и r_{i_k} это те же P_{i_k} и R_{i_k}, для которых в рекуррентных соотношениях (1.24) и (1.27) вместо каждого b_{i_s} взято соответственно α_s $(s=\overline{1,2m+1})$, где

$$\alpha_s=\min(b_{j(s)}:j_n=\overline{1,N},\ n=\overline{1,s}).$$

Имеем

$$\begin{cases} p_{i_{2s}}=(\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}+\xi_{i_{2s}})\,p_{i_{2s-2}}+\alpha_{2s}r_{i_{2s-1}}, \\ r_{i_{2s+1}}=\xi_{i_{2s+1}}(\alpha_{2s-1}p_{i_{2s-2}}+r_{i_{2s-1}}),\quad s=\overline{1,m},\ r_{i_1}=0,\ p_{i_0}=1 \end{cases}\qquad(1.29)$$

и

$$\begin{cases} p_{i_{2s+1}}=(\alpha_{2s+1}\alpha_{2s}+\xi'_{i_{2s+1}})\,p_{i_{2s-1}}+\alpha_{2s+1}r_{i_{2s}}, \\ r_{i_{2s+2}}=\xi'_{i_{2s+2}}(\alpha_{2s}p_{i_{2s-1}}+r_{i_{2s}}),\quad s=\overline{1,m-1},\ p_{i_1}=1,\ r_{i_2}=0. \end{cases}\qquad(1.30)$$

Тогда, учитывая формулу (3.1) гл. 1, имеем

$$\prod_{k=1}^{2m+1} Q_{i_k}\geqslant p_{i_{2m}}\alpha_{2m+1}+r_{i_{2m+1}},$$
$$\prod_{k=2}^{2m} Q'_{i_k}\geqslant p_{i_{2m-1}}\alpha_{2m}+r_{i_{2m}}$$

и, следовательно,

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} (Q'_{i_1})^{-1} (p_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + r_{i_{2m+1}})^{-1} (p_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + r_{i_{2m}})^{-1} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}=1}^{N} (Q'_{i_1})^{-1} (p_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + r_{i_{2m}})^{-1} \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} [p_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + \xi_{i_{2m+1}} (\alpha_{2m-1} p_{i_{2m-2}} + r_{i_{2m-1}})]^{-1}.$$

Если распишем $\xi_{i_{2m+1}}$, используя обозначения (1.21), и к последней сумме применим неравенство (3.5) гл. 2, то получим

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}=1}^{N} N (Q'_{i_1})^{-1} (p_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + r_{i_{2m}})^{-1} [p_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + N (\alpha_{2m-1} p_{i_{2m-1}} + r_{i_{2m-1}})]^{-1}$$

или, раскрыв скобки,

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, {2m}=1}^{N} N (Q'_{i_1})^{-1} (\alpha_{2m+1} \alpha_{2m} p_{i_{2m}} p_{i_{2m-1}} + N \alpha_{2m} \alpha_{2m-1} p_{i_{2m-1}} p_{i_{2m-2}} + \alpha_{2m+1} p_{i_{2m}} r_{i_{2m}} + N \alpha_{2m-1} p_{i_{2m-2}} r_{i_{2m}} + N \alpha_{2m} p_{i_{2m-1}} r_{i_{2m-1}} + N r_{i_{2m}} r_{i_{2m-1}}). \quad (1.31)$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства (3.31), обозначим Φ_{2m}. С целью избежания громоздких записей формализуем алгоритм получения оценки сверху для разности двух соседних подходящих дробей $f_{2m+1} - f_{2m}$. В Φ_{2m} выделим последнюю сумму по i_{2m}. Используя рекуррентные формулы (1.29), (1.30), запишем выражение для $p_{i_{2m}}$ и $r_{i_{2m}}$ и применим к выделенной сумме неравенство (3.12) гл. 2, предварительно расписав значение для переменных $\xi_{i_{2m}}$ и $\xi_{i'_{2m}}$ согласно обозначениям (1.21) и (1.22). Выражение, в которое преобразуется Φ_{2m}, при этом обозначим Φ_{2m-1}. Формально переход от Φ_{2m} к Φ_{2m-1} заключается в следующем: отбрасываем суммирование по последнему индексу i_{2m}, выражения $A\xi_{i_{2m}} + B\xi_{i'_{2m}} + C\xi_{i_{2m}}\xi_{i'_{2m}} + D$, стоящие в знаменателях Φ_{2m}, заменяем выражениями $A + B + C + N^{-1}D$, т. е. подставляем $\xi_{i_{2m}} = \xi_{i'_{2m}} = 1$, а свободный член в N раз уменьшаем. Далее повторяем эту же процедуру и при переходе от Φ_{2m-1} до Φ_{2m-2} и т. д., от Φ_2 до Φ_1 включительно. Окончательно получим оценку

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant CP^{-1} (\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1}), \quad (1.32)$$

где C — константа; $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1})$ — полином от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1}$. Установить явное выражение для $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1})$ трудно. Поэтому ограничимся более грубой оценкой, оставляя в $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1})$ только члены не выше второй степени относительно переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1}$.

Проследим, как будут изменяться слагаемые в правой части неравенства (1.31) при переходе от Φ_{2m} к Φ_1 с учетом описанного выше алгоритма и в предположении, что все слагаемые, являющиеся полиномами выше второй степени относительно переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m+1}$, отбрасываются. Для этого достаточно получить формулы, в которые преобразуются при переходе от Φ_k к Φ_{k-1} выражения

$$\alpha_j\alpha_n p_{i_{k-1}} p_{i_k}, \quad \alpha_j p_{i_{k-2}} r_{i_k}, \quad \alpha_j p_{i_k} r_{i_k}, \quad \alpha_j\alpha_n r_{i_{k-1}} r_{i_k},$$

где j, n — произвольные натуральные числа, не превосходящие $2m+1$. Пусть

$$\eta_{i_k} = \begin{cases} \xi_{i_k}, & \text{если } k \text{ четное,} \\ \xi'_{i_k}, & \text{если } k \text{ нечетное,} \end{cases} \qquad \eta'_{i_k} = \begin{cases} \xi'_{i_k}, & \text{если } k \text{ четное,} \\ \xi_{i_k}, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Тогда при переходе от Φ_k к Φ_{k-1} выражение

$$\alpha_j\alpha_n p_{i_{k-1}} p_{i_k} = \alpha_j\alpha_n p_{i_{k-1}} [(\alpha_k\alpha_{k-1} + \eta_{i_k}) p_{i_{k-2}} + \alpha_k r_{i_{k-1}}]$$

преобразуется к виду

$$\alpha_j\alpha_n p_{i_{k-2}} p_{i_{k-1}},$$

а выражение

$$\alpha_j p_{i_{k-2}} r_{i_k} = \alpha_j p_{i_{k-2}} \eta'_{i_k} (\alpha_{k-2} p_{i_{k-3}} + r_{i_{k-2}})$$

к виду

$$\alpha_j\alpha_{k-2} p_{i_{k-3}} p_{i_{k-2}} + \alpha_j p_{i_{k-2}} r_{i_{k-2}}.$$

Выражения

$$\alpha_j p_{i_k} r_{i_k} = \alpha_j [(\alpha_k\alpha_{k-1} + \eta_{i_k}) p_{i_{k-2}} + \alpha_k r_{i_{k-1}}] \eta'_{i_k} (\alpha_{k-2} p_{i_{k-3}} + r_{i_{k-2}})$$

и

$$\alpha_j\alpha_n r_{i_{k-1}} r_{i_k} = \alpha_j\alpha_n r_{i_{k-1}} (\alpha_{k-2} p_{i_{k-3}} + r_{i_{k-2}}) \eta'_{i_k}$$

соответственно преобразуются к виду

$$\alpha_j\alpha_{k-2} p_{i_{k-2}} p_{i_{k-3}} + \alpha_j p_{i_{k-2}} r_{i_{k-2}} + \alpha_j\alpha_k r_{i_{k-1}} r_{i_{k-2}}$$

и

$$\alpha_j\alpha_n r_{i_{k-2}} r_{i_{k-1}}.$$

Теперь нетрудно посчитать, совершив $2m-1$ переход от Φ_{2m} к Φ_{2m-1}, от Φ_{2m-1} к Φ_{2m-2} и т. д., от Φ_2 до Φ_1 с учетом начальных значений для p_{i_k} и r_{i_k}, что выражение

$$p_{i_{2m}}p_{i_{2m+1}}\alpha_{2m+1}\alpha_{2m} + N\alpha_{2m}\alpha_{2m-1}p_{i_{2m-1}}p_{i_{2m-2}}$$

преобразуется к виду

$$\alpha_{2m+1}\alpha_{2m} + \alpha_{2m}\alpha_{2m-1},$$

а выражение

$$\alpha_{2m+1}p_{i_{2m}}r_{i_{2m}} + N\alpha_{2m-1}p_{i_{2m-2}}r_{i_{2m}} + N\alpha_{2m}p_{i_{2m-1}}r_{i_{2m-1}}$$

к виду

$$\begin{gathered}\alpha_{2m+1}(N^{-1}\alpha_{2m-2} + N^{-2}\alpha_{2m-4} + \cdots + N^{-m+1}\alpha_2) + \\ + \alpha_{2m-1}(\alpha_{2m-2} + N^{-1}\alpha_{2m-4} + N^{-2}\alpha_{2m-6} + \cdots + N^{-m+2}\alpha_2) + \\ + \alpha_{2m}(N^{-1}\alpha_{2m-3} + N^{-2}\alpha_{2m-5} + \cdots + N^{-m+1}\alpha_1)\end{gathered}$$

и, наконец, последнее слагаемое

$$Nr_{i_{2m}}r_{i_{2m-1}}$$

преобразуется к виду

$$\alpha_{2m-2}S_{2m-1} + \alpha_{2m-3}S_{2m-2} + \cdots + \alpha_2 S_1,$$

где S_k $(k=\overline{1, 2m-1})$ определяются согласно (1.18).

Следовательно, окончательно получим оценку

$$f_{2m+1} - f_{2m} \leqslant \sum_{i_1=1}^{N} \frac{N}{Q_{i_1}'}\left(\sum_{j=2}^{2m+1} \alpha_j S_{j-1}\right)^{-1} \leqslant C\left(\sum_{j=2}^{2m+1} \alpha_j S_{j-1}\right)^{-1},$$

где C — произвольная константа, такая, что

$$\sum_{i_1=1}^{N} N(Q_{i_1})^{-1} \leqslant C$$

(в частности, из свойства вилки следует, что в качестве C можно взять первую подходящую дробь ВЦД (1.1) без свободного члена, умноженную на N). ■

Замечание 3.1. Теорема 3.6 является многомерным аналогом достаточности критерия Зейделя. Действительно, при $N=1$ частные суммы ряда (1.17), как легко посчитать, преобразуются к виду

$$\sum_{k=2}^{2m} \alpha_k S_{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{2k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{2k}\right),$$

$$\sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_k S_{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{2k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{2k}\right)$$

и поэтому расходимость ряда (1.17) эквивалентна в случае $N = 1$ расходимости ряда (1.12).

Следствие 3.3. ВЦД (1.1) с положительными членами сходится, если существует такое целое неотрицательное число n, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+2n-1} \tag{1.33}$$

расходится.

Доказательство следует из теоремы 3.6, если предварительно члены ряда (1.17) перегруппировать по степеням N. ■

Установим интегральный признак сходимости ветвящейся цепной дроби (1.1) с положительными элементами. Для этого предварительно дадим определение континуального аналога ВЦД — интегральной цепной дроби [56, 62].

Пусть $b_0 \in \mathbb{C}$, $a_r(t^r)$, $b_r(t^r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные комплексные функции в r-мерном гиперкубе $K_r = [a, b]^r$, $t^r = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$. Бесконечную интегральную цепную дробь определим как предел выражений

$$b_0 + \mathop{D}_{r=1}^{k} \int_a^b \frac{a_r(t^r)\, dt_r}{b_r(t^r)} = b_0 + \int_a^b \cfrac{a_1(t^1)\, dt_1}{b_1(t^1) + \int_a^b \cfrac{a_2(t^2)\, dt_2}{b_2(t^2) + \cdots + \int_a^b \cfrac{a_k(t^k)\, dt_k}{b_k(t^k)}}} \tag{1.34}$$

при $k \to \infty$. Для записи бесконечной интегральной цепной дроби будем использовать обозначение

$$b_0 + \mathop{D}_{r=1}^{\infty} \int_a^b \frac{a_r(t^r) dt_r}{b_r(t^r)}. \tag{1.35}$$

Дробь (1.35) сходится, если существует и конечен предел последовательности ее подходящих дробей (1.34) при $k \to \infty$.

В работе [41] установлен необходимый признак сходимости интегральной цепной дроби

$$b_0 + \mathop{D}_{r=1}^{\infty} \int_a^b \frac{dt_r}{b_r(t^r)} \tag{1.36}$$

с положительными элементами $b_0 > 0$, $b_r(t^r) > 0$ $(r = 1, 2, \ldots)$, аналогичный теореме 3.2 для ВЦД.

Теорема 3.7. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max(b_r(t^r): t^r \in K_r) \qquad (1.37)$$

сходится, то интегральная цепная дробь (1.36) с положительными компонентами расходится.

Теорема 3.8 [11] **(Интегральный признак сходимости).** *Пусть* $K_r = [0, N]^r$ — *r-мерный гиперкуб и* $b_r(t^r)$, $t^r = (t_1, t_2, \ldots t_r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ — *положительные непрерывные функции в* K_r, *такие, что*

$$b_r(i^r) = b_{i(r)} \quad (i_r = \overline{1, N},\ r = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \max(b_r(t^r): t^r \in K_r) \max(b_r^{-1}(t^r): t^r \in K_r) < \infty. \qquad (1.38)$$

Тогда ВЦД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{r=1}{D}} \sum_{i_r=1}^{N} \frac{1}{b_{i(r)}} \qquad (1.39)$$

с положительными элементами сходится, если интегральная цепная дробь (1.36) сходится.

Доказательство. Из условия (1.38) следует, что существует костанта $M > 0$, для которой выполняются неравенства

$$\max(b_r(t^r): t^r \in K_r) \leqslant M \min(b_r(t^r): t^r \in K_r) \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Если α_r, β_r определяются согласно (1.4), то, очевидно,

$$\max(b_r(t^r): t^r \in K_r) \geqslant \beta_r, \quad \min(b_r(t^r): t^r \in K_r) \leqslant \alpha_r$$

и, следовательно,

$$\beta_r \leqslant M\alpha_r \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Пусть интегральная цепная дробь (1.36) сходится. В силу теоремы 3.7 ряд (1.37) расходится. Поэтому ряд (1.12) расходится. Так как $\beta_r \geqslant \alpha_r$, то и ряд (1.5) расходится. Сходимость ВЦД (1.39) следует из теоремы 3.9.

Необходимые и достаточные признаки сходимости

Теорема 3.9 [11]. *Если для ВЦД (1.1) с действительными положительными компонентами существует константа* $M > 0$, *такая, что*

$$\beta_k \leqslant M\alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (1.40)$$

где α_k и β_k определяются согласно (1.4), то эта дробь сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k. \tag{1.41}$$

Доказательство. Расходимость ряда (1.41) является необходимым условием сходимости ВЦД (1.1) в силу теоремы 3.2. Остается доказать достаточность. Из неравенства (1.40) следует, что для произвольных натуральных чисел n и i $(n > i)$

$$\beta_{2i} + \frac{N}{\alpha_{2i+1}} + \frac{N}{\beta_{2i+2}} + \frac{N}{\alpha_{2i+3}} + \dots + \frac{N}{\beta_{2n}} \leqslant$$

$$\leqslant M\alpha_{2i} + \frac{N}{\beta_{2i+1}/M} + \frac{N}{M\alpha_{2i+2}} + \frac{N}{\beta_{2i+3}/M} + \dots + \frac{N}{M\alpha_{2n}} =$$

$$= M\left(\alpha_{2i} + \frac{N}{\beta_{2i+1}} + \frac{N}{\alpha_{2i+2}} + \frac{N}{\beta_{2i+3}} + \dots + \frac{N}{\alpha_{2n}}\right), \tag{1.42}$$

где в последнем равенстве используются эквивалентные преобразования (4.1) гл. I и $\rho_{2k+1} = M$, $\rho_{2k+2} = M^{-1}$ $(k = \overline{i, n-1})$, $\rho_{2i} = 1$.

Цепная дробь

$$b_0 + \frac{N}{\alpha_1} + \frac{N}{\beta_2} + \frac{N}{\alpha_3} + \frac{N}{\beta_4} + \dots$$

в силу условий теоремы и критерия Зейделя сходится. Учитывая следствие 3.1, имеем

$$\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_{2k-1}\left(\beta_{2k} + \frac{N}{\alpha_{2k+1}} + \frac{N}{\beta_{2k+2}} + \dots + \frac{N}{\beta_{2m}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \beta_{2k}\left(\alpha_{2k+1} + \frac{N}{\beta_{2k+2}} + \frac{N}{\alpha_{2k+3}} + \dots + \frac{N}{\alpha_{2m+1}}\right)\right] = \infty \tag{1.43}$$

Из неравенств (1.40) и (1.42) следует, что выражение, стоящее под знаком предела (1.43), оценивается сверху выражением

$$M\sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \dots + \frac{N}{\alpha_s}\right),$$

где s определяется согласно (1.6). Поэтому из условия (1.43) следуют условия (1.9) и в силу теоремы 3.4 сходимость ВЦД (1.1).

Теорема 3.10 [9]. *Если для ВЦД (1.1) с положительными действительными элементами существует константа $M > 0$ такая, что*

$$\beta_k \leqslant M\alpha_{k+1}, \quad \beta_{k+1} \leqslant M\alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.44}$$

где α_k и β_k определяются согласно (1.4), то ВЦД (1.1) сходится тогда и только тогда, когда ряд (1.41) расходится.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.2. Доказательство достаточности основано на применении теоремы 3.28 (см. § 5). Рассмотрим последовательности

$$t_k = \alpha_k + \frac{1}{N^{-1}\beta_{k+1}} + \frac{1}{\alpha_{k+2}} + \frac{1}{N^{-1}\beta_{k+3}} + \frac{1}{\alpha_{k+4}} + \ldots, \tag{1.45}$$

$$T_k = \beta_k + \frac{1}{N^{-1}\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\beta_{k+2}} + \frac{1}{N^{-1}\alpha_{k+3}} + \frac{1}{\beta_{k+4}} + \ldots, \tag{1.46}$$

имеющие смысл в силу условий теоремы и критерия Зейделя сходимости цепных дробей.

Возможны два случая: $\varliminf\limits_{k\to\infty} t_k = \alpha > 0$, $\varliminf\limits_{k\to\infty} t_k = 0$. В первом случае последовательность $\{t_k\}$ ограничена снизу. Учитывая условие (1.44), заключаем, что расходимость ряда (1.41) эквивалентна расходимости ряда (1.12). Из ограниченности снизу последовательности $\{t_k\}$ и расходимости последнего ряда следует выполнение условия (1.13). Поэтому в силу теоремы 3.5 ВЦД (1.1) сходится.

Покажем методом от противного, что второй случай в условиях теоремы не имеет места. Пусть $\varliminf\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ и $\{t_{k_n}\}$ — подпоследовательность, стремящаяся к нулю. Поэтому для произвольного как угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ имеем $t_{k_n} \leqslant \varepsilon$. Так как

$$t_{k_n} = \alpha_k + \frac{N}{T_{k_n+1}}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} T_{k_n+1} = \infty.$$

Следовательно, для произвольного как угодно большого действительного числа $K > \varepsilon$ существует номер n_1, что $T_{k_n+1} \geqslant K$ для всех $n \geqslant n_1$. Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$ и $k_{n_2} = s$, тогда для всех $n \geqslant n_2$ имеем

$$|T_{k_n+1} - t_{k_n}| \geqslant K - \varepsilon,$$

в частности,

$$|T_{s+1} - t_s| \geqslant K - \varepsilon. \tag{1.47}$$

Обозначим через $t_s(2p)$, $T_{s+1}(2p)$ — $2p$-е аппроксиманты цепных дробей (1.45) и (1.46) соответственно. В силу сходимости (1.45) и (1.46) для уже выбранного ε существует такое p, что

$$t_s - t_s(2p) < \varepsilon, \quad T_{s+1} - T_{s+1}(2p) < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|T_{s+1} - t_s| \leqslant T_{s+1} - T_{s+1}(2p) + t_s - t_s(2p) + |T_{s+1}(2p) - \\ - t_s(2p)| \leqslant 2\varepsilon + |T_{s+1}(2p) - t_s(2p)|.$$

Учитывая утверждение теоремы 3.28, где $N = 1$, α_s, $N^{-1}\beta_{s+1}$, α_{s+2}, $N^{-1}\beta_{s+3}, \ldots, \alpha_{s+2p}$ — точные, а β_{s+1}, $N^{-1}\alpha_{s+2}$, β_{s+3}, $N^{-1}\alpha_{s+4}, \ldots, \beta_{s+2p+1}$ — соответственно приближенные значения частных знаменателей цепной дроби, имеем

$$|T_{s+1}(2p) - t_s(2p)| \leqslant t_s(2p) \max_{\substack{0<k<p \\ 1<m<p}} \left\{ \frac{|\beta_{s+1+2k} - \alpha_{s+2k}|}{\alpha_{s+2k}}, \right.$$

$$\left. \frac{|N^{-1}\alpha_{s+2m} - N^{-1}\beta_{s+2m-1}|}{N^{-1}\beta_{s+2m-1}} \left| 1 + \frac{N^{-1}\alpha_{s+2m} - N^{-1}\beta_{s+2m-1}}{N^{-1}\beta_{s+2m-1}} \right|^{-1} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant t_s(2p) \max_{\substack{0<k<p \\ 1<m<p}} \left\{ \frac{|\beta_{s+1+2k} - \alpha_{s+2k}|}{\alpha_{s+2k}}, \frac{|\beta_{s+2m-1} - \alpha_{s+2m}|}{\alpha_{s+2m}} \right\} \leqslant \varepsilon(M+1).$$

С учетом (1.47) приходим к противоречивому неравенству

$$K - \varepsilon \leqslant |T_{s+1} - t_s| \leqslant \varepsilon(M+3).$$

§ 2. Признаки сходимости ВЦД с неотрицательными элементами

Установим признаки сходимости ВЦД общего вида

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{2.1}$$

с неотрицательными компонентами $a_{i(k)} \geqslant 0$, $b_{i(k)} \geqslant 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$). Заметим, что для цепных дробей (1.15) с неотрицательными членами критерий Зейделя уже не справедлив. Так, цепная дробь

$$\frac{1}{0} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{0} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{0} + \cdots$$

с произвольными $b_{2k} > 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) расходится.

Теорема 3.11. *Пусть компонентами ВЦД (2.1) являются неотрицательные действительные числа* $b_{i(k)} \geqslant 0$, $a_{i(k)} > 0$ ($i = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$), *удовлетворяющие условиям:*

а) существует номер k_0, такой, что для каждого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ($i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, $k \geqslant k_0$), при котором $b_{i(k)} = 0$, справедливо неравенство $b_{i(k-1)j} > 0$ ($j = \overline{1, N}$, $j \neq i_k$);

б) расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k, \tag{2.2}$$

где

$$\delta_k = \min \left(\frac{b_{i(k)} b_{i(k+1)}}{a_{i(k+1)}} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k+1} \right). \tag{2.3}$$

Тогда ВЦД (2.1) сходится.

Доказательство. Из расходимости ряда (2.2) следует, что существует подпоследовательность $\{k_j\}$, такая, что $\delta_{k_j} \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots$). В дальнейшем, предполагая индекс j фиксированным, будем использовать обозначение $n = k_j$. Поэтому при каждом фиксированном j все $b_{i(n)} \neq 0$, $b_{i(n+1)} \neq 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n+1}$). Так как $a_{i(k)} \neq 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$), то, используя эквивалентные преобразования (4.2) гл. 1, ВЦД (2.1) приведем к виду (4.9) гл. 1, где $d_{i(k)}$ определяются согласно (4.10) гл. 1.

Подходящие дроби f_s ВЦД (4.9) гл. 1 имеют смысл и принимают конечные значения, если $s \geqslant k_1 \geqslant k_0$. Действительно, при $n = k_1$ все $d_{i(n)} > 0$. Формально вводя для ВЦД (4.9) гл. 1 обозначения типа (3.1) гл. 1, а именно:

$$Q_{i(n)}^{(n)} = d_{i(n)}, \quad Q_{i(k)}^{(n)} = d_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(k+1)}^{(n)}}, \tag{2.4}$$

где ($i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$) и используя метод математической индукции, убеждаемся в том, что все $Q_{i(k)}^{(n)}$ отличны от нуля и принимают конечные значения, т. е. $Q_{i(k)}^{(n)} \in (0, \infty)$. Следовательно,

$$f_n = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(1)}^{(n)}} \in (0, \infty).$$

Так как все $d_{i(n)} > 0$, $d_{i(n+1)} > 0$, то, учитывая условие а), являющееся необходимым для того, чтобы подходящие дроби f_s ($s \geqslant k_1$) имели смысл, получим

$$Q_{i(n)}^{(s)} \in (0, \infty) \quad (i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, n},\ n = k_1,\ s \geqslant n).$$

Учитывая, что

$$f_s = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{d_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{1}{d_{i(2)}} + \cdots + \sum_{i_{n-1}=1}^{N} \frac{1}{d_{i(n-1)}} + \sum_{i_n=1}^{N} \frac{1}{Q_{i(n)}^{(s)}},$$

и повторяя предыдущие рассуждения, приведенные для подходящей дроби f_n, заключаем, что $f_s \in (0, \infty)$, если $s \geqslant k_1$.

Вместе с ВЦД (4.9) гл. 1 рассмотрим ВЦД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{d_{i(k)} + \varepsilon}, \qquad (2.5)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное действительное число и обозначим ее s-ю подходящую дробь в смысле (1.11) гл. 1 через $f_s(\varepsilon)$. Так как элементами ВЦД (2.5) являются действительные положительные числа, то для этой дроби справедливо свойство вилки (3.4) гл. 1

$$f_{2k}(\varepsilon) < f_{2k+2}(\varepsilon) < f_{2j+1}(\varepsilon) < f_{2j-1}(\varepsilon)\,(k, j \in \mathbb{N}).$$

Поскольку существуют конечные пределы $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_k(\varepsilon) = f_k$, то для подходящих дробей ВЦД (4.9) гл. 1 справедливо свойство вилки

$$f_{2k} \leqslant f_{2k+2} \leqslant f_{2j+1} \leqslant f_{2j-1}\ (k, j \in \mathbb{N}). \qquad (2.6)$$

Отсюда следует, что для доказательства сходимости ВЦД (4.9) гл. 1 достаточно доказать, что $f_{k_j+1} - f_{k_j} \to 0$ при $j \to \to \infty$. Учитывая (3.3) гл. 1, ранее принятое обозначение $n = k_j$ и то, что $Q_{i(k)}^{(s)} > 0$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ k = \overline{1, s},\ s = n, n+1)$, имеем

$$f_{n+1} - f_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{r=1}^{n+1} Q_{i(r)}^{(n+1)} \prod\limits_{r=1}^{n} Q_{i(r)}^{(n)}}. \qquad (2.7)$$

Запишем произведения, стоящие в знаменателях (2.7) в виде

$$Q_{i(1)}^{(n+1)} \prod_{k=1}^{m} (Q_{i(2k)}^{(n+1)} Q_{i(2k+1)}^{(n+1)}) \prod_{k=1}^{m} (Q_{i(2k-1)}^{(n)} Q_{i(2k)}^{(n)}),$$

если $n = 2m$, или в виде

$$Q_{i(1)}^{(n)} \prod_{k=1}^{m} (Q_{i(2k)}^{(n)} Q_{i(2k+1)}^{(n)}) \prod_{k=1}^{m+1} (Q_{i(2k-1)}^{(n+1)} Q_{i(2k)}^{(n+1)}),$$

если $n = 2m + 1$. Учитывая обозначения (2.4), для $s = n$, $n+1$ и произвольного набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}$ $(r + 1 \leqslant s)$ имеем

$$Q^{(s)}_{i(r)} Q^{(s)}_{i(r+1)} = d_{i(r)} Q^{(s)}_{i(r+1)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q^{(s)}_{i(r+1)}}{Q^{(s)}_{i(r)j}} \geqslant$$

$$\geqslant \min \left(d_{i(r)} d_{i(r+1)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, r+1}\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q^{(s)}_{i(r+1)}}{Q^{(s)}_{i(r)j}}.$$

Из (4.10) гл. 1 следует, что

$$d_{i(r)} d_{i(r+1)} = \frac{b_{i(r)} b_{i(r+1)}}{d_{i(r+1)}}.$$

Таким образом,

$$|f_{n+1} - f_n| \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}=1}^{N} (Q^{(s)}_{i(1)})^{-1} \prod_{k=2}^{n+1} \left(\delta_{k-1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q^{(s)}_{i(k)}}{Q^{(s)}_{i(k-1)j}}\right)^{-1},$$

где

$$s = \begin{cases} n+1, & \text{если } n+k \text{ нечетное}, \\ n, & \text{если } n+k \text{ четное}. \end{cases}$$

Последовательно применяя неравенство (3.5) гл. 2, как и при доказательстве теоремы 3.4, получим оценку

$$|f_{n+1} - f_n| \leqslant C \prod_{k=1}^{n} \frac{N}{N + \delta_k},$$

откуда с учетом расходимости ряда (2.2) заключаем, что ВЦД (2.1) сходится.

Теперь рассмотрим общий случай, когда некоторые $a_{i(k)} = 0$.

Теорема 3.12. *Пусть компонентами ВЦД (2.1) являются неотрицательные действительные числа* $b_{i(k)} \geqslant 0$, $a_{i(k)} \geqslant 0$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$, *удовлетворяющие условиям:*

а) $a_{i(k)} + b_{i(k)} \neq 0$ $\quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$;

б) если существует такой набор индексов $i_1, i_2, \ldots i_k$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ k \geqslant 2)$, *что* $b_{i(k)} = 0$, *то предполагается, что все остальные* $b_{i(k-1)j} \neq 0$ $(j = \overline{1, N},\ j \neq i_k)$;

в) $b_{i(1)} > 0$ $(i_1 = \overline{1, N})$.

