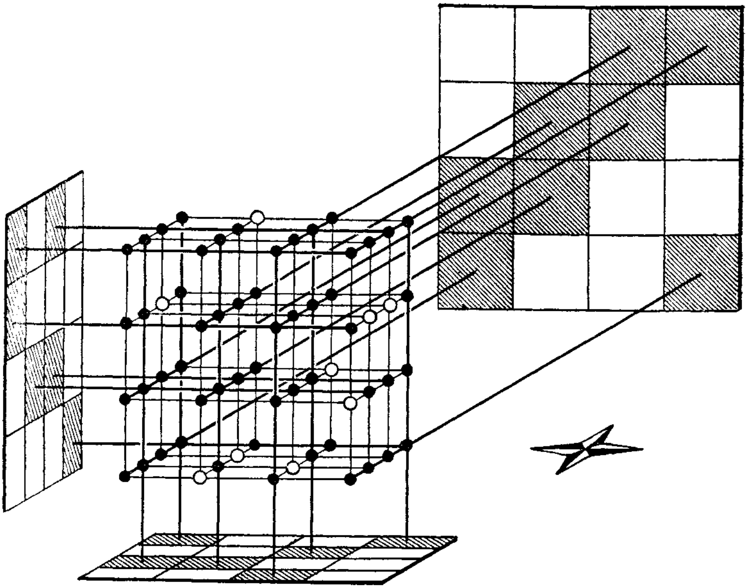
Д. Бизам, Я. Герцег

ИГРА И ЛОГИКА

85 ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Перевод с венгерского
Ю. А. ДАНИЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА
1975



G. BIZAM, J. HERCZEG

JATEK ÉS LOGIKA
85 FELADATBAN

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ
BUDAPEST 1972

51 + 16
Б 59

Бизам Д., Герцег Я.

Игра и логика. 85 логических задач. Пер. с венг. Ю. А. Данилова. М., «Мир», 1975.

358 с. с илл.

Книга венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега посвящена математической логике.

Пользуясь элементарными средствами, авторы в увлекательной форме учат читателя умению последовательно мыслить и решать задачи, «думая, но не вычисляя». Книга снабжена тщательно разработанной системой специальных указателей, которые помогают ориентироваться в особенностях задач.

Книга представляет интерес для самых широких кругов читателей — любителей занимательной математики.

Б $\frac{20202-160}{041(01)-75}$ 160—75 51 + 16

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Логические задачи любимы нашей читательской аудиторией. Одни видят в них своего рода «гимнастику ума», средство утоления естественной для каждого мыслящего человека потребности испытывать и упражнять силу собственного разума. Других привлекает нарядная литературная оболочка: фабула логических задач нередко бывает весьма занимательной. Третьи считают основным достоинством этой разновидности задач их доступность: часто можно слышать, что для решения логических задач требуются не специальные знания, а лишь определенный уровень развития, умение логически мыслить, приобретаемое и развиваемое, как и любой другой навык, настойчивыми упражнениями.

Ныне на суд этой широкой читательской аудитории предлагается русский перевод книги венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега «Игра и логика. 85 логических задач».

Первоначально авторы хотели назвать свою книгу «Школа мышления». И действительно, открыв книгу, читатель попадает в образцовую школу, где два педагога, тактичных и доброжелательных, обучают всякого, кто захочет, искусству решения логических задач. (Боюсь, что упоминание о школе может создать у некоторых потенциальных читателей превратное представление о книге и отбить охоту познакомиться с ней подробнее. Не торопитесь! В этой школе действительно обучают *логике*, но делают это *играя*. В ее стенах нет места унынию и скуке!)

Традиционное средство решения логических задач — таблица, в клетки которой вписаны всевозможные комбинации элементов рассматриваемых множеств, — в руках Бизама и Герцега превращается в инструмент необычайной мощи и гибкости. Таблица позволяет решать логические задачи, и не просто решать, но и находить оптимальные (минимальные по числу используемых «элементарных» условий) решения. Таблица помогает анализировать условия задачи, выявлять избыточность, проверять непротиворечивость и полноту, а также возможность разбиения исходной задачи на независимые «подзадачи». Таблица позволяет устанавливать эквивалентность внешне, казалось бы, различных задач и, облекая логический скелет в словесные одежды, конструировать новые логические задачи с заранее заданными свойствами.

Подобно латыни в средневековых университетах, «табличный язык» является обязательным для всех, кто переступает порог школы Бизама и Герцега. Не беда, если вы не владели им раньше! Вам предоставляется уникальная возможность сделать это теперь. Курс прямого и обратного перевода столь интенсивен, а «разговорная практика» столь обширна, что вы весьма скоро научитесь говорить на табличном языке без малейшего акцента и незаметно для себя достигнете высшей степени владения языком — умения мыслить на нем. Нужно ли говорить, сколь важную роль играет формируемое при этом особое «табличное» мышление в наши дни, когда методы так называемой конечной математики не только обрели права гражданства в самой математической науке, но и находят широкое применение за ее пределами.

Но сколь бы высокие цели ни ставили перед собой авторы, достичь их было бы невозможно, если бы им не удалось найти необычайно яркой формы для воплощения своих замыслов — той самой Игры, которая на протяжении всей книги идет рука об руку с Логикой. Нет нужды перечислять все приемы и средства, которые используют Бизам и Герцег: сухой перечень (и даже подробный пересказ) бессилен передать своеобразие их книги — ее нужно читать, читать не торопясь, с карандашом в руке, следуя всем советам авторов.

Итак, добро пожаловать в школу мышления!

Ю. Данилов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Некоторые из этих задач уже были опубликованы в венгерском научно-популярном еженедельнике «Жизнь и наука» в разделе «Школа мышления» (еще до того, как в этом разделе начали появляться задачи Логара Мишки [1])[2]. Именно в процессе работы в этом разделе журнала у нас появилась мысль о том, что публикуемые в нем материалы, надлежащим образом упорядоченные и дополненные, можно было бы издать отдельной книгой.

Подбор и систематизацию логических задач, несомненно, следовало начать с разбиения их на типы. Материал книги, как бы переплавляясь в процессе работы, вынуждал нас постоянно вносить те или иные усовершенствования до тех пор, пока, наконец, не выкристаллизовалась та последовательность связанных между собой типов логических задач, подробное изложение которой стало основной темой всей нашей книги.

Тщательно систематизировав собранный материал, мы изложили его в виде задач, проблем. Из 85 задач, вошедших в окончательный вариант рукописи, лишь 8 были заимствованы нами из других источников (задачи 1, 2, 3, 4, 79, 80, 81 и 82), однако даже эти задачи были частично переработаны, а решения во всех без исключения случаях написаны заново. Все остальные задачи оригинальны. Нам хотелось бы надеяться поэтому, что

---

[1] Персонаж, имя и фамилия которого по-венгерски напоминает слово «логарифм». — *Прим. перев.*

[2] Мы даже собирались назвать нашу книгу «Школа мышления» — именно такое название как нельзя лучше подходило бы к ее содержанию. Однако нам пришлось отказаться от своего намерения, поскольку под таким названием вышел в свет венгерский перевод книги известного математика и педагога профессора Дьердя Пойа (Д. Пойа, Как решать задачу, Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, М., 1959).

и содержание всей книги можно считать более или менее новым. Впрочем, вполне возможно, что нам так и не удалось достичь поставленной перед собой цели, и мы с благодарностью воспримем все критические замечания.

Пользуясь случаем, мы хотели бы поблагодарить всех, кто подсказал нам мысль о создании книги: редакторов журнала «Жизнь и наука», главного редактора журнала «Фенье Бела», сотрудников отдела «Школа мышления» (без ценных советов которых эта книга вряд ли была бы написана), читателей журнала, исправивших замеченные ими ошибки и высказавших немало критических замечаний и указаний. Наконец (но отнюдь не в последнюю очередь), мы благодарим сотрудников издательства и всех, кто принял участие в работе над книгой.

Дьердь Бизам
Янош Герцег

Будапешт, 7 сентября 1970 г.

НЕСКОЛЬКО НАПУТСТВЕННЫХ СЛОВ К ЧИТАТЕЛЮ

Лет 30—40 назад математика, по всеобщему мнению, была истинным «пугалом». Ясно, что при таком отношении математики за малым исключением никто не знал, да и знать не мог. И хотя теперь к математике относятся совершенно иначе, порой все же приходится слышать отголоски прошлого, причем, к сожалению, не так уж редко. Многие считают (в особенности, если их знакомство с математикой ограничилось теми познаниями, которые они вынесли из средней школы), что у них «нет математических способностей». Между тем подобное мнение часто бывает ошибочным.

Школьная программа по математике ставит перед собой двоякую задачу: во-первых, способствовать развитию у учащихся логического мышления и, во-вторых, дать им конкретные математические знания. Не все дети выносят эту двойную нагрузку. И все же вторую задачу нельзя отделять от первой. Если кто-нибудь не усвоил учебный материал, то какими бы математическими способностями он ни обладал, он не сможет уследить за ходом рассуждений. Не поняв объяснения учителя, такой человек начинает переживать «отсутствие» у него математических способностей и перестает вообще заниматься математикой.

Во время работы над книгой мы с особым вниманием следили за тем, чтобы не упустить из виду интересы именно этого круга читателей. Нам кажется, что мы достигли поставленной цели: для понимания книги никаких предварительных знаний не требуется. Необходимо лишь усвоить то, что написано в нашей книге. Если кто-нибудь возьмет на себя труд прорешать все задачи от первой до последней (и при этом будет сверять свои решения с приведенными у нас в книге), то можно ручаться, что содержание книги станет для него «родной стихией» и все будет понятно.

Со своей стороны мы хотим помочь читателю в овладении математическим мышлением и подсказать ему направление, в котором следует развивать свои способности. Например, задачи в книге расположены не как придется, а в такой последовательности, которая должна помочь читателю угадать решение. С этой же целью написаны совершенно необходимые с точки зрения единства книги разделы, в которых речь идет о соответствии между задачами и решениями, принадлежащими к различным направлениям. Иногда (это бывает довольно редко) нам все же приходится ссылаться на те или иные математические факты. Однако такие разделы читатель без ущерба для понимания дальнейшего может пропустить.

В том же духе были выдержаны задачи в разделе «Школа мышления» венгерского научно-популярного еженедельника «Жизнь и наука». Работа в редакции этого раздела послужила для нас хорошей школой. За четырехлетний срок существования раздела число присылаемых в редакцию писем с решениями задач возросло примерно в 10 раз. Из этих писем мы не только узнали, какие задачи особенно любимы читателями, но и познакомились с наиболее распространенными ошибками и типичными недочетами решений.

Мы считаем, что переходить от одной темы к другой в математике имеет смысл лишь тогда, когда вы основательно разобрались в предыдущей теме, чувствуете себя в ней, «как дома». Разносторонность знаний приобретается с опытом, в процессе решения возникающих по ходу изучения темы задач. В нашей книге задачи сгруппированы по темам. Однако одинаковыми они могут показаться лишь при самом поверхностном знакомстве. Внимательный читатель сразу же увидит, что во всей книге не найдется и двух задач, совпадающих до мельчайших подробностей. Каждая задача непременно содержит какой-нибудь новый, дополнительный штрих, отличающий ее от предыдущей.

Популярной математике не чужда забота о внешней форме изложения. Памятуя об этом, мы стремились излагать задачи в как можно более «несерьезной», «игрушечной» форме. Однако за их занимательной формой кроется вполне серьезное содержание. Что же касается решений, то они заинтересуют лишь тех читателей, которые любят поломать голову над трудной задачей.

Разумеется, мы прекрасно сознаем, сколь разнообразно множество наших читателей, сколь разнообразны их требования. Поскольку нам хотелось удовлетворить запросы как можно более широкого круга читателей, то мы постарались предусмотреть, чтобы каждый мог извлечь из нее нечто полезное для себя.

Наша задача облегчалась тем, что некоторые читатели прислали нам свои предложения, сообщили, в какой последовательности, по их мнению, следовало бы расположить задачи.

Каждому из типов читателей (за исключением типа *А*) мы присвоили особый знак. Он как бы служит сигналом, по которому читатель без труда узнает те задачи, которые, по нашему мнению, ему следовало бы решить.

Однако прежде чем мы перейдем к рекомендациям для каждого типа читателей в отдельности, нам хотелось бы обратить внимание на два обстоятельства, которые в большей или меньшей степени затрагивают всех читателей.

а. Мы считаем, что каждый читатель должен пытаться сначала самостоятельно решать каждую задачу и лишь затем заглядывать в решение, приведенное в книге. Вместе с тем мы обращаемся к читателям с просьбой: не упускайте случая заглянуть в конец книги, где собраны решения. Это позволит вам, во-первых, сравнить свое собственное решение с нашим (может случиться, что найденное вами решение окажется проще приводимого нами) и, во-вторых, при чтении готового решения узнать методы и понятия, без которых вам было бы трудно решить следующие задачи. Такие вещи просто необходимо знать заранее!

б. Рисунки органически связаны с текстом и составляют с ним единое целое. Иногда текст и рисунок не только дополняют друг друга: рисунок может с успехом заменять текст. Мы надеемся, что такой «симбиоз» рисунка и текста не только делает более наглядными условия задачи и оживляет книгу, но и способствует уяснению смысла задачи.

А. *Читателям, которые хотят дружить с математикой и жаждут развить свое математическое мышление*, необходимо прорешать все задачи от первой до последней и попытаться каждую задачу решить самостоятельно. Этим читателям не рекомендуется «подглядывать» в конец книги и для вящей уверенности заимствовать (хотя бы в самых общих чертах) приведенное там готовое решение. Не будет ничего плохого, если читатель этого типа не сумеет решить одну-две задачи. Вот тогда действительно имеет смысл заглянуть в книгу и посмотреть, как они там решаются.

Не будет большой беды и в том, если кому-нибудь не удастся решить какую-то из задач сразу: не следует забывать о том, что эти задачи для того и придуманы, чтобы читатели могли поломать над ними головы. В этом случае мы также рекомендуем прочитать решение, приведенное в книге: в нем может содержаться какая-нибудь полезная идея. Однако большинство задач все же следует решать самостоятельно.

Но если задача успешно решена, то зазнаваться вовсе не следует. Сравните полученное вами решение с приведенным в книге. Вы узнаете много нового и не пожалеете затраченного времени!

Если ваше решение не совпадает с приведенным в книге, то это еще не означает, что оно неверно. Вполне возможно, что задача допускает еще одно решение и вам удалось найти именно его. Установить, что задача допускает несколько решений, не менее важно, чем найти любое из них.

Следует внимательно прочитать указания и примечания, содержащиеся в решениях, приведенных в конце книги.

Б. *Читателю, который не обладает достаточным терпением,* чтобы внимательно читать всю книгу, но из любопытства все же заглянул в нее, мы советуем немного запастись терпением. Не начинайте читать книгу с приглянувшейся вам задачи в середине: этого делать нельзя даже в том случае, когда «подводных камней» совсем не видно [1]. Для самых нетерпеливых мы рекомендуем несколько безопасных «маршрутов» по книге.

---

[1] Попробуйте, например, начать с задачи 40, 41 или 42, не заглянув предварительно в решение задачи 39, а затем для сравнения попробуйте решить те же задачи после того, как вы познакомитесь с рекомендуемым там методом составления «маршрутов». Различие вроде бы совсем невелико!

У каждого маршрута имеется свой номер. Маршрут с большим номером иногда может проходить по тем же задачам, что и маршрут с меньшим номером.

Через каждую задачу непременно проходит по крайней мере один маршрут, поскольку каждый маршрут рано или поздно приводит к какому-нибудь математическому понятию. Встреча с этим понятием происходит там, где маршрут покидает область ранее решенных задач и вступает в область задач, еще ждущих своего решения.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ МАРШРУТЫ

I. Задачи 1, 4, 9б, 12, 13, 19, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44.

II. Задачи 45—60.

III. Задачи 15—18.

IV. Задачи 11, 19—24, 32—35, 37, 40, 42, 43, 62, 63, 68, 69, 72—74.

V. Задачи 11—13, 22, 24, 25, 51, 53—60, 64, 78—80.

VI. Задачи 24, 25, 66—71, 75, 76, 77.

VII. Задачи 4—7, 9, 10, 14, 25, 26, 36, 63.

В. *Читателям, которых интересуют лишь занимательные логические задачи* (такие читатели стремятся решить как можно больше разнообразных, пестрых головоломок без какой-либо системы), мы рекомендуем обратить внимание на следующие задачи, для понимания и решения которых не требуется никакой предварительной подготовки:

1, 2, 3, 4, 19, 20, 24, 27, 31, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 45, 52, 56, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 71, 75а, 75б, 75в, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85.

В том, как расположены эти задачи, нет никакой системы. С тем же успехом любая из них могла бы следовать и за любой другой, однако при этом мы не могли бы с уверенностью сказать, что любителю головоломок удастся решить очередную задачу (хотя и не утверждаем, что ему не удастся решить ее).

Для этого типа читателей наши задачи иногда могут быть непонятными: так будет происходить, например, в тех случаях, когда решение задачи существенно использует решение одной из предыдущих задач. Тем не менее, они всегда могут проверить полученное решение, сверив его с решением, приведенным в конце книги.

К сожалению, этот тип любителей математики мы вынуждены зачастую упускать из виду. Мы не можем рекомендовать им особенно каверзные или занимательные задачи, поскольку без введения всех необходимых понятий трудно объяснить, о чем идет речь. Все же иногда нас просят указать одну-две задачи для любителей головоломок. Такие задачи должны быть понятны без предварительных объяснений и введения новых понятий и в то же время допускать решение, основанное на использовании одной или двух остроумных идей.

Г. *Читателям, имеющим хорошую математическую подготовку*, для более быстрого продвижения по книге, мы рекомендуем следующие два маршрута:

I. Задачи 4, 5, 9б, 9в, 10, 13, 14—16, 19, 73, 25, 26, 75ж, 76, 77.

II. Задачи 27—30, 32, 37—42, 45, 51—57, 58—60.

Именно в этих задачах содержатся наиболее важные математические идеи. Для серьезных любителей занимательных задач рекомендуем маршрут, который можно проходить в любом порядке:

III. Задачи 62, 63, 80, 81, 83, 85.

Д. *Преподавателям математики* мы рекомендуем семь маршрутов, перечисленных в пункте Б как темы для занятий математических кружков. Поскольку в нашей книге решения задач разобраны весьма подробно, причем каждое решение содержит примечания и методические указания, доклады о маршруте можно спокойно поручить одному или двум ученикам.

Некоторые учителя выделяют следующие темы.

I маршрут. Краткий обзор методов решения двумерных и трехмерных логических задач. (Иногда доклад начинают с решения задач 2, 3, 9а и 11.)

II маршрут. Наглядный метод решения трехмерных логических задач с помощью кубической и кристаллической решеток. В этой связи естественно упомянуть об основных идеях начертательной геометрии.

III маршрут. Разложение логической задачи на независимые подзадачи. Развитие темы: связь с теорией определителей.

IV маршрут. Что означают слова: «Задача имеет решение?» Определение числа возможных решений.

V маршрут. Этот маршрут, пожалуй, имеет наибольшее теоретическое значение. Вообще говоря, мы не рекомендуем эту тему для занятий школьного математического кружка. Она скорее подходит для самостоятельного изучения отдельными наиболее подготовленными школьниками.

VI маршрут. Рассказать о наиболее интересных примерах аналогии внешне различных задач. На занятиях кружка мы рекомендуем решать лишь самые простые задачи этого цикла.

VII маршрут. Задачи для цикла связаны с понятием избыточности. На занятиях школьного кружка не следует решать задачи 25 и 26. Вместо этого мы рекомендуем дать школьникам хотя бы некоторое представление о «теореме единственности». Теоретическое «Заключение», следующее в книге после задачи 26, необходимо исключить.

ВМЕСТО ПРЕДМЕТНОГО УКАЗАТЕЛЯ

Здесь перечислены задачи, в которых содержатся принципиально новые глубокие идеи (как правило, в решении), заслуживающие особого названия. Эти задачи нетрудно отличить по соответствующим «эмблемам».

Номер задачи		Где вводится новое понятие
1	Графический метод, элементарный запрет, решающая информация, сужение информации	В III решении
4	Пользование таблицами: клетка; элементарный запрет; кружок; запрет, возникающий при сужении информации; однозначно определенное частичное решение	В примечании «Дальнейшее развитие метода составления таблиц», помещенном после решения
5	Избыточность	В решении
13	Перестановка строк и столбцов	В решении
15—16	Разложение исходной задачи на независимые «подзадачи»	В решении
27	Одновременное рассмотрение трех таблиц	В решении
28	Правило соответствия между элементами множеств	В решении
29	Более наглядное представление соответствия между множествами	В решении
30	Правило пересадки клеток	В решении
38—39	Правило дополнения	В решении
45—51	Наглядное представление совокупности трех таблиц в виде пространственной кубической решетки (гараж в Тридесятиграде)	В решении
52	Кристаллическая решетка (другое наглядное пространственное представление системы трех таблиц)	В решении
53	Эквивалентность «гаража» и кристаллической решетки	В решении
61	Различные типы трехмерных задач (на установление соответствия между элементами трех множеств)	После II решения
64, 68, 71	Принцип коробки	В начале решения (задача 64), примечание после решения (задачи 68, 71)

ЗАДАЧИ

Часть I

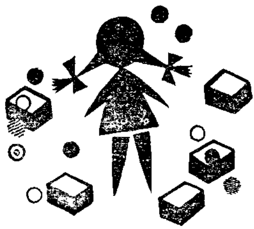
ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО

1. ЕВОЧКА И РАЗНОЦВЕТНЫЕ ИГРУШКИ

— Ой, какие красивые разноцветные шарики! А какие коробочки! Дедушка, ну, пожалуйста, подари их мне! — воскликнула Евочка, едва переступив порог дедушкиной комнаты.

— Посмотрим, заслуживаешь ли ты такого подарка, — ответил дедушка и попросил Евочку на некоторое время выйти из комнаты. Но не прошло и минуты, как девочка услышала, что ее уже зовут.

— Перед тобой пять коробочек: одна белая, одна черная, одна красная, одна синяя и одна зеленая, — сказал дедушка. — Шарики тех же цветов, что и коробочки, по два шарика каждого цвета: два белых, два черных, два красных, два синих и два зеленых. В каждую коробочку я положил по два шарика. Чтобы ты не думала, будто цвет шариков в коробочке совпадает с цветом самой коробочки, скажу сразу: шарики по коробочкам я разложил как пришлось. Если ты скажешь, какого цвета шарики лежат в каждой коробочке, то я подарю тебе все шарики вместе с коробочками.



— Но ведь это очень трудно, — печально вздохнула Евочка.

— Совсем не трудно, — утешил ее дедушка. — К тому же я помогу тебе — вот послушай:

1) ни один шарик не лежит в коробочке того же цвета, что и он сам;

2) в красной коробочке нет синих шариков;

3) в коробочке нейтрального цвета лежат один красный и один зеленый шарик;

(Тут Евочка, не выдержав, спросила, что такое нейтральный цвет. Дедушка объяснил, что так принято называть белый или черный цвет.)

4) в черной коробочке лежат шарики холодных тонов;

(Евочка уже знала, что холодными называют зеленые и синие тона.)

5) в одной из коробочек лежат один белый и один синий шарик;

6) в синей коробочке находится один черный шарик.

Помогите Евочке решить дедушкину задачу!

2. ЛОТЕРЕЯ

На каждой из десяти карточек из плотной бумаги написали по одному целому числу от 1 до 10. Карточки тщательно свернули, бросили в чью-то шляпу и пригласили каждого из пяти счастливых обладателей выигрышных билетов вытянуть по две карточки.

К сожалению, при записи результатов лотереи произошла ошибка. В то время как один из членов тиражной комиссии называл вслух числа, стоявшие на извлеченных из шляпы карточках (например: «Пять и семь»), другой по рассеянности складывал эти числа и записывал лишь их сумму (в рассмотренном нами примере он записал число 12). Поэтому результаты лотереи (не совпадающие с истинными размерами выигрышей) в протоколе распределились так: Эрдеи — 11, Фёльди — 4, Хедьи — 7, Мезеи — 16, Визи — 17. Между тем каждый из пяти участников лотереи должен получить по два выигрыша в соответствии с теми двумя числами, которые значились на вытащенных им карточках.

Нельзя ли установить, какие два числа выпали каждому участнику лотереи? (Вытащенные один раз карточки обратно в шляпу не возвращались.)

3. ОДНИ ЛИШЬ А И Б

Познакомим читателей с тремя людьми: Аладаром, Белой и Балашом. Один из них аптекарь, другой — бухгалтер, третий — агроном. Один живет в Будапеште, другой — в Бекешчабе, третий — в Асоде. Требуется выяснить, кто где живет и у кого какая профессия.

Известно лишь, что

1) Балаш бывает в Будапеште лишь наездами и то весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в столице;

2) у двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена;

3) жена аптекаря доводится Балашу младшей сестрой.

4. БЛЕСТЯЩИЕ ОФИЦЕРЫ

На одном вечере среди гостей оказалось пять офицеров: пехотинец, артиллерист, летчик, связист и сапер. Один из них был капитаном, трое — майорами и один — в звании подполковника. Дамы окружили офицеров таким вниманием, что все остальные гости оказались просто забытыми. Из разговоров удалось выяснить следующее:

1) у Яноша такое же звание, как и у его друга сапера;

2) офицер-связист и Ференц — большие друзья;

3) офицер-летчик вместе с Белой и Лайошем недавно побывали в гостях у Ференца;

4) незадолго до званого вечера у артиллериста и сапера почти одновременно вышли из строя радиопри-

емники. Оба в один день обратились к Лайошу с просьбой зайти к ним и помочь связисту устранить неисправность и не ошиблись, поскольку с тех пор приемники у обоих работают отлично;

5) Ференц чуть было не стал летчиком, но потом по совету своего друга сапера избрал иной род войск;

6) Янош по званию старше Лайоша, а Бела старше Ференца;

7) пятый офицер, Андраш, накануне вечера был в гостях у Лайоша.

Определите звание каждого офицера и род войск, в котором он служит.

(Задача взята из журнала *A Középiskolai Matematikai Lapok — Математика в средней школе.*)

5. А ЕСЛИ ИНФОРМАЦИИ БУДЕТ МЕНЬШЕ?

Можно ли так изменить наиболее существенную (то есть содержащую информацию) часть условий задачи 4, чтобы в видоизмененной форме она по-прежнему допускала единственное решение и результат его («ответ задачи») оставался таким же, как в предыдущей задаче?

6. ВАРИАЦИЯ НА СТАРУЮ ТЕМУ

Мы видели, что условия задачи 4 допускают отдельные изменения. Дальнейшие попытки упростить их привели к следующим семи условиям:

1) у Яноша такое же звание, как у сапера и еще одного офицера, который служит в другом роде войск;

2) офицер-связист и Ференц — неразлучные друзья;

3) на днях офицер-летчик вместе с Белой и Лайошем побывал у кого-то в гостях;

4) недавно у артиллериста перестал работать радиоприемник и он попросил Лайоша помочь связисту устранить неисправность;

5) Ференц чуть было не стал летчиком, но потом по совету своего друга сапера избрал иной род войск;

6) Янош по званию старше Лайоша, а Бела — старше Ференца;

7) пятый офицер, Андраш, накануне вечера был в гостях у Лайоша.

Утверждают, будто в такой формулировке задача не имеет решения. Так ли это?

7 ЕЩЕ ОДНА ВСТРЕЧА С ЕВОЧКОЙ

Можно ли решить задачу 1 с помощью введенного нами (при решении задач 4, 5 и 6) «усовершенствованного» метода составления таблиц?

8 «МЕТОДИЧЕСКАЯ» ЗАДАЧА

Пользуясь «усовершенствованным» методом составления таблиц, так хорошо зарекомендовавшим себя при решении задачи 1, решить задачи 2 и 3. Как это сделать?

Часть II

ДВА ИЗМЕРЕНИЯ

В этой главе мы расскажем о задачах, аналогичных задачам 4* и 6, и узнаем, как применять к ним уже знакомый нам метод составления таблиц [1].

9 ПРИДУМАЙТЕ ЗАДАЧУ

Судя по рис. 1, задача, для которой построены изображенные на нем таблицы, по своей структуре аналогична задаче 4*, но условия ее в явном виде не приведены.

[1] Задачу 4* см. в решении задачи 4.

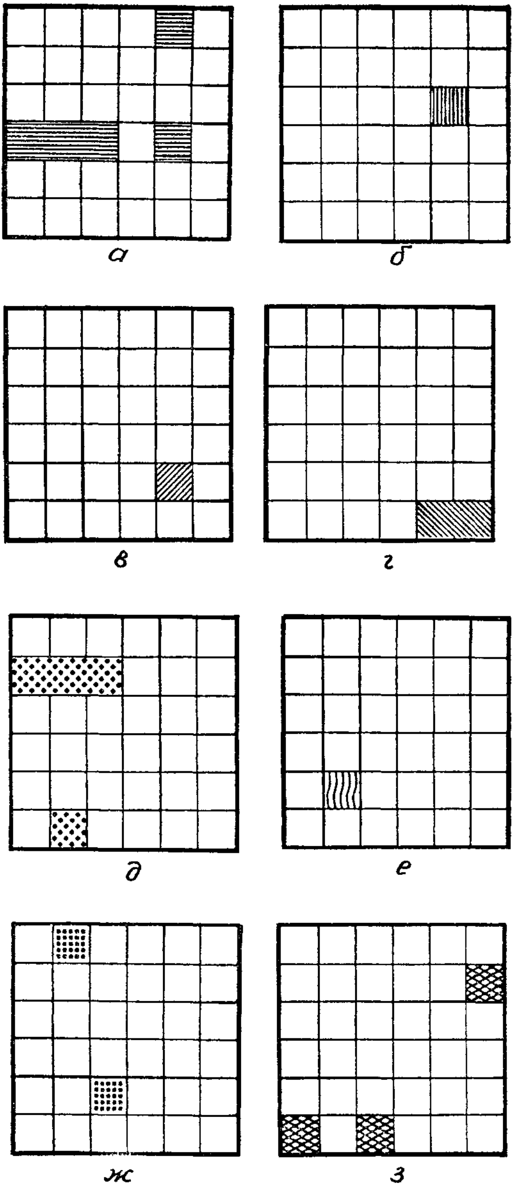
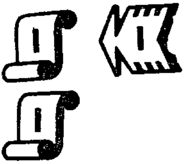


Рис. 1.

А. Придумайте такие условия задачи, чтобы они в точности соответствовали всем таблицам на рис. 1.



Б. Решите задачу и дайте обоснованный ответ на следующий вопрос: существует ли такой способ решения, при котором первое частичное решение получается наиболее просто?

В. Имеется ли избыточность в условиях задачи?

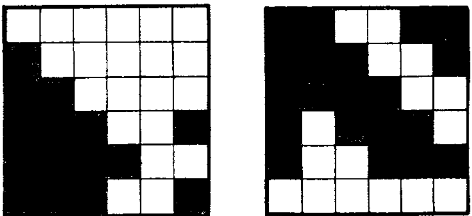
10. СЛУЧАЙНОСТЬ ИЛИ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ?

Задача 9 допускает три различных решения, причем все три обладают избыточностью: четыре первых «запрета» оказываются излишними.

Случайно ли это или здесь кроется какая-то закономерность?

11. БЕЗ СЛОВ

Решите две задачи, представленные на рис. 2.



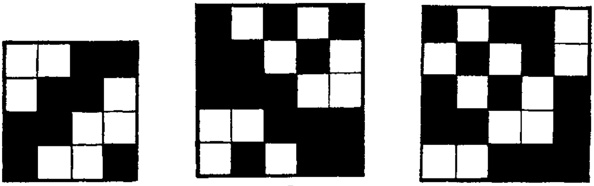
а *б*

Рис. 2.

(Внимательному читателю, несомненно, уже известно, каким образом переводятся на язык таблиц такие задачи, поэтому мы, не желая обременять читателя излишними подробностями, приводим обе задачи сразу в табличной форме.)

12. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ?

Сколько решений существует у задач, представленных на рис. 3?

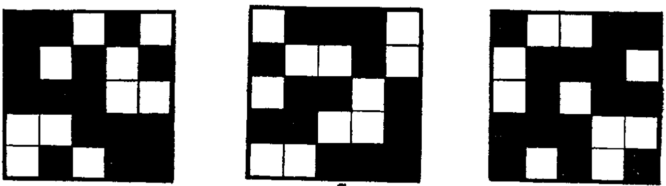


а б в

Рис. 3.

13. НЕБОЛЬШАЯ ПЕРЕСТАНОВКА

Сколько решений допускают задачи, представленные на рис. 4?



а б в

Рис. 4.

14. В ЧЕМ ДЕЛО?

Решая задачу 10, мы упомянули о том, что для однозначного решения задачи 9, принадлежащей к типу задач, который мы условно обозначим 6×6 (таблицы в задачах этого типа содержат 6 строк и 6 столбцов), необходимо 15 элементарных запретов (исключить 15 клеток). Мы установили также, что сделанный нами вывод относится не только к задаче 9, он применим и в более общем случае.

Однако рис. 2 противоречит такому выводу. Обе представленные на нем задачи (*а* и *б*) принадлежат к типу 6×6, но задача *а*, хотя и содержит ровно 15 элементарных запретов, тем не менее допускает два решения. Точно так же обстоит дело и с задачей *б*. Она содержит 20 элементарных запретов, поэтому ее условий не только достаточно для однозначного решения, но и $20 - 15 = 5$ из них принадлежат к числу избыточных, «лишних».

К аналогичному результату мы придем, рассмотрев по порядку задачи, приведенные на рис. 3, *а* и *б* и на рис. 4, *а* и *б*. Все они принадлежат к типу 5×5, поэтому для их решения необходимо взять лишь $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ элементарных запретов. В каждой из названных задач таких запретов больше (хотя информации одинаково мало), и тем не менее в каждой задаче существует несколько решений.

В чем здесь дело?

15. НОВЫЕ ВАРИАЦИИ НА СТАРУЮ ТЕМУ

Сколько решений имеют задачи, представленные на рис. 5?

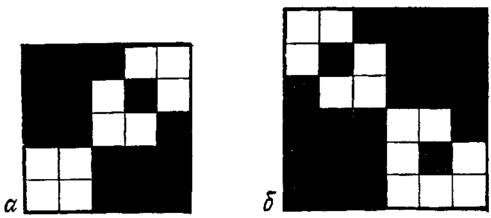


Рис. 5.

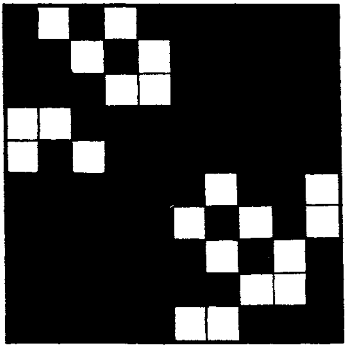
16. ПРИДУМАЙТЕ НОВУЮ ЗАДАЧУ

А. Придумайте (то есть начертите соответствующую таблицу, «сочинять» текст не требуется) по одной задаче типа 4×4, 7×7 и 8×8 так, чтобы решение каждой задачи сводилось к решению двух независимых «подзадач».

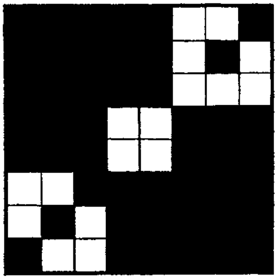
Б. По какому закону изменяется число решений задач, распадающихся на две независимые «подзадачи»?

17. НИЧТО НЕ НОВО ПОД ЛУНОЙ

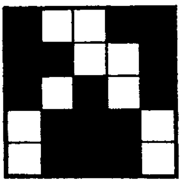
Сколько решений допускают задачи, представленные на рис. 6?



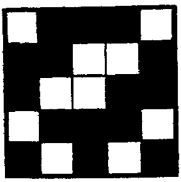
а



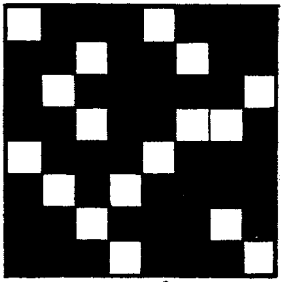
б



в



г

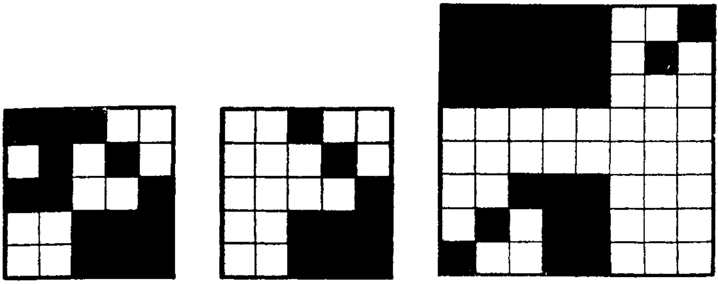


д

Рис. 6.

18. А ЕСЛИ ВЗГЛЯНУТЬ ПОВНИМАТЕЛЬНЕЕ?

Распадаются ли задачи, представленные на рис. 7, на независимые «подзадачи»?



а *б* *в*

Рис. 7.

19. У КНИЖНОЙ ПОЛКИ

Библиотека, о которой пойдет речь, не столь уж велика: просто Пиште вздумалось навести порядок в своих книгах. Так и есть! Пяти книг не хватает: томика Жюля Верна, романа Чарлза Диккенса, сборника рассказов Жигмунда Морица, поэмы-трилогии Яноша Араня «Тольди» и сборника стихов Аттилы Йожефа.

Пишта смутно помнил, что кому-то давал эти книги. Но кому?

После многократных попыток Пиште удалось вспомнить следующее:

1) к нему в комнату заходили только Андриш, Фери, Илонка, Кати и Шаньи, другому никому он книг не давал;

2) он всегда строго придерживался правила давать друзьям только по одной книге, причем новую книгу давал лишь после того, как ему возвращали предыдущую;

3) Фери как-то раз брал у него Диккенса, но давно возвратил, так что взять эту книгу вторично Фери не мог;

4) у Андриша две литературные «привязанности»: стихи Аттилы Йожефа и романы Жюля Верна (книги других авторов Андриш взять не мог!);

5) Кати отдает предпочтение литературе XX века;

6) Илонка читает произведения только венгерских авторов;

7) Шаньи — неизменный почитатель поэзии. (Всей остальной литературы для него просто не существует.)

Все ли правильно вспомнил Пишта?

20. СОРЕВНОВАНИЯ ПО ПЛАВАНИЮ

В соревнованиях по плаванию участвовало 5 спортсменов. Имена их установить так и не удалось, однако известно, что плыли они по первой, второй, третьей, четвертой и пятой дорожкам.

Относительно результатов соревнований некий любитель острого словца в шутку заметил, что

1) те спортсмены, которые плыли по нечетным дорожкам, закончив дистанцию, оказались на четных местах;

2) те спортсмены, которые заняли четные места, не плыли по четным дорожкам.

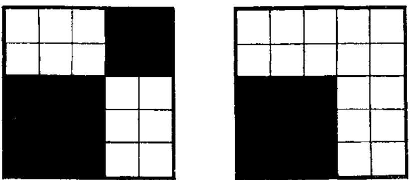
Сколько всего существует различных вариантов исхода соревнований (если известно, что все участники соревнований показали различное время)?

21. ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ ПРЕДЫДУЩЕЙ ЗАДАЧИ

Сколько решений будет иметь предыдущая задача, если спортсмен, плывший ранее по четвертой дорожке, не будет допущен к соревнованиям? (Для удобства оставшиеся дорожки мы перенумеруем заново 1, 2, 3 и 4.)

22. СНОВА ЗАДАЧА БЕЗ СЛОВ

Существуют ли решения следующих логических задач?



а *б*

Рис. 8.

23 ВАРИАЦИИ НА ЛЮБИМУЮ ТЕМУ

Существуют ли решения логических задач, представленных на рис. 9?

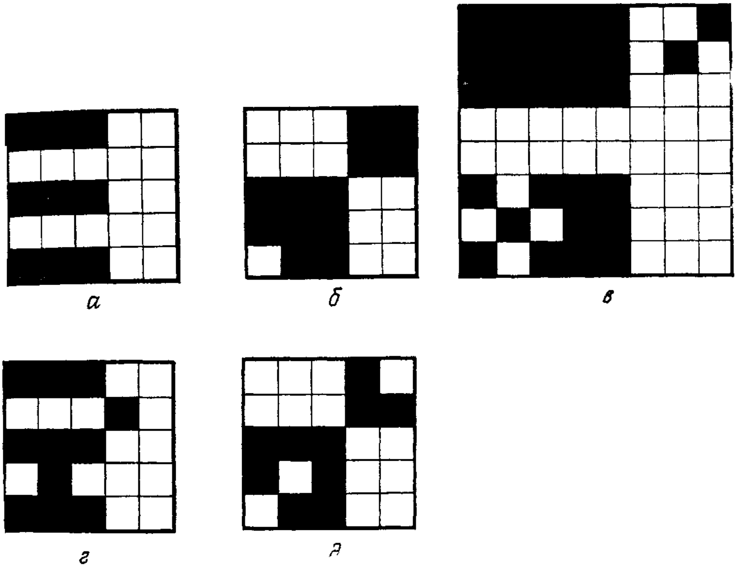


Рис. 9.

24. НЕ ТОЛЬКО ДЛЯ ШАХМАТИСТОВ

Эта задача предназначена не только для шахматистов, тем более, что доска, о которой говорится в ее условии, отличается от привычной нам шахматной доски и выглядит довольно странно.

Во-первых, она содержит не 8×8, а 5×5 клеток (впрочем, с тем же успехом она могла бы содержать 6×6 или 19×19 клеток). Во-вторых, клетки нашей доски не раскрашены в черный и белый цвета в обычном «шахматном порядке». Точнее говоря, даже в том случае, когда клетки нашей доски раскрашены в шахматном порядке, черный и белый цвета имеют совсем иной смысл, чем обычно: белый цвет означает, что клетка «свободна», черный — что клетка «занята». Как видно из рис. 10, большинство клеток на наших досках заняты, но на каждой горизонтали и каждой вертикали имеются по крайней мере две свободные клетки.

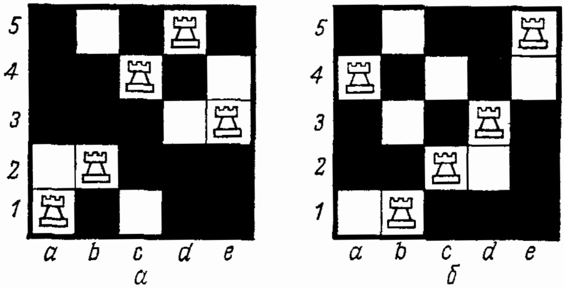


Рис. 10.

а и б. На рис. 10 ладьи на шахматной доске размером 5×5 расставлены таким образом, что выполняются следующие условия:

I) каждая ладья стоит на одной из «свободных» клеток;

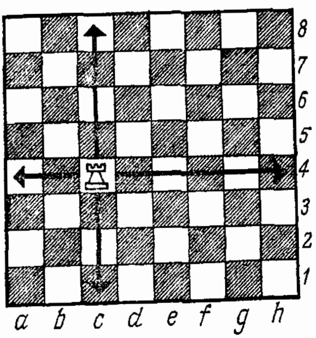


Рис. 11.

II) ни одна из ладей не угрожает клетке, на которой стоит другая ладья.

Доказать, что на обеих досках 5 ладей можно передвинуть («ходом ладьи») так, что условия I и II будут по-прежнему соблюдены.

в. Рассмотрим теперь общий случай. Предположим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали шахматной доски размером $n \times n$ клеток имеются по крайней мере 2 свободные клетки, а n ладей расставлены с соблюдением следующих условий:

I) каждая ладья занимает одну из «свободных» клеток;

II) ни одна из ладей не угрожает клетке, на которой стоит другая ладья.

Доказать, что и в этом случае ладьи можно передвинуть, не нарушив условий I и II [1].

Поскольку наша задача предназначена «не только для шахматистов», напомним читателям, как ходит шахматная ладья. Эта фигура ходит «прямо» на любую клетку, стоящую на одной горизонтали или на одной вертикали с той, на которой ладья находилась первоначально. Так, на рис. 11 ладья может пойти с клетки c4 на любую клетку вертикали c или горизонтали 4.

Одна ладья угрожает другой ладье, если та стоит на клетке, на которую может пойти первая ладья. Следовательно, две ладьи могут угрожать друг другу, если они стоят на одной горизонтали или на одной вертикали.

25 ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Среди рассмотренных нами задач были такие, которые допускали одно-единственное решение (например, задачи 4*, 5 и 9), несколько решений (задачи 6, 11—18, 21) и ни одного решения (задачи 19, 20, 22, 23).

Следует заметить, что задачи первого типа не только обладают единственным решением, но и сам процесс получения его состоит из однозначно определенной цепочки последовательных шагов: всякий раз мы в состоянии указать строку или столбец таблицы, все клетки

[1] Даже если какая-то из ладей останется на прежнем месте, мы все равно будем считать возникшую после перестановки ладей позицию «новой». Две позиции (два расположения ладей на доске) мы считаем различными, если при переходе от одной позиции к другой хотя бы одна ладья переходит со старого места на новое.

которых, за исключением одной, находятся под «запретом» (то есть залиты черной краской, или «закрашены»). Следовательно, кружок, сигнализирующий нам о получении окончательного (хотя и неполного) решения, можно поставить лишь в единственной незакрашенной клетке. Этот процесс мы продолжаем до тех пор, пока не заполним всю таблицу. Таким образом, можно утверждать, что решение всегда сводится к построению такой цепочки однозначно определенных частичных решений.

Но разве во всех случаях, когда задача допускает единственное решение, мы можем найти его, построив такую однозначную цепочку?

Нетрудно заметить, что, вообще говоря, высказанное нами утверждение неверно. Может представиться, например, такой случай, когда однозначно определенные частичные решения вообще отсутствуют, но в какой-то строке остались незаполненными две клетки. Если мы поместим черный кружок в одну из них, то оставшаяся свободной клетка «загонит» нас в тупик — мы придем к противоречию (как, например, случилось в решении 1 задачи 20). Следовательно, черный кружок может стоять лишь в другой свободной клетке. Если нарисовать его там, то остальная часть решения протекает уже «без сучка и задоринки».

Можно подумать, что такой способ также приведет нас к однозначному решению, но не по изящной цепочке однозначно определяемых частичных решений, а после многочисленных попыток нащупать это единственное решение — попыток, ведущих в тупик, к противоречию.

К сожалению, такая возможность оказывается мнимой. Нетрудно показать на примере, что в действительности ее не существует.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему существования.

Если решение некоторой двумерной (то есть устанавливающей соответствие между элементами двух множеств) логической задачи однозначно определенно (то есть решение задачи существует и единственно), то его можно представить в виде цепочки однозначно определенных частичных решений.

Докажите это утверждение.

26 ДВА ВОПРОСА

а. На стр. 166 сказано, что решение задачи, представленное на рис. 82, *б*, не может быть единственным, поскольку в каждой строке и в каждом столбце таблицы содержатся по крайней мере 2 свободные клетки.

Отсюда тотчас же следует, что существуют по крайней мере два решения задачи, Как узнать, что задача непротиворечива?

б. Решение задачи 24в (в ней речь шла о расстановке ладей на шахматной доске) основано на конструкции, которая в значительной мере опирается на то, что мы уже располагаем некой исходной расстановкой ладей. Однако такая конструкция несколько усложнена.

Нельзя ли предложить более простое доказательство, в котором бы существование исходной расстановки ладей никак не использовалось?

Читателю следует обратить особое внимание на Заключение, которым завершаются решения двумерных логических задач (см. стр. 168).

Часть III

ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ

27. ТРАМВАЙ В ЧАСЫ «ПИК»

Один психолог решил заняться изучением того, как влияет на нервную систему человека поездка в переполненном трамвае в часы «пик». Для этого он опросил по одному пассажиру с каждого из четырех маршрутов трамвая: 55, 15, 25 и 33-го. Среди опрошенных, которых звали Аладар, Петер, Вилмош и Лайош, оказалось по одному представителю четырех профессий: слесарь, электромонтер, маляр и фрезеровщик.

К сожалению, поездки в битком набитых трамваях основательно истрепали нервы самому психологу. Не удивительно, что он напрочь позабыл, у кого из опрошенных какая профессия. Впрочем, такая забывчивость сама по себе достаточно красноречиво говорит о том, как влияет на нервную систему человека поездка в переполненном вагоне!

В памяти нашего психолога сохранились лишь бессвязные отрывки из того, что рассказывал каждый из опрошенных о своем маршруте. Разумеется, полагаться на память было нельзя, и психолог решил проверить все самым тщательным образом. Ну и, конечно, нужно было выяснить, у кого какая профессия.

Вот что удалось припомнить:

1. Номер трамвайного маршрута, которым следовал Вилмош, начинается не с единицы.

2. О тридцать третьем маршруте рассказывал кто-то из рабочих-металлистов.

3. Номер трамвайного маршрута, которым следовал фрезеровщик, составлен из таких цифр, что их сумма равна числу букв в имени фрезеровщика.

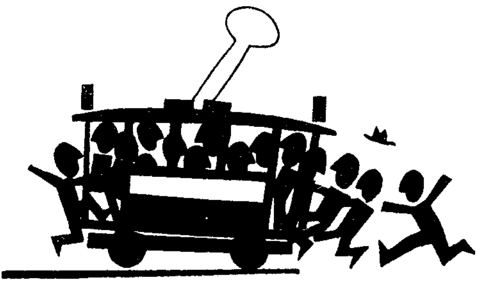
4. Лайош рассказал о трамвайном маршруте, номер которого состоит из двух одинаковых цифр.

5. Имя электромонтера начинается не с буквы В.

6. Петер спросил у психолога, где лучше сойти, чтобы пересесть на двадцать пятый маршрут.

7. В памяти психолога вдруг отчетливо всплыла фраза, сказанная Лайошем кому-то из пассажиров: «Вы сели не на тот трамвай, вам нужно пересесть на пятьдесят пятый».

Определите имя и профессию каждого пассажира, а также номер маршрута, о котором он рассказал психологу.



28 КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ I

Как-то раз Золи и Миши решали задачу, аналогичную предыдущей, пользуясь тем же наглядным методом составления таблиц, который мы так широко используем в нашей книге. Подробный текст задачи и полученные Золи и Миши решения остались неизвестными, но начерченные ими таблицы с ответом сохранились в целости и сохранности. Таблицы на рис. 12, *а* начертил Золи, а таблицы на рис. 12, *б* — Миши.

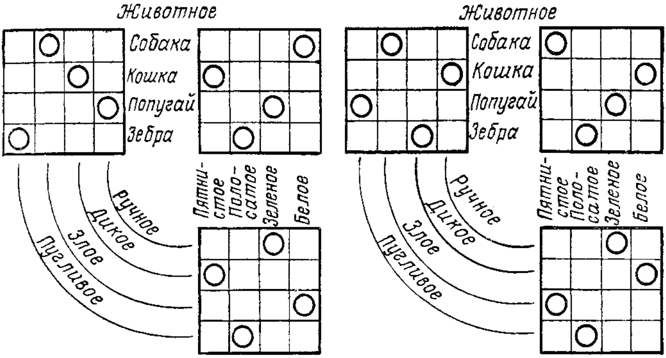


Рис. 12.

Нетрудно увидеть, что один ответ не совпадает с другим. Какой из них правильный?

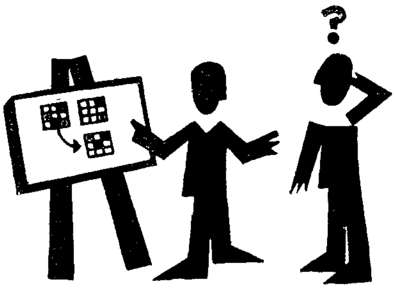
29 СИММЕТРИЯ

В двух предыдущих задачах речь шла об установлении взаимно-однозначного соответствия между элементами трех множеств (каждое из которых содержит столько же элементов, сколько их в любом другом множестве). В этом соответствии все три множества выступают совершенно равноправно: ни одно множество не выделено по сравнению с другими. Однако на рисунках, приведенных в условии задач и в их решении, это равноправие совсем не заметно. Например, в задаче 27 множеству имен пассажиров, а в задаче 28 множеству отличительных свойств животных (ручное, дикое, злое, пугливое) на рисунках отведена несколько иная роль, чем двум другим множествам. Разумеется, обособленность одного из трех множеств в обоих случаях лишь кажущаяся: по существу же все три множества входят совершенно равноправно. Поэтому асимметрию следует, несомненно, отнести к числу недостатков выбранного нами способа наглядного изображения множеств.

Попытайтесь исправить этот недостаток так, чтобы сам метод наглядного представления множеств по существу остался бы неизменным.

30 АНАЛИЗ

Желая упростить решение задачи 27, мы попытались сначала установить связь не между элементами всех трех множеств, о которых говорится в условиях задачи, а лишь между элементами любых двух из них. Однако условия задачи так «хитро» расставили запреты, что из таблиц II и III нам не удалось извлечь ни одного частичного решения, а таблица I позволила получить всего-навсего одно частичное решение. Таким образом, наши надежды на то, что нам удастся построить необрывающуюся цепочку однозначно определенных частичных решений, рухнули. Предпринятая нами попытка «решить» каждую таблицу в отдельности провалилась. К счастью, мы сумели удачно воспользоваться выведенными нами новыми запретами и, опираясь на них, последовательно, шаг за шагом, построить решение всей задачи.



Перечитайте еще раз от начала до конца решение задачи 27, приведенное в нашей книге, и попытайтесь выяснить, какую закономерность можно заметить в образовании новых запретов. В каких случаях и каким способом их удастся получить?

31. КУЛЬТУРНЫЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Вчера вечером
1) Андраш отправился на концерт,
2) Бела провел все время с Ольгой,
3) Чаба так и не увиделся с Рози,
4) Панни побывала в кино.
5) Рози посмотрела спектакль в театре.

Кроме тех, кого мы уже назвали, постоянными членами той же компании были Дьердь и Шари. Вместе с каждым юношей на том же виде культурных развлечений присутствовала одна девушка.

6. Какая-то пара посетила художественную выставку.
Кто с кем был и где?

32 КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ II

Обозначим элементы одного множества $\{A, B, C, D, E, F\}$, другого — $\{a, b, c, d, e, f\}$ и третьего — $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi\}$.

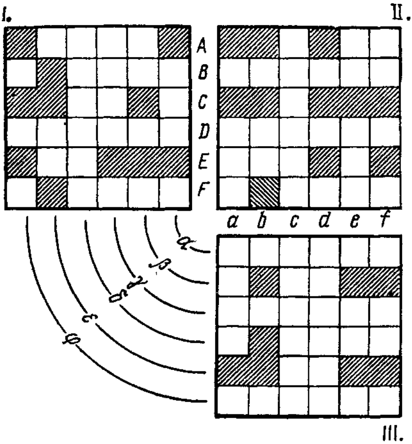


Рис. 13.

Пользуясь «запретами», представленными на рис. 13 (I, II и III), установить соответствие между элементами этих трех множеств.

33. В КАФЕ 

За столиком в кафе расположились четверо друзей: Шандор, Габор, Ласло и Золтан.

Официант принял у них заказ. Друзья попросили подать им стакан вина, кружку пива, вишневый сок и бутылку кока-колы, а также бутерброд, тарелочку с четырьмя пирожными, еще одну тарелочку с тремя пирожками с мясом и порцию мороженого.

— Кто что будет есть и пить? — спросил официант, подходя к столику с подносом, уставленным заказанными «яствами и питиями».

— Каждый из нас заказал что-нибудь поесть и какой-нибудь напиток, причем все заказали разное, — ответили хором сидевшие за столиком.

— Немного толку от такого ответа, — подумал официант, но все же принялся бойко распределять содержимое подноса между четырьмя друзьями.

1. — Прошу иметь в виду, что я не употребляю алкогольных напитков, — заметил Золтан.

2. — Тогда, должно быть, пирожки с мясом не ваши, ведь они лучше идут с пивом или с вином.

— А я и не думал заказывать пирожки, — ответил Золтан, обращаясь к своим друзьям, и преспокойно съел пирожок.

3. — Не теплое ли пиво? — осведомился один из сидевших за столиком у другого.

— В самый раз, не горячей твоего мороженого, — ответил тот.

4. — Я не люблю сладкого, — заявил Ласло.

5. — К сожалению, я забыл заказать пирожки, но вишневый сок — мой, — сказал один из друзей.

6. — Я не заказывал ничего мучного, — предупредил официанта Золтан, отодвигая от себя поставленную перед ним кружку пива.

Сведения были довольно сумбурные, но официант обладал завидным терпением и выдержкой и попытался обслужить всех своих посетителей как можно лучше, хотя и был в некотором затруднении.

Не могли бы вы помочь ему?

34. ПРОДОЛЖЕНИЕ

В решении задачи 33 говорилось о том, что заказанные четырьмя посетителями закуски и напитки можно распределить лишь одним-единственным способом. Что произошло бы, если бы официант обслужил каждого посетителя в строгом соответствии со сделанным им заказом?

35. ГДЕ ОШИБКА?

В этой задаче речь пойдет об одной головоломке, опубликованной в свое время в журнале «Фаркаш». Мы не будем воспроизводить здесь полностью всю головоломку, а познакомим читателя лишь с самой ее сутью.

Между элементами трех множеств установлено взаимно-однозначное соответствие. Что представляют собой эти элементы, не известно, поскольку они «замаскированы» буквенными обозначениями: элементы первого множества известны «под псевдонимами» $\{A, B, C, D\}$, элементы второго множества — $\{a, b, c, d\}$ и элементы третьего — $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Необходимые для решения сведения, которые в «Фаркаше» были хитроумно скрыты в условии головоломки, мы «разобрали» на элементарные запреты и предлагаем читателю в виде таблиц на рис. 14.

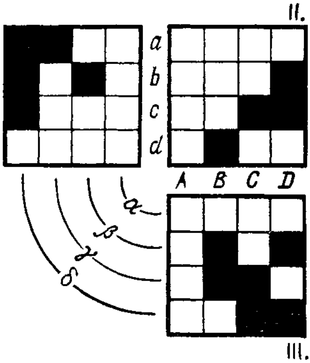


Рис. 14.

Редакция «Фаркаша» обратилась к читателям с просьбой помочь ей в оценке многочисленных решений.

Например, решение, присланное читателем по имени Пал Сено, гласило:

«Поскольку δ не соответствует ни *a*, ни *b*, ни *c*, то δ *может соответствовать лишь d*.

Далее, поскольку *d* не соответствует *B*, то полученный нами результат позволяет утверждать, что δ не соответствует *B*.

По условию задачи *B* не соответствует ни β, ни γ. Следовательно, *B может соответствовать лишь элементу α.*

Итак, δ не соответствует *B*. Но по условию задачи δ не может соответствовать ни *C*, ни *D*. Значит, δ может *соответствовать лишь элементу A*.

В двух предыдущих частичных решениях речь шла лишь об элементах α и δ. Условия задачи исключают соответствие между *C* и γ, а также между *D* и β. *Следовательно, C может соответствовать лишь элементу* β, а *D — лишь элементу* γ.

Мы уже выяснили, что элемент *d* соответствует лишь элементу δ, а δ — лишь элементу *A*. Отсюда следует, что *d может соответствовать лишь элементу A*.

По условию задачи элемент *c* не соответствует ни *C*, ни *D* и, как мы недавно показали, не может соответствовать и элементу A. Следовательно, *c может соответствовать лишь элементу B.*

Аналогично по условию задачи элемент D не может соответствовать элементам b и c, а по доказанному — элементу d (и c). Таким образом, D может *соответствовать лишь элементу a.*

Элемент C *может соответствовать лишь элементу b*, поскольку других возможностей уже не осталось.

Объединяя все полученные нами результаты, мы получаем следующий список допустимых соответствий между элементами трех множеств:

$$A - d - \delta,$$
$$B - c - \alpha,$$
$$C - b - \beta,$$
$$D - a - \gamma».$$

Решение другого читателя по имени Петер Солома выглядело так:

«Поскольку δ не может соответствовать ни a, ни b, ни c, то δ может *соответствовать лишь d.*

По условию задачи δ не может соответствовать ни C, ни D, отсюда по доказанному выше следует, что d не может соответствовать элементам C и D.

Из условий задачи мы заключаем также, что B не может соответствовать элементу d, а D — элементам b и c. Отсюда и из полученных ранее результатов мы приходим к выводу о том, что *d может соответствовать лишь элементу A*, а *D — лишь элементу a.*

Поскольку элементы A и D, так же как и элементы a и d, уже «заняты» и по условию задачи C не может соответствовать c, то *C может соответствовать лишь элементу b*, а *B — лишь элементу c.*

По условию задачи D не может соответствовать β, а по доказанному ранее β не может соответствовать элементу a. Из условий задачи известно, что a не может соответствовать элементу γ и δ, поэтому *a может соответствовать лишь элементу α.*

По условиям задачи β не может соответствовать элементу b. Кроме того, мы установили, что соответствие между β и a также исключено. Элемент d уже «занят». Следовательно, β *может соответствовать лишь элементу c*, а для γ остается лишь b.

Объединяя все полученные нами результаты, получаем следующий список допустимых соответствий между элементами трех множеств:

$$A - d - \delta,$$
$$B - c - \beta,$$
$$C - b - \gamma,$$
$$D - a - \alpha».$$

Какое из решений правильно?

36 КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ III

Забудем снова о фабуле и обратимся к элементарным запретам, изображенным на таблицах, представленных на рис. 15.

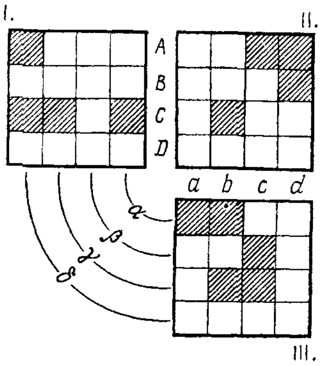


Рис. 15.

Полезно сравнить этот рисунок с рис. 111. На каждой *из таблиц I, II и III число запретов одинаково, лишь* расположены они по-разному.

Сколько решений имеет такая задача?

37 СТОИТ ПОДУМАТЬ

Рассмотрим еще одну «задачу без слов», в которой требуется установить соответствие между элементами трех множеств. Все «запреты» представлены на рис. 16.

Быть может, читателю она покажется скучной, и он решит, перелистнув страницу, перейти к следующей задаче: ведь в решении таких задач он уже приобрел основательную сноровку. Мы просим лишь об одном: не делайте поспешных заключений. Будет совсем не

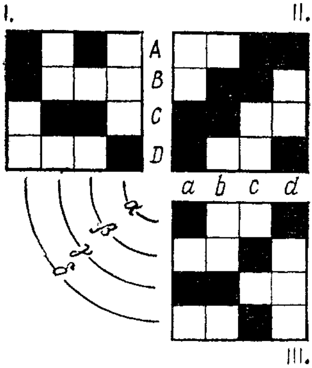


Рис. 16.

плохо, если вы все же надумаете решить эту задачу и найти взаимно-однозначное соответствие между элементами всех трех множеств.

38. КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ IV

Решите представленную на рис. 17 задачу.

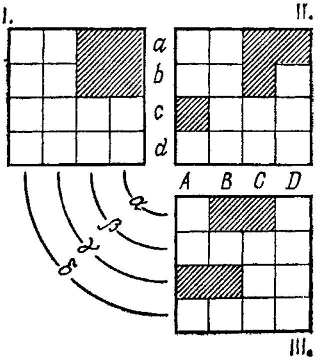


Рис. 17.

39 ПРИДУМАЙТЕ БОЛЕЕ ПРОСТОЕ РЕШЕНИЕ

В решении задачи 38 наибольшее значение имела та последовательность действий, которую мы избрали с самого начала (рис. 135). Именно она позволила нам установить еще один ранее неизвестный «запрет». Этот запрет сослужил нам прекрасную службу. Он избавил нас от необходимости делать множество безуспешных попыток и указал единственный путь, ведущий к окончательному результату (запрет, о котором идет речь, мы нашли, использовав правило «пересадки» клеток из одной таблицы в другую и правило соответствия).

Попробуем теперь упростить решение задачи 37. Нельзя ли и в этой задаче построить решение по образу и подобию решения задачи 38, то есть найти еще один «ключевой» запрет?

Нельзя ли и в этой задаче найти способ, позволяющий избегать попыток решения, ведущих в «тупик»?

40 ПРОФЕССИИ И УВЛЕЧЕНИЯ

У каждого из шести людей (обозначим их U, V, W, X, Y и Z) имеется свое увлечение. Один из них собирает насекомых (н), другой — радиолюбитель (р), третий — филателист (ф), четвертый коллекционирует почтовые открытки (о), пятый строит авиамодели (а), шестой — модели электрических железных дорог (жд). Разумеется, увлечения мы перечислили не в том порядке, в каком назвали «имена» людей. Профессии у всех шестерых также различные (их мы назовем также не в том порядке, в каком назвали «имена» людей): электромонтер (э), машинист тепловоза (м), забойщик (з), токарь (т), инженер (и) и врач (в).

Известно о них следующее.

1. U строит модели.

2. Z как-то раз пожаловался W, что не разбирается в электротехнике, но W ничем не смог ему помочь. В радиотехнике он еще кое-как разбирался, а вот заниматься электротехникой ему никогда не приходилось.

3. У X и Y ни профессия, ни «хобби» не имеют ничего общего с железной дорогой.

4. Врач в свободное от работы время с увлечением строит модели.

5. U занимается физическим трудом.

6. X, Y и машинист тепловоза сошлись на том, что они не могли бы насаживать букашек на булавки, хотя дело это, казалось бы, и нехитрое.

7. Профессия человека, который увлекается авиамоделизмом, не начинается с тех букв, которые встречаются в слове «экзамен».

8. Машинист тепловоза и Y всегда отдают филателисту почтовые марки со всех писем, которые они получают.

9. Забойщик не разбирается в радиотехнике. Когда у него испортился радиоприемник, то неисправность устранил энтомолог-любитель.

10. Z дружит с инженером.

11. Любитель строить модели электрических железных дорог занимается умственным трудом.

Определите, у кого какая профессия и кто чем увлекается.

41. ЭКСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Продукция фирмы «Точные приборы» пользуется за рубежом большим спросом. Предприятия фирмы производят точные приборы шести различных типов (для удобства обозначим их римскими цифрами I, II, ..., VI), и все шесть типов идут буквально «нарасхват». Вот и сейчас фирма получила из-за границы шесть заказов от торговых фирм Лондона, Праги, Рима, Амстердама, Софии и Хельсинки. На заводском дворе, ожидая погрузки, выстроились пустые вагоны.

8 часов утра. Известный своей пунктуальностью начальник отдела внешней торговли фирмы товарищ Аккурати стремительным шагом проследовал в контору, чтобы проследить за своевременной отправкой грузов, и, открыв дверь своего кабинета, едва не лишился чувств от потрясения.

Оказалось, что накануне вечером Гизике, красивая 18-летняя машинистка, по рассеянности бросила непогашенный окурок сигареты вместо пепельницы в корзину для бумаг. Правда, стоявший рядом с корзиной канцелярский стол удалось спасти, но все бумаги, в том числе и собственноручные записи товарища Аккурати, содержавшие подробные сведения о городах, числе вагонов и количестве приборов, которые надлежало отправить, обратились в груду пепла.

Что делать? Все шесть заказов срочные, задерживать их отгрузку нельзя ни на минуту. Правда, можно было бы вызвать по телефону представителей торговых фирм и у них уточнить заказы, но такой выход явно неприемлем: представители могли бы потерять доверие к фирме и аннулировать заказы.

Отступать было некуда: товарищу Аккурати пришлось положиться на собственную память. И действительно, начальнику отдела внешней торговли фирмы «Точные приборы» удалось припомнить довольно многое.

1. Все торговые фирмы заказали лишь по одному типу приборов, причем

2. во все шесть городов надлежало отправить приборы различных типов.

3. Удалось восстановить и число вагонов, подлежащих отправке. В один город фирма должна отгрузить 1 вагон, в другой — 2 вагона, в третий — 3 вагона и т. д. (Эти данные подкреплялись тем, что на заводском дворе в ожидании погрузки стоял как раз $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ вагон.)

4. Куда следовало отправить 4 вагона? К сожалению, этого товарищ Аккурати припомнить так и не смог, но точно знал, что не в Прагу и не в Лондон.

5. Куда отправить 6 вагонов? Начальник отдела внешней торговли попытался припомнить письмо с заказом. Так и есть! Можно с уверенностью сказать, что заказ на 6 вагонов поступил либо от итальянской, либо от чешской торговой фирмы.

6. А куда же отправить 5 вагонов? Так, прикинем... Есть! В один из двух городов: либо в Прагу, либо в Амстердам!

7. Приборы двух первых типов (I и II) заказывают в основном Лондон и Прага. Можно не сомневаться, что и на этот раз они заказали приборы именно этих типов.

8. Римская торговая фирма обычно заказывает приборы двух средних типов (III и IV). Разумно считать также, что 3 вагона предназначались к отправке не в Рим.

9. Заказ на приборы поступил и из Хельсинки. Какие приборы и сколько их требовалось финнам, товарищ Аккурати припомнить не мог, но твердо знал, что не V типа и не 2 вагона. Ничего другого, как ни старался начальник отдела внешней торговли, установить не удалось, и это его очень огорчило.

10. Удалось также припомнить, что одна из торговых фирм заказала четное число вагонов с приборами VI типа,

11. но 6 вагонов следовало загрузить приборами нечетного типа. Впрочем, постойте... Так ли это? Нет, может быть, 6 вагонов следовало загрузить приборами VI типа, а если не VI, то нечетного типа. Это уж точно.

12. 4 вагона надлежало загрузить приборами какого-то из первых трех типов.

13. Наконец, товарищ Аккурати совершенно ясно помнил, что приборов IV типа требовалось отгрузить по крайней мере 2 вагона.

Достаточно ли сведений удалось восстановить по памяти товарищу Аккурати для того, чтобы мы могли узнать, сколько вагонов надлежит загрузить, какими типами приборов и в какие города отправить заказы?

42. ПРЕСТУПЛЕНИЕ В ГОСТИНИЦЕ

Когда в 11 часов утра служащие гостиницы в Пиэри Поуч открыли, наконец, дверь четвертого номера, расположенного на первом этаже (до этого они долго, но безуспешно пытались достучаться, но им никто не открывал), глазам их предстало ужасное зрелище: знаменитая кинозвезда, обворожительная мисс Вамп лежала на паркете в глубоком обмороке, все вещи в номере были разбросаны в беспорядке, а бесценное бриллиантовое ожерелье кинозвезды исчезло.

Правда, мисс Вамп вскоре пришла в себя, но ничего вспомнить так и не смогла. Пришлось обратиться за помощью к знаменитому сыщику Сэму Силли и его ловкому помощнику Джонни Вуду.

Сыщик и его подручный тотчас же принялись за работу. Вскоре им удалось выяснить следующее.

1. На первом этаже гостиницы расположено всего 6 номеров: от первого до шестого.

2. Мисс Вамп в последний раз видели в ресторане гостиницы в 18 часов вечера накануне похищения бриллиантов. Ожерелье было тогда на ней.

3. С 18 часов вечера до 10 часов следующего утра никто из служащих гостиницы не входил в коридор перед номерами, расположенными на первом этаже, и ничего, кроме стука в дверь, не слышали.

4. Между 18 часами вечера и полуночью в гостинице побывало всего 6 посторонних: мистер Браун, мистер Грин, мистер Хилл, мистер Смит, мистер Тейлор и мистер Уайт. Все они приходили к постояльцам, занимавшим номера на первом этаже. Портье, которому из-за его стойки прекрасно виден весь коридор первого этажа, отчетливо запомнил, что каждый из них заходил лишь в один номер, причем никакие два посетителя не заходили в один и тот же номер. К сожалению, портье не записал, в какой номер заходил каждый из посетителей и до которого часа он оставался в гостинице. К тому же все посетители заходили в гостиницу в различное время: один побывал в ней между 18 и 19 часами, другой — между 19 и 20 и т. д. Последний посетитель заходил в гостиницу между 23 и 24 часами.

Затем Сэм Силли навестил каждого из шести подозреваемых и выяснил следующее.

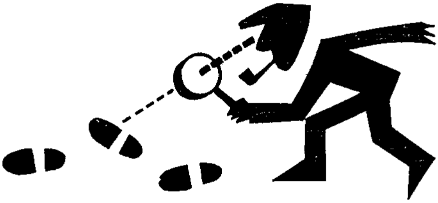
5. Достоверно установлено, что с 20 до 24 часов мистер Браун принимал у себя дома гостей, устроив грандиозную whisky-party[1]. Будучи образцовым хозяином, мистер Браун от начала и до конца своего приема ни на минуту не покидал гостей.

6. Столь же неопровержимо установлено, что с 21 часа до 24 часов мистер Грин находился среди гостей мистера Брауна.

7. Допросить мистера Хилла и мистера Смита не удалось, поскольку оба находились у себя дома в бесчувственном состоянии. По заключению медицинской

---

[1] Вечеринка с возлияниями (*англ.*).



экспертизы у обоих наблюдалась острая алкогольная интоксикация. Этот диагноз не помешал Джонни Вуду собрать подробнейшие сведения о подозреваемых и их окружении, снять отпечатки пальцев, следов обуви и т. д. (Попутно выяснилось одно странное обстоятельство: на мистере Смите оказались те же ботинки, которые накануне с 18 до 24 часов носил мистер Хилл.)

8. Мистер Тейлор с 19 часов 45 минут до 21 часа довольно громко выяснял отношения со своей женой, что могут подтвердить все соседи.

9. Мистер Уайт с 19 до 22 часов находился в театре, а с 23 часов до полуночи присутствовал на заключительной части грандиозной попойки, устроенной мистером Брауном.

Вернувшись в гостиницу, Сэм Силли и Джонни Вуд тщательно осмотрели все номера, расположенные на первом этаже, и установили, что

10. все окна плотно закрыты и через них снаружи в гостиницу никто не проникал.

Затем они сравнили все обнаруженные в номерах следы (отпечатки обуви, пальцев, отдельные волоски и т. д.) с теми данными, которые им удалось собрать о подозреваемых. Выяснилось следующее.

11. В номер 5 не заходили ни мистер Смит, ни мистер Тейлор, ни мистер. Уайт.

12. Мистер Смит не заходил в номера 1, 3 и 6.

13. Мистер Грин не мог быть посетителем номера 3 и номера 6.

Наконец, допросили портье. Приводим выдержку из протокола допроса.

14. С э м С и л л и. Вы утверждаете, что незадолго до 20 часов на несколько минут задремали за своей стойкой. Не мог ли кто-нибудь за это время незаметно проникнуть в гостиницу или пробраться из одного номера в другой?

Портье. Входная дверь была заперта, сэр. Я сплю очень чутко, а двери номеров слегка скрипят. Стоило уходившему посетителю скрипнуть дверью, как я бы сразу проснулся. А ведь скрип был очень тихий: так скрипят лишь двери 1- и 4-го номеров.

Затем портье припомнил, что

15. до 19 часов никто не входил ни в 5-й, ни в 6-й номера,

16. в 20 часов 10 минут в 1, 3 или 6-й номер пришел посетитель,

а также, что

17. между 22 и 23 часами двери 2, 3 и 6-го номеров не открывались: в эти номера никто не входил и из них никто не выходил.

Собранные данные позволили сыщикам напасть на след преступника. Из условий 10, 4, 3 и 2 напрашивался почти неопровержимый вывод: бриллиантовое ожерелье похитил один из шести посетителей, а именно тот, который либо вечером, либо ночью заходил в 4-й номер.

Можно ли найти преступника, пользуясь всеми данными, собранными Сэмом Силли и Джонни Вудом?

43. РЕВНОСТЬ

Мишка Верный и Кати Неверная — жених и невеста. Они встретились днем в пятницу.

1. Мишка с упреком сказал Кати, что тщетно пытался дозвониться ей в понедельник, вторник, среду и четверг. Кати ни разу не было дома!

2. — Должно быть, я была у подруг, — оправдывалась Кати. — Ты ведь знаешь, что их у меня четыре: Ольга, Пири, Рози и Шари. Вот я и захожу иногда к ним.

— И все четыре дня ты провела с подругами?

3. — Ну, разумеется! Ведь подруг у меня четыре, и каждый день я навещала другую.

— А почему нельзя было зайти ко всем четырем в один день?

4. — Потому что они не слишком любят друг друга, и мне пришлось для каждой придумать свою «програм-

му» посещения. С одной мы отправились в парикмахерскую на укладку волос, с другой побывали у портнихи, с третьей совсем случайно встретились в библиотеке, а с четвертой давным-давно договорились сходить на лодочную станцию у Римской набережной и покататься на лодке. Впрочем, какое тебе дело? Не мог дозвониться, ну и что?

Мишка обиженно промолчал, но мучившие его сомнения не рассеялись. Тщетно Кати пыталась уверить его, что провела первые четыре дня недели именно так, как рассказала, — Мишка решил, хорошенько поразмыслив, докопаться до истины.

Какими сведениями он еще располагал?

5. Все первые три дня он звонил Кати с пляжа. Шари совершенно случайно все эти дни также проводила на пляже.

6. Пири и Рози нельзя упрекнуть ни в чем дурном. Но именно сегодня, в пятницу, они пожаловались друг другу, что волосы у них в ужасающем беспорядке: по крайней мере неделю девушки не были в парикмахерской.

7. Признаться по совести, во вторник днем Мишка ходил в кино с Ольгой. Там они встретили девушку, которая собиралась вместе с Кати отправиться к портнихе, но та неожиданно куда-то уехала.

8. Кати бывает в парикмахерской с утра во вторую половину недели (по четвергам, пятницам и субботам), чем бы она ни занималась.

9. Ни Пири, ни Рози никогда не бывают в библиотеке.

10. По вторникам на лодочной станции у Римской набережной выходной день.

Что можно сказать о «программе» Кати Неверной?

44. НЕМНОГО «ЯЗЫКОЗНАНИЯ»

Решая задачу 43, мы упомянули о том, что решения, полученные «табличным» методом, можно перевести на язык элементарной логики, то есть представить в виде последовательности («цепочки») элементарных логических выводов.

а. Всегда ли возможен такой «перевод» или имеются исключения?

б. Как следует «переводить»? Нельзя ли указать «рецепт» правильного перевода?

в. Переведите на язык элементарных логических выводов решение задачи 40, полученное методом составления таблиц.

(Мы остановили свой выбор именно на этой задаче, потому что, решая ее, убедились, насколько трудно получить ответ без таблиц, опираясь лишь на элементарную логику.)

45. СВЕРХСОВРЕМЕННЫЙ ГАРАЖ В ТРИДЕСЯТИГРАДЕ

В столице Тридесятого государства Тридесятиграде недавно построили сверхсовременный шестиэтажный гараж в форме куба. Все шесть этажей подразделяются на одинаковые кубические боксы (рис. 18), образующие

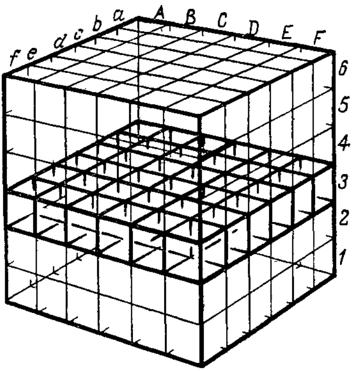


Рис. 18.

6 слоев в направлении с севера на юг и 6 слоев — в направлении с запада на восток (рис. 19 и 20). Таким образом, все здание гаража разделено на $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ одинаковых кубических боксов.

Для удобства регистрации машин все шесть «слоев» боксов, идущих в направлении с востока на запад, обозначены буквами A, B, C, D, E и F (рис. 20), все шесть «слоев», идущих в направлении с севера на юг, — буквами a, b, c, d, e и f (рис. 19), а все шесть этажей, как обычно, целыми числами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (рис. 18).

Перенаселенность, характерная для современного большого города, каким, несомненно, является Тридесятиград, привела к тому, что в гараже «прописано» больше машин, чем он мог бы вместить одновременно.

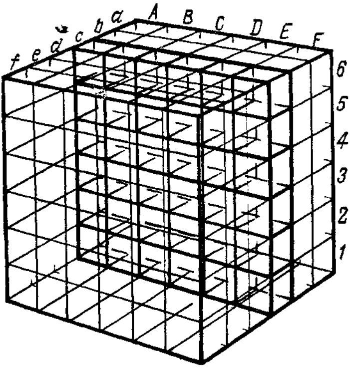


Рис. 19.

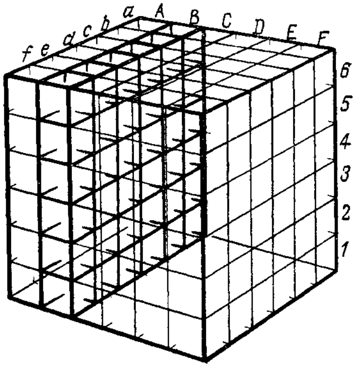


Рис. 20.

Такая экономия места вполне понятна: ведь все машины возвращаются «домой» в различное время. Машину, оставляемую на хранение, всякий раз ставят в тот бокс, где для нее найдется свободное место.

Отыскать свою машину абоненту гаража не так-то просто. Для этого при въезде в гараж стоит специальное электронное устройство, которое выглядит следующим образом. На панели перечислены фамилии всех абонентов гаража. Рядом с каждой фамилией имеется кнопка. Тут же на стене висят три табло, изображающие гараж в трех видах: табло *I* — вид с юга (таким мы увидели бы гараж, если бы встали лицом к северу, а спиной к югу), табло *II* — вид с запада и табло *III* — вид сверху. Все табло разбиты на клетки (по числу боксов в соответствующем слое), в каждой из которых имеется электрическая лампочка. Когда абонент нажимает кнопку рядом со своей фамилией, на каждом табло вспыхивает по лампочке. Они-то и указывают тот бокс, где находится его машина. Электронное устройство как бы делает прозрачным все здание гаража и позволяет владельцу «видеть» свою машину с каждого из трех направлений: с запада, с юга и сверху. (Разумеется, мы несколько преувеличили возможности «автомата-местоуказателя». В действительности лампочки, загорающиеся на трех табло, позволяют найти лишь бокс, в котором следует искать машину, но не указывают, в каком месте внутри бокса она стоит.)

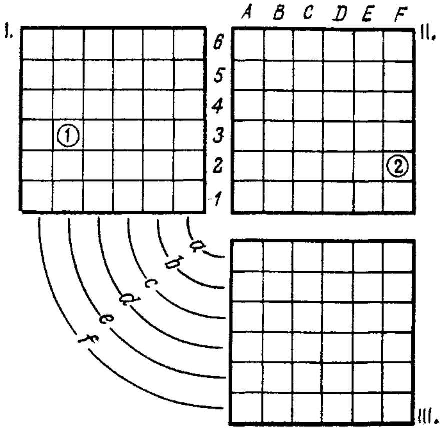


Рис. 21.

Житель Тридесятиграда Эгон Берг пользовался услугами нового гаража. Когда однажды утром ему понадобилось вывести свою машину, он, нажав кнопку рядом с фамилией «Берг», к своей досаде обнаружил, что автомат неисправен. Лишь на табло *I* загорелась лампочка, обозначенная на рис. 21 цифрой *1*. Разумеется, и этого было достаточно для того, чтобы хотя бы приблизительно представить себе, где стоит машина, но Эгон Берг не желал довольствоваться столь неполной информацией. Он осторожно огляделся по сторонам и, увидев, что поблизости никого нет, изо всех сил стукнул автомат по боковой стенке. Тотчас же на табло *II* загорелась еще одна лампочка (на рис. 21 она обозначена цифрой *2*).

Как, по-вашему: можно ли считать Эгона Берга квалифицированным специалистом по ремонту точных приборов? Удалось ли ему «одним ударом» привести в порядок неисправный автомат?

46. ГДЕ ИСКАТЬ МАШИНУ?

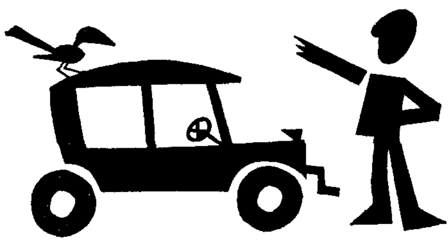
Разумеется, Эгон Берг тотчас же понял, что избранный им «радикальный» способ устранения неисправностей электронной аппаратуры, мягко говоря, не слишком эффективен (автомат по-прежнему не работал), и не стал предпринимать дальнейших попыток ремонта закапризничавшего устройства.

— Что же мне теперь делать? — размышлял он. — Не стану же я обходить один за другим все 216 боксов. Впрочем, если не удастся придумать ничего другого, то придется согласиться и на это. Во всяком случае хотелось бы надеяться, что хоть какая-то лампочка на табло (рис. 21) указывает правильный «коридор». Тогда я мог бы обойти лишь те боксы, на которые указывает автомат.

Какие боксы имел в виду Эгон Берг? Сколько боксов соответствует двум лампочкам, загоревшимся на табло автомата?

47. АВТОМАТ ИСПРАВЛЕН!

Берг уже хотел было отправиться на розыски своей машины, когда появился механик гаража. Он разобрал автомат и выяснил, что неисправность была самая пустяковая. Через минуту автомат был отремонтирован и Эгон Берг еще раз нажал кнопку рядом со своей фамилией. Но и на этот раз на табло загорелись лишь две лампочки — те, которые показаны на рис. 22.



Тем не менее автомат теперь указывал место машины совершенно точно (по крайней мере так утверждал механик гаража). «По-видимому, — оправдывался

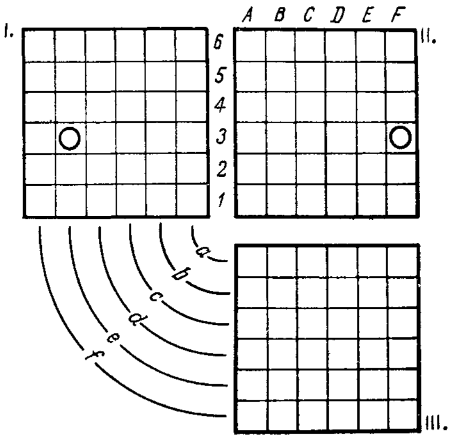


Рис. 22.

он, — кто-то сильно стукнул кулаком по автомату, и на табло *III* разбилась какая-то лампочка».

Какую лампочку следует заменить на табло *III*?

48. «БРОНЯ» НА МЕСТА В ГАРАЖЕ

Известная в Тридесятом государстве фирма «Канаты и тросы» (сокращенно — КИТ) абонирует в гараже, о котором мы рассказали в задаче 45, боксы Ba4, Bb4, Bc4, Bd4, Be4, Bf4, Bf1, Df1, Fb1, Fb2, Fb3, Fb4, Fb5 и Fb6. В этих боксах имеют право оставлять машины только водители из автохозяйства фирмы. Посторонним запрещается ставить машины в абонированные КИТом боксы даже в том случае, если эти боксы свободны.

Управляющий гаражом распорядился вывернуть из световых табло регистрирующего автомата три лампочки (в местах, соответствующих черным клеткам на рис. 23). По-видимому, управляющий чего-то не учел, поскольку, после того как его распоряжение было выполнено, диспетчер КИТа всегда знал, где находятся его машины, чего нельзя сказать об остальных абонентах гаража, которым иногда приходилось подолгу разыскивать свои.

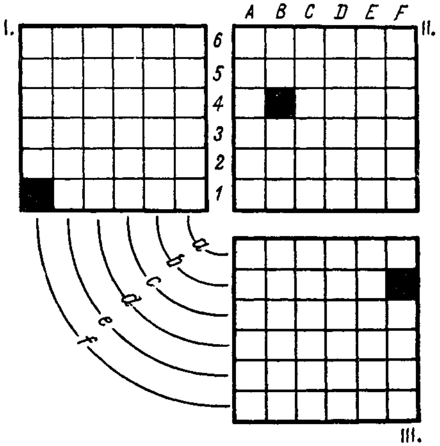


Рис. 23.

Правильное ли распоряжение отдал управляющий гаражом?

49. БОКС НА СОЛНЕЧНОЙ СТОРОНЕ

В Тридесятиграде только что закончилось строительство нового шестиэтажного гаража — точно такого же, как тот, с планировкой которого мы познакомились в задаче 45. К сожалению, даже строительство двух сверхсовременных гигантов не позволило сколько-нибудь существенно удовлетворить потребность в «гостиницах» для машин, поэтому предприятия буквально набросились на гараж и абонировали в нем множество боксов. В предыдущей задаче мы видели, что если абонирован весь ряд («коридор») боксов, то лампа в соответствующей клетке на табло регистрирующего автомата «обретает избыточность». Управляющий новым гаражом сдавал в аренду предприятиям лишь целые коридоры боксов и, сдав очередной коридор, заклеивал на табло соответствующую клетку черной бумагой. Взглянув на табло, он сразу же мог видеть, какие «коридоры» сданы.

Последним он сдал коридор f на третьем этаже, и на табло *I* заклеил черной бумагой соответствующую этому коридору клетку f3, после чего табло автомата приняли такой вид, как показано на рис. 24.

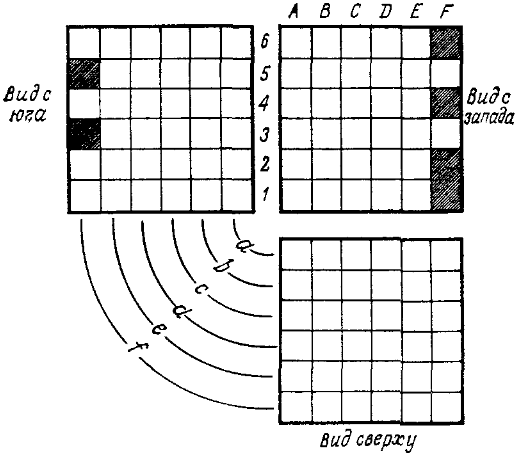


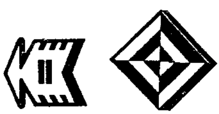
Рис. 24.

В этот момент к гаражу подъехал Карчи Баркач и, незаметно сунув в руку управляющего талер (денежная единица, имеющая хождение в Тридесятом государстве), попросил его поставить машину в какой-нибудь бокс, расположенный в юго-западном углу гаража. На следующий день он хотел провести профилактический осмотр своей машины, и ему нужно было, чтобы бокс после обеда был хорошо освещен.

— Ну что же, господин Баркач, — сказал управляющий гаражом, опуская талер в карман. — Посмотрим, что можно для вас сделать.

Действительно, что можно сделать?

50. АВТОМАТ, ИСПРАВНЫЙ ЛИШЬ НА ОДНУ ТРЕТЬ



Илонка Русалка проводила лето не в Тридесятом государстве, а за границей — за Синим морем. Взять с собой машину было невозможно, и Илонка поставила ее в гараж. Вернувшись, она тотчас же отправилась за своей машиной и с радостью увидела, что на световых информационных табло остались лишь две черные клетки. Это означало, что большинство предприятий обзавелось собственными гаражами. Рядом с табло висела записка, из которой явствовало, что табло *I* и *III* временно вышли из строя и действует лишь табло *II*. Нажав кнопку рядом со своей фамилией, Илонка увидела,

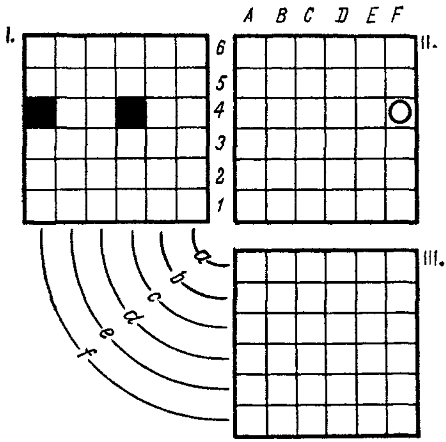


Рис. 25.

что на табло *II* загорелась лампочка в клетке F4 (на рис. 25 эта клетка отмечена кружком).

— Ну, что же, пойдем и поищем нашу колымагу, — сказала себе Илонка.

Сколько боксов придется ей осмотреть?

51. ШЕСТЬ СВАРЛИВЫХ АВТОЛЮБИТЕЛЕЙ

Жили-были в Тридесятом государстве шесть автолюбителей, все большие оригиналы. Поссорились они както раз между собой и попросили управляющего гаражом:

— Сделай милость, отведи нам боксы для машин так, чтобы нам друг с другом ни на одном этаже, ни в одном слое не оказаться, а куда слой идет — с юга ли на север, с востока ли на запад, — безразлично.

Закручинился управляющий: очень уж много в ту пору «коридоров» было сдано в аренду различным предприятиям, и табло регистрирующего прибора выглядело так, как показано на рис. 26. Почесал он в затылке, да делать нечего — согласился.

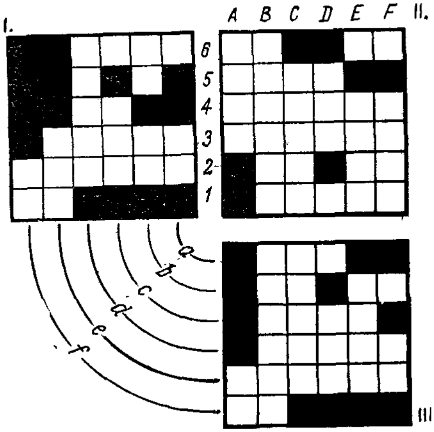


Рис. 26.

Помогите управляющему разместить 6 сварливых автолюбителей.

52. ПЕРЕСТРОЙКА КРИСТАЛЛА

В Тридесятом государстве развитие естественных наук достигло необычайно высокого уровня. Специалисты этой страны, работающие в области физики твердого тела, научились «по заказу» заменять любой ион в кристаллической решетке другим ионом (разумеется, если свойства последнего допускают такую замену). Именно о получении кристалла с заранее заданными свойствами и пойдет речь в этой задаче.

Рассмотрим модель кристаллической решетки, изображенную на рис. 27. Эту решетку необходимо перестроить так, чтобы вещество обрело новые свойства, Черные шарики — это ионы-«недотроги». Они должны оставаться на своих местах. Светлые шарики — это пустые места, или *вакансии* (в Тридесятом государстве физики предпочитают называть их ионами «абра»). Каждую вакансию может занимать ион «кадабра» (элемента, открытого физиками Тридесятого государства и аналогично по свойствам кадмию, что нашло отражение

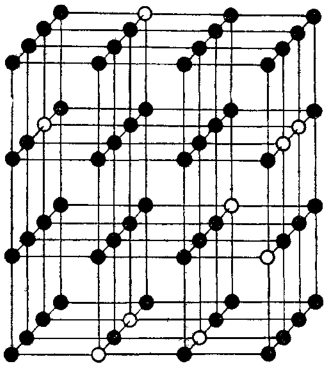


Рис. 27.

в его названии). Если ионы кадабра удастся распределить так, что в любом сечении кристалла параллельными плоскостями (горизонтальными или вертикальными, проходящими в направлении с «севера на юг» и с «запада на восток») будет содержаться лишь один ион кадабра, то кристалл обретет высокую электропроводность, а это свойство необычайно высоко ценится в электронике.

Какие ионы абра следует заменить ионами кадабра, чтобы улучшить электропроводность кристалла? (Напоминаем еще раз: ионы-«недотроги» должны оставаться на своих местах.)

53. ЕЩЕ БОЛЕЕ СОВРЕМЕННЫЙ ГАРАЖ

Мы берем на себя смелость представить читателям Лайоша Амбитора, самого дерзкого из всех реформаторов Тридесятого государства. Находясь в научной командировке по ту сторону Синего моря, Амбитор посетил Всемирную выставку, где ему особенно понравилось здание, известное под названием Атомиума (рис. 28). Как известно, здание представляло собой девять шаров, связанных ходами сообщения. Амбитор решил во что бы то ни стало возвести здание такого же типа в своей родной столице. «Тридесятиград не может и не должен ни в чем отставать от иных столиц!» — был его лозунг.

