АЛЬФРЕД ТАРСКИЙ

Введение в логику и методологию дедуктивных наук

~

И * Л

Государственное издательство
иностранной
литературы
*

INTRODUCTION TO LOGIC

and to the

Methodology of Deductive Sciences

by

ALFRED TARSKI

1941

АЛЬФРЕД ТАРСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ И МЕТОДОЛОГИЮ ДЕДУКТИВНЫХ НАУК

Перевод с английского
О. Н. ДЫННИК

Редакция и предисловие к русскому переводу
проф. С. А. ЯНОВСКОЙ

Примечания
Г. М. АДЕЛЬСОНА-ВЕЛЬСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА
1948

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Книга известного польского математика и логика А. Тарского, представляющая собой популярное введение в математическую логику и методологию дедуктивных наук, заслуживает внимания советского читателя. Вышедшая в 1936 г. на польском языке, она появилась в 1937 г. в немецком переводе, но была выпущена известным немецким книгоиздательством Шпрингера не в Германии, а в Вене. Правда, это не помогло издательству: часть издания, которую оно не успело распространить до «аншлюса», так и осталась лежать на его складах... по соображениям расового порядка. В 1941 г. просмотренное и дополненное издание книги вышло на английском языке в Нью-Йорке. С этого издания и выполнен русский перевод.

Книга называлась первоначально «Введение в математическую логику и методологию математики». Это заглавие больше соответствует содержанию, так как книга представляет собой введение в дисциплину, основные результаты которой получены по преимуществу специалистами-математиками в последние десятилетия XX века. Несмотря на весьма специальный характер аппарата математической логики и используемого в ней символического «языка» формул, автору удалось ввести читателя в круг рассматриваемых здесь проблем, не прибегая почти ни к какой специальной символике и пользуясь простым общедоступным языком. Объем затрагиваемых в книге вопросов при этом весьма значителен. Читатель найдет здесь и вопросы *логики высказываний,* и рассмотрение логической стороны понятий *множества* (*класса*), *свойства*, *отношения*, *функции*, *операции*; *тождества и различия,* и обсуждение принципов образования понятий (в том числе так называемого *принципа абстракции)* и способов их определения, равно как и способов образования предложений и вывода одних предложений из других. Особый раздел книги посвящен принципам построения дедуктивных теорий — так называемому *аксиоматическому методу* и связанным с ним проблемам *непротиворечивости* и *полноты.* Все изложенные принципы применяются, наконец, к построению простейших математических теорий, выполняемому на основе характерных для современной математики методов и понятий, заимствованных, например, из теории множеств или теории (абелевых) групп.

Свою общую точку зрения на значение и сущность математической логики и методологии дедуктивных наук автор изложил в предисловии к книге. В целях критического обсуждения выдвинутых им при этом положений нам представляется целесообразным хотя бы бегло охарактеризовать сначала наш взгляд на реальный смысл обсуждаемых в книге вопросов, остановившись вкратце на двух моментах.

1. В противоположность метафизике материалистическая диалектика учит, что *истина всегда конкретна:* то, что верно *здесь, сегодня* и в *данных условиях,* может быть неверно в *другом месте,* в *другое время* или при *других условиях.* Не на всякий вопрос, поставленный в общей форме, можно дать поэтому «решительный» ответ: *да* или *нет*. «Такого... «решительного» ответа, — писал И. В. Сталин в 1904 г., — требовали от марксистов последователи Бернштейна на вопрос: полезны или вредны для пролетариата кооперативы (т. е. потребительско-производственные товарищества)? Марксистам нетрудно было доказать бессодержательность подобной постановки вопроса. Они очень просто разъяснили, что все зависит от времени и места, что там, где классовое самосознание пролетариата достигло должного уровня развития, где пролетарии объединены в одну крепкую политическую партию, — там кооперативы могут принести большую пользу пролетариату, если за их создание и руководство возьмется сама партия, там же, где этих условий нет, кооперативы являются вредными для пролетариата, так как они порождают у рабочих мелко-торгашеские тенденции и цеховую замкнутость и таким образом искажают их классовое самосознание» *.

Мы видим, что законы формальной логики, такие, как *закон противоречия и закон исключенного третьего,* из которых следует, что «решительный» ответ «да» или «нет» всегда возможен, не применимы автоматически ко всем нашим высказываниям, как на этот счет думают метафизики.

---

* *И. В. Сталин,* Соч., т. I, стр. 51.

Искусство исследователя в значительной степени состоит в том, чтобы, учитывая конкретные условия обстановки, места и времени, ставить вопросы таким образом, чтобы к ним были применимы законы формальной логики и чтобы ответы на них освещали самые существенные стороны исследуемого предмета *. Недаром говорят, что правильная постановка вопроса иногда не менее ценна, чем решение его. Поскольку математика имеет дело с относительно наиболее простыми предметами и отношениями, добиться точных формулировок здесь сравнительно проще. Однако и тут пришлось для этой цели не только выработать специальную терминологию, но разработать и особые приемы научной «формализации», специфические именно для математики, особенно, поскольку в ней мы имеем дело с буквенными исчислениями.

По существу, такого рода приемы создавались стихийно, начиная еще с античной древности, в трудах таких математиков, как Евклид или Архимед. Ряд проблем, возникших в связи с великим открытием Лобачевского и созданием современной теоретико-множественной математики, заставил, однако, математиков сделать вопросы *теории математического доказательства,* принадлежащие уже к области логики и методологии математики, предметом специального исследования. В настоящее время математическая логика и непосредственно связанная с ней методология дедуктивных наук является развитой научной дисциплиной, обладающей собственной проблематикой, специальным аппаратом научного исследования и рядом окончательно установленных, содержательных и важных результатов, как полученных путем анализа уже существующих дедуктивных теорий, так и предваряющих их развитие, поскольку они относятся к любым возможным дедуктивным теориям определенного рода. Так как при этом в первую очередь имеются в виду

* Следует при этом иметь в виду, что при изменившихся обстоятельствах постановку вопросов тоже бывает необходимо соответствующим образом изменить. Наиболее правильно поэтому только полное диалектико-материалистическое освещение предмета, при котором *логическое* находится в единстве с историческим и включает его в себя (выясняется, в частности, — этому учит нас вышеприведенный пример, — *как именно* должна измениться формулировка при изменении тех или иных условий).

именно математические дисциплины, и результаты, о которых идет речь, получены в основном средствами математики, то систематическое и полное освещение их предполагает специальную математическую подготовку. Автору удалось все же осветить достаточно широкий круг проблем, не предполагая у читателя подготовки, выходящей за пределы программы по математике для средней школы. Поскольку же, например, вопросы точности формулировок и выбора средств «формализации», соответствующих содержанию рассматриваемого материала *, имеют общенаучное значение, книга Тарского может представить интерес и для читателя, далекого от математики.

2. Читатель, интересующийся логикой и особенно местом, занимаемым в ней современной математической логикой, найдет в книге материал, который позволит ему составить себе ясное представление о содержании и методах математической логики и выяснить ее основные специфические особенности. Это даст ему возможность со знанием дела, критически отнестись к попыткам буржуазных философов использовать и в этой области прогресс науки в целях борьбы с материализмом и пропаганды откровенных или путаных эклектических и идеалистических философских установок (в том числе принадлежащих и самому автору). В этой связи нам хотелось бы только обратить внимание читателя на умело использованную автором особенность математической логики, общую у нее со всеми буквенными ис-

---

* Преследующую цели научной строгости, точности и определенности «формализацию» материала, действительно отражающую существо дела и построенную исходя из принципа конкретности истины, нужно отличать, конечно, от схоластической игры в «строгость» и соответствующего «сочинения» всевозможных терминологических ухищрений и пустых «форм», лишенных всякого содержания. Заметим, что действительно научная «формализация» сама может явиться источником постановки новых и существенных для развития науки задач. Так было, например, с понятием *непрерывной кривой* в математике. Оно долго казалось непосредственно ясным и не нуждающимся в уточнении. Возникший в конце XVIII века, в связи с задачей математической физики, горячий спор «о звучащей струне», в котором приняли участие такие выдающиеся ученые, как Эйлер, Д'Аламбер, Д. Бернулли и Лагранж, убедил математиков, что дело не так просто, как кажется. Введенная уже в XIX в. точная фор-

числениями и лишний раз подчеркивающую ее тесную связь с математикой.

Введение (Виеттой и Декартом, первая половина XVII в.) буквенных исчислений в математику сыграло революционную роль в развитии этой науки. «Поворотным пунктом в математике, — говорит Энгельс, — была декартова *переменная величина*».

И хотя между «переменной величиной» и употреблением *переменных* в современной математике есть существенная разница, тем не менее буквенные исчисления, построенные Виеттой и Декартом, имели уже много общего с характерными для современной математики *исчислениями*. Основная их особенность состояла в том, что в то время как в устном рассуждении никому не придет в голову «складывать» или «перемножать» предложения — с формулами, выражающими предложения, уже в этих исчислениях можно было действовать по правилам, очень напоминающим подчас правила обыкновенной арифметики. Так, можно *складывать* определенным образом равенства или неравенства, *умножать* их на число и т. п. Вероятно, всякий человек, когда-либо изучавший алгебру, помнит также, как непривычна была для него замена обычного перехода *от общего к частному* характерным для употребления *переменных* в математике *правилом подстановки*, когда, например, вместо того чтобы сказать: «Так как сумма не зависит от по-

---

мулировка понятия *непрерывности* впервые позволила строго доказать ряд предложений, которыми математики фактически пользовались и раньше, в большинстве случаев даже не сознавая этого. Однако вскоре оказалось, что этой формулировке определения непрерывности удовлетворяют неожиданные образы вроде *кривой Пеано,* заполняющей своими точками весь квадрат, или непрерывных, нигде не диференцируемых функций Больцано-Вейерштрасса, соответствующих кривым, ни в одной точке не имеющим направления. Открытия эти имели существенное значение для дальнейшего развития науки. С одной стороны, обнаруженные таким образом кривые оказались имеющими глубокий реальный смысл. С другой стороны, встала (и была решена) задача введения таких дальнейших подразделений понятия непрерывности, которые позволили лучше отобразить имевшиеся первоначально в виду, хотя и не поддававшиеся еще точному определению, образы.

рядка слагаемых, то $7+5=5+7$», его учили сделать в формулу $a+b=b+a$ подстановку $a=7$, $b=5$.

Не говорю уже о том, что вообще употребление формул, без чего некоторые математические выводы вряд ли было бы возможно осуществить, не-математикам иногда представляется как будто специально придуманным для того, чтобы затруднить для непосвященного доступ к пониманию математического текста. Между тем уже беглое знакомство с математическими формулами позволяет подразделить их на две группы:

1) формулы, вроде

$$2+2=4,$$

$$2+3=5,$$

$$2<3,$$

$$a+b=b+a,$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2,$$

которые выражают *истину* или *ложь*, и

2) формулы, вроде

$$2+2,$$

$$\frac{2\cdot(3+2)}{7},$$

$$2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\log_{10}3,$$

которые обозначают некоторый *предмет* (отличный от *истины* и *лжи*), в данных случаях — вполне определенное *число*. Замечательной особенностью формул последнего рода является при этом то обстоятельство, что «$2+2$» так же служит обозначением одного определенного числа, как и «4», что формула $\frac{2\cdot(3+2)}{7}$, обозначает не только путь получения некоторого числа, состоящий в последовательности операций:

1) сложить 3 и 2,

2) удвоить полученный результат,

3) то, что получится, разделить на 7,

но и результат, полученный на этом пути, совпадающий в данном случае с числом $1^3/_7$.

Заметим, что именно это диалектическое единство результата и пути, к нему ведущего, широко используется в современной математике, так как дает возможность определить предмет (например, *определенный интеграл*) через указание способа его построения с помощью каких-нибудь других предметов. Отметим также, что в математике с этим связаны некоторые трудности, обусловленные тем, что не всякий путь действительно ведет к результату, и поэтому необходим критерий, позволяющий отличить «сходящийся» путь от такого, которому нельзя со смыслом приписать определенный результат.

Уже такого рода отдельные черточки наводят на мысль о желательности особого исследования логических приемов, характерных именно для математических исчислений. Неудивительно, с другой стороны, что уже первые попытки такого рассмотрения должны были натолкнуть исследователя на обнаружение того обстоятельства, что и подобного рода приемы являются лишь другой формой законов обычной логики, что, быть может, самое логику тоже можно изложить как некоторое исчисление (по крайней мере, поскольку речь идет о логических приемах, используемых в математике).

Первая попытка такого рода была предпринята еще Лейбницем, распространившим идею буквенных исчислений Виетты и Декарта как на оформленное им диференциальное и интегральное исчисление *, так и на логику. В области логики идеи Лейбница не оказали, однако, существенного влияния на развитие науки. Ряд попыток построить *алгебру логики* был предпринят в XIX в. некоторыми математиками и логиками, среди которых нужно упомянуть в первую очередь А. де-Моргана, Буля, Пирса, Шредера, русского ученого — казанского математика и логика П. С. Порецкого. Но подлинный интерес эти исследования приобрели лишь в XX в., когда в связи с кризисом

---

* Приведенное нами выше высказывание Энгельса гласит полностью так: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение и диалектика* и благодаря этому же стало *не медленно необходимым диференциальное и интегральное исчисление,* которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» («Диалектика природы», Госполитиздат, 1946, стр. 208).

основ математики остро встал вопрос о допустимых в ней средствах построения или определения предметов и доказательства предложений.

На вопросах, связанных с кризисом основ математики, Тарский, правда, почти не останавливается в своей книге; в ней не освещается и ряд его собственных важных результатов, относящихся, например, к понятию «истинности» в формализованных «языках» или к различным определениям «непротиворечивости» и «полноты» дедуктивных теорий. Они представляются ему чересчур трудными для популярного изложения, и он неоднократно подчеркивает, что его книга является только введением. Как введение она действительно удовлетворительна. Хорошо уже начало книги; в нем автор выясняет значение в математике и способы употребления в ней переменных и сразу же вводит в рассмотрение оба типа формул, характерных для математических дисциплин: 1) *пропозиционные функции*, названные в переводе «функциями-высказываниями», и 2) *предметные функции*, названные в нем «функциями-указателями». Следует отметить также то обстоятельство, что автору удалось избежать перегрузки книги формальными выкладками, вынеся соответствующий материал в упражнения. Последнее предполагает, правда, что читатель действительно выполнит все приложенные к каждому параграфу упражнения, в числе которых имеются и содержащие принципиально важный для построения аппарата исчислений материал. Большинство из них настолько просто, удачно подобрано и сформулировано, что действительно может быть самостоятельно выполнено читателем. Лишь в отдельных случаях редакция сочла целесообразным снабдить их некоторыми дополнительными указаниями.

С философской стороной книги дело обстоит значительно хуже. Автор в ряде случаев стоит на метафизической, а подчас и близкой к махизму, путаной идеалистической точке зрения. Так, подчеркивая несуществование в математике таких объектов, как «переменное число», которое «не могло бы иметь никакого определенного свойства, например, оно не могло бы быть ни положительным, ни отрицательным, ни равным нулю; или, выражаясь полнее, свойства такого числа могли бы изменяться от случая к случаю, т. е. число могло бы быть иногда положительным, иногда равным нулю», он заключает это место словами: «Но в нашем мире мы вообще не находим сущностей подобного рода; их существование противоречило бы основным законам мышления» (стр. 33). Получается, что законы мира обусловливаются законами нашего мышления, т. е. откровенный идеализм, и притом метафизического толка. Ибо в реальном мире, наоборот, все изменяется и движется; объекты, обладающие каким-нибудь свойством, перестают им обладать и, наоборот, не обладающие приобретают его; и нужно немало поработать над материалом, чтобы выделить спокойное, неизменяющееся (инвариантное) в изменении, движение же отобразить; отыскивая затем, в свою очередь, закон (т. е. спокойное) уже в изменении инвариантов, и т. д. «Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия.

«И в этом *суть* диалектики. Эту-то суть и выражает формула: единство, тождество противоположностей»*. Между тем при чтении книги Тарского, значительная часть содержания которой на самом деле посвящена именно методам «формализации» научных понятий и предложений с целью сделать их подчиняющимися законам формальной логики, создается иногда впечатление, будто автор считает предложения дедуктивной теории совершенно автоматически, сами по себе, заранее подчиняющимися этому требованию. В его специальных работах мы с этим, правда, не встретимся.

Философские установки Тарского, впрочем, нельзя считать достаточно определенными. Будучи творчески работающим математиком, он стихийно становится подчас на здоровые материалистические позиции. Так, например, он — с оговорками, правда, и не называя ее автора — возражает против известной формулировки Рэссела, что математика есть наука, в которой неизвестно, ни о чем мы говорим, ни верно ли то, что мы говорим.

* *В. И. Ленин*, Философские тетради, Госполитиздат, 1947, стр. 213.

«К подобным высказываниям, — пишет он, — следует подходить критически... Бывают, надо согласиться, случаи, когда мы развиваем дедуктивную теорию, не приписывая определенного значения ее первичным терминам, обращаясь с ними как с переменными; в таких случаях мы говорим, что рассматриваем теорию как формальную систему. Но такие случаи сравнительно редки (и даже не приняты во внимание в нашей общей характеристике дедуктивной теории, данной в параграфе 36) и встречаются только тогда, когда возможно дать несколько интерпретаций для системы аксиом этой теории, т. е. если имеется несколько способов, годных для придания конкретного смысла встречающимся в теории терминам, однако мы не хотим отдать заранее предпочтение ни одному из этих способов» (стр. 177—178).

В известной мере то же можно сказать и о его отношении к логике. В отличие от некоторых современных логиков, пришедших к математической логике от реакционной буржуазной философии, и притом махистского толка *, автор не считает логику только произвольным «языком», которому не должна предшествовать никакая содержательная научная теория. Термин «логика», по его словам, употребляется им «в качестве названия дисциплины, анализирующей смысл понятий, общих всем наукам, и устанавливающей общие законы, которым подчиняются понятия». В связи с возникающим по ходу дела вопросом о предмете или содержании логики он говорит и о законах мышления и о том, например, что в логике мы вообще не имеем дела с какими-нибудь *индивидуальными понятиями* (соответствующими им *свойствами и отношениями*) или *индивидуальными предметами* **. Однако полной ясности в этих вопросах мы все же не найдем в книге. Прежде всего, остаётся в тени основной вопрос философии — о соотношении между мышлением и бытием, а следовательно, и между законами мышления и отображаемыми в нем законами природы и общества. Неясным остается для читателя и вопрос о соотношении математики и логики. Ведь от того, что такие понятия, как «единичный», «двойственный» и т. д., удается формализовать в терминах ло-

* Таков, например, Карнап.

** В руках советского ученого Д. А. Бочвара такое понимание логики оказалось эффективным средством решения проблемы парадоксов логики и теории множеств.

гики, они не перестают быть индивидуальными понятиями (не становятся *переменными,* на место которых можно подставлять какие нибудь индивидуальные понятия)! Больше того, поскольку, например, высказывается утверждение, что арифметику можно рассматривать как часть логики, если только включить для этого в логику специальную *аксиому о бесконечности*, у читателя создается даже впечатление, что этот вопрос, по существу, праздный. Если, по определению, включить в логику основные понятия и аксиомы математики, то математика или, по меньшей мере, какая-нибудь ее часть будет уже, конечно, частью логики.

Мы не имеем возможности остановиться здесь подробно на всех местах, нуждающихся, с нашей точки зрения, в критике или уточнении. В большинстве случаев это предполагает к тому же знакомство с предшествующим текстом книги. Редакция предпочла поэтому отдельные места такого рода снабдить примечаниями. Здесь мы остановимся еще только на одном вопросе, имеющем принципиальное значение.

С точки зрения диалектического материализма практика не есть нечто внешнее для теории. Теория не существует независимо от практики и не имеет смысла, если она не подтверждается на практике. В конечном счете есть только один критерий истины — критерий практики. Если формально-логическое доказательство математического предложения убеждает нас в его правильности, то происходит это потому, что с помощью такого доказательства истинность данного предложения сводится к вопросам: 1) об истинности других предложений, в конечном счете тех, которые приняты за аксиомы, и 2) о правильности логических средств вывода, используемых в доказательствах. И тот и другой вопрос решается с помощью критерия практики. «Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, *дабы* эти фигуры *могли* получить значение *аксиом*», — говорит Ленин *.

В другом месте Ленин пишет: «то, что подтверждает наша практика, есть единственная, последняя объективная истина» **. Правда, критерий практики не «жесткий». Но в этом, с точки

* *В. И. Ленин,* Философские тетради, Госполитиздат, 1947, стр. 164.

** *В. И. Ленин,* Соч., т. XIII, стр. 116.

зрения Ленина, не недостаток, а преимущество, обусловливающее возможность неограниченного развития науки. «Конечно, при этом не надо забывать, — говорит Ленин, — что критерий практики никогда не может по самой сути дела подтвердить или опровергнуть *полностью* какого бы то ни было человеческого представления. Этот критерий... настолько «неопределенен», чтобы не позволять знаниям человека превратиться в «абсолют», и в то же время настолько определенен, чтобы вести беспощадную борьбу со всеми разновидностями идеализма и агностицизма»*.

Не так обстоит дело у Тарского. При чтении некоторых мест книги невольно создается впечатление, что теория и практика для автора чуть не полярные противоположности, которые могут быть и несовместимыми друг с другом. Что сказали бы мы о человеке, который стал бы нас убеждать в том, что «теоретически» очень важно было бы построить perpetuum mobile или скатерть-самобранку, но, «к сожалению», «практически» это не осуществимо, так как противоречит закону сохранения энергии? — Очевидно, мы возражали бы против такой «теории», которая может выдвигать проекты, противоречащие законам физики.

Работами К. Геделя доказано — об этом пишет и автор, — что нельзя построить «формализм», в котором были бы доказуемы все истинные предложения арифметики. Тарский, правда, не делает из этого каких-нибудь явно агностических выводов. Он «ограничивается» замечанием, что этим объясняется, почему, несмотря на исключительно большую *теоретическую* важность понятия полноты для дедуктивной теории, оно оказывает *на практике* лишь незначительное влияние на построение дедуктивных теорий. Однако он не рассказывает о том, какую «полноту» имеет в виду К. Гедель. Он вообще не останавливается на различных смыслах, в которых не только может быть употреблено, но фактически и употребляется это понятие, несмотря на то, что, как уже было отмечено, сам имеет интересные результаты в этой области. А между тем суть дела в том, что речь обычно идет о *формализмах*, включавших только к о н е ч н о е число аксиом и правил вывода, каждое из которых состоит в определенной, эффективно выполнимой операции.

---

* *В. И. Ленин,* Соч., т. XIII, стр. 116.

Если под «полным» формализмом при этом еще понимается такой, в котором всякое формулируемое в данных терминах предложение либо доказуемо, либо опровержимо, то это значит, что речь идет о построении аппарата, теоретически (и практически!) равносильного машине, заменяющей полностью человеческое мышление (в применении к предложениям рассматриваемой теории). Ни одному марксисту-ленинцу не придет, конечно, в голову возражать против создания машины, выполняющей какие-нибудь операции, особенно если они громоздки и утомительны. Однако ему не придет в голову и считать «теоретически важным» неосуществимый на практике фантастический аппарат*.

Заметим, впрочем, что для суждения о действительной теоретической важности *непротиворечивости и полноты* дедуктивных теорий и возможности практического их осуществления в разных случаях (или при различном подходе к ним) читатель вообще не найдет достаточного материала в книге Тарского. Эти вопросы действительно трудны для популярного изложения и требуют во всяком случае немало места. Укажем только, что теоремы Геделя не лишают смысла такие доказательства непротиворечивости арифметики, которые мы находим, например, в работах советского математика П. С. Новикова и Генцена, что даже самые абстрактные результаты, доказывающие существование проблем, неразрешимых ни для какого из обычных логических «формализмов», позволили уже решить несколько давно поставленных, но до сих пор остававшихся нерешенными

---

* Если еще некоторое время тому назад могло казаться, что математические дисциплины тем и отличаются от других наук, что все бесконечное множество истинных предложений, выразимых на языке математических дисциплин, может быть получено по определенным, заранее перечисленным и легко проверяемым правилам из некоторого конечного, и притом даже незначительного числа их, принятых за аксиомы, то теперь мы знаем, что уже для обыкновенной арифметики эти надежды оказались неосуществимыми. Арифметика совсем не заслуживает того презрения, с каким к ней относился Гегель, полагавший, что в этой науке мышление можно заменить автоматом, и какого никогда не разделяли Маркс и Энгельс. Теперь это доказано, в частности, содержательными применениями арифметики к вопросам логики и методологии математики.

математических задач**. Само собой разумеется, конечно, что теория при этом оказывается в единстве с практикой, а не противополагается ей.

Автор, конечно, прав, замечая, что «будущее логики, равно как и всей теоретической науки, существенно зависит от приведения в норму политических и социальных взаимоотношений человечества».

Но он ошибается, думая, что социальный фактор лежит в стороне от поля деятельности профессионального ученого и что распространение знаний по логике может само собой содействовать лучшему взаимопониманию между людьми. Попытки реакционных кругов США поставить прогресс науки на службу целям империалистической агрессии лишний раз свидетельствуют о том, что вокруг науки и в науке неизбежна острая политическая и идеологическая борьба, в которой ученый не может оставаться в роли зрителя, не рискуя стать пособником империализма и реакции.

С. Яновская

** Ряд задач такого рода решен советским математиком А. А. Марковым.

АЛЬФРЕД ТАРСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ
В ЛОГИКУ И МЕТОДОЛОГИЮ
ДЕДУКТИВНЫХ
НАУК

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой частично измененное и расширенное издание моей книги *«О математической логике и дедуктивном методе»,* которая впервые вышла в 1936 г. на польском языке, а затем, в 1937 г., в точном немецком переводе (под заглавием: *«Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik»*).

В своем первоначальном виде она была задумана как научно-популярная книга; ее целью было дать образованным неспециалистам — в форме, которая сочетала бы научную точность с возможно большей понятностью, ясное представление о том важном направлении современной мысли, которое связано с развитием новейшей логики. Это направление первоначально возникло из довольно ограниченной задачи — укрепления основ математики. Однако в своем нынешнем виде оно преследует гораздо более широкие цели; оно стремится создать единый аппарат понятий, который мог бы служить общим базисом для всего человеческого знания *. Сверх того, оно стремится усовершенствовать и уточнить дедуктивный метод, рассматриваемый в некоторых научных дисциплинах как единственный допустимый способ установления истин и, во всяком случае, являющийся в каждой области интеллектуальной деятельности необходимым вспомогательным орудием для вывода следствий из принятых посылок.

Прием, оказанный польскому и немецкому изданиям, особенно же некоторые указания, сделанные рецензентами, внушили мне мысль выпустить новое

* Разумеется, аппарат понятий математической логики не может служить базисом всего человеческого знания, так как сама математическая логика далеко не всегда применима (об этом подробнее указано во вступительной статье) — *Прим. ред.*

издание моей работы в виде не только научно-популярной книги, но и учебника, могущего служить основой для элементарного курса логики и методологии дедуктивных наук, преподаваемого в колледжах. Подобный опыт представлялся еще более желательным ввиду недостатка в этой области подходящих элементарных учебников.

В связи с выполнением этой задачи, возникла необходимость внести в книгу некоторые изменения.

В предшествующих изданиях некоторые весьма существенные проблемы и понятия были либо совершенно обойдены, либо только слегка затронуты, вследствие их более специального характера или во избежание спорных вопросов. В виде примера можно привести такие темы, как разницу между употреблением тех или иных логических понятий в систематическом развитии логики и в языке повседневной жизни, общий метод проверки законов исчисления высказываний, необходимость проведения точного различия между словами и их обозначениями (именами), понятия универсального класса и нулевого класса, основные понятия исчисления отношений и, наконец, концепцию методологии как всеобщей науки о науках. В настоящем издании все эти темы подвергаются обсуждению (хотя и не все с достаточной полнотой), ибо мне казалось, что исключение их из учебника современной логики повело бы к существенному пробелу. Вот почему главы первой, общей, части книги были в большей или меньшей степени расширены; в частности, глава II, посвященная исчислению высказываний, содержит много нового материала. К этим главам я, кроме того, прибавил много новых упражнений и увеличил число исторических указаний.

В предшествующих изданиях употребление специальных символов было сведено к минимуму, в настоящем же издании я счел необходимым познакомить читателя с элементами логической символики. Тем не менее, на практике я применяю эту символику весьма ограниченно, используя ее главным образом в упражнениях.

В предшествующих изданиях основной областью, из которой брались примеры для иллюстрации общих и отвлеченных рассмотрений, была математика средней школы, ибо я держался и продолжаю держаться убеждения, что элементарная математика, особенно алгебра, вследствие простоты ее понятий и единообразия методов заключения, особенно подходит для иллюстрации разнообразных основных явлений логического и методологического характера. Тем не менее в настоящем издании, особенно в добавлениях, я чаще привожу примеры из других областей, в частности — из повседневной жизни.

Помимо указанных добавлений, я переработал некоторые разделы, усвоение которых для учащихся оказалось затруднительным.

Основные черты книги остаются без изменений. Предисловие к первоначальному изданию, большая часть которого воспроизводится и в этом издании, даст читателю представление об общем характере книги. Однако, быть может, не лишним будет сразу же указать, чего не следует искать в этой книге.

Во-первых, книга не содержит систематического и строго дедуктивного изложения логики; подробное изложение явно не уложилось бы в рамки элементарного учебника. Первоначально я намеревался включить в настоящее издание дополнительную главу под заглавием: «Логика как дедуктивная наука», где (в виде иллюстрации к общеметодологическим замечаниям, содержащимся в VI главе) дано было бы в общих чертах систематическое построение некоторых элементарных частей логики. По ряду причин это намерение не могло быть осуществлено; но я надеюсь, что несколько новых упражнений по этому вопросу, включенных в главу VI, восполнят в некоторой степени этот пробел.

Во-вторых, помимо двух довольно кратких разделов, книга не дает сведений о традиционной аристотелевой логике и не использует ее материалов. Но я полагаю, что место, отведенное здесь традиционной логике, вполне соответствует той малой роли, к которой свелось значение этой логики в современной науке; я полагаю также, что это мнение будет разделено большинством современных логиков *.

И, наконец, книга совершенно не затрагивает проблем, относящихся к так называемой логике и методологии эмпирических наук. Я должен сказать, что сомневаюсь вообще в существовании особой «логики эмпирических наук», противопоставляемой логике вообще, или «логике дедуктивных наук» (по крайней мере, если слово «логика» употребляется так, как в настоящей книге, т. е. в качестве названия дисциплины, анализирующей смысл понятий, общих всем наукам, и устанавливающей общие законы, которым подчиняются понятия). Но эта проблема относится более к терминологии, чем к существу дела. Во всяком случае, методология эмпирических наук составляет важную область научного исследования. Знание логики имеет, конечно, большое значение при изучении этой методологии, как и в применении ко всякой другой дисциплине. Надо, однако, признать, что до настоящего времени логические понятия и методы не нашли еще в этой области сколько-нибудь своеобразного или плодотворного применения. Вполне возможно, что подобное положение является не только следствием нынешнего состояния методологических исследований. Оно вытекает, быть может, из того обстоятельства, что с точки зрения чисто методологической эмпирическую науку можно рассматривать не просто как научную теорию, т. е. как систему утверждаемых предложений, расположенных по определенным правилам, но скорее как некий комплекс, состоящий частично из таких утверждений и частично из примеров человеческой деятельности. Надо добавить, что, составляя резкую противоположность высокому развитию эмпирических наук самих по себе, методология

---

* Однако, при всех своих недостатках, логика Аристотеля является не только исторически, но и логически исходным пунктом, зародышевой формой всей современной формальной логики, в том числе и математической. — *Прим. ред.*

этих наук едва ли может похвалиться сколько-нибудь определенными достижениями, несмотря на все затраченные усилия. Даже предварительная работа по выяснению понятий, содержащихся в этой области, еще не выполнена сколько-нибудь удовлетворительным образом. Вследствие этого курс методологии в применении к эмпирическим наукам должен иметь совершенно иной характер, чем в применении к логике, и должен в значительной мере ограничиваться оценкой и критикой делаемых ощупью попыток или безуспешных усилий. Исходя из этих и некоторых других соображений, я считаю, что нецелесообразно объединять рассмотрение логики и методологии эмпирических наук в одном учебнике *.

Прибавлю еще несколько замечаний относительно построения книги и способа пользования ею в качестве учебного пособия.

Книга разделена на две части. Первая дает общее введение в логику и методологию дедуктивных наук; вторая показывает на конкретных примерах, как логика и методология используются при построении математических теорий; это дает возможность усвоить и углубить знания, полученные из первой части. Каждая глава сопровождается соответствующими упражнениями. Краткие исторические указания даны в подстрочных примечаниях.

Некоторые места и даже целые разделы, отмеченные в начале и в конце звездочкой (✳), содержат более трудный материал или предполагают знакомство с другими местами, содержащими подобный материал; их можно пропускать без ущерба для понимания последующих частей книги. То же самое относится и к упражнениям, отмеченным звездочкой.

* Автор неправ, считая, что методология эмпирических наук не может похвастать сколько-нибудь определенными достижениями. По существу, роль методологии эмпирических наук выполняет математическая статистика, т. е. теория обработки наблюдений, которая сильно развивается в последнее время методами теории вероятностей. Конечно, понятия математической логики играют роль в этой теории. — *Прим. ред.*

Я думаю, что книга содержит достаточно материала для полного годичного курса. Все же ее построение таково, что она с успехом может быть использована и в полугодичных курсах. При пользовании ею как учебником в полугодичном курсе логики на философских отделениях я рекомендую подробно изучать ее первую часть, включая более трудные места, и целиком опускать всю вторую часть. Если же книгой пользоваться для полугодичного курса логики на математических отделениях — например по основам математики,— я рекомендую изучение обеих частей книги с пропуском более трудных мест.

Во всяком случае, мне хотелось бы подчеркнуть, что очень важно внимательно и подробно проделывать упражнения; они не только помогают усвоить излагаемые понятия и принципы, но касаются также многих вопросов, которые в тексте не было возможности рассмотреть.

Я буду очень счастлив, если эта книга будет способствовать более широкому распространению логических знаний.

Очевидно, что будущее логики, равно как и всей теоретической науки, существенно зависит от приведения в норму политических и социальных взаимоотношений человечества; но этот фактор находится вне контроля профессиональных ученых. Я не тешу себя иллюзиями, что развитие логической мысли окажет очень существенное влияние на установление нормальных человеческих взаимоотношений; но я убежден, что более широкое распространение логических знаний может способствовать ускорению этого процесса. Ибо с одной стороны, внося в своей собственной области точность и единство в значения понятий и подчеркивая необходимость такой точности и единообразия во всякой другой области, логика создает возможность лучшего взаимопонимания между теми, кто к этому стремится. С другой стороны, совершенствуя и уточняя орудия мысли она развивает в людях критические способности; а это делает менее вероятной возможность сбить их с толку всевозможными лжедоказательствами которыми в различных частях света беспрестанно пытаются на них воздействовать в нынешнее время.

Я весьма обязан и выражаю свою признательность доктору Гельмеру (O. Helmer), выполнившему перевод немецкого издания на английский язык. Выражаю также самую глубокую благодарность: доктору Гофштадтеру (A. Hofstadter), г. Крадеру (L. K. Krader), профессору Нагелю (E. Nagel), профессору Куайну (W. V. Quine), г. Уайту (M. G. White) и особенно доктору Мак-Кинси (I. C. C. McKinsey) и доктору Винеру (P. P. Wiener) за многочисленные советы и большую помощь, оказанные мне при подготовке английского издания. Весьма обязан я также г. Эрроу (K. I. Arrou) за его помощь при чтении корректуры.

Альфред Тарский

Гарвардский университет.
Сентябрь 1940 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

По мнению многих неспециалистов, математика в нынешнее время совершенно мертвая наука: достигнув необычайно высокой степени развития, она окаменела в своем суровом совершенстве. Это безусловно ложный взгляд; лишь очень немногие области научного исследования находятся в фазе такого интенсивного развития, как современная математика. Вместе с тем это развитие необычайно разносторонне; математика развивается во всех возможных направлениях, она растет в вышину, в ширину и в глубину. Она растет в вышину, ибо на почве ее старых теорий, которые насчитывают за собой столетия, если не тысячелетия развития, возникают все новые и новые проблемы, получаются все более совершенные результаты. Она растет в ширину, ибо ее методы проникают в другие отрасли науки по мере того, как область ее исследования охватывает все более и более обширные ряды явлений и все новые теории включаются в широкий круг математических дисциплин. И, наконец, она растет в глубину, ибо все прочнее и прочнее утверждаются ее основы, совершенствуются методы и упрочиваются принципы.

Я ставил себе задачей дать в этой книге читателям, интересующимся современной математикой, хотя и не работающим активно в этой области, по крайней мере, самое общее представление об этой третьей линии развития математики, т. е. о ее росте в глубину. Моей целью было познакомить читателя с наиболее важными понятиями дисциплины, известной под именем математической логики и созданной в целях укрепления и углубления основ математики; эта дисциплина, несмотря на свое недолгое существование, измеряемое только одним столетием, уже достигла высокой степени совершенства и в настоящее время играет роль во всей совокупности нашего познания, что далеко выходит за пределы границ, первоначально намеченных для нее. Я стремился показать, что логические понятия пронизывают всю математику, что они включают в себя, как частные случаи, все специфически математические понятия и что логические законы постоянно применяются — будь то сознательно или бессознательно — в математических рассуждениях. Наконец, я пытался изложить наиболее важные принципы построения математических теорий, принципы, составляющие предмет особой науки, методологии математики, и показать, как эти принципы применяются на практике.

Не так легко было осуществить весь этот план в рамках относительно небольшой книги, не предполагая со стороны читателя никаких специальных математических познаний и никакой особой тренировки в рассуждениях отвлеченного характера. На протяжении всей книги требовалось осуществить сочетание возможно большей понятности с необходимой краткостью, все время тщательно избегая ошибок или грубых неточностей с научной точки зрения. В языке изложения надо было как можно меньше отступать от языка повседневной жизни. Пришлось отказаться от употребления специальной логической символики, хотя эта символика составляет бесценное орудие, позволяющее нам сочетать краткость и точность, устраняет в значительной степени возможность недоразумений и двусмысленности и вследствие этого необычайно полезна во всех тонких вопросах. Мысль о систематическом рассмотрении предмета пришлось отбросить с самого начала. Из множества возникавших вопросов только некоторые можно было подробно разработать, других пришлось лишь слегка коснуться, а иные даже совсем опустить, сознавая, что выбор обсуждаемых тем будет неизбежно носить более или менее произвольный характер. В тех случаях, где современная наука еще не достигла окончательного результата и предлагает ряд возможных и в одинаковой степени вероятных решений, нечего было и думать объективно представить все существующие точки зрения. Надо было сделать выбор в пользу какой-либо одной. Делая подобный выбор, я тщательно стремился не исходить из личных своих пристрастий, но избрать то решение, которое отличалось бы наибольшей простотой и легче поддавалось бы популярному изложению.

Я не тешусь иллюзией, что мне удалось полностью преодолеть все эти и некоторые другие трудности.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ. ДЕДУКТИВНЫЙ МЕТОД

I.

ОБ УПОТРЕБЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Постоянные и переменные

Каждая научная теория есть система высказываний, которые признаются истинными и которые могут быть названы законами или установленными предложениями, или просто предложениями. В математике эти предложения следуют одно за другим в определенном порядке согласно некоторым принципам, подробно рассматриваемым в гл. VI; как правило, они сопровождаются доводами, имеющими целью установить их истинность. Соображения подобного рода относятся к доказательствам, а установленные с их помощью предложения называются теоремами.

Среди терминов и символов, встречающихся в математических теоремах и доказательствах, мы различаем переменные и постоянные.

В арифметике, например, мы встречаем такие постоянные, как *«число»*, *«нуль»* («0»), *«единица»* («1»), *«сумма»* («+») и мн. др.*. Каждый из этих терми-

---

* Под «арифметикой» мы будем здесь понимать ту часть математики, которая занимается исследованием общих свойств чисел, отношений между числами и действий с числами. Вместо слова «арифметика» часто употребляют термин «алгебра», особенно в математике средней школы. Мы отдали предпочтение термину «арифметика», так как в высшей математике термин «алгебра» сохраняется для гораздо более специальной теории алгебраических уравнений. (В последние годы термин

нов имеет точно определенное значение, остающееся неизменным в ходе рассуждений.

В качестве переменных мы, как правило, употребляем отдельные буквы; в арифметике, например, используем строчные буквы латинского алфавита: *«a», «b», «c», ..., «x», «y», «z»*. В противоположность постоянным, переменные сами по себе не обладают значением. Так, на вопрос:

имеет ли нуль такое-то и такое-то свойство?

например:

является ли нуль целым числом?

можно ответить утвердительно или отрицательно; ответ может быть истинным или ложным, но, во всяком случае, он будет осмысленным. На вопрос же, касающийся *x*, например на вопрос:

является ли x целым числом?

ответ не может быть осмысленным.

В некоторых учебниках элементарной математики, особенно не в самых последних, попадаются формулировки, создающие впечатление, что переменным можно приписывать самостоятельное значение. Так, например, говорят, что символы «*x*», «*y*»,... также обозначают некоторые числа или количества, однако не «постоянные числа» (которые обозначаются постоянными вроде «0», «1»,...), но так называемые «переменные числа» или, лучше сказать, «переменные количества». Утверждения подобного рода проистекают из большого недоразумения. «Переменное число» *x* не могло бы иметь никакого определенного свойства, например, оно не могло бы быть ни положительным, ни отрицательным, ни равным нулю; или,

«алгебра» приобрел более широкое значение, которое, впрочем, продолжает отличаться от значения «арифметики».)

Термин «число» будет везде употребляться мною в значении, которое обычно придается в математике термину «действительное число», т. е. охватывает целые и дробные, рациональные и иррациональные, положительные и отрицательные, но не мнимые или комплексные числа.

выражаясь точнее, свойства такого числа могли бы изменяться от случая к случаю, т. е. число могло бы быть иногда положительным, иногда отрицательным, иногда равным нулю. Но в нашем мире мы вообще не находим сущностей подобного рода; их существование противоречило бы основным законам мышления [1]. Подразделение символов на постоянные и переменные не имеет поэтому никакого аналога в виде соответствующего подразделения чисел.

2. Выражения, содержащие переменные — функции-высказывания и функции-указатели

Ввиду того обстоятельства, что сами по себе переменные не имеют значения, такие выражения, как:

x есть целое число,

не являются высказываниями, хотя они грамматически и имеют форму высказывания; они не выражают определенного утверждения и не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты. Из выражения:

x есть целое число

мы получаем высказывания лишь после замены в нем знака «*x*» постоянным, обозначающим определенное число; так, например, если «*x*» заменить символом «1», то в результате получится истинное высказывание, тогда как при замене «*x*» символом «$^1/_2$» возникает ложное высказывание. Выражение подобного рода, содержащее переменные и превращающееся в высказывания при замене этих переменных постоянными, называется функцией-высказыванием. Но математики, между прочим, не очень любят это выражение, так как они пользуются термином «функция» в другом смысле. Чаще в этом смысле употребляется слово «*условие*»; те же функции-высказывания и высказывания, которые составлены целиком из математических знаков (а не из слов повседневной речи), как-то:

$$x + y = 5,$$

обычно относятся математиками к **формулам**. Вместо слов «функция-высказывание» мы иногда будем говорить просто «высказывание» — но только в тех случаях, когда не будет опасности каких-либо недоразумений.

Роль переменных в функции-высказывании иногда справедливо сравнивают с ролью пробелов, оставляемых в опросном бланке; точно так же как опросный бланк приобретает определенное содержание только после заполнения пробелов, функция-высказывание превращается в высказывание только после того, как переменные заменены в ней постоянными. Результат замены в функции-высказывании переменных постоянными (причем одними и теми же постоянными замещаются одни и те же переменные) может привести к истинному высказыванию; в таком случае о значениях этих постоянных говорят, что они **удовлетворяют** данной функции-высказыванию. Например, числа 1, 2 и $2^1/_2$ удовлетворяют функции-высказыванию

$$x < 3,$$

а числа 3, 4 и $4^1/_2$ ей не удовлетворяют.

Помимо функций-высказываний имеются еще некоторые другие выражения, содержащие переменные и заслуживающие нашего внимания, а именно: так называемые **функции-указатели** или **описательные функции**. Это выражения, которые при замене переменных постоянными превращаются в обозначения («описания») предметов. Например, выражение

$$2x + 1$$

есть функция-указатель, потому что мы получаем обозначение определенного числа (например, числа 5) при замене в этом выражении переменной «x» любою численной постоянной, т. е. постоянной, означающей число (например, «2»).

Среди функций-указателей, встречающихся в арифметике, мы находим, в частности, все так называемые алгебраические выражения, составленные из переменных, чиселенных постоянных и символов четырех основных арифметических действий, например такие:

$$x \quad y, \qquad \frac{x+1}{y+2}, \qquad 2 \cdot \sqrt{(x+y-z)}.$$

С другой стороны, алгебраические уравнения, т. е. формулы, состоящие из двух алгебраических выражений, соединенных символом «=», являются функциями-высказываниями. Поскольку речь идет об уравнениях, в математике стала общепринятой специальная терминология; так, переменные, встречающиеся в уравнении, именуются неизвестными, а числа, удовлетворяющие уравнению, называются корнями уравнения.

Например, в уравнении:

$$x^2 + 6 = 5x$$

переменная «*x*» — неизвестная, а числа 2 и 5— корни уравнения.

Относительно переменных «*x*», «*y*»,..., употребляемых в арифметике, говорят, что они с л у ж а т д л я о б о з н а ч е н и я ч и с е л, или что числа суть з н а ч е н и я этих переменных. Этим хотят сказать приблизительно следующее: функция-высказывание, содержащая знаки «*x*», «*y*»,..., становится высказыванием, если эти символы заменить такими постоянными, которые обозначают числа (а не выражениями, означающими действия над числами, отношения между числами, и, тем более, не предметами, находящимися вне области арифметики, вроде геометрических фигур, животных, растений и т. п.)[2]. Подобным же образом переменные, встречающиеся в геометрии, служат для обозначения точек и геометрических фигур. О функциях-указателях, встречающихся в арифметике, можно также сказать, что они служат для обозначения чисел. Иногда говорят просто, что символы «*x*», «*y*»,... сами по себе, равно как и функции-указатели, построенные из них, означают числа, или являются обозначениями чисел; но это только сокращенная терминология[3].

3. Образование высказываний при помощи переменных — универсальные и экзистенциальные высказывания

Помимо замены переменных постоянными, есть еще другой способ, при помощи которого из функций-высказываний могут быть получены высказывания Рассмотрим формулу:

$$x + y = y + x.$$

Это функция-высказывание, содержащая две переменных, x и y, которой удовлетворяет произвольная пара чисел; какими бы численными постоянными ни заменить «x» и «y», полученная формула всегда будет истинной. Мы выражаем это кратко следующим образом:

для всех чисел x и y, $x + y = y + x$.

Полученное выражение есть уже подлинное высказывание и, сверх того, истинное высказывание; мы узнаем в нем один из основных законов арифметики, так называемый коммутативный закон сложения. Подобным же образом формулируются важнейшие математические теоремы, а именно — все так называемые универсальные высказывания, или высказывания универсального характера, утверждающие, что произвольные предметы определенной категории (например, в области арифметики — произвольные числа) обладают таким-то и таким-то свойством. Следует отметить, что при формулировке универсальных высказываний слова: «*для всех предметов* (или *чисел*) x, y...» часто опускаются и лишь подразумеваются; так, например, коммутативный закон сложения может быть дан просто в следующей форме:

$$x + y = y + x.$$

Этот способ стал уже общепринятым, и мы вообще будем его придерживаться в наших дальнейших рассмотрениях.

Рассмотрим теперь функцию-высказывание:

$$x > y + 1 .$$

Этой формуле не может удовлетворять любая пара чисел. Если, например, вместо «x» подставить «3», а вместо «y» — «4», получится ложное высказывание:

$$3 > 4 + 1 .$$

Следовательно, если сказать:

для всех чисел x и y, $x > y + 1$,

получится высказывание, несомненно имеющее смысл, хотя и явно ложное. С другой стороны, имеются такие пары чисел, которые удовлетворяют рассматриваемой нами функции-высказыванию. Если, например «x» и «y» заменить соответственно числами «4» и «2», то в результате получится истинная формула:

$$4 > 2 + 1.$$

Это обстоятельство кратко выражается следующей фразой:

для некоторых чисел x и y, $x > y + 1$

или в более употребительной форме:

существуют числа x и y *такие, что* $x > y + 1$.

Только что приведенные выражения являются истинными высказываниями. Они могут служить примерами экзистенциальных высказываний, или высказываний экзистенциального характера, устанавливающих существование предметов (например, чисел) с теми или иными свойствами.

При помощи вышеописанных способов мы можем получать предложения из любой функции-высказывания; однако решение вопроса о том, получится ли при этом истинное или ложное высказывание, зависит уже от содержания функции-высказывания. В виде еще одной иллюстрации приведем следующий пример: формуле

$$x = x + 1$$

не удовлетворяет ни одно число; поэтому, независимо от того, будут ли ей предпосланы слова: *«для всех чисел x»* или *«существует некоторое число x* такое, что», получающееся из нее высказывание будет ложным.

В противоположность высказываниям универсального или экзистенциального характера, высказывания, не содержащие никаких переменных, например:

$$3+2=2+3,$$

можно назвать е д и н и ч н ы м и в ы с к а з ы в а н и я м и. Такая классификация отнюдь не является исчерпывающей, ибо существует много высказываний, которые не могут быть зачислены ни в одну из трех упомянутых категорий.

Одним из примеров служит следующее утверждение:

для всех чисел x и y существует число z такое, что

$$x=y+z^{4}$$

Высказывания этого типа иногда называются у с л о в н о-э к з и с т е н ц и а л ь н ы м и в ы с к а з ы в а н и я м и в противоположность рассмотренным выше экзистенциальным высказываниям, которые можно также назвать а б с о л ю т н о - э к з и с т е н ц и а л ь н ы м и в ы с к а з ы в а н и я м и; они устанавливают существование чисел, обладающих определенным свойством при условии, что существуют определенные другие числа.

4. Универсальные и экзистенциальные кванторы; свободные и связанные переменные

Выражения вроде:

для всех x, y,...

существуют x, y,... такие, что

называются к в а н т о р а м и; первый именуется у н и в е р с а л ь н ы м, а второй — э к з и с т е н ц и а л ьным квантором. Кванторы известны также под названием операторов; однако имеются выражения, также относимые к операторам, но не являющиеся кванторами. В предшествующем разделе мы стремились разъяснить смысл обоих видов кванторов. Чтобы подчеркнуть их значение, можно указать, что только благодаря явному или неявному применению операторов выражение, содержащее переменные, может обратиться в высказывание, т. е. во вполне определенное утверждение. Без помощи операторов было бы исключено употребление переменных в формулировке математических теорем [5].

В повседневной речи не принято (хотя и вполне возможно) пользоваться переменными, а по этой причине не употребляются также и кванторы. Все же, в общем обиходе встречаются некоторые слова, имеющие весьма близкую связь с кванторами, а именно такие слова, как: *«каждый»*, *«все»*, *«известный»*, *«некоторый»*. Эта связь становится ясной, если мы замечаем, что такие выражения, как:

Все люди смертны

или

Некоторые люди мудры,

имеют приблизительно тот же смысл, как и следующие предложения, сформулированные при помощи кванторов:

для всех x, если x есть человек, то x — смертен

и

существует x такой, что x является человеком и мудрым.