Тогда ВЦД (2.1) сходится, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, что все $a_{i(k)} = 0$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$, *либо расходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k,$$

где δ_k определяются согласно (2.3), причем те наборы индексов, при которых $a_{i(k+1)} = 0$ при минимизации (2.3) не учитываются.

Доказательство. Легко проверить, учитывая условия а)—в) теоремы, что все дроби (3.1) гл. 1 $Q_{i(k)}^{(m)}$ имеют смысл и $Q_{i(k)}^{(m)} \in [0, \infty]$ $(i_k = \overline{1, N}, k = 1, 2, \ldots, m \geqslant k)$. Так как $b_{i(1)} > 0$ $(i_1 = \overline{1, N})$, то $Q_{i(1)}^{(m)} \in (0, \infty]$. Поэтому m-е аппроксиманты f_m $(m = 1, 2, \ldots)$ ВЦД (2.1) имеют смысл и принимают конечные значения.

Рассмотрим ВЦД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} + \varepsilon}{b_{i(k)} + \varepsilon}, \tag{2.8}$$

где ε — произвольное действительное положительное число, и обозначим ее s-ю аппроксиманту в смысле (1.11) гл. 1 через $f_s(\varepsilon)$. Как и в предыдущей теореме, предельным переходом по ε, стремящемся к нулю, для ВЦД (2.1) устанавливаем свойство вилки (2.6).

Если при некотором наборе индексов $a_{i(k)} = 0$, то согласно условиям теоремы $b_{i(k)} \neq 0$ и поэтому $Q_{i(k)}^{(s)} \in (0, +\infty]$ $(s \geqslant k)$. Следовательно, $a_{i(k)}/Q_{i(k)}^{(s)} = 0$ $(s \geqslant k)$ и s-ю подходящую дробь ВЦД (2.1) можно записать в виде

$$f_s = b_0 + \overset{s}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{2.9}$$

где $0 \leqslant n_{i(k-1)} \leqslant N$, $a_{i(k)} \neq 0$, причем предполагается, что если верхний индекс суммирования больше нижнего, то сумма равна нулю. Числа $n_{i(k-1)}$ не зависят от s.

Если при некотором m все $a_{i(m)} = 0$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, m})$, то для произвольного $s \geqslant m$ $f_s = f_{m-1}$ и сходимость ВЦД (2.1) очевидна.

Пусть при каждом $k = 1, 2, \ldots$ существует набор индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, что $n_{i(k)} \geqslant 1$. Тогда обозначения (2.3) имеют смысл, так как набор индексов, по которым происходит минимизация, является непустым множеством. s-ю аппроксиманту ВЦД (2.1) запишем в виде

$$f_s = b_0 + \overset{s}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{1}{d_{i(k)}}, \tag{2.10}$$

где $d_{i(k)}$ определяется согласно (4.10) гл. 1. Из расходимости ряда (2.2) следует, что существует подпоследовательность

$\{k_j\}$, такая, что $\delta_{k_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Пусть $m = k_j$. Тогда $d_{i(m)} > 0$, $d_{i(m+1)} > 0$ $(i_k = \overline{1, n_{i(k-1)}},\ k = \overline{1, m+1})$. Поэтому $Q_{i(k)}^{(s)} > 0$, где $s = m, m+1$ и рассматриваются допустимые наборы индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Тогда

$$f_{m+1} - f_m = \sum_{i_1=1}^{n_{i(0)}} \sum_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{n_{i(m)}} \frac{(-1)^m}{\prod\limits_{r=1}^{m+1} Q_{i(r)}^{(m+1)} \prod\limits_{r=1}^{m} Q_{i(r)}^{(m)}}.$$

Повторяя доказательство предыдущей теоремы с учетом неравенства (3.5) гл. 2 и неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} \leqslant \frac{n}{\delta + n} \leqslant \frac{N}{\delta + N},$$

где $n \leqslant N$, $x_i > 0$, $\delta \geqslant 0$, получим оценку

$$|f_{m+1} - f_m| \leqslant C \prod_{k=1}^{m} \frac{N}{N + \delta_k},$$

откуда с учетом расходимости ряда (2.2) следует сходимость ВЦД (2.1).

§ 3. Признаки сходимости ВЦД с комплексными компонентами

Рассмотрим теорему, которая переносит достаточные признаки сходимости ВЦД

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \qquad (3.1)$$

с положительными элементами $b_{i(k)} > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N})$ на тот случай, когда все частные знаменатели (3.1) являются комплексными числами, принадлежащими области

$$G_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}, \qquad (3.2)$$

где ε — произвольное как угодно малое положительное действительное число $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Она является многомерным аналогом теоремы Ван Флека (теорема 4).

Теорема 3.13. *Пусть все частные знаменатели ВЦД (3.1) принадлежат области (3.2). Тогда*

1) каждая m-я аппроксиманта f_m $(m=1, 2, \ldots)$ ВЦД (3.1) принадлежит области (3.2);

2) существуют конечные пределы четных f_{2n} и нечетных f_{2n+1} подходящих дробей при $n\to\infty$;

3) ВЦД (3.1) сходится, если при введении обозначений

$$\alpha_k=\min(|b_{i(k)}|: i_p=\overline{1, N},\ p=\overline{1, k}),$$
$$\beta_k=\max(|b_{i(k)}|: i_p=\overline{1, N},\ p=\overline{1, k})$$

выполняется одно из условий:

а) *расходится ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k S_{k-1},$$

где S_k определяется согласно (1.18);

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}}+\frac{N}{\alpha_{k+2}}+\frac{N}{\beta_{k+3}}+\ldots+\frac{N}{\alpha_s}\right)=\infty,$$

где $s=2m+k-2[k/2]$;

в) интегральная цепная дробь

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\int_0^N\frac{dt_k}{b_k(t^k)}\tag{3.3}$$

сходится, где $b_r(t^r)$, $t^r=(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ $(r=1, 2, \ldots)$ — непрерывные положительные функции в гиперкубе $K^r=[0, N]^r$, такие, что

$$b_r(i^r)=|b_{i(r)}|\quad (i_r=\overline{1, N},\ r=1, 2, \ldots)$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\max(b_r(t^r): t^r\in K^r)\max(b_r^{-1}(t^r): t^r\in K^r)<\infty.\tag{3.4}$$

Доказательство. Если $b_{i(m)}\in G_\varepsilon$, то, очевидно, $1/b_{i(m)}\in G_\varepsilon$, $\left(b_{i(m-1)}+\sum\limits_{i_m=1}^{N}\frac{1}{b_{i(m)}}\right)\in G_\varepsilon$ и т. д.

Следовательно, пункт 1) выполняется при произвольном $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим ВЦД

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k)}(z)},\tag{3.5}$$

где

$$b_{i(k)}(z)=|b_{i(k)}|\exp(i\gamma_{i(k)}z),\quad \gamma_{i(k)}=\arg b_{i(k)},\quad i\in\mathbb{C},\quad i=\sqrt{-1}.$$

Пусть

$$|\operatorname{Re} z|<1+\varepsilon(\pi-2\varepsilon)^{-1}. \tag{3.6}$$

Тогда

$$|\arg b_{i(k)}(z)|=|\gamma_{i(k)}\operatorname{Re} z|<\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{\pi-2\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=$$
$$=\frac{\pi}{2}-\delta.$$

Следовательно, $b_{i(k)}(z)\in G_\delta$, где $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, если z принадлежит области (3.6). Поэтому в силу пункта 1) заключаем, что все m-е подходящие дроби ВЦД (3.3) $f_m(z)\,(m=1,2,\dots)$ являются голоморфными функциями z.

Рассмотрим область

$$D=\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re} z|<1+\varepsilon(\pi-2\varepsilon)^{-1},\ |\operatorname{Im} z|<1\}.$$

Для $z\in D$ и последовательности голоморфных функций $\{f_m(z)\}$ выполняются условия теоремы Стилтьеса—Витали (см. теорему 2.13), где, например, $a=-1$, $b=-2$.

Пусть $z\in\Delta$ и $\Delta=\{w\colon \operatorname{Re} w=0,\ |\operatorname{Im} w|<1\}$. Тогда ВЦД (3.5) запишется в виде

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{\hat{b}_{i(k)}}, \tag{3.7}$$

где $\hat{b}_{i(k)}=|b_{i(k)}|\exp(-\gamma_{i(k)}\operatorname{Im} z)>0$. Из свойства вилки (3.4) гл. 1 следует, что для ВЦД (3.7) всегда существуют пределы четных и нечетных подходящих дробей. Поэтому в силу теоремы Стилтьеса—Витали существуют пределы $f_{2m}(1)$ и $f_{2m+1}(1)$, т. е. выполняется пункт 2) теоремы.

Докажем пункт 3) в предположении, что выполняется условие а).

Пусть $z\in\Delta$ фиксировано и

$$\hat{\alpha}_k=\min(\hat{b}_{i(k)}:i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}),\ \hat{\beta}_k=\max(\hat{b}_{i(k)}:i_p=$$
$$=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}).$$

Так как $\hat{\alpha}_k\geqslant\exp(-\pi/2)\,\alpha_k$, $\hat{\beta}_k\leqslant\exp(\pi/2)\,\beta_k$, то

$$\alpha_{k+1}S_k\leqslant e^{\pi}\hat{\alpha}_{k+1}\left(\hat{\alpha}_k+N^{-1}\hat{\alpha}_{k-2}+\dots+N^{-\left[\frac{k-1}{2}\right]}\hat{\alpha}_{k-2\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right).$$

и в силу теоремы 3.6 и условия а) ВЦД (3.5) сходится для каждого $z \in \Delta$. Из теоремы Стилтьеса—Витали следует, что ВЦД (3.5) сходится на каждом компакте области D, в частности в точке $z = 1$, что равносильно сходимости ВЦД (3.1).

Пункт б) доказывается аналогичным образом с учетом теорем 3.4, Стилтьеса—Витали и неравенства

$$\sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \frac{N}{\beta_{k+3}} + \dots + \frac{N}{\alpha_s}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{2m+1} e^{\frac{\pi}{2}}\hat{\alpha}_{k-1}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\hat{\alpha}_k + \frac{N}{e^{-\frac{\pi}{2}}\hat{\beta}_{k+1}} + \frac{N}{e^{\frac{\pi}{2}}\hat{\alpha}_{k+2}} + \dots + \frac{N}{e^{\frac{\pi}{2}}\hat{\alpha}_s}\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{2m+1} e^{\pi}\hat{\alpha}_{k-1}\left(\hat{\alpha}_k + \frac{N}{\hat{\beta}_{k+1}} + \frac{N}{\hat{\beta}_{k+2}} + \frac{N}{\hat{\beta}_{k+3}} + \dots + \frac{N}{\hat{\alpha}_s}\right) .$$

Из сходимости интегральной цепной дроби (3.3) следует в силу теоремы 3.7, что расходится ряд (1.37). Условие (3.4) эквивалентно тому, что существует константа $M > 0$, такая, что

$$\max(b_r(t^r) : t^r \in K^r) \leqslant M \min(b_r(t^r) : t^r \in K^r).$$

Так как

$$\max(b_r(t^r) : t^r \in K^r) \geqslant \beta_r \geqslant e^{-\frac{\pi}{2}}\hat{\beta}_r, \quad \min(b_r(t^r) : t^r \in K^r) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_r \leqslant e^{\frac{\pi}{2}}\hat{\alpha}_r,$$

то $\hat{\beta}_r \leqslant M e^{\pi}\hat{\alpha}_r$. Из расходимости ряда (1.37) следует расходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \hat{\beta}_r.$$

Учитывая теоремы 3.9 и Стилтьеса—Витали, завершаем доказательство теоремы. ■

Следующая теорема является многомерным аналогом теоремы Ворпитского (теорема 2).

Теорема 3.14 [4, 7]. *Если для ВЦД*

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.8}$$

где $c_{i(k)}$ — комплексные числа, выполняются условия

$$|c_{i(k)}| \leqslant \alpha = N^{-1}t(1-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \ (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots), \tag{3.9}$$

то

1) *ВЦД (3.8) сходится;*
2) *справедливы оценки скорости сходимости*

$$|f_n - f_m| \leqslant \frac{(1-2t)\, t^m (1-t)^m [(1-t)^{n-m} - t^{n-m}]}{[(1-t)^{n+1} - t^{n+1}]\,[(1-t)^{m+1} - t^{m+1}]}, \quad \text{если } 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \tag{3.10}$$

или

$$|f_n - f_m| \leqslant \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}, \quad \text{если } t = \frac{1}{2}, \tag{3.11}$$

где $n > m$ и f_k — k-я подходящая дробь ВЦД (3.8);

3) *значения дроби (3.8) и всех ее подходящих дробей принадлежат области*

$$|z - (1-t^2)^{-1}| \leqslant t(1-t^2)^{-1}; \tag{3.12}$$

4) *предельные константа $\alpha = 1/(4N)$ и соотвествующая область значений являются наилучшими, т. е. константу нельзя увеличить, а область уменьшить.*

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия (3.9) мажорантой ВЦД (3.8) является периодическая непрерывная дробь

$$\frac{1}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \cdots. \tag{3.13}$$

Обозначим P_m, Q_m, g_m соответственно m-й числитель, m-й знаменатель и m-ю аппроксиманту дроби (3.13). Используя метод математической индукции с учетом рекуррентных формул (8), легко доказать, что

$$Q_m = (1-t)^m + t(1-t)^{m-1} + t^2(1-t)^{m-2} + \cdots + t^m \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{3.14}$$

$$P_m = Q_{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{3.15}$$

Из (3.14) следует, что $Q_m > 0$ для $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому подходящие дроби (3.13) являются положительными числами, т. е. $g_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Если для ВЦД (3.8) ввести обозначения, аналогичные (3.1) гл. 1, и в предположении, что все $Q^{(s)}_{i(k)} \neq 0$ $(s = m-1, n-1)$, применить методику, приводящую при установлении формулы разности двух подходящих дробей n-го и m-го норядков ($n>m$), то, как легко проверить, в нашем случае получим

$$f_n - f_m = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^{N} \frac{(-1)^m \prod\limits_{k=1}^{m} c_{i(k)}}{\prod\limits_{k=0}^{m} Q_{i(k)}^{(n-1)} \prod\limits_{k=0}^{m-1} Q_{i(k)}^{(m-1)}}, \qquad (3.16)$$

где

$$Q_{i(0)}^{(s)} = Q^{(s)} = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} \quad (s = m-1,\ n-1). \qquad (3.17)$$

Используя метод математической индукции, докажем, что при выполнении условий теоремы для произвольного набора индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ и произвольного натурального $s \geqslant k$

$$|Q_{i(k)}^{(s)}| \geqslant h_{s-k} \quad (k \leqslant s,\ s = 1, 2, \dots), \qquad (3.18)$$

где h_m — m-я аппроксиманта цепной дроби

$$1 - \frac{t(1-t)}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \dots. \qquad (3.19)$$

Фиксируем s. Проводим индукцию по k. При $k=s$ имеем

$$Q_{i(s)}^{(s)} = 1 = h_0.$$

При $k = s-1$ получим

$$|Q_{i(s-1)}^{(s)}| = \left|1 + \sum_{i_s=1}^{N} \frac{c_{i(s)}}{1}\right| \geqslant 1 - NN^{-1}t(1-t) = h_1.$$

Пусть неравенство (3.18) выполняется при $k = n+1$. Докажем его справедливость при $k = n$. Имеем

$$|Q_{i(n)}^{(s)}| = \left|1 + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{c_{i(n+1)}}{Q_{i(n+1)}^{(s)}}\right| \geqslant 1 - \frac{t(1-t)}{h_{s-k-1}} = h_{s-k},$$

так как $h_k = g_{k+1}^{-1} > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Запишем формулу типа (3.16) для непрерывной дроби (3.13)

$$g_n - g_m = \frac{t^m (1-t)^m}{\prod\limits_{k=0}^{m} h_{n-k-1} \prod\limits_{k=0}^{m-1} h_{m-k-1}}.$$

Учитывая неравенство (3.18), получим

$$|f_n - f_m| \leqslant \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m = 1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} |c_{i(k)}|}{\prod\limits_{k=0}^{m} |Q_{i(k)}^{(n-1)}| \prod\limits_{k=0}^{m-1} |Q_{i(k)}^{(m-1)}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^m (1-t)^m}{\prod\limits_{k=0}^{m} h_{n-k-1} \prod\limits_{k=0}^{m-1} h_{m-k-1}} = g_n - g_m.$$

Так как периодическая цепная дробь (3.13), где $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, сходится (см. теорему 7), то заключаем, что ВЦД (3.8) также сходится и справедлива оценка

$$|f_n - f_m| \leqslant \frac{t^m (1-t)^m}{\prod\limits_{k=0}^{m} h_{n-k-1} \prod\limits_{k=0}^{m-1} h_{m-k-1}}. \tag{3.20}$$

Учитывая, что $h_k = g_{k+1}^{-1} = Q_{k+1}/Q_k$, получим

$$|f_n - f_m| \leqslant \frac{t^m (1-t)^m Q_{n-m-1}}{Q_n Q_m}. \tag{3.21}$$

При $t = 1/2$ имеем $Q_p = 2^{-p}(p+1)$ и оценка (3.21) преобразуется в (3.11). При $0 \leqslant t < 1/2$ в (3.14) сделаем замену $t = x^{-1}$, тогда

$$Q_p = \frac{(x-1)^p}{x^p} + \frac{(x-1)^{p-1}}{x^p} + \frac{(x-1)^{p-2}}{x^p} + \dots + \frac{1}{x^p} =$$

$$= \frac{(x-1)^{p+1} - 1}{x^p (x-2)},$$

где $x > 2$. Возвращаясь к переменной t, получим

$$Q_p = [(1-t)^{p+1} - t^{p+1}](1-2t)^{-1}. \tag{3.22}$$

Подставляя (3.22) в неравенство (3.21), получим оценку разности двух подходящих дробей, совпадающую с (3.10). Оценки (3.10) и (3.11) точные. Они достигаются для ВЦД (3.8), у которой $c_{i(k)} = -N^{-1}t(1-t)$ $(k = 1, 2, \dots, i_k = \overline{1, N})$.

Справедливо неравенство

$$\frac{(1-2t)[(1-t)^{n-m} - t^{n-m}]}{[(1-t)^{n+1} - t^{n+1}][(1-t)^{m+1} - t^{m+1}]} \leqslant (1-t)^{-2m-1},$$
$$0 \leqslant t < 1/2, \tag{3.23}$$

которое легко устанавливается, если ввести замену $y = t(1-t)^{-1}$ и учесть, что $0 \leqslant y < 1$. Действительно, в этом случае (3.23) сводится к очевидному неравенству

$$(1-y)(1-y^{n-m}) \leqslant (1-y^{m+1})(1-y^{n+1}), \quad n > m, \quad 0 \leqslant y < 1.$$

Из (3.23) следует более прозрачная, но и более грубая оценка

$$|f_n - f_m| \leqslant (1-t)^{-m-1} t^m. \tag{3.24}$$

Докажем пункт 3). m-ю аппроксиманту ВЦД (3.8) запишем в виде

$$z = \left(1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m-1)}}\right)^{-1} = (1+w)^{-1}.$$

Из (3.18) и (3.9) следует, что

$$|w| \leqslant \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}|}{|Q_{i(1)}^{(m-1)}|} \leqslant \frac{t(1-t)}{h_{m-2}} = t(1-t) g_{m-1}.$$

Обозначим g значение бесконечной цепной дроби (3.13). Последовательность $\{g_m\}$ монотонно возрастает. Действительно, так как $Q_m > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то, учитывая (8), имеем

$$g_m - g_{m-1} = \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m+1}[-t(1-t)]^{m-1}}{Q_m Q_{m-1}} \geqslant 0.$$

Следовательно, $|w| \leqslant t(1-t)g$. Так как $g = [1 - t(1-t)g]^{-1}$ то, учитывая, что при $t = 0$ $g = 1$, решая квадратное уравнение относительно g, получим $g = (1-t)^{-1}$. Поэтому

$$\left|\frac{1-z}{z}\right| = |w| \leqslant t,$$

откуда после несложных вычислений следует (3.12).

Докажем п. 4). То, что константа $\alpha = 1/(4N)$ является наилучшей, следует уз условия, что ВЦД (3.8), где $c_{i(k)} = -c$ $(i_k = \overline{1, N}, k = 1, 2, \ldots)$ и $c > 1/(4N)$, согласно теореме 7 расходится.

Область $|z - 4/3| \leqslant \frac{2}{3}$ является наилучшей, так как значение ВЦД (3.8), у которой $c_{i(1)} = c$ $(i_1 = \overline{1, N})$ $c_{i(k)} = -1/(4N)$ $(i_p = \overline{1, N}, p = \overline{1, k}, k \geqslant 2)$, равно $(1 + 2Nc)^{-1}$. Если $|c| \leqslant 1/(4N)$, то наилучшей областью значений данной ВЦД является область $|z - 4/3| \leqslant \frac{2}{3}$. ■

Замечание 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.14. Из оценок (3.11), если $t=\frac{1}{2}$, или (3.24), если $0\leqslant t<1/2$, следует сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f_{n+1}-f_n|.$$

Следовательно, если для ВЦД (3.8) с комплексными частными числителями выполняются условия (3.9), то она абсолютно сходится.

Теорема 3.15. *Пусть для ВЦД*

$$b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}}{1}, \tag{3.25}$$

где b_0, $c_{i(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ i_k=\overline{1,\ N})$ — *комплексные числа, выполняются условия*

$$|c_{i(k)}|\leqslant N^{-1}g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ i_k=\overline{1,\ N},\ i_0=0), \tag{3.26}$$

$$g_{i(k)}\in\mathbb{R},\ 0\leqslant g_{i(k)}<1,\ g_{i(0)}=g_0=0\ (k=1,\ 2,\ldots,\ i_k=\overline{1,\ N}) \tag{3.27}$$

или

$$g_{i(k)}\in\mathbb{R},\ 0<g_{i(k)}\leqslant 1,\ g_{i(0)}=g_0=0\ (k=1,\ 2,\ \ldots\ \ldots,\ i_k=\overline{1,\ N}). \tag{3.28}$$

Тогда ВЦД (3.25) абсолютно сходится и ее областью значения является круг: $|z-b_0|\leqslant 1$.

Доказательство. Покажем, что мажорантой ВЦД (3.25) является ВЦД

$$|b_0|+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-N^{-1}g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})}{1}. \tag{3.29}$$

Для ВЦД (3.29) введем сокращенные рекуррентные обозначения, аналогичные (3.1) гл. 1

$$\hat{Q}^{(s)}_{i(s)}=1,\quad \hat{Q}^{(s)}_{i(p)}=1+\sum_{i_{p+1}=1}^{N}\frac{-N^{-1}g_{i(p+1)}(1-g_{i(p)})}{\hat{Q}^{(s)}_{i(p+1)}}, \tag{3.30}$$

где $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ p=\overline{1,\ s-1},\ i_k=\overline{1,\ N},\ k=\overline{1,\ s})$. Методом математической индукции докажем справедливость неравенств

$$|Q^{(s)}_{i(k)}|\geqslant\hat{Q}^{(s)}_{i(k)}\ (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k=\overline{1,\ s},\ i_k=\overline{1,\ N}) \tag{3.31}$$

и

$$\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} > g_{i(k)} \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k = \overline{1, s},\ i_k = \overline{1, N}), \qquad (3.32)$$

если выполняются ограничения (3.27);

$$\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} \geqslant g_{i(k)} \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k = \overline{1, s},\ i_k = \overline{1, N}), \quad (3.33)$$

если выполняются ограничения (3.28).

При $k = s$ неравенства (3.31) — (3.33) очевидны. При $k = s - 1$ имеем

$$|Q_{i(s-1)}^{(s)}| \geqslant 1 - \sum_{i_s=1}^{N} |c_{i(s)}| \geqslant 1 - \sum_{i_s=1}^{N} N^{-1} g_{i(s)} \times$$
$$\times (1 - g_{i(s-1)}) = \hat{Q}_{i(s-1)}^{(s)}$$

Заменяя $g_{i(s)}$ единицей, получим (3.32) или (3.33), где $k = s - 1$.

Пусть неравенства (3.31) — (3.33) выполняются при $k = p + 1 \leqslant s$. Докажем их справедливость при $k = p$. Имеем

$$|Q_{i(p)}^{(s)}| = \left| 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{c_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}} \right| \geqslant 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{|c_{i(p+1)}|}{|Q_{i(p+1)}^{(s)}|} \geqslant$$
$$\geqslant 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{-N^{-1} g_{i(p+1)} (1 - g_{i(p)})}{\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}} = \hat{Q}_{i(p)}^{(s)}.$$

Учитывая, что в силу оценок (3.32), (3.33) $\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)} \neq 0$, и заменяя $g_{i(p+1)}$ на $\hat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}$, получим (3.32), (3.33) при $k = p$.

Следовательно, все $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$, $\hat{Q}_{i(k)}^{(s)} > 0$. Воспользовавшись формулой (3.3) гл. 1 для разностей подходящих дробей ВЦД (3.25) и (3.29) $f_n - f_m$ и $\hat{g}_n - \hat{g}_m$, где $n > m$, получим

$$|f_n - f_m| \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{m+1} |c_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} |Q_{i(k)}^{(n)}| \prod_{k=1}^{m} |Q_{i(k)}^{(m)}|} \leqslant$$
$$\leqslant (-1)^{m+1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{(-1)^{m+1} \prod_{k=1}^{m+1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)})}{N^{m+1} \prod_{k=1}^{m+1} \hat{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod_{k=1}^{m} \hat{Q}_{i(k)}^{(m)}} =$$
$$= -(\hat{g}_n - \hat{g}_m).$$

Таким образом,

$$|f_n - f_m| \leqslant \hat{g}_m - \hat{g}_n, \quad n \geqslant m. \tag{3.34}$$

Последовательность $\hat{g}_n$ монотонно убывает и в силу неравенств (3.32), (3.33) ограничена снизу

$$\hat{g}_n = |b_0| + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-N^{-1} g_{i(1)}}{\hat{Q}_{i(1)}^{(n)}} \geqslant |b_0| - 1.$$

Поэтому предел $\hat{g} = \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n$ существует и конечен.

Абсолютная сходимость (3.25) следует из неравенства (3.34). Учитывая (3.32) или (3.33) и условия (3.26), имеем

$$|f_n - b_0| \leqslant \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}|}{|Q_{i(1)}^{(n)}|} \leqslant 1. \tag{3.35}$$

Поэтому область значений ВЦД (3.25) принадлежит кругу $|z - b_0| \leqslant 1$. Покажем, что она совпадает с этим кругом. Пусть c — произвольное комплексное число, такое что $|c| < 1$. Тогда первая аппроксиманта f_1 ВЦД (3.25), у которой $c_{i(1)} = N^{-1}c$ ($i_1 = \overline{1, N}$), а все остальные $c_{i(k)}$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям (3.26), принимает значение $b_0 + c$. Если же $|c| = 1$, то ВЦД (3.25), у которой $c_{i(1)} = (2N)^{-1}c$ ($i_1 = \overline{1, N}$), $c_{i(k)} = -1/(4N)$ ($i_s = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, k}$, $k \geqslant 2$) удовлетворяет ограничениям (3.26), где $g_{i(1)} = \frac{1}{2}|c| = \frac{1}{2}$, $g_{i(k)} = \frac{1}{2}$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k \geqslant 2$) и принимает значение $b_0 + c$. ■

В качестве следствий теоремы 3.15 получим два признака сходимости, которые можно интерпретировать как многомерные обобщения теоремы Слешинского—Прингсгейма (теорема 3).

Теорема 3.16. [43]. *Ветвящаяся цепная дробь*

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{3.36}$$

с комплексными числовыми элементами, удовлетворяющими условиям

$$|b_{i(k)}| \geqslant |a_{i(k)}| + N \quad (i_k = \overline{1, N}, \ k = 1, 2, \ldots), \tag{3.37}$$

абсолютно сходится и ее областью значений является круг

$$|z - b_0| \leqslant N. \tag{3.38}$$

Доказательство. Из условия (3.37) следует, что $b_{i(k)} \neq 0$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$. Используя эквивалентные преобразования (4.2) гл. 1 приведем ВЦД (3.36) к виду (3.25), где

$$c_{i(k)} = \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} b_{i(k-1)}} \quad (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}, b_{i(0)} = 1).$$

Пусть

$$g_{i(k)} = \frac{|a_{i(k)}|}{|a_{i(k)}| + N}.$$

Тогда $0 \leqslant g_{i(k)} < 1$ и в силу (3.37)

$$|c_{i(k)}| \leqslant \frac{|a_{i(k)}|}{(|a_{i(k)}| + N)(|a_{i(k-1)}| + N)} = N^{-1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}),$$

если $k \geqslant 2$ или $|c_{i(1)}| \leqslant g_{i(1)} = N N^{-1} g_{i(1)} (1 - g_{i(0)})$, где $g_{i(0)} = g_0 = 0$. Поэтому ВЦД (3.36) абсолютно сходится и ее область значений содержится в круге (3.38). В такой формулировке теорема 3.16 была установлена Н. А. Недашковским [43].

