

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
КОРАБЛЕСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра строительной механики корабля

РАСЧЕТ СУДОВЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЭЦВМ

Методические указания к выполнению
расчетно-графической работы

Ленинград
1990

В методических указаниях по выполнению расчетно-графической работы изложены основы метода конечных элементов применительно к расчету стержневых конструкций судового корпуса. Подробно рассмотрены вопросы построения дискретной расчетной модели конструкции и способы представления исходных данных в удобном для ЭВМ виде. Для систем с ортогональной сеткой стержней показаны приемы использования для получения результатов местных систем координат. Приводятся вариант Фортран-программы и пример расчета судовой рамы на ЭВМ.

Методические указания предназначены для студентов Ленинградского кораблестроительного института, обучающихся по специальности "Кораблестроение". Могут быть использованы в УИРС, а также курсовом и дипломном проектировании.

ЧЕРЕНКОВ
Николай Иванович

РАСЧЕТ СУДОВЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЭЦВМ

Методические указания к выполнению
расчетно-графической работы

© Изд. ЛКИ,
1990

Ответственный редактор
канд. техн. наук Г.М.Рижинашвили
Литературный редактор Н.А.Егизбаева

Зак. Р-66. Тир. 100. Уч.-изд. л. 2, 3. 23.04.1990.
Бесплатно. Тип. ЛКИ, Лоцманская, 10.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

I. I. Общие сведения

Расчет сложных многократно статически неопределимых стержневых систем связан со значительными вычислительными трудностями, исключить которые в полной мере позволяет только использование ЭВМ. В последнее время самое широкое распространение для выполнения расчетов различных инженерных конструкций на ЭВМ получил метод конечных элементов (МКЭ), являющийся по своей сути одной из разновидностей матричного метода расчета стержневых систем. Матричная формулировка основных зависимостей теории стержневых систем позволила унифицировать расчетную процедуру и свести выполнение самых трудоемких вычислений к указанию операций над матрицами. Поэтому разработанные на основе МКЭ программы для ЭВМ отличаются высокой эффективностью и экономичностью.

Использование в расчете матриц предполагает разбиение стержневой конструкции на отдельные (конечные) элементы с дискретным сочленением между ними. В местах сочленения элементов, которые принято называть узлами, осуществляется связь элементов и их взаимодействие друг с другом. Получаемые за счет дискретизации упрощения состоят в том, что расчет системы разбивается на два этапа. На первом этапе рассчитываются отдельные элементы, на втором - производится их объединение в ансамбль элементов, условия работы которого соответствовали бы работе исходной конструкции. При этом все необходимые преобразования достаточно просто записываются [1]-[3] в матричной форме [1], [2] - [3].

1.2. Построение дискретной расчетной модели конструкции

Выбор способа членения дискретной расчетной схемы конструкции зависит от ряда факторов: геометрии и структуры конструкции, ее конструктивно-сkeletalной схемы, характера внешних воздействий, целей и требуемой точности расчета. Очевидно, что простейшим элементом, из которых может быть оставлена любая стержневая система, является двухузловая призматический стержень. Идеализация криволинейных стержней при помощи таких элементов осуществляется путем замены криволинейной оси вписанной ломаной с минимально допустимым числом участков. Если поперечное сечение стержня изменяется вдоль оси, то стержень разбивается на участки с различной жесткостью, постоянной в пределах длины отдельных участков. Распределенная нагрузка заменяется статически эквивалентными ей сосредоточенными силами. При построении дискретной расчетной модели конструкции необходимо стремиться к тому, чтобы вершины ломаной совпадали с местами ступенчатого изменения сечений и являлись бы точками приложения сосредоточенных сил. В соответствии с вышеизложенным для построения дискретной расчетной модели необходимо выполнить следующее.

1. Определяют места расположения узловых точек с дискретной системы и фиксируют их. В число узловых точек следует включать:

- точки соединения стержней конструкции;
- точки приложения связей (закреплений);
- точки скачкообразного изменения геометрических характеристик поперечных сечений стержней;
- точки приложения сосредоточенных сил;
- точки изменения закона действия распределенной нагрузки.

2. Узловые точки соединяются линиями, соответствующими осям стержней конструкции, и нумеруются числами натурального ряда из множества $i = 1, 2, \dots, n$.

В результате выполнения этих операций конструкция оказывается представленной в виде совокупности двухузловых стержней (элементов), взаимодействующих между собой в узловых точках и нагруженных пролетной нагрузкой, имеющей по длине элементов постоянный закон изменения. Число узловых точек, час-

тота их расположения, размеры элементов зависят от характера решаемой задачи, вида исходной конструкции, имеющихся в распоряжении расчетчика набора (библиотеки) типовых элементов, возможностей программы, по которой будет производиться расчет.

3. Если наложенные на систему связи не исключают всех ее перемещений как абсолютно твердого тела, то необходимо ввести дополнительные закрепления, которые позволят полностью аннулировать указанные перемещения. При этом сечения, в которых вводятся дополнительные перемещения, также должны быть включены в число узлов.

4. В каждой узловой точке конструкции i , обладающей определенным числом степеней свободы, вводится вектор перемещений $\{Q_i\}$ размерностью $[N_i \times 1]$, компоненты которого соответствуют независимым между собой возможным перемещениям данной точки. Если для некоторой узловой точки в каком-нибудь направлении вследствие наложенных на конструкцию связей перемещение отсутствует, соответствующая компонента вектора $\{Q_i\}$ принимается равной нулю.

В качестве независимых перемещений обычно принимают три поступательных перемещения вдоль осей общей для всей конструкции (глобальной) системы координат $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ и три вращательных перемещения вокруг этих осей. В общем случае деформирования пространственной системы вектор перемещений узла содержит все указанные перемещения и его порядок равен шести, т.е.

$$\{Q_i\}^T = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}. \quad (I.1)$$

Для плоской рамы, нагруженной нагрузкой, действующей в плоскости центров изгиба стержней, вектор $\{Q_i\}$ содержит три компоненты: два линейных перемещения вдоль осей координат и одно угловое в плоскости рамы, т.е.

$$\{Q_i\}^T = \{u_i, v_i, \theta_i\}. \quad (I.2)$$

При рассмотрении поперечного изгиба стержней в одной из главных плоскостей без учета осевой деформации стержней

$\{a_i\}^T = \{w_i, \theta_i\}$, и его компонентами являются прогиб узловой точки и угол поворота поперечного сечения.

5. Совокупность векторов перемещений всех узловых точек конструкции образует общий (глобальный) вектор перемещений конструкции $\{a\}$ размерностью $[N_c \times 1]$:

$$\{a\}^T = \{ \{a_1\}^T \{a_2\}^T \dots \{a_n\}^T \}. \quad (I.3)$$

Вектор $\{a\}$ в виде (I.3) представляет собой вектор узловых перемещений свободной незакрепленной конструкции. У закрепленной конструкции в определенных узлах перемещения по некоторым направлениям равны нулю, и она характеризуется вектором $\{a^*\}$, который получается из вектора перемещений свободной конструкции $\{a\}$ путем вычеркивания нулевых компонент, соответствующих устраненным перемещениям. Связь между векторами $\{a\}$ и $\{a^*\}$ может быть записана в виде

$$\{a\} = [E_c] \{a^*\}, \quad (I.4)$$

где матрица $[E_c]$ получается из диагональной единичной матрицы путем вычеркивания из нее столбцов, соответствующих устраненным компонентам вектора $\{a\}$. Нетрудно проверить, что обратный переход от вектора $\{a\}$ к вектору $\{a^*\}$ осуществляется при помощи зависимости

$$\{a^*\} = [E_c]^T \{a\}. \quad (I.5)$$

Все узловые перемещения — компоненты вектора $\{a^*\}$ — нумеруются числами из множества $S = 0, 1, 2, \dots, N$ в определенной последовательности, устанавливаемой расчетчиком. Нулевой номер присваивается устраненным (равным нулю) узловым перемещениям, которые не включаются в вектора $\{a^*\}$. Наибольший номер узлового перемещения N равен числу степеней свободы дискретной модели конструкции с учетом полученных на систему связей и определяет порядок вектора $\{a^*\}$.

С порядком нумерации узловых перемещений, а значит, и

узловых точек, связана такая характеристика рассматриваемой задачи как ширина ленты системы разрешающих уравнений МКЭ. В целях уменьшения времени машинного счета при решении системы уравнений ширина ленты должна быть, по возможности, минимальной. Это связано с тем, что при решении ленточных систем уравнений могут не учитываться нулевые коэффициенты, расположенные вне ленты. Общего правила для получения минимальной ширины ленты не существует, но замечено, что она получается меньше, если узловые перемещения (или сами узлы) нумеровать последовательно вдоль направления, в котором расположено меньшее число узлов.

6. Элементы, на которые разбита конструкция, также нумеруются числами натурального ряда $e = 1, 2, \dots, M$. Нумерация элементов должна быть такой, чтобы с ростом номеров элементов возрастали и номера их узловых точек.

После построения дискретной модели конструкции определяются ее основные параметры:

- M — число конечных элементов;
- n — общее число узлов конструкции;
- N_i — число степеней свободы в узле i ;
- N^e — число степеней свободы элемента e ;
- N — общее число степеней свободы дискретной модели с учетом закреплений;
- N_c — число степеней свободы незакрепленной конструкции.

Процесс построения дискретной расчетной модели поясним на примере. На рис. I.1, а изображена рама с жесткими (недеформируемыми) узлами, стержни которой могут работать на растяжение-сжатие и изгиб, а на рис. I.1, б — ее дискретная расчетная модель. При построении дискретной модели к числу узловых точек отнесены: опорные сечения, места соединения стержней, точка приложения сосредоточенной силы. В общем случае каждая узловая точка имеет три степени свободы, но в опорных точках число степеней свободы уменьшается. Так, в первом узле перемещение в направлении оси y равно нулю, в последнем, пятом узле отсутствуют все степени свободы. Из рассмотрения рис. I.1, б определяем основные параметры дискретной модели. Число узловых точек $n = 5$; число элементов $M = 4$; число степеней свободы узловых точек конструкции $N = 11$.