Ради краткости кванторы иногда заменяются символическими выражениями. Так, например, мы можем условиться вместо слов:

для всех при всяких предметах (или числах) *x, y, ...*

и

существуют предметы (или *числа*) *x, y... такие, что* писать соответственно следующие символические выражения:

$$\underset{x,y,\ldots}{\mathsf{A}} \quad \text{и} \quad \underset{x,y,\ldots}{\mathsf{E}}$$

(условившись функции-высказывания, следующие за кванторами, ставить в скобках). Согласно принятому здесь условию, то высказывание, которое было приведено в конце предшествующего раздела, как образец условно-экзистенциального высказывания, приобретает, например, следующий вид:

$$\text{(I)} \qquad \underset{x,y}{\mathsf{A}}\,[\underset{z}{\mathsf{E}}(x=y+z)].$$

Функция-высказывание, в которой встречаются переменные *«x», «y», «z»...,* автоматически превращается в высказывание, как только к ней предпосылаются один или несколько операторов, содержащих все эти переменные. Если же некоторые из переменных не встречаются в операторах, то рассматриваемое выражение остается функцией-высказыванием, не превращаясь в высказывание. Например, формула:

$$x=y+z$$

превращается в высказывание, если ей предшествует одно из выражений:

для всех чисел x, y и *z;*

существуют числа x, y и *z такие, что;*

для всех чисел x и *y существует некоторое число z, такое, что;*

и т. п. Но, если мы просто предпошлем квантор:

существует некоторое z такое, что, или $\underset{z}{E}$,

мы еще не получим высказывания; полученное выражение, а именно:

$$\text{(II)} \qquad \underset{z}{\mathsf{E}}(x=y+z),$$

несомненно, является функцией-высказыванием, ибо оно немедленно становиться высказыванием, если мы вместо «*x*» и «*y*» подставим некоторые постоянные, а «*z*» оставим без изменения; или же если мы предпошлем другой подходящий квантор, например:

$$\text{для всех чисел } x \text{ и } y, \text{ или} \qquad \underset{x,\, y}{\mathsf{A}}$$

Из этого видно, что среди переменных, могущих встретиться в функции-высказывании, можно различать два вида. Наличие переменных первого вида — они называются **свободными** или **несвязанными переменными** — является решающим фактором, определяющим, что рассматриваемое выражение есть функция-высказывание, а не высказывание; чтобы превратить функцию-высказывание в высказывание, необходимо заменить эти переменные постоянными или же поставить впереди функции-высказывания операторы, содержащие эти свободные переменные. Остальные же, так наз. **связанные** или **кажущиеся переменные** должны при подобном преобразовании оставаться без изменения. В вышеприведенной функции-высказывании (II), например, «*x*» и «*y*» являются свободными переменными, а символ «*z*» встречается дважды в качестве связанной переменной; с другой стороны, выражение (I) является высказыванием и содержит только связанные переменные.

* Свободна или связана данная переменная, встречающаяся в функции-высказывании, полностью определяется наличием и расположением операторов. Лучше всего показать это на конкретном примере. Рассмотрим следующую функцию-высказывание:

(*III*) *для любого числа x, если* $x = 0$ *или* $y \neq 0$,

существует число z такое, что $x = y \cdot z$.

Функция начинается с универсального квантора, содержащего переменную «*x*», и поэтому последняя, встречающаяся трижды в этой функции, все три раза выступает как связанная переменная; в первый раз она составляет часть квантора, в остальных же двух местах она, как мы будем говорить, связана квантором. Подобным же образом обстоит дело и в отношении переменной «z»; ибо, хотя начальный квантор в (III) не содержит этой переменной, мы, тем не менее, можем распознать определенную функцию-высказывание, образующую часть (III), которая начинается с экзистенциального квантора, содержащего переменную «z»; это — функция:

(IV) *существует число z такое, что $x = yz$.*

Оба места, в которых переменная «z» встречается в (III), входят в частичную функцию (IV), только что установленную. Поэтому мы и говорим, что буква «z» встречается везде в (III) как связанная; на первом месте она представляет собой часть экзистенциального квантора, а на втором она связана этим квантором Что касается переменной «y», встречающейся также в (II), то мы видим, что в (III) нет квантора, содержащего эту переменную, и поэтому она встречается в (III) дважды в качестве свободной переменной.

То обстоятельство, что кванторы связывают переменные, т. е. превращают свободные переменные в связанные в следующих за ними функциях-высказываниях, составляет весьма существенное свойство кванторов. Известны и некоторые другие выражения с аналогичным свойством; с некоторыми из них мы познакомимся позже (в параграфах 20 и 22); а некоторые, как, например, знак интеграла, играют важную роль в высшей математике. Термин «оператор» есть общий термин, употребляемый для обозначения всех выражений, имеющих это свойство. *

5. Значение переменных в математике

Как мы видели в параграфе 3, переменные играют основную роль в формулировке математических теорем. Из сказанного, однако, не следует, что в принципе было бы невозможно сформулировать последние без употребления переменных. Но на практике вряд ли удалось бы обходиться без них, ибо даже относительно простые высказывания приобрели бы сложную и неясную форму. В виде иллюстрации рассмотрим следующую арифметическую теорему:

для всех чисел x и y, $x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)$

Если не употреблять переменных, то эта теорема выглядела бы следующим образом:

разность третьих степеней любых двух чисел равна произведению разности этих чисел на сумму трех членов, первый из которых есть квадрат первого числа, второй — произведение обоих чисел, а третий — квадрат второго числа.

Еще более существенное значение с точки зрения экономии мысли приобретают переменные в применении к математическим доказательствам [6]. Читатель легко убедится в этом, если попробует исключить переменные из каких-нибудь доказательств, которые он встретит в дальнейших наших рассмотрениях. А надо заметить, что эти доказательства гораздо проще обычных рассуждений, которые можно найти в различных областях высшей математики; попытки провести их без помощи переменных встретили бы весьма значительные трудности. Надо добавить, что именно введению переменных мы обязаны развитием столь плодотворного метода решения математических задач, как метод уравнения. Без преувеличения можно сказать, что изобретение переменных составляет поворотный пункт в истории математики: при помощи этих символов человек овладел орудием, которое подготовило путь для стремительного развития математических наук и для укрепления их логических основ *.

---

* Переменные употреблялись уже в древности греческими математиками и логиками, хотя только при особых обстоятельствах и в редких случаях. В начале XVII столетия, главным образом под влиянием трудов французского математика Виета (F. Vieta), 1540—1603, начали систематически пользоваться переменными и последовательно употреблять их в математических рассуждениях. Однако только в конце XIX столетия, благодаря введению понятия квантора, была вполне уяснена роль перемен-

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из следующих выражений являются функциями-высказываниями и какие функциями-указателями:

(a) x *делится на* 3;

(b) *сумма чисел* x и 2;

(c) $y^2 - z^2$

(d) $y^2 = z^2$

(e) $x + 2 < y + 3$

(f) $(x + 3) - (y + 5)$

(g) *мать* x и z

(h) x *есть мать* z?

2. Дайте примеры функций-высказываний и функций-указателей из области геометрии.

3. Функции-высказывания, встречающиеся в арифметике и содержащие лишь одну переменную (которая, однако, может попадаться в нескольких различных местах данной функции-высказывания), могут быть разделены на три категории: I — функции, которым удовлетворяет всякое число; II — функции, которым не удовлетворяет ни одно число; III — функции, которым некоторые числа удовлетворяют, а другие не удовлетворяют.

К каким из этих категорий принадлежат следующие функции-высказывания:

(a) $x + 2 = 5 + x$,

(b) $x^2 = 49$,

(c) $(y + 2) \cdot (y - 2) < y^2$,

ных в научном языке и особенно в формулировании математических теорем. Это в немалой степени было заслугой выдающегося американского логика и философа Пирса (Ch. S. Peirce), 1839—1914.

[«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*» (Ф. Энгельс, Диалектика природы. Госполитиздат, 1946 г., стр. 208.— [*Прим. ред.*]

(d) $y + 24 > 36$,

(e) $z = 0$ или $z < 0$ или $z > 0$,

(f) $z + 24 > z + 36$?

4. Дайте примеры универсальных, абсолютно-экзистенциальных и условно-экзистенциальных теорем из области арифметики и геометрии.

5. Если впереди функции-высказывания

$$x > y$$

поставить кванторы, содержащие переменные, то можно получить из нее различные предложения, например.

для всех чисел x и y, $x > y$;

для всякого числа x существует число y такое, что
$$x > y;$$

существует число y такое, что для всех чисел x
$$x > y.$$

Сформулируйте их (их всего 6) и определите, какие из них истинны.

6. Проделайте то же, что и в упражнении 5, со следующими функциями-высказываниями:

$$x + y^2 > 1$$

и

x есть отец y

(учитывая, что переменные «x» и «y» в последней функции относятся к людям, т. е. на место их можно подставлять имена людей).

7. Составьте высказывание, пользуясь обычным языком, которое имеет такой же смысл, как:

для всех x, если x есть собака, то x обладает хорошим обонянием,

и не содержит ни квантора, ни переменных.

8. Замените высказывание:

некоторые змеи ядовиты

таким, которое имеет тот же смысл, но сформулировано при помощи кванторов и переменных.

9. Распознайте в следующих выражениях свободные и связанные переменные:

(a) *x делится на y;*

(b) *для всех x, $x - y$ $x + (-y)$;*

(c) *если $x < y$, то существует число z такое, что $x < y$ и $y < z$;*

(d) *для всякого числа y, если $y > 0$, существует число z, такое, что $x = y \cdot z$;*

(e) если $x = y^2$ и $y > 0$, *то для всякого числа z $x > -z^2$;*

(f) *если существует число y такое, что $x > y^2$, то для всякого числа z $x > -z^2$.*

Сформулируйте вышеуказанные выражения, заменяя кванторы символами, введенными в разделе 4.

* 10. Если в функции-высказывании (e) предшествующего упражнения заменить в обоих местах переменную «z» на «y», то получится выражение, где «y» встречается в некоторых местах как свободная, а в других — как связанная переменная; в каких местах и почему?

(Ввиду некоторых трудностей при действиях с выражениями, где одна и та же переменная встречается и в связанном и в свободном виде, некоторые логики предпочитают отказаться совершенно от употребления подобных выражений и не считают их функциями-высказываниями).

* 11. Постарайтесь сформулировать в самом общем виде, при каких условиях переменная, встречающаяся в определенном месте данной функции-высказывания, выступает в качестве связанной или в качестве свободной переменной [7].

12. Какие числа удовлетворяют функции-высказыванию:

существует число y такое, что $x = y^2$

и какие — функции-высказыванию:

существует число y такое, что $x \cdot y = 1$?

II

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

6. Логические постоянные; старая логика и новая логика

Постоянные, с которыми мы имеем дело во всякой научной теории, могут быть разделены на две больших группы. Первая группа состоит из терминов, специфичных для данной теории. В арифметике, например, это или обозначения отдельных чисел или обозначения целых классов чисел, отношений между числами, действий над числами и т. д. Сюда относятся, наряду с другими, постоянные, которыми мы пользовались как примерами в параграфе 1.

С другой стороны, имеются термины гораздо более общего характера, встречающиеся в большинстве арифметических предложений, термины, к которым постоянно прибегают как в повседневных рассуждениях, так равно и во всевозможных областях науки и которые составляют необходимое средство передачи человеческих мыслей и выводов заключений в любой области; сюда относятся такие слова, как *«не»*, *«и»*, *«или»*, *«есть»*, *«каждый»*, *«некоторый»* и многие другие. Есть особая дисциплина, а именно логика, рассматриваемая в качестве основы всех других наук и имеющая своей задачей установление точного смысла подобных терминов и выяснение самых общих законов, относящихся к ним.

Логика развилась в независимую науку уже издавна, даже раньше, чем арифметика и геометрия. И все же, только в недавнее время — после долгого периода почти полного застоя — она перешла к интенсивному развитию, в ходе которого подверглась полному преобразованию и уподобилась по своему характеру математическим дисциплинам; в этом новом виде она известна как м а т е м а т и ч е с к а я, или д е д у к т и в н а я, или с и м в о л и ч е с к а я л о г и к а; иногда также ее называют л о г и с т и к о й[8]. Новая логика превосходит старую во многих отношениях — не только вследствие прочности своих основ и совершенства методов ее развития, но главным образом по ценности установленных ею понятий и теорем. По существу, старая традиционная логика образует только фрагмент новой, да к тому же такой фрагмент, какой, с точки зрения потребностей других наук, и особенно математики, совершенно лишен значительности. Поэтому, ввиду поставленной нами цели, во всей этой книге представится лишь очень мало случаев заимствовать материал для наших рассмотрений из традиционной логики *.

7. Исчисление высказываний; отрицание высказывания; конъюнкция и дизъюнкция высказываний

Среди терминов логического характера выделяется небольшая группа, состоящая из таких слов, как: *«не», «и», «или» «если..., то»*. Все эти слова хорошо нам известны в повседневном языке и служат для образования сложных высказываний из более простых.

В грамматике они причисляются к так называемым связкам между высказываниями. Уже вследствие этого обстоятельства наличие таких терминов не состав-

* Логика была создана Аристотелем, великим греческим мыслителем IV в. до н. э. (384—322); его сочинения по логике собраны в произведении *«Органон»*. Создателем математической логики надо считать великого немецкого философа и математика XVII в. Г. В. Лейбница (1646—1716). Однако работы Лейбница по логике не оказали большого влияния на дальнейшее развитие логических исследований; был даже такой период, когда они были преданы забвению. Непрерывное развитие математической логики начинается только к середине XIX в., с опубликования системы логики ирландского математика **Дж. Буля** (G. Boole), 1815—1864; основной труд — *«Исследование законов мысли»,* («An Investigation of the Laws of Thought», London, 1854). До сих пор наиболее совершенное выражение новая логика нашла в труде современных английских логиков Уайтхеда и Рэссела, *«Основы ма-*

ляет специфической особенности никакой отдельной науки. Установить смысл и способ употребления этих терминов составляет задачу самой основной и элементарной части логики, которая называется исчислением высказываний, или иногда исчислением предложений, или (менее удачно) теорией дедукции*.

Перейдем теперь к рассмотрению смысла наиболее важных терминов исчисления высказываний [9].

При помощи слова *«не»* образуется отрицание любого высказывания; два высказывания, из которых первое есть отрицание второго, называются противоречащими высказываниями. В исчислении высказываний слово *«не»* стоит в начале всего высказывания, между тем как в повседневном языке принято присоединять, его к глаголу или, если желательно иметь его в начале высказывания, заменять его выражением: *«неверно, что»*. Так, например, отрицание высказывания

1 *есть целое положительное число*

читается следующим образом:

1 *не есть целое положительное число,*

или же:

неверно, что 1 *есть положительное число.*

тематики» (A. N. Whitehead and B. Russell, «Principia Mathematica», Cambridge, 1910—1913).

[Следует отметить все же, что дальнейшее развитие не только привело к пересмотру ряда основных установок Уайтхеда и Рэссела, но во многом было даже обусловлено возникшей вокруг этого произведения полемикой.—*Прим. ред.*]

* Исторически первая система исчисления высказываний содержится в труде *«Исчисление понятий»*, («Begriffsschrift», Halle, 1879) немецкого логика Фреге (G. Frege), 1848—1925, несомненно являющегося величайшим логиком XIX столетия. Выдающийся современный польский логик и историк логики Лукасевич (I. Lucasiewicz) достиг исчисления высказываний особенно простой и точной формы и вызвал обширные исследования, касающиеся этого исчисления.

Производя отрицание высказывания, мы тем самым преследуем цель выразить мысль, что высказывание ложно; если высказывание действительно ложно, его отрицание истинно, в противном случае его отрицание ложно.

В результате соединения двух или более высказываний при помощи слова *«и»* мы получаем их так называемую **конъюнкцию** или **логическое произведение**; высказывания, соединенные таким способом, называются **членами конъюнкции** или **факторами логического произведения**. Если, например, высказывания:

2 есть целое положительное число

и

$$2 < 3$$

соединить таким способом, получится конъюнкция:

2 есть целое положительное число и $2 < 3$.

Истинность конъюнкции двух высказываний равносильна тому, что оба суждения, входящие в конъюнкцию, истинны; если хоть один из ее членов ложен, то и вся конъюнкция ложна.

Соединяя высказывания при помощи слова *«или»*, мы получаем **дизъюнкцию** этих высказываний, называемую также **логической суммой**; высказывания, образующие дизъюнкцию, называются **членами дизъюнкции** или **слагаемыми логической суммы**. Слово *«или»* обладает в повседневном языке по меньшей мере двумя различными смыслами. Взятая в так называемом **неисключающем** смысле, дизъюнкция двух высказываний выражает только то, что по крайней мере одно из этих двух высказываний истинно, независимо от того, истинны ли они оба, или нет; взятая в другом, так называемом **исключающем**, смысле, дизъюнкция двух высказываний утверждает, что одно из них истинно, а другое — ложно. Предположим, мы видим следующее объявление, вывешенное в книжном магазине:

покупатели, являющиеся учителями или студентами колледжа, пользуются особой скидкой.

Здесь слово *«или»* несомненно употребляется в первом смысле, ибо не предполагается отказывать в скидке учителям, которые в то же время являются студентами колледжа. Если, с другой стороны, ребенок просит, чтобы его повели утром на прогулку, а вечером в театр, и мы отвечаем:

нет, мы пойдем на прогулку или мы пойдем в театр, —

то употребленное нами слово *«или»* относится явно ко второму роду, ибо мы намерены исполнить только одну из двух просьб. В логике и математике слово *«или»* всегда употребляется в первом, не-исключающем значении; дизъюнкция двух высказываний считается истинной, если оба или, по крайней мере, один из ее членов истинны, в противном же случае она ложна. Так, например, можно утверждать:

каждое число положительно или меньше, чем 3,

хотя известно, что есть числа, являющиеся одновременно положительными и меньшими, чем 3. Во избежание недоразумений, было бы целесообразно пользоваться в повседневном и научном языке словом *«или»*, взятым само по себе, только в первом значении, а во всех тех случаях, когда подразумевается второе значение, пользоваться составным выражением *«или — или»*.

* Даже если ограничиться только теми случаями, когда слово *«или»* встречается в своем первом смысле, мы обнаруживаем весьма важные различия между употреблением его в повседневном языке и в логике. В обычном языке два высказывания соединяются словом *«или»*, когда они так или иначе связаны по форме и содержанию. То же самое относится, хотя, быть может, и в меньшей степени, к употреблению слова *«и»*. Характер этой связи не вполне отчетлив, и де-

тальный разбор и описание ее встретились бы со значительными трудностями. Во всяком случае, можно полагать, что никто из лиц, не знакомых с языком современной логики, не склонен был бы рассматривать такую фразу, как:

$$2 \cdot 2 = 5 \text{ \textit{или Нью-Йорк — большой город,}}$$

как выражение, имеющее смысл, и, еще в меньшей степени, как истинное высказывание. Кроме того, употребление слова *«или»* в повседневном языке подвергается влиянию некоторых факторов психологического характера. Обычно мы употребляем дизъюнкцию двух суждений, только если мы полагаем, что одно из них истинно, но не знаем, какое именно. Если, например, мы смотрим на лужайку при нормальном освещении, нам не придет в голову сказать, что лужайка зеленая или голубая, ибо мы можем утверждать нечто более простое и вместе с тем более сильное *, а именно, что лужайка зеленая. Иногда мы даже принимаем высказывание дизъюнкции за признание со стороны говорящего в том, что он не знает, какой из членов этой дизъюнкции верен. Если мы впоследствии убеждаемся, что говорящий знал, что один — и какой именно — из членов был ложным, мы склонны смотреть на всю дизъюнкцию как на ложное высказывание, даже если другой ее член несомненно истинный. Представим себе, что один из наших знакомых на вопрос, когда он уедет из города, ответит, что он собирается сделать это сегодня, завтра или послезавтра. Если мы впоследствии убедимся в том, что еще до

* В математике подразделение предложений на «сильные» и «слабые» является даже общепринятым. Так, например, говорят, что предположение о существовании у функции $f(x)$ производной в точке a *сильнее* предположения ее непрерывности в этой точке; или аксиома Дедекинда о непрерывности *сильнее* аксиомы непрерывности Кантора. Если, как в приведенных примерах, предложение B является следствием из предложения A, между тем как A не выводимо из B, то A, во всяком случае, считается более сильным, чем B. — *Прим. ред.*

нашего вопроса им было уже решено уехать в тот же день, у нас, вероятно, создастся впечатление, что мы были намеренно введены в заблуждение и что он солгал нам.

Создатели современной логики, вводя слово *«или»* в круг своих рассмотрений, хотели — может быть, бессознательно — упростить его значение и сделать последнее более ясным и независимым от всех психологических факторов, особенно от наличия или отсутствия знания. Вследствие этого, они расширили употребление слова *«или»* и решили рассматривать дизъюнкцию всяких двух высказываний как осмысленное целое, если бы даже и не существовало связи между ними по содержанию или по форме; и таким образом было решено сделать истинность дизъюнкции — подобно истинности отрицания или конъюнкции — зависимой только от истинности ее членов. Поэтому тот, кто пользуется словом *«или»* в смысле современной логики, будет рассматривать вышеприведенное выражение:

$$2 \cdot 2 = 5 \text{ } \textit{или Нью-Йорк — большой город,}$$

как имеющее смысл и даже истинное высказывание, ибо его вторая часть несомненно истинна. Подобным же образом, если мы допустим, что наш знакомый, отвечая на вопрос относительно даты своего отъезда, употребил слово *«или»* в его строго логическом смысле, мы принуждены будем считать его ответ истинным, независимо от того, каковы, по нашему мнению, были его намерения *.

8. Импликация или условное высказывание; импликация в материальном смысле

Соединяя два высказывания при помощи слов *«если..., то ...»*, мы получаем сложное высказывание, называемое импликацией или условным высказыванием. Подчиненный член высказывания, которому предпослано слово *«если»,* называется антецедентом (предыдущим), а главный член, (вводимый при помощи слова *«то»*) называется консеквентом (последующим). Утверждая импликацию, мы утверждаем, что не может случиться, чтобы антецедент был истинным, а консеквент — ложным. Импликация, таким образом, истинна во всяком из следующих трех случаев: (I) и антецедент и консеквент истинны, (II) антецедент ложен, а консеквент истинен, (III) и антецедент и консеквент ложны, и только в четвертом возможном случае, когда антецедент истинен, а консеквент ложен, вся импликация ложна. Из этого следует, что, принимая импликацию за истинную и в то же время принимая ее антецедент за истинный, мы должны признать истинным и консеквент, а принимая импликацию за истинную и отвергая ее консеквент как ложный, мы должны также отвергнуть и ее антецедент.

* Как в случае дизъюнкции, так и при импликации обнаруживаются значительные различия между словоупотреблением в логике и в повседневном языке. Опять-таки, в обычной речи мы стремимся соединять два высказывания словами *«если..., то...»*, только если есть какая-то связь между ними по форме и по содержанию. Эту связь трудно охарактеризовать в общем виде и только иногда природа ее относительно ясна. Часто с этой связью мы соединяем убеждение, что консеквент необходимо вытекает из антецедента, т. е. что принимая антецедент за истинный, мы тем самым вынуждены принять за истинный и консеквент (и что, повидимому, мы даже можем вывести консеквент из антецедента на основании некоторых общих законов, которые мы не всегда в состоянии отчетливо сформулировать). Здесь опять-таки проявляется дополнительный психологический фактор; мы обычно формулируем и утверждаем импликацию, только если мы не знаем наверное, истинны или нет антецедент и консеквент. В противном случае употребление импликации кажется неестественным, и ее смысл и истинность могут вызывать сомнение.

Иллюстрацией может послужить следующий пример. Рассмотрим такой физический закон:

каждый металл пластичен *

и выразим его в форме импликации, содержащей переменные:

если x есть металл, то x пластичен.

Если мы уверены в истинности этого общего закона, то мы уверены также в истинности всех его частных применений, т. е. всех импликаций, могущих получиться при замене *x* названиями любых материалов, как-то: железо, глина или дерево.

И действительно, обнаруживается, что все высказывания, полученные таким образом, удовлетворяют вышеприведенным условиям истинности импликаций; не бывает случая, когда антецедент является истинным, а консеквент ложным. Далее, мы замечаем, что в каждой из этих импликаций существует тесная связь между антецедентом и консеквентом, находящая свое формальное выражение в совпадении их субъектов. Мы также убеждены, что, принимая антецедент каждой из этих импликаций, например *«железо есть металл»,* за истинный, мы можем вывести из него его консеквент *«железо пластично»,* так как мы можем сослаться на общий закон, что каждый металл пластичен.

Однако некоторые из только что рассмотренных высказываний представляются теперь искусственными и сомнительными с точки зрения обычной речи. Никаких сомнений не вызывает вышеприведенная общая импликация или какой-нибудь из ее частных случаев, полученный путем замены *«x»* названием материала, относительно которого нам неизвестно, является ли он

* Автор имеет тут в виду ковкость металлов, но так как он, как это видно из дальнейшего, считает глину также обладающей этим свойством, то мы предпочли перевести слово «malleable» как «пластичен». Впрочем, может быть, более подходящим было бы слово «деформируем». — *Прим. ред.*

металлом и пластичен ли он. Но если мы заменяем *«х»* *«железом»*, мы сталкиваемся со случаем, когда антецедент и консеквент несомненно истинны; и тогда мы предпочтем употребить вместо импликации выражение вроде:

так как железо есть металл, то оно пластично.

Подобным же образом, если вместо *«х»* мы подставим *«глину»,* то мы получим импликацию с ложным антецедентом и истинным следствием, и мы будем склонны заменить ее другим выражением:

хотя глина и не есть металл, она пластична.

И наконец, когда мы заменяем *«х»* *«деревом»,* это приводит к импликации с ложным антецедентом и ложным консеквентом; если бы в этом случае мы захотели сохранить форму импликации, нам пришлось бы изменить грамматическую форму глаголов:

если бы дерево было металлом, то оно было бы пластично.

Учитывая нужды научного языка, логики ввели ту же процедуру по отношению к фразе *«если..., то...»*, как и в случае со словом *«или»*. Они решили упростить и выяснить смысл этой фразы и освободить ее от влияния психологических факторов. С этой целью они расширили ее применение, рассматривая импликацию как осмысленное высказывание, даже если не существует никакой связи между двумя ее членами, и установили, что истинность или ложность импликации зависит исключительно от истинности или ложности антецедента и консеквента. Кратко характеризуя это положение, мы говорим, что современная логика пользуется импликациями в материальном смысле или, просто, материальными импликациями; это противополагается употреблению импликации в формальном смысле или формальной импликации, когда наличие некоторой формальной связи между антецедентом и консеквентом служит необходимым условием осмысленности и истинности импликации. Понятие формальной импликации, быть может, не вполне ясно, но во всяком случае, оно уже понятия материальной импликации; каждая имеющая смысл и истинная формальная импликация есть в то же время осмысленная и истинная материальная импликация, но не наоборот.

Чтобы пояснить предшествующие замечания, рассмотрим следующие четыре высказывания:

если $2 \cdot 2 = 4$, *то Нью-Йорк большой город;*

если $2 \cdot 2 = 5$, *то Нью-Йорк большой город;*

если $2 \cdot 2 = 4$, *то Нью-Йорк маленький город;*

если $2 \cdot 2 = 5$, *то Нью-Йорк маленький город.*

В повседневной речи эти высказывания вряд ли будут рассматриваться как имеющие смысл и еще в меньшей степени — как истинные. С другой же стороны, с точки зрения математической логики, все они осмыслены, причем третье высказывание ложно, а остальные три — истинны. Это еще, конечно, не означает, что подобные высказывания в частных применениях своих будут уместны с любой точки зрения или что мы употребляем их в качестве посылок для наших выводов.

Было бы ошибкою думать, что различие между повседневным языком и языком логики, выявленное здесь, носит абсолютный характер и что намеченные выше правила употребления в повседневной речи слов *«если..., то...»* не допускают исключений. Действительно, употребление этих слов более или менее зыбко и, если поискать, можно обнаружить случаи, когда оно не согласуется с нашими правилами. Представим себе, что наш знакомый столкнулся с очень трудной задачей, и мы не верим, что он когда-либо ее решит.

Тогда мы можем в шутливой форме выразить наше неверие словами:

если вы решите эту задачу, я съем свою шляпу *.

Направленность этого высказывания совершенно ясна. Мы утверждаем здесь импликацию, в которой последующее (консеквент) несомненно ложно; поэтому, так как мы утверждаем истинность всей импликации в целом, то мы тем самым утверждаем одновременно ложность антецедента; иными словами, мы выражаем наше убеждение в том, что нашему знакомому не удастся решить интересующую его задачу. Но при этом совершенно ясно, что антецедент и консеквент нашей импликации никоим образом не связаны друг с другом, так что перед нами типичный случай материальной, а не формальной импликации.

Расхождение в употреблении фразы *«если..., то...»* в обыкновенной речи и в математической логике было источником длительной и даже страстной дискуссии, в которой, между прочим, профессиональные логики приняли лишь незначительное участие **.

(Довольно любопытно, что относительно меньшее внимание было уделено аналогичному расхождению в употреблении слова *«или»*).

Делались возражения, что логики вследствие пользования материальной импликацией приходят к

---

* Или, например, мы можем смело утверждать, что если капиталистические правительства стран, владеющих колониями, добровольно дадут им независимость, то реки потекут вспять.

** Интересно отметить, что начало этой дискуссии восходит к древности. Греческий философ Филон из Мегары (в IV в. до н. э.) был, повидимому, первым в истории логики, кто пропагандировал употребление материальной импликации; он выступал, таким образом, против идей своего учителя, Диодора Крона, который предлагал пользоваться импликацией в более узком смысле, скорее относящемся к тому, что мы здесь называем формальным смыслом. Несколько позднее (в III в. до н. э.) — и, быть может, под влиянием Филона — различные возможные понятия импликации подвергались обсуждению у греческих философов и логиков стоической школы (в чьих писаниях можно найти первые начатки исчисления высказываний).

парадоксам и даже к полной бессмыслице. Это вылилось в шумное требование реформы логики с целью достичь более тесного сближения между логикой и обычной речью в отношении употребления импликаций.

Вряд ли можно было бы утверждать, что эта критика хорошо обоснована. В обычной речи не существует фразы, имеющей точно определенный смысл *. Едва ли можно было бы найти двух человек, которые употребляли бы каждое слово в одинаковом значении, и даже в речи одного человека значение одного и того же слова меняется в различные периоды его жизни [10]. Сверх того, значение слов повседневного языка обычно очень сложно; оно зависит не только от внешней формы слова, но также и от обстоятельств, при которых оно высказано, а иногда и от субъективно-психологических факторов.

Если ученому требуется ввести какое-либо понятие из повседневной жизни в науку и установить общие законы, касающиеся этого понятия, он должен сделать его содержание более ясным, точным и простым и освободить его от несущественных признаков; в таких случаях не имеет значения, логик ли это, интересующийся выражением *«если..., то...»*, или, например, физик, устанавливающий точный смысл слова *«металл»*. Каким бы путем ученый ни осуществлял свою задачу, установленное им употребление термина в большей или меньшей степени разойдется с повседневной речевой практикой. Если, однако, он точно разъяснит, в каком смысле он намерен употреблять термин, и если на деле он не будет отступать от такого употребления, никто не будет вправе упрекать его в том, что его образ действия приводит к бессмыслице.

Тем не менее, в связи с происходившими спорами, некоторые логики предприняли попытки реформировать теорию импликации. Они, вообще говоря, не отка-

* Если она выхвачена из контекста и рассматривается изолированно от него. — *Прим. ред.*

зываются отводить материальной импликации место в логике, но они обеспокоены также и тем, чтобы найти место и для другого понятия импликации, чтобы при этом, например, возможность выведения консеквента из антецедента составляла необходимое условие истинности импликации; они как будто бы даже стремятся выдвинуть это новое понятие на первый план. Эти попытки возникли в относительно недавнее время, и слишком рано еще выносить окончательное суждение об их ценности *.

Но в настоящее время представляется почти несомненным, что теория материальной импликации превзойдет все другие теории в простоте, и во всяком случае не надо забывать, что логика, опирающаяся на это простое понятие, оказалась вполне пригодной основой для самых сложных и тонких математических рассуждений ✳.

9. Применение импликации в математике

Фраза *«если..., то...»* принадлежит к числу логических выражений, которыми весьма часто пользуются в других науках, и особенно в математике. Математические теоремы, в частности теоремы универсального характера, тяготеют к форме импликаций; антецедент называется в математике предположением, а консеквент заключением.

В виде простого примера арифметической теоремы, имеющей форму импликации, можно привести следующее суждение:

если x — положительное число, то 2x — положительное число,

где *«x — положительное число»* является предположением, а *«2x — положительное число»* — заключением.

---

* Первая попытка этого рода принадлежит современному американскому философу и логику Льюису (C. I. Lewis).

Помимо этой, так сказать, классической формы математических теорем, попадаются различные формулировки, в которых предположение и заключение соединяются как-либо иначе, чем фразой *«если..., то...»* Только что упомянутая теорема, например, может быть перефразирована одним из следующих способов:

из: x — положительное число, следует: 2x — положительное число;

предположение: x — положительное число влечет (или имеет следствием) заключение: 2x — положительное число;

условие: x — положительное число достаточно для того, чтобы 2x было положительным числом;

для того, чтобы 2x было положительным числом, достаточно, чтобы x было положительным числом;

условие: 2x положительное число необходимо для того, чтобы x было положительным числом;

для того, чтобы x было положительным числом, необходимо, чтобы 2x было положительным числом.

Поэтому вместо утверждения условного высказывания обычно можно с таким же успехом сказать, что предположение влечет заключение, или имеет его следствием, или что оно есть достаточное условие заключения; можно также выразить это, сказав, что заключение следует из предположения или что оно является необходимым условием последнего. Логик мог бы выдвинуть разнообразные возражения против некоторых из вышеприведенных формулировок, но они широко применяются в математике.

* Возражения, которые здесь могли бы быть выдвинуты, касаются тех формулировок, где попадаются какие-либо из слов: *«предположение», «заключение», «следствие», «следует», «влечет».*

Чтобы понять основные пункты этих возражений, прежде всего заметим, что такие формулировки отличаются по содержанию от первоначально данных. Ведь в первоначальных формулировках мы говорим только о числах, свойствах чисел, действиях над числами и т. д...., т. е. предметах, которыми ведает математика; в обсуждаемых же теперь формулировках мы говорим о предположениях, заключениях, условиях, т. е. о высказываниях или функциях-высказываниях, встречающихся в математике. По этому поводу надо заметить, что обычно не проводят достаточно ясного различия между терминами, обозначающими предметы, с которыми имеешь дело в данной науке, и терминами, обозначающими различные виды выражений, которые в ней попадаются. Это, в частности, наблюдается в математике, особенно элементарной. Вероятно, только немногие отдают себе отчет в том, что такие термины, как «уравнение», «неравенство», «многочлен» или «алгебраическая дробь», встречающиеся на каждой странице элементарных учебников алгебры, не принадлежат, строго говоря, к области математики или логики, поскольку они не обозначают предметов, рассматриваемых в этой области: уравнения и неравенства суть известного рода специальные функции-высказывания, многочлены же и алгебраические дроби, особенно в том виде, как они рассматриваются в элементарных учебниках, — являются частными случаями функций-указателей (см. параграф 2). Путаница по этому поводу вносится тем обстоятельством, что термины такого рода часто употребляются при формулировке математических теорем. Это стало общим обыкновением, и, быть может, не стоит терять время на борьбу с ним, поскольку оно не представляет особенной опасности; но все же имеет смысл указать, что для каждой теоремы, сформулированной при помощи подобных терминов, существует другая формулировка, логически более правильная, в которой эти термины совсем не встречаются. Например, теорема:

уравнение: $x^2 + ax + b = 0$ *имеет не больше 2 корней* может быть выражено в более правильной форме следующим образом:

существует не более двух чисел x, для которых

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Возвращаясь к сомнительным формулировкам импликаций, мы должны подчеркнуть один еще более важный пункт. В этих формулировках мы утверждаем, что одно высказывание, а именно антецедент импликации, имеет следствием другое высказывание — консеквент импликации, или что второе следует из первого. Но обычно, выражаясь таким образом, мы подразумеваем, что признание истинности первого высказывания, так сказать, необходимо приводит нас к такому же признанию относительно второго высказывания (и что, возможно, мы могли бы даже вывести второе высказывание из первого). Однако, как мы уже знаем из параграфа 8, значение импликации, установленное в современной логике, не зависит от того, имеет ли ее консеквент подобную связь со своим антецедентом. Всякий, кого шокирует, что выражение:

если $2 \cdot 2 = 4$, то Нью-Йорк есть большой город

рассматривается в логике как значимое и даже истинное высказывание, найдет, что еще труднее будет примириться с таким видоизменением этого выражения, как:

предположение, что $2 \cdot 2 = 4$, имеет следствием, что Нью-Йорк — большой город.

Таким образом, мы видим, что рассматриваемые здесь способы формулировки или видоизменения условного высказывания ведут к парадоксально звучащим оборотам и еще более углубляют разногласия между обычной речью и математической логикой. Поэтому-то они не раз вызывали разнообразные недоразумения и были одной из причин тех страстных и нередко бесплодных споров, о которых мы упоминали выше.

С чисто логической точки зрения мы, конечно, можем избежать всех возникающих здесь возражений, установив ясно раз и навсегда, что при употреблении вышеупоминаемых формулировок мы будем пренебрегать их обычным смыслом и будем придавать им в точности то же содержание, как и обыкновенному условному высказыванию. Но это было бы неудобно в другом отношении, ибо бывают случаи, хотя и не в самой логике, но в области, близко с ней соприкасающейся, а именно в методологии дедуктивных наук (см. гл. VI), когда мы говорим о высказываниях и отношении следствия между ними и прибегаем к таким терминам, как *«влечет»* и *«следует»* в ином смысле, находящемся в более тесном родстве с обычным языком. Поэтому было бы лучше избегать таких формулировок, тем более что в нашем распоряжении имеется много формулировок, неуязвимых ни для одного из этих возражений [11]*.

10. Эквивалентность высказываний

Мы рассмотрим еще одно выражение из области исчисления высказываний, сравнительно редко встречающееся в повседневной речи, а именно фразу *«если, и только если»*. Если какие-либо два высказывания соединены этой фразой, в результате получается сложное высказывание, называемое **эквивалентностью**. Два высказывания, соединенные таким образом, называются **левой** и **правой частью эквивалентности**. Утверждая эквивалентность двух высказываний, мы тем самым исключаем возможность того, что одно из них истинно, а другое — ложно; эквивалентность, следовательно, истинна, если ее левая и правая части либо обе истинны, либо обе ложны, в противном случае эквивалентность ложна.

Смысл эквивалентности можно охарактеризовать еще другим образом. Если в условном высказывании мы поменяем местами антецедент и консеквент, то получим новое высказывание, которое по отношению к первоначальному высказыванию называется **конверсным высказыванием** или **конверсией данного высказывания**. Возьмем, например, в качестве первоначального высказывания импликацию:

(I)

если x — положительное число, то $2x$ — положительное число;

тогда конверсией этого высказывания будет:

(II)

если $2x$ — положительное число, то x — положительное число.

Как показывает этот пример, бывают случаи, когда конверсия истинного высказывания истинна. Но с другой стороны, для того чтобы убедиться, что это — не общее правило, достаточно заменить «$2x$» на «x^2» в (I) и (II); высказывание (I) остается истинным, высказывание же (II) станет ложным. Если теперь случится, что два условных высказывания, из которых одно является конверсией другого, оба истинны, то факт их одновременной истинности может быть выражен также соединением антецедента и консеквента каждого из этих двух высказываний при помощи слов «*если, и только если*». Так, две приведенные выше импликации — первоначальное высказывание (I) и конверсное высказывание (II) — могут быть заменены одним высказыванием:

x — положительное число, если, и только если, $2x$ — положительное число

(в котором две части эквивалентности могут еще поменяться местами).

Иногда употребляют еще некоторые другие формулировки, могущие служить выражением той же мысли, например:

из: x — положительное число следует $2x$ — положительное число, и обратно:

условие, что x — положительное число, и условие, что 2x — положительное число, друг другу эквивалентны;

условие; что x — положительное число, необходимо и достаточно для того, чтобы 2x было положительным числом;

чтобы x было положительным числом, необходимо и достаточно, чтобы 2x было положительным числом.

Вместо соединения двух высказываний выражением *«если, и только если»,* можно поэтому сказать также, что между этими двумя высказываниями существует отношение следования в обе стороны, или что эти два высказывания эквивалентны, или, наконец, что каждое из двух высказываний является необходимым и достаточным условием для другого.

11. Формулировка определений и их правила

Фраза *«если, и только если»* часто употребляется при формулировке определений, т. е. соглашений, устанавливающих, какой смысл надо придавать выражению, доселе не встречавшемуся в данной дисциплине и могущему быть непонятным непосредственно. Предположите, например, что в арифметике символ «$\leqq$» до сих пор еще не употреблялся, но что кто-либо желает ввести его теперь в рассуждения (рассматривая его, как обычно, в виде сокращения для выражения *«меньше или равно»*). Для этого необходимо прежде всего определить этот символ, т. е. точно объяснить его значение в терминах выражений уже известных, чье значение не вызывает сомнений. Чтобы осуществить это, мы формулируем следующее определение, — предполагая, что «$>$» принадлежит к уже известным символам:

мы говорим, что $x \leqq y$, если, и только если, неверно, что $x > y$.

Только что сформулированным определением устанавливается эквивалентность двух функций-высказываний:

$$x \leqq y$$

и

$$\textit{неверно, что } x > y;$$

таким образом, можно сказать, что оно допускает преобразование формулы «$x \leqq y$» в эквивалентное выражение, не содержащее более знака «$\leqq$», но сформулированное полностью в терминах, известных нам еще раньше. То же самое относится ко всякой формуле, получаемой из «$x \leqq y$» путем замены «x» и «y» произвольными символами или выражениями, обозначающими числа. Формула:

$$3 + 2 \leqq 5$$

эквивалентна, например, высказыванию:

$$\textit{неверно, что } 3 + 2 > 5;$$

так как последнее является истинным высказыванием, то истинно и первое. Подобным же образом и формула

$$4 \leqq 2 + 1$$

эквивалентна высказыванию:

$$\textit{неверно, что } 4 > 2 + 1;$$

причем оба — ложные утверждения. Это замечание применимо также к более сложным высказываниям и функциям-высказываниям; преобразуя, например, высказывание:

$$\textit{если } x \leqq y \textit{ и } y \leqq z, \textit{ то } x \leqq z,$$

мы получаем:

если неверно, что $x > y$, *и если неверно, что* $y > z$, *то неверно, что* $x > z$.

Короче говоря, в силу определения, данного выше, мы в состоянии преобразовать всякое простое или сложное высказывание, содержащее знак «$\leqq$», в эквивалентное высказывание, уже не содержащее его,— другими словами, так сказать, перевести его на язык, в котором знак «$\leqq$» не встречается. И этим именно фактом характеризуется роль, которую определения играют в математических дисциплинах.

Чтобы определение хорошо выполнило свою задачу, надо соблюдать известные меры предосторожности при его формулировке. С этой целью выработаны специальные правила, так называемые **правила определения**, точно устанавливающие, как строить правильные определения. Не давая здесь точной формулировки этих правил, ограничимся замечанием, что, будучи построено на их основе, каждое определение может принять форму эквивалентности; первый член этой эквивалентности, **определяемое**, должен быть краткой, грамматически простой функцией-высказыванием, содержащей постоянную, подлежащую определению; другой член, **определитель**, может быть функцией-высказыванием произвольной структуры, однако содержащей только постоянные, смысл которых либо непосредственно очевиден, либо уже был предварительно выяснен. В частности, ни постоянная, подлежащая определению, ни какое-либо другое выражение, предварительно определенное с ее помощью, не должны встречаться в определителе; в противном случае определение неправильно, оно содержит ошибку, известную под названием **порочного круга в определении**, подобно тому как говорят о **порочном круге в доказательстве**, если положение, из которого выводят доказываемую теорему, само основывается на той же теореме или на какой-либо другой, предварительно доказанной с ее помощью. Чтобы подчеркнуть условный характер определения и отличать его от других положений, имеющих форму эквивалентности, небесполезно предпосылать ему что-либо вроде слов: «мы говорим, что...» Легко убедиться, что приведенное выше определение символа «$\leqq$» удовлетворяет всем этим условиям; в нем есть определяемое:

$$x \leqq y,$$

в то время как определителем служит:

неверно, что $x > y$.

Следует отметить, что математики, формулируя определения, предпочитают слова *«если», «или», «в случае, когда»* — выражению *«если, и только если»*. Если бы, например, им нужно было сформулировать определение символа «$\geqq$», они вероятно дали бы его в следующем виде:

мы утверждаем, что $x \geqq y$, в случае, когда неверно, что $x > y$.

Это выглядит так, как будто бы подобное определение только устанавливает, что определяемое следует из определителя, но определение не подчеркивает, что отношение следствия действительно также и в обратном направлении, и таким образом здесь выпадает указание на эквивалентность определяемого и определителя. Но в действительности здесь имеется молчаливое допущение, что *«если»* и *«в случае, когда»* в данном словоупотреблении, т. е. при соединении определяемого и определителя, должны означать то же самое, что обычно означает *«если, и только если»*. К этому надо добавить, что форма эквивалентности — не единственная форма, возможная при формулировке определений [12].

12. Законы исчисления высказываний

В конце нашего разбора наиболее важных выражений исчисления высказываний попробуем охарактеризовать законы этого исчисления.

Рассмотрим следующее высказывание:

Если 1 — положительное число и $1 < 2$, то 1 — положительное число.

Это высказывание, несомненно, истинно, оно содержит исключительно постоянные, принадлежащие к области логики и арифметики, — и все же никому не пришло бы в голову включать это высказывание, как особую теорему, в учебник математики. Если обдумать, почему это так, нужно притти к заключению, что это высказывание совершенно неинтересно с точки зрения арифметики; оно никоим образом не способно обогатить наши познания относительно чисел, его истинность совершенно не зависит от содержания встречающихся в нем арифметических терминов, но только от смысла слов *«и», «если», «то»*. Чтобы убедиться, что это так, заменим в рассматриваемом суждении компоненты

1 — *положительное число*

$1 > 2$

любым другим высказыванием из произвольно взятой области; в результате получим ряд высказываний, каждое из которых, подобно первоначальному суждению, истинно; например:

если данная фигура — ромб и если та же фигура — прямоугольник, то данная фигура — ромб;
если сегодня воскресенье и светит солнце, то сегодня воскресенье.

Чтобы выразить факт в более общей форме, мы введем переменные *«p»* и *«q»*, условившись, что эти символы не служат обозначением чисел или каких-либо других предметов, но замещают собой целые высказывания; переменные подобного рода называются **переменными высказываниями**. Итак, в рассматриваемом высказывании мы заменим выражение:

1 — *положительное число*

знаком *«p»*, а формулу:

$1 < 2$

знаком *«q»*; таким образом мы получаем функцию-высказывание:

если p и *q, то p.*

Эта функция-высказывание обладает тем свойством, что, если подставить вместо *«p»* и *«q»* любые произвольные высказывания, то получатся только истинные высказывания. Этому замечанию может быть придана форма универсального положения:

при всяком p и q, если p и q, то p.

Мы здесь получили первый пример закона исчисления высказываний, который можно рассматривать как закон упрощения при логическом умножении. Рассмотренное выше высказывание было лишь частным случаем этого универсального закона, подобно тому как, например, формула:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2,$$

есть только частный случай универсальной арифметической теоремы:

для любых чисел x и y, $x \cdot y = y \cdot x$.

Подобным же образом могут быть получены и другие законы исчисления высказываний. Мы даем здесь несколько примеров таких законов; в их формулировке мы опускаем универсальный квантор «*при всяком p, q...*» — в соответствии с обыкновением, упомянутым в разделе 3, которое является почти правилом для всего исчисления высказываний.

Если p, то p.

Если p, то q или p.

Если из p следует q и из q следует p, то p и q эквивалентны.

Если из p следует q, а из q следует r, то из p следует r.

Первое из этих четырех положений известно как закон тождества, второе — как закон упрощения при логическом сложении, а четвертое — как закон гипотетического силлогизма.

Как арифметические теоремы универсального характера устанавливают нечто относительно свойств произвольных чисел, так, можно сказать, и законы исчисления высказываний утверждают нечто относительно свойств произвольных высказываний. То обстоятельство, что в этих законах встречаются только такие переменные, которыми замещаются совершенно произвольные высказывания, является характеристической чертой исчисления высказываний, определяющей широту его обобщения и сферу его применения.

13. Символика исчисления высказываний; функции истинности и таблицы истинности

Существует простой и общий метод, называемый методом таблиц истинности или матриц истинности, который помогает нам в любом частном случае определить, истинно ли данное высказывание из области исчисления высказываний и, следовательно, может ли оно быть включено в число законов этого исчисления *.

При описании этого метода удобно будет применять специальную символику. Выражения:

нет; и; или; если..., то; если, и только если

мы будем соответственно заменять:

$$\sim;\ \wedge;\ \vee;\ \rightarrow;\ \leftrightarrow.$$

Первый из этих символов надлежит ставить перед выражением, подлежащим отрицанию; остальные символы всегда помещаются между двумя выражениями («$\rightarrow$» ставится, следовательно, вместо слова «*то*», а слово «*если*» просто опускается). Одно, два или более простых высказывания приводят нас, таким образом, к более сложному высказыванию; а если нам нужно воспользоваться последним для построения дальнейших, еще более сложных выражений, мы заключаем его в скобки.

При помощи переменных, скобок и принятых выше постоянных символов (а иногда также при помощи дополнительных постоянных подобного же характера,

---

* Этому методу положил начало Пирс (Pierce), уже упомянутый нами по другому поводу (см. подстрочное примечание на стр. 44).

о которых мы здесь не будем говорить) мы можем дать запись всех высказываний и функций-высказываний, принадлежащих к области исчисления высказываний. Простейшими функциями-высказываниями являются, кроме частных переменных высказываний, выражения:

$$\sim p,\ p \wedge q,\ p \vee q,\ p \rightarrow q,\ p \leftrightarrow q$$

(и другие подобные же выражения, отличающиеся от этих только видом употребляемых переменных). Как пример сложной функции-высказывания рассмотрим выражение:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r),$$

которое, переводя символы на обычный язык, мы читаем:

если p или q, то p и r.

Еще более сложным выражением является приведенный выше закон гипотетического силлогизма, который теперь принимает форму:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Мы можем легко убедиться, что каждая функция-высказывание, встречающаяся в нашем исчислении, есть так называемая функция истинности. Это означает, что истинность или ложность всякого высказывания, полученного из этих функций путем подстановки вместо переменных каких-либо высказываний, зависит исключительно от истинности или ложности подставленных высказываний. По отношению к простейшим функциям-высказываниям «$\sim p$», «$p \wedge q$» и т. д. это непосредственно следует из замечаний, сделанных в параграфах 7, 8 и 10 и касающихся смысла, придаваемого в логике словам «*нет*», «*и*» и т. д. Но то же самое применимо, подобным же образом, к сложным функциям. Рассмотрим, например, функцию: «$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$». Высказывание, получаемое из него путем подстановки, есть импликация, и, следовательно, его истинность зависит только от истинности его антецедента и консеквента; истинность антецедента, являющегося дизъюнкцией, полученной из «$p \vee q$», зависит только от истинности высказываний, подставленных вместо «p» и «q», и точно таким же образом истинность консеквента зависит только от истинности высказываний, подставляемых вместо «p» и «r». Поэтому истинность всего высказывания, полученного из рассматриваемой функции-высказывания, зависит исключительно от истинности высказываний, подставляемых вместо «p», «q» и «r».