Докажем большее, а именно, что область значений дроби (3.36) совпадает с (3.38). Пусть c — произвольное комплексное число, такое что $|c| < N$, тогда первая аппроксиманта f_1 ВЦД (3.36), у которой $a_{i(1)} = Nc(N - |c|)^{-1}$, $b_{i(1)} = N|c|(N - |c|)^{-1} + N$ $(i_1 = \overline{1, N})$ $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ k \geqslant 2)$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям (3.37), принимает значение $b_0 + c$. Если же $c = Ne^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi \leqslant \pi)$, то рассмотрим ВЦД, удовлетворяющую соотношениям (3.37),

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_1 \exp(i\varphi)}{c_1 + N + \mathop{D}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{-c_k}{c_k + N}}, \tag{3.39}$$

где $c_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Она эквивалентна цепной дроби

$$b_0 + \frac{g_1 c}{1} - \frac{g_2(1 - g_1)}{1} - \frac{g_3(1 - g_2)}{1} - \ldots, \tag{3.40}$$

у которой $g_k = c_k(c_k+N)^{-1}$ и значение которой согласно [100] равно

$$b_0 + c\left[1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{k} \frac{g_l}{1-g_l}\right)^{-1}\right]. \qquad (3.41)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{k} \frac{g_l}{1-g_l} = \sum_{k=1}^{\infty} N^{-k} \prod_{l=1}^{k} c_l,$$

то ВЦД (3.39) принимает значение $b_0 + c$, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} N^{-k} \prod_{l=1}^{k} c_l$ расходится. ■

Теорема 3.17. *ВЦД (3.36) с комплексными числовыми элементами, удовлетворяющими условиям*

$$|b_{i(k)}| \geqslant |a_{i(k)}| N + 1 \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots), \qquad (3.42)$$

абсолютно сходится и ее областью значений является круг

$$|z - b_0| \leqslant 1. \qquad (3.43)$$

Доказательство. Повторив начало доказательства теоремы 3.16 и взяв

$$g_{i(k)} = N|a_{i(k)}|(N|a_{i(k)}| + 1)^{-1},$$

убедимся в том, что $0 \leqslant g_{i(k)} < 1$ и

$$|c_{i(k)}| = \frac{|a_{i(1)}|}{|b_{i(1)}|} \leqslant \frac{|a_{i(1)}|}{N|a_{i(1)}| + 1} = N^{-1} g_{i(1)}(1 - g_{i(0)}),$$

где $g_{i(0)} = g_0 = 0$, а также

$$|c_{i(k)}| \leqslant \frac{|a_{i(k)}|}{(N|a_{i(k)}| + 1)(N|a_{i(k-1)}| + 1)} = N^{-1} g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}).$$

Поэтому согласно теореме 3.15 ВЦД (3.36) абсолютно сходится и в силу (3.35) ее область значений содержится в круге (3.43). Докажем, что она совпадает с этим кругом.

Если c — произвольное комплексное число, такое, что $|c| < 1$, то первая подходящая дробь f_1 ВЦД (3.36), у которой

$$a_{i(1)} = \frac{c}{(1 - |c|)N}, \quad b_{i(1)} = \frac{|c|}{1 - |c|} + 1 \quad (i_1 = \overline{1, N}|,$$

$a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ k \geqslant 2)$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям (3.42), принимает значение b_0+c. Пусть $c=e^{i\varphi}$ $(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$. Рассмотрим ВЦД

$$b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{c_1\cdot c}{Nc_1+1+\overset{\infty}{\underset{k=2}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-c_k}{Nc_k+1}},\tag{3.44}$$

где $c_k>0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Она эквивалентна цепной дроби (3.40), у которой $g_k=Nc_k(Nc_k+1)^{-1}$. Значение ВЦД (3.44) равно (3.41).

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{k}\frac{g_l}{1-g_l}=\sum_{k=1}^{\infty}N^k\prod_{l=1}^{k}c_l,$$

то ВЦД (3.44) принимает значение b_0+c, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}N^k\prod\limits_{l=1}^{k}c_l$ расходится. ■

Ниже мы приведем некоторые следствия теорем 3.15—3.17.

Следствие 3.4 [45]. ВЦД (3.36) абсолютно сходится, если существуют такие действительные числа $p_{i(k)}>N$ $(i_k=\overline{1,\ N},$ $k=1,\ 2,\ \ldots)$, что выполняются неравенства

$$\left|\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}\right|\leqslant\frac{p_{i(1)}-N}{p_{i(1)}}\quad(i_1=\overline{1,\ N}),\tag{3.45}$$

$$\left|\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)}b_{i(k)}}\right|\leqslant\frac{p_{i(k)}-N}{p_{i(k-1)}p_{i(k)}}\,(i_p=\overline{1,\ N},\ p=\overline{1,\ k},\ k\geqslant2).\tag{3.46}$$

Доказательство. Вместе с ВЦД (3.36) рассмотрим ей эквивалентную ВЦД

$$b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}\rho_{i(k-1)}\rho_{i(k)}}{b_{i(k)}\rho_{i(k)}},\tag{3.47}$$

где $\rho_{i(0)}=1$, $\rho_{i(k)}\neq0$ $(i_k=\overline{1,\ N},\ k=1,\ 2,\ \ldots)$. Если положить $\rho_{i(k)}=p_{i(k)}/b_{i(k)}$ $(i_k=\overline{1,\ N},\ k=1,\ 2,\ \ldots)$ и к дроби (3.47) применить признак абсолютной сходимости, изложенный в теореме 3.16, убеждаемся в том, что условия (3.37) в этом случае эквивалентны условиям (3.45) и (3.46). ■

Следствие 3.5. ВЦД (3.36) абсолютно сходится, если существуют такие действительные числа $q_{i(k)}>1$ $(i_k=\overline{1,\ N},$

$k=1, 2, \ldots$), что выполняются неравенства

$$\left|\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}\right| \leqslant \frac{q_{i(1)}-1}{Nq_{i(1)}} \quad (i_1=\overline{1, N}), \tag{3.48}$$

$$\left|\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k-1)}b_{i(k)}}\right| \leqslant \frac{q_{i(k)}-1}{Nq_{i(k-1)}q_{i(k)}} \quad (i_p=\overline{1, N},\ p=\overline{1, k},\ k \geqslant 2). \tag{3.49}$$

Доказательство. Если в (3.47) положить $\rho_{i(k)} = q_{i(k)}/b_{i(k)}$ ($i_k=\overline{1, N}$, $k=1, 2, \ldots$), то условия (3.42) теоремы 3.17, записанные для ВЦД (3.47), эквивалентной дроби (3.36), преобразуются к виду (3.48), (3.49). ■

Замечание 3.3. Следствия 3.4 и 3.5 легко устанавливаются непосредственно из теоремы 3.15, если ВЦД (3.36) с помощью эквивалентных преобразований привести к виду (3.25) и положить

$$g_{i(k)} = 1-\frac{N}{p_{i(k)}} \quad \text{или} \quad g_{i(k)} = 1-\frac{1}{q_{i(k)}}$$

соответственно ($i_k=\overline{1, N}$, $k=1, 2, \ldots$). Если же в следствиях 3.4, 3.5 положить

$$p_{i(k)} = \frac{N}{1-g_{i(k)}}, \quad q_{i(k)} = \frac{1}{1-g_{i(k)}} \quad (i_k=\overline{1, N},\ k=1, 2, \ldots),$$

то получим условие, эквивалентное (3.26) с ограничениями (3.28) относительно $g_{i(k)}$. Следовательно, теоремы 3.15—3.17 в некотором смысле эквивалентны.

Следствие 3.6 [10]. ВЦД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{3.50}$$

с числовыми комплексными элементами $b_{i(k)}$ ($i_k=\overline{1, N}$, $k=1, 2, \ldots$) абсолютно сходится, если

$$\alpha_{2k-1}^{-1} + (N\alpha_{2k})^{-1} \leqslant N^{-1} (k=1, 2, \ldots), \tag{3.51}$$

где N — число веток ветвления ВЦД (3.50) и

$$\alpha_k = \min(|b_{i(k)}| : i_p=\overline{1, N},\ p=\overline{1, k}). \tag{3.52}$$

Доказательство. Неравенство (3.51) следует из условий (3.48), (3.49), если положить

$$q_{i(2k-1)} = q_{i(2k)} = \alpha_{2k},\ a_{i(k)} = 1 \ (i_k=\overline{1, N},\ k=1, 2, \ldots). ■$$

Следствие 3.7. ВЦД (3.50) с числовыми комплексными элементами $b_{i(k)}$ ($i_k=\overline{1, N}, k=1,2,\ldots$) абсолютно сходится, если

$$\alpha_{2k}^{-1}+(N\alpha_{2k+1})^{-1}\leqslant N^{-1}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3.53}$$

где α_k определяются согласно (3.52), $\alpha_0=\alpha_1$.

Доказательство. Неравенства (3.53) следуют из (3.48) и (3.49), если положить

$$q_{i(2k+1)}=q_{i(2k)}=\alpha_{2k+1},\ q_{i(1)}=\alpha_1,\ a_{i(k)}=1$$
$$(i_k=\overline{1, N},\ k=1,\ 2,\ \ldots).\ \blacksquare$$

Рассмотрим ВЦД

$$\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.54}$$

где $c_{i(k)}$ ($i_k=\overline{1, N},\ k=1,\ 2,\ \ldots$) — комплексные числа, удовлетворяющие условиям (3.26) и ограничениям (3.27) или (3.28) относительно $g_{i(k)}$. Так как согласно теореме 3.15 значение дроби, обратной к (3.54), может быть равно нулю, то без дополнительных ограничений можно лишь говорить о сходимости в широком смысле ВЦД (3.54).

Теорема 3.18. *ВЦД (3.54) с числовыми комплексными элементами* $c_{i(k)}$ ($i_k=\overline{1, N},\ k=1,\ 2,\ \ldots$) *абсолютно сходится, если справедливы условия (3.26), где* $0<g_{i(0)}=g_0\leqslant 1,\ 0<g_{i(k)}\leqslant 1$ ($i_k=\overline{1, N},\ k=1,\ 2,\ \ldots$) *или* $0\leqslant g_{i(k)}<1$ ($i_k=\overline{1, N},\ k=1,\ 2,\ \ldots$) *и областью значений этой дроби является круг*

$$|z-g_0^{-1}(2-g_0)^{-1}|\leqslant(1-g_0)g_0^{-1}(2-g_0)^{-1}. \tag{3.55}$$

Доказательство. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 3.15, легко устанавливается, что мажорантой ВЦД (3.54) является ВЦД

$$\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\mathop{D}_{i_k=1}^{N}\frac{-N^{-1}(1-g_{i(k-1)})\,g_{i(k)}}{1}\right)^{-1}. \tag{3.56}$$

Если бесконечную ВЦД (3.56) или ее n-ю аппроксиманту записать в виде

$$z=(1-(1-g_0)\,w)^{-1},\quad w=\sum_{i_1=1}^{N}\frac{N^{-1}g_{i(1)}}{1-\sum\limits_{i_2=1}^{N}\dfrac{N^{-1}(1-g_{i(1)})g_{i(2)}}{1-\ldots}},$$

то в силу утверждения теоремы 3.15 $|w| \leqslant 1$ и поэтому $\left|1 - \frac{1}{z}\right| \leqslant 1 - g_0$, откуда с помощью элементарных вычислений получаем (3.55). Абсолютная сходимость ВЦД (3.54) следует из того, что аппроксиманты ВЦД (3.56) образуют монотонно возрастающую и ограниченную сверху последовательность. ■

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_k\}$, где $a_k = N \max(|c_{i(k)}| : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$, $c_{i(k)}$ — элементы ВЦД (3.54). Предположим, что $\{a_k\}$ — цепная последовательность и m_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — ее минимальные параметры (см. (35)). Рассмотрим цепную дробь

$$\frac{1}{1} - \frac{m_1}{1} - \frac{(1-m_1)\,m_2}{1} - \frac{(1-m_2)\,m_3}{1} - \ldots . \tag{3.57}$$

Теорема 3.19. *Пусть элементами ВЦД (3.54) являются комплексные числа $c_{i(k)}$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$), такие, что последовательность*

$$a_k = N \max(|c_{i(k)}| : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.58}$$

является цепной последовательностью с минимальными параметрами m_p ($p = 0, 1, 2, \ldots$), удовлетворяющими условиям

$$0 \leqslant m_p < 1 \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{3.59}$$

Тогда ВЦД (3.54) абсолютно сходится, если сходится ряд

$$T = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{k} m_l (1 - m_l)^{-1}. \tag{3.60}$$

Значение бесконечной ВЦД (3.54) и всех ее подходящих дробей принадлежит области

$$|z - T(2T-1)^{-1}| \leqslant T(T-1)(2T-1)^{-1}, \tag{3.61}$$

где T — сумма ряда (3.60).

Доказательство. Покажем, что мажорантой ВЦД (3.54) является цепная дробь (3.57). Если для дроби (3.57) ввести рекуррентно сокращенные обозначения, аналогичные обозначениям (3.1) гл. 1

$$\hat{Q}_s^{(s)} = 1, \quad \hat{Q}_p^{(s)} = 1 - \frac{m_{p+1}(1 - m_p)}{\hat{Q}_{p+1}^{(s)}} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\ldots, p = \overline{0, s-1}),$$

то методом математической индукции по аналогии с доказательством неравенств (3.31), (3.32), легко проверяется, что

$$|Q_{i(k)}^{(s)}| \geqslant \hat{Q}_k^{(s)} \quad (k=\overline{0,\ s},\ i_0=0,\ i_p=\overline{1,\ N},\ p=\overline{1,\ k}), \tag{3.62}$$

$$\hat{Q}_k^{(s)} > m_k \quad (k=\overline{0,\ s}). \tag{3.63}$$

Следовательно, $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$, $\hat{Q}_k^{(s)} > 0$ $(k=\overline{0,\ s})$. Если обозначить k-е аппроксиманты ВЦД (3.54) и цепной дроби (3.57) через f_k, p_k и учесть формулу разности двух подходящих дробей (3.16), то для $n > m$ получим оценку

$$|f_n - f_m| \leqslant p_n - p_m. \tag{3.64}$$

Абсолютная сходимость ВЦД (3.54) следует из того, что последовательность $\{p_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху.

Пусть A_k и B_k — k-й числитель и знаменатель дроби

$$\frac{m_1}{1} - \frac{(1-m_2)\,m_3}{1} - \frac{(1-m_3)\,m_4}{1} - \ldots. \tag{3.65}$$

Используя рекуррентные соотношения (8), методом математической индукции легко проверим, что (см. [100])

$$B_k = (1-m_1)(1-m_2)\ \ldots\ (1-m_k) + m_1(1-m_2)\ \ldots$$
$$\ldots\ (1-m_k) + m_1 m_2 (1-m_3) \ldots (1-m_k) + \cdots + m_1 m_2 \ldots m_k,$$
$$A_k = B_k - (1-m_1)(1-m_2)\ \ldots\ (1-m_k).$$

Поэтому

$$\frac{A_k}{B_k} = 1 - \left(1 + \sum_{p=1}^{k} \prod_{i=1}^{p} m_i (1-m_i)^{-1}\right)^{-1}.$$

Так как в силу оценок (3.62)

$$|Q_0^{(s)} - 1| \leqslant \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i(1)}|}{|Q_{i(1)}^{(s)}|} \leqslant \frac{m_1}{\hat{Q}_1^{(s)}} = \frac{A_s}{B_s},$$

то, записав бесконечную ВЦД (3.54) или ее аппроксиманту в виде

$$z = (1+w)^{-1}, \text{ где } w = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \frac{c_{i(2)}}{1+\ddots}},$$

имеем $|w| \leqslant 1 - T^{-1}$ или $|z^{-1} - 1| \leqslant 1 - T^{-1}$, откуда с помощью элементарных вычислений получаем оценку (3.61). ■

Теорема 3.20. *Пусть для ВЦД (3.54), где* $c_{i(k)}$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$ — *комплексные числа, выполняются условия*

$$N\,|c_{i(k)}| \leqslant g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})$$

$$(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N},\ i_0 = 0), \tag{3.66}$$

$$g_{i(k)} \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g_{i(k)} < 1,\ g_{i(0)} = g_0 = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}). \tag{3.67}$$

Тогда ВЦД (3.54) сходится, если существует такое натуральное число n *и набор индексов* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, n})$, *что* $g_{i(n)} = 0$ *или*

$$Nc_{i(n)} \neq -g_{i(n)}(1 - g_{i(n-1)}). \tag{3.68}$$

Доказательство. ВЦД

$$Q_{i(p)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=p+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_p = \overline{1, N},\ p \geqslant 1) \tag{3.69}$$

согласно теореме 3.15 сходятся и принимают значения, принадлежащие кругу $|z - 1| \leqslant 1 - g_{i(p)}$. Элементы $c_{i(k)}$ запишем в виде

$$c_{i(k)} = N^{-1} g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})\, x_{i(k)},$$

где $|x_{i(k)}| \leqslant 1$ в силу условия (3.66).

Если ВЦД (3.54) расходится, то необходимо

$$Q_0 = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{N^{-1} g_{i(1)} x_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = 0. \tag{3.70}$$

Так как $|x_{i(1)}| \leqslant 1$ и согласно (3.32) $|Q_{i(1)}| \geqslant g_{i(1)}$, то равенство (3.70) равносильно тому, что

$$|x_{i_1}| = 1,\quad \frac{g_{i(1)}}{|Q_{i(1)}|} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{g_{i(1)} x_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -1 \quad (i_1 = \overline{1, N}). \tag{3.71}$$

Из условия $|Q_{i(1)} - 1| \leqslant 1 - g_{i(1)}$ и (3.71) следует, что

$$Q_{i(1)} = g_{i(1)},\ x_{i(1)} = -1 \quad (i_1 = \overline{1, N}). \tag{3.72}$$

Поскольку

$$Q_{i(1)} = 1 + (1 - g_{i(1)}) \sum_{i_2=1}^{N} \frac{N^{-1} g_{i(2)} x_{i(2)}}{Q_{i(2)}},$$

то, учитывая (3.72), имеем

$$\sum_{i_2=1}^{N} \frac{N^{-1} g_{i(2)} x_{i(2)}}{Q_{i(2)}} + 1 = 0,$$

откуда, повторяя те же рассуждения, получим $Q_{i(2)} = g_{i(2)}$, $x_{i(2)} = -1$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2$) и т. д.

Расходимость дроби (3.54) эквивалентна выполнению условий

$$Q_{i(k)} = g_{i(k)}, \quad x_{i(k)} = -1 \tag{3.73}$$

при всех возможных наборах индексов. Поэтому выполнение условия (3.68) гарантирует сходимость ВЦД (3.54). Так как $Q_{i(k)} \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k \geqslant 1$), то условия (3.73) не будут выполняться, если при некотором наборе индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ $g_{i(n)} = 0$. ■

Теорема 3.21. *ВЦД (3.54) с комплексными частными числителями* $c_{i(k)}$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$) *абсолютно сходится, если для произвольного натурального n и произвольного набора индексов* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{i(k)}| < N^{-1} \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, n},\ n = 1, 2, \ldots). \tag{3.74}$$

Доказательство. Покажем, что существуют такие действительные числа $0 \leqslant g_{i(k)} < 1$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots$), $g_{i(0)} = g_0 = 0$, что

$$|c_{i(k)}| = N^{-1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}). \tag{3.75}$$

Действительно, так как $|c_{i(1)}| < N^{-1}$, то можно положить $N |c_{i(1)}| = g_{i(1)}$. Тогда $0 \leqslant g_{i(1)} < 1$ ($i_1 = \overline{1, N}$). Пусть $g_{i(n)}$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$) уже найдены. Учитывая (3.74), имеем

$$N |c_{i(n+1)}| < 1 - \sum_{k=1}^{n} N |c_{i(k)}| = 1 - \sum_{k=1}^{n} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) =$$

$$= 1 - g_{i(1)} - \sum_{k=2}^{n} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) =$$

$$= (1 - g_{i(1)})(1 - g_{i(2)}) - \sum_{k=3}^{n} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - g_{i(2)}) - \sum_{k=3}^{n} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) =$$

$$= (1 - g_{i(2)})(1 - g_{i(3)}) - \sum_{k=4}^{n} g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - g_{i(3)}) - \sum_{k=4}^{n} g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) \leqslant \cdots$$

$$\cdots \leqslant (1 - g_{i(n-1)})(1 - g_{i(n)}) \leqslant (1 - g_{i(n)}).$$

Поэтому существует такое действительное число $0 \leqslant \leqslant g_{i(n+1)} < 1$, что $N|c_{i(n+1)}| = g_{i(n+1)}(1 - g_{i(n)})$.

Если некоторые $c_{i(n)}$ равны нулю, то, значит, $g_{i(n)} = 0$ и сходимость ВЦД (3.54) следует из теоремы 3.20. Пусть все $c_{i(k)} \neq 0$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$. Тогда, положив

$$g_{i(k)} = 1 - \sup\left(\sum_{p=k+1}^{\infty} N|c_{i(p)}| : i_p = \overline{1, N},\ p \geqslant k+1\right) \quad (3.76)$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1)$, имеем

$$(1 - g_{i(k-1)})g_{i(k)} = \left(\sup \sum_{p=k}^{\infty} N|c_{i(p)}|\right)\left(1 - \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N|c_{i(p)}|\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(N|c_{i(k)}| + \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N|c_{i(p)}|\right)\left(1 - \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N|c_{i(p)}|\right) \geqslant$$

$$\geqslant N|c_{i(k)}| + \sup \sum_{p=k+1}^{\infty} N|c_{i(p)}|\left(1 - \sup \sum_{p=k}^{\infty} N|c_{i(p)}|\right) \geqslant N|c_{i(k)}|.$$

Учитывая (3.76), получим $0 \leqslant g_{i(0)} = g_0 < 1$, $0 < g_{i(k)} < 1$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$. Поэтому $|c_{i(1)}| \leqslant N^{-1}(1 - g_0) \times \times g_{i(1)}$ $(i_1 = \overline{1, N})$, $|c_{i(k)}| < N^{-1}(1 - g_{i(k-1)})g_{i(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots \ldots, i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$. Если $g_0 > 0$, то ВЦД (3.54) сходится согласно теореме 3.18. Если же $g_0 = 0$, то сходимость ВЦД (3.54) следует из теоремы 3.20.

В заключение отметим, что теоремы 3.15—3.21 являются многомерными аналогами признаков сходимости цепных дробей, в частности теорема 3.15, следствия 3.4, 3.5 — обобщение признаков сходимости Перрона [87], теорем 3.16, 3.17 — признаков сходимости Слешинского — Прингсгейма [58, 89], теорема 3.19 — многомерный аналог признака Ван Флека [98], теорема 3.20 — признака Уолла — Пейдона [85], теорема 3.21 — обобщение признака сходимости Коха [82].

Следующие две теоремы являются многомерными аналогами параболической теоремы. Подробный обзор по этому вопросу изложен в [81].

Теорема 3.22. *Пусть элементы ВЦД (3.54)* $c_{i(k)}$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$ *принадлежат области*

$$P_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re} z \leqslant (2N)^{-1}(1-\varepsilon)\}, \qquad (3.77)$$

где ε — *как угодно малое действительное число* $(0 < \varepsilon < 1)$, N — *число веток ветвления ВЦД (3.54).*

Тогда

1) существуют конечные пределы четных f_{2n} *и нечетных* f_{2n+1} *подходящих дробей;*

2) ВЦД (3.54) сходится, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, *что все* $c_{i(k)} = 0$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$ *либо расходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k, \qquad (3.78)$$

где $\delta_k = \min(1/|c_{i(k)}| : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$, *причем те наборы индексов, при которых* $c_{i(k)} = 0$ *при минимизации не рассматриваются;*

3) область значений ВЦД (3.54) принадлежит кругу

$$|z - 1| < 1. \qquad (3.79)$$

Доказательство. Заметим, что границей области P_ε является парабола с фокусом в начале координат с осью вдоль луча $\arg z = 0$ и с вершиной в точке $-\frac{1-\varepsilon}{4N}$.

Каждый отличный от нуля элемент $c_{i(k)}$ ВЦД (3.54) представим в виде

$$c_{i(k)} = |c_{i(k)}| \exp(i\alpha_{i(k)}),$$

где $-\pi < \alpha_{i(k)} \leqslant \pi$ и $i = \sqrt{-1}$. В области

$$\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C}:\ |\operatorname{Im} z| < \delta,\ |\operatorname{Re} z| < 1 + \delta\}, \qquad (3.80)$$

где δ — произвольное действительное число, такое, что

$$(1+\delta)^2 \exp(\pi\delta) < (1-\varepsilon)^{-1}, \qquad (3.81)$$

рассмотрим функции

$$c_{i(k)}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } c_{i(k)} = 0, \\ |c_{i(k)}| \exp(i\alpha_{i(k)} z), & \text{если } c_{i(k)} \neq 0 \end{cases}$$

$(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$. Покажем, что $c_{i(k)}(z) \in P_0$, когда $z \in \Omega_\delta$, где P_0 определяется согласно (3.77), если положить $\varepsilon = 0$. Если $\alpha_{i(k)} = 0$, то, очевидно, $c_{i(k)}(z) \in P_0$. Пусть

$\alpha_{l(k)} \neq 0$ и $z = x + iy$. Тогда, опуская индексы с целью сокращения записей, получим

$$|c(z)| - \operatorname{Re} c(z) = |c| e^{-\alpha y} (1 - \cos \alpha x).$$

Так как $|c|(1-\cos\alpha) \leqslant \frac{1-\varepsilon}{2N}$, то $|c(z)| - \operatorname{Re} c(z) \leqslant \leqslant \frac{1-\varepsilon}{2N} e^{\pi\delta} \frac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\alpha}$.

Исследуем на экстремум выражение

$$M(\alpha, x) = \frac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha x}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha},$$

где $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, $\alpha \neq 0$, $|x| \leqslant 1 + \delta$. Достаточно ограничиться случаем $0 < \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant x \leqslant 1 + \delta$. Если $0 < \alpha < < \pi(1+\delta)^{-1}$, то функция $\sqrt{M(\alpha, x)}$ по аргументу x монотонно возрастает и поэтому

$$\sqrt{M(\alpha, x)} \leqslant \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha(1+\delta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = M(\alpha),$$

$M(\alpha)$ — монотонно убывающая функция по α, так как

$$M'(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{1}{2}\alpha(1+\delta)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \left((1+\delta)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\delta)\right) < 0,$$

если $0 < \alpha < \pi(1+\delta)^{-1}$. Следовательно,

$$\sup(M(\alpha): 0 < \alpha < \pi(1+\delta)^{-1}) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha(1+\delta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \delta.$$

Если же $\pi(1+\delta)^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant x \leqslant 1 + \delta$, то

$$\sin\frac{1}{2}\alpha x / \sin\frac{1}{2}\alpha \leqslant \sin^{-1}\frac{\pi}{2(1+\delta)} \leqslant 1 + \delta,$$

так как $\sin\frac{\pi}{2} x \geqslant x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Таким образом, выбирая δ согласно (3.81), имеем

$$|c(z)| - \operatorname{Re} c(z) < (2N)^{-1}.$$

Рассмотрим ВЦД

$$\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}(z)}{1}\right)^{-1}. \tag{3.82}$$

Учитывая следствие 1.4, где $\alpha=0$, убеждаемся в том, что область значений ВЦД

$$c_{i(1)}(z)\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=2}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}(z)}{1}\right)^{-1}$$

принадлежит полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > -(2N)^{-1},$$

откуда следует, что областью значений ВЦД, обратной к (3.82), является полуплоскость

$$\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}.$$

Поэтому значения подходящих дробей ВЦД (3.82) принадлежат области

$$|z-1|<1.$$

Обозначим $f_n(z)$ — n-ю аппроксиманту ВЦД (3.82). Очевидно, $f_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — голоморфные функции в области Ω_δ. Для этой последовательности выполняются условия теоремы 2.13, где, например, $a=-1$, $b=-2$.

Пусть $z\in\Delta$ и $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z=0, |\operatorname{Im} z|<\delta\}$. Тогда ВЦД (3.82) запишется в виде

$$\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\hat{c}_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.83}$$

где

$$\hat{c}_{i(k)}=\begin{cases}0, & \text{если } c_{i(k)}=0,\\ |c_{i(k)}|\exp(-\alpha_{i(k)}y), & \text{если } c_{i(k)}\neq 0.\end{cases}$$

Для установления сходимости ВЦД

$$1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\hat{c}_{i(k)}}{1}, \tag{3.84}$$

обратной к (3.83), воспользуемся теоремой 3.12. Условия а) — в) этой теоремы выполняются очевидным образом.

Если существует такой номер k, что все $c_{i(k)}=0$ $(i_p=\overline{1, N}, p=\overline{1, k})$, то все $\hat{c}_{i(k)}=0$ $(i_p=\overline{1, N}, p=\overline{1, k})$, поэтому ВЦД (3.83) сходится и принимает отличное от нуля значение. Поэтому ВЦД (3.82) сходится.

Так как

$$\hat{\delta}_k = \min(\widehat{c_{i(k)}^{-1}};\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}) \geqslant \delta_k \exp(-\pi\delta),$$

то в силу условия (3.78) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\delta}_k$$

расходится и в ВЦД (3.83) сходится.

Из теоремы Стилтьеса — Витали следует, что ВЦД (3.82) сходится на каждом компакте области (3.80), в частности в точке $z = 1$, что равносильно сходимости ВЦД (3.54). Из свойства вилки (2.6) следует, что всегда существуют конечные пределы четных и нечетных подходящих дробей ВЦД (3.83). Как и раньше, применяя теорему 2.13, легко убеждаемся в справедливости пункта 1). ■

Следующая теорема является обобщением только что доказанной на случай повернутой параболической области.

Теорема 3.23. *Пусть элементы ВЦД (3.54)* $c_{i(k)}$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$ *принадлежат области*

$$P_{\varepsilon, \gamma} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| - \operatorname{Re}(z \exp(-2\gamma i)) \leqslant \leqslant (2N)^{-1}(1 - \varepsilon)\cos^2\gamma\}, \tag{3.85}$$

где $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, ε *— как угодно малое действительное положительное число* $(0 < \varepsilon < 1)$, N *— число веток ветвления дроби (3.54). Тогда*

1) существуют конечные пределы четных и нечетных подходящих дробей ВЦД (3.54);

2) ВЦД (3.54) сходится, если выполняется одно из двух условий либо существует такой номер k, *что все* $c_{i(k)} = 0$ $(i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k})$, *либо ряд (3.78) расходится;*

3) область значений ВЦД (3.54) принадлежит кругу

$$\left| z - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1} \exp(-i\gamma) \right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1}. \tag{3.86}$$

Доказательство. ВЦД (3.54) запишем в виде

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}^2}{1}\right)^{-1}, \tag{3.87}$$

т. е. положим $c_{i(k)} = a_{i(k)}^2$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$.