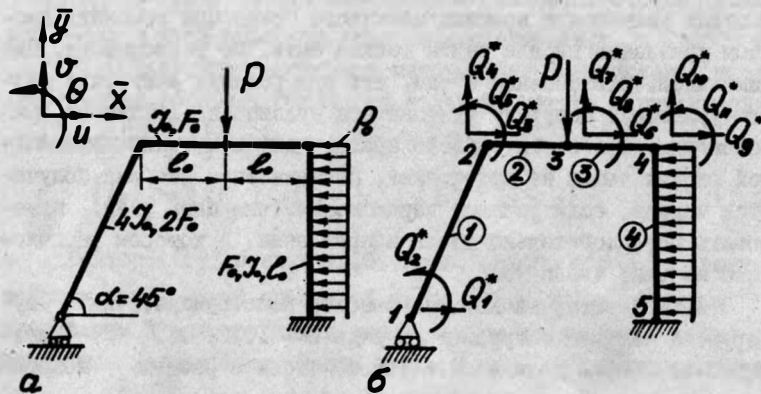


Рис.1.1. Плоская рама и ее дискретная расчетная модель

1.3. Расчет элементов дискретной системы и составление уравнений МЭ

В результате выполнения операции дискретизации стержневая система представляется состоящей из отдельных элементов призматической формы.

Геометрия системы, положение узловых точек, направления компонент вектора узловых перемещений конструкции: $\{q\}$ и другие характеристики, относящиеся к системе в целом, определяются в общей системе координат $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

В то же время расчет отдельных конечных элементов удобнее вести в местной системе координат xyz , непосредственно связанной с элементом. Выделим из системы некоторый элемент e , расположенный между узлами i и j . Направления осей координат местной системы зададим следующим образом: ось x направим по оси стержня от узла i к узлу j , а оси y и z — вдоль главных осей инерции поперечного сечения стержня (рис.1.2). Связь между осями местной и глобальной систем координат определяется матрицей направляющих косинусов (косинусов между осями xyz и $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$):

$$[l^e] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha, \bar{x}) & \cos(\alpha, \bar{y}) & \cos(\alpha, \bar{z}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(y, \bar{z}) \\ \cos(z, \bar{x}) & \cos(z, \bar{y}) & \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

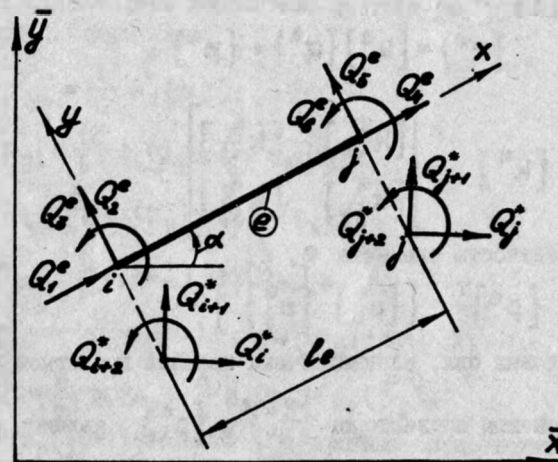


Рис.1.2. Элемент плоской рамы в общей и местной системах координат

Вектор перемещений узлов элемента в местной системе координат будем обозначать через $\{q\} [N^e \times 1]$. Для рассматриваемого двухузлового элемента

$$\{q^e\}^T = \{\{q_i^e\}^T \{q_j^e\}^T\}. \quad (1.7)$$

Вид подвектора $\{q_i^e\} [N_i \times 1]$ зависит от кинематических характеристик элемента. В случае плоской рамы

$$\{q_i^e\}^T = \{u_i \ v_i \ \theta_i\}. \quad (1.8)$$

На узлы i и j выделенного элемента со стороны отброшенных частей конструкции будут действовать реактивные усилия

$$\{r^e\}^T = \{\{r_i^e\}^T \{r_j^e\}^T\}. \quad (1.9)$$

Эти условия должны уравновешиваться условиями, возникающими в узлах от смещений $\{q^e\}$ и действующей на стержень пролетной нагрузки P_x, P_y, P_z .

В общем случае связь между указанными факторами напряженно-деформированного состояния стержня определяется зависимостью [1]

$$\{r^e\} = [k^e] \{q^e\} + \{p^e\}, \quad (I.10)$$

где

$$[k^e] = \begin{bmatrix} [k_{ii}^e] & [k_{ij}^e] \\ [k_{ji}^e] & [k_{jj}^e] \end{bmatrix} - \quad (I.11)$$

матрица жесткости элемента e , а

$$\{p^e\}^T = \{ \{p_i^e\}^T \{p_j^e\}^T \} - \quad (I.12)$$

вектор узловых сил, эквивалентных внешней пролетной нагрузке.

Компоненты подвекторов $\{r_i^e\}$ и $\{p_i^e\}$ являясь обобщенными силами по отношению к перемещениям узла i , должны соответствовать компонентам вектора $\{q_i^e\}$. В частном случае плоской рамы

$$\{r_i^e\}^T = \{ r_{xi} \ r_{yi} \ M_i \}; \quad (I.13)$$

$$\{p_i^e\}^T = \{ P_{xi} \ P_{yi} \ H_i \}, \quad (I.14)$$

где r_{xi}, r_{yi} и M_i — силы в узле i в направлении осей x и y соответственно, M_i и H_i — моменты в узле i . Положительные направления сил и моментов показаны на рис. I.3.



Рис. I.3. Порядок нумерации и положительные направления компонент векторов $\{q^e\}, \{r^e\}, \{p^e\}$ элемента плоской рамы

Как следует из зависимости (I.10), узловые эквивалентные силы $\{p^e\}$ представляют собой реакции, возникающие в узлах стержня по направлениям обобщенных перемещений от действия пролетной нагрузки при условии полного закрепления узлов. Находятся указанные силы либо при помощи соответствующих таблиц, либо путем расчета. Для рассматриваемого здесь элемента плоской рамы компоненты вектора $\{p^e\}$ могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \frac{1}{l} s_2(p_x); \\ P_{yi} &= \frac{12}{l^3} s_4(p_y) - \frac{6}{l^2} s_3(p_y); \\ H_i &= \frac{6}{l^2} s_4(p_y) - \frac{2}{l} s_3(p_y); \\ P_{xi} &= \frac{1}{l} s_2(p_x) - s_1(p_x); \\ P_{yi} &= -\frac{12}{l^3} s_4(p_y) + \frac{6}{l^2} s_3(p_y) - s_1(p_y); \\ H_j &= \frac{6}{l^2} s_4(p_y) - \frac{4}{l} s_3(p_y) + s_2(p_y), \end{aligned} \quad (I.15)$$

где через $s_n[f(x)]$ обозначены n -кратные определенные интегралы, вычисляемые от функции $f(x)$ на отрезке $[0, l]$, т.е.

$$s_n[f(x)] = \underbrace{\int_0^l \int_0^x \dots \int_0^x}_{n} f(x) dx^n. \quad (I.16)$$

Матрица жесткости элемента $[k^e]$ устанавливает пропорциональную зависимость между узловыми силами и узловыми перемещениями. Если по концам стержня при условии отсутствия пролетной нагрузки наложить линейные и угловые связи и давать поочередно единичные смещения этим связям, то полученные в наложенных связях реакции и будут столбцами матрицы $[k^e]$. Таким образом, блоки $[k_{ii}^e]$ и $[k_{jj}^e]$ — блоки матрицы реакций, возникающих в узлах i и j элемента при единичных смещениях одноименного узла; блоки $[k_{ij}^e]$ и $[k_{ji}^e]$ учитывают взаимодействие между узлами. Используя теорему о взаимности работ, можно показать, что $k_{st} = k_{ts}$, т.е. матрица жесткости всегда симметрична. Очевидно, что коэффициенты k_{st} матрицы жесткости будут зависеть от геометрических и жест-

костных характеристик элемента. Для плоской задачи блоки матрицы жесткости имеют размеры 3×3 и определяются следующим образом:

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ \hline \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (I.17)$$

После вычисления матриц жесткости и векторов узловых эквивалентных условий конечных элементов приступают к построению ансамбля согласованных элементов, в котором выполнялось бы как условия совместности узловых перемещений, так и условия равновесия в узлах системы. Из механики стержневых систем известно, что в этом случае напряженно-деформированное состояние дискретной системы будет полностью совпадать с напряженно-деформированным состоянием исходной непрерывной конструкции. Так как построение ансамбля элементов удобно выполнять в общей для всех элементов системы координат, полученные зависимости для отдельных элементов нужно привести к глобальной системе координат.

Чтобы установить связь между перемещениями узлов элемента (I.7) и перемещениями узлов конструкции (I.3), вначале необходимо выделить из общего вектора (I.3) перемещения тех узлов конструкции, с которыми совпадают узлы элемента, т.е. узлов i и j , а затем преобразовать их к осям местной системы координат. Вектор $\{q_i\}$ выделяется из $\{Q\}$ с помощью операции

$$\{q_i\} = [N_i]\{Q\}. \quad (I.18)$$

Выделяющая диагональная матрица $[N_i][N_i \times N_c]$ легко устанавливается на основании соотношения (I.3). Вектор перемещений $\{Q^e\}$ узлов конструкции, с которыми совпадают узлы элемента e , находится по формуле

$$\{Q^e\} = [H^e]\{Q\}, \quad (I.19)$$

где диагональная матрица $[H^e]$ составляется из блоков $[H_i]$:

$$[H^e] = \begin{bmatrix} [H_i] \\ [H_j] \end{bmatrix}. \quad (I.20)$$

Чтобы учесть в векторе $\{Q^e\}$ закрепления конструкции, нужно в зависимости (I.19) от вектора $\{Q\}$ перейти к вектору $\{Q^*\}$. Подставляя в (I.19) формулу (I.4) получим:

$$\{Q^e\} = [H^e][E_c]\{Q^*\}. \quad (I.21)$$

Как видно из (I.21), выделение узловых перемещений элемента из вектора перемещений конструкции при помощи матриц $[H^e]$ и $[E_c]$ представляет собой хотя и простой, но достаточно громоздкий процесс, требующий хранения матриц большой размерности и выполнения операций с ними.