Чтобы совершенно точно увидеть, как истинность или ложность высказывания, полученного при помощи подстановки в данную функцию-высказывание, зависит от истинности или ложности высказываний, подставленных вместо переменных, мы составим так называемую **таблицу** или **матрицу истинности** для этой функции. Начнем с того, что дадим подобную таблицу для функции «$\sim p$»:

p	$\sim p$
И	Л
Л	И

А вот объединенная таблица истинности для других элементарных функций — «$p \wedge q$», «$p \vee q$» и т. д.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Смысл этих таблиц сразу делается понятным, если буквы «И» и «Л» соответственно принять за сокращенное обозначение слов: «истинное высказывание» и «ложное высказывание». Например, во второй строчке второй таблицы, в местах, расположенных под заголовками «p», «q» и «$p \rightarrow q$», мы соответственно обнаруживаем буквы «Л», «И» и «И». Из этого мы делаем вывод, что высказывание, полученное из импликации

«$p \to q$» истинно, если вместо «p» подставить любое ложное высказывание, а вместо «q» — любое истинное; это, очевидно, целиком согласуется с замечаниями, сделанными в параграфе 8. Переменные «p» и «q», встречающиеся в таблицах, могут, разумеется, быть заменены всякими другими переменными.

С помощью двух вышеприведенных таблиц, называемых *основными таблицами истинности*, мы можем построить *производные таблицы истинности* для всякой сложной функции-высказывания. Например, таблица для функции «$(p \vee q) \to (q \wedge r)$» выглядит так:

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \to (p \wedge r)$
И	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	Л	Л
И	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	Л	Л	И
И	И	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	И.

Чтобы объяснить построение этой таблицы, рассмотрим хотя бы ее пятую горизонтальную строку (под заголовками). Подставляем истинные высказывания вместо «p» и «q» и ложное высказывание — вместо «r». Согласно второй основной таблице, мы тогда получаем, что «$p \wedge q$» — истинное высказывание, а «$p \vee r$» — ложное высказывание. Вся функция «$(p \vee q) \to (p \wedge r)$» оказывается тогда импликацией, в которой антецедент — истинный, а консеквент — ложный; затем, опять-таки с помощью второй основной таблицы (в которой, в данном случае, рассматриваем «$p \vee q$» и «$p \wedge r$» в качестве выражений, заменяющих наши «p» и «q», мы приходим к заключению, что эта импликация является ложным высказыванием.

Горизонтальные ряды таблицы, состоящие из символов «И» и «Л», называются *строками* таблицы, а вертикальные ряды — **столбцами**. Каждая строка или, точнее, та часть каждой строки, которая расположена налево от вертикальной черты, представляет известную подстановку истинных или ложных высказываний вместо переменных. При построении матрицы данной функции мы заботимся о том, чтобы рассмотреть все возможные способы, которыми комбинация символов «И» и «Л» может быть соотнесена с переменными; и, разумеется, мы никогда не пишем в таблице две строки, которые не отличались бы друг от друга либо числом, либо порядком символов «И» и «Л». Затем, можно легко убедиться, что число строк в таблице простейшим образом зависит от числа различных переменных, встречающихся в функции; если функция содержит 1, 2, 3,... переменных разного вида, ее матрица состоит из $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$,... строк. Число же колонок равно числу частных функций-высказываний различного вида содержащихся в данной функции (причем и целая функция также включается в число ее частных функций).

Теперь мы в состоянии сказать, как можно определить, истинно или нет какое-либо высказывание из исчисления высказываний. Как мы знаем, в исчислении высказываний нет внешней разницы между высказываниями и функциями-высказываниями, ибо единственная разница заключается в том, что к выражениям, рассматриваемым как высказывания, всегда мысленно добавляется универсальный квантор. Для того чтобы узнать, истинно ли данное высказывание, мы обращаемся с ним в данном случае как с функцией-высказыванием и строим для него таблицу истинности. Если в последней колонке этой таблицы не встречается символ «Л», тогда каждое высказывание, могущее быть полученным из рассматриваемой функции при помощи подстановки, будет истинным, и, следовательно, наше первоначальное универсальное высказывание (полученное из функции-высказывания при помощи мысленно предпосылаемого ему универсального квантора) — также истинно. Если же последняя колонка заключает в себе хотя бы один знак «Л», наше высказывание ложно.

Так, например, мы видели, что в матрице, построенной для функции «$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$», знак «Л» встречается четыре раза в последней колонке. Если бы, следовательно, рассматривать это выражение как высказывание (т. е., если предпосылать ему слова «*при всяком* p, q и r»), мы получили бы ложное высказывание. С другой стороны, при помощи метода таблиц истинности можно легко проверить, что все законы исчисления высказываний, установленные в разделе 12, как-то: законы упрощения, тождества и т. д., суть истинные высказывания. Например, таблица для закона упрощения:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

будет выглядеть так:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
И	И	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	Л	И
Л	Л	Л	И

Мы даем здесь несколько других важных законов исчисления высказываний, истинность которых может быть установлена подобным же образом:

$$\sim[p \wedge (\sim p)], \qquad p \vee (\sim p),$$

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p, \qquad (p \vee p) \leftrightarrow p,$$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p), \qquad (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p),$$

$$[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r], \qquad [p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r].$$

Два закона, данные в первой строке, называются *законом противоречия* и *законом исключенного третьего*; затем идут *два закона тавтологии* (для логического умножения и сложения), после них следуют два *коммутативных закона* и, наконец, два *ассоциативных закона*. Легко видеть, насколько темным становится смысл этих двух последних законов, если попробовать выразить их обычным языком. Это ясно показывает ценность логической символики как точного инструмента для выражения более сложных мыслей.

∗ Бывают случаи, когда метод матриц заставляет нас принять за истинные такие высказывания, истинность которых казалась далекой от очевидности до применения этого метода. Вот несколько примеров высказываний подобного рода:

$$p \longrightarrow (q \longrightarrow p),$$
$$(\sim p) \longrightarrow (p \longrightarrow q),$$
$$(p \longrightarrow q) \vee (q \longrightarrow p).$$

Отсутствие у этих высказываний непосредственной очевидности зависит, главным образом, от того обстоятельства, что в них мы встречаемся с импликацией, характерной для новой логики, а именно с импликацией в материальном ее значении [13].

Эти высказывания приобретают особенно парадоксальный характер, если при выражении их словами обычной речи заменить импликации формулировками, содержащими, например, слово *«следует»,* т. е., если придать им такую форму:

если p истинно, тогда p следует из всякого q (другими словами: *истинное высказывание следует из всякого высказывания*);

если p ложно, то из p следует всякое q (другими словами: *из ложного высказывания следует каждое высказывание*);

для всякого p и q, или p следует из q, или q следует из p (другими словами: по крайней мере, одно из каждых двух высказываний следует из другого).

В такой формулировке эти положения часто были причиной недоразумений и поверхностных споров. Этим целиком подтверждаются замечания, сделанные в конце параграфа 9 ∗.

4. Применение законов исчисления высказываний при выводе

Почти все рассуждения во всякой научной области основаны, явно или неявно, на законах исчисления высказываний; попробуем объяснить при помощи примера, каким образом это происходит.

При наличии высказывания, имеющего форму импликации, мы, кроме конверсии, о которой уже говорили в параграфе 10, можем образовать следующие два высказывания: инверсное высказывание, или инверсию данного высказывания, и контрапозитивное высказывание. Инверсное высказывание получается при замене и антецедента и консеквента данного высказывания их отрицаниями. Контрапозитивное высказывание — в результате взаимной замены антецедента и консеквента и в инверсном высказывании; контрапозитивное высказывание является, таким образом, конверсией инверсного высказывания, а также инверсией конверсного высказывания. Конверсное, инверсное и контрапозитивное высказывания вместе с первоначальным высказыванием составляют, так называемые, сопряженные высказывания. В качестве иллюстрации можно рассмотреть следующее условное высказывание:

(I)

если x — положительное число, то $2x$ — положительное число,

и образовать его три сопряженных высказывания:

если $2x$ — положительное число, то x — положительное число,

если x — не положительное число, то $2x$ — не положительное число,

если $2x$ — не положительное число, то x — не положительное число.

В этом частном примере все сопряженные высказывания, полученные из истинного высказывания, оказываются тоже истинными. Но это совсем необязательно; вполне возможно, что не только конверсное высказывание (как уже указывалось в параграфе 10), но также инверсное высказывание окажется ложным, хотя первоначальное высказывание истинно; чтобы убедиться в этом, достаточно в вышеприведенных высказываниях поставить «x^2» вместо «$2x$».

Таким образом, мы убедились, что из истинности импликации мы не можем сделать никаких определенных выводов относительно истинности конверсного или инверсного высказывания. Совершенно иначе обстоит дело с четвертым сопряженным высказыванием; если только импликация истинна, то же относится и к соответствующему контрапозитивному высказыванию. Это можно подтвердить многочисленными примерами и выразить в виде общего закона исчисления высказывания, а именно закона транспозиции или контрапозиции.

Чтобы точно сформулировать этот закон, заметим, что каждой импликации может быть придана схематическая форма:

если p, то q;

конверсное, инверсное и контрапозитивное высказывания примут такой вид:

если q, то p; если не p, то не q; если не q, то не p.

Закон контрапозиции, согласно которому из всякого условного высказывания следует соответствующее контрапозитивное высказывание, может быть, следовательно, сформулирован таким образом:

если: если p, то q, то: если не q, то не p.

Во избежание нагромождений слов *«если»*, полезно делать легкое изменение в формулировке:

(II) *из: если p, то q следует, что: если не q, то не p.*

Теперь нам нужно показать, как при помощи этого закона мы можем из положения, имеющего форму импликации, например, из положения (I), вывести его контрапозитивное положение. (II) применяется к любым высказываниям *«p»* и *«q»* и, следовательно, сохраняет силу, если заменить *«p»* и *«q»* выражениями:

x — положительное число

и

2x — положительное число.

Переместив по стилистическим соображениям слово *«не»*, мы получим:

(III) *из: если x — положительное число, то 2x — положительное число, следует, что: если 2x — не положительное число, то x — не положительное число.*

Теперь сравним (I) и (III): (III) имеет форму импликации, причем (I) является ее антецедентом. Раз вся импликация, равно как и ее антецедент, были признаны истинными, консеквент импликации должен так же быть признан истинным; но это-то и есть рассматриваемое нами контрапозитивное положение.

(IV) *если 2x — не положительное число, то x — не положительное число.*

Всякий, кто знает закон контрапозиции, может таким образом установить истинность контрапозитивного высказывания при том условии, если предварительно им доказана истинность первоначального высказывания. Далее, как можно легко убедиться, инверсное высказывание контрапозитивно по отношению к конверсии первоначального высказывания (т. е. инверсное высказывание может быть получено из конверсного высказывания при помощи замены антецедента и консеквента их отрицаниями и последующей перемены их местами); в силу этого, если конверсия данного высказывания была доказана, то можно также считать, что и инверсное высказывание также доказано. Значит, если удалось доказать истинность двух высказываний — первоначального и конверсного,— то для двух остальных сопряженных высказываний специальное доказательство излишне.

Надо заметить, что известно несколько вариантов закона контрапозиции; один из них — конверсия положения (II):

из: если не q, то не p — следует, что: если p, то q.

Эта форма закона делает возможным выводить первоначальное высказывание из контрапозитивного и инверсное высказывание из конверсного.

15. Правила вывода, полные доказательства

Рассмотрим теперь несколько подробнее самую механику доказательства, при помощи которого было выведено высказывание (IV) в предшествующем разделе. Помимо правил определения, о которых мы уже говорили, имеются и другие правила подобного же характера, а именно — п р а в и л а в ы в о д а, или п р а в и л а д о к а з а т е л ь с т в а. Эти правила, кои не следует смешивать с законами логики, заключаются в указаниях, каким образом высказывания, истинность которых известна, могут быть видоизменены, чтобы дать при этом новые истинные высказывания. В вышеприведенном доказательстве были применены два правила доказательства: п р а в и л о п о д с т а н о в к и и п р а в и л о о т д е л е н и я, известное также как правило «modus ponens».

Смысл правила подстановки следующий. Если высказывание универсального характера, уже признанное за истинное, заключает в себе переменные высказывания, то, заменяя эти переменные другими переменными высказываниями или функциями-высказываниями, или высказываниями, причем равные выражения везде заменяются соответствующими равными выражениями, мы получим также истинное высказывание. Применяя именно это правило, мы и получили высказывание (III) из высказывания (II). Следует подчеркнуть, что правило подстановки можно также применить и к другим видам переменных, например, к переменным «x», «y»,..., обозначающим числа; вместо этих переменных могут быть подставлены любые знаки или выражения, обозначающие числа.

✳ Данная здесь формулировка правила подстановки не вполне точна. Это правило относится к таким высказываниям, которые состоят из универсального квантора и функции-высказывания, а эта последняя заключает переменные, связанные универсальным квантором. Если нам требуется применить правило подстановки, мы устраняем квантор, а вместо переменных, прежде связанных этим квантором, подставляем или другие переменные, или целые выражения (например, функции-высказывания или высказывания вместо переменных «p», «q», «r»,..., и выражения, обозначащие числа вместо переменных «x», «y», «z», ...); всякие другие связанные переменные, которые могут оказаться в функции-высказывании, остаются неизменными, и надо следить за тем, чтобы не оказалось в подставляемых выражениях переменных, совпадающих с ними по форме; в случае необходимости, перед выражением, которое получено таким способом, ставится универсальный квантор, с тем чтобы обратить это выражение в высказывание. Применяя, например, закон подстановки к высказыванию:

для всякого числа x существует число y, при котором

$$x + y = 5,$$

мы можем получить следующее высказывание:

имеется число y, при котором $3 + y \quad 5$,

но можем получить также и высказывание:

для всякого числа z имеется такое число y, при котором $z^2 + y = 5$;

таким образом, в данном случае мы делаем подстановку только для «x», а «y» оставляем без изменений. Нельзя, однако, вместо «*x*» подставить какое-либо выражение, содержащее «*y*», ибо при всей истинности нашего первоначального высказывания, мы можем таким путем притти к ложному высказыванию. Например, при подстановке «3—*y*» мы получим:

имеется такое число y, при котором

$$(3-y)+y=5.$$ *[14]

Правило отделения устанавливает, что если истинны два высказывания, из которых одно имеет форму импликации, а другое является антецедентом этой импликации, то и высказывание, составляющее консеквент импликации, истинно. (Мы, так сказать, «отделяем» антецедент от всей импликации.) При помощи этого правила из высказываний (III) и (I) было выведено высказывание (IV).

Как можно было видеть при доказательстве высказывания (IV), данного выше, каждый шаг доказательства состоял в применении правила инференции к высказываниям, истинность которых была либо дана предварительно, либо установлена. Доказательство подобного рода мы будем называть полным. Несколько точнее полное доказательство может быть охарактеризовано следующим образом. Оно состоит в построении цепи высказываний, обладающих такими свойствами: начальными членами являются высказывания, предварительно уже принятые за истинные; все последующие члены могут быть получены из предшествующих посредством правил вывода; и, наконец, последним членом является высказывание, которое требуется доказать.

Следует отметить, какую чрезвычайно элементарную форму, с точки зрения психологической, приобретают все математические рассуждения благодаря знанию и применению законов логики и правил вывода; сложные умственные процессы целиком могут быть сведены к выполнению таких простых требований, как внимательное соблюдение положений, ранее принятых за истинные, учет структурных, чисто внешних соотношений между этими положениями и выполнение механических видоизменений согласно предписаниям правил инференции. Очевидно, что при подобной процедуре возможность ошибок в доказательстве сводится к минимуму [15].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте примеры специфических математических выражений из области арифметики и геометрии.

2. В следующих двух высказываниях разграничьте специфические математические выражения и выражения, принадлежащие к области логики:

(a) *для всяких чисел x и y, если $x>0$ и $y<0$, имеется такое число z, что $z<0$ и $x=yz$;*

(b) *для любого положения точек A и B имеется точка C, которая лежит между A и B и находится на таком же расстоянии от A, как и от B.*

3. Образуйте конъюнкцию отрицаний следующих функций высказываний:

$$x<3$$

и

$$x>3.$$

Какое число удовлетворяет этой конъюнкции?

4. В каком из своих двух значений слово *«или»* встречается в следующих высказываниях:

(a) *два пути лежали перед ним: предать свою родину или умереть;*

(b) *если я заработаю кучу денег или выиграю пари, я отправлюсь в длительное путешествие.*

Дайте другие примеры употребления слова «или» в его первом или его втором значении.

* 5[16]. Рассмотрите следующие условные высказывания:

(a) *если сегодня понедельник, то завтра — вторник;*

(b) *если сегодня понедельник, то завтра — суббота;*

(c) *если сегодня понедельник, то 25 декабря — рождество;*

(d) *если бы желания были лошадьми, то нищие могли бы ездить верхом;*

(e) *если число* x *делится на* 2 *и* 6, *то оно делится на* 12;

(f) *если* 18 *делится на* 3 *и на* 4, *то* 18 *делится на* 6.

Какие из приведенных выше импликаций истинны, а какие ложны с точки зрения математической логики? В каких случаях вопрос о значимости и об истинности или ложности не вызывает никаких сомнений с точки зрения обычной речи? Обратите особое внимание на высказывание (b) и исследуйте вопрос о его истинности в зависимости от дня недели, когда оно было высказано.

6. Облеките следующие теоремы в форму обычных условных высказываний.

(a) *Для того чтобы треугольник был равносторонним, достаточно, чтобы его углы были равны;*

(b) *условие:* x *делится на* 3 — *необходимо для того, чтобы* x *делилось на* 6.

Придайте этим двум высказываниям еще другую словесную форму.

7. Необходимо или достаточно условие:

$$x \cdot y > 4$$

для того, чтобы имело место:

$$x > 2 \text{ и } y > 2?$$

8. [17] Дайте альтернативные формулировки для следующих высказываний:

(a) x *делится на* 10, *если, и только если,* x *делится и на* 2 *и на* 5.

(b) *для того чтобы четыреугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения его диагоналей делила каждую из этих диагоналей пополам.*

Дайте другие примеры теорем из области арифметики и геометрии, имеющие форму эквивалентности.

9. Какие из следующих высказываний истинны:

(a) *треугольник является равнобедренным, если, и только если, высоты треугольника равны;*

(b) *для того чтобы* $x \neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* x^2 *было положительным числом;*

(c) *из того, что четыреугольник является квадратом, следует, что все его углы — прямые, и обратно;*

(d) *для того чтобы* x *делилось на* 8, *необходимо и достаточно чтобы* x *делилось и на* 4 *и на* 2?

10. Считая термины *«натуральное число»* и *«произведение»* (или, соответственно, *«частное»*) уже известными, постройте определение термина *«делимый»*, выразив его в форме эквивалентности:

мы говорим, что x *делимо на* y, *если, и только* если, ...

Подобным же образом сформулируйте определение термина *«параллельный»*. Какой термин для этой цели должен быть предположен известным?

11 [18]. Переведите следующие символические выражения на обычный язык:

(a) $$[(\sim p) \longrightarrow p] \longrightarrow p,$$

(b) $$[(\sim p) \vee q] \longleftrightarrow (p \longrightarrow q),$$

(c) $$[\sim (p \vee q)] \longleftrightarrow (p \longrightarrow q),$$

(d) $$(\sim p) \vee [q \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)].$$

Обратите особое внимание на трудность различения в обычном языке трех последних выражений.

12. Сформулируйте следующие выражения при помощи логической символики.

(a) *если не* p *и не* q, *то неверно, что* p *или* q;

(b) *если из* p *следует, что из* q *следует* r, *то из* p и q *следует* r;

(c) *если* r *следует из* p *и если* r *следует из* q, *то* r *следует из* p *или* q.

13. Постройте таблицы истинности для всех функций-высказываний, данных в упражнениях 11 и 12. Предположите, что мы принимаем эти функции за высказывания (что это означает?), и определите, какие из этих высказываний истинны и какие ложны.

14. Докажите методом таблиц истинности, что следующие высказывания истинны:

(a) $$[\sim(\sim p)] \longleftrightarrow p,$$

(b) $$[\sim(p \wedge q)] \longleftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)],$$

$$[\sim(p \vee q)] \longleftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)],$$

(c) $$[p \wedge (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)],$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)].$$

Высказывание (a) — это закон двойного отрицания, высказывания (b) называются законами де Моргана*, а высказывания (c) — дистрибутивные законы (для логического умножения по отношению к сложению и для логического сложения по отношению к умножению).

15. Для каждого из следующих высказываний установите три соответствующих сопряженных высказывания (конверсное, инверсное и контрапозитивное):

(a) *из того, что x — положительное число, следует, что x есть отрицательное число;*

(b) *если четыреугольник является прямоугольником, то вокруг него можно описать окружность.*

Какие из сопряженных высказываний истинны? Дайте пример четырех сопряженных высказываний, которые были бы все ложными.

16. Объясните, основываясь на таблице истинности для функции «$p \longleftrightarrow q$», почему, если во всяком высказы-

---

* Эти законы установлены А. де Морганом (A. de Morgan), 1806—1878, выдающимся английским логиком.

вании некоторые из его частей, также являющиеся высказываниями (или функциями-высказываниями), заменить эквивалентными высказываниями, то все новое полученное таким способом высказывание эквивалентно первоначальному высказыванию. Некоторые из наших положений и замечаний в параграфе 10 основывались на этом обстоятельстве; покажите, когда это было.

17[19]. Рассмотрите следующие два высказывания:

(a) *из: если p, то q, следует, что: если q, то p;*

(b) *из: если p, то q, следует, что: если не p то не q.*

Если предположить эти высказывания логическими законами, можно ли было бы применять их в математических доказательствах аналогично закону контрапозиции (см. параграф 14)? Какие сопряженные высказывания можно было бы получить из всякой данной импликации? Можно ли, следовательно, предположить, что высказывания (a) и (b) — истинны?

18. Подтвердите вывод, сделанный в упражнении 17, применив метод таблиц истинности к высказываниям (a) и (b).

19. Рассмотрите следующие два утверждения:

из того, что вчера был понедельник, следует, что сегодня — вторник;

из того, что сегодня — вторник, следует, что завтра — среда.

Какое утверждение может быть из них выведено в соответствии с законом гипотетического силлогизма (см. параграф 12)?

✳ 20. Изложите полное доказательство утверждения, полученного в предшествующем упражнении; используйте упомянутые там утверждения и закон гипотетического силлогизма и примените, в дополнение к правилу подстановки и правилу отделения, следующее правило инференции: если любые два высказывания приняты за истинные, то их конъюнкция должна быть признана истинной.

III

О ТЕОРИИ ТОЖДЕСТВА

16. Логические понятия вне области исчисления высказываний; понятие тождества

Исчисление высказываний, которому была посвящена предшествующая глава, составляет только часть логики. Оно, несомненно, образует самую основную часть, по крайней мере постольку, поскольку мы пользуемся терминами и законами этого исчисления при определении терминов и при формулировке и доказательстве логических законов, не принадлежащих к исчислению высказываний. Все же, исчисление высказываний само по себе еще не составляет достаточного базиса для обоснования других наук и, в частности, математики; в математических определениях, теоремах и доказательствах постоянно встречаются различные понятия из других областей логики. Некоторые из них будут подвергнуты рассмотрению в настоящей главе и в двух следующих.

Среди логических понятий, не принадлежащих к исчислению высказываний, понятие т о ж д е с т в а или р а в е н с т в а, быть может, имеет наибольшее значение. Оно встречается в таких выражениях, как:

x тождественно y,

x — то же, что и y,

x равно y.

Всем этим трем выражениям приписывается один и тот же смысл. В целях краткости они будут заменяться символическим выражением:

$$x = y.$$

Вместо того чтобы писать:

x не тождественно y

или:

x отлично от y,

мы употребляем формулу:

$$x \neq y.$$

Общие законы, к которым относятся вышеприведенные выражения, составляют часть логики, которую можно назвать теорией тождества.

17. Основные законы теории тождества

Среди логических законов, рассматривающих понятие тождества, самый основной — следующий:

I. *$x = y$, если, и только если, x обладает каждым свойством, которым обладает y,* а *y обладает каждым свойством, которым обладает x* [20].

Мы можем также выразить это проще:

$x = y$, если, и только если, все свойства x и *y — общие.*

Известны также другие, быть может, более ясные, хотя менее точные, формулировки того же закона, например:

$x = y$, если, и только если, все, что может быть сказано относително одного из предметов x и *y, может быть также сказано и относительно другого.*

Закон I был установлен Лейбницем*, хотя в несколько иных терминах, и поэтому может быть назван законом Лейбница. Он имеет форму эквивалентности и помогает нам формулу:

$$x = y,$$

которая составляет левую часть эквивалентности, заменить ее правой частью, т. е. выражением, уже не содержащим знака равенства. По отношению к своей форме закон этот, следовательно, может рассматриваться как определение знака «$=$», и так он и рассматривался самим Лейбницем. (Разумеется,

---

* См. подстрочное примечание на стр. 48

рассматривать здесь закон Лейбница как определение имело бы смысл только в том случае, если бы значение знака «=» казалось нам менее очевидным, чем значение таких выражений в правой стороне формулировки закона, как *«x обладает каждым свойством, которым обладает y»*; см. параграф 11.)

Из закона Лейбница вытекает следующее правило, имеющее большое практическое значение: если в том или ином контексте дано как утверждение или доказано, что $x = y$, то в любой формуле или высказывании, встречающихся в этом контексте, можно заменять знак «x» знаком «y» и обратно (так как каждая формула или суждение, содержащее знак «x», выражает свойство предмета x или утверждает что-либо относительно x). Разумеется, если x встречается в какой-либо формуле в нескольких местах, оно может быть в некоторых местах оставлено без изменения, а в некоторых заменено через «y», так что есть существенная разница между расматриваемым нами правилом и рассмотренным в параграфе 15 правилом подстановки, не допускающим подобных частичных замен одного знака другим.

Из закона Лейбница можно вывести много других законов, относящихся к теории тождества, которые часто применяются в различных рассуждениях и особенно в математических доказательствах. Здесь будут приведены наиболее значительные из них вместе с кратким их доказательством, для того чтобы показать на конкретных примерах, что между рассуждениями в области логики и рассуждениями в области математики нет существенной разницы.

II. *Всякий предмет равен самому себе:* $x = x$.

Доказательство. Подставим в формулировке закона Лейбница «x» вместо «y»; тогда мы получим:

$x = x$, если, и только если, x обладает всеми свойствами, которыми обладает x, и x обладает всеми свойствами, которыми обладает x.

Мы можем, конечно, упростить это высказывание, отбросив его последнюю часть: *«и x обладает...»* (это следует непосредственно из закона тавтологии, установленного в параграфе 12). Высказывание принимает тогда такой вид:

$x = x$, если, и только если, x обладает всеми свойствами, которыми обладает x.

Очевидно, что правая часть этой эквивалентности всегда истинна (ибо, согласно закону тождества по параграфу 12, если x обладает каким-либо свойством, то оно обладает этим свойством). Отсюда следует, что и левая часть эквивалентности должна быть истинна: другими словами, всегда:

$$x = x,$$

что и требовалось доказать.

III. *Если $x = y$ то $y = x$.*

Доказательство. Заменив, согласно закону Лейбница, «x» через «y» и «y» через «x», мы получаем:

$y = x$, если, и только если, y обладает всеми свойствами, которыми обладает x, и x обладает всеми свойствами, которыми обладает y.

Сравним это высказывание с первоначальной формулировкой закона Лейбница. Здесь имеются две эквивалентности, правые части которых представляют собой конъюнкции, отличающиеся только порядком своих членов. Следовательно, правые части эквивалентны (см. коммутативный закон логического умножения в параграфе 12),— и левые части, т. е. формулы:

$$x = y \text{ и } y = x$$

должны, следовательно, быть также эквивалентными. A fortiori мы можем утверждать, что вторая из этих формул следует из первой, как это установлено в нашем законе.

IV. *Если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$.*

Доказательство. Предположим, что две формулы:

(1) $$x = y$$

и

(2) $$y = z$$

истинны. Согласно закону Лейбница, из формулы (2) следует, что все, что может быть сказано относительно y, может быть также сказано относительно z. Следовательно, мы можем в формуле (1) заменить переменную «y» через «z» и получим требуемую формулу:

$$x = z\text{[21]}.$$

V. *Если $x = z$ и $y = z$, то $x = y$;* другими словами, *два предмета, равные одному и тому же предмету, равны друг другу.*

Этот закон может быть доказан совершенно аналогично предшествующему (он может также быть выведен из законов III и IV без обращения к закону Лейбница).

Законы II, III и IV называются также законами рефлексивности, симметрии и транзитивности для отношения тождества.

18. Тождество предметов и тождество их обозначений; применение кавычек

* Хотя значение таких выражений, как:

$$x = y \text{ или } x \neq y$$

кажется очевидным, эти выражения иногда ведут к недоразумениям. Кажется явным, например, что формула:

$$3 = 2 + 1$$

является верным утверждением, а все же некоторые иногда сомневаются в его истинности. По их мнению, эта формула кажется утверждающей, что символы «3» и «$2+1$» — тождественны, а это несомненно ложно, так как у этих символов совершенно разное начертание, и, следовательно, неверно, что все, что можно сказать относительно одного из этих символов, можно сказать и относительно другого (например, первый символ состоит из одного знака, а второй — не из одного).

Чтобы избежать сомнений подобного рода, полезно усвоить один общий и важный принцип, на котором основано целесообразное употребление любого языка. Согласно этому принципу, если мы в нашем высказывании хотим сказать что-либо относительно того или иного предмета, нам приходится пользоваться в этом высказывании не самим предметом, а его названием или обозначением.

Применение этого принципа не дает повода к сомнениям, если только предмет, о котором идет речь, не представляет собой слова, символа или, чаще, какого-либо выражения на данном языке. Представим себе, например, что перед нами маленький синий камень и что мы устанавливаем следующее высказывание:

этот камень — синий.

Никому, вероятно, не вздумается заменить в этом высказывании слова *«этот камень»,* служащие здесь обозначением предмета, самим предметом, т. е., вычеркнуть или вырезать эти слова и на их место вставить камень. Ведь поступая таким образом, мы получим целое, состоящее частично из камня и частично из слов, а значит — нечто, уже не являющееся языковым выражением, а тем более — истинным высказыванием.

Тем не менее, этот принцип часто нарушается, когда подлежащий обсуждению предмет оказывается словом или символом. А ведь соблюдение этого принципа необходимо и в таком случае, ибо, в противном случае, мы получили бы целое, которое, хотя и будет языковым выражением, не выражало бы нужную нам мысль, а часто оказывалось бы бессмысленным сочетанием слов. Рассмотрим, например, следующие два слова:

хорошо, *Мария.*

Несомненно, первое состоит из шести букв, а второе есть собственное имя. Но представим себе, что мы хотели бы выразить эти мысли, вполне правильные, следующим образом:

(I) *хорошо состоит из шести букв:*

(II) *Мария — собственное имя;*

нам надо было бы, говоря о словах, пользоваться самими словами, а не их названиями. Рассматривая же более внимательно выражения (I) и (II), мы должны признать, что первое совсем не высказывание, потому что подлежащее может быть только именем существительным, но не наречием, второе же, хотя и может рассматриваться как значимое высказывание, но во всяком случае, только как ложное, ибо никакая женщина не может быть собственным именем.

Во избежание подобных затруднений мы должны установить, что слова *«хорошо»* и *«Мария»* встречаются в таком контексте, как (I) и (II), в значении, отличном от обычного, и что они здесь выполняют функции своих собственных названий. Обобщая эту точку зрения, мы должны были бы признать, что каждое слово может временами выполнять функцию собственного своего названия; пользуясь терминологией средневековой логики, мы можем сказать, что в подобном случае слово употребляется in suppositio materialis в противоположность своему употреблению in suppositio formalis, т. е. в своем обыкновенном значении. Следовательно, каждое слово обычного или научного языка должно бы обладать по крайней мере двумя различными смыслами, и не пришлось бы далеко искать примеры таких положений, когда возникли бы серьезные сомнения, какой именно смысл в данном случае подразумевается. С такими последствиями мы не хотим мириться, вот почему мы считаем нужным взять за правило, чтобы каждое выражение отличалось (по крайней мере в письменном виде) от своего наименования.

Возникает вопрос, каким способом образовывать названия слов и выражений. Возможны различные способы. Самый простой из них основывается на принятом обыкновении образовывать название какого-либо выражения, заключая это выражение в кавычки. На основе этого допущения мысли, которые должны были быть выражены в (I) и (II), могут теперь облечься в точную и недвусмысленную форму, а именно:

(I′) *«хорошо» состоит из шести букв;*

(II′) *«Мария» — собственное имя.*

В свете этих замечаний, рассеиваются какие-либо сомнения относительно смысла и истинности таких формул, как:

$$3 = 2 + 1$$

Эта формула содержит символы, обозначающие известные числа, но она не содержит названий каких-либо подобных символов. Вот почему эта формула устанавливает нечто относительно чисел, но не относительно символов, обозначающих числа; числа 3 и 2 + 1 явно равны, так что формула эта является правильным утверждением. Мы можем, допустим, заменить эту формулу каким-либо эквивалентным высказыванием, в котором будет речь о символах,— например, мы можем сказать, что символы «3» и «2 + 1» обозначают одно и то же число. Но тут никоим образом не подразумевается, что сами символы тождественны, ибо хорошо известно, что один и тот же предмет, и в частности, одно и то же число, может иметь несколько различных обозначений. Символы «3» и

«2 + 1», несомненно, различны, и это обстоятельство может быть выражено в виде новой формулы:

$$«3» \neq «2+1»,$$

которая, конечно, никоим образом не противоречит ранее установленной формуле * [22].

19. Равенство в арифметике и геометрии и его отношение к логическому тождеству

Здесь мы рассматриваем понятие арифметического равенства чисел, как особый случай общего понятия логическото тождества. Однако надо оговориться, имеются математики, которые, в противоположность принятой здесь точке зрения, не отождествляют символа «=», встречающегося в арифметике, с символом логического тождества; они не считают, что равные числа непременно тождественны, и поэтому рассматривают понятие числового равенства как специфически арифметическое понятие. В связи с этим некоторые математики отвергают закон Лейбница в его общей форме и признают только некоторые из его следствий менее общего характера, включая их в число специфически математических теорем. В эти следствия входят

---

* Условие, касающееся употребления кавычек, соблюдается в этой книге почти повсеместно. Мы отступаем от него только в редких случаях, уступая принятому обыкновению. Например, мы даем формулы и высказывания без кавычек, если они выделяются в особую строку или если они встречаются в формулировке математических или логических теорем; мы не берем в кавычки выражения, которым предшествуют такие слова как, «называется», «известно, что» и т. д. Но в подобных случаях принимаются другие меры предосторожности: перед таким выражением часто стоит двоеточие, а само оно печатается другим шрифтом. Следует заметить, что кавычки в повседневном языке употребляются и в других случаях, не предусмотренных приведенными выше условиями; примеры этого можно найти и в настоящей книге.

законы II — V параграфа 17, а также теоремы, устанавливающие, что, если $x = y$ и если x удовлетворяет какой-либо формуле, построенной только из арифметических символов, то и y удовлетворяет той же формуле; такова, например, теорема:

$$\textit{если } x = y \text{ и } x < z, \text{ то } y < z.$$

По нашему мнению, эта точка зрения не может претендовать на особые теоретические преимущества, потому что на практике она приводит к значительному усложнению при изложении системы арифметики; ибо отвергается общее правило, которое разрешает нам заменять x при помощи y на том основании, что $x = y$, и поскольку подобные преобразования бывают необходимы для многих аргументов, возникает необходимость в каждом случае их применения давать специальное доказательство того, что это преобразование допустимо в рассматриваемом случае[23].

Чтобы иллюстрировать это положение, рассмотрим какую-либо систему равенства с двумя переменными, например:

$$x = y^2$$

$$x^2 + y^2 = 2x - 3y + 18.$$

Если решать эту систему равенств при помощи так называемого метода подстановки, надо составить новую систему равенств, оставив первое равенство без изменений. а во втором равенстве повсюду, заменив «x» на «y^2». Тут возникает вопрос, допустимо ли подобное преобразование, т. е. эквивалентна ли новая система старой. Ответ, несомненно, должен быть положительным независимо от принятого толкования понятия числового равенства. Но если символ « = » понимается как обозначение логического тождества и если принять закон Лейбница, то ответ очевиден; поскольку

$$x = y^2,$$

допустимо везде заменять «x» на «y^2» и обратно. В противном случае было бы необходимо сначала привести доводы в пользу утвердительного ответа, и хотя такое обоснование не встретило бы каких-либо существенных трудностей, оно, во всяком случае, было бы длинным и скучным.

Что же касается понятия равенства в геометрии, здесь дело обстоит совершенно иначе. Если говорится, что две геометрические фигуры, например два отрезка прямой, два угла или два многоугольника, равны или конгруэнтны, то вообще под этим не подразумевается установление их тождества. Хотят лишь указать, что у двух фигур один и тот же размер и форма, другими словами, если пользоваться образным, хотя и не совсем точным выражением, что они совершенно совпали бы друг с другом, если бы одну из них наложить на другую. Так, например, у треугольника могут быть две и даже три равных стороны и все же эти стороны не будут, конечно, тождественны. Но вместе с тем бывают случаи, когда вопрос касается не геометрического равенства двух фигур, а их логического тождества; например, в равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, и медиана, проведенная к этому основанию, не только геометрически равны друг другу, но попросту представляют собой один и тот же отрезок прямой. Поэтому, во избежание недоразумений, было бы желательно систематически избегать термина «равенство» во всех тех случаях, когда вопрос касается не логического тождества, и лучше называть геометрически равные фигуры конгруэнтными фигурами, заменяя, как это часто делается, символ «$=$» другим символом, например «$\cong$».

20. Численные кванторы

При помощи понятия тождества можно передать точный смысл некоторых выражений, которые и по своему содержанию, и по своей функции близко соприкасаются с универсальными и экзистенциальными кванторами и зачисляются также в разряд операторов, но обладают особым характером. Это, например, такие выражения, как:

существует по меньшей мере один, или *не больше, чем один*, или *в точности один такой предмет, что...*

существуют по меньшей мере два, или *не больше, чем два*, или *в точности два таких предмета, что...*,

и т. д.; они могут быть названы **численными кванторами**. По видимости, в этих выражениях встречаются специфически математические термины, а именно числительные *«один»*, *«два»* и т. п. Более точный анализ обнаруживает, однако, что содержание этих выражений (если рассматривать их как единое целое) — чисто логической природы. Так, в выражении:

существует по меньшей мере один предмет, удовлетворяющий данному условию,

слова *«по меньшей мере один»* можно попросту опустить, не изменяя смысла. Выражение:

существует не больше, чем один предмет, удовлетворяющий данному условию,

означает то же, что:

при всяком x и y, если x удовлетворяет данному условию и если y удовлетворяет данному условию, x = y.

Высказывание:

существует всего лишь один предмет, удовлетворяющий данному условию,

эквивалентно конъюнкции из двух только что приведенных высказываний:

существует по меньшей мере один предмет, удовлетворяющий данному условию, и вместе с тем *существует не больше, чем один предмет, удовлетворяющий данному условию.*

Выражению:

существуют по меньшей мере два предмета, удовлетворяющих данному условию,

мы придаем следующее значение:

существуют x и y, при которых и x, и y удовлетворяют данному условию и $x \neq y$;

тем самым выражение это эквивалентно отрицанию следующего выражения:

имеется не более, чем один предмет, удовлетворяющий данному условию.

Аналогичным образом мы объясняем смысл других выражений этой категории.

Для иллюстрации можно привести здесь несколько истинных высказываний из области арифметики, в которых имеются численные кванторы:

существует только одно число x, при котором

$$x + 2 = 5;$$

существуют только два числа y, при которых $y^2 = 4$;
существуют по меньшей мере два числа z, при которых

$$z + 2 < 6.$$

Та часть логики, в которой изложены общие законы, касающиеся кванторов, известна под названием **теории связанных переменных**, или **функционального исчисления**, хотя, по существу, она должна была бы называться **исчислением кванторов**. До сих пор эта теория в основном имела дело с универсальными и экзистенциальными кванторами, а численных кванторов старались избегать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите закон V параграфа 17, пользуясь исключительно законами III и IV и не прибегая к закону Лейбница.

Указание: в законе V формулы:

$$x = z \text{ и } y = z$$

предполагаются истинными. В силу закона III переменуте местами переменные во второй из формул, а тогда примените закон IV.

2. Докажите следующий закон:

$$\textit{если } x = y,\ y = z \text{ и } z = t,\ \textit{то } x = t,$$

пользуясь исключительно только законом IV параграфа 17.

3. Истинны ли высказывания, полученные путем повсеместной замены символа «$=$» символом «$\neq$« в законах III и IV параграфа 17?

* 4. На основе условий, принятых в параграфе 18 и касающихся употребления кавычек, определите, какие из следующих выражений суть истинные высказывания:

(a) 0 — *целое число,*

(b) 0 — *цифра, имеющая овальную форму,*

(c) «0» — *целое число,*

(d) «0» — *цифра, имеющая овальную форму*

(e) $1{,}5 = \frac{3}{2}$,

(f) «1,5» = «$\frac{3}{2}$»,

(g) $2 + 2 \neq 5$,

(h) «2 + 2» $\neq$ «5»

✳ 5. Образуя наименование слова, мы заключаем это слово в кавычки; образуя наименование наименования, мы, в свою очередь, заключаем в кавычки наименование слова, а следовательно, само слово заключаем в двойные кавычки. Так, из следующих трех выражений:

Джон, «Джон», и ««Джон»»,

второе есть наименование первого, а третье есть наименование второго. Подставьте каждое из вышеприведенных трех выражений вместо «*x*» в каждую из следующих функций-высказываний и определите, какие из полученных при этом двенадцати высказываний истинны:

(a) *x—человек,*

(b) *x—человеческое имя,*

(c) *x—выражение,*

(d) *x—выражение, содержащее кавычки.*

✳ 6. В параграфе 9 мы привели различные формулировки условных высказываний, встречающихся в математических работах. Было также обращено внимание на то, что в некоторых из этих формулировок идет речь не относительно чисел или свойств чисел и т. п., но относительно выражений (т. е. высказываний и функций-высказываний). Из замечаний, сделанных в параграфе 18, следует, что последние формулировки требуют применения кавычек. Укажите формулировки и точные места в них, где требуются кавычки.

✳ 7[24]. На основе общего принципа, касающегося употребления названия предметов в высказываниях, устанавливающих нечто относительно этих предметов, мы можем теперь подвергнуть некоторой критике предпоследнее высказывание параграфа 12 («Как арифметические теоремы...»). Мы знаем, что переменные, встречающиеся в арифметике, замещают названия чисел. Замещаются ли переменными, встречающимися в исчислении высказываний, наименования высказываний или сами высказывания? Можем ли мы, следовательно, сказать, если хотим быть точными, что законы этого исчисления утверждают что-либо относительно высказываний и их свойств?

8. Рассмотрите треугольник со сторонами a, b и c. Допустите, что h_a $h_в$ и h_c высоты, опущенные на стороны a, b и c, m_a, $m_в$ и m_c — их медианы, и s_a $s_в$ и s_c биссектрисы углов треугольника. Если треугольник равнобедренный (с основанием a и равными сторонами b и c), то какие из двенадцати названных отрезков конгруэнтны (т. е. равны в геометрическом смысле), а какие — тождественны? Выразите ответы в виде формул, пользуясь символом « $\cong$ » для обозначения конгруэнтности и символом « $=$ » для обозначения тождественности.

Решите ту же задачу, допустив, что треугольник — равносторонний.

9. Объясните значение следующих выражений:

(a) *существует не более двух предметов, удовлетворяющих данному условию;*

(b) *существуют только два предмета, удовлетворяющие данному условию.*

10. Определите, какое из следующих высказываний истинно:

(a) *существует только одно число* x, *такое, что* $x + 3 = 7 - x$;

(b) *существуют только два числа* x, *таких, что* $x^2 + 4 = 4x$;

(c) *существует не больше двух чисел* y, *таких, что* $y + 5 < 11 - 2y$;

(d) *существуют по крайней мере три числа* z, *таких, что* $z^2 < 2z$;

(e) *для всякого числа* x *существует только одно число* y, *такое, что* $x + y = 2$;

(f) *для всякого числа* x *существует только одно число* y, *такое, что* $x \cdot y = 3$.

11. Как можно применить численные кванторы для обозначения того, что уравнение:

$$x^2-5x+6=0$$

имеет два корня?

12. Какие числа x удовлетворяют функции-высказыванию:

существуют только два числа y, при которых $x=y^2$?

Проведите в этой функции различие между свободными и связанными переменными.

* Связываются ли переменные численными кванторами? *

IV

О ТЕОРИИ КЛАССОВ ПРЕДМЕТОВ

21. Классы и их элементы

Кроме отдельных индивидуальных предметов, которые мы будем также называть, ради краткости, индивидуумами, логика рассматривает классы предметов[25]. Как в повседневной жизни, так и в математике под классами чаще всего понимаются множества. Арифметика, например, часто имеет дело с множествами чисел, а в геометрии наш интерес направлен не столько на отдельные точки, сколько на множества точек (а именно — на геометрические фигуры). Классы индивидуумов называются классами первой степени. Сравнительно реже мы сталкиваемся в наших исследованиях с классами второй степени, т. е. с классами, состоящими не из индивидуумов, а из классов первой степени. Иногда же приходится иметь дело с классами третьей, четвертой и т. д. степеней. Здесь мы будем заниматься почти исключительно классами первой степени, и только в виде исключения, например в параграфе 26, нам придется иметь дело с классами второй степени; тем не менее, наши рассуждения могут быть применены и к классам других степеней, практически не требуя изменений.

Чтобы соблюдать различия между индивидуумами и классами, а также между классами различных степеней, мы обозначаем переменные буквами различного начертания и принадлежащими к различным алфавитам. Принято такие индивидуальные предметы, как числа, обозначать малыми буквами латинского алфавита, а классы таких предметов прописными буквами латинского алфавита. В элементарной геометрии принято противоположное обозначение, при котором прописные буквы соответствуют точкам, а строчные буквы (латинского или греческого алфавита) — множествам точек.

Та часть логики, в которой рассматривается понятие класса и его общие свойства, называется теорией классов; иногда эта теория рассматривается и как независимая математическая дисциплина под названием о б щ е й т е о р и и м н о ж е с т в*.

В теории классов основная роль принадлежит таким выражениям, как:

предмет x — элемент (или *член*) *класса K*,
предмет x принадлежит к классу K,

класс K содержит в себе предмет x в качестве элемента (или *члена*);

мы считаем, что эти выражения имеют один и тот же смысл, и ради краткости заменяем их формулой:

$$x \in K.$$

Так, если I — множество всех целых чисел, то числа 1, 2, 3... — суть его элементы, между тем как числа $^2/_3$, $2^1/_2$... не принадлежат к данному множеству; следовательно, формулы:

$$1 \in \mathrm{I},\ 2 \in \mathrm{I},\ 3 \in \mathrm{I}, \ldots$$

истинны, а формулы:

$$^2/_3 \in \mathrm{I},\ 2^1/_2 \in \mathrm{I}, \ldots$$

ложны.

---

* Начатки теории классов, или, говоря точнее, той части этой теории, которую мы ниже назовем исчислением классов, имеются уже у Б у л я (G. Boole); см. подстрочное примечание на стр. 48. Подлинным создателем общей теории множеств как независимой математической дисциплины был великий немецкий математик К а н т о р (1845—1918); мы обязаны ему, в частности, анализом таких понятий, как мощность, равномощность, бесконечность и порядок, которые будут обсуждаться на протяжении настоящей и следующей глав. Канторовская теория множеств — одна из математических дисциплин, переживающих особенно интенсивное развитие. Ее идеи и направления мысли проникли почти во все отрасли математики и повсюду оказали самое действенное плодотворное влияние.

22. Классы и функции высказывания с одной свободной переменной

Рассмотрим функцию-высказывание с одной несвязанной переменной, например:

$$x > 0.$$

Если этой функции мы предпошлем слова:

(I) *множество всех чисел x, таких, что,*

то мы получим выражение:

множество всех чисел x, таких, что x>0.

Это выражение обозначает совершенно определенное множество, а именно множество всех положительных чисел: это — множество, включающее в себя в качестве элементов те, и только те числа, которые удовлетворяют данной функции. Если мы обозначим это множество символом «P», наша функция станет эквивалентной выражению:

$$x \in P.$$

Аналогичную процедуру мы можем применить ко всякой другой функции-высказыванию. В арифметике мы можем таким способом получить разнообразные множества чисел, например, множество всех отрицательных чисел или множество всех чисел, бо̀льших, чем 2, и меньших, чем 5 (т. е. удовлетворяющих функции «$x > 2$ и $x < 5$»). Эта процедура играет также значительную роль в геометрии, особенно в определении новых видов геометрических фигур; поверхность шара определяется, например, как множество всех точек пространства, лежащих на определенном расстоянии от данной точки. В геометрии принято вместо слов: *«множество всех точек»* употреблять выражение *«геометрическое место точек»*.

Теперь обобщим сделанные выше замечания. В логике установлено, что каждой функции-высказыванию, содержащей только одну несвязанную переменную, скажем — «*x*», соответствует один, и только один, класс, включающий в себя в качестве элементов те, и только те, предметы *x*, которые удовлетворяют данной функции. Мы получаем обозначение этого класса, предпосылая функции-высказыванию следующие слова, принадлежащие к основным выражениям теории классов:

(II) *класс всех предметов x, таких, что.*

Если мы, далее, обозначим упомянутый класс простым символом, скажем «С», то формула:

$$x \varepsilon C$$

будет для каждого *x* эквивалентна первоначальной функции-высказыванию.

Мы видели, следовательно, что каждая функция-высказывание, содержащая «*x*» в качестве единственной несвязанной переменной, может быть преобразована в эквивалентную функцию вида:

$$x \varepsilon K,$$

где на место «*K*» становится постоянная, обозначающая класс; поэтому можно рассматривать последнюю формулу как самую общую формулу функции-высказывания с одной несвязанной переменной.

Выражения (I) и (II) иногда заменяются символическими выражениями; мы можем, например, принять к употреблению для подобной цели следующий символ:

$$\underset{x}{C}\,.$$

* Рассмотрим теперь следующее выражение:

1 принадлежит к множеству всех чисел x, таких, что x > 0, которое может быть также записано исключительно при помощи символов:

$$1 \in \underset{x}{C}\,(x > 0).$$

Это выражение, — очевидно, высказывание, и к тому же истинное высказывание; оно выражает, в более сложной форме, ту же мысль, что и простая формула:

$$1 > 0.$$

Следовательно, это выражение не может содержать никакой свободной переменной, и переменная «*x*», встречающаяся в нем, должна быть связанной переменной. Так как, с другой стороны, мы не обнаруживаем в вышеприведенном выражении никаких кванторов, мы приходим к выводу, что такие выражения, как (I) или (II), выполняют функцию, подобную функции кванторов, т. е. связывают переменные и вследствие этого должны быть причислены к операторам (см. параграф 4).

Надо прибавить, что оператор, подобный (I) или (II), часто предпосылается нами функциям-высказываниям, содержащим кроме «*x*» другие свободные переменные (это происходит почти во всех случаях, когда подобные операторы применяются в геометрии). Выражения, полученные таким образом, например:

множество всех чисел x, таких, что $x > y$,

не обозначают, однако, никакого определенного класса, они суть функции-указатели в смысле, установленном в параграфе 2, т. е. они становятся обозначениями классов, если несвязанные переменные (но только не «*x*») заменить в них подходящими постоянными, например, в только что приведенном примере «*y*» заменить на «0» *.