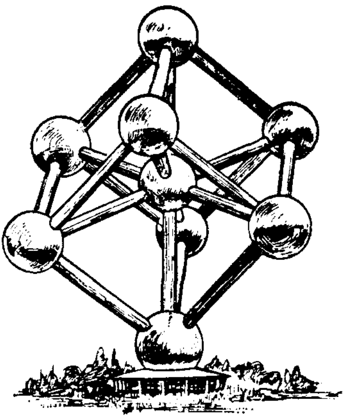


Рис. 28.

Как раз в то время возникла необходимость в капитальном ремонте гаража, сданного строителями лишь за год до описываемых событий. Как и те два гаража, о которых шла речь в задачах 45—51, гараж-новостройка имел форму куба, но был не шести-, а четырехэтажным. Амбитор решил воспользоваться удобным случаем и перестроить здание гаража наподобие Атомиума. Начальство против предложенного Амбитором плана не возражало, выделило ему необходимые средства (благо, дело происходило в конце года, и деньги, отпущенные по смете на строительство, все равно оставались неизрасходованными) и даже сумело найти для нужд «Атомиумстроя» кое-какие волшебные силы. Однако, со своей стороны, оно потребовало от Амбитора выполнения двух условий: во-первых, сохранить в прежнем виде ходы сообщения (начальство абонировало в гараже боксы для своих машин и опасалось, что если в расположении ходов произойдут какие-нибудь изменения, то для того, чтобы выбраться из гаража, придется каждый раз нанимать проводника) и, во-вторых, поскольку на реконструкцию регистрирующего автомата нельзя изыскать ни денежных средств, ни волшебных сил, сохранить его в неприкосновенном виде, чтобы он работал так же, как до перестройки гаража.

Следует признать, что Амбитор в точности исполнил предначертания высокого начальства и создал гараж, в котором система ходов сообщения была выдержана в духе лучших традиций, накопленных строителями гаражей в Тридесятом государстве. Решая предыдущие задачи, мы выяснили, что все боксы, расположенные друг под другом по вертикали, связаны между собой лифтом. В перегородках между боксами предусмотрены специальные проемы, что позволяет машинам перемещаться по горизонтальной плоскости как с севера на юг, так и с запада на восток. Таким образом, из каждого бокса можно попасть в любой соседний. (Два бокса называются соседними, если они примыкают с двух сторон к одной и той же стене или к одному и тому же межэтажному перекрытию.)

Опишите примерный вид и устройство основных узлов «атомиумоподобного» гаража, воздвигнутого стараниями Ласло Амбитора.

54. В ТРЕТИЙ РАЗ ОДНО И ТО ЖЕ

Хранение машин в атомиумоподобном гараже системы инженера Амбитора, по-видимому, породило кое-какие технические проблемы, но способ регистрации машин ничуть не изменился. Так же как и в гаражах более старой конструкции, боксы «нумеровали», используя для этого элементы трех множеств. Поскольку при реконструкции гаража все боксы остались на своем этаже и в своих слоях, идущих с севера на юг и с запада на восток, то все, что говорилось о нумерации боксов в задачах 45—51, остается в силе и для атомиумоподобного гаража.

Не известно, обрадовались ли владельцы машин новому гаражу, но в том, что он обладает несравненными преимуществами по сравнению с гаражами, имеющими форму сплошных кубов, сомневаться не приходится: соответствие между боксами и элементами трех «нумерующих» множеств выступает здесь гораздо нагляднее. В этом мы могли бы без труда убедиться, построив модель гаража, то есть соорудив некое подобие вавилонской башни или нарисовав фрагмент его ажурной конструкции на листке бумаги. То, что все обстоит именно так, нетрудно проверить, заглянув в решение задачи 52: ясно, что и кристаллическая решетка, и атомиумоподобный гараж системы Амбитора отличаются лишь названиями и размерами. (Атомиум можно рассматривать как гигантскую модель куба.) Вероятно, все и без нашей подсказки обратили внимание на то, что условия, которым должно удовлетворять размещение ионов кадабра по вакансиям (местам, занятым ионами абра) в задаче 52, ничем не отличаются от требований сварливых автолюбителей из задачи 51. Поэтому в задаче 52 речь идет не только о том, как создать превосходные кристаллы, отвечающие высоким требованиям специалистов по электронике Тридесятого государства, но и о решении некоторой задачи на установление соответствия между элементами трех множеств, хотя сами множества временно отсутствуют.

Попытаемся теперь решить ту же задачу наглядным способом. Может быть, лучше всего начать со сравнения нового метода со старым — решить при помощи наглядного метода какую-нибудь задачу, которую мы уже решили, используя наш испытанный метод сопоставления трех таблиц. Например, можно взять задачу 37, тем более, что мы уже решали ее дважды: один раз как задачу 37, другой — как задачу 39. Решим теперь эту же задачу в третий раз!

55 ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКОЙ

Решите задачу 38, используя для наглядности трехмерную решетку.

56. РЕВИЗИЯ 

В субботу утром правление производственного объединения «Торты и реторты» обсуждало вопрос о командировках сотрудников на будущую неделю. Необходимо было направить ревизоров на три предприятия, входящие в объединение и расположенные в поселках Верхний Большеград, Нижний Малоград и Плутоград. Каждый ревизор должен был выехать в один из дней первой половины будущей недели (в понедельник, вторник или среду) и обследовать состояние дел на предприятии одного из трех поселков. Провести ревизию поручили Йеромошу Сеель-Хамошу, Казмеру Киш-Киралю и Лоле Латсатхи. В любой из дней в командировку может отправиться лишь один ревизор, поскольку правление производственного объединения «Торты и реторты» испытывает острый дефицит в квалифицированных счетных работниках.

Естественно, возникает вопрос о том, в какой день кого и куда отправить. Решить его оказалось трудно. Высказанные на этот счет различные мнения сводились к следующему:

1) коллега Сеель-Хамош не желает ехать в Нижний Малоград, потому что в последний раз, когда он там был, ему пришлось обедать в заводской столовой;

2) коллега Киш-Кираль не возражает против того, чтобы отправиться с ревизией и в Нижний Малоград и в Верхний Большеград, но ему подходит любой из дней, кроме вторника, поскольку по своему опыту он знает, что по вторникам в ресторанах этих поселков весьма ограниченный выбор блюд;

3) коллега Киш-Кираль решительно отказывается от командировки в Верхний Большеград, если она придется на понедельник, потому что в прошлый раз с ним недостаточно почтительно обошелся швейцар в ресторане Верхнего Большеграда, неизменно дежурящий по понедельникам;

4) что касается Нижнего Малограда, то в этот поселок не изъявил желания ехать ни один из ревизоров, потому что в нем по понедельникам закрыты все предприятия треста ресторанов;

5) коллегу Сеель-Хамоша лучше не посылать в Верхний Большеград, поскольку он не пользуется там должным авторитетом (во время последней ревизии он оскандалился: не сумел отличить торт от реторты);

6) коллегу Сеель-Хамоша можно со спокойной совестью отправить в командировку в Плутоград, но он просит назначить ревизию, если это возможно, на любой день, кроме понедельника, поскольку у него есть особая причина, о которой он не хотел бы упоминать. делающая для него поездку в Плутоград в понедельник нежелательной.

Можно ли составить такое расписание командировок, чтобы удовлетворить все требования правления и выполнить все пожелания ревизоров?

57. СТРОГИЙ КОНТРОЛЬ

Да, вы совершенно правы: это заглавие было бы вполне уместно для предыдущей задачи. Сейчас же речь пойдет не о строжайшей ревизии, которую учинили на предприятиях производственного объединения «Торты и реторты» Сеель-Хамош, Киш-Кираль и Латсатхи, а о тщательной проверке того, насколько необходим для решения предыдущей задачи метод пространственной решетки. В предыдущем решении эта необходимость не была доказана. Мы привели лишь более или менее правдоподобные «эвристические» аргументы.

Итак, нас интересует, верно ли утверждение о том, что метод трех таблиц не позволяет решить задачу 56.

Часть IV

НЕ ВСЕ СЛЕДУЕТ СТРИЧЬ ПОД ОДНУ ГРЕБЕНКУ

58. НОВОЕ ДЕЛО СЭМА СИЛЛИ И ДЖОННИ ВУДА

Не успели обитатели городка Пиэри Поуч прийти в себя после покушения на мисс Вамп, которое произошло в местной гостинице и о котором мы рассказывали в задаче 42, как весь городок снова был взбудоражен известием о новом уголовном преступлении.

Вскоре после полуночи в местный полицейский участок с интервалом в 10 минут один за другим поступили три вызова. К сожалению, во всех трех случаях дежурная полицейская машина напрасно выезжала по адресу, указанному в переданном вместе с вызовом сообщении: везде царили спокойствие и порядок, ни о каких взломщиках никто и не слыхивал!

— Ага! — мелькнула мысль у Сэма Силли. — Должно быть, виновником переполоха стал дежурный монтер на телефонной станции! Он по рассеянности перепутал провода, и получилось три ложных вызова.

Однако прошло немного времени, и полиция задержала трех людей, подозреваемых в кражах со взломом: Джека Браунинга, Джима Грининга и Джо Оринджинга. Вскоре выяснилось, что три вызова, поступившие ночью в полицейский участок, были ошибочными лишь наполовину: сообщение о краже со взломом во всех трех случаях было правильным, а адрес — неверным. Стали известны и трое потерпевших: мистер Литтл, мистер Грейт и мистер Миддл. Вместе со своими семьями все трое давно перебрались на дачу, и их городские квартиры пустовали.

Три гангстера (Браунинг, Грининг и Оринджинг) упорно отрицали свою причастность к кражам со взломом, хотя все говорило за то, что именно они совершили преступления. Однако, для того чтобы вина их была полностью доказана, требовалось установить, чью квартиру (мистера Литтла, Грейта или Миддла) «очистил» каждый из гангстеров и когда произошла кража (в 10 минут первого, в 20 минут первого или в половине первого ночи).

Сэм Силли допросил подозреваемых, но те привели столько алиби, что все перечисленные ими «неопровержимые» факты просто не умещались в голове. Наконец, картину происшествия удалось зафиксировать в следующем виде:

1) в полицейский участок в ночь, когда были совершены кражи со взломом, никто не обращался. Тем не менее ложный вызов поступал именно в тот интервал

времени, когда где-то в другом месте действительно совершалась кража со взломом;

2) помимо трех упомянутых выше краж со взломом, других преступлений того же типа в ту ночь совершено не было;

3) квартиры мистера Литтла, Грейта и Миддла расположены так далеко одна от другой, что один и тот же бандит в течение десяти минут не в состоянии ограбить любые две из них;

4) мимо квартиры мистера Литтла в 0 часов 20 минут проходил дежурный полисмен и не заметил ничего подозрительного;

5) в 0 часов 5 минут Грининг находился в таком месте, откуда за 10 минут нельзя добраться до квартиры мистера Литтла;

6) в квартире мистера Грейта в 0 часов 15 минут по свидетельству соседей все было в полном порядке;

7) Грининг был задержан полицией в 0 часов 28 минут;

8) в 0 часов 08 минут Браунинг находился в таком месте, откуда до квартиры мистера Литтла нельзя добраться за 5 минут;

9) в 0 часов 15 минут Браунинг находился в таком месте, откуда до квартиры мистера Миддла можно добраться за 7 минут;

10) Ориндживг в 0 часов 26 минут шел по такой улице, от которой за 5 минут нельзя добраться ни до квартиры мистера Литтла, ни до квартиры мистера Миддла;

11) в 0 часов 33 минуты Браунинг находился в таком месте, куда от квартиры мистера Грейта нельзя добраться за 5 минут;

12) в 0 часов 16 минут Оринджинг находился в такой части города, откуда до квартиры мистера Грейта нельзя дойти за 5 минут;

13) в 0 часов 17 минут Грининг находился в пивной, откуда до квартиры мистера Миддла 5—6 минут ходу;

14) в полночь Оринджинга отделяло от квартиры мистера Миддла расстояние по крайней мере в четверть часа ходу.

Других данных собрать не удалось, но только что перечисленные сведения подтверждались показаниями свидетелей.

— Необходимо произвести кое-какие расчеты, Джонни, — обратился к своему помощнику Сэм Силли, — и мы выясним, кто, когда и чью квартиру ограбил!

Удастся ли Джонни Вуду выполнить задание своего шефа?

59. ВОСПОМИНАНИЯ О ФУТБОЛЬНОМ ЧЕМПИОНАТЕ

На днях нам довелось присутствовать при разговоре трех старых футбольных болельщиков. Они были великолепно осведомлены обо всем, что касалось их любимой игры. От их внимания не ускользнул даже розыгрыш «чемпионата», состоявшийся много лет назад в спортивно-тренировочном лагере, где проходили сборы футболистов лучших команд, хотя за давностью лет точные даты проведения отдельных матчей назвать не могли. Попытались по памяти восстановить результаты «микрочемпионата». Какие команды заняли первые три места, болельщики вспомнили сравнительно легко, а вот относительно распределения мест между командами-победительницами возникли разногласия.

Дело в том, что в те давние времена, когда разыгрывалось это негласное первенство, игроки довольно часто переходили из одного спортивного клуба в другой. Для удобства решили выбрать трех игроков и называть их просто A, B и C. Все сошлись на том, что в то время, когда состоялся памятный чемпионат, один игрок выступал за ФТЦ, другой — за «Уйпешти Дожа» и третий — за «Вашаш», но, как ни старались, не смогли вспомнить, кто из футболистов и за какую команду играл.

Совместными усилиями болельщикам удалось восстановить следующие подробности:

1) I болельщик: Твердо помню, что A не играл тогда за «Уйпешти Дожа»;

2) II болельщик: А я припоминаю, что B не выступал за ФТЦ;

3) III болельщик: Где играл тогда C, не имеет ни малейшего значения, поскольку я точно знаю, что первенство тогда выиграли не футболисты из «Уйпешти Дожа»;

4) I болельщик: Я утверждаю, что футболисты ФТЦ либо выиграли чемпионат, либо по крайней мере заняли второе место;

5) II болельщик: Заведомо знаю, что игроки из «Вашаша» заняли не второе место;

6) III болельщик: Может быть, переменим тему разговора? Я вдруг вспомнил, что за команду-победительницу играл либо A, либо B;

7) I болельщик: А мне помнится, что за команду, занявшую третье место, мог выступать либо A, либо C;

8) II болельщик: Но во всяком случае A не играл за ту команду, которая заняла второе место. Это уж точно!

9) III болельщик: Запишем все, что мы здесь успели наговорить. Посмотрим, что из этого следует...

Можно ли, руководствуясь восстановленными болельщиками по памяти сведениями, установить, как распределились места между командами, за которые выступали A, B и C, и в каких клубах они в то время играли?

60. НЕБОЛЬШОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС

Останется ли верной для трехмерных логических задач (в которых требуется установить соответствие между элементами трех множеств) такая теорема единственности, какую мы доказали для двумерного случая (см. задачу 25)?

61. СПОРТСМЕНЫ

Разговорились как-то раз между собой шестеро парней: Андраш, Бела, Чаба, Дьердь, Элмер и Ференц. Из разговора выяснилось, что все шестеро спортсмены: двое — футболисты, двое занимаются прыжками в высоту, один — пловец и один играет в водное поло. Занимаются они в трех спортивных клубах: двое в «Вашаш», двое в «Уйпешти Дожа» и двое в ФТЦ.

Кроме того, выяснилось следующее:

1) Бела раньше ходил на тренировки в бассейн один, а теперь к нему присоединился парень из ФТЦ;

2) члены клуба «Уйпешти Дожа» не играют в игры с мячом;

3) имя одного из спортсменов начинается с той же буквы, что и название вида спорта, которым он занимается. Поскольку «аллитерация» ему очень нравится, то он и спортивный клуб выбрал себе по тому же принципу;

4) Чаба не умеет плавать;

5) члены клуба «Вашаш» занимаются двумя различными «сухопутными» видами спорта;

6) Элмер когда-то выступал против команды, за которую играл Ференц, но затем занялся другим видом спорта;

7) Андраш и Элмер одноклубники.

Определите, каким видом спорта занимается каждый из шестерых ребят и у кого имеются «собратья» по клубу или по виду спорта.

62. КОГДА И ВОПРОС ЗАДАЧИ ПОД ВОПРОСОМ

Урок математики уже почти подошел к концу, когда учитель спросил:

— Ребята! Помнится, вы говорили мне, что очень любите логические задачи. Верно?

— Да! — ответили разом все трое: Юлишка, Пишта и Карчи.

— В прошлом году мы уже решали такие задачи, а недавно нам на глаза попалась старая газета, в которой была еще одна логическая задача.

С этими словами Пишта достал вырезку из газеты и начал читать:

1. — Встретились как-то раз в кооперативном доме отдыха пятеро пожилых крестьян и разговорились ме-

жду собой. Фамилии у них были такие: Хайду, Яс, Кун, Палоч и Секель, а имена: Андраш, Ференц, Йожеф, Лайош и Шандор (имена крестьян не обязательно идут в том же порядке, что и фамилии). В разговоре выяснилась любопытная подробность: оказалось, что родом крестьяне из Хайдушага, Ясшага, Куншага, Палочского района (Ноградского комитата[1]) и Секельфельда, причем ни один из крестьян, кроме дядюшки Фери, не родился в той части Венгрии, название которой «звучит» в его фамилии. Лишь один из стариков живет и теперь в той же деревне, где когда-то родился.

Присоединимся к их веселой компании.

2. — Посмотрим, кто лучше разбирается в вине: хайдуцкие или палочские, — пошутил дядюшка Шандор, чокаясь с дядюшкой Секелем. (Выяснилось, что разбираются одинаково: оба с удовольствием пропустили по стаканчику вина.)

3. — Ты только послушай, что творится, — обратился дядюшка Лайош к своему соседу. — Каждый музыкант свою музыку хвалит.

Его мысль как бы продолжили слова песни:

...Что тебя милей на свете,
Хайду, край наш милый...

4. Две минуты спустя дядюшка Палоч ткнул в бок дядюшку Яса:

— То один себя хвалил, а теперь двое!

И снова слова разудалой песни завершили мысль:

... Что мне Ясшаг, что мне Куншаг,
Сам себе я голова...

5. Затем заиграла музыка, и было слышно, как один из стариков сказал своему соседу, который был родом из Хайдушага:

— Если бы ты знал, какая вкусная у нас картошка! Объеденье! Для нас, коренных жителей Секельфельда, ничего нет вкуснее!

Тут Пишта замолчал и начал лихорадочно искать что-то в тексте. Не найдя того, что ему нужно, он пере-

[1] Комитат (область) — единица административного деления ВНР. — *Прим. перев.*

вернул вырезку, посмотрел, что напечатано на обратной стороне. Все напрасно!

Тогда Пишта обратился за помощью к учителю.

— Мне кажется, что я все-таки знаю, что было дальше. В конце задачи, наверное, спрашивалось, могут ли читатели назвать имя и фамилию каждого старика и указать, где он родился.

— Это и так ясно, — закричали его одноклассники. — Лучше ответь, были ли еще какие-нибудь условия.

Пишта смущенно замолчал.

— А ведь задачу можно решить и без дополнительных условий! Нужно лишь правильно истолковать то, что уже известно! — заметил учитель.

I. — Я думаю, — сказал Пишта, — что пели втроем дядюшка Палоч вместе с теми, кто родом из Ясшага и Хайдушага.

II. — А по-моему, все происходило не так, — возразила Юлишка. — Мне кажется, что уроженец Куншага, дядюшка Андраш и дядюшка Йожи молчали.

III. — Я думаю, что вы оба ошибаетесь, — заметил Карчи. — Никто не пел, просто сначала заговорил тот из крестьян, кто родом из Секельфельда, а потом дядюшка Андраш.

— Нечего сказать, здорово же вы запутали конец задачи, — вмешался учитель. — Но поскольку мы так долго обсуждали ее, то я попрошу вас ответить на следующий вопрос.

Если задача все же допускает решение, то чье толкование условий 3 и 4 лучше: Пишты, Юлишки или Карчи?

63. ЕЩЕ ОДИН ВОПРОС К ЗАДАЧЕ, В КОТОРОЙ И САМ ВОПРОС ПОД ВОПРОСОМ

Когда задача 62 была опубликована в венгерском журнале «Жизнь и наука», то выяснилось, что некоторые читатели понимают условие 4 не как утверждение, согласно которому кто-то из двух — либо дядюшка Палоч, либо дядюшка Яс — родом из Ясшага, а его сосед родом из Куншага, а как противоположное утверждение (ни Палоч, ни Яс не происходят ни из Ясшага, ни из Куншага).

Разумеется, и при таком толковании условия 4 текст задачи не становится намного яснее. Однако мы отнюдь не собираемся вступать в спор о том, чье толкование более правильно. Нас гораздо больше интересует другое: что произойдет с решением задачи, если мы «согласимся» с двузначным толкованием условия (то есть скажем, что те условия, которые приведены в газетной вырезке, не позволяют придать точный смысл «песенной» части условия 4). Такой подход к решению задачи 62 возможен. Не исключено, что именно последнее истолкование имеет смысл.

Итак, что произойдет с решением задачи 62, если условие 4 понимать так, как его поняли некоторые читатели журнала «Жизнь и наука»?

64. В ПОЕЗДЕ

В одном купе оказалось шесть попутчиков: Фельди, Хайду, Ковач, Шомодьи, Сабо и Ваш. Они разговорились о том, насколько «обманчивы» у некоторых из них фамилии [1].

1. Профессия Фельди далека от сельского хозяйства, Ковач — не кузнец, Сабо — не портной, Ваш — не литейщик.

Столь же превратное представление фамилии дают и о месте, где человек родился (а в некоторых случаях — живет и поныне).

2. Фельди не живет в сельской местности, как, впрочем, и все остальные пассажиры, кроме одного.

3. Хайду не живет в комитате Хайду, Шомодьи — в Шомоди, Ваш — в Ваше.

Однако среди профессий, которыми обладали пассажиры, нашлись и хлебороб, и кузнец, и литейщик. Нашлись жители Хайду, Шомоди, Ваша. Нашелся среди

[1] На венгерском языке фамилии некоторых из попутчиков по своему звучанию схожи с названиями профессий: Фельди — землепашец (хлебороб), Ковач — кузнец, Сабо — портной, Ваш — литейщик. — *Прим. перев.*

пассажиров и сельский житель. Нашлись среди пассажиров и земляки, живущие в одном комитате.

В ходе разговора выяснилось следующее.

4. Земледелец известен в Хайду скорее как шахматист.

5. Один из пассажиров по профессии учитель. Его фамилия звучит так же, как комитат, в котором родился портной.

6. Другой пассажир по профессии литейщик. Его фамилия звучит так же, как профессия пассажира по фамилии Сабо.

7. Деревня, в которой родился Сабо, расположена на территории комитата, название которого звучит так же, как фамилия земледельца.

8. Трое пассажиров — Ковач, Шомодьи и Фельди — могут побывать друг у друга в гостях, причем никому из них не придется для этого переправляться через Дунай [1] (разумеется, они избирают кратчайший маршрут).

9. Шомодьи родился в комитате, название которого совпадает с названием комитата, в котором в настоящее время живет учитель.

Весь дальнейший разговор пассажиров мы слышали краем уха и не можем сказать, кто из них сделал следующие замечания.

10. — Я с юных лет изучал столярное дело и продолжаю совершенствоваться в нем и поныне.

11. — В Баранье в эту пору — самая жара.

12. — В Чонграде тоже достаточно тепло.

Попробуйте установить профессии всех шести пассажиров, а также где родился каждый из них.

65. ВОСЕМЬ ШКОЛЬНИКОВ

Восемь школьников — Анна, Фери, Дьюси, Илонка, Йошка, Марика и Шаньи учатся в одной будапештской гимназии. Как-то раз они поведали о себе:

1. — Среди нас нет двух мальчиков, которые бы ходили в один и тот же класс.

---

[1] Комитаты Ваш, Баранья и Шомодь расположены к западу от Дуная, а Хайду-Бихар и Чонград — к востоку. — *Прим. перев.*

2. — Среди наших девочек есть ученицы первого, второго, третьего и четвертого классов.

3. — Среди нас нет ни одного второгодника.

Тем не менее никто не спешил рассказать о своей последней оценке по математике.

Все, что удалось выяснить на эту «скользкую тему», сводится к утверждению:

4. Сумма оценок по математике, полученных четырьмя мальчиками, равна сумме оценок по математике, полученных четырьмя девочками.

Осторожными расспросами удалось также выведать, что

5. среди восьми оценок, полученных ребятами по математике, никакие три не одинаковы.

6. Фери получил более высокую оценку, чем Марика, которая учится в том же классе.

7. Мальчик из IV класса время от времени помогает делать уроки девочке из IV класса, получившей на два балла меньше, чем он, причем обычно они остаются для этого в школе. Мальчик живет в районе, номер которого на 6 меньше, чем номер района, в котором живет его одноклассница.

8. Двое «второклашек» получили одинаковые оценки.

9. Анна и Дьюси получили по математике оценки, которые на 3 балла выше, чем оценки Марики и Шаньи.

10. Илонка поступила в школу раньше, чем Анна (и учится поэтому в более «взрослом» классе), а оценка, полученная ею по математике, хуже, чем у Марики.

Поскольку выше мы уже несколько раз упоминали о том, где, в каких районах живут ребята, вам, вероятно, будет интересно узнать об этом более подробно. Вот какими сведениями мы располагаем:

11. Все ребята живут в Будапеште, причем все — в разных районах.

12. Все номера районов, где живут ребята, меньше 9.

13. Девочка, живущая в V районе, учится в том же классе, что и мальчик, живущий в VII районе.

14. Девочка, живущая в VI районе, на три класса младше Дьюси.

15. Номер района, в котором живет Кати, на 7 больше, чем номер района, в котором живет Илонка.

16. Номер района, в котором живет Фери, на 4 больше, чем номер района, в котором живет Йошка.

Пользуясь приведенными данными, выясните, в каком классе учится каждый из восьми школьников, в каком районе Будапешта он живет и какую оценку получил по математике[1].

66. ПРОГНОЗ СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Дело происходило еще до появления «тото». Во время обсуждения футбольного матча речь зашла о начавшихся тогда в спортивном бассейне международных соревнованиях по плаванию. Особенно интересным обещал быть заплыв на 100 м вольным стилем. Собрались сильнейшие спортсмены со всех концов света. Разумеется, каждый из болельщиков располагал «достоверными» сведениями, полученными из «надежных источников».

Один из знатоков сказал:

— По-моему, места распределятся так: первое место займет A, второе — B, третье — C, четвертое — D, пятое — E, шестое — F и седьмое — G.

Подошедший в этот момент другой болельщик возразил:

1. — Я только что с соревнований. В заплыве на 100 м вольным стилем действительно участвовали семь спортсменов, но во всем остальном вы ошиблись. И распределение мест предсказано вами неверно, и ближайших соседей каждого спортсмена вы указали неправильно. Более того, даже если взять не ближайших, а вторых соседей, то и они угаданы неверно.

2. — Кроме того, скажу вам по секрету: чтобы предсказанное вами распределение мест совпало с истинным, «вперед» нужно передвинуть больше участников заплыва, чем «назад».

Достаточно ли полученных сведений для того, чтобы восстановить истинное распределение мест среди участников заплыва? (Все спортсмены показали различное время, поэтому никакие два спортсмена не заняли одно и то же место.)

[1] В начальных классах венгерских гимназий принята пятибалльная система оценок.

(Ближайшими соседями называются спортсмены, занявшие места, номера которых отличаются на 1. Вторыми соседями называются спортсмены, занявшие места, номера которых отличаются на 2.)

67. ЕЩЕ ОДИН ПРОГНОЗ СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предыдущей задаче мы получили кое-какое представление об основном принципе игры, состоящей в угадывании результатов спортивных состязаний и получившей широкую известность под названием «тото». Теперь мы хотели бы продолжить начатое нами изучение этой популярной игры. Проще всего рассмотреть футбольное первенство, в котором участвуют семь команд — столько же, сколько пловцов участвовало в международных соревнованиях в предыдущей задаче. (Команды мы обозначили теми же буквами, что и участников заплыва в предыдущей задаче.) По чьим-нибудь «абсолютно надежным» сведениям места среди участников первенства должны распределиться так: на первом месте A, на втором B, на третьем C, на четвертом D, на пятом E, на шестом F и на седьмом G.

Воспользуемся теперь дополнительными сведениями, которые сообщил человек, знающий, чем в действительности закончился розыгрыш первенства:

— Не угадали! Всякий раз, когда, по-вашему, одна команда опережает другую на два места, в действительности эта команда отстает от другой на два места.

Достаточно ли этих сведений для того, чтобы восстановить истинное распределение мест среди команд, участвовавших в розыгрыше первенства?

68. ДВЕ ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ «ТОТО»

Что произойдет с решением задачи, если

а) в розыгрыше футбольного первенства примет участие не 7, а любое другое число команд;

б) число команд остается по-прежнему равным 7, но сообщение бывалого человека гласит: «Всякий раз, когда, по-вашему, одна команда опережает другую на два места, в действительности эта команда отстает от другой *по крайней мере* на два места»?

69. ДВЕ СТАРЫХ ЗНАКОМЫХ

На рис. 29, *а* и *б* мы видим две уже встречавшиеся нам ранее таблицы. Первую из них мы использовали

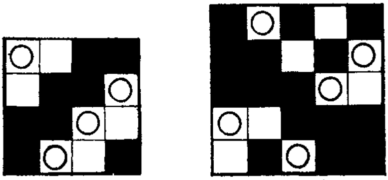


Рис. 29. *а* *б*

при решении задачи 12а (и воспроизвели «под псевдонимом» таблицы II в задаче 37), вторую — при решении задачи 12б.

Обе таблицы соответствуют задачам, допускающим два решения. На каждой из них изображено по одному решению. Не заглядывая в решения задач 12а и 12б, определите, каким образом можно быстрее всего нарисовать вторые решения?

70. ОБОБЩЕНИЕ?

Справедливо ли следующее утверждение, служащее обобщением предыдущей задачи:

«Если в таблице, соответствующей некоторой двумерной задаче, каждая строка и каждый столбец содержат ровно две свободные клетки, то эта задача допускает два решения»?

71. СНОВА ЛАДЬИ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Рассмотрим шахматную доску не обязательно размером 8×8, а произвольного размера $n \times n$. Клетки доски мы не будем, как обычно, раскрашивать через одну в черный и белый цвета (поскольку «шахматная» сторона задачи для нас несущественна). В каждой строке и в каждом столбце «заклеим» все клетки, кроме двух свободных. «Заклеенные» клетки находятся под строгим запретом. На оставшихся $2n$ свободных клетках мы можем расставить n ладей так, что каждая ладья будет угрожать какой-то другой.

Докажите, что существует всего 2^l способов такой расстановки ладей, где l — некоторое натуральное число (то есть одно из чисел 1, 2, 3, ...).

72. ЗАДАЧА О ЗАПРЕТНОМ УГЛЕ

На таблице, соответствующей некоторой двумерной задаче, один угол полностью заштрихован (иначе говоря, все клетки в этом углу находятся под запретом).

Рис. 30.

Размеры заштрихованного участка таковы, что если мы продолжим его границы до пересечения с наружной рамкой таблицы, то справа от «запретной зоны» и над ней образуются два квадрата (рис. 30). Есть ли внутри квадратов сколько-нибудь запрещенных клеток и как они расположены, заранее не известно.

Помимо участка в углу, сплошь заполненного запрещенными клетками, и двух квадратов на таблице, имеется еще один прямоугольный участок (отмеченный на рис. 30 вопросительным знаком).

Будут ли влиять на решение задачи клетки, принадлежащие прямоугольному участку?

73. ЕЩЕ ОДНА ЗАДАЧА О ЗАПРЕТНОМ УГЛЕ

На таблице, соответствующей некоторой двумерной логической задаче, один угол полностью заштрихован (иначе говоря, все клетки в этом углу находятся под запретом). Остальные клетки таблицы свободны (рис. 31), то есть на них можно расставлять кружки.

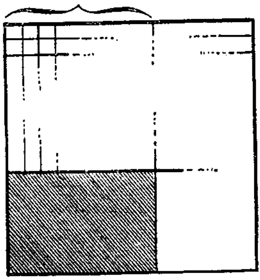


Рис. 31.

При каких размерах «запретной зоны» задача имеет решение? (Под размерами запретной зоны мы понимаем число содержащихся в ней «элементарных» клеток — квадратов 1×1.)

74. БЕЛАЯ СНАРУЖИ, ЧЕРНАЯ ВНУТРИ

Пространственная решетка некоторой трехмерной логической задачи устроена так, что все ее узлы («шарики»), лежащие на поверхности, оказались белыми (свободными), а все внутренние узлы — черными (запрещенными).

Какие размеры должна иметь эта решетка для того, чтобы задача допускала решение?

(Размерами пространственной решетки мы называем число входящих в нее узлов — шариков, то есть произведение числа элементов тех трех множеств, которые поставлены в соответствие длине, ширине и высоте решетки.)

75. ИГРА В ПЕРЕСТАНОВКИ

Читатели, несомненно, хорошо знают головоломку, известную под названием «игра в 15» (рис. 32). Передвигая по одной квадратные шашки с числами от 1 до

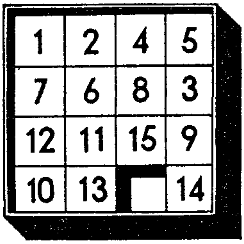


Рис. 32.

15 на верхних гранях, требуется расположить все цифры в порядке возрастания. Вынимать шашки из коробочки не разрешается.

В этой задаче речь пойдет о головоломке, требующей едва ли меньшего терпения.

Имеются 36 кубиков одного и того же размера. Некоторые из кубиков окрашены в темный цвет, остальные — белые. Из кубиков сложили квадрат, в пределах которого и должны перемещаться квадратные шашки — верхние грани кубиков. Однако правила перестановки шашек в этой игре отличаются от правил игры в 15. Выбирают какой-нибудь столбик, сложенный из кубиков, и одной рукой сдавливают его с противоположных концов. Другой рукой сдавливают с противоположных концов другой выбранный столбик, после чего меняют оба столбика местами (рис. 33, *а* и *б*). Аналогичным образом можно переставлять и «строки». Переставлять кубики любым другим способом запрещается. (Как строки, так и столбцы разрешается перемещать «параллельно самим себе». Нельзя изменять их «ориентацию» на 180°.)

Игра заключается в том, чтобы, переставляя целиком строки или столбцы, расположить темные кубики в заранее заданном порядке.

Ниже мы приводим 7 задач, связанных с нашей головоломкой. Решать эти задачи было бы гораздо удобнее не на бумаге, а «в натуре», для чего достаточно запастись любым набором из 36 кубиков, раскрасив их нужным образом.

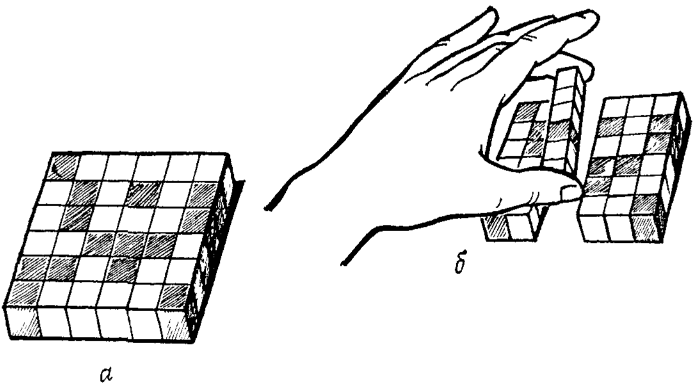


Рис. 33.

а. Как из человечка, изображенного на рис. 34, *а*, сложить кошку, изображенную на рис. 34, *б*?

б. *Можно ли так переставить столбцы на мозаике* с изображением человечка (рис. 34, *а*), чтобы получился павлин (рис. 34, *в*)?

в. Можно ли, не нарушая правил игры, перевести друг в друга колье (рис. 34, *г*), летящего гуся (рис. 34, *д*), корову (рис. 34, *е*) и лестницу (рис. 34, *ж*)?

г. Можно ли, не нарушая правил игры, превратить лилию (рис. 34, *з*) в лютик, изображенный на рис. 34, *и*?

д. Можно ли, не нарушая правил игры, превратить лилию и лютик в лестницу (рис. 34, *ж*)?

е. Можно ли превратить лилию и лютик в чертополох (рис. 34, *к*), не нарушая при этом правил игры?

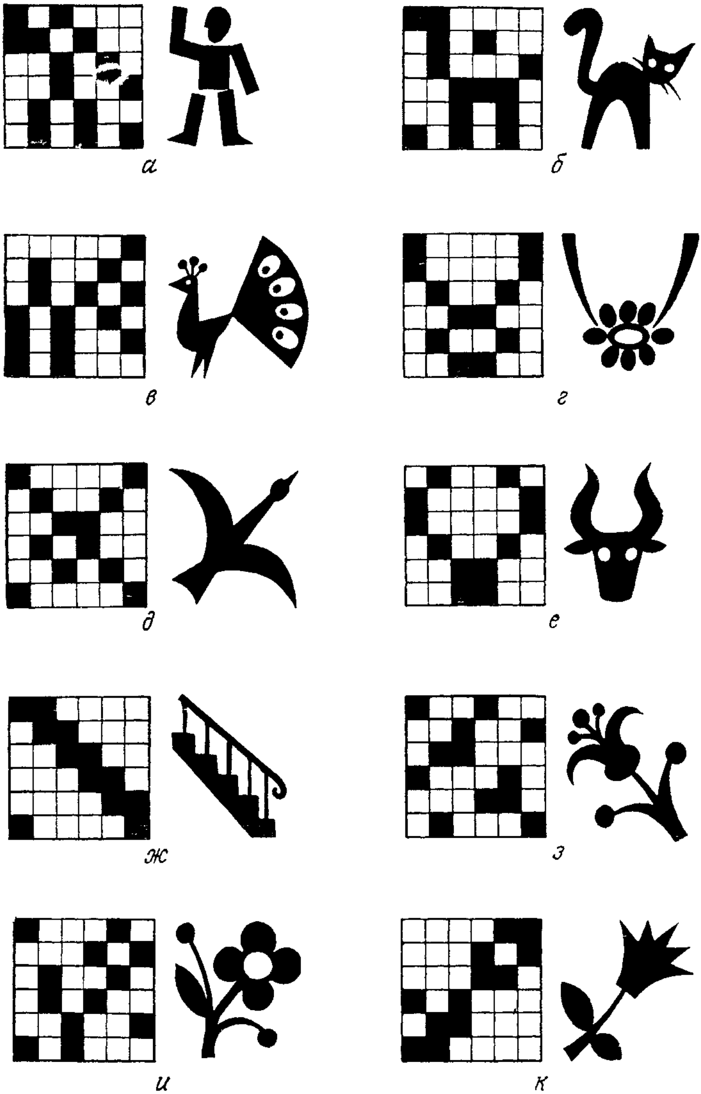


Рис. 34.

ж. Пусть кубики раскрашены так, что в каждой строке и каждом столбце квадрата 6×6 имеются ровно 2 темных кубика.

Сколько существует различных вариантов расположения кубиков, не переходящих друг в друга при перестановках столбцов или строк?

76. ТРЕТИЙ ПРОГНОЗ СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Так же как и в задаче 66, дело происходило еще до появления «тото».

Вновь подошедший болельщик сказал:

— Я разузнал, как закончилась эстафета.

— Говори, слушаем тебя, — раздался чей-то голос.

— Так просто не скажу, — пошутил вновь подошедший. — Попробуйте отгадать вдвоем.

— Я думаю, что на финише места распределились так: *ABCDE*, — сказал один из болельщиков.

— А я считаю иначе: *BDEAC*, — возразил другой.

— Ладно уж, так и быть, открою секрет. Первый из вас «попал в цель» трижды, второй — дважды: первый правильно угадал, какие места заняли 3 команды, а второй точно предсказал места, которые заняли 2 команды.

Можно ли по этому разговору восстановить истинное распределение мест в эстафете?

(Известно, что все команды набрали различное число очков.)

77. ЕЩЕ ОДНА ЗАДАЧА НА ТУ ЖЕ ТЕМУ

Что произойдет с решением предыдущей задачи, если прогнозы болельщиков имели следующий вид:

I

Места	1	2	3	4	5	6	7	Число правильно угаданных мест
I болельщик	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	5
II болельщик	*B*	*F*	*G*	*D*	*E*	*A*	*C*	4

II

Места	1	2	3	4	5	Число правильно угаданных мест
I болельщик	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	3
II болельщик	*B*	*D*	*E*	*C*	*A*	2

III

Места	1	2	3	4	5	6	Число правильно угаданных мест
I болельщик	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	3
II болельщик	*E*	*D*	*B*	*C*	*F*	*A*	3

IV

Места	1	2	3	4	5	6	Число правильно угаданных мест
I болельщик	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	3
II болельщик	*D*	*C*	*E*	*A*	*F*	*B*	3

V

Места	1	2	3	4	5	6	Число правильно угаданных мест
I болельщик	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	3
II болельщик	*B*	*D*	*E*	*A*	*F*	*C*	3
III болельщик	*D*	*F*	*C*	*B*	*A*	*E*	1

78. ЗНАНИЕ ЯЗЫКОВ

На берегу Балатона встретились пятеро молодых людей: венгр, поляк, финн, швед и немец.

1. Выяснилось довольно любопытное обстоятельство: каждый из них знал один или более иностранных языков, причем лишь те, которые были родными для кого-нибудь из членов компании.

2. Сначала общение между молодыми людьми было несколько затруднено, поскольку выяснилось, что нет языка, который бы знали все пятеро.

3. Известно, что каждый из пятерки может разговаривать с любым другим членом компании на каком-нибудь языке, причем

4. в качестве «общего языка» выступают по очереди все пять родных языков членов компании.

5. Относительно знания иностранных языков известно, что каждый из пяти молодых людей знает в среднем по 2 языка.

6. Венгр и поляк знают по три иностранных языка.

7. Когда швед отправляется купаться, то четверо оставшихся на берегу тотчас же «находят общий язык».

8. Аналогичная ситуация возникает всякий раз, когда швед выходит на берег, а финн отправляется кататься на лодке.

9. Один из тех двух членов компании, которые разговаривают между собой по-шведски, вскоре должен вернуться домой.

10. Финский и польский языки знали всего двое членов компании.

11. Поляк и финн могли разговаривать друг с другом на двух языках, но немец не мог принимать участия в их беседах.

12. Венгр и швед могли говорить друг с другом лишь на одном «общем» языке.

Попытайтесь установить, какими иностранными языками владел каждый из членов пятерки.

79. ДРУЖЕСКИЙ УЖИН

Три молодые супружеские пары собрались как-то раз на дружеский ужин. Завязалась беседа. Настроение у всех было превосходное, дамы — явно молоды, поэтому вопросы о возрасте присутствующих не исключались.

Были высказаны следующие утверждения.

1. Андраш: Все трое мужей на 5 лет старше своих жен.

2. Ева: Не стану скрывать: я самая старшая из всех жен.

3. Имре: Нам с Юлишкой вместе 52 года.

4. Ласло: Всем шестерым вместе 151 год.

5. Юлишка: Нам с Ласло вместе 48 лет.

К сожалению, Марта так и не смогла принять участие в застольной беседе, поскольку ей пришлось исполнять хлопотные обязанности хозяйки дома и она то и дело отлучалась на кухню.

Тем не менее мы можем определить не только возраст всех жен, но и всех мужей. (Разумеется, если мы не станем интересоваться, сколько дней прожил каждый из шести друзей на свете, а ограничим свое любопытство лишь числом полных лет, прошедших со дня рождения каждого до того дня, когда Марта и ее муж пригласили друзей на ужин.) Более того, мы можем даже выяснить, кто на ком женат.

Как это сделать?

80. ПЯТЬ ПАЛАТОК В ОДНОМ РЯДУ

В одном из кемпингов для иностранцев на берегу Балатона выстроились в ряд пять палаток пяти различных цветов. Обитатели палаток прибыли из пяти разных стран, и их вкусы расходятся решительно во всем. Каждый из них взял с собой любимое животное, причем у всех пяти разные животные. Каждый отдает предпочтение одному из пяти напитков, не любимому более никем другим. Все пятеро — заядлые курильщики, но то, что курит один, ни за какие блага не станет курить другой.

1. В красной палатке живет француз.

2. У англичанина, согласно британским традициям, любимое животное — собака: великолепный бульдог.

3. Обитатель зеленой палатки пьет кофе.

4. Словак пьет чай и поддерживает дружеские отношения с обитателем синей палатки.

5. Зеленая палатка расположена правее белой.

6. У того, кто курит сигареты «Кент», живет белая мышь.

7. Обитатель серой палатки имеет обыкновение выкуривать сигару, сидя у входа в палатку.

8. У обитателя средней палатки недавно прокисло молоко.

9. Немец живет слева от первой палатки.

10. Иностранец, только что набивший грубку, живет слева от того, кто привез с собой кошку.

11. Слева от любителя сигар расположился владелец попугая.

12. — Да, я согласен, что курить сигареты «Лорд» довольно накладно, но зато я пью лишь газированную воду, — заявил один из обитателей кемпинга.

13. Если послушать поляка, то нет ничего лучше сигарет «Ароматные».

14. Немец живет по соседству с синей палаткой.

В приведенных высказываниях содержатся всевозможные сведения о любимых напитках, любимых животных и о том, кто и что предпочитает курить.

Определите национальность того, кто всем домашним животным предпочитает обезьяну, и установите, в какой из палаток слева от его палатки живет любитель лимонада.

Обращаем внимание читателя на заключение, приведенное на стр. 344.

Часть V

БЕЗ ШАБЛОНА

Все предыдущие задачи по существу принадлежат к одному и тому же типу — это задачи на установление соответствия между элементами тех или иных множеств. Такая однородность их внутренней структуры позволила нам рассматривать их в строго определенной последовательности, переходя от более простых к сложным.

Однако логические задачи неисчерпаемо разнообразны и пестры как по форме, так и по содержанию.

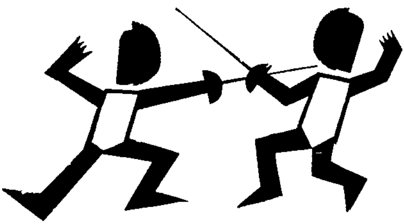
В качестве примеров, иллюстрирующих последнее утверждение, мы и приводим последние пять задач.

81. СОРЕВНОВАНИЯ ПО ФЕХТОВАНИЮ

На одной из больших спартакиад состоялись грандиозные открытые соревнования по фехтованию. Любой фехтовальщик мог вызвать на поединок любого другого. На каждого участника соревнований организаторы олимпиады заводили специальный лист, на который заносили фамилии тех, над кем данному спортсмену удавалось одерживать победу. По замыслу устроителей, судьи после окончания соревнований должны будут подсчитать фамилии на каждом листе и объявить победителем того фехтовальщика, на чьем листе фамилий окажется больше, чем на других. (Ничьих в фехтовании не бывает.)

Состоялся большой многодневный турнир (ввиду большого количества участников поединки пришлось проводить под открытым небом). По окончании турнира приступили к подсчету фамилий на листах, чтобы определить, как распределились места среди участников турнира. Едва судейская коллегия успела определить спортсменов, занявших первые восемь мест, как внезапный порыв ветра поднял все остальные листы и разбросал их в беспорядке по всему стадиону. На столе перед судьями остались лишь листы восьми победителей турнира.

— Скорее! Нельзя терять ни секунды! — раздался крик, и члены судейской коллегии, торопливо отложив в сторону чудом сохранившиеся листы, бросились собирать остальные. Вскоре они вернулись, неся целые



охапки протоколов, но разве можно быть уверенными в том, что удалось собрать все листы. Вот если бы сохранился хотя бы список всех участников турнира! Но, к сожалению, его унесло порывом ветра, и он бесследно исчез.

— Что же делать? Мы же не знаем, ни сколько спортсменов принимало участие в соревнованиях, ни исходов поединков? — в отчаянии размышляли судьи.

И тут одному из них пришла в голову блестящая мысль.

— Нужно перебрать один за другим листы всех восьми победителей и прочитать все значащиеся в них фамилии, — предложил он. — Ведь эти-то листы сохранились?

После лихорадочных поисков выяснилось, что листы всех спортсменов, чьи имена оказались вписанными в листы восьми победителей, имеются среди собранных.

По этим листам тот судья, которому принадлежала спасительная мысль, сумел восстановить распределение мест среди остальных участников соревнований.

Как он это сделал?

82. ТРИ СЫНА

На математическом конгрессе был перерыв между заседаниями. Когда один из участников конгресса спросил у другого, сколько у того детей и каков их возраст, тот ответил:

— У меня три сына. По счастливой случайности у всех трех сегодня день рождения. Если перемножить число лет, исполнившихся каждому, то произведение возрастов будет равно 36. Если сложить те же три числа, то получится число, которое сегодня стоит на календаре.

Немного поразмыслив, второй математик заметил:

— Приведенных вами данных недостаточно для того, чтобы определить возраст ваших детей

— Вы совершенно правы, коллега, — ответил первый математик — Я забыл сказать, что когда родился младший сын, то два старших отправились сообщить приятную новость бабушке и дедушке, которые живут на другом конце города.

— Благодарю вас! Вот теперь я могу найти возраст каждого из ваших сыновей.

Попробуем и мы узнать, сколько лет исполнилось каждому из сыновей математика и какое число стояло на календаре в день разговора.

83. ФУТБОЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Янчи — страстный футбольный болельщик. Он наизусть помнит результаты всех матчей за последние несколько лет и полагает, будто великолепно разбирается во всем, что имеет хоть какое-нибудь отношение к футболу. Недавно ему довелось быть в одной компании, где он вздумал похвастаться своими познаниями и, как оказалось, на свою же голову. Не прошло и нескольких дней, как он получил от одного из своих слушателей письмо следующего содержания:

«Я с радостью услышал, что Вы великолепно разбираетесь в футболе и храните в своей памяти результаты всех матчей. Недавно я тщетно пытался припомнить результаты четырех турниров, сыгранных прошлым летом. Мне удалось лишь выяснить, что после того, как каждая из четырех команд провела по одной встрече с тремя остальными, турнирная таблица приняла следующий вид:

1. Кишкункукутьин	*	*	*	*	6 : 1
2. Папучпирипоч	*	*	*	*	2 : 4
3. ТР (Плутоград)	*	*	*	*	3 : 3
4. Точприборы	*	2	*	*	1 : *

Разумеется, таблица оказалась несколько пустоватой. Те числа, которые мне не удалось припомнить, я обозначил звездочкой. Думаю, что для такого знатока, как Вы, не составит труда восстановить все недостающие данные и сообщить мне исходы всех шести матчей. С нетерпением жду Вашего ответа!»

Янчи был в полной растерянности: никогда раньше ему не приходилось слышать ни о таком турнире, ни о таких командах! Правда, порывшись в нашей книге, он сумел кое-что выяснить: Янчи догадался, что «Точприборы» — это футбольная команда фирмы «Точные приборы», о которой рассказывалось в задаче 56, а ТР (Плутоград) — это команда производственного объединения «Торты и реторты» (см. задачу 61). Но этих данных было явно недостаточно для того, чтобы восстановить всю турнирную таблицу.

Он чуть было не впал в отчаяние, как вдруг его осенила счастливая мысль:

— Да ведь я могу попытаться восстановить результаты матчей, пользуясь лишь теми данными, которые приведены в таблице!

Янош знал, что в первых трех столбцах таблицы отмечают число побед, ничьих и поражений, четвертый столбец отводят числу очков, набранных в турнире командой, а в последнем, пятом, указывают соотношение забитых и пропущенных голов. К сожалению, таблица была в основном заполнена звездочками. «Значащих» данных в ней была самая малость! Удастся ли извлечь из них необходимые сведения?

— Другого выхода нет! Хоть данных и немного, только по ним я могу надеяться восстановить исход всех шести матчей, — решил он наконец.

Удалось ли ему выполнить свое намерение?

Для сведения тех читателей, которым не доводилось бывать ни на одном футбольном матче, сообщаем, что за выигранную встречу команда получает 2 очка, за встречу, сыгранную вничью, — очко и за проигранную встречу — 0 очков. Команда, набравшая большее число очков, занимает более высокое место, чем команда, набравшая меньшее число очков. Если две команды набрали равное количество очков, то более высокое место занимает та из них, у которой лучше соотношение забитых и пропущенных голов.

84. ЕЩЕ ОДНА ФУТБОЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Фери, Дьюси, Лаци и Шаньи играли на улице в футбол, как вдруг неудачно посланный мяч попал в окно. От мощного удара стекла разлетелись на мелкие осколки.

Разумеется, игра тотчас же прекратилась, а ребята пустились наутек.

Осторожные расспросы позволили выяснить следующее (приводим «показания» виновников происшествия):

Фери: 1. В окно попал не я. 2. Это Шаньи предложил играть в футбол на улице. 3. Лаци не виноват в том, что разбили окно.

Дьюси: 4. Мячом в окно попал не я. 5. Это сделал Лаци. 6. Я умею играть в футбол лучше, чем Шаньи.

Лаци: 7. Последний удар по мячу нанес не я. 8. Если бы я знал, чем все это кончится, ни за что не стал бы играть в футбол с ребятами. 9. Фери не виноват.

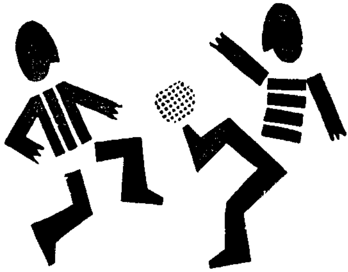
Шаньи: 10. Окно разбил не я. 11. Это сделал Лаци. 12. Когда я пришел, игра была в полном разгаре.

Нетрудно видеть, что ребята говорили не только чистую правду. Выяснилось, что каждый из ребят дал два правильных и одно ложное показание.

Кто из ребят разбил мячом окно?

85. АНКЕТНЫЕ ДАННЫЕ

Янош Ковач — один из основных игроков команды «Точприборы». Широкую известность он приобрел, выступив с протестом против чрезмерно суровых требований, предъявляемых к игрокам руководством команды. В частности, каждый игрок «Точприборов» должен был ежегодно заполнять анкету с множеством вопросов, относящихся к различным подробностям его биографии. За выполнением этого пункта руководство команды следило особенно строго.



Друзья Яноша, решив внести некоторое разнообразие в столь скучное дело, как заполнение анкеты, совместными усилиями придумали забавную головоломку. Вместо того чтобы заполнять анкету, теперь Яношу Ковачу нужно было решать числовой «кроссворд» (что несравненно приятнее).

П о г о р и з о н т а л и: *а*. Дата рождения (записать арабскими цифрами год, порядковый номер месяца и день рождения). *ж*. Возраст вашего дедушки N лет назад (когда он был еще жив), где N — число, стоящее под буквой *з* по горизонтали. *з*. Сколько лет вы выступаете за команду «Точприборы»? *и*. Число лет, которое

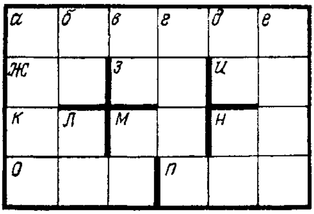


Рис. 35.

исполнится вам через неделю. *к*. Возраст вашего отца. Обе цифры этого числа различны. Одна из них указывает возраст вашего младшего, а другая — возраст вашего старшего сына. *м*. Сколько вам было лет в ту пору, когда ваш старший сын был вдвое, а младший втрое младше, чем теперь? *н*. Сколько вам было лет, когда вы начали играть за команду «Точприборы»? *о*. Число, которое читается одинаково в обе стороны: столько лет исполнилось бы сейчас вашему дедушке. *п*. Сумма чисел, стоящих под буквами *ж*, *з*, *к* и *о* по горизонтали, записанная в обратном порядке: от конца к началу.

По вертикали: *а.* Год, в котором вы женились. *б.* Номер дома, по Точной улице, в котором вы живете. *в.* Ваш возраст в прошлом году, когда вам в последний раз пришлось заполнять анкету. *г.* Произведение чисел, стоящих под буквой *о* по горизонтали и под буквой *л* по вертикали. *д.* Число, которое на 7 меньше числа, стоящего под буквой *л* по вертикали. *е.* Произведение чисел, стоящих под буквами *н* и *о* по горизонтали. *л.* Число, образованное двумя последними цифрами числа, стоящего под буквой *г* по вертикали. *м.* Сколько вам было лет, когда вы поступили в институт? *н.* Возраст, начиная с которого вы играете за вратаря в команде «Точприборы».

I. В каком году Янош Ковач заполнял эту не совсем обычную анкету?

II. Назовите точную дату рождения Яноша Ковача.

III. Укажите номер дома по Точной улице, в котором живет Янош Ковач.

IV. Сколько лет отцу Яноша Ковача?

Последние пять задач должны были дать читателю хотя бы поверхностное представление о том, сколь обширно и разнообразно царство логических задач. Надеемся, что нам удалось убедить читателя хотя бы в одном: по этому царству стоит прогуляться еще не раз и совершить не одну экскурсию. Однако по этим маршрутам читателя поведут уже другие книги. К теме нашей книги они имеют лишь косвенное отношение и приведены лишь как примеры тех живописных ландшафтов, которые остались в стороне от избранного нами маршрута.

РЕШЕНИЯ

Часть I

1. ЕВОЧКА И РАЗНОЦВЕТНЫЕ ИГРУШКИ[1]

I решение. Коробочка нейтрального цвета, о которой говорится в условии 3, не может быть черной, поскольку по условию 4 в черной коробочке лежат шарики холодных тонов и, следовательно, не может находиться красный шарик. Таким образом, в белой коробочке должны лежать *один красный и один зеленый шарик.*

По условию 4 в черной коробочке могут находиться либо два зеленых, либо два синих шарика, либо по одному зеленому и одному синему шарику. Но один зеленый шарик уже находится в белой коробочке, а по условию 5 в какой-то из коробочек вместе с белым должен лежать один синий шарик. Следовательно, в черной коробочке могут лежать лишь *один синий и один зеленый шарик.*

Какого цвета может быть коробочка, о которой говорится в условии 5? Ни белой, ни черной она уже быть не может. Из условия 2 следует, что эта коробочка не красная, а из условия 6 — что она не синяя. Следовательно, *один белый и один синий шарик* должны лежать в зеленой коробочке.

Остались две коробочки (красная и синяя) и четыре шарика (2 черных, 1 белый и 1 красный). Содержимое этих коробочек ясно:

в красной коробочке должны находиться *один черный и один белый шарик* (красный шарик не может находиться в красной коробочке по условию 1, а по условию 6 в красной коробочке не может лежать второй черный шарик);

все остальные шарики (то есть *один красный шарик и один черный*) должны лежать в синей коробочке.

Других способов, позволяющих разложить шарики по коробочкам с соблюдением всех условий задачи, не существует.

---

[1] Читателю, который хочет до конца разобраться во всех тонкостях проводимых нами рассуждений, мы настоятельно рекомендуем самому вычерчивать все необходимые таблицы: если таблица начерчена собственной рукой, по ней особенно удобно следить за ходом рассуждений. (Математику вообще целесообразно изучать, сидя за столом с бумагой и карандашом в руке. Разумеется, это совсем не означает, что нужно разваливаться в мягком кресле! Рисунки, напечатанные в книге, призваны служить лишь образцами и «опорными пунктами» в работе.)

Додуматься до приведенного выше решения задачи довольно трудно. Как узнать, в какой последовательности надлежит использовать условия задачи?

Необходимы какие-то методы, которые бы указывали направление поисков. Однако надеяться на то, что нам удастся найти такие методы, можно лишь в том случае, если мы сумеем наглядно представить все данные, которые нам придется использовать в процессе решения.

Следующие два решения показывают, как можно выбирать последовательность условий. Правда, эти решения несколько длиннее предыдущего, но лишь потому, что нас теперь интересует не только ход рассуждений, но и метод, позволяющий нащупать решение.

II решение. Взглянув на условия задачи, мы увидим, что условие 6 содержит готовый (хотя и неполный) ответ. Впишем это условие в следующую таблицу:

Коробочка	Белая	Черная	Красная	Синяя	Зеленая
Лежащие в ней шарики				Черный	

Оставшиеся свободными шарики удобно выписать в виде отдельной таблицы:

Белые	Черные	Красные	Синие	Зеленые
○ ○	○	○ ○	○ ○	○ ○

Нетрудно заметить, что условие 6 уже полностью использовано. Таким образом, остаются условия 1, 2, 3, 4 и 5.

А теперь попробуем навести порядок среди оставшихся условий 1—5 и выяснить, какие из них могут послужить отправным пунктом при поиске решения.

Условие 1 содержит чрезвычайно важное требование, которое мы ни на миг не должны упускать из виду, но пока оно не приводит ни к какому конкретному результату. Условие 2 само по себе также недостаточно для того, чтобы мы могли сделать какой-то вывод. Иначе обстоит дело с условием 3: оно позволяет определить содержимое либо белой, либо черной коробочки. Возникает лишь вопрос — какой именно? Ответ на него тотчас же дает условие 4: согласно этому условию в черной коробочке не может лежать красный шарик. Следовательно, в условии 3 говорится о содержимом белой коробочки. Итак, мы выяснили, что в белой коробочке находятся один красный и один зеленый шарик.

Записав полученные сведения в нашу таблицу, мы без труда убедимся, что условие 3 полностью «исчерпано»:

Коробочка	Белая	Черная	Красная	Синяя	Зеленая
Лежащие в ней шарики	Красный			Черный	
	Зеленый				

Оставшиеся шарики:

Белые	Черные	Красные	Синие	Зеленые
○ ○	○	○	○ ○	○

Оставшиеся условия: 1, 2, 4, 5.

Условие 4 сообщает нам достаточно много сведений о шариках, лежащих в черной коробочке. Поскольку эти шарики должны быть только синими и зелеными, возможны 3 случая: в черной коробочке находятся

I) два зеленых шарика,
II) два синих шарика,
III) один синий и один зеленый шарик.

Что можно сказать о каждом из этих случаев?

В черной коробочке заведомо не может быть двух зеленых шариков (I случай), поскольку среди «свободных» шариков уже нет двух зеленых. С другой стороны, как гласит условие 5, в одной из коробочек вместе с одним белым шариком должен находиться один синий шарик. Следовательно, случай II также исключается. Таким образом, остается единственная возможность: в черной коробочке находятся один синий и один зеленый шарик. Впишем полученный результат в нашу таблицу:

Коробочка	Белая	Черная	Красная	Синяя	Зеленая
Лежащие в ней шарики	Красный	Синий		Черный	
	Зеленый	Зеленый			

Оставшиеся шарики:

Белые	Черные	Красные	Синие
○ ○	○	○	○

Итак, условие 4 «исчерпано». *Остались условия* 1, 2, 5.

Из двух последних условий (2 и 5) условие 5 более «красноречиво». В какой из коробочек могут лежать один белый и один синий шарик? Очевидно, что речь может идти лишь о красной или о зеленой коробочке. Но по условию 2 в красной коробочке нет синих шариков. Таким образом, в условии 5 говорится о содержимом зеленой коробочки: именно в зеленой коробочке находятся один белый и один синий шарик. Наша таблица примет теперь следующий вид:

Коробочка	Белая	Черная	Красная	Синяя	Зеленая
Лежащие в ней шарики	Красный	Синий		Черный	Синий
	Зеленый	Зеленый			Белый

Оставшиеся шарики:

Белые	Черные	Красные
○	○	○

По условию 1 красный шарик не может находиться в красной коробочке. Следовательно, в красной коробочке лежат один белый и один зеленый шарик, и, таким образом, в синей коробочке находятся один черный шарик и оставшийся еще «не использованным» красный шарик.

Итак, задача полностью решена:

Коробочка	Белая	Черная	Красная	Синяя	Зеленая
Лежащие в ней шарики	*Красный*	*Синий*	*Черный*	*Черный*	*Синий*
	Зеленый	*Зеленый*	*Белый*	*Красный*	*Белый*

III решение. Из всех условий задачи лишь условие 6 содержит окончательное утверждение из него мы узнаем, где находится один из шариков В дальнейшем мы будем называть такого рода информацию *«решающей» информацией* в отличие от прочей информации, которая лишь уменьшает число возможных случаев, но сама по себе недостаточна для получения (хотя бы частичного) решения.

Изобразим схематически шарики и коробочки, о которых говорится в условиях задачи (рис. 36). Здесь *б* означает белый, *ч* — черный, *к* — красный, *с* — синий и *з* — зеленый.

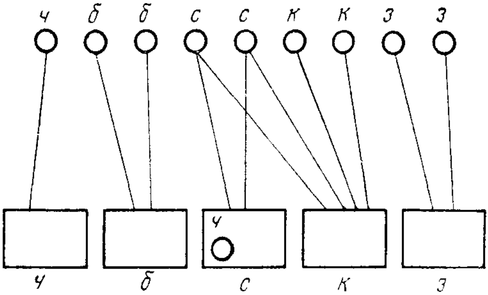


Рис. 36

Рассмотрим условия задачи по порядку.

1. Это условие изобразим следующим образом Соединим каждый шарик тонкой линией с той коробочкой, внутрь которой он заведомо не попадает (рис. 36). Таким образом, *черная тонкая линия означает отрицание, запрет: шарик не может находиться в данной коробочке.* Будем внимательно следить за соблюдением принятого нами соглашения! Все решение задачи по существу сводится к отрицанию тех или иных вариантов размещения шариков по коробочкам.

2. Это условие мы нанесем на нашу схему так же, как предыдущее.

3 Третье условие содержит новую информацию С одной стороны, оно сообщает нам о том, что красный и зеленый шарики находятся в одной коробочке, образуя пару (рис. 37). С другой стороны, из этого условия мы узнаем, что «нерасторжимая» пара находится либо в белой, либо в черной коробочке Такая информация не позволяет нам однозначно указать коробочку, в которой лежат один красный и один зеленый шарик, но позволяет однозначно указать коробочки, в которых эти шарики заведомо не могут лежать. Действительно, если «нерасторжимая» пара шариков находится либо в белой, либо в черной коробочке, то это означает, что она не находится ни в синей, ни в красной, ни в зеленой коробочке. Эту однозначную информацию (о запрете «неразлучной» пары находиться в синей, красной и зеленой коробочках) мы изобразим уже известным нам способом, как это видно на рис. 37.

Следует иметь в виду, что из всей информации, которую нам удалось извлечь из условия 3, новой является лишь та, что красный и зеленый шарики не могут находиться в синей коробочке (тонкая линия, ведущая к синей коробочке). Действительно, поскольку красный и зеленый шарики образуют «неразлучную» пару, нетрудно установить еще одно «отношение непринадлежности», воспользовавшись тем, что по условию 1 в красной коробочке не может находиться красный шарик, а в зеленой коробочке — зеленый. На рис. 37

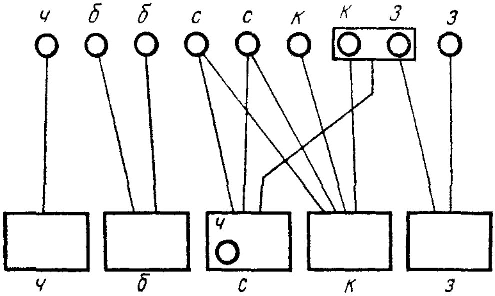


Рис. 37.

на это «парное» свойство указывают запрещающие линии, которые проведены не от каждого шарика в отдельности, а от прямоугольной рамки, внутри которой расположены один красный и один зеленый шарик.

4. Как и предыдущее условие, условие 4 не содержит однозначных указаний относительно цвета шариков, лежащих в черной коробочке. Содержащаяся в нем информация позволяет лишь исключить

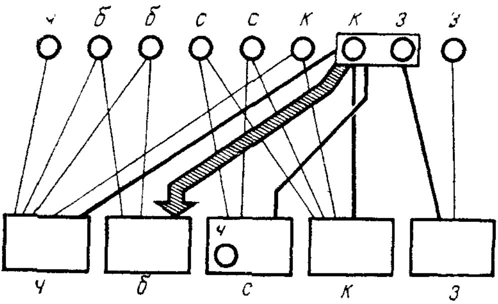


Рис. 38.

те шарики, которые заведомо не лежат в черной коробочке: в ней не могут находиться ни белые, ни черные, ни красные шарики, ни уже упоминавшаяся ранее пара, состоящая из красного и зеленого шариков.

Проведя на рисунке все запрещающие линии (рис. 38), мы увидим, что от пары, состоящей из красного и зеленого шариков, отходят четыре такие линии. Следовательно, красно-зеленая пара шариков может находиться только в белой коробочке потому, что лишь с этой коробочкой ее не связывает запрещающая жирная черная линия.

Вся *«суженная» информация* является решающей. Нам уже известно, что пара, состоящая из красного и зеленого шариков, может находиться лишь в белой коробочке. Внесем соответствующие изменения в наш рисунок, который уже начал излишне усложняться.

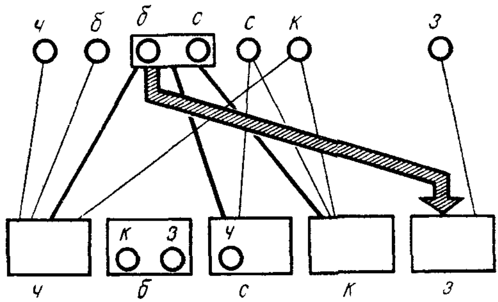


Рис. 39.

Нарисуем красный и зеленый шарики внутри белой коробочки и сотрем всю относящуюся к ним информацию, которая стала уже излишней.

5. Согласно этому условию один белый и один синий шарик образуют «неразлучную» пару, то есть на эти шарики распространяется то самое «парное» свойство, которое мы уже использовали

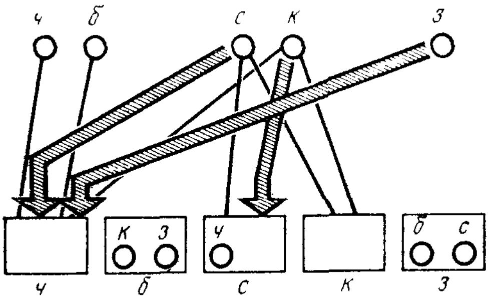


Рис. 40.

при рассмотрении условия 3 (рис. 39). Из рис. 39 мы видим, что вся суженная информация снова оказывается решающей.

Теперь рассмотрим всю оставшуюся информацию по порядку. Других зависимостей между исходными данными, кроме тех, которые представлены на рис. 39, у нас нет. Таким образом, метод отыскания решения (сведение суженной информации к решающей информации) теперь оказывается исчерпанным.

Однако в этом нет ничего плохого. Преобразуем рис. 39 в соответствии с только что полученным результатом (согласно которому пара, состоящая из одного белого и одного синего шарика, может находиться лишь в зеленой коробочке) и изобразим белый и синий шарики в одной коробочке. В результате мы получим рис. 40, из которого хорошо видно, что вся остальная информация сводится лишь к суженной информации, одновременно являющейся решающей. Ясно, что оставшийся синий шарик может находиться лишь в черной коробочке, а оставшийся красный шарик — лишь в синей коробочке С другой стороны, не менее ясно, что в черной коробочке могут быть только синий и зеленый шарики. Этот промежуточный результат настолько упрощает условие, что последний шаг в решении совершается автоматически (рис 41).

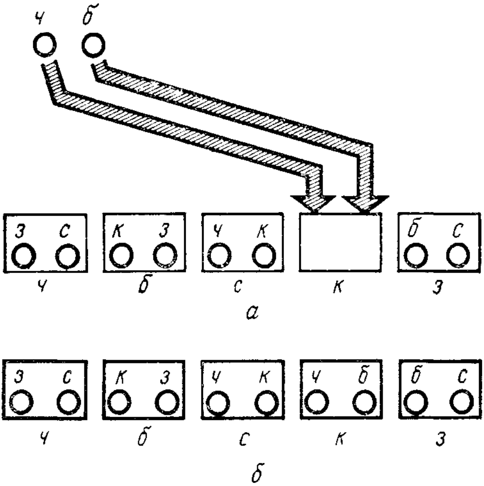


Рис. 41.

Обратим особое внимание на то, каким образом появился последний результат: выведенные из ранее полученных результатов упрощенные «отношения принадлежности» позволили заменить разрозненные данные (совокупность которых составляла лишь суженную информацию) решающей информацией.

Приведенное нами III решение может показаться излишне длинным, к тому же разобраться в лабиринте линий не так-то легко. Однако мы надеемся, что преимущества III подхода не менее очевидны: решение задачи получено не методом проб и ошибок, а в результате систематического, направленного поиска. Таким образом, III подход гарантирует получение решения в ста случаях из ста.

Ясно, что тот же подход может служить методом решения всех задач аналогичного типа. Суть метода можно сформулировать так:

необходимо уменьшать число возможностей до тех пор, пока не останется лишь одна!

Уменьшать число возможностей (как мы уже видели) нужно так, чтобы при этом:

а) *либо увеличивалось число отвергнутых возможностей*;

б) *либо происходило сужение условий задачи.*

2. ЛОТЕРЕЯ

Если Эрдеи вытащил два числа, сумма которых равна 11, то он мог это сделать следующими пятью способами: 1 и 10, 2 и 9, 3 и 8, 4 и 7, 5 и 6. Аналогичным образом можно перечислить и все другие возможные суммы, набранные четырьмя остальными участниками лотереи.

Выпишем под фамилией каждого из участников лотереи все варианты набранной им суммы:

Эрдеи (11)	Фёльди (4)	Хедьи (7)	Мезеи (16)	Визи (17)
1 и 10 2 и 9 3 и 8 4 и 7 5 и 6	1 и 3	1 и 6 2 и 5 3 и 4	6 и 10 7 и 9	7 и 10 8 и 9

Мы видим, что Фёльди может набрать свою сумму единственным возможным способом: вытащив карточки с числами 1 и 3. Следовательно, эти две карточки можно исключить из дальнейшего участия в лотерее и вычеркнуть те варианты, которые приведены под фамилиями других участников лотереи и содержат либо число 1, либо число 3 В результате от нашей таблицы останется лишь следующая ее часть:

Эрдеи		Хедьи	Мезеи	Визи
2 и 9 4 и 7 5 и 6		2 и 5	6 и 10 7 и 9	7 и 10 8 и 9

Итак, Хедьи вытянул карточки с числами 2 и 5. Вычеркнув двойки и пятерки у остальных участников лотереи, получим:

Эрдеи			Мезеи	Визи
4 и 7			6 и 10 7 и 9	7 и 10 8 и 9

Теперь уже видно, что Эрдеи вытянул числа 4 и 7 и их нужно вычеркнуть из вариантов, выписанных под фамилиями Мезеи и Визи. От всей таблицы остается лишь следующий фрагмент:

Мезеи	Визи
6 и 10	8 и 9

Итак, результаты лотереи можно определить однозначно:

Эрдеи — 4 и 7,
Фёльди — 1 и 3,
Хедьи — 2 и 5,
Мезеи — 6 и 10,
Визи — 8 и 9.

Поскольку этот вариант удовлетворяет всем условиям задачи, то он и является решением.

3. ОДНИ ЛИШЬ А И Б

Эта задача существенно отличается от двух предыдущих. В тех задачах все данные были разбиты на пары (коробочки — шарики, участники лотереи — пары вытянутых ими чисел). Здесь же исходные данные разбиваются на тройки (имя — профессия — город).

По условию 1 Балаш не живет в Будапеште (хотя все его родственники живут именно в этом городе). По условию 3 аптекарь (как родственник Балаша) — житель Будапешта. Следовательно, Балаш — не аптекарь, и мы можем начать заполнение таблицы следующим образом:

Имя	Балаш		
Профессия		Аптекарь	
Город, в котором живет человек		Будапешт	

Заметим, что в среднем столбце названия города и профессии начинаются с различных букв. Следовательно, те тройки слов, начинающихся с одинаковых букв, о которых говорится в условии 2, стоят в первом и третьем столбцах. Отсюда мы делаем вывод, что Балаш по профессии бухгалтер (поскольку бухгалтер — единственная профессия, название которой начинается с буквы «б») и живет в

Бекешчабе (поскольку Бекешчаба — единственный из оставшихся городов, название которого начинается с буквы «б»):

Имя	Балаш		
Профессия	Бухгалтер	Аптекарь	
Город, в котором живет человек	Бекешчаба	Будапешт	

В третьем столбце теперь уже может стоять лишь название города Асода. Следовательно, все слова в третьем столбце должны начинаться с буквы «а». Итак, имеется лишь одна возможность для заполнения третьего столбца:

Имя	Балаш		Аладар
Профессия	Бухгалтер	Аптекарь	Агроном
Город, в котором живет человек	Бекешчаба	Будапешт	Асод

Для владельца среднего столбца у нас осталось единственное «свободное» имя: Бела. Следовательно, мы получаем лишь одного «кандидата» в решение задачи:

Имя	*Балаш*	*Бела*	*Аладар*
Профессия	*Бухгалтер*	*Аптекарь*	*Агроном*
Город, в котором живет человек	*Бекешчаба*	*Будапешт*	*Асод*

Наш кандидат удовлетворяет всем условиям задачи, в чем нетрудно убедиться путем проверки.

4. БЛЕСТЯЩИЕ ОФИЦЕРЫ

Если мы попытаемся применить к этой задаче тот же метод решения, что и к предыдущим, достичь успеха нам будет очень трудно: слишком много в этой задаче данных!

В задаче требуется определить звание каждого из пяти офицеров и род войск, в котором он служит. Нельзя ли сначала определить что-нибудь одно: либо только звания, либо род войск?

Такая возможность заведомо представилась бы нам, если бы в одной части условий задачи речь шла лишь о воинских званиях, а в другой — лишь о родах войск Почти так и обстоит дело в нашей задаче. Действительно, условие 7 с этой точки зрения не имеет значения (ведь по существу в нем говорится лишь о том, что пятого офицера зовут Андраш), а из остальных условий четыре «средних» (2, 3, 4 и 5) сообщают нам различные сведения о родах войск, в которых служат офицеры, и лишь в условии 6 содержатся сведения об их званиях. Что же касается условия 1, то оно носит «смешанный» характер: в нем говорится и о званиях, и о родах войск.

Несмотря на это, мы можем (используя условия 1 и 6) сначала определить звания всех офицеров.

По условию 1 у Яноша такое же звание, как у сапера Следовательно, и Янош, и сапер могут быть лишь майорами, ибо все остальные звания представлены в «единственном числе». Из условия 6 мы тотчас же узнаем, что Лайош капитан. Но тогда Бела подполковник, а Ференц майор, поскольку среди «вакантных» еще званий имеются лишь два различных звания: майор и подполковник. Таким образом, у нас остается единственное имя, которому соответствует единственное оставшееся «не использованным» звание: Андраш майор

По аналогии с предыдущей задачей составим таблицу с тремя графами (имя, звание, род войск), из которых две первые уже заполнены, и постараемся выяснить, кто и в каком роде войск служит.

Итак, мы будем считать впредь, что звания уже «неотделимы» от своих «носителей», и нам нужно лишь установить, в каком роде войск служит каждый из офицеров. Возникает новая, более простая задача, составляющая лишь часть задачи 4. В дальнейшем мы будем называть эту новую задачу задачей 4*.

Заметим, что сведения относительно родов войск, содержащиеся в условиях 1—5, говорят лишь о том, какие офицеры служат в различных родах войск Поэтому мы поступим наиболее разумно, если в каждую клетку третьей графы сначала впишем все рода войск, о которых говорится в условиях задачи, чтобы затем, пользуясь имеющейся у нас информацией, исключить не существующие возможности Для той клетки, где останется лишь один род войск, задача будет решена.

Итак, заполним нашу таблицу, внося сначала в каждую клетку графы «род войск» все перечисленные в условиях задачи возможности (здесь п означает пехотинец, а — артиллерист, л — летчик, св — связист и с — сапер):

Имя	Андраш	Бела	Ференц	Янош	Лайош
Звание	майор	подполковник	майор	майор	капитан
Род войск	п св с л а	п св л а	п св с л а	п св с л а	п св л а

(Следует иметь в виду, что по условию 1 сапером может быть лишь один из трех майоров.)

Итак:

по условию 1 Янош не сапер;
по условию 2 Ференц не связист;
по условию 3 Бела, Лайош и Ференц не летчики;
по условию 4 Лайош не артиллерист, не сапер и не связист (то, что он не сапер, уже известно).

После того, как мы вычеркнем отпавшие возможности, наша таблица примет следующий вид (среднюю графу пока можно не выписывать):

А	Б	Ф	Я	Л
п св с л а	п св а	п с а	п св л а	п

Мы видим, что против имени Лайоша в графе «род войск» осталась единственная пометка: *Лайош пехотинец*. Любопытно отметить, что слово «пехотинец» мы вписали во все рубрики. Поскольку среди офицеров имеется лишь один пехотинец, все остальные п, кроме того, что стоит против имени Лайош, теперь можно зачеркнуть.

А	Б	Ф	Я	Л
св с л а	св а	с а	св л а	пехотинец

По условию 5 Ференц не летчик и не сапер. Первое уже известно, а из второго следует, что *Ференц артиллерист*. Таким образом, слово «артиллерист» теперь можно вычеркнуть из всех остальных столбцов нашей таблицы:

А	Б	Ф	Я	Л
св с л	св	*артиллерист*	св л	*пехотинец*

Мы видим, что *Бела связист* (и, следовательно, св можно вычеркнуть всюду, где оно еще стоит в других столбцах таблицы):

А	Б	Ф	Я	Л
с л	*связист*	*артиллерист*	л	*пехотинец*

Таким образом, *Янош может быть только летчиком*, а *Андраш* соответственно *сапером.*

Итак, мы пришли к выводу, что решение задачи (если оно существует) может иметь лишь следующий вид:

Андраш	*Бела*	*Ференц*	*Янош*	*Лайош*
майор	*подполковник*	*майор*	*майор*	*капитан*
сапер	*связист*	*артиллерист*	*летчик*	*пехотинец*

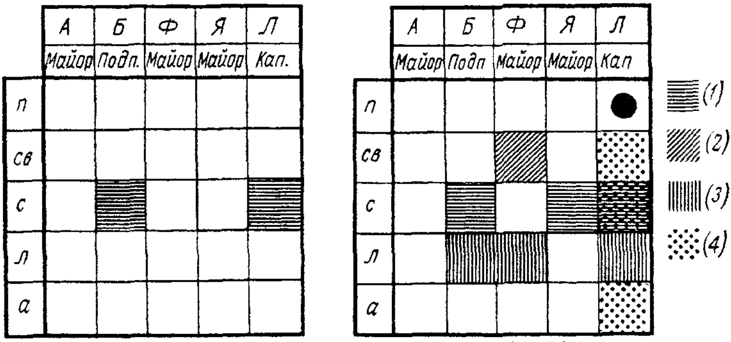
Поскольку эта таблица удовлетворяет всем условиям задачи, она действительно дает решение.

Дальнейшее развитие метода составления таблиц

Аккуратный человек, используя в предыдущем решении первую таблицу, по всей видимости, составил бы ее не так, как мы, а выписал бы под именем каждого офицера названия всех родов войск, расположив их изящным столбцом в удобном для обозрения виде. Таблица при этом приняла бы следующий вид:

Андраш майор	Бела подполковник	Ференц майор	Янош майор	Лайош капитан
п св с л а	п св — л а	п св с л а	п св с л а	п св — л а

Но если из всех родов войск в первой строке всюду стоит именно п (пехота) и мы хорошо это знаем, то пометки п можно вообще не делать. Точнее, для памяти мы сделаем пометку п на полях и будем считать, что она стоит всюду, где стояла раньше. Аналогично можно поступить и с названиями остальных родов войск. Условившись об этом, изобразим таблицу так, как показано на рис. 42, *а*. Писать нам придется гораздо меньше, чем прежде. Пустая клетка означает, что человек, чьи имя и звание помечены на полях сверху, пока еще может служить в том роде войск, который указан на полях сбоку. Если в процессе решения выяснится, что данный офицер служит в другом роде войск, то мы заштрихуем соответствующую



(1)+(2)+(3)+(4)

а *б*

Рис. 42.

клетку. На рис. 42, *а* показано, как, пользуясь информацией, содержащейся в условии 1, мы исключили для Б и Л возможность быть сапером (заштриховав соответствующие клетки в столбцах, помеченных сверху буквами Б и Л).

Аналогично отразим в нашей таблице информацию, содержащуюся в условии 2, из которой следует, что Ференц не связист (рис. 42, *б*).

Посмотрим теперь, какими преимуществами обладает усовершенствованная таблица (рис. 42, *б*), и продолжим решение задачи.

Из условия 1 следует не только то, что сапер имеет звание майора (и поэтому, как уже изображено на рис. 42, *а*, не является ни подполковником, ни капитаном), но и что Янош не сапер. Это обстоятельство мы отметим, заштриховав клетку Яс, как и клетки Бс и Лс, горизонтальными линиями.

Из условия 2 следует, что Ференц не связист. Эти сведения мы отметим косой штриховкой.

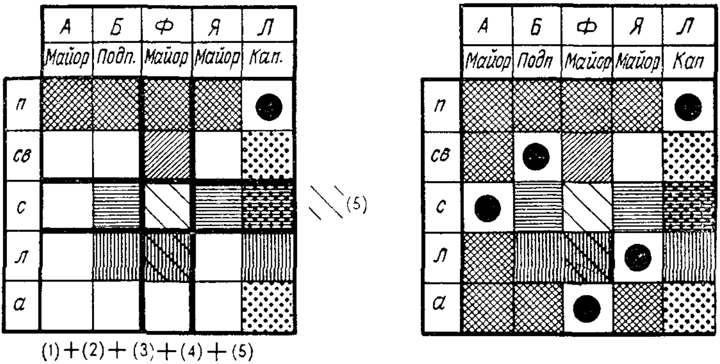
Строго говоря, нам совершенно не обязательно отмечать, откуда получены те или иные сведения, и в первом решении «источники информации» в таблице не указывались. Здесь же мы делаем это лишь для того, чтобы в дальнейшем, действуя с помощью усовершенствованной таблицы, сократить ход рассуждений при решении других задач.

Из условия 3 следует, что Бела, Лайош и Ференц не летчики. Информацию, извлеченную из этого условия, мы отметим вертикальной штриховкой.

По условию 4 Лайош не артиллерист, не сапер и не связист. Отметим сведения, полученные из условия 4, пунктиром.

Вся собранная нами информация представлена на рис. 42, *б*. Мы видим, что в столбце Л свободна лишь одна верхняя клетка, поэтому *Лайош может быть только пехотинцем* (черный кружок).

С другой стороны, если Лайош пехотинец, то все остальные офицеры заведомо служат не в пехоте. Следовательно, все клетки, стоящие в верхней строке, кроме клетки с черным кружком, можно



а *б*

Рис. 43.

зачеркнуть. На рис. 43, *а* эти клетки имеют двойную косую штриховку. Так мы хотим отличать частичные результаты, позволяющие нам зачеркивать те или иные клетки, от утверждений, содержащихся непосредственно в условиях задачи.

Согласно условию 5 Ференц не летчик и не сапер. Соответствующие клетки мы заполним косой штриховкой.

Тогда на рис. 43, *а* в столбце Ф (Ференц) останется незаполненной лишь одна клетка: *Ференц артиллерист*. То же можно сказать и о строке с (сапер). Таким образом, *Андраш сапер* (рис. 43, *б*).

Последнее заключение (о том, что Андраш сапер) в предыдущем решении было получено способом, который нельзя назвать рациональным. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на приведенные в предыдущем решении таблицы. Приняв во внимание условие 5, мы «вычитали» из таблицы 43, *а* лишь то, что Ференц артиллерист Это заключение хорошо видно. В меньшей мере бросается в глаза другое обстоятельство: что только в столбце, принадлежащем Андрашу, встречается пометка с (сапер). Нерационально и то, что в следующей таблице в том же столбце стоят названия двух возможных родов войск. Примененный в предыдущем решении метод наглядно показал, что каждый офицер мог служить в нескольких родах войск, но умалчивал о том, что в каждом роде войск могут служить несколько офицеров. Используемая нами теперь усовершенствованная таблица позволяет «беспристрастно» учитывать обе точки зрения: она обладает «симметрией». По строкам перечислены рода войск, в которых может служить каждый офицер, по столбцам — офицеры, которые могут служить в данном роде войск Именно такая возможность симметричного учета обеих точек зрения и составляет основное достоинство усовершенствованной таблицы. Конец решения мы найдем теперь мгновенно (рис. 43, *б*): согласно двум самым последним результатам в столбце А сверху можно зачеркнуть (покрыть двойной косой штриховкой) все клетки, кроме той, которая соответствует саперным войскам, а в строке а (артиллерист) — все имена, кроме имени Ференца Таким образом, не зачеркнутыми в строке л останется лишь клетка, стоящая на пересечении со столбцом, принадлежащим Яношу, а в столбце, принадлежащем Беле, — лишь клетка, стоящая на пересечении со строкой, соответствующей службе в войсках связи. Итак, *Янош летчик*, а *Бела связист.*

Последние два заключения мы опять вывели одновременно. (Естественно поэтому, что любое из них исключает для Яноша возможность быть связистом.)

Различные пути к решению

Теперь уже ясно, для чего необходимо отмечать, какое из условий задачи позволяет зачеркнуть ту или иную клетку.

Рассмотрим еще раз рис. 42, *б*. Нас будет интересовать последний столбец (именно он позволяет получить первый окончательный результат). Заметим, что для получения первого результата нам достаточно исключить из столбца А клетки, заполненные жирными точками и вертикальной штриховкой, то есть воспользоваться условиями 3 и 4.

Однако мы уже показали, что в предыдущем решении выбирать исходную точку своих рассуждений мы могли по-разному. Если бы мы стали рассматривать условия не в том порядке, в каком они приведены в формулировке задачи, то цели достигли бы гораздо быстрее.

Действительно, почему последовательность, в которой условия перечислены в формулировке задачи, следует считать наиболее целесообразной?

Рассмотрим кратко другой ход решения: он наглядно изображен на рис. 42 и 43. Мы видим, что характер штриховки позволяет точно определить, на основании какого условия зачеркнута каждая клетка. Следовательно, в дальнейшем ничто не мешает нам вообще «забыть» текст задачи. Именно поэтому на рис 44 и 45 все клетки «немые», и в дальнейшем мы будем рассматривать не условия исходной задачи, а рис. 42 и 43. Из сказанного ранее известно, что если на любом из этих рисунков (безразлично, на котором именно) появляется черный кружок, то все остальные клетки, стоящие в одной строке и в одном столбце с клеткой, помеченной кружком, можно тотчас же исключить из рассмотрения. Тем самым появляется возможность «сократить» условия задачи.

Первый способ. Условия 3 и 4, взятые вместе, порождают решающую информацию: они позволяют получить лишь первое частичное решение (рис. 44, *а*). **Это приводит к «сокращению» условий задачи** (полученный результат позволяет «вычеркнуть» все клетки самой верхней строки, кроме самой правой). Аналогично из условий 2 и 5 извлекаем информацию, позволяющую получить второе частичное решение (рис. 44, *б*).

Для сравнения заметим, что в предыдущем решении второе частичное решение удалось получить лишь после того, как мы

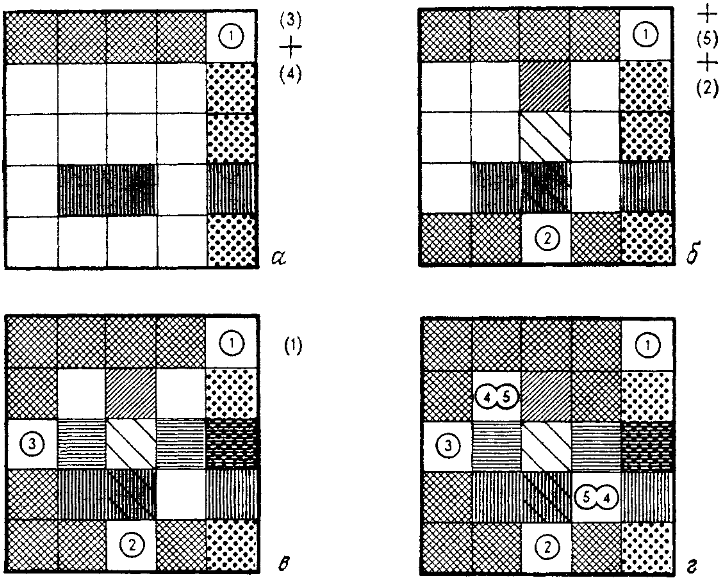


Рис. 44.

использовали пять условий задачи. Правда, одновременно со вторым мы получили тогда и третье частичное решение.

Теперь же мы находим третье частичное решение из условия 1 (рис. 44, *в*), а затем, пользуясь тем, что круг поисков сузился («вычеркнуты» клетки последней строки и первого столбца), получаем два последних частичных решения (рис. 44, *г*).

Второй способ. Рассмотрим внимательно рис. 43, *б*. Мы видим, что черный кружок, стоящий в верхней строке (Лайош пехотинец), получен не на основе суженной информации, а непосредственно из условий задачи: ведь в последнем столбце отсутствуют клетки с двойной косой штриховкой, а каждая такая клетка означает «вычеркивание» той или иной информации. Впрочем, в этом нет ничего удивительного: утверждение о том, что Лайош пехотинец, было первым полученным нами частичным решением. Однако мы видим, что на рис. 43, *б* таким свойством (отсутствием клеток с двойной косой штриховкой) обладает не только последний столбец, но и третья строка. Следовательно, стоящий в ней черный кружок (Андраш сапер) также можно считать первым частичным решением.

Итак, из условий 1 и 5 мы получаем первое частичное решение (рис. 45, *а*). Пользуясь вытекающей отсюда «усушкой» информации и условием 3, приходим ко второму частичному решению (рис. 45, *б*), а принимая во внимание условие 4, — к третьему частичному решению (рис. 45, *в*). Сильно сузившийся круг поисков и условие 2 позволяют нам получить два последних частичных решения одновременно (рис. 45, *г*).

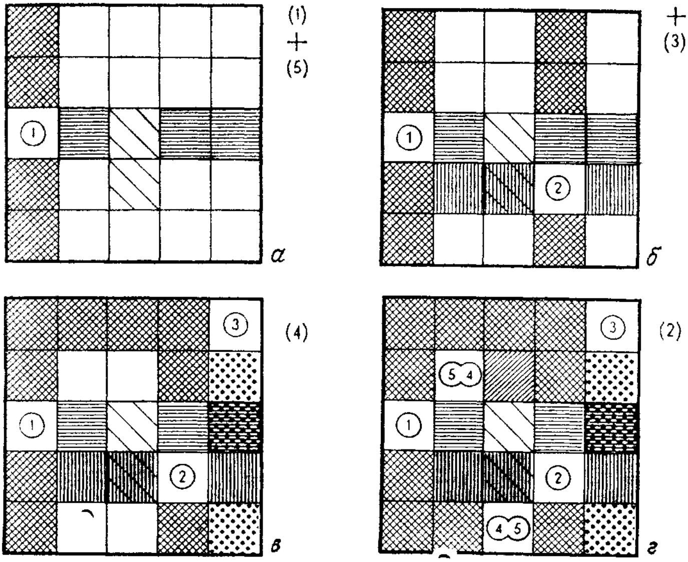


Рис. 45.

Итак, два решения, представленных на рис. 44 и 45, аналогичны. Однако между ними имеется и довольно заметное различие. Условия задачи используются в них в различной последовательности, поэтому и в очередности получения частичных решений наблюдаются довольно сильные расхождения. Таким образом, хотя метод решения в обоих случаях оставался по существу одним и тем же, ход рассуждений, «запечатленный» на рис. 44 и 45, существенно различен.

Какое же решение проще? На первый взгляд может показаться, что они примерно равноценны. Оба решения почти одинаковы по длине. Для получения первого частичного решения в обоих решениях используются по два условия, то есть избран довольно простой способ. Однако дальнейшие этапы второго решения устроены более «экономно», чем первого: для получения двух первых частичных решений во втором решении необходимо взять 3 условия, а четвертое условие приводит к третьему частичному решению. В первом решении для получения двух частичных решений мы должны использовать 4 условия, а для получения третьего — все 5 условий.

5. А ЕСЛИ ИНФОРМАЦИИ БУДЕТ МЕНЬШЕ?