Гораздо проще решается данная проблема, если ввести в рассмотрение вспомогательный одномерный массив $[T^e][1 \times N^e]$, связанный вектором $\{Q^e\}$, элементами которого являются номера (индексы) s узловых перемещений конструкции Q_s^* , входящих в число компонент вектора перемещений узлов элемента $\{Q^e\}$, т.е.

$$[T^e] = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{N^e}]. \quad (I.22)$$

Нулевым компонентом вектора $\{Q^e\}$, являющимся перемещением конструкции, на которое наложены жесткие опорные связи, в массиве $[T^e]$ соответствуют нулевые элементы, т.е. некоторые s_i в (I.22) могут быть равны нулю. Совокупность строчных массивов $[T^e]$ образует матрицу конструкции $[T]$ размерностью $[M \times N^e]$.

Из вышесказанного следует, что для выделения компонент вектора $\{Q^e\}$ из вектора $\{Q^*\}$ при помощи массива $[T^e]$ необходимо выбрать из вектора перемещений конструкции компоненты $Q_{s_1}^*, Q_{s_2}^*, \dots, Q_{s_{N^e}}^*$ с индексами, взятыми из массива (I.22). Если среди s_i есть нули, то соответствующие им

компоненты Q_i^e нужно взять равными нулю, т.е. считаем, что $Q_0^* = 0$. Отсюда получаем, что

$$\{Q^e\} = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ \vdots \\ Q_i^e = 0 \\ \vdots \\ Q_{n^e}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{s_1}^* \\ Q_{s_2}^* \\ \vdots \\ Q_{s_{i-1}}^* \\ \vdots \\ Q_{s_{n^e}}^* \end{Bmatrix}. \quad (I.23)$$

Нетрудно заметить, что соотношение (I.23), так же, как и (I.18), (I.22), устанавливает условия совместности перемещений элементов в узлах дискретной системы. Таким образом, выбрав в качестве узловых перемещений элементов перемещения узлов конструкции, мы как бы автоматически обеспечиваем тождественность перемещений всех узлов элементов, совпадающих с тем или иным узлом конструкции, и, следовательно, совместность их деформаций.

После выделения перемещений $\{Q^e\}$ их приведение к осям местной системы координат осуществляется при помощи матрицы направляющих косинусов на основе линейного соотношения

$$\{q^e\} = [L^e]\{Q^e\}, \quad (I.24)$$

где ортогональная матрица преобразования имеет вид

$$[L^e] = \begin{bmatrix} [l_i^e] & 0 \\ 0 & [l_j^e] \end{bmatrix}. \quad (I.25)$$

Вид подматриц $[l_i^e]$ и $[l_j^e]$ зависит от геометрических и кинематических характеристик элемента. В частности, для элемента плоской рамы (см. рис. I.2) имеем:

$$[l_i^e] = [l_j^e] = [L^e] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (I.26)$$

Так как направления узловых усилий совпадают с направлениями соответствующих узловых перемещений, легко понять, что связь между узловыми усилиями в глобальной и местной

системах координат осуществляется с помощью той же матрицы преобразования $[L^e]$, т.е.

$$\{r^e\} = [L^e]\{R^e\}. \quad (I.27)$$

Учитывая ортогональность матрицы направляющих косинусов ($[L^e]^T[L^e] = [E]$), находим, что

$$\{R^e\} = [L^e]\{r^e\}. \quad (I.28)$$

С помощью полученных зависимостей нетрудно записать в глобальной системе координат и условия равновесия конечного элемента (I.10). Для этого умножим обе части (I.10) на $[L^e]$ и учтем (I.24) и (I.28), тогда

$$\{R^e\} = [L^e]^T[k^e][L^e]\{Q^e\} + \{P^e\}, \quad (I.29)$$

где $\{R^e\}$ и $\{P^e\}$ — векторы реактивных узловых сил в общей системе координат, действующих на узлы элемента e соответственно со стороны отброшенных частей конструкции, и от действия пролетной нагрузки. Очевидно, что

$$\{P^e\} = [L^e]\{p^e\}. \quad (I.30)$$

Введем далее обозначение

$$[K^e] = [L^e]^T[k^e][L^e] \quad (I.31)$$

и перепишем равенство (I.29) в виде

$$\{R^e\} = [K^e]\{Q^e\} + \{P^e\}. \quad (I.32)$$

Отсюда следует, что $[K^e]$ представляет собой матрицу жесткости элемента в глобальной системе координат и для ее вычисления при известной матрице жесткости в местной системе координат достаточно построить матрицу направляющих и воспользоваться формулой (I.31).

Перейдем теперь к составлению уравнений равновесия в узловых точках.

Пусть \hat{P}_s^* есть компонента вектора внешних сосредоточенных усилий $\{\hat{P}^*\}$ непосредственно приложенных к узлам конструкции, соответствующая компоненте Q_s^* вектора узловых перемещений конструкции $\{Q^*\}$. Будем считать, что к не-

которым узлам конструкции приложены также упругоподатливые связи, ориентированные в направлении осей глобальной системы координат. При этом уравнение связи имеет вид

$$\hat{R}_s^* = K_s Q_s^*, \quad (I.33)$$

где \hat{R}_s^* - реакция связи в направлении перемещения Q_s^* ; K_s - коэффициент жесткости связи. Так как усилия, действующие на узел со стороны примыкающих к нему элементов, равны по величине и обратны по знаку усилиям $\{R^e\}$, действующим на элементы со стороны узлов конструкции, то с учетом вышеизложенного уравнения равновесия в узловых точках по направлению перемещений Q_s будут иметь вид

$$\sum_{e \in s} R_s^e + \hat{R}_s^* - \hat{P}_s^* = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (I.34)$$

где символ $e \in s$ у знака суммы показывает, что суммирование должно быть произведено по всем элементам, испытывающим перемещение Q_s^* . Используем для установления соответствия между компонентами векторов $\{Q^e\}, \{R^e\}, \{P^e\}$, определенных на элементе, и компонентами векторов $\{Q^*\}, \{R^*\}, \{P^*\}$ матрицу индексов (I.22).

Тогда выражение (I.32) может быть представлено в эквивалентной форме:

$$R_s^e = \sum_t K_{st}^e Q_t^e + P_s^e, \quad (I.35)$$

где индексы s и t принимают последовательно все значения s_i из массива $[T^e]$. Подставив далее (I.33) и (I.35) в соотношение (I.34), получим систему уравнений:

$$\sum_{e \in s} \sum_t K_{st}^e Q_t^e + K_s Q_s^* = \hat{P}_s^* - \sum_{e \in s} P_s^e, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (I.36)$$

Если в выражении (I.36) произвести суммирование по индексу e и учесть условия совместности перемещений в узловых точках $Q_t^e = Q_t^*$ (см. (I.23)), то его можно записать в матричной форме [I]:

$$[K^*]\{Q^*\} = \{F^*\}, \quad (I.37)$$

где введены обозначения

$$\{F^*\} = \{\hat{P}^*\} - \{P^*\}; \quad (I.38)$$

$$P_s^* = \sum_{e \in s} P_s^e; \quad (I.39)$$

$$K_{st}^* = \sum_{e \in s} K_{st}^e, \quad s \neq t; \quad (I.40)$$

$$K_{ss}^* = \sum_{e \in s} K_{ss}^e + K_s. \quad (I.41)$$

Матрица $[K^*]$, связывающая между собой узловые нагрузки $\{F^*\}$ и узловые перемещения конструкции $\{Q^*\}$, представляет собой общую (глобальную) матрицу жесткости стержневой системы. Символ $*$ в выражениях (I.37)–(I.41) означает, что их формирование произведено с учетом наложенных на конструкцию связей, в том числе и тех, которые устраняют ее перемещения как твердого тела.

Система (I.36) и равносильное ей матричное уравнение (I.41) определяют систему разрешающих уравнений МКЭ, из которой находят неизвестные узловые перемещения $\{Q^*\}$. Из приведенных зависимостей видно, что составление системы (I.34) сводится, по сути, к формированию матрицы жесткости конструкции $[K^*]$ и вектора узловых эквивалентных нагрузок системы $\{P^*\}$. Процесс формирования $[K^*]$ и $\{P^*\}$ для сложных систем автоматизирован и осуществляется с помощью ЭВМ. Как следует из (I.39) и (I.40), формирование указанных матриц заключается в рассылке коэффициентов матриц жесткости K_{mn}^e и компонент векторов P_m^e для отдельных элементов по соответствующим ячейкам памяти ЭВМ, отведенным для хранения матрицы $[K^*]$ и вектора $\{P^*\}$. Адреса этих ячеек определяются при помощи матрицы индексов на основе следующего правила. Значения индексов s и t коэффициента K_{st}^* общей матрицы жесткости, в который в качестве слагаемого входит коэффициент матрицы жесткости элемента e K_{mn}^e ($m, n = 1, 2, \dots, N^e$), равны элементам t_{em} и t_{en} e -й строки матрицы индексов. Значение индекса s компоненты P_s^* , к которой должна быть добавлена компонента P_m^e вектора узловых нагрузок элемента e ,

равно элементу t_{em} , взятому из той же строки (с номером e) матрицы индексов. Вычисляя последовательно для каждого элемента матрицу $[K^e]$ и вектор $\{P^e\}$ и перебирая соответствующие строки матрицы индексов, ЭВМ формирует матрицу коэффициентов и вектор правых частей основной системы уравнений МКЭ.