О функции-высказывании с одной свободной переменной часто говорят, что она выражает определенное свойство предметов,— свойство, принадлежащее тем, и только тем, предметам, которые удовлетворяют функции-высказыванию (так, например, функция-высказывание *«x» делится на 2»* выражает определенное свойство числа *x*, а именно — делимость на 2 или, иначе, четность). Класс, соответствующий этой функции, содержит в себе в качестве элементов все предметы, обладающие данным свойством, и не содержит никаких других. При таком подходе возможно с каждым свойством предметов соотносить однозначно определяемый класс. И точно так же, обратно, каждому классу соответствует свойство, принадлежащее исключительно элементам этого класса, а именно — свойство принадлежать к этому классу. Согласно этому, по мнению многочисленных логиков, отпадает необходимость всякого различия между двумя понятиями — класса и свойства. Другими словами, становится излишней какая-либо особая «теория свойств», так как совершенно достаточно теории классов.

В порядке применения этих замечаний мы дадим новую формулировку закона Лейбница. Первоначальная формулировка (в параграфе 17) содержала термин *«свойство»*, в следующей формулировке, совершенно эквивалентной, мы взамен его употребляем термин *«класс»*:

$x = y$, если, и только если, каждый класс, который содержит какой-либо из предметов x и y в качестве своего элемента, содержит также и другой в качестве своего элемента.

Как можно видеть, по этой формулировке закона Лейбница, возможно определить понятие тождества в терминах теории классов [26].

23. Универсальный класс и нулевой класс

Как мы уже знаем, каждой функции-высказыванию с одной свободной переменной соответствует класс всех предметов, удовлетворяющих этой функции. Теперь это можно применить к следующим двум частным функциям:

(I) $$x = x, \quad x \neq x.$$

Первая из этих функций явно удовлетворяется всяким индивидуумом (см. параграф 17). Соответствующий класс

$$\underset{x}{\mathrm{C}}\,(x = x)$$

содержит поэтому все индивидуумы в качестве своих элементов; мы называем этот класс **универсальным классом** (the universal class) и обозначаем его символом «V» (или «1»). Вторая функция суждения, с другой стороны, не удовлетворяется ни одним предметом. Ввиду этого соответствующий ей класс

$$\underset{x}{\mathrm{C}}\,(x \neq x),$$

называемый **нулевым классом** или **пустым классом** и обозначаемый символом «Λ» (или «0»), не содержит никаких элементов[27]. Теперь мы можем заменить функции-высказывания (I) эквивалентными функциями вида:

$$x \in K,$$

а именно следующими:

(II) $$x \in \mathrm{V}, \qquad x \in \Lambda,$$

первая из которых удовлетворяется любым индивидуумом, а вторая не удовлетворяется никаким.

В частной математической теории, вместо того чтобы пользоваться общим логическим понятием индивидуума, иногда удобнее точно определить, что рассматривается как индивидуальный предмет в рамках этой теории; класс всех этих предметов тоже будет обозначаться символом «V» и будет называться областью изучения для данной теории. Так, в арифметике область изучения составляет класс всех чисел.

* Надо подчеркнуть, что V — класс всех индивидуумов, но не класс, содержащий в качестве элементов все возможные предметы, т. е. также и классы 1-й степени, 2-й степени и т. д. Возникает вопрос, существует ли вообще такой класс всех возможных предметов и,

более того, можем ли мы считать «негомогенные» классы, не принадлежащие к определенной степени и содержащие в качестве элементов как индивидуумы, так и классы различных степеней. Этот вопрос тесно примыкает к наиболее запутанным проблемам современной логики, а именно к так называемой антиномии Рэссела и к теории логических типов*. Обсуждение этого вопроса вышло бы за рамки, намеченные для этой книги. Здесь мы только заметим, что необходимость рассмотрения «негомогенных» классов вряд ли встретится во всей математике (За исключением общей теории множеств), и тем более, в других науках *28.

24. Основные отношения между классами

Между двумя классами K и L могут существовать различные отношения. Так, может быть случай, когда каждый элемент класс K входит в то же самое время в качестве элемента в класс L, и в таком случае говорят, что класс K есть подкласс класса L, или что он включается в класс L, или что он находится в отношении включения к классу L; а о классе L говорится, что он включает в себя класс K в качестве подкласса. Это взаимоотношение выражается кратко одной из формул:

$$K \subset L \text{ или } L \supset K.$$

Утверждением, что K есть подкласс L, не подразумевается отрицание того, что L, в свою очередь, является подклассом K. Другими словами, K и L могут быть подклассами друг друга и, значит, все их элементы могут быть общими; в таком случае из закона теории

* Понятие логических типов, введенное Рэсселом (Russel), родственно понятию степени класса и является обобщением последнего, относящегося не только к классам, но и к другим предметам, например к отношениям, которые мы будем рассматривать в следующей главе. Теория логических типов изложена систематически в «Principia Mathematica» (см. подстрочное примечание на стр. 49).

классов (приведенного выше) следует, что K и L тождественны. Если же обратное отношение не существует, т. е. если каждый элемент класса K является элементом класса L, но не каждый элемент класса L является элементом класса K, то о классе K говорится, что он является собственным подклассом или частью класса L, а о L говорится, что он заключает в себе класс K в качестве собственного подкласса или части. Например, множество всех целых чисел есть собственное подмножество во множестве всех рациональных чисел; линия включает каждый из своих отрезков как свою часть.

О двух классах K и L говорят, что они частично совпадают или пересекаются друг с другом, если у них есть по крайней мере один общий элемент и если в то же самое время каждый из них содержит элементы, не содержащиеся в другом классе. Если у каждого из двух классов есть по меньшей мере один элемент (т. е. если они не пустые), но если у них нет ни одного общего элемента, они называются взаимно исключающими или раздельными. Например, окружность пересекает всякую прямую, проведенную через центр окружности, но она раздельна со всякой прямой, у которой расстояние от центра окружности больше радиуса. Множество всех положительных чисел и множество всех рациональных чисел частично совпадают, но множество положительных и множество отрицательных чисел — множества, взаимно исключающие.

Дадим некоторые примеры законов, касающихся вышеупомянутых отношений между классами.

Для всякого класса K, $K \subset K$.

Если $K \subset L$, *а* $L \subset K$, *то* $K = L$.

Если $K \subset L$, *а* $L \subset M$, *то* $K \subset M$.[29]

Если K — *не пустой подкласс класса* L *и если классы* L *и* M *раздельны, то классы* K *и* M *раздельны.*

Первое из этих положений называется законом рефлексивности включения, второй — законом тождества в теории классов, третий известен как закон транзитивности включения. Вместе с четвертым положением и некоторыми другими положениями подобного рода они образуют группу положений, называемых законами категорического силлогизма.

Характерное свойство универсального и нулевого классов по отношению к понятию включения выражается следующим законом:

для всякого класса K, $V \supset K$ *и* $\Lambda \subset K$.

Это положение, особенно ввиду его второй части, касающейся нулевого класса, многим кажется несколько парадоксальным. Для того чтобы наглядно разъяснить эту вторую часть, рассмотрим импликацию

если $x \in \Lambda$, *то* $x \in K$.

Что бы мы ни подставили здесь вместо «x» (и «K»), антецедент импликации будет ложным высказыванием, а следовательно, вся импликация будет истинным высказыванием (импликация получает, как иногда выражаются математики, «пустое» удовлетворение). Таким образом, мы можем сказать, что любой элемент класса Λ является также элементом класса K, а следовательно, по определению включения (инклюзии), $\Lambda \subset K$. Аналогично можно наглядно разъяснить и первую часть закона.

Легко убедиться, что между любыми двумя классами существует одно из рассмотренных здесь отношений; это может быть выражено в следующем законе:

Если K и L — два произвольные класса, то либо $K = L$, либо K есть собственный подкласс класса L, либо K включает в себя L в качестве своего собственного подкласса, либо K и L частично совпадают, либо, наконец, K и L раздельны; одновременное существование между K и L каких-либо двух из указанных здесь отношений невозможно.

Чтобы получить ясное, непосредственное понимание этого закона, лучше всего представить себе классы K

и L в виде геометрических фигур и вообразить все положения, в которых эти две фигуры могут быть расположены по отношению друг к другу.

Отношения, о которых шла речь в этом разделе, могут быть названы **основными отношениями между классами***.

Вся старая традиционная логика (см. параграф 6) может быть почти целиком сведена к теории основных отношений между классами, т. е., к маленькому фрагменту всей теории классов. Внешне эти две дисциплины отличает тот факт, что в старой логике понятие класса не дано достаточно ясно. Вместо того чтобы сказать, например, что класс лошадей содержится в классе млекопитающих, в старой логике принято было говорить, что свойство млекопитания принадлежит всем лошадям или, проще, что каждая лошадь — млекопитающее. Важнейшие законы традиционной логики — это законы категорического силлогизма, точно соответствующие законам теории классов, которые мы выше установили и назвали. Например, первый из данных выше законов силлогизма дается старой логикой в следующей форме:

Если всякое M есть P и всякое S есть M, то всякое S есть P.

Это — знаменитейший из законов традиционной логики, известный как закон силлогизма **Barbara**.

25. Действия над классами

Теперь мы познакомимся с некоторыми действиями, которые, будучи произведены над данными классами, порождают новые классы.

Если есть два класса K и L, то можно образовать новый класс M, который в качестве своих элементов содержит в себе те, и только те, предметы, какие принадлежат, по крайней мере, к одному из классов K и

* Эти отношения впервые исчерпывающим образом исследовал французский математик **Жергон** (I. D. Gergonne), 1771—1859.

L; класс *M,* можно сказать, образуется из класса *K* путем присоединения к нему класса *L*. Это действие называется сложением классов, и класс *M* рассматривается как сумма или объединение классов *K* и *L,* обозначаемое символом.

$$K \cup L \text{ (или } K + L\text{)}.$$

Другое действие над классами *K* и *L*, называемое умножением классов, состоит в образовании нового класса *M,* чьими элементами служат те, и только те, предметы, которые принадлежат к обоим классам — *K* и *L*. Этот класс *M* называется произведением или пересечением классов *K* и *L* и обозначается символом:

$$K \cap L \text{ (или } K \cdot L\text{)}.$$

Эти два действия часто применяются в геометрии; иногда бывает очень удобно при их помощи определять новые виды фигур. Предположим, например, нам уже известно, что разумеется под двумя смежными углами; тогда полуплоскость, т. е. угол в 180°, может быть определена как объединение двух смежных углов (в данном случае угол понимается как часть плоскости, ограниченной двумя полупрямыми, называемыми сторонами угла). Или же, если взять произвольный круг и угол, вершина которого лежит в центре этого круга, то пересечением этих двух фигур образуется фигура, называемая сектором круга.

Прибавим к этому еще два примера из области арифметики: объединение множества всех положительных чисел и множества всех отрицательных чисел — это множество всех чисел, неравных нулю; пересечение множества всех четных чисел и множество всех простых чисел есть множество, состоящее из единственного элемента, числа 2, ибо это число — единственное четное простое число.

Сложение и умножение классов управляется различными законами. Некоторые из них совершенно аналогичны соответствующим арифметическим теоремам, рассматривающим сложение и умножение чисел,— и именно поэтому для обозначения рассмотренных выше действий были избраны термины «сложение» и «умножение»; в качестве примера упомянем коммутативный и ассоциативный законы сложения и умножения классов:

для всяких классов K и L, $K \cup L = L \cup K$ и $K \cap L = L \cap K$,

для всяких классов K, L и M, $K \cup (L \cup M) = (K \cup L) \cup M$ и $K \cap (L \cap M) = (K \cap L) \cap M$.

Аналогия с соответствующими арифметическими теоремами становится очевидной при замене символов «$\cup$» и «$\cap$» обычными знаками сложения и умножения «$+$» и «$\cdot$»

Другие законы, однако, значительно удаляются от арифметических законов; характерный пример — закон тавтологии:

для всякого класса K, $K \cup K = K$ и $K \cap K = K$.

Этот закон становится очевидным при рассмотрении символических обозначений «$K \cup K$» и «$K \cap K$»; если, например, прибавить к элементам класса K элементы того же самого класса, то реально ничто не добавится и полученный в результате класс есть все тот же самый класс K.

Надо упомянуть еще одно действие, отличающееся от действий сложения и вычитания, поскольку оно может быть произведено не над двумя классами, но над одним лишь классом. Это — действие, заключающееся в образовании из данного класса K так называемого дополнения класса K, т. е. класса всех предметов, не принадлежащих к классу K. Дополнение класса K обозначается символом

$$K'.$$

Если, например, K есть множество всех целых чисел, то все дроби и иррациональные числа принадлежат к множеству K'.

В виде примеров законов, рассматривающих понятие дополнения и связывающих его с понятиями, установленными ранее, даем следующие два положения

$$\text{для всякого класса } K,\ K \cup K' = V,$$

$$\text{для всякого класса } K,\ K \cap K' = \Lambda.$$

Первый из этих законов называется законом исключенного третьего в теории классов, а второй — законом противоречия в теории классов [30].

Отношения между классами и действия над классами, с которыми мы уже ознакомились, а также понятия универсального класса и нулевого класса рассматриваются в особой части теории классов; ввиду того что законы, рассматривающие эти отношения и действия, выражаются в простых формулах, напоминающих арифметические, эта часть теории известна под именем исчисления классов.

26. Равномощные классы, мощность класса, конечные и бесконечные классы; арифметика как часть логики

* Среди остальных, понятий, образующих предмет исследования в теории классов, имеется одна группа, заслуживающая особого внимания и заключающая в себе такие понятия, как равномощные классы, мощность класса, конечные и бесконечные классы. К сожалению, это довольно запутанные понятия, которые здесь могут быть рассмотрены только поверхностно.

Как пример двух равномощных или эквивалентных классов мы можем рассматривать множества пальцев правой и левой руки; эти множества раномощны, потому что возможно разделить по парам пальцы обеих рук таким образом, чтобы, во-первых, каждый палец встречался только в одной паре и, во-вторых, каждая пара содержала только один палец левой руки и только один палец правой руки. В подобном же смысле равномощны, например, и следующие три множества: множество всех вершин, множество всех сторон и множество всех углов многоугольника. Ниже, в параграфе 33, мы сможем дать точное и общее определение понятия равномощных классов[31].

Теперь рассмотрим произвольный класс K; несомненно, существует свойство, присущее всем классам, равномощным классу K, но не присущее другим классам (а именно — свойство быть равномощным классу K); это свойство называется мощностью, или **числом элементов**, или **кардинальным числом**, или **степенью класса** K. Это понятие можно определить короче и точнее, хотя, быть может, и несколько более абстрактно: кардинальное число класса K есть класс всех классов, равномощных классу K. Из этого следует, что у двух классов K и L — одно и то же кардинальное число, если, и только если, они равномощны.

По числу элементов классы разделяются на конечные и бесконечные. Среди первых мы различаем классы, состоящие только из одного элемента, только из двух, из трех и т. д. Эти термины легче определить на основе арифметики. Действительно, пусть n — произвольное натуральное число (т. е. целое, не отрицательное); тогда мы скажем, что **класс** K **состоит из** n **элементов**, если K равномощен с классом всех натуральных чисел, меньших, чем n. В частности, класс состоит из двух элементов, если он равномощен с классом всех натуральных чисел, меньших, чем 2, т. е. с классом, содержащим в качестве элементов числа 0 и 1. Вообще класс K называется конечным, если существует такое натуральное число n, что он состоит из n элементов, — в противном случае класс этот будет называться **бесконечным**.

Однако было установлено, что здесь возможна еще и другая трактовка. Все только что рассмотренные термины могут быть определены с чисто логической точки зрения, без всякого пользования какими-либо выражениями, принадлежащими к области арифметики. Мы можем, например, сказать, что класс K состоит только из одного элемента, если этот класс удовлетворяет следующим двум условиям: (I) имеется x, такое, что $x \in K$ y(II) при всяких y и z, если $y \in K$ и $z \in K$, то $y = z$ (эти два условия могут быть заменены и одним: «имеется только один x, при котором $x \in K$; см. параграф 20). Аналогичным образом мы можем раскрыть выражения: «класс K состоит из двух элементов» и «класс K состоит из трех элементов» и т. п. Проблема становится гораздо труднее, когда мы обращаемся к вопросу об определении терминов «конечный класс» и «бесконечный класс», но и в этих случаях попытки положительного разрешения проблемы были успешны (см. параграф 33), и таким образом все понятия, подлежавшие рассмотрению, были включены в пределы логики.

Это обстоятельство ведет к чрезвычайно интересному и многозначительному следствию, ибо оказывается, что понятие самого числа и, подобным же образом, все другие арифметические понятия можно определить не выходя за пределы логики. Действительно, легко определить значение символов, обозначающих индивидуальные натуральные числа, как-то «0», «1», «2», и т. д. Число 1, например, может быть определено как число элементов класса, состоящего только из одного элемента. (Определение подобного рода кажется неправильным и представляется основанным на порочном круге, поскольку слово «один», которое подлежит определению, встречается в определителе; но в действительности здесь нет никакой ошибки, потому что выражение «класс состоит только из одного элемента» рассматривается как целое и его значение было определено предварительно.) Но и определить общее понятие натурального числа тоже не трудно: натуральное число есть кардинальное число конечного класса. Кроме того, мы имеем возможность определить все действия над натуральными числами и расширить понятие числа, введя в это понятие дроби, отрицательные и иррациональные числа, нигде не выходя за пределы логики. Помимо этого можно доказать все арифметические теоремы на основе законов одной только логики (с тем условием, что система логических законов должна быть предварительно обогащена включением положения, не столь непосредственно очевидного, как другие,— а именно, так называемой аксиомы бесконечности, устанавливающей, что имеется бесконечное множество различных предметов)[32]. Все это построение очень отвлеченно, его нелегко изложить в популярной форме, и оно не укладывается в рамки элементарного изложения арифметики; в данной книге мы не решаемся касаться этой проблемы и рассматриваем числа как индивидуумы, а не как свойства или классы классов. Но только то обстоятельство, что оказалось возможным развить всю арифметику в целом, включая и возникшие из нее дисциплины — алгебру, анализ и т. п.,— как часть чистой логики, составляет одно из величайших достижений современных логических исследований * ✳.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть K — множество всех чисел, меньших, чем $^3/_4$; какие из следующих формул будут тогда истинными:

$$0 \in K,\ 1 \in K,\ {}^2/_3 \in K,\ {}^3/_4 \in K,\ {}^4/_5 \in K?$$

2. Рассмотрите следующие четыре множества:

(a) множество всех положительных чисел,

(b) множество всех чисел, меньших, чем 3,

(c) множество всех чисел x, при которых $x + 5 < 8$,

(d) множество всех чисел x, удовлетворяющих функции-высказыванию: «$x < 2x$».

---

* Основными идеями в этой области мы обязаны Фреге (см. подстрочное примечание на стр. 49); он развил их впервые в своей интересной книге *«Основы арифметики»* («Die Grundlagen der Arithmetik», Breslau, 1884). Идеи Фреге получили систематическое и исчерпывающее развитие в «Principia Mathematica» Уайтхеда и Рэссела (см. подстрочное примечание на стр. 4…).

Какие из этих множеств тождественны, а какие отличаются друг от друга?

3. Как называется в геометрии множество всех точек в пространстве, расстояние которых от данной точки (или от данной прямой) не превышает длины данного отрезка?

4. Пусть K и L — два концентрических круга, причем радиус первого меньше, чем радиус второго. Какие из отношений, рассмотренных в параграфе 20, существуют между этими двумя кругами? Существует ли это же отношение между их окружностями?

5. Начертите два квадрата K и L так, чтобы они были в следующих отношениях друг к другу:

(a) $K = L$,

(b) квадрат K есть часть квадрата L,

(c) квадрат K заключает в себе квадрат L как свою часть,

(d) квадраты K и L пересекаются,

(e) квадраты K и L лежат один вне другого.

Какие из этих случаев невозможны (I), если квадраты конгруэнтны и (II) если рассматривать не квадраты, а только их периметры.

6. Пусть x и y — два произвольных числа, причем $x < y$.

Как известно, множество чисел, не меньших, чем x, и не больших, чем y, называется интервалом между конечными пунктами x и y, он обозначается символом

$$«[x, y]»$$

Какие из нижеприведенных формул истинны:

a) $[3,5] \subset [3,6]$,

(b) $[4,7] \subset [5,10]$,

(c) $[-2,4] \supset [-3,5]$,

(d) $[-7,1] \supset [-5, 2]$?

Какие из основных отношений существуют между интервалами:

(e) $[2,4]$ и $[5,8]$,

(f) $[3,6]$ и $[3^1/_2, 5^1/_2]$,

(g) $[1^1/_2, 7]$ и $[-2, 3^1/_2]$?

7. Истинно ли следующее высказывание (построенное так же, как и законы силлогизма, данные в параграфе 24):

если K раздельно с L и L раздельно с M, то K раздельно с M?

8.[33] Передайте следующие формулы в терминах обычной речи:

(a) $$(x = y) \longleftrightarrow \mathbf{A}_K [(x \in K) \longleftrightarrow (y \in K)],$$

(b) $$(K = L) \longleftrightarrow \mathbf{A}_x [(x \in K) \longleftrightarrow (x \in L)].$$

Какие законы, упомянутые в параграфах 22 и 24, находят свое выражение в этих формулах? Какие потребовались бы изменения в обеих частях эквивалентности (b), чтобы получить определение символа «$\subset$» или «[illegible]»?

9. Пусть ABC — произвольный треугольник, а D — произвольная точка, лежащая на отрезке BC. Какие фигуры образуются из объединения двух треугольников ABD и ACD и из их пересечения?
Выразите ответ при помощи формул.

10. Представьте произвольный квадрат:
(a) в виде объединения двух трапеций,
(b) в виде пересечения двух треугольников.

11. Какие из следующих формул истинны (ср. упражнение 6):

(a) $$[2,\ 3^1/_2] \cup [3,5] = [2,5],$$

(b) $$[-1,2] \cup [0,3] = [0,2],$$

(c) $$[-2,8] \cap [3,7] = [-2,8],$$

(d) $$[2,4^1/_2] \cap [3,5] = [2,3]\ ?$$

В тех формулах, которые окажутся ложными, исправьте выражение по правую сторону от символа «=».

12. Пусть K и L — два произвольных класса. Какими классами будут $K \cup L$ и $K \cap L$ в случае, если $K \subset L$? В частности, какими классами будут $K \cup V$, $K \cap V$' $\Lambda \cup L$ и $\Lambda \cap L$?

Указание: При ответе на второй вопрос имейте в виду закон параграфа 24, касающийся классов V и Λ

13. Попытайтесь показать, что каковы бы ни были классы K, L и M следующие формулы справедливы

(a) $$K \subset K \cup L \text{ и } K \supset K \cap L,$$

(b) $$K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M) \text{ и } K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M),$$

(c) $$(K')' = K,$$

(d) $$(K \cup L)' = K' \cap L' \text{ и } (K \cap L)' = K \cup L'.$$

Формулы (a) называются з а к о н а м и у п р о щ е н и я (для сложения и умножения классов); формулы (b) — р а с п р е д е л и т е л ь н ы е з а к о н ы (для умножения классов в отношении к сложению и для сложения классов в отношении к умножению); формула (c) — з а к о н д в о й н о г о д о п о л н е н и я и, наконец, формулы (d) — з а к о н д е М о р г а н а в теории классов *. Какие из этих законов соответствуют арифметическим теоремам?

---

* См. подстрочное примечание на стр. 88.

Указание: Чтобы доказать, например, первую из формул (d) достаточно показать, что классы $(K \cup L)'$ и $K' \cap L'$ целиком состоят из одних и тех же элементов (см. параграф 24). С этой целью мы должны, пользуясь определениями параграфа 25, выяснить, когда предмет x принадлежит к классу $(K \cup L)'$ и когда он принадлежит к классу $K' \cap L'$.

* 14.[34] Между законами исчисления высказываний, данными в параграфах 12 и 13 и в упражнении 14 главы II, с одной стороны, и законами исчисления классов, данными в параграфах 24 и 25 и в предшествующем упражнении, с другой стороны, существует далеко простирающееся сходство в структуре (на которое указывает и аналогичность их наименований). Опишите подробно, в чем заключается это сходство, и попробуйте найти общее объяснение этого явления.

В параграфе 14 мы познакомились с законом контрапозиции для исчисления высказываний; сформулируйте аналогичный закон для исчисления классов.

15. При помощи символа

$$\underset{x}{C},$$

введенного в параграфе 22, мы можем следующим образом записать определение объединения двух классов:

$$K \cup L = \underset{x}{C}\,[(x \in K) \vee (x \in L)];$$

но возможно выразить это определение также и в обычной форме эквивалентности (не пользуясь этим символом):

$$[x \in (K \cup L)] \longleftrightarrow [(x \in K) \vee (x \in L)].$$

Аналогичным образом дайте два вида определений для универсального класса, для нулевого класса, для произведения двух классов и для дополнения класса.

* 16. Существует ли многоугольник, в котором множество всех его сторон равномощно множеству всех его диагоналей?

* 17. Дайте определение следующих выражений, пользуясь терминами исключительно из области логики:

(a) *класс K состоит из двух элементов,*

(b) *класс K состоит из трех элементов.*

* 18. Рассмотрите следующие три множества:

(a) множество всех натуральных чисел, бо̀льших, чем 0, и меньших, чем 4;

(b) множество всех рациональных чисел, бо̀льших, чем 0, и меньших, чем 4;

(c) множество всех иррациональных чисел, бо̀льших, чем 0, и меньших, чем 4.

Какие из этих множеств конечны и какие бесконечны?

Дайте еще примеры конечных и бесконечных множеств чисел.

V

О ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

27. Отношения, их область, конверсные области; отношения и функции-высказывания с двумя свободными переменными.

В предшествующих главах мы уже встречались с несколькими отношениями между предметами. Как примеры отношений между двумя предметами мы можем привести хотя бы тождество (равенство) и различие (неравенство). Иногда мы читаем формулу:

$$x = y$$

таким образом:

x имеет с y отношение тождества,

или же:

между x и y существует отношение тождества,

и мы говорим, что символ «=» обозначает отношение тождества. Аналогичным образом, формула:

$$x \neq y$$

Иногда читается:

x имеет с y отношение различия,

или же:

между x и y существует отношение различия,

и говорится, что символ «≠» означает отношение различия. Далее мы столкнулись с некоторыми отношениями между классами, а именно — отношениями включения, пересечения, раздельности и т. д. Рассмотрим теперь некоторые понятия, принадлежащие к общей теории отношений, которая составляет очень важную часть логики и в которой рассматриваются все отношения любого характера и устанавливаются общие законы, каким они подчиняются *.

---

* Де Морган и Пирс (см. подстрочное примечание на стр. 88 и на стр. 44) первыми развили теорию отношений, особенно ту ее часть, которая известна под названием исчисления отношений (см. параграф 28). Их труд был тематически расширен и дополнен немецким логиком Шредером

Чтобы облегчить ход наших мыслей, мы вводим особые переменные «R» и «S», ... которые служат для обозначения отношений. Вместо таких выражений как:

предмет x имеет отношение R к предмету y

и:

предмет x не имеет отношения R к предмету y,

мы будем употреблять соответственно символические сокращенные обозначения:

$$xRy$$

и (пользуясь знаком отрицания из исчисления высказываний, см. параграф 13):

$$\sim(xRy)\cdot$$

Всякий предмет, имеющий отношение R с каким-либо предметом y, мы называем предшествующим членом для данного отношения R; всякий предмет y, для которого имеется предмет x, при котором:

$$xRy,$$

называется последующим членом для данного отношения R. Класс всех предшествующих членов отношения R называется областью, а класс всех последующих членов — конверсной областью (противообластью) отношения R. Так, например, всякий индивидуум может быть и предшествующим членом и последующим членом для отношения равенства, так что область и конверсная область этого отношения обе совпадают с универсальным классом.

В теории отношений, точно так же, как и в теории классов, мы можем различать отношения различной степени.

(E. Schröder), 1841—1902. Книга Шредера *«Алгебра и логика отношений»* («Algebra und Logik der Relative», Leipzig. 1895), вышедшая как третий том его объемистого труда *«Лекции по алгебре логики»* («Vorlesungen über die Algebra der Logik»), до сих пор остается единственным исчерпывающим изложением исчисления отношений.

Отношения первой степени — это те, что существуют между индивидуумами; отношения второй степени — те, что существуют между классами или отношениями первой степени, и т. д. Здесь создается особенно сложное положение, так как нам часто приходится рассматривать «смешанные» отношения, при которых предшествующие члены являются, скажем, индивидуумами, а последующие — классами или же, например, предшествующие члены являются классами первой степени, а последующие члены — классами второй степени. Самым важным примером отношения этого рода можно считать отношение, существующее между элементом и классом, к которому он принадлежит; как мы помним из параграфа 21, это отношение обозначается символом «$\in$».

Рассматривая отношения, мы, как и тогда, когда рассматривали классы, прежде всего обратимся к отношениям первой степени, хотя рассматриваемые здесь понятия могут, и в некоторых случаях будут, применяться к отношениям высших степеней.

Каждой функции-высказыванию с двумя свободными переменными «x» и «y» соответствует отношение, существующее между предметами x и y, если, и только если, они удовлетворяют данной функции-высказыванию в этой связи, о функции-высказывании с двумя свободными переменными «x» и «y», говорится, что она выражает отношение между предметами x и y. Так, например, функция-высказывание:

$$x \quad y = 0$$

выражает отношение обладания обратными знаками, или, короче, отношения обратности; между числами x и y существует отношение обратности, если, и только если, $x + y = 0$. Если обозначим это отношение символом «O», то формулы

$$x\text{O}y$$

и

$$x + y = 0$$

эквивалентны. Подобным же образом, всякая функция-высказывание, содержащая символы «x» и «y», в качестве единственных символов свободных переменных, может быть преобразована в эквивалентную формулу вида:

$$xRy,$$

где «R» есть постоянный знак, означающий некое отношение. Формулу:

$$xRy$$

можно поэтому рассматривать как общую форму функции-высказывания с двумя свободными переменными, точно так же как и формулу.

$$x \in K$$

можно рассматривать как общую форму функции-высказывания с одною свободной переменной (см. параграф 22).

28. Исчисление отношений

Теория отношений — одна из самых развитых ветвей математической логики. Одна ее часть, исчисление отношений, родственна исчислению классов, так как ее основным предметом является установление формальных законов, управляющих действиями, при помощи которых из данных отношений можно вывести другие.

В исчислении отношений мы рассматриваем в первую очередь группу понятий, совершенно аналогичных понятиям исчисления классов; обычно они и обозначаются одними и теми же символами и подлежат действию почти одних и тех же законов. (Чтобы избежать двусмысленности, мы, конечно, должны употреблять другую группу символов в исчислении отношений; так, например, пользуясь символами исчисления классов, ставить над ними точку.

Так, в исчислении отношений мы встречаемся с двумя особыми отношениями, — универсальным отношением V и нулевым отношением Λ первое из которых существует между любыми двумя индивидуумами, а второму не удовлетворяют никакие индивидуумы.

Далее, имеются различные отношения между отношениями, — например, отношение включения; мы говорим, что отношение R включено в отношение S в символах:

$$R \subset S,$$

если при наличии отношения R между двумя предметами между ними обязательно существует и отношение S, или, другими словами, если, при любых x и y из формулы:

$$xRy$$

следует:

$$xSy.$$

Так, например, мы знаем из арифметики, что если

$$x < y,$$

то

$$x \neq y;$$

следовательно, отношение «быть меньше» входит в отношение различия.

Если в то же время

$$R \subset S \text{ и } S \subset R,$$

т. е., если отношения R и S существуют между одними и теми же предметами, то они тождественны:

$$R = S.$$

Далее, имеется сумма или объединение двух отношений R и S в символах:

$$R \cup S,$$

и произведение или пересечение R и S в символах:

$$R \cap S.$$

Первое отношение, $R \cup S$, существует между двумя предметами, если, и только если, по крайней мере одно из отношений R и S существует между ними, другими словами, формула:

$$x(R \cup S)y$$

эквивалентна условию:

$$xRy \text{ или } xSy.$$

Подобным же образом определяется и произведение двух отношений, только при этом слово «*или*» должно быть заменено словом «*и*». Так, например, если R будет отношением отцовства (т. е. отношением, существующим между двумя лицами, x и y, если, и только если, x есть отец y), а S будет отношением материнства, то $R \cup S$ есть отношение «быть родителем», отношение же $R \cap S$ будет в данном случае нулевым отношением.

Наконец, имеется отрицание или дополнение отношения, обозначаемое.

$$R'.$$

Это отношение, существующее между двумя предметами, если, и только если, отношение R не существует между ними, другими словами, при всяком x и y, формулы:

$$xR'y \text{ и } \sim(xRy)$$

эквивалентны. Надо заметить, что если отношение обозначено постоянной, то его дополнение часто обозначается символом, полученным из этой постоянной путем ее перечеркивания вертикальной или наклонной чертой. Например, отрицание отношения $<$ обычно обозначается символом «$\nless$», а не «$<'$».

В исчислении отношений встречаются также и совершенно новые понятия, не имеющие аналогии в области исчисления классов.

Здесь, прежде всего, имеются два особых отношения, тождества и различия, с которыми мы уже попутно познакомились в предшествующих рассуждениях. В исчислении отношений они обозначаются особыми символами, именно — «I» и «D», а не символами «=» и «≠», употребляемыми в других частях логики.[35] Так, мы пишем:

$$x \,\mathrm{I}\, y \text{ и } x \,\mathrm{D}\, y$$

вместо:

$$x = y \text{ и } x \neq y.$$

Символы «=» и «≠» употребляются в исчислении отношений только для обозначения тождества и различия между отношениями.

Далее, здесь имеется чрезвычайно интересное и важное новое действие, с помощью которого из двух отношений R и S мы образуем третье отношение, называемое относительным произведением или композицией отношений R и S (в противоположность ему, обыкновенное произведение иногда называется абсолютным произведением). Относительное произведение R и S обозначается при помощи символа:

$$R/S;$$

оно существует между двумя предметами x и y, если, и только если, существует такой предмет, при котором в одно и то же время:

$$x \, R z \text{ и } z \, S y.$$

Так, например, если R есть отношение супружества, а S — отношение дочерности, то R/S существует между двумя лицами x и y, если имеется такое лицо z, при котором x есть супруг z, а z есть дочь y; следовательно, отношение R/S совпадает с отношением зятя к тестю или теще. В дополнение к этому имеется здесь и другое, подобного же характера, действие, результат которого называется относительной суммой двух отношений. Но это действие не играет особенно большой роли и здесь не будет объяснено.

Наконец, имеется действие, подобное действию образования R', именно — действие, при помощи которого из отношения R нами образуется новое отношение, именуемое конверсией R и обозначаемое так:

$$\breve{R}.$$

Отношение $\breve{R}$ существует между x и y, если, и только если, R существует между y и x. Если отношение обозначено при помощи постоянной, то чтобы обозначить его конверсию, мы часто употребляем тот же символ, но только начертанный в обратном направлении. Конверсия отношения $<$, например, есть отношение $>$, ввиду того что при всяком x и y, формулы:

$$x<y \text{ и } y>x$$

эквивалентны.

Ввиду довольно специального характера исчисления отношений мы здесь не будем дальше углубляться в его детали.

29. Некоторые свойства отношений

Теперь мы обратимся к той части теории отношений, задача которой — выявление и исследование особых видов отношений, с которыми часто встречаешься в других науках, в частности — в математике.

Мы будем называть отношение R рефлексивным в классе K, если каждый элемент x класса K имеет отношение R к себе самому:

$$x R x;$$

если, с другой стороны, ни один из элементов данного класса не имеет отношения R к себе самому:

$$\sim(x R x),$$

то об отношении R говорится, что оно антирефлексивно в классе K. Отношение R называется симметричным в классе K, если для всяких двух элементов x и y из класса K из формулы:

$$x\,R\,y$$

всегда следует формула:

$$y\,R\,x.$$

Если же из формулы:

$$x\,R\,y$$

всегда следует:

$$\sim(y\,R\,x),$$

то об отношении R говорят, что оно асимметрично в классе K. Отношение R называется транзитивным в классе K, если для всяких трех элементов x, y и z класса K из условий:

$$x\,R\,y \text{ и } y\,R\,z$$

всегда следует, что:

$$x\,R\,z.$$

Если, наконец, для всяких двух различных элементов x и y класса K по крайней мере одна из формул:

$$x\,R\,y \text{ и } y\,R\,x$$

верна, т. е. если отношение R существует между двумя произвольными различными элементами K, по крайней мере в одном направлении, отношение называется связанным в классе K.

Если K универсальный класс (или, по крайней мере, область исследования науки, которой мы в данном случае интересуемся,— см. параграф 23), то мы обычно, ради краткости, говорим не об отношениях, рефлексивных, симметричных и проч. в классе K, но попросту о рефлексивных отношениях, симметричных отношениях и т. п.

30. Отношения, являющиеся рефлексивными, симметричными и транзитивными

Вышеупомянутые свойства отношений часто встречаются группами. Обычны, например, такие отношения, которые одновременно являются и рефлексивными, и симметричными, и транзитивными. Типичный пример подобного типа — отношение тождества; закон II параграфа 17 гласит, что это отношение рефлексивно, согласно закону III тождество является симметричным отношением, а по закону IV оно транзитивно (этим объясняются и названия этих законов, данные в параграфе 17). Другие многочисленные примеры подобного рода отношений могут быть найдены в области геометрии. Так, например, конгруэнтность является рефлексивным отношением в множестве всех отрезков прямой (или любых геометрических фигур), поскольку каждый отрезок конгруэнтен самому себе, оно симметрично, так как, если отрезок конгруэнтен другому отрезку, то этот другой конгруэнтен первому, и, наконец, оно транзитивно, потому что если отрезок A конгруэнтен отрезку B, а B — отрезку C, то отрезок A конгруэнтен и отрезку C. Те же три свойства принадлежат и отношениям подобия многоугольников или параллельности прямых) если считать, что всякая прямая параллельна самой себе), или же — уже вне области геометрии — отношениям сверстничества между людьми, или одновременности между физическими явлениями.

Каждое отношение, являющееся в одно и то же время рефлексивным, симметричным и транзитивным можно мыслить как своего рода равенство. Вот почему, вместо того чтобы говорить, что подобное отношение существует между двумя предметами, можно в этом смысле также сказать, что эти предметы равны в том или ином отношении, или, выражаясь более точно, что некоторые свойства этих предметов тождественны. Так, вместо утверждения, что два отрезка конгруэнтны, или что два человека — однолетки, или что два слова синонимичны,— с таким же успехом можно утверждать, что два отрезка равны по своей длине, что возраст обоих людей один и тот же, или что значения слов тождественны.

* Поясним при помощи одного примера, как можно установить логическую основу для подобного рода выражения. С этой целью рассмотрим отношение по-

добия между многоугольниками. Обозначим множество всех многоугольников, подобных многоугольнику P (или, пользуясь несколько более распространенной терминологией, общее свойство, принадлежащее всем многоугольникам, подобным P, и не принадлежащее никаким другим многоугольникам), словами: «форма многоугольника P». Эти формы являются известными множествами многоугольников (или свойствами многоугольников, см. замечания в конце параграфа 22). Исходя из того упомянутого выше обстоятельства, что отношение подобия рефлексивно, симметрично и транзитивно, мы можем теперь легко показать, что каждый многоугольник принадлежит к одному, и только к одному множеству, притом к такому, что два подобных многоугольника всегда принадлежат к одному и тому же множеству, а два многоугольника, не являющихся подобными, принадлежат к различным множествам. Из этого одновременно следует, что два положения:

многоугольники P и Q подобны

и

многоугольники P и Q имеют одну и ту же форму (т. е. формы P и Q тождественны)

эквивалентны.

Читатель уже заметил в ходе предшествующих рассуждений, что мы и раньше однажды прибегали к подобному приему, а именно в параграфе 26, переходя от выражения:

классы K и L равномощны

к эквивалентному выражению:

у классов K и L одно и то же кардинальное число.

Нетрудно было бы показать, что тот же прием применим и к каждому рефлексивному, симметричному и транзитивному отношению[36]. Имеется даже логический закон, называемый **принципом абстракции**, который дает общее теоретическое основание для указанного приема, но мы здесь не будем касаться точной формулировки этого закона *.

До сих пор нет общепринятого термина для обозначения совокупности отношений, являющихся одновременно рефлексивными, симметричными и транзитивными. Иногда они вообще называются равенствами или эквивалентностями. Но термин «равенство» иногда также применяется для особых отношений рассматриваемой категории, и тогда равными называются два предмета, если между ними существует такое отношение. Например, в геометрии, как это было показано в параграфе 19, конгруэнтные отрезки часто рассматриваются как равные отрезки. Мы здесь еще раз подчеркнем, что вообще предпочтительней было бы избегать подобных выражений; их употребление только ведет к двусмысленности, и оно нарушает условие, согласно которому мы рассматриваем термины «равенство» и «тождество» как синонимы.

31. Порядковые отношения; примеры других отношений

Другой весьма распространенный вид отношений представлен теми, которые являются в данном классе K асимметричными, транзитивными и связанными (они, как это можно показать, должны тогда быть также антирефлексивными в классе K). Об отношении с этими свойствами мы говорим, что оно устанавливает порядок в классе K, мы говорим также, что класс K упорядочивается отношением R [37]. Рассмотрите, например, отношение «быть меньше» (или отношение *«меньше, чем»,* как иногда говорится); оно асимметрично во всяком множестве чисел, ибо, если x и y являются любыми числами и если

$$x<y,$$

то

$$y \nless x, \text{ т. е. } \sim(y<x);$$

оно транзитивно, так как из формулы:

$$x<y \text{ и } y<z$$

всегда следует:

$$x<z,$$

наконец, оно — связанное, так как из двух различных чисел одно должно быть меньше, чем другое (и оно также антирефлексивно, так как никакое число не может быть меньше самого себя). Вот почему любое множество чисел упорядочивается отношением «быть меньше». Подобным же образом, отношение «быть больше» представляет собой другое упорядочивающее отношение для любого множества чисел.

Рассмотрим теперь отношение «быть старше». Можно легко удостовериться, что это отношение — антирефлексивное, асимметричное и транзитивное в любом множестве людей. Однако оно не обязательно связанное, ибо возможен и такой случай, когда множество содержит двух человек совершенно одного возраста, т. е. родившихся в один и тот же момент, так что отношение «быть старше» не применимо к ним ни в том, ни в другом направлении. Если, с другой стороны, мы рассматриваем множество людей, в котором не найдется никаких двух человек, которые были бы точно одного и того же возраста, отношение «быть старше» устанавливает в этом множестве порядок.

Известно много примеров отношений, не принадлежащих ни к одной из двух категорий, рассмотренных в этом и в предыдущем параграфах. Рассмотрим некоторые примеры.

Отношение различия не транзитивно ни в каком множестве предметов, так как ни один предмет не различен с самим собой; оно симметрично, так как, если

$$x \neq y,$$

то также

$$y \neq x;$$

однако оно не транзитивно, так как из формул:

$$x \neq y \text{ и } y \neq z$$

не следует формула:

$$x \neq z;$$

с другой стороны, оно, как это сразу можно видеть, является связанным.

Отношение включения между классами, согласно закону тождества и одному из законов силлогизма (см. параграф 24), рефлексивно и транзитивно; кроме того, оно не является ни симметричным, ни асимметричным, так как из формулы:

$$K \subset L$$

не следует ни формула:

$$L \subset K,$$

ни ее отрицание (эти две формулы осуществляются одновременно, если, и только если, классы K и L тождественны); наконец, легко убедиться, что оно — не связанное. Итак, отношение включения отличается по своим свойствам от других до сих пор рассмотренных отношений.

32. Функциональные отношения или отображения

Теперь мы рассмотрим поподробнее другую особенно важную категорию отношений. Отношение R называется отображением, функциональным отношением, или попросту функцией, если каждому предмету y соответствует не более одного предмета x, так что xRy; другими словами, если из формул:

$$xRy \text{ и } zRy$$

следует формула:

$$x = z.$$

Последующие члены отношения R, т. е. те предметы y, для которых действительно имеются такие предметы x, что

$$xRy,$$

называются аргументными значениями, предшествующие члены называются функциональными значениями или просто значениями функции R. Пусть R произвольная функция, а y любое из ее аргументных значений; обозначим единственное функциональное значение x, соответствующее аргументному значению y, символом «$R(y)$» на этом основании мы можем заменить формулу:

$$x\,R\,y$$

формулой:

$$x = R(y).$$ [58]

Вошло в обыкновение, особенно в математике, пользоваться для обозначения функциональных отношений не переменными «R_1», «S»,.., но другими буквами, как-то: «f», «q»..., так что мы встречаемся с формулами такого рода:

$$x = f(y),\ x = g(y),..;$$

формула:

$$x = f(y)$$

читается, например, так:

каждому аргументному значению y функция f ставит в соответствие (или соотносит) значение x

или:

x есть то значение функции f, которое соответствует (или которое соотнесено) аргументному значению y.

(Существует также и другое обыкновение — пользоваться переменной «x» для выражения аргументного значения и переменной «y» — для выражения функционального значения. Мы не будем придерживаться этого обыкновения и будем продолжать пользоваться «x» и «y» в обратном порядке, потому что это удобнее в связи с общим обозначением, принятым в теории отношений.)

Во многих элементарных учебниках алгебры можно найти определение понятия функции, отличающееся от принятого здесь определения. Функциональное отношение определяется там как отношение между двумя «переменными» величинами или числами; между «независимой переменной» и «зависимой переменной», связанными друг с другом зависимостью, поскольку изменение первой вызывает изменение второй. Подобного рода определения не должны были бы в настоящее время допускаться, ибо с логической точки зрения они не выдерживают критики; это пережитки того периода, когда пытались проводить различие между «постоянными» и «переменными» величинами (см. параграф 1). Тот, кто хочет считаться с требованиями современной науки и все же не желает окончательно порывать с традицией, может, однако, сохранить старую терминологию и, помимо терминов «аргументное значение» и «функциональное значение», пользоваться также и выражениями «значение независимой переменной» и «значение зависимой переменной».

Простейшим примером функционального отношения является обыкновенное отношение тождества. Как образец функции, встречающийся в повседневной жизни, возьмем отношение, выраженное функцией высказыванием:

x есть отец y.

Это функциональное отношение, так как для каждого лица *y* существует одно-единственное лицо *x*, являющееся отцом *y*. Чтобы указать на функциональный характер этого отношения, переформулируем наше выражние так:

x есть не кто иной, как отец y,

вместо чего можно также написать:

x тождествен отцу y.

Такое изменение первоначального выражения служит в обычном языке для той же цели, что и переход от формулы:

$$xRy$$

к формуле:

$$x = R(y)$$

в нашем символическом языке.

Понятие функции играет важнейшую роль в математических науках. Имеются целые отрасли высшей математики, исключительно посвященные изучению некоторых видов функциональных отношений. Но и в элементарной математике, особенно в алгебре и тригонометрии, в изобилии встречаются функциональные отношения. Образцами могут служить отношения, выраженные такими формулами, как:

$$x+y=5,$$
$$x=y^2,$$
$$x=\log_{10} y,$$
$$x=Sin\, y,$$

и многие другие. Рассмотрим подробнее вторую из этих формул. Всякому числу y соответствует только одно такое число x, при котором $x=y^2$, так что формула действительно представляет собой именно функциональное отношение. Аргументными значениями этой функции могут быть произвольные числа, функциональными же значениями могут, однако, быть лишь неотрицательные числа. Если мы обозначим эту функцию символом «f», то формула

$$x=y^2$$

приобретает вид:

$$x=f(y).$$

Очевидно, что «x» и «y» можно здесь заменить символами, обозначающими определенные числа. Так как, например,

$$4=(-2)^2,$$

то можно утверждать, что

$$4=f(-2);$$

таким образом, 4 есть значение функции f, соответствующее аргументному значению -2.

С другой стороны, опять-таки в элементарной математике, мы находим многочисленные отношения, не являющиеся функциями. Например, отношение «быть меньше» не может, конечно, рассматриваться как функция, ввиду того, что при каждом числе y имеется бесконечное множество таких чисел x, что

$$x<y.$$

Равным образом, и отношение между числами x и y, выраженное формулой:

$$x^2 + y^2 = 25,$$

не есть функциональное отношение, так как одному и тому же числу y здесь могут соответствовать два различных числа x, при которых формула остается справедливой, например, числу 4 соответствует и число 3 и число —3. Надо отметить, что отношения между числами, выраженные подобно только что рассмотренному при помощи уравнений и соотносящие с одним числом y два или более чисел x, иногда называются в математике дву- или многозначными функциями в противоположность однозначным функциям, т. е. функциям в обыкновенном значении. Представляется, однако, нецелесообразным, по крайней мере на элементарном уровне, называть подобные отношения функциями, так как это только ведет к затушевыванию существенной разницы между понятием функции и более общим понятием отношения.

Функциям принадлежит особенное значение в той мере, в какой дело идет о применении математики к опытным наукам. При всяком изучении зависимости между двумя родами количеств, встречающейся во внешнем мире, мы стараемся придать этой зависимости вид математической формулы, которая позволила бы нам точно определить количество одного рода при помощи соответствующего количества другого рода; подобная формула всегда представляет собой некоторое функциональное отношение между количествами двух родов. Для примера упомянем хорошо известную формулу из области физики:

$$s = 4{,}9t^2,$$

выражающую зависимость расстояния s, проходимого свободно падающим телом от времени t его падения (при измерении расстояния в метрах, а времени — в секундах).

* В заключение наших замечаний о функциональных отношениях надо подчеркнуть, что понятие функ-

ции, рассматриваемое здесь, существенно отличается от понятий функции-высказывания и функции-указателя, известных нам из параграфа 2. Строго говоря, термины «функция-высказывание» и «функция-указатель» не принадлежат к области логики или математики; они означают некоторые категории выражений, служащих для установления логических и математических положений, но они не означают предметов, рассматриваемых этими положениями (см. параграф 9). С другой стороны, термин «функция» в его новом смысле есть выражение чисто логического характера; оно означает известный род предметов, с которыми имеют дело логика и математика. Несомненно, между этими понятиями имеется связь, которая в самых общих чертах может быть обрисована следующим образом. Если переменную «x» присоединить символом «=» к функции-указателю, содержащей «y» в качестве единственной переменной, например «y^2+2y+3», то формула, полученная в результате (и являющаяся функцией-высказыванием):

$$x=y^2+2y+3,$$

выражает функциональное отношение; или, другими словами, отношение, существующее между теми, и только теми, числами x и y, которые удовлетворяют этой формуле, является функцией в новом смысле. В этом — одна из причин, почему эти понятия так часто смешиваются *.

33. Взаимно-однозначные отображения или взаимно-однозначные функции и взаимно-однозначные соответствия

Среди функциональных отношений следует уделить особое внимание так называемым **взаимно-однозначным отображениям** или **взаимно-однозначным функциям**, т. е. тем функциональным отношениям, в которых не только с каждым аргументным значением y соотнесено одно функциональное значение x, но и обратно, каждому функциональному значению x соответствует только одно аргументное, т. е. значение y, их можно тоже определить как отношения, отличающиеся таким свойством, что и обратные им отношения (см. параграф 28), так же как и они сами, являются отображениями.

Если f взаимно-однозначная функция, K произвольный класс ее аргументных значений, а L — класс функциональных значений, соотнесенных с элементами K, мы говорим, что функция f взаимно-однозначно отображает класс K на класс L, или что она устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами K и L.