С учетом того, что $|z^2| - \mathrm{Re}(z^2) = 2(\mathrm{Im}\, z)^2$, область (3.85) в терминах w, где $z = w^2$, преобразуется к виду

$$G_{\varepsilon\gamma} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(w \exp(-i\gamma))| \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{N}} \cos\gamma \right\}. \quad (3.88)$$

Каждый элемент $a_{i(k)}$ ВЦД (3.87), принадлежащий области (3.88), представим в виде $a_{i(k)} = b_{i(k)} \exp(i\gamma) + i d_{i(k)}$, где $b_{i(k)}, d_{i(k)} \in \mathbb{R}$ и $|d_{i(k)}| \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{N}}$. Фиксируем $\gamma : |\gamma| < \frac{\pi}{2}$. Пусть δ — действительное положительное число $(0 < \delta < 1)$ такое, что $|\gamma \pm \delta| < \frac{\pi}{2}$. В области

$$S_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 - \delta < |z| < 1 + \delta, \right.$$
$$\left. \begin{array}{l} -\gamma - \delta < \arg z < \delta, \text{ если } \gamma \geqslant 0, \\ -\delta < \arg z < -\gamma + \delta, \text{ если } \gamma < 0, \end{array} \right\} \quad (3.89)$$

определим функции

$$a_{i(k)}(z) = z b_{i(k)} \exp(i\gamma) + i d_{i(k)} \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $a_{i(k)}(z) \in G_{\varepsilon, \gamma^*}$, где $\gamma^* = \gamma + \arg z$ и $|\gamma^*| < \frac{\pi}{2}$.

Учитывая следствие 1.4, убеждаемся в том, что область значений ВЦД

$$a^2_{i(1)}(z) \left(1 + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a^2_{i(k)}(z)}{1} \right)^{-1}$$

принадлежит полуплоскости

$$V = \{ w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w \exp(-i\gamma^*)) > (2N)^{-1} \cos\gamma^* \}.$$

Отсюда следует, что область значений ВЦД, обратной к (3.87), принадлежит области

$$W = \{ w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w \exp(-i\gamma^*)) > 1 - \frac{1}{2} \cos\gamma^* \}.$$

Поэтому значения подходящих дробей ВЦД (3.87), как легко подсчитать, принадлежат кругу

$$\left| z - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos\gamma^* \right)^{-1} \exp(-i\gamma^*) \right| < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos\gamma^* \right)^{-1}. \quad (3.90)$$

Обозначим $f_n(z)$ — n-е аппроксиманты ВЦД (3.87). Для последовательности $\{f_n(z)\}$ голоморфных функций в области S_δ выполняются условия теоремы Стилтьеса — Витали, где, например, $a=-1$, $b=-2$ и $\Delta=\{z\in S_\delta\colon \arg z=-\gamma\}$. Если $z\in\Delta$, то $a^2_{i(k)}(z)\in P_\varepsilon$, где P_ε определяется согласно (3.77). Расходимость ряда (3.78) эквивалентна для каждого $z\in\Delta$ расходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\min\frac{1}{|a^2_{i(k)}(z)|}: i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\right).$$

Так как $z=1$ — компакт области S_δ, то сходимость ВЦД (3.54) следует из теоремы 2.13.

§ 4. Области сходимости ВЦД

Последовательность областей элементов $\{\Omega_{i(k)}\}$ ($k=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $i_0=0$ $i_k=\overline{1,N}$, $k\geqslant 1$) (см. § 5 гл. 1) называется последовательностью областей сходимости ВЦД

$$a_0\left(b_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{4.1}$$

если условие $\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle\in\Omega_{i(k)}$ ($k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0$, $i_k=$ $=\overline{1,N}$, $k\geqslant 1$) обеспечивает сходимость ВЦД (4.1). Аналогично определим последовательность областей сходимости $\{E_{i(k)}\}$ для ВЦД вида (3.54) или последовательность областей сходимости $\{G_{i(k)}\}$ для ВЦД вида

$$\left(b_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}. \tag{4.2}$$

Можно, естественно, рассматривать и дроби, обратные к (4.1), (3.54) или (4.2).

Если $\Omega_{i(k)}=\Omega$ (или $E_{i(k)}=E$, или $G_{i(k)}=G$) при всех возможных наборах индексов, то назовем Ω (или E, или G) простой областью сходимости. Если же $\Omega_{i(2k)}=\Omega_2$, $\Omega_{i(2k-1)}=$ $=\Omega_1$ (или $E_{i(2k)}=E_2$, $E_{i(2k-1)}=E_1$, или $G_{i(2k)}=G_2$, $G_{i(2k-1)}=$ $=G_1$) при всех возможных наборах индексов, то назовем области Ω_1, Ω_2 (или E_1, E_2, или G_1, G_2) спаренными областями сходимости.

Например, в силу теоремы 3.13 простой областью сходимости ВЦД (4.2) является произвольный компакт K области

$$\left\{z\in\mathbb{C}: z\neq 0,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Простой областью сходимости ВЦД (3.54) является круг

$$\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant\frac{1}{4N}\right\},$$

что следует из теоремы 3.14.

Круг

$$K=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|\leqslant r\}$$

называется окрестностью сходимости точки $a\in\mathbb{C}$, если K — простая область сходимости ВЦД (3.54) или (4.2). Из теоремы 7 следует, что если $a\bar{\in}D$, где

$$D=\left\{z\in\mathbb{C},\ z\neq-\frac{1}{4N},\ \left|\arg\left(z+\frac{1}{4N}\right)\right|<\pi\right\},\tag{4.3}$$

то ВЦД (3.54), где все $c_{i(k)}=a$, расходится. Поэтому для ВЦД (3.54) есть смысл рассматривать окрестности сходимости только точек $a\in D$, где D определяется согласно (4.3).

Теорема 3.24. *Если a — комплексное число, такое, что*

$$|\arg a|<\pi\ \text{ и }\ |a|>\frac{1}{4N},\tag{4.4}$$

то область

$$E=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|\leqslant r<\frac{1}{\sqrt{2N}}\,[|a|+\operatorname{Re}a]^{1/2}\right\}\tag{4.5}$$

является окрестностью сходимости ВЦД (3.54).

Если же

$$|a|\leqslant\frac{1}{4N},\tag{4.6}$$

то круг

$$E=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|\leqslant r<\left|a+\frac{1}{4N}\right|\right\}\tag{4.7}$$

является окрестностью сходимости ВЦД (3.54).

Доказательство проводится по схеме, предложенной в работе [81], и основано на свойствах парабол и утверждению теоремы 3.23. Если $a=0$, то утверждение теоремы следует из многомерного аналога признака сходимости Ворпитского (теорема 3.14). Если же $a\neq0$, то, взяв $\gamma=\frac{1}{2}\arg a$, построим параболическую область $P_{0\gamma}$ вида (3.85), где $\varepsilon=0$. Остается отыскать радиус круга, касающегося границы $\partial P_{0\gamma}$, с центром в точке a, используя методику, рассмотренную в [81]. Утверждение теоремы 3.23 гарантирует сходимость в каждом компакте K области $P_{\varepsilon\gamma}$. Поэтому учитывая произвольность ε, возьмем несколько меньшими радиусы полученных кругов. ■

В дальнейшем нам понадобится теорема о поликруговой окрестности сходимости. Поликруг

$$K_N = \{z \in \mathbb{C}^N : z = (z_1, z_2, \ldots, z_N),$$
$$|z_i - a_i| \leqslant r_i, \; i = \overline{1, N}\}$$

назовем поликруговой окрестностью сходимости ВЦД (3.54) или (4.2), если условие

$$|c_{i(k)} - a_{i_k}| \leqslant r_{i_k} \text{ или } |b_{i(k)} - a_{i_k}| \leqslant r_{i_k}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}) \tag{4.8}$$

гарантирует сходимость ВЦД (3.54) или (4.2).

Из многомерного аналога признака сходимости Ван Флека (теорема 3.13) следует такая теорема.

Теорема 3.25. *Если* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ *такие, что*

$$\operatorname{Re} a_k > 0 \;\; (k = \overline{1, N}), \tag{4.9}$$

то область

$$G_N = \{z \in \mathbb{C}^N: \; |z_i - a_i| \leqslant r_i < \operatorname{Re} a_i, \; i = 1, N\} \tag{4.10}$$

является поликруговой окрестностью сходимости ВЦД (4.2).

Из теоремы 3.23 следует теорема.

Теорема 3.26. *Пусть* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ — *некоторая точка из* $\mathbb{C}^N$ *такая, что существует угол* $\gamma\left(|\gamma| < \frac{\pi}{2}\right)$, *что область*

$$P_{0\gamma} = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(z \exp(-2i\gamma)) < (2N)^{-1} \cos^2 \gamma\} \tag{4.11}$$

содержит точки $a_k (k = \overline{1, N})$.

Тогда множество

$$E_N = \{z \in \mathbb{C}^N: |z_i - a_i| \leqslant r_i < \min(|a_i - w| : w \in \partial P_{0\gamma})\} \tag{4.12}$$

является поликруговой окрестностью сходимости ВЦД (3.54).

Одним из первых результатов, касающихся спаренных областей сходимости для непрерывных дробей, является следующая теорема Лейтона — Уолла [83].

Теорема 3.27. *Цепная дробь* $\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1}$ *с комплексными числовыми элементами сходится, если*

$$|a_{2k-1}| \leqslant \frac{1}{4}, \; |a_{2k}| \geqslant \frac{25}{4} \;\; (k = 1, 2, \ldots).$$

В естественной формулировке, а именно

$$|a_{i(2k-1)}| \leqslant \varepsilon, \quad |a_{i(2k)}| \geqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots\ i_k = \overline{1, N}), \tag{4.13}$$

где $\varepsilon > 0$, $M > 0$ — некоторые действительные положительные числа, эта теорема не переносится на ВЦД вида (3.25). Для произвольных как угодно малого ε и как угодно большего M можно построить пример расходящейся ветвящейся цепной дроби вида (3.25), элементы которой удовлетворяют условиям (4.13). Ниже приведем пример такой дроби, построенный Е. А. Болтаровичем.

Пример 3.1. ВЦД с двумя ветками ветвления

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{c_{i(k)}}{1}, \tag{4.14}$$

где $c_1 = c_{i(2k)1} = \varepsilon$, $c_2 = c_{i(2k)2} = -\frac{\varepsilon}{4}$, $c_{i(2k-1)1} = M$, $c_{i(2k)12} = c_{12} = 1 - M$, $c_{i(2k)22} = c_{22} = -\frac{1}{2} - M$ $(i_k = 1, N,\ k = 1, 2, \ldots)$, расходится. Действительно, легко подсчитать, что все четные аппроксиманты ВЦД (4.14) равны ∞. Тем не менее элементы удовлетворяют условию (4.13), где вместо M необходимо взять $\min(M, |M - 1|)$.

§ 5. Области устойчивости ВЦД

Одним из важных свойств непрерывных дробей и их многомерных обобщений является свойство вычислительной устойчивости. Наряду с многочисленными публикациями, посвященными сходимости, имеется сравнительно немного работ, где излагаются результаты по данному вопросу (см., например, [19, 29, 56, 81], а также [2, 43, 45, 47] и др.).

Рассмотрим конечные ВЦД

$$f = a_0 \left(b_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{5.1}$$

и

$$\hat{f} = \hat{a}_0 \left(\hat{b}_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{5.2}$$

для которых область $\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ является областью элементов, т. е.

$$\langle a_{i(k)}, b_{i(k)}\rangle \in \Omega, \quad \langle \hat{a}_{i(k)}, \hat{b}_{i(k)}\rangle \in \Omega$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots,\ i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1). \tag{5.3}$$

Пусть компоненты ВЦД (5.1) и (5.2) связаны соотношениями

$$\hat{a}_{i(k)} = (1+\alpha_{i(k)})\, a_{i(k)},\quad \hat{b}_{i(k)} = (1+\beta_{i(k)})\, b_{i(k)} \tag{5.4}$$

или

$$a_{i(k)} = (1+\hat{\alpha}_{i(k)})\hat{a}_{i(k)},\quad b_{i(k)} = (1+\hat{\beta}_{i(k)})\,\hat{b}_{i(k)}, \tag{5.5}$$

где ($k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1$). Дробь (5.2) будем интерпретировать как приближенную или возмущенную относительно ВЦД (5.1). Числа $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$ или $\hat{\alpha}_{i(k)}$, $\hat{\beta}_{i(k)}$ называются относительными погрешностями, а числа

$$\Delta a_{i(k)} = a_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)},\quad \Delta b_{i(k)} = b_{i(k)} - \hat{b}_{i(k)} \tag{5.6}$$

абсолютными погрешностями элементов $a_{i(k)}$ и $b_{i(k)}$ соответственно. Мы, естественно, предполагаем, что в соотношениях (5.4) все $a_{i(k)} \neq 0$ и $b_{i(k)} \neq 0$, а в соотношениях (5.5) все $\hat{a}_{i(k)} \neq 0$ и $\hat{b}_{i(k)} \neq 0$.

Пусть

$$\Delta f = f - \hat{f},\quad \hat{f} = (1+\delta) f,\quad f = (1+\hat{\delta})\hat{f} \tag{5.7}$$

с естественными ограничениями $f \neq 0$ или $\hat{f} \neq 0$, где это необходимо.

Пусть

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta = \max(|\Delta a_{i(k)}|,\ |\Delta b_{i(k)}|: \\ &: k = \overline{0, n},\ i_0 = 0,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}), \\ &\gamma = \max(|\alpha_{i(k)}||\beta_{i(k)}|,\ |\hat{\alpha}_{i(k)}|,\ |\hat{\beta}_{i(k)}: \\ &: k = \overline{0, n},\ i_0 = 0,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}). \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

Область элементов Ω называется областью абсолютной (относительной) устойчивости ВЦД (5.1), если существует действительная положительная константа C, зависящая от Ω и не зависящая от n, что

$$|\Delta f| \leqslant C\Delta \quad (|\delta| \leqslant C\gamma). \tag{5.9}$$

Теорема 3.28 [5[. *Область $G = (0, +\infty)$ является областью относительной устойчивости ВЦД*

$$\left(b_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{5.10}$$

причем

$$|\delta| \leqslant \max(|\beta_{i(2k)}|, |\hat\beta_{i(2k+1)}| : k = \overline{0, [n/2]},$$
$$i_0 = 0,\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}) \tag{5.11}$$

и $\hat\beta_{i(2s+1)} = 0$, *если* $n = 2s$.

Доказательство. Сначала отметим некоторые известные свойства относительных погрешностей. Для удобства их формулировки обозначим относительную погрешность числа a через $\delta(a)$ или $\hat\delta(a)$, т. е. $\delta(a) = \alpha$ или $\hat\delta(a) = \hat\alpha$ (см. (5.4), (5.5)). Справедливы соотношения

$$|\delta(\sum_{i=1}^{n} a_i)| \leqslant \max(|\delta(a_i)| : i = \overline{1, n}),$$
$$|\hat\delta(\sum_{i=1}^{n} a_i)| \leqslant \max(|\hat\delta(a_i)| : i = \overline{1, n}), \tag{5.12}$$
$$\hat\delta(a) = -\delta(a)(1 + \delta(a))^{-1},\ \delta(a) = -\hat\delta(a)(1 + \hat\delta(a))^{-1}, \tag{5.13}$$
$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + (1 + \delta(a))\hat\delta(b),$$
$$\hat\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \hat\delta(a) + (1 + \hat\delta(a))\delta(b), \tag{5.14}$$

где предполагается, что $a > 0$, $b > 0$, $a_i > 0$, $\hat a > 0$, $\hat b > 0$, $\hat a_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$.

Действительно,

$$|\delta(\sum_{i=1}^{n} a_i)| = |\sum_{i=1}^{n} (\hat a_i - a_i)|(\sum_{j=1}^{n} a_j)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\delta(a_i)| \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \leqslant \max(|\delta(a_i)| : i = \overline{1, n}).$$

Аналогично проверяется второе неравенство в (5.12). Далее

$$\hat\delta(a) = \frac{a - \hat a}{\hat a} = \frac{a - a(1 + \delta(a))}{a(1 + \delta(a))} = \frac{-\delta(a)}{1 + \delta(a)},$$
$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-(a/b) + (\hat a/\hat b)}{a/b} = \frac{-a\hat b + \hat a b}{\hat b a} =$$
$$= \frac{-a\hat b + \hat a\hat b}{\hat b a} + \frac{-\hat a\hat b + \hat a b}{\hat b a} = \delta(a) + \frac{\hat a}{a}\hat\delta(b) =$$
$$= \delta(a) + (1 + \delta(a))\hat\delta(b),$$

в частности,

$$\delta\left(\frac{1}{b}\right) = \hat{\delta}(b), \quad \hat{\delta}\left(\frac{1}{b}\right) = \delta(b). \tag{5.15}$$

Относительную погрешность при вычислении ВЦД $Q^{(n)}_{i(k)}$ (см. (3.1) гл. 1) обозначим $\delta_{i(k)}$. Тогда последовательно применяя соотношения (5.12), (5.13), (5.15), получим

$$|\delta| = |\hat{\delta}_{i(0)}| \leqslant \max_{i_1}(|\hat{\beta}_0|, |\delta_{i(1)}|) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{i_1, i_2}(|\hat{\beta}_0|, |\beta_{i(1)}|, |\hat{\delta}_{i(2)}| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{i_1, i_2, i_3}(|\hat{\beta}_0|, |\beta_{i(1)}|, |\hat{\beta}_{i(2)}|, |\delta_{i(3)}|) \leqslant \cdots \leqslant$$
$$\leqslant \max(|\beta_{i(2k)}|, |\beta_{i(2k+1)}| : k = 0, \overline{[n/2]}, \ i_0 = 0,$$
$$i_p = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, k}).$$

Теорема 3.29. *Область*

$$E = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant N^{-1} t(1-t), \ 0 < t < \frac{1}{2}\right\} \tag{5.16}$$

является областью абсолютной устойчивости ВЦД

$$f = \left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{5.17}$$

причем

$$C \leqslant N(1-t)^{-2}(1-2t)^{-1}.$$

Доказательство. Используя рекуррентные обозначения типа (3.1) гл. 1 для ВЦД (5.1), (5.2) и предполагая, что все $Q^{(n)}_{i(k)} \neq 0$, $\hat{Q}^{(n)}_{i(k)} \neq 0$ ($k = \overline{0, n}$, $i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$), установим формулы для абсолютной погрешности Δf. На первом шаге имеем

$$\Delta f = f - \hat{f} = \frac{a_0}{Q^{(n)}_0} - \frac{\hat{a}_0}{\hat{Q}^{(n)}_0} = \frac{\Delta a_0}{\hat{Q}^{(n)}_0} - a_0 \frac{Q^{(n)}_0 - \hat{Q}^{(n)}_0}{Q^{(n)}_0 \hat{Q}^{(n)}_0} =$$
$$= \frac{\Delta a_0}{\hat{Q}^{(n)}_0} - a_0 \frac{\Delta b_0}{Q^{(n)}_0 \hat{Q}^{(n)}_0} - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_0 (a_{i(1)} \hat{Q}^{(n)}_{i(1)} - \hat{a}_{i(1)} Q^{(n)}_{i(1)})}{Q^{(n)}_0 Q^{(n)}_{i(1)} \hat{Q}^{(n)}_0 \hat{Q}^{(n)}_{i(1)}}.$$

Последовательно применяя рекуррентное соотношение

$$a_{i(k)} \hat{Q}^{(n)}_{i(k)} - \hat{a}_{i(k)} Q^{(n)}_{i(k)} = \Delta a_{i(k)} Q^{(n)}_{i(k)} - a_{i(k)} \Delta b_{i(k)} -$$
$$- \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k)} (a_{i(k+1)} \hat{Q}^{(n)}_{i(k+1)} - \hat{a}_{i(k+1)} Q^{(n)}_{i(k+1)})}{Q^{(n)}_{i(k+1)} \hat{Q}^{(n)}_{i(k+1)}}$$

с учетом того, что

$$a_{i(n)}\hat{Q}^{(n)}_{i(n)} - \hat{a}_{i(n)}Q^{(n)}_{i(n)} = \Delta a_{i(n)}Q^{(n)}_{i(n)} - a_{i(n)}\Delta b_{i(n)},$$

окончательно получим

$$\Delta f = \frac{Q_0^{(n)}\Delta a_0 - a_0\Delta b_0}{Q_0^{(n)}\hat{Q}_0^{(n)}} +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=1}^{N} \frac{(-1)^m \left[Q^{(n)}_{i(m)}\Delta a_{i(m)} - a_{i(m)}\Delta b_{i(m)}\right]\prod\limits_{k=0}^{m-1} a_{i(k)}}{\prod\limits_{k=0}^{m}\left(Q^{(n)}_{i(k)}\hat{Q}^{(n)}_{i(k)}\right)}. \quad (5.18)$$

В частности, для ВЦД (5.17) эта формула примет вид

$$\Delta f = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=1}^{N} (-1)^m \frac{\Delta a_{i(m)}}{\hat{Q}^{(n)}_{i(m)}} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{a_{i(k)}}{Q^{(n)}_{i(k)}\hat{Q}^{(n)}_{i(k)}}. \quad (5.19)$$

Применяя оценку (3.18) для $Q^{(n)}_{i(k)}$ и $\hat{Q}^{(n)}_{i(k)}$, учитывая условие (5.16) и соотношение $h_k = Q_{k+1}/Q_k$, имеем

$$|\Delta f| \leqslant \Delta \sum_{m=1}^{n} \frac{N^m N^{-m+1} t^{m-1}(1-t)^{m-1}}{h_{n-m}\prod\limits_{k=0}^{m-1} h^2_{n-k}} =$$

$$= N\Delta \sum_{m=1}^{n} t^{m-1}(1-t)^{m-1} Q_{n-m}Q_{n-m+1}Q^{-2}_{n+1}. \quad (5.20)$$

Используя легко проверяемое неравенство $(1-t)^k Q_p \leqslant Q_{p+k}$ и углубляя последнюю оценку, получим $|\Delta f| \leqslant N(1-t)^{-2} \times \times (1-2t)^{-1}\Delta$.

Если же $t = \frac{1}{2}$, то, подставляя в (5.20) $Q_p = 2^{-p}(p+1)$, получим оценку $|\Delta f| \leqslant (4/3)Nn(n+1)(n+5)(n+2)^{-2}\Delta$. ■

Формула типа (5.18) сначала была установлена Т. Н. Одноволовой [47] для интегральных цепных дробей. Первый вариант такого типа формулы был предложен в работе [2]. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [56].

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В данной главе введены различные типы функциональных ветвящихся цепных дробей, рассмотрены их свойства и установлены признаки сходимости. Методика исследования числовых ВЦД переносится и на функциональные ВЦД.

В § 1 установлены признаки равномерной сходимости функциональных ВЦД общего вида, в частности получено усиление действительного аналога параболической теоремы, ранее установленного в работе [37] (см. условие (1.8)).

С учетом формул для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей во втором параграфе дано определение и рассмотрены свойства положительно определенных ВЦД. Здесь удалось перенести на многомерный случай многие результаты, установленные в монографии Уолла [100], в частности введены многомерные J-дроби, изучены свойства и установлены признаки сходимости ограниченных и действительных многомерных J-дробей.

В продолжение исследований числовых ВЦД (см. теоремы 3.15—3.21) в § 3 дано определение и установлены признаки сходимости многомерных g-дробей.

В § 4 рассмотрены многомерные регулярные C-дроби и S-дроби, установлен принцип соответствия и доказаны некоторые признаки сходимости.

Одним из возможных способов разложения функций, заданных кратными степенными рядами, в ветвящиеся цепные дроби является построение так называемых соответствующих ВЦД. Такие дроби были установлены Х. И. Кучминской [34], Марфи и О. Донохоэ [84]. Несколько другая структура соответствующих ВЦД была предложена В. Семашко [93, 94]. В § 5 рассмотрены признаки сходимости соответствующих ветвящихся цепных дробей.

§ 1. Признаки равномерной сходимости функциональных ВЦД

Предметом наших обсуждений будут ВЦД вида

$$b_0(z) + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)} \qquad (1.1)$$

или вида

$$a_0(z)\left(b_0(z)+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)}\right)^{-1}, \qquad (1.2)$$

где $a_{i(k)}(z)$, $b_{i(k)}(z)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, i_0=0, i_k=\overline{1, N}, k \geqslant 1)$ — некоторый набор комплексных функций. определенных в области $D \subset \mathbb{C}^n$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Обозначим $f_k(z)$, $A_k(z)$, $B_k(z)$ — k-ю аппроксиманту, k-й числитель или k-й знаменатель ВЦД (1.1) или (1.2).

Методика исследования сходимости числовых ВЦД в принципе переносится и на общие функциональные ветвящиеся цепные дроби. Установим лишь некоторые достаточные признаки равномерной сходимости ВЦД (1.1) или (1.2), используя определение равномерной сходимости, данное в конце § 1 гл. 2.

Теорема 4.1. *Пусть компонентами ВЦД* (1.1) *являются неотрицательные действительные функции* $a_{i(k)}(z)$, $b_{i(k)}(z)$ $(i_k=\overline{1, N}, k=1, 2, \ldots)$, *заданные в области* $D \subset \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяющие условиям;*

а) существует такая положительная константа b, *что для всех* $z \in D$ $b_{i(1)}(z) \geqslant b > 0 \mid i_1=\overline{1, N}\mid$;

б) $a_{i(k)}(z)+b_{i(k)}(z) \neq 0$ $(i_p=\overline{1, N}, p=\overline{1, k}, k=2, 3, \ldots \ldots, z \in D)$;

в) если существует точка $z_0 \in D$ *и набор индексов* i_1, $i_2, \ldots, i_k$ $(i_p=\overline{1, N}, p=\overline{1, k}, k \geqslant 2)$, *что* $b_{i(k)}(z_0)=0$, *то предполагается, что все остальные* $b_{i(k-1)j}(z_0) \neq 0$ $(j=\overline{1, N}, j \neq i_k)$.

Тогда ВЦД (1.1) равномерно сходится в области D, *если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер* k, *что все* $a_{i(k)}(z) \equiv 0$ $(i_p=\overline{1, k}, p=\overline{1, k}, z \in D)$, *либо расходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k, \qquad (1.3)$$

где

$$\delta_k=\inf\left(\frac{b_{i(k)}(z)\, b_{i(k+1)}(z)}{a_{i(k+1)}(z)} : i_p=\overline{1, N}, p=\overline{1, k+1}, z \in D\right),$$

причем те наборы индексов и те значения переменной z, *при которых* $a_{i(k+1)}(z)=0$ *при минимизации не рассматриваются.*

Доказательство. Из условий а)—в) следует, что k-е подходящие дроби $f_k(z)$ имеют смысл, т. е. не вырождаются в отношение 0/0, если их вычислять по алгоритму (2.6)—(2.8) гл. 1.

Следуя схеме доказательства теоремы 3.12, приходим к оценке

$$|f_{m+1}(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{1}{b} \prod_{k=1}^{m} \frac{N}{N+\delta_k}.$$

Поэтому, учитывая свойство вилки

$$f_{2k}(z) \leqslant f_{2k+2}(z) \leqslant f_{2j+1}(z) \leqslant f_{2j-1}(z),$$

где k, j — произвольные натуральные числа, заключаем, что ВЦД (1.1) равномерно сходится в области D, если ряд (1.3) расходится. ■

Следующая теорема была установлена в работе [37] в предположении, что $0 \leqslant t < 1/2$.

Теорема 4.2. *Пусть элементами ВЦД (1.1) являются действительные функции, заданные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие условиям:*

а) существует неотрицательная константа $M \geqslant 0$, что для всех $z \in D$

$$\left|\frac{a_{i(1)}(z)}{b_{i(1)}(z)}\right| \leqslant M \quad (i_1 = \overline{1, N}); \tag{1.4}$$

б) $b_{i(k)}(z) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N},\ z \in D);$ (1.5)

в) существует неотрицательная константа $t\ (0 \leqslant t \leqslant {}^1/_2)$, такая, что для всех $z \in D$

$$d_{i(k+1)}(z) + \frac{1}{N} t(1-t) \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}). \tag{1.6}$$

Тогда ВЦД (1.1) равномерно сходится в области D, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, что все $a_{i(k)}(z) \equiv 0\ (i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ z \in D)$, либо расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k, \text{ если } 0 \leqslant t < {}^1/_2, \tag{1.7}$$

либо

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\delta_k}{m-k} = \infty, \text{ если } t = 1/2, \tag{1.8}$$

где

$$\delta_k = \inf(|d_{i(k+1)}^{-1}(z)|;\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k+1},\ z \in D)$$

$$d_{i(k+1)}(z) = \frac{a_{i(k+1)}(z)}{b_{i(k+1)}(z)\, b_{i(k)}(z)} \quad (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}),$$

причем те наборы индексов и те значения переменной z, при которых $a_{i(k+1)}(z)=0$, при минимизации не рассматриваются.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы для ВЦД (1.1) выполняются фундаментальные неравенства (2.19)—(2.21) гл. 2. Сначала убедимся в том, что

$$Q^{(s)}_{i(k)}/b_{i(k)}(z) \geqslant h_{s-k} > 0 \quad (i_k=\overline{1, N},\ k=\overline{1, s},\ s=1, 2, \ldots), \tag{1.9}$$

где h_m — m-я аппроксиманта цепной дроби

$$1 - \frac{t(1-t)}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \frac{t(1-t)}{1} - \ldots$$

Используем метод математической индукции по k $(k=s, s-1, \ldots, 1)$ при каждом фиксированном s. Неравенство (1.9) при $k=s$ очевидно. Пусть оно выполняется для всех n, таких, что $k+1 \leqslant n \leqslant s$; тогда при $n=k$ имеем

$$\frac{Q^{(s)}_{i(k)}}{b_{i(k)}(z)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{d_{i(k)}(z)}{Q^{(s)}_{i(k+1)}/b_{i(k+1)}(z)} \geqslant 1 - \frac{t(1-t)}{h_{s-k-1}} = h_{s-k}.$$

Оценим сверху выражение $\displaystyle\sum_{i_1=1}^{N}\left|\frac{a_{i(1)}(z)}{Q^{(s)}_{i(1)}}\right|$:

$$\sum_{i_1=1}^{N}\left|\frac{a_{i(1)}(z)}{Q^{(s)}_{i(1)}}\right| = \sum_{i_1=1}^{N}\left|\frac{a_{i(1)}(z)}{b_{i(1)}(z)}\right| \frac{1}{Q^{(s)}_{i(1)}/b_{i(1)}(z)} \leqslant \frac{MN}{h_{s-1}} = \frac{MN}{1-t},$$

так как h_s — монотонно убывающая последовательность и $\lim\limits_{s\to\infty} h_s = h = (1-t)$ (см. доказательство теоремы 3.14). Следовательно, $\rho_1 = MN/(1-t)$. Остальные ρ_k $(k=2, 3, \ldots)$ ищем в виде $\rho_{k+1} = L(L+\delta_k)^{-1}$. Тогда неравенство (2.21) гл. 2 эквивалентно неравенству

$$\delta_k \sum_{i_{k+1}=1}^{N}\left|\frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q^{(s)}_{i(k+1)}}\right| \leqslant L\left(\left|b_{i(k)}(z) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q^{(s)}_{i(k+1)}}\right| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N}\left|\frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q^{(s)}_{i(k+1)}}\right|\right). \tag{1.10}$$

Выражение, стоящее слева, оценим сверху, стоящее справа — снизу. Сравнивая полученные выражения, найдем формулу для L.