На рис. 43, *б* представлены все условия задачи 4. Мы видим, что две клетки на нем зачеркнуты дважды (Лайош не сапер, и Ференц не летчик). Первую из этих клеток исключает из дальнейшего рассмотрения любое из условий 1 или 4, вторую — условие 3 или 5. Поскольку для решения задачи достаточно, чтобы «запрещенные» клетки были исключены лишь по одному разу, зачеркивание клеток «в два слоя» можно заменить однократным зачеркиванием.

А Оставив без изменений условие 1, мы тем самым исключим возможность того, что Лайош сапер При этом вместо условия 4 можно взять, например, следующее условие.

4′. Недавно у артиллериста испортился радиоприемник. По просьбе Лайоша связист зашел к артиллеристу и устранил неисправность.

По новому условию 4′ Лайош не может быть ни артиллеристом, ни связистом, но в этом условии ничего не сказано о том, может ли Лайош быть сапером.

В принципе ничто не мешает нам поступить наоборот: сохранить в «первозданном» виде условие 4, а условие 1 изменить так, чтобы оно не содержало ограничения «Лайош не сапер». Однако при этом сильно усложняется решение, в то время как сократить текст задачи все равно не удается. Дело в том, что условие 1 содержит очень много информации. Оно сообщает нам о том, что, во-первых, Янош майор (в переводе на «табличный» язык заштрихованных и пустых клеток это утверждение означает, что а) Янош не капитан; б) Янош не подполковник); во-вторых, сапер имеет звание майора (то есть в) сапер не капитан, откуда следует, что Лайош, имеющий звание капитана, не сапер; г) сапер не подполковник); в-третьих д) Янош не сапер Все эти утверждения необходимо «вместить» в одно предложение, которое, каким бы кратким оно ни было, должно содержать не только отрицание д, но и все остальные отрицания. Текст нового условия может быть, например, таким:

1′. Янош и присутствовавший на вечере его друг-сапер, дослужившиеся до одного звания, беседовали с капитаном.

Б. Исключить любое из отрицаний второй пары проще.

Если условие 3 остается без изменений, то вместо условия 5 можно взять, например, следующее:

5′. Ференц по совету сапера избрал не тот род войск, в котором намеревался служить сначала.

Если же требуется оставить без изменений условие 5, то условие 3 можно сократить следующим образом:

3′. Офицер-летчик недавно вместе с Белой и Лайошем побывали в гостях у кого-то из офицеров

Итак, мы видим, что задача 4 была «перегружена»: ее текст содержал больше информации, чем необходимо Такую перегруженность информацией в математике (с точки зрения теории информации) принято называть *избыточностью*, а все «лишние» условия — *избыточными*.

6. ВАРИАЦИЯ НА СТАРУЮ ТЕМУ

Что осталось? Условия 2, 5, 6 и 7 сохранились в точности такими же, как и в задаче 4. Условие 2 слегка изменилось по форме, но по существу (то есть по содержащейся в нем информации) осталось таким же, как прежде.

Что изменилось? Условия 1, 3 и 4 Из них условия 3 и 4 содержат ту же информацию, что и условия 3 и 4 в задаче 5 Разбирая решение этой задачи, мы убедились, что, хотя каждое из условий, помеченное штриховкой, содержит на один запрет меньше, чем их не отмеченные штриховкой собратья, решение задачи по-прежнему существует и определенно однозначно.

Разумеется, так происходит лишь в том случае, если вся остальная информация остается такой же, как в задаче 4. Однако у нас имеется еще условие 1. На первый взгляд может показаться, что оно изменилось совсем незначительно, но в действительности это не так. Из нового текста уже не следует, что Янош не сапер. Звание у Яноша может быть таким, как у сапера, потому что сам Янош сапер. Таким образом, условие 1 претерпело не только стилистические изменения, но и утратило некоторую существенную информацию: ведь теперь оно не содержит двух отрицаний (относившихся к клетке, стоящей на рис. 43, *б* на пересечении третьей строки и четвертого столбца). Эта клетка теперь остается незачеркнутой.

Вытекающие отсюда следствия нетрудно предвидеть заранее. На рис. 46, *а* представлены все условия задачи. Из них мы получаем лишь один окончательный результат: Лайош может служить только в пехоте. Вызванное этим обстоятельством сужение информации приводит к заключению о том, что Ференц может быть лишь артиллеристом (рис. 46, *а*), откуда в свою очередь следует весьма существенный вывод: Бела должен быть связистом (рис. 46, *б*). Никаких новых результатов отсюда получить нельзя: в нашем распоряжении нет новой, еще не использованной информации. В столбцах Андраша и Яноша остается по две свободные клетки, соответствующие двум родам войск (рис. 46, *в*). Каждый из этих офицеров может избрать любой из двух родов войск, после чего его напарнику не останется ничего другого, как служить в одном-единственном роде войск — том, который окажется «вакантным» (рис. 46, *г* и *д*).

Таким образом, решение задачи на последнем шаге утрачивает однозначность. Однако это отнюдь не означает, что задача не имеет решения! Наоборот, задача имеет теперь два решения. Любая из стрелок, независимо от того, указывает ли она на рис. 46, *г* или на рис. 46, *д*, приводит нас к решению, удовлетворяющему всем условиям задачи.

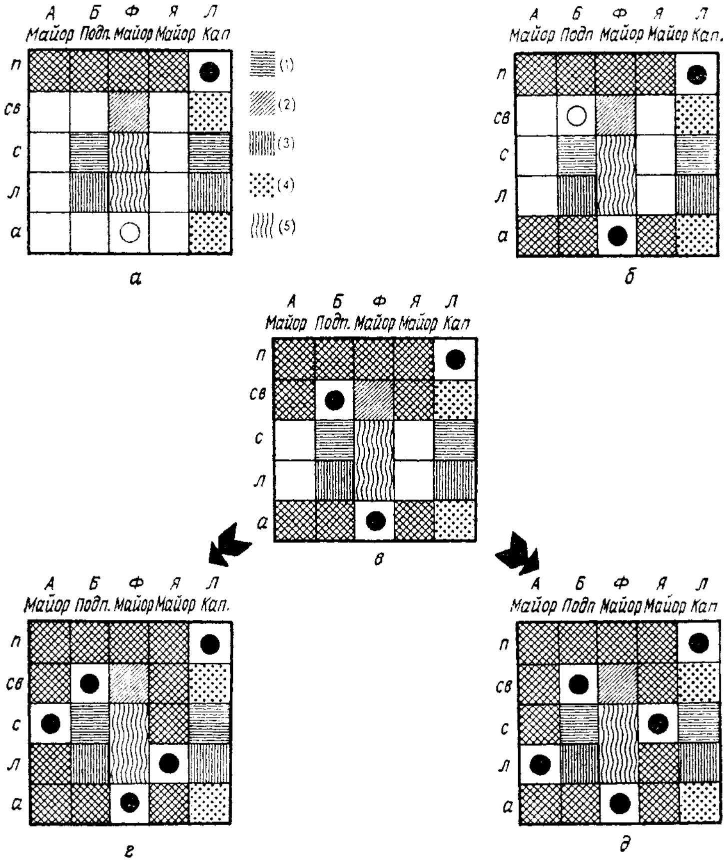


Рис. 46.

Итак, задача 6 допускает *два решения*. Одно из них совпадает с решением задачи 4 (рис. 46, *г*):

Андраш	*Бела*	*Ференц*	*Янош*	*Лайош*
майор	*подполковник*	*майор*	*майор*	*капитан*
сапер	*связист*	*артиллерист*	*летчик*	*пехотинец*

Второе решение имеет следующий вид (рис. 46, *д*):

Андраш	*Бела*	*Ференц*	*Янош*	*Лайош*
майор	*подполковник*	*майор*	*майор*	*капитан*
летчик	*связист*	*артиллерист*	*сапер*	*пехотинец*

Примечание. Что имеют в виду, когда говорят, что задача имеет решение? По-видимому, то, что решение существует. В свою очередь под решением[1] мы понимаем не что иное, как такой ответ на вопрос задачи, который согласуется со всеми условиями задачи (то есть не противоречит ни одному из них).

Мы обращаем на это особое внимание потому, что выражение «задача имеет решение» нередко употребляют в другом смысле, а именно если в процессе решения удается найти однозначный ответ на все вопросы задачи, причем на каждый вопрос существует лишь один правильный ответ.

Однако в математике выражение «задача имеет (или допускает) решение» принято понимать в первом, а не во втором смысле. Говоря о том, что какая-нибудь задача имеет решение, имеют в виду, что на поставленный в ней вопрос можно найти такой ответ, который удовлетворяет всем условиям задачи (не противоречит ни одному из них).

Именно в этом смысле математики говорят, что решение *существует*. Другой вопрос — имеет ли задача одно или несколько решений. Если вопрос задачи имеет лишь один ответ, то есть если существует лишь одно решение задачи, то говорят, что задача однозначно разрешима, или имеет *единственное* решение.

7 ЕЩЕ ОДНА ВСТРЕЧА С ЕВОЧКОЙ

В задачах 4, 5 и 6 каждый офицер служил в одном роде войск, и наоборот, в каждом роде войск служил лишь один офицер. По условию же задачи 1 в каждой коробочке лежат по два шарика. Поэтому задача 1 относится к несколько иному типу, чем задачи 4, 5 и 6. Тем не менее нетрудно убедиться в том, что «усовершенствованный» метод составления таблиц оказывается применимым и в этом случае.

По условиям 3 и 5 среди шариков имеются две «нерасторжимые» пары: одну образуют красный и зеленый шарики, другую — белый и синий шарики. В таблице шарики, входящие в одну пару, разумно поместить не в разные столбцы, а под одну общую рубрику.

[1] В данном случае имеется в виду *конечный* результат решения. Слово «решение» означает еще и *процесс*, ведущий к конечному результату (см. Заключение).

А теперь, не мудрствуя лукаво, воспользуемся нашим «усовершенствованным» методом. Внесем все условия задачи в таблицу (рис 47, *а*).

Условие 1. (Штриховка вертикальными линиями) Заштриховывая клетки таблицы, не следует упускать из виду информацию, содержащуюся в условиях 3 и 5!

Условие 2. (Штриховка горизонтальными линиями.) Ясно, что в красной коробочке не может находиться пара, состоящая из белого и синего шариков!

Условие 3. Пара, состоящая из красного и зеленого шариков, не может находиться ни в красной, ни в зеленой, ни в синей коробочке. (Штриховка наклонными линиями, идущими влево вверх.)

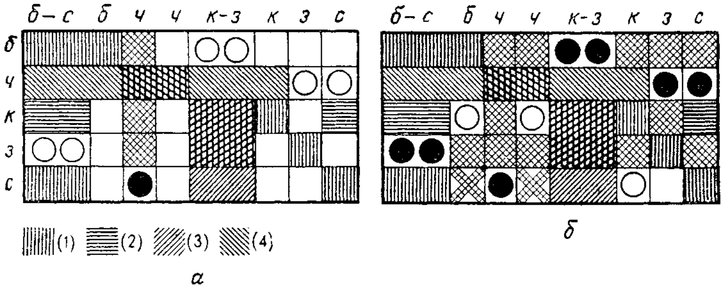


Рис. 47.

Условие 4. В черной коробочке нет ни белых, ни черных, ни красных шариков. Следовательно, в этой коробочке не могут находиться пары, образованные белым и синим, а также красным и зеленым шариками. (Штриховка наклонными линиями, идущими вправо вверх.)

Условие 5. Это условие уже было учтено нами ранее.

Условие 6. Из этого условия мы узнаем, где находится черный шарик Это позволяет нам зачеркнуть все остальные клетки в том столбце, который ему соответствует (двойная косая штриховка).

Итак, все, что можно узнать из условий задачи, изображено на рис. 47, *а*. Посмотрев на него, мы можем единым взглядом окинуть всю информацию, которая имеется в нашем распоряжении, и тогда нам в руки сами собой посыплются окончательные результаты — не один, а сразу четыре! Первый столбец сообщает нам: *в зеленой коробочке находятся один белый и один синий шарик.* Из пятого столбца нетрудно «вычитать» другое заключение: *в белой коробочке находятся один красный и один зеленый шарик.* Вторая строка говорит нам о том, что *в черной коробочке лежат один зеленый и один синий шарик.*

Полученные нами результаты позволяют значительно сузить круг дальнейших поисков. Исключив запрещенные комбинации шариков и коробочек, мы обнаружим, что содержимое *красной коробочки* определенно однозначно: в ней находятся *один белый и один черный шарик* (третья строка), а шестой столбец сообщает нам о том, что *красный шарик может находиться лишь в синей коробочке.*

На рис. 47, *б* представлены все условия задачи и все вытекающие из полученных результатов «запреты». Взятые вместе, они свидетельствуют о том, что решение правильно: полученные результаты не противоречат условиям задачи и согласуются между собой.

Примечание 1. Если такую задачу решать без таблицы, то сначала разумно выделить лишь те условия, которые позволяют получить хоть какое-нибудь частичное решение (в противном случае придется держать в голове слишком много данных).

На рис. 47, *б* видно, что если отвлечься от тривиального результата — утверждения «в синей коробочке находится один черный шарик», то в качестве отправного пункта для решения можно избрать любую из следующих трех возможностей.

I. Один белый и один синий шарик находятся в зеленой коробочке. В правильности этого утверждения можно убедиться, взглянув на первый столбец. Оно не противоречит данным задачи. Чтобы получить такой результат, достаточно выбрать те условия задачи, которые позволяют выделить нужную нам клетку в первом столбце, то есть (рис. 47, *б*) условия $1 + 2 + 4$ и условие 5 (из последнего следует существование пары, состоящей из белого и синего шариков).

II. Красный и зеленый шарики находятся в белой коробочке. Чтобы получить это утверждение (как видно из пятого столбца), достаточно взять условия $3 + 4$. (Существование пары, состоящей из одного красного и одного зеленого шарика, следует из условия 3.)

III. В черной коробочке находятся один зеленый и один синий шарик. Может показаться, что для получения этого результата достаточно воспользоваться одним лишь условием 4. Однако не следует забывать, что, нанося на рисунок информацию, мы в действительности использовали еще и условия 3 и 5. Они позволили нам вывести заключение о существовании двух пар шариков.

Итак, для получения I результата необходимо использовать четыре, II результата — два и III результата — три условия задачи. Следовательно, поиск решения разумнее всего начинать со II результата.

Примечание 2. На рис. 47 хорошо видно, сколь велика избыточность в условиях задачи 1. Однако менять формулировку всех условий нам не хотелось бы, чтобы задача не стала переопределенной. Приведенный выше новый вариант условия 1 формулируется кратко, но несет в себе много информации. Вместо отдельных условий 3 и 4 мы рассматриваем теперь одно «объединенное» условие. В исходном варианте условий 3 и 4 речь шла о «холодных» и «нейтральных» цветах. В новом, сокращенном варианте эти стилистические «красоты» исчезли, хотя само условие по-прежнему содержит много информации. Если бы мы захотели изменить условия так, чтобы ни одно из них не содержало двух «запретов», то формулировка их стала бы значительно длиннее и «тяжеловеснее».

Взглянув на пятый столбец, нетрудно заметить, что если условие 1 останется неизменным, то условие 3 может перейти лишь в следующее: «В некоторой коробочке не синего цвета находятся один красный и один зеленый шарик». Математически такая формулировка вполне корректна, но стилистически она «беднее» исходной.

8. «МЕТОДИЧЕСКАЯ» ЗАДАЧА

Задача 2 по своему характеру в сущности ничем не отличается от задачи 1. В задаче 1 требовалось найти, какие два шарика лежат в каждой коробочке, в задаче 2 мы ищем, какие два числа вытянул каждый из участников лотереи. Поэтому составить для решения задачи 2 «усовершенствованную» таблицу настолько просто, что мы даже не будем приводить ее здесь. Решить задачу 2 при помощи «усовершенствованного» метода также не составляет труда. Все

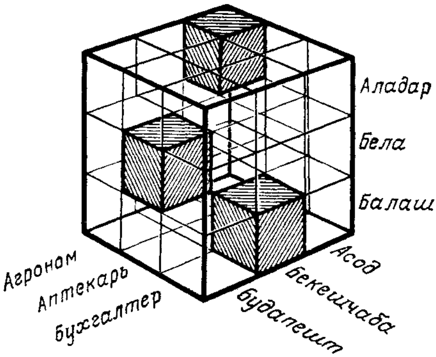


Рис. 48.

частичные решения (или, что то же, «окончательные результаты») однозначно определены и получаются «сами собой» одно за другим до тех пор, пока не выстраиваются в полное решение задачи.

Неплохо было бы воспользоваться усовершенствованным методом составления таблиц и при решении задачи 3, однако в этом случае ситуация значительно сложнее. Ведь в этой задаче в отличие от двух предыдущих речь идет о соответствии не между парами (коробочки — шарики, участники лотереи — карточки с числами), а между тройками «объектов»: имя, профессия и город, в котором живет человек. Поэтому, если при решении задачи 3 мы захотим воспользоваться усовершенствованным методом составления таблиц, то нам понадобится не двумерная (плоская), а трехмерная (объемная) таблица. Выглядит она так, как показано на рис. 48. Однако пользоваться «таблицей» в такой пространственной форме весьма неудобно. Поэтому для того, чтобы усовершенствованный метод составления таблиц можно было применять к решению не только двумерных, но и «трехмерных» задач (то есть задач, в которых требуется установить взаимосвязь между какими-то тремя признаками), его необходимо предварительно усовершенствовать. В дальнейшем об усовершенствованном методе и его применении к трехмерным таблицам мы расскажем более подробно (см. часть III).

(Иногда может встретиться и задача «промежуточной размерности». Например, задача 4 по внешнему виду напоминает трехмерную, но, как мы уже знаем, распадается на две двумерные задачи. Каждую из них можно решать в отдельности: сначала выяснить звания офицеров и лишь затем определить, кто из офицеров в каком роде войск служит. Задача 3 не допускает такого сведения к двум двумерным задачам.)

Разумеется, если мы захотим решать задачи, размерность которых выше трех, то есть равна четырем, пяти и т д., то наглядный метод составления таблиц будет все менее и менее применимым.

ЧАСТЬ II

9 ПРИДУМАЙТЕ ЗАДАЧУ

А. Когда мы приводим готовое решение, это отнюдь не означает, будто мы не допускаем мысли о том, что читатель сумеет найти свое собственное решение, отличное от предлагаемого. Наоборот, вполне возможно, что его решение окажется гораздо более изящным и неожиданным, чем наше.

В задаче 4*, так же как и в задачах 1 и 2, необходимо было выяснить принадлежность офицеров к определенным родам войск, установить соответствие между множеством коробочек и множеством шариков, несколькими участниками лотереи и множеством пар карточек с числами. Если не слишком придираться к несколько странно звучащему выражению и считать, что и людей вполне допустимо «измерять» множествами, то перед нами откроется возможность использовать единую математическую терминологию. Мы скажем, что во всех перечисленных нами задачах требовалось установить соответствие между элементами двух множеств.

Если мы хотим на голый остов рисунков, приведенных в условии задачи, нанести живой, содержательный текст, то прежде всего нам необходимо придать конкретный смысл элементам этих двух множеств. Из рис. 49—53 видно, что мы должны взять множества, каждое из которых содержит по 6 элементов. Вот мы и решили выбрать в качестве элементов первого множества людей, а в качестве элементов второго — журналы. Сведения о том, какому журналу отдает предпочтение тот или иной «персонаж» задачи, устанавливают соответствие между множествами.

Итак, имеется трое детей — Аги (A), Бори (B) и Чаби (C) и трое взрослых — тетя Дора (D), дядя Элмер (E) и дядя Ферн (F). Каждый из них выписывает по одному журналу и с удовольствием прочитывает в нем все интересующие его разделы. Разумеется, ни взрослым, ни детям не приходит в голову еще и в киоске покупать те журналы, на которые у них имеется подписка (ведь два экземпляра никому не нужны).

Любимые журналы: «Жизнь и наука», «Новая письменность», «Молодежный журнал», «Садоводство и виноградарство», «Женский журнал» и «Фильм, театр, музыка» [1].

Поскольку у каждого из «великолепной шестерки» есть один любимый журнал и таких любимых журналов всего шесть, то никакие два подписчика не получают один и тот же журнал, ибо в противном случае по крайней мере один журнал остался бы «без хозяина». Следовательно, каждому из шести человек соответствует один журнал и каждому из шести журналов — кто-то из детей или взрослых. Пользуясь обычной математической терминологией, можно сказать, что между двумя множествами (людей и журналов) существует взаимно-однозначное соответствие.

Пусть столбцы означают читателей, а строки — журналы. И те, и другие расположены по порядку.

1. Дяде Элмеру дети сказали, что статьи о сельском хозяйстве кажутся им довольно скучными. «Какую-то там отдельную статью на сельскохозяйственную тему бывает и интересно прочесть, но читать подряд все статьи о сельском хозяйстве нам не хочется». «Что же, — согласился дядя Элмер, — сельское хозяйство — дело важное и нужное, но, если у человека вообще нет склонности к биологии, тут уж ничего не поделаешь. Я, например, не люблю читать журнал «Жизнь и наука» только потому, что в нем публикуют слишком много статей на биологические темы».

Сделаем выводы из того, что нам удалось узнать. Итак, Аги, Бори, Чаби и дядя Элмер не выписывают журнал «Садоводство и виноградарство», а дядя Элмер к тому же не выписывает журнал «Жизнь и наука». Исключить детей из числа возможных подписчиков «Жизни и науки» мы не можем. В этом журнале лишь отдельные статьи посвящены проблемам сельского хозяйства, но отнюдь не весь журнал целиком. Из «любимых» журналов лишь «Садоводство и виноградарство» посвящен исключительно сельскохозяйственной тематике. Поскольку из всех перечисленных нами журналов статьи на биологические темы публикуют лишь «Жизнь и наука» и «Садоводство и виноградарство», а дядя Элмер не жалует даже первый из них, то его заведомо можно исключить из числа подписчиков журнала «Садоводство и виноградарство».

2. Дядя Элмер весьма холодно относится к спорту и к современному джазу.

О спорте и джазе пишет лишь «Молодежный журнал». Таким образом, дядя Элмер не выписывает «Молодежный журнал».

3. Хотя дядя Элмер холостяк, однако он время от времени покупает отдельные номера «Женского журнала». Его интересуют превосходные статьи по искусству, которые там публикуются.

Итак, дядя Элмер не может быть подписчиком «Женского журнала».

4. Двое мужчин из числа взрослых членов нашей небольшой компании охотно раздобыли последний номер журнала «Фильм, театр, музыка»: кто-то сказал им, что в этом журнале печатаются биографии всех кинозвезд с портретами.

---

[1] Журналы, издаваемые в Венгерской Народной Республике. — *Прим. перев.*

Отсюда следует, что Элмер и Ференц не выписывают журнал «Фильм, театр, музыка». Замечание относительно кинозвезд добавлено лишь из стилистических соображений и не несет никакой информации.

5. Все дети не любят читать толстые литературные журналы, а Бори к тому же не переносит серьезную музыку.

Среди любимых журналов есть лишь один литературный журнал «Новая письменность», а статьи о серьезной музыке публикует лишь журнал «Фильм, театр, музыка». Следовательно, Аги, Бори и Чаби не выписывают «Новую письменность», а Бори не выписывает еще и «Фильм, театр, музыку».

6. Тетя Дора как-то раз дала Бори почитать один из номеров «Женского журнала», в котором был интересный фасон женского платья.

Из условия 6 следует, что Бори не выписывает «Женский журнал», но отнюдь не следует, что тетя Дора является подписчиком

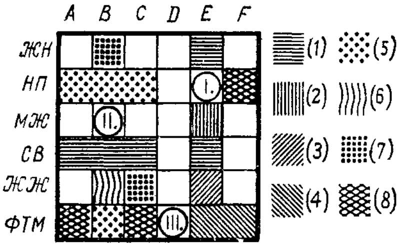


Рис. 49.

этого журнала. Замечание о фасоне женского платья не содержит полезной информации — это лишь словесная «приправа»

7. В свою очередь Бори дал почитать «Женский журнал» Чаби, а взамен получил журнал «Жизнь и наука».

Итак, у Бори нет своей «Жизни и науки», а у Чаби — «Женского журнала». Следовательно, Бори не выписывает «Жизнь и науку», а Чаби «Женский журнал».

8. Когда дядя Фери увидел в киоске тот самый номер «Фильма, театра, музыки», о котором говорилось в условии 4, он купил его вместе с очередным номером «Новой письменности» и, придя домой, спрятал (должно быть, от жены). Аги и Чаби нашли журнал и из любопытства «стянули» его у дяди Фери.

Итак, дядя Фери не может быть подписчиком журнала «Новая письменность», а Аги и Чаби — подписчиками журнала «Фильм, театр, музыка», ибо в противном случае им незачем было бы «похищать» его у дяди Фери. Все остальные подробности несущественны.

Б. Ответ на этот вопрос мы получим, внеся все условия задачи в одну таблицу (рис. 49). (Напомним, что точно так же мы поступали при решении задач 4* и 7.) Из рис. 49 мы видим, что «запреты» (отрицания), содержащиеся в условиях задачи в трех местах, заполняют все клетки столбца или строки, кроме одной. Таким образом, мы получаем сразу три частичных решения (не зависящие одно от другого). Сколько условий необходимо взять для получения каждого из трех первых частичных решений?

I: условия 1 + 2 + 3 + 4, то есть 4 условия.
II: условия 1 + 5 + 6 + 7, то есть 4 условия.
III: условия 4 + 5 + 8, то есть 3 условия.

Итак, самая короткая (и, следовательно, самая простая) комбинация условий приводит к III частичному решению.

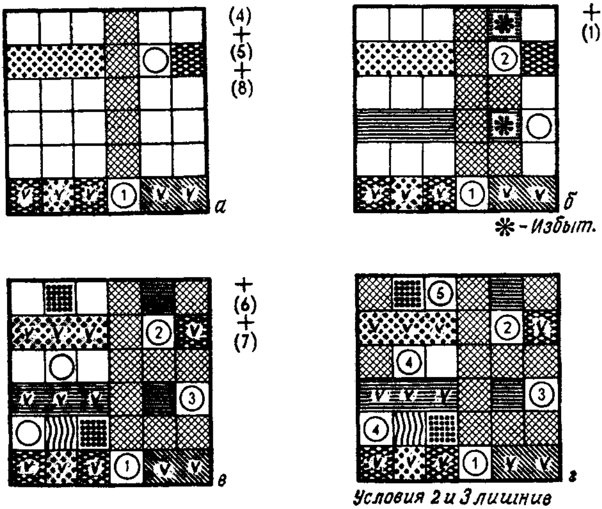


Рис. 50.

В. На первый взгляд кажется, что какая-либо избыточность в условиях задачи отсутствует. Все восемь «запретов», содержащиеся в условиях задачи, нигде не перекрываются.

Рассмотрим, однако, всю совокупность условий. Правда, сама задача не была сформулирована в явном виде, но такой интересный метод постановки задач сулит нам немало сюрпризов!

Нам уже известно, что, начав с III результата, мы поступим наиболее рационально.

На рис. 50, словно в кадрах кинофильма, показано, как сменяют друг друга различные фазы решения. Такой способ мы уже использовали раньше и будем применять в дальнейшем. Его преимущество состоит в том, что он не требует никаких более подробных описаний. Роль текста полностью берут на себя «кадры кинофильма» — рисунки. Именно поэтому при рассмотрении их необходимо быть особенно внимательным!

Пустой кружок означает окончательный результат (частичное решение). Номера внутри кружка указывают последовательность, в которой получены результаты. Как и прежде, все клетки, стоящие в одной строке или в одном столбце с клеткой, помеченной кружком, мы будем исключать (и тем самым суживать круг поисков — сокращать информацию), покрывая их двойной косой штриховкой. На рис. 50 мы видим новое обозначение — клетки, отмеченные галочкой. Галочка означает, что соответствующее условие уже использовано для получения частичного решения. Из рис. 50, *а* и *б* ясно,

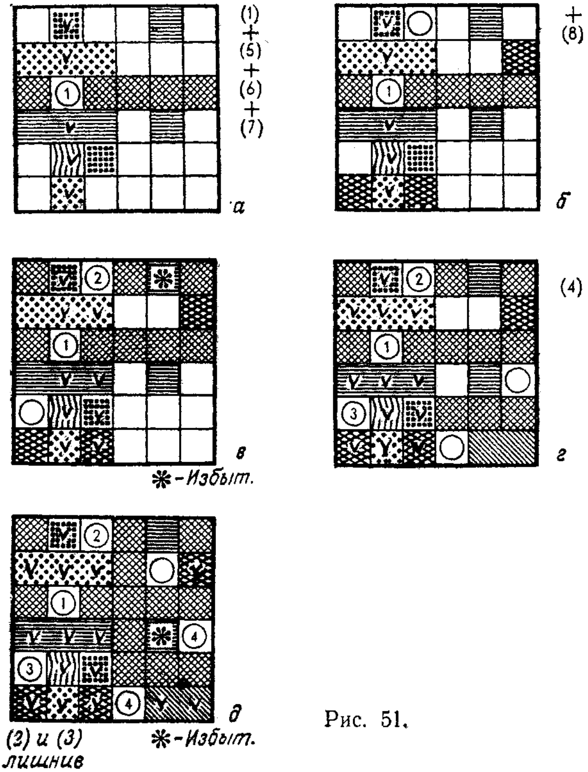


Рис. 51.

чем удобно такое обозначение. Результат *2* на рис. 50, *а* мы получаем из условий 5 + 8, используя сужение информации, вызванное результатом 1 (единственная свободная клетка во второй строке стоит на пересечении ее с пятым столбцом), после чего покрываем двойной косой штриховкой все оставшиеся еще свободными клетки пятого столбца. «Запрет» на клетки, стоящие на пересечении этого столбца с первой (сверху) и четвертой строками, уже сыграл свою роль при выводе результата 1, поэтому исключать сейчас эти клетки необязательно. Таким образом, оба запрета, содержащиеся в условии 1 и приходящиеся на пятый столбец, излишни. Такая разновидность избыточности не встречалась нам ранее и носит более скрытую форму: «лишняя» информация приходится на долю отсекаемой при сужении

Окончательный вид решения представлен на рис. 50, *г*: оно получилось в виде цепочки результатов, следующих один за другим в строго определенном порядке. Однако два условия задачи (второе и третье) мы до сих пор не использовали. Если нанести их на рис. 50, *г* (что не сделано), то все они придутся на ранее заштрихованные клетки пятого столбца. Следовательно, эти условия можно вообще не изображать на рис. 50, *г*. Правда, ни условие 2,

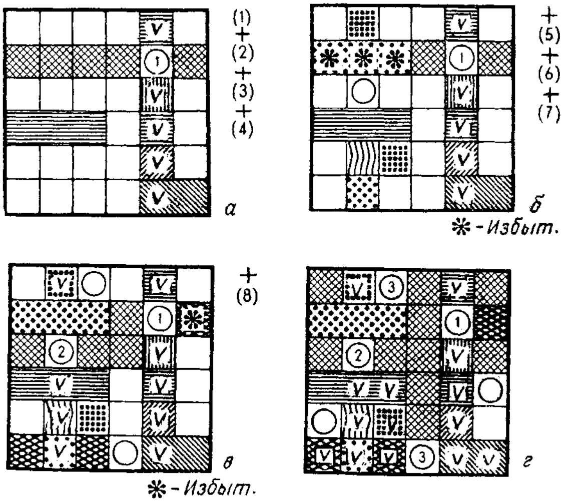


Рис. 52

ни условие 3 ничему не противоречат, но для решения они (как последние, «запоздалые») излишни, избыточны.

Начав со II результата, мы придем к решению, представленному на рис. 51. Нетрудно заметить, что и оно обладает такой же избыточностью, как и первое, но по другой причине. На этот раз запреты, вытекающие из результатов 2 и 4, делают излишней часть условия 1 (показанную на рис. 51, *в* и *д*). Условия 2 и 3 остаются неиспользованными.

Начав с результата 1, мы получили бы решение, изображенное на рис 52. Сначала оно довольно громоздко (большие наборы условий приводят к отдельным, «штучным» результатам), но затем процесс решения ускоряется и результаты начинают «попадаться» парами Избранный нами в этом решении путь довольно сложен, но зато использует все условия задачи. Избыточность имеется и в этом решении. Как видно из рис. 52, *б* и *в*, на этот раз излишними становятся результат 1 и часть условия 5, а также один из «запретов», содержащихся в условии 8.

Если вернуться к придуманному нами словесному обрамлению задачи, то окончательный результат можно сформулировать так:

Аги выписывает *«Женский журнал»*, *Бори* — *«Молодежный журнал»*, *Чаби* — журнал *«Жизнь и наука»*, *тетя Дора* — журнал *«Фильм, театр, музыка»*, *дядя Элмер* — *«Новую письменность»* и, наконец, *дядя Фери* — *«Садоводство и виноградарство»*. Разумеется, каждый читатель придумает свою формулировку задачи, не похожую на формулировки других читателей. Более того, мы надеемся, что таких вариантов будут многие тысячи, причем без единого повтора! И тем не менее, несмотря на все это разнообразие, рис. 53 позволяет решить любую из «придуманных» задач. Независимо от того, какие два множества из 6 элементов выберет читатель вместо

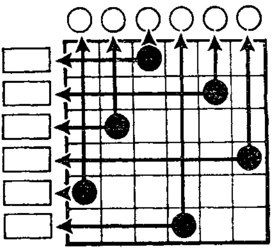


Рис. 53.

кружков и прямоугольников на рис. 53, независимо от того, в какой словесный наряд облачит читатель условия, соответствие между элементами этих двух множеств непременно будет таким, как показано на рис. 53 стрелками, исходящими из черных кружков.

В каком случае избыточность больше?

Мы видели, что избыточность второго типа, которая возникает при наложении запретов, вытекающих из полученных частичных решений, и запретов, содержащихся в условиях задачи, существенно зависит от выбранного нами способа решения. Если решения нумеровать так же, как результаты, с которых они начинаются, то можно сказать, что в решениях III и II лишними оказываются одни и те же условия, хотя и по разным причинам, а решение I «оставляет за бортом» лишь части двух условий.

При каком способе решения избыточность больше? Поверхностный ответ на этот вопрос гласит: во II и в III решениях, ибо в них лишними оказываются полностью два условия задачи и еще часть третьего условия, в то время как в I решении неиспользованными (и то частично) остаются лишь 2 условия задачи. Условия 2 и 3 краткие. Каждое из них содержит по одному элементарному запрету, в то время как в I решении «урезанные» условия 5 и 8 содержат гораздо более богатую информацию: условие 5 — четыре, а условие 8 — три элементарных запрета. Если каждый элементарный запрет рассматривать отдельно, независимо от того, каким условием задачи он порожден, то нетрудно заметить, что в третьем случае лишними остаются четыре элементарных запрета. В этом смысле все три решения обладают одинаково большой избыточностью.

Теперь уже должно быть ясно, как оценивать условия, перечисленные в формулировке задачи, и содержащиеся в этих условиях «запреты». Наиболее существенное содержание задачи составляют простые утверждения, например: «Бори не выписывает «Женский журнал»», «В красной коробочке нет красных шариков», «Бела не летчик» и т. д. Их мы и называем «элементарными запретами». Из них и строится задача. Рассматривая всю совокупность элементарных запретов, мы можем установить, существует ли решение, единственно ли оно и имеется ли избыточность. Такая точка зрения позволяет отвлечься от всего несущественного, о чем красноречиво повествуют условия задачи: от диалогов, различных деталей и т. д. — и вместо этого рассматривать небольшое число простейших утверждений.

10. СЛУЧАЙНОСТЬ ИЛИ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ?

Если рассмотреть еще раз решения предыдущей задачи, изображенные на рис. 50, 51 и 52, то нетрудно заметить, что получение первого частичного решения во всех случаях требовало наложения 5 элементарных запретов (на рис. 50, *а*, 51, *а* и 52, *а* эти запреты соответствуют клеткам, отмеченным галочками, причем сам результат порождал 5 новых элементарных запретов (клетки с двойной косой штриховкой). Для получения второго частичного решения (рис. 50, *б*, 51, *в* и 52, *в*) потребовалось лишь 4 элементарных запрета, а само решение в свою очередь позволило наложить 4 новых запрета и т. д. Ясно, что во всех аналогичных случаях мы столкнемся с точно такой же ситуацией.

Если мы хотим установить взаимно-однозначное соответствие между элементами двух множеств (каждое из которых содержит по 6 элементов), прибегнув лишь к элементарным запретам, и воспользоваться тем методом решения, о котором мы уже столько говорили, то для получения первого частичного решения нам понадобятся 5 элементарных запретов для того, чтобы в какой-то строке или в каком-то столбце исключить все клетки, кроме одной.

Ход рассуждений наглядно представлен на рис. 54. То, что эти рассуждения носят более общий характер и не связаны непосредственно с задачей 9, подчеркивается выбором таблицы: мы не повторяем рисунки к задаче 9, а приводим совершенно произвольную таблицу с тем же числом строк и столбцов. Обозначим единицами те элементарные запреты, «вычитанные» из воображаемых условий задачи, которые необходимы для получения первого частичного решения. Из каких именно условий задачи «вычитан» тот или иной запрет, для нас теперь несущественно.

Первое решение порождает 5 новых запретов, суживающих круг дальнейших поисков решения. Если частичное решение было получено вычеркиванием (заполнением единицами) 5 клеток строки, то новые запреты заполняют 5 клеток столбца; если единицы заполнили 5 клеток столбца, то новые запреты заполняют строку. (На рис. 54 новые запреты, порожденные первым результатом, обозначены единицами на темном фоне.)

Итак, на исходном рисунке имеются одна строка и один столбец, все клетки которых уже «сыграли свою роль».

Для получения следующего частичного решения достаточно взять лишь 4 новых элементарных запрета: ведь в той строке или в том столбце, которым принадлежит следующее частичное решение, один запрет уже содержится. В свою очередь второе частичное решение порождает 4 новых запрета (сужение информации!). Если оно было получено из рассмотрения клеток какой-то строки, то новые запреты заполняют столбец, и, наоборот, если запреты, порождающие второе частичное решение, заполняли столбец, то выте-

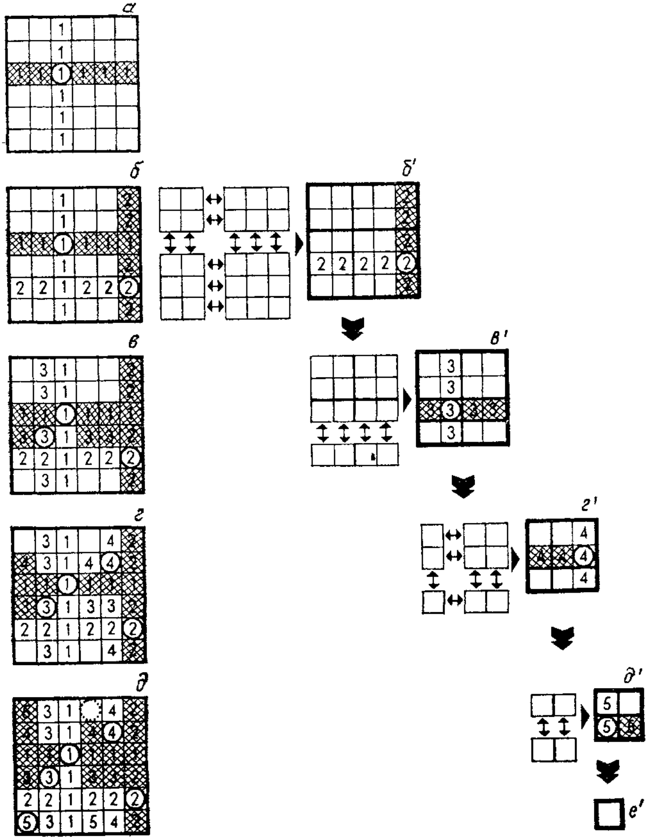


Рис. 54.

кающие из него запреты заполнят строки. Итак, для получения второго частичного решения достаточно лишь 4 запретов, ибо в столбце или в строке, которым принадлежит соответствующая клетка, уже имеется какой-то ранее введенный запрет. (На рис. 54, *б* запреты, порождающие второе частичное решение, обозначены цифрами 2, а запреты, вытекающие из второго решения, — цифрами 2 на темном фоне.)

Итак, теперь на рис. 54 уже полностью заполнены две строки и два столбца.

Продолжая рассуждать как и прежде, мы убедимся в том, что для получения третьего частичного решения необходимо взять 3 новых запрета (круг поисков решения продолжает сжиматься[1]), содержащихся в условиях задачи. В свою очередь третье частичное решение даст 3 новых запрета (рис. 54, *в*). Следовательно, мы заполним все клетки уже трех строк и трех столбцов.

Для получения четвертого частичного решения необходимо взять 2 новых запрета из условий задачи. При этом мы получим также 2 других запрета (см., например, рис. 54, *г*). После этого полностью обследованными можно считать уже четыре строки и четыре столбца. Следовательно, для получения пятого частичного решения необходимо взять лишь 1 новый элементарный запрет, содержащийся в условиях задачи. При этом мы получим еще один новый запрет.

Поскольку теперь уже полностью заполнены пять строк и пять столбцов, то в таблице осталась одна-единственная незаполненная клетка. Следовательно, для получения шестого частичного решения нам не нужна никакая дополнительная информация.

Предыдущие рассуждения мы сумели расположить таким образом, что каждое частичное решение позволяло вычеркивать или стирать одну строку и один столбец. Задача в буквальном смысле слова сокращалась (на рис. 54 показано, как протекал процесс сокращения). Таким образом, для получения каждого последующего результата нам требовалось на 1 элементарный запрет, содержащийся в условиях задачи, меньше, чем для получения предыдущего.

Пользуясь этими данными, подсчитаем, сколько элементарных запретов необходимо взять для того, чтобы получить однозначное решение задачи:

для 1-го результата — 5 элементарных запретов из условий задачи,

для 2-го результата — 4 элементарных запрета из условий задачи,

для 3-го результата — 3 элементарных запрета из условий задачи,

для 4-го результата — 2 элементарных запрета из условий задачи,

для 5-го результата — 1 элементарный запрет из условий задачи,

для 6-го результата — 0 элементарных запретов из условий задачи.

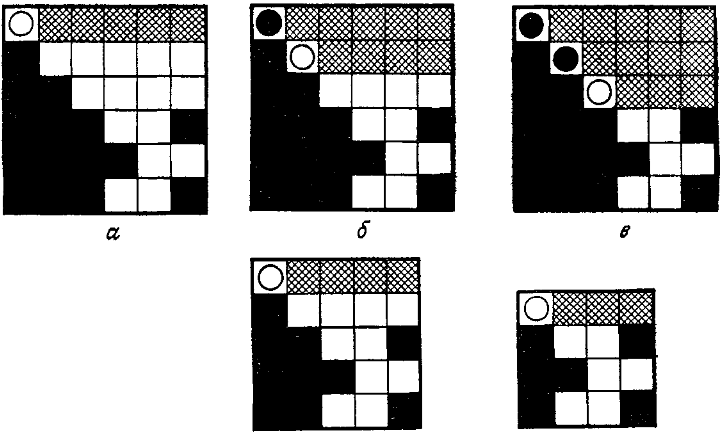
Таким образом, для получения однозначного решения всего необходимо взять 15 элементарных запретов.

Приведенный нами ход рассуждений (и еще в большей степени рис. 54) показывает, что во всех подобных случаях 15 элементарных запретов достаточно для получения однозначного решения. Элементарные запреты, содержащиеся в условиях задачи, частичные решения и порождаемые ими запреты заполняют все клетки таблицы. (Это ясно видно из рис. 54; при желании в правильности нашего утверждения можно убедиться, и не прибегая к рисунку, а используя простые выкладки. В условиях задачи содержится 15 элементарных запретов, еще 15 запретов порождают выводимые из них частичные решения Таким образом, всего имеется 30 элементарных запретов. Если к этому числу прибавить шесть частичных решений, то мы получим 36 заполненных клеток. Итак, все возможности исчерпаны.) В таблице не осталось ни одной свободной клетки: если из условий задачи следуют еще какие-нибудь элементарные запреты, то они должны совпадать с предыдущими, то есть порождать избыточность.

Например, поскольку из условий задачи 8 следовало 19 элементарных запретов, то в каком бы порядке мы ни использовали их для решения задачи, четыре запрета неизменно оставались бы лишними (из-за избыточности условий).

11. БЕЗ СЛОВ

а. Взяв первый столбец слева, мы получим однозначное (хотя и лишь частичное) решение (рис. 55, *а*). Все остальные клетки первой строки можно исключить из дальнейшего рассмотрения, покрыв



а *б* *в* *б** *в**

Рис. 55.

их штриховкой. Аналогичным образом мы получаем затем частичные решения, соответствующие второму, а потом и третьему столбцам (рис. 55, *б* и *в*), после чего «поставщиком» решений становится последний столбец (рис. 56, *а*).

Однако все остальные частичные решения уже не являются однозначно определенными. И в четвертом, и в пятом столбцах, так же как и в четвертой, и в пятой строке, имеются по две свободные клетки, по две открытые возможности. Рассмотрим, например, четвертую строку. Если из двух свободных клеток мы выберем левую и поместим в нее кружок, то получим решение (в остальном — однозначно определенное), изображенное на рис. 56, *б*. Выбрав правую свободную клетку, мы получим аналогичное решение, которое показано на рис. 56, *в*.

Таким образом, задача 11а допускает два решения.

Происходящее в процессе решения «сужение информации» наглядно показано на рисунках со звездочками (рис. 55, *б** и *в**, рис. 56, *а**, *б** и *в**). Решение получается точно таким же, как и на соответствующих рисунках без звездочек. Впрочем, это и понятно: ведь рисунки со звездочками представляют собой не что иное, как наиболее существенную часть рисунков без звездочек.

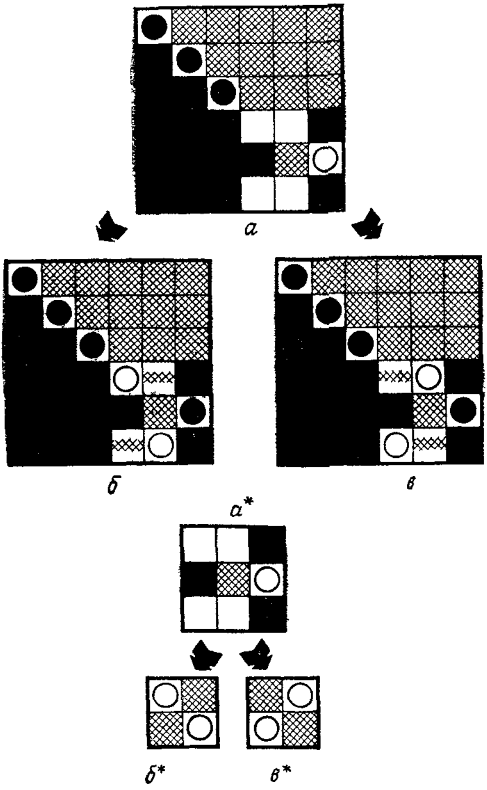


Рис. 56.

б. Однозначное частичное решение позволяет получить лишь первый столбец (рис. 57, *а*). Пользуясь этим решением, все остальные клетки последней строки можно заштриховать.

Других однозначно определенных частичных решений нет. Если отбросить уже заполненные «до отказа» первый столбец и последнюю строку, то во всех остальных строках и столбцах останутся по две свободные клетки.

Рассмотрим, например, второй столбец. Если мы поместим кружок в его верхнюю свободную клетку, то получим решение, все дальнейшие шаги которого однозначно определены. Оно показано на рис. 57, *б*. Если же мы поместим кружок в нижнюю свободную клетку, то получим аналогичное решение, изображенное на рис. 57, *в*.

Итак, эта задача также допускает два решения.

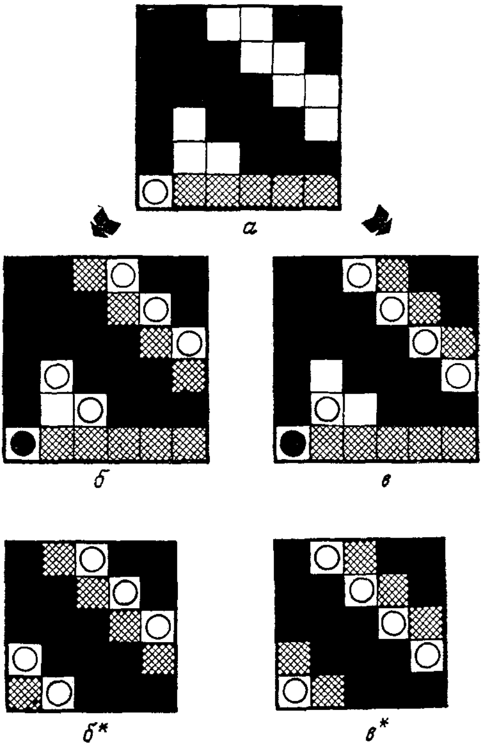


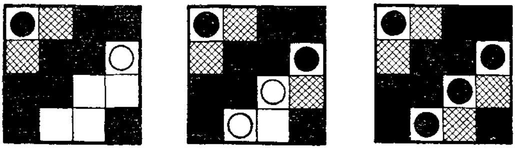
Рис. 57.

После того как получено первое однозначно определенное частичное решение, задача претерпевает «сокращение». Именно «сокращенная» задача допускает два решения (которые и составляют основное различие между двумя решениями всей задачи), показанные на рис. 57, *б** и *в**.

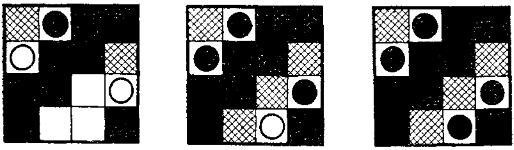
12. СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ?

Даже беглого взгляда достаточно, чтобы понять, что ни в одной из задач не существует однозначно определенного первого частичного решения. Поэтому первый шаг в решениях обеих задач нам придется делать совершенно произвольно.

а. В каждой строке и в каждом столбце имеются по два возможных «кандидата» для первого хода: две свободные клетки. Рассмотрим, например, первый столбец. Если мы поставим черный кружок в его верхнюю клетку, то все остальные частичные решения



а *б* *в*

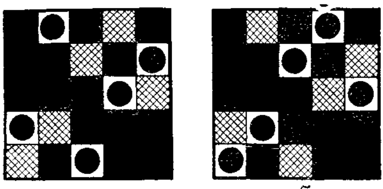


г *д* *е*

Рис. 58.

уже будут следовать однозначно одно за другим, образуя неразрывную цепочку (рис. 58, *а* и *б*). Получающееся при этом полное решение изображено на рис. 58, *в*. Если в первом столбце мы поставим кружок в нижней свободной клетке (рис. 58, *г*), то получим второе полное решение (рис. 58, *е*). Таким образом, эта задача *допускает два решения*.

б. В этой задаче «запрещенные» клетки выстроены менее правильно, чем в предыдущей (к тому же число столбцов и строк воз-



а *б*

Рис. 59.

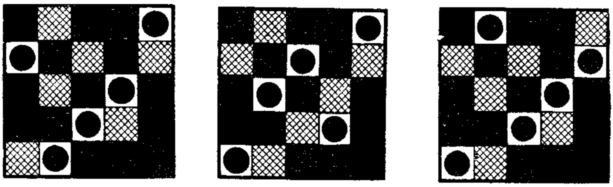
росло на 1). Тем не менее эта задача лишь на первый взгляд кажется сложнее предыдущей, в действительности же решить ее можно таким же способом, как и в случае *а*. Применяя его, находим, что задача *имеет два решения*. Они оба представлены на рис. 59, *а* и *б*.

в. Разумеется, совершенно безразлично, будем ли мы в этой задаче рассматривать строки или столбцы. Нетрудно заметить, что строки и столбцы переходят друг в друга при зеркальном отражении: весь рисунок симметричен относительно главной диагонали, соединяющей левый верхний угол таблицы с правым нижним.

Для определенности выберем строки. С какой строки начать? Во второй строке имеются три пустые клетки, во всех остальных таких клеток по две. Поэтому на первый взгляд может показаться, что начинать выгоднее не со второй строки: тогда выбирать придется лишь одну из двух возможностей, одну из двух дорог, ведущих от «развилки» к решению (или, быть может, в тупик). Если же мы начнем со второй строки, то для «дебюта» у нас будут уже три возможности, от «перепутья» куда-то вдаль поведут три дороги.

Однако первое впечатление в данном случае оказывается ошибочным. Решать задачу проще, если начать именно со второй строки.

Итак, начнем с того, что поместим черный кружок в левую, среднюю или правую свободную клетку второй строки (поскольку



а *б* *в*

Рис. 60

во второй строке имеются три свободные клетки). После того как первый шаг сделан, весь дальнейший ход решения во всех трех случаях однозначно определен. Окончательный вид каждого решения представлен на рис. 60. Итак, данная задача допускает три решения.

Если бы мы начали не со второй, а с любой другой строки, то для выбора первого хода у нас имелись бы лишь две возможности, но при этом цепочка однозначно определенных частичных решений в каждом случае непременно обрывалась бы. Иначе говоря, начав с любой строки, отличной от второй, мы не смогли бы получить три решения.

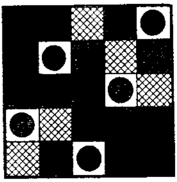
13. НЕБОЛЬШАЯ ПЕРЕСТАНОВКА

а. Эта таблица очень похожа на одну из таблиц предыдущей задачи, она напоминает таблицу, изображенную на рис. 3, *б*.

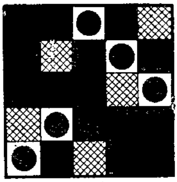
Рассматриваемая нами задача отличается от задачи, изображенной на рис. 3, *б*, лишь тем, что в ней переставлены первые две строки. Отсюда ясен план наших действий: произведя соответствующую перестановку в решении задачи 12б (то есть в рис. 59, *а* и *б*), мы получим решение нашей задачи (рис. 61, *а* и *б*).

Итак, взяв любое решение задачи 12б и переставив первые две строки таблицы (это необходимо для того, чтобы перевести рис. 3

в рис. 4), мы получим таблицу, которая служит решением задачи 13а. Верно и обратное утверждение: взяв любое решение задачи 13а и переставив в нем первые две строки, мы получим некоторое решение задачи 12б. Таким образом, между решениями этих двух задач



а



б

Рис. 61.

устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Отсюда, в частности, следует, что обе задачи имеют одинаковое число решений.

Примечание. Задачи 12б и 13а по существу представляют собой одну и ту же задачу, принципиальных различий между ними нет. В этом нетрудно убедиться, если вспомнить о первоначальном смысле наших таблиц. Например, если в задаче 4* мы переставим в каком-то другом порядке все строки таблицы, то это будет лишь означать, что названия родов войск, о которых говорится в условиях задачи, взяты в иной последовательности. Ясно, что такая перестановка никак не сказывается на существе задачи.

Задача остается неизменной и в том случае, если мы переставим столбцы (в задаче 4* перестановка столбцов означала бы, что мы рассматриваем «действующих лиц» в ином порядке).

Из всего сказанного можно сделать следующий вывод, что если, решая двумерную задачу, мы каким-либо образом переставим строки или столбцы в таблице, то смысл задачи от этого не изменится и, следовательно, решение (с точностью до поправок, вызванных перестановкой) останется таким же, как прежде.

б. Эта задача отличается от задачи 12в лишь первыми двумя столбцами. Поэтому из сказанного ранее следует, что задача 13б, так же как и задача 12в, имеет три решения. (Таблицы для этих решений получаются после перестановки первых двух столбцов таблиц, изображенных на рис. 60.)

в. Эта задача существенно труднее предыдущих. Возможно, что она покажется читателю совершенно новой, и тот примется решать ее самостоятельно. Ему удастся выяснить, что в этом случае задача имеет два решения. Однако при более внимательном рассмотрении можно установить, что интересующая нас задача получается при перестановке столбцов в таблице, изображенной на рис. 4, в следующем порядке: 4, 3, 5, 1 и 2. Следовательно, задача 13в, так же как и задача 13а (и ее «предшественница» — задача 12б), имеет два решения.

Таким образом, новые таблицы можно было бы не вычерчивать ни в этой задаче, ни в задаче 13а, ни в задаче 13б. (Без рис. 61 мы вполне могли бы обойтись, он приведен лишь для большей наглядности.)

14 В ЧЕМ ДЕЛО?

В решении задачи 10 мы подсчитали все частичные решения, для получения которых нам понадобилась информация (элементарные запреты), содержащаяся в условиях задачи. Однако при этом мы исходили из предположения о том, что все эти частичные решения определяются однозначно — так, что в каждой строке и в каждом столбце все клетки, за исключением какой-то одной, оказываются под запретом (либо содержащемся в условиях задачи, либо вследствие сужения информации). Иначе говоря, мы предполагали, что частичные решения связаны между собой в неразрывную цепочку и в совокупности образуют полное решение.

Однако в задачах 11а и 11б дело обстоит иначе: в задаче 11а последний шаг, а в задаче 11б — второй шаг нельзя выбрать однозначно. Что же касается задач 12а, 12б, 13а, 13б и 13в, то в их решениях однозначность нарушается с самого начала.

Этим и объясняется кажущееся противоречие: почему вывод, сделанный на примере задачи 10, утрачивает силу, если его применять к другим задачам.

Итак, как показывает задача 10, число элементарных запретов лишь тогда позволяет судить о величине избыточности, когда известно, что однозначно определенные частичные решения с необходимостью следуют одно за другим и в совокупности образуют полное решение задачи.

Однако тотчас же возникает вопрос: при каком условии однозначно определенные частичные решения образуют неразрывную цепочку, ведущую к полному решению?

О том, какой ответ существует на этот вопрос, мы расскажем в решении задачи 25.

15. НОВЫЕ ВАРИАЦИИ НА СТАРУЮ ТЕМУ

а. С какой бы строки или столбца мы ни начали решать задачу, нам придется выбирать одну из двух свободных клеток. Поэтому можно предположить, что выбор строки или столбца для начального хода в действительности безразличен.

Начнем с первой строки. Если мы поместим кружок в левую свободную клетку (рис. 62, *а*), то остальные однозначно определенные частичные решения расположатся так, как показано на рис. 62,*б*. Если же мы поместим кружок в правую свободную клетку (последнюю клетку в верхней строке, см. рис. 62, *в*), то возможно лишь такое однозначно определенное частичное решение, которое изображено на рис. 62, *г*.

Однако и в первом, и во втором случаях все клетки квадрата 2×2, стоящего в нижнем левом углу таблицы, остаются пустыми: все ранее полученные частичные решения располагались в квадрате 3×3, занимающем правый верхний угол таблицы. Все наши предыдущие ходы изображены на рис. 62, *а** — *г**. «Содержимое» клеток,

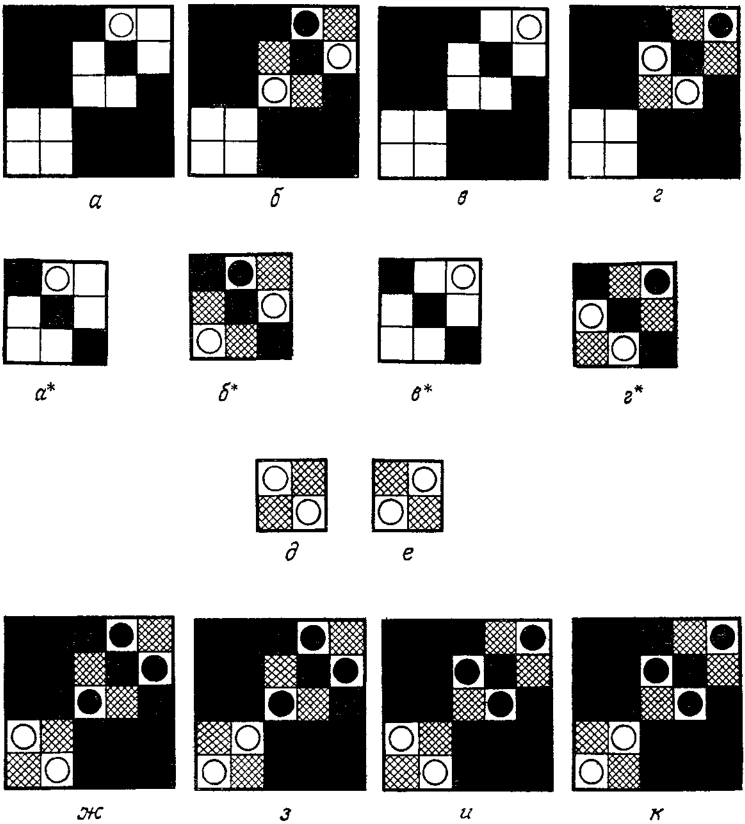


Рис. 62.

стоящих на пересечении двух последних строк и столбцов, «не ощущает» этих ходов. Следовательно, наши предыдущие ходы никак не влияют на заполнение квадрата 2×2, стоящего в нижнем левом углу таблицы. Иначе говоря, пустые клетки этого квадрата заполняются независимо от клеток, рассмотренных нами ранее. Какой бы рисунок (62, *б* или 62, *г*) мы ни вздумали продолжить, в любом случае квадрат 2×2, стоящий в левом нижнем углу, можно «заполнить» двумя способами. Они изображены на рис. 62, *д* и *е*.

Следовательно, мы вправе утверждать, что получим все решения этой задачи, объединяя «попарно» все способы заполнения свободных клеток, принадлежащих квадрату 3×3 в правом верхнем углу таблицы (рис. 62, *б** и *г**), и все способы заполнения свободных клеток, образующих квадрат 2×2 в ее нижнем левом углу (рис. 62, *д* и *е*). Таким образом, задача 15а допускает $2 \cdot 2 = 4$ решения (рис. 62, *ж* — *к*).

(Если бы мы начали решение с того, что вместо первой строки принялись бы заполнять первый столбец, то сначала у нас получились бы частичные решения, соответствующие двум способам заполнения квадрата 2×2 в левом нижнем углу таблицы, а затем два независимых частичных решения, соответствующих заполнению квадрата 3×3 в ее правом верхнем углу. Таким образом, и в этом случае заполнение двух квадратов происходило бы независимо.)

б. Рассуждения, аналогичные тем, которыми мы воспользовались при решении задачи 15а, показывают, что квадраты, стоящие в левом верхнем и правом нижнем углах таблицы (на этот раз оба квадрата имеют одинаковые размеры 3×3), заполняются независимо друг от друга.

Квадрат, стоящий в левом верхнем углу таблицы, по существу совпадает с квадратом, стоявшим в предыдущей задаче (15а) в нижнем правом углу таблицы. Все отличие состоит в том, что три строки (или, если угодно, три столбца) следуют в обратном порядке. Поэтому и этот квадрат можно заполнить двумя различными способами.

Если заполнение квадрата 3×3, стоящего в нижнем правом углу таблицы, начать с первого столбца, то перед нами откроются три возможности: три пустые клетки, в каждую из которых можно поместить кружок. В каждом из трех случаев все остальные клетки

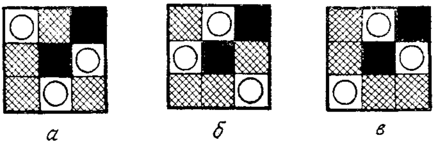


Рис. 63.

(стоящие в других столбцах) заполняются однозначно (рис. 63, *а* — *в*). Таким образом, нижний квадрат 3×3 можно заполнить тремя различными способами.

Поскольку в этой задаче при любом решении способ заполнения левого верхнего квадрата «сочетается» с каким-то способом заполнения правого нижнего квадрата, то всего она имеет $2 \cdot 3 = 6$ решений.

16. ПРИДУМАЙТЕ НОВУЮ ЗАДАЧУ

Понимать условия этой задачи следует так: таблицы на рис. 5 обладали тем свойством, что соответствующие им задачи распадались на две независимые «подзадачи». Таблицы с таким свойством и требуется начертить в этой задаче.

Любопытно, что на обоих рисунках имеются два сплошь черных прямоугольника или квадрата. Напрашивается предположение о том, что именно эти черные фигуры играют важную роль в «распаде» задачи на две независимые подзадачи. Однако высказать предположение означает лишь полдела: его еще необходимо доказать.

а. Что мы имеем в виду, когда говорим: «Задача распадается на две независимые подзадачи»?

Очевидно, в эти слова мы вкладываем следующий смысл. Обе задачи «меньших размеров» («подзадачи») можно решать совершенно независимо друг от друга, причем, взятые вместе, их решения образуют решение исходной, «большой» задачи. Полезно при этом не забывать о том смысле, который мы вкладываем в первоначальную задачу. Например, на рис. 5 «речь идет» о двух множествах, каждое из которых содержит пять элементов. Из этого рисунка видно, какой элемент второго множества соответствует каждому элементу первого множества. Следовательно, если мы обозначим каждый элемент первого множества прописными, а каждый элемент

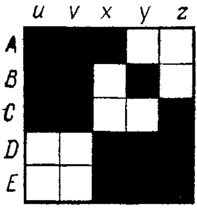


Рис. 64.

второго множества — строчными буквами (рис. 64), то из рисунка будет следовать, что элементу A первого множества могут соответствовать лишь элементы y или z второго множества, а элементу B — лишь элементы x или z и т. д. Таким образом, «расщепление» задачи, изображенной на рис. 5, на две независимые подзадачи означает, что элементам A, B и C первого множества могут соответствовать лишь элементы x, y и z второго множества, а элементам D и E первого множества — лишь элементы u и v второго.

Итак, для нас существенно, что каждое из двух исходных множеств можно разбить на два подмножества (первое — на $\{A, B, C\}$ и $\{D, E\}$, второе — на $\{x, y, z\}$ и $\{u, v\}$) так, что элементы подмножества $\{A, B, C\}$ первого множества будут соответствовать лишь элементам подмножества $\{x, y, z\}$ второго множества, а элементы подмножества $\{D, E\}$ первого множества — элементам подмножества $\{u, v\}$ второго множества. Разумеется, для этого подмножества $\{A, B, C\}$ и $\{x, y, z\}$, так же как и подмножества $\{D, E\}$ и $\{u, v\}$, должны содержать одинаковое количество элементов.

Переведем сказанное на более наглядный язык рисунков. Если элементы первого множества мы сопоставим строкам (или, наоборот, столбцам), а элементы второго множества — столбцам (или строкам), то на возможное соответствие между элементами будут указывать свободные клетки, стоящие на пересечении соответствующих строк и столбцов.

Итак, задача распадается на две независимые подзадачи, если на рисунке можно выбрать несколько строк и столько же столбцов так, что свободные клетки в выбранных строках всегда будут стоять лишь на пересечении с выбранными столбцами, а

свободные клетки в выбранных столбцах всегда будут стоять лишь на пересечении с выбранными строками.

Выбранные строки и столбцы составляют одну из двух независимых подзадач, а остальные строки и столбцы — другую подзадачу.

На рис. 5 (или, что то же, рис. 64) выбрать можно либо первые три строки и три последних столбца, либо две последние строки и два первых столбца. В зависимости от выбора мы получим две частичные задачи, которым на рисунке соответствуют квадрат

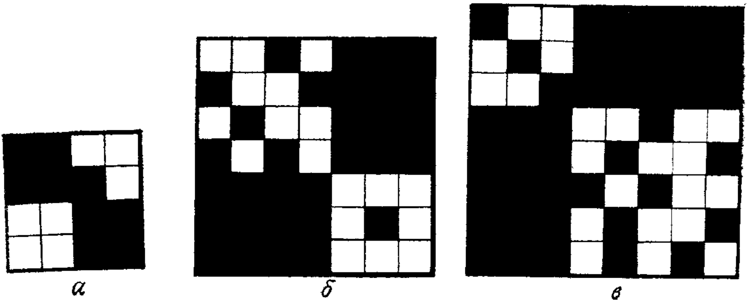


Рис. 65.

3 × 3, стоящий в левом верхнем углу, и квадрат 2 × 2, стоящий в правом нижнем углу.

Таким образом, высказанное нами ранее предположение было верным: черные прямоугольники и квадраты служат важным признаком, позволяющим заранее предсказывать «расщепление» исходной задачи на независимые подзадачи. Черные клетки, стоящие на пересечении выбранных строк и «оставленных», невыбранных столбцов (или, наоборот, выбранных столбцов и оставленных строк), означают, что между выбранными элементами одного множества и невыбранными элементами другого нельзя установить соответствия.

Сформулированный выше признак позволяет нам без труда начертить (по образцу и подобию рис. 5 и 6) те таблицы, которые требуется построить по условию задачи. Таблицы, выбранные нами из множества возможных решений (по одной таблице каждого типа), представлены на рис. 65.

б. Предположим, что одна задача допускает 3, а другая — 4 решения. Поскольку обе задачи независимы, то любое решение полной («большой») задачи можно представить в виде пары, состоящей из любого решения первой подзадачи, которому «сопутствует» любое решение второй задачи. «Партнером» первого «подрешения» может быть любое из четырех решений второй подзадачи. Выберем какое-нибудь решение первой «подзадачи». Его «партнером» может быть любое из четырех решений второй подзадачи. Следовательно, всего у полной задачи существует 4 решения, «начинающиеся» с выбранного нами решения первой подзадачи. Столько же решений мы получили бы, если бы начали с любого другого решения первой подзадачи. Таким образом, всего у исходной задачи существует $3 \cdot 4$ решений.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, можно показать, что если одна подзадача допускает k, а другая n решений, то число решений всей исходной задачи равно $k \cdot n$. Следовательно, если какая-нибудь задача допускает разложение на две независимые подзадачи, то число решений задачи равно произведению числа решений подзадач.

17. НИЧТО НЕ НОВО ПОД ЛУНОЙ

а. Свободные клетки стоят на пересечении первых пяти строк и первых пяти столбцов. Следовательно, задачу можно разложить на две независимые подзадачи: одну — соответствующую квадрату 5×5, стоящему в левом верхнем углу таблицы, и другую — соответствующую квадрату 5×5, стоящему в правом нижнем углу.

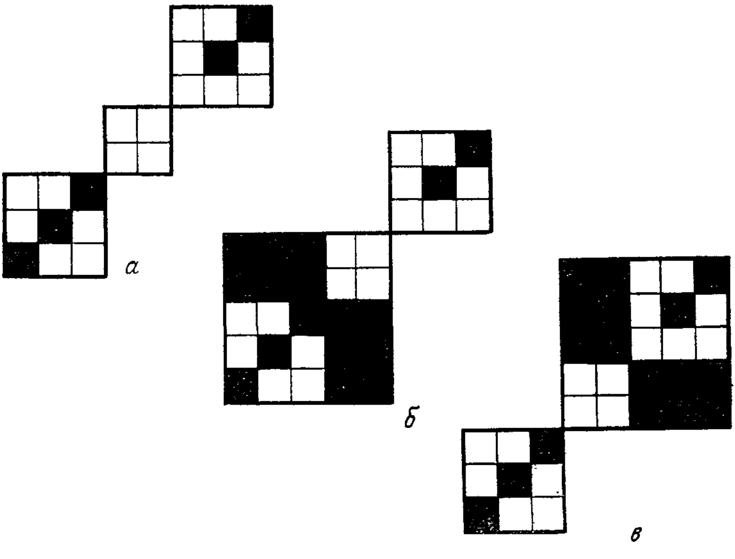


Рис. 66.

Обе задачи нам уже знакомы. Первая совпадает с задачей, изображенной на рис. 3, *б*, вторая — с задачей, изображенной на рис. 3, *в*. Поскольку задача 12б допускает 2, а задача 12в — 3 решения, то полное число решений задачи 17а равно $2 \cdot 3 = 6$.

б. В первых трех строках свободные клетки встречаются лишь на пересечении с тремя последними столбцами. Что же касается остальных строк, то две средние содержат свободные клетки лишь на пересечении с двумя средними столбцами. Поэтому, как нетрудно заметить, задачу можно разложить не на две, а на три независимые подзадачи (рис. 66, *а*). Все три задачи нам уже встречались: при решении задач 15а и 15б мы видели, что задача, соответствующая нижнему квадрату 3×3, допускает 2 решения, задача, соответствующая среднему квадрату 2×2, также допускает 2 решения, а задача, соответствующая верхнему квадрату 3×3, — 3 решения.

Отсюда следует, что квадрат 5×5, изображенный на рис. 66, *б* слева внизу, порождает $2\cdot2$ решений, а вся задача имеет $(2\cdot2)\cdot3 = 12$ решений.

Примечание. Из таблицы, изображенной на рис. 66, *в*, следует, что общее число решений задачи равно $2\cdot(2\cdot3)=12$. Однако в силу сочетательного (ассоциативного) закона умножения

$$(2\cdot2)\cdot3 = 2\cdot(2\cdot3) = 2\cdot2\cdot3.$$

Следовательно, полное число решений проще всего представить в виде произведения трех сомножителей (см. правую часть последнего равенства). Ясно, что те же рассуждения, которые мы использовали при решении задачи 17б, применимы во всех других аналогичных случаях: если исходную задачу можно разложить на независимые подзадачи, то число решений исходной задачи равно произведению числа решений всех подзадач.

в. Нетрудно убедиться в том, что в двух последних строках свободные клетки стоят лишь на пересечении с двумя первыми столбцами. Следовательно, задача допускает разложение на две независимые подзадачи. Однако для дальнейшего продвижения сделанный нами сейчас вывод не нужен. Дело в том, что рис. 5, *в* нам уже знаком. Какой из ранее встречавшихся рисунков он напоминает, обнаружить совсем нетрудно.

Переставив на рис. 5, *а* столбцы в следующем порядке: 1, 4, 5, 3 и 2, мы получим таблицу, соответствующую задаче 17в. Таким образом, эта задача допускает столько же решений, сколько их допускала задача 15а, то есть 4 решения.

г. Эта задача на первый взгляд кажется совершенно непохожей на предыдущие, поэтому, чтобы решить ее, мы воспользуемся не готовыми ответами, а ставшим уже привычным для нас методом.

I решение. В первой строке наш условный знак (кружок) можно поставить либо в самую левую, либо в самую правую клетку. И в том, и в другом случае своим первым ходом мы однозначно определим способ заполнения клеток четвертой строки, а также первого и последнего столбцов. То, что при этом получится, представлено на рис. 67, *а* и *б*.

Относительно того, каким образом надлежит заполнять последнюю строку и остальные столбцы, нам известно ничуть не больше, чем до того, как мы приступили к решению задачи. В этой строке и столбцах не произошло никаких перемен: все клетки, которые были свободными, так свободными и остались.

Почему? Ответ ясен: потому что в первой и в четвертой строках свободные клетки стоят лишь на пересечении с первым и последним столбцами (или, что то же, в первом и в последнем столбцах свободные клетки стоят лишь на пересечении с первой и с четвертой строками). Отсюда следует, что исходная задача распадается на две независимые подзадачи: одна соответствует фигуре, которую образуют первая и четвертая строки вместе с первым и последним столбцами, другая — фигуре, образованной всеми остальными строками и столбцами.

В правильности высказанного нами утверждения убедиться совсем нетрудно. Действительно, совершим две перестановки строк и столбцов в исходной таблице (рис. 67, *а* или *б*): сначала переставим

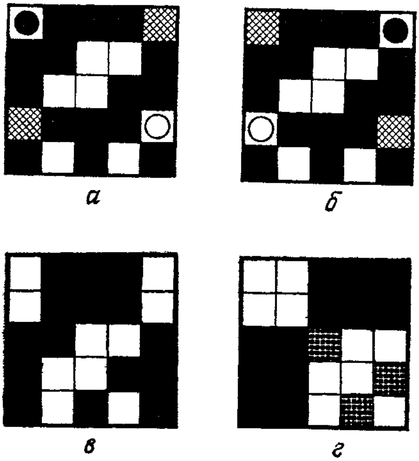


Рис. 67.

четвертую строку на второе место (вторую и третью сдвинем на одну строку вниз), а затем переставим последний столбец на второе место (сдвинув все столбцы, начиная со второго, на один столбец вправо) — рис. 67, *в*. Таблица, которая при этом у нас получится, изображена на рис. 67, *г*. Из нее ясно видно не только то, что

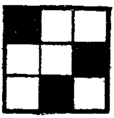


Рис 68.

интересующая нас задача распадается на две независимые подзадачи, но и что она совпадает с одним из вариантов задачи 15а (отличающимся от исходной задачи 15а перестановкой строк и столбцов). Отсюда следует, что рассматриваемая нами задача, так же как и задача 15а, допускает четыре решения.

II решение. Продолжим заполнение свободных клеток, начатое на рис. 67, *а* и *б*. Первая и четвертая строки, а также первый и пятый столбцы полностью заполнены и их можно «стереть». Оставшаяся «суженная» таблица представлена на рис. 68. Это не что иное, как зеркальное отражение квадрата 3×3, стоящего в средней части трех верхних строк на рис. 6, *в* (то есть рис. 5, *а*, столбцы которого переставлены и располагаются в порядке 1, 4, 5, 3 и 2). Нетрудно заметить, что если строки на рис. 6, *в* мы переставим в порядке 5, 2, 1, 4, 3, то получим рис. 6, *г*. Следовательно, рассматриваемая нами задача, так же как и задача 17в, допускает четыре решения.

Примечание. Решение задачи 17г показывает, что «расщепление» задачи на независимые подзадачи можно заметить даже в том случае, если соответствующие строки и столбцы таблицы расположены не подряд, а вперемешку с другими строками и столбцами, поскольку ясно, что от перестановки строк и столбцов в любом порядке суть задачи не меняется. Решение задачи 17д еще более убедительно подтверждает правильность этого утверждения: в этой задаче строки и столбцы «перемешаны» еще сильнее, чем в только что рассмотренной.

д. Если решение этой задачи начать с первой строки, то мы тотчас же заметим «квадратную рамку», образованную первой и пятой строками, а также первым и пятым столбцами.

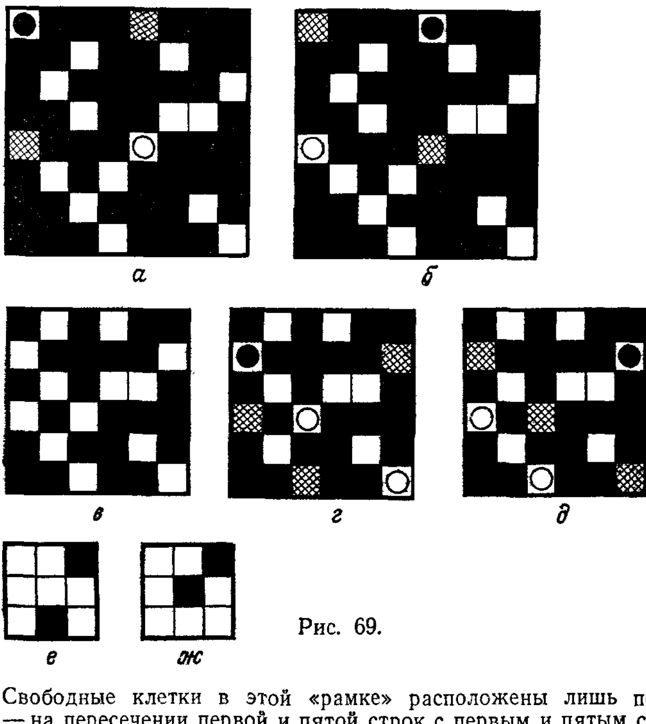


Рис. 69.

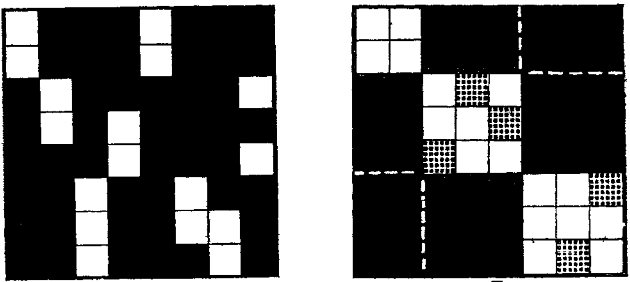
Свободные клетки в этой «рамке» расположены лишь по углам — на пересечении первой и пятой строк с первым и пятым столбцами. Следовательно, эти две строки и два столбца образуют подзадачу, независимую от остальной части исходной задачи. Соответствующая «рамке» задача допускает 2 решения (рис. 69, *а* и *б*).

После вычеркивания уже использованных строк и столбцов мы получаем «сокращенную» задачу. Ее таблица представлена на рис. 69, *в*. Начав заполнение таблицы, например, со второй строки, найдем еще 2 частичных решения (рис. 69, *г* и *д*).

Эти решения в свою очередь приводят к новому «сокращению» задачи, которое показано на рис. 69, *е*. Слегка изменив порядок строк (переставив вторую и третью строки) в таблице, изображенной на рис. 69, *е*, получим уже известную нам задачу (15б), допускающую 3 решения.

Итак, исходная задача имеет $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ решений.

Если переставить некоторые строки и столбцы, то существование трех независимых подзадач станет более очевидным. Начнем с перестановки строк. Первую подзадачу порождают первая и пятая



а *б*

Рис. 70.

строки на рис. 67, *а*, вторую — вторая, четвертая и шестая строки на рис. 67, *в*, или, что то же, третья, шестая и восьмая строки на рис. 67, *а*. Остаются последние три строки: вторая, четвертая и седьмая. Итак, расположим строки в следующем порядке: 1, 5, 3, 6, 8, 2, 4, 7 (рис. 70, *а*). Что касается столбцов, то первую подзадачу порождают первый и пятый столбцы (на рис. 67, *а*, или, что то же, на рис. 70, *а*), вторую — первый, третий и шестой столбцы на рис. 67, *в*, то есть второй, четвертый и восьмой столбцы на исходном рисунке, а третью подзадачу — все остальные столбцы (третий, шестой и седьмой). Переставив столбцы на рис. 70, *а*, расположим их в порядке 1, 5, 2, 4, 8, 3, 6 и 7. Структура получившейся в результате всех перестановок таблицы (рис. 70, *б*) настолько «прозрачна», что можно с уверенностью сказать: речь идет о несколько видоизмененной задаче 17б. Действительно, левый верхний угол нашей таблицы занимает квадрат 2×2, стоявший в задаче 17б в середине таблицы, центр таблицы занимает квадрат 3×3 (с двумя переставленными столбцами), стоявший в задаче 17б в левом нижнем углу таблицы, и, наконец, правый нижний угол занимает квадрат 3×3 (с двумя переставленными строками), стоявший в задаче 17б в правом верхнем углу таблицы. Отсюда следует, что рассматриваемая нами задача 17д, так же как и задача 17б, допускает 12 решений.

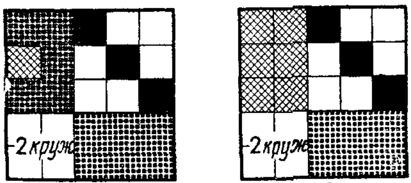
18 А ЕСЛИ ВЗГЛЯНУТЬ ПОВНИМАТЕЛЬНЕЕ?

а. Задача 18а во многом аналогична задаче 15а. Единственное различие состоит в том, что в задаче 18а первая клетка во второй строке осталась свободной.

Существенно ли такое различие? Можно было бы подумать, что существенно, поскольку теперь и во второй строке, и в первом столбце на одну свободную клетку больше. Однако в действительности «дополнительная» клетка не приводит к новым решениям.

В двух последних строках свободные клетки стоят лишь на пересечении с двумя первыми столбцами. Следовательно, ответ на вопрос задачи утвердительный: исходная задача распадается на две независимые части.

В каждой из двух последних строк мы должны поставить по одному кружку, а поскольку свободные клетки в этих строках стоят лишь на пересечении с двумя первыми столбцами, то эти два кружка заведомо окажутся внутри квадрата 2×2, стоящего в левом



а *б*

Рис. 71.

нижнем углу таблицы. Прямоугольник, стоящий в первых двух столбцах над квадратом 2×2, можно полностью заштриховать (рис. 71, *а*): ведь те два кружка, которые должны стоять в двух первых столбцах, непременно окажутся в клетках, стоящих на пересечении с двумя последними строками (то есть внутри квадрата 2×2, расположенного в левом нижнем углу таблицы).

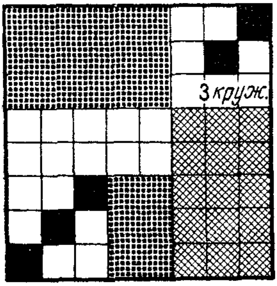
б. Задача распадается на две независимые подзадачи. Все сказанное в двух предыдущих абзацах полностью применимо и к этой задаче (рис. 71, *б*).

Сколько свободных (белых) и запрещенных (черных) клеток было первоначально внутри заштрихованного прямоугольника 2×3 в левом верхнем углу таблицы, совершенно безразлично. Они никак не влияют ни на число решений, ни на само решение.

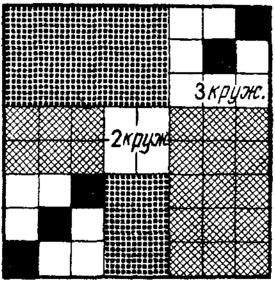
в. Задача распадается на независимые подзадачи. В первых трех строках свободные клетки стоят лишь на пересечении с тремя последними столбцами.

Следовательно, кружки, которые мы хотим расставить в трех первых строках, могут располагаться лишь в квадрате 3×3, стоящем в правом верхнем углу таблицы, а все клетки, стоящие в трех последних столбцах под этим квадратом, следует заштриховать (рис. 72, *а*).

Затем мы можем утверждать, что в двух средних столбцах (четвертом и пятом) свободные клетки находятся лишь на пересечении с двумя средними строками (четвертой и пятой). Следовательно, в двух средних строках кружки можно поставить лишь в центральный квадрат 2×2. Все остальные клетки, стоящие в четвертой и пятой строках, следует заштриховать (рис. 72, *б*).



а



б

Рис. 72.

Таким образом, рассматриваемая задача допускает разложение не на две, а на три независимые задачи, а поскольку задача, изображенная на рис. 72, *б*, уже встречалась нам раньше под «псевдонимом» — как задача 17б, то и решений она имеет столько же, сколько их имеет задача 17б.

Примечание. Третья задача (18в) может служить примером более сложного, более скрытого разложения исходной задачи на независимые подзадачи — разложения, проявляющегося лишь после того, как установлены запреты, «сужающие» круг поисков. К ранее известной нам «явной» форме разложения задачи на независимые части эта «скрытая» форма относится примерно так же, как скрытая форма избыточности, рассмотренная в задаче 9, относится к обычной, явной избыточности. Если мы сравним таблицу задачи 18в с таблицей задачи 15, то станет ясно, что признак, сформулированный в решении задачи 16, дает лишь достаточное условие того, что задача разлагается на несколько независимых задач, но это отнюдь не необходимое условие такого разложения. Если этот признак выполнен, то можно с уверенностью сказать, что данная задача разлагается на независимые составные части (подзадачи). Однако, как мы только что видели, задача может допускать разложение на независимые подзадачи и в том случае, когда этот признак не выполняется.

19. У КНИЖНОЙ ПОЛКИ

По условиям 1 и 2 каждый из ребят мог взять по одной книге. Действительно, из условия 2 следует, что никто из ребят не мог взять более одной книги. Взять меньше одной ребята также не могли, ибо тогда недостающих книг было бы менее пяти. Итак, речь идет об установлении соответствия между элементами двух множеств: множества из 5 ребят и множества из 5 книг. Элементарные запреты, содержащиеся в условиях 3—7, представлены на рис. 73 (В — Верн, Д — Диккенс, М — Мориц, Я — Янош Арань, А — Атилла Йожеф; буквы у строк обозначают имена ребят).

«Сводная таблица» всех элементарных запретов, содержащихся в условиях 3—7, изображена на рис. 74. Из этого рисунка видно, что второй столбец заполнен одними лишь черными клетками. Но

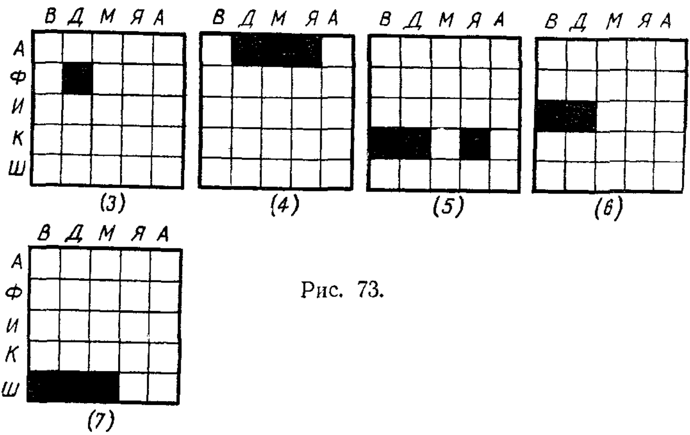


Рис. 73.

если какая-нибудь строка или какой-нибудь столбец сплошь черный, то это означает, что ни в одну клетку нельзя поставить кружок, то есть задача не имеет решения. В рассматриваемом нами конкретном случае задача не имеет решения потому, что никто из пяти ребят не мог взять томик Диккенса.

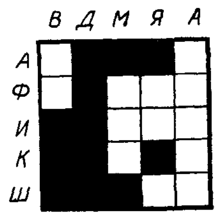


Рис. 74.

Отсутствие решения свидетельствует о том, что задача противоречива: не все данные задачи согласуются между собой. Следовательно, Пишта в своих воспоминаниях что-то напутал.

20. СОРЕВНОВАНИЯ ПО ПЛАВАНИЮ

I решение. Элементарные запреты, содержащиеся в каждом из двух условий в отдельности, наглядно изображены на рис. 75, *а*, а все элементарные запреты вместе — на рис. 75, *б*. Поэтому именно последний рисунок дает представление о том, как выглядит таблица всей задачи. Пользуясь ею, мы должны найти решение.

Нетрудно заметить, что получить однозначно определенное частичное решение невозможно, где бы и в какую свободную клетку мы ни пытались поставить кружок. Так, предположим, что мы начнем решение задачи с первой строки. В этой строке имеются всего

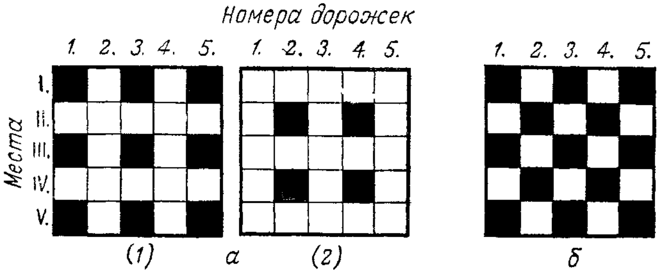


Рис. 75.

две свободные клетки. Поставим кружок, например, в левую свободную клетку. Тогда вторую свободную клетку в первой строке и

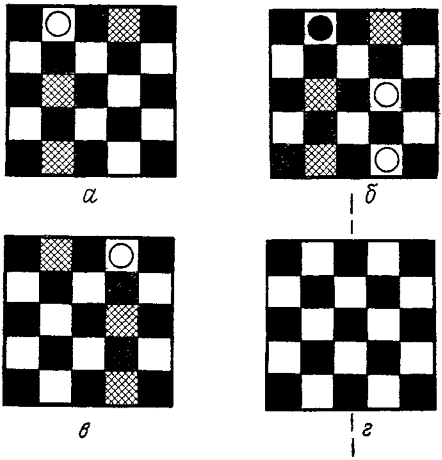


Рис. 76.

все остальные свободные клетки во втором столбце придется заштриховать (рис. 76, *а*). После этого свободные клетки в третьей и в пятой строках заполняются однозначно. Однако это приводит к тому, что в четвертом столбце оказываются одновременно два кружка (рис. 76, *б*), что невозможно. Следовательно, избранный нами путь ведет в тупик.

Остается другая возможность: поставить первый кружок в верхней строке не в левую, а в правую свободную клетку (рис. 76, *в*). Однако и эта попытка не приводит к успеху. Дело в том, что рис. 75, *б* зеркально симметричен рис. 76, *г*, поэтому таблица на рис. 76, *в* представляет собой не что иное, как зеркальное отражение таблицы на рис 76, *а*. Достаточно построить зеркальное отражение позиции, изображенной на рис. 76, *б*, чтобы, так же как и в первом случае, прийти к противоречию.

Итак, задача противоречива: сведения о том, как распределились места между участниками соревнований, содержащиеся в условиях 1 и 2, не согласуются между собой.

II решение. Это решение мы получим более простым способом, не прибегая к таблице. По условию 1, спортсмены, плывшие по нечетным дорожкам, заняли четные места. Однако среди участников соревнований по нечетным дорожкам плыли трое, тогда как всего было лишь два четных места. Поэтому трем участникам соревнований пришлось бы занять два места (причем все участники заплыва показали различное время и, следовательно, заняли различные места[1]), что невозможно.

Примечание 1. Итак, противоречие содержится в одном лишь условии 1. Условие 2 оказывается не при чем Отсюда следует, что в роли носителя противоречия выступает левая часть рис. 75, *а*.

Пожалуйста, проверьте это утверждение самостоятельно!

Примечание 2. Противоречивость предыдущей задачи была ясна из рис. 73 (черный столбец). Противоречивость этой задачи обнаружилась лишь в процессе решения. Таким образом, противоречивость, так же как избыточность и разложимость на независимые подзадачи, может встречаться в двух видах: явном и скрытом.

21. ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ ПРЕДЫДУЩЕЙ ЗАДАЧИ

Мы могли бы попытаться применить к этой задаче более краткий II метод решения, который оказался столь успешным при решении предыдущей задачи. Однако в данном случае он не позволяет обнаружить противоречие: среди целых чисел от 1 до 4 имеются два четных и два нечетных числа (2 и 4 и соответственно 1 и 3). Поэтому мы не можем заранее исключить возможность того, что «сокращенный» вариант задачи 20 имеет решение. Воспользуемся на сей раз таблицей.

Элементарные запреты, содержащиеся в каждом из условий задачи в отдельности, представлены на рис. 77, *а*, а все вместе — на рис. 77, *б*. Именно последнюю таблицу и надлежит считать таблицей задачи 21. Нетрудно заметить, что в первой и в третьей строках свободные клетки стоят лишь на пересечении со вторым и с четвертым столбцами, поэтому задача распадается на две независимые части. Обе подзадачи допускают по 2 решения, которые изображены на рис. 77, *в* и *г*. Таким образом, исходная задача допускает $2 \cdot 2 = 4$ решения (рис. 77, *д*). Из рис. 77, *д* видно, что всего возможно четыре различных варианта исхода соревнования (распределения

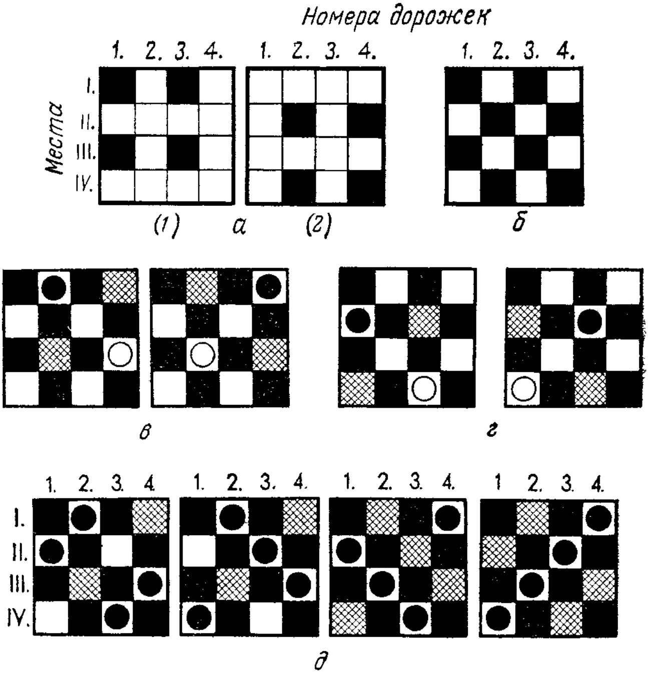


Рис. 77.