Рассмотрим некоторые примеры. Предположим, имеется полупрямая, исходящая из точки O, с отмеченным на ней отрезком, означающим единицу длины. Далее, пусть Y произвольная точка на этой полупрямой. Тогда отрезок OY можно измерить, т. е. соотнести с ним некоторое неотрицательное число x, называемое длиной отрезка. Ввиду того что число это зависит исключительно от положений точки Y, мы можем обозначить его символом «$f(Y)$»; следовательно, мы получим:

$$x = f(Y).$$

Обратно, для каждого неотрицательного числа x мы можем также построить на рассматриваемой полупрямой однозначно определенный отрезок OY, длина которого равна x; другими словами, каждому x соответствует единственная точка Y, такая, что

$$x = f(Y).$$

Следовательно, функция f взаимно-однозначна; она устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками полупрямой и неотрицательными числами (и было бы равным образом просто установить взаимно-однозначное соответствие между точками всей прямой и всеми действительными числами). Другим примером может быть отношение, выраженное формулой:

$$x = -y.$$

Это взаимно-однозначная функция, так как для каждого числа x имеется только одно число y, удовлетворяющее данной формуле; легко можно видеть, что эта функция отображает, например, множество всех положительных чисел взаимно однозначно на множество всех отрицательных чисел. В виде последнего примера, рассмотрим еще отношение, выраженное формулой:

$$x = 2y,$$

предположив при этом, что символ «y» означает здесь только натуральные числа. Перед нами опять-таки взаимно-однозначная функция; с каждым натуральным числом y она соотносит четное число $2y$; и обратно, каждому четному числу x здесь соответствует только одно число y, такое, что $2y = x$, т. е. число $y = {}^1/_2 x$, Следовательно, функция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между всеми натуральными числами и четными натуральными числами. Много примеров взаимно-однозначных функций и взаимно-однозначных соответствий может быть взято из области геометрии (симметрические, коллинеарные отображения и т. п.).

Благодаря тому, что в нашем распоряжении уже есть понятия взаимно-однозначного соответствия, мы в состоянии теперь дать точное определение термина, о котором раньше мы могли дать лишь общее представление. Это — понятие равномощных классов (см. параграф 26). Теперь мы скажем, что два класса: K и L равномощны, или что у них одно и то же кардинальное число, если существует функция, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между этими двумя классами. На основе этого определения можно сделать вывод, что в связи с вышеприведенными примерами множество всех точек произвольной полупрямой равномощно множеству всех неотрицательных чисел; и, таким же образом, множество положительных чисел и множество отрицательных чисел — равномощны; это же можно установить и относительно множества всех натуральных чисел и множества всех четных натуральных чисел. Последний пример особенно важен, так как он показывает, что класс может быть равномощен со своим же собственным подклассом. Многим читателям это обстоятельство может с первого взгляда показаться в высшей степени парадоксальным, потому что обычно сравниваются по числу элементов только конечные классы, а у конечного класса, разумеется, кардинальное число больше, чем у всякой из частей этого же класса. Парадоксальность исчезает, если вспомнить, что множество натуральных чисел бесконечно и что мы никоим образом не имеем права приписывать бесконечным классам те свойства, которые мы наблюдали исключительно в отношении к конечным классам. Достойно внимания, что присущее множеству натуральных чисел свойство быть равномощным с одной из своих частей разделяется и всеми другими бесконечными классами. Это свойство, следовательно, характерно для бесконечных классов и позволяет нам отличать их от конечных классов; конечный класс может попросту быть определен как класс, не равномощный ни с одним из своих собственных подклассов. (Однако, это определение заключает в себе некоторую логическую трудность, в обсуждение которой мы здесь не будем входить.)*

34. Многочленные отношения; функции нескольких переменных и действия

До сих пор мы рассматривали исключительно д в у ч л е н н ы е (или б и н а р н ы е) о т н о ш е н и я, т. е., отношения, существующие между двумя предметами. Однако в различных науках часто встречаются также

* Первый, кто обратил внимание на указанное здесь свойство бесконечных классов, был немецкий философ и математик Б о л ь ц а н о (B. Bolzano), 1781—1848, в своей книге *«Парадоксы бесконечного»* («Paradoxen des Unendlichen», Leipzig, 1851 г., посмертное издание): в этой работе мы уже обнаруживаем первоначальные основы современной теории множеств.

и трехчленные (или тернарные) и вообще многочленные отношения. Например, в геометрии отношение «быть между» является типичным примером трехчленного отношения; оно существует между тремя точками на линии и символически выражается формулой:

$$A/B/C,$$

которая читается так:

точка B лежит между точками A и C.

И арифметика также содержит многочисленные примеры трехчленных отношений; достаточно упомянуть отношение между тремя числами x, y и z, заключающееся в том, что первое число есть сумма двух других:

$$x = y + z,$$

а равным образом подобные же отношения, например выражаемые в формулах:

$$x = y - z,$$

$$x = y \cdot z,$$

$$x = y : z.$$

Как на пример четырехчленного отношения укажем на отношение, существующее между четырьмя точками A, B, C и D, если, и только если, расстояние между первыми двумя точками равно расстоянию между другими двумя точками, иными словами, если отрезки AB и CD — конгруэнтны. Другим примером может служить отношение, существующее между числами x, y, z и t, если они образуют пропорцию:

$$x : y = z : t.$$

Вышеуказанное свойство впоследствии было использовано Пирсом (см. подстрочное примечание на стр. 44) и другими при формулировке точного определения конечного и бесконечного класса. [Больцано — чешский, а не немецкий философ и математик. — *Ред.*]

Особое значение среди всех многочленных отношений имеют многочленные функциональные отношения, соответствующие двучленным функциональным отношениям. Ради простоты мы ограничимся лишь рассмотрением трехчленных отношений этого типа. R называется **трехчленным функциональным отношением**, если всяким двум предметам y и z соответствует самое большее один предмет x, имеющий это отношение к y и z. Этот однозначно установленный предмет, при условии если он вообще существует, мы обозначаем либо символом

$$R(y,z),$$

либо еще символом

$$yRz.$$

(который теперь приобретает другое значение по сравнению с тем, какое он имел в теории двучленных отношений). Таким образом, для обозначения того, что x состоит к y и z в функциональном отношении R, мы располагаем двумя формулами:

$$x = R(y, z) \text{ и } x = yRz.$$

В соответствии с этой двойной символикой у нас имеется и двойной способ выражения. При пользовании обозначением

$$x = R(y,z)$$

отношение R называется **функцией**. Чтобы различать между двучленными и трехчленными функциональными отношениями, мы в первом случае говорим о функциях одной переменной или о функциях с одним аргументом, а во втором случае — о функциях двух переменных или о функциях с двумя аргументами. Подобным же образом четырехчленные функциональные отношения называются функциями трех переменных или функциями с тремя аргументами и т. д. При обозначении функций с любым числом аргументов принято употреблять переменные «f», «g» ..., формула

$$x = f(y, z)$$

читается:

x есть то значение функции f, которое соответствует аргументным значениям y и z.

Когда употребляется символика:

$$x = yRz,$$

отношение R рассматривается обычно как д е й с т в и е или, точнее, как б и н а р н о е д е й с т в и е, и вышеприведенная формула читается следующим образом:

x есть результат действия R, выполняемого над y и z;

вместо буквы «R» в этом случае предпочитают пользоваться другими буквами, особенно буквой «O». Примерами могут служить четыре главных арифметических действия — сложение, вычитание, умножение и деление, а также такие логические действия, как сложение и умножение классов или отношений (см. параграфы 25 и 28). Содержание двух понятий — функции двух переменных и бинарного действия — является, очевидно, совершенно одним и тем же. Не мешает, быть может, заметить, что функции одной переменной иногда также называются действиями и, в частности, у н а р н ы м и д е й с т в и я м и; в исчислении классов, например, образование дополнения к классу обычно мыслится не как функция, но как действие.

Хотя многочленные отношения играют значительную роль в различных науках, общая теория этих отношений все еще находится на своей начальной стадии; говоря об отношении или о теории отношений, обычно имеют в виду только двучленные отношения. Более точному изучению до сих пор была подвергнута лишь одна особая категория трехчленных отношений, а именно категория бинарных действий, в качестве прототипа которой может рассматриваться обыкновенное арифметическое сложение. Эти исследования выполнялись в рамках специальной математической дисциплины, известной под названием теории групп. С некоторыми понятиями теории групп и, тем самым, также с некоторыми общими свойствами бинарных действий мы познакомимся во второй части этой книги.

35. Значение логики для других наук

Мы подвергли рассмотрению наиболее важные понятия современной логики и попутно познакомились с некоторыми законами (правда, очень немногочисленными), касающимися этих понятий. Однако в наши намерения не входило дать полный перечень всех логических понятий и законов, которыми пользуются в научной аргументации. Это, впрочем, и не является необходимым, поскольку дело касается изучения и разработки других наук, даже и математики, особенно тесно примыкающей к логике. Логика справедливо рассматривается как основа всех других наук, хотя бы по той причине, что в каждой аргументации мы употребляем понятия, взятые из области логики, и каждое заключение производится в согласии с законами этой дисциплины. Однако это не означает, что доскональное знание логики — необходимое условие правильного мышления; даже профессиональные математики, которые вообще не делают ошибок в своих заключениях, обычно не знают логики в таких пределах, чтобы отдавать себе отчет во всех логических законах, к которым они бессознательно прибегают. Тем не менее нет никаких сомнений, что знание логики имеет важное практическое значение для каждого, кто желает правильно думать и умозаключать, так как она усиливает врожденные и приобретенные способности в этом отношении и, в особенно сложных случаях, предостерегает от совершения ошибок. Поскольку дело касается в частности построения математических теорий, логика приобретает глубокое значение также и с теоретической точки зрения; этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте примеры отношений из области арифметики, геометрии, физики и повседневной жизни.

2. Рассмотрите отношение «быть отцом», т. е. отношение, выраженное функцией суждения:

x есть отец y.

Все ли человеческие существа принадлежат к области этого отношения? Принадлежат ли все они к конверсной области?

3. [39] Рассмотрите следующие семь отношений между людьми, а именно — «быть отцом», «быть матерью», «быть ребенком», «быть братом», «быть сестрой», «быть мужем», «быть женой». Мы обозначаем эти отношения символическими знаками: «**F**», «**M**», «**C**», «**B**», «**S**», «**H**», «**W**». Производя над отношениями различные действия, определенные в параграфе 28, мы получаем новые отношения, для обозначения которых иногда можно найти простые слова в обыденном языке, «**H**/**C**», например, как это очень легко увидеть, означает отношение «быть зятем». Найдите, если это возможно, простые слова для следующих отношений:

$$\breve{\mathbf{B}},\ \breve{\mathbf{H}},\ \mathbf{H} \cup \mathbf{W},\ \mathbf{F} \cup \mathbf{B},\ \mathbf{F}/\mathbf{M},\ \mathbf{M}/\breve{\mathbf{C}},\ \mathbf{B}/\breve{\mathbf{C}},\ \mathbf{F}/(\mathbf{H} \cup \mathbf{W}),$$

$$(\mathbf{B}/\breve{\mathbf{C}} \cup [\mathbf{H}/(\mathbf{S}/\breve{\mathbf{C}})].$$

С помощью символов «**F**», «**M**» и т. п. и символов исчисления отношений выразите отношения «быть родителем, внуком, невесткой, тещей, свекровью».

Объясните значение следующих формул и определите, какие из них истинны:

$$\mathbf{F} \subset \mathbf{M}',\ \breve{\mathbf{B}} = \mathbf{S},\ \mathbf{F} \cup \mathbf{M} = \breve{\mathbf{C}}, = \mathbf{H}/\mathbf{M} = \mathbf{F},\ \mathbf{B}/\mathbf{S} \subset \mathbf{B},$$

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{C}/\breve{\mathbf{C}}.$$

4. [40] Рассмотрите следующие две формулы исчисления отношений:

$$R/\mathbf{S} = S/R \text{ и } (\breve{R}\ \breve{\mathbf{S}}) = \breve{\mathbf{S}}/\breve{R}.$$

Покажите при помощи примера, что первая не всегда удовлетворяется, и попробуйте доказать, что вторая всегда удовлетворяется, каковы бы ни были отношения R и S.

Указание: примите во внимание, как надо понимать, что между двумя предметами x и y существует отношение $(\breve{R}/\breve{S})$, (т. е. конверсное отношению R/S) или отношение $\breve{S}/\breve{R}$.

5. Сформулируйте в символах определения всех терминов исчисления отношений, которые рассматривались в параграфе 28.

Указание. Определение суммы двух отношений, имеет, например, следующую форму:

$$[x(R \cup S)y] \longleftrightarrow [(xRy) \vee (xSy)].$$

6. Какие из свойств отношений, рассмотренных в параграфе 29, принадлежат следующим отношениям:

(a) отношению делимости в множестве натуральных чисел;

(b) отношению «быть взаимно-простыми» в множестве натуральных чисел (два натуральных числа называются взаимно-простыми, когда их общий наибольший делитель есть 1);

(c) отношению конгруэнтности в множестве многоугольников;

(d) отношению «быть длиннее» в множестве отрезков прямой;

(e) отношению «быть перпендикулярным» в множестве прямых линий на плоскости;

(f) отношению «иметь непустое пересечение» в множестве геометрических фигур;

(g) отношению одновременности в классе физических явлений;

(h) отношению предшествования во времени в классе физических явлений;

(i) отношению родственных связей в классе людей;

(k) отношению отцовства в классе людей?

7. Верно ли, что каждое отношение либо рефлексивно, либо антирефлексивно (в данном классе) и либо симметрично, либо асимметрично? Приведите примеры.

8. Мы будем называть отношение R **интранзитивным в классе** K, если для всяких трех элементов x, y и z класса K из формул:

$$xRy \quad \text{и} \quad yRz$$

следует формула:

$$\sim(x\dot{R}z).$$

Какие из отношений, перечисленных в упражнениях 3 и 6. интранзитивны? Дайте другие примеры интранзитивных отношений. Является ли каждое отношение либо транзитивным либо интранзитивным?

∗ 9. Покажите, как сделать переход от выражения:

прямые a и b параллельны

к эквивалентному выражению:

направления прямых a и b тождественны

и как, в этой связи, определить выражение *«направление прямой»*.

Решите ту же задачу для следующих двух выражений:

отрезки AB и CD конгруэнтны

длина отрезка AB и длина отрезка CD равны.

Какой логический закон надо здесь применить?

Указание: сравните с замечаниями в параграфе 30 относительно понятия подобия.

10. Условимся называть два знака или два выражения, состоящих из нескольких знаков, **равновидными**, если они не отличаются друг от друга в отношении своего начертания, но могут отличаться в отношении своего положения в пространстве, т. е. в отношении места, на котором они начертаны; в противном случае будем называть их **неравновидными**. Например, в формуле:

$$x = x$$

переменные по обе стороны знака равенства равновидны, между тем как в формуле:

$$x = y$$

переменные неравновидны.

Из какого количества знаков состоит формула:

$$x + y = y + x\,?$$

На сколько групп могут быть разделены эти знаки так, чтобы два равновидных знака принадлежали к одной и той же группе, а два неравновидных знака принадлежали к различным группам?

Какие из свойств, рассмотренных в параграфе 29, принадлежат к отношениям равновидности и неравновидности?

* 11. На основе результатов предшествующего упражнения объясните, почему относительно равновидных знаков можно сказать, что они равны в отношении своей формы или что у них одна и та же форма, и как надо определить термин *«форма данного знака»* (ср. упражнение 9).

Очень распространено обыкновение называть равновидные знаки попросту равными и даже рассматривать их так, будто они представляют собой один и тот же знак. Так, например, часто говорится, что в выражении вроде:

$$x + x$$

по ту и по другую сторону знака «$+$» стоит одна и та же переменная. Как надо было бы это выразить с большей точностью?

* 12. Неточный способ выражения, на который было указано в упражнении 11, несколько раз употреблялся и в этой книге (в конце концов, в данном случае незачем бороться с глубоко укоренившимся обыкновением). Укажите неточности подобного рода на страницах 40 и 91 и объясните, как их можно избегнуть.

Другим примером неточного способа выражения подобного же рода может служить случай, когда говоря о функциях-высказываниях с одной свободной переменной, разумеют под этим функции, в которых все свободные переменные равновидны. Каким образом выражение:

функции-высказывания с двумя свободными переменными

сформулировать более точно?

13. Взяв на плоскости какую-либо одну точку, рассмотрите множество всех кругов на этой плоскости с центром в данной точке. Покажите, что это множество упорядочивается отношением «быть частью». Осталось ли бы это верным, если бы круги не лежали в одной и той же плоскости или если бы они не были концентричны?

14. Рассмотрим отношение между словами, которое будет называться отношением п р е д ш е с т в о в а н и я (в л е к с и к о г р а ф и ч е с к о м п о р я д к е). Объясним здесь при помощи примеров значение этого термина. Слово *«арка»* предшествует слову *«год»*, так как первое начинается с *«а»*, второе с *«г»*, *«а»* же стоит в алфавите раньше *«г»*. Слово *«араб»* предшествует слову *«атом»*, так как хотя у них одна и та же первая буква (или, вернее, равновидные первые буквы — см. упражнение 10), но вторая буква первого слова, а именно *«р»* в алфавите стоит раньше, чем вторая буква второго слова, т. е. *«т»*. Аналогично, слово *«араб»* предшествует слову *«арык»*, а *«удав»* слову *«удар»*. Наконец, *«год»* предшествует слову *«годовщина»*, так как хотя первые три буквы у этих слов одни и те же, но первое слово состоит только из этих букв, во втором же есть буквы и сверх этих; аналогичным образом *«плот»* предшествует слову *«плотина»*.

Выпишите в строчку следующие слова так, чтобы в каждой паре слов левое слово предшествовало (в лексикографическом смысле) правому:

суд, акт, стон, суп, судак, стог, станок, актив, воз.

Постарайтесь дать совершенно общее определение отношению предшествования между словами. Покажите, что это отношение устанавливает порядок в классе всех русских слов. Укажите на некоторые практические применения этого отношения и объясните, почему говорят об установлении лексикографического порядка.

15.[41] Рассмотрите произвольное отношение R и его отрицание R'. Покажите, что следующие положения теории отношений истинны:

(a) *если отношение R рефлексивно в классе K, то отношение R' антирефлексивно в этом классе;*

(b) *если отношение R симметрично в классе K, то отношение R' также симметрично в классе K;*

*(c) *если отношение R асимметрично в классе K, то отношение R' рефлексивно и связано в этом классе;*

*(d) *если отношение R транзитивно и связано в классе K, то отношение R' транзитивно в этом классе.*

Правильны ли подобным же образом все конверсные положения?

16. Покажите, что если отношение R имеет одно из свойств, рассмотренных в параграфе 29, то и конверсное отношение R' имеет то же самое свойство.

* 17.[42] Свойства отношений, введенные в параграфе 29, можно легко выразить в терминах исчисления отношений, когда класс K, к которому они относятся, является универсальным классом. Формулы:

$$R/R \subseteq R \quad \text{и} \quad \mathrm{D} \subseteq R \cup \breve{R}$$

выражают, например, что отношение R является, соответственно, транзитивным и связанным. Объясните, почему; вспомните значение символа «D» в параграфе 28. Выразите подобным же образом, что отношение K симметрично, асимметрично или интранзитивно (см. упражнение 8). Какое свойство отношения, рассмотренное в данной главе, выражается формулой:

$$R/\breve{R} \subseteq \mathrm{I}?$$

18. Какие из отношений, выраженных следующими формулами, являются функциями:

(a) $$2x + 3y = 12,$$

(b) $$x^2 = y^2,$$

(c) $$x+2>y-3,$$

(d) $$x+y=y^2,$$

(e) $$x \text{ есть мать } y,$$

(f) $$x \text{ есть дочь } y?$$

Какие из отношений, рассмотренных в упражнении 3, являются функциями?

19. Рассмотрите функцию, выраженную формулой:

$$x = y^2 + 1.$$

Каково множество всех аргументных значений и каково множество всех значений функций?

* 20. Какие из функций в упражнении 18 взаимно-однозначны? Дайте другие примеры взаимно-однозначных функций.

* 21. Рассмотрите функцию, выраженную формулой:

$$x = 3y + 1.$$

Покажите, что это взаимно-однозначная функция и что она взаимно-однозначно отображает интервал [0,1] на интервал [1,4] (ср. упражнение 6 гл. IV). Какое заключение можно вывести из рассмотрения кардинальных чисел этих интервалов?

* 22. Рассмотрите функцию, выраженную формулой:

$$x = 2^y.$$

Пользуясь этой функцией, покажите, в пределах предшествующего упражнения, что множество всех чисел и множество всех положительных чисел равномощны.

* 23. Покажите, что множество всех натуральных чисел и множество всех нечетных чисел равномощны.

24. Дайте примеры многочленных отношений из областей арифметики и геометрии.

25. Какие из трехчленных отношений, выраженных следующими формулами, представляют собой функции:

(a) $$x + y + z = 0,$$

(b) $$xy > 2z,$$

(c) $$x^2 = y^2 + z^2,$$

(d) $$x + 2 = y^2 + z^2?$$

26. Назовите несколько законов физики, устанавливающих существование функциональных отношений между двумя, тремя и четырьмя количествами.

О ДЕДУКТИВНОМ МЕТОДЕ

36. Основные составные части дедуктивной теории — первичные и определенные понятия, аксиомы и теоремы

Теперь мы приступим к изложению основных принципов, применяемых в построении логики и математики. Подробный анализ и критическая оценка этих принципов составляют задачи специальной дисциплины, называемой методологией дедуктивных наук или методологией математики. Для каждого, кто намерен изучать или разрабатывать какую-либо науку, несомненно, важно отдавать себе отчет в методе, применяемом при построении этой науки; и мы увидим, что в отношении математики знание этого метода имеет особенно глубокое значение, ибо отсутствие этого знания приводит к невозможности понять самую природу математики.

Принципы, с которыми мы познакомимся, имеют целью обеспечить для знаний, полученных в области логики и математики, возможно большую степень ясности и достоверности. С этой точки зрения идеальным был бы такой метод рассмотрения, который позволил бы объяснить смысл каждого выражения, встречающегося в этой науке, и обосновать каждое из ее утверждений. Легко видеть, что этот идеал никогда не может быть осуществлен. Действительно, пытаясь объяснить смысл какого-либо выражения, мы по необходимости пользуемся другими выражениями, а объясняя, в свою очередь, смысл этих выражений, мы, не впадая в порочный круг, вынуждены опять обратиться к новым выражениям и т. д. Таким образом, перед нами начало процесса, который никогда не может притти к концу, процесса, который, фигурально выражаясь, может быть охарактеризован как бесконечный регресс — *regressus in infinitum*. Совершенно аналогичное положение возникает и тогда, когда дело идет об обосновании научных утверждений, ибо устанавливая верность того или иного положения, необходимо обратиться вспять — к другим положениям, а это (если избегать порочного круга) поведет опять-таки к бесконечному регрессу.

Путем компромисса между этим недостижимым идеалом и осуществимыми возможностями возникли некоторые принципы, касающиеся построения математических дисциплин и могущие быть изложенными следующим образом [43].

Когда мы принимаемся за построение данной дисциплины, мы различаем в этой дисциплине прежде всего небольшую группу выражений, которые, как нам кажется, понятны сами по себе; выражения этой группы мы называем *первичными терминами* или *определяемыми терминами* и употребляем их без объяснения их смысла. Вместе с тем, мы придерживаемся принципа не употреблять никакого из других выражений рассматриваемой дисциплины без предварительного определения их смысла при помощи первичных терминов и таких выражений этой дисциплины, смысл которых был ранее достаточно разъяснен. Высказывание, определяющее таким способом значение термина, называется *определением*, а самые выражения, смысл которых был при этом определен, известны, согласно этому, под названием *определяемых терминов*.

Подобным же образом мы поступаем и в отношении утверждений, с которыми мы встречаемся в рассматриваемой дисциплине. Некоторые из этих утверждений, которые кажутся нам очевидными [44], избраны в качестве так называемых *первичных утверждений* или *аксиом* (часто называемых также постулатами, но мы здесь не будем пользоваться последним термином в этом техническом значении); мы их принимаем за истинные, не устанавливая каким-либо образом их достоверности. С другой стороны, мы соглашаемся признавать правильным всякое другое утверждение, только если нам удалось установить его истинность, не пользуясь при этом ничем, кроме аксиом, определений и таких утверждений данной дисциплины, истинность которых уже была предварительно установлена[45]. Как хорошо известно, положения, установленные таким путем, называются доказанными положениями или теоремами, а процесс установления их называется доказательством. Говоря более общо, если мы устанавливаем в логике или математике какое-либо положение на основании других положений, мы прибегаем к такому способу, как выведение или дедукция, а о положении, установленном таким способом, говорится, что оно выведено или дедуцировано из других положений, или является их следствием[46].

Современная математическая логика — одна из тех дисциплин, которые построены в согласии с только что установленными принципами[47]; к сожалению, в узких рамках этой книги невозможно было должным образом оттенить этот важный факт. Если какая-либо другая дисциплина построена в согласии с этими принципами, то она тем самым базируется на логике; логика, так сказать, уже ей тогда предпослана. Это значит, что все выражения и законы логики рассматриваются на равных началах с первичными терминами и аксиомами строящейся дисциплины; логические термины употребляются, например, при формулировке аксиом, теорем и определений без объяснения их смысла, а логические законы употребляются в доказательствах без предварительного установления их истинности. Иногда при построении дисциплины бывает также удобно не только пользоваться логикой, но в том же смысле пользоваться и некоторыми уже построенными математическими дисциплинами; ради краткости эти теории заодно с логикой могут быть охарактеризованы как дисциплины, предшествующие данной дисциплине. Логика сама по себе не предполагает никакой предшествующей дисциплины; при построении арифметики как специальной математической дисциплины логика предполагается как единственная предшествующая дисциплина; с другой стороны, при построении геометрии полезно, хотя и не неизбежно, предполагать не только логику, но также и арифметику.

В связи с последними замечаниями необходимо внести некоторые поправки в формулировку вышеустановленных принципов. Прежде чем предпринять построение какой-либо дисциплины, нужно перечислить те дисциплины, которые должны предшествовать данной дисциплине; все требования, касающиеся определения выражений и доказательства положений, ограничены, однако, лишь выражениями и положениями, специфичными для строящейся дисциплины, т. е. такими, которые не принадлежат предшествующим дисциплинам.

Метод построения дисциплины в строгом согласии с вышеизложенными принципами известен как дедуктивный метод, а дисциплины, построенные по такому способу, называются дедуктивными теориями*. Все более и более распространяется взгляд, что дедуктивный метод — это единственная существенная черта, при помощи которой математические дисциплины можно отличить от всех других наук; не только всякая математическая дисциплина

---

* Дедуктивный метод не может рассматриваться как достижение нового времени. Уже в *«Элементах»* греческого математика Эвклида (около 300 г. до н. э.) мы находим изложение геометрии, которое не оставляет желать ничего большего с точки зрения математических принципов, установленных выше [48]. На протяжении 2200 лет математики видели в Эвклидовом труде идеал и прототип научной точности. Существенный прогресс в этой области проявился только на протяжении последних пятидесяти лет, в течение которых фундаментальные принципы основных математических дисциплин геометрии и арифметики были согласованы со всеми требованиями современной методологии математики. Среди трудов, которым мы обязаны этим прогрессом, упомянем хотя бы следующие два труда, которые уже приобрели историческое значение: *«Математический формуляр»* («Formulaire de Mathématiques», Torino, 1895—1908), коллективный труд, редактором и основным автором которого был итальянский математик и логик Пеано (1858—1932), и *«Основы геометрии»* («Grundlagen der Geometrie», Leipzig und Berlin, 1899), составленные великим современным немецким математиком Гильбертом.

является дедуктивной теорией, но и обратно, всякая дедуктивная теория есть математическая дисциплина (согласно этому взгляду, дедуктивная логика также должна числиться среди математических дисциплин) [49]. Здесь мы не будем входить в рассмотрение доводов в пользу этого взгляда, а ограничимся лишь замечанием, что можно было бы выставить веские доводы в его пользу.

37. Модель и интерпретация дедуктивной теории

В результате последовательного применения принципов, изложенных в предшествующем разделе, дедуктивные теории приобретают некоторые интересные и важные черты, которые мы здесь опишем. Так как вопросы, которые мы сейчас подвергнем обсуждению, отличаются несколько запутанным и отвлеченным характером, мы попробуем пояснить их при помощи конкретного примера.

Предположим, нас итересуют общие явления, связанные с конгруэнтностью отрезков, и мы намерены построить этот фрагмент геометрии в виде специальной дедуктивной теории. Согласно этому, мы уславливаемся, что переменные «x», «y», «z» означают отрезки. В качестве первичных терминов мы избираем символы «S» и «$\cong$». Первый представляет собой сокращенное обозначение термина «*множество всех отрезков*», второй означает отношение конгруэнтности, так что формула:

$$x \cong y,$$

читается так:

отрезки x *и* y *конгруэнтны.*

Далее, мы принимаем только две аксиомы:

Аксиома I. *Для всякого элемента* x *множества* S $x \cong x$ (другими *словами: каждый отрезок конгруэнтен самому себе*).

Аксиома II. *Для всяких элементов* x, y и z *множества* S, *если* $x \cong z$ *и* $y \cong z$, *то* $x \cong y$ (другими словами:

два отрезка, конгруэнтные тому же самому отрезку, конгруэнтны между собой).

Различные теоремы конгруэнтности отрезков могут быть выведены из тех же аксиом, например:

> ***Теорема* I.** *Для любых элементов y и z множества* **S**, *если $y \cong z$, то $z \cong y$.*
>
> ***Теорема* II.** *Для любых элементов x, y и z множества* **S**, *если $x \cong y$ и $y \cong z$, то $x \cong z$.*

Доказательства обеих теорем очень легки Наметим, например, доказательство первой теоремы.

Подставив в аксиоме II «z» вместо «x», мы получаем:

> *для всяких элементов y и z множества* **S**, *если $z \cong z$ и $y \cong z$, то $z \cong y$.*

В антецеденте этого утверждения имеется формула:

$$z \cong z,$$

являющаяся, на основании аксиомы I, несомненно истинной,— следовательно, она может быть здесь опущена. Так мы приходим к указанной теореме.

В связи с этими простыми рассуждениями нужно сделать следующие замечания.

Наша миниатюрная дедуктивная теория покоится на подобранной должным образом системе первичных терминов и аксиом. Наше знание о предметах, обозначенных первичными терминами, т. е. об отрезках и их конгруэнтности, весьма понятно и никоим образом не исчерпывается принятыми аксиомами. Но это знание, так сказать, является нашим частным делом и не оказывает ни малейшего влияния на нашу теорию. В частности, при выведении теорем из аксиом мы никак не используем этого знания и поступаем так, как будто мы ничего не знаем о содержании понятий, входящих в наше рассуждение, и как будто нам ничего не известно о них, кроме того, что точно утверждается в аксиомах. Мы пренебрегаем, как это обычно делается, смыслом принятых нами первичных терминов и устремляем наше внимание исключительно лишь на форму аксиом, в которых эти термины встречаются.

Это ведет к очень важному и интересному следствию. Заменим первичные термины во всех аксиомах и теоремах нашей теории соответствующими переменными, — например, символ «**S**» переменной «K», означающей классы, а символ «$\cong$» переменной «R», означающей отношения (ради простоты рассмотрения мы пренебрегаем здесь какими-либо теоремами, заключающими в себе определяемые термины). Положения нашей теории перестанут тогда быть высказываниями, но станут функциями-высказываниями, содержащими две свободных переменных «K» и «R» и выражающими, вообще говоря, то обстоятельство, что отношение R имеет то или иное свойство в классе K (или, точнее, что то или иное отношение существует между R и K; см. параграф 27). Например, как легко видеть, теорема I и аксиомы I и II будут теперь гласить, что отношение R соответственно рефлексивно, симметрично и транзитивно в классе K. Аксиома II будет выражать свойство, для которого у нас нет специального наименования и которое мы будем называть свойством **P**; свойство это следующее:

для всяких элементов x, y и z класса K, если xRz и yRz, то xRy.

Так как при доказательствах в нашей теории мы пользовались только теми свойствами класса отрезков и отношения конгруэнтности, которые явно устанавливались в аксиомах, то каждое доказательство может быть значительно обобщено, потому что оно может быть применено ко всякому классу K и ко всякому отношению R, обладающим этими же свойствами. В результате такого обобщения доказательств мы можем с каждой теоремой нашей теории соотнести общий закон, принадлежащий к области логики, а именно — к теории отношений, и устанавливающий, что каждое отношение R, являющееся рефлексивным и имеющее свойство **P** в классе K, обладает также свойствами, устанавливаемыми рассматриваемыми теоремами. Так, например, теоремам I и II соответствуют следующие два закона:

I′. *Каждое отношение R, являющееся рефлексивным в классе K и обладающее в этом классе свойством* **P**, *является также симметричным в классе K.*

II′. *Каждое отношение R, рефлексивное в классе K и имеющее в этом классе свойство* **P**, *является также транзитивным в классе K.*

Если отношение R рефлексивно и имеет свойство **P** в классе K, мы говорим, что K и R образуют совместно модель или осуществление системы аксиом нашей теории, или попросту, что они удовлетворяют этой теории. Одна модель системы аксиом образуется, например, классом отрезков и отношением конгруэнтности, т. е. предметами, обозначенными при помощи первичных терминов; эта модель удовлетворяет, конечно, и всем теоремам, выведенным из аксиом. (Чтобы быть точными, мы должны сказать, что модель удовлетворяет не положениям теории самим по себе, но функциям-высказываниям, полученным из них путем замены первичных терминов переменными.) Однако эта частная модель не играет сколько-нибудь привилегированной роли при построении теории. Наоборот, на основании универсальных логических законов вроде I′ и II′ мы приходим к общему заключению, что всякая модель системы аксиом удовлетворяет всем теоремам, выведенным из этих аксиом. Ввиду этого обстоятельства модель системы аксиом нашей теории рассматривается и как модель теории.

Мы можем продемонстрировать много различных теорий для нашей системы аксиом, даже только в области логики и математики. Чтобы получить такую модель, мы избираем в области какой-либо другой дедуктивной теории две постоянных, скажем — «**K**» и «R» (первая означает класс, вторая — отношение), затем повсюду, во всей системе, мы заменяем знак «S» знаком «K» и «≅» знаком «R» и, наконец, мы показываем, что полученные таким образом высказывания являются теоремами или, возможно, аксиомами новой теории. Если мы это проделали успешно, мы говорим, что нашли *интерпретацию системы аксиом* и, в то же самое время, всей нашей *дедуктивной теории — в пределах другой дедуктивной теории*. Если мы теперь заменим первичные термины «S» и «≅» при помощи «K» и «R» не только в аксиомах, но также и во всех теоремах нашей теории, мы можем быть заранее уверены, что все высказывания, полученные таким образом, будут истинными высказываниями новой дедуктивной теории.

Мы дадим здесь два конкретных примера интерпретации нашей миниатюрной теории. В аксиомах I и II заменим символ «S» символом универсального класса «V» а символ «≅» знаком тождества «=». Можно сразу увидеть, что аксиомы превратятся в логические законы (а именно в законы II и V параграфа 17 в слегка измененной форме). Универсальный класс и отношение тождества образуют поэтому модель системы аксиом, наша же теория находит себе интерпретацию в пределах логики. Так, если в теоремах I и II мы заменим символы «S» и «≅» символами «V» и «=», мы можем быть уверены, что придем к истинным логическим высказываниям (действительно, мы опять-таки знакомы с ними; см. законы III и IV параграфа 17).

Далее, рассмотрим множество всех чисел или какое-либо другое множество чисел, обозначив его при помощи «N». Будем считать, что два числа x и y эквивалентны, т. е. символически:

$$x \equiv y$$

если их разность $x-y$ составляет целое число; так, например:

$$1\tfrac{1}{4} \equiv 5\tfrac{1}{4},$$

между тем как формула

$$3 \doteqdot 2^{1}\ {}_{3}$$

неверна.

Если теперь в обеих аксиомах заменить первичные термины символами «**N**» и «$\doteqdot$», легко показать, что высказывания, возникшие в результате этого, являются истинными арифметическими теоремами. Таким образом, наша теория располагает интерпретацией в пределах арифметики, так как множество чисел **N** и отношение эквивалентности образуют модель системы аксиом. И опять-таки без какого-либо специального рассуждения мы уверены, что теоремы I и II станут истинными арифметическими положениями, если их подвергнуть такому же преобразованию, что и аксиомы.

Общие явления, описанные выше, имеют много интересных применений при методологических исследованиях. Мы проиллюстрируем здесь это при помощи только одного примера; мы покажем, как можно доказать на основе этих явлений, что некоторые высказывания не могут быть выведены из нашей системы аксиом.

Рассмотрим следующее высказывание **A** (сформулированное только в логических терминах и в первичных терминах нашей теории).

A. *Существуют два элемента* x и y множества **S**, для которых неверно, что $x \doteqdot y$ (другими словами: *существуют два отрезка, не являющихся конгруэнтными*).

Это высказывание кажется несомненно истинным. Тем не менее, никакие попытки доказать его на основании аксиомы I и II не приводят к положительным результатам. Так возникает догадка, что высказывание A совсем не может быть выведено из наших аксиом. Для подтверждения этой догадки, мы рассуждаем следующим образом. Если бы высказывание **A** могло быть доказано на основании нашей системы аксиом, то, как мы знаем, каждая модель этой системы удовлетворяла бы этому высказыванию; если поэтому нам удастся указать такую модель системы аксиом, которая не будет удовлетворять высказыванию **A**, мы тем самым покажем, что это высказывание нельзя вывести из аксиом I и II. Затем оказывается, что построить подобную модель не составляет никакой трудности. Рассмотрим, например, множество всех целых чисел I (или какое-либо другое множество, хотя бы, например, множество, состоящее только из 0 и 1) и отношение эквивалентности $\equiv$ между вышеописанными числами. Из предшествующих замечаний мы уже знаем, что множество I и отношение $\equiv$ составляют модель нашей системы аксиом, однако высказыванию A эта модель не удовлетворяет, потому что нет таких целых чисел x и y, которые не были бы эквивалентными, т. е. таких, разность между которыми не была бы целым числом. Другая модель, пригодная для этой же цели, образуется произвольным классом индивидуумов и универсальным отношением V, существующим между всякими двумя индивидуумами. Только что примененный вид рассуждения известен под названием метода доказательства при помощи демонстрации модели или при помощи интерпретации.

Явления и понятия, разобранные здесь, могут быть без существенных изменений отнесены и к другим дедуктивным теориям. В следующем отделе мы попытаемся описать их в совершенно общем виде [50].

38. Закон дедукции; формальный характер дедуктивных наук

* Рассмотрим любую дедуктивную теорию, основанную на системе первичных терминов и аксиом. Ради упрощения наших рассуждений допустим, что нашей теории предшествует только одна логика (см. параграф 36). Представим себе, что во всех положениях нашей теории первичные термины повсюду заменены соответствующими переменными (как и в параграфе 37, опять-таки ради простоты, мы пренебрегаем теоремами, содержащими определенные термины).

Положения рассматриваемой теории становятся при этом функциями-высказываниями, содержащими в качестве свободных переменных те символы, которыми были заменены первичные термины, и не содержащими никаких постоянных, кроме тех, которые принадлежат к области логики.

Для тех или иных данных предметов можно выяснить, удовлетворяют ли они всем аксиомам нашей теории или, скажем более точно, функциям-высказываниям полученным из этих аксиом только что описанным способом (т. е. обращаются ли функции-высказывания в истинные высказывания при подстановке названий или обозначений этих предметов вместо свободных переменных (см. параграф 2). Если оказывается, что это именно так, мы скажем, что рассматриваемые предметы образуют *модель* или *осуществление системы аксиом* нашей дедуктивной теории; иногда мы также говорим, что они образуют *модель самой дедуктивной теории*. Совершенно аналогичным способом мы можем обнаружить, удовлетворяют ли данные предметы не только системе аксиом, но также всякой другой системе положений нашей теории и, тем самым, образуют ли они модель этой системы (не исключается возможность, что система состоит только из одного положения).

Модель системы аксиом образуется, например, теми предметами, которые обозначаются первичными терминами данной теории, раз только мы признаем, что все аксиомы являются истинными высказываниями; эта модель, конечно, удовлетворяет всем теоремам нашей теории. Но в той мере, в какой дело идет о построении нашей теории, эта модель не занимает сколько-нибудь выдающегося места среди других моделей. При выведении той или иной теоремы из аксиом мы не думаем о специфических свойствах этой модели и пользуемся только теми свойствами, которые ясно установлены в аксиомах и, тем самым, принадлежат каждой модели системы аксиом. Следовательно, каждое доказательство какой-либо частной теоремы нашей теории может быть распространено на всякую модель системы аксиом и может быть таким образом преобразовано в значительно более общее рассуждение, принадлежащее уже не нашей теории, но логике; как результат такого обобщения мы получаем общее логическое положение (подобное законам I′ и II′ предшествующего раздела), которым устанавливается тот факт, что рассматриваемой теореме удовлетворяет каждая модель нашей системы аксиом. Окончательное заключение, к которому мы таким образом приходим, можно выразить в следующем виде:

Каждой теореме данной дедуктивной теории удовлетворяет всякая модель системы аксиом этой теории; и кроме того, каждой теореме соответствует общее положение, которое может быть сформулировано и доказано в рамках логики и которым устанавливается тот факт, что рассматриваемой теореме удовлетворяет всякая такая модель[51].

Здесь перед нами общий закон из области методологии дедуктивных наук, который, если его сформулировать несколько точнее, известен как закон дедукции (или теорема о дедукции)*.

Большое практическое значение этого закона возникает потому, что мы обычно в состоянии продемонстрировать многочисленные модели систем аксиом частной теории, даже не оставляя области дедуктивных наук. Чтобы получить такую модель, достаточно выбрать те или иные постоянные из какой-либо другой дедуктивной теории (это может быть логика или теория, предполагающая логику), вставить их в аксиомы на место первичных терминов и показать, что полученные таким способом высказывания являются истинными в этой другой теории. В этом случае мы можем сказать, что мы нашли интерпретацию системы аксиом первоначальной теории в пределах другой теории.

---

* Этот закон был сформулирован автором в качестве общего методологического постулата, а впоследствии был точно доказан для различных частных дедуктивных теорий.

(В частности, может случиться, что избранные постоянные принадлежат рассматриваемой первоначально теории, — в таком случае некоторые из первичных терминов могут даже оставаться без изменения. По поводу данной системы аксиом говорится тогда, что найдена новая интерпретация в пределах рассматриваемой теории.) И теоремы первоначальной теории мы также подвергаем аналогичному преобразованию, повсюду заменяя первичные термины теми постоянными, которые употреблялись в интерпретации аксиом. На основании закона дедукции мы можем быть заранее уверены, что высказывания, к которым мы придем таким способом, суть верные положения новой теории. Мы можем сформулировать это следующим образом:

Все теоремы, доказанные на основании данной системы аксиом, справедливы во всякой интерпретации системы.

Излишне давать специальное доказательство для каждой из этих преобразованных теорем, во всяком случае это было бы задачей чисто механического характера, так как было бы достаточно перенести соответствующие рассуждения из области первичной теории и подвергнуть его тем же преобразованиям, какие были выполнены в отношении аксиом и теорем. Всякое доказательство в области дедуктивной теории содержит, так сказать, потенциально-неограниченное количество других аналогичных доказательств.

Вышеописанные факты наглядно показывают большую ценность дедуктивного метода с точки зрения экономии человеческой мысли. Они также обладают и глубоким теоретическим значением, хотя бы потому, что уже в самой методологии дедуктивных наук устанавливают основы для различных доказательств и исследований [52]. В частности, закон дедукции служит теоретической основой для всех так называемых доказательств при помощи интерпретации; в предшествующем отделе мы уже столкнулись с одним примером таких доказательств.

другие разнообразные примеры встретятся нам во второй части этой книги.

Надо добавить ради точности, что набросанные здесь соображения применимы ко всякой дедуктивной теории, при построении которой логика уже предполагается, между тем как их применение к самой логике приводит к известного рода трудностям, которые мы здесь предпочитаем не обсуждать.

Общим источником рассмотренных здесь методологических явлений служит обстоятельство, на которое указывалось в предшествующем параграфе — а именно то, что при построении дедуктивной теории мы пренебрегаем смыслом аксиом и принимаем во внимание только их форму. Именно поэтому при рассмотрении этих явлений и говорят о чисто ф о р м а л ь н о м х а р а к т е р е дедуктивных наук и всех рассуждений в области этих наук.

Время от времени встречаются положения, подчеркивающие формальный характер математики парадоксальным и преувеличенным образом; хотя в основе своей и правильные, эти положения могут стать источником неясности и путаницы. Так, случается слышать и даже читать, что математическим понятиям не может быть приписано никакое определенное содержание; что в математике мы по существу не знаем, о чем идет речь, и что мы не интересуемся, истинны ли наши утверждения. К подобным высказываниям следует подходить критически. Отвлечься при построении теории от смысла ее терминов — совсем не одно и то же, что отрицать всякий смысл за этими терминами. Бывают, надо согласиться, случаи, когда мы развиваем дедуктивную теорию, не приписывая определенного значения ее первичным терминам, обращаясь с ними как с переменными; в таких случаях мы говорим, что рассматриваем теорию как формальную систему [53]. Но такие случаи сравнительно редки (и даже не приняты во внимание в нашей общей характеристике дедуктивной теории, данной в параграфе 36) и встречаются только тогда, когда возможно дать несколько интерпретаций для системы аксиом этой теории, т. е. если имеется несколько способов, годных для придания конкретного смысла встречающимся в теории терминам, а мы не хотим отдать заранее предпочтение ни одному из этих способов. С другой стороны, формальная система, для которой мы не можем дать интерпретацию, никому, вероятно, не была бы интересна [54].

В заключение мы обратим внимание на некоторые интересные примеры интерпретаций математических дисциплин, гораздо более важные, чем те, что даны в параграфе 37.

Система аксиом арифметики может быть интерпретирована в пределах геометрии: если взять произвольную прямую, то можно определить такие отношения между ее точками и такие действия над ее точками, которые удовлетворяют всем аксиомам, а отсюда, следовательно, и всем теоремам арифметики, применяемым к соответствующим отношениям между числами и действиями над числами. (Это тесно связано с обстоятельством, упомянутым в параграфе 33, а именно с возможностью установления взаимно-однозначного соответствия между всеми точками прямой и всеми числами.) Обратно, система аксиом геометрии также находит интерпретацию в пределах арифметики. Возможные применения этих двух фактов весьма многообразны. Геометрические фигуры могут, например, быть приспособлены для наглядного изображения разных фактов из области арифметики, — способ этот известен под названием графического метода; с другой стороны, можно исследовать геометрические факты при помощи арифметического и алгебраического методов, существует даже специальная отрасль геометрии, известная под названием аналитической геометрии, занимающаяся исследованиями подобного рода.

Арифметика, как мы это уже видели, может быть построена как часть логики (см. параграф 26) [55]. Но если рассматривать арифметику как независимую дедуктивную теорию, основанную на своей собственной системе первичных терминов и аксиом, ее отношение к логике может быть описано следующим образом: арифметика располагает интерпретацией в пределах логики (при условии, если аксиома о бесконечности включается в логику, — см. параграф 26); другими словами, в пределах логики можно определить такие понятия, которые удовлетворяют всем аксиомам, а следовательно, и всем теоремам арифметики. Если вспомнить, что геометрия располагает интерпретацией в арифметике, мы придем к заключению, что и геометрия может быть интерпретирована в пределах логики. Все это — факты чрезвычайной важности с методологической точки зрения *.

39. Отбор аксиом и первичных терминов, их независимость

Теперь мы обратимся к обсуждению некоторых проблем более специального характера, которые, однако, касаются основных компонентов дедуктивного метода, а именно — выбора первичных терминов и аксиом, равно как и построения определений и доказательств.

Важно иметь в виду то обстоятельство, что мы располагаем большой степенью свободы в отборе первичных терминов и аксиом; было бы совершенно неверно полагать, что те или иные выражения не могут быть никоим образом определены или что те или иные положения по существу не могут быть доказаны. Будем называть э к в и п о л л е н т н ы м и две системы высказываний данной теории, если каждое высказывание первой системы может быть выведено из высказываний второй вместе с теоремами предшествующих теорий, и обратно, если каждое высказывание второй системы может быть выведено из высказываний первой (если какие-либо высказывания встречаются в обеих системах, их, разумеется, и нет надобности выводить). Далее, представим себе, что некая дедуктивная теория была построена на основе той или иной системы аксиом и что в процессе ее построения мы натолкнулись на систему положений, эквиполлентных, в только что разъясненном смысле, системе аксиом. (Конкретный пример можно получить в связи с миниатюрной теорией конгруэнтности отрезков, рассмотренной в параграфе 37: легко показать, что ее система аксиом эквиполлентна системе высказываний, состоящих из аксиомы I, вместе с теоремами I и II.) Если возникает такого рода положение, то, с теоретической точки зрения, можно перестроить всю теорию таким образом, чтобы положения новой системы были приняты за аксиомы, между тем как прежде аксиомы были доказаны как теоремы. Даже то обстоятельство, что новые аксиомы могут в гораздо меньшей степени показаться непосредственно очевидными, не имеет существенного значения; ведь каждое высказывание становится до известной степени очевидным, раз только оно убедительным способом выведено из других очевидных высказываний. Все это подобным же образом применимо — *mutatis mutandis* — и к первичным терминам дедуктивной теории. Система этих терминов может быть замещена всякой другой системой терминов данной теории, лишь бы только эти две системы были э к в и п о л л е н т н ы в том смысле, чтобы каждый термин первой системы мог быть определен при помощи терминов второй системы вместе с терминами, взятыми из предшествующих теорий, и обратно. Не по теоретическим соображениям (или, по крайней мере, не только по теоретическим соображениям) решаем мы избрать известную систему первичных терминов и аксиом предпочтительно всяким другим возможным эквиполлентным системам; здесь играют роль другие факторы — практические, дидактические, даже эстетические. Иногда ставится задачей выбор возможно простейших первичных терминов и аксиом, иногда может быть желательно обойтись возможно меньшим их количеством, или же мы можем предпочесть такие первичные термины и аксиомы, которые помогли бы нам возможно простейшим способом определить те термины и доказать те положения данной теории, которые нас особенно интересуют [56].

В тесной связи с этими замечаниями возникает и другая проблема. В основе мы стараемся притти к такой системе аксиом, которая не содержит ни одного излишнего положения, т. е. положения, которое может быть выведено из остальных аксиом и которое поэтому может числиться среди теорем строящейся теории. Система аксиом подобного рода называется **независимой** (или **системой взаимно независимых аксиом**). Подобным же образом мы стремимся к тому, чтобы и система первичных терминов была **независимой**, т. е. чтобы она не содержала никакого излишнего термина, который может быть определен при помощи других. Однако часто на этих методологических постулатах не настаивают по практическим, дидактическим соображениям, особенно в тех случаях, когда пропуск излишней аксиомы или первичного термина сильно усложнил бы построение теории.

40. Формализация определений и доказательств; формализованные дедуктивные теории

Дедуктивный метод справедливо рассматривается как совершеннейший из всех методов, которым пользуются при построении наук [57]. Он в значительной степени избавляет от возможных неясностей и ошибок, не прибегая к бесконечному регрессу; благодаря этому методу значительно сокращаются всякие поводы к сомнениям в отношении содержания понятий или истинности утверждений данной теории и остаются, в худшем случае, лишь в отношении немногих первичных терминов и аксиом *.