Поясним оказанное на примере 4-го элемента конечноэлементной модели рамы, изображенной на рис. I.1, б. Не останавливаясь на вычислениях самих $[K^4]$ размерностью $[6 \times 6]$ и $\{P^4\}$ размерностью $[6 \times 1]$, которые легко могут быть произведены на основе формул (I.15), (I.17), (I.26), (I.30), (I.31), выпишем индексы узловых перемещений Q_9^* , входящих в массив 4-й строки матрицы индексов

$$[T^4] = [9 \ 10 \ 11 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (I.42)$$

Из анализа матрицы индексов заключаем, что коэффициенты первой строки матрицы жесткости элемента K_{1n}^4 ($n = 1, 2, \dots, 6$) участвуют в формировании 9-го уравнения разрешающей системы МКЭ. При этом коэффициент K_{11}^4 должен быть добавлен в ячейку, в которой хранится коэффициент K_{99}^* общей матрицы жесткости; K_{12}^4 - в ячейку для K_{910}^* ; K_{13}^4 - в ячейку для K_{911}^* . Коэффициенты K_{2n}^4 используются для формирования коэффициентов 10-го уравнения и должны быть записаны: K_{21}^4 - в ячейку для K_{109}^* ; K_{22}^4 - в ячейку для K_{1010}^* и т.д. Коэффициенты 4-й, 5-й и 6-й строк и таких же столбцов в формировании не участвуют, поскольку им соответствуют устраненные перемещения 5-го узла рамной конструкции. Подобным образом находим, что компоненты P_1^4, P_2^4, P_3^4 должны быть прибавлены к содержанию ячеек, отведенных для хранения компонент P_9^*, P_{10}^* . P_{11}^* глобального вектора эквивалентных узловых нагрузок, 4-я, 5-я и 6-я компоненты не используются. Обычно вследствие симметричности общей матрицы жесткости формируется только верхняя часть матрицы $[K^*]$, что существенно уменьшает объем памяти ЭВМ, отводимой для ее хранения (порядок матрицы $[K^*]$ может достигать нескольких тысяч и десятков тысяч). Другое направление в экономии машинной памяти заключается в том,

чтобы хранить в принципе только ненулевые коэффициенты. А так как матрица коэффициентов основной системы МКЭ имеет ленточный характер $[I]$, то, с учетом сказанного, хранению подлежит только верхняя ленточная часть матрицы $[K^*]$. Ширина этой ленты определяется по формуле

$$N_B = \max_{e, m, n} |t_{em} - t_{en}| + 1, \quad m, n = 1, 2, \dots, N^e, \quad (I.43)$$

где t_{ei} - элементы матрицы индекса дискретной системы. Для рамы, представленной на рис. I.1, б, ширина ленты N_B равна 6.

Для решения системы уравнений (I.37) может использоваться любой метод, предназначенный для решения больших систем уравнений. Однако чаще других применяется метод исключений неизвестных Гаусса.

Разрешив систему (I.37) относительно $\{Q^*\}$, с помощью матрицы индексов определяют узловые перемещения элементов $\{Q^e\}$, после чего по формуле (I.32) находят узловые усилия $\{R^e\}$. Для вычисления узловых усилий в местной системе координат $\{r^e\}$ используется зависимость (I.27).

Полученные усилия $\{r^e\}$ по отношению к элементу будут внешними. Так как для оценки прочности стержневых элементов необходимо знать значения внутренних силовых факторов (осевые силы T , изгибающие моменты M , перерезывающие силы N), введем в рассмотрение вектор внутренних усилий $\{\hat{r}^e\}$. Для элемента плоской рамы он имеет вид

$$\{\hat{r}^e\}^T = \{T_i^e \ N_i^e \ M_i^e \ T_j^e \ N_j^e \ M_j^e\}, \quad (I.44)$$

где положительные направления усилий соответствуют принятому в строительной механике правилу знаков (рис. I.4). С учетом

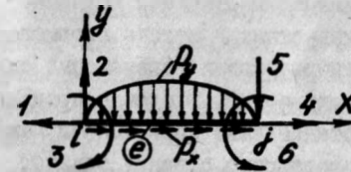


Рис. I.4. Положительные направления компонент вектора внутренних силовых факторов $\{r^e\}$ элемента плоской рамы

этого правила знаков зависимость между компонентами векторов $\{r^e\}$ и $\{\hat{r}^e\}$ может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1^e &= T_i^e = -r_1^e; & \hat{r}_4^e &= T_j^e = r_4^e; \\ \hat{r}_2^e &= N_i^e = r_2^e; & \hat{r}_5^e &= N_j^e = -r_5^e; \\ \hat{r}_3^e &= M_i^e = -r_3^e; & \hat{r}_6^e &= M_j^e = r_6^e. \end{aligned} \quad (I.45)$$

Построение эппр силовых факторов производится в соответствии с принятыми в строительной механике корабля правилами [1, т.2]. Для определения промежуточных значений следует пользоваться либо таблицами изгиба балок [4], либо формулами:

$$\begin{aligned} T(x) &= T_i + \int_0^x p_x dx; & N(x) &= N_i + \int_0^x p_y dx; \\ M(x) &= M_i + N_i x + \int_0^x \int_0^x p_y dx^2. \end{aligned} \quad (I.46)$$

При этом начало координат располагается в узле i стержневого элемента, а ось x направляется вдоль оси стержня к узлу j .

1.4. Использование местной системы координат при расчете систем с ортогональной сеткой и нерастяжимыми стержнями

При расчете стержней, работающих на изгиб, можно пренебречь влиянием продольных деформаций, потому что для таких стержней жесткость на растяжение как минимум на порядок выше, чем изгибная жесткость. С учетом этого обстоятельства построены и расчетные схемы для судовых рам и перекрытий. Предположение о нерастяжимости стержней позволяет существенно уменьшить число неизвестных в методе перемещений (МКЭ). Однако часть неизвестных узловых перемещений оказываются линейно зависимыми между собой. В случае произвольного расположения стержней установление зависимости между перемещениями узлов является достаточно сложной задачей, решаемой на основе кинематического анализа конструкции. В то же время для стержневых систем с ортогональной сеткой, (например, судовых рам), такой анализ проводится довольно просто.

Очевидно, что условие нерастяжимости стержня эквива-

лентно требованию равенства линейных перемещений его узлов i и j в направлении оси стержня. Для учета такой кинематической связи в раме с ортогональной сеткой стержней достаточно при построении дискретной расчетной модели оси глобальной системы координат направить параллельно стержням, а перемещениям узлов конструкции вдоль оси соединяющего их стержня присвоить одинаковые номера (индексы). На рис. I.5, а показана рама, а на рис. I.5, б, в обозначены неизвестные для двух вариантов расчета. По условию недеформируемости стержней от продольной силы, имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= \bar{Q}_4; & Q_4 &= \bar{Q}_1; & Q_7 &= \bar{Q}_4; \\ Q_2 &= 0; & Q_5 &= 0; & Q_8 &= 0; \\ Q_3 &= \bar{Q}_1; & Q_6 &= \bar{Q}_2; & Q_9 &= \bar{Q}_3; \\ Q_{10} &= \bar{Q}_8; & Q_{13} &= \bar{Q}_9; & Q_{16} &= \bar{Q}_8; \\ Q_{11} &= 0; & Q_{14} &= 0; & Q_{17} &= 0; \\ Q_{12} &= \bar{Q}_5; & Q_{15} &= \bar{Q}_6; & Q_{18} &= \bar{Q}_7. \end{aligned} \quad (I.47)$$

Таким образом, при использовании дискретной модели, показанной на рис. I.5, б, число неизвестных уменьшается более чем вдвое ($N = 8$) по сравнению с моделью, изображенной на рис. I.5, а, содержащей 18 неизвестных, в то время как окончательные результаты будут практически одинаковы.

Иногда приходится решать, по сути, обратную задачу, когда расчетная схема стержневой системы уже основывается на предположении о нерастяжимости стержней, но кинематический анализ системы с целью установления зависимости между узловыми перемещениями сильно затруднен вследствие нерегулярности расположения стержней. В таком случае более выгодным может быть отказ от этого предположения и принятие жесткости стержня на растяжение равной, хотя и большому (на несколько порядков выше, чем изгибная жесткость), но конечному числу. Для получения более надежных результатов необходимо поварьировать значение этой жесткости.

Аналогичным образом решается задача о влиянии осевой деформации на параметры изгиба рамной конструкции.

Рассмотрим теперь вопрос об использовании местной системы координат вместо глобальной системы для описания стержней в стержневых системах с ортогональной сеткой и нерастя-

килами стержнями. В качестве примера возьмем раму, изображенную на рис. I.5, а, и ее конечноэлементную модель, показанную на рис. I.5, в. В результате дискретизации системы рама оказалась представленной в виде совокупности балочных элементов, работающих на изгиб и имеющих в узловых сечениях по две степени свободы (рис. I.5, г). В то же время узлы рамы имеют в общем случае по три степени свободы: две линейные и одну угловую. Матрица направляющих косинусов (I.26) для i -го узла также имеет третий порядок.

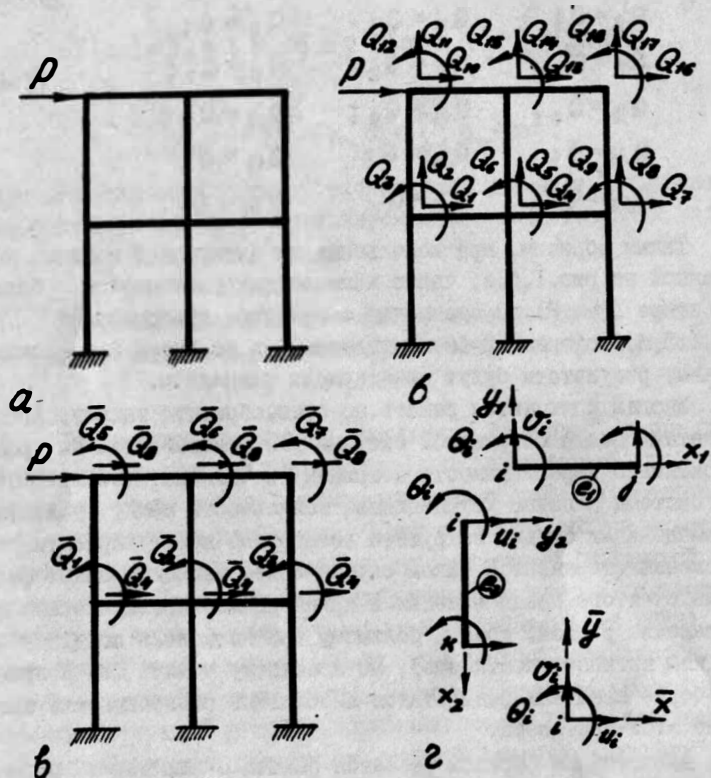


Рис. I.5. К расчету рамы с ортогональной сеткой и нерастяжимыми стержнями

Можно легко избежать возникающих в связи с этим затруднений при формировании разрешающей системы уравнений, если использовать для описания стержней только местную систему координат, располагая ее для горизонтальных и вертикальных стержней относительно общей системы осей так, как показано на рис. I.5, г. Матрица жесткости и другие величины, относящиеся к элементу, при такой ориентации местных осей имеют одинаковое выражение как в общей, так и в местной системах координат, потому что в обоих случаях матрица жесткости получается путем вычеркивания из выражения (I.17) строк и столбцов, соответствующих степеням свободы узлов в направлении оси стержня, наличие которых не влияет на изгибную деформацию стержня, а описывает перемещение стержня как твердого тела:

$$[k^e] = [K^e] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & 4EJ & -\frac{6EJ}{l^2} & 2EJ \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & 2EJ & -\frac{6EJ}{l^2} & 4EJ \end{bmatrix} \quad (I.48)$$