мест среди спортсменов, плывших по дорожкам с номерами от 1 до 4):

I место	II место	III место	IV место
2	1	4	3
2	3	4	1
4	1	2	3
4	3	2	1

Примечание. В предыдущей задаче I решение существенно облегчалось тем, что таблица была полностью симметричной (относительно вертикальной оси): если бы существовало хоть какое-нибудь решение задачи, то расположение кружков, получающееся из него при зеркальном отражении, также было бы решением. Рассматриваемая нами теперь задача обладает таблицей, симметричной относительно центра, то есть переходящей в себя при отражении не относительно вертикальной оси, а относительно центра. Следовательно, подвергнув любое решение задачи отражению в центре, мы вновь получим решение задачи. Решение, изображенное на рис. 77, *в*, при центральном отражении переходит в решение, показанное на рис. 77, *г*; на рис. 77, *д* два решения переходят друг в друга, а два других переходят сами в себя.

22. СНОВА ЗАДАЧА БЕЗ СЛОВ

а. Решения не существует. В этом можно убедиться двумя способами.

I обоснование отрицательного ответа. В первых трех столбцах свободные клетки стоят лишь на пересечении с первыми двумя строками. Следовательно, кружки, которые мы могли бы поставить в первых трех столбцах, должны были бы располагаться в первых двух строках, что невозможно.

II обоснование отрицательного ответа. В последних трех строках свободные клетки[1] стоят лишь на пересечении с тремя последними столбцами, поэтому задача допускает разложение на две независимые подзадачи (на рис. 78 границы соответствующих задачам I

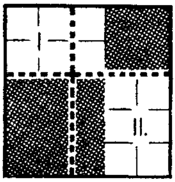


Рис. 78.

и II квадратов показаны пунктиром). Однако вторая подзадача противоречива, поскольку первый столбец во II квадрате «сплошь черный».

Если хотя бы одна из независимых подзадач не имеет решения, то и вся исходная задача также не имеет решения. Действительно, ведь решение исходной задачи (если оно существует) определяется соответствием между теми элементами множеств, которые «отобраны» подзадачами, то есть как бы составлено из решений подзадач.

> Примечание. Задача 22 по существу совпадает с задачей 20. В частности, рис. 78 при соответствующей перестановке столбцов переходит в рис. 75, *б*.

б. Решения не существует. Все сказанное в I обосновании отрицательного ответа в случае «а» остается в силе и для этого случая. II обоснование также переносится на задачу 22б (лишь квадрат 2×2, стоящий на рис. 78 в правом верхнем углу таблицы, должен «побелеть»).

> Примечание. Задача 22б по существу совпадает с задачей, соответствующей таблице, которая приведена на рис. 75, *а* (*1*). При соответствующей перестановке строк и столбцов рис. 8, *б* переходит в рис. 75, *а* (*1*).
>
> Однако, рассматривая решение задачи 20, мы доказали, что задача, соответствующая таблице, которая изображена на рис. 75, *а* (*1*), противоречива, то есть не имеет решения!

---

[1] В действительности свободные клетки в трех последних строках стоят на пересечении лишь с двумя последними столбцами, поэтому тем более верно утверждение о том, что они стоят на пересечении с тремя последними столбцами.

23. ВАРИАЦИИ НА ЛЮБИМУЮ ТЕМУ

а. Решения не существует. Задача по существу совпадает с задачей 22б: при соответствующей перестановке строк и столбцов рис. 28, *б* переходит в рис. 9, *а*.

б. Решение существует; например, оно может быть таким, как показано на рис. 79. (Это решение не единственно!)

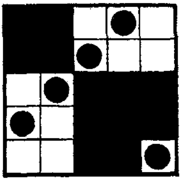
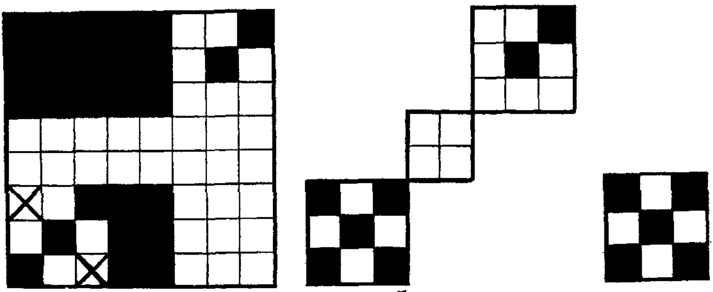


Рис. 79.

Мы видим, что стоило на рис. 8, *а* лишь одной клетке в левом нижнем углу изменить свой цвет на белый, как задача перестала быть противоречивой. Те соображения, которые мы использовали при доказательстве (или, если угодно, обосновании) противоречивости задачи 22а, утратили свою силу!

в. Эта задача отличается от задачи 18в тем, что две клетки, помеченные на рис. 80, *а* крестиками, были (в задаче 18в) белыми,



а *б* *в*

Рис. 80.

а стали черными. Задачу 18в можно было разложить на три независимые задачи. Нетрудно заметить, что те рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве этого утверждения, применимы и к задаче 23в. Следовательно, задачу 23в также можно разложить на три независимые подзадачи (рис. 80, *б*).

Две из трех подзадач (те, которые соответствуют квадрату 3×3, стоящему в правом верхнем углу таблицы, и квадрату 2×2, стоящему в центре) остались неизменными. Изменилась лишь «начинка» квадрата 3×3, стоящего в левом нижнем углу. Поэтому ответ на вопрос о том, существует ли решение задачи 23в, зависит от последнего квадрата. Если соответствующая ему задача имеет решение, то и вся исходная задача также имеет решение. В противном случае решения исходной задачи не существует.

Оказывается, что интересующая нас подзадача (рис. 80, *в*) не имеет решения. Действительно, как в первой, так и в последней строке свободные клетки стоят лишь на пересечении со средним столбцом. Следовательно, кружки, которые мы поставили бы в первой и последней строках, оказались бы в одном и том же среднем столбце, что невозможно.

Таким образом, исходная задача 23в не имеет решения.

Примечание. Правило, согласно которому число решений задачи, допускающей разложение на независимые подзадачи, равно произведению числа решений всех подзадач, действует и в рассматриваемом нами случае (то есть применимо и к задаче 23в). В задаче 18в число решений (так же

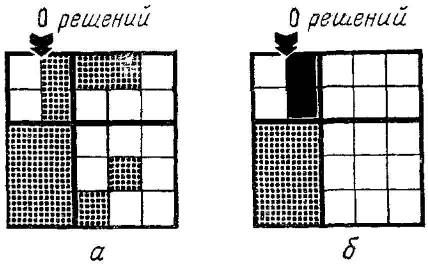


Рис. 81.

как и в задаче 17б) было равно $2 \cdot 2 \cdot 3$. В задаче 23в число решений равно $0 \cdot 2 \cdot 3 = 0$. (Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.)

Строго говоря, к такому выводу мы могли бы прийти и раньше, рассмотрев задачу 19 (точнее, рис. 74). Воспроизведем этот рисунок еще раз (рис. 81, *а* и *б*). Квадрату 2×2, стоящему в левом верхнем углу, соответствует задача, допускающая 0 решений; квадрату 3×3, стоящему в правом нижнем углу, — задача, допускающая 3 решения. Таким образом, исходная задача в целом допускает $0 \cdot 3 = 0$ решений.

г. Решения не существует. От рис. 9, *а* таблица, соответствующая задаче 23г, отличается лишь тем, что две свободные клетки стали занятыми («перекрасились» в черный цвет). Однако увеличение числа черных клеток не увеличивает числа решений; поскольку задача 23а допускала 0 решений, то и задача 23г также не имеет решений.

(Иначе говоря, если бы задача 23г имела какое-нибудь решение, то мы могли бы «вписать» его в рис. 9, *а*: те клетки, которые не заняты в задаче 23г, заведомо свободны в задаче 23а.)

д. Решение существует. Соответствующая таблица отличается от таблицы, изображенной на рис. 9, *б*, лишь тем, что две свободные клетки стали теперь черными. Отсюда следует, что любое решение задачи 23б одновременно может служить решением задачи 23д. Таким образом, мы не только делаем вывод о существовании решения у задачи 23д, но и можем высказать более сильное утверждение: решений у задачи 23д существует по крайней мере столько же, сколько их допускает задача 23б (а, быть может, и больше).

Примечание. Те, кому доводилось заниматься вычислением определителей, наверное, уже заметили, что решение двумерных задач (то есть задач, устанавливающих соответствие между элементами двух множеств) при помощи таблиц во многом аналогично вычислению определителей.

24. НЕ ТОЛЬКО ДЛЯ ШАХМАТИСТОВ

а. Если мы хотим изменить позицию на шахматной доске (расставить ладьи в ином порядке, чем они стояли раньше), то нам, очевидно, необходимо передвинуть если не все, то по крайней мере часть ладей на клетки, которые до этого не были «заселены»

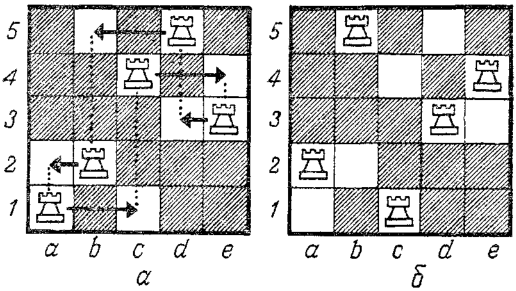


Рис. 82.

ладьями. Проще всего передвигать ладьи по той горизонтали или вертикали, где они стояли в старой позиции.

Например, передвинем ладью, стоявшую на клетке (шахматист сказал бы «на поле») a1, по горизонтали 1 на другую свободную клетку в той же горизонтали. Такой ход всегда возможен, поскольку по условию задачи в каждой строке и в каждом столбце (то есть на каждой горизонтали и на каждой вертикали) имеются по крайней мере две свободные клетки. Найдется еще одна свободная клетка и на горизонтали 1 — это c1. Таким образом, ладья, стоявшая на a1, переходит на c1; в шахматной нотации этот ход выглядит так: Лa1—c1 (рис. 82, *а*). Однако при этом выясняется, что на вертикали c оказываются одновременно две ладьи — на поле c1 и на поле c4 (на рис. 82, *а* поля c1 и c4 соединены пунктирной прямой). Передвинем поэтому ладью, стоявшую на c4, на другое свободное поле по ее же «собственной» горизонтали (вдоль четвертой строки). Свободное поле, как следует из условий задачи, непременно должно найтись, и действительно, на четвертой горизонтали имеется еще одно свободное поле: e4. (На рис. 82, *а* ход Лc4 — e4 показан черной стрелкой.) Разумеется, после этого хода «плохо приходится» вертикали e: на ней одновременно оказываются две ладьи (e4 и e3).

(На рис. 82, *а* «опасные» поля соединены пунктирной линией.) Чтобы исправить положение, передвинем ладью, стоявшую на e3, вдоль ее же собственной горизонтали на поле d3, ладью, стоявшую на d5, — на поле b5, а ладью, стоявшую на b2, — на поле a2. На вертикали a никаких «ужасов» наблюдаться не будет, поскольку первым ходом мы уже переставили ладью с a1 на c1.

Новая позиция, возникшая после всех перестановок, показана на рис. 82, *б*. Она отвечает всем требованиям задачи: каждая ладья стоит на «свободном» поле, причем ни одна ладья не угрожает другой (каждую горизонталь и каждую вертикаль занимает лишь одна ладья).

Впрочем, ничего другого нельзя было ожидать. Действительно,

I) каждую ладью мы ставили только на «свободное» поле,

II) каждую ладью передвигали вдоль ее же «собственной» горизонтали.

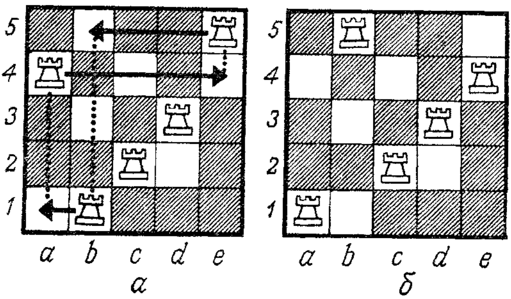


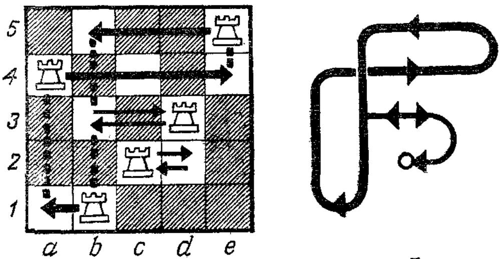
Рис. 83.

Поэтому ладья, которая первоначально находилась на какой-то горизонтали, в дальнейшем должна оставаться на ней же и никак не может оказаться на другой горизонтали. Следовательно, если в начальной позиции каждую горизонталь занимала ровно одна ладья, то и в новой позиции на каждой горизонтали должна оставаться лишь одна ладья. С другой стороны, если на какую-нибудь вертикаль вторгалась новая ладья, то другая ладья покидала эту вертикаль. Поэтому число ладей, стоящих на каждой вертикали, осталось по-прежнему равным единице. А поскольку на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит ровно одна ладья (других ладей просто нет), то ни одна ладья не может угрожать другой.

б. *Первая попытка.* Начнем с ладьи, стоящей на поле b1 в первой горизонтали. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, передвинем ее на a1 (рис. 83, *а*). Но на первой вертикали уже имеется одна ладья: она занимает «свободное» поле a4. Чтобы исправить положение, у нас имеются две возможности: передвинуть ладью, стоявшую на a4, либо на c4, либо на e4. Выберем поле e4. Тогда ладью, стоявшую на поле e5, нам придется передвинуть на b5, и решение на этом закончится. Поскольку на вертикали b других ладей нет (стоявшая на b1 ладья «ушла» с вертикали b, когда мы сделали первый ход), то ни одна ладья не угрожает другой. Ладьи, стоявшие на c2 и d3, остались «без движения»: их мы не трогали.

Заметим, что в решении задачи «а» стрелки и пунктирные линии образуют «замкнутый маршрут». Замыкание «кольца» означает, что решение доведено до конца. Передвинув ладью, мы должны убедиться в том, что вертикаль, на которую она встала, не содержит других ладей (иначе говоря, ладья-пришелец не должна угрожать ладье-аборигену). Сигналом опасности служит пунктирная линия. Если оказывается, что ладьи, некогда занимавшей вертикаль, и «след простыл», то все в порядке: значит, на каждой вертикали стоит лишь одна ладья. Итак, на тех вертикалях, которые оказались втянутыми в проводимую нами «передислокацию» ладей, всегда стоит лишь одна ладья. Что же касается тех вертикалей, над которыми никаких действий мы не производили, то на них, разумеется, никаких «беспорядков» не возникает.

Вторая попытка. При первой попытке нам повезло, но мы отнюдь не утверждаем, что так будет всегда. Например, если начать



а *б*

Рис. 84.

с ладьи, стоящей на c2 (рис. 84, *а*), то нам пришлось бы сделать следующие ходы: c2—d2, d3—b3, b1—a1, a4—e4, e5—b5. На этом кольцо замкнулось бы: ведь с поля b5 берет начало пунктирная линия, соединяющая b5 с b3, а поскольку на b3 одна ладья уже стоит, то решение ходом e5—b5 закончиться не может. Продолжим перемещение ладей: b3—d3, d2—c2. Вот теперь все станет «на свои места»: ведь последними двумя ходами (на рис. 84, *б* они показаны более тонкой линией) мы вернули две ладьи в исходное положение.

Итак, мы завершили перестановку ладей, хотя потрудиться нам пришлось несколько больше, чем в предыдущем случае: замкнутая часть маршрута, изображенная на рис. 84, *б* толстой линией, соответствует первому решению, а более тонкой линией показаны последние ходы второго решения, сведенные на нет «контрходами». Таким образом, последние ходы затрачены впустую: эффективными следует считать лишь передвижения ладей вдоль замкнутого маршрута.

Мы видим, что второе решение получилось более сложным, чем первое: нам «не повезло». Мы начали передвигать ладьи, «сбившись» с истинного пути: не вдоль замкнутого маршрута, а в сторону, в тупик. Начинать же решение задачи следует с построения замкнутого маршрута. Это позволит нам увидеть не только «шоссе» (жирные линии), но и «проселочные дороги» (тонкие линии). Проселочные дороги можно стереть, поскольку их нам пришлось бы проходить дважды: сначала в одну, а затем в другую сторону. (Перестановку ладей, изображенную на рис. 84, *б*, полезно проанализировать еще раз, воспользовавшись таблицей.)

В обоих рассмотренных нами случаях существует еще один ход: ладья с a4 может занять не поле e4, а пойти на c4. При этом мы получим другое решение, отличное от предыдущего (в соответствующей ему второй попытке первые два хода уже не будут «лишними»). Изобразить второе решение в виде таблицы и построить маршрут входящих в него перестановок ладей мы предоставляем читателю.

в. Решения задач «а» и «б» подсказывают нам готовый рецепт успеха, и нам не остается ничего другого, как обобщить те рассуждения, которые привели нас к нему.

По условию задачи n ладей расставлены на шахматной доске размером $n \times n$ так, что ни одна ладья не угрожает другой. Это означает, что на любой горизонтали и на любой вертикали может находиться не более одной ладьи. Отсюда в свою очередь следует, что на каждой горизонтали и каждой вертикали должна находиться ровно одна ладья. Действительно, предположим, что на какой-то горизонтали или вертикали ладей нет. Тогда общее число ладей, расставленных на n горизонталях (или вертикалях), было бы меньше n.

Итак, по доказанному, n ладей можно разместить на шахматной доске размером $n \times n$ так, чтобы выполнялись следующие два условия:

I) все ладьи стоят только на свободных клетках;

II) каждую горизонталь и каждую вертикаль занимает ровно одна ладья.

По условию задачи на каждой вертикали и каждой горизонтали имеются по крайней мере две свободные клетки. Какая-то из них занята ладьей («клетка с ладьей»), но по крайней мере одна свободная клетка остается «совсем свободной» — без ладьи.

Рассмотрим любую клетку с ладьей. Как следует из сказанного ранее, на одной горизонтали с ней имеется еще одна свободная клетка. Соединим выбранную нами клетку с ладьей и обнаруженную «совсем свободную» клетку горизонтальной линией со стрелкой (направленной к совсем свободной клетке).

Сами ладьи мы не будем трогать. Как показывают уже разобранные нами примеры, перемещение ладей необходимо сначала тщательно продумать, чтобы потом нам не пришлось исправлять ходы, сделанные вслепую, возвращая ладьи в исходное положение. Гораздо разумнее заранее прикинуть, к чему ведет тот или иной ход.

На одной вертикали с совсем свободной клеткой должна находиться какая-то клетка с ладьей (поскольку каждая вертикаль содержит ровно одну ладью). Соединим совсем свободную клетку и найденную клетку с ладьей пунктирной линией (по вертикали).

В свою очередь клетка с ладьей стоит на одной вертикали с какой-то (по крайней мере одной) совсем свободной клеткой. Проведем горизонтальную стрелку от клетки с ладьей к этой совсем свободной клетке.

На вертикали, которой принадлежит совсем свободная клетка, непременно должна быть клетка с ладьей. Соединим эти клетки по вертикали отрезком пунктирной прямой. Если только что обнаруженная клетка с ладьей не совпадает с первой клеткой с ладьей, то ее можно назвать «третьей клеткой с ладьей».

Из третьей клетки с ладьей проведем по горизонтали стрелку, указывающую на новую совсем свободную клетку и т. д.

Процесс будет продолжаться до тех пор, пока мы не дойдем до вертикали с клеткой, от которой исходит проведенная ранее горизонтальная стрелка. Рано или поздно это непременно произойдет (не позднее, чем мы проведем n-ю пунктирную прямую). Соединим по вертикали отрезком пунктирной прямой последнюю из обнаруженных нами совсем свободных клеток с клеткой, из которой исходит проведенная ранее горизонтальная стрелка (не обращая внимания на все прочие совсем свободные клетки, если они окажутся на той же вертикали).

Разумеется, мы не можем утверждать, что клетка, от которой исходит стрелка, непременно будет клеткой с ладьей (см. вторую попытку решения задачи 24а), однако это не существенно. Нас интересует лишь замкнутая часть маршрута, составленная из стрелок и пунктирных линий (например, «кольцевой маршрут», изображенный на рис. 84, *а* жирной линией). Все остальное (например, ту часть маршрута, которая на рис. 84, *а* изображена более тонкой линией) мы оставляем без внимания.

Рассмотрим теперь замкнутую часть маршрута, составленную из стрелок и пунктирных линий, и, перейдя от слов к делу, приступим к перестановке ладей в направлениях, указанных стрелками. Закончив ходы, мы получим новую позицию. Нетрудно убедиться в том, что оба условия задачи выполнены.

То, что новая позиция удовлетворяет условию I, совсем очевидно, поскольку, передвигая ладьи, мы всегда ставили их лишь на свободные клетки.

Условие II следует проверить отдельно для горизонталей и отдельно для вертикалей.

Поскольку по построению все стрелки направлены по горизонтали, то перемещенная ладья занимает клетку, принадлежащую той же горизонтали, что и исходная клетка. (Если ладья никуда не «переехала» — то есть если замкнутый маршрут миновал занимаемую ладьей клетку, — то она тем более осталась на той же горизонтали, которую занимала в исходной позиции.) Таким образом, в процессе решения ни одна ладья не может перейти на другую горизонталь. Следовательно, если в начальной позиции каждую горизонталь занимала ровно одна ладья, то и после перестановки на каждой горизонтали будет стоять ровно одна ладья.

Что же касается вертикалей, то их можно разбить на две группы: к первой отнести те вертикали, по которым проходят упоминавшиеся при построении «замкнутого маршрута» пунктирные линии, ко второй — те вертикали, по которым пунктирные линии не проходят.

Ясно, что к первой группе принадлежат по крайней мере две вертикали. Действительно, начертив последнюю стрелку, мы всегда должны провести еще одну пунктирную прямую, проходящую через начало самой первой стрелки (поскольку по построению мы провели первую пунктирную линию через конец первой стрелки). То же можно сформулировать иначе: чтобы построить замкнутый маршрут, необходимо совершить по крайней мере два хода.

У всех пунктирных линий имеются два конца. Один из них по построению совпадает с концом какой-то стрелки, другой — с началом. Ладья при перестановке перемещается вдоль стрелки из ее начала в конец. Следовательно, на всех вертикалях, по которым проходят пунктирные линии, в конечной позиции оказывается столько же ладей, сколько их стояло в начальной позиции.

Ясно, что высказанное нами утверждение осталось бы в силе, если бы по какой-нибудь из вертикалей проходила не одна, а несколько пунктирных линий. В то же время вряд ли нужно доказывать (хотя это и верно), что в «замкнутом маршруте» по каждой вертикали проходит не более одной пунктирной линии.

Ни одна пунктирная линия не проходит по вертикали, если на вертикали не находилась ладья.

Следовательно, если в исходной позиции на всех вертикалях (интересующей нас группы) находилось по одной ладье, то и в конечной позиции на каждой из них стоит по одной ладье.

Тем самым доказано, что новая позиция удовлетворяет условию II.

Поскольку замкнутый маршрут содержит по крайней мере два хода, в новой позиции по крайней мере две ладьи изменили свое положение на шахматной доске. Следовательно, полученная нами позиция действительно новая, от исходной она отличается положением по крайней мере двух ладей. Таким образом, утверждение задачи верно.

25. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Доказать теорему в приведенной в условии задачи формулировке отнюдь не легко. Не менее трудно построить цепочку однозначно определенных частичных решений в столь общей и абстрактной постановке задачи. Гораздо проще рассмотреть противоположный случай, когда цепочка однозначно определенных частичных решений на каком-то шаге обрывается.

Теорема, которую мы собираемся доказывать, эквивалентна следующему утверждению: если цепочка однозначно определенных частичных решений на каком-то шаге обрывается, то задача не имеет единственного решения [1]. Докажем это утверждение.

Отбросим начальную фазу решения, когда все однозначно определенные частичные результаты выстраиваются один за другим в цепочку (эта фаза продолжается до первого обрыва такой цепочки). Если после того как мы зачеркнем «уже решенные» строки и столбцы, оставшаяся сокращенная задача не допускает однозначного решения, то очевидно, что и исходная задача также не допускает такого решения. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением задач, которые с самого начала не допускают однозначно определенных частичных решений.

Могут представиться два случая:

---

[1] Два утверждения называются эквивалентными, если они одновременно истинны или одновременно ложны, то есть если истинно первое утверждение, то истинно и второе, и если истинно второе, то истинно и первое.

а) в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце нет свободных клеток,

б) в любой строке и любом столбце имеются по крайней мере две свободные клетки.

В случае а мы говорим, что задача противоречива. Поскольку ни одного решения при этом не существует, то, в частности, не существует и единственного решения.

Остается случай б. Здесь могут представиться две возможности. Во-первых, задача может не иметь решения (таковы, например, задачи, представленные на рис. 75 и на рис 76, *а* и *б*).

Во-вторых, задача может иметь решение, но не единственное. Иначе говоря, если в таблице во всех строках и всех столбцах имеются по крайней мере две свободные клетки и задача допускает какое-то решение, то имеется (по крайней мере) еще одно решение.

Что означает в этом случае «решение задачи»? Если в задаче речь идет об установлении соответствия между элементами двух множеств, каждое из которых содержит по n элементов (иначе говоря, если таблица имеет размеры $n \times n$), то решить задачу — означает расставить по свободным клеткам n кружков так, чтобы любые два из них оказались в разных строках и разных столбцах таблицы. Имея это в виду, мы можем заново сформулировать то утверждение, которое хотим доказать:

если в каждой строке и каждом столбце таблицы размером $n \times n$ имеются по крайней мере две свободные клетки и кружки расставлены так, что

I) все кружки стоят лишь на свободных клетках,

II) ни один кружок не стоит в строке или столбце, занятом каким-нибудь другим кружком,

то кружки на той же таблице можно расставить в ином порядке, не нарушив при этом ни одно из условий I и II.

В такой формулировке интересующее нас утверждение представляет собой не что иное, как слегка видоизмененное утверждение задачи 24в. Чтобы достичь полного совпадения, необходимо лишь заменить таблицу шахматной доской, а кружки — ладьями. Условие II, согласно которому ни одна из фигур (кружков или ладей) не может стоять в строке или столбце, занятом другой фигурой, в «универсальной» формулировке гласит: «Ни одна фигура не угрожает другой фигуре».

Поскольку утверждение задачи 24в уже доказано, то тем самым доказано и интересующее нас утверждение, эквивалентное теореме единственности.

Дополнение. Доказанная только что теорема единственности вооружает нас сведениями, которыми мы не располагали при подсчете числа избыточных условий в решении задачи 10. К тому же теорема единственности позволяет обобщить и упростить формулировку ранее полученных результатов.

Рассмотрев соответствующие задачи, мы убедились в том, что для решения задачи типа 6×6 достаточно $1+2+3+4+5$ элементарных запретов. Аналогичные рассуждения показывают, что, например, для решения задачи типа 8×8 необходимо $1+2+3+$ $+4+5+6+7$ элементарных запретов, для решения задачи типа 5×5 — $1+2+3+4$ элементарных запрета и, вообще, для решения задачи типа $n \times n$ нужно $1+2+3+\ldots+(n-3)+(n-2)+$ $+(n-1)$ элементарных запретов.

Многоточие в середине последней формулы означает, что мы не можем выписать все входящие в нее слагаемые, поскольку их число зависит от n и равно $(n-1)$. Поэтому эту формулу необходимо преобразовать так, чтобы она содержала всю необходимую информацию в «замкнутом виде».

(Те, кто в средней школе выводил формулу для суммы арифметической прогрессии, несомненно узнают в приводимом ниже рассуждении «старого знакомого».)

Обозначим через E число элементарных запретов, необходимых для того, чтобы задача имела единственное решение. Тогда

$$E=1+2+3+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1).$$

Выпишем это выражение дважды: один раз так, как мы его только что записали, а другой — в обратном порядке, расположив оба выражения одно под другим.

$$\begin{aligned} E&=1 &&+2 &&+3 &&+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1). \\ E&=(n-1)&&+(n-2)&&+(n-3)&&+\ldots+3 \qquad +2 \qquad +1. \end{aligned}$$

Сумма любых слагаемых, расположенных одно под другим, одинакова и равна n:

$$1+(n-1)=2+(n-2)=3+(n-3)=\ldots=n.$$

Сложив «прямое» и «обратное» выражения для E, мы получим $2E$:

$$2E=\underset{1}{n}+\underset{2}{n}+\underset{3}{n}+\ldots+\underset{n-3}{n}+\underset{n-2}{n}+\underset{n-1}{n},$$

а поскольку число слагаемых в правой части равенства равно $n-1$, то

$$2E=(n-1)\cdot n.$$

Отсюда мы находим число элементарных запретов, необходимых для единственности решения задачи:

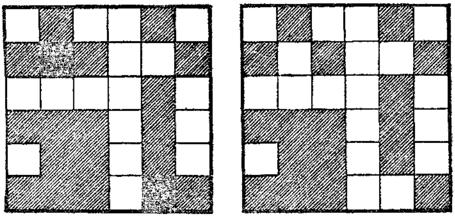
$$E=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Возникает вопрос: в каких случаях число элементарных запретов не больше и не меньше, а совпадает с E?

Ответ уже известен: в тех случаях, когда задачу удается решить, построив нигде не обрывающуюся цепочку однозначно определенных частичных решений. По теореме единственности это возможно, если вся задача допускает единственное решение.

Тут, однако, необходима осторожность! Предположим, что задача допускает единственное решение, но избыточность в условиях задачи столь невелика, что они, кроме «необходимых» $[n(n-1)]/2$, содержат еще несколько наугад выбранных элементарных запретов. Тогда в ходе решения, неудачно выбрав элементарный запрет, мы нарушим однозначную определенность частичного решения, и $[n(n-1)]/2$ элементарных запретов окажется недостаточно для того, чтобы получить единственное решение исходной задачи.

Рассмотрим, например, еще раз уже знакомую нам задачу 9. Все элементарные запреты, содержащиеся в ее условиях, показаны на рис. 49. Этот рисунок мы воспроизвели здесь еще раз (рис. 85, *а*). Единственное различие между «оригиналом» и «копией» состоит в том, что на рис. 85, *а* все элементарные запреты равноправны: все покрыты одинаковой штриховкой. (Лишь две клетки изображены более темными, чем остальные, но совсем по другой причине.)



а *б*

Рис. 85.

Задача 9 принадлежит к типу задач 6×6. В этом случае для того, чтобы однозначно определенное решение было возможно, число элементарных запретов должно совпадать с E. Поскольку $n = 6$, то

$$E = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5 = 15.$$

(Именно это число мы получили, решая задачу 10: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.) Поскольку на рис. 85, *а* заштриховано 19 клеток, то $19 - 15 = 4$ из них «лишние»: соответствующие им 4 запрета относятся к избыточной информации. (Столько же лишних запретов содержалось в условиях задачи 9в.)

Казалось бы, все ясно, но попробуем «выбросить» («высветлить») из рис. 85, *а* запреты, соответствующие двум черным клеткам. Мы получим таблицу, изображенную на рис. 85, *б*. В ней уже любая строка и любой столбец содержат по крайней мере две свободные клетки. Это означает, что задача, соответствующая изображенной на рис. 85, *б* таблице, уже не имеет единственного решения число ее решений не меньше 2 [1].

Отсюда можно сделать важное заключение: ни один из элементарных запретов, соответствующих на рис. 85, *а* двум черным клеткам, не содержит избыточной информации. На рис. 61, *а* среди 19 элементарных запретов имеются 4 избыточных, но это отнюдь не означает, что любая клетка соответствует избыточной информации. Из 19 элементарных запретов необходимо выбрать 4 так, чтобы оставшиеся 15 запретов приводили к единственному решению.

Как узнать, какие четыре запрета лишние? Разумеется, готового рецепта, годного во всех случаях, не существует: какие запреты лишние, мы узнаем лишь после, того, как задача будет ре-

[1] См. решение следующей задачи 26а.

шена. (Например, в решении задачи 9в лишние запреты можно выбрать тремя различными способами.)

Итак, сформулируем теперь точно все, что нам удалось выяснить относительно того, какую информацию следует считать необходимой и какую — избыточной.

Если задача типа $n \times n$ допускает единственное решение, то для отыскания его необходимо по крайней мере

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

элементарных запретов.

Если задача может иметь единственное решение и ее условия содержат больше элементарных запретов, чем необходимо:

$$\frac{(n-1)}{2}+k,$$

то из них можно выбрать k запретов так, чтобы оставшиеся элементарные запреты приводили к (одному и тому же) единственному решению.

26. ДВА ВОПРОСА

а. На рис. 85, *а* воспроизведена таблица, соответствующая задаче 9, относительно которой уже известно, что она имеет решение (и, следовательно, непротиворечива).

Заметим кстати, что все клетки, которые были свободными (белыми) на рис. 85, *а*, остались свободными и на рис. 85, *б*. Следовательно, все решения задачи, соответствующей рис. 85, *а*, являются в то же время решениями задачи 85, *б*.

б. Если бы можно было найти доказательство, не использующее существования некоторой исходной расстановки ладей, то это означало бы, что утверждение задачи 24в верно, даже если мы ничего не знаем о том, к какой расстановке ладей на шахматной доске оно относится.

Иначе говоря, справедливо следующее утверждение: «Если на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски размером $n \times n$ имеются по крайней мере две свободные клетки, то на этой шахматной доске можно расставить n ладей так, что

I) каждая ладья займет какую-то из свободных клеток;

II) ни одна ладья не будет угрожать другой ладье.

Однако, решая задачу 25, мы убедились в том, что каждой такой расстановке ладей на шахматной доске размером $n \times n$ соответствует решение некоторой задачи типа $n \times n$. Поэтому приведенное выше утверждение эквивалентно следующему:

«Если в каждой строке и в каждом столбце таблицы, соответствующей двумерной задаче, имеются по крайней мере две свободные клетки, то задача имеет решение».

Однако последнее утверждение неверно: ему противоречат задачи, таблицы которых изображены на рис. 75, 8 и 9, *а* и *б*.

Можно было бы не перечислять так много задач, противоречащих последнему утверждению: чтобы опровергнуть его, достаточно одного-единственного примера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ЧТО МЫ УЗНАЛИ О ДВУМЕРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ?

1. В приведенных выше задачах требовалось, исходя из данных, содержащихся в условиях, установить взаимно-однозначное соответствие между элементами двух заданных конечных множеств [1]. (В дальнейшем мы будем обозначать эти множества A и B.)

Если между элементами двух множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие, то они содержат одинаковое число элементов и называются равномощными. Число элементов в каждом из множеств A и B мы обозначим через n.

Условия задачи имеют довольно сложную структуру: одно условие может содержать несколько «элементов информации». В простейшем случае [2] элементы информации подразделяются на два типа:

соответствия между одной парой элементов («*элементарные соответствия*»), то есть прямые утверждения о том, что некоторый элемент множества A сопоставлен вполне определенному элементу множества B (таким образом, элементарные соответствия содержат «решающую» информацию), и *элементарные запреты*, то есть утверждения лишь о том, что некоторый элемент множества A не может соответствовать тому или иному элементу множества B.

Таким образом, соответствие между одной парой элементов эквивалентно $n - 1$ элементарному запрету. Действительно, утверждение «Элемент a множества A соответствует элементу b множества B» означает, что элемент a не соответствует остальным $n - 1$ элементам множества B. Отсюда мы вправе сделать вывод о том,

---

[1] Мы особо подчеркиваем, что речь идет о конечных множествах, поскольку существуют и бесконечные множества· например, множество всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, или множество всех точек, принадлежащих отрезку прямой, и т. д.

[2] Мы особо подчеркиваем, что речь идет лишь о наиболее простом случае. Можно представить себе и такие условия задачи, которые говорят меньше, но о более чем одном элементарном запрете.

что элементами информации следует считать лишь элементарные запреты, а не «элементарные соответствия».

Разумеется, и соответствия между отдельными парами элементов множеств A и B, и элементарные запреты в условиях задачи тщательно замаскированы. Поэтому, приступая к решению задачи, мы прежде всего должны «перевести» ее условия на язык элементарных запретов и «элементарных соответствий». Затем мы должны подумать над тем, как «расчленить» полученный «перевод» (нередко это бывает нелегкой задачей).

Таким образом, можно сказать, что условия логических задач рассматриваемого нами типа в конечном счете сводятся либо к соответствиям между парами элементов, принадлежащих двум множествам, либо к элементарным запретам.

Решением задачи мы называем установление между элементами множеств A и B всех связей, не противоречащих всей совокупности условий задачи. (Таким образом, мы понимаем решение и как «готовое решение», или «ответ задачи», и в то же время как процесс поиска такого ответа.)

2. Решение задачи (согласно сказанному выше) всегда начинается с того, что устанавливают соответствия между парами элементов, содержащиеся непосредственно в условиях задачи. Эта часть решения не составляет никакого труда.

Если в условиях задачи содержатся сведения о соответствиях между p парами элементов, то происходит сужение исходной задачи: те элементы множеств, между которыми соответствие устанавливают условия задачи, «выходят из игры» и в дальнейшем уже непосредственно в решении не участвуют. Исходные множества A и B как бы «суживаются» и содержат не n, а лишь $n-p$ элементов каждое. Обозначим сузившиеся множества A и B через A^* и B^*, а число оставшихся в них элементов — через n^*.

Затем наступает следующий этап решения задачи: необходимо выяснить, не найдется ли среди элементов множеств A или B такого, которому соответствует один и только один элемент другого множества (как и прежде, все соответствия между элементами множеств A и B мы устанавливаем лишь на основе той информации, которая содержится в условиях задачи). Обнаружив такой элемент и его «партнера», мы устанавливаем соответствие между ними. Полученное нами однозначно определенное частичное решение (пополняет запас элементарных запретов, образующих так называемую решающую информацию) в свою очередь приводит к новому сужению задачи. Действительно, в каждом из множеств после вычеркивания обнаруженной пары соответствующих друг другу элементов останется на 1 элемент меньше, что увеличивает шансы на успех при отыскании новых однозначно определенных частичных решений. Если нам действительно удастся найти еще одно частичное решение, то мы тем самым получим возможность еще более сузить задачу и т. д.

Если этот процесс будет непрерывно продолжаться до тех пор, пока мы не установим соответствие между всеми элементами множеств A и B, то решение задачи можно представить в виде необрывающейся цепочки однозначно определенных частичных решений.

Доказанная нами теорема единственности утверждает, что если логическая задача рассматриваемого нами типа (то есть задача на установление соответствия между элементами двух множеств) допускает единственное решение, то это решение можно представить в виде необрывающейся цепочки однозначно определенных частичных решений.

3. Если условия задачи содержат лишь элементарные запреты (в силу чего рассматривать необходимо не исходные множества A и B, а лишь суженные множества A^* и B^*), то задача становится «прозрачной», легко обозримой, и решение ее мы находим без труда, механически применяя метод составления таблиц. Состоит этот метод в том, что мы вычерчиваем таблицу и обозначаем каждую строку и каждый столбец особой буквой. Всего в таблице должно быть n^* строк и n^* столбцов, которые разбивают ее на $n^* \cdot n^* = n^{*2}$ рубрик (клеток).

Каждой из строк мы сопоставляем один и только один элемент множества A^*, а каждому столбцу — один и только один элемент множества B^* (впрочем, ничто не мешает сопоставить строки элементам множества B^*, а столбцы — элементам множества A^*). Затем мы закрашиваем в черный цвет клетки, стоящие на пересечении строк и столбцов, соответствие между которыми исключено элементарными запретами из условий задачи. Клетки, «выбывающие из игры» при сужении задачи, мы закрашиваем в какой-нибудь другой цвет (например, решая приведенные выше задачи, мы заштриховывали их).

Те столбцы и строки, в которых остается лишь одна свободная, незакрашенная клетка, порождают однозначно определенные частичные решения. Единственная свободная клетка устанавливает соответствие между строкой и столбцом, на пересечении которых она стоит, а тем самым и между элементами множеств A^* и B^*. Она как бы связывает их («связующее звено»). Если задача имеет решение, то всего в таблице должно быть n^* связующих клеток, расположенных так, что каждый столбец и каждая строка содержат лишь одну такую клетку (поэтому любые две связующие клетки расположены в различных строках и в различных столбцах).

Заполняя таблицу, мы можем указать, из какого условия задачи заимствован каждый элементарный запрет. Тогда тот же метод позволит нам найти другое решение, которое будет проще исходного. Таким образом, таблица помогает находить краткие, изящные решения. Получив решение, мы можем придать ему совершенно иную формулировку, представить его в таком виде, который уже не будет иметь ничего общего с таблицей.

4. Говоря о числе решений, допускаемых задачей, необходимо различать три случая: а) число решений равно 0; б) число решений равно 1; в) число решений больше 1.

а. Если число решений равно нулю (то есть если задача не имеет решения), то условия задачи противоречивы (содержат противоречие).

В простейшем случае такое противоречие возникает тогда, когда в силу запрета, наложенного на какой-нибудь из элементов одного множества, этому элементу не может соответствовать ни один элемент другого множества (одна из строк или один из столбцов таблицы полностью заполнены клетками, закрашенными в черный цвет,— см., например, задачу 19). В более сложном случае противоречие возникает при рассмотрении суженной задачи (см., например, задачи 20, 22а, 22б, 23а, 23в и 23г).

Если число решений отлично от 0 (то есть если существует решение, удовлетворяющее всем условиям задачи), то это означает, что условия задачи непротиворечивы.

б. Если число решений равно 1, то мы говорим, что задача допускает единственное решение. В этом случае условия задачи непротиворечивы и полны. (Полными мы называем такие условия, которые «сообщают все, что нужно» для решения.)

Если двумерная логическая задача (на установление соответствия между элементами двух множеств) имеет единственное решение, то его всегда можно представить в виде необрывающейся цепочки однозначно определенных частичных решений (теорема единственности).

в. Если число решений больше 1, то задача не имеет однозначного решения («нерешительная» задача, ответ которой колеблется между несколькими возможными решениями). В этом случае условия задачи непротиворечивы, но не полны («сообщают не все, что необходимо» для решения).

5. Что произойдет с различными типами условий задач, если мы отбросим одно условие или, наоборот, присоединим к ним новое условие?

Если к противоречивым условиям мы добавим любое новое условие (или несколько новых условий), то противоречивость условий сохранится. Наоборот, отбросив одно или несколько условий, мы иногда можем получить непротиворечивую систему условий.

Если исходная система условий непротиворечива, то, отбросив любые из условий, мы не нарушим непротиворечивости. Присоединив к непротиворечивой системе новые условия, мы либо получим систему условий, которая по-прежнему останется непротиворечивой (это произойдет в том случае, если все новые условия согласуются со всеми старыми условиями), либо получим систему условий, не допускающую решения (это произойдет в том случае, если хотя бы одно новое условие противоречит хотя бы одному старому условию), то есть первоначально непротиворечивая система превратится в противоречивую.

Полная система (взаимно непротиворечивых) условий останется полной, если мы присоединим к ней новые условия, не нарушающие непротиворечивости. Если же мы отбросим одно или несколько условий, то система утратит полноту и станет неполной.

6. Система условий, позволяющая отбросить часть условий и получить при этом точно такое же решение, как прежде, называется избыточной. Избыточность означает, что не все условия являются независимыми.

Если в двумерной логической задаче (на установление соответствия между элементами двух множеств) все условия содержат лишь элементарные запреты, сама система непротиворечива и полна (то есть задача допускает единственное решение) и содержит ровно $[n^*(n^*-1)]/2$ элементарных условий, то система не избыточна (а «всего лишь» полна).

Если такая система содержит больше чем $[n^*(n^*-1)]/2$ условий, то она избыточна. В этом случае, если число элементарных запретов равно $[n^*(n^*-1)]/2+k$, то k элементарных запретов можно выбрать так, что, отбросив их, мы получим полную систему условий, лишенную избыточности.

В наиболее простом случае избыточность встречается тогда, когда одно из условий задачи содержит «лишний» элементарный запрет (см. задачу 4*). Более сложная, «скрытая», форма избыточности возникает тогда, когда «лишний» элементарный запрет появляется при «сужении» задачи (см. задачу 9).

7. Двумерная логическая задача (на установление соответствия между элементами двух множеств) распадается на две независимые подзадачи, если в ее таблице можно так выбрать несколько строк и равное им число столбцов, что

в выбранных строках свободные клетки будут стоять лишь на пересечении с какими-то из выбранных столбцов или

в выбранных столбцах свободные клетки будут стоять лишь на пересечении с какими-то из выбранных строк.

Две независимые подзадачи (точнее, их таблицы) соответствуют клеткам (всем, а не только свободным), стоящим на пересечении выбранных строк и выбранных столбцов, и клеткам, стоящим на пересечении строк и столбцов, оставшихся в исходной таблице после вычеркивания выбранных строк и столбцов.

Если задача распадается на независимые подзадачи, то число решений равно произведению числа решений всех независимых подзадач.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Мы столь подробно занимались изучением «теории» занимательных задач лишь потому, что многие выводы этой теории остаются в силе и после того, как мы оставим наши «игрушечные» примеры и перейдем к рассмотрению гораздо более общих («серьезных») проблем. Например, все сказанное в пунктах 4 и 5 применимо ко всей математике.

Известно, что арифметика, геометрия и вообще любая отрасль математики (любая математическая дисциплина) строятся с помощью строгих логических рассуждений по дедукции. Любое понятие может быть введено лишь в том случае, если его можно определить, опираясь на ранее введенные понятия. Любая теорема лишь тогда имеет смысл и считается верной, если ее можно вывести (строго доказать) из ранее доказанных теорем.

Разумеется, ранее доказанные теоремы и понятия, введенные на более раннем этапе построения математической теории, в свою очередь опираются на еще более ранние теоремы и понятия и т. д. Проследив всю цепочку теорем и определений от конца к началу, мы дойдем до исходных утверждений (аксиом), устанавливающих взаимосвязь между исходными понятиями. Исходные понятия не определяются, аксиомы не доказываются: их считают своего рода «правилами игры».

Разумеется, они отнюдь не очевидны! Эти «правила игры» должны согласоваться с объективно существующими законами, в противном случае математика была бы игрой, а не наукой. Поэтому любая система аксиом в конечном счете опирается на опыт. Извлеченные из опыта правильные абстракции (то есть понятия, выбранные в качестве исходных, и система аксиом) имеют весьма большое значение.

В математической теории аксиомы играют по существу ту же роль, какую в рассмотренном нами классе логических задач играли условия задачи. Однако в математической теории речь идет не о решении какой-то одной задачи, а о решении всех задач, допускающих формулировку с помощью основных понятий и аксиом данной теории.

Из сказанного следует, что система аксиом *противоречива*, если нам удастся найти такое утверждение, которое, так же как и его отрицание, выводимо в рамках этой системы. Поскольку из противоречивой системы можно вывести что угодно, то она не обладает никакой научной ценностью. Основное требование, предъявляемое к любой системе аксиом, — ее непротиворечивость.

Вопрос о непротиворечивости различных разделов математики представляет собой далеко не простую проблему. Например, вопрос о непротиворечивости геометрии остается открытым и поныне.

Полной называется система аксиом (предположительно непротиворечивая), если всякая задача, которую можно сформулировать, не выходя за рамки системы, однозначно разрешима в ней. Таким образом, любое утверждение (которое допускает формулировку в рамках полной системы аксиом) можно либо доказать, либо опровергнуть. Однако такой полной (достаточно сложной) системы аксиом не существует.

Наконец, *избыточной* мы называем систему аксиом в том случае, если входящие в нее аксиомы не являются независимыми: одни аксиомы частично или полностью содержатся в других аксиомах (следуют из них). Такие аксиомы можно либо вообще отбросить, либо заменить более слабыми: в обоих случаях исходная система аксиом избыточна.

Математики уделяют изучению различных систем аксиом большое внимание. Этим занимается один из наиболее абстрактных разделов математики — так называемая математическая логика. Результаты этой науки находят широкое применение в современной науке и технике: без нее было бы невозможно создание быстродействующих вычислительных машин.

Этот факт, так же как и многие другие, убедительно свидетельствует о том, что, хотя математика — самая абстрактная из наук и занимается многими «бесполезными» с точки зрения повседневной практики вещами, тем не менее и она служит познанию действительности.

В качестве иллюстрации и дополнения к сказанному попытаемся кратко рассмотреть связь между евклидовой и неевклидовой геометрией. Свой рассказ мы начнем с евклидовой аксиомы о параллельных.

В наиболее простой форме евклидова аксиома о параллельных утверждает, что через точку, лежащую вне данной прямой a можно провести лишь одну прямую b, которая нигде не пересечет прямую a. Присоединив эту аксиому к остальным аксиомам геометрии, мы получим систему аксиом, лежащую в основе евклидовой геометрии: той знакомой нам со школьной скамьи геометрии, которая верой и правдой служит человечеству на протяжении двух с половиной тысяч лет.

До Яноша Бойяи многие математики думали, что аксиому о параллельных можно вывести из других аксиом евклидовой геометрии. Это означало бы, что аксиома о параллельных не является независимой, а следует из каких-то других аксиом. В этом случае, заменив аксиому о параллельных ее отрицанием, мы непременно получили бы противоречивую систему аксиом.

Венгерский математик Янош Бойяи и русский математик Н. И. Лобачевский почти одновременно сделали дерзкое открытие, которое произвело подлинный переворот в представлениях математиков: они показали, что евклидова аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом геометрии [1] и ее можно заменить противоположной аксиомой [2], хотя та и противоречит всему нашему естественно-научному опыту. Оказалось, что, заменив аксиому о параллельности, мы придем к системе аксиом, лежащей в основе новой, неевклидовой геометрии. Ее Янош Бойяи достаточно подробно рассмотрел в своей работе «Аппендикс». Эта геометрия, получившая название геометрии Лобачевского — Бойяи, или гиперболической геометрии, с точки зрения непротиворечивости эквивалентна евклидовой геометрии. Если

---

[1] К этому же выводу пришел и знаменитый немецкий математик К. Ф. Гаусс, однако он не опубликовал своего открытия.

[2] Точнее говоря, существуют два одинаково возможных утверждения, противоположные евклидовой аксиоме о параллельности: 1) через точку вне прямой a нельзя провести прямую b, которая бы не пересекала a; 2) через точку вне прямой a можно провести несколько прямых b, не пересекающих прямую a.

одна из геометрий противоречива, то и другая также противоречива, и наоборот. (Вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии интересовал еще самого Бойяи.)

Таким образом, если евклидова геометрия непротиворечива, то аксиома о параллельных независима от остальных аксиом, лежащих в основе евклидовой геометрии, не выводима из них. В противном случае гиперболическая геометрия, в систему аксиом которой вместо аксиомы о параллельных входит ее отрицание, была бы противоречива, а это, как мы только что упоминали, означало бы, что и евклидова геометрия не может быть непротиворечивой.

Часть III

27. ТРАМВАЙ В ЧАСЫ «ПИК»

Условия этой задачи во многом аналогичны условиям задачи 4. Там требовалось определить, в каком роде войск и в каком звании служит каждый из офицеров, здесь мы должны узнать, каким маршрутом ехал каждый из пассажиров и какова его профессия. В обоих случаях необходимо установить соответствие между элементами трех множеств, или, точнее говоря, разбить все элементы на тройки так, чтобы в любой тройке было представлено по одному элементу из каждого множества. Каждый элемент любого из трех множеств должен непременно войти в одну из троек, но не более чем в одну.

В задаче 4 нам сначала удалось установить соответствие между элементами двух множеств (именами офицеров и их званиями). Затем мы установили соответствие между элементами множества пар, образованных элементами двух первых множеств (каждая пара означала одного из офицеров, чьи имена и звания уже были известны), и элементами третьего множества (родами войск, в которых служат офицеры). Тем самым мы свели решение задачи 4 к решению двух задач, в каждой из которых требуется установить соответствие между элементами лишь двух множеств. В решении задач подобного типа мы уже приобрели известный опыт. Попытаемся выяснить, не удастся ли нам и на этот раз с его помощью достичь цели.

Прежде всего разложим условия задачи на элементарные запреты.

1. Вилмош не мог ехать на трамвае № 15.

2_1. Электромонтер не мог ехать на трамвае № 33.

2_2. Маляр не мог ехать на трамвае № 33.

Сумма цифр в номерах тех маршрутов, которыми следовали опрошенные психологом пассажиры, равна: для 55-го маршрута — 10, для 15-го — 6, для 25-го — 7 и для 33-го — 6. Число букв в именах Аладар и Вилмош равно 6, в именах Петер и Лайош — 5. Следовательно, фрезеровщика зовут либо Аладаром, либо Вилмошем и ехать он мог либо на 15-м, либо на 33-м номере трамвая. Из этих альтернатив извлекаем следующие элементарные запреты:

$З_1$. Фрезеровщик не мог ехать на трамвае № 55.
$З_2$. Фрезеровщик не мог ехать на трамвае № 25.
$З_3$. Имя фрезеровщика — не Петер.
$З_4$. Имя фрезеровщика — не Лайош.
4_1. Лайош не мог ехать на трамвае № 15.
4_2. Лайош не мог ехать на трамвае № 25.
5. Имя электромонтера — не Вилмош.
6. О 25-м маршруте трамвая психологу рассказывал не Петер.
7. Лайош не мог ехать на трамвае № 55.

Посмотрим, не удастся ли нам установить соответствие между именами пассажиров и номерами трамвайных маршрутов (так же, как нам удалось сделать в задаче 4). Начертим таблицу 4 × 4 (рис. 86, *а*) и нанесем на нее элементарные запреты 1, 4_1, 4_2, 6 и 7.

I.	А	П	В	Л
55				(7)
15			(1)	(4_1)
25		(6)		(4_2)
33				1

а

II.	С	Э	М	Ф
55				($З_1$)
15				
25				($З_2$)
33		(2_1)	(2_2)	

б

III.	С	Э	М	Ф
Л				($З_4$)
В		(5)		
П				($З_3$)
А				

в

Рис. 86.

Первое частичное решение нам дает столбец, «принадлежащий» Лайошу: *на трамвае № 33 ехал Лайош.* Этот результат позволяет исключить все остальные клетки последней строки (соответствующей 33-му маршруту трамвая). Изобразим те элементарные запреты, которые обусловлены сужением задачи, на рис. 27, *а*. Что делать дальше, пока не известно: мы не можем найти ни одного однозначно определенного частичного решения. Во всех строках и во всех столбцах суженной таблицы (она получается из исходной при вычеркивании последнего столбца и последней строки) содержатся по крайней мере по две свободные клетки. *Следовательно, установить соответствие между именами пассажиров и номерами трамвайных маршрутов нам не удастся.*

Попытаемся теперь установить соответствие между профессиями пассажиров и номерами трамвайных маршрутов. Соответствующие этому случаю элементарные запреты, исключающие некоторые комбинации элементов двух множеств — имен пассажиров и номеров трамвайных маршрутов, представлены на рис. 86, *б*. Перечислим их: 2_1, 2_2, $З_1$ и $З_2$. Нетрудно заметить, что и в этом случае, так же как и в предыдущем, нам не удастся установить взаимно-однозначного соответствия между двумя интересующими нас множествами: во всей таблице нет ни одной клетки, которая бы позволила нам получить однозначно определенное частичное решение. *Таким образом, нам не удастся установить соответствие между профессиями пассажиров и номерами трамвайных маршрутов.*

Мы можем лишь надеяться теперь на то, что нам удастся установить соответствие между именами пассажиров и их профессиями. К сожалению, достаточно взглянуть на рис. 86, *в*, чтобы понять, что и этой надежде не суждено сбыться. Элементарные запреты,

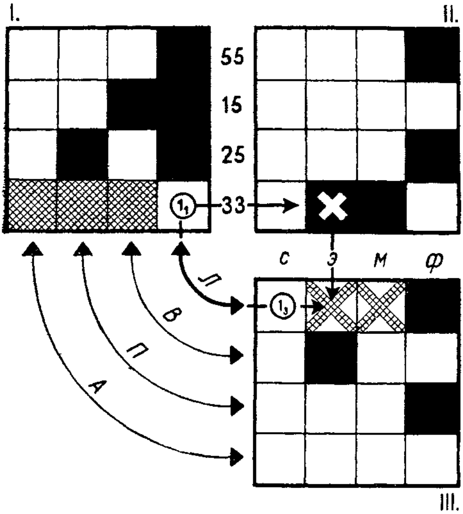


Рис. 87.

соответствующие выбранной паре множеств (3_3, 3_4 и 5), не приводят ни к одному однозначно определенному частичному решению. *Таким образом, установить соответствие между именами и профессиями пассажиров невозможно.*

Итак, какую бы пару множеств мы ни выбирали, установить соответствие между их элементами оказывалось невозможно. Отсюда мы делаем важный вывод: *все три множества необходимо рассматривать одновременно.*

Наглядность метода существенно облегчает решение задачи. Рассмотрим рис. 86, *а* и 86, *б*. Нетрудно видеть, что если изображенные на них таблицы расположить рядом так, чтобы между ними остался небольшой просвет, то номера трамвайных маршрутов можно было бы выписать лишь один раз: числа в просвете между таблицами «обслуживали» бы обе таблицы одновременно. Аналогичной «экономии» мы могли бы добиться, поместив таблицу, изображенную на рис. 86, *в*, под таблицей, изображенной на рис. 86, *б*. Более того, достаточно проявить лишь немного изобретательности, и имена пассажиров на таблицах *I* и *III* можно будет также выписывать не дважды, а лишь один раз.

Разумеется, экономия в обозначениях, которой мы достигнем, разместив таблицы так, как показано на рис. 87, далеко не самое главное. Гораздо важнее другое: новое расположение таблиц более упорядоченно (по сравнению с прежним), и порядок этот, если присмотреться к нему повнимательнее, кое в чем облегчает поиск решения.

Относительно 33-го маршрута уже известно, что им пользовался Лайош. Но относительно 33-го маршрута известно и другое: по элементарному запрету 2_1, электромонтер не мог ехать на 33-м

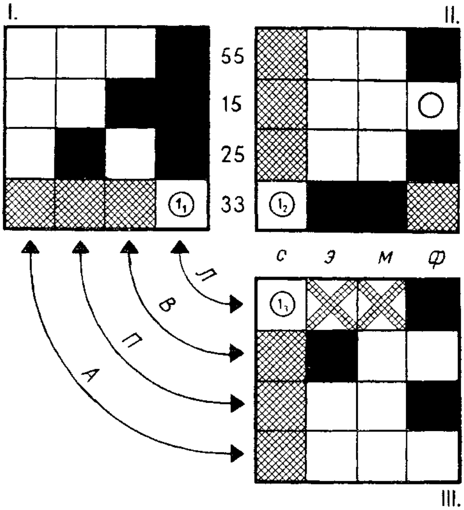


Рис. 88.

трамвае. Таким образом, электромонтера зовут не Лайошем. Этот запрет мы нанесем на таблицу *III* (рис. 87), перечеркнув клетку «Лайош электромонтер» крестом.

Аналогичный вывод следует и из элементарного запрета 2_2. Маляр не мог следовать 33-м маршрутом, а поскольку Лайош ехал на 33-м трамвае, то Лайош не мог быть маляром. Нанеся и этот запрет на таблицу *III* (рис. 87), мы тотчас же заключим из однозначно определенного частичного решения в первой строке, что *Лайош может быть лишь слесарем.*

Найденный результат подсказывает направление дальнейших поисков. Во-первых, мы можем исключить из дальнейшего рассмотрения те клетки таблицы *III*, которые принадлежат столбцу с пометкой «слесарь». Во-вторых, поскольку Лайош ехал на 33-м трамвае и Лайош слесарь, то *на 33-м трамвае ехал слесарь.* Отметив установленное соответствие на таблице *II*, вычеркнем из нее все клетки, стоящие в столбце «слесарь» и в строке «33-й трамвайный маршрут» (рис. 88).

Теперь мы с радостью замечаем, что в таблице *II* сужение задачи привело к первому частичному решению. В столбце «фрезеровщика» свободна лишь одна клетка: *фрезеровщик ехал на 15-м трамвае* Этот результат, во-первых, позволяет сузить еще больше круг поисков в таблице *II* и, во-вторых, сравнить его с элементарными запретами, нанесенными на другие таблицы (рис. 89). Например, спустившись вниз по вертикали «фрезеровщика» с таблицы *II* в таблицу *III* до запрета «фрезеровщик не Петер» и объединив этот запрет с только что полученным частичным решением, мы установим, что Петер не ехал на 15-м трамвае. Если этот элементарный запрет нанести на таблицу *I*, то в горизонтали «15-го трамвайного маршрута» нас будет ждать приятный сюрприз: новое

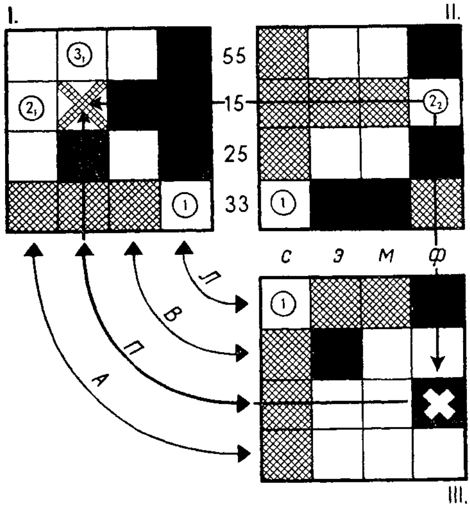


Рис. 89.

частичное решение *«Аладар не ехал на 15-м трамвае»*. Взятые вместе, три частичных решения образуют одну из искомых троек: «*фрезеровщик — по имени Аладар — ехал на 15-м трамвае»*.

Одновременно мы получаем в столбце «Петер» таблицы *I* еще одно однозначно определенное решение: *Петер ехал на 55-м трамвае.*

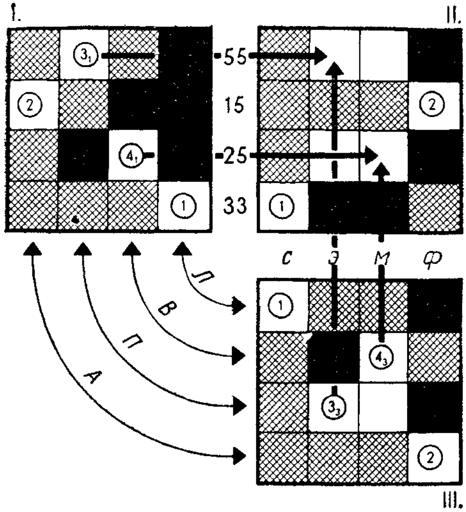
Отметим в таблице *III* соответствие «фрезеровщик — Аладар» — сужение задачи, вызванное вторым частичным решением, а в таблице *I* — частичное решение, полученное из элементарного запрета $З_1$.

То, что при этом получится, изображено на рис. 90. Таблица *I* порождает четвертое частичное решение: Вилмош ехал на 25-м трамвае, а таблица *III* — последние два частичных решения, которых недоставало до полного «комплекта»: Петер — электромонтер и Вилмош — маляр.

Итак, мы нашли следующие тройки, не противоречащие условиям задачи:

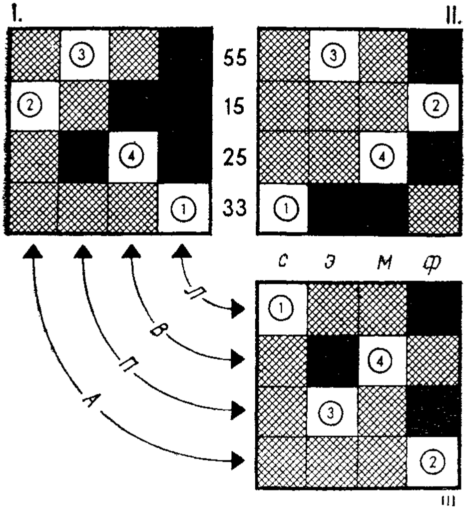
1) *Лайош — слесарь — 33-й маршрут трамвая.*

2) *Аладар — фрезеровщик — 15-й маршрут трамвая,.*



I.
II.
3₁
2
4₁
1
55
15
25
33
2
1
с
э
м
ф
Л
В
П
А
1
4₃
3₃
2
III.

Рис. 90.



I.
II.
3
2
4
1
55
15
25
33
3
2
4
1
с
э
м
ф
Л
В
П
А
1
4
3
2
III

Рис. 91.

3) *Петер — электромонтер — 55-й маршрут трамвая,*
4) *Вилмош — маляр — 25-й маршрут трамвая.*

Для порядка мы отметили третье и четвертое частичные решения (электромонтер ехал на 55-м трамвае, маляр ехал на 25-м трамвае) на таблице *II*. Как видно из рис. 90, это сделать можно: нужные клетки оказываются пустыми. Все три заполненные таблицы представлены на рис. 91.

28. КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ I

Из таблицы *I*, составленной Золи, видно, что собаке соответствует отличительное свойство «злая». Из таблицы *II* мы узнаем, что собака белая, а из таблицы *III*, что белое животное злое. Таким образом, все прекрасно сходится, и, перебрав три пары элементов, мы получаем первую тройку элементов:

злая — собака — белая.

Аналогично находим остальные тройки элементов:

дикая — кошка — пятнистая,
ручной — попугай — зеленый,
пугливая — зебра — полосатая

(рис. 92).

Из таблицы *I*, составленной Миши, мы прежде всего «вычитываем» соответствие «ручная — кошка». Таблица *II* сообщает нам, что кошка белая, а таблица *III* — что белое животное дикое.

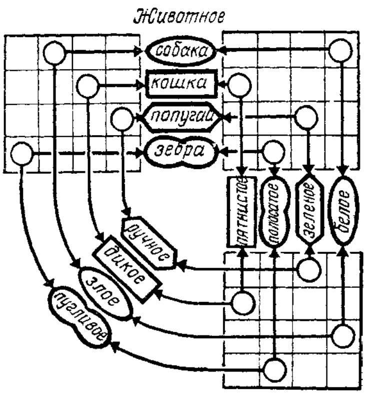


Рис. 92.

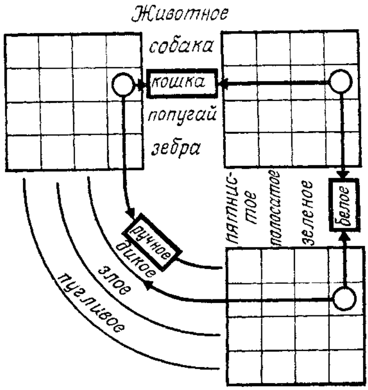


Рис. 93.

Ясно, что у Миши в его таблицах «концы с концами» не сходятся: белая кошка оказывается в одно и то же время и дикой, и ручной (рис. 93). Миши где-то ошибся.

Разумеется, это отнюдь не означает, будто решение Золи заведомо правильное, а решение Миши заведомо неправильное.

Решая предыдущую задачу, мы разбили три таблицы всеми возможными способами на пары. Найти частичное решение, то есть тройку соответствующих друг другу элементов, которая содержит по одному элементу из каждого множества, означало найти три не противоречащих одно другому соответствия между любыми двумя элементами, образующими данную тройку. Например, тройка

Лайош — слесарь — ехал на 33-м трамвае

означала, что одновременно выполняются три соответствия:

Лайош — слесарь,
Лайош — приехал на 33-м трамвае,
слесарь — приехал на 33-м трамвае.

В решении, принадлежащем Золи, имеется тройное соответствие

дикая — собака — белая,

но парные соответствия выглядят так:

дикая — собака,
дикая — белая,
собака — белая.

Отметим парные соответствия между элементами в трех таблицах. На каждую таблицу придется ровно одна пара «связанных» между собой элементов. Итак, если имеется тройка элементов, из которых любые два связаны между собой соответствием, не противоречащим условиям задачи (то есть если имеется частичное решение), то на каждой из трех таблиц можно поставить по одному связующему кружку (он будет указывать на соответствие между элементами одной из пар). *Эти три кружка должны быть расположены не как угодно, а лишь в таком порядке, что если соответствие между парами мы будем указывать тремя (воображаемыми) линиями — вертикальной, горизонтальной и дугой окружности, — то любые два кружка окажутся связанными одной из этих линий.* Как мы увидим в дальнейшем, это замечание оказывается весьма полезным. Поскольку мы будем часто ссылаться на него, нам удобно дать ему какое-нибудь название. Условимся в дальнейшем называть его *правилом соответствия.*

29. СИММЕТРИЯ

Можно предложить по крайней мере два наглядных способа изображения трех множеств, при которых ни одно множество не будет выделено по сравнению с другим.

Один из этих способов представлен на рис. 94. Каждая таблица изображена в виде ромба. Внутреннее «устройство» ромбических таблиц ничем не отличается от устройства более привычных нам квадратных таблиц. (Обозначим элементы каждого из трех множеств. Пусть $\{A, B, C, D\}$ — элементы первого, $\{a, b, c, d\}$ — элементы второго и $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ — элементы третьего множества.) На рис. 94 изображены две тройки попарно соответствующих друг другу элементов. Линии, проведенные между элементами, показывают, какому элементу одного множества соответствуют те или иные элементы двух других множеств (любой элемент имеет по одному «представителю» в каждом из двух множеств, которым он не принадлежит). Назовем эти линии *указателями соответствия* между

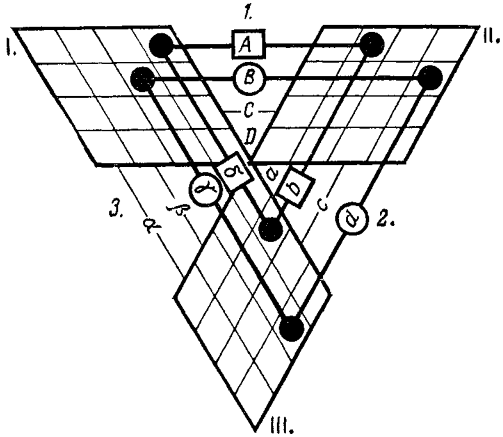


Рис. 94.

множествами. На языке указателей правило соответствия можно сформулировать так: *любая тройка попарно соответствующих друг другу элементов (любое частичное решение) изображается тремя точками (по одной — на каждой из трех таблиц), любые две из*

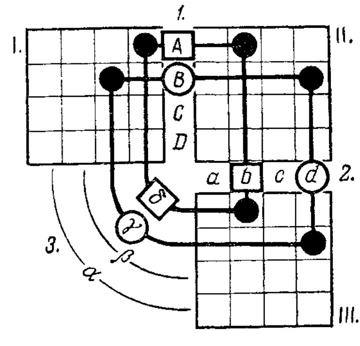


Рис. 95.

которых соединены указателями соответствия. Иначе говоря, указатели соответствия образуют для каждого частичного решения замкнутый треугольник.

Сравним новый метод изображения трех множеств со старым (рис. 95). Мы видим, что между ними по существу нет различия, лишь из-за асимметрии в расположении таблиц третий указатель соответствия имеет вид не отрезка прямой, а дуги окружности.

Симметрия в расположении таблиц, достигнутая нами при новом методе, приводит к тому, что все три указателя соответствия имеют теперь вид отрезков прямых. Заметим, однако, что «прямизна» указателей соответствия отнюдь не существенна. Нетрудно придумать и такой способ изображения трех множеств, при котором все указатели соответствия будут не прямыми, а кривыми. Один из них изображен на рис. 96. По сравнению с предложенным нами методом этот метод наглядного изображения таблиц несколько «усовершенствован»: введенное новшество состоит в том,

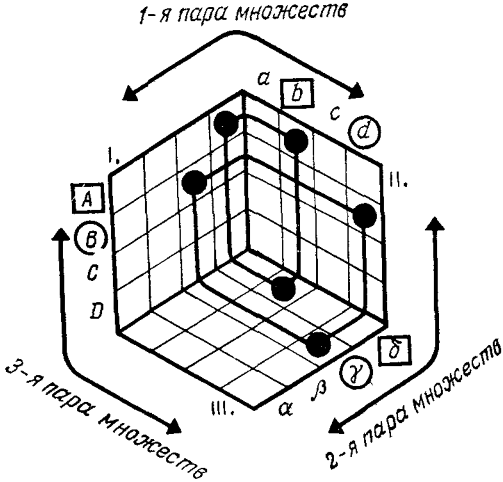


Рис. 96.

что для экономии места и упрощения рисунка все три ромбические таблицы сдвинуты вплотную друг к другу, а поясняющие надписи расположены вне получившегося шестиугольника. Каждая буква относится ко всем клеткам своего слоя. Например, буква A — ко всем клеткам самых верхних строк в таблицах I и II, буква c — ко всем клеткам, стоящим во втором справа столбце в таблице II и втором от правой границы слое в таблице III, поднимающемся слева направо.

30. АНАЛИЗ

Из рис. 87 и 89, приведенных в решении задачи 27, ясно, каким образом возникают новые элементарные запреты, не содержавшиеся непосредственно в условиях задачи. В обоих случаях происходило одно и то же. На одной из таблиц появлялось частичное решение (мы узнавали о соответствии между какими-то двумя элементами множеств). *Если указатель соответствия, проведенный из клетки, занятой найденным нами частичным решением, наталкивается в столбце или в строке одной из двух остальных таблиц на запрет* *(черную клетку), то клетка третьей таблицы, в которой пересекаются указатели соответствия, проведенные из клетки, занятой найденным нами частичным решением, и обнаруженной черной клетки, также занята элементарным запретом.* Это утверждение называется

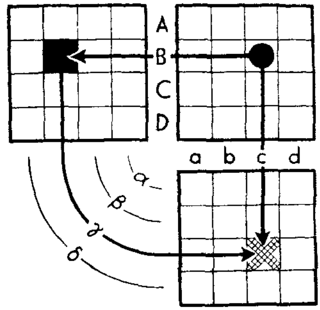


Рис. 97.

правилом пересадки (клеток). На рис. 97—99 показано, как выглядит правило пересадки во всех трех способах наглядного изображения трех таблиц.

Исходя из того, что нам уже известно, правило пересадки можно объяснить двояким способом.

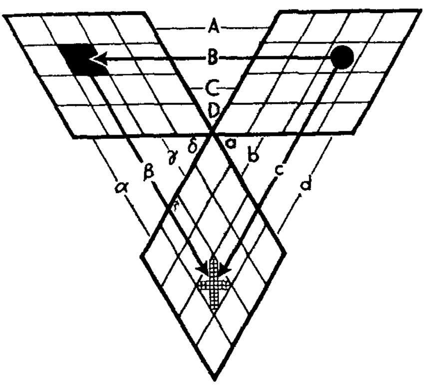


Рис. 98.

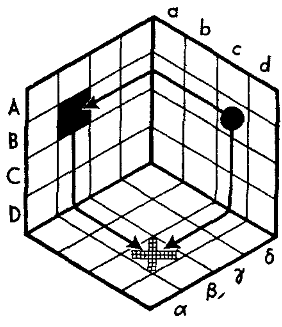


Рис. 99.

Во-первых, как мы убедились решая задачу 27, оно следует из обычных правил логического вывода. На рис. 97—99 представлен один и тот же вывод:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{если } c \text{ соответствует } B,\\ \text{а } B \text{ не соответствует } \beta,\end{array}}{\text{то } c \text{ не соответствует } \beta.}$$

Во-вторых, правило пересадки следует из правила соответствия. Докажем это.

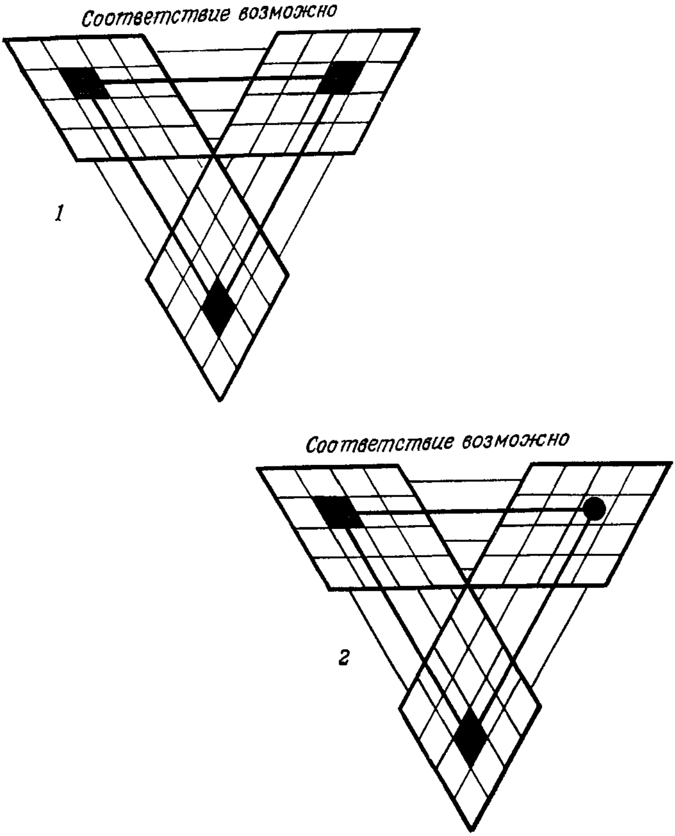
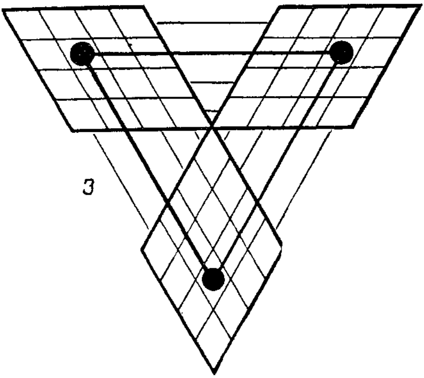


Рис. 100.

Если B соответствует c и c соответствует β, то (по правилу соответствия) β соответствует B. Если же известно, что B не может соответствовать β (соответствие симметрично: если B соответствует β, то β соответствует B), то тем самым соответствие между c и β исключается: на них накладывается запрет.

То же самое можно сформулировать иначе: в вершинах треугольника, образованного тремя указателями соответствия, не могут находиться два кружка, указывающих на то, что соответствие между какими-то двумя элементами не запрещено (согласуется с условиями задачи). Если же любые две вершины треугольника заняты кружками, то задача противоречива, поскольку по правилу соответствия в этом случае и в третьей вершине также должен находиться кружок.



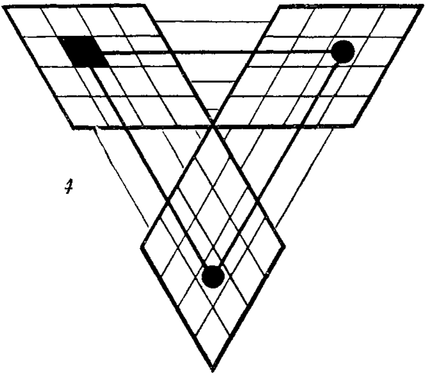


Рис. 100 (продолжение)

Итак, если условия задачи непротиворечивы, то на соответствующей ей схеме размещения трех таблиц возможны лишь такие треугольники, у которых:

1) либо во всех вершинах расположены элементарные запреты;

2) либо в двух вершинах расположены элементарные запреты, а в третьей кружок, разрешающий соответствие между двумя элементами;

3) либо во всех трех вершинах расположены кружки, разрешающие соответствие между двумя элементами (рис. 100).

Как показывают случаи *1* и *2*, на пересечении указателей соответствия, исходящих из двух «запрещенных» клеток (связанных между собой соответствием), может оказаться и клетка, находящаяся под запретом, и клетка, занятая кружком (знаком разрешенного соответствия).

31. КУЛЬТУРНЫЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

В условиях задачи говорится о четырех юношах (Андраше, Беле, Чаби и Дьерде) и четырех девушках (Ольге, Рози, Панни и Шари). Из них можно составить четыре пары, а поскольку было лишь четыре вида культурных развлечений, на каждом из которых присутствовали по крайней мере два члена компании, то вчера вечером на концерте, в театре, кино и на выставке побывало по одной паре.

I решение. Внимательно прочитав условия задачи, мы заметим, что о девушках они сообщают больше сведений, чем о юношах. Так, из условий 4 и 5 следует, что на концерте или на художественной выставке могли побывать лишь Ольга или Шари. Но с Ольгой, как

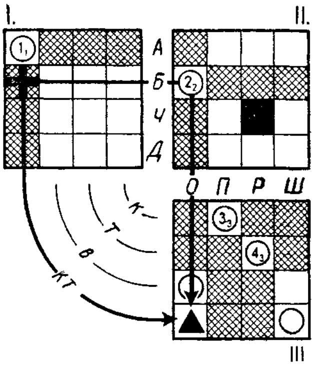


Рис. 101.

гласит условие 2, весь вечер был Бела, поэтому она не могла присутствовать на концерте, поскольку по условию 1 на концерте могла быть лишь та девушка, с которой в тот вечер был Андраш. Следовательно, из всех девушек лишь *Ольга посетила художественную выставку*, причем (по условию 2) побывала там *вместе с Белой.*

Отсюда мы заключаем, что *на концерте* из девушек *была Шари*, а из юношей *Андраш* (см. условие 1).

Итак, Шари в тот вечер была вместе с Андрашем, а Ольга — с Белой. По условию 3, *Чаби* мог провести вечер лишь *с Панни*, а из условия 4 следует, что они отправились *в кино*. Полученных сведений уже достаточно для того, чтобы сказать, кто с кем провел вчерашний вечер и где они побывали:

Ольга с Белой — на выставке,
Шари с Андрашем — на концерте,
Панни с Чаби — в кино,
Рози с Дьердем — в театре.

Нетрудно проверить, что все условия задачи при этом выполнены, поэтому найденное нами распределение молодых людей по различным видам культурных развлечений действительно служит решением задачи.

II решение. Мы не знаем, какое решение задачи предложил наш читатель, оказалось ли оно длиннее или короче предыдущего (и, вообще, есть ли между ними хоть что-нибудь общее). Задача, бесспорно, не принадлежит к числу трудных. Тем не менее мы по своему опыту знаем, что обычно проходит несколько минут, прежде чем удается получить первое частичное решение. Разумно поэтому посмотреть, к какому решению приводит столь простой и надежный метод, как составление таблиц.

После того как мы впишем в таблицы соответствия между парами элементов, содержащиеся в условиях 1, 2, 4 и 5, элементарный запрет из условия 3 и те элементарные запреты, которые возникают при сужении информации, обусловленном уже известными

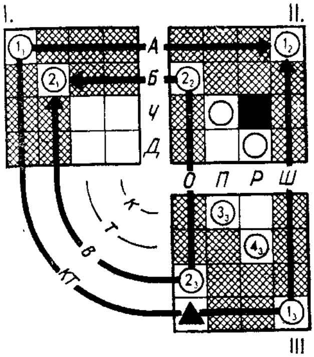


Рис. 102.

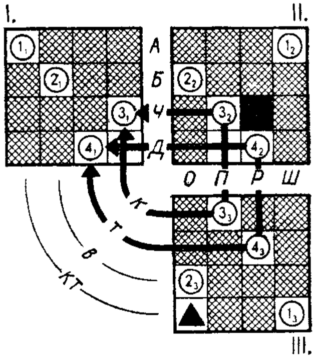


Рис. 103.

попарными соответствиями между элементами (рис. 101), в таблице *III* почти не останется свободных клеток. Частичное решение 2 из таблицы *II* и элементарный запрет в таблице *I*, возникший при сужении информации, позволяют «пересадить» один элементарный запрет в таблицу *III* (см. треугольник на рис. 101). Новый запрет в свою очередь порождает еще два частичных решения, после чего в таблице *III* не остается ни одной свободной клетки.

Каждому из новых частичных решений в таблице *III* соответствует по одному частичному решению в таблицах *I* и *II* (они обозначены цифрами 1 и 2), поэтому мы можем воспользоваться правилом соответствия (рис. 102). Все вершины треугольника (образующие одну тройку элементов) обозначены одинаковыми цифрами с различными индексами. Отметив в таблице *II* то сужение информации, к которому приводят только что полученные частичные решения (рис. 102), мы получим еще два недостающих частичных решения.

Наконец, пользуясь правилом соответствия, заполняем до конца таблицу *I* (рис. 103). Все тройки элементов, связанных между собой попарным соответствием и образующих в совокупности решение задачи, легко находятся из рис. 103.

Примечание 1. Весьма полезно сравнить промежуточные этапы II решения с промежуточными этапами I решения. Нетрудно видеть, что между обоими решениями имеется строгое соответствие. Как мы уже упоминали, II решение, полученное «табличным» методом, при желании можно представить в таком же виде, как I решение, — необходим лишь небольшой навык в переводе с «табличного» языка на язык обычного логического вывода.

Примечание 2. В заключении к предыдущей главе, рассматривая двумерные логические задачи (на установление соответствия между элементами двух множеств), мы уже упоминали о том, что соответствие между двумя элементами, принадлежащими различным множествам («элементарное соответствие»), в действительности эквивалентно набору элементарных запретов. Правильность этого утверждения особенно хорошо видна на примере только что рассмотренной задачи: в условиях задачи говорится о парных соответствиях между отдельными элементами, а первые шаги в решении сводятся главным образом к использованию элементарных запретов, вытекающих из этих соответствий.

32. КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ II

Решение этой задачи мы также изложим почти без слов — в виде серии рисунков. Читатель уже приобрел известный опыт в составлении и расшифровке таблиц, и мы надеемся, что он сможет

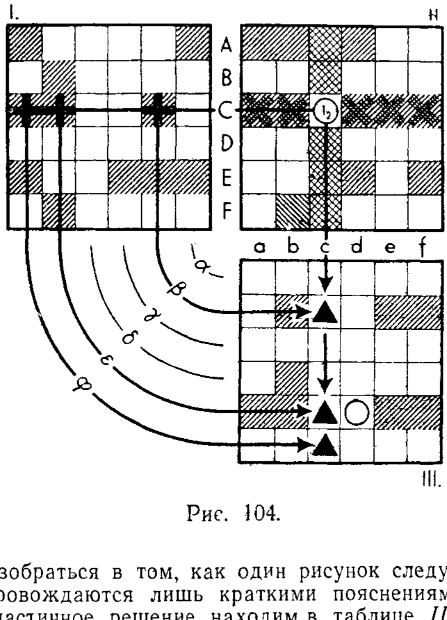


Рис. 104.

без труда разобраться в том, как один рисунок следует из другого. Рисунки сопровождаются лишь краткими пояснениями.

Первое частичное решение находим в таблице *II*: $C \longleftrightarrow c$. Элементарные запреты, возникающие при сужении информации, и использованные условия обозначены так же, как обычно.

Первое частичное решение (1_2) позволяет «пересадить» в таблицу *III* три элементарных запрета. Запреты, используемые для пересадки, заимствованы из таблицы *I* и обозначены крестами. Вместе с частичным решением 1_2 каждый из элементарных запретов-«крестоносцев» служит вершиной треугольника. Третья вершина каждого из двух треугольников находится в той клетке таблицы *III*, которая содержит пересаженный элементарный запрет.

Пересаженные запреты позволяют найти в таблице *III* новое частичное решение. На таблице *III* отмечено сужение информации,

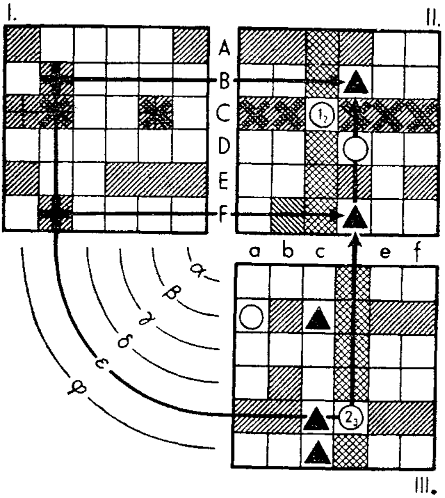


Рис. 105.

вызванное частичным решением 2_3. Пересадка с помощью этого частичного решения двух запретов из таблицы *I* в таблицу *II* порождает новое частичное решение.

Поскольку только что полученное частичное решение 2_2 дополняет ранее полученное частичное решение 2_3, то (по правилу соответствия) эти решения, взятые вместе, порождают тройку попарно соответствующих элементов: $D \leftarrow\rightarrow d \leftarrow\rightarrow \varepsilon$. Назовем эту тройку вторым частичным решением. В этой связи уместно подчеркнуть, что в отличие от второго частичного решения первое частичное решение было неполным (оно содержало лишь соответствие $C \leftarrow\rightarrow c$).

Частичное решение 3_3 мы получим из таблицы *III*. Оно позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения несколько клеток в таблице *III* (сужение информации) и пересадить по одному запрету из таблицы *I* в таблицу *II*, и наоборот.

Сужение информации, вызванное в таблице *I* частичным решением $D \leftarrow\rightarrow d \leftarrow\rightarrow \varepsilon$, позволяет найти еще одно частичное решение 4_1. В свою очередь частичное решение 4_1 позволяет пересадить в таблицу *II* один элементарный запрет, что приводит к двум новым частичным решениям.

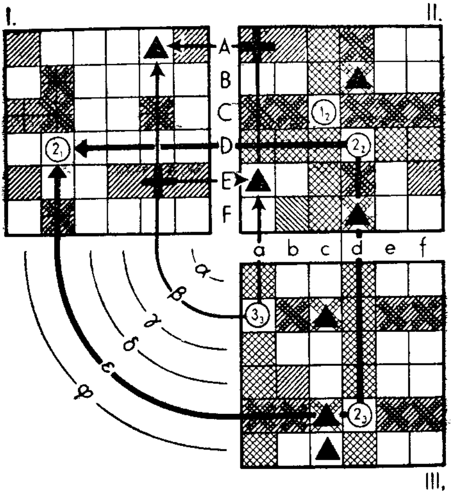


Рис. 106.

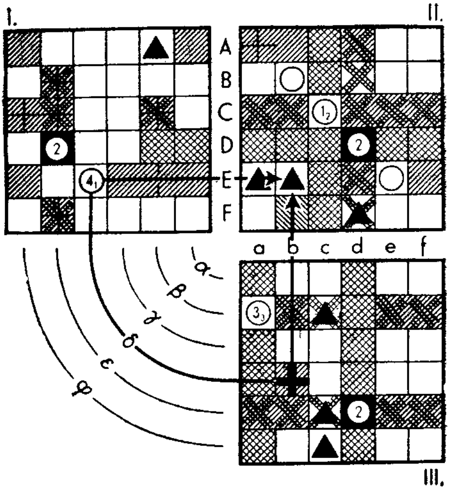


Рис. 107.

В таблице *I* сужение информации, вызванное частичным решением 4_1, порождает частичное решение 5_1.

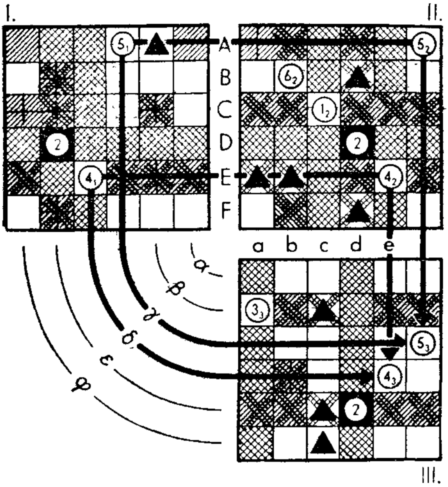


Рис. 108.

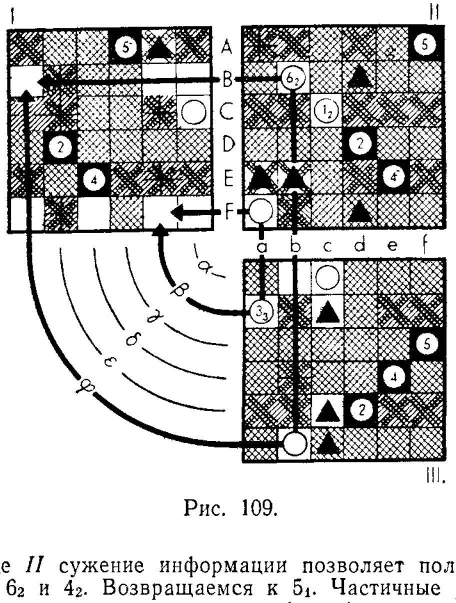


Рис. 109.

В таблице *II* сужение информации позволяет получить частичные решения 6_2 и 4_2. Возвращаемся к 5_1. Частичные решения 5_1 и 5_2, так же как и частичные решения 4_1 и 4_2, позволяют найти по правилу соответствия в таблице *III* новые частичные решения: 5_3 и 4_3.

Только что найденные частичные решения позволяют сузить информацию на всех трех таблицах. Сужение информации порождает новые частичные решения на всех таблицах, а на таблице *III* даже два новых частичных решения. Объединяя частичные решения 6_2 и 3_3 с одним из только что полученных решений в таблицах *III* и *II*, получаем по правилу соответствия два новых частичных решения в таблице *I*.

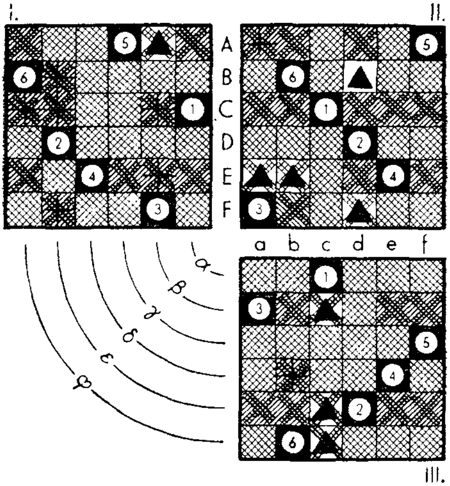


Рис. 110.

Следует обратить внимание, что найденное нами ранее частичное решение 1_2 (соответствие $C \longleftrightarrow c$) лишь теперь «достраивается» до полной тройки попарно соответствующих элементов: $C \longleftrightarrow c \longleftrightarrow \alpha$. Из найденных позже частичных решений полные наборы из трех попарно соответствующих элементов образуют решения, обозначенные цифрами 2, 4 и 5.

Приводим окончательный ответ задачи. Хорошо видно, что полученное решение единственно (ни на одной из трех таблиц нет свободных клеток) и непротиворечиво (частичные решения нигде не наталкивались на элементарные запреты). Итак, полное решение задачи имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
A \longleftrightarrow f \longleftrightarrow \gamma, \\
B \longleftrightarrow b \longleftrightarrow \varphi, \\
C \longleftrightarrow c \longleftrightarrow \alpha, \\
D \longleftrightarrow d \longleftrightarrow \varepsilon, \\
E \longleftrightarrow e \longleftrightarrow \delta, \\
F \longleftrightarrow a \longleftrightarrow \beta.
\end{gathered}
$$

33. В КАФЕ

Для решения задачи воспользуемся разработанным методом одновременного рассмотрения трех таблиц. Прежде всего перечислим элементарные запреты, которые содержатся в условиях задачи.

1*. Золтан не заказывал вина.

1**. Золтан не заказывал пива.

2*. Золтан не заказывал пирожков с мясом.

2**. Тот, кто заказал пирожки с мясом, не заказывал вина.

2***. Тот, кто заказал пирожки с мясом, не заказывал пива.

3. Тот, кто заказал мороженое, не заказывал пива.

4*. Ласло не заказывал кока-колу.

4**. Ласло не заказывал пирожных.

4***. Ласло не заказывал мороженого.

5. Тот, кто заказал пирожки с мясом, не заказывал вишневый сок.

6*. Шандор не заказывал пирожных.

6**. Шандор не заказывал пирожков с мясом.

6***. Шандор не заказывал вина.

Для наглядности представим все эти запреты на трех таблицах (рис. 111).

Из таблицы *I* тотчас же следует частичное решение: *тот, кто заказывал пирожки с мясом, мог заказать лишь кока-колу.*

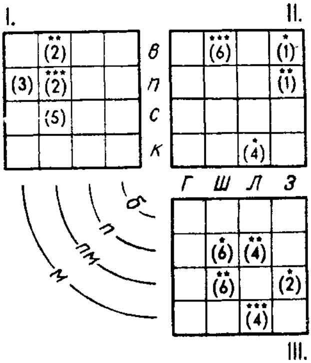


Рис. 111.

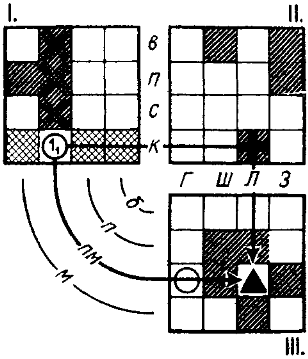


Рис. 112.