Однако это положение нуждается в одной оговорке. Применение дедуктивного метода приведет к желанному результату только в том случае, если все опре-

* А также правил вывода.— *Прим. ред.*

деления и доказательства полностью осуществляют свою задачу, т. е. если в определениях с полной ясностью передан смысл всех определяемых терминов и если доказательства всецело убеждают нас в истинности всех теорем, подлежащих доказательству. Далеко не так легко исследовать, действительно ли определения и доказательства согласуются с этими требованиями; вполне возможно, например, что рассуждение, которое кажется вполне убедительным одному лицу, другому лицу даже непонятно. Чтобы устранить в этом отношении всякий повод для сомнения, современная методология предписывает заменять субъективную оценку при рассмотрении определений и доказательств — критерием объективного характера и выносить решения относительно правильности определений и доказательств исключительно в зависимости от их структуры, т. е. от их внешней формы. С этой целью установлены специальные п р а в и л а о п р е д е л е н и я и п р а в и л а д о к а з а т е л ь с т в а (или и н ф е р е н ц и и). Первые правила говорят нам о том, какую форму должны иметь высказывания, применяемые как определения в рассматриваемой теории, вторые же описывают характер преобразований, которым могут подвергаться положения этой теории, чтобы из них выводить другие положения; каждое определение должно быть изложено в согласии с правилами определения, а каждое доказательство должно быть п о л н ы м, т. е. должно состоять в последовательном применении правил доказательства и высказываниям, истинность которых предварительно уже установлена (ср. параграфы 11 и 15). Эти новые методологические постулаты могут быть обозначены как постулаты ф о р м а л и з а ц и и о п р е д е л е н и й и д о к а з а т е л ь с т в; дисциплина, построенная в соответствии с этими новыми постулатами, называется ф о р м а л и з о в а н н о й д е д у к т и в н о й т е о р и е й *[58].

---

* Первыми попытками представить дедуктивные теории в формализованной форме мы обязаны Ф р е г е, который здесь

✳ Благодаря постулатам формализации формальный характер математики значительно усиливается. Уже на более ранней ступени развития дедуктивного метода предполагалось, что при построении математических дисциплин мы должны пренебрегать значениями всех выражений, специфичных для этой дисциплины, и что надо действовать так, как будто на месте этих выражений стоят переменные, лишенные какого бы то ни было самостоятельного значения. Но, по крайней мере, логическим понятиям нам разрешено было приписывать их обычные значения. В этой связи аксиомы и теоремы математической дисциплины могли бы рассматриваться, если не как высказывания, то по крайней мере, как функции-высказывания, т. е. выражения, имеющие грамматическую форму высказываний и выражающие известные свойства предметов или отношения между предметами. Для того чтобы вывести теорему из принятых аксиом (или из предварительно доказанных теорем), нужно было убедительно показать, что все предметы, удовлетворяющие аксиомам, удовлетворяют также и этой теореме; математические доказательства в общем не очень сильно отличались от рассуждений повседневной жизни. Однако теперь надлежит пренебрегать значениями всех без исключения выражений, встречающихся в данной дисциплине, и при создании дедуктивной теории мы должны действовать так, как будто ее высказывания являются лишь сочетаниями знаков, лишенных какого-либо содержания [59]; всякое доказательство будет теперь состоять в том, что аксиомы или предварительно доказанные теоремы будут подвергаться ряду чисто внешних преобразований ✳.

уже дважды упоминался (см. подстрочное примечание на стр. 49). Очень высокий уровень в проведении формализации был достигнут в трудах покойного польского логика Лешневского (S. Lesniewski), 1886—1939; одним из его достижений является точная и исчерпывающая формулировка правил определения.

В свете современных требований логика становится основой математических наук в значительно более полном смысле, чем это было обычно. Мы больше не можем удовлетворяться убеждением, что благодаря нашей врожденной или приобретенной способности к правильному мышлению, наша аргументация согласовалась с правилами логики. Чтобы давать полное доказательство теоремы, необходимо применять преобразования, предписанные правилами доказательства, не только к положениям интересующей нас теории, но и к положениям логики (и других предшествующих теорий); а для этой цели нам надо располагать полным перечнем всех логических законов, применяемых в доказательствах.

Только благодаря развитию дедуктивной логики мы теперь в состоянии, по крайней мере теоретически, представить каждую математическую дисциплину в формализованной форме [60]. Однако на практике это все же таит в себе значительные осложнения; выигрыш в точности и методологической правильности сопровождается проигрышем в ясности и понятности [61]. Сама проблема в конце концов совершенно нова, относящиеся к ней исследования еще не окончательно завершены, и есть основание надеяться, что в будущем их выполнение сможет привести к существенным упрощениям. Ввиду этого было бы преждевременно целиком считаться в настоящий момент с постулатами формализации при популярном изложении какой-либо части математики. В частности, было бы далеко не разумно требовать, чтобы доказательства теорем в обыкновенном учебнике по какой-либо математической дисциплине давались в полном виде; однако надо было бы, чтобы автор учебника чувствовал непосредственную уверенность, что все его доказательства могут быть переведены в эту форму, и даже довести свои рассуждения до того пункта, с которого читатель, имеющий некоторый навык в дедуктивном мышлении и достаточное знание современной логики, был бы в состоянии без особых трудностей заполнить остающийся пробел.

41. Непротиворечивость и полнота дедуктивной теории; проблема разрешимости

Теперь мы рассмотрим два логических понятия, очень важные с теоретической точки зрения, в практическом же отношении малозначительные. Это — понятия непротиворечивости и полноты.

Дедуктивная теория называется согласованной или непротиворечивой, если никакие два установленных положения этой теории не противоречат друг другу или, другими словами, если из двух противоречивых высказываний (см. параграф 7) по крайней мере одно не может быть доказано. С другой стороны, теория называется полной, если из двух противоречивых высказываний, сформулированных исключительно в терминах рассматриваемой теории (и теорий, ей предшествующих), по крайней мере одно высказывание может быть доказано в этой теории. Относительно высказывания, имеющего то свойство, что его отрицание может быть доказано в данной теории, обычно говорится, что оно может быть опровергнуто в данной теории. Пользуясь этой терминологией, мы можем сказать, что дедуктивная теория непротиворечива, если никакое высказывание не может быть в ней и доказано и вместе с тем опровергнуто; с другой стороны, теория полна, если всякое высказывание, сформулированное в терминах этой теории, может быть в ней доказано или опровергнуто. Оба эти термина — и «непротиворечивость» и «полнота» — применяются не только к самой теории, но также и к системе аксиом, на которой она основывается.

Теперь попробуем дать ясное представление о значении этих двух понятий. Всякая дисциплина, даже если она построена совершенно правильно во всех методологических отношениях, теряет в наших глазах свою ценность, если у нас есть основание подозревать, что не все утверждения этой дисциплины истинны. С другой стороны, ценность дисциплины будет тем выше, чем больше будет количество истинных высказываний, доказуемых в этой системе [62]. С этой точки зрения, идеальной дисциплиной может считаться такая, которая среди установленных ею положений содержит все истинные высказывания, относящиеся к этой теории, и не содержит ни одного ложного. Высказывание считается здесь уместным, если оно целиком сформулировано в терминах рассматриваемой дисциплины (и предшествующих ей дисциплин); в конце концов, нельзя и ожидать, что, скажем, в арифметике могут быть доказаны все истинные высказывания, даже такие, которые содержат в себе химические или биологические понятия. Теперь представим себе, что дедуктивная теория несогласована, т. е. что среди ее аксиом и теорем встречаются два противоречивых высказывания. Из хорошо известного логического закона, а именно закона противоречия (см. параграф 13), следует, что одно из этих высказываний должно быть ложным. Если, с другой стороны, мы предполагаем, что теория не полна, то существуют два относящихся к делу противоречивых высказывания, из которых ни одно не может быть доказано в этой дисциплине; по другому же логическому закону, а именно закону исключенного третьего, одно из двух высказываний должно быть истинным. Из этого видим, что дедуктивная теория, конечно, не достигает нашего идеала, если она не сочетает в себе непротиворечивости и полноты [63]. (Под этим мы не хотим подразумевать, что каждая согласованная и полная дисциплина должна *ipso facto* быть осуществлением нашего идеала, т. е. что она должна содержать среди установленных ею положений все истинные высказывания и только такие высказывания [64].)

Разобранный нами вопрос можно рассматривать еще и в другом аспекте. Развитие всякой дедуктивной науки состоит в формулировке при помощи терминов этой науки проблем типа *«верно ли то-то и то-то?»* и в стремлении затем решить эти проблемы на основе принятых аксиом. Всякая проблема этого типа может быть ясно решена одним из двух возможных путей: положительно или отрицательно. При первой альтернативе ответ гласит: *«то-то и то-то верно»*, а при второй — *«то-то и то-то неверно».* Непротиворечивость и полнота системы аксиом дедуктивной теории дает теперь нам гарантию, что каждая проблема упомянутого характера действительно может быть разрешена в пределах теории, и более того, разрешена только в одном смысле; непротиворечивостью исключается допущение, что всякая проблема может быть разрешена в двух смыслах, т. е. и положительно и отрицательно, а полнота убеждает нас в том, что она может быть разрешена, по крайней мере, в одном смысле.

В тесной связи с проблемой полноты стоит другая, более общая проблема, которая касается как неполных, так и полных теорий. Это проблема, заключающаяся в нахождении, для данной дедуктивной теории общего метода, который давал бы нам возможность решать относительно всякого отдельного высказывания, сформулированного в терминах этой теории, может ли оно быть доказано в этой теории или нет. Эта важная проблема известна под названием **проблемы разрешимости***.

Лишь об очень немногих из известных дедуктивных теорий можно сказать, что они непротиворечивы и полны. Это, как правило, элементарные теории с простой логической структурой и со скромным запасом понятий. Примером может служить исчисление высказываний, которое разбиралось в гл. II, если только рассматривать его как независимую теорию, а не как часть логики (хотя термин «полный» к этой теории следует применять в несколько измененном значении). Быть может, наиболее интересный пример непротиворечивой и полной теории дает элементарная

* Значение понятий и проблем, рассмотренных в этом параграфе, и особенно понятия непротиворечивости и проблемы разрешимости, было подчеркнуто **Гильбертом** (см. подстрочное примечание на стр. 166), который сильно содействовал многим важным исследованиям в области основ математики. По его почину эти понятия и проблемы стали за последнее время предметом интенсивных изысканий у многих современных математиков и логиков.

геометрия; мы имеем здесь в виду геометрию в тех пределах, как она столетиями преподавалась в школах в качестве части элементарной математики, т. е. дисциплины, в которой исследуются свойства различных особых видов геометрических фигур, таких, как прямые, плоскости, треугольники, окружности, но общее понятие геометрической фигуры (множество точек) не встречается *. Положение существенно меняется, как только мы переходим к таким наукам, как арифметика или высшая геометрия. Вероятно, никто из работающих в области этих наук не сомневается в их непротиворечивости; и все же, как выяснилось из последних методологических изысканий, строгое доказательство этого встречается с большими трудностями основательного характера. В отношении проблемы полноты положение еще хуже; выясняется, что арифметика и высшая геометрия не полны, так как оказалось возможным поставить проблемы чисто арифметического или геометрического порядка, которые не могут быть ни положительно, ни отрицательно разрешены в пределах этих дисциплин [65]. Можно предположить, что этот факт есть только следствие несовершенства системы аксиом и методов доказательства, какими мы располагаем при теперешнем состоянии науки, и что соответствующие изменения (например, расширение системы аксиом) могут в будущем привести к полным системам. Однако более углубленные исследования показали, что эта догадка ошибочна: никогда невозможно будет построить непротиворечивую и полную теорию **, содержащую в качестве своих теорем все верные высказывания арифметики или высшей геометрии. Мало того, оказывается, что и проблема разрешимости подобным же образом не допускает положительного решения с точки зрения этих дисциплин;

* Первым доказательством полноты исчисления (и тем самым первым положительным результатом исследований, касающихся полноты высказываний) мы обязаны современному американскому логику П о с т у (E. L. Post). Доказательство полноты элементарной геометрии ведет свое начало от автора.

** Формализованную. — *Прим. ред.*

невозможно установить общий метод, который дал бы нам возможность различать между высказываниями, могущими быть доказанными в данной дисциплине, и высказываниями, которые нельзя доказать. Все эти выводы могут быть распространены и на многие другие дедуктивные теории, в частности — на все те, которые либо предполагают арифметику целых чисел (т. е. теорию четырех главных арифметических действий над целыми числами), либо содержат достаточные предположения для развития этой теории. ✳Так, например, эти выводы могут быть применены к общей теории классов (что следует из замечаний в конце параграфа 26) ✳*.

В свете этих последних замечаний становится ясным, что понятия непротиворечивости и полноты — несмотря на их теоретическую важность — практически оказывают слабое влияние на построение дедуктивных теорий[26].

42. Расширенное понятие методологии дедуктивных наук

Исследования, касающиеся непротиворечивости и полноты, стали одним из важнейших факторов, содействовавших значительному расширению области методологических работ и даже вызывавших коренное изменение всего характера методологии дедуктивных наук. То понятие методологии, которое было определено в начале настоящей главы, в ходе исторического развития своего предмета, оказалось слишком узким. Анализ и критическая оценка методов, практически применяемых при построении дедуктивных наук, перестали быть исключительной или главной задачей методологии. Методология дедуктивных наук стала общей наукой о дедуктивных науках, аналогично тому, как

---

* Этими чрезвычайно важными достижениями мы обязаны современному австрийскому логику Геделю (K. Gödel). Его выводы, касающиеся проблемы разрешимости, были затем развиты современным американским логиком Черчем (A. Church).

арифметика является наукой о числах, а геометрия — наукой о геометрических фигурах. В современной методологии мы исследуем дедуктивные теории в целом, так же как и высказывания, входящие в их состав; мы рассматриваем символы и выражения, из которых составлены эти высказывания, свойства и множества выражений и высказываний, отношения, существующие между ними (например, отношение следствия), и даже отношения между выражениями и предметами, о которых выражения «говорят» (так, например, отношение обозначения); мы устанавливаем общие законы, касающиеся этих понятий.

✳ Отсюда следует, что термины, обозначающие выражения, встречаемые в дедуктивных теориях, свойства этих выражений и отношения между ними принадлежат не к области логики, но к области методологии дедуктивных наук. Это, в частности, относится к нескольким терминам, введенным и применяемым в предшествующих параграфах этой книги, как-то: *«переменная»*, *«функция-высказывание»*, *«квантор»*, *«следствие»* и многие другие. Чтобы уяснить себе разницу между логическими и методологическими терминами, рассмотрим такую пару слов, как *«или»* и *«дизъюнкция»*. Слово *«или»*, конечно, принадлежит к логике, а именно к исчислению высказываний, хотя оно употребляется также и во всех других науках, в частности — в методологии. С другой стороны, слово *«дизъюнкция»*, обозначающее высказывания, построенные при помощи слова *«или»*, является типичным примером методологического термина.

Может быть, читатель удивится тому обстоятельству, что в главах, касающихся логики, мы употребляли так много методологических терминов. Однако это объясняется довольно просто. С одной стороны, здесь играет роль то обстоятельство, на которое мы уже обращали внимание в параграфе 9: среди логиков, как и среди математиков, широко распространено обыкновение иногда по чисто стилистическим соображениям пользоваться выражениями, содержащими методологические термины, в качестве синонимов для выражений чисто логического или математического характера; в настоящей книге мы в некоторой мере считались с этим обыкновением. Но, с другой стороны, здесь скрывается и более важный фактор; мы в этой книге не стремились построить логику систематическим образом, но лишь рассказывали о логике, обсуждали и комментировали ее понятия и законы. Мы знаем, однако (из параграфа 18), что говоря о логических понятиях, мы должны пользоваться наименованиями этих понятий, т. е. терминами, уже принадлежащими к методологии. Если бы мы развивали логику в форме дедуктивной теории, не делая к ней совершенно никаких комментариев, то методологические термины встречались бы только в формулировке правил определения и инференции *.

В связи с эволюцией, которую прошла методология, возникла надобность в применении новых, более тонких и более точных методов исследования в этой области. Методология уподобилась тем наукам, которые составляют ее собственное содержание,— она приобрела форму дедуктивной дисциплины. Ввиду расширения области исследования самое выражение «методология дедуктивных наук» стало казаться уже недостаточно подходящим; действительно, «методология» означает только «наука о методе». Вот почему это выражение теперь часто заменяется другими, например (не совсем удачным) термином «теория доказательства» или (более удачным) термином «мета-логика и мета-математика». С недавних пор вошел в употребление еще термин — «логический синтаксис и семантика дедуктивных наук», которым подчеркивается аналогия между методологией дедуктивных наук и грамматикой повседневного языка *.

---

* Методология дедуктивных наук, в ее расширенном смысле, очень молодая дисциплина. Ее интенсивное развитие началось лишь около двадцати лет тому назад внезапно (и, как это кажется, независимо) в двух различных центрах — в Геттингене, под влиянием Гильберта (см. подстрочное приме-

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исчисление классов, рассмотренное в главе IV, может быть построено как отдельная дедуктивная теория, предполагающая только исчисление высказываний. В этом построении символы «V», «Λ» и «$\subset$» и все символы действий, введенные в параграфе 25, мы будем рассматривать как первичные термины. Далее мы устанавливаем следующие 9 аксиом *.

Аксиома I. $K \subset K$.

Аксиома II. *Если* $K \subset L$ и $L \subset M$, *то* $K \subset M$.

Аксиома III. $K \cup L \subset M$, *если, и только если,* $K \subset M$ и $L \subset M$.

Аксиома IV. $M \subset K \cap L$, *если, и только если,* $M \subset K$ и $M \subset L$

Аксиома V. $K \cap (L \cup M) \subset (K \cap L) \cup (K \cap M)$.

Аксиома VI. $K \subset \mathbf{V}$

Аксиома VII. $\Lambda \subset K$.

Аксиома VIII. $\mathbf{V} \subset K \cup K$

Аксиома IX. $K \cap K' \subset \Lambda$.

чание на стр. 166) и Бернайса (P. Bernays), и в Варшаве, где работали, среди других, Лешневский и Лукасевич (см. подстрочное примечание на стр. 183 и подстрочное примечание на стр. 49).

* Данной здесь системой мы обязаны в основном Шрэдеру (см. подстрочное примечание на стр. 130). Разнообразные простые и интересные системы аксиом были опубликованы современным американским математиком Е. В. Хантингтоном, которому мы обязаны многими ценными вкладами, касающимися аксиоматических основ логической и математической теорий.

Из этих аксиом мы можем вывести различные теоремы. Докажите, в частности, следующие теоремы (пользуясь приложенными к ним указаниями):

Теорема I. $K \cup K \subset K$.

Указание: В аксиоме III замените «L» и «M» на «K». Заметьте, что правая часть полученной таким образом эквивалентности удовлетворяется всяким классом «K» (аксиома I); поэтому левая часть тоже всегда должна удовлетворяться.

Теорема II. $K \subset K \cap K$.

Указание: Доказательство, основанное на аксиомах IV и I аналогично доказательству теоремы I.

Теорема III. $K \subset K \cup L$ *и* $L \subset K \cup L$.

Указание: В аксиоме III поставьте «$K \cup L$» вместо «M»; заметьте, что левая часть эквивалентности всегда удовлетворяется аксиомой I.

Теорема IV. $K \cap L \subset K$ *и* $K \cap L \subset L$.

Указание: Доказательство аналогично доказательству теоремы III.

Теорема V. $K \cup L \subset L \cup K$..

Указание: В аксиоме III подставьте «$L \cup K$» вместо «M», сравните полученную таким образом правую часть эквивалентности с теоремой III (где «K» надо заменить на «L», а «L» на «K»).

Теорема VI. $K \cap L \subset L \cup K$.

Указание: Доказательство, основанное на аксиоме IV и теореме IV, аналогично доказательству теоремы V.

Теорема VII. *Если* $L \subset M$, *то* $K \cup L \subset K \cup M$.

Указание: Предположив, что антецедент теоремы удовлетворен, выведите формулы:

$$K \subset K \cup M \text{ и } L \subset K \cup M.$$

(Первая из этих формул непосредственно следует из теоремы III, а вторая может быть выведена из антецедента и теоремы III при помощи аксиомы II.) Примените к этим формулам аксиому III.

Теорема VIII. *Если* $L \subset M$, *то* $K \cap L \subset K \cap M$.

Указание: Доказательство подобно доказательству предшествующей теоремы.

Теорема IX. $K \cap L \subset K \cap (L \cup M)$ *и*
$K \cap M \subset K \cap (L \cup M)$.

Указание: В теореме III замените «K» на «L», «L» на «M»; к полученным таким образом формулам примените теорему VIII.

Теорема X. $(K \cap L) \cup (K \cap M) \subset K \cap (L \cup M)$.

Указание: Эта теорема может быть выведена из аксиомы III и теоремы IX.

Аксиомы III и IV, играющие наиболее важную роль в доказательстве вышеприведенных теорем, называются законами композиции (для сложения и умножения классов).

2. В исчислении классов, построение которого было очерчено в предшествующем упражнении, мы можем ввести знак тождества «$=$», определив его следующим образом:

Определение I. $K = L$, *если, и только если,* $K \subset L$ *и* $L \subset K$.

Из аксиом и теорем упражнения 1 и вышеприведенного определения выводятся следующие теоремы:

Теорема XI. $K = K$.

Указание: Поставьте «K» вместо «L» в определение I и примените аксиому I.

Теорема XII. *Если* $K = L$, *то* $L = K$.

Указание: В определении I замените «K» на «L» и «L» на «K»; сравните полученное высказывание с определением I в его первоначальной формулировке.

Теорема XIII. *Если* $K = L$ *и* $L = M$, *то* $K = M$.

Указание: Эта теорема может быть выведена из определения I и аксиомы II.

Теорема XIV. $K \cup K = K$.

Указание: В определении *I* замените «K» на «$K \cup K$» и «L» на «K»; примените теорему I и теорему III (заменив «K» на «L»).

Теорема XV. $K \cap K = K$.

Указание: Доказательство аналогично доказательству предшествующей теоремы.

Теорема XVI. $K \cup L = L \cup K$.

Указание: Согласно теореме V:

$$K \cup L \subset L \cup K \text{ и также } L \cup K \subset K \cup L.$$

К этим формулам примените определение I.

Теорема XVII. $K \cap L = L \cap K$.

Указание: Доказательство подобно доказательству теоремы XVI.

Теорема XVIII. $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$.

Указание: Эта теорема служит следствием определения I, аксиомы V и теоремы X.

Теорема XIX. $K \cup K' = \mathsf{V}$.

Указание: Эта теорема может быть выведена с помощью определения I из аксиомы VI (при замене «K» на «$K \cup K'$») и аксиомы VIII.

Теорема XX. $K \cap K' = \Lambda$.

Указание: Примените определение I, аксиому VII и аксиому IX.

Укажите, какие из аксиом и теорем этого упражнения и предшествующего упражнения известны нам из гл. IV (или, возможно, III); напомните их наименования.

3. Допустим, что в систему исчисления классов, рассмотренную в упражнениях 1 и 2, мы вводим новый символ «$\between$», означающий отношение между классами, определяемый следующим образом:

$K \between L$, если, и только если, неверно ни то, что $K \subset L$, ни то, что $L \subset K$, ни то, что $K \cap L = \Lambda$.

Тождественно ли отношение, определяемое таким образом, с каким-либо из отношений, определенных в параграфе 24?

Пусть отношение раздельности между классами обозначается символом «)(». Как этот символ может быть определен в терминах нашей системы исчисления классов?

4. Изложите несколько интерпретаций, в пределах арифметики и геометрии, для системы аксиом, рассмотренной в параграфе 37.

Является ли множество всех чисел, вместе с отношением *«меньше, чем»* между числами, моделью этой системы аксиом? Является ли такой моделью множество прямых линий и отношение параллелизма между линиями?

5. В том фрагменте геометрии, который рассматривался в параграфе 37, отношение «быть короче» между отрезками может быть определено следующим образом:

Мы говорим, что x короче y, символически: $x < y$, если x и y являются отрезками и если x конгруэнтно *отрезку, составляющему часть y; другими словами, если $x \in S$, $y \in S$, и если существует такое z, что*

$$z \in \mathrm{S},\ z \subset y,\ z \neq y \text{ и } x \cong z.$$

Проведите в этом высказывании различие между определяемым и определителем; определите дисциплины или, если окажется нужным, части логики, к которым принадлежат термины, встречающиеся в определителе. Согласуется ли это определение с общими методологическими принципами параграфа 36 и правилами определения параграфа 11?

6. Является ли доказательство теоремы I, как оно дано в параграфе 37, полным доказательством, если в нем приняты во внимание только те правила доказательства, которые были установлены в параграфе 15?

7. В добавление к теоремам I и II из аксиом параграфа 37 можно вывести еще следующие теоремы:

***Теорема* III.** *Для всяких элементов x, y и z множества* $\mathbf{S}$, *если $x \cong y$ и $x \cong z$, то $y \cong z$.*

***Теорема* IV.** *Для всяких элементов x, y и z множества* $\mathbf{S}$, *если $x \cong y$ и $y \cong z$, то $z \cong x$.*

***Теорема* V.** *Для любых элементов x, y, z и t множества* $\mathbf{S}$, *если $x \cong y$, $y \cong z$ и $z \cong t$, то $x \cong t$.*

Дайте строгое доказательство того, что следующие системы высказываний эквиполлентны — в том смысле, как это установлено в параграфе 39,— системе, состоящей из аксиом I и II, и что каждая, тем самым, может быть избрана в качестве новой системы аксиом:

(a) система, состоящая из аксиомы I и теорем I и II;

(b) система, состоящая из аксиомы I и теоремы III;

(c) система, состоящая из аксиомы I и теоремы IV;

(d) система, состоящая из аксиомы I и теорем I и V.

8. Сформулируйте согласно замечаниям, сделанным в параграфе 37, общие законы теории отношений, составляющие обобщение результатов, полученных в предшествующем упражнении.

Указание: Этим законам может, например, быть придана форма эквивалентностей, начинающихся словами:

*чтобы отношение **R** было рефлексивно и имело свойство* **P** *в классе K, необходимо и достаточно чтобы...*

9. Рассмотрите систему высказываний (a) упражнения 7. Продемонстрируйте модели, удовлетворяющие:

(a) первым двум высказываниям системы, но не последнему;

(b) первому и третьему высказываниям, но не второму;

(c) двум последним высказываниям, но не первому.

Какое заключение может быть выведено из факта существования таких моделей относительно возможности вывести какое-либо из трех высказываний из других? Являются ли эти высказывания взаимно независимыми? (См. параграфы 37 и 39.)

10. Иногда раздавались жалобы на то обстоятельство, что между различными учебниками по геометрии существует некоторая разноголосица, поскольку высказывания, рассматриваемые как теоремы в одних учебниках, принимаются в качестве аксиом, т. е. без доказательства, в других учебниках. Справедливы ли эти жалобы?

* 11. В параграфе 13 мы познакомились с методом таблиц истинности, который помогает нам в каждом отдельном случае решать, истинно ли данное высказывание из области исчисления высказываний и может ли оно поэтому быть принято как закон этого исчисления. При применении этого метода мы можем совершенно забыть значение, приписанное символам

«*И*» и «*Л*», встречающимся в таблицах истинности; мы можем утверждать, что этот метод сводится к применению, при построении исчисления высказываний, двух правил, первое из которых близко к правилам определения, а второе — к правилам доказательства. Согласно первому правилу, если нам требуется ввести в исчисление высказываний постоянный термин, мы должны начать с построения основной таблицы истинности для простейшей — и в то же время самой общей — функции-высказывания, содержащей этот термин. Согласно второму правилу, если нужно принять высказывание (содержащее только те постоянные, для которых уже построена основная таблица истинности) в качестве закона исчисления высказываний, мы должны построить производную таблицу истинности для этого высказывания и проверить, чтобы символ «*Л*» никогда не встретился в последнем столбце этой таблицы.

Исчисление высказываний, построенное исключительно при помощи этих двух правил, принимает характер, близкий к характеру формализованных дедуктивных теорий. Докажите это положение на основе рассуждений в параграфе 40. Однако отметьте некоторые различия между этим методом построения исчисления высказываний и основными принципами построения дедуктивных теорий, обсуждавшимися в параграфе 36. Можно ли при помощи рассматриваемого метода различить в исчислении высказываний первичные и определяемые термины? Какое другое различие здесь утрачивается?

* 12. Применяя метод таблиц истинности, как это было описано в предшествующем упражнении, мы можем вводить в исчисление высказываний новые термины, которые не обсуждались в главе II. Мы можем, например, ввести символ «$\triangle$», определив функцию-высказывание:

$$p \triangle q\ ,$$

как сокращенную форму для выражения:

$$\textit{ни } p, \textit{ ни } q.$$

Постройте для этой функции основную таблицу истинности, которая была бы согласована с непосредственным значением, приписанным символу «$\triangle$», а затем, при помощи производных таблиц истинности, убедитесь, что следующие высказывания истинны и могут быть приняты в качестве законов исчисления высказываний:

$$(\sim p)\leftrightarrow(p\triangle p),$$

$$(p\vee q)\leftrightarrow[(p\triangle q)\triangle(p\triangle q)],$$

$$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow\{[(p\triangle p)\triangle q]\triangle[(q\triangle q)\triangle p]\}.$$

* 13. Существует метод построения исчисления высказываний как формализованной теории, которая отличается от теории, описанной в упражнении 11, и которая вполне согласуется со всеми принципами, изложенными в параграфах 36 и 40 *. Мы можем, например, принять символы «$\rightarrow$», «$\leftrightarrow$» и «$\sim$» (см. параграф 13) в качестве первичных терминов, а следующие семь высказываний — в качестве аксиом исчисления высказываний**:

Аксиома I. $p\rightarrow(q\rightarrow p)$.

Аксиома II. $[p\rightarrow(q\rightarrow r)]\rightarrow[q\rightarrow(p\rightarrow r)]$.

Аксиома III. $(p\rightarrow q)\rightarrow[(q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)]$.

Аксиома IV. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow q)$.

Аксиома V. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)$.

Аксиома VI. $(p\rightarrow q)\rightarrow[(q\rightarrow p)\rightarrow(p\leftrightarrow q)]$.

Аксиома VII. $[(\sim q)\rightarrow(\sim p)]\rightarrow(p\rightarrow q)$.

---

* Начало этому методу положил Фреге (см. примечание на стр. 49).

** Эта система аксиом и правил вывода (см. стр. 201) не является полной. Так, например, в ней недоказуема истинная формула $(p\rightarrow(p\rightarrow q))\rightarrow(p\rightarrow q)$. [*Ред.*]

Кроме того, мы условливаемся применять в доказательствах два правила вывода, с которыми мы уже знакомы, а именно, правила подстановки и отделения. (При формулировке этих правил нам надо было бы установить способ пользования скобками и точно определить, какие выражения должны рассматриваться как функции-высказывания в нашем исчислении и могут быть поэтому подставлены вместо переменных; эта задача не представляет особой трудности.)

При помощи этих правил вывода мы теперь в состоянии вывести из наших аксиом различные теоремы. Дайте, в частности, полные доказательства для следующих теорем (пользуясь приложенными к ним указаниями):

Теорема I. $q\to(p\to p)$.

Указание: Подставьте «p» вместо «r» в аксиоме II, заметьте, что антецедент полученной таким образом импликации совпадает с аксиомой I, и поэтому примените правило отделения. Здесь перед нами типичный пример рассуждения, основанного на аксиоме II, называемой законом перестановки.

Теорема II. $p\to p$.

Указание: В теореме I подставьте вместо «q» всю аксиому I и примените правило отделения.

Теорема III. $p\to[(p\to q)\to q]$.

Указание: В аксиоме II подставьте «$(p\to q)$» вместо «p», «p» — вместо «q» и «q» — вместо «r». Заметьте, что антецедент выведенной таким образом импликации может быть получен при помощи соответствующей подстановки из теоремы II; произведите эту подстановку, а затем примените правило отделения.

Теорема IV. $(q\to r)\to[(p\to q)\to(p\to r)]$.

Указание: В аксиоме II замените соответственно «p», «q» и «r» на «$(p\to q)$», «$(q\to r)$» и «$(p\to r)$»; сравните антецедент полученного таким образом высказывания с аксиомой III.

Теорема V. $(\sim p)\to(p\to q)$.

Указание: Из аксиомы I вытекает, при помощи подстановки, высказывание:

$$(\sim p)\to[(\sim q)\to(\sim p)].$$

Заметьте, что консеквент этого высказывания совпадает с антецедентом аксиомы VII. В аксиоме III замените «p» антецедентом этого высказывания, «q» его консеквентом, а «r» — консеквентом аксиомы VII. Затем дважды примените правило отделения. Это доказательство может служить типичным примером рассуждения, основанного на аксиоме III, являющейся другой формой закона гипотетического силлогизма (ср. параграф 12).

Теорема VI. $p\to[(\sim p)\to q]$.

Указание: Доказательство аналогично доказательству теоремы IV. Произведите такую подстановку в аксиоме II, чтобы антецедентом полученной таким образом импликации была теорема V.

Теорема VII. $[\sim(\sim p)]\to(q\to p)$.

Указание: Доказательство аналогично доказательству теоремы V Из теоремы V и аксиомы VII выведите высказывания:

$$[\sim(\sim p)]\to[(\sim p)\to(\sim q)] \quad \text{и} \quad [(\sim p)\to(\sim q)]\to(q\to p).$$

Заметьте, что консеквент первого из этих высказываний тот же, что и антецедент второго. Соответственно этому произведите в аксиоме III подходящую подстановку и дважды примените правило отделения.

Теорема VIII. $[\sim(\sim p)]\to p$.

Указание: Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы I, выведите прежде всего из аксиомы II и теоремы VII высказывание:

$$q \rightarrow \{[\sim(\sim p)] \rightarrow p\}.$$

Затем, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы II, выведите из этого высказывания нужную теорему.

Теорема IX. $p \rightarrow [\sim(\sim p)]$.

Указание: Произведите соответствующие подстановки в аксиоме VII и теореме VIII так, чтобы получить возможность применить правило отделения.

Теорема X. $[\sim(\sim p)] \leftrightarrow p$.

Указание: Эта теорема может быть получена из аксиомы VI и теорем VII и IX при помощи подстановки в аксиоме VI и двукратного применения правила отделения.

* 14. Чтобы получить возможность ввести установленные термины в систему исчисления высказываний, описанную в предшествующем упражнении, мы должны принять правило определения. Согласно этому правилу (см. параграф 11), всякое определение имеет форму эквивалентности. Определяемое представляет собой выражение, заключающее в себе, помимо переменных высказываний, только одну постоянную, а именно термин, подлежащий определению. Определителем служит произвольная функция-высказывание, заключающая в себе точно те же переменные, что и определяемое, и не содержащая никаких постоянных, кроме первичных терминов и предварительно установленных терминов. Так, например, мы можем принять следующие определения символов «$\vee$» и «$\wedge$»:

Определение I. $(p \vee q) \leftrightarrow [(\sim p) \rightarrow q]$.

Определение II. $(p \wedge q) \leftrightarrow \{\sim [(\sim p) \vee (\sim q)]\}$.

Из вышеприведенных определений, аксиом и теорем упражнения 13 выведите, при помощи правил подстановки и отделения, следующие теоремы:

Теорема XI. $[(\sim p)\rightarrow q])\rightarrow p\vee q)$.

Указание: В аксиоме V подставьте «$p\vee q$» вместо «p» и $[(\sim p)\rightarrow q$'» вместо «q»; сравните полученное при этом высказывание с определением I и примените правило отделения.

Теорема XII. $p\vee(\sim p)$.

Указание: Эта теорема может быть выведена из теорем XI и II двукратным применением правила подстановки и однократным применением правила отделения.

Теорема XIII. $p\rightarrow(p\vee q)$.

Указание: Доказательство основано на аксиоме III и теоремах VI и XI и совершенно подобно доказательству теоремы V (правило подстановки применяется только к аксиоме III).

Теорема XIV. $(p\wedge q)\rightarrow\{\sim[(\sim p)\vee(\sim q)]\}$.

Указание: Доказательство, основанное на аксиоме IV и определении II, аналогично доказательству теоремы XI.

Теорема XV. $\{\sim[\sim(p\wedge q)]\}\rightarrow\{\sim[(\sim p)\vee(\sim q)]\}$.

Указание: Доказательство основано на аксиоме III и теоремах VII и XIV и подобно доказательству теоремы V. В теореме VIII замените «p» на « $p\wedge q)$ и сравните консеквент полученной при этом импликации с антецедентом теоремы XIV.

Теорема XVI. $[(\sim p)\vee(\sim q)]\rightarrow[\sim(p\wedge q)]$.

Указание: Произведите в аксиоме VII такую замену, чтобы антецедентом полученной таким образом импликации была теорема XV.

Теорема XVII. $(\sim p) \to [\sim(p \wedge q)]$.

Указание: Доказательство опять аналогично доказательству теоремы V. В теореме XIII подставьте «$(\sim p)$» вместо «p» и «$(\sim q)$» вместо «q»; сравните полученное при этом высказывание с теоремой XVI.

Теорема XVIII. $(p \wedge q) \to p$.

Указание: Выведите эту теорему из аксиомы VII и теоремы XVII.

Обратите внимание на то, какие из аксиом и теорем этого и предшествующего упражнений знакомы нам из главы II и вспомните их названия.

* 15. Сформулируйте определение символа «$\triangle$» (см. упражнение 12), согласно правилу определения, установленному в предшествующем упражнении; в определении должны встречаться две постоянных:

«$\sim$» и «$\wedge$».

* 16[68]. Проверьте по методу таблиц истинности, все ли аксиомы и определения, данные в упражнениях 13 и 14 (а также в определении, предложенном в упражнении 15), являются истинными высказываниями. Постарайтесь доказать, исходя из этого, что все теоремы, которые можно вывести из вышеприведенных аксиом и определений применением правил подстановки и отделения, могут также быть признаны истинными высказываниями путем испытания по методу таблиц истинности.

(Можно показать, что и обратно, каждое такое высказывание из исчисления высказываний, истинность которого может быть установлена по методу таблиц истинности, является либо одной из аксиом и определений, либо выводимо из них при помощи правил вывода и, следовательно, что два метода построения исчисления высказываний, разбиравшиеся в упражнениях 11 и 13—14, совершенно эквивалентны *. Но эта задача гораздо труднее.)

✳ 17. Один из методов построения исчисления высказываний, рассмотренный в упражнениях 11 и 13—14, обеспечивает непосредственно и дает положительный ответ на проблему разрешимости (см. параграф 41) для этого исчисления и помогает нам легко показать, что исчисление высказываний является непротиворечивой дедуктивной теорией. Что это за метод и как это можно показать?

✳ 18. Одним из законов исчисления высказываний является следующее:

Для всяких p и q, если p и не p, то q.

На основе этого логического закона, установите следующий методологический закон:

Если система аксиом любой дедуктивной теории, которой предшествует исчисление высказываний, противоречива, то всякое высказывание, сформулированное в терминах этой теории, можно вывести из этой системы.

✳ 19[69]. Известно, что существует следующий методологический закон:

Если система аксиом дедуктивной теории полна и если к этой системе добавить какое-либо высказывание, которое может быть сформулировано, но не может быть доказано в пределах этой теории, то расширенная таким образом система аксиом является противоречивой.

Почему это так?

✳ 20. Отберите все термины, встречающиеся в гл. II, принадлежащие к области методологии дедуктивных наук, согласно замечаниям, сделанным в параграфе 42.

---

* Однако для этого нужно взять какую-либо полную систему аксиом теории высказываний, а не систему упражнения 13 [*Ред.*]

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ И МЕТОДОЛОГИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

VII

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ПОРЯДКОВЫЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ЧИСЕЛ

43. Первичные термины строящейся теории; аксиомы, касающиеся основных отношений между числами

Располагая известным запасом знаний в области логики и методологии, мы предпримем теперь изложение основ частной и, в данном случае, очень элементарной математической теории. Это будет для нас удобным поводом лучше усвоить прежде полученные знания и даже несколько их расширить.

Теория, которой мы займемся, образует фрагмент арифметики действительных чисел. Она содержит основные теоремы, касающиеся главных отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем»* между числами, а также главных действий над числами, а именно, сложения и вычитания. Ей ничто не предшествует, кроме логики.

Первичные термины, которые мы примем в этой теории, следующие:

действительное число,
меньше, чем,
больше, чем,
сумма.

Вместо *«действительного числа»* мы будем, как и раньше, говорить просто *«число»*. Кроме того, несколько удобнее вместо термина *«число»* рассматривать выражение *«множество всех чисел»* как первичный термин, который, ради краткости, мы будем заменять символом «$\mathbf{N}$»; так, чтобы выразить, что x есть число, мы пишем:

$$x \in \mathbf{N}.$$

С другой стороны, мы можем условиться, что область, рассматриваемая нашей теорией, состоит только из действительных чисел и что такими переменными, как *«x», «y»*... замещаются исключительно наименования чисел; в этом случае также можно обойтись без термина *«действительное число»* при формулировках положений нашей теории, и символ «$\mathbf{N}$» может, если это окажется нужным, заменяться символом «$\mathbf{V}$» (см. параграф 23).

Выражения *«меньше, чем»* и *«больше, чем»* должны рассматриваться так, как если бы каждое состояло только из одного слова; они, соответственно, будут заменяться более краткими символами «$<$» и «$>$». Вместо *«не меньше, чем»* и *«не больше, чем»* мы будем употреблять обычные символы «$\nless$» и «$\ngtr$». Далее, вместо выражений: *«сумма чисел (слагаемых) x и y», «сумма чисел x и y»,* или *«результат сложения x и y»,* мы будем пользоваться обычным обозначением:

$$x + y.$$

Таким образом, символ «$\mathbf{N}$» обозначает известное множество, символы «$<$» и «$>$» — известные двучленные отношения и, наконец, символ «$+$» — известное бинарное действие.

Среди аксиом рассматриваемой теории можно различить две группы. Аксиомы первой группы выражают основные свойства отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем»,* между тем, как аксиомы второй группы в основе своей относятся к сложению. В данное время мы будем рассматривать только первую группу; она в целом, состоит из пяти положений:

Аксиома 1. *Для любых чисел x и y (т. е. для произвольных элементов множества* $\mathbf{N}$) *имеет место:*

$$x = y \text{ или } x < y \text{ или } x > y.$$

Аксиома 2. *Если $x < y$, то $y \nless x$.*

Аксиома 3. *Если $x > y$, то $y \ngtr x$.*

Аксиома 4. *Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.*

Аксиома 5. *Если $x > y$* и *$y > z$, то $x > z$.*

Аксиомы, перечисленные здесь, точно так же, как любая арифметическая теорема общего характера, устанавливающая, что произвольные числа *x, y, ...* имеют такое-то и такое-то свойство, должны в действительности начинаться словами *«для любых чисел x, y, ...»* или *«для любых элементов x, y, ...» множества* «N», или просто *«для любых x, y...»* (если мы соглашаемся, что переменные *«x», «y»,* ... обозначают здесь только числа). Но поскольку мы желаем придерживаться обычая, разобранного в параграфе 3, мы часто опускаем подобную фразу и прибавляем ее только мысленно; это справедливо не только для аксиом, но также для теорем и определений, которые будут встречаться в ходе наших рассуждений. Так, например, предполагается, что аксиома 2 читается следующим образом:

Для любых x и y (или для любых элементов x и y множества **N***), если $x < y$, то $y \nless x$.*

Мы будем ссылаться на аксиому 1 как на приблизительный закон трихотомии (со строгим законом трихотомии мы познакомимся позже). Аксиомы 2—5 выражают тот факт, что отношения *«меньше, чем»* и *«больше, чем»* асимметричны и транзитивны (см. параграф 29); соответственно они названы законами асимметрии и законами транзитивности для отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем».* Аксиомы первой группы и выводимые из них теоремы названы порядковыми законами для чисел.

На отношения $<$ и $>$, вместе с логическим отношением тождества $=$, мы будем ссылаться как на основные отношения между числами.

44. Законы антирефлексивности для основных отношений; доказательства от противного

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы доказать несколько теорем из принятых нами аксиом. Так как мы не стремимся к систематическому описанию, то в этой и следующей главе будут установлены только те теоремы, которые могут оказаться полезными для разъяснения некоторых понятий и фактов в области логики и методологии.

Теорема 1. *Нет числа меньше самого себя:* $x \nless x$.

Доказательство. Предположим, что наша теорема неверна. Тогда существует число x, удовлетворяющее следующей формуле:

$$(1) \qquad x < x.$$

Так как аксиома 2 относится к произвольным числам x и y (которые не обязаны быть отличными друг от друга), то она остается справедливой, если вместо «y» мы подставим переменную «x»; тогда мы получим:

$$(2) \qquad \text{если } x < x, \text{ то } x \nless x.$$

Но из (1) и (2) непосредственно следует, что

$$x \nless x;$$

это следствие, однако, представляет собой явное противоречие формуле (1). Мы должны, следовательно, отбросить первоначальное предположение и принять теорему как доказанную.

Мы покажем теперь, как преобразовать это рассуждение в полное доказательство, пользуясь для ясности логической символикой (см. параграфы 13 и 15). С этой целью мы обращаемся к так называемому закону reductio ad absurdum исчисления высказываний:

(I) $$[p \rightarrow (\sim p)] \rightarrow (\sim p)^*.$$

Мы пользуемся далее аксиомой 2 в следующей символической форме:

(II) $$(x < y) \rightarrow [\sim (y < x)].$$

Наше доказательство основано исключительно на высказываниях (I) и (II). Во-первых, мы применяем правило подстановки к (I), заменяя в нем «p» повсюду на «$(x < x)$»:

(III) $$\{(x < x) \rightarrow [\sim (x < x)]\} \rightarrow [\sim (x < x)].$$

Теперь мы применяем правило подстановки к (II), заменяя «y» на «x»:

(IV) $$(x < x) \rightarrow [\sim (x < x)].$$

Наконец, мы замечаем, что высказывание (IV) есть антецедент условного высказывания (III), так что (здесь) можно применить правило отделения. Итак, мы пришли к формуле:

(V) $$\sim (x < x),$$

являющейся символической формой теоремы, которая должна быть доказана.

Доказательство теоремы 1 представляет собой пример того, что называется косвенным доказательством или доказательством от противного, известным также, как доказательство путем reductio ad absurdum. Доказательства этого рода могут быть вообще охарактеризованы следующим

---

* Этот закон, вместе с относящимся сюда законом того же названия:

$$[(\sim p) \rightarrow p] \rightarrow p,$$

применяется во многих запутанных и исторически важных рассуждениях в логике и математике. Итальянский логик и математик Вайлати (G. Vailati), 1863—1909, посвятил его истории специальную монографию.

образом: для того чтобы доказать теорему, мы предполагаем, что теорема неверна, и выводим отсюда некоторые следствия, которые принуждают нас отбросить первоначальное предположение. Доказательства от противного весьма обычны в математике.

Однако они не всегда проводятся по схеме доказательства теоремы 1; наоборот, последняя представляет собой сравнительно редкую форму доказательства от противного, и позднее мы встретимся с более типичными примерами таких доказательств.

Принятая нами система аксиом совершенно симметрична относительно двух символов «$<$» и «$>$». Поэтому каждую теорему, содержащую отношение *«меньше, чем»* можно автоматически сопоставить с теоремой, содержащей отношение *«больше, чем»*; доказательства этих теорем вполне аналогичны, так что доказательство второй теоремы чаще всего мы будем опускать. В частности, теореме 1 соответствует:

Теорема 2. *Никакое число не больше себя самого:*

$$x \ngtr x.$$

В то время, как отношение тождества «$=$», как мы знаем из логики, рефлексивно, другие два основные отношения между числами «$<$» и «$>$» антирефлексивны вследствие теорем 1 и 2; следовательно, эти теоремы можно называть з а к о н а м и **а н т и р е ф л е к с и в н о с т и** (для отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем»*).

45. Дальнейшие теоремы об основных отношениях

Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема 3. *$x > y$, если, и только если, $y < x$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам нужно показать, что формулы:

$$x > y \text{ и } y < x.$$

эквивалентны одна другой, т. е. что из первой следует вторая, и наоборот (см. параграф 10).

Предположим, во-первых, что

(1) $$y < x.$$

Вследствие аксиомы 1 возможен один из следующих трех случаев:

(2) $$x = y,\ x < y \text{ или } x > y.$$

Если бы было $x = y$, то мы бы заменили, вследствие основного закона теории тождества, то-есть закона Лейбница (см. параграф 17), в формуле (1) «x» на «y» и получили бы:

$$y < y,$$

что противоречит теореме 1. Следовательно,

(3) $$x \neq y.$$

Но мы также имеем:

(4) $$x \nless y,$$

значит, в силу аксиомы 2, формулы:

$$x < y \text{ и } y < x$$

не могут быть одновременно истинны. Вследствие (2), (3), (4) мы находим, что имеет место третий случай:

(5) $$x > y.$$

Итак, мы показали, что формула (5) следует из формулы (1), импликация в противоположном направлении может быть установлена аналогичным способом. Поэтому эти две формулы, действительно, эквивалентны, что и требуется доказать.

Применяя терминологию исчисления отношений (см. параграф 28), мы можем сказать, что согласно теореме 3 каждое из отношений «$<$» и «$>$» обратно другому.

***Теорема* 4.** *Если $x \neq y$, то $x < y$ или $y < x$.*

Доказательство. Так как

$$x \neq y,$$

то по аксиоме 1:

$$x < y \text{ или } x > y;$$

вторая из этих формул, по теореме 3, имеет следствием:

$$y < x.$$

Отсюда:

$$x < y \text{ или } y < x,$$

что и требуется доказать.

Аналогичным образом могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. *Если $x \neq y$, то $x > y$ или $y > x$.*

Посредством теорем 4 и 5 отношения «$<$» и «$>$» связаны; поэтому теоремы эти известны как законы связанности (для отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем»*). Аксиомы 2—5 вместе с теоремами 4 и 5 показывают, что множество чисел **N** упорядочено любым из отношений $<$ и $>$.

Теорема 6. *Для любых чисел x и y справедлива одна, и только одна, из трех формул: $x = y$, $x < y$ или $x > y$.*

Доказательство. Из аксиомы 1 следует, что по крайней мере одна из установленных формул должна быть справедлива. Для того чтобы доказать, что формулы:

$$x = y \text{ и } x > y$$

исключают друг друга, мы поступаем так, как в доказательстве теоремы 3: мы заменяем во второй из этих формул «x» на «y» и приходим к противоречию с теоремой 1. Подобным же образом может быть показано, что формулы:

$$x = y \text{ и } x < y$$

исключают одна другую. И, наконец, две формулы:

$$x < y \text{ и } x > y.$$

не могут быть справедливы одновременно, ибо по теореме 3 мы тогда имели бы в противоречии с аксиомой 2:

$$x < y \text{ и } y < x.$$

Поэтому любые числа x и y удовлетворяют не более чем одной из трех рассматриваемых формул, что и требуется доказать.

Теорему 6 мы будем называть строгим законом трихотомии или просто законом трихотомии; согласно этому закону одно, и только одно, из трех основных отношений между любыми двумя данными числами справедливо. Употребляя выражение «или... или...» в смысле, предложенном в параграфе 7, мы можем сформулировать теорему 6 в более сжатой форме:

Для любых чисел x и y справедливо или $x = y$, или $x < y$, или $x > y$.

46. Другие отношения между числами

Кроме основных отношений, важную роль в арифметике играют три другие отношения. Одно из них — это уже известное нам логическое отношение различия «$\neq$»; два другие — отношения $\leq$ и $\geq$, которые мы здесь изучим.

Значение символа «$\leq$» дается следующим определением:

Определение 1. *Мы говорим, что $x \leq y$, если, и только если, $x = y$* или *$x < y$.*

Формула:

$$x \leq y,$$

должна читаться: «*x меньше или равно y*» или «*x — самое большее, равно y*».