Компоненты вектора нагрузок $\{p^e\}$ могут быть рассчитаны по соответствующим формулам из зависимостей (I.15). Положительные направления узловых перемещений, а также других векторных величин и порядок их нумерации для рассматриваемого балочного элемента показан на рис. I.6, а.

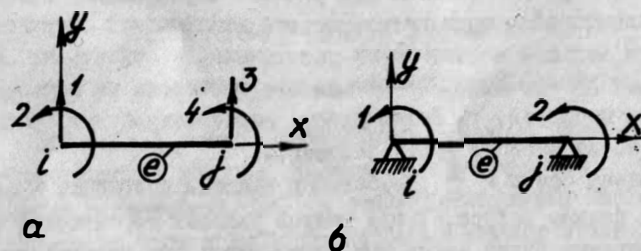


Рис. I.6. Порядок нумерации и положительные направления компонент векторов $\{q^e\}$, $\{r^e\}$, $\{p^e\}$ балочных элементов с 2- и 4-мя степенями свободы

Из вышесказанного следует, что при расчете рам с прямоугольными полыми элементами можно описать только в местной системе координат, если ориентировать их оси относительно глобальной системы координат, как показано на рис. I.5, г. При этом результаты будут такими, как если бы все расчеты проводились в общей системе координат.

Задача еще более упрощается, если все узлы рамы неподвижны, т.е. не имеют линейных степеней свободы. В этом случае ориентация осей местной системы координат относительно глобальной системы вообще не влияет на величины коэффициентов матрицы жесткости, которая имеет вид

$$[k^e] = [K^e] = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (I.49)$$

Узловые моменты, входящие в вектор $\{p^e\}$, вычисляются по соответствующим формулам из (I.15). Положительные направления углов поворота узлов и других векторных величин для элемента, имеющего две угловых степени свободы, и порядок их нумерации показаны на рис. I.6, б.

Нетрудно видеть, что для рам с неподвижными узлами использование для описания стержневой местной системы координат и соответствующих матриц жесткости и вектора нагрузки возможно при любом расположении стержневой системы.

Использование только местных систем координат для описания стержневых элементов конечноэлементной модели, без привлечения общей системы координат, возможно и в случае ортогональных перекрытий. Если при расчете перекрытия пренебречь, как это обычно делается, осевой деформацией стержней, вследствие большой жесткости на растяжение, и считать их не работающими на кручение, из-за малости жесткости на кручение у открытых профилей, то балки набора перекрытия будут работать только на изгиб в своей плоскости.

Направим оси \bar{X} и \bar{Z} глобальной системы координат параллельно балкам набора. Тогда вектор узловых перемещений такого перекрытия будет иметь три компоненты: два угла поворота θ_x , θ_z относительно осей \bar{X} и \bar{Z} и одно линейное перемещение U в направлении оси Y (рис. I.7, а). При разбиении перекрытия на элементы компоненты данного вектора распределяются между прилегающими к узлу стержнями в соответствии с

рис. I.7, б. Если при этом и направление осей местной системы координат для продольных и поперечных стержней принять таким, как показано на рис. I.7, б, то матрицы жесткости и другие параметры, относящиеся к элементам, будут одинаковы с таковыми же величинами, вычисленными в общей системе координат.

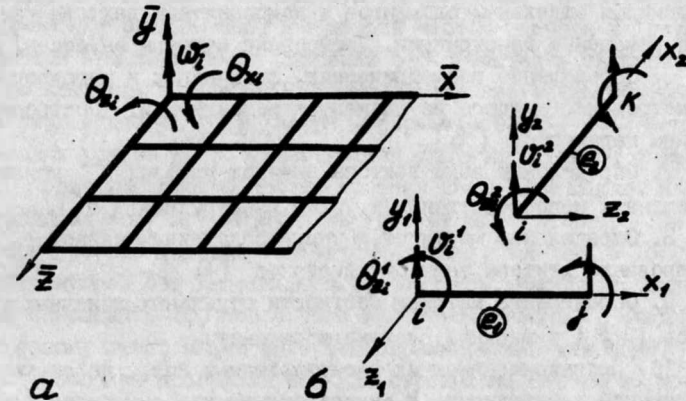


Рис. I.7. К использованию местной системы координат при расчете перекрытий

Учет указанного обстоятельства позволяет при расчете перекрытий не производить привязку местных осей к глобальной системе координат.

2. ПРОГРАММА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. Алгоритм метода конечных элементов

В разд. I данных методических указаний были рассмотрены теоретические вопросы, связанные с применением матричного метода перемещений (МКЭ) к расчету стержневых систем. Основываясь на этом материале, выделим основные этапы расчетного алгоритма МКЭ.

Расчет стержневой конструкции по МКЭ состоит из следующих операций.

I. Выбор местоположения узловых точек конструкции.

2. Представление конструкции в виде совокупности конечных элементов.
3. Наложение на конструкцию связей, устраняющих ее перемещения как твердого тела.
4. Определение вида вектора узловых перемещений всей конструкции $\{Q^*\}$.
5. Установление топологической связи между узловыми перемещениями отдельных элементов и компонентами вектора узловых перемещений конструкции. Построение матрицы индексов $[T]$.
6. Определение геометрических, физических и нагрузочных параметров для каждого из элементов конструкции. Построение матрицы параметров $[B]$.
7. Определение вида вектора внешних узловых усилий, приложенных непосредственно к узлам конструкции $\{\hat{P}^*\}$.
8. Определение жесткостей упругоподатливых связей и формирование вектора жесткостей связей $[G^*]$.
9. Определение матрицы жесткости отдельных конечных элементов $[k^e]$ в местной системе координат.
10. Приведение внешних распределенных сил, действующих на элементы конструкции, к эквивалентным узловым силам $\{p^e\}$ в местной системе координат.
11. Определение матрицы направляющих косинусов элементов $[L^e]$.
12. Приведение матриц жесткости $[k^e]$ и векторов эквивалентных узловых усилий $\{p^e\}$ к общей системе координат.
13. Составление ансамбля элементов и построение общей матрицы жесткости конструкции $[K^*]$.
14. Определение общего вектора суммарных узловых усилий $\{F^*\} = \{\hat{P}^*\} - \{P^*\}$.
15. Получение системы разрешающих уравнений (I.37) метода конечных элементов.
16. Выбор метода решения системы разрешающих уравнений и определение вектора узловых перемещений $\{Q^*\}$.
17. Определение узловых перемещений отдельных элементов $\{q^e\}$.
18. Определение внутренних узловых усилий отдельных элементов $\{r^e\}$.
19. Построение эпюр изгибающих моментов, перерезывающих и осевых сил.

Выполнение операций 1-4 расчетного алгоритма составляет первую часть расчета конструкции методом конечных элементов, заканчивающуюся построением дискретной расчетной схемы конструкции (конечноэлементной модели). Порядок построения конечноэлементной модели описан в параграфе I.2.

На основе расчетной схемы определяется исходная информация, необходимая для расчета конструкции. Составление исходной информации является второй частью расчета и осуществляется при выполнении операций 5-8 расчетного алгоритма метода конечных элементов. Заканчивается эта часть построением матрицы индексов $[T]$, матрицы параметров $[B]$ и векторов узловых усилий $\{\hat{P}\}$ и жесткостей упругоподатливых связей $[G]$.

Операции построения дискретной расчетной модели и составления исходной информации требуют определенных навыков и труднее всего поддаются автоматизации, поэтому в большинстве случаев они выполняются расчетчиком. Наоборот, выполнение операций 9-18, после того как осуществлены предыдущие операции, легко может быть запрограммировано для ЭЦМ.

Описание программы МКЭ для стержневых систем и порядок подготовки исходных данных для нее приведены ниже.

2.2. Назначение и краткое описание программы STARK

Программа STARK предназначена для расчета методом конечных элементов неразрезных балок, плоских рам и перекрытий. Расчет конструкций по этой программе позволяет определить линейные и угловые перемещения узловых точек стержневой системы и внутренние усилия в узловых точках для всех стержней дискретной расчетной модели. Для расчета могут использоваться балочные элементы с 2-, 4-мя и 6-ю степенями свободы.

Программа реализована в системе ДЭС КП ЭМ СМ-4. Программа состоит из головной (управляющей) программы STARK и подпрограмм: INPUT, FORMK, FORW, INVERS, FORCE, OPUT, ESM.

Листинг программы приведен в приложении I. Расшифровка основных обозначений дана в комментариях к головной программе STARK. Работа программы построена в диалоговом режиме. Предусмотрена возможность ввода исходных данных с файла прямого доступа. В головной программе STARK вводятся шифр и ос-

новые параметры задачи. Эта же программа осуществляет управление работой подпрограмм.