После сужения информации и пересадки элементарного запрета находим новое частичное решение в таблице *III*: *пирожки с мясом мог заказать лишь Габор* (рис. 112).

Таким образом, официант мог подать *пирожки с мясом* и (по правилу соответствия) *кока-колу лишь Габору.*

Сужение информации, вызванное этим частичным решением, позволяет заключить из таблицы *III*, что *пирожные официант мог подать Золтану, а бутерброд — Ласло* (рис. 113).

Первое частичное решение позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения несколько клеток и в таблице *II*. В результате сужения информации мы заключаем, что *Золтану официант мог подать вишневый сок, а Ласло — вино* (рис. 114). Новое частичное

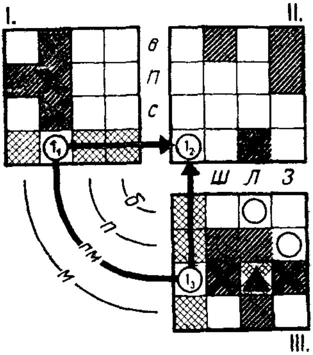


Рис. 113.

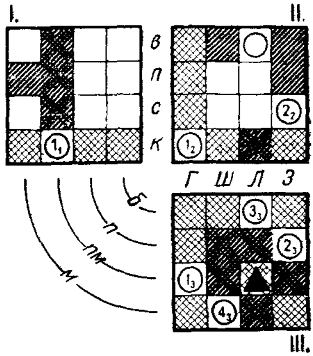


Рис. 114.

решение в свою очередь приводит к дальнейшему сужению информации в таблице *II*, из которого мы находим последнее частичное решение: *Шандор мог получить пиво* (рис. 115).

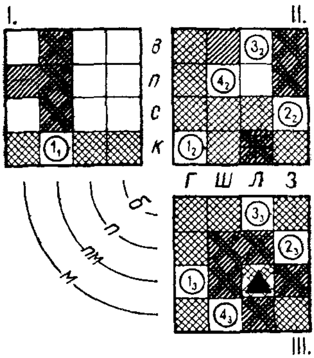


Рис. 115.

Итак, официант мог распределить закуски и напитки лишь следующим образом:

Габору подать пирожки с мясом и кока-колу,
Шандору — мороженое и пиво,
Ласло — бутерброд и стакан вина, а
Золтану — пирожные и вишневый сок.

34. ПРОДОЛЖЕНИЕ

Если официант обслужит посетителей кафе в соответствии с решением предыдущей задачи, то можно не сомневаться, что по крайней мере трое из них останутся недовольными. Во-первых, будет недоволен Шандор: ему официант подаст пиво и мороженое, хотя по условию 3 предыдущей задачи пиво и мороженое заказывали разные люди. Во-вторых, тот, кто интересовался температурой пива, не получит своего мороженого: официант подаст ему что-нибудь другое и любитель мороженого останется недоволен. В-третьих, выразит свое недовольство официант: «Если посетители хотят, чтобы их хорошо обслуживали, то они не должны давать противоречивые заказы!» Официант совершенно прав: *условия задачи 33 действительно противоречивы.*

Замаскировано противоречие с помощью довольно нехитрого приема. Частичные решения 2, 3 и 4 мы получили из таблиц *II* и *III*. Все сведения, казалось бы, великолепно согласуются между

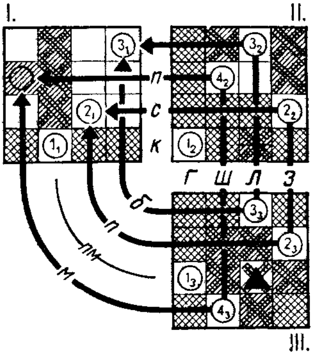


Рис. 116.

собой (рис. 115). И действительно, противоречие в скрытом виде содержится лишь в таблице *I*: если полученные частичные решения перенести на все таблицы по правилу соответствия (как мы делали до сих пор), то противоречие станет явным (рис. 116).

В предыдущих задачах мы не считали решение законченным до тех пор, пока не заполняли все три таблицы, и поступали так не только из педантизма. Например, в решении задачи 27 мы могли бы, рассматривая одни лишь таблицы *I* и *III* на рис. 90, несколько опрометчиво заключить, что все полученные сведения согласуются между собой. При рассмотрении таблиц *II* и *III* на рис. 109 создается столь же обманчивое впечатление, будто задача 32 допускает единственное решение. В обоих случаях необходимо заполнить третью таблицу (см. рис. 91 и 110). Лишь после этого мы можем с уверенностью сказать, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

35. ГДЕ ОШИБКА?

Как бы вы ни старались обнаружить ошибку в рассуждениях читателей Пала Сено и Петера Соломы, вам это не удастся: оба рассуждали правильно. Присланные ими решения логически безупречны. (Единственное, что можно было бы поставить в «вину» Палу и Петеру: их решения, как мы вскоре увидим, неполны.)

Каким образом у одной задачи может оказаться два различных решения? Ответить на этот вопрос совсем нетрудно: одна и та же задача вполне может иметь два решения (и даже большее число решений). С примерами задач такого рода мы уже неоднократно встречались.

В рассматриваемом нами случае «беда» не только в том, что задача допускает два решения. Каждый из двух читателей журнала «Фаркаш» прислал в редакцию логически безупречное доказательство того, что лишь найденные им соответствия между элементами трех множеств могут служить решением задачи. Всякое другое решение можно, не глядя, отвергнуть как ошибочное! А поскольку и Пал Сено, и Петер Солома в своих рассуждениях нигде не погрешили против логики, то ошибочными надлежит считать оба присланных ими решения! О том, что их решения действительно ошибочны, можно судить хотя бы по такой «детали»: в решении Пала Сена упоминается парное соответствие $\beta - b$, а в решении Петера Соломы — соответствие $\gamma - C$. Между тем оба соответствия запрещены условиями задачи.

Следовательно, интересующий нас вопрос можно сформулировать так: каким образом два логически безупречных рассуждения могут привести к двум ошибочным решениям?

Рассмотрим, не вдаваясь в подробности, чем заканчивается каждый «элементарный вывод» в рассуждениях Пала Сена и Петера Соломы. В обоих случаях заключение одинаково: «Возможно лишь это (или то), все прочее невозможно». Если говорить совсем точно, то заключение в каждом элементарном логическом выводе у Пала и Петера гласит: «Отсюда (то есть из приведенных ранее посылок) следует, что все прочие соответствия между двумя данными элементами невозможны». Таким образом, логические выводы в рассуждениях Пала Сена и Питера Соломы доказывают не правильность самого результата, а лишь то, что все другие варианты невозможны.

Именно в этом и кроется ключ к пониманию парадоксальной на первый взгляд ситуации. Поскольку рассуждения Пала (и Петера) правильны, то и полученное с их помощью решение также правильно. Но если задача имеет лишь единственное решение, то другого отличного от него решения не существует. Следовательно, решения, найденные Палом и Петером, также не существуют (поскольку каждое из них отлично от другого). Это означает, что *данная задача не имеет ни одного решения: она противоречива.*

Таким образом, решения Сена и Соломы не полны, поскольку в них ни слова не говорится о том, что задача противоречива. Недостает совсем немногого: необходимо было проверить, соответствует ли найденное «единственное» решение всем условиям задачи.

Следовательно, если не производить проверку, то *противоречивая задача может допускать множество не совпадающих между собой «решений». Разумеется, все эти «решения» в действительности не удовлетворяют условиям задачи*: задача потому и называется противоречивой, что не допускает ни одного решения.

Именно в этом смысле и надлежит понимать оговорку, сделанную в конце решения задачи 33: «Итак, официант мог распределить закуски и напитки лишь следующим образом». Она указывает на то, что предложенный способ распределения закусок и напитков является единственной возможностью выполнить заказ, если следовать рассуждениям официанта. Однако поскольку задача 33 противоречива, то другие рассуждения могут обнаружить другую «единственную» возможность выполнить заказ четырех посетителей.

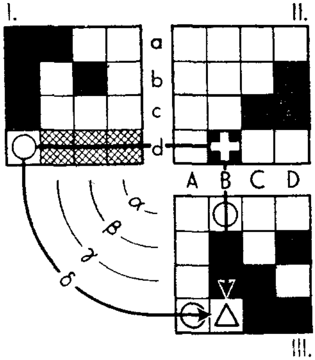


Рис. 117.

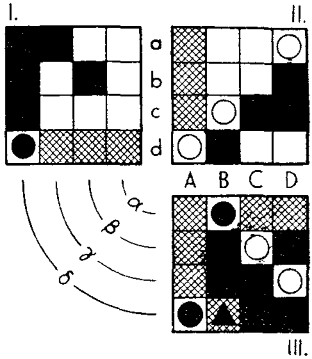


Рис. 118.

Осталось доказать, что в решениях Пала Сена и Петера Соломы не было логических ошибок. Удобнее всего для этого проследить оба решения от начала до конца на таблицах.

Решение Пала Сена представлено на рис. 117—119, решение Петера Соломы — на рис. 120—122. Отличаются решения тем, что

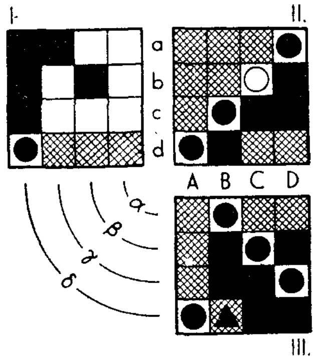


Рис. 119.

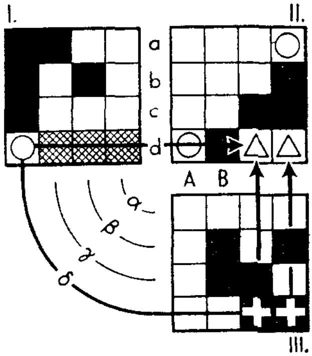


Рис. 120.

Сено, используя соответствие между элементами $d - \delta$, «пересадил» элементарный запрет из таблицы *II* в таблицу *III* (рис. 117), а Солома, используя то же самое соответствие, «пересадил» элементарный запрет из таблицы *III* в таблицу *II* (рис. 120). Сено лишь начал свое решение с того, что воспользовался данными, содержащимися в первой таблице, а все остальное решение проводил, производя все необходимые действия над каждой из таблиц *II* и *III* в отдельности. Солома лишь по одному разу воспользовался

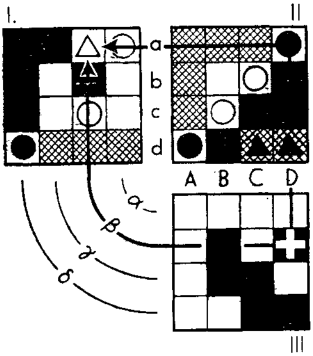


Рис. 121.

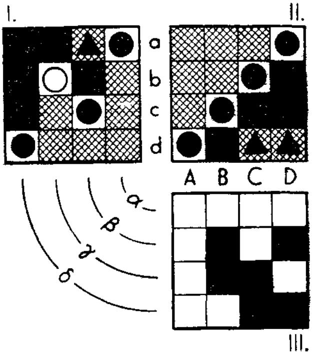


Рис. 122.

запретами, содержавшимися в двух столбцах таблицы *III*, а все остальное решение проводил, опираясь на данные, содержавшиеся в таблицах *I* и *II*.

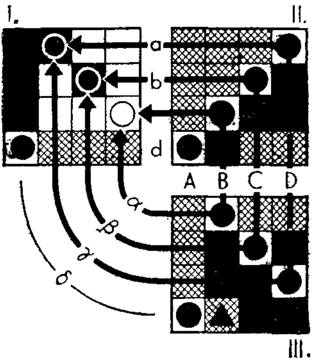


Рис. 123.

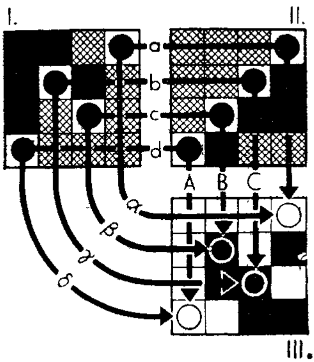


Рис. 124.

Если Сено занялся бы «пересадкой» полученных им частичных решений в таблицу *I*, а Солома — в таблицу *III*, то, как показывают рис. 123 и 124, противоречивость задачи сразу бы стала заметной.

36. КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ III

Внимательный читатель, несомненно, накопил столь большой опыт решения таких задач, что именно теперь уместно применить его к еще одной «картинке без слов». Последовательность решения показана на рис. 125—128. Однако на рис. 128 процесс решения обрывается. Вся информация использована, все возможности для пересадки клеток исчерпаны. Тем не менее до конца заполнена лишь

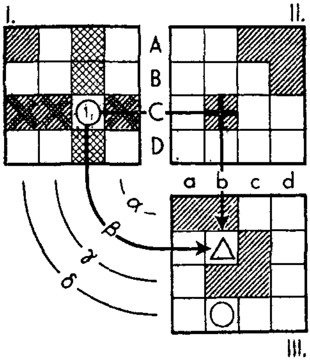


Рис. 125.

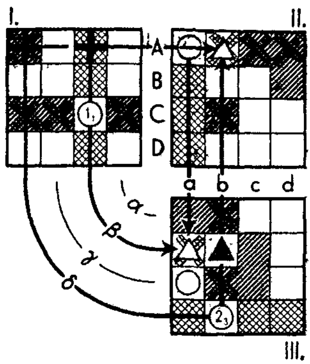


Рис. 126.

таблица *III*, а в таблицах *I* и *II* остались «огрехи»: белые пятна (таблицы *I* и *II* заполнены лишь частично). Разместить в таблицах *I* и *II* кружки с цифрами 2 и 4 можно двумя способами. Вы-

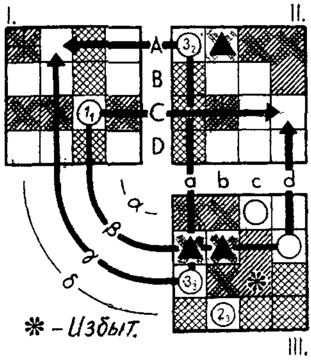


Рис. 127.

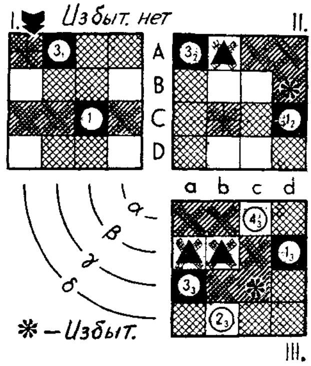


Рис. 128.

брав любой из них, мы получим возможность довести решение до конца с помощью правила соответствия. Таким образом, возможны два решения. Они представлены на рис. 129 и 130. Оба решения удовлетворяют всем условиям задачи. *Следовательно, данная задача действительно имеет два решения.*

Примечание. Как мы уже упоминали, число элементарных запретов в условиях (на «картинке») этой задачи совпадает с числом элементарных запретов в условиях задачи 33, тем не менее задача 33 противоречива, а данная задача допускает два решения. Объясняется это тем, что в условиях задачи 36 нет той избыточности, какая содержится в условиях задачи 33. Действительно, сужение информации в таблице *III* на рис. 127, вызванное частичным решением $З_3$, исключает возможность соответствия $c \leftrightarrow \gamma$. Тем самым с самого начала исключается избыточность в условиях задачи.

Избыточность можно обнаружить и в таблице *II* на рис. 128. Из этого рисунка видно, что два ранее не использованных (не перечеркнутых крестом) элементарных запрета

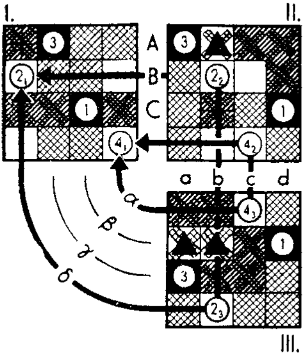


Рис. 129.

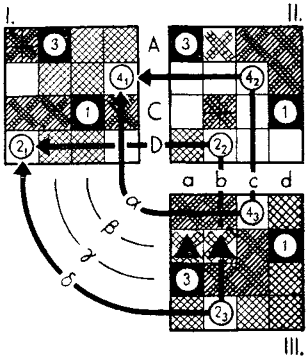


Рис. 130.

в процессе сужения информации оказались «за бортом» и, следовательно, относятся к избыточной информации.

При обсуждении избыточности той или иной информации необходима осторожность. Например, частичное решение $З_1$ в верхней строке таблицы *I* на рис. 128 получено по правилу соответствия, поэтому элементарный запрет, стоящий в той же строке, мы не использовали Тем не менее причислять его к избыточной информации было бы опрометчиво: на том этапе решения, который изображен на рис. 126, элементарный запрет стоящий в левом верхнем углу таблицы, служит для пересадки элементарного запрета в таблицу *II* Из того же рисунка видно, что «пересаженный» элементарный запрет необходим для получения однозначно определенного частичного решения в верхней строке таблицы *II*. Для того чтобы отличать «полезные» элементарные запреты от «бесполезных», мы сначала обозначили их прямым крестом (напоминание о том, что данный элементарный запрет использован при пересадке), а затем (рис. 127) еще и косым крестом (в знак того что информация, добытая при пересадке, действительно оказалась необходимой)

Итак, мы видим, что в трехмерных логических задачах (на установление соответствия между элементами трех множеств) вопрос об избыточности информации не столь элементарен, как в случае двумерных логических задач. Не вдаваясь в подробности, мы обращаем лишь внимание читателя на то, что, хотя анализ всевозможных случаев можно было бы провести до конца и для трехмерных задач, он (как и вся остальная теория) оказался бы более сложным, чем для двумерных задач.

37. СТОИТ ПОДУМАТЬ

Хотя эта задача на первый взгляд кажется очень похожей на предыдущую, между задачами имеется существенное различие. Во всех предыдущих случаях однозначно определенное частичное решение можно было получить на любой из трех таблиц. В рассматриваемой задаче такого «равноправия» нет. Во всех трех таблицах в каждой строке и в каждом столбце имеются по крайней мере две

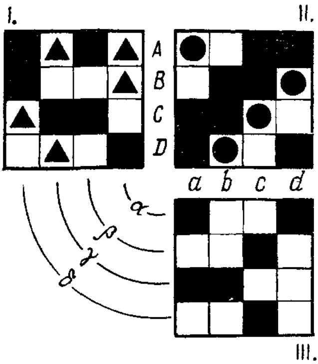


Рис. 131.

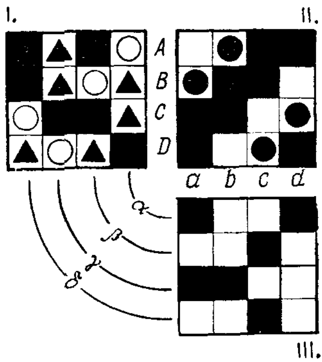


Рис. 132.

свободные клетки. Однако не следует думать, будто задача 37 принадлежит к числу «нерешительных» задач, то есть допускает несколько решений.

Если читатель внимательно изучил главу, посвященную двумерным логическим задачам, то ему, по-видимому, должна быть знакома таблица *II*. Нам приходилось встречаться с ней в задаче 12а. Было доказано, что задача 12а имеет два решения. Одно из них совпадает с таблицей *II* на рис. 131, другое — с таблицей *II* на рис. 132. Таким образом, частичные решения в таблице *II* могут располагаться лишь теми двумя способами, которые показаны на рис. 131 и 132 (изображены черными кружками).

Если мы выберем за исходное первое частичное решение, изображенное на таблице *II* (рис. 131), то правило пересадки позволит заполнить элементарными запретами обе свободные клетки в верхней строке таблицы *I*. Это означает, что соответствие между двумя элементами $A \leftrightarrow a$ нельзя дополнить никаким третьим элементом: ни α, ни β, ни γ, ни δ. Таким образом, в этом случае нам не удастся получить решение задачи.

Если же мы выберем в качестве исходного второе частичное решение, изображенное на таблице *II* (рис. 132), то никакие препятствия на пути к получению полного решения нам не встретятся. После пересадки элементарных запретов во всех строках и столбцах таблицы *I* останется ровно по одной свободной клетке. Перенеся полученные частичные решения по правилу соответствия в таблицу *III* (рис. 133), мы без труда убеждаемся в том, что никаких противоречий при этом не возникает: найденное полное решение «доброкачественно».

Выводы. Во всех предшествующих трехмерных задачах полное решение мы получали в виде цепочки однозначно определенных частичных решений: на любой из трех таблиц нам непременно удавалось найти какое-то однозначно определенное частичное решение.

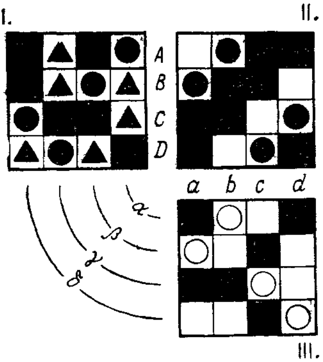


Рис. 133.

Ранее полученные частичные решения, пересадки и сужение информации порождали новые элементарные запреты, те в свою очередь позволяли получать новые частичные решения (на какой-то из таблиц) и так далее. Могло создаться впечатление, будто правила пересадки и соответствия позволяют доказать для трехмерных логических задач нечто вроде теоремы единственности. Однако, как показывает задача 37, такое предположение неверно. Решая ее, мы убедились в том, что возможны и такие случаи (речь идет о действительно трудных задачах), когда на одной из трех таблиц нельзя получить ни одного однозначно определенного частичного решения.

38. КАРТИНКА БЕЗ СЛОВ IV

Как и в предыдущей задаче, ни одна из трех таблиц, соответствующих этой задаче, не позволяет получить однозначно определенное частичное решение. Однако, если мы, следуя примеру предыдущей задачи, начнем с решения двумерной задачи, соответствующей какой-нибудь из таблиц, то нам удастся собрать довольно обширную информацию. Все двумерные задачи решаются без труда (в этом читатель легко убедится сам). Можно показать, что таблица *I* (точнее, соответствующая ей двумерная задача) допускает 4 решения, таблица *II* — 7 и таблица *III* — 6 решений. Таким образом, даже самая «бедная» таблица *I* допускает достаточно много решений.

Попытаемся начать решение с таблицы *I*, поскольку она соответствует задаче с наименьшим (по сравнению с остальными таблицами) числом решений. В ее первой строке должно содержаться

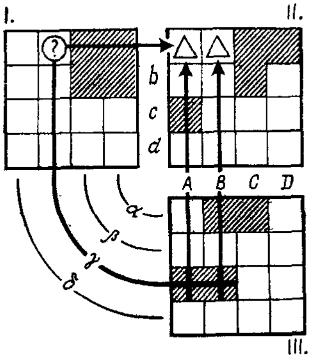


Рис. 134.

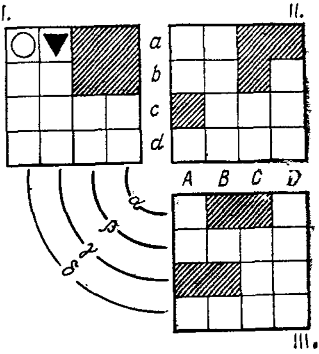


Рис. 135.

одно частичное решение (поскольку нам известно, что задача имеет решение). Кружок, которым мы условились обозначать частичные решения, можно поставить либо в первую, либо во вторую клетку,

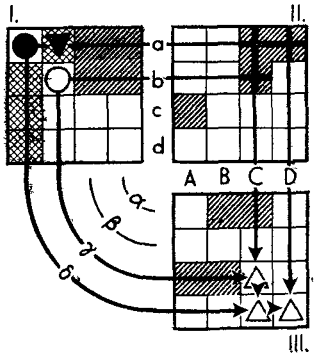


Рис. 136.

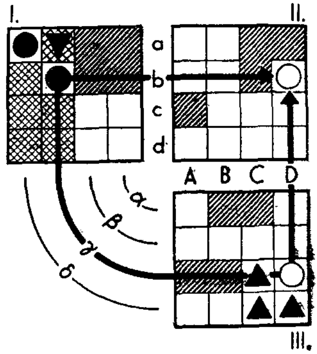


Рис. 137.

Однако, поставив кружок во вторую клетку, мы при попытке продолжить решение весьма скоро натолкнемся на противоречие. Действительно, если бы «связующий» кружок стоял во второй клетке, то мы могли бы пересадить два элементарных запрета из таблицы *III* в первую строку таблицы *II* (рис. 134), в силу чего элементу *a* не мог бы соответствовать ни один элемент множества $\{A, B, C, D\}$. Следовательно, во второй клетке верхней строки таблицы *I* должен стоять не кружок (означающий «элементарное соответствие»), а элементарный запрет. Обозначим его черным треугольником с вершиной, обращенной вниз.

Итак, связующий кружок не может располагаться ни в одной клетке первой строки, кроме самой первой. Иначе говоря, мы получаем однозначно определенное частичное решение (рис. 135).

Продолжая решение уже хорошо известным читателям способом, мы без труда найдем полное решение задачи.

Сужение информации, обусловленное первым частичным решением, позволяет получить на таблице *I* еще одно частичное решение. Произведя с помощью обоих найденных частичных решений две пересадки в таблицу *III* (рис. 136), мы почти тотчас же получаем

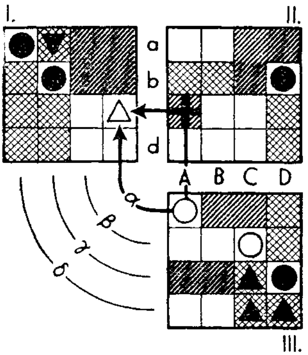


Рис. 138.

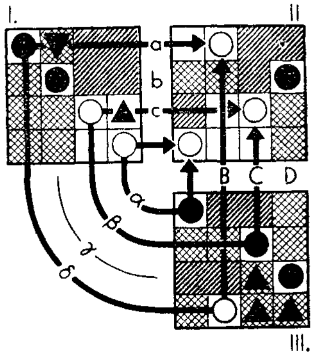


Рис. 139.

третье частичное решение. Затем применяем правило соответствия (рис. 137) и суживаем информацию. В результате проделанных операций мы получаем возможность извлечь из таблицы *III* два новых частичных решения и, используя одно из них, произвести пересадку элементарного запрета в таблицу *I* (рис. 138). Заполнение таблицы *I* на этом завершается, а после сужения информации оказывается, что и таблица *III* полностью исчерпана. Наконец, пользуясь правилом соответствия, заполняем недостающие клетки в таблице *II* (рис. 139).

Все тройки попарно соответствующих элементов нетрудно перечислить по рис. 139:

$$A - d - \alpha,$$
$$B - a - \delta,$$
$$C - c - \beta,$$
$$D - b - \gamma.$$

39. ПРИДУМАЙТЕ БОЛЕЕ ПРОСТОЕ РЕШЕНИЕ

В таблицах, задающих условия задачи 37 (рис. 16), имеются четыре элементарных запрета, которые, как и в предыдущей задаче, содержатся не в исходных условиях, а выясняются в процессе решения. На рис. 140—143 перевернутыми черными треугольниками (с вершинами, обращенными вниз) отмечены те клетки, которые никак не могут быть заняты связующими кружками. Если бы любая из этих клеток стала носителем «разрешенного» соответствия между

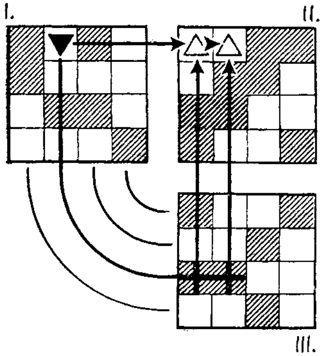


Рис. 140.

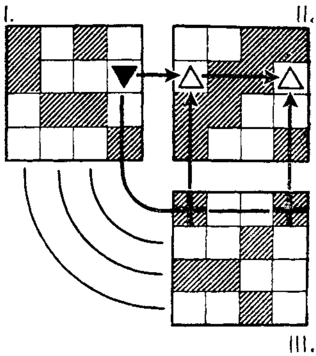


Рис. 141.

элементами двух множеств, то по правилу пересадки в какой-то из двух других таблиц можно было бы найти строку или столбец, сплошь заполненные элементарными запретами. Это означало бы, что данная задача не имеет решения.

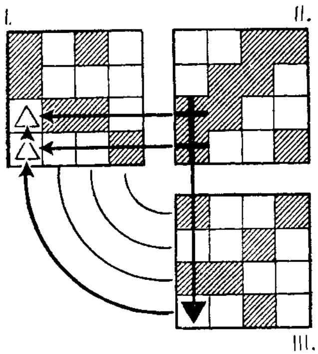


Рис. 142.

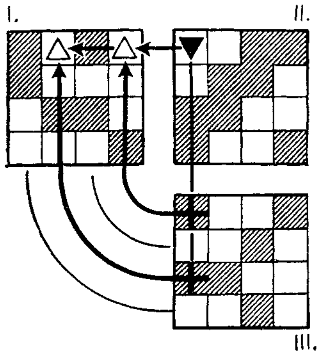


Рис. 143.

Дополнив набор элементарных запретов, содержавшихся в условиях задачи 37, четырьмя новыми запретами, получим четыре однозначно определенных частичных решения (рис. 144). Воспользуемся затем правилом соответствия (правило пересадки нам больше не нужно) и сузим информацию. В результате мы получим несколько новых частичных решений (рис. 145), которыми и завершается построение полного решения задачи.

Разумеется, ответ, полученный нами сейчас, полностью совпадает с ответом, полученным ранее (когда мы решали задачу 37 в первый раз). Однако нас сейчас интересуют не соответствия между отдельными элементами множеств (все допустимые, то есть не противоречащие условиям задачи, соответствия представлены на рис. 145), а *способ решения*. Нетрудно видеть, что способ, которым мы только что решили задачу, существенно отличается от прежнего. Решение стало более кратким и прекрасно обходится без всяких «догадок». Этими преимуществами мы обязаны новому изобретению позволившему усовершенствовать метод решения логических задач. Формула изобретения сводится к следующему: если

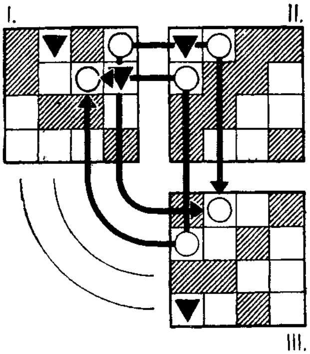


Рис. 144.

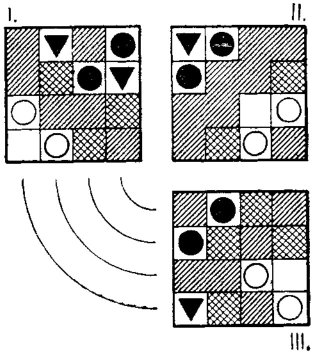


Рис. 145.

элементарные запреты в двух таблицах расположены так, что их можно связать линией соответствия, то отсюда можно сделать вывод о существовании в третьей таблице еще одного элементарного запрета.

Рассматривая предыдущие примеры (рис. 135, 140—143), читатель, по-видимому, приобрел определенный навык в практическом применении новшества, но, имея в виду его важность, мы все же попытаемся сформулировать в явном виде, как следует применять наше изобретение и в каких случаях. Поскольку носителями элементарных запретов, на основе которых мы приходим к выводу о существовании элементарного запрета в третьей таблице, могут быть любые две из трех таблиц, мы для наглядности используем при доказательстве столь общего правила полностью симметричное расположение таблиц (рис. 146).

Выберем любые две таблицы и рассмотрим соответствие между ними, устанавливаемое общим для них обеих множеством. (Например, для двух нижних таблиц на рис. 146 такое соответствие показано стрелками, параллельными стрелке i_1.)

Строки таблиц (или столбцы — теперь совершенно безразлично), соответствующие одному и тому же элементу общего множества, служат продолжением одна другой. Назовем такие строки *продольными*. (Для двух нижних таблиц на рис. 146 продольными являются горизонтальные строки.) Строки (или столбцы), соответствующие элементам необщих множеств, мы назовем *поперечными*. (Для двух нижних таблиц на рис. 146 поперечными являются наклонные столбцы, идущие в направлениях i_2 и i_3.) Любые две поперечные строки, если их продолжить, непременно пересекутся в некоторой вполне определенной клетке третьей таблицы. Назовем эту клетку *клеткой пересечения*. (На рис. 146 двумя жирными стрелками показано, где пересекаются продолжения двух поперечных

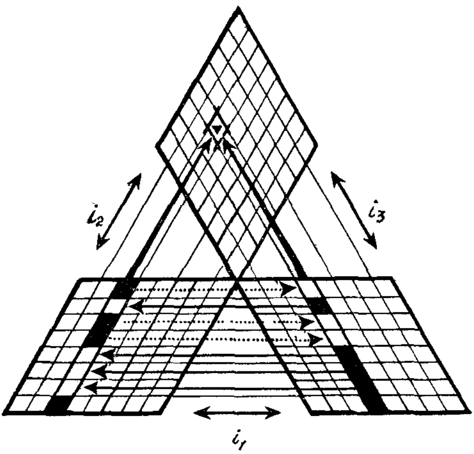


Рис. 146.

строк, идущих в направлениях i_2 и i_3. Клетка пересечения принадлежит третьей таблице и отмечена перевернутым черным треугольником.)

Мы скажем, что две клетки, принадлежащие различным поперечным строкам, *соответствуют друг другу*, если эти клетки принадлежат одной и той же продольной строке. (*Например, на рис.* 146 соответствуют друг другу те клетки двух выделенных поперечных строк, которые соединены горизонтальными стрелками.) Если две поперечные строки обладают тем свойством, что из любых двух соответствующих друг другу клеток по крайней мере одна отведена под элементарный запрет (иначе говоря, ни одна пара соответствующих друг другу клеток не может состоять из одних лишь свободных клеток), то мы условимся говорить, что эти поперечные строки *взаимно дополняют друг друга*. На рис. 146 поперечные строки, продолжения которых отмечены жирными стрелками, взаимно дополняют друг друга.

Теперь мы уже достаточно подготовлены для того, чтобы точно сформулировать новое правило.

Клетка пересечения двух дополняющих друг друга поперечных строк не может быть связующей клеткой (то есть соответствовать комбинации элементов, не запрещенной условиями задачи).

Доказательство нового правила легко проводится от противного. Предположим, что клетка пересечения двух дополняющих друг друга поперечных строк является связующей клеткой, то есть соответствующая комбинация элементов двух множеств не противоречит условиям задачи (рис. 147). Тогда мы можем воспользоваться правилом пересадки: обнаружив в любой из двух дополняющих друг друга поперечных строк свободную клетку, пересадим в нее элементарный запрет из соответствующей ей клетки. Действуя так, мы заполним все «пробелы» — все свободные клетки. Однако это

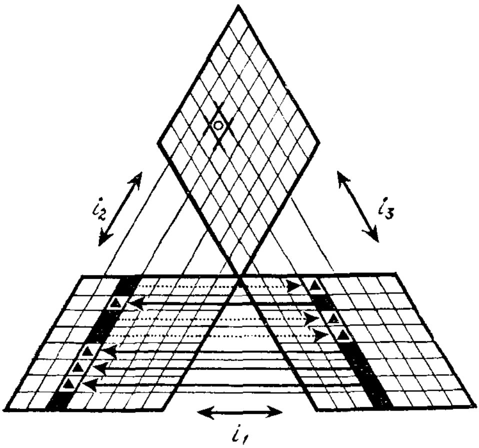


Рис. 147.

невозможно. Полученное таким способом «решение» не удовлетворяло бы всем условиям задачи, поскольку в полном решении задачи в каждой из трех таблиц любая строка и любой столбец непременно содержат одну связующую клетку (одно частичное решение).

Условимся на будущее обозначать (как мы делали прежде) элементарные запреты, полученные по новому правилу (соответствующие клеткам пересечения двух дополняющих друг друга поперечных строк), перевернутыми треугольниками (с вершиной, обращенной вниз), а логический вывод, на основании которого получены эти запреты, называть правилом дополнительности.

В наших рассуждениях обе «дополняющие друг друга» поперечные строки выступали симметрично, «на равных». По самому смыслу дополнительности, если одна поперечная строка дополняет другую, то и вторая поперечная строка дополняет первую. Именно поэтому мы заранее назвали поперечные строки «дополняющими друг друга».

Пользуясь симметрией, мы могли бы «пересадить» в доказательстве две дополняющие друг друга строки, заменив любую из них другой. В предыдущих примерах (рис. 134, 140—143) мы ограничивались «односторонними пересадками»: их оказалось вполне достаточно для того, чтобы обнаружить «тупик» в предполагаемом решении.

Впоследствии мы еще не раз убедимся в том, что правило дополнительности необычайно полезно. Оно позволяет с легкостью находить решение («табличным» методом) в тех случаях, когда любой другой подход наталкивается на почти непреодолимые трудности. Примером могут служить три следующие задачи (40, 41 и 42).

40. ПРОФЕССИИ И УВЛЕЧЕНИЯ

Решить эту задачу без таблиц было бы чрезвычайно трудно. Воспользуемся поэтому нашим привычным методом и перенесем все данные задачи в три таблицы.

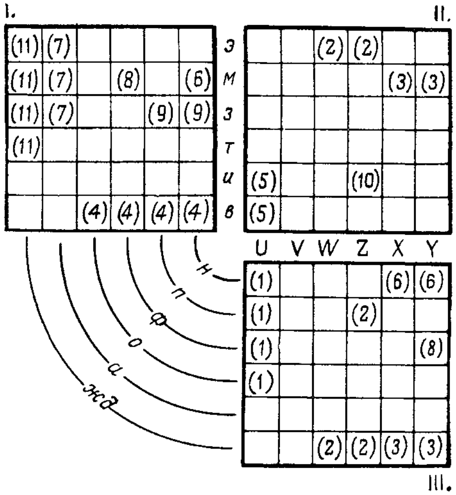


Рис. 148.

Почти каждое условие содержит не один, а несколько элементарных запретов. Если не считать некоторых наиболее «причудливых» подробностей, то все остальные элементарные запреты представлены на рис. 148.

Примечания. В какой области работает инженер, неизвестно. Мы не можем с уверенностью утверждать, что в условии 2 говорится именно о нем.

Из того, что *W* «кое-как разбирается в радиотехнике», не следует, будто *W* — радиолюбитель.

Если забойщик не разбирается в радиотехнике, то он не может быть радиолюбителем.

Пока ни одна таблица не позволяет получить однозначно определенное частичное решение. Посмотрим, нельзя ли воспользоваться в этом случае правилом дополнительности, доказанным в конце решения предыдущей задачи.

Сравнив таблицы *I* и *II*, мы увидим, что общим для них является множество профессий. Следовательно, роль «поперечных строк» в данном случае будут играть столбцы.

Итак, мы должны сравнить столбцы в таблице *I* со столбцами в таблице *II*. Имеется лишь одна пара дополняющих друг друга столбцов (напомним, что так называются столбцы, у которых по крайней мере одна из двух клеток, стоящих на одной горизонтали, отведена под элементарный запрет): первый столбец (*жд*) в таблице *I* и первый столбец (*U*) в таблице *II* (рис. 149). Клетка, принадлежащая одновременно каждому из этих столбцов (их «клетка

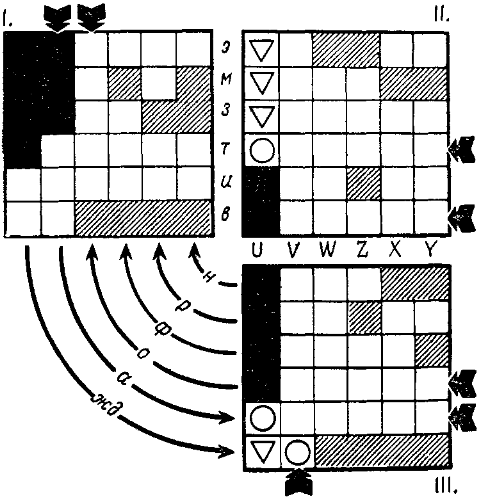


Рис. 149.

пересечения»), находится в таблице *III* на пересечении строки *жд* и столбца *U*. Правило дополнительности утверждает, что эта клетка находится под запретом (занята элементарным запретом).

Тщательное сравнение таблиц *I* и *II* показывает, что мы не можем применить правило дополнительности ни к одной другой паре столбцов. Это объясняется тем, что в таблице *I* строка *э* содержит лишь один элементарный запрет (первая клетка слева), а в таблице *II* все клетки строки *э* свободны. Следовательно, любая из этих клеток может дополнять лишь первую клетку строки *э* в таблице *I*. Иначе говоря, столбцы таблицы *II* заведомо не могут дополнять никакие столбцы таблицы *I*, кроме первого. Нетрудно видеть, что в действительности лишь первый столбец таблицы *II* дополняет первый столбец таблицы *I*. Объясняется это тем, что последние клетки (принадлежащие строке *в*) всех столбцов таблицы *II*, кроме самого первого, свободны.

Для таблиц *II* и *III* общим является множество имен (точнее, «псевдонимов» *U*, *V*, *W*, *Z*, *X* и *Y*), а названия профессий и увлечений соответствуют поперечным строкам. Однако такой выбор таблиц менее удачен: мы не могли бы извлечь из таблиц ни одной пары дополняющих друг друга поперечных строк, поскольку вторые столбцы в таблицах *II* и *III* сплошь заполнены свободными клетками.

Для таблиц *I* и *III* общим является множество увлечений. Поэтому сравнивать необходимо строки таблицы *I* и столбцы таблицы *III*: именно им в этом случае отведена роль поперечных строк. Первый столбец (*U*) таблицы *III* «дополняет» первые три строки таб-

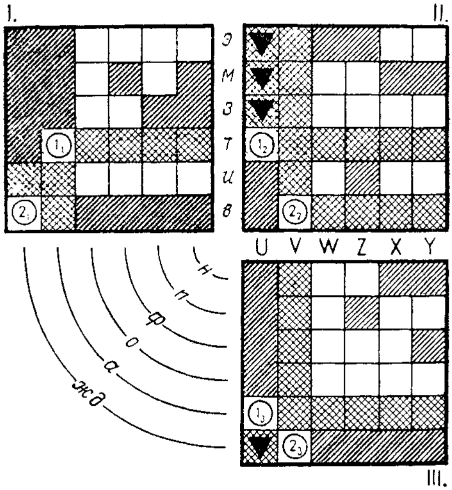


Рис. 150.

лицы *I* (*э*, *м* и *з*). Правило дополнительности позволяет нам вписать в таблицу *II* (в клетки пересечения) три новых элементарных запрета: в клетки с «координатами» *U — э*, *U — м* и *U — з*.

Других дополняющих друг друга пар среди строк таблицы *I* и столбцов таблицы *III* нет. Дело в том, что все клетки в строке *а* таблицы *III* свободны, поэтому любой столбец таблицы *III* может дополнять лишь такую строку таблицы *I*, у которой в «графе» *а* стоит элементарный запрет, а этим свойством обладают три первые строки таблицы *I*. Мы видели, что дополняющей поперечной строкой для первых трех строк таблицы *I* служил первый столбец таблицы *III*. Покажем, что другие столбцы таблицы *III* не пригодны для этой цели. Действительно, у всех столбцов в таблице *III*, кроме первого, клетки, стоящие в строке *о*, свободны — так же, как и клетки, стоящие на пересечении первых трех строк таблицы *I* со столбцом *о*. Следовательно, любой столбец таблицы *III*, кроме первого, не может дополнять первые три строки таблицы *I*.

Новые элементарные запреты, полученные с помощью правила дополнительности, позволяют найти в таблицах *II* и *III* однозначно определенные частичные решения (рис. 149). Затем к полученным частичным решениям (их мы обозначим цифрой 1) можно применить правило соответствия и сузить круг дальнейших поисков на всех трех таблицах. Сужение информации приводит к тому, что в таблице *I* появляется еще одно однозначно определенное частичное решение. Элементы той тройки, в которую оно входит, обозначим цифрой 2. Поскольку один из элементов принадлежит таблице *III*, мы опять можем воспользоваться правилом соответствия и произвести еще одно сужение информации.

В итоге наши таблицы заполнятся так, как показано на рис. 150. Нетрудно видеть, что цепочка однозначно определенных частичных

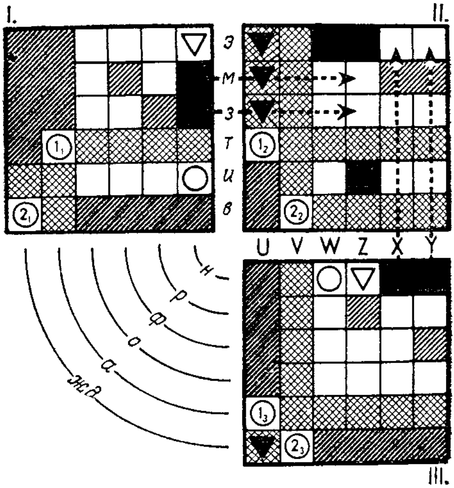


Рис. 151.

решений опять обрывается: в каждой строке и в каждом столбце любой таблицы имеются по крайней мере две свободные клетки. Однако препятствие, возникшее на нашем пути к решению, лишь кажется непреодолимым. Старые средства — правила соответствия и пересадки — оказываются бессильными помочь нам, но в нашем арсенале есть новое «оружие»: правило дополнительности. Правда, в начале решения (рис. 148 и 149) мы уже использовали все его возможности, но с тех пор многое изменилось. После произведенного нами сужения информации «оперативный простор» значительно уменьшился: теперь нам предстоит исследовать возможность применения правила дополнительности лишь к оставшейся «подтаблице» размером 4×4. Если тщательно изучить все три таблицы аналогично тому, как было сделано в начале решения (чтобы не повторяться, мы предоставим подробный разбор всех имеющихся здесь возможностей читателю в качестве самостоятельного упражнения), то действительно окажется, что правило дополнительности применимо дважды. На рис. 151 клетки, оказавшиеся под запретом в результате применения правила дополнительности, как обычно, обо-

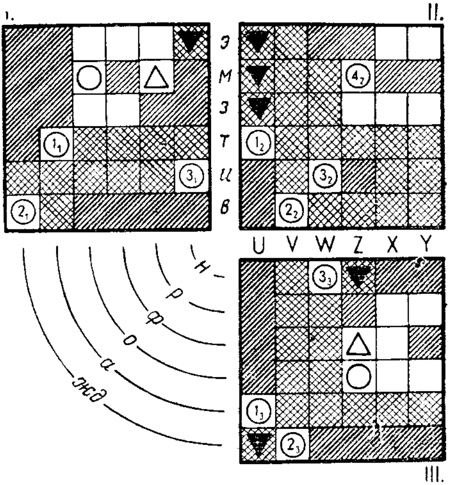


Рис. 152.

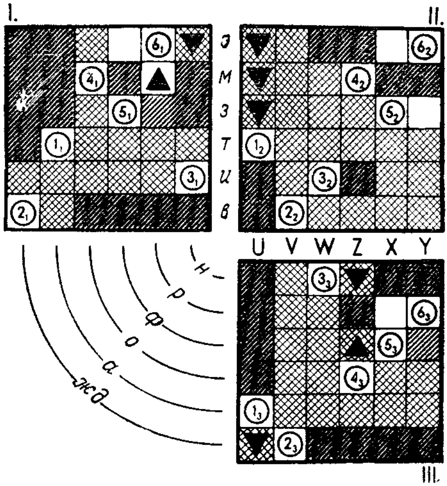


Рис. 153.

значены перевернутыми треугольниками. (Элементарным запретам в дополняющих друг друга строках и столбцах соответствуют черные клетки. Пунктирными стрелками показаны, какие строки и столбцы дополняют друг друга.)

Новые элементарные запреты, которые мы получили, воспользовавшись правилом дополнительности, как и в начале решения, позволяют получить однозначно определенные частичные решения в таблицах *I* и *III*. Затем мы опять воспользуемся правилом соответствия (новые решения связаны соответствием) и произведем сужение информации. Полученное в результате этих операций частичное решение (в таблице *II*) обозначим цифрой 4. Опираясь на это решение, произведем дальнейшие пересадки. Вызванное новыми элементарными запретами сужение информации позволяет получить недостающие члены тройки, к которой принадлежит частичное решение, обозначенное нами цифрой 4 (рис. 152). Очередное сужение информации порождает в таблицах *I* и *III* однозначно определенные частичные решения 5 и 6, а правило соответствия позволяет довести решение задачи до конца (рис. 153).

Итак, в результате многократного повторения простых почти «шаблонных» операций мы показали, что возможен лишь один набор троек «человек — профессия — увлечение»:

U — токарь — авиамоделист,
V — врач — любитель строить модели электрических железных дорог,
W — инженер — собиратель коллекции насекомых,
Z — машинист тепловоза — коллекционер почтовых открыток,
X — забойщик — филателист,
Y — электромонтер — радиолюбитель.

41. ЭКСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Переведем условия задачи на язык элементарных запретов и заполним соответствующие клетки в трех таблицах (рис. 154).

> Примечание. Условия 1—3 не содержат элементарных запретов, но знакомят нас с теми множествами, о которых говорится в задаче: мы узнаем из этих условий, что имеется шесть городов, шесть различных типов приборов и что число подлежащих отправке вагонов колеблется от 1 до 6. Кроме того, эти же условия сообщают нам о том, что между этими тремя множествами необходимо установить взаимно-однозначное соответствие.
>
> Две клетки оказываются под двойным запретом: их исключают из дальнейшего рассмотрения не одно, а два условия (что, впрочем, не имеет особого значения).
>
> Сведения, сообщаемые условием 11, носят неопределенный характер: либо так, либо этак... Но независимо от того, как обстоит дело в действительности («так» или «этак»), мы узнаем, что речь идет не о приборах II и IV типов.

Элементарных запретов, полученных из условий задач, недостаточно для того, чтобы мы могли бы на одной из трех таблиц получить однозначно определенное частичное решение, но правила *дополнительности*, *пересадки* и *соответствия* позволяют построить цепочку однозначно определенных частичных решений и прийти к полному решению. Мы надеемся, что читатель поверит нам на слово, и поэтому не приводим рисунки, на которых, как в кадрах кинохроники, запечатлены последовательные этапы решения задачи.

Мы хотели бы обратить внимание читателя на одну особенность задачи 41, позволяющую существенно ускорить ее решение. Взглянув на рис. 154, нетрудно заметить, что в левом нижнем углу таблицы *II* «скопилось» достаточно много элементарных запретов. Это

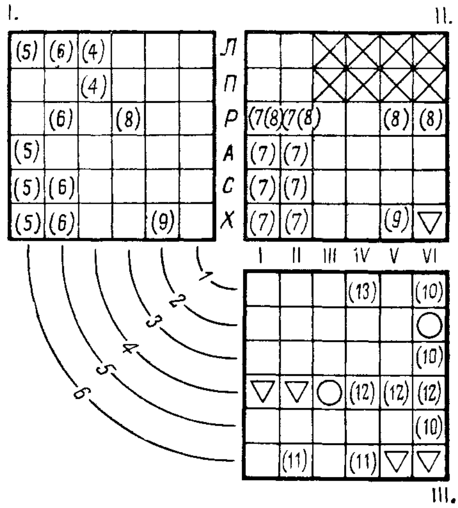


Рис. 154.

обстоятельство позволяет разложить таблицу *II* на две независимые части (так, как мы неоднократно разлагали двумерные задачи): на квадрат 2×2, расположенный в левом верхнем углу таблицы, и на квадрат 4×4, расположенный в ее правом нижнем углу. Это означает, что перечеркнутые косым крестом клетки в правом верхнем углу таблицы мы исключаем из дальнейшего рассмотрения. Разумеется, задачу можно было бы решить и без этого замечания, но при таком подходе правило дополнительности позволяет получить больше новых запретов с первого же шага. (На рис. 154 показано, как в таблицах появляются первые частичные решения.)

Дальнейший ход решения мы наметим лишь в общих чертах, опуская все несущественные подробности (рис. 155).

Получив в таблице *III* частичное решение 1_3, сузим информацию. Частичные решения 2_3 и 3_3 возникают одновременно. Пользуясь частичным решением 2_3, произведем пересадку в таблицу *II*. Двумерная задача, которая соответствует квадрату 2×2, стоящему в левом верхнем углу таблицы *II*, тем самым будет полностью решена (свободные клетки квадрата займут частичные решения 2_2 и 4_2). Пользуясь частичным решением 2_2, перейдем по правилу соответствия в таблицу *I*. Сузив затем информацию, найдем частичное решение 5_1. После этого мы вернемся к частичному решению 3_3 и произведем пересадку одного запрета в таблицу *II*, что даст нам еще одно частичное решение: 3_2. Из существования частичных решений 3_2 и 3_3 выводим частичное решение 3_1. Последующее сужение информации приводит к новому частичному решению: 5_2. Из существования частичных решений 5_1 и 5_2 выводим частичное решение 5_3. После сужения информации таблица *III* оказывается заполненной. Из существования частичных решений 4_3 и 4_2 выводим частичное решение 4_1. После сужения информации обнаруживаем, что

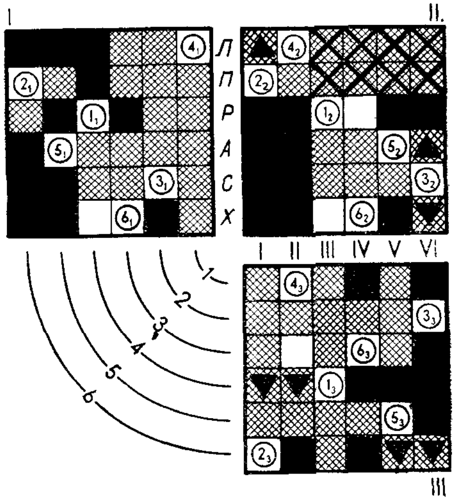


Рис. 155.

таблица *I* заполнена. Недостающие частичные решения 1_2 и 6_2 находим по правилу соответствия.

Из рис. 155 (на котором изображен заключительный этап решения, намеченного нами лишь в общих чертах) видно, что *задача 41 допускает единственное решение*. Товарищу Аккурати необходимо распорядиться грузами следующим образом: отправить

в Лондон 1 вагон с приборами II типа,
в Прагу 6 вагонов с приборами I типа,
в Рим 4 вагона с приборами III типа,
в Амстердам 5 вагонов с приборами V типа,
в Софию 2 вагона с приборами VI типа,
в Хельсинки 3 вагона с приборами IV типа.

42. ПРЕСТУПЛЕНИЕ В ГОСТИНИЦЕ

Из материалов расследования, перечисленных в пунктах 1—4, нам известно, что раскрытие преступления в конечном счете сводится к задаче на установление соответствия между элементами трех множеств: шестью посетителями гостиницы, шестью номерами на первом этаже и шестью часовыми интервалами времени с 18 до 24 часов. Именно между этими тремя множествами вечером накануне расследования установилось взаимно-однозначное соответствие. Тот, кто сумел бы по материалам расследования расшифровать это соответствие, смог бы ответить и на вопрос о том, кто входил в номер 4. Попытаемся применить к раскрытию таинственного преступления наше испытанное средство решения задач: метод трех таблиц.

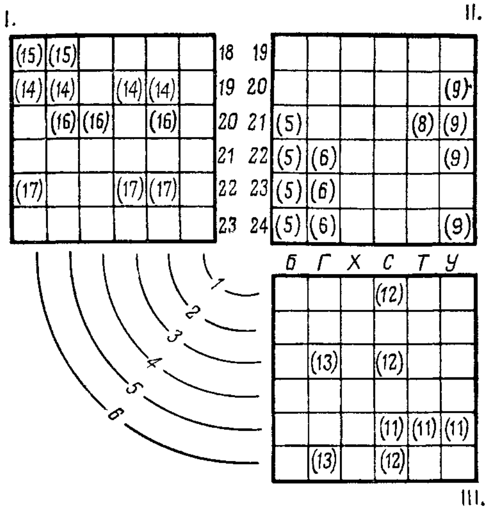


Рис. 156.

Элементарные запреты, в изобилии содержащиеся в условиях 5, 6, 8, 9, 11—17, представлены на рис. 156.

Наиболее важная роль на этом рисунке отведена таблице *III*, в особенности ее четвертой строке. Строго говоря, одной лишь таблицы *III* было бы достаточно для решения задачи. Однако при этом нам пришлось бы выбирать из довольно большого числа возможностей. Таблицы *I* и *II* нам и нужны для того, чтобы ограничить число возможностей.

Итак, одни лишь материалы следствия не позволяют получить однозначное решение ни в одной из таблиц. Но стоит нам воспользоваться правилом дополнительности, как появляются сразу пять элементарных запретов, из которых четыре приходятся на самую главную таблицу *III*. Эти запреты позволяют найти первое частичное решение (рис. 157). Обнаружив его, Сэм Силли и Джонни Вуд воскликнули в один голос:

— *Мистер Хилл невиновен, он заходил в номер 5.*

Последовавшее за этим приятным открытием сужение информации позволило прийти еще к одному частичному решению: 2_3

(рис. 157). Оно убедительно доказывало *невиновность мистера Тейлора.*

Еще одно сужение информации и пересадки привели к частичному решению 3_1, а осуществленная с его помощью пересадка — к частичным решениям 3_2 и 3_3 (рис. 158). Таким образом, довольно быстро выяснилось, что *мистер Грин заходил в номер 1 между 20 и 21 часом.*

— Какое нам дело до того, кто заходил в номер 1? — нетерпеливо заметил Сэм Силли. — Ведь преступник, если я не ошибаюсь, побывал в номере 4!

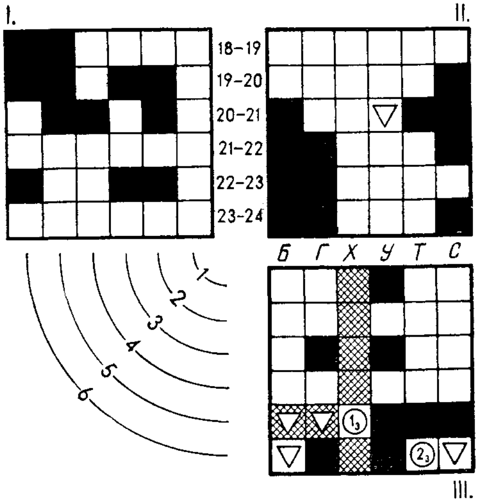


Рис. 157.

— Вы правы, сэр! — обронил Джонни Вуд, хладнокровно продолжая сужать информацию после частичного решения, доказавшего невиновность мистера Грина. — Взгляните: в таблице *I* теперь появилось нечто, заслуживающее внимания!

— *Кто-то заходил в номер 4 между 19 и 20 часами!* — воскликнул Сэм Силли, когда помощник указал ему, к чему приводит сужение информации, вызванное частичным решением 3_1, и с непроницаемым выражением лица вписал частичное решение 4_1 в единственную оставшуюся свободной клетку во второй строке таблицы *I*.

Оба сыщика, затаив дыхание, склонились над таблицами. Сузив информацию после частичного решения 4_1, они нашли новое частичное решение 1_1, а воспользовавшись правилом соответствия, — частичное решение 1_2 (рис. 159). Однако, когда после очередного сужения информации на таблице *II* возникло частичное решение 5_2 (рис. 160), Сэм Силли начал хмуриться.

— Черт побери, Джонни! Опять мы уходим в сторону. Ведь ранее нам удалось выяснить, что кто-то заходил в номер 4 в интервале

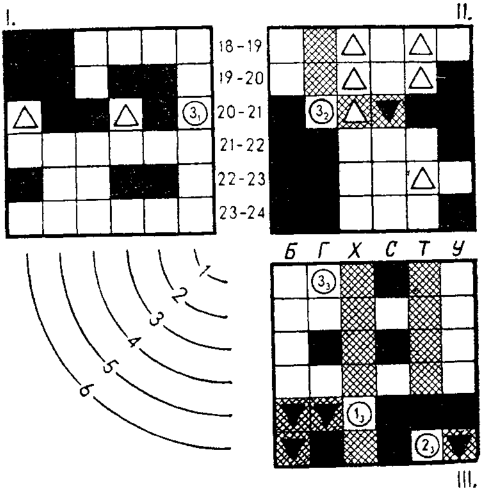


Рис. 158.

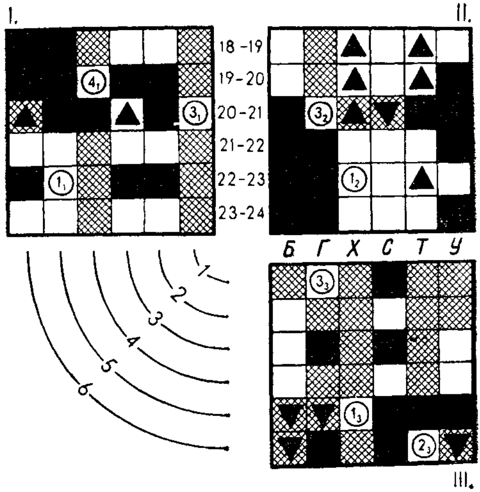


Рис. 159.

между 19 и 20 часами. Для чего же нам теперь знать, что мистер Хилл заходил в номер 5 между 22 и 23 часами, а мистеру Уайту понадобилось сунуть свой нос в гостиницу между 18 и 19 часами?

— Не волнуйтесь, сэр! — ответил Джонни, который, хотя и был новичком в области сыска, тем не менее прочитал в нашей книге решение задачи 41. — Дойдет очередь и до того, кто заглянул в номер 4! Недолго ему гулять на свободе!

С этими словами Вуд тщательно вымарал те клетки, которые оказались под запретом в результате сужения информации, вызванного частичным решением 5_2, и сам немало удивился, когда увидел

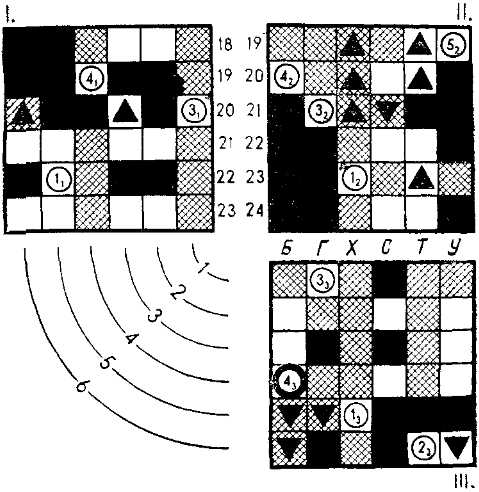


Рис. 160.

новое частичное решение 4_2 (рис. 160). Вписав решение в соответствующую клетку, он вопросительно посмотрел на своего шефа.

— Все в порядке, Джонни, — сказал Сэм Силли. — Я вижу, Браун заходил в гостиницу между 7 и 8 часами вечера. А с какой целью?

— Но ведь... — начал Джонни и не успел закончить, так как его перебил Сэм Силли:

— Не торопись! Браун заходил в гостиницу между 19 и 20 часами, и в номере 4 кто-то побывал между 19 и 20 часами. А это означает, что *Браун заходил в номер 4.*

— Совершенно верно, сэр, — подтвердил Джонни, — правило соответствия приводит именно к такому выводу.

И Джонни указал на частичное решение 4_3 (рис. 160).

— Отправьте сержанта Харпера к Брауну! Пусть немедленно его арестует!

Однако, когда Джонни, исполнив поручение, вернулся, шеф, задумчиво нахмурясь, бормотал себе под нос:

— Гм, гм, гм!

— Что-нибудь не так, сэр? Ведь преступник изобличен. Вина его неопровержимо доказана с помощью таблиц!

— Гм, неопровержимо! А если кто-нибудь из подозреваемых умышленно дал нам неверные показания? А если портье был недостаточно внимательным и упустил какую-нибудь важную деталь? Тогда перекрестный допрос Брауна ни к чему не приведет! Разве что выявит противоречия в показаниях.

— К сожалению, сэр, мы не можем проверить правильность всех материалов следствия, — согласился Джонни, — но почему бы

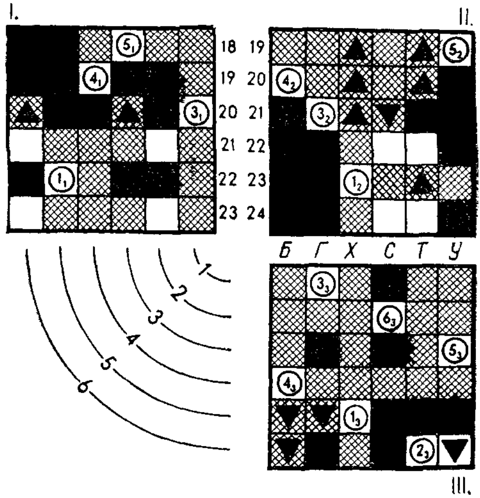


Рис. 161.

нам не устроить перекрестный допрос таблицам? А вдруг нам удастся выловить какое-нибудь противоречие?

На том и порешили. Джонни Вуд произвел сокращение информации в таблице *III* после частичного решения 4_3 и получил частичные решения 6_3 и 5_3, после чего в таблице *III* не осталось ни одной незаполненной клетки. Затем Джонни воспользовался правилом соответствия и получил частичное решение 5_1 (рис. 161). Дальнейшее продвижение было невозможно: в каждой из таблиц *I* и *II* оставалось по 4 свободные клетки, которые никак не удавалось заполнить. Все средства оказывались бессильными: и правило пересадки, и даже правило дополнительности. Однако это не смутило Джонни Вуда, и он самоуверенно заявил:

— Сэр! Таблица выдержала перекрестный допрос. Все данные сходятся.

— Вы уверены в этом, Джонни? — переспросил Сэм Силли и ткнул пальцем в таблицу *II*. — Я вижу, что со Смитом и Тейлором тут не все ясно.

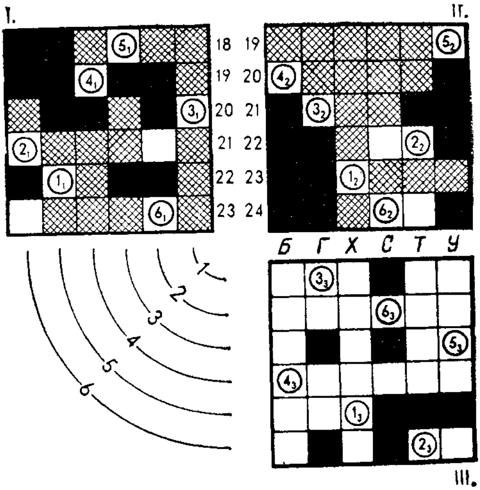


Рис. 162.

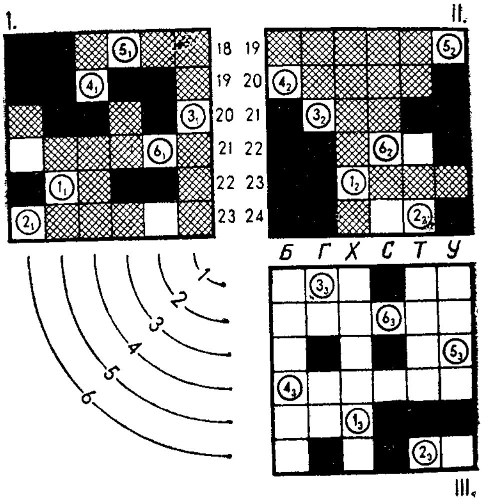


Рис. 163.

— Смит заходил в номер 2, Тейлор — в номер 6. Это установлено по абсолютно надежным данным, — ответил Джонни. — Правда, остается неизвестным, кто из них побывал в гостинице с 21 до 22 часов и кто — с 23 до 24 часов. Но поскольку Смит заходил в гостиницу раньше, а Тейлор позже, или наоборот, то никакого противоречия не возникает. Впрочем, смотрите сами!

И Джонни продемонстрировал своему шефу оба варианта на таблицах (рис. 162 и 163). После этого Сэм Силли уже со спокойной совестью приказал привести арестованного Брауна и, едва тот переступил порог, в упор задал ему роковой вопрос:

— Расскажите-ка нам, мистер Браун, где вы были вчера вечером с 19 до 20 часов и что делали?

Примечание 1. Форма детективной истории избрана нами для задачи не случайно. В решении любой задачи в процессе поиска путеводной нити от исходных данных к ответу всегда есть нечто «детективное». К тому же острый сюжет помогает следить за всеми перипетиями решения с помощью таблиц. Оба сыщика — вопреки фамилии шефа * — не такие уж «дураки» и «тупицы». Немногие сумели бы решить задачу лучше, чем это сделали они.

Примечание 2. Следует иметь в виду, что задача допускает два решения (два набора троек попарно соответствующих элементов), но оба решения имеют много общего. Именно поэтому мы умышленно привели лишь общую, однозначно определенную часть решения.

43. РЕВНОСТЬ

Из разговора между Мишкой и Кати мы узнаем, что нам предстоит установить соответствие между элементами трех множеств:

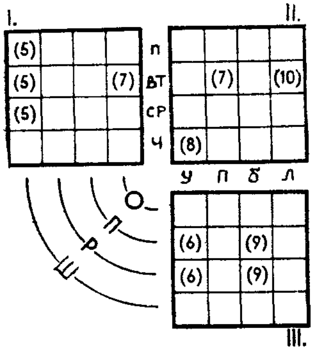


Рис. 164.

ведь, по утверждению Кати (условия 1—4), существует взаимное соответствие между четырьмя первыми днями недели (понедельником (п), вторником (вт), средой (ср) и четвергом (ч)}, четырьмя перечисленными Кати пунктами «программы» {укладкой волос в парикмахерской (у), портнихой (п), библиотекой (б) и лодочной станцией

* Silly — глупый, неразвитый (*англ.*).

(л)} и четырьмя подругами Кати {Ольгой (О), Пири (П), Рози (Р) и Шари (Ш)}.

Элементарные запреты, содержащиеся в условиях 5—10, представлены на рис. 164.

I решение. Посмотрим, где, когда и с кем была Кати Неверная. Попытаемся решить задачу с помощью таблиц.

В таблице *I* исходные элементарные запреты порождают однозначно определенное частичное решение 1_1. Производя затем пересадку в таблицу *III*, получаем второе однозначно определенное частичное решение 2_3 (рис. 165). Затем производим сужение информации и находим однозначно определенное частичное решение 1_3.

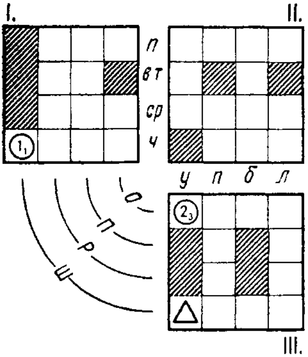


Рис. 165.

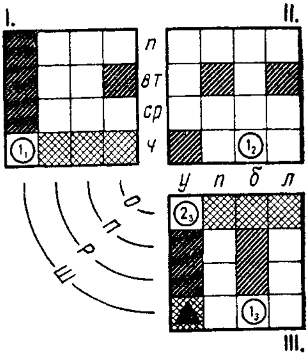


Рис. 166.

Применяя к частичным решениям 1_1 и 1_3 правило соответствия, пополняем запас частичных решений еще одним: 1_2 (таблица *II*, рис. 166). Последующее сужение информации порождает однозначно определенное частичное решение 2_2. К частичным решениям 2_2 и 2_3 применимо правило соответствия. Однако при попытке вписать полученное с помощью этого правила частичное решение 2_1 в таблицу *I* мы наталкиваемся на противоречие: как видно из рис. 167, клетка, в которой должно было бы находиться частичное решение 2_1 по условию 7, занята элементарным запретом.

Итак, в утверждениях Кати Неверной концы с концами не сходятся, и Мишка Верный поступит вполне разумно, если не станет доверять ей.

Примечание. При истолковании частичных решений в таблице *III* необходима известная осторожность. Например, частичное решение 1_3 означает, что в библиотеке вместе с Кати могла быть только Шари. Не исключено, что Ольга также побывала в библиотеке, но не тогда, когда там была Кати. Все частичные решения в таблице *III* устанавливают взаимно-однозначное соответствие между тем или иным пунктом «программы» встреч и именем той девушки, которая была (в парикмахерской, у портнихи, в библиотеке или на лодочной станции) *вместе с Кати.*

II решение. Поскольку нас (и прежде всего Мишку) интересует, нет ли противоречий в том, что рассказала Кати, нам отнюдь не обязательно решать задачу до конца. Поэтому мы пренебрежем соблазном и не станем вписывать очевидное частичное решение 1_1 в левый нижний угол таблицы *I*. Вместо этого мы постараемся извлечь тем или иным способом новые элементарные запреты.

Прежде чем получить хотя бы одно частичное решение, попытаемся применить правило дополнительности. Как видно из рис. 168, нас сразу же ожидает крупный успех: полученные элементарные запреты (они, как всегда, обозначены «перевернутыми» треугольниками) заполняют две остававшиеся ранее свободными клетки в той

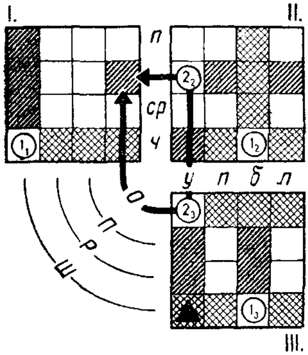


Рис. 167.

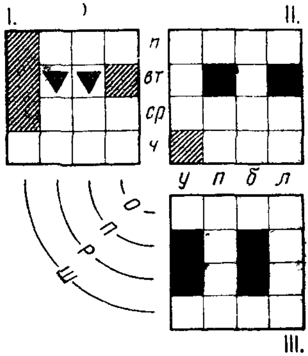


Рис. 168.

строке таблицы *I*, которая соответствует вторнику. Следовательно, если «секретная» информация, которой располагает Мишка, верна, то *Кати Неверная не могла быть во вторник ни у одной из четырех своих подруг.*

Примечание 1. Если мы хотим доказать противоречивость задачи, то нам совсем не нужно выискивать в условиях все противоречия. И раньше, и теперь мы видели, что противоречия могут возникать многими способами. Вполне достаточно, если мы сумеем обнаружить хотя бы одно-единственное противоречие, «добраться» до которого можно самым коротким путем.

Примечание 2. Во втором решении следует обратить внимание на одну любопытную деталь: для того чтобы обнаружить противоречие, нам достаточно было бы воспользоваться частью условия 5, а также условиями 6, 7, 9 и 10 (рис. 169). Этих данных вполне хватило бы Мишке, чтобы установить печальную истину: Кати не всегда искренна с ним.

Примечание 3. Быть может, иногда имеет смысл «переводить» решение, полученное графическим методом и потому почти не требующее нашего участия, на язык элементарного логического вывода. Ход рассуждений в решении II на этом языке звучит так:

Кати не могла встретиться во вторник с Шари, поскольку та три первых дня недели, в том числе и вторник, провела на пляже.

Кати не могла встретиться во вторник с Рози, поскольку Рози целую неделю не заходила в парикмахерскую и не привыкла бывать в библиотеке. Портнихи во вторник не было дома, поэтому Кати с Рози у нее быть не могли, а лодочная станция по вторникам закрыта.

Кати не могла встретиться во вторник с Пири по тем же причинам, по которым Кати не могла встретиться во вторник с Рози.

Наконец, *Кати не могла встретиться во вторник с Ольгой*, поскольку та, как известно, ходила во вторник вместе с Мишкой в кино.

Следовательно, Кати не могла быть во вторник ни у одной из своих подруг.

Хотя некоторым читателям наше замечание покажется тривиальным, мы хотели бы обратить особое внимание на то, что решение любой логической задачи, полученное «трехтабличным» методом,

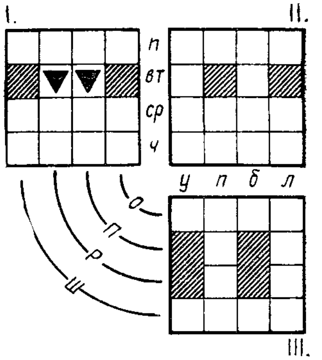


Рис. 169.

допускает однозначный «перевод»: его всегда можно представить в виде последовательности (цепочки) элементарных логических выводов. Такой «перевод» необходим, если читатель захочет рассказать решение задачи кому-нибудь, кто не знаком с известными нам способами наглядного представления множеств, принятыми в нашей книге обозначениями и разработанными нами правилами.

Наши обозначения и такие понятия, как *правила соответствия, пересадки, дополнительности*, а также *сужение информации*, отнюдь не являются общепринятыми и общеупотребительными терминами. Поэтому если читатель вздумает принять участие в математической олимпиаде, решить головоломку, помещенную в каком-нибудь журнале, и т. д. или воспользоваться приобретенными знаниями на занятиях по математике в школе, техникуме или вузе, то мы рекомендуем ему всегда представлять решение «переведенным» на общепринятый язык логического вывода, иначе оно будет непонятно.

Разумеется, «перевод» не всегда протекает гладко: здесь имеются свои проблемы. Именно поэтому нам не мешает поупражняться в «переводе» на примере какой-нибудь задачи.

Тем не менее мы надеемся, что нам не нужно доказывать, какую пользу приносит знакомство с трехтабличным методом решения логических задач.

44. НЕМНОГО «ЯЗЫКОЗНАНИЯ»

а. *«Перевод» возможен всегда*, поскольку все правила, которыми мы пользовались в методе составления таблиц, с самого начала были доказаны не на графическом, а на «исконном» языке логики. В процессе доказательства неизменно выяснялось, что все «табличные» правила представляют собой не что иное, как некоторые элементарные логические зависимости, выраженные на языке таблиц. Следовательно, заменив в любом табличном решении все его «внутренние» правила соответствующими логическими соотношениями, мы получим решение, доказанное обычными средствами элементарной логики.

б. Ответ на этот вопрос, по существу, дан выше. Для правильного перевода необходим «двуязычный» словарь основных правил, используемых в трехтабличном методе.

в. Слева от вертикальной черты шаг за шагом воспроизведены основные этапы решения задачи 40 с помощью таблиц, а справа приведен их «перевод», то есть соответствующий логический вывод.

Для удобства читателя (чтобы избавить его от необходимости каждый раз перелистывать книгу) мы повторяем рисунки с решением задачи 40, поэтому все приводимые далее рисунки, по существу, уже встречались нам ранее. Однако необходимость дать как можно более точный (образцовый) перевод заставила нас разбить все решение на большее число шагов, чем это было сделано в первоначальном варианте.

Примечание. «Образцовый» перевод, с которым читатель познакомится ниже, трудно назвать кратким. Тем не менее мы сочли уместным воспользоваться удобным случаем и показать, что происходит в действительности в то время, когда мы почти автоматически решаем логическую задачу с помощью трехтабличного метода. Надеемся, что «замедленная съемка» позволила нам наглядно продемонстрировать все перипетии табличного решения, и «фильм» получился небезынтересным. Например, на многих «кадрах» хорошо видно, что элементарный запрет, выводимый по правилу дополнительности, можно заменить элементарным запретом, получаемым при пересадке. Впрочем, независимо от того, с какой оценкой мы вздумали бы подходить к «образцовому» переводу, он интересен прежде всего тем, что позволяет узнать, как выглядит решение задачи 40, записанное в виде цепочки последовательных логических выводов. Проследив до конца «словесное» решение, приведенное справа от вертикальной черты, читатель сможет убедиться в том, что оно сравнительно длинно и без использования наглядных таблиц было бы довольно трудно удержать в голове множество условий, частичных решений, новых элементарных запретов, появляющихся по ходу рассуждений, или выбирать каждый раз из 10—20 данных именно те, которые нужны для очередного шага.

Все данные представлены на рис. 170 (см. рис. 148).

Все данные содержатся в условиях 1—11.

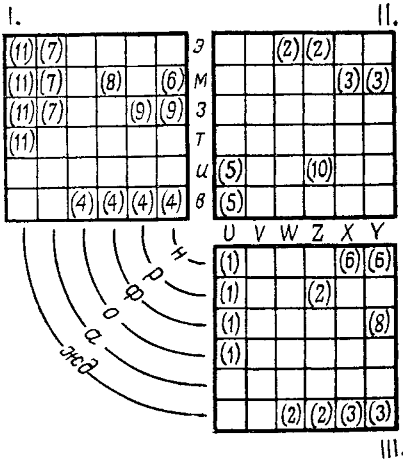


Рис. 170.

Пользуясь правилом дополнительности, налагаем запрет на клетку жд — U в таблице III (рис. 171).

По условию 11 любитель строить модели электрических железных дорог занимается умственным трудом. По условию 5 U занимается физическим трудом. Следовательно, U не может строить модели электрических железных дорог.

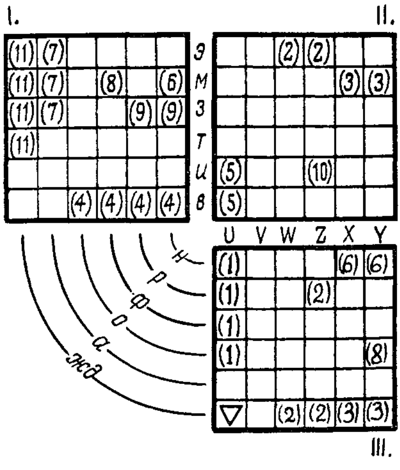


Рис. 171.

Находим частичное решение в первом столбце таблицы *III* (рис. 172) и производим сужение информации.

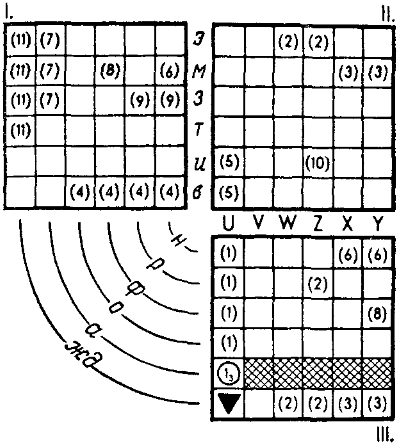


Рис. 172.

По условию 1 U может либо заниматься авиамоделизмом, либо строить модели электрических железных дорог. Следовательно, U — *авиамоделист*.

Находим частичное решение в последней строке таблицы *III* (рис. 173) и производим сужение информации.

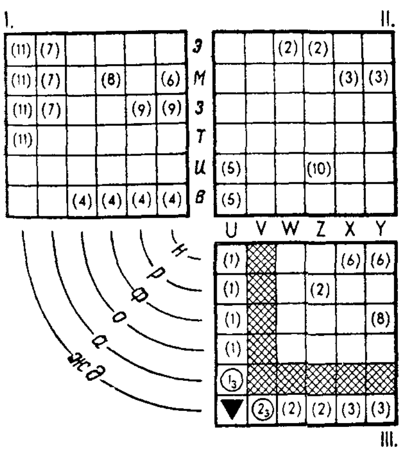


Рис. 173.

Из условия 2 следует, что ни W, ни Z не могут увлекаться моделями электрических железных дорог. Из условия 3 следует, что X и Y также не разделяют этого увлечения. По ранее доказанному U также имеет другое увлечение. *Следовательно, модели электрических железных дорог любит сооружать лишь V.*

Совершаем три пересадки в первый столбец (U) таблицы II (рис. 174).

Этот шаг отличается от первоначального решения задачи 40. Там мы сразу вписали в таблицы II и III все запреты, какие только можно было получить с помощью правила дополнительности (рис. 149).

Здесь же мы вынуждены поступить иначе: ведь теперь решение разбито на элементарные шаги.

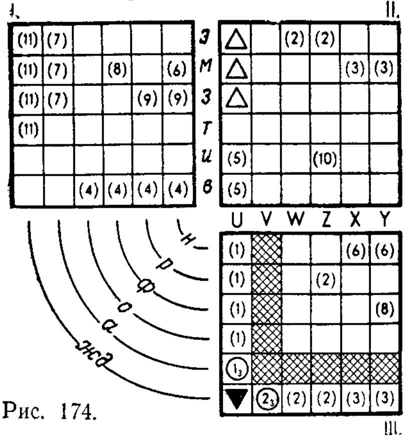


Рис. 174.

Находим частичное решение в первом столбце (U) таблицы II (рис. 175) и производим сужение информации.

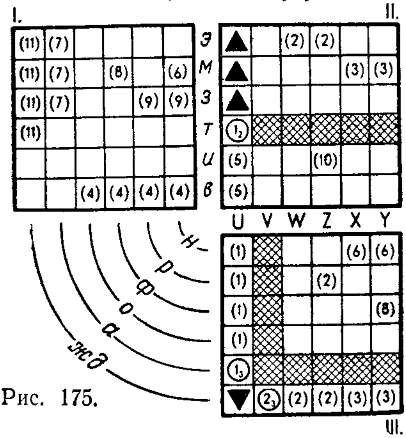


Рис. 175.

По условию 7 название профессии человека, увлекающегося авиамоделизмом, не начинается с тех букв, которые встречаются в слове «экзамен». Поскольку из доказанного ранее известно, что U — авиамоделист, то название профессии U не начинается с тех букв, которые входят в слово «экзамен»: U не может быть ни машинистом, ни забойщиком, ни электромонтером.

Но по условию 5 U не может быть ни инженером, ни врачом. Следовательно, U — *токарь*.

К частичным условиям I_1 и I_3 применяем правило соответствия (рис. 176) и производим сужение информации.

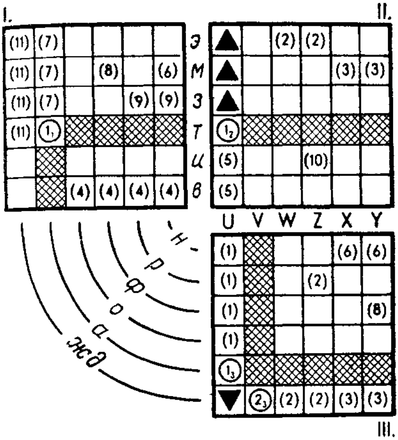


Рис. 176.

Объединяя полученные результаты, получаем первую тройку «псевдоним — профессия — увлечение»:
U — токарь — авиамоделист.

Находим частичное решение в строке в таблицы *I* (рис. 177) и производим сужение информации.

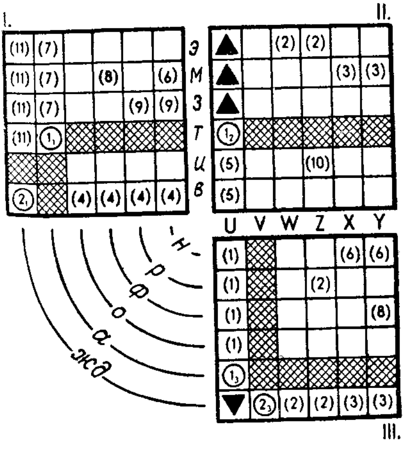


Рис. 177.

Поскольку по условию 4 врач строит модели, причем он не авиамоделист, то *врач может строить лишь модели электрических железных дорог.*

Применяем правило соответствия к частичным решениям 2_1 и 2_3, после чего производим сужение информации (рис. 178).

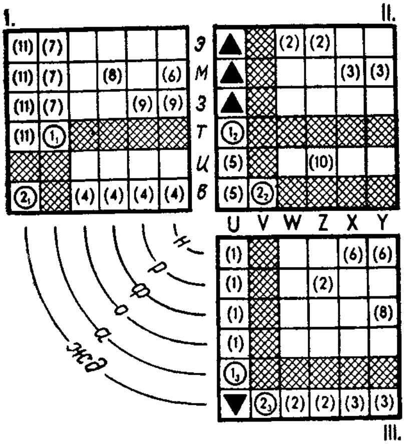


Рис. 178.

Поскольку известно, что модели электрических железных дорог любит строить лишь *V*, то мы сразу же получаем вторую тройку попарно соответствующих элементов:

V — врач — любитель строить модели электрических железных дорог.

Пользуясь правилом дополнительности, налагаем запрет на клетку э — н (в правом верхнем углу) таблицы *I* (рис. 179).

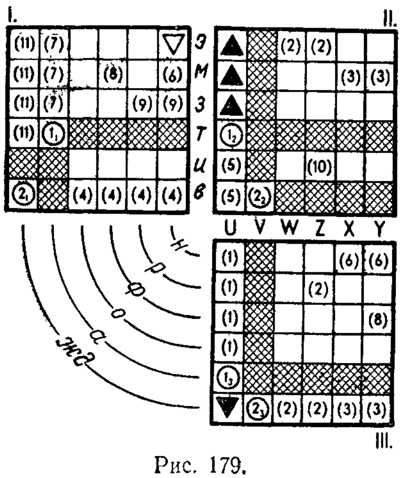


Рис. 179.

По условию 2 ни *W*, ни *Z* не могут быть электромонтером. В то же время собирать коллекцию насекомых могут лишь *W* или *Z*. Действительно, *U* строит модели (по условию 1), *X* и *Y* не увлекаются коллекционированием насекомых (по условию 6), а относительно *V* мы только что доказали, что он в часы досуга строит модели электрических железных дорог. Поскольку ни *W*, ни *Z* не могут быть электромонтером и только *W* или *Z* могут коллекционировать насекомых, то отсюда мы заключаем, что электромонтер не собирает коллекцию насекомых.

Находим частичное решение в строке *м* таблицы *I* и производим сужение информации (рис. 180).

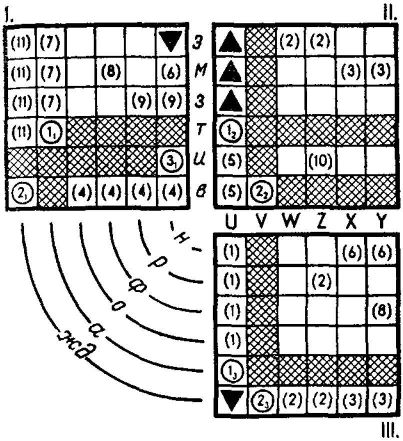


Рис. 180.

Врач не может собирать коллекцию насекомых по условию 4, машинист тепловоза — по условию 6, забойщик — по условию 9. Токарь также не увлекается энтомологией, поскольку, как мы уже доказали, он все свободное время отдает авиамоделизму. Следовательно, *коллекцию насекомых может собирать лишь инженер.*

Совершаем пересадку запрета в клетку *Z — н* таблицы *III* (рис. 181).

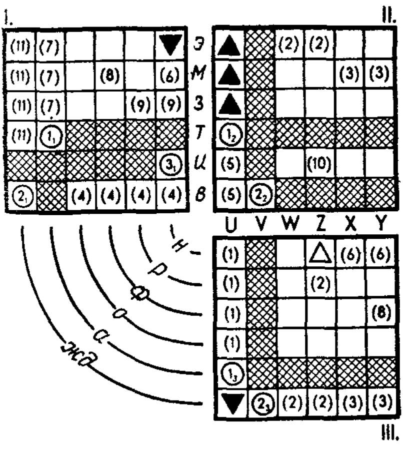


Рис. 181.

Поскольку по условию 10 *Z* не инженер, то *Z* не может собирать коллекцию насекомых.

Находим частичное решение в первой строке (н) таблицы *III* и затем производим сужение информации (рис. 182).

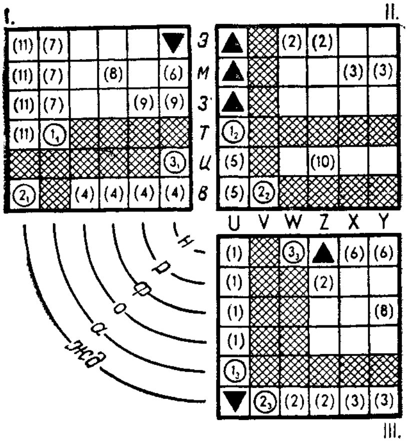


Рис. 182.

Применим к частичным условиям $З_1$ и $З_3$ правило соответствия и затем произведем сужение информации (рис. 183).

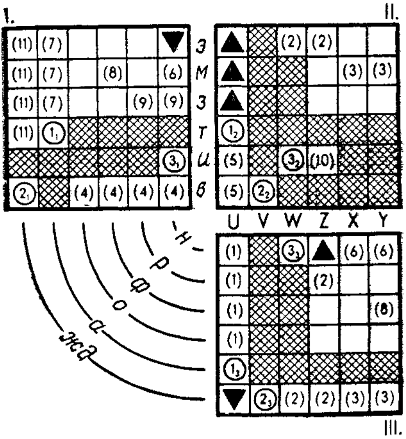


Рис. 183.

Ранее мы установили, что собирать коллекцию насекомых могут либо *W*, либо *Z*. Поскольку, как теперь выяснилось, *Z* не увлекается энтомологией, то *собирать коллекцию насекомых может лишь W.*

Итак, мы установили еще одну (третью) тройку попарно соответствующих элементов:

W — инженер — собиратель коллекции насекомых.

Находим частичное решение в строке м таблицы *II* и производим сужение информации (рис. 184).

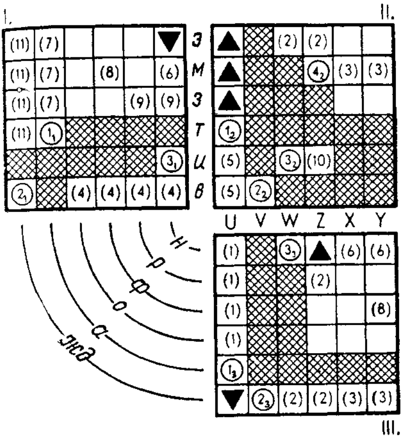


Рис. 184.

По условию 3 ни X, ни Y не могут быть машинистом тепловоза. V, W и U также не могут быть машинистом тепловоза, поскольку нам уже известны их специальности. *Следовательно, машинистом тепловоза может быть лишь Z.*

Совершаем пересадку запрета в клетку м — р таблицы *I* (рис. 185).

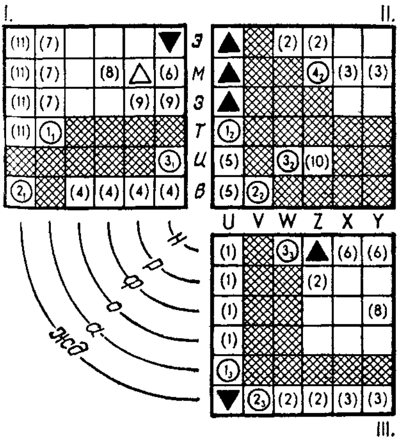


Рис. 185.

Поскольку Z по условию 2 лишь «кое-как разбирается в радиотехнике», то Z не может быть радиолюбителем.

Находим частичное решение в строке м таблицы *I* и производим сужение информации (рис. 186).

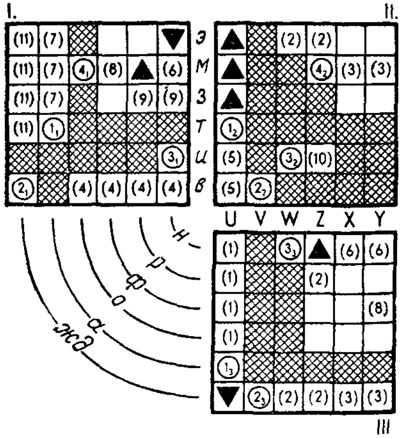


Рис. 186.

Но по условию 7 машинист тепловоза не может быть авиамоделистом, а по условию 8 — строить модели железных дорог. *Следовательно, у машиниста тепловоза не может быть другого увлечения, кроме коллекционирования почтовых открыток.*

Применяем правило соответствия к частичным решениям 4_1 и 4_3 и затем производим сужение информации (рис. 187).

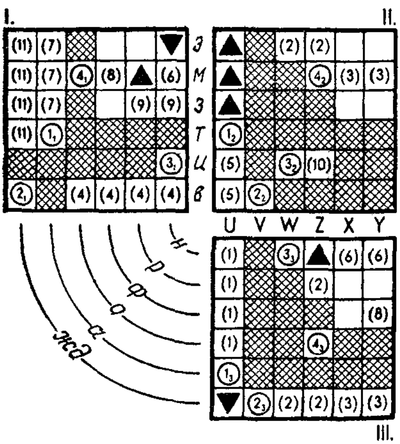


Рис. 187.

Итак, мы получили четвертую тройку попарно соответствующих элементов: *Z — машинист тепловоза — коллекционер почтовых открыток.*

Находим частичное решение в строке ф таблицы *III* и затем производим сужение информации (рис. 188).