Хотя содержание приведенного определения кажется ясным, опыт показывает, что в практических применениях оно иногда становится источником некоторых недоразумений. Люди, считающие, что они отлично понимают значение символа «$\leqq$», тем не менее возражают против его применения к определенным числам. Они не только отвергают формулу

$$1 \leqq 0$$

как явно ложную — и это действительно так,— но они также считают бессмысленными или даже неверными такие формулы, как:

$$0 \leqq 0 \text{ или } 0 \leqq 1,$$

ибо они утверждают, что бессмысленно говорить $0 \leqq 0$ или $0 \leqq 1$, так как известно, что $0 = 0$ и $0 < 1$. Другими словами, невозможно указать ни одной пары чисел, которая, по их мнению, удовлетворяет формуле:

$$x \leqq y.$$

Этот взгляд явно ошибочен. Именно из того, что $0 < 1$ — истина, следует, что высказывание:

$$0 = 1 \text{ или } 0 < 1,$$

истинно, ибо дизъюнкция двух высказываний, при условии, что одно из них истинно, конечно, истинна (см. параграф 7); но согласно определению 1, эта дизъюнкция эквивалентна формуле:

$$0 \leqq 1.$$

Совершенно аналогично, формула:

$$0 \leqq 0,$$

также истинна.

Источник этих недоразумений лежит, вероятно, в определенных привычках повседневной жизни (* на что мы обращали внимание в конце параграфа 7 *). В обычном языке принято утверждать дизъюнкцию двух высказываний только в том случае, если мы знаем, что одно из высказываний истинно, не зная, однако, какое именно. Нам не приходится говорить, что $0=0$ *или* $0<1$, хотя это несомненно истинно, так как мы можем утверждать нечто более простое, и в то же время логически более сильное, а именно, что $0<1$. В математических рассуждениях, однако, не всегда выгодно формулировать все то, что мы знаем, в его наивозможно более сильной форме. Так, например, мы иногда утверждаем о четырехугольнике только то, что он есть параллелограмм, хотя знаем, что он есть квадрат, потому что нам может оказаться нужным применить общую теорему относительно произвольных параллелограммов. На подобных же основаниях может случиться, что хотя о числе x (например, о числе 0) известно, что оно меньше, чем 1, однако возможно, что о нем будут утверждать только, что $x \leqq 1$, т. е. что или $x=1$ или $x<1$.

Теперь мы сформулируем две теоремы об отношении «$\geqq$».

Теорема 7. *$x \leqq y$, если, и только если, $x \not> y$.*

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 6, т. е. закона трихотомии. Действительно, если

(1) $$x \leqq y$$

и, следовательно, по определению 1,

(2) $$x=y \text{ или } x<y,$$

то невозможно, чтобы формула:

$$x>y,$$

была истинной. Наоборот, если

(3) $$x \not> y,$$

то мы должны иметь (2) и, следовательно, снова, по определению 1, формула (1) должна быть истинной. Итак, формулы (1) и (3) эквивалентны, что и требуется доказать.

Согласно терминологии параграфа 28, теорема 7 утверждает, что отношение «$\leqq$» есть отрицание отношения «$>$».

Теорему 7 вследствие ее структуры можно было бы рассматривать как определение символа «$\leqq$»; оно отличалось бы от того, которое принято здесь, но было бы ему эквивалентно. Формулировка этой теоремы может также способствовать рассеиванию последних сомнений относительно пользования символом «$\leqq$»; ибо никто не будет более колебаться в признании истинными таких формул, как:

$$0 \leqq 0 \text{ и } 0 \leqq 1,$$

поскольку они эквивалентны формулам:

$$0 \ngtr 0 \text{ и } 0 \ngtr 1.$$

При желании мы бы могли совсем не пользоваться символом «$\leqq$», употребляя всегда вместо него «$\ngtr$».

Теорема 8. *$x<y$, если, и только если, $x \leqq y$ и $x \neq y$.*

Доказательство. Если

(1) $$x<y,$$

то, по определению 1,

(2) $$x \leqq y,$$

в то время как, по закону трихотомии, формула

$$x=y$$

не может быть справедливой. Наоборот, если формула (2) истинна, то по определению 1 мы получаем:

(3) $$x<y \text{ или } x=y;$$

но если, в то же самое время, мы имеем

$$x \neq y,$$

нам приходится принять первую часть дизъюнкции (3), т. е. формулу (1).

Импликация, следовательно, истинна в обоих направлениях, что и требуется доказать.

Ряд других теорем касательно отношения «$\ll$» мы опустим; среди них имеются, в частности, теоремы, говорящие о том, что это отношение рефлексивно и транзитивно. Доказательства всех этих теорем не представляют никаких затруднений.

Определение символа «$\geqq$», совершенно аналогично определению 1; и из теорем, касающихся отношения $\geqq$ мы автоматически получаем соответствующие теоремы касающиеся отношения $\geqq$, путем простой замены символов «$\leqq$», «$<$» и «$>$» повсюду на символы: «$\geqq$», «$>$» и «$<$».

Формулы вида:

$$x = y,$$

в которых места x и y могут быть заняты постоянными, переменными или сложными выражениями, обозначающими числа, обычно называются р а в е н с т в а м и. Подобные формулы вида:

$$x < y \text{ или } x > y$$

называются н е р а в е н с т в а м и (в б о л е е у з к о м с м ы с л е с л о в а); среди н е р а в е н с т в в б о л е е ш и р о к о м с м ы с л е с л о в а мы имеем, дополнительно, формулы вида:

$$x \neq y,\ x \leqq y \text{ или } x \geqq y.$$

Выражения, находящиеся, по левую и по правую сторону символов «$=$», «$<$» и т. д. в этих формулах, относятся друг к другу как л е в а я и п р а в а я с т о р о н ы р а в е н с т в а или н е р а в е н с т в а.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрите два отношения между людьми, а именно: быть меньшего роста и быть большего роста,

Какому условию должно удовлетворять произвольное множество людей, чтобы оно вместе с данными двумя отношениями, дало модель первой группы аксиом (см. параграф 37)?

2. Пусть формула

$$x \circledless y$$

выражает тот факт, что числа x и y удовлетворяют одному из следующих условий: (I) число x имеет меньшую абсолютную величину, чем число y, или (II), если абсолютные величины чисел x и y равны, то x — отрицательно, а y — положительно. Далее, допустим, что формула

$$x \circledgtr y$$

имеет тот же смысл, что формула

$$y \circledless x.$$

Покажите, на основе арифметики, что множество всех чисел и отношения «$\circledless$» и «$\circledgtr$», только что получившие определения, представляют модель первой группы аксиом.

Дайте другие примеры интерпретации этих аксиом в пределах арифметики и геометрии.

3. Из теоремы 1 выведите следующую теорему:

если $x < y$, то $x \neq y$.

Наоборот, выведите теорему 1 из только что сформулированной теоремы, не пользуясь никакими другими математическими формулировками. Являются ли эти два вывода косвенными и укладываются ли они в схему доказательства теоремы 1 параграфа 44?

4. Обобщите доказательство теоремы 1 параграфа 44 и, таким образом, установите следующий общий закон теории отношений (см. замечания, сделанные в параграфе 37):

Каждое отношение R, которое асимметрично в классе K, также антирефлексивно в этом классе.

5. Покажите, что если теорема 1 принимается в качестве аксиомы, то прежняя аксиома 2 может быть выведена в качестве теоремы из этой аксиомы и аксиомы 4.

Как обобщение этого факта, докажите следующий общий закон теории отношений:

Каждое отношение R, которое антирефлексивно и транзитивно в классе K, также и асимметрично в этом классе.

* 6. В конце параграфа 44 мы стремились объяснить, почему доказательство теоремы 2 может быть опущено. Эти замечания представляют собой применение некоторых рассуждений гл. VI. Объясните это подробно и, в частности, точно определите рассуждения, к которым это относится.

7. Выведите следующие теоремы из первой группы аксиом:

(a) $x=y$, *если, и только если,* $x \nless y$ *и* $y \nless x$;

(b) *если* $x<y$, *то* $x<z$ *или* $z<y$.

8. Выведите следующие теоремы из аксиомы 4 и определения 1:

(a) *если* $x<y$ *и* $y\leqq z$, *то* $x<z$;

(b) *если* $x\leqq y$ *и* $y<z$, *то* $x<z$;

(c) *если* $x\leqq y$, $y<z$ *и* $z\leqq t$, *то* $x<t$.

9. Покажите, что отношения «$\leqq$» и «$\geqq$» рефлексивны, транзитивны и связаны. Являются ли эти отношения симметричными или асимметричными?

10. Покажите, что любые два числа удовлетворяют точно трем из шести следующих отношений:

$$=,\ <,\ >,\ \neq,\ \leqq \text{ и } \geqq.$$

11. Как обратное отношение, так и отрицание любого из отношений, перечисленных в предыдущем упражнении, также находятся среди этих шести отношений. Покажите подробно, что это так.

* 12. Между какими из отношений, приведенных в упражнении 10, справедливо отношение включения? Каковы будут сумма, произведение и относительное произведение любой пары среди этих отношений?

Указание: вспомните термины, разъясненные в параграфе 28. Обязательно рассмотрите пары, состоящие из двух одинаковых отношений, и вспомните, что относительное произведение может зависеть от порядка множителей (см. упражнение 5 гл. V). В общей сложности нужно рассмотреть 36 пар отношений.

VIII

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

47. Аксиомы, относящиеся к сложению; общие свойства действий, понятия группы и абелевой группы

Теперь мы обращаемся ко второй группе аксиом, которая состоит из следующих шести положений:

Аксиома 6. *Для любых чисел y и z существует такое число x, что $x = y + z$;* другими словами: *если* $y \in \mathrm{N}$ и $z \in \mathrm{N}$, *то также* $y + z \in \mathbf{N}$.

Аксиома 7. $x + y = y + x$.

Аксиома 8. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Аксиома 9. *Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x = y + z$.*

Аксиома 10. *Если $y < z$, то $x + y < x + z$.*

Аксиома 11. *Если $y > z$, то $x + y > x + z$.*

Остановимся на первых четырех положениях второй группы, т. е. на аксиомах 6—9. Они приписывают действию сложения ряд простых свойств, которые также часто встречаются при рассмотрении других действий в различных частях логики и математики.

Для обозначения этих свойств были введены специальные термины. Так, мы говорим, что действие O является преобразованием в классе K, или что класс K замкнут (closed) относительно действия O, если выполнение действия O на двух элементах класса K имеет своим результатом снова элемент того же самого класса; другими словами, если для любых двух элементов y и z класса K существует такой элемент x того же самого класса, что

$$x = yOz.$$

Действие O называется коммутативным в классе K, если результат этого действия не зависит от порядка элементов класса K, на которых оно выполняется или, другими словами, если для любых элементов x и y класса K мы имеем:

$$xOy = yOx.$$

Действие O ассоциативно в классе K, если результат не зависит от того, каким образом сгруппированы элементы или, точнее, если для любых трех элементов x, y и z класса K выполнено условие:

$$xO(yOz) = (xOy)Oz.$$

О действии O говорят, что оно обратимо справа или обратимо слева в классе K, если для любых двух элементов x и y класса K всегда существует такой элемент z класса K, что

$$x = yOz \text{ или } x = zOy$$

соответственно. Действие O, которое обратимо и справа и слева, называется просто обратимым в классе K. Из этого прямо следует, что коммутативное действие, обратимое справа или слева, должно быть обратимым. Теперь мы скажем, что класс K есть группа относительно действия O, если это действие ассоциативно и обратимо в K и класс K замкнут относительно этого действия; если, более того, действие O коммутативно, то класс K называется абелевой группой относительно действия O. Понятие группы, особенно абелевой группы, составляет предмет специальной математической дисциплины, известной как теория групп, которая уже указана выше, в гл. V *.

В случае если класс K является универсальным классом (или объектом изучения рассматриваемой теории — см. параграф 23), мы обычно опускаем отношение к этому классу, когда употребляем такие термины, как «коммутативный» и т. д.

Согласно введенной выше терминологии, аксиомы 6—9 приведены соответственно как закон замкнутости относительно действия, коммутативный закон, ассоциативный за-

* Понятие группы было введено в математику французским математиком Э. Галуа (1811—1832). Термин «абелева группа» был принят в честь норвежского математика Н. Х. Абеля (1802—1829), чьи исследования оказали большое влияние на развитие высшей алгебры. Большое значение понятия группы для математики было признано особенно со времени работ другого норвежского математика — С. Ли (1842—1899).

кон и закон обратимости справа для действия сложения; все вместе они устанавливают, что множество всех чисел составляет абелеву группу, относительно сложения.

48. Коммутативный и ассоциативный законы для большего числа слагаемых

Аксиома 7, коммутативный закон, и аксиома 8, ассоциативный закон, в той форме, в какой они здесь установлены, относятся к двум и трем числам, соответственно. Но имеется бесконечно много других коммутативных и ассоциативных законов, относящихся к более чем двум или трем числам. Формула:

$$x+(y+z)=y+(z+x),$$

например, представляет собой образец коммутативного закона для трех слагаемых, и формула:

$$x+[y+(z+u)]=[(x+y)+z]+u$$

представляет собой один из ассоциативных законов для четырех слагаемых. Кроме того, имеются теоремы смешанного характера, которые, выраженные в общей форме, утверждают, что любые изменения или в порядке или в группировке слагаемых не оказывают влияния на результат сложения. В виде примера может быть сформулирована следующая теорема:

Теорема 9. $x+(y+z)=(x+z)+y.$

Доказательство. При помощи соответствующих подстановок мы получаем из аксиом 7 и 8:

$$(1)\qquad z+y=y+z,$$

$$(2)\qquad x+(z+y)=(x+z)+y.$$

Принимая во внимание (1), мы можем, в соответствии с законом Лейбница, заменить «$z+y$» в (2) посредством «$y+z$»; результатом является желаемая формула:

$$x+(y+z)=(x+z)+y.$$

Подобным же образом мы можем вывести все коммутативные и ассоциативные законы, относящиеся к произвольному числу слагаемых, из аксиом 7 и 8, взятых вместе и, возможно, с помощью аксиомы 6. Эти теоремы часто применяются практически при преобразованиях алгебраических выражений. Под преобразованием выражения, обозначающего число, мы понимаем обычно изменение такого рода, которое приводит к выражению, обозначающему то же число, и это выражение поэтому может быть соединено с первоначальным выражением посредством знака тождества; наиболее часто подвержены преобразованиям этого рода такие выражения, которые содержат переменные величины и которые поэтому являются функциями-указателями. На основании коммутативного и ассоциативного законов мы можем преобразовать любые выражения такой формы:

$$x + (y + z), \quad x + [y + (z + u)], \; \ldots$$

т. е. выражения, состоящие из числовых констант и переменных величин, отделенных знаками сложения и скобками; в любом таком выражении мы можем менять местами по желанию как числовые символы, так и скобки (при том лишь условии, чтобы полученное выражение не стало бессмысленным вследствие перенесения скобок).

49. Законы монотонности для сложения и их конверсии

Аксиомы 10 и 11, к которым мы сейчас обратимся, являются так называемыми *законами монотонности* для сложения и отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем»*. Мы говорим, что бинарное действие O *монотонно в классе* K *относительно двучленного отношения* R, если для любых элементов x, y, z класса K из формулы

$$yRz$$

следует:

$$(xOy)\ R\ (xOz),$$

и это обозначает, что результат применения действия O над x и y имеет отношение R к результату применения действия O над x и y. (В случае некоммутативных действий следует, строго говоря, различать между правой и левой монотонностью, причем монотонность только что определенная обозначается как правая).

Действие сложения монотонно не только касательно отношений *«меньше, чем»* и *«больше, чем»* — вследствие аксиомы 10 и 11 — но также и других отношений между числами, которые были введены в параграфе 46. Мы покажем это здесь только для отношения тождества:

Теорема 10. *Если* $y = z$, *то* $x + y = x + z$.

Доказательство. Сумма $x + y$, существование которой следует из аксиомы 6, равна сама себе (по закону 2 параграфа 17):

$$x + y = x + y.$$

Ввиду условий теоремы переменную величину «y» в правой части этого уравнения можно заменить переменной величиной «z», и мы получаем желаемую формулу:

$$x + y = x + z.$$

Конверсия теоремы 10 также истинна:

Теорема 11. *Если* $x + y = x + z$, *то* $y = z$.

Здесь мы приведем два доказательства этой теоремы. Первое доказательство, основанное на законе трихотомии и аксиомах 6, 10 и 11, сравнительно просто. Для наших дальнейших целей мы приводим, однако, другое доказательство, значительно более сложное, но не пользующееся ничем, кроме аксиом 7—9.

Первое доказательство. Предположим, что рассматриваемая теорема неверна. Тогда существуют такие числа x, y и z, что

(1) $$x + y = x + z,$$

а также

(2) $$y \neq z.$$

Так как $x+y$ и $x+z$ являются числами (согласно аксиоме 6), то они могут, по закону трихотомии, удовлетворять только одной из формул:

$$x+y=x+z, \quad x+y<x+z \text{ и } x+y>x+z.$$

Поскольку по (1) принимается первая формула, то остальные автоматически устраняются. Следовательно мы имеем:

(3) $$x+y \nless x+z \text{ и } x+y \ngtr x+z.$$

Применяя закон трихотомии еще раз, мы можем сделать вывод из неравенства (2), что

$$y<z \text{ или } y>z.$$

Отсюда, по аксиомам 10 и 11,

(4) $$x+y<x+z \text{ или } x+y>x+z,$$

что представляет собой явное противоречие (3). Таким образом, предположение отвергается, и теорема должна считаться доказанной.

* Второе доказательство. Применим аксиому 9, заменив «x» и «z» соответственно на «y» и «u». Мы получим, что имеется число u, удовлетворяющее формуле:

$$y=y+u.$$

Так как, по аксиоме 7,

$$y+u=u+y,$$

то вследствие транзитивности отношения тождества (ср. закон 4 параграфа 17):

(1) $$y=u+y.$$

Теперь снова применим аксиому 9 с «x» и «z», замененными соответственно на «z» и «v»; мы получаем, что существует число v, удовлетворяющее уравнению.

(2) $$z=y+v.$$

Вследствие (1) мы можем здесь заменить переменную «y» выражением «$u + y$»:

$$z = (u + y) + v.$$

Далее, по ассоциативному закону, т. е. аксиоме 8, мы имеем:

$$u + (y + v) = (u + y) + v,$$

так что, применяя закон V параграфа 17, мы приходим к:

$$z = u + (y + v).$$

Вследствие (2) мы можем заменить «$y + v$» на «z» (пользуясь законом Лейбница), так что в конечном итоге мы получаем.

$$z = u + z. \tag{3}$$

Применяя в третий раз аксиому 9, на этот раз с «x», «y» и «z», соответственно замененным на «u», «x» и «w», мы получаем число w, для которого справедлива формула:

$$u = x + w,$$

а так как

$$x + w = w + x,$$

то мы имеем

$$u = w + x. \tag{4}$$

Пользуясь (4), мы получаем следующую формулу из (1).

$$y = (w + x) + y.$$

Но так как, по ассоциативному закону, мы имеем:

$$w + (x + y) = (w + x) + y,$$

то эта формула становится такой:

$$y = w + (x + y). \tag{5}$$

Согласно предположению доказываемой нами теоремы, мы можем заменить «$x+y$» в (5) на «$x+z$», что приводит к:

$$(6) \qquad y = w + (x+z).$$

Применяя снова ассоциативный закон, мы имеем:

$$w + (x+z) = (w+x) + z,$$

так что (6) превращается в:

$$y = (w+x) + z.$$

Вследствие (4) мы можем здесь заменить «$w+x$» на «u». Таким путем мы получаем:

$$(7) \qquad y = u + z.$$

Но из равенств (7) и (3) следует, что

$$y = z,$$

что и следовало доказать. ✳

Здесь следует сделать несколько замечаний относительно первого доказательства теоремы 11. Подобно доказательству теоремы 1, оно представляет собой пример доказательства от противного. Схема этого доказательства может быть представлена следующим образом. В ходе доказательства известного предложения, скажем «p», мы предполагаем, что это предложение ложно, т. е. мы допускаем предложение «не p». Из этого допущения вытекает следствие «q»; другими словами, мы показываем, что имеется импликация:

если не p, то q

(в рассматриваемом случае следствие q — это соединение условий (3) и (4), что выясняется в доказательстве). С другой стороны, однако, мы имеем возможность показать (или на основании общих законов логики, как в рассматриваемом случае, или при помощи известных теорем, предварительно доказанных, вместе с математической дисциплиной, в которой выведены все эти доказательства), что полученное следствие ложно, т. е. что верно «не q»; тем самым мы вынуждены отвергнуть первоначальное предположение, а следовательно, считать, что высказывание «p» истинно. Если провести эти рассуждения в форме полного доказательства, то логический закон, который играл бы в нем существенную роль, это вариант закона контрапозиции, известного из параграфа 14, и он гласит следующее:

Из: если не p, то q, следует, что: если не q, то p.

Рассматриваемое доказательство несколько отличается от доказательства теоремы 1. Там из предположения, что теорема ложна, мы сделали вывод, что теорема верна, т. е. мы вывели следствие, прямо противоречащее предположению; здесь, однако, мы из подобного предположения вывели следствие, о котором мы знаем из других источников, что оно ложно. Но это рзличие не существенно; легко видеть на основании логических законов, что доказательство теоремы 1, подобно любому другому косвенному доказательству, может быть подведено под выщеописанную схему.

Другие законы монотонности, подобные теореме 10, т. е. аксиомы 10 и 11, также допускают обращение

Теорема 12. *Если $x+y<x+z$, то $y<z$.*

Теорема 13. *Если $x+y>x+z$, то $y>z$.*

Доказательство этих теорем без затруднения может быть получено аналогично доказательству теоремы 1.

50. Замкнутые системы высказываний

Существует общий логический закон, знание которого значительно упрощает доказательства последних трех теорем (11, 12, и 13). Этот закон, иногда называемый з а к о н о м   з а м к н у т ы х   с и с т е м или законом Гаубера*, позволяет нам иногда, когда нам удается доказать некоторые условные высказывания, сделать вывод из формы этих высказываний, что соответствующие конверсные высказывания можно рассматривать как доказанные.

Предположим, что нам дано некоторое число импликаций, скажем три, которым мы придадим следующую схематическую форму:

если p_1, *то* q_1,

если p_2, *то* q_2,

если p_3, *то* q_3.

Об этих трех высказываниях говорят, что они образуют **замкнутую систему**, если их предпосылки такого рода, что исчерпывают все возможные случаи, т. е. если верно, что:

p_1 или p_2 или p_3,

и если в то же самое время одно из их следствий исключает другое:

если q_1, *то не* q_2; *если* q_1, *то не* q_3; *если* q_2, *то не* q_3.

Закон замкнутых систем утверждает, что если некоторые условные высказывания, образующие замкнутую систему, верны, то соответствующие конверсные высказывания также верны.

Простейший пример замкнутой системы дан в форме системы двух предложений, состоящей в некоторой импликации:

если p, *то* q

и ее инверсного высказывания:

если не p, *то не* q.

---

* По имени немецкого математика К. Ф. Гаубера (1775—1851).

Для доказательства двух обратных предложений в этом случае даже нет необходимости прибегать к закону замкнутых систем; достаточно применить закон контрапозиции.

Теорема 10 и аксиомы 10 и 11 образуют замкнутую систему трех высказываний. Это следствие закона трихотомии; так как между любыми двумя числами мы имеем точно одно из отношений «$=$», «$<$» и «$>$», то мы видим, что антецеденты этих трех высказываний, т. е. формулы:

$$y = z, \ y < z, \ y > z,$$

исчерпывают все возможные случаи, в то время как их консеквенты, т. е. формулы:

$$x + y = x + z, \ x + y < x + z, \ x + y > x + z,$$

исключают друг друга. (Закон трихотомии предполагает даже больше; однако, это не имеет отношения к нашей цели, именно, что первые три формулы не только исчерпывает все возможные случаи, но и исключают одна другую, и что последние три формулы не только исключают друг друга, но также исчерпывают все возможные случаи.) На том лишь основании, что три утверждения образуют замкнутую систему, верно, что конверсные теоремы 11—13 должны быть приняты.

Многочисленные примеры замкнутых систем могут быть найдены в элементарной геометрии; например, рассматривая относительное положение двух окружностей, мы имеем дело с замкнутой системой, состоящей из пяти предложений.

В заключение можно отметить, что всякий, кто не знает закона замкнутых систем, но пытается доказать положения, обратные данным положениям, образующим систему такого рода, может механически применить тот же способ рассуждения, которым мы пользовались в первом доказательстве теоремы 11.

51. Следствия законов монотонности

Теоремы 10 и 11 могут быть соединены в одно предложение:

$$y = z, \text{ если, и только если, } x + y = x + z.$$

Подобным же образом можно соединить аксиомы 10 и 11 с теоремами 12 и 13. Полученные таким образом теоремы могут быть обозначены как законы эквивалентного преобразования уравнений и неравенств при помощи сложения. Содержание этих теорем иногда описывается следующим образом: если одно и то же число прибавить к обеим сторонам уравнения или неравенства, не изменяя знака равенства или неравенства, то полученное уравнение или неравенство эквивалентно первоначальному (эта формулировка, конечно, не совсем правильна, так как стороны уравнения или неравенства являются не числами, а выражениями, к которым невозможно прибавить какое-либо число).

Упомянутые здесь теоремы играют важную роль в решении уравнений и неравенств.

Выведем еще одно следствие из теорем монотонности.

Теорема 14. *Если $x + z < y + t$, то $x < y$ или $z < t$.*

Доказательство. Предположим, что вывод теоремы ложен; другими словами, x не меньше, чем y, и z не меньше, чем t. Из этого следует, по закону трихотомии, что одна из двух формул:

$$x = y \text{ или } x > y,$$

а также одна из двух формул:

$$z = t \text{ или } z > t$$

должны быть приняты. Мы должны, таким образом, рассмотреть следующие четыре возможности:

(1) $$x = y \text{ и } z = t;$$

(2) $$x = y \text{ и } z > t;$$

(3) $$x > y \text{ и } z = t;$$

(4) $$x > y \text{ и } z > t.$$

Начнем с рассмотрения первого случая. Если два выражения (1) справедливы, то мы получаем, по теореме 10:

$$z + x = z + y$$

из первого уравнения; а так как, согласно аксиоме 7,

$$x + z = z + x \text{ и } z + y = y + z,$$

то мы можем сделать вывод, при помощи двойного применения закона транзитивности к отношению тождества:

(5) $$x + z = y + z.$$

Если мы теперь применим теорему 10 ко второму из уравнений (1), то мы получаем:

(6) $$y + z = y + t,$$

что вместе с (5), дает:

(7) $$x + z = y + t.$$

Путем совершенно аналогичного вывода — с применением аксиом 4, 5 и 10 — любой из трех остающихся случаев (2), (3) и (4) приводит к неравенству:

(8) $$x + z > y + t.$$

Поэтому во всяком случае одна из формул, (7) или (8), справедлива. Но так как $x + z$ и $y + t$ — числа (аксиома 6), то из этого следует, по закону трихотомии, что формула:

$$x + z < y + t$$

неверна.

Таким образом, предполагая, что вывод ложен, мы пришли к непосредственному противоречию с антецедентом теоремы. Следовательно, предположение должно быть отвергнуто, и мы видим, что консеквент действительно вытекает из антецедента.

Только что приведенное рассуждение относится к числу косвенных доказательств; с несущественным изменением оно может быть подведено под схему, описанную в параграфе 49 в связи с первым доказательством теоремы 11. Однако, при формальном рассмотрении, ход этого рассуждения незначительно отличается от рассуждения в доказательствах теорем 1 и 11. Инференция имеет следующую схему: чтобы доказать предложение в форме импликации, например, высказывание:

если p, то q,

мы предполагаем, что консеквент высказывания, т. е. «*q*», ложен (но не все высказывание); из этого предположения, т. е. из *«не q»* выводится, что антецедент ложен, т. е. что *«не p»* истинно. Другими словами, вместо того чтобы доказать рассматриваемое высказывание, дается доказательство соответствующего контрапозитивного высказывания:

если не q, то не p

и из этого выводится истинность первоначального высказывания. Основание для инференции такого рода должно быть найдено в законе исчисления высказываний относительно того, что из истинности контрапозитивного высказывания всегда следует истинность первоначального высказывания (ср. параграф 14).

Выводы такой формы весьма обычны во всех математических дисциплинах; они представляют собой самый распространенный тип косвенного доказательства.

52. Определение вычитания; обратные действия

Ближайшая наша задача — показать, как в наши рассуждения можно ввести понятие вычитания. Для этой цели мы сперва докажем следующую теорему:

Теорема 15. *Для любых двух чисел y и z имеется точно одно такое число x, что $y = z + x$.*

Доказательство. Аксиома 9 гарантирует существование по крайней мере одного числа x, удовлетворяющего формуле:

$$y = z + x.$$

Нам нужно показать, что имеется не более чем одно такое число, другими словами, что любые два числа u и v, удовлетворяющие этой формуле, тождественны. Допустим, следовательно, что:

$$y = z + u \text{ и } y = z + v.$$

Отсюда следует (по законам симметрии и транзитивности для отношения «$=$»):

$$z + u = z + v,$$

из чего, по теореме 11, мы получаем:

$$u = v.$$

Таким образом, имеется точно одно число x (ср. параграф 20), для которого

$$y = z + x,$$

что и следовало доказать.

Это единственное число x, о котором говорит вышеприведенная теорема, обозначается символом:

$$y - z;$$

мы его обычно читаем: *«разность между числами x и y»* или *«результат вычитания числа z из числа y»*. Точное определение понятия разности таково:

Определение 2. *Мы говорим, что $x = y - z$, если, только если, $y = z + x$.*

Действие I называется правой инверсией действия O в классе K, если эти два действия O и I удовлетворяют следующему условию:

для любых элементов x, y и z класса K мы имеем: $x = yIz$, если, и только если, $y = zOx$.

Подобным же образом определяется левая инверсия действия O. Если действие O коммутативно в классе K, две инверсии — правая и левая — совпадают, и мы можем тогда просто говорить об инверсии действия O (или также об инверсном действии O). Согласно с этой терминологией, определение 2 выражает тот факт, что вычитание является правой инверсией (или простой инверсией) сложения.

53. Определения, в которых определяемое содержит знак тождества

*Определение 2 является образцом весьма обычного рода определения в математике. Эти определения обусловливают смысл символа, обозначающего или отдельную вещь, или действие над определенным числом вещей (другими словами, функцию с определенным числом аргументов). В каждом определении такого рода определяемое имеет форму уравнения:

$$x = \ldots;$$

на правой стороне этого уравнения мы имеем самый символ, который должен быть определен, или же, в ином случае, функцию-указатель, построенную из символа, который должен быть определен, и некоторых переменных «y», «z»,..., смотря по тому, обозначает ли рассматриваемый символ отдельную вещь или действие над вещами. Определяющее может быть функцией-высказыванием любой формы, которая содержит те же свободные переменные, что и определяемое, и утверждает, что вещь x — возможно вместе с вещами y, z — удовлетворяет такому-то и такому-то условию.

Определение 2 устанавливает смысл символа, который обозначает действие над двумя числами. Для того чтобы дать другой пример этого типа определения, установим определение символа «*0*», обозначающего отдельное число:

Мы говорим, что $x = 0$, *если, и только если, для любого числа* y *справедлива формула:* $y + x = y$.

С определениями рассматриваемого типа связана известная опасность; ибо тот, кто применяет подобные определения без достаточной осторожности, может легко притти к противоречию с самим собой. Конкретный пример сделает это ясным.

Оставим, на минуту, наши теперешние исследования и предположим, что в арифметике мы имеем уже в нашем распоряжении символ умножения и что с его помощью мы желаем определить символ деления. Для этой цели мы применим следующее определение, построенное точно по образцу определения 2:

мы говорим, что $x = y : z$, *если, и только если,* $y = z \cdot x$.

Если теперь в этом определении мы заменим «y» и «z» оба на «0» и «x» сперва на «1», а затем на «2», и если мы видим, что мы имеем формулы:

$$0 = 0 \cdot 1 \text{ и } 0 = 0 \cdot 2,$$

то мы получаем сразу:

$$1 = 0 : 0 \text{ и } 2 = 0 : 0.$$

Но так как две вещи, равные одной и той же вещи, равны друг другу, то мы приходим к:

$$1 = 2,$$

что явно бессмысленно.

Не трудно представить себе основание для этого явления. Как в определении 2, так и в определении частного, здесь рассмотренного, определяющее имеет форму функции-высказывания с тремя свободными переменными «x», «y» и «z». Каждой такой функции-высказыванию соответствует трехчленное отношение, существующее между числами x, y и z, если, и только если, эти числа удовлетворяют этой функции-высказыванию (ср. параграф 27); и именно целью определения является введение символа, обозначающего это отношение. Но если придать определяемому форму:

$$x = y - z \text{ или } x = y : z,$$

то заранее предполагают, что это отношение является функциональным (а следовательно, действием или функцией, ср. параграф 34) и что поэтому для любых двух чисел y и z имеется не более чем одно число x, стоящее к ним в рассматриваемом отношении. Однако тот факт, что отношение является функциональным, сначала вовсе не очевиден, и он должен быть сперва установлен. Это мы сделали в случае определения 2; но нам не удалось сделать это в случае определения частного, и мы, конечно, не будем в состоянии это сделать просто потому, что рассматриваемое отношение перестает быть функциональным в известном исключительном случае: так как, если

$$y = 0 \text{ и } z = 0,$$

то существует бесконечное множество x, для которых

$$y = z \cdot x.$$

Если, однако, желательно сформулировать определение частного в вышеуказанной форме, не вводя противоречий, следует принимать во внимание, что исключается тот случай, где оба числа, y и z, являются 0, — например, путем введения добавочного условия в определяющее.

Приведенные выше соображения приводят нас к следующему выводу. Каждому определению типа определения 2 нужно предпослать теорему, точно соответствующую теореме 15, т. е. теорему о том, что имеется только одно число x, которое удовлетворяет определяющему. (Возникает вопрос, существенно ли то, что имеется точно одно число x, или же достаточно, чтобы имелось не более, чем одно такое число. Обсуждение этой довольно трудной проблемы будет здесь опущено.)*

54. Теоремы о вычитании

На основе определения 2 и законов сложения мы можем без труда доказать основные теоремы теории вычитания, как-то закон замкнутости относительно вычитания, законы монотонности и законы эквивалентного преобразования уравнений и неравенства при помощи вычитания. Сюда также принадлежат те теоремы, которые делают возможным преобразование так называемых алгебраических сумм, т. е. выражений, состоящих из числовых постоянных и переменных, разделенных знаками «+» и «—», а также скобками (последние часто опускаются в согласии со специальными правилами относительно этого явления). Следующая теорема может служить примером теорем этой категории:

Теорема 16. $x + (y - z) = (x + y) - z$

Доказательство: y и z, согласно аксиоме 9, соответствует такое число u, что

(1) $$y = z + u;$$

отсюда следует, по определению 2, что

(2) $$u = y - z.$$

По коммутативному закону мы имеем:

$$x + y = y + x$$

На основании (1) «y» может быть здесь заменен в правой части равенства на «$z+u$», так что мы получаем:

(3) $$x+y=(z+u)+x.$$

С другой стороны, из теоремы 9 следует, что

(4) $$z+(x+u)=(z+u)+x.$$

Но так как два числа, порознь равные одному и тому же числу, равны друг другу, то мы можем вывести из (3) и (4):

(5) $$x+y=z+(x+u).$$

Так как, далее, $x+u$ и $x+y$ суть числа (по аксиоме 6), то мы можем подставить «$x+u$» и «$x+y$» на место «x» и «y» в определении 2. (5) показывает, что определяющее в таком случае истинно, и тогда определяемое должно также иметь силу:

$$x+u=(x+y)-z.$$

Если теперь, ввиду (2), мы заменим в этом последнем уравнении «u» на «$y-z$», то в конечном итоге мы придем к

$$x+(y-z)=(x+y)-z,$$

что и требовалось доказать.

После этого мы окончим построение нашего арифметического фрагмента.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим следующие три системы, состоящие каждая из определенного множества, двух отношений и одного действия:

(a) множество всех чисел, отношения $\leqq$ и $\geqq$, действие сложения;

(b) множество всех чисел, отношения $<$ и $>$, действие умножения;

(c) множество всех положительных чисел, отношения $<$ и $>$, действие умножения.

Определите, какие из этих систем — модели системы аксиом 1—11 (ср. параграф 37).

2. Рассмотрите любую прямую линию, к которой мы будем относиться как к числовой линии; обозначьте точки на этой линии буквами «*X*», «*У*», «*Z*», ... На числовой линии мы избираем фиксированную начальную точку *O* и единицу — точку *U*, отличную от *O*. Теперь допустите, что *X* и *У* — две отдельные точки на нашей линии. Мы рассматриваем два луча, один, начинающийся в *O* и проходящий через *U*, другой, начинающийся в *X* и проходящий через *У*. Мы скажем, что точка *X* предшествует точке *У*, при помощи символов:

$$X \circledless \text{У},$$

если, и только если, оба луча тождественны или один из них — не важно, какой — составляет часть другого. В обратном случае мы скажем, что точка *У* предшествует точке *X*, написав:

$$\text{У} \circledgtr X.$$

Точка *Z* называется суммой точек *X* и *У*, если она удовлетворяет следующим условиям: (I) сегмент *OX* конгруэнтен сегменту *УZ*; (II) если $O \circledless X$, то $\text{У} \circledless Z$, но если $O \circledgtr X$, то $\text{У} \circledgtr Z$. Сумма точек *X* и *У* обозначается:

$$X \oplus \text{У}.$$

Покажите при помощи геометрических теорем, что множество всех точек числовой линии (т. е. проще говоря, сама числовая линия), отношения $\circledless$ и $\circledgtr$, и действие $\oplus$ представляют собой в совокупности модель принятой нами системы аксиом и что поэтому эта система получает интерпретацию внутри геометрии.

3. Рассмотрим четыре действия **A**, **B**, **G**, **L**, которые — подобно сложению — соотносят третье число с любыми двумя числами. Результатом действия **A** над числами x и y мы всегда считаем число x, а результатом действия **B** — число y:

$$x\mathbf{A}y = x, \qquad x\mathbf{B}y = y.$$

При помощи символов «$x\mathbf{G}y$» и «$x\mathbf{L}y$» мы обозначаем то из двух чисел x и y, которое не меньше или не больше, чем другое из этих чисел, соответственно; итак, мы имеем.

$$x\mathbf{G}y = x, \text{ и } x\mathbf{L}y = y, \text{ в случае если } x \geq y,$$

$$x\mathbf{G}y = y \text{ и } x\mathbf{L}y = x, \text{ в случае если } x \leq y.$$

Какие из свойств, рассмотренных в отделе 47, относятся к числу этих четырех действий? Является ли множество всех чисел группой, и в частности абелевой группой, относительно какого-нибудь из этих действий?

4. Предположим, что **C** есть класс всех множеств точек, т. е. геометрических конфигураций. Выполнимы-ли, коммутативны, ассоциативны и обратимы сложение и вычитание множеств (согласно определению в параграфе 25) в классе **C**? Является ли поэтому класс **C** группой, и в частности абелевой, группой относительно любого из этих действий?

5. Покажите, что множество всех чисел не является абелевой группой относительно умножения, но что всякое из следующих множеств является абелевой группой относительно этого действия:

(a) множество всех чисел, отличных от 0,
(b) множество всех положительных чисел,
(c) множество состоящее из двух чисел 1 и —1.

6. Рассмотрите множество **S**, состоящее из двух чисел 0 и 1, и допустите, что действие $\oplus$ над элемен-

тами этого рода определяется следующими формами:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Определите, является ли множество S абелевой группой относительно действия $\oplus$.

7. Рассмотрим множество S, состоящее из трех чисел 0, 1 и 2. Определите действия $\oplus$ над элементами этого множества таким образом, чтобы множество S было абелевой группой относительно этого действия.

8. Докажите, что ни одно множество, состоящее из двух или трех различных чисел, не может быть абелевой группой относительно сложения. Существует ли множество, состоящее из одного только числа, которое образует абелеву группу относительно сложения?

9. Выведите следующие теоремы из аксиом 6 — 8:

(a) $$x + (y + z) = (z + x) + y;$$

(b) $$x + [y + (z + t)] = (t + y) + (x + z).$$

10. Сколько выражений может быть получено из каждого из следующих выражений:

$$x + (y + z), \quad x + [y + (z + t)], \quad x + \{y + [z + (t + u)]\},$$

если они преобразуются исключительно на основе аксиом 6 — 8?

11. Сформулируйте общее определение левой монотонности действия O касательно отношения R.

12. На основе принятых нами аксиом и выведенных из них теорем, докажите, что сложение — монотонное действие касательно отношений $\neq$, $\leqq$ и $\geqq$.

13. Монотонно ли умножение касательно отношений $<$ и $>$

(a) в множестве всех чисел,

(b) в множестве всех положительных чисел,

(c) в множестве всех отрицательных чисел?

14. Какие из действий, определенных в упражнении 3, монотонны касательно отношений $=$, $<$, $>$, $\neq$, $\leqq$ и $\geqq$?

15. Монотонны ли сложение и умножение классов касательно отношения включения, или любого из других отношений между классами, рассмотренных в параграфе 24?

16. Выведите из наших аксиом следующую теорему:

$$\textit{если } x < y \text{ и } z < t, \textit{ то } x + z < y + t.$$

Замените в этом предложении символ «$<$» по очереди символами «$>$», «$=$», «$\neq$», «$\leqq$» и «$\geqq$» и исследуйте какие из предложений, полученных таким путем, правильны?

17. Приведите примеры замкнутых систем предложений в арифметике и геометрии.

18. Выведите из наших аксиом следующие теоремы:

(a) если $x + x = y + y$, *то* $x = y$;

(b) если $x + x < y + y$, *то* $x < y$;

(c) если $x + x > y + y$, *то* $x > y$.

Указание: докажите сначала конверсные предложения (пользуясь результатами упражнения 16) и покажите, что они образуют замкнутую систему.

* 19. Если теорема выводима только из аксиом 6—9, она может быть распространена на любую абелеву группу, так как каждый класс K, который образует абелеву группу относительно действия O, представляет собой вместе с этим действием образец аксиом 6—9 (ср. параграфы 37—38). Это приложимо, в частности, к теореме 11 (если иметь в виду второе доказательство этой теоремы), и мы имеем следующую общую теорему теории групп.

Каждый класс K, который является абелевой группой относительно действия O, удовлетворяет следующему условию:

$$\text{если } x \in K,\ y \in K,\ z \in K \text{ и } xOy = xOz, \text{ то } y = z.$$

Дайте точное доказательство этой теоремы.

Покажите, с другой стороны, что теорема (а) упражнения 18 не может быть распространена на произвольные абелевы группы, приведя пример класса K и действия O с такими свойствами: (1) класс K есть абелева группа относительно действия O и (2) существует два определенных элемента x и y класса K, для которых $xOx = yOy$ (ср. упражнение 16). Можно ли, следовательно, вывести теорему (а) только из аксиом 6 — 9?

20. Преобразуйте доказательство теоремы 14 таким образом, чтобы она соответствовала схеме, описанной в параграфе 49, в связи с первым доказательством теоремы.

21. Можно ли сказать, что действие деления есть инверсия умножения в множестве всех чисел?

22. Обладают ли инверсиями (в множестве всех чисел, или в классе всех геометрических конфигураций) действия, упомянутые в упражнениях 3 и 4.

* 23. Какие действия являются левыми или правыми инверсиями вычитания (в множестве всех чисел)?

24. В параграфе 53 определение символа O было установлено путем примера. Для того, чтобы быть уверенным, что это определение не ведет к противоречию, ему необходимо предпослать следующую теорему:

существует точно одно такое число x, что для любого числа y мы имеем $y + x = y$.

Докажите эту теорему на основе только аксиом 6 — 9.

25. Сформулируйте предложения, утверждающие, что вычитание не выводит из рассматриваемого класса коммутативно, ассоциативно, справа и слева инверсно и справа и слева монотонно касательно отношения *менее чем*. Какие из этих высказываний истинны? Докажите те из них, которые истинны, пользуясь

нашими аксиомами и определением 2 параграфа 52.

26. Выведите следующие теоремы из наших аксиом и определения:

(a) $$x-(y+z)=(x-y)-z,$$

(b) $$x-(y-z)=(x-y)+z,$$

(c) $$x+y=x-[(x-y)-x].$$

* 27. Применяя закон замкнутости относительно вычитания и теорему (c) предыдущего упражнения, докажите следующую теорему:

для того чтобы множество K чисел было абелевой группой относительно сложения, необходимо и достаточно, чтобы разность любых двух чисел множества K также принадлежала множеству K (т. е. чтобы из формулы $x \in K$ и $y \in K$ всегда следовало $x-y \in K$).

Примените эту теорему для того, чтобы найти примеры множеств чисел, которые являются абелевыми группами относительно сложения.

28. Напишите при помощи логических символов все аксиомы, определения и теоремы, данные в последних двух главах.

Указание: прежде чем сформулировать теорему 15 в символах, выразите ее в эквивалентной форме, в которой числовые кванторы устранены согласно объяснениям, данным в параграфе 20.

IX

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОСТРОЕННОЙ ТЕОРИИ

55. Элиминация излишних аксиом в первоначальной системе аксиом

Две предшествующие главы были посвящены описанию в общих чертах основ элементарной математической теории, которая составляет часть арифметики. В настоящей главе мы перейдем к рассуждениям методологического характера относительно системы аксиом и первоначальных терминов, на которых основана эта теория.

Мы начнем с конкретных примеров, иллюстрирующих замечания параграфа 39 относительно таких проблем, как произвольность выбора аксиом и первоначальных терминов, возможное устранение излишних аксиом и т. д.

Начнем с вопроса, не содержит ли наша система аксиом 1—11, коротко говоря, мы будем называть ее **системой** $\mathfrak{A}$ какой-либо излишней аксиомы, т. е. аксиомы, которую можно вывести из остающихся аксиом системы. Мы сразу же увидим, что легко ответить на этот вопрос, и, более того, ответить утвердительно. Действительно, мы имеем:

Три из аксиом системы $\mathfrak{A}$, а именно, одна из аксиом 4 или 5, аксиома 6 и одна из аксиом 10 или 11, могут быть выведены из оставшихся аксиом.

Доказательство: Сначала мы покажем, что (I) *Любая из аксиом 4 или 5 может быть выведена из другой с помощью аксиом 1 — 3.*

Действительно, мы видим, что доказательство теоремы 3 основывалось исключительно — прямо или косвенно — на аксиомах 1—3. Если, с другой стороны, мы уже имеем в своем распоряжении теорему 3, то мы можем вывести аксиому 5 из аксиомы 4 (или наоборот) следующим способом:

$$\text{если } x > y \text{ и } y > z,$$

то, по теореме 3,

$$y < x \text{ и } z < y;$$

а применяя аксиому 4, где «x» заменен на «z» и «z» на «x», мы получаем:

$$z < x,$$

откуда, снова по 3, следует:

$$x > z,$$

а это есть консеквент аксиомы 5.

Подобным же образом может быть показано, что:

(II) *аксиомы 10 или 11 могут быть выведены одна из другой при помощи аксиом 1—3.*

Наконец, мы покажем, что:

(III) *аксиома 6 может быть выведена из аксиом 7—9.*

Доказательство этого последнего утверждения не совсем просто и похоже на второе доказательство теоремы 11. Даны два произвольных числа x и y; посредством четырехкратного применения аксиомы 9 вводится одно за другим четыре новых числа u, w, z и v, удовлетворяющих следующим формулам:

(1) $$y = y + u,$$

(2) $$u = x + w,$$

(3) $$y = w + z,$$

(4) $$z = y + v.$$

Из (1), по коммутативному закону, мы имеем:

$$y = u + y;$$

сочетая это уравнение с (4) и используя, как в случае доказательства теоремы 11, ассоциативный закон, мы получаем:

$$(5) \qquad z = u + z.$$

Из (5) и (2) мы получаем:

$$z = (x + w) + z,$$

а отсюда, снова по ассоциативному закону,

$$z = x + (w + z),$$

что, ввиду (3), дает:

$$(6) \qquad z = x + y.$$

Итак, мы показали, что для двух любых чисел x и y существует число z, для которого (6) справедливо, а это и есть как раз содержание аксиомы 6.

Можно было бы добавить, что вышеописанный способ вывода применим не только к сложению, но — в согласии с общими замечаниями параграфов 37 и 38 — также к любому другому действию; если действие O коммутативно, ассоциативно и инверсно справа в классе K, то класс K замкнут относительно этого действия, а поэтому образует абелеву группу касательно действия O (ср. параграф 47).*

Теперь мы увидели, что система содержит, по крайне мере, три аксиомы, которые излишни и могут быть, поэтому, опущены. Следовательно, система $\mathfrak{A}$ может быть заменена системой, состоящей из следующих восьми аксиом:

Аксиома 1[1]. *Для любых чисел x и y: $x = y$ или $x < y$, или $x > y$.*

Аксиома 2[1]. *Если $x < y$, то $y \nless x$.*

Аксиома 3[1]. *Если $x > y$, то $y \ngtr x$.*

Аксиома $4^{(1)}$. *Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.*

Аксиома $5^{(1)}$. $x + y = y + x$.

Аксиома $6^{(1)}$. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Аксиома $7^{(1)}$. *Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x = y + z$.*

Аксиома $8^{(1)}$. *Если $y < z$, то $x + y < x + z$.*

Мы будем ссылаться на эту систему аксиом как на систему, и тогда мы имеем следующий результат:

система $\mathfrak{A}^{(1)}$ и система $\mathfrak{A}$ эквиполлентны.

В сравнении с первоначальной системой новая упрощенная система аксиом имеет определенные недостатки как с эстетической, так и с дидактической точек зрения. Она уже более не симметрична относительно двух первоначальных символов «$<$» и «$>$», причем некоторые свойства отношения $<$ приняты без доказательства, в то время как совершенно аналогичные свойства отношения $>$ должны быть сначала доказаны. В новой системе также отсутствует аксиома 6, носившая вполне элементарный и интуитивно очевидный характер, в то время как ее выведение из аксиом, содержащихся в системе $\mathfrak{A}^{(1)}$ — представляет известные трудности.

56. Независимость аксиом упрощенной системы

Теперь возникает вопрос, имеются ли еще излишние аксиомы, содержащиеся в системе $\mathfrak{A}^{(1)}$. Окажется, что это не так:

$\mathfrak{A}^{(1)}$ есть система взаимно независимых аксиом.