В случае, когда все $a_{i(k+1)}(z) \neq 0$, имеем

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right| \delta_k \leqslant \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \frac{b_{i(k+1)}(z)\, b_{i(k)}(z)}{a_{i(k+1)}(z)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |b_{i(k)}(z)| \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{b_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \leqslant \frac{|b_{i(k)}(z)|\, N}{h_{s-k-1}},$$

$$\left| b_{i(k)}(z) \right| + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \Bigg| - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right| \geqslant$$

$$\geqslant |b_{i(k)}(z)| \left(\left| 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{d_{i(k+1)}(z)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}/b_{i(k+1)}(z)} \right| - \right.$$

$$\left. - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|d_{i(k+1)}(z)|}{Q_{i(k+1)}^{(s)}/b_{i(k+1)}(z)} \right) \geqslant |b_{i(k)}(z)| \left(1 - \frac{2t(1-t)}{h_{s-k-1}} \right),$$

откуда

$$L\, |b_{i(k)}(z)| \left(1 - \frac{2t(1-t)}{h_{s-k-1}} \right) = \frac{|b_{i(k)}(z)|\, N}{h_{s-k-1}}$$

или

$$L = N\,(h_{s-k-1} - 2t(1-t))^{-1}. \tag{1.11}$$

Если же некоторые $a_{i(k+1)}(z) = 0$, то, так как все $Q_{i(k+1)}^{(s)} \neq 0$, заменяем выражения $a_{i(k+1)}(z)/Q_{i(k+1)}^{(s)}$, где $a_{i(k+1)}(z) = 0$, нулями и, перегруппировывая оставшиеся отношения, получим (1.10), где вместо N необходимо взять $N_1 < N$. Если $N_1 = 0$, то суммы в (1.10) исчезают и это неравенство остается справедливым при $L = 0$. В общем случае в качестве L достаточно взять выражение (1.11).

Если при некотором k и произвольном $z \in D$ все $a_{i(k)}(z) \equiv \equiv 0$ ($i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, N}$), то так как $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$ ($s = k, k + 1, \ldots$), имеем $f_s(z) = f_{k-1}(z)$ ($s = k, k+1, \ldots$) и сходимость ВЦД (1.1) в этом случае очевидна.

Пусть $0 \leqslant t < 1/2$. Тогда, учитывая, что h_m — монотонно убывающая последовательность и $\lim\limits_{m\to\infty} h_m = (1-t)$, в качестве L достаточно взять число

$$L = N(1-t)^{-1}(1-2t)^{-1}. \tag{1.12}$$

Равномерная сходимость ВЦД (1.1) в этом случае следует из предложения 2.4 и оценки

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{MN}{1-t} \prod_{k=1}^{m} \frac{L}{L+\delta_k} \quad (n < m), \tag{1.13}$$

если учесть, что L определяется согласно (1.12) и ряд (1.7) расходится.

Пусть $t = 1/2$. Учитывая (3.14), (3.15) гл. 3 и то, что $h_k = Q_{k+1}/Q_k$, выражение (1.11) для L преобразуем к виду

$$L = L_{sk} = 2N(s-k).$$

Если $m = 2r$, то, повторяя доказательство предложения 2.4, получим

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant 2MN \prod_{k=1}^{[m/2]} \frac{2N(m-2k+1)}{2N(m-2k+1)+\delta_{2k-1}} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{[m/2]} \frac{2N(n-2k)}{2N(n-2k)+\delta_{2k}}, \tag{1.14}$$

если же $m = 2r-1$, получим

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant$$
$$\leqslant 2MN \prod_{k=1}^{[m/2]} \frac{2N(m-2k)}{2N(m-2k)+\delta_{2k}} \prod_{k=1}^{[(m+1)/2]} \frac{2N(n-2k-1)}{2N(n-2k-1)+\delta_{2k-1}}. \tag{1.15}$$

Условие (1.8) эквивалентно выполнению, по крайней мере, одного из двух условий:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{[m/2]} \frac{\delta_{2k-1}}{m-2k+1} = \infty \tag{1.16}$$

или

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{[(m-1)/2]} \frac{\delta_{2k}}{m-2k} = \infty. \tag{1.17}$$

Пусть для определенности справедливо соотношение (1.16). Тогда, взяв $m = 2r$, из оценки (1.14) в силу произвольности n сможем заключить, что ВЦД (1.1) равномерно сходится в области D. Действительно, если s и n — произвольные натуральные числа, такие, что $n > s \geqslant m$, то

$$|f_n(z) - f_s(z)| \leqslant |f_n(z) - f_m(z)| + |f_s(z) - f_m(z)|. \blacksquare$$

Теорема 4.3. *ВЦД (1.2), где* $a_{i(k)}(z)$, $b_{i(k)}(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1)$ — *комплексные функции, заданные в области* $D \subset \mathbb{C}^n$, *равномерно и абсолютно сходится в области* D, *если*

а) $b_{i(k)}(z) \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1,\ z \in D)$;

б) существуют действительные константы $M > 0$ и $0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1/2$, *что*

$$\left|\frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)\, b_{i(k-1)}(z)}\right| \leqslant \alpha = N^{-1}t(1 - t)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N},\ b_{i(0)}(z) = b_0(z),\ z \in D),$$

$$\left|\frac{a_0(z)}{b_0(z)}\right| \leqslant M,\ z \in D.$$

Доказательство следует из оценок (3.10), (3.11) гл. 3, если предварительно ВЦД (1.2) привести к виду (3.8) гл. 3, используя эквивалентные преобразования (4.2), (4.11) гл. 1.

§ 2. Положительно определенные ВЦД. Многомерные J-дроби

Рассмотрим ВЦД вида

$$b_0 + z_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i(k)}}, \tag{2.1}$$

где b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$ — фиксированные комплексные числа $z_{i(k)}$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots)$ — вообще говоря, независимые комплексные переменные. Пусть $z = (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_N, z_{11}, \ldots, z_{i(k)}, \ldots)$ обозначает бесконечномерный вектор, $A_n(z)$, $B_n(z)$, $f_n(z)$ — n-й числитель, n-й знаменатель, n-ю аппроксиманту ВЦД (2.1) соответственно.

Рассмотрим симметричные матрицы

$$C_{ik} = \begin{vmatrix} c_{ii} & c_{i,i+1} & \ldots & c_{ik} \\ c_{i+1,i} & c_{i+1,i+1} & \ldots & c_{i+1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{ki} & c_{k,i+1} & \ldots & c_{kk} \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

т. е. матрицы, удовлетворяющие условию $c_{pq} = c_{qp}$ ($p, q = \overline{i, k}$), элементы которых связаны с компонентами ВЦД (2.1) следующим образом:

$$c_{00} = b_0 + z_0,\ c_{pp} = b_{j(m)} + z_{j(m)}\ (p = \overline{1, k}), \qquad (2.3)$$

$$c_{0i_1} = -a_{i_1},\ c_{pq} = -a_{j(p)i_{m+1}}\ (p = \overline{1, k},\ q = Np + i_{m+1} \leqslant k,$$
$$1 \leqslant i_1,\ i_{m+1} \leqslant N), \qquad (2.4)$$

где индексы $j_1, j_2, \ldots j_m$ определяются из разложения числа p по алгоритму (1.12) гл. 1

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \cdots + j_m\ (1 \leqslant j_n \leqslant N,\ n = \overline{1, m}), \qquad (2.5)$$

$$c_{pq} = 0 \text{ во всех остальных случаях, когда } q > p. \qquad (2.6)$$

Лемма 4.1. *n-е знаменатели $B_n(z)$ и n-е числители $A_n(z)$ ВЦД (2.1) вычисляются по формулам*

$$B_n(z) = \det C_{0s},\ A_n(z) = \det C_{1s}, \qquad (2.7)$$

где C_{is} ($i = 0, 1$) — симметричные матрицы вида (2.2), элементы которых определяются согласно формулам (2.3)—(2.6) и

$$s = (N^{n+1} - 1)(N - 1)^{-1}. \qquad (2.8)$$

Доказательство. Из теоремы 1.1 следует, что

$$B_n(z) = \det C_0^s,\ A_n(z) = \det C_1^s,$$

где s определяется согласно (2.8), а в матрицах (2.14) гл. 1 вместо каждого $a_{j(m)}$, $b_{j(m)}$ положено $-a^2_{j(m)}$ и $b_{j(m)} + z_{j(m)}$ соответственно. Элементы матриц C_i^s ($i = 0,1$) обозначим c'_{pq}. Покажем, что

$$\det C_{0s} = \det C_0^s. \qquad (2.9)$$

Пусть c_{pq} — произвольный фиксированный элемент матрицы C_{0s} ($0 \leqslant p < q \leqslant s$). Если $q \neq Np + i_{m+1}$ ни при каком i_{m+1} ($1 \leqslant i_{m+1} \leqslant N$), то согласно определению матриц C_{0s} и C_0^s имеем $c_{pq} = c_{qp} = c'_{pq} = c'_{qp} = 0$. Пусть $c_{pq} \neq 0$ — частный числитель последнего тупикового n-го звена $f_n(z)$. В этом случае $Nq + i_{m+2} > s$ для произвольного i_{m+2} ($1 \leqslant i_{m+2} \leqslant N$). Умножив q-й столбец и разделив q-ю строку матрицы C_{0s} на $-c_{pq}$, получим матрицу D_{0s}, для элементов которой d_{ij} справедливы соотношения $d_{ij} = c_{ij}$ при всех наборах индексов, кроме $d_{pq} = c'_{pq}$, $d_{qp} = c'_{qp}$ и $\det C_{0s} = \det D_{0s}$. Если $c_{pq} \neq 0$ и $Nq + i_{m+2} \leqslant s$ при каждом i_{m+2} ($1 \leqslant i_{m+2} \leqslant N$), то рассмотрим числовую последовательность

$$r_1 = Nq + i_{m+2},\ r_2 = Nr_1 + i_{m+3},\ \ldots,\ r_k = Nr_{k-1} + i_{m+k},\ \ldots, \qquad (2.10)$$

где i_p — произвольный фиксированный набор индексов $1 \leqslant i_p \leqslant N$, $p \geqslant m+2$. Так как $\{r_p\}$ — монотонно возрастающая последовательность, то выберем индекс k таким образом, чтобы $r_k \leqslant s < r_{k+1}$ при всех $i_\nu = \overline{1, N}$, $\nu = \overline{m+2, k+1}$.

Разделим q-ю строку и умножим q-й столбец, а также разделим все r_ν строки и умножим все r_ν столбцы ($\nu = \overline{1, k}$, $i_\nu = \overline{1, N}$) матрицы C_{0s} на $-c_{pq}$. При этом получим матрицу D_{0s}, определитель которой равен $\det C_{0s}$ и элементы которой d_{ij} совпадают с соответствующими элементами матрицы C_{0s}: $d_{ij} = c_{ij}$, за исключением $d_{pq} = c'_{pq}$, $d_{qp} = c'_{qp}$.

Если же при некотором p и $q = Np + i_{m+1}$ ($1 \leqslant i_{m+1} \leqslant N$) $c_{pq} = c_{qp} = 0$, то, положив в C_{0s} вместо c_{pq} и c_{qp} некоторое число $x \neq 0$, получим матрицу $C_{0s}(x)$, определитель которой непрерывно зависит от x. Поэтому

$$\det C_{0s} = \lim_{x \to 0} \det C_{0s}(x). \tag{2.11}$$

Для $C_{0s}(x)$ повторяя предыдущую процедуру, получаем матрицу $D_{0s}(x)$, у которой $d_{ij} = c_{ij}$ для всех i, j кроме $d_{pq} = -x^2$, $d_{qp} = -1$. Устремляя $x \to 0$, получим $d_{pq} = c'_{pq}$, $d_{qp} = c'_{qp}$. Если соответствующую процедуру проделать для каждого элемента c_{pq} ($0 \leqslant p < q \leqslant s$) матрицы C_{0s}, то легко убеждаемся в справедливости (2.9). ■

В качестве иллюстрации запишем $\det C_{0k}$ ($N = 2$, $n = 2$, $k = 7$)

$$C_{07} = \begin{Vmatrix} b_0+z_0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & b_1+z_1 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & b_2+z_2 & 0 & 0 & -a_{21} & -a_{22} \\ 0 & -a_{11} & 0 & b_{11}+z_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{12} & 0 & 0 & b_{12}+z_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{21} & 0 & 0 & b_{21}+z_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{22}+z_{22} \end{Vmatrix}.$$

Пусть $X = (x_0, x_1, \ldots, x_N, \ldots, x_{i(n)}, \ldots, x_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}})$ — вектор из $\mathbb{C}^s$, элементы которого упорядочены согласно (1.13) гл. 1, а $s = (N^{n+1} - 1)(N-1)^{-1}$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$C_{0s}X = 0. \tag{2.12}$$

Каждое p-е уравнение системы (2.12) умножим на $\bar{x}_{j(m)}$, где индексы $j_1, j_2, \ldots, j_m$ определяются из разложения числа p

по алгоритму (2.5), $\bar{x}_{j(m)} = \bar{x}_0$, если $p = 0$. Просуммировав все уравнения, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} (b_{i(k)} + z_{i(k)}) |x_{i(k)}|^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} a_{i(k)} \times \times (x_{i(k)} \bar{x}_{i(k-1)} - \bar{x}_{i(k)} \cdot x_{i(k-1)}) = 0, \tag{2.13}$$

где $x_{i(0)} = x_0$. Положим

$$\begin{cases} \beta_{i(k)} = \operatorname{Im} b_{i(k)},\ y_{i(k)} = \operatorname{Im} z_{i(k)}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \\ = \overline{1, N}, k \geqslant 1), \\ \alpha_{i(k)} = \operatorname{Im} a_{i(k)}\ \ (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{2.14}$$

Предположим, что при условиях

$$\begin{cases} y_{i(k)} > 0\ (k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1), \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |x_{i(k)}|^2 > 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} (\beta_{i(k)} + y_{i(k)}) |x_{i(k)}|^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \alpha_{i(k)} \times \times (x_{i(k)} \bar{x}_{i(k-1)} + \bar{x}_{i(k)} x_{i(k-1)}) > 0. \tag{2.16}$$

Лемма 4.2. *При выполнении условий (2.15) неравенство (2.16) эквивалентно неотрицательной определенности действительной квадратической формы*

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \beta_{i(k)} \xi_{i(k)}^2 - - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \alpha_{i(k)} \xi_{i(k)} \xi_{i(k-1)} \geqslant 0, \tag{2.17}$$

где $\xi_{i(0)} = \xi_0$, $\xi_{i(k)}$ — произвольные действительные числа.

Доказательство. Пусть выполняется (2.16) для произвольных комплексных чисел $x_{i(k)}$, что удовлетворяют соотношениям (2.15). В частности, неравенство (2.16) выполняется и тогда, когда $x_{i(k)} = \xi_{i(k)}$. Подставив в неравенстве (2.16) вместо $x_{i(k)}$ действительные числа $\xi_{i(k)}$ ($i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$) и перейдя к пределу в обеих частях неравенства при $y_{i(k)} \to 0$ ($i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$), получим (2.17).

Пусть выполняется условие (2.17) и пусть $x_{i(k)} = u_{i(k)} + iv_{i(k)}$ ($i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$). Тогда левую часть неравенства (2.16) можно записать в виде

$$\Phi(u) + \Phi(v) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} y_{i(k)} |x_{i(k)}|^2,$$

откуда в силу условий (2.15) следует справедливость (2.16). ■

Ветвящаяся цепная дробь (2.1) называется положительно определенной, если для всех натуральных n и действительных $\xi_{i(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1$) неотрицательно определены квадратические формы (2.17).

Теорема 4.4 [11]. *Если ВЦД (2.1) положительно определена, тогда все* $B_n(z) \neq 0$ *в областях* $\operatorname{Im} z_{i(k)} > 0$ ($i_0 = 0$, $i_k = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$).

Доказательство. В лемме 4.1 было установлено, что $B_n(z) = \det C_{0s}$. Определитель $\det C_{0s} \neq 0$, если система (2.12) имеет только нулевое решение. Равенство (2.13) является следствием системы уравнений (2.12). Если мы покажем, что (2.13) в условиях теоремы выполняется тогда и только тогда, когда все $x_{i(k)} = 0$ ($i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, n}$), тогда, очевидно, что система алгебраических уравнений (2.12) имеет только тривиальное решение. Если выполняется (2.17), то в силу леммы 4.2 выполняется (2.16) при каждом натуральном n. Следовательно, равенство (2.13) может выполняться тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |x_{i(k)}|^2 = 0. \quad ■$$

Теорема 4.5[11]. *ВЦД (2.1) является положительно определенной, если выполняются условия*

а) $\beta_{i(k)} \geqslant 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1$);

$$\tag{2.18}$$

б) существуют такие действительные числа $0 \leqslant g_{i(k)} \leqslant 1$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$), что

$$\alpha^2_{i(k)} = N^{-1}\beta_{i(k-1)}\beta_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})\, g_{i(k)}, \tag{2.19}$$

где $i_k = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots, i_0 = 0$, $g_0 = 0$, $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$ *определяются согласно (2.14).*

Доказательство. Пусть выполняются условия (2.18) и (2.19). Тогда (2.17) запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \left[\left(\frac{1-g_{i(k-1)}}{N}\beta_{i(k-1)}\right)^{1/2} \xi_{i(k-1)} \pm\right.$$

$$\left.\pm\,(g_{i(k)}\beta_{i(k)})^{1/2}\,\xi_{i(k)}\right]^2 + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N} (1-g_{i(n)})\,\beta_{i(n)}\xi_{i(n)}^2 \geqslant 0,$$

где «+» берем тогда, когда $\alpha_{i(k)} \leqslant 0$, и «—», когда $\alpha_{i(k)} > 0$. ∎

Замечание 4.1. Условие (2.18) является также и необходимым для того, чтобы ВЦД (2.1) была положительно определенной. Действительно, если в (2.17) положить $\xi_{i(m)} \neq 0$, а все остальные $\xi_{j(k)} = 0$, то неравенство (2.17) преобразуется к виду $\beta_{i(m)}\xi_{i(m)}^2 \geqslant 0$, откуда следует (2.18).

Если же при некотором наборе индексов $\beta_{i(k)} = 0$, то для выполнения условия (2.17) необходимо, чтобы $\alpha_{i(k)} = 0$ и $\alpha_{i(k+1)} = 0$ ($i_{k+1} = \overline{1, N}$). Действительно, если в (2.17) положить $\xi_{i(k)} \neq 0$, $\xi_{i(k-1)} \neq 0$, а все остальные $\xi_{j(m)} = 0$, то получим $\beta_{i(k-1)}\xi_{i(k-1)}^2 - 2\alpha_{i(k)}\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)} \geqslant 0$. Отсюда в силу произвольности $\xi_{i(k-1)}$, $\xi_{i(k)}$ следует, что необходимо $\alpha_{i(k)} = 0$. Аналогично проверяется, что $\alpha_{i(k+1)} = 0$ ($i_{k+1} = \overline{1, N}$).

Конечно, можно сформулировать необходимые и достаточные условия положительной определенности ВЦД (2.1), используя критерий Сильвестра неотрицательной определенности квадратических форм. Однако эти условия будут очень громоздки.

Заметим также, что в случае $N = 1$ условия (2.18), (2.19) являются необходимыми и достаточными.

Теорема 4.6. *Если при некотором натуральном n квадратическая форма (2.17) неотрицательно определена, то квадратическая форма*

$$\Phi'(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \beta_{i(k)}\xi_{i(k)}^2 -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \alpha'_{i(k)}\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}, \qquad (2.20)$$

где $|\alpha'_{i(k)}| \leqslant |\alpha_{i(k)}|$ ($k = \overline{1, n}$, $i_k = \overline{1, N}$) также является неотрицательно определенной.

Доказательство. Фиксируем произвольный набор действительных чисел $\xi_{i(k)}$ ($k = \overline{0, n}$, $i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k =$

$=\overline{1, n}$). В пространстве $\mathbb{R}^s$, где s определяется согласно (2.8), рассмотрим дискретное множество точек

$$\Omega = \{\eta : \eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N, \ldots, \eta_{i(k)}, \ldots, \eta_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}}\},$$

$$\eta_{i(k)} = \pm \xi_{i(k)}.$$

Пусть

$$\min(\Phi(\eta) : \eta \in \Omega) = \Phi(\eta^*), \quad \eta^* \in \Omega. \tag{2.21}$$

Методом от противного покажем, что для произвольного набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$ ($i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, n}$)

$$\alpha_{i(p)}\eta^*_{i(p)}\eta^*_{i(p-1)} \geqslant 0. \tag{2.22}$$

Пусть при некотором наборе индексов $j_1, j_2, \ldots, j_p$ имеем

$$\alpha_{j(p)}\eta^*_{j(p)}\eta^*_{j(p-1)} < 0.$$

Определим вектор $\eta' \in \Omega$ следующим образом:

$$\eta'_{j(p)i_{p+1}\ldots i_r} = \eta^*_{j(p)i_{p+1}\ldots i_r} \quad (r = \overline{p+1, n},\ i_r = \overline{1, N}),$$

$\eta'_{j(p)} = \eta^*_{j(p)}$, все остальные $\eta'_{i(k)} = -\eta^*_{i(k)}$.

Легко подсчитать, что тогда

$$\Phi(\eta') = \Phi(\eta^*) + 4\alpha_{j(p)}\eta^*_{j(p)}\eta^*_{j(p-1)},$$

что противоречит минимальности формы $\Phi(\eta^*)$.

Рассмотрим квадратическую форму

$$\bar{\Phi}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{D} \beta_{i(k)}\xi^2_{i(k)} -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |\alpha_{i(k)}|\, \xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}. \tag{2.23}$$

Нетрудно проверить, что

$$\min\{\Phi(\eta) : \eta \in \Omega\} = \min\{\bar{\Phi}(\eta) : \eta \in \Omega\} = \bar{\Phi}(\bar{\eta}), \quad \bar{\eta} \in \Omega.$$

Если, например, при некотором наборе индексов $\alpha_{j(p)} < 0$, то

$$\alpha_{j(p)}\eta^*_{j(p)}\eta^*_{j(p-1)} = |\alpha_{j(p)}|\, \eta^*_{j(p)}(-\eta^*_{j(p-1)}).$$

Далее, изменяя знаки в $\eta^*_{i(k)}$ по алгоритму, предложенному выше, а именно: заменяя $\eta^*_{i(k)}$ на $\eta'_{i(k)}$, убеждаемся в том, что форма (2.23) принимает то же значение. Аналогичную процедуру делаем с каждым $\alpha_{i(k)} < 0$. Введем по аналогии с (2.23) квадратическую форму $\bar{\Phi}'(\xi)$, где $\Phi'(\xi)$ определяется согласно (2.20). Пусть

$$\min(\Phi'(\eta) : \eta \in \Omega) = \min(\bar{\Phi}'(\eta),\ \eta \in \Omega) = \bar{\Phi}'(\tilde{\eta}), \quad \tilde{\eta} \in \Omega.$$

Так как

$$|\alpha_{i(k)}|\,\eta_{i(k)}\bar{\eta}_{i(k-1)} \geqslant 0,\quad |\alpha'_{i(k)}|\,\bar{\eta}_{i(k)}\tilde{\eta}_{i(k-1)} \geqslant 0$$

и

$$\bar{\eta}_{i(k)} = \pm\,\xi_{i(k)},\quad \tilde{\eta}_{i(k)} = \pm\,\xi_{i(k)},$$

то

$$\bar{\eta}_{i(k)}\bar{\eta}_{i(k-1)} = \tilde{\eta}_{i(k)}\tilde{\eta}_{i(k-1)}$$

при всевозможных наборах индексов. Следовательно,

$$\Phi'(\xi) \geqslant \min\left(\overline{\Phi'(\eta)} : \eta\in\Omega\right) = \bar{\Phi}'(\tilde{\eta}) \geqslant \bar{\Phi}(\tilde{\eta}) \geqslant$$
$$\geqslant \min\left(\Phi(\eta),\ \eta\in\Omega\right). \ \blacksquare$$

Замечание 4.2. Условие (2.19) теоремы 4.5 можем теперь заменить условием

$$\alpha^2_{i(k)} \leqslant N^{-1}\beta_{i(k-1)}\beta_{i(k)}\left(1 - g_{i(k-1)}\right) g_{i(k)}, \tag{2.24}$$

где $g_{i(0)} = 0,\ 0 \leqslant g_{i(k)} \leqslant 1\ \ (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N})$.

Рассмотрим некоторые примеры положительно определенных ВЦД.

Пример 4.1. Рассмотрим ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1} \tag{2.25}$$

с комплексными частными числителями. Используя эквивалентные преобразования (4.2) гл. 1, приведем ее к виду

$$i\left(i + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{i}\right)^{-1}. \tag{2.26}$$

Пусть $a_{i(k)} = c^2_{i(k)}$. Так как $|z^2| - \operatorname{Re}(z^2) = 2(\operatorname{Im} z)^2$, то условие (2.24) в нашем случае запишется так:

$$|a_{i(k)}| - \operatorname{Re} a_{i(k)} \leqslant 2N^{-1}\left(1 - g_{i(k-1)}\right) g_{i(k)}.$$

Если положить $g_{i(k)} = 1/2\,(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N})$, то приходим к параболической области: $|z| - \operatorname{Re} z \leqslant (2N)^{-1}$.

Пример 4.2. Пусть частные числители ВЦД (2.25) являются действительными отрицательными числами. Тогда, если положить в (2.26) $a_{i(k)} = (ic_{i(k)})^2$, то условие (2.19) в нашем случае запишется в виде $a_{i(k)} = -N^{-1}\left(1 - g_{i(k-1)}\right)\times$ $\times\, g_{i(k)}$. Мы приходим к ветвящимся цепным дробям, рассматриваемым в конце гл. 3.

Лемма 4.3. *Пусть*

$$t = t_{i(p)}(w_{i(p)}^{(1)}) = b_{i(p)} + z_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \tag{2.27}$$

($p = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_p = \overline{1, N}, p \geqslant 1$) — *некоторая совокупность многомерных дробно-линейных отображений и пусть*

$$y_0 = \operatorname{Im} z_0 > 0,\ y_{i(k)} = \operatorname{Im} z_{i(k)} \geqslant 0,\ \beta_{i(k)} = \operatorname{Im} b_{i(k)} \geqslant 0,$$

для $\alpha_{i(k)} = \operatorname{Im} a_{i(k)}$ *выполняется условие (2.24), где* $0 \leqslant g_{i(k)} \leqslant 1$, *кроме того,*

$$\operatorname{Im} w_{i(p+1)} \geqslant \beta_{i(p+1)} g_{i(p+1)} \ (i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, p+1}). \tag{2.28}$$

Тогда

$$\operatorname{Im} t \geqslant \beta_{i(p)} g_{i(p)} + y_{i(p)}. \tag{2.29}$$

Доказательство. Пусть все $y_{i(p)} > 0$ ($p = 1, 2, \ldots, i_p = \overline{1, N}$) и пусть $M = N^{-1}(1 - g_{i(p)})\beta_{i(p)} + N^{-1} y_{i(p)}$. Тогда, учитывая условия леммы, имеем

$$\operatorname{Im} w_{i(p+1)} \geqslant M^{-1} \alpha_{i(p+1)}^2.$$

Поэтому

$$\left| w_{i(p+1)} + \frac{i a_{i(p+1)}^2}{2M} \right| \geqslant \frac{|a_{i(p+1)}^2|}{2M}$$

или

$$\left| \frac{w_{i(p+1)}}{a_{i(p+1)}^2} + \frac{i}{2M} \right| \geqslant \frac{1}{2M}. \tag{2.30}$$

Рассмотрим образ (2.30) при отображении $w = z^{-1}$, получим

$$\operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \leqslant M.$$

Поэтому

$$\operatorname{Im} t_{i(p)} = \beta_{i(p)} + y_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \geqslant g_{i(p)} \beta_{i(p)}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $y_{i(p)} \to 0$, получим

$$\beta_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a_{i(p+1)}^2}{w_{i(p+1)}} \geqslant g_{i(p)} \beta_{i(p)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} t_{i(p)} = \beta_{i(p)} + y_{i(p)} - \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \operatorname{Im} \frac{a^2_{i(p+1)}}{w_{i(p+1)}} \geqslant y_{i(p)} + g_{i(p)}\beta_{i(p)}. \quad \blacksquare$$

Легко проверить, что образом полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant y_0 + g_0\beta_0 > 0$ при отображении $t_{-1}(w) = w^{-1}$ является круг

$$K_{-1}: \left| w + \frac{i}{2(y_0 + \beta_0 g_0)} \right| \leqslant \frac{1}{2(y_0 + \beta_0 g_0)}. \qquad (2.31)$$

Обозначим K_p образ области

$$\operatorname{Im} w_{i(p+1)} \geqslant \beta_{i(p+1)} g_{i(p+1)} \quad (k = \overline{1, p+1},\ i_k = \overline{1, N})$$

при отображении

$$T_p(w^{(p+1)}) = \cfrac{1}{b_0 + z_0 - \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{a^2_{i(1)}}{b_{i(1)} + z_{i(1)} - \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a^2_{i(2)}}{b_{i(2)} + z_{i(2)} - \vdots}}}, \qquad (2.32)$$

$$\vdots - \sum_{i_p=1}^{N} \cfrac{a^2_{i(p)}}{b_{i(p)} + z_{i(p)} - \sum\limits_{i_{p+1}=1}^{N} \cfrac{a^2_{i(p+1)}}{w_{i(p+1)}}}$$

где $w^{(p+1)}$ определяется согласно (1.3) гл. 1.