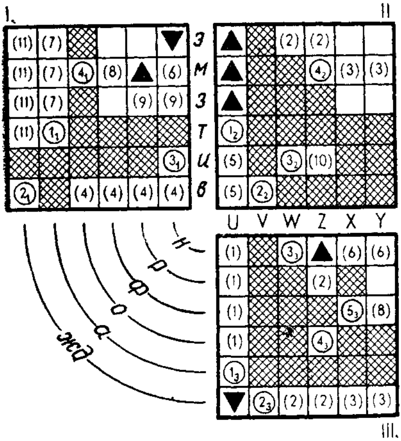


Рис. 188.

Таким образом, филателистом может быть только X, поскольку из условия 8 следует, что Y не интересуется марками и имеет совсем другое увлечение.

Находим частичное решение в строке з таблицы *I* и производим сужение информации (рис. 189).

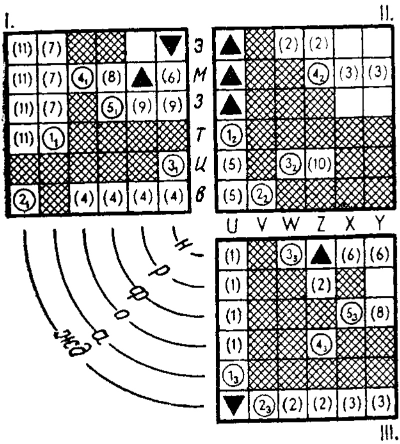


Рис. 189.

Определяем, чем увлекается забойщик. Из предыдущего следует, что коллекционировать почтовые открытки может лишь машинист тепловоза.

Применяем правило соответствия к частичным решениям 5_1 и 5_3, после чего производим сужение информации (рис. 190).

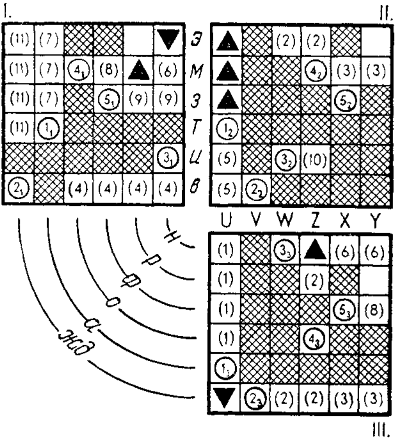


Рис. 190.

Во всех трех таблицах осталось по одной свободной клетке (рис. 191).

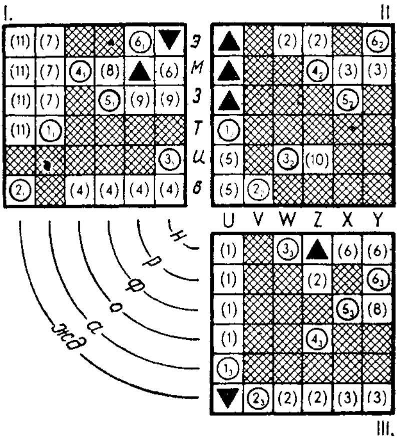


Рис. 191.

Нетрудно видеть, что расположение клеток удовлетворяет правилу соответствия.

Объединяя полученные результаты, находим пятую тройку попарно соответствующих элементов:
X — забойщик — филателист.

Оставшаяся (шестая) тройка может иметь лишь следующий состав:
Y — электромонтер — радиолюбитель.

Нетрудно проверить, что найденные частичные решения удовлетворяют всем условиям задачи.

45. СВЕРХСОВРЕМЕННЫЙ ГАРАЖ В ТРИДЕСЯТИГРАДЕ

Автомат функционировал небезупречно с самого начала, когда Эгон Берг пытался воспользоваться им «нормальным образом», не прибегая к «насилию», и гарантировать, что единственная лампочка указывала нужный бокс, разумеется, невозможно. Однако не подлежит никакому сомнению, что Эгону Бергу не удалось исправить автомат «одним ударом»: если верить первой лампочке, то машина находится на 3-м этаже, если же верить второй, то на 2-м.

46. ГДЕ ИСКАТЬ МАШИНУ?

На рис. 192 хорошо видно, в каких «коридорах» гаража (они выделены штриховкой) может находиться машина Эгона Берга, судя по лампочкам, загоревшимся на табло регистрирующего автомата.

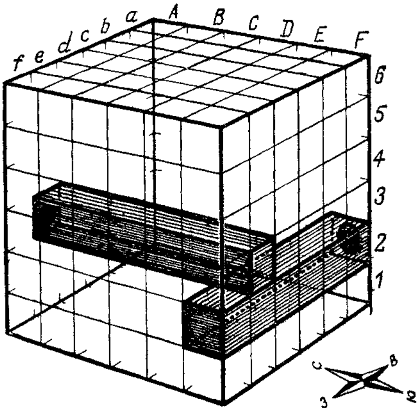


Рис. 192.

Поскольку на табло I изображен вид здания гаража с юга, то лампа 1 указывает на то, что машина Эгона Берга должна находиться в коридоре *e*, расположенном на третьем этаже. Этот коридор состоит из шести боксов, вытянувшихся один за другим с юга на север. Если убрать перегородки между шестью боксами коридора *e*, то получится тоннель, пронизывающий все здание на уровне третьего этажа в направлении с юга на север.

Лампа 2 на световом табло II указывает на то, что машина Эгона Берга находится на втором этаже в коридоре *F*. Этот коридор образован шестью боксами, идущими один за другим с запада на восток. Если убрать перегородки между шестью боксами коридора *F*, то получится тоннель, пронизывающий все здание на уровне второго этажа в направлении с запада на восток.

Таким образом, двум лампам, загоревшимся на табло автомата, соответствуют $6 + 6 = 12$ боксов.

47. АВТОМАТ ИСПРАВЛЕН!

Эгону Бергу не нужно ждать, пока заменят разбитую лампочку: две загоревшиеся лампочки позволяют совершенно точно определить

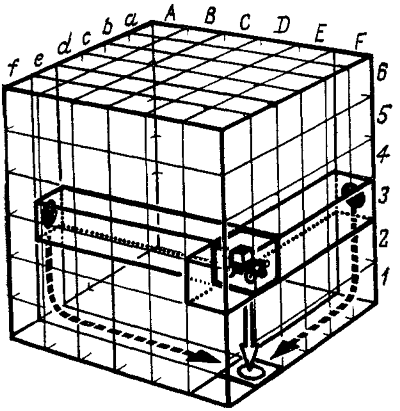


Рис. 193.

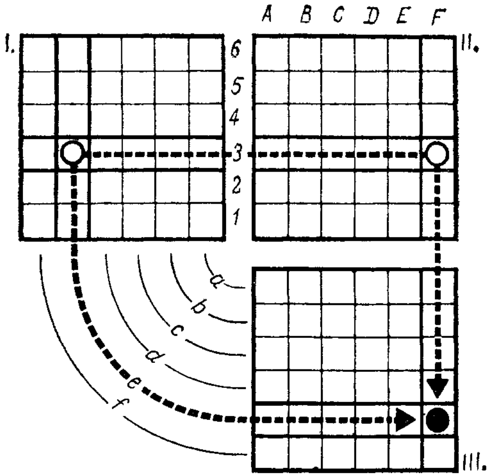


Рис. 194.

бокс, в котором находится его машина. На этот раз обе лампочки указывали коридоры, расположенные на одном и том же этаже под прямым углом друг к другу (один «тоннель» идет с юга на север, другой — с запада на восток). Бокс с машиной Эгона Берга находится на пересечении коридоров. Таким образом, две лампочки, загоревшиеся на световых табло, указывают на один-единственный бокс, расположенный на третьем этаже и принадлежащий одновременно коридорам F и e.

На виде гаража сверху (табло III) коридору F соответствует последний столбец, а коридору e — пятая сверху строка. Как видно из рис. 193 и 194, на пересечении строки e и столбца F и находится та клетка, в которой должна была бы загореться третья лампа. Таким образом, на табло III необходимо заменить лампу в клетке e — F.

48. «БРОНЯ» НА МЕСТА В ГАРАЖЕ

Отвлечемся от того, как управляющий гаражом использовал вывернутые лампы. Будем надеяться, что ничего незаконного он не совершил. Однако лампу в левом нижнем углу табло I он распорядился вывернуть по ошибке.

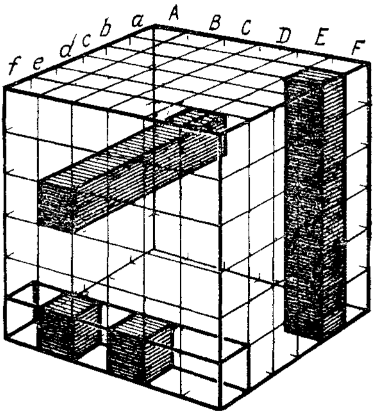


Рис. 195.

На рис. 195 заштрихованы все боксы, абонированные КИТом. Шесть из них расположены на четвертом этаже и образуют коридор, тянущийся сквозь все здание с запада на восток. Следовательно, лампочка, вывернутая по распоряжению управляющего на табло II, действительно «лишняя» (рис. 196): ведь она могла бы загореться лишь в том случае, если бы чья-то машина (не принадлежащая автохозяйству КИТа) оказалась в одном из шести боксов коридора, абонированного КИТом.

Аналогично боксы, расположенные на пересечении слоев F и b, образуют вертикальный коридор (шахту), проходящий сквозь весь гараж от крыши до основания. Так как «чужие» (не принадлежащие КИТу) машины не могут оказаться ни в одном из боксов, образующих абонированную КИТом шахту, то лампу на табло *III* также можно вывернуть (рис. 198).

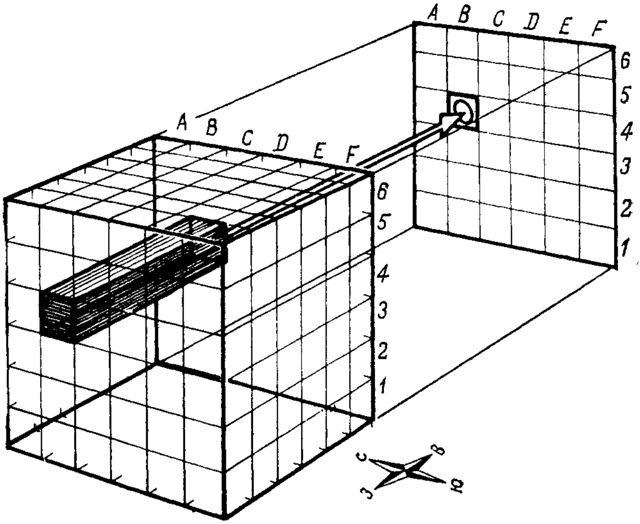


Рис. 196.

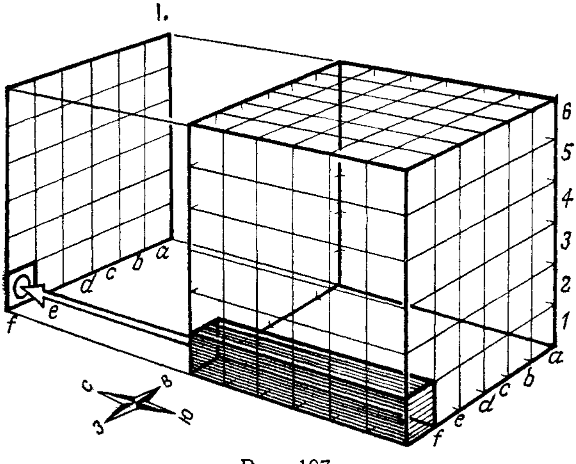


Рис. 197.

Однако двух боксов, абонированных КИТом на первом этаже, недостаточно для того, чтобы заполнить целый коридор. В какой бы из боксов *Af1*, *Cf1*, *Ef1* и *Ff1* ни поместили машину любого из абонентов гаража, при нажатии кнопки на панели регистрирующего автомата лампа в левом нижнем углу табло I должна загореться.

Как известно, три световых табло регистрирующего автомата изображают гараж в трех видах: с юга, с запада и сверху. Все три вида представлены на рис. 196—198. В какой бы клетке ни находилась лампа на табло *I*, *II* или *III*, ей соответствуют шесть боксов, образующих коридор, который тянется с юга на север, с запада на восток или проходит сверху вниз. (Вертикальный коридор правильнее было бы называть шахтой или колодцем.) В сверхсовременном

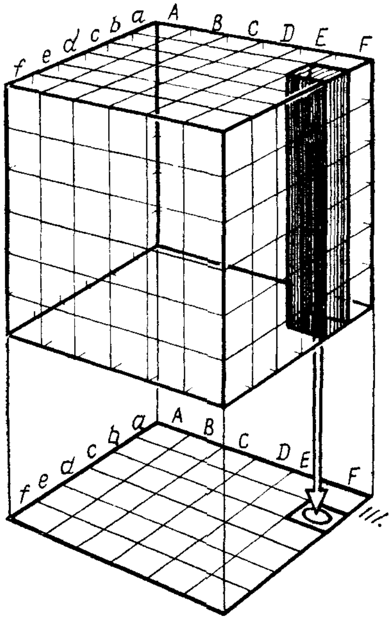


Рис. 198.

гараже, о котором рассказывается в нашей книге, все боксы, расположенные в одной шахте, связаны между собой лифтом. Лампа в той или иной клетке на табло *III* загорится лишь при условии, если машина, принадлежащая тому лицу, чья фамилия значится рядом с нажатой кнопкой, находится в одном из боксов шахты, которая соответствует данной клетке.

Таким образом, вывернуть можно было лишь те лампы, которые соответствуют абонированным коридорам, а не отдельным боксам.

49. БОКС НА СОЛНЕЧНОЙ СТОРОНЕ

Все, что может сделать для Карчи Баркача управляющий гаражом, — это предоставить ему как можно более светлый бокс в какой-нибудь другой части гаража. Как видно из рис. 199, абонированные коридоры расположены так, что весь юго-западный угол уже занят. В южном слое F заняты все этажи, кроме третьего и пятого. Однако напрасно мы стали бы искать свободный коридор в слое F на этажах 3 и 5: на каждом из них имеется по одному

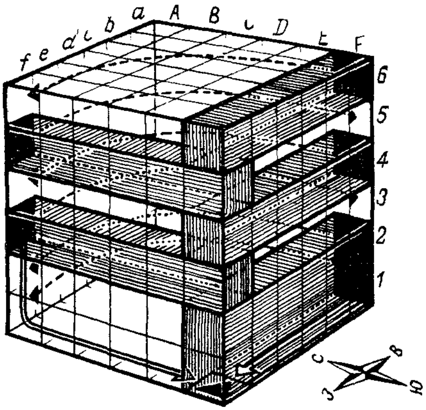


Рис. 199.

абонированному коридору в слое f. Таким образом, все боксы в юго-западном углу уже сданы в аренду.

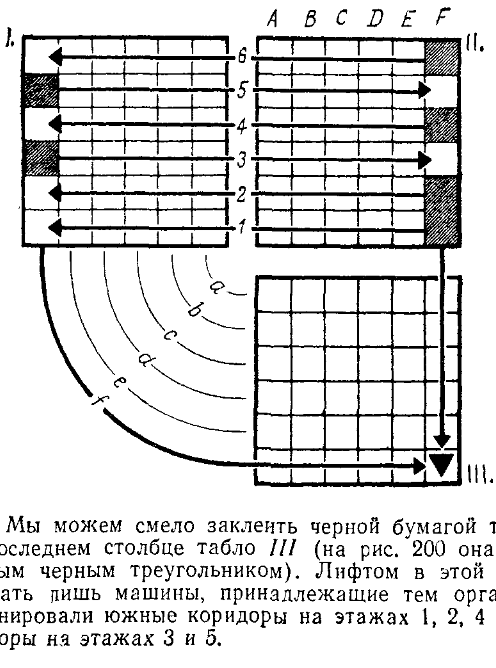


Рис. 200.

Мы можем смело заклеить черной бумагой ту клетку с лампой в последнем столбце табло III (на рис. 200 она помечена перевернутым черным треугольником). Лифтом в этой шахте можно поднимать лишь машины, принадлежащие тем организациям, которые абонировали южные коридоры на этажах 1, 2, 4 и 6 и западные коридоры на этажах 3 и 5.

50. АВТОМАТ, ИСПРАВНЫЙ ЛИШЬ НА ОДНУ ТРЕТЬ

Из рис. 201 нетрудно видеть, что Илонке придется осмотреть всего лишь четыре бокса. Действительно, лампа, загоревшаяся в клетке *F4* на табло *II*, соответствует шести боксам, расположенным

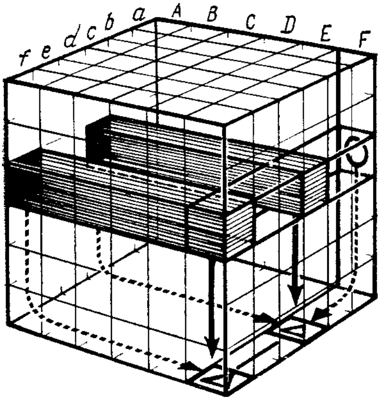


Рис. 201.

на четвертом этаже в слое *F*, но два из них абонированы (расположены на пересечении коридора *F4* с двумя коридорами *f4* и *c4*,

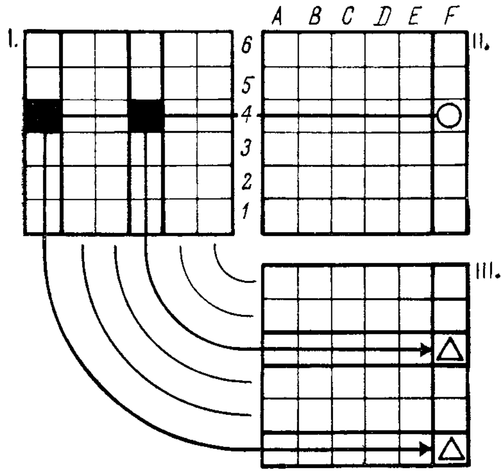


Рис. 202.

идущими в поперечном направлении). На рис. 202 (табло *III*) треугольниками отмечены те шахты, в которых заведомо не может находиться машина Илонки. Подниматься на 4-й этаж в лифтах, проходящих внутри этих шахт, не имеет смысла.

51. ШЕСТЬ СВАРЛИВЫХ АВТОЛЮБИТЕЛЕЙ

Решить эту задачу не так просто, как предыдущие. В тех задачах мы изображали гараж в виде некоторой условной схемы и просто смотрели, где расположено то, что нас интересует. Такую же схему мы можем нарисовать и в данном случае, но разобрать что-либо на ней будет невозможно. Тем не менее помочь управляющему нетрудно.

Читатель, по-видимому, уже давно понял, что все задачи, имеющие то или иное отношение к гаражам в Тридесятом государстве, принадлежат к числу тех задач, которые сводятся к установлению

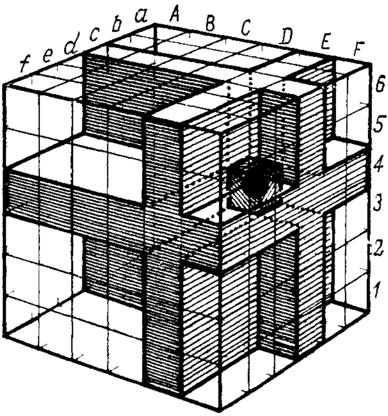


Рис. 203

соответствия между элементами трех множеств. Каждый бокс расположен в каком-то вполне определенном слое, идущем с юга на север, в каком-то «своем» слое, идущем с запада на восток и на определенном этаже. Таким образом, каждому боксу соответствуют две буквы (которыми мы обозначили вертикальные слои) и число-номер этажа.

Например, бокс с шариком на рис. 203 имеет «адрес» *Ec4*. Если мы захотим рассмотреть в гараже какой-нибудь другой бокс, то адрес этого бокса будет отличаться от адреса бокса с шариком по крайней мере одним знаком (либо одной из букв, либо номером этажа), поскольку два вертикальных слоя и этаж, пересекаясь, образуют лишь один бокс. Так как мы условились обозначать вертикальные слои буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, а этажи — их номерами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, то каждому боксу соответствует своя, неповторимая комбинация букв и чисел, присвоенных слоям и этажу, которые, пересекаясь, образуют данный бокс.

Это означает, что если мы на дверях всех боксов напишем соответствующие комбинации букв и чисел, то тем самым мы установим взаимно-однозначное соответствие между тройками элементов, содержащими по одному элементу из каждого множества: $\{A, B, C, D, E, F\}$, $\{a, b, c, d, e, f\}$ и $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Изображение гаража в трех видах соответствует неоднократно использованному нами ранее методу одновременного рассмотрения трех таблиц. Объединяет оба способа наглядного представления трех множеств не только чисто внешнее сходство в обозначениях и расположении «световых табло» и таблиц, но и многое другое (в чем мы успели убедиться, решая задачи 45—50).

В задачах 45—47 читатель, по-видимому, обратил внимание на то, что если автомату необходимо «назвать» адрес вполне определенного бокса (в котором находится разыскиваемая машина), то на каждом из трех его табло загорается по лампе, причем расположение ламп неизменно удовлетворяет правилу соответствия. Считывая показания с табло автомата (так же как до этого мы считывали «показания» с трех таблиц), нетрудно убедиться в том, что три загоревшиеся лампы выделяют тройку элементов «нумерующих» множеств, позволяющую однозначно указать, где находится бокс с разыскиваемой машиной.

Выясняется, что «гаражный» метод решения трехмерных логических задач тесно связан с «трехтабличным» методом. Здание гаража в Тридесятом государстве имеет форму куба, разделенного на $6\times6\times6$ кубических боксов. Такой «гараж» позволяет наглядно изображать соответствия, которые возникают между тройками элементов (каждая тройка содержит по одному элементу из трех множеств, каждое множество состоит из 6 элементов). Как известно, «трехтабличный» метод также позволяет наглядно изображать соответствие между тройками элементов. Нетрудно заметить, что три таблицы ничем не отличаются от трех видов (с юга, запада и сверху) кубического каркаса здания гаража.

Из задачи 48 мы узнаем, что элементарному запрету на любой из трех таблиц соответствует шесть запрещенных троек элементов. Если воспользоваться «наглядным пособием» — каркасом кубического здания, то видно, что запрещенные тройки служат адресами шести боксов, заполняющих целый коридор (или шахту).

В решении задачи 49 нетрудно узнать правило дополнительности. Помещая эту задачу, мы хотели лишь обратить внимание читателя на то, что правилу дополнительности подчиняется и работа регистрирующего автомата. Тем не менее решение задачи 49 можно рассматривать как новое доказательство правила дополнительности.

То же можно сказать и о связи, существующей между задачей 50 и правилом пересадки.

Мы надеемся, что читатель не подумал, будто за общими рассуждениями мы забыли о задаче 51. Лишь теперь настало время перейти к ее решению.

Если машина одного из сварливых автолюбителей поставлена в какой-нибудь бокс, то это означает, что один этаж и два вертикальных слоя «полностью» заняты: ведь в них по условию задачи нельзя поместить машину ни одного другого члена сварливой шестерки. Это не что иное, как сужение информации. Таким образом, сужение информации допускает наглядное истолкование и на языке «гаражного» метода. Как видно из рис. 203, сужение информации на табло регистрирующего автомата имеет тот же смысл, что и сужение информации в трехтабличном методе.

Машины сварливых автолюбителей необходимо разместить в гараже так, чтобы в адресах занятых ими боксов были представлены все элементы трех множеств: $\{A, B, C, D, E, F\}$, $\{a, b, c, d, e, f\}$ и $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Но каждый элемент может входить лишь в один адрес, поэтому адреса автомашин сварливых автолюбителей устанавливают взаимно-однозначное соответствие между элементами трех нумерующих множеств.

А теперь быстро закончим решение задачи 51. Прежде всего заметим, что световые табло регистрирующего автомата выглядят точно так же, как таблицы *I—III* на рис. 148. Относительно задачи 40 известно, что содержащиеся в ее условиях элементарные запреты позволяют единственным способом установить взаимно-однозначное соответствие между элементами трех «нумерующих» множеств. Как выглядит это «единственное и неповторимое» соответствие, показано на рис. 153.

При установлении взаимно-однозначного соответствия между тремя множествами, каждое из которых содержит по 6 элементов, нам понадобились шестиэтажные гаражи. Ясно, что для установления взаимно-однозначного соответствия между множествами, содержащими по n элементов каждое, нам понадобятся n-этажные гаражи. Такой n-этажный гараж представляет собой куб, составленный из $n \times n \times n$ одинаковых кубов.

Напомним, что с необходимостью наглядно изобразить кубическую решетку, позволяющую устанавливать соответствие между элементами трех множеств, мы впервые столкнулись в решении задачи 8. Тогда же мы установили (и считаем уместным напомнить об этом теперь), что квадратные решетки (таблицы, расчерченные на квадратные клетки), столь хорошо зарекомендовавшие себя при решении двумерных задач, пригодны и для установления взаимно-однозначного соответствия между элементами трех множеств. Объемные кубические решетки хороши лишь в чисто теоретических рассуждениях. Пользоваться ими на практике при решении трехмерных логических задач неудобно. Начертить такую объемную «таблицу», как на рис. 203, трудно, а если бы нам понадобилось извлечь из нее какие-нибудь частичные решения, то мы довольно скоро были бы вынуждены отказаться от своей затеи.

Как известно, один выход из создавшегося затруднения состоит в том, чтобы изобразить объемную решетку в трех видах и воспользоваться затем старым, испытанным средством: методом трех таблиц. Разумеется, неплохо при этом иметь одно-два заранее разработанных правила.

Другой выход состоит в использовании какой-нибудь пространственной модели. Мы не будем подробно разбирать этот способ решения трехмерных логических задач и лишь продемонстрируем его в действии на нескольких примерах. Основная идея состоит в том, чтобы представить себе пространственную кубическую решетку прозрачной или подвергнуть ее «рентгеновскому просвечиванию». Насколько можно судить, этот путь не позволяет продвинуться особенно далеко.

Тем не менее и столь скромное техническое усовершенствование может оказаться полезным.

52. ПЕРЕСТРОЙКА КРИСТАЛЛА

Какие бы сечения кристалла параллельными плоскостями мы ни выбрали (для удобства ссылок кристалл ориентирован так, что вертикальные плоскости идут либо в направлении с севера на юг, либо с запада на восток), все ионы расположатся в четырех параллельных плоскостях. Следовательно, нам предстоит заменить ионами «кадабра» четыре иона «абра». (Точнее говоря, отсюда следует, что нам предстоит заменить по крайней мере четыре иона «абра». Но больше четырех ионов «кадабра» мы не можем ввести в кристалл,

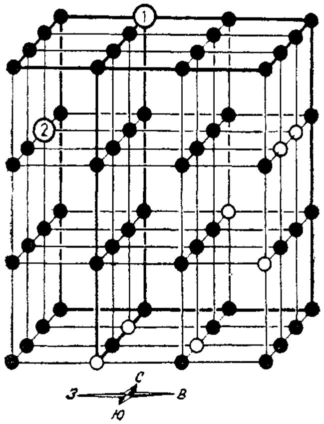


Рис. 204.

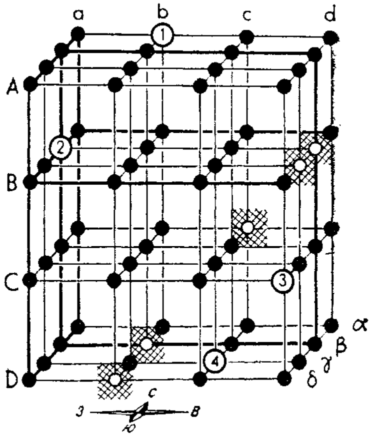


Рис. 205.

иначе в одной из плоскостей число пересаженных ионов оказалось бы более одного.)

В верхней горизонтальной плоскости и в самой левой «северо-южной» плоскости расположено лишь по одной вакансии (по одному иону «абра»). Следовательно, по условию задачи (по «техническим требованиям», предъявляемым к кристаллам в Тридесятом государстве) эти ионы «абра», безусловно, подлежат замене на ионы «кадабра». Поместим ионы «кадабра» на те места, которые бесспорно принадлежат им, и обозначим их цифрами *1* и *2* (рис. 204).

Как ион *1*, так и ион *2* «кадабра» принадлежат трем кристаллическим плоскостям: одной горизонтальной и двум вертикальным. (На рис. 204 жирными линиями показаны три плоскости, которым принадлежит ион *1* «кадабра», а на рис. 205 — три плоскости, которым принадлежит ион *2* «кадабра».) По условию задачи, ни в одной из этих плоскостей не могут находиться другие ионы «кадабра». Поэтому несостоявшиеся кандидаты в ионы «кадабра» на рис. 205 «закрыты» заштрихованными квадратами.

Во второй снизу горизонтальной плоскости и второй справа вертикальной плоскости, проходящей в направлении с юга на север после того, как мы расставили заштрихованные квадратики, осталось по одному иону «абра». Именно эти ионы и следует заменить ионами «кадабра».

Итак, кристалл с заранее заданными свойствами готов. Взглянув на рис. 205, мы заметим, что с заменой ионов «абра» ионами *3* и *4* «кадабра» в каждой из четырех кристаллических плоскостей стало ровно по одному иону «кадабра».

53. ЕЩЕ БОЛЕЕ СОВРЕМЕННЫЙ ГАРАЖ

Работы по реконструкции гаража Ласло Амбитор решил производить в следующей очередности.

Прежде всего он разобрал старый гараж на отдельные блоки (после чего гараж принял такой вид, как показано на рис. 206).

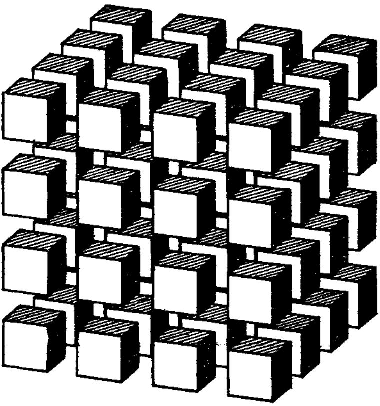


Рис. 206.

Затем каждый кубический бокс (рис. 207) он превратил в сферу (рис. 208), не забыв при этом придать всем дверным проемам и прорезям для лифта в полу и потолке изящную округлую форму. (Разумеется, полный комплект из 6 отверстий приходилось прорезать лишь в стенах внутренних боксов. Наружные боксы — (рис. 206) — лишены части отверстий.) Наконец, боксы, бывшие соседними до начала реконструкции, Амбитор соединил трубами и связал их в коридоры и шахты. (Последняя операция была чрезвычайно своевременной, если учесть, что волшебные силы довольно быстро иссякали и сооружение не могло особенно долго парить в воздухе.)

Так Амбитор построил сверхсовременный гараж, напоминавший по своей конструкции Атомиум (рис. 209). Внешний вид гаража после реконструкции неузнаваемо изменился, но расположение боксов осталось таким же, как и в прежнем, старомодном, гараже, имевшем форму куба (рис. 210). В новом гараже было столько же боксов, столько же коридоров и шахт, сколько их было в старом. Все

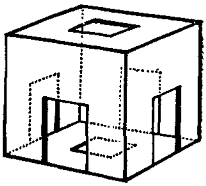


Рис. 207.

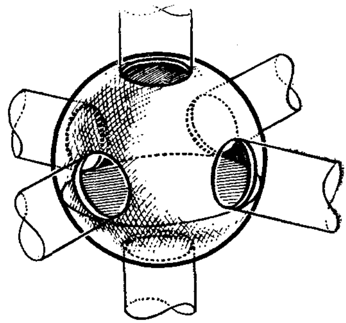


Рис. 208.

боксы сохранили свои прежние обозначения, поэтому старым регистрирующим автоматом можно было пользоваться по-прежнему. Правда, после реконструкции уже нельзя было утверждать, что на

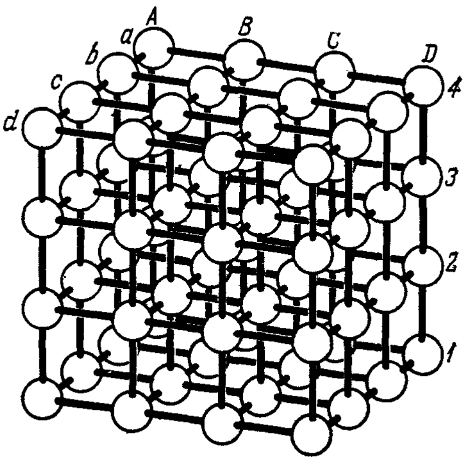


Рис. 209.

световых табло изображены виды гаража с трех взаимно перпендикулярных направлений, но более опытных владельцев автомашин, которым приходилось пользоваться услугами гаража, такая мелочь не смущала.

Девиз «Любая перестройка не должна мешать качественному обслуживанию» был широко распространен в Тридесятом государстве, но владельцы автомашин, оказавшиеся внутри гаража во время самой реконструкции, увидели лишь, что стены боксов выгнулись наружу, а простенки между боксами несколько удлинились. (Чтобы

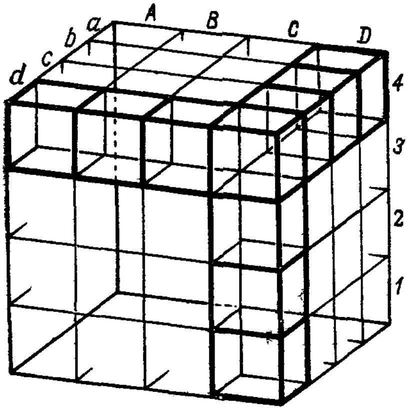


Рис 210.

перейти из одного бокса в другой, теперь уже недостаточно было просто переступить через порог: приходилось пользоваться электрокаром.)

Если бы Ласло Амбитор захотел достичь еще большего сходства между сооруженным им гаражом и Атомиумом, то ему следовало бы воздвигнуть здание в виде фантастического куба, одна из диагоналей которого расположена под прямым углом к поверхности земли (рис. 211). Правда, в таком здании вдоль всех коридоров

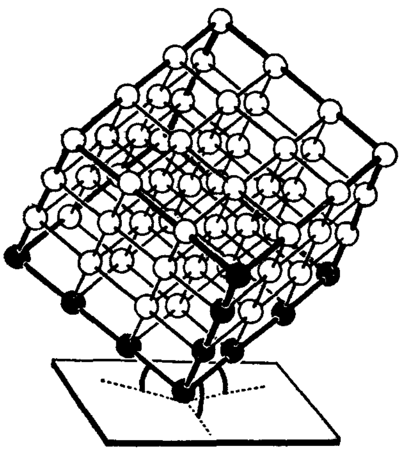


Рис. 211.

пришлось бы проложить лифты или эскалаторы: ни одного горизонтального коридора в гараже не осталось бы (как, впрочем, и ни одного вертикального). Нетрудно видеть (хотя для этого, возможно, придется слегка напрячь пространственное воображение или воспользоваться какой-нибудь моделью куба), что все коридоры образуют с горизонтальной плоскостью один и тот же угол (какой бы коридор мы ни выбрали, он заведомо параллелен одному из трех ребер, сходящихся в нижней вершине куба, а эти ребра, изображенные на рис. 211 жирными линиями, образуют с горизонтальной плоскостью одинаковые углы).

Аналогичное утверждение можно высказать и относительно слоев. Ни один слой ничем не выделяется среди других: все слои одинаково наклонены к горизонтальной плоскости.

Перечисленные нами странные особенности нового проекта станут заметными, если Амбитор вздумает последовать распространенному обычаю и устроит так, что все здание гаража будет вращаться вокруг вертикальной диагонали.

54. В ТРЕТИЙ РАЗ ОДНО И ТО ЖЕ!

Поскольку конструкция гаражей в столице Тридесятого государства нам очень понравилась, условимся теперь рассматривать рис. 16

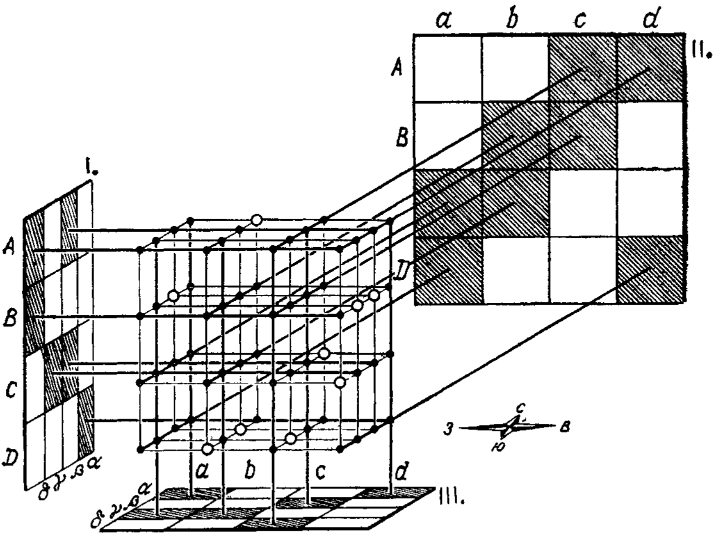


Рис. 212.

как световые табло в атомиумоподобном гараже, построенном по проекту Амбитора. Пусть буквы A, B, C, D означают этажи, а буквы a, b, c, d и α, γ, δ — вертикальные слои. Что означает элементарный запрет в таблице, мы выяснили, когда решали задачу 48:

каждая черная клетка указывает на то, что все боксы в соответствующем коридоре сданы в аренду или по каким-то причинам «изъяты из обращения». Определим «запрещенные» коридоры (рис. 212) и закрасим в черный цвет все боксы, оказавшиеся под запретом (рис. 16). В результате мы получим на нашей пространственной решетке все запреты задачи 37. Машины можно ставить лишь в те боксы, которые остались белыми. Кроме того, необходимо следить за тем, чтобы на каждом этаже и в каждом вертикальном слое разместилось лишь по одной машине. Ту же задачу правильнее было бы сформулировать несколько иначе. Рассмотрим рис. 212 как изображение модели кристаллической решетки, в которой белые шарики означают ионы «абра». Некоторые из этих ионов необходимо заменить ионами «кадабра», расположив последние так, чтобы в любой из кристаллических плоскостей оказалось по одному иону «кадабра». Но такую задачу мы один раз уже решали: кристаллическая решетка на рис. 212 и решетка, о которой шла речь в задаче 52 (рис. 27), похожи друг на друга, как две капли воды. Следовательно, ответ задачи мы получим, взглянув на рис. 205, стоит лишь обозначить вертикальные слои и этажи соответствующими буквами (так же как мы делали раньше). Ион «кадабра» *1* (рис. 205) находится на пересечении верхнего этажа A, слоя b, идущего в направлении с юга на север, и слоя α, идущего в направлении с запада на восток. Этому иону соответствует тройка элементов $A - b - \alpha$. Ион «кадабра» *2* лежит на пересечении этажа B, слоя a, идущего в направлении Ю — С, и слоя β, идущего в направлении З — В. Ему соответствует тройка элементов $B - a - \beta$. Иону «кадабра» *3* соответствует тройка элементов $C - d - б$ и иону «кадабра» *4* — тройка $D - c - \gamma$.

Разумеется, никаких расхождений с полученным ранее решением нет.

55. ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКОЙ!

Прежде всего необходимо построить пространственную решетку и, глядя на рис. 17, отметить на ней запрещенные узлы так же, как и при решении предыдущей задачи. Проделать эту операцию мы предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения, а сами лишь приведем ее окончательный результат — пространственную решетку (рис. 213), на которой отмечены все запрещенные узлы (они обозначены черными кружками).

На этот раз свободных узлов гораздо больше, и выбрать среди них нужные труднее, чем в предыдущем случае. Тщетно стали бы мы просматривать одну за другой все четыре горизонтальные плоскости, четыре вертикальные плоскости, идущие в направлении Ю — С, и четыре вертикальные плоскости, идущие в направлении З — В: каждая из них содержит по крайней мере два свободных узла, поэтому пока, основываясь лишь на элементарных запретах, содержавшихся в условиях задачи, мы не можем получить ни одного однозначно определенного частичного решения.

Еще один элементарный запрет мы найдем, рассмотрев самую верхнюю горизонтальную плоскость a. В ней осталось лишь два свободных узла. Один из них должен стать *связующим узлом*: в нем должно разместиться частичное решение задачи. Через эти два узла (на рис. 214 они обозначены вопросительными знаками) можно провести коридор — ребро куба, образованное пересечением верхней плоскости a и передней грани δ (оба узла принадлежат и слою δ).

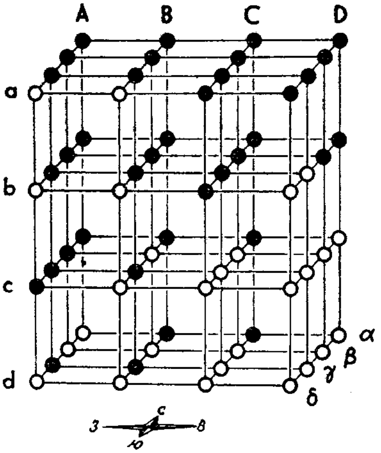


Рис. 213.

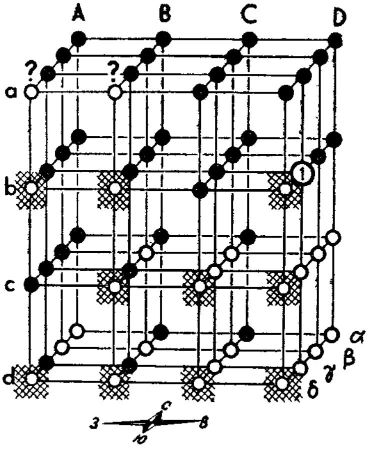


Рис. 214.

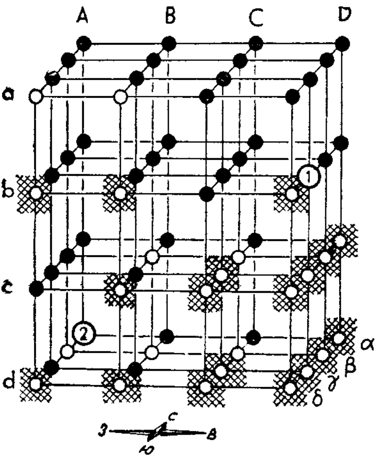


Рис. 215.

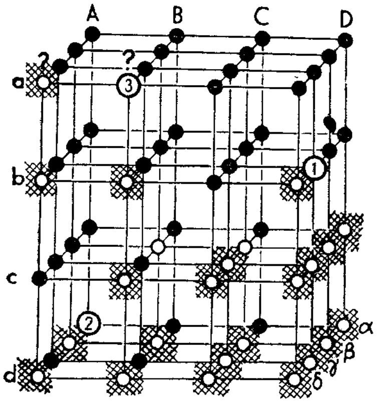


Рис. 216.

Следовательно, всякое частичное решение, принадлежащее горизонтальному слою a, будет одновременно частичным решением, принадлежащим слою δ, поэтому все остальные свободные узлы в слое δ в действительности не могут «предоставить убежище» никакому частичному решению. Они лишь «кажутся» свободными, и их необходимо исключить из дальнейшего рассмотрения. На рис. 214 все «мнимо свободные» узлы отмечены заштрихованными квадратами.

Проделав эту операцию, мы получаем возможность найти первое однозначно определенное частичное решение в слое b: на рис. 214 оно обозначено цифрой 1, обведенной жирным кружком. Сужение информации, производимое после этого частичного решения, позволяет наложить запрет на свободные узлы в двух остальных слоях, проходящих через узел 1 (D и γ). Узлы, оказавшиеся под запретом, на рис. 215 отмечены заштрихованными квадратами.

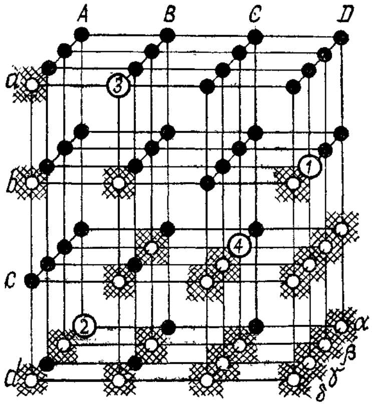


Рис. 217.

Произведенное нами сужение информации порождает новое однозначно определенное частичное решение в слое α. Его мы обозначим цифрой 2, обведенной жирным кружком (рис. 215). Частичное решение 2 «нейтрализует» остальные свободные узлы в слоях A и d. К чему приводит сокращение информации, вызванное частичным решением 2, показано на рис. 216. Оно попутно решает проблему выбора между двумя свободными узлами, принадлежащими слою a; один из узлов оказывается под запретом, в другом располагается частичное решение 3. Производя затем сужение информации, мы исключаем единственный оставшийся свободным узел в слое B, что позволяет нам получить в горизонтальном слое c последнее однозначно определенное частичное решение 4 (рис. 217).

Итак, между элементами множеств $\{A, B, C, D\}$, $\{a, b, c, d\}$ и $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ мы установили следующие соответствия:

$$a - B - \delta,$$
$$b - D - \gamma,$$
$$c - C - \beta,$$
$$d - A - \alpha.$$

Все они, как и следовало ожидать, оказались такими же, как в прежнем решении задачи 38.

Примечание. Если сравнивать новое («решеточное») решение задачи 38 с ее «классическим» трехтабличным решением, то особенно интересно проследить за «дебютной», начальной частью того и другого решений. В решеточном решении мы прежде всего устанавливаем, что один из двух свободных узлов, принадлежащих одновременно горизонтальному слою a и вертикальному слою δ, непременно будет занят частичным решением. В трехтабличном решении этому частичному решению соответствует связующий кружок в левом верхнем углу таблицы *I* на рис. 135. Однако получить это частичное решение удается не сразу. Предварительно необходимо, используя правило дополнительности, исключить из рассмотрения соседнюю с угловой свободную клетку (на рис. 135 она отмечена перевернутым черным треугольником). В пространственной решетке, изображенной на рис. 213, этому элементарному запрету соответствуют четыре узла (черных кружка), лежащие на пересечении горизонтального слоя a и вертикального слоя γ. В решеточном решении для того, чтобы узнать о запрете на эти узлы, не требуется производить никаких действий: достаточно лишь взглянуть на рис. 213, и все сразу же становится ясным. Таким образом, *пространственная решетка сообщает нам больше информации* (по крайней мере, если говорить о «готовой» информации, не требующей дальнейшей обработки), *чем три таблицы!*

Следующую задачу можно рассматривать как еще одно подтверждение правильности только что высказанного нами тезиса.

56. РЕВИЗИЯ

Поскольку каждый ревизор может выехать в командировку лишь в один из дней и лишь на одно предприятие, причем разные ревизоры должны отправляться в командировку в различные дни и обследовать состояние дел на различных предприятиях, то ясно, что речь идет о трехмерной логической задаче, в которой требуется установить взаимно-однозначное соответствие между элементами трех множеств: множеством ревизоров, множеством предприятий производственного объединения «Торты и реторты» и множеством трех первых дней недели.

Нетрудно видеть, что особенно рассчитывать на успех при попытке решить задачу трехтабличным методом не приходится. Действительно, этот метод позволяет находить такие элементарные запреты, которые *заранее исключают соответствие между двумя элементами* независимо от того, какой третий элемент входит в комбинацию с ними. [Например, элементарный запрет, соответствующий черной клетке в левом нижнем углу таблицы *II* (рис. 16), означает, что элемент a не может соответствовать элементу D. Тем самым исключается возможность появления четырех троек попарно соответствующих элементов $a-D-\alpha$, $a-D-\beta$, $a-D-\gamma$ и $a-D-\delta$ (рис. 212).] В данном случае парные запреты содержатся лишь в трех из шести условий: в условиях 1, 4 и 5. Остальные условия запрещают лишь соответствие между тремя *вполне определенными* элементами. Такой «тройственный» запрет не исключает соответствия между любыми двумя из трех элементов, если нам удастся надлежащим образом подобрать третий элемент.

Например, по условию 6 Сеель-Хамош может отправиться с ревизией в Плутоград, но не в понедельник. Ревизор вполне может приехать в Плутоград в понедельник, но это будет не Сеель-Хамош. Наконец, Сеель-Хамош может поехать в командировку в понедельник, но не в Плутоград.

В пространственной решетке всем этим запретам соответствует один черный шарик. Если мы сопоставим горизонтальную плоскость ревизорам, вертикальную плоскость, идущую в направлении Ю — С (ориентация решетки на рис. 218—221 совпадает с ориентацией решетки на рис. 215), трем поселкам, а вертикальную плоскость, идущую в направлении З — В, — дням недели, то пространственная решетка примет такой вид, как показано на рис. 218. (Как и прежде,

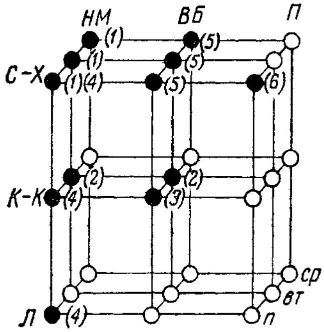


Рис. 218.

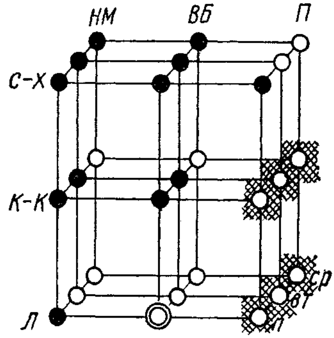


Рис. 219.

черный шарик означает запрет, а белый указывает на то, что соответствие между элементами возможно.)

Закончим на этом предварительные замечания и приступим к решению. Прежде всего заметим, что в верхней плоскости («принадлежащей» Сеель-Хамошу) имеются лишь два белых шарика. Какой-то из них соответствует частичному решению. Оба шарика принадлежат не только верхней горизонтальной плоскости, но и самой правой вертикальной плоскости *П*. Следовательно, *в самой правой плоскости П частичному решению может соответствовать лишь один из двух верхних белых шариков*, а на три шарика в среднем и три шарика в нижнем ряду необходимо распространить запрет (рис. 219).

Теперь уже все готово для того, чтобы получить первое *однозначно определенное частичное решение* в передней плоскости *п*, где остался лишь один свободный шарик (рис. 219). Вызванное этим частичным решением сужение информации позволяет получить еще одно частичное решение в средней горизонтальной плоскости *К — К* (рис. 220). В свою очередь новое частичное решение приводит к сужению информации, после которого мы находим последнее частичное решение (рис. 221).

Итак, единственное решение, устраивающее как правление производственного объединения «Торты и реторты», так и всех ревизоров, состоит в том, что Лола Латсатхи отправляется в понедельник с ревизией в Верхний Большеград, Йеромош Сеель-Хамош едет во вторник в Плутоград, а Казмер Киш-Кираль в среду проводит ревизию в Нижнем Малограде. Из рис. 221 хорошо видно, что

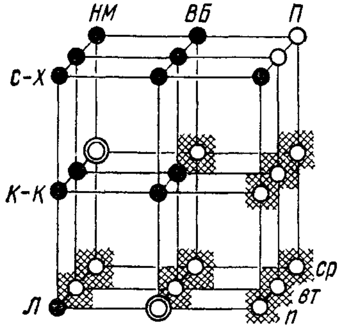


Рис. 220.

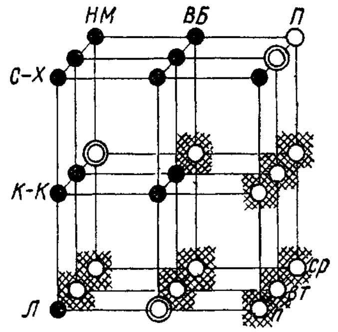


Рис. 221.

все условия задачи выполнены, поэтому найденный компромисс действительно является решением задачи.

57. СТРОГИЙ КОНТРОЛЬ

I. Необходимость использования пространственной решетки для решения задачи 56 обусловлена тем, что три таблицы не позволяют полностью представить всю информацию, содержащуюся в условиях задачи.

Если это утверждение верно, то на рис. 218 можно указать такой запрет, который не представлен ни на одной из трех таблиц.

Как известно, запреты в методе трех таблиц исключают возможность соответствия между двумя элементами независимо от того, какой третий элемент встречается в комбинации с ними. Двум элементам, связанным между собой соответствием, в пространственной решетке «принадлежит» прямая — след пересечения двух плоскостей, содержащих данные элементы. Следовательно, любой элементарный запрет в методе трех таблиц приводит к тому, что все узлы решетки, расположенные вдоль линии пересечения соответствующих плоскостей, будут заняты черными шариками.

Таким образом, черный шарик в узле пространственной решетки лишь тогда «запечатляется» в одной из трех таблиц, когда хоть одна из проходящих через него линий пересечения двух кристаллических плоскостей «унизана» только черными шариками.

Для читателя это утверждение не должно быть новым: мы упоминали о нем еще при решении задач «гаражного» цикла (раскройте книгу на задаче 48, и вы сразу же узнаете в «новом» факте старого знакомого).

Если каждая из трех взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через какой-нибудь черный шарик (каждая прямая образована пересечением двух кристаллических плоскостей), содержит белые шарики, то данный черный шарик бесследно исчезает со всех трех таблиц.

На рис. 218 имеются три таких «без вести пропавших» черных шарика (на рис. 222 они отмечены крестиками).

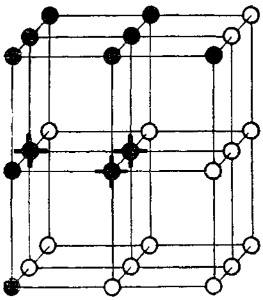


Рис. 222.

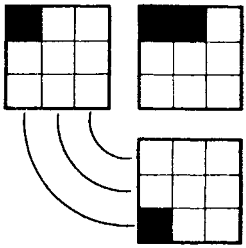


Рис. 223.

Таким образом, *трехтабличный метод не позволяет наглядно изображать тройные запреты* (то есть запреты, исключающие существование тройки попарно соответствующих элементов).

II. Однако решение задачи на этом не заканчивается. А вдруг три условия, отмеченные крестиками на рис. 222, окажутся избыточными, то есть лишними, и задача даже без них будет допускать однозначное решение?

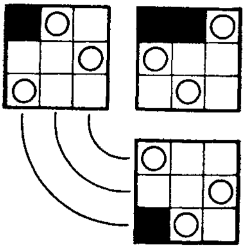


Рис. 224.

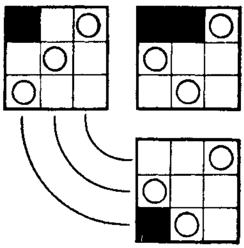


Рис. 225.

Чтобы ответить на этот вопрос, впишем в три таблицы все остальные элементарные запреты (рис. 223) и выясним, сколько решений допускает задача. Оказывается, что, помимо истинного решения (рис. 224), соответствующего «решеточному» решению на рис. 221, наша задача допускает еще три других решения (они показаны на рис. 225—227). Это означает, что три элементарных запрета, отмеченные на рис. 222 крестиками, не являются лишними; задачу 56 нельзя решить с помощью метода трех таблиц.

Действительно, как мы только что убедились, задача, представленная на рис. 223 («трехтабличный» вариант решеточной задачи, изображенной на рис. 222), допускает четыре решения, из которых лишь одно истинное. Все остальное уже несущественно.

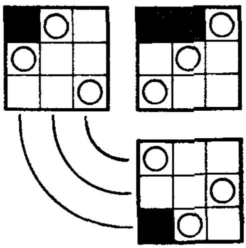


Рис. 226.

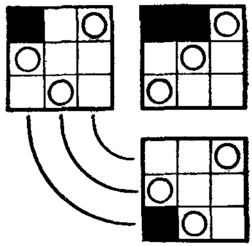


Рис. 227.

Разумеется, мы могли бы показать, что три запрета, отмеченные на рис. 222 крестиками, не являются лишними и на самой пространственной решетке. Изъяв эти запрещенные узлы, то есть заменив их свободными, мы получили бы решение, отличное от того, которое представлено на рис. 221.

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Многое еще можно было бы рассказать о трехмерных логических задачах, в которых требуется установить соответствие между элементами трех множеств, но такой рассказ выходит за рамки нашей книги. Кроме того, наши знания в области трехмерных логических задач еще весьма далеки от той (пусть относительной) законченности, какой удалось достичь в области двумерных логических задач. Может быть, именно эта законченность в какой-то мере обусловила появление того заключения, которое мы поместили после решения задачи 26. Написать что-либо подобное о трехмерных логических задачах вряд ли возможно.

В том, что в области трехмерных логических задач нас еще ожидает много неожиданного, мы убедимся, решив задачи 58—60 (три первые задачи части IV).

Часть IV

58. НОВОЕ ДЕЛО СЭМА СИЛЛИ И ДЖОННИ ВУДА

I решение. Из условий 1—3 следует, что три бандита совершили три кражи со взломом, причем все три преступления совершены в различное время: одно в 0 ч 10 мин, другое в 0 ч 20 мин и третье в 0 ч 30 мин. Следовательно, мы имеем дело с трехмерной логической задачей того же типа, который мы рассматривали в части III.

Джонни Вуд, перерешав все задачи из части III нашей книги, понимал, что имеющиеся в его распоряжении данные не обязательно должны допускать решение с помощью метода трех таблиц

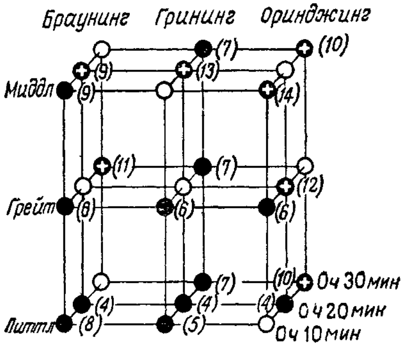


Рис. 228.

и приготовился использовать метод пространственной решетки. Все элементарные запреты, содержащиеся в условиях 4—14, представлены на рис 228. Первое, что счел необходимым сделать Джонни Вуд, — это отметить крестиками те элементарные запреты, которые нельзя было бы изобразить на трех таблицах. Таких запретов оказалось шесть. Теперь Джонни Вуд мог действовать смело: ведь он доказал, что не без основания выбрал для решения поставленной перед ним задачи метод пространственной решетки.

Но затем его уверенность пошатнулась. Тщетно обследовал он пространственную решетку в поисках хоть какого-нибудь однозначно определенного частичного решения: их нигде не было! Не было тех самых частичных решений, о которых неоднократно упоминалось в решениях задач 55 и 56. Там Джонни Вуду неизменно удавалось обнаружить такую плоскость, в которой все белые, то есть не оказавшиеся под запретом, шарики располагались лишь вдоль одной-единственной прямой. Это позволяло по крайней мере утверждать, что один из шариков соответствует частичному решению. На рис. 228 в любой плоскости можно было с легкостью указать несколько прямых, на каждой из которых располагался белый шарик. Ясно, что ни о каких частичных решениях в этом случае не могло быть и речи.

Как поступить при сложившихся обстоятельствах? После долгих размышлений Джонни Вуду пришло в голову любимое изречение великого мудреца Сэма Силли: «*Хороший сыщик должен обладать обостренной интуицией и умением выдвигать наиболее правдоподобные гипотезы*».

— Ясно, что наиболее правдоподобна та гипотеза, которая наиболее естественна, — подумал Джонни Вуд, и тут его внимание привлекла нижняя горизонтальная плоскость на рис. 228, соответствующая квартире мистера Литтла.

— Здесь имеются всего две возможности, — установил Вуд. — Кражу со взломом в квартире Литтла мог совершить либо Браунинг в 0 часов 30 минут, либо Оринджинг в 0 часов 10 минут. Рассмотрим сначала первый случай. Какие выводы можно сделать из

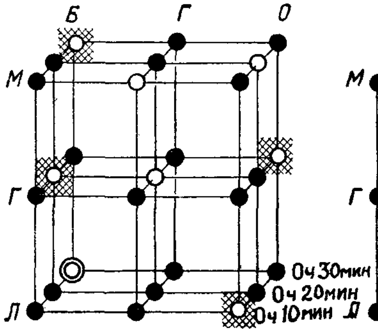


Рис. 229.

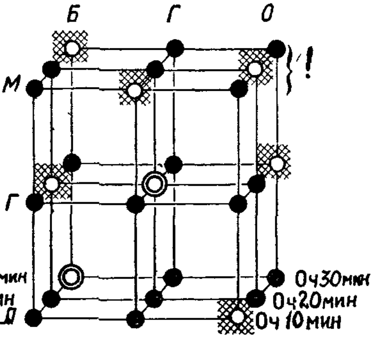


Рис. 230.

предположений о том, что преступление в 0 часов 30 минут совершил Браунинг?

Он аккуратно обвел вторым кружком кружок, изображавший на рис. 228 белый шарик «Квартира мистера Литтла, Браунинг, 0 ч 30 мин» (рис. 229), и произвел соответствующее сужение информации: закрасил в темный цвет все остальные белые шарики в нижней горизонтальной плоскости, в самой левой и в задней плоскостях.

Осмотр решетки показал, что однозначно определенное частичное решение появилось теперь в средней горизонтальной плоскости («Квартира мистера Грейта»): им оказался шарик, расположенный в центре куба из 27 шариков. Все это хорошо, но после вызванного этим частичным решением сужения информации (в темный цвет на этот раз необходимо закрасить все белые шарики, находящиеся в трех средних плоскостях, проходящих через шарик «Квартира мистера Грейта, Грининг, 0 ч 20 мин») в верхней горизонтальной плоскости («Квартира мистера Миддла») не останется ни одного белого шарика (рис. 230).

— Такого быть не может! — заметил по этому поводу Джонни Вуд. — По-видимому, я неправильно выбрал исходную точку своих рассуждений, *ошибся в выборе первоначальной гипотезы*. Значит, у меня еще недостаточно развита интуиция.

Но вскоре лицо у него прояснилось:

— Но ведь постигшая меня неудача означает, что *кражу со взломом в квартире мистера Литтла мог совершить в 0 часов 10 минут лишь Ориндлжинг!*

Джонни Вуд вновь вернулся к исходной решетке (рис. 228) и закрасил в темный цвет белый шарик, соответствующий комбинации «Квартира мистера Литтла, Браунинг, 0 ч 30 мин» (рис. 231). Произведя соответствующее сужение информации, Вуд получил однозначно определенное частичное решение в верхней плоскости, после чего уже без труда закончил решение (рис. 231). Полное решение задачи, которое Джонни Вуд показал своему шефу Сэму Силли, гласило:

«*Кражу со взломом в квартире мистера Литтла совершил в 0 ч 10 мин Ориндлжинг, квартиру мистера Грейта ограбил в 0 ч*

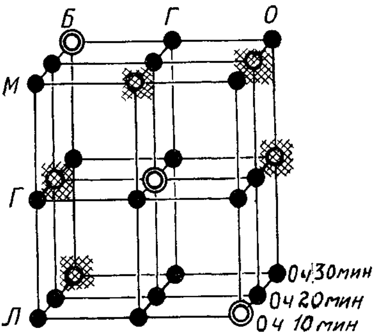


Рис. 231.

20 мин Гринннг, а квартиру мистера Миддла в 0 ч 30 мин ограбил Браунинг. Других решений не существует!»

Сэм Силли проверил, не противоречит ли найденное его помощником решение всем фактам, установленным сыщиками в ходе расследования, и, поскольку все данные сошлись, признал, что Джонни Вуд блестяще справился со своим заданием.

II решение. Строго говоря, задачу можно решить без таблиц и пространственной решетки: достаточно лишь перевести условия задачи на язык элементарных запретов (так, как мы сделали в предыдущем решении). По условию 4, квартиру мистера Литтла не могли ограбить в 0 ч 20 мин, а по условию 6 в 0 ч 10 мин взломщик еще не успел проникнуть в квартиру мистера Грейта. Если внимательно рассмотреть остальные элементарные запреты, то и без таблиц можно заметить, что остаются лишь следующие возможности:

Браунинг ограбил { либо квартиру мистера Грейта (0 ч 20 мин),
либо квартиру мистера Литтла (0 ч 30 мин),
либо квартиру мистера Миддла (0 ч 30 мин);

Гриннинг ограбил { либо квартиру мистера Миддла (0 ч 10 мин),
либо квартиру мистера Грейта (0 ч 20 мин);

Ориндлжинг ограбил { либо квартиру мистера Литтла (0 ч 10 мин),
либо квартиру мистера Миддла (0 ч 20 мин),
либо квартиру мистера Грейта (0 ч 30 мин).

Поскольку Грининг мог ограбить лишь одну из двух квартир (а каждый из его «коллег» по ремеслу — одну из трех квартир), то разумно начать с него. Предположим, что Грининг в 0 ч 10 мин совершил кражу со взломом в квартире мистера Миддла. Тогда два других грабителя не могли совершить свои преступления в 0 ч 10 мин и оказаться в квартире мистера Миддла. Отсюда мы заключаем, что

Браунинг мог ограбить {
либо квартиру мистера Грейта (0 ч 20 мин),
либо квартиру мистера Литтла (0 ч 30 мин),

а Оринджинг мог ограбить лишь квартиру мистера Грейта, причем сделать это в 0 ч 30 мин. Это означало бы, что либо Браунинг и Грининг ограбили одну и ту же квартиру, либо совершили кражи со взломом в одно и то же время По условию задачи оба варианта исключаются. Следовательно, исходное предположение о Грининге было неверным. В действительности *Грининг в 0 ч 20 мин совершил кражу со взломом в квартире мистера Грейта.* Следовательно, Браунинг в 0 ч 30 мин мог побывать либо в квартире мистера Литтла, либо в квартире мистера Миддла. Но *в 0 ч 10 мин Оринджинг мог совершить лишь кражу со взломом в квартире мистера Литтла, откуда следует, что Браунинг в 0 ч 30 мин ограбил квартиру мистера Миддла.*

59. ВОСПОМИНАНИЕ О ФУТБОЛЬНОМ ЧЕМПИОНАТЕ

Из вступительной части задачи видно, что речь идет о решении трехмерной логической задачи: необходимо установить взаимно-однозначное соответствие между элементами трех множеств — футболистов (A, B, C), команд (ФТЦ, «Вашаш», «Уйпешти Дожа») и занятых командами мест (1, 2, 3).

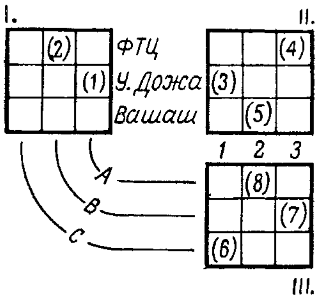


Рис. 232.

I решение. Поскольку каждое из условий 1—8 исключает по одному элементу из *двух множеств*, то их удобно наглядно представить не в виде пространственной решетки, а с помощью трех таблиц. На рис. 232, как обычно, изображены все элементарные запреты, содержащиеся в условиях задачи.

Однозначно определенного частичного решения нет нигде — ни на одной из таблиц. Без частичных решений мы не можем воспользоваться правилами соответствия и пересадки. В таких случаях сдвинуться с мертвой точки обычно помогает правило дополнительности, но в рассматриваемой нами задаче об этом не может быть и речи: в каждом столбце и в каждой строке находится не более одного запрета, поэтому в двух «дополняющих» друг друга строках в *лучшем случае может набраться два запрета.*

Итак, ни один из известных способов не позволяет получить первое частичное решение. Следовательно, необходимо ввести *дополнительные предположения.*

Рассмотрим, например, верхнюю строку в таблице II (рис. 232). Вписав в среднюю клетку связующий кружок (частичное решение), мы сможем без труда заполнить все остальные клетки таблицы (рис. 233). Однако последующие две пересадки запретов из таблицы I в таблицу III приводят к тому, что на таблице III создается

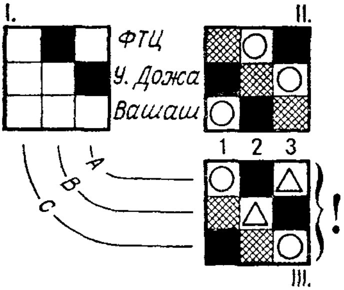


Рис. 233.

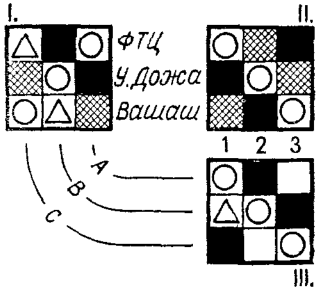


Рис. 234.

противоречивая позиция: соответствующая ей двумерная задача *не имеет решения* (рис. 233).

Это означает, что связующий кружок (частичное решение) следует вписать не в среднюю клетку верхней строки таблицы II, а в левую клетку (то есть в клетку, расположенную в левом верхнем углу таблицы, см. рис. 234). Дальше все идет «без сучка и задоринки», и с помощью правил пересадки и соответствия мы получаем окончательный ответ:

1 место заняла команда ФТЦ, за которую выступал футболист *A*;

2 место заняла команда «Уйпешти Дожа», за которую выступал футболист *B*;

3 место заняла команда «Вашаш», за которую выступал футболист *C*.

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет всем условиям задачи.

II решение. В предыдущем (трехтабличном) решении нам пришлось ввести гипотезу, нуждавшуюся в экспериментальной проверке *. Поэтому было бы интересно испробовать метод простран-

* Разумеется, наш эксперимент был чисто математическим: мы просто перебрали все возможные способы заполнения свободных клеток в верхней строке таблицы и выяснили, к каким следствиям они приводят.

ственной решетки: может быть, он позволит решить задачу, не прибегая ни к каким дополнительным предположениям?

Однако, как видно из рис. 235, нашим надеждам не суждено сбыться. В каждой из девяти кристаллических плоскостей расположено по крайней мере по два «белых» шарика, причем ни в од-

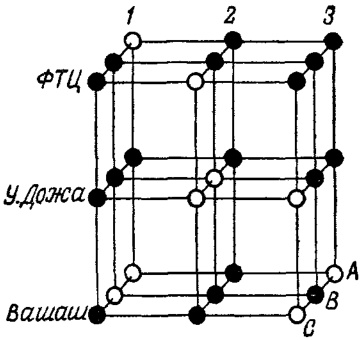


Рис. 235.

ной из плоскостей все принадлежащие ей белые шарики не располагаются вдоль одного и того же отрезка прямой (мы имеем в виду лишь те отрезки, которые изображены на рис. 235). И в этом случае нам не остается ничего другого, как выбрать кристаллическую плоскость, содержащую наименьшее число белых шариков

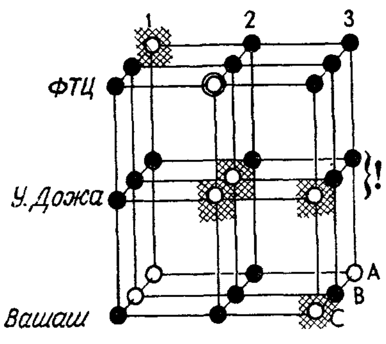


Рис. 236.

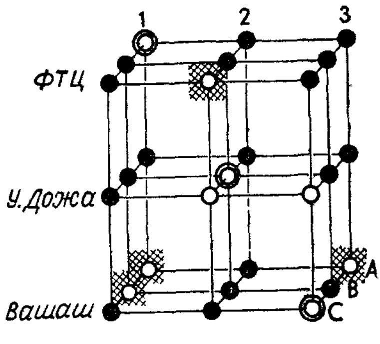


Рис. 237.

(то есть два белых шарика), и снова прибегнуть к гипотезе, требующей экспериментальной проверки: предположить, что один из белых шариков соответствует частичному решению.

В верхней горизонтальной плоскости (ФТЦ) и в средней вертикальной плоскости, параллельной плоскости рисунка (*B*), содержатся по два белых шарика. Попробуем начать с них.

Если предположить, что частичному решению отведен белый шарик в середине верхнего горизонтального ребра (шарик «2 место, футболист C, команда ФТЦ» на рис. 236), то после сужения информации (все остальные белые шарики в плоскостях 2, C и ФТЦ необходимо закрыть квадратными «щитами») средняя горизонтальная плоскость окажется «заполненной до краев»: за команду «Уйпешти Дожа» не сможет выступить ни один футболист. Полученное *противоречие* означает, что исходное предположение было неверно, и частичное решение должно соответствовать белому шарику, принадлежащему одновременно верхней горизонтальной плоскости ФТЦ, левой вертикальной плоскости *1* и задней вертикальной плоскости A (рис. 237). (Иначе говоря, частичное решение соответствует шарику «1 место, футболист A, команда ФТЦ».) Сужение информации, производимое вслед за этим частичным решением, порождает новое однозначно определенное частичное решение в нижней горизонтальной плоскости («Вашаш»), после чего без труда находится и третье частичное решение в средней горизонтальной плоскости («Уйпешти Дожа»). Полученное (полное) решение задачи (рис. 237) совпадает с уже известным нам трехтабличным решением.

60. НЕБОЛЬШОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС

Для трехмерных логических задач (в которых требуется установить соответствие между элементами трех множеств) теорема единственности, доказанная для двумерного случая в решении задачи 25, формулируется следующим образом:

«Если решение некоторой трехмерной логической задачи однозначно определенно (то есть решение задачи существует и единственно), то его можно представить в виде цепочки однозначно определенных частичных решений».

Наша задача как раз и состоит в том, чтобы определить, верно ли это утверждение или нет. Предварительно нам необходимо еще выяснить, как следует понимать «однозначно определенное частичное решение» в случае трехмерных логических задач. Для двумерных логических задач понятие «однозначно определенное частичное решение» нам удалось определить без труда: так мы называли частичное решение в том случае, когда в одном из столбцов или в одной из строк таблицы (речь шла лишь о квадратных таблицах) все клетки, кроме одной, находились под запретом. Однако в трехмерных логических задачах все обстоит гораздо сложнее. Термин «однозначно определенное частичное решение» мы встречали и в методе трех таблиц, и в методе пространственной решетки, причем в обоих случаях мы в различных ситуациях придавали этому термину различный смысл.

I. Мы видели, что пространственная решетка может служить «наглядным пособием» для решения трехмерных логических задач. Именно пространственная решетка позволяет придать термину «однозначно определенное частичное решение» наиболее простой смысл: так мы называли частичное решение в том случае, когда среди плоскостей решетки нам удавалось найти такую, в которой все шарики, кроме одного, находились под запретом.

Если принять такое определение однозначно определенного частичного решения, то сформулированная выше *теорема единственности для трехмерных логических задач не будет верна.* Ей противоречат, например, две предыдущие задачи (58 и 59), а также задачи 55 и 56. В построенных для этих задач пространственных решетках каждая плоскость содержит по крайней мере два белых (не находящихся под запретом) шарика, и тем не менее каждая из задач допускает единственное решение.

II. В менее строгом смысле частичное решение можно назвать однозначно определенным, если некоторая плоскость пространственной решетки содержит более одного белого шарика, но все принадлежащие ей белые шарики расположены вдоль прямой, по которой эта плоскость пересекается с другой плоскостью решетки. В этом случае мы действительно можем *однозначно определить частичное решение*: оно непременно должно «занять» один из белых шариков, расположенных вдоль линии пересечения двух плоскостей решетки. Если мы примем такое определение однозначно определенного частичного решения, то задачи 55 и 56 уже будут служить контрпримерами, опровергающими «трехмерную» теорему единственности: единственное решение, допускаемое каждым из них, можно представить в виде цепочки однозначно определенных (в только что указанном смысле) частичных решений. Однако задачи 58 и 59 по-прежнему будут опровергать трехмерный вариант теоремы единственности: хотя каждая из них и допускает единственное решение, тем не менее получить однозначно определенное частичное решение, исходя из одних лишь «начальных данных» любой из этих задач, невозможно.

Таким образом, *при решении трехмерных логических задач методом пространственной решетки теорема единственности неверна, даже если принять более слабое определение однозначно определенного частичного решения.*

III. Мы видели, что некоторые из трехмерных задач (а именно такие, у которых все условия содержат лишь элементарные запреты, исключающие соответствие между двумя вполне определенными элементами независимо от того, какой третий элемент может встречаться в комбинации с ними) допускают наглядное представление в виде трех квадратных таблиц. В связи с задачами этого типа возникает новая проблема: будет ли справедлива «трехмерная» теорема единственности, если под решением задачи мы будем понимать решение, полученное с помощью метода трех таблиц?

Два решения одной и той же задачи, полученные по разным рецептам (одно — по методу пространственной решетки, другое — с помощью трех таблиц), приводят подчас к противоположным выводам относительно истинности трехмерного варианта теоремы единственности. Например, трехтабличное решение задачи 39 представимо в виде цепочки однозначно определенных частичных решений, в то время как решение задачи 55 можно представить в таком виде лишь при условии, если мы будем понимать «однозначно определенное частичное решение» во втором, более слабом смысле.

Еще одну проблему можно сформулировать следующим образом: какие средства считаются дозволенными при решении задачи? Если мы станем решать задачу 39, не прибегая к правилу дополнительности, то выстроить цепочку однозначно определенных частичных решений, образующих полное решение задачи, нам так и не удастся, сколько бы мы ни старались. Но стоит нам пополнить свой арсенал правилом дополнительности, как такая цепочка выстроится без особых помех (задача 39).

Одно можно сказать со всей определенностью: если к числу допустимых средств решения задачи относятся лишь правила соответствия, пересадки и дополнительности, то *метод трех таблиц приводит к решению, не удовлетворяющему трехмерному варианту теоремы единственности.* В этом нас убеждает предыдущая (59-я) задача.

Разумеется, мы не можем утверждать, что никому не удастся придумать какое-нибудь новое правило, которое позволит представить решение задачи 59, полученное с помощью метода трех таблиц, в виде цепочки однозначно определенных частичных решений. Но в одном можно не сомневаться: в области задач на установление

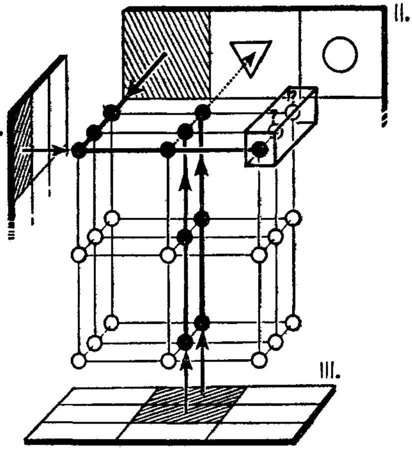


Рис. 238.

соответствия между элементами трех множеств (в «трехмерной логике») нас ожидают гораздо более сложные, более многочисленные и более разнообразные проблемы, чем в области двумерных логических задач. А количественный рост в математике означает качественное изменение!

Примечание. Нетрудно видеть, что если в методе пространственной решетки возникает «однозначно определенное частичное решение», то в методе трех таблиц, применив правило дополнительности, мы также получим в соответствующей таблице однозначно определенное частичное решение. Рассмотрим это утверждение на примере.

Предположим, что в одной из плоскостей пространственной решетки (на рис. 238 в верхней плоскости) имеется «частичное решение». Что это означает? А то, что в этой плоскости все узлы, кроме тех, которые лежат на одном из «прутьев» решетки, находятся под запретом. Все «несостоявшиеся» частичные решения (запрещенные узлы) выстраиваются вдоль прямых, параллельных избранному «пруту» пространственной решетки (единственному «прибежищу» частичных решений в рассматриваемой плоскости). Как объяснить подобную картину с точки зрения информации, отображаемой в таблицах?

Может случиться так, что один элементарный запрет, исключающий возможность парного соответствия между элементами двух множеств, держит под запретом все узлы, расположенные вдоль одной из параллельных прямых. Но возможна и другая причина: парный запрет распространяется на прямые, проходящие в другом направлении, которые, пересекаясь с прямой, параллельной избранному пруту пространственной решетки, «делятся» с ней запретными узлами. (Ведь любой элементарный запрет в таблице исключает все комбинации элементов, которые сопоставлены узлам, выстроившимся вдоль некоторой прямой.) Следовательно, если мы рассмотрим таблицу, изображающую «вид» на пространственную решетку в направлении той прямой, на которой расположились «кандидаты» в частичные решения (таблица *II* на рис. 238), то в строке этой таблицы, соответствующей рассматриваемой нами плоскости, все клетки, кроме одной, окажутся под запретом. Эти запреты могут быть либо «исходными», взятыми непосредственно из условий задачи, либо полученными по правилу дополнительности. Таким образом, прямой, содержащей свободные узлы пространственной решетки, в таблице соответствует клетка с однозначно определенным частичным решением.

61. СПОРТСМЕНЫ

I решение. Применить к решению этой задачи неоднократно использованный нами «автоматический» метод трех таблиц вряд ли разумно, поскольку у каждого из спортсменов имеется по одноклубнику, а среди видов спорта, которыми занимаются шестеро парней, есть и такие, что им отдают предпочтение сразу двое. Поэтому нам не остается ничего другого, как вернуться к «ручному» (неавтоматическому) методу — прибегнуть к элементарным логическим выводам. Правда, использовать элементарную логику мы будем не в ее «первозданном» виде: ничто не мешает нам применить к решению этой задачи таблицу с тремя строками, которую мы уже использовали в решении задачи 4.

Введем сокращенные обозначения. Обозначим каждого из шести парней начальной буквой его имени. Пусть *ф* означает футбол, *п* — плавание, *пв* — прыжки в высоту, *вп* — водное поло, *Ф* — клуб ФТЦ, *В* — «Вашаш» и *У* — «Уйпешти Дожа».

Прежде чем приступать к заполнению таблицы, попытаемся определить, не существует ли какого-нибудь «краткого пути» к решению. Нетрудно видеть, что среди исходных данных имеется решающая информация: по условию 3 *Ференц играет в футбол в команде ФТЦ*.

Убедиться в том, что совпадение других начальных букв имени спортсмена, названия того вида спорта, которым он занимается, и клуба, за который он выступает, невозможно, проще всего, если начать с названий клубов. Эти названия начинаются с букв *Ф*, *В* и *У*. Две последние буквы вообще не встречаются среди тех букв, с которых начинаются имена спортсменов (а названия видов спорта начинаются с букв *ф*, *в* и *п*). Следовательно, *Ф* — единственная буква, приводящая к тройному совпадению начальных букв имени, названия вида спорта и спортивного клуба.

Заполним теперь таблицу (установленные факты условимся заключать в рамки).

А	*Б*	*Ч*	*Д*	*Э*	*Ф*
ф пв п вп	*ф пв п вп*	*ф пв п вп*	*ф пв п вп*	*ф пв п вп*	$\boxed{ф}$
Ф У В	*Ф У В*	*Ф У В*	*Ф У В*	*Ф У В*	$\boxed{Ф}$

Остались условия: 1, 2, 4—7.

Посмотрим теперь, какие из тех сведений, которыми мы располагаем, можно было бы сразу же вписать в таблицу.

По условию 1 Бела занимается водным спортом: он не футбслист и прыжки в высоту его не интересуют. Кроме того, Бела не состоит членом клуба ФТЦ.

По условию 5 Бела не может быть членом спортивного клуба «Вашаш» (поскольку члены этого клуба занимаются «сухопутными» видами спорта, а Бела ходит на тренировки в бассейн).

Итак, в отведенном Беле столбце таблицы остаются лишь следующие пометки:

Б
п вп
У

Следовательно, *Бела может состоять лишь членом спортивного клуба «Уйпешти Дожа»*, а поскольку по условию 2 члены этого клуба не играют в игры с мячом, то отсюда следует, что *Бела занимается плаванием.*

Поскольку других пловцов среди шести спортсменов нет, то плавание можно исключить из других столбцов таблицы, после чего она примет следующий вид:

А	*Б*	*Ч*	*Д*	*Э*	*Ф*
ф пв вп	$\boxed{п}$	*ф пв вп*	*ф пв вп*	*ф пв вп*	$\boxed{ф}$
Ф У В	$\boxed{У}$	*Ф У В*	*Ф У В*	*Ф У В*	$\boxed{Ф}$

Далее идет новая серия данных, из которых мы узнаем, что по условию 4 Чаба (не умеющий плавать) не играет в водное поло;

по условию 6 Элмер (теперь) не футболист (кстати сказать, из того, что Элмер некогда выступал против команды, за которую играл Ференц, отнюдь не следует, будто Элмер не может быть членом спортивного клуба ФТЦ: занявшись другим видом спорта, Элмер вполне мог перейти в другой спортивный клуб!);

по условию 7 Андраш и Элмер не являются членами спортивного клуба ФТЦ (ибо в противном случае среди спортсменов оказалось бы три члена клуба ФТЦ: Андраш, Элмер и Ференц).

Вычеркнув из таблицы перечисленные нами запрещенные комбинации, получим

А	*Б*	*Ч*	*Д*	*Э*	*Ф*
ф пв вп	$\boxed{п}$	*ф пв*	*ф пв вп*	*пв вп*	$\boxed{ф}$
У В	$\boxed{У}$	*Ф У В*	*Ф У В*	*У В*	$\boxed{Ф}$

Остались условия: 2, 5 и 7.

Условие 7 мы использовали лишь частично: в таблице учтено лишь то, что ни Андраш, ни Элмер не состоят членами спортивного клуба ФТЦ, но то спортивное общество, в котором они занимаются, по-прежнему неизвестно.

Ни условие 2, ни условие 5 сами по себе не дают ничего нового. А что, если мы рассмотрим их не в отдельности, а вместе с условием 7? Из таблицы видно, что Андраш и Элмер могут заниматься в «Уйпешти Дожа» либо в спортивном клубе «Вашаш».

Но «Уйпешти Дожа» отпадает, потому что в противном случае членами этого клуба состояло бы трое из шести спортсменов (Андраш, Элмер и Бела). Следовательно, остается лишь «Вашаш». По условию 5 ни Андраш, ни Элмер не играют в водное поло. Поэтому мы вычеркнем в столбцах Андраша и Элмера *вп*, а в столбцах остальных спортсменов — *В*, после чего таблица примет следующий вид:

А	*Б*	*Ч*	*Д*	*Э*	*Ф*
ф пв	$\boxed{п}$	*ф пв*	*ф пв вп*	$\boxed{пв}$	$\boxed{ф}$
$\boxed{В}$	$\boxed{У}$	*Ф У*	*Ф У*	$\boxed{В}$	$\boxed{Ф}$

При этом выясняется, что *Элмер занимается прыжками в высоту*.

Посмотрим, какой информацией мы располагаем. Условие 7 полностью исчерпано, и его можно вычеркнуть. Условие 2 мы еще не трогали, а условие 5 использовали не полностью. Оно утверждает, что

члены спортивного клуба «Вашаш» занимаются двумя различными «сухопутными» видами спорта. Следовательно, поскольку Андраш уже не может заниматься прыжками в высоту, то остается единственная возможность: *Андраш футболист.*

Придя к такому заключению, мы полностью исчерпали условие 5. Итак, в нашем распоряжении остается лишь условие 2. Кроме того, мы должны вычеркнуть из столбца Андраша *пв*, а из остальных столбцов *ф* (поскольку в футбол играют лишь двое: Андраш и Ференц), после чего таблица примет следующий вид:

А	*Б*	*Ч*	*Д*	*Э*	*Ф*
$\boxed{\text{ф}}$	$\boxed{\text{п}}$	$\boxed{\text{пв}}$	$\boxed{\text{пв}\,|\,\text{вп}}$	$\boxed{\text{пв}}$	$\boxed{\text{ф}}$
$\boxed{\text{В}}$	$\boxed{\text{У}}$	Ф У	Ф У	$\boxed{\text{В}}$	$\boxed{\text{Ф}}$

Установим теперь, членом какого клуба состоит каждый спортсмен. По условию 2 Дьердь не может быть членом «Уйпешти Дожа», поскольку он играет в водное поло. Это замечание позволяет довести решение задачи до конца. Оно единственно и имеет следующий вид:

Андраш	*Бела*	*Чаба*	*Дьердь*	*Элмер*	*Ференц*
футболист	*пловец*	*легкоатлет (прыжки в высоту)*	*ватерполист*	*легкоатлет (прыжки в высоту)*	*футболист*
Вашаш	*Уйпешти Дожа*	*Уйпешти Дожа*	*ФТЦ*	*Вашаш*	*ФТЦ*

Нетрудно проверить, что при этом все условия задачи выполнены, поэтому установленное нами соответствие между спортсменами, видами спорта и спортивными клубами действительно является решением задачи.

II решение. Предыдущее решение еще раз подтверждает, что использовать для решения задачи 61 метод трех таблиц было бы невыгодно: мы не могли бы вписать ни в одну из таблиц ту информацию, которая позволяет установить связь между клетками второй и третьей строк (то есть между видом спорта и названием спортивного клуба).

Поэтому было бы особенно интересно посмотреть, к чему приведет попытка решить задачу 61 давно (с решения задачи 27) знакомым нам методом трех таблиц. То, что условия задачи содержат неоднозначные утверждения, не всегда мешает успеху табличного метода. Достаточно вспомнить хотя бы задачу 7: два из ее условий также содержали сведения, относившиеся одновременно к двум рубрикам таблицы, и тем не менее это не помешало нам решить задачу 7 с помощью «усовершенствованной» таблицы.

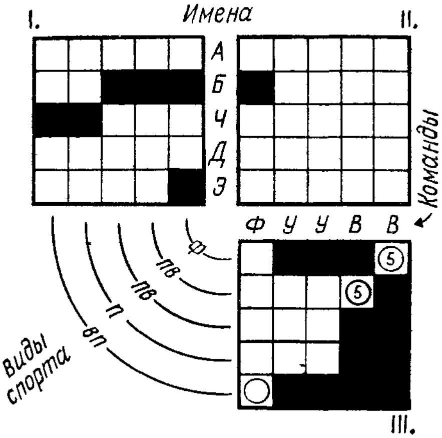


Рис. 239.

Разумеется, тройку Ференц — футболист — ФТЦ мы получаем точно так же, как и в предыдущем решении. Остальная информация (по возможности) представлена на рис. 239.

(Следует отметить интересную особенность таблицы *III*: оба столбца, отведенные спортивному клубу «Вашаш», несмотря на неоднозначность информации, можно считать заполненными. Связано это главным образом с тем, что *два последних столбца в таблице III можно переставить*. Действительно, пользуясь условием 2, мы можем без всяких опасений утверждать, что один из членов спортивного клуба «Вашаш» занимается прыжками в высоту, а другой играет в футбол, причем, кто из двух одноклубников остановит свой выбор на футболе и кто отдаст предпочтение прыжкам в высоту, совершенно безразлично. Хотя на рис. 239 связующие кружки в двух последних столбцах таблицы *III* расположены совсем не так, как на рис. 240, *а*, *б* и *в*, тем не менее все четыре варианта означают одно и то же, и в дальнейшем различие между ними лишь несущественно сказывается на ходе решения. Лишь в окончательном ответе, после того как будет получено полное решение, необходимо переставить несколько строк и столбцов.)

С другой стороны, условие 7 нам не удастся изобразить на таблицах. Связано это с тем, что принадлежность к одному и тому же спортивному клубу двух «неизвестных» относится к числу таких сведений, которые не позволяют запечатлеть себя в таблицах. Поэтому в дальнейшем нам придется внимательно следить за тем, когда настанет подходящий момент для того, чтобы использовать условие 7.

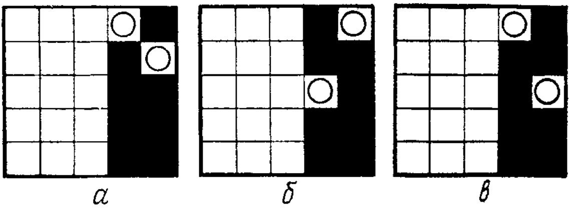


Рис. 240.

В последней строке таблицы *III* осталась лишь одна незаполненная клетка. Следовательно, именно в нее необходимо вписать связующий кружок (извещающий нас о частичном решении «ватерполист — ФТЦ») и произвести сужение информации (рис. 241).

После этого в таблице *III* остаются лишь четыре свободные клетки. Все они расположены во втором и третьем столбцах, а оба

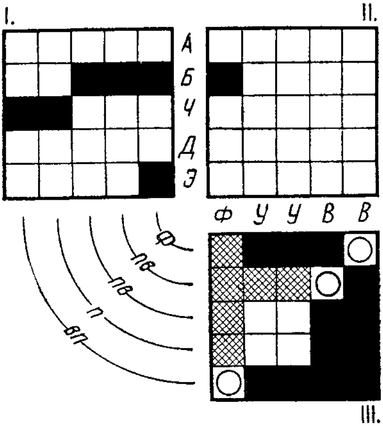


Рис. 241.

эти столбца соответствуют спортивному клубу «Уйпешти Дожа». Следовательно, в эти клетки мы опять можем вписать два связующих кружка (два частичных решения): независимо от того, как они разместятся, один из членов клуба «Уйпешти Дожа» будет заниматься прыжками в высоту, а другой плаванием. Затем мы производим целую серию пересадок (рис. 242), которая порождает по одному частичному решению во второй строке как таблицы *I*, так и таблицы *II*. Вписываем эти частичные решения и производим сужение информации (рис. 243).

Дойдя до этого места в решении задачи, необходимо остановиться и ответить на важный вопрос: можно ли вообще применять к задаче 61 правила, разработанные для решения задач из части III? Ведь эта задача во многом непохожа на своих предшественниц.

Указать различие между задачей 61 и задачами из части III несложно: при заполнении таблицы *III* мы в двух случаях могли в определенных пределах выбирать место для двух частичных решений. Однако каждый раз, производя выбор, мы тем самым вносили различие между столбцами, которые до того были полностью «равноправными». Например, в таблицах *II* и *III* второй и третий столбцы на рис. 242 не просто отведены каким-то двум членам одного

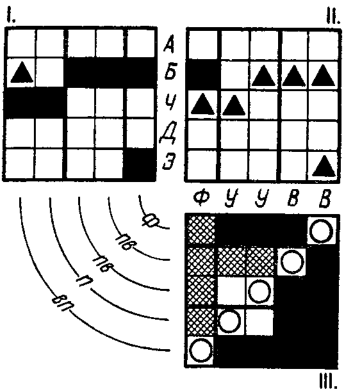


Рис. 242.

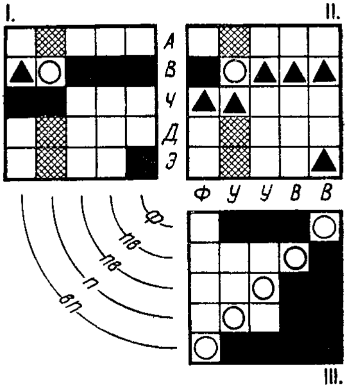


Рис. 243.

и того же спортивного клуба «Уйпешти Дожа». Между ними появилось различие: второй столбец отведен пловцу из «Уйпешти Дожа», а третий — спортсмену из того же общества, который занимается прыжками в высоту. Два последних столбца в таблицах *II* и *III* не просто отданы каким-то двум членам спортивного клуба «Вашаш»: один из спортсменов-одноклубников занимается прыжками в высоту, а другой играет в футбол.

Все это в конечном счете означает, что каждое из трех множеств мы разложили на пять различных (хорошо различимых) элементов, и лишь после этого предприняли попытку установить между множествами взаимно-однозначное соответствие. Ясно, что для этой цели можно использовать любые приемы, которые мы разработали ранее для решения задач из части III.

Но стоит лишь нам выяснить, что *Бела занимается плаванием в «Уйпешти Дожа»* (рис. 243), как решение застопоривается. Нам не остается ничего другого, как вернуться назад и «ввести в бой» условие 7, остававшееся до сих пор в резерве. Без него мы не сможем продвинуться дальше ни на шаг.

О членах какого клуба идет речь в условии 7? Ясно, что не о ФТЦ, поскольку среди пяти спортсменов в ФТЦ состоит лишь один. Не может идти речь в условии 7 и о клубе «Уйпешти Дожа», поскольку один из членов этой организации уже известен и его зовут Бела (рис. 243). *Таким образом, мы лишь теперь получаем возможность перевести условие 7 на язык элементарных запретов.*

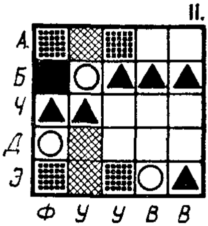


Рис. 244.

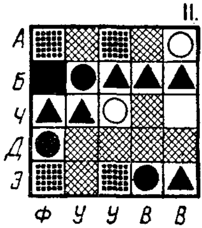


Рис. 245.