Для более экономного распределения памяти ЭВМ в программе принята концепция одномерного массива. Поэтому перед обращением к подпрограммам определяются начальные адреса массивов исходной информации и основных рабочих массивов. В подпрограмме INPUT осуществляются ввод и распечатка массивов исходных данных.

Подпрограмма ESM вычисляет коэффициенты матрицы жесткости элемента $[k^e]$ и $[K^e]$ в местной и общей системах координат, на основе которых в подпрограмме FORMK формируется общая матрица жесткости $[K^*]$. В подпрограмме FORMK производится также определение общего вектора нагрузок $[F^*]$ и учет податливости связей, наложенных на систему.

Подпрограммы FORW и INVERS осуществляют решение основной системы алгебраических уравнений МКЭ методом исключений Гаусса. Причем первая выполняет прямой, а вторая – обратный ход гауссовского исключения.

В программе FORCE вычисляются внутренние силовые факторы в узловых сечениях конечных элементов T, M, N .

И наконец, подпрограмма OPUT производит печать полученных результатов расчета: вектора узловых перемещений конструкции $\{Q^*\}$ и узловых внутренних усилий $\{\hat{r}^e\}$.

2.3. Состав и подготовка исходных данных к программе

В состав исходной информации, необходимой для расчета конструкции на ЭВМ, входят следующие группы данных:

- шифр задачи;
- основные параметры конечноэлементной модели конструкции;
- информация об элементах дискретной системы;
- информация об узлах конструкции.

Шифр задачи представляет собой описательное утверждение, характеризующее решаемую задачу и содержащее не более 60 буквенно-цифровых символов. В частности, шифром задачи может являться номер варианта расчетного задания студента, его фамилия и номер группы.

В число основных параметров конечноэлементной модели конструкции входят:

- M – количество конечных элементов конструкции;
- N – число степеней свободы конструкции;
- NE – число степеней свободы конечного элемента;
- NB – ширина ленты системы уравнений МКЭ;
- MH – число групп элементов, имеющих одинаковые параметры;
- NPAR – число параметров для одного конечного элемента;
- NP – число сосредоточенных нагрузок, приложенных в направлении узловых перемещений конструкции;
- NG – число упругоподатливых связей в конструкции;
- E – модуль упругости материала конструкции.

Информация об элементах конечноэлементной модели конструкции включает в себя следующие числовые массивы:

- матрица индексов $[T]$;
- вектор-указатель $\{C\}$ типов параметров для элементов дискретной системы;
- матрицы параметров $[B]$ типовых элементов дискретной системы.

Матрица индексов $[T]$ размерностью $[M \times NE]$ содержит информацию о связи между узловыми перемещениями отдельных элементов $\{q^e\}$ и компонентами вектора узловых перемещений конструкции $\{Q^*\}$. Назначение матрицы индексов состоит в обеспечении формирования коэффициентов общей матрицы жесткости конструкции $[K^*]$, выборки узловых перемещений отдельных конечных элементов из вектора $\{Q^*\}$, а также формирования вектора узловых эквивалентных сил $\{P^*\}$ из векторов узловых реактивных усилий $\{p^e\}$ для отдельных элементов. Коэффициенты t_{ei} матрицы индексов представляют собой номера узловых перемещений элемента, взятые из общей системы номеров узловых перемещений конструкции и записанные в порядке нумерации узловых перемещений стандартного элемента, как показано в табл.2.1.

Таблица 2.1

Стандартная строка матрицы индексов

Номер элемента	Номера узловых перемещений стандартного элемента			
	1	2	...	NE
e	t_{e1}	t_{e2}	...	$t_{e,NE}$

При составлении матрицы индексов элементы дискретной системы перебираются в порядке их нумерации и рассматриваются в системе координат, привязанной к элементу (т.е. должны быть определены начальный i и конечный j номера узлов элемента); устранившим, вследствие наложенных на систему связей, перемещениям в матрице индексов соответствуют нулевые номера. Так, например, для системы, изображенной на рис. I.1, б, матрица индексов имеет вид

$$[T] = \begin{bmatrix} I & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Вектор-указатель типов параметров элементов конструкции $\{C\}$ имеет порядок $[1 \times M]$. Для составления вектора-указателя конечные элементы дискретной системы рассматриваются в порядке их нумерации и каждому из них присваивается некоторый номер $c_e \in M, M \leq M$. При этом элементам с одинаковыми параметрами присваиваются одинаковые номера. Таким образом:

$$\{C\} = \{c_1, c_2, \dots, c_e, \dots, c_M\}. \quad (2.2)$$

Значение наибольшей компоненты вектора $\{C\}$ будет определять число групп элементов с разными параметрами $MN = \max c_e$. Следует отметить, что идентификацию параметров нужно вести, рассматривая их в местных системах координат.

Матрица параметров $[B]$ имеет размеры $[MN \times NPAR]$ и состоит из параметров элементов, записанных последовательно для всех групп элементов с разными номерами c_e . Назначение матрицы параметров - обеспечить вычисление коэффициентов матриц жесткости конечных элементов $[k^e]$ и внутренних усилий в элементах конструкции $\{P^e\}$. Поэтому матрица параметров должна содержать информацию о размерах, пространственном расположении элементов дискретной системы, а также о физических характеристиках материала и внешней нагрузке, приходящейся на отдельные элементы.

Каждая из MN групп элементов имеет свою строку в матрице параметров. Длина строки и конкретное ее содержание зависят от вида конечного элемента и особенностей программы.

В случае рассматриваемой программы стандартная (рабочая) строка матрицы параметров определяется табл. 2.2.

Таблица 2.2

Стандартная строка матрицы параметров

Номер группы элементов	Нагрузочные параметры				Геометрические параметры			
	P_1	P_2	...	P_{ME}	l	J	F	$\alpha(x^{\wedge} \bar{x})$
c_e	P_1	P_2	...	P_{ME}	l	J	F	$\alpha(x^{\wedge} \bar{x})$

В табл. 2.2: P_i - компоненты вектора эквивалентных узловых усилий $\{P^e\}$; $l, J, F, \alpha(x^{\wedge} \bar{x})$ - соответственно длина, момент инерции, площадь поперечного сечения элемента и величина угла между осями x и \bar{x} местной и общей систем координат.

В зависимости от вида конечного элемента рабочая строка матрицы параметров может содержать различное число параметров. Так, например, параметры F и α задаются только для конечных элементов с 6-ю степенями свободы, работающих на растяжение-сжатие и изгиб. Для рамы, изображенной на рис. I.1, элементы 2 и 3 имеют одинаковые параметры, поэтому вектор-указатель $\{C\}$ и матрица параметров $[B]$ определяются следующим образом:

$$\{C\} = \{1 \ 2 \ 2 \ 3\}; \quad (2.3)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,414l_0 & 4J_0 & 2F_0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_0 & J_0 & F_0 & 0 \\ 0 & \frac{P_0 l_0}{2} & \frac{P_0 l_0^2}{12} & 0 & \frac{P_0 l_0}{2} & -\frac{P_0 l_0^2}{12} & l_0 & J_0 & F_0 & 90 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Информация об узлах задается при помощи массивов $[P]$ и $[G]$. Массив $[P]$ имеет размерность $[NP \times 2]$ и содержит номера s узловых перемещений конструкции Q_s^* , в направлении которых действуют сосредоточенные усилия P_s^* , и значения этих усилий, т.е. типовая строка данной матрицы имеет вид s, P_s^* . Массив $[G]$ размерностью $[NG \times 2]$ содержит номера s узловых перемещений конструкции Q_s^* по направлению податливых,

связей и значения коэффициентов жесткости K_s указанных связей. Типовая строка матрицы $[G]$ имеет вид s, K_s .

Для рамы, изображенной на рис. I.1, массив $[G]$ отсутствует, а массив $[P]$ может быть записан следующим образом:

$$[P] = [1 \quad -2\rho_0 l_0]. \quad (2.5)$$

Исходная информация о дискретной системе может задаваться как в размерном, так и безразмерном виде. В последнем случае в качестве исходных данных выступают безразмерные коэффициенты при соответствующих размерных множителях. В частности, удобно все кинематические, нагрузочные и жесткостные параметры дискретной системы выражать через следующие физические величины: E (Па), ρ_0 (Н/м), l_0 (м), J_0 (м⁴), F_0 (м²), как это сделано при составлении матриц $[B]$ и $[P]$ см. (2.4), (2.5). Тогда указанные величины могут рассматриваться как некоторые условные единицы измерений и принимать при формировании исходных данных единичные значения. Отметим только, что для произвольной рамной конструкции не все эти величины могут считаться независимыми: так, l_0, F_0, J_0 будут связаны соотношением $J_0 = l_0^2 F_0$. Задание исходной информации в безразмерном виде обеспечивает более высокую степень общности численного решения задачи по сравнению с размерной формой, поскольку результаты расчета также будут выражаться через E, ρ_0, l_0, J_0, F_0 , конкретные значения которых определяются из условия реальной задачи.

2.4. Работа с программой. Описание результатов расчета

После того как определены основные параметры конечно-элементной модели и составлены массивы исходных данных, они вводятся в ЭВМ при работе программы с видеотерминала или подготавливаются в виде файла данных на устройстве прямого доступа (диске) в следующем порядке:

- шифр задачи;
- параметры $M, N, NE, NB, MN, NPAR, NP, NG, E$;
- числовой массив матрицы индексов $[T]$, построено;
- числовой массив вектора-указателя $\{C\}$;

- числовой массив матрицы параметров $[B]$, построено;
- числовой массив матрицы сосредоточенных нагрузок $[P]$, построено;
- числовой массив матрицы жесткостей упругих связей $[G]$, построено.

Последние два массива информации могут отсутствовать, если NP или (и) NG равно нулю.

Следует отметить, что ввод исходных с дисплея в диалоговом режиме может быть рекомендован лишь для относительно простых задач (5-10 элементов в дискретной модели). Для более сложных задач предпочтительнее готовить исходные данные в виде отдельного файла на диске.

После запуска программы и поступления на дисплей запроса "ОТКУДА ВВОДИТЬ ДАННЫЕ?" указывается имя этого файла, и ввод далее осуществляется автоматически.