При выполнении условий леммы 4.3, учитывая (2.29), имеем

$$K_{-1} \supseteq K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \qquad (2.33)$$

Так как $T_p(\infty) = f_p(z)$, то $f_p(z) \in K_p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 4.7. *Если для ВЦД (2.1) выполняются условия (2.24), где*

$$\beta_{i(k)} \geqslant 0,\ g_0\beta_0 + y_0 > 0,\ y_{i(k)} \geqslant 0 (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}), \qquad (2.34)$$

то ее p-е аппроксиманты $f_p(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Im} f_p(z) \leqslant 0 \ |f_p(z)| \leqslant (y_0 + \beta_0 g_0)^{-1} \ (p = 1, 2, \ldots). \qquad (2.35)$$

Теорема 4.8. *Если для ВЦД (2.1) выполняется условие (2.24), где*

$$g_{i(p)}\beta_{i(p)} > 0 \ (p = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_p = \overline{1, N}, p \geqslant 1), \qquad (2.36)$$

то р-е знаменатели $B_p(z)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ ВЦД (2.1) отличны от нуля в области

$$\operatorname{Im} z_{i(k)} \geqslant 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1). \quad (2.37)$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий (2.36), а также в предположении, что

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \xi_{i(k)}^2 \neq 0 \ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.38)$$

квадратические формы (2.17) $\Phi(\xi) > 0$. Пусть

$$(\alpha'_{i(k)})^2 = \beta_{i(k-1)}\beta_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})\, g_{i(k)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, i_0 = 0 \ i_k = \overline{1, N}).$$

Рассмотрим квадратическую форму (2.17), где вместо каждого $\alpha_{i(k)}$ взято $\alpha'_{i(k)}$, и запишем ее в виде

$$\Phi'(\xi) = g_0\beta_0\xi_0^2 + \sum_{i_1=1}^{N} \left[\left(\frac{1-g_0}{N}\beta_0\right)^{1/2} \xi_0 \pm (g_{i(1)}\beta_{i(1)})^{1/2}\xi_{i(1)}\right]^2 +$$
$$+ \sum_{i_1, i_2=1}^{N} \left[\left(\frac{1-g_{i(1)}}{N}\beta_{i(1)}\right)^{1/2} \xi_{i(1)} \pm (g_{i(2)}\beta_{i(2)})^{1/2}\xi_{i(2)}\right]^2 + \cdots +$$
$$+ \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N} \left[\left(\frac{1-g_{i(n-1)}}{N}\beta_{i(n-1)}\right)^{1/2} \xi_{i(n-1)} \pm\right.$$
$$\left.\pm (g_{i(n)}\beta_{i(n)})^{1/2}\xi_{i(n)}\right]^2 + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N} (1 - g_{i(n)})\beta_{i(n)}\xi_{i(n)}^2.$$

Отсюда, учитывая (2.36) и (2.38), имеем $\Phi'(\xi) > 0$, так как, если $\xi_{i(k)}$ — первая отличная от нуля компонента вектора $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}}) \in R^s$, где s определяется согласно (2.8), то выражение

$$\left[\left(\frac{1-g_{i(k-1)}}{N}\beta_{i(k-1)}\right)^{1/2} \xi_{i(k-1)} + (\beta_{i(k)}g_{i(k)})^{1/2}\xi_{i(k)}\right]^2 > 0.$$

Повторяя конец доказательства теоремы 4.6, имеем

$$\Phi(\xi) \geqslant \min(\Phi(\eta) : \eta \in \Omega) = \min(\overline{\Phi}(\eta) : \eta \in \Omega) =$$
$$= \overline{\Phi}(\tilde{\eta}) \geqslant \overline{\Phi}'(\tilde{\eta}) > 0,$$

где Ω, η, $\overline{\Phi}$, $\tilde{\eta}$ определены при доказательстве теоремы 4.6.

Остается доказать, что в предположениях (2.37) справедливо неравенство (2.16). Если

$x_{i(k)} = u_{i(k)} + iv_{i(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1)$,

то левая часть (2.16) запишется в виде

$$\Phi(u) + \Phi(v) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} y_{i(k)} |x_{i(k)}^2|.$$

Это выражение больше нуля, так как $\Phi(u) > 0$ или $\Phi(v) > 0$ и все слагаемые неотрицательны.

По аналогии с цепными дробями (см. (32)) ВЦД вида

$$\left(b_0 + \zeta_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + \zeta_{i_k}}\right)^{-1}, \tag{2.39}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N$, ζ_0 — независимая комплексная переменная или функция от ζ $(\zeta_0 = f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N))$, назовем многомерной j-дробью. Если существует такая действительная положительная константа $M > 0$, что

$$|a_{i(k)}| \leqslant \frac{M}{1 + 2\sqrt{N}}, \quad |b_{i(p)}| \leqslant \frac{M}{1 + 2\sqrt{N}} \tag{2.40}$$

$(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N},\ p = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_p = \overline{1, N},\ p \geqslant 1)$, то дробь (2.39) назовем ограниченной, а минимальное число M, при котором справедливо (2.40), определим как границу многомерной ограниченной J-дроби.

Теорема 4.9. *ВЦД (2.39) ограничена тогда и только тогда, когда существует действительное число $H > 0$, что*

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} b_{i(k)} u_{i(k)} v_{i(k)} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} a_{i(k)} (u_{i(k)} v_{i(k-1)} + u_{i(k-1)} v_{i(k)})\Big| \leqslant H \Big(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} |u_{i(k)}^2| \cdot \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} |v_{i(k)}^2|\Big)^{1/2} \tag{2.41}$$

для произвольных комплексных чисел $u_{i(k)}$, $v_{i(k)}$ и произвольного натурального n.

Доказательство. Необходимость. К левой части (2.41) применим неравенство Буняковского—Шварца. С учетом (2.40) получим

$$\frac{M}{1 + 2\sqrt{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} |u_{i(k)}^2|\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} |v_{i(k)}^2|\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{M}{1+2\sqrt{N}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}|u^2_{i(k)}|\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}|v^2_{i(k)}|\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}|u^2_{i(k)}|\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N}|v^2_{i(k)}|\right)^{1/2}\right].$$

Мы приходим к (2.41), где $H \leqslant 3M(1+2\sqrt{N})^{-1}$.

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (2.41). Если здесь положить $u_{j(p)} = v_{j(p)} = 0$ при всех возможных наборах индексов, за исключением $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то получим $|b_{i(k)}| \leqslant H$. Положив $u_{j(p)} = 0$, за исключением $u_{i(k)}$, и $v_{j(p)} = 0$, за исключением $v_{i(k-1)}$, получим $|a_{i(k)}| \leqslant H$. Поэтому справедливо (2.40), где $M = (1+2\sqrt{N})H$. ■

Минимальное число H, при котором справедливо (2.41), назовем нормой ограниченной многомерной J-дроби (2.39). Норма не обязательно совпадает с границей. Рассмотрим ВЦД (2.39), у которой все $a_{i(k)} = \frac{1}{2}$, $b_{i(k)} = 0$. Тогда получим, что $H = 1$, $M = \frac{1+2\sqrt{N}}{2}$.

Теорема 4.10 [11]. *Многомерная ограниченная J-дробь (2.39) с границей M равномерно сходится в области* $|\zeta_i| > M$ $(i = \overline{0, N})$.

Доказательство. Используя эквивалентные преобразования, дробь (2.39) приведем к виду

$$d_0(z)\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{d_{i(k)}(z)}{1}\right)^{-1},$$

где $d_0(z) = (b_0 + z_0)^{-1}$, $d_{i(k)}(z) = \dfrac{-a^2_{i(k)}}{(b_{i(k-1)} + z_{i_{k-1}})(b_{i(k)} + z_{i_k})}$ $(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}, i_0 = 0)$.

В силу условий теоремы

$$|b_{i(k)} + z_{i_k}| > M - \frac{M}{1+2\sqrt{N}} = M\frac{2\sqrt{N}}{1+2\sqrt{N}}.$$

Следовательно,

$$|d_0(z)| \leqslant M\frac{2\sqrt{N}}{1+2\sqrt{N}},\quad |d_{i(k)}(z)| \leqslant \frac{M^2(1+2\sqrt{N})^2}{(1+2\sqrt{N})^2M^2 4N} = \frac{1}{4N}.$$

Утверждение теоремы следует из теоремы 4.3, где $t = \frac{1}{2}$. ■

Пусть $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N, \ldots, \xi_{i(k)}, \ldots, \xi_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}}) \in \mathbb{R}^s$, s определяется согласно (2.8) и

$$\| \xi \| = \Big(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \xi_{i(k)}^2 \Big)^{1/2}.$$

Пусть $0 \leqslant \Theta < 2\pi$. Определим

$$-Y_0(\Theta) = \inf_{\|\xi\|=1,\, n \geqslant 1} \Big\{ \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \operatorname{Im}(b_{i(k)} e^{i\Theta}) \xi_{i(k)}^2 - $$
$$ - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \operatorname{Im}(a_{i(k)} e^{i\Theta}) \xi_{i(k)} \xi_{i(k-1)} \Big\}. \qquad (2.42)$$

Теорема 4.11. *Многомерная ограниченная J-дробь (2.39) равномерно сходится на произвольном замкнутом ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{N+1}$, расстояние которого до выпуклого множества*

$$K_0 = \{ z : z = (z_0, z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1},\ z_k = x_k + i y_k,$$
$$x_k \sin\Theta + y_k \cos\Theta \leqslant Y_0(\Theta),\ 0 \leqslant \Theta < 2\pi,\ k = \overline{0, N} \} \qquad (2.43)$$

положительно.

Доказательство. Пусть $a = e^{i\Theta}$. Рассмотрим ВЦД

$$a \left(a b_0 + \lambda_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-(a \cdot a_{i(k)})^2}{a b_{i(k)} + \lambda_{i_k}} \right)^{-1}, \qquad (2.44)$$

эквивалентную ВЦД (2.39), где $\lambda_i = a \zeta_i$ ($i = 0, N$). Нормы у ВЦД (2.39) и (2.44) одинаковы. Положим

$$\alpha_{i(k)}(\Theta) = \operatorname{Im}(a a_{i(k)}),\quad \beta_{i(k)}(\Theta) = \operatorname{Im}(a b_{i(k)}).$$

Тогда из того, что ВЦД (2.39) является многомерной ограниченной J-дробью, следует, что существует константа $Y(\Theta)$, для которой

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} (\beta_{i(k)}(\Theta) + Y(\Theta)) \xi_{i(k)}^2 - $$
$$ - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \alpha_{i(k)}(\Theta) \xi_{i(k)} \xi_{i(k-1)} \geqslant 0,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $\xi_{i(k)}$ — произвольные действительные числа. Соотношение (2.45) следует из неравенства (2.41), записанного для ВЦД (2.44), где $u_{i(k)} = v_{i(k)} = \xi_{i(k)}$ ($k = 0, 1,$

$2, \ldots, i_0 = 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k \geqslant 1$) и того, что $|z| \geqslant -\operatorname{Im} z$. Если вместо $Y(\Theta)$ взять $-H$, то вместо (2.45) следует взять противоположное неравенство. Поэтому $|Y(\Theta)| \leqslant H$, $0 \leqslant \Theta < 2\pi$, где H — норма многомерной J-дроби (2.39). Соотношение (2.45) будет выполняться, если вместо $Y(\Theta)$ взять $Y_0(\Theta)$, где $Y_0(\Theta)$ определяется согласно (2.42). Очевидно, $|Y_0(\Theta)| \leqslant H$.

Сделаем замену переменных

$$\lambda_k = iY(\Theta) + \eta_k \quad (k = \overline{0, N}). \tag{2.46}$$

Из (2.45) следует, что ВЦД (2.44) является положительно определенной ветвящейся цепной дробью относительно переменных η_k. Из теоремы 4.7 следует, что, если $\delta > 0$ и $\operatorname{Im} \eta_k \geqslant \delta$ ($k = \overline{0, N}$) (вполне достаточно, чтобы $\operatorname{Im} \eta_0 \geqslant \delta$, $\operatorname{Im} \eta_i > 0$ ($i = \overline{1, N}$)), то для m-х аппроксимант ВЦД (2.44), совпадающих с m-ми аппроксимантами ВЦД (2.39), справедливо соотношение

$$|f_m(\eta)| \leqslant \delta^{-1}. \tag{2.47}$$

Условие $\operatorname{Im} \eta_k \geqslant \delta$ ($k = \overline{0, N}$) эквивалентно условию $\operatorname{Im} \lambda_k \geqslant Y(\Theta) + \delta$ или $x_k \sin\Theta + y_k \cos\Theta \geqslant Y(\Theta) + \delta$, если $\zeta_k = x_k + iy_k$, $0 \leqslant \Theta < 2\pi$.

Определим множество

$$K = \{z = (z_0, z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \ z_k = x_k + iy_k,$$
$$x_k \sin\Theta + y_k \cos\Theta \leqslant Y(\Theta),\ 0 \leqslant \Theta < 2\pi,\ k = \overline{0, N}\}. \tag{2.48}$$

Легко проверить, что K — выпуклое множество. Нули всех знаменателей $B_n(\zeta)$ ВЦД (2.39) принадлежат множеству K. Подходящие ВЦД (2.39) равномерно ограничены на произвольном замкнутом ограниченном множестве, расстояние которого до K положительно. Если в (2.48) вместо $Y(\Theta)$ взять $Y_0(\Theta)$, то получим множество K_0. Согласно теореме 4.10 ВЦД (2.39) сходится в области $|\zeta_i| \geqslant M$ ($i = \overline{0, N}$). В силу (2.47) $f_m(\zeta)$ ($m = 1, 2, \ldots$) являются голоморфными функциями на произвольном замкнутом ограниченном множестве, расстояние которого до K_0 положительно. Утверждение теоремы 4.11 следует из теоремы 2.17. ■

Следствие 4.1. Многомерная ограниченная J-дробь с нормой H равномерно сходится на произвольном компакте области $|\zeta_i| > N$ ($i = \overline{0, N}$).

Замечание 4.3. Пусть элементы b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$) ограниченной многомерной J-дроби (2.39) являются действительными числами. Так как в этом случае $\beta_{i(k)}(\Theta) = b_{i(k)} \sin\Theta$, $\alpha_{i(k)} = a_{i(k)} \sin\Theta$, то $Y_0(0) = Y_0(\pi) = 0$.

Учитывая ограничение (2.43), имеем $y_k \leqslant 0$ $(k=\overline{0, N})$, если $\Theta = 0$, и $y_k \geqslant 0$ $(k=\overline{0, N})$, если $\Theta = \pi$. Следовательно, $y_k = 0$ $(k=\overline{0, N})$ и K_0 — выпуклое множество точек $\eta \in \mathbb{C}^{N+1}$, для которых

$$\operatorname{Im}\eta_i = 0, \ |\operatorname{Re}\eta_i| \leqslant H \ (i=\overline{0, N}). \tag{2.49}$$

Многомерная J-дробь (2.39) называется действительной, если коэффициенты b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1,N})$ являются действительными числами. Действительная, многомерная J-дробь всегда положительно определена. Вместе с ВЦД (2.39) рассмотрим эквивалентную ей ветвящуюся цепную дробь

$$-\left(-b_0 - \zeta_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{-b_{i(k)} - \zeta_{i_k}}\right)^{-1}, \tag{2.50}$$

которая является тоже положительно определенной. Поэтому в силу теоремы 4.4 n-е знаменатели подходящих дробей ВЦД (2.39) $B_n(\zeta) \neq 0$ в области $\operatorname{Im}\zeta_i > 0$ $(i=\overline{0, N})$ или в области $\operatorname{Im}\zeta_i < 0$ $(i=\overline{0, N})$.

Из замечания 4.3 и теоремы 4.11 следует такая теорема.

Теорема 4.12. *Действительная ограниченная многомерная J-дробь (2.39) с нормой H равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой области из $\mathbb{C}^{N+1}$, расстояние которой до области (2.49) положительно.*

Исследуем сходимость действительной многомерной J-дроби

$$\left(\zeta_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{\zeta_{i_k}}\right)^{-1}. \tag{2.51}$$

Теорема 4.13. *Действительная ограниченная многомерная J-дробь (2.51) имеет норму $H \leqslant 1$, если*

$$a_{i(k)}^2 \leqslant N^{-1}(1 - g_{i(k-1)})\, g_{i(k)}, \tag{2.52}$$

где $0 \leqslant g_{i(k)} \leqslant 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1)$, $g_{i(0)} = g_0 = 0$.

Доказательство. Если выполняются условия (2.52), то, учитывая замечание 4.2, имеем

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \xi_{i(k)}^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |a_{i(k)}|\, \xi_{i(k)}\, \xi_{i(k-1)} \geqslant 0 \tag{2.53}$$

для произвольного натурального $n = 1, 2, \ldots$ и произвольных действительных чисел $\xi_{i(k)}$. Отсюда следует, что

$$2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |a_{i(k)}|\,|\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} \xi_{i(k)}^2.$$

Поэтому

$$2\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |a_{i(k)}|\,\xi_{i(k)}\xi_{i(k-1)}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |\xi_{i(k)}^2| \tag{2.54}$$

для произвольных комплексных чисел $\xi_{i(k)}$. Подставляя в (2.54) $\xi_{i(k)} = u_{i(k)} + iv_{i(k)}$ и предполагая, что $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |a_{i(k)}|(u_{i(k)}v_{i(k-1)} + u_{i(k-1)}v_{i(k)})\right| \leqslant 1 \tag{2.55}$$

или

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |a_{i(k)}|(u_{i(k)}v_{i(k-1)} + u_{i(k-1)}v_{i(k)})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} u_{i(k)}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} v_{i(k)}^2\Big)^{1/2},$$

где $u_{i(k)}$, $v_{i(k)}$ — произвольные действительные числа. В частности, можно взять все $u_{i(k)} > 0$, $v_{i(k)} > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1)$.

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{N} |a_{i(k)}|(|u_{i(k)}|\,|v_{i(k-1)}| + |u_{i(k-1)}|\,|v_{i(k)}|) \leqslant \|u\|\,\|v\|,$$

откуда следует (2.41), где $b_{i(k)} = 0$, $u_{i(k)}$, $v_{i(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1)$ — произвольные комплексные числа и $H = 1$. ■

Теорема 4.14. *ВЦД (2.51), где* $a_{i(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0, i_k = \overline{1, N}, k \geqslant 1)$ — *действительные числа, удовлетворяющие неравенствам (2.52),* $\zeta \in \mathbb{C}^{N+1}$, *равномерно сходится на каждом компакте, расстояние которого до области*

$$\operatorname{Im}\zeta_i = 0, \ |\operatorname{Re}\zeta_i| \leqslant 1 \ (i = \overline{0, N}) \tag{2.56}$$

положительно.

§ 3. Многомерные g-дроби

Рассмотрим ВЦД вида

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})\, z_{i(k)}}{1} \tag{3.1}$$

или вида

$$\left(1 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})\, z_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.2}$$

где $b_0 \in \mathbb{C}$, $g_{i(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1)$ — действительные константы, такие, что

$$0 \leqslant g_{i(k)} \leqslant 1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots, i_0 = 0,\ i_k = \overline{1, N},\ k \geqslant 1), \tag{3.3}$$

$z_{i(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N})$ — вообще говоря, независимые комплексные переменные, в частности функции многих переменных.

Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$. Дроби вида (3.1) или (3.2), у которых вместо каждого $z_{i(k)}$ положено z_{i_k} соответственно, по аналогии с одномерным случаем (см. (34)) будем называть многомерными g-дробями.

Из теоремы 3.15 следует теорема.

Теорема 4.15. *Пусть для ВЦД (3.1) выполняются условия*

$$g_0 = 0,\ 0 \leqslant g_{i(k)} < 1 \ (k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}) \tag{3.4}$$

или

$$g_0 = 0,\ 0 < g_{i(k)} \leqslant 1 \ (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots). \tag{3.5}$$

Тогда ВЦД (3.1) абсолютно и равномерно сходится, если

$$|z_{i(k)}| \leqslant N^{-1} \ (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots). \tag{3.6}$$

Из теоремы 3.20 следует теорема.

Теорема 4.16. *Пусть для ВЦД (3.2) выполняются условия (3.4) и (3.6).*

Тогда ветвящаяся цепная дробь (3.2) сходится, если существует такое натуральное число n и набор индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ $(i_k = \overline{1, N},\ k = \overline{1, n})$, что $g_{i(n)} = 0$ или $z_{i(n)} \neq -N^{-1}$.

Из теоремы 3.18 следует теорема.

Теорема 4.17. *ВЦД (3.2) абсолютно и равномерно сходится, если выполняются условия (3.6) и*

$$0 < g_0 \leqslant 1,\ 0 \leqslant g_{i(k)} < 1 \text{ или } 0 < g_{i(k)} \leqslant 1$$
$$(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}). \tag{3.7}$$

Однако для указанного типа ВЦД можно установить и более общие утверждения.

Теорема 4.18. *ВЦД (3.1), для которой выполняются условия (3.4) или (3.5), абсолютно сходится, если для произвольного набора индексов* $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ $(i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k-1})$

$$\sum_{i_k=1}^{N} |z_{i(k)}| \leqslant 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.8}$$

ВЦД (3.1) сходится абсолютно и равномерно, если, кроме того,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - m_k}{m_k} = 0, \tag{3.9}$$

где

$$m_k = \min (g_{i(k)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}). \tag{3.10}$$

Доказательство. Используя схему, предложенную при доказательстве теоремы 3.15, легко проверить, что ВЦД

$$|b_0| + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{1} \tag{3.11}$$

является мажорантой ВЦД (3.1). В частности, если ввести обозначения

$$\hat{Q}^{(s)}_{i(s)} = 1,\ \hat{Q}^{(s)}_{i(p)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{-g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})|z_{i(p+1)}|}{\hat{Q}^{(s)}_{i(p+1)}}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p = s-1, s-2, \ldots 1, i_p = \overline{1, N}), \tag{3.12}$$

то по аналогии можно установить неравенства (3.31) — (3.33) гл. 3 и убедиться в справедливости оценки (3.34) гл. 3, где f_k, $\hat{g}_k$ — k-е подходящие дроби ВЦД (3.1) и (3.11) соответственно.

Для $n > m$ справедлива формула

$$\hat{g}_n - \hat{g}_m = - \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{k=1}^{m+1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) |z_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} \hat{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod_{k=1}^{m} \hat{Q}_{i(k)}^{(m)}}. \tag{3.13}$$

Так как $\hat{g}_n$ — монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность, то отсюда следует абсолютная сходимость ВЦД (3.1). Если в (3.13) применить оценки (3.8) и (3.32) или (3.33) гл. 3 и учесть, что

$$\frac{1 - g_{i(k)}}{g_{i(k)}} \leqslant \frac{1 - m_k}{m_k},$$

то получим

$$\hat{g}_m - \hat{g}_n < \prod_{k=1}^{m} \frac{1 - m_k}{m_k}, \tag{3.14}$$

где m_k определяются согласно (3.10). ∎

Теорема 4.19. *ВЦД (3.2) абсолютно сходится, если выполняются условия (3.7) и (3.8). ВЦД (3.2) сходится абсолютно и равномерно, если, кроме того, выполняется условие (3.9).*

Доказательство. Исходя из оценок (3.32) — (3.34) гл. 3, справедливых для ВЦД (3.1), где приняты обозначения (3.12), убеждаемся в том, что областью значений ВЦД (3.1) является круг $|z - b_0| \leqslant 1 - g_0$. Поэтому применима методика доказательства теоремы 3.18, откуда следует первая часть теоремы. Вторая часть теоремы следует из оценки типа (3.14). ∎

Рассмотрим вопрос о возможности расширения области сходимости ВЦД (3.2) путем использования теоремы 4.14.

Теорема 4.20. *ВЦД*

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a^2_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{3.15}$$

где $a_{i(k)}$ — действительные числа, удовлетворяющие условиям (2.52) равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой области из $\mathbb{C}^{N+1}$, расстояние которой до области

$$\operatorname{Im} z_i = 0, \quad |\operatorname{Re} z_i| \geqslant 1 \quad (i = \overline{0, N}) \tag{3.16}$$

положительно.

Если в теореме 4.19 положим $g_{i(k)} = 1/2$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$), то получим обобщение теоремы 3.14.

Следствие 4.2. ВЦД (3.8) гл. 3, где $c_{i(k)}$ — комплексные числа, сходится, если

$$\sum_{i_k=1}^{N} |c_{i(k)}| \leqslant \frac{1}{4} \quad (k = 1, 2, \ldots, i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k-1}). \tag{3.17}$$

§ 4. Многомерные регулярные C-дроби. Многомерные S-дроби

Ветвящиеся цепные дроби вида

$$1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}\, z_{i_k}}{1} \tag{4.1}$$

или вида

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}\, z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{4.2}$$

где $a_{i(k)} \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$) — комплексные числа, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, называются многомерными регулярными C-дробями. Если же $a_{i(k)} > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N}$), $z \in \mathbb{C}^N$, то дроби вида (4.1) или (4.2) будем называть многомерными S-дробями.

Пусть L — формальный N-кратный степенной ряд

$$L = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n, \quad L_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N} c_{i(n)} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_n}. \tag{4.3}$$

ВЦД (4.1) или (4.2) называется соответствующей степенному ряду (4.3), если

$$f_k - L = \sum_{n=k+1}^{\infty} L_n^*, \ L_n^* = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N} c^*_{i(n)} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_n} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4.4}$$

т. е. каждая k-я аппроксиманта ВЦД (4.1) или (4.2) f_k формально разлагается в степенной ряд вида (4.3), совпадающий с рядом (4.3) по формам до степени k включительно.

Для определенности рассмотрим ВЦД (4.1).

Теорема 4.21. *Для многомерной регулярной С-дроби (4.1) существует единственный формальный N-кратный степенной ряд (4.3), для которого эта дробь будет соответствующей.*

Доказательство. Для ВЦД (4.1) определим, следуя (3.1) гл. 1, выражения $Q_{i(k)}^{(n)}$ ($k=\overline{1, n}$, $i_k=\overline{1, N}$, $n=1, 2, \ldots$). Дроби $1/Q_{i(k)}^{(n)}$ формально разлагаются в N-кратные степенные ряды вида (4.3). Пусть ряды

$$L^{(k)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(k)}, \quad L_n^{(k)} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N} c_{i(n)}^{(k)} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_n} \tag{4.5}$$

являются формальными разложениями k-х аппроксимант ВЦД (4.1). Учитывая (3.3) гл. 1, для $r > m$ имеем

$$f_r - f_m = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{(-1)^m \prod\limits_{k=1}^{m+1} a_{i(k)} z_{i_k}}{\prod\limits_{k=1}^{m} Q_{i(k)}^{(m)} \prod\limits_{k=1}^{m+1} Q_{i(k)}^{(r)}}.$$

Следовательно, для произвольного $r \geqslant m$ для коэффициентов (4.5) справедливы соотношения

$$c_{i(n)}^{(m)} = c_{i(n)}^{(r)} = c_{i(n)} \quad (i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, n},\ n = \overline{1, m}).$$

Поэтому ряд (4.3) является соответствующим дроби (4.1). Единственность следует из того, что коэффициенты $c_{i(n)}^{(k)}$ разложения k-й аппроксиманты f_k ВЦД (4.1) в формальный N-кратный степенной ряд (4.5) определяются однозначно. ∎

Теорема 4.22. *Пусть (4.1) — регулярная многомерная С-дробь, такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0, \tag{4.6}$$

где

$$\beta_k = \max(|a_{i(k)}| : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}). \tag{4.7}$$

Тогда

а) для произвольного положительного числа M существует номер n, зависящий от M, что ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=n}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}\right)^{-1} \tag{4.8}$$

сходится равномерно к голоморфной функции в поликруге $|z_i| < M$ ($i = \overline{1, N}$);

б) ВЦД (4.1) сходится к функции $f(z)$, являющейся мероморфной или тождественно равной бесконечности.

Доказательство. Для заданного M существует номер n, что для всех $k \geqslant n$

$$|a_{i(k)}| \leqslant (4MN)^{-1} (i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k},\ k \geqslant n).$$

Пункт а) следует из теоремы 4.3. Для доказательства пункта б) достаточно заметить, что M — произвольное и функции, определенные в различных поликругах, являются аналитическим продолжением друг друга. ■

Теорема 4.23. *Пусть (4.1) — регулярная многомерная C-дробь, такая, что комплексные числа $\alpha_m \neq 0$ $(m = \overline{1, N})$ являются соответственно единственными предельными точками последовательностей $\{a_{i(k)m}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, i_k = \overline{1, N})$, т. е.*

$$\lim_{k \to \infty} a_{i(k)m} = \alpha_m (m = \overline{1, N}), \tag{4.9}$$

и пусть

$$P_{\alpha_\gamma} = P_{\alpha_{1\gamma}} \times P_{\alpha_{2\gamma}} \times \cdots \times P_{\alpha_{N\gamma}} — \tag{4.10}$$

декартовое произведение областей

$$P_{\alpha_{m\gamma}} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| - \operatorname{Re}(w \exp(\arg \alpha_m - 2\gamma) i) < \frac{\cos^2 \gamma}{2N |\alpha_m|} \right\}, \tag{4.11}$$

где $(m = \overline{1, N})$, γ — произвольное действительное число, такое, что $|\gamma| < \pi/2$.