Они представлены на рис. 244. Новые элементарные запреты приводят к двум однозначно определенным частичным решениям и позволяют закончить заполнение таблицы *II* (рис. 245), не прибегая к таблицам *I* и *III*, с помощью повторного сужения информации. Затем мы используем правило соответствия и получаем полное

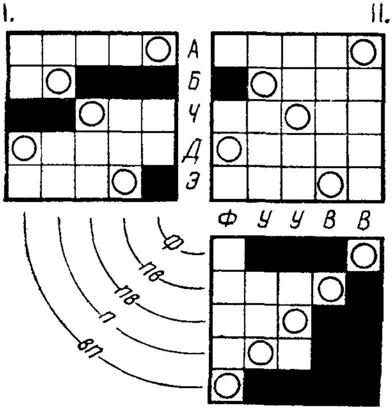


Рис. 246.

решение задачи (рис. 246), которое, разумеется, совпадает с полученным ранее.

Примечание. Рассмотренная нами задача, хотя ее цель и состоит в установлении соответствия между тремя множествами, по своей структуре несколько отличается от задач, которые мы условились называть «трехмерными» логическими задачами (это особенно заметно на примере двух предыдущих решений задачи 61). Во втором решении нам даже удалось воспользоваться методом трех таблиц, хотя сначала мы отнюдь не были уверены в том, что он позволит нам справиться с задачей. Итак, стоит лишь выйти за пределы «трехмерных» (в том смысле, какой мы вкладывали в этот термин в части III) логических задач, как даже применимость методов решений, разработанных для трехмерных задач, оказывается под сомнением. Сформулируем наше утверждение точно.

Мы говорим, что имеем дело *с трехмерной логической задачей в том случае, если*:

а) в условиях задачи говорится о трех множествах с четко различимыми элементами;

б) условий задачи достаточно для того, чтобы между тремя множествами можно было установить взаимно-однозначное соответствие.

Установить взаимно-однозначное соответствие между тремя множествами означает разбить все элементы на тройки так, чтобы в любую тройку входило по одному элементу из каждого множества и каждый элемент был представлен в одной и только в одной тройке.

Все условия задачи должны допускать перевод на язык элементарных соответствий и элементарных запретов.

Если хотя бы одно из перечисленных требований не выполнено, то задача утрачивает право называться трехмерной логической задачей, а целесообразность использования для ее решения метода трех таблиц оказывается под сомнением.

В задаче 61 с самого начала не выполнено требование различимости элементов всех трех множеств (среди спортсменов имеются два футболиста, два прыгуна в высоту, два члена спортивного клуба «Уйпешти Дожа» и два одноклубника из «Вашаша»), а среди условий задачи есть такие, которые не допускают «перевод» на язык элементарных соответствий или запретов (например, требованию переводимости не удовлетворяет условие 7). Использовать эти условия в методе трех таблиц нам удалось лишь после того, как в процессе решения мы получили дополнительную информацию. В начале решения нам приходилось действовать осмотрительно и тщательно взвешивать каждый свой шаг.

А теперь рассмотрим еще одно решение задачи. В нем мы опять используем тот же наглядный метод, который ранее позволил нам решить задачу 1.

III решение. Разумеется, к выводу о том, что *Ференц играет в футбол в команде ФТЦ*, мы и в этом случае приходим из условия 3. Запреты, содержащиеся в остальных условиях задачи, мы наглядно изобразили на рис. 247, соединив линиями те элементы, которые не связаны между собой соответствием. (Пять квадратов означают спортсменов, пять кругов — виды спорта, пять точек — спортивные клубы.)

Представлена на рис. 247 и часть условия 7. Мы успели установить лишь тот клуб, в котором состоит Ференц. Эта информация позволяет нам утверждать, что Андраш и Элмер не могут быть членами спортивного клуба ФТЦ. Однако в дальнейшем не следует забывать о том, что условие 7 использовано не полностью.

Не представлена на рис. 247 и та часть условия 5, в которой говорится о том, что члены клуба «Вашаш» занимаются двумя различными «сухопутными» видами спорта.

Схема получилась довольно сложной, но, взглянув на нее, мы без труда заметим, что от кружка, означающего водное поло, отходят линии, соединяющие его со всеми точками (спортивными клубами), кроме точки, отведенной клубу **ФТЦ**. Таким образом, мы находим однозначно определенное частичное решение: *спортсмен, играющий в водное поло, состоит членом клуба ФТЦ*. Для двух представителей клуба «Вашаш» остались незапрещенными лишь три кружка, означающие три вида спорта. Если мы примем теперь во внимание ранее не отмеченную на схеме часть условия 5, согласно которой два спортсмена из клуба «Вашаш» занимаются различными

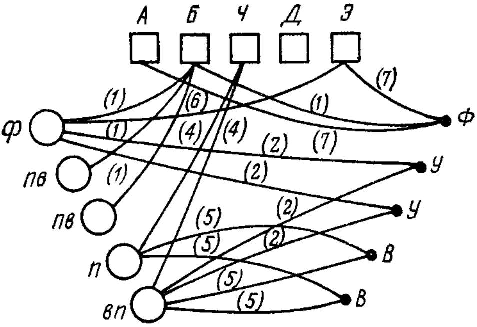


Рис. 247.

«сухопутными» видами спорта, то получим однозначно определенное частичное решение: *один из спортсменов, состоящих членами клуба «Вашаш», играет в футбол, другой занимается прыжками в высоту*.

Полученными результатами можно воспользоваться для того, чтобы преобразовать исходную схему, сделав ее более обозримой. Условимся совмещать на схеме те элементы различных множеств, которые соответствуют друг другу. Поскольку пары «вид спорта — спортивный клуб» могут быть связаны лишь с именами спортсменов (именно эти связи нам и предстоит проверить), то их для большей наглядности можно расположить по одну сторону от квадратов, означающих имена спортсменов, а отдельные кружки и точки — по другую. Линии на схеме, словно нити, связывают элементы, образующие запрещенные комбинации, позволяя тем самым устанавливать допустимые (то есть не противоречащие условиям задачи) соответствия между элементами трех множеств. В то же время на исходной схеме проведено много лишних линий. Их мы по мере продвижения будем отбрасывать.

Лишними, например, являются линии, соединяющие пары *В — п*, *В — вп*, а также пары *У — ф*, *У — вп*, поскольку нам уже известны те спортивные клубы, в которых занимаются футболист, пловец и ватерполист.

Из схемы, приведенной на рис. 248, мы извлекаем три однозначно определенных частичных решения: *пара вп — Ф может соответствовать лишь квадрату Д, а квадрату Б из всех кружков лишь* *кружок п, а из всех точек — лишь точка У* (какая именно из двух точек У — безразлично).

Объединяя элементы, связанные между собой допустимым соответствием, и стирая лишние линии, мы получим схему, изображенную на рис. 249. Если теперь мы еще раз воспользуемся условием 7,

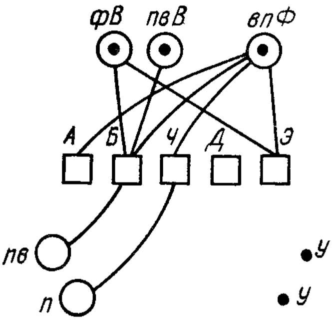


Рис. 248.

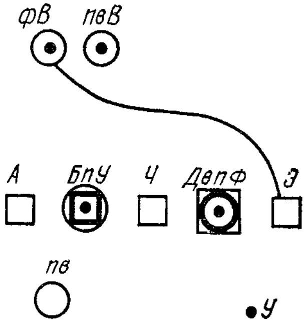


Рис. 249.

то без труда установим, что *Андраш и Элмер могут состоять членами лишь спортивного клуба «Вашаш».*

Следовательно, *Чаба может заниматься лишь прыжками в высоту и состоять членом спортивного клуба «Уйпешти Дожа»* (рис. 250).

Итак, новый способ наглядного представления множеств, как мы только что убедились, действует не столь автоматически, как

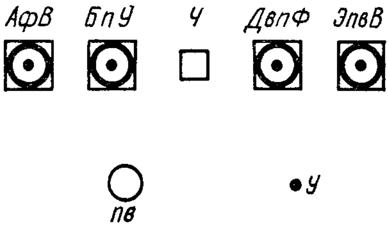


Рис 250.

метод трех таблиц. Тем не менее с ним стоит «подружиться», поскольку и он позволяет решать довольно большой круг задач.

62. КОГДА И ВОПРОС ЗАДАЧИ ПОД ВОПРОСОМ

I решение. По условию 2 один из двух крестьян (либо дядюшка Шандор, либо дядюшка Секель) родом из Палочского района, а другой родом из Хайдушага. Но из условия 3 мы узнаем о том, что, из Хайдушага происходит дядюшка Лайош. Следовательно, об одном из пяти крестьян мы узнали все, что необходимо: *Лайош Секель родом из Хайдушага.*

Отсюда сразу же следует, что *дядюшка Шандор родом из Палочского района.* По условию 4 один из крестьян с фамилиями Палоч и Яс родом из Ясшага, а другой из Куншага. По условию 5 Хайду не может быть родом из Секельфельда. Откуда же он родом? Из условий 4 и 5 следует, что Хайду не может быть родом ни из Ясшага, ни из Куншага, ни из Секельфельда. Из Хайдушага он также не может происходить, поскольку уроженец Хайдушага нам уже известен (Лайош Секель). Следовательно, *Хайду может быть родом лишь из Палочского района.* Так мы получаем исчерпывающие сведения о втором крестьянине: *в Палочском районе родился Шандор Хайду.*

Условие 1 утверждает, что один (и только один из крестьян) родился в той части Венгрии, название которой сходно с его фамилией. О ком может идти речь? Ясно, что не о Хайду и не о Секеле (откуда они родом, мы уже знаем), не о Палоче (по условию 5 Палоч родом либо из Ясшага, либо из Куншага), не о Куне (по условию 4 из Куншага происходят либо Палоч, либо Яс). Итак, остается единственная фамилия: Яс. Следовательно, *Ференц Яс родом из Ясшага.*

Но тогда из условия 4 можно заключить, что *Палоч происходит из Куншага,* а *Кун* может происходить из единственной оставшейся части Венгрии — *из Секельфельда.*

Все наши выводы основаны на той информации, которая содержалась в газетной вырезке. Осталось выяснить лишь один-единственный вопрос: установить имена двух последних крестьян — Палоча и Куна. Кого из них зовут Андрашем и кого — Йожефом? Нетрудно проверить, что обе комбинации имен и фамилий ничему из сказанного ранее не противоречат.

Обратимся теперь ко второй части задачи: к трем различным толкованиям условий 3 и 4, которые предложили ребята.

I. Если принять точку зрения Пишты, то Палоч должен происходить не из Ясшага и не из Хайдушага. Поскольку о Палоче известно, что он родом из Куншага, то толкование условий задачи, предложенное Пиштой, не дает ничего нового. Следовательно, *обнаруженная нами неоднозначность решения сохраняется и в этом случае.*

I. По мнению Юлишки, Куна зовут не Андрашем и не Йожефом. Поскольку все остальные имена уже «разобраны», *то при таком толковании условий 3 и 4 установить имя Куна невозможно.*

III. Из замечания Карчи следует, что уроженца Секельфельда (то есть Куна) зовут не Андраш. Следовательно, остается единственная возможность: *Йожеф Кун родом из Секельфельда, а Андраш Палоч — из Куншага.*

Итак,

при первом толковании условий 3 и 4 задача допускает два решения (решение неоднозначно);

при втором толковании условий 3 и 4 задача не имеет решения (условия задачи противоречивы);

при третьем толковании условий 3 и 4 решение задачи существует и единственно (задача допускает однозначное решение).

Итак, *толкование условий 3 и 4, предложенное Карчи, следует признать лучшим.*

Примечание. Разумеется, вторая часть задачи (та, в которой спрашивается, кто из ребят предложил лучшее толкование условий 3 и 4 первой части задачи) не обязательно должна быть именно такой, как у нас. Мы могли бы предложить и другие окончания задачи:

1) сделать так, чтобы ни одно из трех толкований не допускало однозначного решения задачи (например, устроить так, чтобы все три толкования допускали по два решения или все три приводили к противоречию; чтобы два толкования приводили к противоречию, а третье допускало два решения и т. д.);

2) наоборот, придумать такие толкования, чтобы два из них или все три допускали единственное решение.

В этом случае при одном толковании задача не допускала бы ни одного решения, а при другом имела бы два или три решения.

Изобразить на таблицах условия задачи 62 не слишком трудно, но зато метод трех таблиц позволит нам искать решение с большей уверенностью. Посмотрим, как выглядит «трехтабличное» решение этой задачи.

II решение. Условия задачи изображены на рис. 251. (Строки в двух верхних таблицах соответствуют фамилиям крестьян, столбцы в двух правых таблицах отведены их именам, а строки нижней

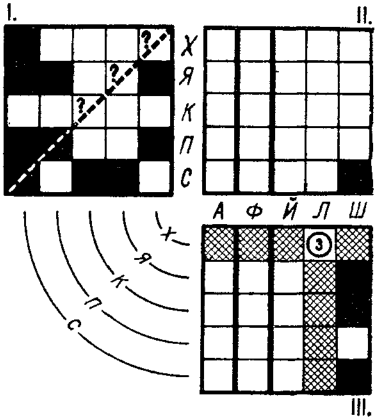


Рис. 251.

таблицы и столбцы левой таблицы, соединенные дугами окружностей, — названиям тех частей Венгрии, откуда происходят пять крестьян: *х* — «хайдуцкие», *п* — «палочские» и т. д.)

Однако записать в таблицы условие 1 нам не удастся. Из него следует лишь, что в таблице *I* связующий кружок (частичное решение) может занять лишь одну клетку на диагонали, показанной пунктиром, но остальные четыре клетки не могут «предоставить убежище» частным решениям. Кроме того, условие 1 сообщает нам, что у частичного решения, стоящего на диагонали таблицы *I*, непременно найдутся два «товарища»: один в столбце *Ф* таблицы *II*, другой — в столбце *Ф* таблицы *III*.

Таким образом, в условии 1 по существу идет речь о своеобразном «сужении информации»: мы должны следить не только за тем, чтобы в каждую строку и в каждый столбец было вписано лишь

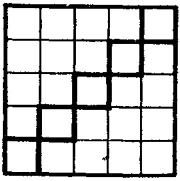


Рис. 252.

одно частичное решение, но и за тем, чтобы в клетках, расположенных по диагонали в таблице *I* (рис. 252), нашлось место лишь для одного связующего кружка.

Учитывая это условие, мы получаем по одному частичному решению в таблицах *I* и *III*. Обозначим их кружками и произведем сужение информации (рис. 253).

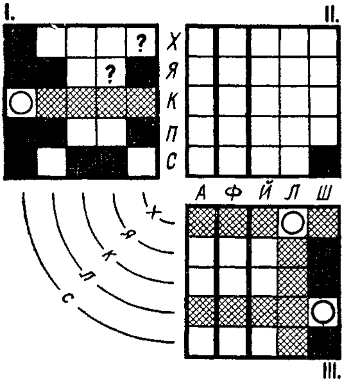


Рис. 253.

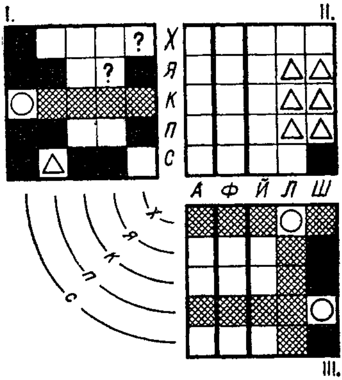


Рис. 254.

Получить новые частичные решения при этом нам не удается. Однако пересадка запретов (рис. 254) порождает в таблице *I* одно, а в таблице *II* два частичных решения (рис. 254). Впишем в эти таблицы связующие кружки и произведем сужение информации (рис. 255).

Поскольку в таблице *I* на диагонали, выделенной условием 1, осталась лишь одна клетка с вопросительным знаком, в которую можно вписать связующий кружок, то мы тем самым получаем еще одно частичное решение, после чего таблица *I* приобретает законченный вид. Нетрудно видеть, что частичные решения в таблицах *II* и *III*, соответствующие «диагональному» решению в таблице *I*, действительно находятся в столбцах *Ф* (рис. 256).

Однако в таблицах *II* и *III* осталось еще по четыре свободные клетки, а заполнить их однозначно определенными частичными решениями мы не можем. Происходит это потому, что информация, использованная нами до сих пор, оказалась недостаточной.

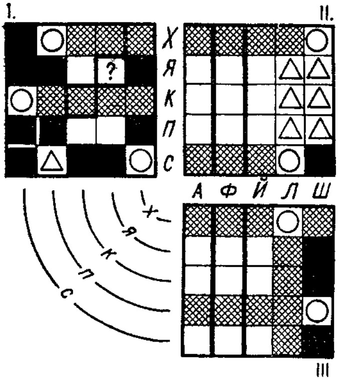


Рис. 255.

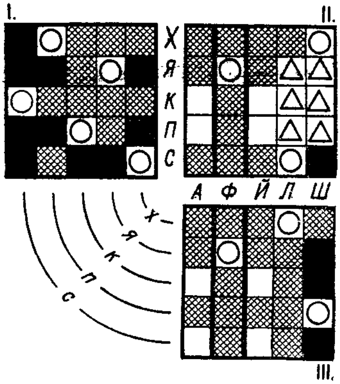


Рис. 256.

Обратимся теперь ко второй части задачи: к трем различным толкованиям ее условий 3 и 4, которые обозначены римскими цифрами.

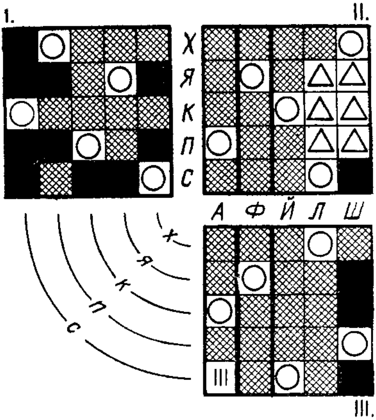


Рис. 257.

Из 1-й версии условий 3 и 4 мы узнаем, что Палоч не может быть родом ни из Ясшага, ни из Хайдушага. Это утверждение не несет в себе новой информации. Действительно, те же сведения мы получим, взглянув на клетки, стоящие на пересечении четвертой строки с двумя последними столбцами в таблице *I* (рис. 256)

По второму толкованию условий 3 и 4 Кун не может быть ни Андрашем, ни Йожефом. Но из пяти имен, названных в условии задачи, для Куна не останется ни одного: ведь в таблице *II* все клетки, стоящие в третьей строке, оказались под запретом.

Третья версия условий 3 и 4 исключает клетку, стоящую в левом нижнем углу таблицы *III* (рис. 257). Единственная оставшаяся свободной клетка в таблице *III* расположена в том же столбце, но выше. В нее мы могли бы вписать последнее однозначно определенное решение, пользуясь правилом соответствия.

Как рис. 256, так и рис. 257 приводят к одному и тому же ответу, совпадающему с ответом, полученным в I решении. (Римская цифра *III* в клетке означает номер той версии, которая послужила источником информации.)

> Примечание. В приведенном выше решении часть информации, содержавшейся в условии 1, так и осталась неиспользованной. Действительно, условие 1 утверждает, что если у кого-нибудь из крестьян фамилия не похожа на название того края, откуда он родом, то это заведомо не дядюшка Фери. Следовательно, если мы наложим запрет на какую-нибудь клетку, стоящую на диагонали в таблице *I* (рис. 251), то клетки, стоящие в таблицах *II* и *III* на пересечении второго столбца со строками, номера которых совпадают с номером строки «запрещенной» клетки, также окажутся под запретом. Если принять во внимание это условие, то на рис. 251—255 запретов будет гораздо больше. Тем не менее даже увеличенный комплект запретов не позволяет ускорить решение.

III решение. На этот раз мы воспользуемся «ниточным» методом, успешно примененным нами для решения предыдущей задачи. Обозначим фамилии квадратами, имена кружками, а названия тех краев, откуда происходят старики, точками.

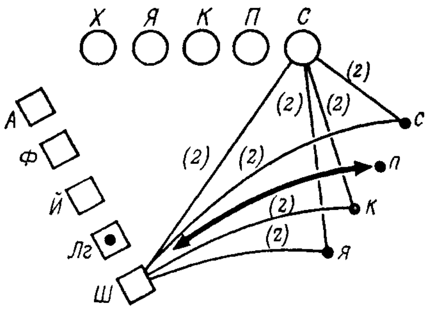


Рис. 258.

Что делать с условием 1, пока неизвестно, поэтому мы отложим его в сторону. Зато условие 2 порождает множество запретов. Они изображены на рис. 258 тонкими линиями («ниточками»). При вычерчивании схемы мы сразу же учли вытекающее из условия 3 соответствие *Л* ←→ *х* (*Лайош родом из Хайдушага*) и поместили точку *х* в квадрат *Л*.

Из рис. 258 ясно видно, что *Шандор может быть родом только из Палоча*, поэтому мы помещаем точку *п* в квадрат *Ш*. Тем самым все остальные «нити», связывающие квадрат *III* с другими точками, становятся лишними, и их можно просто оборвать.

В результате наша схема становится такой, как показано на рис. 259. Нетрудно видеть, что *Секель может быть родом лишь из*

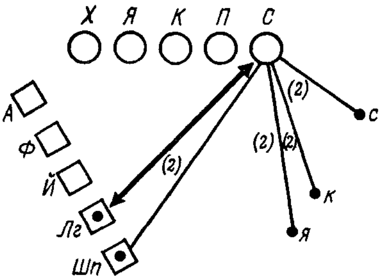


Рис. 259.

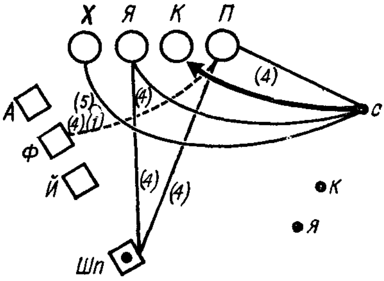


Рис. 260.

Хайдушага. Итак, мы установили соответствие *Лайош Секель родом из Хайдушага*, пользуясь лишь графическим методом «нитей» (то есть соединяя линиями те элементы, которые не могут соответствовать друг другу).

Изобразим теперь на схеме запреты, налагаемые условиями 4 и 5 (рис. 260). Нетрудно видеть, что они порождают однозначно определенное частичное решение, означающее: «*Кун родом из Секельфельда*».

Преобразуя схему (ее новый вид показан на рис. 261), находим, что *Шандор Хайду родом из Палочского района.*

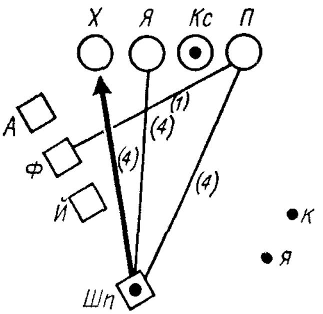


Рис. 261.

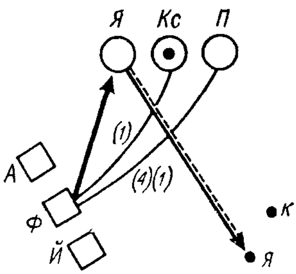


Рис. 262.

Все три входящих в него элемента и тянущиеся к ним и от них «нити» из дальнейшего рассмотрения можно исключить, что значительно упрощает схему. Настает время, когда нам необходимо обратиться к условию 1. Из этого условия неопровержимо следует, что имя Куна (который, как известно, родом из Секельфельда) не Ференц. Немного поразмыслив, можно понять, что условия 1 и 4, если их рассматривать не порознь, а вместе, позволяют исключить соответствие «имя Палоча Ференц».

Строго говоря, исключить Палоча из числа претендентов на имя Ференц мы могли и раньше, когда рассматривали схему, изображенную на рис. 260, но тогда такой запрет не вызывался необходимостью и смысл его тогда оставался неясным. Теперь же, когда без этого запрета нельзя продвигаться дальше, мы вынуждены разобраться в том, что он означает.

Новое однозначно определенное частичное решение устанавливает соответствие «имя Яса — Ференц» и вместе с условием 1 порождает полную тройку: *Ференц Яс родом из Ясшага* (рис. 262). Таким образом, *родом из Куншага может быть лишь Палоч.*

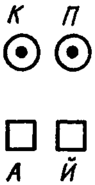


Рис. 263.

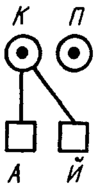


Рис. 264.

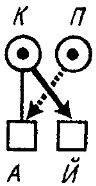


Рис. 265.

На этом вся информация, содержавшаяся в газетной вырезке, исчерпывается. На рис. 263 показана альтернатива, которая остается неразрешенной. Запреты, к которым приводят I, II и III толкования условий 3 и 4 задачи, представлены на рис. 263—265. Хорошо видно, что в третьем случае решение однозначно.

В предыдущем решении мы не стремились извлекать из условий задачи сразу все возможные следствия, а лишь постепенно отбирали ту информацию, которая позволяла продвигаться к цели. Такой способ непрерывного введения информации используется довольно часто. Он требует меньше предварительной работы и прост в обращении.

63. ЕЩЕ ОДИН ВОПРОС К ЗАДАЧЕ, В КОТОРОЙ И САМ ВОПРОС ПОД ВОПРОСОМ

В задаче 62 спрашивалось: «Чье толкование условий 3 и 4 лучше: Пишты, Юлишки или Карчи?» В другом месте в условии задачи утверждалось следующее: «...Задачу можно решить и без дополнительных условий! Нужно лишь правильно истолковать то, что уже известно!» В задаче рассказывалось о том, как трое ребят захотели решить логическую задачу, вычитанную ими из газеты, и пытались найти однозначное решение. Условие 4 было сформулировано несколько расплывчато и относительно того, как следует его понимать, возникли разногласия. О том, какому толкованию условия 4 отдали предпочтение ребята, ничего не говорится ни в условиях задачи 62, ни в условиях задачи 63. Впрочем, для решения задачи это несущественно. Ведь в конце концов от нас требовалось лишь определить, чье толкование условий 3 и 4 позволяет довести до конца решение задачи.

Как мы убедились, задача 62 допускает однозначное решение лишь в том случае, если мы примем трактовку условия 4, предложенную Карчи. Посмотрим теперь, что произойдет, если мы придадим условию 4 другой смысл.

Разумеется, первое решение задачи 62 будет теперь представлять для нас интерес лишь до тех пор, пока мы не введем в действие условие 4, то есть до конца первой части условий задачи. Следовательно, вывод о том, что *Лайош Секель родом из Хайдушага, а дядюшка Шандор — из Палочского района*, остается в силе.

Условие 4 на этот раз утверждает, что Яс и Палоч родом *не из* Ясшага и *не из* Куншага. Следовательно, Яс и Палоч могут быть родом либо из Палочского района, либо из Секельфельда.

Это одновременно означает, что условие 5 при новом понимании условия 4 становится лишним, поскольку нам уже известно, что Хайду родом не из Секельфельда.

Но Палоч не может быть родом из Палочского района, поскольку по условию 1 лишь фамилия дядюшки Фери созвучна названию его родного края и, кроме того, уже известно, что уроженца Палоча зовут Шандор. Следовательно, Яс родом из Палочского района: *Шандор Яс — уроженец Палоча, а Палоч родом из Секельфельда.*

Остались двое: Хайду и Кун. Один из них родом из Ясшага, другой — из Куншага. Поскольку по условию 1 фамилия одного из них должна быть «созвучна» названию той части Венгрии, откуда он происходит, причем известно его имя — Ференц, то *Ференц Кун — уроженец Куншага, а Хайду родом из Ясшага.*

Все это мы выяснили, опираясь на те сведения, которые содержались в газетной вырезке, и интерпретируя условие 4 так же, как его интерпретировали читатели журнала «Жизнь и наука». Вопрос о том, кто из двух — Хайду или Палоч — Андраш и кто Йожеф, остался без ответа. (Нетрудно проверить, что обе возможные комбинации имен и фамилий в равной мере удовлетворяют всем условиям задачи.) Рассмотрим три варианта недостающей части условий:

I. Палоч родом не из Ясшага и не из Хайдушага. Это предположение не дает ничего нового, поскольку из предыдущих рассуждений известно, что Палоч родом из Секельфельда. Таким образом, в этом случае *задача* по-прежнему *допускает два решения.*

II. Имя Куна не Андраш и не Йожеф. И это известно: Куна зовут Ференцем. Следовательно, и при втором предположении *задача допускает два решения.*

III. Имя уроженца Секельфельда (то есть Палоча) не Андраш. В этом случае задача допускает единственное решение: *Йожеф Палоч родом из Секельфельда, поэтому Андраш Хайду родом из Ясшага.*

Итак, *I и II варианты недостающей части условий задачи не ликвидируют неоднозначность: задача в обоих случаях допускает по два решения;*

III вариант недостающей части условий задачи приводит к единственному решению.

Таким образом, *вариант недостающей части условий, предложенный Карчи, обладает преимуществом перед другими вариантами.*

Как бы ни формулировалась недостающая часть условий задачи в газете, откуда была сделана вырезка, Карчи, во всяком случае, предложил такое толкование условий, которое приводило к единственному решению задачи.

Следовательно, с точки зрения ответа оба варианта задачи 62 эквивалентны: окончательный ответ не зависит от того, в каком смысле мы будем понимать условие 4.

64. В ПОЕЗДЕ

Из вступительной части задачи, а также из условий 5, 6 и 10 известно, что среди шести пассажиров имеются земледелец (хлебороб), учитель, кузнец, столяр, портной и литейщик. Таким образом, в купе собрались представители шести различных профессий, причем лишь тех, которые мы только что перечислили. Следовательно, среди пассажиров, собравшихся в одном купе, было по одному представителю каждой из шести профессий: один хлебороб, один учитель, один кузнец, один столяр, один портной и один литейщик.

Отсюда следует, что у каждого пассажира могла быть лишь одна профессия. Если наглядно представить себе профессии в виде коробок, то можно сказать, что каждый пассажир находится в одной из коробок. Поскольку на шесть пассажиров приходится шесть коробок, то пассажиры размещаются по коробкам так, что в каждой коробке оказывается кто-то из пассажиров. В противном случае либо одна из коробок осталась бы пустой, либо пассажиров было бы больше шести. Итак, в каждой коробке находится один и только один пассажир, то есть у каждого пассажира имеется одна профессия, и каждая профессия представлена одним пассажиром.

Условимся теперь называть пассажиров «предметами». Тогда так называемый *принцип коробки* проще всего сформулировать следующим образом:

если n предметов необходимо разложить по n коробкам так, чтобы в каждой коробке оказался какой-то предмет, то во всех коробках после раскладки окажется ровно по одному предмету.

Тот же принцип можно сформулировать несколько иначе:

если n предметов необходимо разложить по n коробкам так, чтобы ни в одной из коробок не оказалось более одного предмета, то сделать это можно лишь так, что в каждой коробке окажется ровно один предмет.

Итак, судя по тому, что мы знаем о пассажирах и их профессиях, задача сводится к установлению соответствия между элементами трех множеств: пассажирами, их профессиями и названиями тех мест, откуда пассажиры родом. Таких мест пять: *Баранья, Хайду, Чонград, Шомодь и Ваш.* Поскольку в условиях задачи говорится лишь об этих пяти комитатах, то среди пассажиров имеются по крайней мере два земляка (люди, родившиеся в одном и том же комитате).

Число пар земляков не может быть больше одной, ибо в противном случае число комитатов, в которых родились пассажиры, было бы меньше пяти. Итак, среди пассажиров имеются ровно два земляка. (Кто именно, пока неизвестно.) Для того, чтобы мы могли установить соответствие между пассажирами и теми краями, откуда они родом, пять известных комитатов необходимо пополнить еще одним неизвестным (мы обозначим его Z). О нем мы знаем лишь то, что это один из пяти перечисленных выше комитатов.

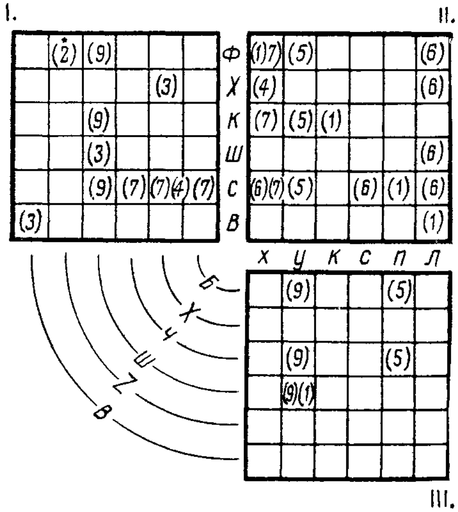


Рис. 266.

Элементарные запреты, содержащиеся в условиях задачи, впишем в три таблицы так, как мы делали в главе III (рис. 266).

Из условия 2 и только что выясненной роли «дополнительного» комитата Z ясно, что Фельди не может быть родом из Z. В таблице I (рис. 266) этот вывод обозначен 2*. Выводы, полученные в ходе рассуждений, мы и в дальнейшем будем заносить в таблицу в виде элементарных запретов.

В таблице II однозначно определенное частичное решение видно «невооруженным глазом». (!) Заметим, что частичное решение можно получить и в таблице III. Из элементарных запретов в предпоследней строке таблицы III и особой роли комитата Z, о которой уже говорилось выше, следует, что *родиной Сабо может быть лишь комитат Ваш.* Впишем связующий кружок в клетку «Сабо — Ваш». Если впоследствии выяснится, что под «псевдонимом» Z скрывался комитат Ваш, то необходимо не упустить из виду, что один уроженец Ваша у нас уже имеется.

Пользуясь правилом соответствия, преобразуем таблицы к виду, изображенному на рис. 267.

(!) Рассуждения, полностью аналогичные только что приведенным, применимы и к столбцу $у$ таблицы III. Учитель может быть родом только из комитата Хайду. Следовательно, даже если окажется, что Z означает комитат Хайду, то это уже не будет иметь отношения к учителю: связующий кружок, соответствующий частичному решению «учитель — комитат Хайду», должен быть вписан в таблицу *III* так, как показано на рис. 268.

(!) Таблица *III* позволяет получить еще одно частичное решение. *Портной может быть родом лишь из комитата Шомодь.* Из условия 9 следует, что в комитате Шомодь живет лишь один из пассажиров, поскольку учитель не может жить в двух комитатах одновременно, а комитат, в котором он сейчас живет, уже известен:

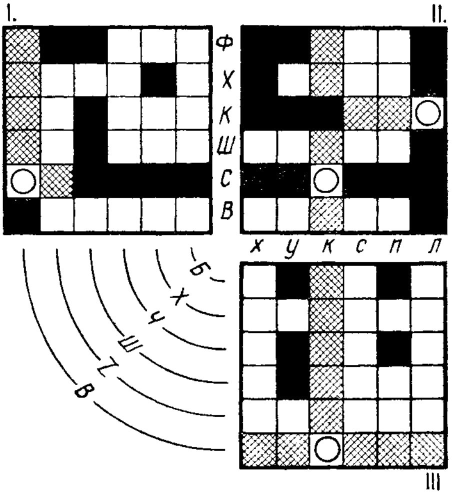


Рис. 267.

это Хайду. Таким образом, *неизвестный комитат Z заведомо не может быть комитатом Шомодь.*

(!) Из условия 9 заключаем, что фамилия портного Хайду.

После сужения информации выясняется, что *Фельди по профессии столяр*, и, пользуясь правилом соответствия, мы приводим таблицы к виду, изображенному на рис. 269. На таблице *I* показаны и два пересаженных запрета.

Механическое заполнение таблицы исчерпало свои возможности и не позволяет продвинуться ни на шаг дальше. Раньше мы в таких случаях обращались к условиям, которые полностью или частично не удавалось внести в таблицу. В данной задаче можно поступить аналогично и обратиться к одному из таких условий: условию 5.

Поскольку известно, что портной родом из *Шомоди*, то из условия 5 следует очередное частичное решение: *фамилия учителя Шомоди.*

Соответственно *хлебороб может быть родом лишь из комитата Ваш.*

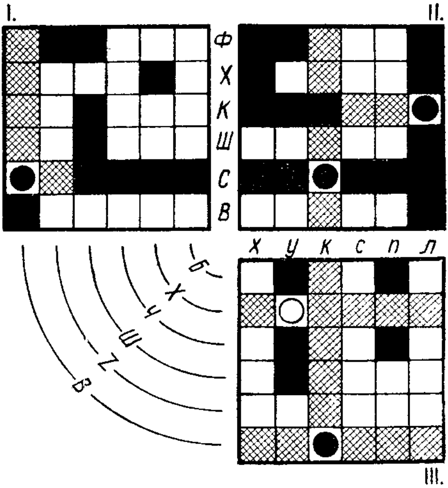


Рис. 268.

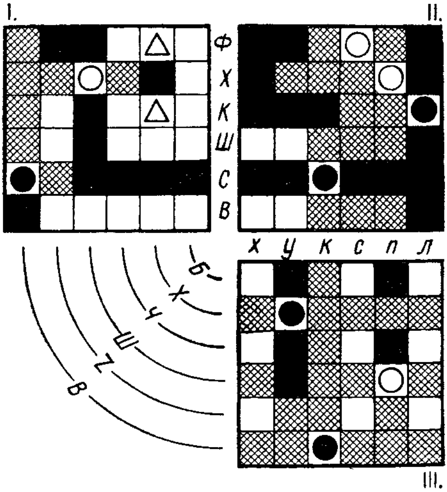


Рис. 269.

После этого в таблице *II* не остается ни одной свободной клетки: выяснена профессия всех без исключения пассажиров (иначе говоря, установлены все не противоречащие условиям задачи парные соответствия типа «фамилия пассажира — название профессии»). Пользуясь правилом соответствия, заполняем клетки таблицы *I* (рис. 270).

Условия 5—7, 9 уже полностью исчерпаны, остались лишь условия 2 и 8. Обратимся к условию 8 и продолжим решение задачи.

Ранее мы выяснили, что Шомодьи живет в комитате Хайду. Из условия 8 следует, что Ковач и Фельди не могут жить по разные

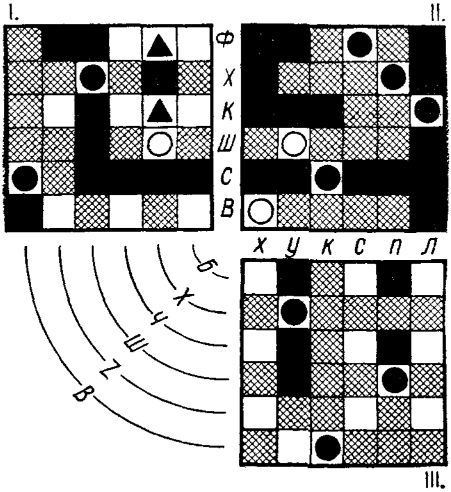


Рис. 270.

стороны Дуная: следовательно, оба могут жить лишь в комитатах Хайду и Чонград. Отсюда ясно, что *неизвестным комитатом Z может быть Чонград или Хайду.*

Получаем два запрета: ни Фельди, ни Ковач не живут в комитате Баранья (в таблице *I* на рис. 271 этот вывод отмечен цифрой 8*), после чего находим в таблице *I* два новых частичных решения.

Затем мы производим сужение информации в таблице *I* и, используя таблицы *I* и *II*, заполняем по правилу соответствия клетки в таблице *III*.

Ясно, что последний шаг необходим лишь для проверки того, согласуются ли полученные результаты с запретами, нанесенными на таблицу *III*. Для удобства на рис. 272 в таблице *III* отмечены только исходные элементарные запреты, заимствованные непосредственно из условий задачи. Непротиворечивость решения, представленного на таблице *II* (рис. 270), уже проверена, поэтому на следующих рисунках приведены лишь входящие в него частичные решения.

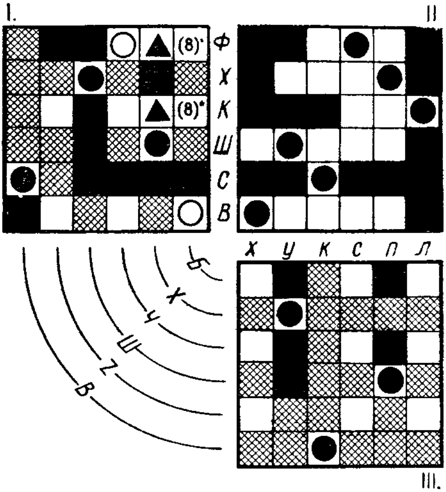


Рис. 271.

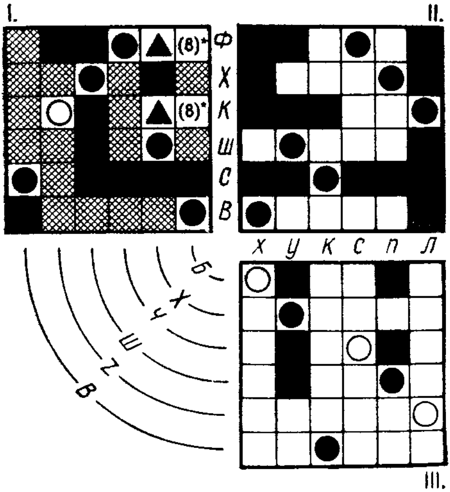


Рис. 272.

Поскольку Фельди живет в Чонграде, то из условия 2 следует, что *неизвестным комитатом Z может быть лишь комитат Хайду.*

Итак, полное решение задачи имеет следующий вид:

Фельди — столяр — комитат Чонград,
Хайду — портной — комитат Шомодь,
Ковач — литейщик — комитат Хайду,
Шомодьи — учитель — комитат Хайду,
Сабо — кузнец — комитат Ваш,
Ваш — хлебороб — комитат Баранья.

Примечание. Приведенное решение, хотя в нем использован привычный метод трех таблиц, по существу было не автоматическим, а «ручным»: его можно было бы получить и без таблиц с помощью одних лишь рассуждений. Отдельные этапы логического вывода отмечены восклицательными знаками (!), а полученные с их помощью запреты — цифрой со звездочкой.

65. ВОСЕМЬ ШКОЛЬНИКОВ

Перед нами логическая задача на установление соответствия между множествами, но только множеств не два и не три, как раньше, а *четыре* (имена, классы, оценки по математике, номера районов): мы столкнулись с четырехмерной логической задачей. Решать ее методом трех таблиц не имеет смысла: нам понадобились бы четыре попарно соответствующие друг другу таблицы.

Ее условия обладают еще одной особенностью. Они не являются элементарными запретами, и их нельзя (точнее говоря, нецелесообразно) свести к набору элементарных запретов. Следовательно, для решения этой задачи нам необходимо избрать совсем иной метод, чем для решения задач из части III.

Указать метод, пригодный для решения задачи 65, нетрудно. Среди ее условий много таких, в которых говорится лишь о том, в какой класс ходят те или иные школьники, или о том, какие оценки они получают. Поэтому можно надеяться, что нам удастся выяснить в отдельности, в какой класс ходит каждый из восьми школьников, какую оценку он получил за контрольную по математике и в каком районе Будапешта он живет.

Пытаясь найти ответы на эти три группы вопросов, мы без труда обнаружим несколько таких условий, в которых за хитроумной формулировкой скрыты простые факты.

В частности, из условий 1 и 2 следует (поскольку в гимназии всего 4 класса), что среди школьников имеются четыре мальчика и четыре девочки. В предыдущей задаче мы уже познакомились с «принципом коробки». Применительно к этой задаче он позволяет утверждать, что

А) *в каждом из классов от I до IV учатся по одному мальчику и по одной девочке* (из числа тех, чьи имена названы в задаче).

Условия 3—5 позволяют выяснить, какие оценки ребята получили за контрольную по математике:

по условию 3 ребята получили двойки, тройки, четверки и пятерки;

по условию 5 среди всех оценок, полученных ребятами, одинаковые оценки могут встречаться не более чем парами. Итак, мы имеем четыре различные оценки, каждая из которых может повторяться не более двух раз. Следовательно, всего школьники могут получить не более 8 оценок. Поскольку школьников тоже восемь, то каждая оценка должна повторяться дважды. Таким образом, среди оценок, полученных ребятами за контрольную по математике, имеются *две двойки, две тройки, две четверки и две пятерки.*

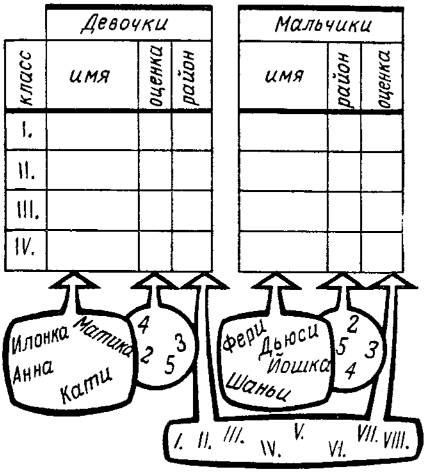


Рис 273.

(В этом рассуждении мы также использовали принцип коробки.)

По условию 4 сумма оценок, полученных мальчиками, равна сумме оценок, полученных девочками. Это означает, что

В) *каждую оценку от двойки до пятерки получили один мальчик и одна девочка.*

По условию 12 школьники живут лишь в I—VIII районах Будапешта. Поскольку имеется 8 школьников и 8 районов, причем (см. условие 11) все школьники живут в различных районах, мы снова применим принцип коробки и обнаружим, что

С) *в каждом из восьми районов живет один из школьников, и каждый школьник живет в одном из восьми районов.*

Поскольку утверждения А, В, С содержат всю информацию, которая ранее входила в условия 1—5 и 11—12, в дальнейшем мы можем заменить семь первоначальных условий тремя эквивалентными им утверждениями. В результате сократится число условий задачи: их станет не 16, а 12. Назовем их: А, В, С, 6—10, 13—16.

Утверждения А, В и С позволяют представить весь имеющийся в нашем распоряжении «материал» для размышлений в легко обозримом виде (рис. 273).

Теперь, после того как мы преобразовали задачу, извлекать простые факты, скрытые в оставшихся условиях за хитроумными формулировками, стало проще.

Например, оценки, о которых говорится в условии 9, могут быть не выше 5 и не ниже 2 (все оценки, которые могли получить школьники за контрольную по математике, перечислены в утверждении В). Следовательно, разность между любыми двумя оценками не может превышать 3. Итак, имеет смысл говорить лишь о пятерках и двойках, поскольку только при этих оценках разность достигает своего наибольшего значения. Таким образом, условие 9 по существу означает, что *Анна и Дьюси получили по пятерке, а Марика и Шаньи — по двойке.*

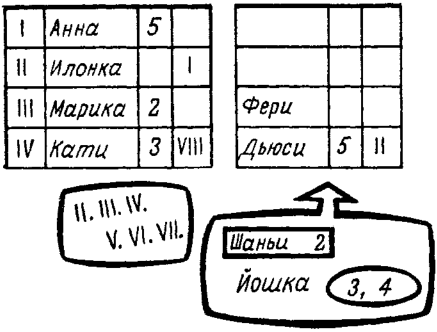


Рис. 274.

Аналогично по условию 14 *Дьюси может жить лишь в IV районе, по условию 15 Кати может жить лишь в VIII, а Илонка — в I районе.*

Итак, вся информация, содержавшаяся в условиях 9 и 15, исчерпана.

Необычайно много сведений нам сообщает условие 10. Из него следует, что Илонка на год, а Марика на два года старше Анны. Следовательно, самая старшая из девочек Марика учится либо в III, либо в IV классе.

Поскольку ученик IV класса Дьюси получил за контрольную по математике пятерку, то по условию 7 девочка, которая учится в IV классе, получила за контрольную тройку. Следовательно, Марика не может быть ученицей IV класса. Отсюда мы заключаем, что *Марика и* (см. условие 6) *Фери учатся в III классе, Илонка — во II и Анна в I классе.* В свою очередь это позволяет утверждать, что единственная оставшаяся девочка *Кати учится в IV классе и получила за контрольную по математике тройку.*

Условие 10 использовано теперь «без остатка».

Впишем полученные результаты в таблицы, изображенные на рис. 273, после чего те примут такой вид, как показано на рис. 274.

Из условия 6 и ранее полученных результатов выясняется, что *Фери за контрольную по математике получил тройку*, а из условия 7 и ранее полученных результатов — что *Дьюси живет во II районе Будапешта.*

На этом оказываются исчерпанными условия 6 и 7.

Заглянув в графу оценок, полученных девочками за контрольную по математике, мы увидим, что *Илонка могла получить лишь* последнюю оставшуюся оценку — *четверку.* Следовательно, по условию 8 *четверку должен получить и тот мальчик, который учится во II классе.* Из предыдущего следует, что *второклассником может быть лишь Йошка.*

Значит, *Шаньи учится в I классе.*

Итак, условие 8 исчерпано.

Все оценки, которые ребята получили за контрольную по математике, теперь известны (рис. 275). Следовательно, нам осталось выяснить лишь номера районов, в которых живут Анна, Марика и мальчики. Для этого у нас имеются условия 13, 14 и 16.

I	Анна	5	
II	Илонка	4	I
III	Марика	2	
IV	Кати	3	VIII

Шаньи	2	
Йошка	4	
Фери	3	
Дьюси	5	

III. IV. V.
VI. VII.

Рис. 275.

Из таблицы с оценками, приведенной на рис. 275, и условия 14 мы заключаем, что *в VI районе должна жить Анна.* Тогда девочкой, о которой говорится в условии 13, может быть *лишь Марика.* Она *живет в V районе.* Следовательно, *Фери живет в VII районе.* Затем из условия 16 мы узнаем, что *Йошка живет в III районе*, а Шаньи — в последнем «оставшемся» районе — в IV.

Полное решение задачи представлено в двух следующих таблицах:

I	*Анна*	5	*VI*
II	*Илончка*	4	*I*
III	*Марика*	2	*V*
IV	*Кати*	3	*VIII*

Шаньи	2	*IV*
Йошка	4	*III*
Фери	3	*VII*
Дьюси	5	*II*

66. ПРОГНОЗ СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

I решение.

По условию 1 места между участниками заплыва могли распределиться следующим образом:

$A: 4—7$; $\quad E: 1, 2$;
$B: 5—7$; $\quad F: 1—3$,
$C: 6, 7$; $\quad G: 1—4$.
$D: 1, 7$;

Разумнее всего начать с одного из спортсменов, имеющих наименьшее число «возможностей», например с D или E.

Итак, спортсмен D мог занять место 7 или 1.

Однако если бы D занял место 7, то C мог бы занять лишь место 6, B — лишь 5 и A — лишь место 4. Таким образом, все места с 4-го по 7-е распределились бы так:

место 4 занял A, место 5 — B, место 6 — C и место 7 — D.

При этом все четыре участника заплыва от A до D оказались сдвинутыми назад по сравнению с тем распределением мест, которое предсказывал знаток спорта, что противоречит условию 2. Следовательно, D занял не 7-е, а 1-е место. Рассуждая так же, как

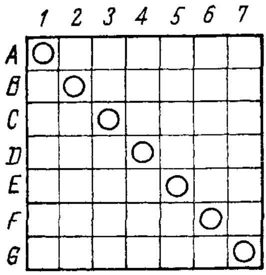


Рис. 276.

и в первом случае, придем к выводу, что места между участниками заплыва распределились следующим образом:

место 1 занял D, место 2 — E, место 3 — F и место 4 — G (I).

Итак, судьбу четырех первых мест удалось установить однозначно. Однако при попытке выяснить, каким образом распределились три последних места между спортсменами A, B и C, мы придем к четырем различным ответам:

(I) место 5 занял A, 6 — C, 7 — B;
(II) место 5 занял B, 6 — C, 7 — A;
(III) место 5 занял A, 6 — B, 7 — C;
(IV) место 5 занял B, 6 — A, 7 — C.

Любой из четырех вариантов распределения трех последних мест может служить продолжением единственного варианта (I) распределения четырех первых мест, при этом все четыре результата полностью согласуются с условиями 1 и 2. Следовательно, *эти условия недостаточны для того, чтобы, пользуясь ими, можно было однозначно ответить на вопрос о том, как распределились места между участниками заплыва.*

II решение. Задача по существу сводится к установлению взаимно-однозначного соответствия между пловцами и занятыми ими местами, то есть принадлежит к числу двумерных логических задач. Было бы естественно поэтому попытаться решить задачу с помощью таблицы.

«Прогноз» болельщика показан на рис. 276. Исходя из этой таблицы, нетрудно наглядно изобразить те поправки, которые по

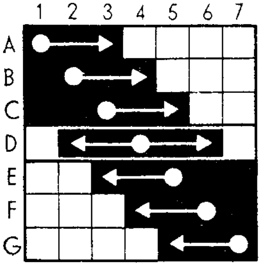


Рис. 277.

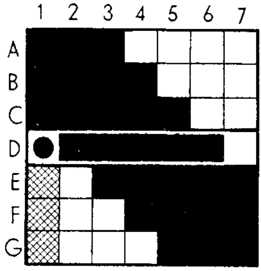


Рис. 278.

условию 1 необходимо ввести в «прогноз» для того, чтобы он соответствовал действительности. Запреты, содержащиеся в условии 1, показаны на рис. 277. Из этого рисунка видно, что спортсменов *A*, *B*, *C* необходимо сдвинуть назад, спортсменов *E*, *F*, *G* — вперед,

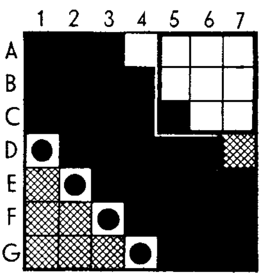


Рис. 279.

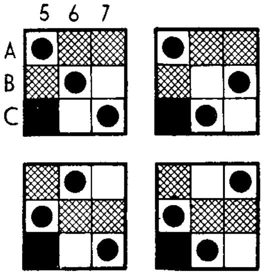


Рис. 280.

а спортсмена *D* можно сдвигать и вперед, и назад. Поскольку трех пловцов (*A*, *B*, *C*) нам заведомо необходимо сдвинуть назад, то условие 2 нам удастся соблюсти лишь в том случае, если мы сдвинем четырех других спортсменов вперед. Следовательно,

пловца D нам необходимо сдвинуть вперед (∗).

Взглянув на рис. 277, мы видим, что этот вывод позволяет найти однозначно определенное частичное решение: указать место, занятое пловцом *D* (рис. 278). Производимое затем сужение информации (оно показано на рис. 278) порождает еще три однозначно определенных частичных решения (рис. 279).

После этого нам не остается ничего другого, как приступить к заполнению квадрата 3×3, стоящего в правом верхнем углу таблицы (на рис. 279 этот квадрат обведен жирной линией). Заполнить его можно не одним, а четырьмя различными способами, полностью удовлетворяющими условиям задачи (рис. 280).

Примечание 1. Нетрудно заметить, что задача, изображенная в виде таблицы на рис. 279, допускает разложение на две независимые «подзадачи»: одна подзадача соответствует квадрату 4×4, стоящему в левом нижнем углу таблицы, другая — квадрату 3×3, стоящему в ее правом верхнем углу. (Разумеется, то же самое можно сказать и о таблицах, изображенных на рис. 277 и 278.)

Примечание 2. Частичное решение (*) было получено «вне таблицы» с помощью особого рассуждения. Мы были вынуждены пойти на это потому, что условие 2 не допускает перевода на табличный язык.

67. ЕЩЕ ОДИН ПРОГНОЗ СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

I решение. По условию задачи команда E в действительности отстала на два места от команды G, команда C — от команды E и команда A — от команды C. Следовательно, команда A отстала от команды G в общей сложности на $2+2+2=6$ мест. Поскольку в розыгрыше первенства участвовало всего 7 команд, то такое отставание возможно лишь в одном случае: если команда G заняла место 1, а команда A — место 7. Этих данных уже достаточно, чтобы однозначно указать места, занятые командами E и C. Итак, на место 1 вышла команда G, на место 3 — команда E, на место 5 — команда C и на место 7 — команда A.

«Свободными» остались команды B, D, F и четные места: 2, 4 и 6. Из условий задачи известно, что команда F отстала на два места от команды D, а команда D — от команды B. Следовательно, команда B отстала от команды F в общей сложности на $2+2=4$ места. Поскольку эти команды в розыгрыше первенства вышли на места 2, 4 и 6, то такое отставание возможно лишь в том случае, если команда F заняла место 2, а команда B — место 6. Итак, мы выяснили распределение мест среди команд, занявших четные места: на место 2 вышла команда F, на место 4 — команда D и на место 6 — команда B.

Итак, дополнительных сведений, сообщенных человеком, который знал, чем в действительности закончился розыгрыш первенства, достаточно для того, чтобы однозначно восстановить распределение мест между командами: место 1 заняла команда G, 2 — команда F, 3 — команда E, 4 — команда D, 5 — команда C, 6 — команда B и 7 — команда A. Иначе говоря, исход розыгрыша первенства был предсказан «с точностью до наоборот».

II решение. Из критических замечаний, высказанных по поводу «прогноза», известно, что вместо предсказанного распределения мест (рис. 281, *а*) команды, «названия» которых обведены кружками, заняли места в последовательности, изображенной на рис. 281, *б*, а команды, названия которых заключены в квадраты, в финале первенства выстроились в последовательности, изображенной на рис. 281, *в*. Вопросительные знаки означают, что порядковые номера мест неизвестны, но точки указывают место, разделяющее две команды, независимо от этого. Нетрудно видеть, что каждый из

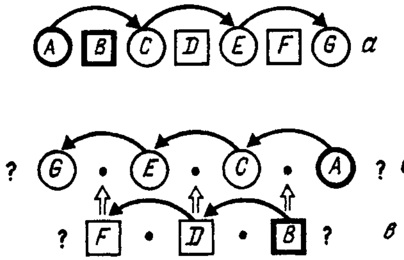


Рис. 281.

рис. 281, *а и б* соответствует частичному решению, а «вдвинув» одно решение в другое (в направлении, указанном светлыми стрелками), мы получим полное решение задачи.

Примечание. Эта задача заведомо не поддается решению табличным методом. Ее условия содержат информацию, которую далеко не во всех случаях можно свести к элементарным запретам. Разумеется, табличный метод можно было бы подкрепить «посторонними» рассуждениями, но при этом он в значительной мере утратил бы простоту и естественность.

68. ДВЕ ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ «ТОТО»

Прежде чем приступать к решению столь общей задачи, лучше всего вернуться к предыдущей — частной — задаче того же типа и шаг за шагом проверить: что из приведенных там рассуждений останется в силе и от чего придется отказаться.

а. Если число команд, участвующих в первенстве, *нечетно*, то весь ход рассуждений от начала до конца по существу останется таким же, как в предыдущей задаче. Сохранится и характер полного решения (ответа): распределение мест среди команд-участниц первенства единственно и получается из предсказанного, если мы прочитаем «прогноз» от конца к началу.

Иначе обстоит дело в том случае, если число команд *четно*. Предположим, что в розыгрыше первенства приняли участие 10 команд и «прогноз» выглядит следующим образом: место 1 заняла команда A, 2 — команда B, 3 — команда C, 4 — команда D, 5 — команда E, 6 — команда F, 7 — команда G, 8 — команда H, 9 — команда I и 10 — команда K.

Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, можно показать, что команды (A, C, F, G, I), которые, если верить «прогнозу», должны были занять нечетные места, в действительности закончили розыгрыш первенства с несколько другими результатами: номера мест в полном соответствии с предсказанием отличались от номеров «соседних» команд на 2, но последовательность команд оказалась обратной: *I*, *G*, *E*, *C*, *A* (рис. 282). Команды *A* и *I*, открывающие и замыкающие список «нечетных» команд, на этот раз не являются первой и последней командами: разность в номерах занятых ими в розыгрыше первенства мест составляет $9-1=8$, в то время как наибольшее значение разности равно $10-1=9$. Следовательно, мы не можем с уверенностью сказать, что команды *I*, *G*, *E*, *C*, *A* останутся на нечетных местах (на местах 1, 3, 5, 7 и 9): они вполне могут «перейти» на четные места (рис. 282). Итак, условия задачи

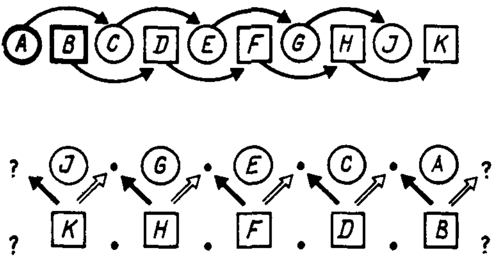


Рис. 282.

в рассматриваемом случае допускают два «равноправных» варианта распределения мест среди команд, участвовавших в розыгрыше первенства:

I) на месте 1 команда *I*, месте 2 — команда *K*, 3 — команда *G*, 4 — команда *H*, 5 — команда *E*, 6 — команда *F*, 7 — команда *C*, 8 — команда *D*, 9 — команда *A* и 10 — команда *B*;

II) на месте 1 команда *K*, месте 2 — команда *I*, 3 — команда *H*, 4 — команда *G*, 5 — команда *F*, 6 — команда *E*, 7 — команда *D*, 8 — команда *C*, 9 — команда *B* и 10 — команда *A*.

(Мы выбрали число команд, участвовавших в розыгрыше первенства, равным 10 лишь для большей конкретности. Аналогичные рассуждения остаются в силе и в общем случае при числе команд, равном произвольному четному числу $2n$.)

б. По условиям задачи команда *E должна по крайней мере* на два места отставать от команды *G*, команда *C* должна отставать *по крайней мере* на два места от команды *E*, команда *A* должна отставать *по крайней мере* на два места от команды *G*. Следовательно, команда *A* в общей сложности должна отставать от команды *G по крайней мере* на $2+2+2=6$ мест. Поскольку в розыгрыше первенства участвовало всего 7 команд, то такая разность возможна лишь в том случае, если команда *G* выйдет на место 1, а команда *A* займет последнее место 7. Команды *E* и *C*, как и в задаче 68, займут места 3 и 5. Таким образом, *на место 1 выйдет команда G, место 3 — команда E, 5 — команда C и 7 — команда A*.

Действительно, если бы мы сдвинули назад любую из команд *E* и *C*, то команда *A* должна была бы при этом сдвинуться назад по крайней мере на одно место, что невозможно, поскольку команда *A* и без того оказалась на последнем месте.

Столь же легко показать, что четные места могут распределиться лишь старым способом: *на месте 2 окажется команда F, на месте 4 — команда D и месте 6 — команда B.*

Итак, единственно возможный вариант исхода розыгрыша первенства выглядит в действительности следующим образом: на месте 1 команда G, месте 2 — команда F, 3 — команда E, 4 — команда D, 5 — команда C, 6 — команда B и 7 — команда A.

Примечание. Из приведенных выше рассуждений можно извлечь два весьма простых, но глубоких следствия.

1. Поскольку номера мест, занятых в финале розыгрыша первенства по футболу командами $G - E$, $E - C$, $C - A$, отличаются (внутри каждой пары) по крайней мере на 2, то номера мест, занятых командами $G - A$, отличаются *по крайней мере* на 6. В то же время номера мест, занятых любой парой из 7 команд, принявших участие в розыгрыше первенства, в том числе и номера мест, занятых командами G и A, могут отличаться *не более чем на 6. Следовательно, эта разность, поскольку она не более 6 и не менее 6, равна 6.*

(Если обозначить через h разность номеров тех мест, которые заняли в розыгрыше первенства команды G и A, то из сказанного выше следует, что h удовлетворяет двум неравенствам

$$h \leqslant 6 \quad \text{и} \quad h \geqslant 6,$$

откуда $h = 6$.)

2. Как мы уже говорили, что номера мест, занятых в розыгрыше первенства командами $G - E$, $E - C$, $C - A$, отличаются (внутри каждой пары) по крайней мере на 2. Сумма трех разностей равна 6. Отсюда следует, что каждая из разностей *равна* 2.

В этом рассуждении мы использовали новый вариант ранее упоминавшегося *принципа коробки*:

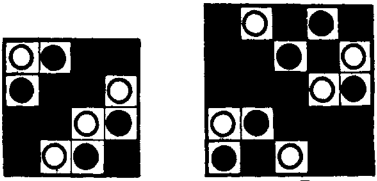
если в каждую из k коробок необходимо поместить по крайней мере по n предметов, причем во все коробки должно войти не более $k \cdot n$ предметов, то сделать это можно одним-единственным способом, а именно так, чтобы в каждой коробке оказалось ровно n предметов.

69. ДВЕ СТАРЫХ ЗНАКОМЫХ

Решить любую двумерную логическую задачу с помощью таблицы размером $n \times n$ означает расставить в свободных клетках этой таблицы n кружков так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по одному кружку. Сейчас мы применим к решению задачи 69 уже неоднократно встречавшийся нам принцип коробки и одновременно покажем, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы окажется ровно по одному кружку.

Обе таблицы имеют одну общую особенность: в каждой строке и в каждом столбце у них имеются ровно две свободные клетки. Выбрав по одной из них в каждой строке и в каждом столбце, мы получим решение задачи. После этого в каждой строке и в каждом столбце останется *ровно одна свободная клетка* (принцип коробки!).

Если в каждой такой клетке мы нарисуем по кружку какого-нибудь другого, например, черного цвета, то во всех строках и во всех столбцах окажется ровно по одному черному кружку (принцип коробки!). Следовательно, черные кружки образуют второе решение задачи 69 (рис. 283, *а* и *б*).



а *б*

Рис. 283.

Поскольку решить задачу означает не что иное, как вписать в свободные клетки *n* кружков, то ясно, что принцип коробки позволяет находить второе решение быстрее любого другого способа.

70. ОБОБЩЕНИЕ?

В той формулировке, которая приведена в условии задачи, обобщение неверно, поэтому в общем случае мы предпочитаем действовать медленно, но верно (и пользоваться не принципом коробки, а обычным способом решения двумерных логических задач).

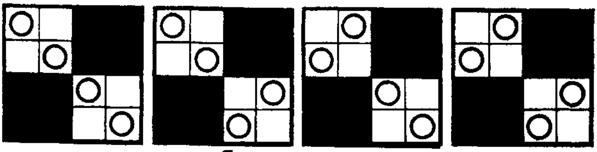
В предыдущей задаче мы установили лишь, что приведенные в ней таблицы частного вида наряду с любым решением допускают и другое, получающееся из первого при перестановке всех связующих кружков на свободные клетки, оставшиеся в каждом столбце (каждой строке). Таким образом, при переходе от первого решения ко второму все связующие кружки покидают «насиженные места». Следовательно, новое решение можно рассматривать как *дополнение* к исходному решению. Построив решение, служащее дополнением к дополнению, мы опять вернемся к исходному решению (передвинем все связующие кружки в исходное положение). На первый взгляд может показаться, что других решений, кроме двух указанных, быть не может.

Однако из того, что из исходного решения описанным выше способом можно получить новое решение (дополнение к исходному), отнюдь не следует, будто из нового решения другим способом нельзя получить еще одно решение. Тем не менее такое решение, не являющееся дополнением к исходному, вполне может существовать. Иначе говоря, при переходе от дополнения к исходному решению в исходное положение могут вернуться не все, а лишь некоторые кружки, что и порождает новое решение, удовлетворяющее всем условиям задачи.

Правда, мы тщетно пытались бы найти еще одно решение для обеих таблиц задачи 69: его просто не существует. Эти задачи так же, как и задачи 12а и 12б, допускают лишь по два решения, а, как показано в предыдущей задаче, каждое из этих решений является дополнением к другому. Но этих двух примеров недостаточно для того, чтобы считать доказанным общее утверждение.

Придумать такие таблицы, у которых в каждой строке и в каждом столбце было бы по две свободные клетки, а соответствующие таблицам задачи допускали бы более двух решений, чрезвычайно легко. Одной из простейших таблиц такого рода может служить квадрат 4×4, допускающий четыре решения. Они изображены на рис. 284, *а*, *б*, *в* и *г*.

(Эти четыре решения разбиваются на две пары: одну образуют решения, представленные на рис. 284, *а* и *г*, другую — решения,



а *б* *в* *г*

Рис. 284.

представленные на рис. 284, *б* и *в*. Внутри каждой пары одно решение служит дополнением другого. Решения, взятые из разных пар, например изображенные на рис. 284, *а* и *б*, друг друга не дополняют.)

Небольшое теоретическое отступление

1. Разумеется, приведенного контрпримера вполне достаточно для того, чтобы опровергнуть «обобщение», предложенное в условии задачи. Однако необходимо не упустить из виду еще одну тонкость: дополнение к решению задачи может существовать лишь в том случае, если помимо данного у задачи имеется еще одно решение. Если же задача не имеет решений, то нет и «дополнений». Итак, случай, когда задача имеет 0 решений, также необходимо включить в рассмотрение. Однако контрпримеры такого типа не опровергают предложенного в условии задачи «обобщения», поскольку можно доказать, что таблицы рассматриваемого типа (с двумя свободными клетками в каждой строке и в каждом столбце) всегда имеют решение.

2. Переход от решения к его дополнению позволяет разбить все решения задач рассматриваемого типа на пары. Следовательно, таблицы с двумя свободными клетками в каждой строке и каждом столбце всегда допускают четное число решений.

3. Если вернуться к задачам, допускающим разложение на независимые подзадачи (например, задачи 15, 16 и далее), и вспомнить кое-что из того, о чем мы тогда говорили, то станет ясно, что контрпример, опровергающий предложенное в условии задачи «обобщение», можно было бы построить из двух независимых задач с таблицами размером 2×2. Точно так же мы могли бы объединить в одну большую таблицу своих «старых знакомых»: таблицы, приведенные в задаче 69 (рис. 285). Задача, соответствующая большой

таблице, допускает 4 решения, поскольку каждая из подзадач допускает по 2 решения. Ничто не мешает нам сконструировать большую таблицу из трех таблиц, каждая из которых допускает по 2 решения. Сделать это можно, например, так, как показано на рис. 286. Соответствующая задача допускает уже $2\cdot2\cdot2=2^3=8$ решений. Она также служит контрпримером, опровергающим опрометчивое «обобщение». Однако если мы подойдем к опровержению выдвинутой гипотезы с более общих позиций, то вскоре выяснится, что, хотя она и неверна, тем не менее ее нельзя считать безосновательной.

Действительно, если мы поинтересуемся тем, сколько решений допускают таблицы рассмотренного нами частного типа, то выяснится следующее. Мы начали с таблиц, допускавших 2 решения, затем

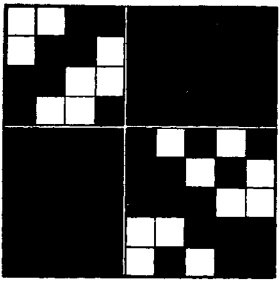


Рис. 285.

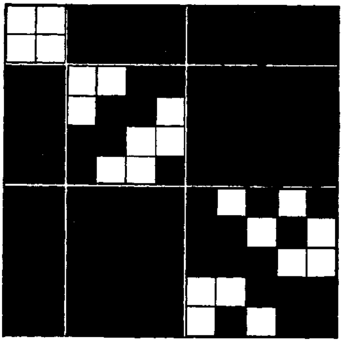


Рис. 286.

построили таблицы, соответствующие задачам с $2\cdot2=2^2=4$ и $2\cdot2\cdot2=2^3=8$ решениями. Нам известно, как построить таблицу, допускающую $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$ и вообще 2^l решений ($l=1, 2, \ldots$). Однако исследовать до конца вопрос о том, сколько решений допускают другие таблицы (того же типа), не удается. Поэтому мы сформулируем новую гипотезу:

всякая двумерная логическая задача, в таблице которой каждая строка и каждый столбец содержат по 2 свободные клетки, допускает 2^l решений, где l — натуральное число (то есть одно из чисел 1, 2, 3, ...).

Доказательство этой гипотезы подтвердило бы правильность вывода, к которому мы пришли в ходе решения задачи 70 (о том, что «обобщение», предложенное в условии задачи, неверно), и доступно даже тем читателям, которые по тем или иным причинам не читали нашу книгу с самого начала.

71. СНОВА ЛАДЬИ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Как уже упоминалось в конце решения предыдущей задачи, речь идет о том, чтобы найти правильное обобщение задачи 69. Попытки построить такое обобщение, предпринятые в задачах 69 и 70, ни к чему не привели, поскольку новое решение мы всякий раз строили лишь из тех, которые уже были в нашем распоряжении. Теперь мы хотим показать, что правильное обобщение задачи 69, несмотря на неудачи, постигшие обе прежние попытки, все же существует. Но прежде чем приступать к доказательству, нам хотелось бы начать с небольшой «разминки».

Начнем с самого очевидного — с расстановки ладей на шахматной доске — и будем строго следить за соблюдением всех требований задачи.

Ладью *1* поставим на любое свободное поле. Обозначим горизонталь и вертикаль, на пересечении которых стоит выбранное нами поле, цифрой *1* (то, что вертикали и горизонтали на шахматной

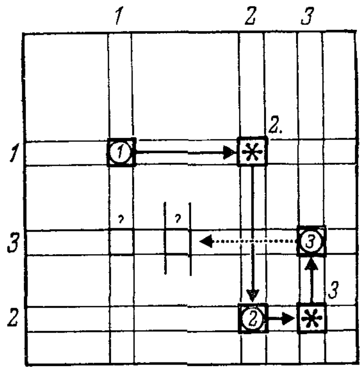


Рис. 287.

доске имеют свою собственную нумерацию, для нас сейчас несущественно).

Горизонтали *1* принадлежит еще одно (и только одно) свободное поле. Поставить на него следующую ладью нельзя, потому что эта ладья оказалась бы под ударом ладьи *1*. Отметим это поле звездочкой и назовем его «поле *2».

Ход наших рассуждений показан на рис. 287. На шахматной доске изображены лишь те горизонтали и вертикали, которые мы затрагиваем по ходу решения, а все прочие опущены. Сделано это для большей общности: нам хотелось, чтобы наши рассуждения не зависели от конкретных особенностей позиции, сложившейся на шахматной доске. Свободные клетки обведены более жирными квадратными рамками.

На вертикали **2* имеется еще одно (и только одно) свободное поле, а поскольку оно расположено не на одной горизонтали с ладьей *1*, то на него можно поставить новую ладью. Более того, поставить ладью на это поле просто необходимо, ибо в противном случае вертикаль **2* осталась бы свободной. Назовем новую ладью «ладья 2» и обозначим цифрой *2* горизонталь и вертикаль, на пересечении которых она стоит.

На горизонтали *2* найдется еще одно (и только одно) свободное поле. Поскольку оно находится под ударом ладьи *2*, то мы обозначим его звездочкой и, если оно окажется не на вертикали *1*, то назовем его «поле *3», а вертикаль, которой оно принадлежит, «вертикалью 3», На вертикали *3* имеется еще одно (и только одно) свободное поле. Оно не принадлежит ни горизонтали *1*, ни горизонтали *2* (из горизонтали *2* мы только что вышли, а в горизонтали *1* уже имеются два свободных поля, расположенные на пересечении с вертикалями *1* и *2*). Следовательно, на это свободное поле можно (и должно) поставить ладью (ибо в противном случае вертикаль, которой принадлежит свободное поле, останется свободной).

На горизонтали *3* должно быть еще одно (и только одно) свободное поле, которое мы опять пометим звездочкой. Это поле не может находиться на пересечении горизонтали *3* с вертикалями *2* и *3* (из вертикали *3* мы только что вышли, а на вертикали *2* уже обнаружены два свободных поля, которые стоят на пересечении ее с горизонталями *1* и *2*, поэтому вновь найденное свободное поле было бы третьим свободным полем на вертикали *2*). Следовательно, на горизонтали *3* второе свободное поле может располагаться либо на пересечении с вертикалью *1*, либо на пересечении нового, еще не встречавшегося нам столбца, который пока не имеет собственного номера (рис. 287).

Достигнув новой вертикали, мы можем продолжить поиск свободных полей и расстановку ладей: поставить звездочку на свободное поле и присвоить горизонтали и вертикали, которым оно принадлежит, очередной порядковый номер. (Заметим, что в любой из уже обследованных (и потому «пронумерованных») горизонталей обе свободные клетки имеют номера, совпадающие с номерами тех столбцов, на пересечении с которыми они находятся.) Проделав все, что требовалось, двинемся вдоль вертикали. Наше исходное поле было помечено звездочкой. Следовательно, ладья на нем не стояла. Вторая свободная клетка, принадлежащая рассматриваемой вертикали, не может находиться на пересечении ни с одной из ранее пройденных нами горизонталей. Действительно, поскольку на этой клетке должна стоять ладья, то содержащая ее горизонталь должна была бы «позаимствовать» у нее свой номер. Но номер свободной клетки, как мы только что выяснили, совпадает с номером столбца, который, разумеется, больше номера любой из пройденных горизонталей (так как он возник позже). Следовательно, *двигаясь вдоль вертикали, содержащей последнюю свободную клетку, мы непременно доходим до новой горизонтали.* Впишем в обнаруженное свободное поле кружок, означающий, что на поле стоит ладья, и присвоим новой горизонтали номер, совпадающий с номером последней вертикали, до которой мы добрались.

На «самой новой» горизонтали имеется еще одно (и только одно) свободное поле. Оно не может лежать на пересечении этой горизонтали ни с одной из ранее встречавшихся нам вертикалей, кроме, быть может, вертикали *1*, поскольку в каждой из «пройденных» вертикалей оба свободных поля получили свои номера раньше и поэтому они меньше номера «самой новой» горизонтали (исключение составляет лишь поле с ладьей на последней вертикали, из которой мы вышли на розыски «самой новой» горизонтали). Итак, свободное поле может принадлежать либо вертикали *1*, либо какой-то новой вертикали. В последнем случае нам придется продолжить свое путешествие по шахматной доске сначала вдоль новой вертикали, а затем свернуть на горизонталь.

Итак, *следуя вдоль вертикали, можно дойти до новой горизонтали, а следуя вдоль горизонтали — либо дойти до новой верти-*

кали, либо встретить вертикаль 1. Процесс поиска новых свободных клеток и расстановки ладей будет продолжаться до тех пор, пока, двигаясь вдоль одной из горизонталей, мы не обнаружим второе свободное поле, стоящее на пересечении с вертикалью *1*. Рано или поздно, но это непременно произойдет, поскольку число вертикалей на шахматной доске конечно, и, переходя от одной вертикали к другой, мы не можем неограниченно долго обнаруживать все новые и новые вертикали.

Процесс поиска свободных полей оборвется самое позднее на n-м шаге (n шагов нам потребуется для того, чтобы обследовать все вертикали), но может оборваться и раньше. Пусть k_1 — номер последней ладьи, которая находится на горизонтали k_1. Второе свободное поле, принадлежащее горизонтали k_1, находится на пересечении

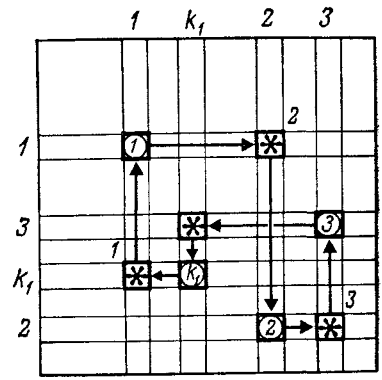


Рис. 288.

этой горизонтали с вертикалью *1*. (На рис. 288 изображен случай, когда $k_1 = 4$.) Это поле должно быть отмечено звездочкой. Поскольку оно принадлежит вертикали *1*, то мы будем называть его полем «*1» (так оно и обозначено на рис. 288). После того как мы доходим до поля **1*, процесс обрывается, поскольку из поля, помеченного звездочкой, мы должны двигаться вдоль вертикали, а второе свободное поле на вертикали *1* послужило отправным пунктом нашего кругосветного путешествия: на это поле мы поставили ладью *1*.

На каждой из пройденных нами вертикали и горизонтали стоит одна ладья (один кружок) и одна звездочка. Следовательно, обе свободные клетки в этих горизонталях и вертикалях заполнены, а остальные вертикали и горизонтали (если они еще остались) мы «обошли стороной»: оба поля в каждой из пропущенных нами вертикалей и горизонталей не заняты ни звездочкой, ни ладьей.

Если $k_1 = n$, то задача имеет единственное решение.

Если $k_1 < n$, то мы выбираем любую из оставшихся в стороне горизонталей и начинаем весь процесс поиска свободных полей и расстановки ладей снова. Если он оборвется после k_2 шагов и $k_1 + k_2 < n$, то необходимо выбрать любую из еще не заполненных горизонталей и повторить все сначала. Так будет продолжаться до тех пор, пока нам не удастся достичь равенства $k_1 + k_2 + \ldots$ $\ldots + k_l = n$. (Поскольку каждый раз мы движемся по замкнутому маршруту, то число шагов в каждом цикле по крайней мере равно 2. Отсюда следует, что число циклов l должно удовлетворять неравенству $l \leqslant n/2$.)

Таким образом, *существует по крайней мере один способ расстановки ладей на шахматной доске.*

Передвинем теперь ладью *1* на поле $*2$, ладью *2* — на поле $*3$, ладью *3* (если она есть) — на поле $*3$ и т. д. Ладью k_1 нам придется передвинуть на поле $*1$, после чего один круг замкнется. Освободившиеся клетки (занятые в прежней позиции ладьями) пометим звездочками. После этого во всех горизонталях и вертикалях с номерами от *1* до k_1 снова окажется по одной ладье (одному кружку) и по одной звездочке. Поскольку все звездочки и ладьи поменялись местами, то новую расстановку ладей можно рассматривать как новое частичное решение задачи, ничем не уступающее старому.

Нетрудно видеть, что других способов расстановки ладей и звездочек вдоль замкнутого маршрута, кроме двух найденных нами, не существует. Действительно, выберем любое из полей, отмеченных кружком. Совершив обход всех остальных полей по замкнутому маршруту, мы не обнаружим ни одного поля со звездочкой, на которое можно было бы поставить ладью. В то же время на все поля, отмеченные кружком, нам придется поставить по ладье. Аналогично, если мы выберем любое поле, отмеченное звездочкой, и поставим на него ладью, то, совершив обход всех полей по замкнутому маршруту, мы обнаружим, что и все остальные ладьи необходимо расставить на полях со звездочками, а поля, отмеченные кружками, должны остаться свободными. Наш маршрут содержит все свободные поля, принадлежащие горизонталям и вертикалям с номерами от *1* до k_1 (благодаря тому, что на каждой вертикали и каждой горизонтали имеются лишь два свободных поля). Следовательно, стоит нам выбрать любое из свободных полей и поставить на него ладью, как вдоль всего замкнутого маршрута устанавливается правильное чередование разрешенных и запрещенных полей для расстановки ладей (мы имеем в виду лишь те клетки вдоль замкнутого маршрута, которые отмечены кружками и звездочками). Таким образом, выбор поля для одной ладьи однозначно определяет расстановку ладей вдоль всего маршрута.

При этом неважно, с какого из свободных полей, принадлежащих «затронутым» нами горизонталям и вертикалям мы начнем построение замкнутого маршрута (на какое поле поставим ладью *1*).

Горизонтали и вертикали с номерами от *1* до k_1 образуют самостоятельную, автономную часть шахматной доски. Ладьи, расставленные на этих горизонталях (вертикалях), можно переставлять лишь между собой, не затрагивая при этом других горизонталей (вертикалей). Получаемое при этом частичное решение задачи полностью не зависит от частичных решений, получаемых на прочих горизонталях.

На горизонталях и вертикалях с номерами от *1* до k_1 ладьи можно расставить двумя и только двумя различными способами.

Аналогичное утверждение справедливо и относительно ладей, расставленных на горизонталях и вертикалях с номерами от $k_1 + 1$ до k_2 и т д. Поскольку расстановка ладей вдоль каждого замкнутого маршрута не зависит от расстановки ладей вдоль других замкнутых маршрутов, то полное число возможных решений задачи равно произведению числа различных способов расстановки ладей вдоль каждого замкнутого маршрута. Таким образом, *всего существует* $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^l$ *различных решений задачи* (столькими способами можно расставить ладьи на шахматных досках с двумя свободными полями на каждой горизонтали и каждой вертикали).

Примечание 1. Мы не только доказали правильное обобщение задачи 69, но и сделали нечто большее: *уточнили* формулировку теоремы. Оказалось, что если на шахматной доске построить все возможные замкнутые маршруты, каждый из которых проходит по крайней мере по двум горизонталям и двум вертикалям, то число маршрутов l не превышает $n/2$ (удовлетворяет неравенству $l \leqslant n/2$).

Если n — нечетное число, то число $n/2$ не целое. В этом случае необходимо взять *целую часть* числа $n/2$, то есть *наибольшее целое число, которое не превосходит* $n/2$. Нетрудно показать, что формула

$$l \leqslant \left[\frac{n}{2}\right],$$

где квадратные скобки означают целую часть, верна и для четных, и для нечетных n.

Полученная оценка для l неулучшаема: например, для задач, представленных на рис. 284, *а*, *б*, *в* и *г*, $n = 4$ и $l = 4/2 = [2] = 2$.

Примечание 2. Читатель, по-видимому, обратил внимание на то, что избранный нами способ доказательства по существу ничем не отличается от способа, использованного при решении задачи 24 («*Не только для шахматистов*»). Этому вряд ли приходится удивляться, если учесть, что рассмотренная нами сейчас шахматная доска отличается от шахматной доски, о которой говорилось в задаче 24, лишь одним: на каждой горизонтали и каждой вертикали теперь могут находиться *по крайней мере* две свободные клетки (а раньше могли находиться *ровно две* клетки, не больше и не меньше). Мы уточнили условия, относящиеся к шахматной доске, и это позволило нам смягчить другие ограничения. Например, в этой задаче нам не понадобилось вводить предположение о существовании исходной расстановки ладей на шахматной доске. Вместо этого мы показали, что на рассматриваемых нами досках всегда можно расставить ладьи так, чтобы соблюсти при этом все условия задачи.

Примечание 3. То обстоятельство, что для таблицы, в каждой строке и в каждом столбце которой содержатся *ровно* две свободные клетки, всегда существуют по крайней мере два решения, не вызывает особого удивления. Естественно предположить, что чем больше свободных клеток будет в каждой строке и в каждом столбце, тем больше возможностей будет для расстановки ладей и тем более «шахматным» станет решение.

Интересно отметить, что если мы несколько смягчили условия и разрешим находиться в каждой строке и в каждом столбце таблицы *по крайней мере* двум свободным клеткам, стремясь увеличить число «вакансий» для ладей, то достигнем лишь обратного эффекта: среди таблиц, удовлетворяющих новым, более слабым условиям, найдутся такие, для которых не существует ни одного решения (в этом мы могли неоднократно убедиться на рассмотренных ранее примерах).

Принцип коробки

В предыдущем решении мы дважды использовали весьма простой и полезный принцип. Пользуясь обычными математическими обозначениями, его можно было бы сформулировать следующим образом:

нельзя разложить $n+1$ предметов по n коробкам так, чтобы в каждой коробке оказался лишь один предмет: по крайней мере в одной коробке непременно окажется не менее двух предметов *.

Этот принцип представляет собой обобщение формулировки уже известного нам принципа коробки, приведенной в конце решения задачи 69. (Доказательство принципа коробки мы тогда предоставили читателю.)

Приведенная выше формулировка принципа далеко не единственная, возможны и другие варианты. В частности, в задаче 71 мы использовали две следующие «разновидности» принципа коробки.

Если предметов больше, чем коробок, то их нельзя разложить по коробкам так, чтобы в каждой коробке оказалось по одному предмету: по крайней мере в одной коробке окажется более одного предмета.

Если число коробок ограничено, а число предметов сколь угодно велико, то предметы нельзя разложить по коробкам так, чтобы в каждой коробке оказалось по одному предмету: по крайней мере в одной коробке окажется более одного предмета.

Принцип коробки (в неявном виде) мы неоднократно использовали при решении двумерных логических задач. Например, ссылку на этот принцип нетрудно распознать в двух начальных фразах из решения задачи 19.

О принципе коробки по существу идет речь в задаче 10. Роль «коробок» играют клетки таблицы, а роль размещаемых по коробкам предметов — элементарные запреты, связующие кружки и запреты, возникающие при сужении информации. Число «коробок» равно $6 \cdot 6 = 36$. Среди «предметов» имеется 6 связующих кружков, соответствующих частичным решениям, и (это число было подсчитано в решении задачи 10) $36-(6+15)$ запретов, возникающих при сужении информации. Следовательно, если число заранее заданных (заимствованных из условий задачи) элементарных запретов превышает 15, то общее число предметов также будет превышать

* Этот принцип принято называть *принципом Дирихле*. О нем рассказывается, например, в статье А. И. Орлова («Квант», № 7, 17—21 (1971)). — *Прим. перев.*

число $15+6+15=36$, а согласно принципу коробки это означает, что в какую-то из коробок попадет более одного предмета. Иначе говоря, найдется такая клетка, на которую одновременно будут распространяться два элементарных запрета: первичных, заимствованных из условий задачи, и вторичных, возникших при сужении информации, а это есть не что иное, как избыточность.

Разумеется, рассуждения, основанные на принципе коробки, отнюдь не позволяют указать то место, *где* возникает избыточность информации. Здесь, однако, уместно заметить следующее. Отсутствие точных указаний относительно того, где именно перекрываются элементарные запреты, не обязательно относить к недостаткам рассуждений, использующих принцип коробки. Этот недостаток легко оборачивается достоинством. Ведь речь идет о довольно трудном вопросе: «Какая информация избыточна?» Единого рецепта, позволяющего отвечать на него во всех случаях, не существует. В зависимости от избранного способа решения мы ищем избыточность то в одном, то в другом месте. Принцип избыточности позволяет находить избыточность при самых общих обстоятельствах и даже указывает число «лишних» условий, что позволяет (после некоторой предварительной подготовки) однозначно находить «слабое» место.

72. ЗАДАЧА О ЗАПРЕТНОМ УГЛЕ

Предположим, что вдоль вертикальной стороны заштрихованного прямоугольника укладываются k клеток (рис. 289). Это означает, что нижняя часть таблицы, отмеченная фигурной скобкой, содержит k строк. Если задача, соответствующая этой таблице, допускает

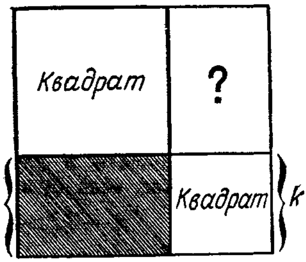


Рис. 289.

решение, то в k строках должны разместиться k связующих кружков (частичных решений). Поскольку эти кружки не могут располагаться в левом нижнем углу (весь угол, занятый заштрихованным прямоугольником, заполнен клетками, которые находятся под запретом), то они все располагаются в квадрате размером $k \times k$, заполняющем правый нижний угол таблицы.

С другой стороны, прямоугольник, расположенный в правом верхнем углу таблицы (на рис. 289 он обозначен вопросительным знаком), содержит k столбцов. В них могут разместиться k связующих кружков (и ни одного кружка больше). Но если эти кружки окажутся в квадрате $k \times k$, расположенном ниже, то *прямоугольнику со знаком вопроса не достанется ни одного связующего кружка.*

Таким образом, принцип коробки, примененный к решению этой задачи, позволил доказать, что таблица, изображенная на рис. 30, распадается на две независимые части.

73. ЕЩЕ ОДНА ЗАДАЧА О ЗАПРЕТНОМ УГЛЕ

Предположим, что в левом нижнем углу таблицы размером $n \times n$ расположен заштрихованный прямоугольник (заполненный клетками, находящимися под запретом), вдоль одной из сторон которого укладывается k, а вдоль другой l клеток. Тогда вдоль продолжений этих сторон будут укладываться $n-k$ и $n-l$ клеток (рис. 290, *а*).

Если задача имеет решение, то в первых k столбцах таблицы должны разместиться k связующих кружков. Поскольку они не могут занять клетки, находящиеся под запретом в l нижних строках,

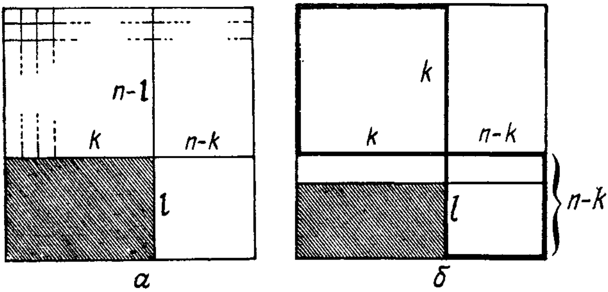


Рис. 290.

то все k связующих кружков располагаются над этими строками, то есть в верхних $n-l$ строках. В каждой строке может находиться лишь один связующий кружок. Согласно принципу коробки соблюсти это условие, размещая k кружков в $n-l$ строках, нам удастся лишь в том случае, если будет выполнено неравенство

$$n-l \geqslant k.$$

Таким образом, выполнение этого неравенства служит *необходимым* условием существования решения.

Нетрудно видеть, что то же самое неравенство служит одновременно и *достаточным* условием существования решения. Действительно, если $n-l \geqslant k$, то над заштрихованным прямоугольником можно построить «белый» квадрат размером $k \times k$ (на рис. 290, *б* — квадрат в левом верхнем углу таблицы, обведенный жирной линией). В правом нижнем углу таблицы рядом с заштрихованным прямоугольником расположится «белый» (то есть заполненный клетками, не находящимися под запретом) квадрат размером $(n-k) \times (n-k)$ (на рис. 290, *б* он также обведен жирной линией). Внутри каждого из белых квадратов мы можем искать частичное решение (поскольку каждый квадрат не содержит ни одного запрета). Объединяя полученные частичные решения, найдем полное решение задачи, соответствующей таблице $n \times n$.

Напомним, что необходимое и достаточное условие существования решения имеет вид неравенства

$$n - l \geqslant k,$$

или

$$k + l \geqslant n.$$

Следовательно, решение задачи 73 существует лишь тогда, когда сумма длин сторон заштрихованного прямоугольника не превышает длину стороны всей таблицы.

Примечание 1. Квадраты, обведенные на рис. 290, *б* жирной линией, позволяют разложить задачу на две независимые части. Оба квадрата не имеют общих строк и столбцов, поэтому, объединяя соответствующие им частичные решения, можно получить полное решение задачи.

Примечание 2. Сформулированное выше утверждение (о необходимом и достаточном условии существования решения) непосредственно применимо к задаче 22б. Если учесть, что все рассуждения, с помощью которых было доказано необходимое и достаточное условие существования решения, остаются в силе при любой перестановке строк и столбцов, то выяснится довольно любопытное обстоятельство: в задачах 23а и 20 мы по существу рассматривали именно это условие. Второе решение задачи 20 нетрудно получить с помощью рассуждений, использующих принцип коробки.

Примечание 3. Если $k + l > n$ и задача не допускает решения, то положение нельзя исправить, даже если разместить дополнительные запреты вне заштрихованного прямоугольника. Таким образом, справедлива следующая теорема: *если в таблице размером $n \times n$ имеется (или возникает при перестановке строк и столбцов) прямоугольник размером $k \times l$, все клетки которого находятся под запретом, и при этом $k + l > n$, то соответствующая таблице задача не допускает решения.*

Ссылка на эту теорему позволяет без труда решить задачи 22а и 23г.

74. БЕЛАЯ СНАРУЖИ, ЧЕРНАЯ ВНУТРИ

Поскольку белые шарики принадлежат наружным плоскостям решетки, то и белые шарики, соответствующие частичным решениям, должны располагаться в наружных плоскостях. Известно, что в каждой плоскости может находиться лишь один связующий шарик, а поскольку наружных плоскостей всего 6 (у куба имеется 6 граней), то по принципу коробки число связующих белых шариков также не должно превышать 6. Это означает, что каждое из соответствующих друг другу множеств должно содержать не более 6 элементов.

Следовательно, *решение задачи может существовать лишь для пространственной решетки, размеры которой не превышают $6 \times 6 \times 6$ (и могут быть меньше)*. Вопрос о том, существует ли решение для решетки допустимого размера, остается открытым.