Результатами расчета стержневой конструкции по программе STARK являются узловые перемещения конструкции - компоненты вектора $\{Q^*\}$ и узловые внутренние усилия (осевые и перерезывающие силы, изгибающие моменты) для каждого элемента конструкции $\{R^e\}$.

Перемещения узлов конструкции печатаются после заголовка "УЗЛОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ" в виде одномерного массива $Q(I) = Q(1), Q(2), \dots, Q(N)$ с номерами, соответствующими глобальной системе нумерации узловых перемещений в дискретной модели.

Внутренние усилия печатаются после заголовка "ВНУТРЕННИЕ УЗЛОВЫЕ УСИЛИЯ" построено для каждого элемента в виде

$$N_{эл}, RR(1), RR(2), \dots, RR(NE),$$

где $RR(I)$ - узловые усилия, соответствующие степеням свободы типового элемента дискретной системы, определенные с учетом правила знаков (см. рис. I.4).

В заключение заметим, что при работе с задачей в отладочном режиме результаты целесообразно выводить на дисплей. При выполнении окончательного расчета результаты выводятся на бумажную ленту.

2.5. Пример расчета стержневой конструкции по программе STARK

В качестве примера произведен расчет шпангоутной рамы судна, подробно рассмотренной в [1, т. I, § II.9]. Конструкция рамы и ее нагрузка симметричны относительно диаметральной плоскости (рис. 2.1). Геометрические, жесткостные и нагрузочные параметры для каждого из стержней рамы приведены в табл. 2.3.

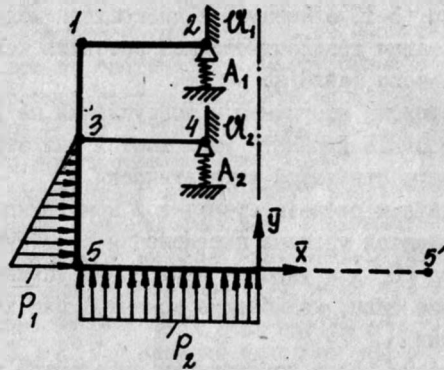


Рис. 2.1. Схема судовой рамы с прямоугольными плями

Таблица 2.3

Исходные данные к расчету рамы

l_{12}/l_0	l_{43}/l_0	l_{34}/l_0	l_{35}/l_0	l_{55}/l_0	J_{12}/J_0	J_{13}/J_0	J_{34}/J_0
1	0,6	1,0	1,5	4,0	1,0	0,6	1,0
J_{35}/J_0	J_{55}/J_0	$\alpha_1 EJ_0/l_0$	$\alpha_2 EJ_0/l_0$	$A_1 EJ_0/l_0$	$A_2 EJ_0/l_0$	P_1/ρ_0	P_2/ρ_0
2,0	4,0	0,15	0,10	0,05	0,10	1,0	1,0

Вследствие симметрии рамы расчет целесообразно вести для половины конструкции. В качестве узловых точек примем узлы соединения стержней рамы, сечения, в которых установлены опорные крепления, и один дополнительный узел 6 для стержня 5-5, расположенный на оси симметрии рамы. В результате та-

кого выбора узловых точек рамная конструкция представляется состоящей из пяти балочных элементов. Полагая стержни рамы нерастяжимыми и учитывая характер наложенных на раму связей, введем в каждом из узлов соответствующий вектор перемещений $\{q_i\}$ (рис. 2.2, а, б). Очевидно, что в узлах 1+5 появятся углы поворота, в узле 6 и дополнительно в узлах 2 и 4 - линейные вертикальные перемещения. Нумерацию элементов дискретной системы и неизвестных перемещений Q_s^* в общей системе координат производим таким образом, чтобы их номера возрастали с увеличением номеров узлов. Такой порядок нумерации приводит к системе уравнений с минимальной шириной ленты матрицы коэффициентов. Нумерация элементов, а также положительные направления и порядок нумерации узловых перемещений рамной конструкции показаны на рис. 2.2, а. Из анализа дискретной расчетной системы находим основные параметры конечноэлементной модели:

$$M = 5; N = 8; NE = 4; NP = 0; NQ = 4.$$

Остальные параметры будут определены в дальнейшем. Так как стержни рамы нерастяжимы и ортогональны между собой, при расчете рассматриваемой системы целесообразно использовать для описания каждого элемента местную систему координат. Для того чтобы получить при этом такие же результаты, что и при использовании общей системы координат, ориентация осей местной системы координат каждого элемента относительно принадлежащих элементу узловых перемещений конструкции должна быть, как у стандартного элемента (рис. 1.6, а). Такому требованию отвечают направления осей местной системы координат для элементов данной рамной конструкции, показанные на рис. 2.2, в.

Рассматривая последовательно элементы рамы в местных осях координат и записывая в табличном виде номера S узловых перемещений конструкций Q_s^* , принадлежащих отдельным элементам, в порядке их следования в векторе узловых перемещений элемента $\{q^e\}$, получим матрицу индексов конструкции:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

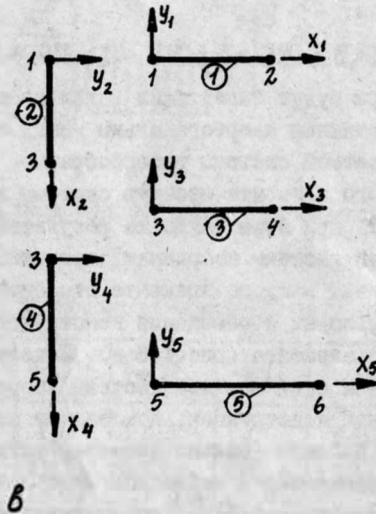
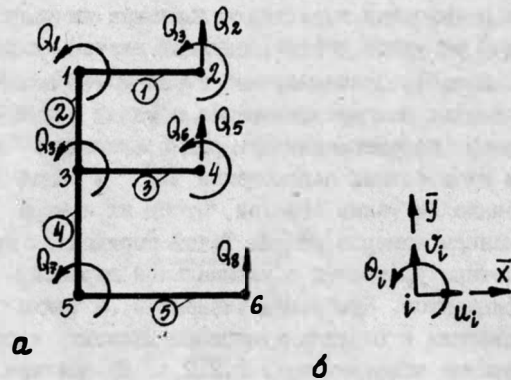


Рис.2.2. Дискретная расчетная модель рамы.
Местные системы координат

Анализируя величину разности между элементами матрицы индексов, находим ширину ленты системы уравнений:

$$NB = \max_{e,i,j} |t_{ei} - t_{ej}| + 1 = 4.$$

Из рассмотрения геометрических, жесткостных и нагрузочных параметров элементов дискретной модели заключаем, что параметры 1-го и 3-го элементов одинаковы. Отсюда следует, что вектор-указатель распределения элементов по типовым группам можно записать в виде

$$\{C\} = \{1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4\}. \quad (2.7)$$

Максимальный элемент вектора $\{C\}$ определяет число типовых групп элементов конструкции $MN = 4$.

Для составления матрицы параметров необходимо вычислить компоненты векторов эквивалентных узловых усилий $\{p^e\}$ в местной системе координат. Учитывая характер внешних нагрузок, действующих на отдельные элементы, находим следующие значения эквивалентных усилий:

$$\{p^{(1)}\} = \{p^{(2)}\} = \{p^{(3)}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\};$$

$$\{p^{(4)}\} = \{0,225p_0 l_0 \ 0,075p_0 l_0^2 \ 0,525p_0 l_0 \ -0,1125p_0 l_0^2\};$$

$$\{p^{(5)}\} = \{p_0 l_0 \ 0,333p_0 l_0^2 \ p_0 l_0 \ -0,333p_0 l_0^2\}.$$

Помимо векторов $\{p^e\}$, в качестве параметров балочных конечных элементов необходимо задать также длину $l^{(e)}$ и момент инерции $J^{(e)}$ конечных элементов. Таким образом, величина $NPAR = 6$.

Примем p_0 , l_0 , J_0 и E в качестве основных (условных) единиц измерения. Тогда с учетом найденных выражений для векторов $\{p^e\}$ и данных табл.2.3 матрица параметров $[B]$ в безразмерной форме запишется следующим образом:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,6 \\ 0,225 & 0,075 & 0,525 & -0,1125 & 1,5 & 2 \\ 1 & 0,333 & 1 & -0,333 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$


```

INTEGER TITLE(40)
DIMENSION A(5000),MA(5000)
EQUIVALENCE (A(1),MA(1))
IO=6
IN=3
TYPE*, '          C ВАМИ РАБОТАЕТ ПРОГРАММА *STARK*'
TYPE*, '
TYPE*, 'ОТКУДА ВВОДИТЬ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ <KB:,FILE.DAT>
TYPE*
CALL ASSIGN(IN,'DAT',-1)
TYPE *, 'КУДА ВЫВОДИТЬ РЕЗУЛЬТАТ РАСЧЕТА <KB:,LPI>
TYPE *
CALL ASSIGN (IO,'KB:',-1)
TYPE*, 'ВВЕДИТЕ ШИОР ЗАДАЧИ <Ф.И.О.,НОМЕР ГРУППЫ>
READ(IN,4) TITLE
FORMAT(40A2)
4 WRITE(IO,1) (TITLE(I),I=1,30)
1 FORMAT(///////16X,'РАСЧЕТЫ ПО ПРОГРАММЕ *STARK*',
* 12X,'ШИОР ЗАДАЧИ'//17X,30A2//
* 14X,'ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ')
TYPE*, 'ВВЕДИТЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ M,N,NE,NB,MH,NPAR,
* NP,NG,E'
READ(IN,*) M,N,NE,NB,MH,NPAR,NP,NG,E
WRITE(IO,2)M,N,NE,NB,MH,NPAR,NP,NG,E
2 FORMAT(/10X,' M=',I3,' N=',I3,' NE=',I3,' NB=',
* I3/10X,' MH=',I3,' NPAR=',I3,' NP=',I3,' NG=',
* I3,' E=',F12.3)
JT=1
JC=JT+M*NE
IB=(JC+M)/2+1
IP=IB+MH*NPAR
IG=IP+2*NP
ISM=IG+2*NG
IGSM=ISM+NE*NE
IGF=IGSM+N*NB
IQ=IGF+N
IEN=IQ+N
IRR=IGSM
CALL IPUT0(MA(JT),MA(JC),A(IB),A(IP),A(IG),
* M,N,NE,MH,NPAR,NP,NG,IN,IO)
CALL FORMK0(MA(JT),MA(JC),A(IB),A(IP),A(IG),A(IGSM),
* A(IGF),M,N,NE,NB,MH,NPAR,NP,NG,E,A(ISM))
CALL FOR*(A(IGSM),N,NB)
CALL INVR(A(IGSM),A(IGF),A(IQ),N,NB,1)
CALL FORCE0(MA(JT),MA(JC),A(IB),A(IQ),A(IRR),M,N,NE,
* MH,NPAR,E,A(ISM))
CALL OPUT0(A(IQ),A(IRR),M,N,NE,IO)
WRITE(IO,3) (TITLE(I),I=1,30)
3 FORMAT(/12X,'КОНЕЦ ЗАДАЧИ'//16X,30A2)
STOP
END
SUBROUTINE IPUT0(T,C,B,P,G,M,N,NE,MH,NPAR,NP,NG,IN,
* IO)
C
C
C ВВОД И ПЕЧАТЬ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
INTEGER T(M,NE),C(M),AT(14),AB1(24),AB2(16)
REAL B(MH,NPAR),P(NP,2),G(NG,2)
DATA