Тогда

а) если K — произвольный компакт $P_{\alpha\gamma}$, то существует область $\Omega_K \subset \mathbb{C}^N$, такая, что

$$K \subset \Omega_K \subset P_{\alpha\gamma}, \tag{4.12}$$

и номер n, зависящий от K, что ВЦД (4.8) равномерно сходится на произвольном компакте Ω_K к функции, голоморфной в Ω_K;

б) ВЦД (4.1) сходится к функции $f(z)$, мероморфной в $P_{\alpha\gamma}$ или равной бесконечности.

Доказательство. Если множество K несвязно, то вложим его в связный компакт K'. Определим K' как множество точек отрезков, соединяющих точки K с началом координат.

Обозначим $U_r(z)$ открытый поликруг

$$U_r(z) = \{w \in \mathbb{C}^N : |w_i - z_i| < r_i,\ i = \overline{1, N}\}.$$

Покроем K' поликругами $U_r(z)$, где r_i возьмем настолько малыми, чтобы все $U_{3r}(z) \subset P_{\alpha\gamma}$. Выделим конечное подпокрытие

$$U_r(z^{(1)}),\ U_r(z^{(2)}),\ \ldots,\ U_r(z^{(p)}),$$

где $z^{(s)} \in K'$ $(s = \overline{1, p})$. Обозначим замыкание множеств $U_{2r}(z^{(s)})$ $(s = \overline{1, p})$ через $\overline{U}^{(s)}$.

Пусть

$$\rho_m^{(s)} = \min\left(|w_m - \alpha_m z_m| : w_m \in \partial P_\gamma,\ |z_m - z_m^{(s)}| \leqslant 2r_m\right),$$

где P_γ определяется согласно (4.11) гл. 3, $m = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, p}$. Возьмем номер n настолько большим, чтобы для всех $k \geqslant n-1$ выполнялись неравенства

$$|a_{i(k)m} - \alpha_m| < \rho_m^{(s)} \left(2r_m + |z_m^{(s)}|\right)^{-1} \quad (m = \overline{1, N}).$$

Тогда при тех же значениях индексов

$$|a_{i(k)m} z_m - \alpha_m z_m| < \rho_m^{(s)}, \quad z \in U^{(s)}.$$

Следовательно, $\overline{U}^{(s)}$ является поликруговой окрестностью сходимости ВЦД (4.8). Элементы $a_{i(k+1)} z_{i_{k+1}}$ ВЦД (4.8) принадлежат параболической области (4.11) гл. 3. Так как область значений (4.8) в этом случае содержится в круге (3.86) гл. 3, то утверждения а), б) следуют из теоремы 2.17. ■

Теорема 4.24. *Пусть (4.2) — многомерная S-дробь, так что*

$$a_{i(k)} > 0 \quad (i_k = \overline{1, N},\ k = 1, 2, \ldots) \tag{4.13}$$

и G — некоторая область из $\mathbb{C}^N$, содержащая действительную N-мерную окрестность

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Im} z_i = 0,\ m \leqslant \operatorname{Re} z_i \leqslant M,\ i = \overline{1, N}\}, \tag{4.14}$$

где m, M — действительные положительные числа.

Если в области G все подходящие дроби (4.2) равномерно ограничены, то

а) четные и нечетные аппроксиманты сходятся равномерно на каждом компакте области G к голоморфной функции в G;

б) S-дробь (4.2) сходится равномерно на каждом компакте G к голоморфной функции в G, если расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{a_{i(k)}} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right). \tag{4.15}$$

Доказательство следует из теоремы 2.17. Если $z \in \Delta$, то ВЦД (4.2) сходится согласно теореме 3.12. ■

Теорема 4.25. *ВЦД*

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1\ \ i}^{\infty} \quad \frac{{}_{i(k)} z_{i_k} z_{i_{k-1}}}{1}\right)^{-1}, \tag{4.16}$$

где $z_{i_0} = z_0 = 1$, $a_{i(k)} > 0$ $_k$ $\overline{1, N}$, $k = 1, 2, \ldots)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, *равномерно сходится на каждом компакте области*

$$\operatorname{Re} z_i > 0 \quad (i = \overline{1, N}), \tag{4.17}$$

если расходится ряд (4.15).

Доказательство. Используя эквивалентные преобразования, ВЦД (4.16) приведем к виду

$$-i\left(\zeta_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{\zeta_{i_k}}\right)^{-1}, \tag{4.18}$$

где $\zeta_0 = i$, $\zeta_{i_k} = i z_{i_k}^{-1}$. Дробь (4.18) является положительно определенной многомерной J-дробью. Условие (2.35) теоремы 4.7 гарантирует равномерную ограниченность ее подходящих дробей. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться утверждением предыдущей теоремы.

§ 5. Двумерные соответствующие ВЦД

Напомним, что ВЦД называется соответствующей кратному степенному ряду, если разложение ее n-й подходящей дроби в степенной ряд совпадает с исходным рядом до всех членов степени n включительно. Мы укажем некоторые специальные конструкции ВЦД, соответствующих двойному степенному ряду

$$1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} x^i y^j. \tag{5.1}$$

Эти алгоритмы можно рассматривать как алгоритмы разложения функций, заданных в виде кратных степенных рядов, в ВЦД. В работах [34, 84] были установлены формулы для вычисления компонент ВЦД, соответствующей ряду (5.1), в виде отношения определителей, составленных из коэффициентов (5.1) Эти дроби имеют вид

$$1 + \Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{c_{ii} x y}{1 + \Phi_i}, \quad \Phi_i = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{p+i,\, i} x}{1} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{i,\, p+i} y}{1}. \tag{5.2}$$

Назовем n-й аппроксимантой ВЦД (5.2) выражение

$$f_n = 1 + \Phi_0^{(n)} + \overset{[n/2]}{\underset{i=1}{D}} \frac{c_{ii}xy}{1 + \Phi_i^{(n-2i)}}, \tag{5.3}$$

где

$$\Phi_i^{(k)} = \overset{k}{\underset{p=1}{D}} \frac{c_{p+i,\,i}x}{1} + \overset{k}{\underset{p=1}{D}} \frac{c_{p,\,p+i}y}{1} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5.4}$$

$[n/2]$ — целая часть $n/2$, $\Phi_i^{(0)} = 0$, т. е. n-я подходящая дробь является фигурной подходящей дробью вида (1.15) гл. 1. Она содержит все те элементы c_{ij} ВЦД (5.2), сумма индексов которых $i + j \leqslant n$.

Другая модель ВЦД, соответствующей ряду (5.1), была предложена в работе [93], а именно;

$$1 + F_{00} + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{b_{i0}x}{1 + F_{i0}} + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{b_{0i}y}{1 + F_{0i}}, \tag{5.5}$$

где

$$F_{i0} = \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{b_{p+i,\,p}xy}{1}, \quad F_{0i} = \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{b_{p,\,p+i}xy}{1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.6}$$

Определим n-ю аппроксиманту ВЦД (5.5) как конечную ВЦД, содержащую все те элементы b_{ij} ВЦД (5.5), сумма индексов которых $i + j \leqslant n$, т. е.

$$f_n = 1 + F_{00}^{([n/2])} + \overset{n}{\underset{i=1}{D}} \frac{b_{i0}x}{1 + F_{i0}^{([(n-i)/2])}} + \overset{n}{\underset{i=1}{D}} \frac{b_{0i}y}{1 + F_{0i}^{([(n-i)/2])}}, \tag{5.7}$$

где $F_{i0}^{(k)}$, $F_{0i}^{(k)}$ — k-е подходящие дроби цепных дробей (5.6)

$$F_{i0}^{(k)} = \overset{k}{\underset{p=1}{D}} \frac{b_{p+i,\,p}xy}{1}, \quad F_{0i}^{(k)} = \overset{k}{\underset{p=1}{D}} \frac{b_{p,\,p+i}xy}{1}, \tag{5.8}$$

причем $F_{0i}^{(k)} = F_{i0}^{(k)} = 0$, если $k \leqslant i$.

Ветвящаяся цепная дробь (5.2) или (5.5) сходится, если, начиная с некоторого номера $n_0 \geqslant 1$, все ее подходящие дроби (5.3) или (5.7) имеют смысл и существует конечный предел последовательности аппроксимант.

По аналогии с (3.1) гл. 1 введем рекуррентно сокращенные обозначения

$$Q_i^{(s-2i)} = 1 + \Phi_i^{(s-2i)} + \frac{c_{i+1,\,i+1}xy}{Q_{i+1}^{(s-2i-2)}} \left(i = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right] - 1\right) \tag{5.9}$$

при начальных значениях

$$Q_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)},\ Q_j^{(0)} = 1, \quad j = [s/2]. \tag{5.10}$$

С учетом методики, изложенной в § 3 гл. 1, легко устанавливается формула разности двух подходящих дробей f_n и $f_{2r}(n > 2r)$ для ВЦД (5.2) [12]

$$f_n - f_{2r} = \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^i (\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(2r-2i)})(xy)^i \prod_{k=1}^{i} c_{kk}}{\prod_{k=1}^{i} (Q_k^{(2r-2k)} Q_k^{(n-2k)})} + \\ + \frac{(-1)^r (xy)^{r+1} \prod_{k=1}^{r+1} c_{kk}}{\prod_{k=1}^{r} Q_k^{(2r-2k)} \prod_{k=1}^{r+1} Q_k^{(n-2k)}} \chi_r, \tag{5.11}$$

где

$$\chi_r = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2r + 1, \\ 1, & \text{если } n > 2r + 1, \end{cases}$$

и произведения, у которых верхний индекс меньше нижнего, считаются равными единице. При установлении формулы (5.11) естественно предполагается, что все $Q_k^{(s)} \neq 0$.

Аналогично для ВЦД (5.5) устанавливается формула в предположении, что $n > m$

$$f_n - f_m = F_{00}^{([n/2])} - F_{00}^{([m/2])} + \\ + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \left[\frac{x^i (F_{i0}^{([(n-i)/2])} - F_{i0}^{([(m-i)/2])}) \prod_{k=1}^{i} b_{k0}}{\prod_{k=1}^{i} (Q_{k0}^{(n-k)} \cdot Q_{k0}^{(m-k)})} + \right. \\ \left. + \frac{y^i (F_{0i}^{([\frac{n-i}{2}])} - F_{0i}^{([\frac{m-i}{2}])}) \prod_{k=1}^{i} b_{0k}}{\prod_{k=1}^{i} (Q_{0k}^{(n-k)} \cdot Q_{0k}^{(m-k)})} \right] + \\ + \frac{(-1)^m x^{m+1} \prod_{k=1}^{m+1} b_{k0}}{\prod_{k=1}^{m+1} Q_{k0}^{(n-k)} \cdot \prod_{k=1}^{m} Q_{k0}^{(m-k)}} + \frac{(-1)^m y^{m+1} \prod_{k=1}^{m+1} b_{0k}}{\prod_{k=1}^{m+1} Q_{0k}^{(n-k)} \cdot \prod_{k=1}^{m} Q_{0k}^{(m-k)}}, \tag{5.12}$$

где $F_{i0}^{(k)}$ и $F_{0i}^{(k)}$ определяются с помощью рекуррентных соотношений (5.8), а $Q_{k0}^{(s-k)}$, $Q_{0k}^{(s-k)}$ — с помощью рекуррентных *соотношений*

$$
\left\{\begin{array}{l}
Q_{k0}^{(s-k)} = 1 + F_{k0}^{\left(\left[\frac{s-k}{2}\right]\right)} + \dfrac{b_{k+1,\,0}x}{Q_{k+1,\,0}^{(s-k-1)}}, \quad Q_{s0}^{(0)} = 1 \\
\qquad (k = \overline{0, s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots), \\
Q_{0k}^{(s-k)} = 1 + F_{0k}^{\left(\left[\frac{s-k}{2}\right]\right)} + \dfrac{b_{0,\,k+1}y}{Q_{0,\,k+1}^{(s-k-1)}}, \quad Q_{0s}^{(0)} = 1 \\
\qquad (k = \overline{0, s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots).
\end{array}\right. \tag{5.13}
$$

При доказательстве формулы (5.12) предполагается, что все $Q_{k0}^{(s-k)} \neq 0$, $Q_{0k}^{(s-k)} \neq 0$.

Рассмотрим признаки сходимости соответствующих ВЦД.

Теорема 4.26 [12, 13]. *ВЦД (5.2) с действительными числовыми коэффициентами* c_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, i+j \geqslant 1)$ *равномерно сходится в каждой ограниченной области из* R^2, *если*

а) существует константа β $(0 \leqslant \beta < 1/8)$, *что*

$$
\begin{gathered}
c_{i+j,\,i}x + \beta \geqslant 0, \quad c_{i,\,i+j}y + \beta \geqslant 0, \\
c_{ii}xy + \beta \geqslant 0 \; (i = 0, 1, 2, \ldots, \; j = 1, 2, \ldots);
\end{gathered} \tag{5.14}
$$

б) коэффициенты $c_{i+1,\,i}$, $c_{i,\,i+1}$ *имеют не выше как полиномиальный рост при* $i \to \infty$, *т. е. существует такое натуральное число* p, *что* $\lim\limits_{i\to\infty} i^{-p} \max(c_{i+1,\,i};\ c_{i,\,i+1}) = 0$;

в) для произвольного индекса i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *ряды* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \pi_n(i)$ *расходятся, где*

$$
\pi_n^{-1}(i) = \max\{|c_{n+i,\,i}|, \; |c_{i,\,n+i}|, \; |c_{nn}|\}, \tag{5.15}
$$

причем их частные суммы $\sum\limits_{n=2}^{k} \pi_n(i)$ *при каждом* i *стремятся к бесконечности при* $k \to \infty$ *не медленнее, чем* $(\ln k)^{1+\varepsilon}$, *где* $\varepsilon > 0$ *— произвольное действительное как угодно малое число.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (5.11). Для этого сначала проведем некоторые оценки, чтобы убедиться в том, что все $Q_i^{(s-2i)} \neq 0$. Из условия (5.14) следует, что

$$
1 + \Phi_i^{(k)} \geqslant 1 - \cfrac{2\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \ddots}}} = \sqrt{1 - 4\beta} \neq 0
$$

$$
(i = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots). \tag{5.16}
$$

Используя эквивалентные преобразования с учетом (5.16), дробь $Q_i^{(s-2i)}$ приведем к виду

$$Q_i^{(s-2i)} = 1 + \Phi_i^{(s-2i)} + \underset{j=i+1}{\overset{[s/2]}{D}} \frac{c_{ij}xy}{1 + \Phi_j^{(s-2j)}} =$$

$$= (1 + \Phi_i^{(s-2i)}) \left(1 + \underset{j=i+1}{\overset{[s/2]}{D}} \frac{c_j(x, y)}{1}\right),$$

где

$$c_j(x, y) = c_{ij}xy(1 + \Phi_{j-1}^{(s-2j+2)})^{-1}(1 + \Phi_j^{(s-2j)})^{-1}$$

$$\left(j = i+1, i+2, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right]\right). \tag{5.17}$$

Тогда в силу условия (5.14) и оценки (5.16) имеем $c_j(x, y) \geqslant -\beta(1 - 4\beta)^{-1}$. Так как $\alpha = \beta(1 - 4\beta)^{-1} < 1/4$, то

$$|Q_i^{(s-2i)}| \geqslant \sqrt{1 - 4\beta} \left(1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \ldots}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{1 - 4\beta} + \sqrt{1 - 8\beta}) \neq 0. \tag{5.18}$$

Доказательство проведем по схеме, изложенной в теореме 4.2, используя метод типа фундаментальных неравенств (2.19) — (2.21) гл. 2.

Для оценки сверху выражений

$$|\Phi_i^{(2r-2i)} - \Phi_i^{(n-2i)}|$$

воспользуемся формулой

$$\Phi_i^{(2r-2i)} - \Phi_i^{(n-2i)} =$$

$$= \frac{x^{2r-2i+1} \prod_{j=1}^{2r-2i+1} c_{i+j,\, i}}{\prod_{j=1}^{2r-2i} Q_{1,\, j}^{(2r-2i)} \prod_{j=1}^{2r-2i+1} Q_{1,\, j}^{(n-2i)}} + \frac{y^{2r-2i+1} \prod_{j=1}^{2r-2i+1} c_{i,\, i+j}}{\prod_{j=1}^{2r-2i} Q_{2,\, j}^{(2r-2i)} \prod_{j=1}^{2r-2i+1} Q_{2,\, j}^{(n-2i)}}, \tag{5.19}$$

где введены рекуррентно сокращенные обозначения

$$Q_{1,\, j-1}^{(s-2i)} = 1 + \frac{c_{i+j,\, i}x}{Q_{1,\, j}^{(s-2i)}}, \quad Q_{2,\, j-1}^{(s-2i)} = 1 + \frac{c_{i,\, i+j}y}{Q_{2,\, j}^{(s-2i)}} \tag{5.20}$$

при начальных значениях

$$Q_{1,\, s-2i}^{(s-2i)} = Q_{2,\, s-2i}^{(s-2i)} = 1, \quad s = 2r,\ n.$$

Формула (5.19) устанавливается аналогично формуле (3.3) гл. 1 в предположении, что все $Q_{pj}^{(s-2i)} \neq 0$ $(p = 1, 2)$.

Пусть

$$\nu_{i+j,\,i} = \frac{1}{|xc_{i+j,\,i}|}, \quad \nu_{i,\,i+j} = \frac{1}{|yc_{i,\,i+j}|}, \quad \nu_{jj} = \frac{1}{|xyc_{jj}|}, \quad (5.21)$$

если $xc_{i+j,\,i} \neq 0$, $yc_{i,\,i+j} \neq 0$, $xyc_{jj} \neq 0$ $(i = \overline{0, r},\ j = \overline{1, r})$.

Тогда справедливы оценки

$$\left| \frac{c_{i+j,\,i}x}{Q_{1,\,j-1}^{(s-2i)} Q_{1,\,j}^{(s-2i)}} \right| \leqslant \frac{L}{L + \nu_{i+j,\,i}}, \quad \left| \frac{c_{i,\,i+j}y}{Q_{2,\,j-1}^{(s-2i)} Q_{2,\,j}^{(s-2i)}} \right| \leqslant \frac{L}{L + \nu_{i,\,i+j}}, \quad (5.22)$$

где

$$s = \begin{cases} n, & \text{если } j \text{ нечетное}, \\ 2r, & \text{если } j \text{ четное}, \end{cases} \qquad L = 2(1 - 4\beta + \sqrt{1 - 4\beta})^{-1}.$$

Действительно, первое из неравенств (5.22) эквивалентно неравенству

$$\nu_{i+j,\,i} \left| \frac{c_{i+j,\,i}x}{Q_{1,\,j}^{(s-2i)}} \right| \leqslant L \left(\left| 1 + \frac{c_{i+j,\,i}x}{Q_{1,\,j}^{(s-2i)}} \right| - \left| \frac{c_{i+j,\,i}x}{Q_{1,\,j}^{(s-2i)}} \right| \right), \quad (5.23)$$

которое следует из оценок

$$\frac{1}{|Q_{1,\,j}^{(s-2i)}|} \leqslant \cfrac{1}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \ddots}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\beta}},$$

$$\left| 1 + \frac{c_{i+j,\,i}x}{Q_{1,\,j}^{(s-2i)}} \right| - \left| \frac{c_{i+j,\,i}x}{Q_{1,\,j}^{(s-2i)}} \right| \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \cfrac{2\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \ddots}}} = \sqrt{1 - 4\beta}.$$

Аналогично доказывается и второе неравенство в (5.22).

Следовательно, в условиях теоремы справедлива оценка

$$|\Phi_i^{(2r-2i)} - \Phi_i^{(n-2i)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\beta}} \left(|c_{i+1,\,i}x| \prod_{j=2}^{2r-2i+1} \frac{L}{L + \nu_{i+j,\,i}} + \right.$$

$$\left. + |c_{i,\,i+1}y| \prod_{j=2}^{2r-2i+1} \frac{L}{L + \nu_{i,\,i+j}} \right). \quad (5.24)$$

Теперь убедимся, используя аналогичные соображения, что

$$\left|\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}Q_{j-1}^{(s-2j+2)}}\right| \leqslant \frac{L^*}{L^*+\nu_{jj}} \quad (j=2,3,\ldots,r), \tag{5.25}$$

где $L^* = 2(1-8\beta+\sqrt{(1-8\beta)(1-4\beta)})^{-1}$, ν_{jj} определяются согласно (5.21). Неравенство (5.25) следует из оценки (5.18) и неравенства

$$\left|1+\Phi_{j-1}^{(s-2j+2)}+\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right|-\left|\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-\cfrac{2\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\ddots}}}\right)\left(1-\cfrac{2\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\ddots}}}\right)=$$

$$=\sqrt{1-4\beta}\sqrt{1-4\alpha}=\sqrt{1-8\beta},$$

если предварительно вынести за скобку множитель $(1+\Phi_{j-1}^{(s-2j+2)})$ и воспользоваться оценкой (5.16), обозначениями (5.17) с учетом того, что $\alpha=\beta(1-4\beta)^{-1}$ и $c_j(x,y)\geqslant -\alpha$.

Поскольку ВЦД рассматривается в ограниченной области, то существует действительное положительное число M, такое, что $|x|\leqslant M$, $|y|\leqslant M$. Пусть $M_i=\max(|c_{i+1,\,i}|,\ |c_{i,\,i+1}|)$. Тогда, учитывая (5.11), (5.24) и (5.25), приходим к оценке

$$|f_n-f_{2r}|\leqslant \frac{8M^3|c_{11}|}{(1+\sqrt{1-4\beta})(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{r}M_i\prod_{j=2}^{i}\frac{L^*}{L^*+\nu_{jj}}\left(\prod_{j=2}^{2r-2i+1}\frac{L}{L+\nu_{i+j,\,i}}+\right.$$

$$\left.+\prod_{j=2}^{2r-2i+1}\frac{L}{L+\nu_{i,\,i+j}}\right)+\frac{2|c_{11}|M^2}{\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}}\prod_{j=2}^{r+1}\frac{L^*}{L^*+\nu_{jj}}. \tag{5.26}$$

Последнее слагаемое стремится к нулю при $r\to\infty$, так как

$$\prod_{j=2}^{r+1}\frac{L^*}{L^*+\nu_{jj}}\leqslant\exp\left(-\sum_{j=2}^{r+1}\frac{\nu_{jj}}{L^*}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{1}{L^*M^2}\sum_{j=2}^{r+1}\frac{1}{|c_{jj}|}\right)$$

и ряд $\sum\limits_{j=2}^{\infty}|c_{jj}^{-1}|$ расходится.

Из условия б) теоремы следует, что $M_i\leqslant K_1 r^p\ (i=\overline{0,r})$, где K_1 — константа, не зависящая от i.

Пусть $K = \min((L^* \cdot M)^{-2},\ (L \cdot M)^{-1})$ и γ_r обозначает последнее слагаемое в правой части неравенства (5.26). Тогда, огрубляя оценку (5.26), получим

$$|f_n - f_{2r}| \leqslant K_2 \sum_{i=0}^{r} r^p \exp\left(-K \sum_{j=2}^{\left[\frac{2r+1}{3}\right]} \pi_j(i)\right) + \gamma_r \leqslant$$
$$\leqslant K_3 \left(\left[\frac{2r+1}{3}\right]\right)^{p+1} \exp\left[-K\left(\ln\left[\frac{2r+1}{3}\right]\right)^{1+\varepsilon}\right] + \gamma_r,$$

где K_2, K_3 — константы. Из последней оценки следует, что $|f_n - f_{2r}| \to 0$ при $r \to \infty$. ■

Теорема 4.27 [16]. *ВЦД*

$$\left(1 + \Phi_0 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{c_{ii}(x,\ y)}{1 + \Phi_i}\right)^{-1}, \quad \Phi_i = \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{c_{p+i,\ i}(x,\ y)}{1} +$$
$$+ \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{c_{i,\ p+i}(x,\ y)}{1}, \tag{5.27}$$

где $c_{ij}(x,\ y)$ — *комплексные функции, заданные в области* $D \subset \mathbb{C}^2$, *равномерно сходится в области* D, *если существует действительная положительная константа* β $(0 \leqslant \leqslant \beta < 1/8)$, *что*

$$|c_{ij}(x,\ y)| \leqslant \beta \quad (i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i + j \geqslant 1). \tag{5.28}$$

Значение дроби (5.27) и всех ее аппроксимант принадлежит кругу

$$|z - (1 - R^2)^{-1}| \leqslant R(1 - R^2)^{-1},$$
$$R = 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - 4\beta} + \sqrt{1 - 8\beta}\right). \tag{5.29}$$

Доказательство. Определим n-ю аппроксиманту ВЦД (5.27) как величину, обратную к (5.3), где сделаны соответствующие переобозначения элементов. Используя методику вывода формулы (3.3) гл. 1 для разности двух подходящих дробей f_n и f_{2r} $(n > 2r)$ ВЦД (5.27), получим

$$f_n - f_{2r} = \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^{i+1}\left(\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(2r-2i)}\right) \prod_{k=1}^{i} c_{kk}(x,\ y)}{\prod_{k=0}^{i}\left(Q_k^{(2r-2k)} Q_k^{(n-2k)}\right)} +$$
$$+ \frac{(-1)^{r+1} \prod_{k=1}^{r+1} c_{kk}(x,\ y)}{\prod_{k=0}^{r} Q_k^{(2r-2k)} \prod_{k=0}^{r+1} Q_k^{(n-2k)}} \chi_r, \quad \chi_r = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2r + 1, \\ 1, & \text{если } n > 2r + 1, \end{cases} \tag{5.30}$$

где $\Phi_l^{(s-2l)}$, $Q_l^{(s-2l)}$ $(s = 2r,\ n)$ определяются аналогично (5.4) или (5.9) и (5.10) с соответствующими переобозначениями элементов дроби. Определяя для ВЦД (5.27) величины $Q_{k,l}^{(s-2l)}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ аналогично (5.20) и используя формулу типа (5.19) с учетом того, что в предположениях теоремы

$$|Q_{k,l}^{(s-2l)}| > 1 - \frac{\beta}{1} - \frac{\beta}{1} - \frac{\beta}{1} - \ldots = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} \quad (k = 1,\ 2),$$

имеем

$$|\Phi_l^{(2r-2l)} - \Phi_l^{(n-2l)}| \leqslant 2\beta(4\beta)^{2(r-l)}\left(1+\sqrt{1-4\beta}\right)^{-4(r-l)}. \quad (5.31)$$

Учитывая (5.18), (5.31), с помощью элементарных вычислений получим

$$|f_n - f_{2r}| \leqslant K\left[4\beta\left(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}\right)^{-2}\right]^r, \quad (5.32)$$

где K — константа, не зависящая от r и n.

ВЦД (5.27) представим в виде

$$z = (1+w)^{-1}, \quad w = \Phi_0 + \mathop{D}_{l=1}^{\infty} \frac{c_{ll}(x,\ y)}{1+\Phi_l}.$$

Так как

$$|w| \leqslant \cfrac{2\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1-\beta\cfrac{}{1-\ddots}}} + \frac{2\beta}{\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}\right) = R,$$

то с помощью элементарных вычислений получим (5.29). ■

Вопрос поточечной сходимости ВЦД (5.27) сводится к исследованию сходимости числовых ВЦД

$$\left(1 + \Phi_0 + \mathop{D}_{l=1}^{\infty} \frac{a_{ll}}{1+\Phi_l}\right)^{-1}, \quad \Phi_i = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p+i,\,i}}{1} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{a_{i,\,p+i}}{1}, \quad (5.33)$$

где a_{ij} — комплексные числа.

Дадим определение аппроксимант дроби (5.33), используя композиции дробно-линейных отображений, а также построим четную и нечетную части ВЦД (5.33) и исследуем их сходимость. Рассмотрим дробно-линейные отображения

$$t_{ij}(w) = (1 + a_{ij}w)^{-1}, \quad i \neq j, \quad i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad (5.34)$$

$$t_{ii}(x,\ y,\ z) = (1 + a_{i,\,i-1}x + a_{i-1,\,i}y + a_{ii}z)^{-1}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots, \quad (5.35)$$

и композиции этих отображений

$$T_{k-i,\,i} = t_{i+2,\,i} t_{i+3,\,i} \dots t_{k-i,\,i}(1),$$
$$T_{i,\,k-i} = t_{i,\,i+2}\ t_{i,\,i+3} \dots t_{i,\,k-i}(1),$$
$$i = \overline{0,\ \left[\frac{k}{2}\right] - 1},\quad k > i,\quad k \geqslant 2. \tag{5.36}$$

Тогда, определяя n-е аппроксиманты ВЦД (5.33) как дроби, обратные к (5.3), где $x = y = 1$, $c_{ij} = a_{ij}$ $(i, j = 0, 1, 2, \dots, i + j \geqslant 1)$, получим

$$f_{2n} = t_{11}(T_{2n,\,0},\ T_{0,\,2n},\ t_{22}(T_{2n-1,\,1},\ T_{1,\,2n-1},\ \dots,$$
$$t_{nn}(T_{n+1,\,n-1},\ T_{n-1,\,n+1},\ t_{n+1,\,n+1}(0,\ 0,\ 0))\dots), \tag{5.37}$$
$$f_{2n+1} = t_{11}(T_{2n+1,\,0},\ T_{0,\,2n+1}\ t_{22}(T_{2n,\,1},\ T_{1,\,2n},\ \dots,$$
$$t_{nn}(T_{n+2,\,n-1},\ T_{n-1,\,n+2},\ t_{n+1,\,n+1}(1,\ 1,\ 0))\dots), \tag{5.38}$$

где $n = 1,\ 2,\ \dots,\ f_1 = t_{11}(1,\ 1,\ 0)$. Впредь формулы типа (5.36), симметричные относительно перестановки индексов, будем записывать в виде

$$T_{k-i,\,i} = t_{i+2,\,i} \cdot t_{i+3,\,i} \cdots t_{k-i,\,i}(1). \tag{5.36*}$$

Следуя Стилтьесу [60], построим четную и нечетную части ВЦД (5.33).