Нетрудно видеть, что в действительности решение существует. Построим пространственную решетку размером $6 \times 6 \times 6$. Обозначим горизонтальные кристаллические плоскости цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, вертикальные плоскости, идущие в направлении З — В, малыми буквами *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, а вертикальные плоскости, идущие в направлении Ю — С, большими буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Не вычерчивая решетку, можно сказать, что среди шаров

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A}, & b, & 2 \\ B, & \mathbf{a}, & 3, \\ C, & c, & \mathbf{1}, \\ D, & d, & \mathbf{6}, \\ E, & \mathbf{f}, & 4, \\ \mathbf{F}, & e, & 5, \end{array}$$

не найдется и двух таких, которые бы располагались в одной кристаллической плоскости (поскольку невозможно найти пару шаров, у которых бы совпадали либо цифры, либо большие буквы, либо малые буквы). Следовательно, эти шесть шаров образуют решение задачи, поскольку все они располагаются лишь в наружных гранях решетки, а все плоскости, обозначения которых выделены полужирным шрифтом, — внешние.

По аналогии с решеткой размером $6 \times 6 \times 6$ нетрудно построить решения и для пространственных решеток меньших размеров. Следует иметь в виду, что о цвете шариков (черные они или белые) можно не заботиться. Важно лишь проследить за тем, чтобы они образовывали решение и располагались в наружных плоскостях решетки. Для того чтобы найти решение, необходимо лишь изъять из готового решения для пространственной решетки размером $6 \times 6 \times 6$ любой связующий шарик и одновременно вычеркнуть те три кристаллические плоскости, которым этот шарик принадлежит. Ясно, что при этом мы получим пространственную решетку размером $5 \times 5 \times 5$ и, кроме того, оставшиеся пять шариков также образуют решение задачи (если в наборе шариков, из которого было получено решение, никакие два шарика не принадлежали одной и той же плоскости, то и после вычеркивания трех плоскостей и одного шарика никакие два оставшихся шарика также не будут принадлежать одной плоскости);

все пять шариков располагаются в наружных плоскостях решетки (потому что плоскости, бывшие до вычеркивания трех плоскостей наружными гранями решетки, не могут после вычеркивания оказаться внутри куба).

Итак, решение для пространственной решетки размером $5 \times 5 \times 5$ построено. Пользуясь им, можно построить решение для пространственной решетки размером $4 \times 4 \times 4$ и так далее.

75. ИГРА В ПЕРЕСТАНОВКИ

а. Преобразовать одну картинку в другую можно совсем быстро, если воспользоваться следующим способом.

Вынем строку *2* и на освободившееся место переставим строку *1*, на место строки *1* переставим строку *4*, а на место строки *4* поместим строку *2* (рис. 291). Затем переставим столбцы *1* и *3*. Наконец, столбец *6* приставим слева к столбцу *3*, и картинка готова (рис. 292).

Мы преобразовали одну картинку в другую, не нарушив при этом ни одного правила игры. Тем не менее для тренировки полезно

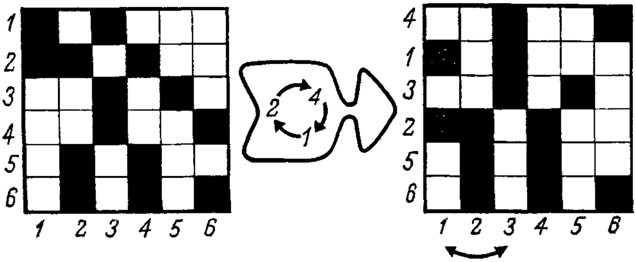


Рис. 291.

проделать те же преобразования в более медленном темпе, разложив их на элементарные. Первый шаг преобразования, разложенный на *элементарные перестановки* (транспозиции), выглядел так: *4 — 1, 1* (номера всех строк относятся к их исходному положению; строка 1 после первой перестановки перешла на место строки 4) — *2*. Последний шаг выглядит так: *3 — 6, 2 — 3, 1 — 2, 4 — 1, 5 — 4*.

б. Если мы попытаемся преобразовать «кошку» в «павлина», то выяснится, что кошка упорно не желает превращаться в павлина.

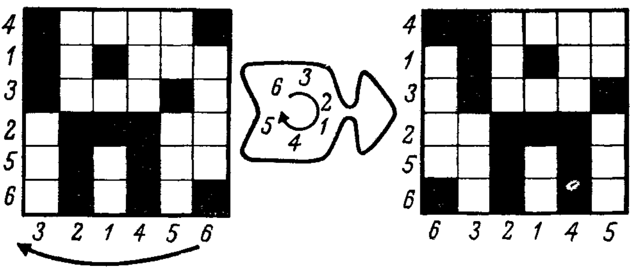


Рис. 292.

Сколько бы мы ни пытались, строго следуя правилам игры, сформировать хвост павлина, его шея неизменно будет слишком длинной, а стоит лишь попытаться использовать «излишки», образовавшиеся в одном месте, чтобы хоть как-то компенсировать недостатки в другом, как все перемешается. Довольно скоро мы поймем: превратить кошку в павлина можно, лишь переставив отдельные кубики (то есть нарушив соотношение черных и белых кубиков в отдельных строках), но такое преобразование запрещено правилами игры. Действительно, при перестановке столбцов все кубики остаются в той же строке, в которой они находились до перестановки (изменяется лишь их взаимное расположение в строке). Если же мы начнем переставлять строки, то все кубики, находившиеся в одной строке, «переедут на новое место», но не изменят своего положения внутри строки.

Неудача подстерегает нас и при попытке преобразовать человечка в павлина. Преобразовать одну из этих мозаик в другую невозможно. В мозаике «павлин» самая верхняя строка содержит лишь один темный кубик, тогда как любая строка мозаики «человечек» содержит по крайней мере два темных кубика, а мы знаем, что *ни перестановкой строк, ни перестановкой столбцов нельзя изменить число темных (или светлых) кубиков в строке (или столбце) ни на единицу.*

в. Переставив *1* и *3*, а также *4* и *5* строки «колье», получим «корову» (рис 293).

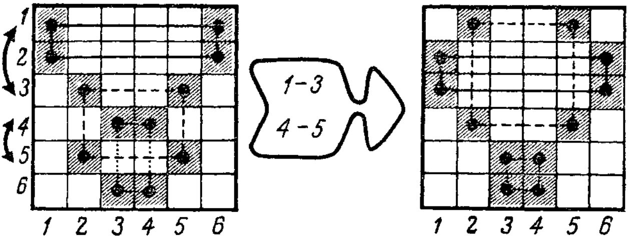


Рис. 293.

Преобразовать друг в друга остальные мозаики нам не удастся. В то же время в каждой строке и в каждом столбце любой из этих мозаик находятся по два темных кубика. Следовательно, неудача, постигшая нас при попытке преобразовать друг в друга эти мозаики, свидетельствует о том, что способ, использованный нами при решении предыдущей задачи, здесь оказывается непригодным.

Переставляя строки и столбцы мозаик то в одном, то в другом порядке, мы постепенно придем к выводу (возможно, эта мысль осенит нас, когда мы будем составлять наиболее массивную часть головы коровы — квадрат 2×2) о том, что если центры четырех темных квадратов (верхних граней темных кубиков) расположены в вершинах некоторого прямоугольника, то это свойство строк или столбцов сохраняется при любых перестановках. «Прямоугольное расположение» (условимся называть это так) означает, что четыре темных кубика располагаются попарно в двух строках и в двух столбцах. Ясно, что при любой перестановке строк или столбцов такое расположение не может нарушиться. Следовательно, прямоугольное расположение неуничтожимо, а значит, и создать его также невозможно. Таким образом, если после какой-нибудь перестановки строк или столбцов мы обнаружим прямоугольное расположение темных кубиков, то оно сохранится и после обратной перестановки строк или столбцов. Следовательно, прямоугольное расположение с самого начала было скрыто в фигуре (которая тем временем вновь обрела свой прежний вид).

Легко проверить, что и в «колье», и в «голове коровы» насчитывается по три прямоугольных расположения. (На обеих мозаиках, изображенных на рис. 293, еще видны следы доказательства того, что прямоугольное расположение сохраняется при перестановках.) В мозаике «летящий гусь» имеется лишь одно прямоугольное расположение (четыре темных кубика), а в мозаике «лестница» — ни одного. Следовательно, мозаики, изображенные на рис. 34, *г* и 34, *е*, нельзя преобразовать в мозаики, изображенные на рис. 34, *д* и 34, *ж*, а две последние мозаики — друг в друга.

г. В этих мозаиках нас не подстерегают те неприятности, с которыми мы столкнулись в двух предыдущих задачах. В каждой строке и в каждом столбце имеется всего лишь два темных кубика, поэтому обе мозаики не содержат ни одного прямоугольного расположения. Тем не менее, несмотря на многочисленные попытки, преобразовать одну мозаику в другую никак не удается. Угадать нужную последовательность перестановок строк и столбцов оказывается невозможным.

Постигшая нас неудача свидетельствует о том, что необходима какая-то новая идея, отличная от тех, которые мы использовали до сих пор. Между тем в предыдущих задачах содержится в готовом виде «блестящая мысль», которая позволяет значительно упростить решение рассматриваемой нами задачи (как, впрочем, и решение предыдущих задач).

Любую мозаику всегда можно рассматривать как таблицу, соответствующую некоторой двумерной логической задаче. Решая задачу 13 («Небольшая перестановка»), мы убедились в том, что в задачах на установление соответствия между элементами двух множеств перестановки строк и столбцов не влияют на решение задачи (хотя, разумеется, приводят к соответствующим перестановкам в решении). Следовательно, если в игре в перестановки мы будем рассматривать исходный и конечный виды мозаики как таблицы, соответствующие двумерным логическим задачам, то в обоих случаях решение должно быть одним и тем же.

Если белые клетки на рис. 34, *з* и 34, *и* считать находящимися под запретом, а темные — свободными, то обе таблицы будут соответствовать задачам того же типа, что и задача 71. Решение их мы без труда получим, воспользовавшись известным нам методом. Решая первую задачу, мы построим два замкнутых маршрута (на рис. 294, *а* один маршрут изображен сплошными, а другой пунктирными стрелками). Следовательно, задача допускает разбиение на две независимые части, а общее число решений равно $2^2 = 4$. Решая вторую задачу, мы построим лишь один замкнутый маршрут (рис. 294, *б*). Следовательно, вторая задача допускает 2 решения. Таким образом, никакими перестановками строк и столбцов *перевести одну мозаику в другую невозможно.*

д. Мы видели, что если белые клетки сопоставить запретам, то в решении задачи, изображенной на рис. 294, *а*, число замкнутых маршрутов окажется равным двум, а в решении задачи, изображенной на рис. 294, *б* — одному. Решение задачи, которая соответствует мозаике на рис. 34, *к*, содержит лишь один замкнутый маршрут (рис. 295). Следовательно, цветок, изображенный на рис. 34, *з*, никакой перестановкой строк и столбцов нельзя перевести в лестницу, а другой цветок, изображенный на рис. 34, *и*, такое преобразование допускает.

Нетрудно видеть, что мозаику на рис. 294, *б* в действительности можно преобразовать к виду, показанному на рис. 295. Выберем в каждой таблице по одной темной клетке (на рис. 294, *б* и 295 выбранные клетки отмечены черными кружками) и присвоим строке и столбцу, на пересечении которых она стоит, номер *1*. Выбранную

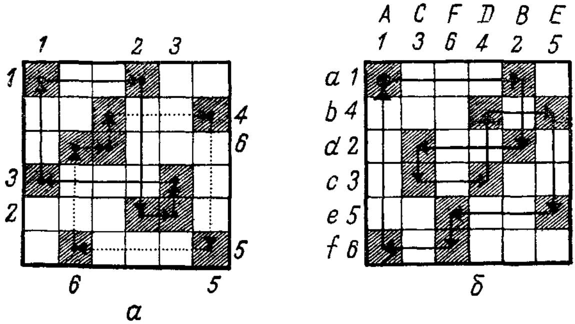


Рис. 294.

клетку примем за исходную точку замкнутого маршрута и совершим «кругосветное путешествие», нумеруя по дороге строки и столбцы обеих таблиц так, как мы делали в задаче 71. По окончании нумерации выяснится, что свободные (в данном случае темные) клетки, принадлежащие нумерованным строкам, располагаются только на пересечении с нумерованными столбцами, а свободные клетки,

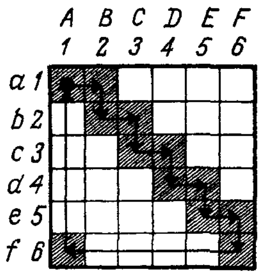


Рис. 295.

принадлежащие пронумерованным столбцам, — только на пересечении с нумерованными строками. Следовательно, если мы расположим по порядку столбцы *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6* обеих таблиц и обозначим их *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, а выстроенные по порядку строки обозначим *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, то соответствия между множествами (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*) и (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*), устанавливаемые обеими таблицами, будет одним и тем же. Иначе говоря, обе таблицы будут запрещать и разрешать одинаковые парные комбинации элементов этих двух множеств. Следовательно, если мы возьмем любой из нумерованных столбцов или любую из нумерованных строк одной таблицы и совместим его (или ее) со столбцом или строкой другой таблицы, имеющими тот же номер, то оба столбца (или обе строки) полностью совпадут.

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда поле для игры в перестановки имеет размеры не 6×6, а какие-нибудь другие (5×5, 4×4, 7×7 и т. д.). Важно лишь, чтобы в каждой строке и в каждом столбце всегда было ровно два темных кубика.

е. Мозаика, изображенная на рис. 34, *к*, содержит два замкнутых маршрута (если мы условимся считать, что белые клетки находятся под запретом). Эти маршруты показаны на рис. 296, *а*. Таким образом, эта мозаика родственна мозаике, изображенной на рис. 34, *з*, поскольку та тоже допускает два замкнутых маршрута

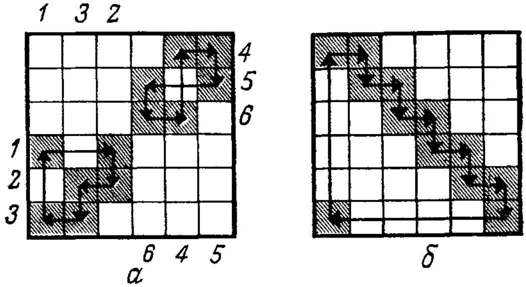


Рис. 296.

(рис. 294). В каждом случае любой из замкнутых маршрутов проходит по свободным клеткам трех строк и трех столбцов. Следовательно, обе задачи допускают разбиение на две независимые подзадачи. Ясно, что к каждой из подзадач в отдельности применимо утверждение, сформулированное в предыдущем пункте, поэтому соответствующие части обеих таблиц при наложении совпадают.

ж. Пользуясь приведенными выше соображениями, нетрудно построить мозаики, не переходящие друг в друга при перестановке строк и столбцов. По-видимому, читатель уже обратил внимание на то, что замкнутый маршрут при перестановке переходит снова в замкнутый маршрут. Изменяются лишь его очертания, но не число строк и столбцов, по которым соответственно проходят его горизонтальные и вертикальные участки. Число строк (или столбцов), по которым проходит замкнутый маршрут, мы назовем *рангом замкнутого маршрута.*

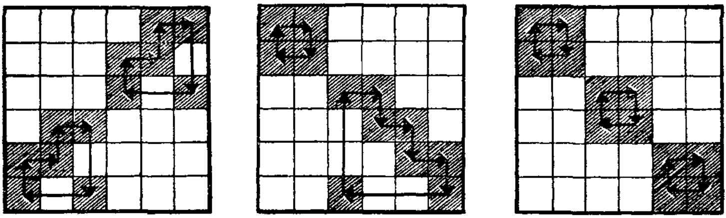
Строки и столбцы, по которым проходят этапы каждого замкнутого маршрута, образуют независимую часть таблицы. Число строк (столбцов), входящих в независимую часть таблицы, совпадает с упомянутым нами рангом замкнутого маршрута. При перестановке строк и столбцов независимая часть таблицы остается независимой, в силу чего число входящих в нее строк и столбцов (или, если воспользоваться специально введенным термином, ранг замкнутого маршрута) остается неизменным.

Из сказанного выше следует, что две таблицы переходят друг в друга при перестановке строк и столбцов в том и только в том случае, если они содержат одинаковое число замкнутых маршрутов одного и того же ранга.

Возникает вопрос: какой ранг могут иметь замкнутые маршруты на доске 6×6?

Ответ известен. Может случиться так, что все темные клетки выстроятся вдоль одного-единственного замкнутого маршрута. Простейшим примером замкнутого маршрута ранга 6 может служить маршрут, показанный на рис. 296.

Может случиться так, что темные клетки выстроятся вдоль двух замкнутых маршрутов. Здесь возможны два варианта: 2 маршрута ранга 3 или один маршрут ранга 2 и один маршрут ранга 4. (Ясно, что ранг замкнутого маршрута не может быть меньше 2, а сумма рангов всех замкнутых маршрутов совпадает с числом



а *б* *в*

Рис. 297.

строк (столбцов) в таблице, то есть для рассматриваемого нами варианта игры в перестановки равна 6. Оба случая встречаются в действительности.) По одному примеру двух маршрутов ранга 3 и маршрутов рангов 2 и 4 приведено на рис. 297, *а* и *б*.

Наконец, может представиться случай, когда таблица содержит три замкнутых маршрута ранга 2 (примером может служить мозаика, изображенная на рис 297, *в*).

Ясно, что ни один из перечисленных случаев не переходит в другой ни при какой перестановке строк и столбцов. Поэтому мозаики, изображенные на рис. 297, *а*, *б* и *в*, можно рассматривать как представителей трех совершенно различных типов мозаик.

Какая бы мозаика нам ни была задана, мы должны прежде всего выяснить, вдоль скольких замкнутых маршрутов выстраиваются ее темные клетки и каков ранг этих маршрутов. Если две мозаики принадлежат к одному и тому же типу, то любую из них можно преобразовать в другую так, как показано выше.

Рассмотрим, например, мозаику, изображенную на рис. 297, *а*. Ее темные кубики выстроились вдоль двух замкнутых маршрутов ранга 3 Следовательно, эта мозаика и мозаики, изображенные на рис. 296, *а* и 294, *а*, принадлежат к одному и тому же типу. Любую из этих трех мозаик можно преобразовать в любую другую, если воспользоваться способом, изложенным в решении задачи 71.

Итак, среди мозаик, приведенных в условии задачи, имеется четыре таких, которые нельзя преобразовать друг в друга, не нарушив при этом правил игры в перестановки.

Примечание 1. Если мозаики устроены так, что в каждой строке и в каждом столбце у них расположено два темных кубика, то преобразования производятся особенно просто (при условии, что одну из мозаик можно перевести в другую, не нарушая правил игры в перестановки). Отыскивая строки, у которых темные кубики расположены в одном и том же столбце, и поочередно переставляя их, мы, не вычерчивая замкнутых маршрутов и не нумеруя строк и столбцов, по существу придем к тому же упорядочению строк и столбцов. Таким образом, мы легко справимся с преобразованием мозаик, на которых не распространяется развитая выше теория игры в перестановки. Трудности возникают лишь в том случае, когда требуется выяснить, к одному или к разным типам принадлежат две данные перестановки, поскольку все попытки построить теорию для этого случая пока оказывались безуспешными. (Этим игра в перестановки несколько напоминает игру в пасьянс)

Примечание 2. Полученные результаты позволяют вывести интересное следствие. Решение задачи ж существенно ограничивает возможные типы мозаик размером 6×6, а именно: какие бы пять мозаик мы ни выбрали для игры в перестановки, среди них непременно найдутся по крайней мере две мозаики, которые перестановкой строк и столбцов можно перевести друг в друга.

Справедливость этого утверждения следует из решения задачи ж, если воспользоваться принципом коробки.

Примечание 3. Всякой задаче, относящейся к игре в перестановки (можно или нельзя перевести друг в друга две данные мозаики, переставляя лишь строки и столбцы), можно сопоставить некую двумерную логическую задачу. Такие аналогии используются и в наиболее фундаментальных разделах математики. Например, элементарную геометрию интересует вопрос о том, какие задачи на построение можно решить с помощью циркуля и линейки. Каждой геометрической задаче на построение можно сопоставить некоторую алгебраическую задачу, решение которой позволяет судить о том, разрешима или неразрешима исходная геометрическая задача с помощью циркуля и линейки.

76. ТРЕТИЙ ПРОГНОЗ СПОРТИВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

I решение. Пользуясь условиями задачи, составим следующую таблицу:

Места	1	2	3	4	5	Число правильно угаданных мест
I болельщик	A	B	C	D	E	3
II болельщик	B	D	E	A	C	2

Оба болельщика полностью разошлись в своих прогнозах. Следовательно, какое бы из пяти мест мы ни назвали, предсказания болельщиков относительно того, какая команда заняла это место, не могут быть верными одновременно. Это означает, что в лучшем случае действительности соответствует лишь одно из предсказаний. Таким образом, каждое место может быть правильно угадано не более чем одним болельщиком. Поскольку имеется всего пять мест и пять предсказаний (предсказания болельщиков относительно того, какая команда займет каждое место, мы рассматриваем одновременно), то *по принципу коробки судьба каждого места должна быть точно предсказана одним из болельщиков*. Это означает, что каждое из мест от 1-го до 5-го должна занять команда, названная либо первым, либо вторым болельщиком, то есть

	(I болельщик)	(II болельщик)	
1-е место заняла команда	либо A,	либо B,	(*)
2-е место заняла команда	либо B,	либо D,	
3-е место заняла команда	либо C,	либо E,	
4-е место заняла команда	либо D,	либо A,	
5-е место заняла команда	либо E,	либо C.	

Предположим, что место 1 заняла команда B. Тогда на место 2 вышла команда D (поскольку команда B, занявшая место 1, не может оказаться на месте 2), а на место 4 — команда A (поскольку команда D заняла место 2). Заметим, что в прогнозе первого болельщика уже на этом этапе решения места, которые заняли три команды, названы неверно, в то время как по условию задачи первый болельщик мог ошибиться не более 2 раз (3 места им названы правильно). Следовательно, наше исходное предположение было ошибочным: команда B не заняла 1-е место.

Отсюда следует, что *на 1-е место должна выйти команда A*. Тогда место 4 займет команда D (поскольку «конкурирующая» с ней команда A заняла место 1), а место 2 — команда B (поскольку команда D отошла на место 4). Это означает, что первый болельщик правильно назвал те команды, которые заняли места 1, 2 и 4. По условию задачи первый болельщик правильно предсказал судьбу 3 мест. Следовательно, команды, занявшие два остальных места (3 и 5), были предсказаны им неправильно. Отсюда мы заключаем, что команды, вышедшие на места 3 и 5, правильно предсказал второй болельщик. Итак, *место 3 заняла команда E, а 5 — команда C*.

Таким образом, данных, приведенных в условии задачи, достаточно для того, чтобы однозначно восстановить распределение мест между командами, принявшими участие в эстафете:

на 1-м месте A, на 2-м B, на 3-м E, на 4-м D и на 5-м C.

Мы видим, что указанное распределение мест удовлетворяет всем условиям задачи. Таким образом, команда, занявшая любое место, совпадает с командой, которая должна была занять это место по предсказанию одного из болельщиков.

II решение. Поскольку перед нами двумерная логическая задача, естественно попытаться решить ее с помощью таблицы. Промежуточный результат, отмеченный в предыдущем решении фигурной скобкой и знаком * (поскольку ничто не мешает нам провести те же рассуждения еще раз), представлен на рис. 298, *а* (предсказания первого болельщика отмечены черными кружками, а предсказания второго — звездочками). Во всех строках и всех столбцах таблицы находится по одному кружку и по одной звездочке. Связующие кружки (частичные решения) могут располагаться только в тех клетках, которые заняты либо черным кружком, либо звездочкой. Следовательно, если мы назовем связующие кружки «ладьями», то рассматриваемая нами задача сведется к частному случаю задачи 71. Начертив замкнутые маршруты (рис. 298, *б*), мы убедимся, что задача распадается на две независимые подзадачи, в одной из которых («меньшей») требуется установить соответствие между двумя множествами, содержащими по 2 элемента, а в другой («большей») — между двумя множествами, содержащими по 3 элемента. Удовлетворить требованию задачи, согласно которому первый болельщик правильно назвал команды, занявшие 3 места, а второй — команды, занявшие 2 места, мы можем лишь в том случае,

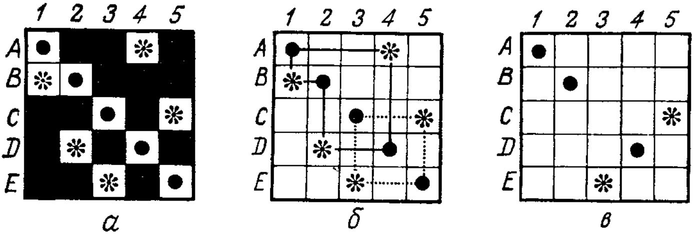


Рис. 298.

если в «большей» подзадаче связующие кружки займут клетки, отмеченные черными кружками, а в «меньшей» — звездочками. Задача допускает единственное решение, представленное на рис. 298, *в* (вряд ли нужно упоминать о том, что I и II решения сходятся).

77. ЕЩЕ ОДНА ЗАДАЧА НА ТУ ЖЕ ТЕМУ

1. Предсказывая, какие команды займут с 1-го по 7-е место, два болельщика в общей сложности сумели 9 раз дать правильный прогноз. Относительно того, какие команды заняли места 1, 2, 3, 6 и 7, их мнения полностью разошлись, поэтому команду, занявшую каждое из этих мест, мог правильно назвать не более чем один болельщик, а общее число сбывшихся предсказаний относительно команд, занявших перечисленные места, не может быть больше 5. Следовательно, 9 правильно угаданных (первым и вторым болельщиком) мест мы сможем насчитать лишь в том случае, если команды, занявшие места 4 и 5 (относительно этих команд мнения болельщиков совпали), оба болельщика назвали правильно. Следовательно, *4-е место заняла команда D, а 5-е — команда E.* С учетом этих сведений исходная таблица принимает следующий вид:

Места	1	2	3	6	7	Число правильно угаданных мест
I болельщик	*A*	*B*	*C*	*F*	*G*	3
II болельщик	*B*	*F*	*G*	*A*	*C*	2

Эта таблица полностью аналогична той, которую мы рассматривали, решая задачу 76. Отличие (чисто внешнее) состоит лишь в том, что в нашей таблице вместо 4 стоит 6, вместо 5 — цифра 7, буква D заменена буквой F, а буква E — буквой G. Следовательно, истинное распределение мест между оставшимися командами восстанавливается однозначно:

на 1-м месте A, на 2-м B, на 3-м G, на 6-м F и на 7-м C.

Таким образом, команды заняли следующие места:

на 1-м месте A, на 2-м B, на 3-м G, на 4-м D, на 5-м E, на 6-м F и на 7-м C.

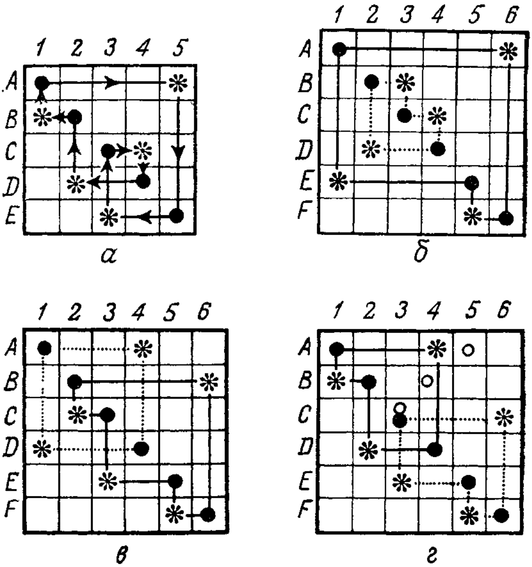


Рис. 299.

II. Решение этой задачи целиком (вплоть до замкнутого маршрута) повторяет II решение задачи 76 (рис. 299, *а*). Однако в отличие от задачи 76 рассматриваемую нами задачу нельзя разложить на две независимые части: на ее таблице имеется лишь один замкнутый маршрут. Это означает, что, расставив вдоль маршрута связующие кружки либо на 5 клеток, отмеченных черными кружками, либо на 5 клеток, отмеченных звездочками, мы получим решение задачи. Но тогда либо у первого болельщика сбылось бы 5, а у второго 0 предсказаний, либо у первого болельщика сбылось бы 0, а у второго 5 предсказаний. Следовательно, *условия задачи противоречивы*: они не позволяют восстановить места, которые заняли команды.

III. Задача допускает два замкнутых маршрута ранга 3, следовательно, ее можно разложить на две независимые задачи, в каждой из которых необходимо установить соответствие между двумя множествами, содержащими по 3 элемента (рис. 299, *б*). Это означает, что решение задачи мы получим, расположив связующие кружки либо в клетках внутреннего маршрута, отмеченных черными кружками, и клетках внешнего маршрута, отмеченных звездочками, либо, наоборот, в клетках внутреннего маршрута, отмеченных звездочками, и клетках внешнего маршрута, отмеченных черными кружками. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют два исхода соревнований:

1) *на 1-м месте A, на 2-м D, на 3-м B, на 4-м C, на 5-м E, на 6-м F*;

2) *на 1-м месте E, на 2-м B, на 3-м C, на 4-м D, на 5-м F, на 6-м A.*

Итак, *однозначно восстановить, чем закончились соревнования, в этом случае невозможно.*

IV. Задача допускает разбиение на две независимые подзадачи, из которых в одной задаче (ей соответствует замкнутый маршрут, показанный сплошной линией) устанавливается соответствие между двумя множествами, содержащими по 4 элемента, а в другой (ей соответствует замкнутый маршрут, изображенный пунктирной линией) — между двумя множествами, содержащими по 2 элемента (рис. 299, *в*). Это означает, что в одной подзадаче число правильно названных мест может быть равно 0 или 2, а в другой — 0 или 4 Как бы мы ни распределяли эти числа между болельщиками, сумма любых двух из них всегда будет четной, что невозможно, поскольку по условию задачи каждый болельщик правильно угадал команды, занявшие 3 места. Следовательно, *условия этой задачи противоречивы: восстановить по ним исход соревнований невозможно.*

V. Для того чтобы получить решение, достаточно начертить замкнутые маршруты, соответствующие прогнозам первого и второго болельщиков (рис. 299, *г*). Пользуясь маршрутами, находим два возможных исхода соревнований (все рассуждения такие же, как в III случае):

1) *ABEDFC;*
2) *BDCAEF.*

Первый вариант распределения мест между командами противоречит тому, что третий болельщик правильно угадал команду, занявшую одно из семи мест. Второй вариант удовлетворяет всем условиям задачи.

Закончить решение можно и иным способом. Если предсказания третьего болельщика отметить в таблице светлыми кружками (рис. 299, *г*), то станет заметно, что лишь одно его предсказание совпадает с предсказанием другого болельщика: то, которое соответствует клетке C — 3 (замкнутый маршрут, изображенный пунктирной линией). Поскольку сбылось только это предсказание третьего болельщика (все остальные светлые кружки оказываются «третьими лишними» и в соответствующей строке, и в соответствующем столбце), то отсюда мы однозначно восстанавливаем правильные предсказания и первого, и второго болельщиков.

Примечание. Разумеется, все задачи, решенные с помощью таблиц, можно было решить и «в уме», не прибегая к таблицам. Выглядели бы такие решения примерно так, как I решение задачи 76. В рассмотренных нами задачах таблица не только помогает упростить решение, но и лучше понять, уяснить структуру задачи.

78. ЗНАНИЕ ЯЗЫКОВ

Эта задача очень похожа на двумерные логические задачи. В ее условиях также фигурируют элементы двух множеств (одно образуют пятеро молодых людей, другое — языки, на которых они объясняются между собой). *Однако в этой задаче условия не устанавливают однозначного соответствия между элементами двух множеств*: каждый из молодых людей знает несколько иностранных языков (неизвестно лишь какие), и на каждом языке разговаривают не менее двух молодых людей.

Таким образом, эту задачу, несмотря на ее внешнее сходство с двумерными логическими задачами, все же нельзя причислить к последним.

По условию 5 все молодые люди вместе знают 10 языков (знание родного языка при подсчете не учитывалось).

Кто и какой иностранный язык знает? Больше всего сведений на эту тему сообщают условия 7 и 8: в каждом из них содержится упоминание о трех языках (лишь о трех языках, поскольку для одного из четверых оставшихся на берегу людей язык был родным).

Язык, о котором упоминается в условии 7, не может быть шведским. По условию 10 он не может быть финским и польским, а по условию 11 немецким. Следовательно, *не считая венгра, из членов компании венгерский язык знают поляк, финн и немец, а швед не знает венгерского языка.*

Отсюда следует, что язык, о котором упоминается в условии 8, не может быть венгерским. По условию 10 он не может быть польским или финским, а по условию 9 шведским. Следовательно, *не считая немца, из членов компании немецкий язык знают венгр, поляк и швед, а финн не знает немецкого языка.*

Полученные результаты удобно представить в виде таблицы. Введем сокращенные обозначения. Пусть *В* означает венгр, *П* — поляк, *Ф* — финн, *Ш* — швед и *Н* — немец, *в* — венгерский язык, *п* — польский, *ф* — финский, *ш* — шведский и *н* — немецкий. В клетки, стоящие на диагонали, впишем белые кружки (родные языки), а в остальных клетках черными кружками отметим иностранные языки, которые знает каждый из молодых людей (рис. 300, *а*).

В каждый столбец следует вписать столько черных кружков, сколько молодых людей разговаривают на данном (неродном для них) языке. По условию 10, в столбцах, отведенных польскому и финскому языкам, должно быть по одному черному кружку (на каждом из этих языков разговаривает 1 иностранец). По условию 9 шведский язык (кроме шведа) знают еще двое молодых людей. Из условия 6 мы узнаем о том, что в первой и во второй строках таблицы должно находиться по 3 черных кружка. Запишем эти данные рядом с каждой строкой.

Условие 5 теперь следует из того, что все молодые люди вместе знают 10 иностранных языков. Поэтому оно, строго говоря, в этой задаче лишнее, то есть относится к избыточной информации.

Из полученных ранее результатов и условия 12 следует, что *венгр не знает шведского языка*, ибо в противном случае он мог бы разговаривать со шведом на двух языках. *Всеми остальными иностранными языками венгр владеет*, а швед не знает ни одного иностранного языка, кроме уже упоминавшегося немецкого. Если мы впишем все эти сведения в таблицу (рис. 300, *б*), то выяснится, что в столбцах, отведенных польскому и финскому языкам, появится по одному новому черному кружку, а все остальные клетки окажутся под запретом (рис. 300, *в*). Поскольку в строке, занятой поляком, появился единственный запрет, то в остальные клетки необходимо вписать черные кружки.

На рис. 300, *в* нам осталось выяснить, кто еще говорит по-шведски. Ответить на этот вопрос нам помогает условие 11: *у финна и поляка вторым общим языком может быть лишь шведский.*

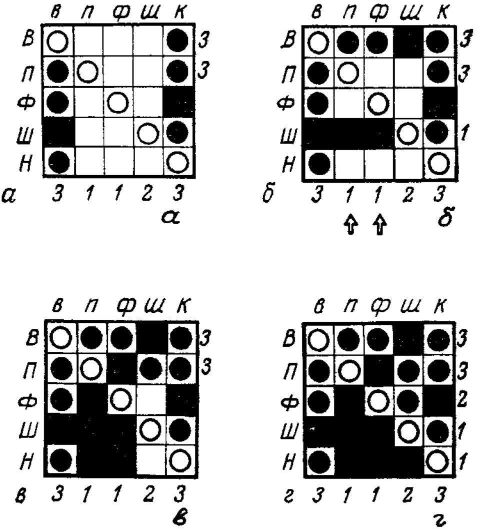


Рис. 300.

Полное решение задачи представлено на рис. 300, *г*. Итак, не считая родных языков,

венгр знает польский, финский и немецкий языки;

поляк знает венгерский, шведский и немецкий языки;

финн знает венгерский и шведский языки;

швед знает немецкий язык;

немец знает венгерский язык.

Нетрудно проверить, что знания этих языков молодыми людьми достаточно для того, чтобы они могли общаться между собой в полном соответствии с условиями задачи. Следовательно, приведенный перечень языков действительно является решением задачи.

79. ДРУЖЕСКИЙ УЖИН

В этой задаче речь также пойдет об установлении соответствия между элементами множеств, но интересовать нас будет не одно, а два различных соответствия. Во-первых, мы должны установить однозначное соответствие между множеством людей и множеством возрастов и, во-вторых, установить взаимно-однозначное соответствие между одной частью (одним подмножеством) множества людей и другой его частью. По условию 1 два различных соответствия, которые нам предстоит установить, связаны между собой. Можно надеяться, что, установив одно из них, мы с большей легкостью найдем другое. Таким образом, эта задача, хотя у нее есть и нечто общее с трехмерными логическими задачами, носит совсем иной характер. Поэтому не может быть и речи о том, чтобы применить к ней хорошо разработанные методы решения трехмерных логических задач, не исследовав предварительно пригодность этих методов для решения задач подобного типа.

Делать этого нельзя хотя бы потому, что о самих множествах нам известно далеко не все. Относительно множества людей обильную информацию можно почерпнуть из условий задачи, но сделать какие-либо заключения о возрасте жен и мужей гораздо труднее.

Нетрудно видеть, что условия 1 и 4, если их рассматривать одновременно, означают следующее: все мужья в общей сложности старше всех жен на $3 \cdot 5 = 15$ лет. Поскольку по условию 4 суммарный возраст всех супружеских пар составляет 151 год, то, вычитая из общей суммы избыток в 15 лет, получаем удвоенный суммарный возраст всех жен. Следовательно, *всем трем женам вместе 68 лет, а всем трем мужьям вместе $68 + 15 = 83$ года.*

Однако полученные сведения нам придется пока «отложить в сторону». Прежде чем мы сумеем воспользоваться ими, необходимо установить, кто на ком женат (то есть установить по крайней мере частично соответствие между двумя подмножествами множества людей). Лишь после этого условие 1 поможет нам определить возраст всех шестерых друзей.

Относительно соответствия между подмножеством жен и подмножеством мужей в условиях задачи не говорится ничего, если не считать упоминания о том, что каждый муж старше своей жены на 5 лет. Следовательно, все необходимые сведения нам придется найти самим. Посмотрим, в каких условиях задачи содержатся хотя бы косвенные сведения, позволяющие каким-либо другим образом связать возраст мужа с возрастом жены. Таких условий два: условия 3 и 5. Правда, в них говорится не о возрасте того или иного супруга в отдельности, а о *суммарном* возрасте какого-то мужчины и какой-то женщины. Попытаемся выяснить, какую информацию можно извлечь из этих условий.

Если известен суммарный возраст супружеской пары, то, уменьшив его на 5 лет, мы найдем удвоенный возраст жены. Поэтому в ответе после вычитания у нас должно получиться четное число. Это означает, что возраст мужа, который на 5 лет старше своей жены, должен выражаться нечетным числом. Следовательно, *суммарный возраст любой супружеской пары также должен быть нечетным числом.* Суммарные возрасты, о которых упоминается в условиях 3 и 5, выражаются четными числами. Следовательно, Юлишка не может быть женой ни Имре, ни Лайоша.

Итак, нам удалось получить два элементарных запрета. Отсюда мы уже можем вывести первое однозначно определенное частичное решение: *Андраш женат на Юлишке.*

Установить состав двух других супружеских пар нам пока не удастся: для этого необходим еще один запрет (рис. 301). Что же касается прямого соответствия между подмножеством мужей и подмножеством жен, то из всех жен его мы сумели установить лишь для Юлишки. Дальнейшее продвижение в этом направлении пока невозможно.

Однако полученный нами частичный результат может помочь нам в другом. Вооружившись новыми сведениями, попытаемся еще раз установить возраст всех супругов.

Если бы нам удалось установить состав двух супружеских пар, то состав третьей супружеской пары определился бы сам собой. К сожалению, и в условии 3, и в условии 5 речь идет лишь о сумме

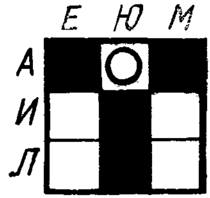


Рис. 301.

возрастов двух мужчин и двух женщин. С этой трудностью теперь мы уже можем справиться. Поскольку Андраш — муж Юлишки, то *Андраш на 5 лет старше Юлишки.*

Следовательно, и в условии 3, и в условии 5 Юлишку можно «заменить» Андрашем. Тогда по условию 3 Имре с Андрашем вместе $52+5=57$ лет. Следовательно, третьему мужу, *Ласло*, $83-57=$ *26 лет*. По условию 5 Ласло с Андрашем вместе $48+5=53$ года. Значит, *Андрашу* $53-26=$ *27 лет*, а *Имре* $83-53=$ *30 лет*.

Отсюда мы тотчас же находим, что жене Ласло $26-5=21$ год, жене Имре $30-5=25$ лет, а жене Андраша *Юлишке* $27-5=$ *22 года*. По условию 2, старшую из жен зовут Евой. Следовательно, *Еве 25 лет* (разумеется, из ее возраста еще можно не делать тайны).

Итак, состав двух других супружеских пар выяснен: *Имре женат на Еве, а Ласло — на Марте.*

Разумеется, всем ясно, что *если рассматриваемая задача допускает решение, то оно единственно.* Нетрудно проверить, что состав супружеских пар и возраст супругов удовлетворяют всем условиям задачи. Следовательно, искомое соответствие действительно установлено.

80. ПЯТЬ ПАЛАТОК В ОДНОМ РЯДУ

Перед нами логическая задача, в которой требуется установить соответствие между элементами заданных множеств. Такие задачи нам неоднократно приходилось решать и раньше. Однако рассматриваемая нами сейчас задача отличается от всех предыдущих тем, что в ней число множеств, между элементами которых необходимо установить взаимно-однозначное соответствие, равно не двум, не трем и даже не четырем, а *шести* (номер палатки, цвет палатки, национальность, любимый напиток, вид табачных изделий, которому отдает предпочтение обитатель палатки, и любимое животное). Поэтому задачу 80 с полным основанием можно считать шестимерной логической задачей. Табличный метод, которым мы пользовались почти все время, не позволяет «механизировать» решение (или по крайней мере нуждается в усовершенствовании). Учитывая все сказанное, мы вынуждены обратиться к таблице в ее первоначальной форме — той, с помощью которой была решена задача 4.

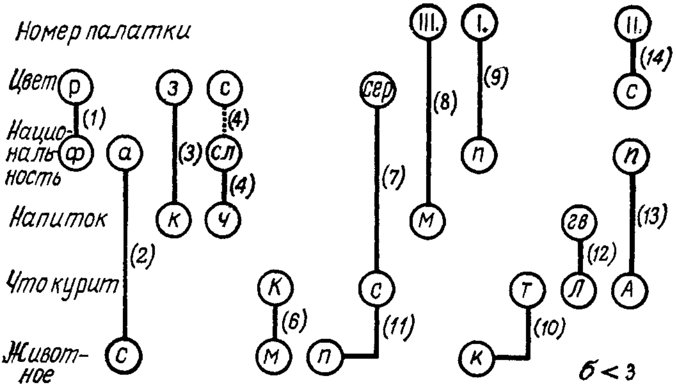


Рис. 302.

Перенумеруем палатки слева направо римскими цифрами I—V. В дальнейшем нам понадобятся сокращенные обозначения, смысл которых ясен из приводимой таблицы:

Цвет палатки	*б*	*с*	*к*	*сер*	*з*
Национальность	*а*	*ф*	*п*	*н*	*сл*
Любимый напиток	*к*	*л*	*гв*	*м*	*ч*
Что предпочитает курить	*А*	*К*	*Л*	*т*	*с*
Любимое животное	*м*	*с*	*к*	*о*	*п*

Вся информация, содержащаяся в условиях задачи, вполне наглядно представлена на схеме, приведенной на рис. 302. Сплошные линии означают, что элементы связаны между собой соответствием, пунктирные — запретом. Две линии, изогнутые под прямым углом, означают, что попугай живет в палатке, номер которой на единицу меньше, чем номер палатки, в которой обитает любитель сигар, а кошка — в палатке, номер которой на единицу меньше, чем у палатки, в которой живет любитель трубки. Наконец, неравенство *б* < *з* в правом нижнем углу схемы означает, что номер зеленой палатки больше номера белой палатки.

Нетрудно видеть, что информация, извлеченная из условий задачи, позволяет непосредственно установить соответствие между подавляющим большинством элементов шести множеств. Опираясь на эту информацию (и некоторые другие данные), мы сможем установить недостающие соответствия. Ответить на двойной вопрос задачи (в какой палатке живет любитель лимонада и кто всем домашним животным предпочитает обезьяну) мы сможем лишь после

Номер палатки	I	II	III	IV	V
Цвет	б	с			
Национальность	н				
Напиток			м		
Что курит					
Животное					

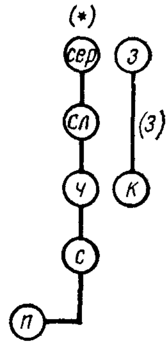


Рис. 303.

того, как установим все возможные соответствия между элементами рассматриваемых множеств.

Приведенная на схеме информация обладает одной особенностью: с каждой палаткой (точнее говоря, с номером каждой палатки) мы старались связать еще какие-нибудь элементы. Наш выбор пал на номера палаток потому, что они позволяют особенно просто *упорядочить* элементы множеств.

Помимо соответствий, указанных на схеме, мы сразу же находим новые соответствия. По условию 9 *в I палатке живет немец*, по условию 14 *II палатка синяя*, а по условию 8 в *III палатке живет любитель молока.*

Далее мы можем определить цвет *I* палатки. Действительно, по условию 5 она не может быть зеленой; по условию 14 — синей (поскольку синяя палатка расположена рядом). Так как по условию 1 в *I* палатке живет немец, то она не может быть красной. Наконец, она не может быть серой, поскольку на схеме, приведенной на рис. 302, видно, что попугай живет в палатке, которая находится слева (и, следовательно, имеет меньший номер) от серой палатки. Таким образом, *I палатка может быть лишь белой.*

Пользуясь полученными результатами, впишем то, что уже известно, в таблицу (рис. 303).

Из чисел, указывающих номер условия, позволившего установить соответствие, мы вычеркнули полностью «исчерпанные» условия 8, 9 и 14. (Настоятельно рекомендуем читателю перерисовать схему, изображенную на рис. 302, стерев с нее числа 8, 9 и 14.)

Затем мы можем легко установить цвет палатки, в которой живет словак. Действительно, в *I* палатке он жить не может, поскольку там живет немец (см. таблицу на рис. 303). По условию 4 словак не может жить в синей палатке, а по условию 1 — в красной. Но в зеленой палатке он также не может жить, поскольку ее (по условию 3) занимает любитель кофе, а словак, как гласит условие 4,

Номер палатки	I.	II.	III.	IV.	V.
цвет	б	с	к		
национальность	н		ф		
напиток			м		
что курит					
животное					

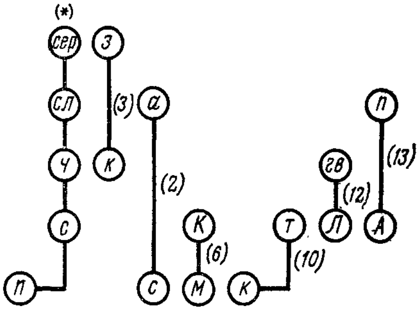


Рис. 304.

любит пить чай. Следовательно, *словак расположился в серой палатке*. Это обстоятельство изображено на схеме, расположенной на рис. 303 справа от таблицы. Серая палатка отмечена сверху звездочкой. Нетрудно видеть, что номер сёрой палатки может быть либо *IV*, либо *V*. Все остальные номера противоречили бы какому-нибудь из результатов, вписанных в таблицу ранее.

Палатка *III* может быть зеленой или красной. Зеленый цвет отпадает потому, что по условию 3 обитатель зеленой палатки пьет не молоко, а кофе. Следовательно, *палатка III может быть только красной* и по условию 1 *в ней живет француз*.

Впишем все вновь полученные сведения в таблицу (рис. 304).

При установлении соответствия между элементами множеств мы используем информацию, носителем которой служит схема, изображенная рядом с таблицей. На первый взгляд может показаться, что и эту информацию проще занести в соответствующие графы нашей таблицы. Однако если мы попытаемся выполнить свое намерение, то нас ожидает неудача: найти в таблице подходящее место для этой информации совсем не просто! Например, мы располагаем сведениями о том, что

по условию 11, поскольку оно относится к словаку, попугай может обитать лишь в палатке *III* или *IV*;

сигаретам «Лорд» и газированной воде (условие 12) может отдавать предпочтение лишь тот, кто живет в палатке *I* или *II* (обитатели остальных палаток не пьют газированную воду);

о сигаретах «Ароматные» в условии 13 распространялся обитатель синей или зеленой палатки (поскольку другие палатки не могут принадлежать поляку).

Но все эти сведения мы вынуждены держать под спудом, поскольку их трудно использовать для дальнейшего продвижения вперед. «Разоблачить» скрытые соответствия между элементами множеств не позволяют даже попытки пробным путем установить, какая из двух имеющихся возможностей ведет к нужной цели.

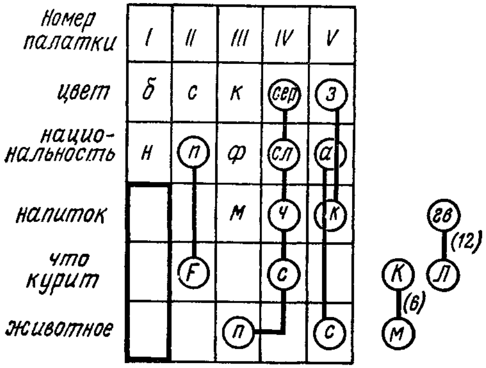


Рис. 305.

После нескольких неудачных попыток мы приходим к выводу, что ключ к дальнейшему продвижению вперед кроется в условии 2.

В какой палатке живет англичанин? Взглянув на таблицу, мы видим, что он может жить в палатке *II*, *IV* или *V*.

Однако довольно скоро выясняется, что палатку *IV* следует исключить из рассмотрения. Действительно, в *IV* или *V* палатке живет словак. Если он живет в *IV*, то англичанин заведомо не может жить в ней. Если же словак живет в *V*, то по условию 11 в *IV* располагается владелец попугая, а у англичанина любимое животное — собака.

Но в *V* палатке англичанин также не может жить. Если бы он оказался обитателем *V* палатки, то словак жил бы в *IV*, а поляк вынужден был бы поселиться во *II* палатке. В этом случае *V* палатка могла бы быть лишь зеленой. При этом таблица приняла бы такой вид, как показано на рис. 305.

Для парных соответствий, определяемых условиями 6 и 12, не остается другого места, кроме *I* столбца (точнее говоря, столбца, отведенного *I* палатке). Однако оба соответствия не укладываются в один и тот же столбец одновременно, поскольку немец отдает предпочтение лишь одному сорту сигарет.

Итак, предположение о том, что англичанин является владельцем *V* палатки, приводит к противоречию.

Следовательно, остается единственная возможность: *англичанин живет во II палатке.* Зная это, мы можем, опираясь на условия 3 и 13, выстроить цепочку из четырех элементов (на рис. 306 она отмечена двумя звездочками), поскольку поляк теперь может жить лишь

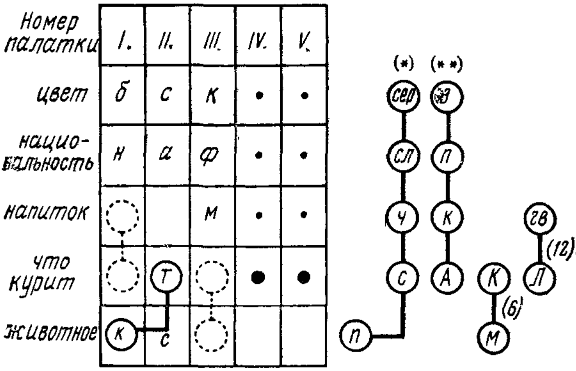


Рис. 306.

в зеленой палатке. Кто из двух — словак или поляк — живет в *IV* и кто в *V* палатке, пока не ясно, но поскольку оба могут находиться лишь в этих палатках, поляк курит сигареты «Ароматные», а словак — сигары, то в *IV* и *V* столбцах могут стоять лишь *А* и *с*, хотя и в неизвестном порядке (рис. 306). Это обстоятельство позволяет понять, что два элемента, связанных соответствием, о котором

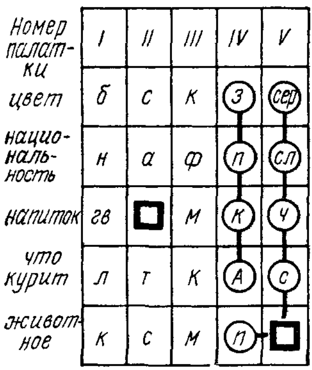


Рис. 307.

говорится в условии 10, могут расположиться в таблице лишь так, как показано на рис. 306. После этого «неразлучные» пары элементов, связанные условиями 6 и 12, могут расположиться лишь в *I* и *III* столбцах (на рис. 306 они показаны пунктиром).

Вписав полученные данные в таблицу, мы заметим, что цепочка элементов, помеченная звездочкой, может расположиться в таблице лишь в том случае, если *словак поселится в V палатке.*

Итак, единственное соответствие, которое возможно установить между элементами шести множеств, представлено в таблице на рис. 307.

Нетрудно проверить, что ни одно из 14 условий задачи при этом не нарушено. Итак, решение задачи 80 существует и единственно. Ответ задачи гласит следующее:

любимое животное словака — обезьяна,
любитель лимонада живет во II палатке.

Еще одна тщетная попытка «механизировать» решение

Решение задачи 80 вряд ли можно назвать легким. Его можно было бы существенно упростить, если бы нам удалось хотя бы часть рассуждений проводить «механически».

Нельзя ли каким-нибудь образом приспособить для решения многомерных логических задач метод трех таблиц (или пространственной решетки), введенный в главе III?

Безусловно, можно! Задачи такого типа, как задача 80, по самой своей природе особенно удобны для подобных методов решения, поскольку в них речь идет об установлении взаимно-однозначного соответствия между элементами нескольких множеств. Более того, в каком-то смысле они даже проще задач, рассмотренных нами в главе III, поскольку в большинстве условий содержатся не запреты, а прямые указания о существовании соответствия между отдельными элементами множеств.

Правда, размерность логической задачи в нашем случае уже равна 6: в ней требуется установить взаимно-однозначное соответствие между элементами 6 множеств. С другой стороны, предложенный нами метод трех таблиц в своей первоначальной форме был приспособлен к установлению взаимно-однозначного соответствия между элементами *трех* множеств. Мы не могли утверждать заранее, что если нам удастся установить взаимно-однозначное соответствие между элементами двух множеств, то это непременно поможет выяснить соответствие между двумя выбранными множествами и каким-то третьим множеством. Отсюда можно сделать следующий вывод: «механизировать» решение шестимерной логической задачи нам заведомо удастся лишь в том случае, если *любые три из шести множеств мы используем в качестве нумерующих множеств для составления трех таблиц.* Таким образом, нам понадобится построить 20 наборов, каждый из которых состоит из трех таблиц. Перечислим их:

Номер — Цвет — Нац,	Цвет — Нац — Нап,
Номер — Цвет — Нап,	Цвет — Нац — Таб,
Номер — Цвет — Таб,	Цвет — Нац — Ж,
Номер — Цвет — Ж,	Цвет — Нап — Таб,
Номер — Нац — Нап,	Цвет — Нап — Ж,
Номер — Нац — Таб,	Цвет — Таб — Ж,
Номер — Нац — Ж,	Нац — Нап — Таб,
Номер — Нап — Таб,	Нац — Нап — Ж,
Номер — Нап — Ж,	Нац — Таб — Ж,
Номер — Таб — Ж,	Нап — Таб — Ж.

(*Номер* означает номер палатки, *Цвет* — ее цвет, *Нац* — национальность обитателя палатки, *Нап* — его любимый напиток, *Таб* — вид табачных изделий, которому он отдает предпочтение, *Ж* — его любимое животное.)

Те, кто изучал комбинаторику, несомненно, обратили внимание на то, что мы составили все возможные *сочетания из шести множеств по три.* Число таких сочетаний, как известно, равно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Таким образом, в «механизированном» решении нам пришлось бы одновременно рассматривать 20 наборов, каждый из которых содержит по 3 таблицы, то есть всего $3 \cdot 20 = 60$ таблиц! Ясно, что это потребовало бы столь огромной затраты труда, что говорить о какой-либо «пользе», якобы приносимой «механизацией» решения, не приходится. Более того, при таком количестве таблиц совершить ошибку было бы легко, а обнаружить ее — чрезвычайно трудно.

С аналогичной ситуацией мы столкнулись бы и в том случае, если бы попытались применить к решению шестимерной логической задачи метод пространственной решетки: нам пришлось бы рассматривать одновременно 20 пространственных решеток (то есть ровно столько, сколько наборов из трех таблиц мы бы построили в первом случае).

Однако мы могли бы воспользоваться третьим способом: обобщить метод трех таблиц и разработать метод n таблиц, где $n > 3$. Ясно, что такой подход сопряжен с еще большими трудностями. Не следует думать, будто для решения шестимерной логической задачи было бы достаточно 6 таблиц! Основная особенность метода трех таблиц заключается в том, что каждая таблица соответствует выбору одной из трех пар множеств. Из 6 множеств мы можем составить столько таблиц, сколько существует сочетаний из 6 по 2, то есть

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Ясно, что и это число довольно велико. Впрочем, это не единственная трудность. Правило соответствия, правило пересадки, правило дополнительности и другие аналогичные правила применимы лишь тогда, когда в рассматриваемый набор таблиц входят все множества, между которыми требуется установить взаимно-однозначное соответствие. Поскольку каждое множество должно войти в пару со всеми остальными множествами, то к каждой таблице мы должны были бы еще приложить по 4 других множества. Разобраться в хаосе пересекающихся линий было бы просто невозможно.

Поэтому нам и пришлось решать задачу 80 менее механизированным, но обозримым методом.

НЕ ВСЕ СЛЕДУЕТ СТРИЧЬ ПОД ОДНУ ГРЕБЕНКУ

В этой главе мы рассмотрели группу задач на установление соответствия между элементами множеств, для решения которых прежние методы либо недостаточны, либо вообще неприменимы.

Почему «не все следует стричь под одну гребенку?»

1. Прежде всего потому, что *в математике количественное изменение часто переходит в качественное.* Теорема единственности, доказанная для двумерных логических задач (задача 25), не выполняется для трехмерных логических задач (задачи 58—60). Применение таблиц оказывается весьма успешным при решении дву- и трехмерных логических задач, но с увеличением размерности становится чрезмерно сложным (задача 80).

2. Математические задачи неисчерпаемо разнообразны, и какую бы «гребенку» мы ни избрали, всегда найдется задача, «причесать» которую нам не удастся. Например, в задачах 64—68, 76, 77 и 79 требуется установить соответствие между множествами, но либо не все условия задач допускают разложение на элементарные запреты, либо такое разложение нецелесообразно (хотя и возможно), а условия задачи 78 не устанавливают взаимно-однозначного соответствия между элементами рассматриваемых множеств.

3. Во многих случаях стричь под одну гребенку не рекомендуется просто потому, что есть другие, лучшие «гребенки» (например, во многих задачах мы с успехом использовали принцип коробки и другие «побочные» соображения). Прежде чем остановить свой выбор на той или иной «гребенке», необходимо исследовать, подходит ли она к решению интересующей нас задачи.

Весьма характерна в этом отношении задача 65 («Восемь школьников»). Сама задача четырехмерна, ее условия не содержат элементарных запретов, и тем не менее решить задачу было совсем не трудно!

4. Не только последняя глава, но и содержание всей предыдущей части нашей книги говорит о том, что *в математике между различными ее разделами существует тесная взаимосвязь.* Хотя речь в нашей книге все время шла лишь о логических задачах, мы то и дело оказывались на «чужой территории»: затронули некоторые элементарные свойства чисел (принцип коробки, ряд натуральных чисел), установили аналогию с алгеброй (между расстановкой ладей на шахматных досках и вычислением определителей), геометрией (метод трех таблиц, пространственная решетка) и прежде всего с начертательной геометрией («гаражи» Тридесятого государства, три таблицы как три проекции пространствен-

ной решетки) и т. д. Список примеров можно было бы продолжить. Назовем лишь один: вычерчивание замкнутых маршрутов применяется в теории графов.

5. Причины, перечисленные в четырех предыдущих пунктах, позволяют понять, почему «не всех следует стричь под одну гребенку», но перечень их далеко не полный. Перечислить все причины просто невозможно! Но именно потому, что логические задачи столь разнообразны, стричь их под одну гребенку не следует.

Часть V

81. СОРЕВНОВАНИЯ ПО ФЕХТОВАНИЮ

Для удобства рассуждений обозначим через N одного из тех участников соревнований, чей контрольный листок находится среди восьми листков, отложенных судейской коллегией. (Таким образом, N — один из спортсменов, занявших 8 первых мест.)

По условию задачи листки всех фехтовальщиков, фамилии которых значатся в контрольном листке N (то есть тех фехтовальщиков, над которыми N одержал победу), найдены. В свою очередь на этих листках значатся фамилии участников соревнований, проигравших поединки тем спортсменам, над которыми N одержал победу.

Кто еще мог принимать участие в соревновании?

Тех фамилий, которых нет в листке спортсмена N, не может быть и в контрольных листках спортсменов, проигравших поединки фехтовальщику N, поскольку те, кто одержал победу над N, одержали победу и над более слабыми спортсменами, проигравшими N. Следовательно, каждый из таких спортсменов одержал по крайней мере на одну победу больше, чем N, и в списке победителей их фамилии должны идти перед фамилией N. Но это означает, что их контрольные листки находятся среди восьми листков, отложенных судейской коллегией.

Следовательно, если мы выпишем фамилии всех спортсменов, занявших более высокие места, чем N, фамилию N и фамилии всех, над кем N одержал победу, то получим полный список участников соревнований.

82. ТРИ СЫНА

По условию задачи возраст каждого сына выражается целым числом, а произведение всех трех чисел равно 36.

Кроме того, в условии задачи содержатся некие «тайные» сведения относительно суммы трех чисел. Их оказалось достаточно для того, чтобы математик смог определить возраст сыновей своего коллеги. Нам же мешает одно досадное обстоятельство: мы не знаем, какое число стояло на календаре в день разговора между двумя математиками. Следовательно, мы можем лишь выписать все тройки целых чисел, произведение которых равно 36.

Итак, разложим число 36 всеми возможными способами на три целых множителя. Для того чтобы ничего не упустить, будем действовать не наугад, а по заранее продуманной системе. Выпишем все делители числа 36:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36.$$

Те тройки чисел («возрастов»), которые отличаются лишь порядком входящих в них делителей числа 36, мы будем считать тождественными. Условимся располагать числа в каждой тройке в неубывающем порядке (то есть сначала выписывать предполагаемый возраст младшего, затем среднего и под конец старшего сына).

Пусть первый член тройки чисел равен 1. Поскольку первое число равно 1, то произведение двух других должно быть равно 36. Поэтому мы разложим число 36 всеми возможными способами на два множителя: $1\cdot 36$, $2\cdot 18$, $3\cdot 12$, $4\cdot 9$, $6\cdot 6$. Итак, возможны лишь следующие тройки делителей числа 36, которые начинаются с 1:

$$1\cdot 1\cdot 36,\quad 1\cdot 1\cdot 18,\quad 1\cdot 3\cdot 12,\quad 1\cdot 4\cdot 9,\quad 1\cdot 6\cdot 6.$$

Пусть теперь первый член тройки равен 2. Тогда произведение двух других делителей числа 36 должно быть равно $36:2=18$ Перечислим их: $1\cdot 18$, $2\cdot 9$, $3\cdot 6$. Поскольку первый член тройки равен 2, то все остальные числа должны быть не меньше 2 (иначе мы бы нарушили требование о том, что числа внутри каждой тройки делителей числа 36 должны располагаться в неубывающем порядке). Таким образом, мы оставляем лишь два последних разложения: $2\cdot 9$ и $3\cdot 6$. Итак, выписываем все тройки делителей числа 36, которые начинаются с 2:

$$2\cdot 2\cdot 9,\quad 2\cdot 3\cdot 6.$$

Рассмотрим теперь случай, когда первый член тройки делителей равен 3. Произведение двух остальных членов тройки должно быть равно $36:3=12$. Число 12 можно разложить на 2 множителя тремя способами: $1\cdot 12$, $2\cdot 6$, $3\cdot 4$. Но поскольку нас интересуют лишь те тройки делителей числа 36, которые начинаются с 3, то два первых разложения необходимо отбросить. Остается лишь последнее разложение: $3\cdot 4$. Итак, мы получаем следующее разложение числа 36:

$$3\cdot 3\cdot 4.$$

Других разложений числа 36 на 3 множителя не существует. Действительно, все остальные тройки должны были бы начинаться по крайней мере с 4. Следовательно, все члены тройки должны были бы быть не меньше 4. Но произведение трех чисел, каждое из которых не меньше 4, было бы не меньше $4\cdot 4\cdot 4=64$, то есть заведомо больше 36. Следовательно, существуют лишь те восемь различных способов разбиения числа 36 на 3 (неубывающих) множителя, которые мы выписали выше.

Поскольку для решения задачи нам понадобится сумма всех членов каждой тройки, выпишем ее для каждого разложения:

$$
\begin{array}{llll}
1\cdot 1\cdot 36, & 1+1+36=38; & 1\cdot 6\cdot 6, & 1+6+6=13; \\
1\cdot 2\cdot 18, & 1+2+18=21; & 2\cdot 2\cdot 9, & 2+2+9=13; \\
1\cdot 3\cdot 12, & 1+3+12=16; & 2\cdot 3\cdot 6, & 2+3+6=11; \\
1\cdot 4\cdot 9, & 1+4+9=14; & 3\cdot 3\cdot 4, & 3+3+4=10.
\end{array}
$$

Какое из разложений неявно упоминалось в рассказе отца трех сыновей?

По условию задачи математик, зная сумму трех возрастов, не мог тем не менее определить возраст каждого из сыновей своего коллеги. Это могло произойти лишь в том случае, если среди разложений числа 36 на 3 множителя можно найти по крайней мере два таких, у которых суммы трех делителей числа 36 совпадают.

Просматривая список разложений (первое разложение можно сразу же отбросить, поскольку ни в одном из 12 месяцев нет 38 дней), мы убедимся, что имеются лишь два разложения с одинаковыми суммами делителей числа 36:

$$1\cdot 6\cdot 6, \quad 1+6+6=13$$

и

$$2\cdot 2\cdot 9, \quad 2+2+9=13.$$

Следовательно, разговор мог состояться лишь *13-го числа какого-то месяца*, а сыновьям могло быть либо 1 год, 6 лет и 6 лет, либо 2 года, 2 года и 9 лет. Однако в последнем случае два брата моложе третьего, поэтому известить бабушку и дедушку о прибавлении семейства мог лишь один сын, а не двое (как говорится в условии задачи). Следовательно, этот случай можно отбросить. Итак, *одному сыну 1 год, а двум старшим по 6 лет* (двое старших сыновей математика близнецы).

Примечание. При выписывании всех разложений числа 36 на 3 множителя можно было бы воспользоваться разложением числа 36 на *простые множители*:

$$36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3.$$

Все тройки делителей числа 36, не содержащие так называемых *тривиальных делителей* (то есть 1 и самого числа 36), мы получим, разбив всеми возможными способами четыре простых делителя на три группы. После этого нам останется лишь дописать те разложения числа 36 на три множителя, которые содержат 1 или 36 (или 1 и 36).

83. ФУТБОЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Ясно, что восстановить недостающие данные в таблице можно. Особенно легко восстановить те данные, которые относятся к последней команде («Точприборы»).

В любом из сыгранных футбольных матчей каждый гол засчитывается дважды: одной команде как забитый мяч, другой — как пропущенный. Следовательно, в пятом столбце таблицы сумма числа пропущенных мячей равна сумме числа забитых мячей. Число мячей, забитых каждой командой, известно. Сумма числа забитых мячей равна $6 + 2 + 3 + 1 = 12$, поэтому и сумма числа пропущенных мячей также равна 12. Таким образом, команда «Точприборы» пропустила в свои ворота 4 мяча.

Впишем полученные данные в турнирную таблицу:

1.	К	3	*	*	*	*	6 : 1
2.	П	3	*	*	*	*	2 : 4
3.	ТР	3	*	*	*	*	3 : 3
4.	Т	3	*	2	*	*	1 : 4

(Мы сократили названия команд, оставив лишь первые буквы. Цифры 3 означают, что каждая команда провела за время турнира три матча.)

Число очков, набранных каждой командой, мы установим лишь после того, как выясним исход всех проведенных ею встреч: в скольких она одержала победу, сколько свела вничью и в скольких потерпела поражение. В свою очередь эти данные мы получим лишь после того, как узнаем, чем закончился каждый матч.

У команды Т две из трех встреч закончились вничью. Как закончилась третья встреча? Если бы команда в третьем матче одержала победу, то она набрала бы всего 4 очка. Но тогда и все предыдущие команды, занявшие в турнире более высокие места, должны были бы набрать не менее 4 очков, а все четыре команды вместе — по крайней мере $4 \cdot 4 = 16$ очков. Но это невозможно, поскольку 4 команды провели всего 6 встреч и, следовательно, могли набрать в сумме не более $2 \cdot 6 = 12$ очков.

Итак, команда Т проиграла свою третью встречу. Теперь мы уже располагаем всеми данными, которые необходимы для того, чтобы заполнить четвертую строку турнирной таблицы:

4.	*Т*	*3*	*0*	*2*	*1*	*2*	*1 : 4.*

Сколько очков набрала команда ТР, занявшая третье место? Ясно, что не менее двух очков, поскольку 2 очка набрала команда Т, занявшая последнее место.

Однако команда ТР не могла набрать более двух очков, поскольку у команды П соотношение забитых и пропущенных мячей хуже, чем у ТР, но она тем не менее вышла на 2-е место, опередив команду ТР (набрав больше очков). Следовательно, если бы команда ТР набрала 3 очка, то команда П должна была бы набрать не менее 4 очков, а все команды вместе — не менее $2 + 3 + 4 + 4 = 13$ очков, а мы знаем, что сумма очков, набранных всеми четырьмя командами в турнире, не может превышать 12 очков.

Итак, команда ТР могла набрать лишь 2 очка, не меньше и не больше. Это означает, что из трех проведенных встреч она либо 2 свела вничью и 1 проиграла, либо 1 выиграла и 2 проиграла.

Первый случай (2 ничьих и одно поражение) отпадает, поскольку если бы у ТР не было ни одной победы, то соотношение забитых и пропущенных мячей было бы иное: забитых было бы меньше, чем пропущенных, а в таблице приведено соотношение 3 : 3. Следовательно, возможен лишь второй случай (1 победа и 2 поражения).

Пользуясь полученными сведениями, заполняем третью строку таблицы:

3. ТР 3 1 0 2 2 3:3,

после чего исходная таблица принимает следующий вид:

1.	К	3	*	*	*	*	6:1
2.	П	3	*	*	*	*	2:4
3.	ТР	3	1	0	2	2	3:3
4.	Т	3	0	2	1	2	1:4.

Теперь мы уже в состоянии определить исход всех шести матчей, не обращая пока внимания на счет, которым закончились встречи.

Ни один из матчей, проведенных командой Т и закончившихся вничью, не мог быть сыгран с командой ТР, поскольку у ТР за весь турнир не было ни одной ничьей. Следовательно,

встречи К — Т и П — Т закончились вничью.

Но тогда единственное поражение команде Т нанесла команда ТР:

ТР победила команду Т.

Неизвестным остался лишь исход встречи К — П.

Нам известен исход двух встреч, проведенных командой П: одна из них окончилась ее победой, другая — ничьей. Однако из соотношения голов видно, что у П пропущенных мячей больше, чем забитых. Следовательно, одна встреча должна была закончиться поражением:

команда К одержала победу над командой П.

Итак, турнирная таблица заполнена:

1.	К	3	2	1	0	5	6:1
2.	П	3	1	1	1	3	2:4
3.	ТР	3	1	0	2	2	3:3
4.	Т	3	0	2	1	2	1:4

Выясним теперь, с каким счетом закончилась каждая встреча. Составим для этого новую таблицу (в — выигрыш, н — ничья, п — проигрыш):

	К	П	ТР	Т
К	—	в	в	н
П	п	—	в	н
ТР	п	п	—	в
Т	н	н	п	—

Итак, восстановим счет, с которым закончился каждый матч.

Поскольку команда Т, во-первых, пропустила в свои ворота на 3 мяча больше, чем забила, и, во-вторых, лишь одна из проведенных ею встреч не закончилась вничью, то эти три мяча были забиты в ворота Т во время встречи, закончившейся поражением. Следовательно, футболисты из команды ТР забили в ворота команды Т те самые 3 мяча, которые принесли победу их команде (то есть встреча Т — ТР могла закончиться со счетом 3 : 0, 4 : 1, 5 : 2, 6 : 3 и т. д.

в пользу команды ТР). Но поскольку ТР за весь турнир забила всего лишь 3 мяча, то *встреча Т — ТР могла закончиться лишь со счетом 0 : 3.*

Из соотношения забитых и пропущенных мячей для команды ТР (см. заполненную нами турнирную таблицу) следует, что *встречи К — Т и П — Т закончились вничью со счетом 0 : 0 и 1 : 1* (хотя пока еще неизвестно, какая именно встреча закончилась одним, а какая другим счетом).

Взглянув на соотношение забитых и пропущенных мячей для команды ТР, мы увидим, что *встречи К — ТР и П — ТР закончились со счетом 1 : 0 и 2 : 0* (хотя опять неизвестно, какая из двух встреч закончилась со счетом 1 : 0 и какая — со счетом 2 : 0).

Мы не можем пока остановить свой выбор ни на одном из возможных исходов, поскольку неизвестен счет, с которым закончилась встреча команд К — П. Наоборот, установить этот счет возможно лишь в том случае, если четыре названные выше встречи (относительно которых нам известны не «индивидуальные», а лишь «парные» исходы) каким-то образом «заберут» часть мячей, забитых и пропущенных командами К и П. Разумеется, речь идет о том, чтобы уменьшить число забитых и пропущенных мячей не у каждой из команд К и П *в отдельности, а у обеих команд вместе.*

Приняв во внимание исходы четырех перечисленных выше встреч, мы увидим, что команды К и П во встречах с командами Т и ТР забили в общей сложности $0 + 1 + 1 + 2 = 4$ мяча из $6 + + 2 = 8$ мячей, забитых во время турнира. Следовательно, остальные $8 - 4 = 4$ мяча команды К и П забили во время других встреч. Это означает, что во время встречи К — П было забито 4 гола, поэтому встреча могла закончиться (поскольку выиграла ее команда К) либо со счетом 4 : 0, либо со счетом 3 : 1.

Но у команды П соотношение забитых и пропущенных мячей равно 2 : 4. Следовательно, она пропустила в свои ворота на 2 мяча больше, чем забила сама. При этом команда П одну встречу выиграла, то есть в этой встрече ее футболисты должны были забить больше мячей, чем их противники. Этот «избыток» забитых мячей по сравнению с пропущенными должен быть равен 2 мячам. Следовательно, *встреча команд К — П закончилась со счетом 4 : 0.*

Поскольку команда П во время встречи с командой К пропустила в свои ворота 4 мяча, то ни в одной из остальных встреч ей не могли забить больше ни одного мяча. Следовательно, *встреча команд П — Т закончилась с «сухим» счетом 0 : 0, а встреча команд К — Т — со счетом 1 : 1.*

Эти встречи забрали у команд К и П «лишние мячи» и позволили установить исходы двух оставшихся встреч. *Встреча команд К — ТР закончилась со счетом 1 : 0, а встреча команд П — ТР — со счетом 2 : 0.*

Итак, полностью заполненная турнирная таблица выглядит так:

	К	П	ТР	Т
К	—	4 : 0	1 : 0	1 : 1
П	0 : 4	—	2 : 0	0 : 0
ТР	0 : 1	0 : 2	—	3 : 0
Т	1 : 1	0 : 0	0 : 3	—

Все условия задачи удовлетворены. Таким образом, Янчи (если он увлекался не только футболом, но и решением логических задач) мог однозначно восстановить полную картину того футбольного турнира, о котором сообщалось в присланном ему письме.

84. ЕЩЕ ОДНА ФУТБОЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Ясно, что надеяться решить задачу можно лишь в том случае, если относительно одного или нескольких высказываний мы сумеем определить, истинны они или ложны.

I решение. Нетрудно заметить, что показания Фери сильно противоречат показаниям Шаньи. Высказывания 3 и 11 имеют противоположный смысл. Следовательно, одно из них ложно, а другое истинно. Несколько иначе обстоит дело с высказываниями 2 и 12: по крайней мере одно из них ложно. Таким образом, из четырех высказываний (2, 3, 11 и 12) по крайней мере два заведомо ложных. Однако поскольку каждый из ребят дал лишь одно ложное показание, то по принципу коробки отсюда следует, что в четырех приведенных выше показаниях Фери и Шаньи допустили по одному ложному высказыванию.

Значит, остальные высказывания истинны. Итак, утверждения 1 и 10 также истинны: *ни Фери, ни Шаньи не виноваты.*

С другой стороны, если высказывание 5 истинно, то высказывание 4 также должно быть истинным. Если же высказывание 5 ложно, то высказывание 4 тем не менее истинно, поскольку Дьюси мог солгать лишь один раз. Таким образом, высказывание 4 истинно в любом случае. *окно разбил не Дьюси.*

Из двух полученных выводов следует лишь одно заключение: *окно разбил Лаци.*

Проверка. Если окно действительно разбил Лаци, то

в показаниях *Фери* высказывание 1 истинно, а высказывание 3 ложно;

в показаниях *Дьюси* высказывания 4 и 5 истинны;

в показаниях *Лаци* высказывание 7 ложно, а высказывание 9 истинно;

в показаниях *Шаньи* высказывания 10 и 11 истинны.

Таким образом, условие задачи, согласно которому каждый из ребят в своих показаниях допустил два истинных и одно ложное высказывания, будет выполнено, если высказывания 2 и 8 истинны, а высказывания 6 и 12 ложны. Поскольку оба предположения допустимы (ни одно из них не приводит к противоречию), то все условия задачи выполнены. Итак, следствием установлено, что *окно действительно разбил Лаци.*

II решение. В предыдущем решении сравнение высказываний 5 и 4 позволило установить, что высказывание 4 истинно независимо от того, истинно или ложно высказывание 5. Аналогично сравнение высказываний 10 и 11 позволяет утверждать, что высказывание 10 должно быть истинным. Таким образом, высказывания 4 и 10 свидетельствуют, что ни Дьюси, ни Шаньи не виноваты.

Это означает, что попасть мячом в окно мог либо Фери, либо Лаци. Следовательно, из высказываний 1 и 3 одно заведомо ложно. Поскольку Фери может солгать лишь один раз, то высказывание 2 должно быть истинным. Но тогда условие 10, противоречащее условию 2, может быть только ложным, так как два остальных высказывания Шаньи, в том числе и высказывание 11, должны быть истинными. Но если высказывание 11 истинно, то окно разбил Лаци.

85. АНКЕТНЫЕ ДАННЫЕ

Задачу можно решить двумя разными способами. Первый способ использует соображения нематематического характера:

первое издание книги вышло в 1970 г. *, значит, задача была написана в это время и, следовательно, дата составления анкеты относится примерно к этому же времени;

футболист не может быть старше 50 лет;

отец по крайней мере старше своего знаменитого сына и т. д.

Второй способ не использует таких «посторонних» соображений.

Задачу можно решать и тем, и другим способом. (А поскольку нам хотелось, чтобы читатель мог составить полное представление о каждом из способов, то мы приводим оба решения целиком.)

Решение, полученное первым способом. Поскольку футболист, выступающий в такой известной команде, как «Точприборы», не может быть старше 50 лет, то числа, стоящие под буквами *а* по горизонтали и вертикали, должны начинаться с цифр 1 9.

Если четырехзначное число, стоящее под буквой *а* по горизонтали (рис. 308, *а*), прибавить к числу, стоящему под буквой *в* по вертикали, то должен получиться «прошлый год», то есть число 1970. Следовательно, третьей цифрой числа, стоящего под буквой *а* по горизонтали (эта цифра попадает в клетку с буквой *в*), может быть лишь цифра 3. (В противном случае сумма чисел, стоящих под буквой *а* по горизонтали и *в* по вертикали, была бы больше или меньше 1970.)

Из определения числа, стоящего под буквой *ж* по горизонтали, следует, что число, стоящее под буквой *о* по горизонтали, равно сумме чисел, стоящих по горизонтали под буквами *ж* и *з*. Следовательно, число, стоящее под буквой *о* по горизонтали, больше 100, но меньше 200. Таким образом, это трехзначное число (справа его ограничивает жирная вертикальная линия) может начинаться лишь с цифры 1. А поскольку оно читается одинаково от начала к концу и от конца к началу, то его последняя цифра также равна 1.

Все полученные результаты представлены на рис. 308, *а*.

По смыслу число, стоящее под буквой *з* по горизонтали, не может быть больше 50. Следовательно, вторая цифра числа, стоящего под буквой *е* по вертикали, не может быть больше 5. Это означает, что число, стоящее под буквой *и* по горизонтали (оно на 1 больше числа, стоящего под буквой *в* по вертикали), начинается с цифры 3 (рис. 308, *б*).

Но тогда число, стоящее под буквой *д* по вертикали, оканчивается цифрой 3. Следовательно, число, стоящее под буквой *л* по вертикали (оно на 7 больше числа, стоящего по вертикали под буквой *д*), оканчивается цифрой 0 (рис. 308, *в*).

---

* Русский перевод сделан со второго издания. — *Прим. перев.*

Итак, число, стоящее под буквой *о* по горизонтали, известно: оно равно 101. Произведение любого двузначного числа и числа 101 мы получим, выписав это двузначное число подряд два раза. Например, $23 \cdot 101 = 2323$, $59 \cdot 101 = 5959$ и т. д. Но число, стоящее под буквой *г* по вертикали, как раз и равно произведению оканчивающегося на 0 числа, стоящего под буквой *л* по вертикали, и числа 101. Следовательно, вторая и четвертая цифры числа, стоящего под буквой *г* по вертикали, равны 0 (рис. 308, *г*).

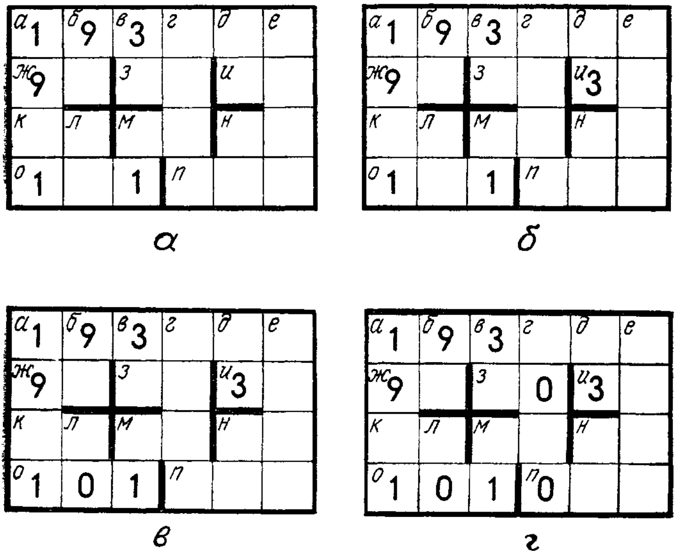


Рис. 308.

Следовательно, сумма чисел, стоящих под буквами *ж* и *з* по горизонтали, может быть равна 101 лишь в том случае, если число *ж* равно 91, а число *з* — 10 (рис. 309, *а*).

Теперь уже нетрудно видеть, что число, стоящее под буквой *и* по горизонтали (которое на 1 больше числа, стоящего под буквой *в* по вертикали), равно 32. Число, стоящее под буквой *н* по горизонтали, равно разности чисел, стоящих по горизонтали под буквами *и* и *з*. Следовательно, $н = и - з = 32 - 10 = 22$, откуда число, стоящее под буквой *е* по вертикали, равно $22 \cdot 101 = 2222$ (рис. 309, *б*).

Обратимся теперь к определению числа, стоящего под буквой *п* по горизонтали. Если вторая цифра числа, стоящего под буквой *к* по горизонтали, равна *у*, то сумма чисел $1 + 0 + у + 1$ должна оканчиваться цифрой 0. Это может произойти лишь в том случае, если $у = 8$. Следовательно, вторая цифра числа, стоящего под буквой *к* по горизонтали, равна 8. Отсюда мы сразу заключаем, что число, стоящее под буквой *л* по вертикали, равно 80, а число, стоящее по вертикали под буквой *г*, равно $80 \cdot 101 = 8080$ (рис. 309, *в*).

Далее находим, что число, стоящее по вертикали под буквой *д*, равно $80 - 7 = 73$, а число, стоящее по горизонтали под буквой *м*, — лишь 28. Следовательно, 4 года назад старший сын футболиста был вдвое младше, чем теперь. Судя по тому, что в клетке с буквой *л* стоит цифра 8, сейчас старшему сыну футболиста 8 лет. Младший четыре года назад был втрое младше, чем теперь. Это может быть лишь в том случае, если сейчас младшему сыну 6 лет. Следовательно, число, стоящее под буквой *к* по горизонтали, равно 68. Отсюда находим число, которое стоит под буквой *п* по горизонтали

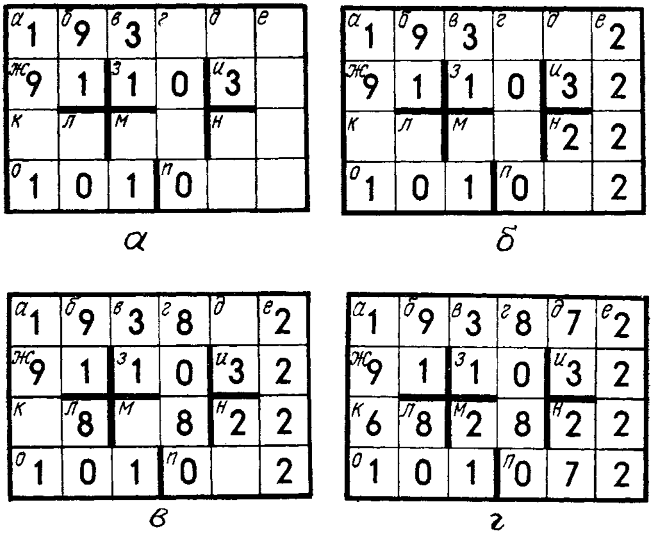


Рис. 309.

и читается одинаково в обе стороны: оно равно сумме $91 + 10 + 68 + 101 = 270$.

Итак, числовой кроссворд решен. Все клетки его заполнены цифрами так, как показано на рис. 309, *г*. Нетрудно проверить, что ни одно из вписанных чисел не противоречит определениям. Все перекрещивающиеся числа согласуются (что свидетельствует о непротиворечивости условий задачи).

Пользуясь решенным «кроссвордом», нетрудно ответить на вопросы задачи.

I. Янош Ковач заполнял анкету в $1938 + 32 = 1970$ г.

II. Янош Ковач родился в 1938 г. в седьмом месяце на 2-й день. Следовательно, его день рождения приходится на 2 июля.

III. Адрес: Точная улица, д. 91.

IV. Отцу Яноша Ковача сейчас 68 лет.

Решение, полученное вторым способом. Число, стоящее под буквой *а* по вертикали, может начинаться лишь с цифры 1 (поскольку книга не могла выйти из печати в 2000 году).

По условиям, приведенным в п. *ж* по горизонтали, число, стоящее под буквой *о* по горизонтали, равно сумме чисел, стоящих по горизонтали под буквами *ж* и *з*, то есть сумме двух двузначных чисел. Эта сумма больше 100 и меньше 200. Следовательно, под буквой *о* по горизонтали стоит трехзначное число (справа оно ограничено жирной вертикальной чертой), которое может начинаться лишь с цифры 1, а поскольку оно читается одинаково в прямую и обратную сторону, то его последняя цифра также равна 1.

Полученные результаты представлены на рис. 310, *а*. В числе стоящем под буквой *о* по горизонтали, отсутствует средняя цифра Обозначим ее пока через x.

Число, стоящее под буквой *г* по вертикали, равно произведению чисел, стоящих под буквой *л* по вертикали и под буквой *о* по горизонтали (трехзначного числа вида $1x1$). С другой стороны, известно, что числа, стоящие под буквами *г* и *л* по вертикали, имеют

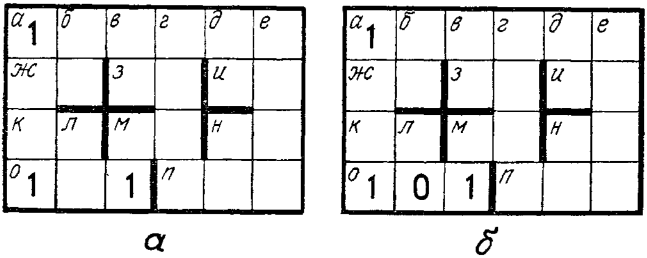


Рис. 310.

одинаковые последние цифры Это означает, что если из числа, стоящего под буквой *г* по вертикали, мы вычтем число, стоящее под буквой *л* по вертикали (иначе говоря, если вычислим произведение числа, стоящего под буквой *л* по вертикали, на число вида $1x1$, уменьшенное на 1, то есть на число вида $1x0$), то две последние цифры разности будут нулями. Следовательно, произведение числа, стоящего под буквой *л* по вертикали, на число вида $1x$ оканчивается нулем. Но число *л*, так же как и число $1x$, само оканчивается цифрой x. Ясно, что произведение двух чисел, оканчивающихся на одну и ту же цифру, может оканчиваться нулем лишь при одном условии: если эта цифра равна 0. Итак, $x = 0$, откуда число, стоящее под буквой *о* по горизонтали, равно 101 (рис. 310, *б*).

Произведение любого двузначного числа и числа 101 мы получим, записав это двузначное число два раза подряд. Но число, стоящее под буквой *г* по вертикали, как раз равно произведению числа, стоящего под буквой *л* по вертикали и оканчивающегося на 0, на число 101. Следовательно, вторая и четвертая цифры числа, стоящего под буквой *г* по вертикали, равны 0 (рис. 311, *а*).

По определению чисел, стоящих под буквами *о* и *ж* по горизонтали, число *ж* равно разности между числом *о* и числом, стоящим по горизонтали под буквой *з*. Поскольку число *о* оканчивается цифрой 1, а число *з* — цифрой 0, то число *ж* должно оканчиваться цифрой $1 - 0 = 1$ (рис. 311, *б*).

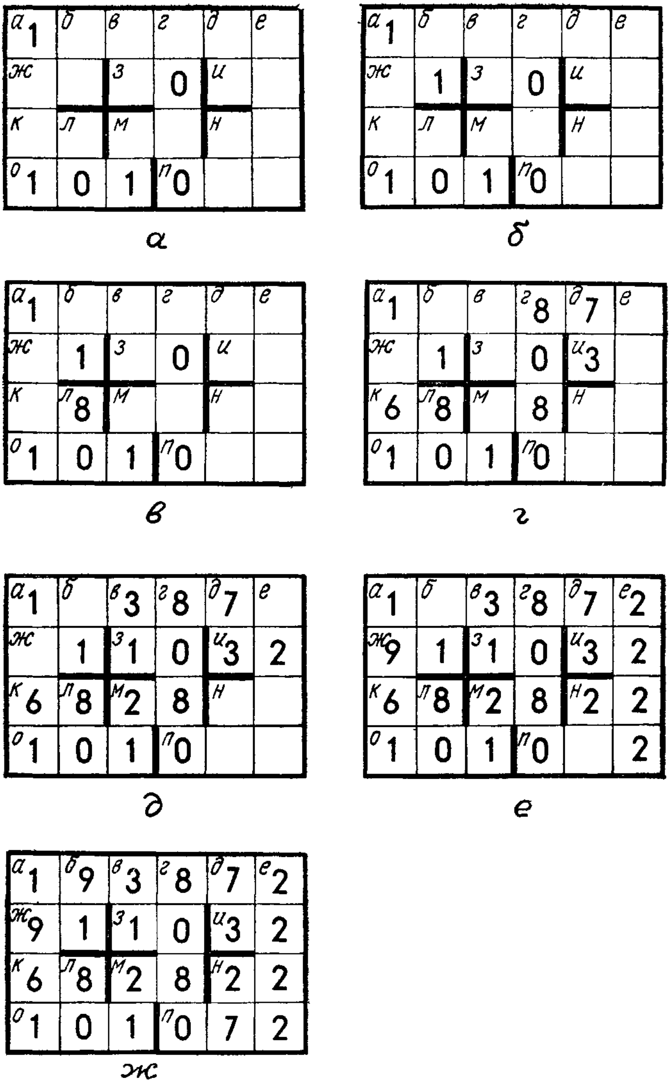


Рис. 311.

Обратимся теперь к определению числа *п* по горизонтали. Если мы обозначим вторую цифру числа, стоящего под буквой *к* по горизонтали, через *у*, то сумма $1+0+y+1$ должна оканчиваться нулем. Следовательно, $y = 8$, и число, стоящее под номером *к* по горизонтали, оканчивается восьмеркой (рис. 311, *в*).

Таким образом, число, стоящее под буквой *г* по вертикали, равно $101 \cdot 80 = 8080$, а число, стоящее под буквой *д* по горизонтали, равно $80 - 7 = 73$. Однако выясняется и другое. По условию, приведенному под буквой *м* по горизонтали, несколько лет назад старший сын футболиста был вдвое, а младший втрое младше, чем сейчас. Следовательно (см. число *к* по горизонтали), возраст сыновей выражается двумя однозначными числами, одно из которых должно делиться на 3, а другое на 2. Поскольку одному сыну футболиста 8 лет (вторая цифра числа *к* по горизонтали равна 8), то второму сыну футболиста 6 лет. Таким образом, число, стоящее под буквой *к* по горизонтали, равно 68 (рис. 311, *г*).

Отсюда мы узнаем, что возраст Яноша Ковача $8:2=4$ года назад выражался числом, стоящим под буквой *м* по горизонтали. Следовательно, числа, стоящие по горизонтали под буквами *и* и *м*, удовлетворяют соотношению $и = м + 4$. Но последняя цифра числа *м* равна 8. Значит, последняя цифра числа *и* равна 2. Отсюда мы заключаем, что $и = 32$, $м = 32 - 4 = 28$, а число, стоящее под буквой *в* по вертикали, $32 - 1 = 31$ (рис. 311, *д*).

Теперь результаты сыплются градом:

(по горизонтали) $н = и - з = 32 - 10 = 22$;

(по вертикали) $е = 22\,101 = 2222$;

(по горизонтали) $ж = о - з = 101 - 10 = 91$

(рис. 311, *е*). Наконец, число, стоящее под буквой *п* по горизонтали, получим следующим образом: вычислим сумму $91 + 10 + 68 + 101 = 270$ и прочитаем ее справа налево: $п = 072$. Второй цифрой числа, стоящего под буквой *а* по горизонтали, может быть только 9, поскольку если Яношу Ковачу сейчас 32 года и он женился в 1961 году, то родиться он мог не раньше, чем в 1929 г.

Итак, числовой кроссворд решен (рис. 311, *ж*). Нетрудно проверить, что никакие определения входящих в него чисел не противоречат друг другу (таким образом, в анкетных данных знаменитого футболиста нет противоречий).

Примечание. Решать числовой кроссворд можно и в иной последовательности. Например, к числу, стоящему под буквой *е* по вертикали, применимы те же рассуждения, что и к числу, стоящему под буквой *г* по вертикали.

СОДЕРЖАНИЕ

Д. Бизам. Я. Герцег

ИГРА И ЛОГИКА

Редактор *А. Белевцева*
Художник *С. Мухин*
Художественный редактор *Н. Зотова*
Технический редактор *Н. Толстякова*
Корректор *А. Шехтер*

Сдано в набор 18/XII 1974 г.
Подписано к печати 23/IV 1975 г.
Бумага тип. № 2 $84\times108^{1}/_{32}=5{,}63$ бум. л.
Усл. печ. л. 18,90 Уч.-изд. л. 20,00 Изд. № 12/7721
Цена 1 р. 15 к. Зак. 480

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29