```

```

30 WRITE(IO,30)(I,U(I),I=1,N)
FORMAT(2(5X,'U(',I2,')='F))
N1=NE*11/2+4
13 WRITE(IO,13) (AR(I),I=1,N1)
FORMAT(/10X,'*ВНУТРЕННИЕ УЗЛОВЫЕ УСИЛИЯ*//1X,37A2)
DO 12 K=1,M
14 WRITE(IO,14) K,(RR(K,J),J=1,NE)
14 FORMAT(1X,'K=',I2,1X,6G11.3)
12 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE ESM(K,B,C,M,NE,MH,NPAR,E,SM,R,KIT)
C
C ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ
C ЭЛЕМЕНТА БАЛКИ SM(NE,NE) С 2, 4 И 6 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ
C
INTEGER C(M)
REAL L(6,6)
DIMENSION B(MH,NPAR),SM(NE,NE),R(NPAR),S(6,6)
DO 1 I=1,NE
DO 1 J=1,NE
1 SM(I,J)=0.0
NY=C(K)
DO 5 J=1,NPAR
5 R(J)=B(NY,J)
Y=(2*E/R(NE+1))*R(NE+2)
IF(NF.NE.2) GOTO 16
SM(1,1)=2*Y
SM(1,2)=Y
SM(2,2)=SM(1,1)
GOTO 6
16 Z=3*Y/R(NE+1)
IF(NF.NF.4) GOTO 7
SM(1,1)=2*Z/R(NE+1)
SM(1,2)=Z
SM(1,3)=-SM(1,1)
SM(1,4)=Z
SM(2,2)=2*Y
SM(2,3)=-Z
SM(2,4)=Y
SM(3,3)=SM(1,1)
SM(3,4)=-Z
SM(4,4)=SM(2,2)
GOTO 6
7 Y1=(2*E/R(NE+1))*R(NE+3)
SM(1,1)=Y1
SM(1,4)=-SM(1,1)
SM(2,2)=2*Z/R(NE+1)
SM(2,3)=Z
SM(2,5)=-SM(2,2)
SM(2,6)=Z
SM(3,3)=2*Y
SM(3,5)=-Z
SM(3,6)=Y
SM(4,4)=Y1
SM(5,5)=SM(2,2)
SM(5,6)=-Z
SM(6,6)=SM(3,3)
6 DO 9 I=1,NE

```



```

IF(MJ.GT.N)MJ=N
NJ=1+1
L=1
DO 82 J=NJ,MJ
L=L+1
82 GF(J,KK)=GF(J,KK)-GSM(I,L)*GF(I,KK)/GSM(I,1)
C ОБРАТНАЯ ЗАМЕНА
X(N,KK)=GF(N,KK)/GSM(N,1)
DO 84 K=1,N1
I=N-K
MJ=NB
IF((I+NB-1).GT.N)MJ=N-I+1
SUP=0.0
DO 83 J=2,MJ
II=I+J-1
83 SUM=SUM+GSM(I,J)*X(II,KK)
84 X(I,KK)=(GF(I,KK)-SUM)/GSM(I,1)
87 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE FORCE0(T,C,B,U,RR,M,N,NE,MH,NPAR,E,SM)
C
C ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ
C
INTEGER T(M,NE),C(M)
REAL B(MH,NPAR),O(N),RR(M,NE),SM(NE,NE),R(10)
KIT=1
DO 54 K=1,M
CALL ESM(K,B,C,M,NE,MH,NPAR,E,SM,K,KIT)
DO 52 I=1,NE
RR(K,I)=R(I)
DO 52 J=1,NE
JJ=T(K,J)
IF(JJ.LE.0) GO TO 52
RR(K,I)=RR(K,I)+SM(I,J)*O(JJ)
52 CONTINUE
I=0
IF(NE.EQ.4) I=1
RR(K,I+1)=-RR(K,I+1)
IF(NE.EQ.2) GO TO 55
RR(K,3)=-RR(K,3)
IF(NE.EQ.4) GO TO 55
RR(K,5)=-RR(K,5)
55 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE OPUTO(O,RR,M,N,NE,IO)
C
C ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА: ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ O(N)
C И МАТРИЦЫ УСИЛИЙ RR(M,NE)
C
INTEGER AR(37)
REAL O(N),RR(M,NE)
DATA AR/'N ', '3L', 2*'', 'R ', 'R1', 4*'', 'RR', '2 ', 3*''
* 'N ', 'R3', 4*'', 'RR', '8 ', 3*''
* 'R ', 'R5', 4*'', 'RR', '6 ', 3*''
WRITE(IO,20)
20 FORMAT('//14X, '*РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА*',//10X,
* 'УЗЛОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ'/)

```

```

DO 9 J=I,NE
SM(J,I)=SM(I,J)
IF(NPAR.NE.10) GOTO 14
Y=(R(NE+4)/100)*3.1415926
Z=COS(Y)
Z1=SIN(Y)
DO 8 I=1,NE
DO 8 J=1,NE
S(I,J)=0.0
8 L(I,J)=0.0
L(1,1)=Z
L(1,2)=Z1
L(2,1)=-Z1
L(2,2)=Z
L(3,3)=1
L(4,4)=Z
L(4,5)=Z1
L(5,4)=-Z1
L(5,5)=Z
L(6,6)=1
DO 10 I=1,NE
DO 10 J=1,NE
DO 10 K1=1,NE
10 S(I,J)=S(I,J)+SM(I,K1)*L(K1,J)
IF(KIT.EQ.0) GOTO 12
DO 13 I=1,NE
DO 13 J=1,NE
13 SM(I,J)=S(I,J)
GOTO 14
12 DO 15 I=1,NE
DO 15 J=1,NE
SM(I,J)=0.0
DO 15 K1=1,NE
15 SM(I,J)=SM(I,J)+L(K1,I)*S(K1,J)
14 RETURN
END

```


ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРИМЕР РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ
ПО ПРОГРАММЕ STARK .

РАСЧЕТЫ ПО ПРОГРАММЕ *STARK*
ШИОР ЗАДАЧИ:
ПРИМЕР РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ МКЭ

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

M= 5 N= 8 NE= 4 NB= 4
MH= 4 NPAR= 6 NP= 0 NQ= 4 E= 1.000

МАТРИЦА ИНДЕКСОВ (I)

N ЭЛ Q1 Q2 Q3 Q4

1	0	1	2	3
2	0	1	0	4
3	0	4	5	6
4	0	4	0	7
5	0	7	8	0

ВЕКТОР-УКАЗАТЕЛЬ ТИПОВ ЭЛЕМЕНТОВ (C)

1 2 1 3 4

МАТРИЦА ПАРАМЕТРОВ (B)

R1	R2	R3	R4	I ЭЛ.	I ЭЛ.
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.600	0.600
0.225	0.075	0.525	-0.112	1.500	2.000
1.000	0.333	1.000	-0.333	2.000	4.000

МАССИВ ЖЕСТКОСТЕЙ СВЯЗЕЙ (G)

N ПЕР. ЭН.ЖЕСТ

2.	20.000
3.	6.667
5.	10.000
6.	10.000

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

УЗЛОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Q(1) =	-0.0107109	Q(2) =	-0.0018255
Q(3) =	0.0009829	Q(4) =	0.0364161
Q(5) =	0.0096396	Q(6) =	-0.0010711
Q(7) =	-0.1796740	Q(8) =	-0.3463407

ВНУТРЕННИЕ УЗЛОВЫЕ УСИЛИЯ

N ЭЛ	RR1	RR2	RR3	RR4
K= 1	-0.365E-01	0.300E-01	-0.365E-01	-0.655E-02
K= 2	0.257	-0.300E-01	0.257	0.124
K= 3	0.964E-01	-0.657E-01	0.964E-01	0.107E-01
K= 4	-0.539	0.210	-1.29	-0.974
K= 5	2.00	-0.974	-0.238E-06	1.03

КОНЕЦ ЗАДАЧИ

ПРИМЕР РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ МКЭ'

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Матричный метод расчета стержневых систем	3
I.1. Общие сведения	3
I.2. Построение дискретной расчетной модели конструкции	4
I.3. Расчет элементов дискретной системы и составление уравнений МКЭ	8
I.4. Использование местной системы координат при расчете систем с ортогональной сеткой и нерастяжимыми стержнями	20
2. Программа расчета стержневых систем	25
2.1. Алгоритм метода конечных элементов	25
2.2. Назначение и краткое описание программы STARK	27
2.3. Состав и подготовка исходных данных к программе	28
2.4. Работа с программой. Описание результатов расчета	32
2.5. Пример расчета стержневой конструкции по программе STARK	34
Литература	38
Приложение I	39
Приложение 2	46