Дробь

$$\overset{\infty}{\underset{i=0}{D}} \frac{\alpha_{ii}}{F_i} \qquad F_i = \beta_{ii} + \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{\alpha_{p+i,\,i}}{\beta_{p+i,\,i}} + \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{\alpha_{i,\,p+i}}{\beta_{i,\,p+i}} \tag{5.39}$$

называется четной (нечетной) частью ВЦД (5.33), если для ее n-х аппроксимант g_n

$$g_n = \overset{n}{\underset{i=0}{D}} \frac{\alpha_{ii}}{F_i^{(n-i)}},\quad F_i^{(n-i)} = \beta_{ii} + \overset{n-i}{\underset{p=1}{D}} \frac{\alpha_{i+p,\,i}}{\beta_{i+p,\,i}} + \overset{n-i}{\underset{p=1}{D}} \frac{\alpha_{i,\,i+p}}{\beta_{i,\,i+p}} \tag{5.40}$$

справедливо равенство $g_n = f_{2n}$, $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ $(g_n = f_{2n+1}$, $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots))$, где f_n — n-я подходящая дробь ВЦД (5.33).

Для получения явных формул для коэффициентов α_{ij}, β_{ij} в формулах (5.36*) вместо композиций отображений t_{ij} рассмотрим композиции отображений s_{kp}, где

$$\begin{cases} s_{k,\,2i}(w) = t_{2k-1,\,2i} t_{2k,\,2i}(w) = \dfrac{-a_{2k-1,\,2i}}{1 + a_{2k-1,\,2i} + a_{2k,\,2i} w} + 1, \\ s_{r,\,2i+1}(w) = t_{2r,\,2i+1} t_{2r+1,\,2i+1}(w) = \\ \qquad = \dfrac{-a_{2r,\,2i+1}}{1 + a_{2r,\,2i+1} + a_{2r+1,\,2i+1} w} + 1, \\ k = \overline{i+2,\ n-i},\quad r = \overline{i+2,\ n-i+1}, \\ \qquad 0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \end{cases} \tag{5.41*}$$

Если теперь в (5.37) вместо T_{kp} взять

$$T_{2n-2i,\,2i} = t_{2i+2,\,2i}\, s_{i+2,\,2i} \dots s_{n-i,\,2i}(1),$$
$$T_{2n-2i-1,\,2i+1} = t_{2i+3,\,2i+1} \cdot s_{i+2,\,2i+1} \cdots s_{n-i-1,\,2i+1}(1)$$
$$\left(0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1,\ n = 2,\ 3,\ \dots\right),$$

то для четной части ВЦД (5.33) получим формулы

$$\begin{cases} \beta_{ii} = 1, \quad \beta_{i+1,\,i} = 1 + a_{i+2,\,i}, \quad \alpha_{ii} = a_{ii}, \\ \qquad\qquad \alpha_{i+1,\,i} = a_{i+1,\,i}, \quad \alpha_{00} = 1, \\ \alpha_{ki} = -a_{2k-i-2,\,i}\,a_{2k-i-1,\,i}, \quad \beta_{ki} = 1 + \\ \qquad\qquad + a_{2k-1-i,\,i} + a_{2k-i,\,i}, \end{cases} \tag{5.42*}$$

где $i \geqslant 0$, $k - i \geqslant 2$.

Аналогично доказывается, что для нечетной части справедливы формулы

$$\begin{cases} \alpha_{00} = 1, \quad \alpha_{ii} = a_{ii}, \quad \beta_{ii} = 1 + a_{i+1,\,i} + a_{i,\,i+1}, \\ \alpha_{ki} = -a_{2k-1-i,\,i}\,a_{2k-i,\,i} \quad \beta_{ki} = 1 + a_{2k-i,\,i} + a_{2k+1-i,\,i} \\ (k > i, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots). \end{cases} \tag{5.43*}$$

Установим признак сходимости четной и нечетной части ВЦД (5.33) типа второй интерпретации фундаментальных неравенств (см. замечание после теоремы 8).

Будем говорить, что для ВЦД (5.33) справедливы фундаментальные неравенства, если существуют такие действительные числа $r_{ij} > 0$ ($i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$), $0 < \gamma < 1/2$, что

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ r_{ii}\,|1 + a_{i+1,\,i} + a_{i,\,i+1}| > 2r_{ii}\max\left(\sqrt{|a_{ii}|},\right. \\ &\qquad \left.\sqrt{|a_{i+1,\,i+1}|}\right) + \max\left(|a_{i+1,\,i}|,\ |a_{i,\,i+1}|\right); \\ &\text{б)}\ r_{i+1,\,i}\,|1 + a_{i+2,\,i}| \geqslant |a_{i+2,\,i}| + \gamma^{-1} r_{i+1,\,i}\,|a_{i+1,\,i}|; \\ &\text{в)}\ r_{i+2,\,i}\,|1 + a_{i+2,\,i} + a_{i+3,\,i}| \geqslant 2r_{i+2,\,i}\,r_{ii}\,|a_{i+2,\,i}| + \\ &\qquad + |a_{i+3,\,i}|; \\ &\text{г)}\ r_{i+j,\,i}\,|1 + a_{i+j,\,i} + a_{i+j+1,\,i}| \geqslant r_{i+j,\,i}\,r_{i+j-2,\,i}\,|a_{i+j,\,i}| + \\ &\qquad + |a_{i+j+1,\,i}|, \quad j \geqslant 3; \\ &\text{д)}\ |a_{ii}| \leqslant \frac{1}{4}(1 - 2\gamma)^2, \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots). \end{aligned} \tag{5.44*}$$

Теорема 4.28 [14]. *Если для ВЦД (5.33) справедливы фундаментальные неравенства (5.44*), то ее четная и нечетная части абсолютно сходятся.*

Доказательство. Нечетная часть после эквивалентных преобразований приводится к виду

$$\mathop{D}_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}_{ii}}{1 + \hat{F}_i}, \quad \hat{F}_i = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}_{p+i,\,i}}{1} + \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}_{i,\,p+i}}{1}, \tag{5.45}$$

где

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{00} = (1 + a_{10} + a_{01})^{-1}, \\ \hat{\alpha}_{ii} = a_{ii}\,(1 + a_{i,\,i-1} + a_{i-1,\,i})^{-1}\,(1 + a_{i+1,\,i} + a_{i,\,i+1})^{-1}, \\ \hat{\alpha}_{i+1,\,i} = -a_{i+1,\,i}\,a_{i+2,\,i}\,(1 + a_{i+1,\,i} + a_{i,\,i+1})^{-1}\,(1 + a_{i+2,\,i} + \\ + a_{i+3,\,i})^{-1}, \qquad\qquad (5.46^*) \\ \hat{\alpha}_{i+p,\,i} = -a_{2p+i-1,\,i}\,a_{2p+i,\,i}\,(1 + a_{2p+i-2,\,i} + a_{2p+i-1,\,i})^{-1} \times \\ \times (1 + a_{2p+i,\,i} + a_{2p+i+1,\,i})^{-1} \\ (p = 2,\ 3,\ \ldots,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} g_{ii} = 1 - \max\{|a_{i+1,\,i}|,\ |a_{i,\,i+1}|\}\,[r_{ii}\,|1 + a_{i+1,\,i} + a_{i,\,i+1}|]^{-1}, \\ g_{p+i,\,i} = 1 - |a_{2p+i+1\,i}| \cdot [r_{2p+i,\,i}\,|1 + a_{2p+i,\,i} + a_{2p+i+1,\,i}|]^{-1} \\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad\qquad (5.47^*) \end{cases}$$

Из фундаментальных неравенств (5.44*) следует, что $0 < g_{ii} \leqslant 1$, $0 \leqslant g_{p+i,\,i} \leqslant 1$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots,\ i = 0, 1, 2, \ldots)$ и что справедливы неравенства

$$\begin{cases} |\hat{\alpha}_{00}| < \frac{1}{2}\,g_{00},\ |\hat{\alpha}_{ii}| < \frac{1}{4}\,g_{i-1,\,i-1}g_{ii}\ (i = 1, 2, \ldots), \\ |\hat{\alpha}_{i+j,\,i}| \leqslant k_j\,(1 - g_{i+j-1,\,i})\,g_{i+j,\,i} \qquad\qquad (5.48^*) \\ (j = 1, 2, \ldots,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k_1 = \frac{1}{2},\ k_j = 1,\ j \geqslant 2). \end{cases}$$

Следовательно, существуют комплексные числа z_{ij}, такие, что $|z_{ij}| \leqslant 1$ $(i,\ j = 0, 1, 2, \ldots)$ и что

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{00} = \frac{1}{2}\,g_{00}z_{00},\quad \hat{\alpha}_{ii} = \frac{1}{4}\,g_{i-1,\,i-1}g_{ii}z_{ii}\ (i = 1, 2, \ldots), \\ \hat{\alpha}_{i+j,\,i} = k_j\,(1 - g_{i+j-1,\,i})\,g_{i+j,\,i}z_{i+j,\,i} \qquad\qquad (5.49^*) \\ (j = 1, 2, \ldots,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k_1 = \frac{1}{2}, k_j = 1, j \geqslant 2). \end{cases}$$

ВЦД (5.45) можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2}\,g_{00}z_{00}\left(1 + \frac{1}{2}\,F_0(z) + \overset{\infty}{\underset{i=1}{D}}\,\frac{\frac{1}{4}\,g_{i-1,\,i-1}g_{ii}z_{ii}}{1 + \frac{1}{2}\,F_i(z)}\right)^{-1}, \qquad (5.50)$$

где

$$F_i(z) = \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}}\,\frac{(1 - g_{p+i-1,\,i})\,g_{p+i,\,i}z_{p+i,\,i}}{1} + \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}}\,\frac{(1 - g_{i,\,p+i-1})\,g_{i,\,p+i}z_{i,\,p+i}}{1}. \qquad (5.51)$$

Обозначим через $f_n(z)$, $F_i^{(n)}(z)$ — n-е аппроксиманты ВЦД (5.50) и (5.51) и введем рекуррентно обозначения

$$Q_i^{(s-i)}(z) = 1 + \frac{1}{2} F_i^{(s-i)}(z) + \frac{\hat{\alpha}_{i+1,\, i+1}}{Q_{i+1}^{(s-i-1)}(z)},\ Q_s^{(0)}(z) = 1\ (i = \overline{0, s-1}). \tag{5.52}$$

С учетом (5.52) легко устанавливается формула разности двух подходящих дробей ВЦД (5.50) $f_n(z)$ и $f_r(z)$, где $n > r$

$$f_n(z) - f_r(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^{k+1} (F_k^{(n-k)}(z) - F_k^{(r-k)}(z)) \prod_{l=0}^{k} \hat{\alpha}_{ll}}{\prod_{l=0}^{r} [Q_l^{(n-l)}(z) \cdot Q_l^{(r-l)}(z)]} +$$

$$+ \frac{(-1)^{r+1} \prod_{l=0}^{r+1} \hat{\alpha}_{ll}}{\prod_{l=0}^{r+1} Q_l^{(n-l)}(z) \prod_{l=0}^{r} Q_l^{(r-l)}(z)}. \tag{5.53}$$

Рассмотрим ВЦД $f(-1)$, т. е. ВЦД (5.50), у которой вместо каждого z_{ij} взято -1, и покажем, что она является мажорантой дроби (5.50). Учитывая свойства g-дробей [100] и формулу типа (5.19), установленную для разности $F_k^{(n-k)}(z) - F_k^{(r-k)}(z)$, легко убеждаемся в том, что $F_k^{(n-k)}(-1)$ по n при каждом фиксированном k монотонно убывает и

$$|F_k^{(n-k)}(z) - F_k^{(r-k)}(z)| \leqslant F_k^{(r-k)}(-1) - F_k^{(n-k)}(-1). \tag{5.54}$$

Используя метод математической индукции, проверим, что

$$|Q_i^{(s-i)}(z)| \geqslant Q_i^{(s-i)}(-1) \geqslant \frac{1}{2} g_{ii} > 0, \tag{5.55}$$

и

$$1 + F_i^{(s-i)}(-1) \geqslant g_{ii}, \tag{5.56}$$

откуда с учетом (5.49*) имеем

$$|f_n(z) - f_r(z)| \leqslant f_r(-1) - f_n(-1).$$

Дробь $f_n(-1)$ с помощью эквивалентных преобразований приведем к виду

$$\frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{1} + \cdots + \frac{c_n}{1}.$$

Так как

$$f_n(-1) \geqslant \frac{-1/2}{1} + \frac{-1/4}{1} + \frac{-1/4}{1} + \ldots = -1,$$

то нечетная часть ВЦД (5.33) абсолютно сходится.

Введя обозначения

$$\begin{cases} g_{i+1,i} = 1 - |a_{i+2,i}|\,[r_{i+1,i}|\,1 + a_{i+2,i}|]^{-1}, & (5.57^*) \\ g_{p+i,i} = 1 - |a_{2p+i+1,i}|\,[r_{2p+i-1,i}|\,1 + a_{2p+i-1,i} + a_{2p+i,i}|]^{-1} \\ (p = 2, 3, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

и повторяя приведенные выше выкладки, четную часть ВЦД (5.33) запишем в виде

$$\left(1 + \gamma\Phi_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1 + \gamma\Phi_i}\right)^{-1}, \qquad (5.58)$$

где

$$\Phi_i = \frac{g_{i+1,i}z_{i+1,i}}{1 + \mathop{D}\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{p+i,i})\,g_{p+i+1,i}z_{p+i+1,i}}{1}} + \\ + \frac{g_{i,i+1}z_{i,i+1}}{1 + \mathop{D}\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{i,p+i})\,g_{i,p+i+1}z_{i,p+i+1}}{1}}$$

и $|z_{ij}| \leqslant 1$, $0 \leqslant g_{ij} \leqslant 1$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, i \neq j)$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Нетрудно установить, что мажорантой ВЦД (5.58) является цепная дробь

$$\left(1 - 2\gamma - \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{|a_{ii}|\,(1 - 2\gamma)^{-2}}{1}\right)^{-1},$$

которая абсолютно сходится согласно теореме 2 и замечанию 3.20.

Наконец, сформулируем два признака сходимости ВЦД вида (5.5), установленные в работе [94].

Теорема 4.29. *Ветвящаяся цепная дробь*

$$1 + F_{00} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i0}}{1 + F_{i0}} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{0i}}{1 + F_{0i}},$$

где

$$F_{i0} = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{p+i,i}}{1}, \quad F_{0i} = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{i,p+i}}{1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

b_{ij} $(i+j \geqslant 1)$ — *комплексные числа, сходится, если*

$$|b_{j0}| \leqslant \frac{1}{8}, \ |b_{i+1,\,i}| \leqslant \frac{1}{8}, \ b_{p+i,\,i}| \leqslant \frac{1}{4} \ (p = 2, 3, \ldots,$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ \ldots). \qquad (5.59^*)$$

Теорема 4.30. *Ветвящаяся цепная дробь*

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{D}} \frac{1}{b_{i0}+F_{i0}}, \quad F_{i0} = \overset{\infty}{\underset{p=1}{D}} \frac{1}{b_{i+p,\,p}} \ (i = 1, 2, \ldots), \qquad (5.60)$$

где b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, \ldots, i > j)$ — *комплексные числа, расходится, если:*

а) цепные дроби F_{i0} $(i = 1, 2, \ldots)$ *сходятся;*

б) модули n*-х аппроксимант непрерывных дробей* F_{i0} *равномерно по* n *ограничены, т. е. существуют положительные константы* b_i*, такие, что* $|F_{i0}^{(n)}| \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots,$ $n = 1, 2, \ldots)$;

в) сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Теорема 4.29 является аналогом признака сходимости Ворпитского, теорема 4.30 — первым необходимым признаком сходимости ВЦД с комплексными компонентами.

Кроме перечисленных существуют и другие признаки сходимости двумерных соответствующих ВЦД (см., например, [36, 61]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боднар Д. И.* Некоторые применения ветвящихся цепных дробей в вычислительной математике. В кн.: Науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. Вычислительные методы в алгебре, прикладной математике, в системах обработки данных и АСУ». Киев, 1974, с. 94—103.
2. *Боднар Д. И.* Оценка погрешности вычисления ветвящихся цепных дробей. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1059—1062.
3. *Боднар Д. І.* Абстрактний аналог гіллястого ланцюгового дробу. — Ужгород, — с. 70—74. — Рукопись деп. в ВИНИТИ, 18.05.1976 г., № 1734—76 Деп.
4. *Боднар Д. И.* Аналог признака сходимости Ворпитского для ветвящихся цепных дробей. — В кн.: Математический сборник, Киев, Наук. думка, 1976, с. 40—43.
5. *Боднар Д. И.* Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей. — В кн.: Цепные дроби и их применения. Киев: ИМ АН УССР, 1976, с. 41—44.
6. *Боднар Д. И.* Об одном обобщении признака сходимости Зейделя для ветвящихся цепных дробей. — В кн.: Математический сборник, Киев, Наук. думка, 1976, 44—47.
7. *Боднар Д. І.* Аналог ознаки збіжності Ворпітського для гіллястих ланцюгових дробів. — В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К.: ІМ АН УРСР, 1978, с. 7—8.
8. *Боднар Д. И.* Необходимый признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 10, с. 15—19.
9. *Боднар Д. И.* Необходимый и достаточный признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными членами. — Там же, 1981, вып. 13, с. 12—15.
10. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1 i_2 \ldots i_k})\,\hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{1}$. — Там же, 1982, вып. 15, с. 30—35.
11. *Боднар Д. И.* Признак сходимости ветвящихся цепных дробей. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 3—7.
12. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функций двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
13. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости ветвящихся цепных дробей. — В кн.: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. М.: ИПМ АН СССР, 1981, с. 37.
14. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1983, вып. 18, с. 30—34.

15. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 3, с. 373—377.
16. *Боднар Д. И., Шевчук С. П.* Аналог теоремы Ворпитского для двумерных соответствующих ветвящихся цепных дробей. — Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1982, № 169, с. 7—9.
17. *Боднарчук П. И.* Некоторые преобразования ветвящихся цепных дробей. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 153—155.
18. *Боднарчук П. И.* О связи классической проблемы моментов для функций многих переменных с ветвящимися цепными дробями. — В кн.: Цепные дроби и их применения. Киев: ИМ АН УССР, 1976, с. 8—11.
19. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. —К.: Наук. думка, 1974. — 272 с.
20. *Боднарчук П. И., Слоневский Р. В., Пустомельников И. П.* Дробно-рациональные численные методы решения «жестких» задач. — В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М.: Знание, 1983, ч. 3, с. 4—6.
21. *Буланов А. П.* О порядке приближения выпуклых функций рациональными. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, **33**, № 5, с. 1132—1148.
22. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.
23. *Гончар А. А.* О наилучших приближениях рациональными функциями. — Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 2, с. 205—208.
24. *Гончар А. А.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде. — Мат. сб., 1982, **118 (160)**, № 4, с. 535—556.
25. *Дзядык В. К., Филозоф Л. И.* О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций. — Мат. сб., 1978, **107 (149)**, № 3, с. 347—363.
26. *Долженко Е. П.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. — Мат. сб., 1962, **56 (98)**, № 4, с. 403—432.
27. *Дронюк Н. С.* Розклад деяких функцій в гіллясті ланцюгові дроби. — В кн.; Друга наукова конференція молодих математиків України. Киев: Наук. думка, 1966, с. 185—189.
28. *Ерохов И. В.* Возможность применения аппарата цепных ветвящихся дробей для электрических расчетов. — Теорет. электротехника, 1978, вып. 24, с. 46—51.
29. *Иванов В. В., Бесараб П. Н., Данильченко Л. С. и др.* Оценки погрешностей округления для цепных и ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Цепные дроби и их применения. Киев: ИМ АН УССР, 1976, с. 20—24.
30. *Картузов В. К.* О построении математических моделей динамических процессов по конечному числу экспериментов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1983. — 16 с.
31. *Крупка З. И.* Приближение мероморфных функций рациональными и ускорение сходимости степенных рядов. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 10, с. 23—27.
32. *Крупка З. И., Шмойлов Б. И.* О параллельном вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями. — В кн.: Многопроцессорные вычисл. структуры. Таганрог, 1980, вып. 2, с. 78—80.
33. *Кудрявцев Л. Д.* О некоторых математических вопросах теории электрических цепей. — УМН, 1948, 3 : 4 (26), с. 80—118.
34. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 614—617.

35. *Кучминская Х. И.* О приближении функций цепными и ветвящимися цепными дробями. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 3—10.
36, *Кучминская Х. И.* О достаточных условиях сходимости двумерных цепных дробей. — Там же, 1984, вып. 20, с. 19—23.
37. *Кучминская Х. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби. — В кн.: Однород. цифровые вычисл. и интегрирующие структуры, Таганрог, 1977, вып. 8, с. 145—151.
38. *Максымив Е. М., Кутнив М. В.* Нелинейный явный метод численного интегрирования дифференциальных уравнений. — Вестн. Львов. политехн. ин-та, 1980, № 141, с. 57—58.
39. *Марко В. Ф.* Решение некоторых нелинейных диофантовых уравнений методом цепных и ветвящихся цепных дробей. — В кн.: Цепные дроби и их применения. Киев: ИМ АН УССР, 1976, с. 74—75.
40. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — 412 с.
41. *Михальчук Р. І.* Про одну ознаку збіжності інтегральних ланцюгових дробів. — В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К.: ІМ АН УРСР, 1976, с. 39—40.
42. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.—240 с.
43. *Недашківський М. О.* Збіжність і обчислювальна стійкість гіллястих ланцюгових дробів з елементами, що задовільняють умовам типу Прінгсгейма. — В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування: К.: ІМ АН УССР, 1978, с. 43—44.
44. *Недашковский Н. А.* Прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 8, с. 24—28.
45. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 27—31.
46. *Никишин Е. М.* О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых функций. — Мат. сб., 1976, **101 (143)**, № 2, с. 280—292.
47. *Одноволова Т. М.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 7, с. 19—22.
48. *Парусников В. И.* Алгоритм Якоби — Перрона и совместное приближение функций. — Мат. сборник, 1981, **114 (156)**, № 2, с. 322—333.
49. *Пасичняк Ф. О.* О разложении алгебраических иррациональностей в ветвящиеся цепные дроби. — В кн.: Цепные дроби и их применения. Киев: ИМ АН УССР, 1976, с. 85—86.
50. *Пелех Я. Н.* Решение квазилинейных уравнений параболического типа с использованием ветвящихся цепных дробей. — В кн.: Общая теория граничных задач. Киев: Наук. думка, 1983, с. 291—292.
51. *Попов В. А.* Рациональная равномерная аппроксимация класса V_r и ее применения.— Докл. Болг. акад. наук, 1976, 29, № 6, с. 791—794.
52. *Пустомельников І. П.* Представлення розв'язку однієї крайової задачі ланцюговим гіллястим дробом. — Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1970, № 44, с. 78—84.
53. *Рахманов Е. А.* О сходимости диагональных аппроксимаций Паде.— Мат. сб., 1977, **104 (146)**, № 2, с. 271—291.
54. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения.— Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1979. — 176 с.

55. *Скоробогатько В. Я.* Ознака збіжності гіллястого ланцюгового дробу. — ДАН УРСР. Сер. А, 1972, № 1, с. 27—29.
56. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М.: Наука, 1983. — 312.
57. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби. — ДАН УРСР. Сер. А, 1967, № 2, с. 131—133.
58. *Слешинский И. В.* О сходимости непрерывных дробей. — Зап. мат. отд-ния Новорос. о-ва естествоиспытателей, 1889, X, с. 201—255.
59. *Стечкин С. Б., Ульянов П. Л.* Подпоследовательности сходимости рядов. — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, LXXXVI. М.: Наука, 1965, с. 85
60. *Стилтьес Т. И.* Исследования о непрерывных дробях. — Харьков; Киев: ОНТИ, 1936. — 155 с.
61. *Сусь О. Н.* Сходимость к функции ее формального разложения в двумерную соответствующую цепную дробь. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 23—27.
62. *Сявавко М. С., Батюк Ю. Р.* Деякі ознаки збіжності ланцюгових дробів для функціоналів. — Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1977, № 119, с. 144—146.
63. *Туран П.* О приближении кусочно- аналитических функций рациональными функциями: Современные проблемы теории аналитических функций. — М.: Наука, 1966, с. 296—300.
64. *Философ Л. И.* Приближение функций цепными дробями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1979. — 11 с.
65. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. — 112 с.
66. *Хлопонин С. С.* Приближение функций цепными дробями — В кн.: Цепные дроби. Ставрополь, 1977, с. 3—102.
67. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М.: Гостехиздат, 1956. — 203 с.
68. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. — Т. 2. 520 с.
69. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений.— М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1948. — Т. 3. 416 с.
70. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. — М.: Наука, 1976. — Ч. I. 320 с.
71. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. — М.: Наука, 1976. — Ч. II. 400 с.
72. *Шеремета М. Н.* Рациональная аппроксимация на [0, ∞) целых функций произвольного роста с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. — Укр. мат. журн., 1979, 31, № 3, с. 303—311.
73. *Beker G. A., Graves-Morris P.* Pade approximans. Part I: Basic Theory. — In: Encyclopedia of mathematics and its applications, 1981, vol. 13.—325 p.
74. *Bresinski C.* A bibliography on Pade approximation and some related matters. — Lect. Notes Phys., 1976, 47, p. 245—267.
75. *Brezinski C.* Pade-type approximation and general orthogonal polynomials. — Basel etc.: Birkhäuser, 1980. — 250 p.
76. *Cichochhi A.* Generalized continued fraction expansion of mulidimensional rational functions and its applications in synthesis. — In: Europ. Conf. on Circuit Th. and Design, 1980, 2—5 sept. Warsaw, 1980.
77. *Gilewicz J.* Approximants de Pade. — Berlin etc.; Springer, 1978.— Bd 14. 511 S.
78. *Henrici P.* Applied and Ccmputational Comlex Analysic. Vol. 2.— Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics and Continued Fractions, New York: Wiley, 1977. — 662 p.

79. *Jacobi K. G. T.* Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen in Welehen jede Zahe aus drei vorhergenenden gebildet wird. — Publ. von Heine, Tourn. f. d. reine und angen. Math., 1849, Bd 69, S. 29—64.
80. *Jones William B., Thron W. J.* Convergence of continued fractions.— Canad. J. Math., 1968, **20**, r. 1037—1055.
81. *Jones William B., Thron W. J.* Continued fractions: analytic theory and applications. — In: Encyclopedia of mathematics and its applications, 1980, vol. 11. — 428 p.
82. *Koch H. von.* Quelques theoremes concernant ja theorie generale des factions continues. — Öfversingt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlinder, 1885. — 52 p.
83. *Leighton W., Wall H. S.* On the transformation and convergence of continued fractions. — Amer. J. Math., 1936, **58**, p. 267—281.
84. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalisation of the Stieltjes-type continued fractions.— J. Comp. and Appl. Math., 1978, 4, № 3, p. 181—190.
85. *Paydon J. F., Wall H. S.* The continued fraction as a sequence of linear transformations. — Duke Math. J., 1942, **9**, p. 360—379.
86. *Perron O.* Grundlagen für eine Theorie des Jacobicshen Kettenbruchalgorithmus. — Math. Ann., 1907, **64**, s. 1—76.
87. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. — Stuttgart: Teubner, 1957. — Bd 2. 524 s.
88. *Pratje Ilse.* Iteration der Joukowski—Abbildung und ihre Strecken—Komplexe. — Mitt. math. Semin. Giessen, 1954, № 48, S. 1—54.
89. *Pringsheim A.* Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, Sb. München, 1898, vol. 28, p. 295—324.
90. *Saff E. B., Varga R. S.* Pade and rational approximation. Theory and applications. — New York: Acad. press., 1977. — 491 p.
91. *Scott W. T., Wall H. S.* A convergence theorem for continued fractions. — Trans. Math. Soc., 1940, 47, p. 155—172.
92. *Seidel L.* Undersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettebrüche: Doktor. Diss. — München, 1846.
93. *Siemaszko W.* Branched continued fraction for double power series.— J. Comp. and Appl., Math., 1980, **6**. № 2, p. 121—125.
94. *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fraction. — Lecture Notes in Math., 1982, 888, p. 367—370.
95. *Stieltjes T. J.* Recherches sur les fractions continues. — Annales de la Paculte des Sciences Toulouse, 1894, 8, p. 1—122; 1895, **9**, p. 1—47.
96. *Thron W. J., Waadeland H.* Modifications of continued fractions, a Survey. — Analitic theory of continued fractions. Lect. Notes. Math., 1982, **932**, p. 38—67.
97. *Van Vleck E. B.* On the convergence of continued fractions with complex elements. — Trans. Amer. Math. Soc., 1901,2, p. 215—233.
98. *Van Vleck E. B.* On the convergence and character of the continued fractions ... — Trans. Amer. Math. Soc., 1901, 2, p. 476—483.
99. *Vitali G.* Sull serie di funzioni analitiche. — Rend del R. ist Lombard, 1903, 2, vol. 36, p. 771—774.
100. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. — New York: Van Nostrand, 1948. — 433 p.
101. *Worpitzky J.* Untersuchungen über die Entwickelung der Monodromen und Monogenen Funktionen durch Kettebrüche, Friedrichs-Gymnasium und Realsehule; Jahresbericht. — Berlin, 1865, S. 3—39.

ОГЛАВЛЕНИЕ