Для того чтобы доказать только что сформулированное методологическое утверждение, мы применяем метод доказательства путем интерпретации, который уже применялся в частном случае в параграфе 37. Мы должны показать, что ни одна аксиома системы $\mathfrak{A}^{(1}$ не выводима из остальных аксиом этой системы. Рассмотрим, например, аксиому $2^{(1)}$. Предположим, мы заменим символ «$<$» в аксиомах системы $\mathfrak{A}^{(1}$ везде символом «$\leqq$», не изменяя аксиом никаким другим путем. В результате этого преобразования ни одна аксиома, за исключением аксиомы $2^{(1)}$, не теряет своей истинности; действительно, аксиомы $3^{(1)}$, $5^{(1)}$, $6^{(1)}$ и $7^{(1)}$ не изменяются, так как они не содержат символа «$<$», а аксиомы $1^{((1)}$, $4^{(1)}$ и $8^{(1)}$ переходят в известные арифметические теоремы, доказательства которых на основе системы $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}^{(1)}$ и определения 1 символа «$\leqq$» (ср. параграф 46) не представляют затруднений. Можно утверждать, следовательно, что множество **N** всех чисел, отношения $\leqq$ и $>$ и действие сложения составляют модель аксиом $1^{(1)}$ и $3^{(1)}$—$8^{(1)}$; таким образом, система этих семи аксиом нашла новую интерпретацию в пределах арифметики. С другой стороны, сразу же можно видеть, что предложение, следующее из аксиомы $2^{(1)}$ посредством преобразования, ложно, так как его отрицание можно легко доказать в арифметике; формула:

$$x \leqq y$$

не всегда исключает:

$$y \leqq x,$$

так как имеются числа x и y, одновременно удовлетворяющие двум неравенствам

$$x \leqq y \text{ и } y \leqq x$$

(это, конечно, так, если, и только если, x и y равны). Если, поэтому, предполагать известной арифметику, (см. параграф 41), то надо признать тот факт, что предложение, полученное из аксиомы $2^{(1)}$, не является теоремой этой дисциплины. А из этого следует, что аксиома $2^{(1)}$ не выводима из остальных аксиом системы $\mathfrak{A}^{(1)}$; так как в противном случае эта аксиома не могла лишиться своей истинности в любой интерпретации, при которой другие аксиомы истинны (см. аналогичные рассуждения в парарафе 37).

Пользуясь тем же методом обоснования, но применяя другие подходящие интерпретации, мы можем получить тот же результат для любой из других аксиом.

✳ Вообще метод доказательства при помощи интерпретации можно описать следующим образом. Вопрос состоит в том, чтобы показать, что некоторое предложение A не есть следствие известной системы $\mathfrak{S}$ аксиом или других утверждений данной дедуктивной теории. Для этой цели мы рассматриваем произвольную дедуктивную теорию $\mathfrak{T}$, относительно которой мы полагаем, что она содержательна (consistent) — в частности, это может быть та же теория, к которой принадлежат утверждения системы $\mathfrak{S}$. Затем мы пытаемся найти, в пределах этой теории, модель системы $\mathfrak{S}$ такого рода, что не самое предложение A, но его отрицание становится теоремой (или, возможно, аксиомой) теории $\mathfrak{T}$. Если нам удается это сделать, мы можем применить закон дедукции, установленный в параграфе 38. Как мы знаем, из этого закона следует, что если предложение A могло бы быть выведено из предложений системы $\mathfrak{S}$, то оно оставалось бы истинным для любой интерпретации этой системы. Следовательно, самый факт существования интерпретации $\mathfrak{S}$, для которой A ложно, является доказательством, что это предложение не может быть выведено из системы $\mathfrak{S}$. Говоря более строго, это есть доказательство условного предложения:

если теория $\mathfrak{T}$ содержательна, то предложение A не может быть выведено из предложений системы $\mathfrak{S}$

Основание, почему мы должны принять гипотезу, что теория $\mathfrak{T}$ содержательна, можно легко усмотреть. В противном случае, теория $\mathfrak{T}$ могла бы содержать два противоречащих предложения среди ее аксиом и теорем, и мы не могли бы сделать вывод, что $\mathfrak{T}$ содержит предложение A (или, скорее, интерпретацию А), из простого факта, что $\mathfrak{T}$ не содержит отрицания А. Таким образом, наши рассуждения больше не были бы убедительными.

Для того чтобы притти, вышеуказанным путем, к исчерпывающему доказательству независимости данной системы аксиом, описанный метод должен быть применен столько же раз, сколько имеется аксиом в рассматриваемой системе; в свою очередь, каждая аксиома берется в качестве предложения А, в то время, как $\mathfrak{J}$ состоит из остальных аксиом системы.*

57. Элиминация излишних первичных терминов и последующее упрощение системы аксиом; понятие упорядоченной абелевой группы

Вернемся еще раз к системе аксиом $\mathfrak{A}^{(1)}$. Так как эта система независима, она не допускает никакого дальнейшего упрощения путем опущения излишних аксиом. Тем не менее упрощение может быть достигнуто иным путем. Ибо первичные термины системы $\mathfrak{A}^{(1)}$ не являются взаимно независимыми. Действительно, какой-либо один из двух символов «$<$» и «$>$» может быть вычеркнут из списка первичных терминов, а затем он может быть определен в терминах другого (символа). Это легко усмотреть из теоремы 3. Благодаря своей форме, эта теорема может рассматриваться как определение символа «$>$» посредством символа «$<$», и если в этой теореме мы поменяем местами две стороны эквивалентности, мы можем смотреть на это как на определение символа «$<$» посредством символа «$>$». (В каждом случае желательно, чтобы фраза *«Мы говорим, что»* предшествовала теореме; ср. параграф 11.) С дидактической точки зрения это сокращение первичных терминов могло бы вызвать некоторые возражения; ибо термины «$<$» и «$>$» одинаково понятны в их значении, и отношения, ими выраженные, обладают совершенно аналогичными свойствами, так что казалось бы немного искусственным рассматривать один из этих терминов как сразу же понятный, в то время как другой должен сначала получить определение при помощи первого. Но эти возражения мало убедительны.

Если теперь, невзирая ни на какие дидактические соображения, мы решаем устранить один из рассматриваемых символов из списка первичных терминов, то возникает задача придать нашей системе аксиом такую форму, при которой в системе не встречается определяемых терминов. (Между прочим, это — методологический постулат, которым на практике часто пренебрегают; особенно в геометрии, аксиомы обычно формулируются с помощью определяемых терминов, чтобы придать им большую простоту и очевидность.) Эта задача не представляет никаких затруднений; мы просто заменяем в системе аксиом $\mathfrak{A}^{(1)}$ каждую формулу типа:

$$x > y$$

формулой

$$< x,$$

которая, по теореме 3, ей эквивалентна. Тогда легко увидеть, что аксиома 1 может быть заменена законом связности (connexity), т. е. теоремой 4, так как каждая из них следует из другой на основе общих законов логики (т. е. исчисления высказываний); аксиома 3 становится теперь простой подстановкой аксиомы 2 и, следовательно, вполне может быть опущена. Таким образом мы приходим к системе, состоящей из следующих семи аксиом:

Аксиома $1^{(2)}$. *Если $x \neq y$, то $x < y$ или $y < x$.*

Аксиома $2^{(2)}$. *Если $x < y$, то $y \nless x$.*

Аксиома $3^{(2)}$. *Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.*

Аксиома $4^{(2)}$. $x + y = y + x$.

Аксиома $5^{(2)}$. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Аксиома $6^{(2)}$. *Для любых чисел* x *и* y *существует такое число* z, что $x = y + z$.

Аксиома $7^{(2)}$. *Если* $y < z$, то $x + y < x + z$.

Эта система аксиом, называемая системой $\mathfrak{A}^{(2)}$, эквиполлентна, таким образом, любой из двух первых систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{(1)}$. Говоря так, мы допускаем, однако, одну неточность, ибо невозможно вывести из системы аксиом $\mathfrak{A}^{(2)}$ те предложения систем $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}^{(1)}$, которые содержат символ «$>$», если система $\mathfrak{A}^{(2)}$ не расширена путем добавления к ней определения этого символа. Мы можем, как нам известно, придать этому определению следующую форму:

Определение $1^{(2)}$. *Мы говорим, что* $x > y$, *если, и только если,* $y < x$.

Мы также знаем, что это последнее предложение может быть доказано на основе систем $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}^{(1)}$, если оно рассматривается не как определение, но как обычная теорема (опуская, в этом случае, начальное выражение «*Мы говорим, что*»). Факт эквиполлентности трех рассматриваемых систем может быть сформулирован следующим образом:

Система $\mathfrak{A}^{(2)}$ *вместе с определением* $1^{(2)}$ *эквиполлентна каждой из систем* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{(1)}$.

Такой же осторожный способ формулировки рекомендуется всякий раз, когда сравниваются две системы аксиом, которые, хотя и эквиполлентны, содержат, по крайней мере частично, различные первичные термины.

Система аксиом $\mathfrak{A}^{(2)}$ выгодно выделяется простотой своей структуры. Первые три аксиомы касаются отношения *меньше, чем,* и вместе с тем они утверждают, что множество **N** упорядочено этим отношением; следующие три аксиомы касаются сложения, и они утверждают, что множество **N** — абелева группа относительно сложения. Последняя аксиома — закон монотонности — устанавливает, наконец, некоторую зависимость между отношением *меньше, чем* и операцией сложения. Говорят, что класс K — упорядоченная абелева группа относительно отношения R и действия O, если (I) класс K упорядочен отношением R, (II) класс K — абелева группа в отношении действия O и (III) действие O монотонно в классе K относительно отношения R. Согласно этой терминологии мы можем сказать, что множество чисел характеризуется системой аксиом $\mathfrak{A}^{(2)}$ как упорядоченная абелева группа относительно отношения *меньше, чем* и действия сложения.

Могут быть установлены следующие факты относительно системы $\mathfrak{A}^{(2)}$.

$\mathfrak{A}^{(2)}$ — *независимая система аксиом, более того, все ее первичные термины, а именно* «$\mathbf{N}$», «$<$» *и* «$+$» *взаимно независимы.*

Мы опускаем доказательство этого высказывания. Мы отмечаем только, что для установления взаимной независимости первичных терминов приходится снова применять метод доказательства посредством интерпретации, который в этом случае, однако, принимает более сложную форму. Недостаток места не позволяет нам заняться рассмотрением видоизменений этого метода.

58. Дальнейшее упрощение системы аксиом; возможные преобразования системы первичных терминов

Система $\mathfrak{A}^{(2)}$ может быть, конечно, заменена любой системой предложений, ей эквиполлентной. Мы приведем здесь особенно простой пример такой системы, которая может быть названа системой $\mathfrak{A}^{(3)}$ и которая содержит те же первичные термины, что и $\mathfrak{A}^{(2)}$. Она состоит лишь из пяти предложений:

Аксиома $1^{(3)}$. *Если $x \neq y$, то $x < y$ или $y < x$.*

Аксиома $2^{(3)}$. *Если $x<y$, то $y \not< x$.*

Аксиома $3^{(3)}$. $x+(y+z)=(x+z+y)$

Аксиома $4^{(3)}$. *Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x=y+z$.*

Аксиома $5^{(3)}$. *Если $x+z<y+t$, то $x<y$ или $z<t$.*

Мы покажем, что *системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ и $\mathfrak{A}^{(3)}$ эквиполлентны.*

Доказательство. Мы видим, во-первых, что все аксиомы системы $\mathfrak{A}^{(3)}$ или же содержатся в системе $\mathfrak{A}$ (так, аксиома $2^{(3)}$ совпадает с аксиомой 2, а аксиома $4^{(3)}$ с аксиомой 9) или же, в ином случае, доказаны на ее основе (аксиомы $1^{(3)}$, $3^{(3)}$ и $5^{(3)}$ совпадают, соответственно, с теоремами 4, 9 и 14). Но так как системы аксиом $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{(2)}$ эквиполлентны, как это нам известно из параграфа 57, а определение $\mathrm{I}^{(2)}$, в конце концов, всегда может быть придано к системе $\mathfrak{A}^{(2)}$, то мы можем сделать вывод, что все предложения системы $\mathfrak{A}^{(3)}$ могут быть доказаны на основе системы $\mathfrak{A}^{(2)}$.

Остается вывести те предложения системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ из аксиом системы $\mathfrak{A}^{(3)}$, которые отсутствуют в системе $\mathfrak{A}^{(3)}$, т. е. аксиомы $3^{(2)}$, $4^{(2)}$, $5^{(2)}$ и $7^{(2)}$. Эта задача не так проста.

* Начнем с аксиом $4^{(2)}$ и $5^{(2)}$.

(I) *Аксиома $4^{(2)}$ может быть выведена из аксиом системы $\mathfrak{A}^{(3)}$,*

ибо, при данных числах x и y, мы можем применить аксиому $4^{(3)}$ (с «x», поставленным на месте «y», и наоборот); имеется поэтому такое число «z», что

(1) $$y=x+z.$$

Если теперь в аксиоме $3^{(3)}$ заменить «y» на «x», мы получаем:

(2) $$x+(x+z)=(x+z)+x.$$

Ввиду (I) «$x+z$» может здесь быть заменено на «y» в обеих сторонах, и мы приходим к аксиоме $4^{(2)}$

$$x+y=y+x.$$

(II) *Аксиома* $5^{(2)}$ *может быть выведена из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$.

Действительно, вследствие аксиомы $3^{(3)}$ мы имеем (если «y» подставлено вместо «z» и наоборот):

$$x+(z+y)=(x+y)+z;$$

вследствие коммутативного закона, который уже выведен в рассуждении (I), мы можем заменить здесь «$z+y$» посредством «$y+z$» и мы получаем аксиому $5^{(2)}$:

$$x+(y+z)=(x+y)+z.$$

Чтобы облегчить выведение аксиом $3^{(2)}$ и $7^{(2)}$, мы сначала покажем, каким образом некоторые из аксиом и теорем, установленных в предыдущих главах, могут быть доказаны на основе системы $\mathfrak{A}^{(3)}$.

(III) *Теорема 1 может быть выведена из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$.

Мы лишь отмечаем то, что доказательство теоремы 1, данное в параграфе 44, основано исключительно на аксиоме 2, которая, в свою очередь, совпадает с аксиомой $2^{(3)}$ системы $\mathfrak{A}^{(3)}$.

(IV) *Аксиома 6 может быть выведена из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$.

Действительно, мы видели в параграфе 55, что аксиома 6 может быть выведена из аксиом 7, 8 и 9. Аксиомы 7 и 8 те же, что и аксиомы $4^{(2)}$ и $5^{(2)}$, и могут быть поэтому выведены при помощи (I) и (II) из аксиом системы $\mathfrak{A}^{(3)}$. Аксиома 9, с другой стороны, встречается как аксиома $4^{(3)}$ в системе $\mathfrak{A}^{(3)}$. Отсюда аксиома 6 есть следствие аксиом системы $\mathfrak{A}^{(3)}$.

(V) *Теорема* 11 *может быть выведена из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$.

Во втором доказательстве теоремы 11, как оно дано в параграфе 49, были применены только аксиомы 7, 8 и 9. Поэтому теорема 11 выводима из аксиом системы $\mathfrak{A}^{(3)}$ на том же основании, что и аксиома 6, см. (IV).

(VI) *Теорема* 12 *может быть выведена из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$,

ибо, предполагая, что антецедент теоремы 12 справедлив:

$$x+y<x+z,$$

мы применяем аксиому $5^{(3)}$, заменив «z», «y» и «t» на «y», «x» и «z», соответственно. Из этого следует, что одна из формул:

$$x<x \text{ или } y<z$$

должна быть справедливой; первая возможность должна быть отброшена, ибо она противоречит теореме 1, которая, как это было уже показано, выводима из системы $\mathfrak{A}^{(3)}$ — ср. (III). Отсюда должен быть истинен консеквент теоремы 12:

$$y<z.$$

(VII) *Аксиому* $3^{(2)}$ *можно вывести из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$.

Примем антецедент аксиомы $3^{(2)}$, то есть формулы:

$$x<y \tag{1}$$

$$y<z. \tag{2}$$

Если теперь мы имели бы:

$$y+x=y+z,$$

то, по теореме 11, которая уже выведена посредством (V), следовало бы, что:

$$x = z.$$

Итак, в (1) «x» можно было бы заменить на «z», что повело бы к:

$$z < y.$$

Это неравенство противоречило бы (2) в силу аксиомы $2^{(3)}$ и поэтому должно быть отброшено. Итак, мы имеем:

(3) $$y + x \neq y + z.$$

Так как, по аксиоме 6, $y + x$ и $y + z$ суть числа, то мы можем, по аксиоме $1^{(3)}$, сделать вывод из (3), что должен быть один из следующих двух случаев:

(4) $$y + x < y + z \text{ или } y + z < y + x.$$

Рассматривая вторую из формул (4), мы можем заменить в ней «$y + x$» на «$x + y$» в силу аксиомы $4^{(2)}$, которая уже выведена; итак, мы приходим к:

$$y + z < x + y.$$

К этой формуле мы применяем аксиому $5^{(3)}$, в которой мы заменяем «x» и «t» на «y» и «y» на «x». Таким путем мы приходим к следующему выводу:

$$y < x \text{ или } z < y.$$

Но это следствие приходится отбросить, так как по аксиоме $2^{(3)}$ оно противоречит (1) и (2), что составляет антецедент аксиомы $3^{(2)}$. Поэтому мы возвращаемся к первой из формул (4) и применяем теорему 12, выведенную выше посредством (VI), с «x», замененным на «y», и наоборот; итак, мы имеем:

$$x < z,$$

а это есть консеквент аксиомы $3^{(2)}$.

(VIII) *Аксиома $7^{(2)}$ может быть выведена из аксиом системы* $\mathfrak{A}^{(3)}$.

Способ доказательства здесь подобен только что примененному, но гораздо проще. Мы принимаем антецедент аксиомы $7^{(2)}$

$$(1) \qquad y < z.$$

Если теперь мы имели бы:

$$x + y = x + z,$$

то из этого следовало бы, по теореме 11, что:

$$y = z;$$

поэтому (1) мы могли бы заменить «y» на «z» и притти к противоречию с теоремой 1, выведенной выше посредством (III). Отсюда мы должны иметь:

$$x + y \neq x + z,$$

откуда по аксиоме $1^{(3)}$ следует, что:

$$(2) \qquad x + y < x + z \text{ или } x + z < x + y.$$

Ввиду теоремы 12, второе из этих неравенств ведет к: $z < y$, что это противоречит нашему антецеденту (1) в силу аксиомы $2^{(3)}$. Следовательно, нам приходится принять первое из неравенств (2):

$$x + y < x + z,$$

а это есть консеквент аксиомы $7^{(2)}$. ✳

Мы видели таким образом, что все предложения системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ суть следствия системы $\mathfrak{A}^{(3)}$, и наоборот; две аксиомы систем $\mathfrak{A}^{(2)}$ и $\mathfrak{A}^{(3)}$, следовательно, действительно эквиполлентны.

Система $\mathfrak{A}^{(3)}$, без сомнения, проще, чем система $\mathfrak{A}^{(2)}$ и, следовательно, еще проще, чем системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{(1)}$. Особенно интересно сравнение между системами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{(3)}$; посредством произведенного последовательного сокращения первоначальное число аксиом уменьшилось больше чем на половину. С другой стороны следует отметить, что некоторые из предложений системы $\mathfrak{A}^{(3)}$(а именно, аксиомы $3^{(3)}$ и $5^{(3)}$) менее естественны и просты, чем аксиомы других систем, а также, что доказательства некоторых, даже весьма элементарных теорем здесь сравнительно труднее и сложнее, чем на основе тех, других систем.

Точно так же, как система аксиом, система первичных терминов может быть заменена любой эквиполлентной системой. Это применимо, в частности, к системе трех терминов «**N**», «$<$» и «$+$», которые встречаются исключительно как первичные термины в аксиомах, рассмотренных в последний раз. Если, например, мы заменим в этой системе символ «$<$» на $\geq$, то получим эквиполлентную систему, ибо второй из этих символов был определен при помощи первого, и теорема 8 говорит нам, как первый может быть определен при помощи второго. Но подобное преобразование системы первичных терминов ни в коем случае не было бы выгодным, в частности, оно нисколько не способствовало бы упрощению аксиом, и читателю, который, возможно более знаком с символом «$<$», чем с символом «$\leq$», оно могло бы даже показаться более искусственным. Другая эквиполлентная система может быть получена путем замены в первоначальной системе символа «$+$» на «$-$»; но, опять-таки, это преобразование отнюдь не было бы целесообразным.

В заключение мы должны отметить, что известны другие системы первичных терминов, которые эквиполлентны рассматриваемой системе и состоят только из двух терминов.

59. Проблема непротиворечивости построенной теории

Теперь мы должны вкратце коснуться некоторых других методологических проблем, относящихся к вышерассмотренному арифметическому фрагменту: это проблемы непротиворечивости и полноты (ср. параграф 41). Так как совершенно безразлично, относим ли мы наши замечания к одной или к другой из двух эквиполлентных систем аксиом, то теперь мы будем говорить только о системе $\mathfrak{A}$.

Если мы верим в непротиворечивость арифметики в целом (а это предположение было принято раньше и будет принято опять в наших дальнейших рассуждениях), то мы должны тем более принять тот факт, что

математическая теория, основанная на системе $\mathfrak{A}$, *непротиворечива*

Но в то время как попытки дать строгое доказательство непротиворечивости арифметики в целом встретились с существенными затруднениями (см. параграф 41), доказательство такого рода для системы $\mathfrak{A}$ не только возможно, но даже сравнительно просто. Одним основанием для этого служит тот факт, что разнообразие теорем, которые могут быть выведены из системы аксиом $\mathfrak{A}$, действительно очень невелико; например, невозможно дать на этой основе ответ на такой весьма элементарный вопрос, как существуют ли какие-нибудь числа вообще. Это обстоятельство значительно облегчает доказательство того факта, что рассмотренная часть арифметики не содержит ни одной пары противоречащих друг другу теорем. Однако при имеющихся в нашем распоряжении средствах было бы безнадежным делом излагать доказательство непротиворечивости или даже пытаться познакомить читателя с его основной идеей; это потребовало бы значительно более глубокого знания логики, и существенной предварительной задачей было бы реконструировать рассматриваемую часть арифметики в качестве формализованной дедуктивной теории (см. параграф 40). Можно добавить, что если система $\mathfrak{A}$ обогатится одним тем положением, что существует по крайней мере два различных числа, то попытка доказать таким образом состоятельность расширенной системы аксиом встретится с затруднениями той же степени, как и в случае со всей системой арифметики.

60. Проблема полноты построенной теории

В сравнении с вопросом о непротиворечивости, вопрос о полноте системы $\mathfrak{A}$ может быть разрешен гораздо легче.

Имеется много проблем, сформулированных исключительно в логических терминах и в первичных терминах системы $\mathfrak{A}$ которые никоим образом не допускают решения на основе этой системы. Одна такая проблема уже была упомянута в предыдущем параграфе. Другим примером служит предложение, утверждающее, что для любого числа x существует такое число y, что

$$x = y + y.$$

На основе аксиом одной только системы $\mathfrak{A}$ невозможно ни доказать, ни опровергнуть это предложение. Что это так, можно видеть из следующего рассуждения. Посредством символа «**N**» мы обозначили множество всех действительных чисел: т. е. множество **N** содержит целые числа, так же как и дроби, рациональные числа, так же как и иррациональные. Но можно сразу же усмотреть, что ни одна из аксиом, а следовательно, и ни одна из выведенных из них теорем не потеряла бы своей истинности, если бы мы должны были обозначить посредством символа «**N**» или множество целых чисел (положительных и отрицательных, включая число О) или же множество всех рациональных чисел; т. е. все эти утверждения оставались бы значимыми, если бы слово *«число»* имело смысл — *«целое»* или *«рациональное число»*. В первом случае вышеуказанное предложение, которое утверждает, что для каждого данного числа существует другое, в два раза меньшее число, было бы ложно; во втором случае оно было бы истинно. Поэтому, если бы нам удалось доказать это предложение на основе системы $\mathfrak{A}$, мы бы пришли к противоречию в пределах арифметики целых чисел; с другой стороны, если бы мы были в состоянии опровергнуть его, то мы бы оказались сами вовлеченными в противоречие в пределах арифметики рациональных чисел.

Только что указанное рассуждение попадает в категорию доказательств посредством интерпретации (ср. параграфы 37 и 56): для того чтобы это сделать ясным, придадим этому рассуждению несколько иную форму. Допустим, что «**I**» обозначает множество всех целых чисел, а «**R**» — множество всех рациональных чисел. Теперь мы дадим две интерпретации системы $\mathfrak{A}$ в пределах арифметики. Символы «$<$», «$>$» и «$+$» остаются неизмененными в обоих истолкованиях, в то время как символ «**N**», который встречается явно или скрыто в каждой из аксиом, должен быть заменен на «**I**» в первом и на «**R**» во втором истолковании. (Мы здесь не принимаем во внимание замечаний, сделанных в параграфе 43 относительно возможного устранения символа «**N**», так как это несколько усложнило бы наше рассуждение.) Все аксиомы системы $\mathfrak{A}$ остаются истинными в обоих интерпретациях; однако предложение

для каждого числа x существует такое число y, что

$$x = y + y,$$

верно только в случае второй интерпретации, в то время как в случае первой интерпретации истинно его отрицание:

не для каждого числа x существует такое число y, что

$$x = y + y.$$

На основании утверждения непротиворечивости арифметики мы делаем вывод из первого толкования, что рассматриваемое предложение не может быть доказано на основе системы $\mathfrak{A}$, а из второго истолкования мы заключаем, что оно также не может быть опровергнуто.

Таким образом, мы показали, что существуют два противоречащих друг другу предложения, сформулированных исключительно в логических терминах и в первичных терминах математической теории, которые мы рассматриваем с той особенностью, что ни один из них не может быть выведен из этой теории. Следовательно,

математическая теория, основанная на системе $\mathfrak{A}$ *не полна.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Допустим, что формула

$$x < y$$

значит то же, что

$$x + 1 < y.$$

Теперь замените везде в аксиомах системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ параграфа 57 символ «$<$» на «$<$» и определите, какие из аксиом сохраняют свою истинность и какие не сохраняют, и отсюда сделайте вывод, что аксиома $1^{(2)}$ не может быть выведена из остальных аксиом. Как называется примененный здесь метод доказательства?

2. Следуя основным чертам доказательства независимости, описанного в параграфе 56, для аксиомы $2^{(1)}$ покажите, что аксиома $2^{(2)}$ не может быть выведена из остальных аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$.

3. Допустим, что символ «$\overset{\circ}{\mathbf{N}}$» обозначает множество, состоящее из трех чисел — 0, 1 и 2. Среди элементов этого множества мы определяем отношение $\overset{\circ}{<}$ при условии, что оно должно быть истинным только в следующих трех случаях:

$$0 \overset{\circ}{<} 1, \quad 1 \overset{\circ}{<} 2, \quad 2 \overset{\circ}{<} 0.$$

Далее, мы определяем действие $\overset{\circ}{+}$ над элементами множества $\overset{\circ}{\mathbf{N}}$ посредством следующих формул:

$$0 \overset{\circ}{+} 0 = 1 \overset{\circ}{+} 2 = 2 \overset{\circ}{+} 1 = 0,$$

$$0 \overset{\circ}{+} 1 = 1 \overset{\circ}{+} 0 = 2 \overset{\circ}{+} 2 = 1,$$

$$0 \overset{\circ}{+} 2 = 1 \overset{\circ}{+} 1 = 2 \overset{\circ}{+} 0 = 2.$$

Теперь заменим в аксиомах системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ первичные термины этой системы соответственно терминами «$\overset{\circ}{\mathbf{N}}$», «$\overset{\circ}{<}$» и «$\overset{\circ}{+}$» (а слово *«число»* — выражением *«одно из трех чисел 0, 1 и 2»;* проделав это, покажите, что аксиома $3^{(2)}$ не может быть выведена из остальных аксиом.

4. Для того чтобы показать посредством доказательства интерпретацией, что аксиома $4^{(2)}$ не выводима из остальных аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$, достаточно заменить символ сложения во всех аксиомах символом одного определенного действия из четырех действий, упомянутых в упражнении 3 главы VIII. Какое же действие должно применяться?

5. Рассмотрите действие $\oplus$, удовлетворяющее следующей формуле:

$$x \oplus y = 2 \cdot (x + y).$$

Покажите, при помощи этого действия, что аксиома $5^{(2)}$ не может быть выведена из других аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$.

6. Постройте множество чисел такого рода, что вместе с отношением $<$ и действием $+$, оно не удовлетворяет аксиоме $6^{(2)}$, но является моделью остальных аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$. Какое заключение, поэтому, может быть сделано относительно возможности выведения аксиомы $6^{(2)}$?

7. Чтобы показать, что аксиома $7^{(2)}$ не есть следствие других аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$, можно действовать, заменяя во всех аксиомах два из первичных терминов системы соответствующими символами, введенными в упражнение 3, оставляя третий первичный

термин неизменным. Определите, какой термин должен остаться неизменным.

8. Результаты, полученные в упражнениях 1—7, показывают, что ни одна из аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ не может быть выведена из остальных аксиом этой системы. Приведите аналогичные доказательства независимости для аксиомы системы $\mathfrak{A}^{(1)}$ параграфа 55 и $\mathfrak{A}^{(3)}$ параграфа 58 (частично пользуясь интерпретациями, примененными в предыдущих упражнениях).

9. Покажите, на основании аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$, что любое множество чисел, которое является абелевой группой относительно действия сложения, является в то же время упорядоченной абелевой группой относительно отношения *меньше, чем* и действия сложения. Приведите примеры множеств чисел такого рода.

10. В упражнении 5 главы VIII были даны некоторые множества чисел, которые составляют абелевы группы относительно умножения. Какие из этих множеств являются упорядоченными абелевыми группами относительно отношения *меньше, чем* и действия сложения и какие не являются?

11. Примените результат, полученный в упражнении 10, для нового доказательства независимости аксиомы 7$^{(2)}$ от остальных аксиом системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ (Ср. упражнение 7).

* 12. На основании аксиомы системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ докажите следующую теорему:

если имеются по крайней мере два различных числа, то для любого числа x существует такое число y, что $x<y$.

Как обобщение этого результата, докажите следующую общую теорему теории групп:

если класс K — упорядоченная абелева группа касательно отношения R и действия O и если K имеет по крайней мере два элемента, то для любого элемента x класса K существует такой элемент y класса K, что xRy.

Покажите с помощью этой теоремы, что ни один класс, являющийся упорядоченной абелевой группой, не может состоять точно из двух или трех и т. д элементов. Может ли он состоять из одного лишь элемента? (См. упражнение 8 главы VIII.)

∗ 13. Покажите, что система аксиом $1^{(2)}$—$3^{(2)}$ (параграфа 57) эквиполлентна системе, состоящей из аксиомы $1^{(1)}$ и следующего высказывания:

если $x<y$, $y<z$, $z<t$, $t<u$ *и* $u<v$, *то* $v \nless x$.

Как обобщение этого результата, установите следующий общий закон теории отношений:

Для того чтобы класс К был упорядочен при помощи отношения R, необходимо и достаточно, чтобы R было связно в К и чтобы оно удовлетворяло следующему условию:

если x, y, z, t и *v —любые элементы К и если xRy, yRz, zRt, tRu и uRv, то тогда vRx не имеет места.*

∗ 14. Применяя рассуждения, приведенные в параграфах 48, 55 и 58, покажите, что следующие три системы высказываний эквиполлентны:

(a) система аксиом 6—9 параграфа 47,
(b) система аксиом $4^{(2)}$—$6^{(2)}$ параграфа 57,
(c) система аксиом $3^{(3)}$ и $4^{(3)}$ параграфа 58.

Обобщая этот результат, сформулируйте новые определения выражения

класс К есть абелева группа по отношению к действию О,

которые эквивалентны определению, данному в параграфе 47, но проще его.

∗ 15. Рассмотрите систему $\mathfrak{A}^{(4)}$, состоящую из следующих пяти аксиом:

Аксиома $1^{(4)}$. *Если* $x \neq y$, *то* $x<y$ *или* $y<x$.

Аксиома $2^{(4)}$. *Если* $x<y$, $y<z$, $z<t$, $t<u$ *и* $u<v$, *то* $v \nless x$.

Аксиома $3^{(4)}$ $x+(y+z)=(x+z)+y$.

Аксиома $4^{(4)}$. *Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x=y+z$.*

Аксиома $5^{(4)}$. *Если $y<z$, то $x+y<x+z$.*

Применяя результаты упражнений 13 и 14, покажите, что система $\mathfrak{A}^{(4)}$ эквиполлентна каждой из систем $\mathfrak{A}^{(2)}$ и $\mathfrak{A}^{(3)}$.

16. В параграфе 58 утверждалось, что система трех первичных терминов «**N**», «$<$» и «$+$» эквиполлентна системе терминов «**N**», «$\leqq$» и «$+$»; к этому утверждению, конечно, следовало прибавить, что эти системы эквиполлентны относительно определенной системы предложений, например относительно системы $\mathfrak{A}^{(3)}$ параграфа 58 и определения 1 параграфа 46. Объясните, почему такое добавление обязательно. Вообще, почему всегда необходимо обращаться к частной системе предложений, намереваясь установить эквиполлентность двух систем терминов (в смысле параграфа 39)?

* 17. Рассмотрите систему $\mathfrak{A}^{(5)}$, состоящую из следующих семи предложений:

Аксиома $1^{(5)}$. *Для любых чисел x* и *y мы имеем $x\leqq y$ или $y\leqq x$.*

Аксиома $2^{(5)}$. *Если $x\leqq y$* и *$y\leqq x$, то $x=y$.*

Аксиома $3^{(5)}$. *Если $x\leqq y$* и *$y\leqq z$, то $x\leqq$*

Аксиома $4^{(5)}$. $x+y=y+x$.

Аксиома $5^{(5)}$. $x+(y+z)=(x+y)+z$.

Аксиома $6^{(5)}$. *Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x=y+z$.*

Аксиома $7^{(5)}$. *Если $y\leqq z$, то $x+y\leqq x+z$.*

Покажите, что системы аксиом $\mathfrak{A}^{(2)}$ (параграфа 57) и $\mathfrak{A}^{(5)}$ становятся эквиполлентными системами высказываний, если определение 1 параграфа 46 прибавлено к первой, а теорема 8 параграфа 46 прибавлена ко второй и рассматривается как определение символа «$<$». Почему мы не можем сказать просто, что системы $\mathfrak{A}^{(2)}$ и $\mathfrak{A}^{(5)}$ эквиполлентны?

18. Следуя ходу рассуждений, принятому в параграфе 60, покажите, что следующее положение не может быть доказано, ни опровергнуто на основании системы $\mathfrak{A}$:

если $x < z$, то существует такое число y, для которого $x < y$ и $y < z$.

* 19. Покажите, что следующее высказывание не может быть ни доказано, ни опровергнуто на основании системы $\mathfrak{A}$:

для любого числа x существует такое число y, что $x < y$.

* 20. В настоящей главе мы использовали метод доказательства посредством интерпретации, для того чтобы установить независимость или неполноту системы аксиом. Тот же метод применяется при исследовании ее непротиворечивости. Действительно, мы имеем в своем распоряжении следующий методологический закон, который представляет собой следствие закона дедукции:

если дедуктивная теория $\mathfrak{S}$ имеет интерпретацию в дедуктивной теории $\mathfrak{T}$, а теория $\mathfrak{T}$ непротиворечива, то теория $\mathfrak{S}$ также непротиворечива.

Покажите, что это утверждение истинно. В параграфе 38 сделано несколько замечаний относительно возможных истолкований арифметики и геометрии; применяя только что данный закон, выведите из этих замечаний следствия относительно непротиворечивости арифметики и геометрии и ее связи с непротиворечивостью логики.

X

РАСШИРЕНИЕ ПОСТРОЕННОЙ ТЕОРИИ ОСНОВЫ АРИФМЕТИКИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

61. Первая система аксиом для арифметики действительных чисел

Система аксиом $\mathfrak{A}$ недостаточна как основа для арифметики действительных чисел в целом, ибо — как это было видно в параграфе 60 — многих теорем этой дисциплины нельзя вывести из аксиом этой системы; недостаточна она также и по другой, не менее важной причине: может быть найден ряд понятий, принадлежащих к области арифметики, которые неопределимы с помощью первичных терминов, встречающихся в системе $\mathfrak{A}$. Так, система $\mathfrak{A}$ не дает нам возможности определить символы умножения или деления, или даже такие символы, как «1», «2» и т. д.

Сразу же возникает вопрос, каким образом нам приходится преобразовать и дополнить нашу систему аксиом и первичных терминов, для того чтобы получить основу, достаточную для построения всей арифметики действительных чисел. Эту проблему можно разрешить различными способами. Здесь будут описаны два разных метода решения вопроса *.

В случае первого метода мы выбираем как отправной пункт систему $\mathfrak{A}^{(3)}$ (ср. параграф 58); к первичным терминам, выступающим в этой системе, мы

---

* Первая система аксиом для всей арифметики действительных чисел была опубликована Гильбертом в 1900 г., эта система относится к системе $\mathfrak{A}''$, с которой мы познакомимся далее. До 1900 г. системы аксиом для некоторых менее сложных частей арифметики были известны; первая система этого рода, относящаяся к арифметике натуральных чисел, была дана в 1880 г. Пеано (см. примечание на стр. 167). Некоторые системы аксиом для арифметики и разных ее частей, и в частности первая система аксиом для арифметики комплексных чисел, были опубликованы Хантингтоном (см. примечание на стр. 192).

прибавляем слово *«один»*, которое, как обычно, будет заменено символом «1», и аксиомы этой системы дополняются четырьмя новыми предложениями. Таким образом получается новая система $\mathfrak{A}^{(1)}$, содержащая четыре первичных термина «**N**», «$<$», «$+$» и «1» и состоящая из девяти аксиом, которые мы подробно изложим ниже:

Аксиома 1′. *Если* $x \neq y$, *то* $x < y$ *или* $y < x$.

Аксиома 2′. *Если* $x < y$, *то* $y \nless x$.

Аксиома 3′. *Если* $x < z$, *то существует такое число* y, *что* $x < y$ *и* $y < z$.

Аксиома 4′. *Если* K *и* L *суть любые множества чисел* (т. е. $K \subset \mathrm{N}$ *и* $L \subset \mathrm{N}$), *удовлетворяющие условию:*

для любого x, *принадлежащего к* K, *и для любого* y, *принадлежащего к* L, *мы имеем:* $x < y$,

то существует число z, *для которого верно следующее:*

если x — *любой элемент* K, *а* y — *любой элемент* L *и если* $x \neq z$ *и* $y \neq z$, *то* $x < z$ *и* $z < y$.

Аксиома 5′. $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Аксиома 6′. *Для любых чисел* x *и* y *существует такое число* z, *что* $x = y + z$.

Аксиома 7′. *Если* $x + z < y + t$, *то* $x < y$ *или* $z < t$.

Аксиома 8′. $1 \in \mathbf{N}$

Аксиома 9′. $1 < 1 + 1$.

62. Краткая характеристика первой системы аксиом; ее методологические преимущества и дидактические недостатки

Аксиомы, изложенные в предыдущем разделе, делятся на три группы. В первой группе, состоящей из аксиом $1'$ — $4'$, встречаются только два первичных термина «**N**» и «$<$»; во второй группе, к которой принадлежат аксиомы $5'$ — $7'$, мы имеем добавочный символ «$+$»; наконец, в третьей группе, которая состоит из аксиом $8'$ и $9'$, появляется новый символ «1».

Среди аксиом первой группы имеются две аксиомы, которых мы раньше не встречали, а именно, аксиомы $3'$ и $4'$. Аксиома $3'$ называется законом плотности для отношения *«меньше, чем»* — она выражает тот факт, что отношение плотно в множестве всех чисел. Вообще мы говорим, что отношение R плотно в классе K, если для любых двух элементов x и y этого класса из формулы: xRy всегда следует существование элемента z класса K, для которого истинны формулы

$$xRz \text{ и } zRy$$

Аксиома $4'$ известна как закон непрерывности для отношения *«меньше, чем»*, или как аксиома непрерывности, или так же как аксиома Дедекинда *; вообще, отношение R называется непрерывным в классе K, если оно удовлетворяет условию, которое получается из аксиомы $4'$ заменой «**N**» на «K» (и, в связи с этим, слова *«число»* на выражение *«элемент класса K»*), и далее — «$<$» на «R». Если, в частности, класс K упорядочен отношением R и если R плотно (dense) или непрерывно в K, то говорят, что K плотно упорядочен или непрерывно упорядочен, соответственно.

---

*Эта аксиома — в несколько более сложной формулировке — ведет свое происхождение от немецкого математика Р. Дедекинда (1881—1916), чьи исследования много способствовали обоснованию арифметики и, особенно, теории иррациональных чисел.

Аксиома 4′ интуитивно менее очевидна и более сложна, чем остальные аксиомы, одним уж тем, что она, в отличие от других аксиом, касается не отдельных чисел, а множеств чисел. Для того чтобы придать этой аксиоме более простую и понятную форму, необходимо предпослать ей следующие определения:

Мы говорим, что множество чисел K предшествует *множеству чисел L, если, и только если, каждое число множества K меньше, чем каждое число множества L.*

Мы говорим, что число z разделяет *множества чисел K и L, если, и только если, для любых двух элементов x множества K и y множества L, отличных от z, мы имеем: $x < z$ и $z < y$.*

На основании этих определений мы можем дать аксиоме непрерывности следующую весьма простую формулировку:

Если одно множество чисел предшествует другому, то существует, по крайней мере, одно число, разделяющее два эти множества.

Все аксиомы второй группы уже известны нам из прежних рассуждений. Аксиомы третьей группы, хотя они и новы, имеют столь простое и очевидное содержание, что вряд ли требуют какого-либо объяснения. Мы можем только добавить кроме того, что если аксиома 9′ предварена определениями символа «0» и выражения *«положительное число»,* то она может быть заменена или формулой:

$$0 < 1,$$

или также высказыванием:

1 — *положительное число.*

Аксиомы 1′, 2′, 5′, 6′ и 7′ образуют в точности то, что мы назвали системой $\mathfrak{A}^{(3)}$, которая — подобно эквиполлентной системе $\mathfrak{A}^{(\ )}$ — характеризует множество всех чисел, как упорядоченную абелеву группу (см. параграф 57). Рассматривая содержание вновь прибавленных аксиом 3′, 4′, 8′ и 9′, мы можем теперь следующим образом описать всю систему:

Система $\mathfrak{A}'$ *выражает тот факт, что множество всех чисел является плотно и непрерывно упорядоченной абелевой группой касательно отношения* $<$ *и действия сложения, и она выделяет известный положительный элемент* 1 *в этом множестве.*

С методологической точки зрения система $\mathfrak{A}'$ имеет известные преимущества. Рассматриваемая формально, она оказывается наиболее простой из всех известных систем аксиом, которые образуют достаточное основание для построения полной системы арифметики. За исключением аксиомы 1′, которая может быть выведена — хотя и не вполне удобно — из остальных аксиом, все другие аксиомы системы, так же как и первичные термины, встречающиеся в этих аксиомах, взаимно независимы. С другой стороны, дидактическая ценность системы $\mathfrak{A}'$ значительно меньше, так как простота оснований причиняет значительные усложнения в дальнейшем построении. Даже определение умножения и выведение основных законов для этого действия производятся не легко. Почти с самого начала доказательства мы должны прибегать в существенной степени к использованию аксиомы непрерывности (так, например, без ее помощи было бы невозможно доказать на основании системы $\mathfrak{A}'$ существование числа $^1/_2$, т. е. такого числа y, что $y+y=1$), и доказательства, основанные на этой аксиоме, обычно представляются несколько трудными для начинающего.

63. Вторая система аксиом для арифметики действительных чисел

На основании доводов, рассмотренных выше, стоит заняться разысканием иной системы аксиом для построения на ней арифметики. Система этого рода может быть получена следующим образом. В качестве отправного пункта мы пользуемся системой $\mathfrak{A}^{(2)}$. Будут приняты три новых первичных термина: «*нуль*», «*один*» и «*произведение*»; первые два, как обычно, будут заменены символами «0» и «1», так как вместо выражения «*произведение чисел* (или *множителей*) *x и y*» (или «*результат умножения x и y*») мы будем пользоваться обычным символом «*x.y*». Далее, будут прибавлены тринадцать новых аксиом; из них две уже известны нам, а именно, аксиома непрерывности и закон замкнутости множества относительно сложения. Итак, в конце концов мы приходим к системе $\mathfrak{A}''$, содержащей шесть первичных терминов: «**N**», «<», «+», «0», «·» и «1», и состоящей из следующих двадцати высказываний:

Аксиома 1″. *Если* $x \neq y$, *то* $x < y$ *или* $y < x$.

Аксиома 2″. *Если* $x < y$, *то* $y \nless x$.

Аксиома 3″. *Если* $x < y$ *и* $y < z$, *то* $x < z$.

Аксиома 4″. *Если K и L — любые множества чисел, удовлетворяющие условию:*

для любого x, принадлежащего к K, и для любого y, принадлежащего к L, $x < y$,

то существует число z, для которого верно следующее:

если x — любой элемент множества K и y — любой элемент множества L и если $x \neq z$ *и* $y \neq z$, *то* $x < z$ *и* $z < y$.

Аксиома 5″. *Для любых чисел y и z существует* такое число *x, что* $x = y + z$ (другими словами: *если* $y \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathbf{N}$, то $y + z \in \mathbf{N}$).

Аксиома 6″. $x + y = y + x$.

Аксиома 7″. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Аксиома 8″. *Для любых чисел x и y существует такое число z, что $x = y + z$.*

Аксиома 9″. *Если $y < z$, то $x + y < x + z$.*

Аксиома 10″. $0 \in N$.

Аксиома 11″. $x + 0 = x$.

Аксиома 12″. *Для любых чисел y и z существует такое число x, что $x = y \cdot z$* (другими словами: *если $y \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathbf{N}$, то $y \cdot z \in \mathbf{N}$*).

Аксиома 13″. $x \cdot y = y \cdot x$

Аксиома 14″. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Аксиома 15″. *Для любых чисел x и y, если $y \neq 0$, существвует такое число z, что $x = y \cdot z$.*

Аксиома 16″. *Если $0 < x$ и $y < z$, то $x . y < x . z$.*

Аксиома 17″. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Аксиома 18″. $1 \in N$.

Аксиома 19″. $x \cdot 1 = x$.

Аксиома 20″. $0 \neq 1$.

64. Краткая характеристика второй системы аксиом; понятия поля и упорядоченного поля

В системе $\mathfrak{A}''$ как и в системе $\mathfrak{A}'$ можно выделить три группы аксиом. В аксиомах 1″ — 4″, которые составляют первую группу, мы имеем лишь два первичных термина «N» и «$<$»; вторая группа, состоящая из аксиом 5″ — 11″, содержит еще два термина:

знак сложения «+» и символ «0»; наконец, третья группа, которая образована из аксиом 12″ — 20″, включая впервые знак умножения и символ «1».

Все аксиомы первых двух групп, за исключением аксиом 10″ и 11″, уже нам известны. Аксиомы 10″ и 11″ вместе утверждают, что 0 есть единичный (справа) элемент действия сложения. Ибо вообще говорят, что элемент u есть единичный справа или слева элемент действия O в классе K, если u принадлежит к K и если каждый элемент x класса K удовлетворяет формуле:

$$x\,O\,u = x, \text{ или } u\,O\,x = x,$$

соответственно. Если u — единичный справа и слева элемент, то он называется просто единичным элементом действия O в классе K; очевидно, что в случае коммутативного действия O каждый единичный справа или слева элемент является просто единичным элементом.

В первых трех аксиомах третьей группы, т. е. в аксиомах 12″ — 14″, мы обнаруживаем закон замкнутости множества **N**, коммутативный и ассоциативный законы для умножения. Они в точности соответствуют аксиомам 5″ — 7″. Аксиомы 15″ и 16″ называются законом правой обратимости для умножения и законом монотонности для умножения касательно отношения *«меньше, чем»*. Эти аксиомы соответствуют законам обратимости и монотонности, но не совсем точно. Разница состоит в том, что их антецеденты содержат ограничивающие условия «$y \neq 0$» и «$0 < x$»; поэтому, несмотря на свои названия, они не позволяют нам утверждать просто, что умножение обратимо или что оно монотонно касательно отношения $<$ (в смысле параграфов 47 и 49).

Аксиома 17″ устанавливает основную связь между сложением и умножением; это так называемый дистрибутивный закон (или, строго говоря, закон правой дистрибутивности) для умножения относительно сложения. Вообще, действие P называется **дистрибутивным справа** или **слева относительно действия** O **в классе** K, если любые три элемента x, y и z класса K удовлетворяют формулам:

$$xP(yOz) = (xPy)O(xPz)$$

$$\text{или}\quad (xOy)Pz = (xPz)O(yPz),$$

соответственно. Если действие P коммутативно, понятия правой и левой дистрибутивности совпадают, и мы говорим просто, что действие P **дистрибутивно относительно действия** O **в классе** K.

Последние три аксиомы касаются числа 1. Аксиомы 18″ и 19″ вместе утверждают, что 1 есть единичный справа элемент действия умножения. Содержание аксиомы 20″ не требует какого-либо объяснения; роль, какую играет эта аксиома в построении арифметики, больше, чем это можно предположить с первого взгляда, так как без ее помощи невозможно показать, что множество всех чисел бесконечно.

Для того чтобы вкратце описать совокупность свойств, присущих сложению и умножению в аксиомах 5″ — 8″, 12″ — 15″ и 17″, говорят, что аксиомы эти характеризуют множество **N** как **поле** (или, полнее, как **коммутативное поле**) **относительно действий сложения и умножения**. Если, к тому же, принимаются во внимание аксиомы порядка 1″ — 3″ и аксиомы монотонности 9″ и 16″, то говорят, что множество **N** характеризуется как **упорядоченное поле касательно отношения** $<$ **и действий сложения и умножения**. Читатель легко догадается, каким образом понятия поля и упорядоченного поля должны быть расширены до произвольных классов, действий и отношений. Если, наконец, рассматриваются аксиома непрерывности 4″ и аксиомы, касающиеся чисел 0 и 1, т. е. аксиомы

10″, 11″, 18″ — 20″, то содержание всей системы аксиом $\mathfrak{A}''$ может быть описано следующим образом:

Система $\mathfrak{A}''$ выражает тот факт, что множество всех чисел является непрерывно упорядоченным полем касательно отношения $<$ и действий сложения и умножения и выделяет два отличных друг от друга элемента 0 *и* 1 *в этом множестве, из которых первый есть единичный элемент сложения, а второй единичный элемент умножения.*

65. Эквиполлентность двух систем аксиом; методологические недостатки и дидактические преимущества второй системы

Системы аксиом $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ эквиполлентны (или, скорее, они становятся эквиполлентными, как только первая система дополняется определениями символа «O» и знака умножения «.», которые могут быть сформулированы при помощи ее первичных терминов). Однако доказательство этой эквиполлентости не легко. Верно, конечно, что выведение аксиом первой системы из аксиом второй системы не представляет особых затруднений; но что касается противоположной задачи, то уже из наших прежних замечаний следует, что на основе первой системы как определение умножения, так и доказательство основных законов, управляющих этим действием (которые встречаются во второй системе в качестве аксиом), представляют значительные затруднения.

В методологическом отношении система $\mathfrak{A}'$ значительно превосходит систему $\mathfrak{A}''$. Аксиом в $\mathfrak{A}''$ примерно в два раза больше. Аксиомы не обладают взаимной независимостью; так, например, аксиомы 5″ и 12″, т. е. законы замкнутости множества **N** относительно сложения и умножения, выводимы из остальных аксиом, или, если эти две аксиомы удерживаются, то некоторые другие, как аксиомы 6″, 11″ и 14″, могут быть устранены. Первичные термины также не обладают независимостью, ибо три из них, а именно «$<$», «0» и «1», могут быть определены в терминах других (✻одно из возможных определений символа «0» было сформулировано в параграфе 53✻), а число аксиом может подвергнуться дальнейшему сокращению.

Мы видим, следовательно, что система $\mathfrak{A}''$ допускает важные сокращения различного рода, но в результате подобных упрощений дидактические преимущества системы уменьшились бы в значительной степени. А эти преимущества, конечно, велики. На основе системы $\mathfrak{A}''$ можно развернуть без всякого затруднения наиболее важные части арифметики действительных чисел, каковы — теория основных отношений между числами, теории четырех элементарных арифметических действий сложения, вычитания, умножения и деления, теория линейных равенств, неравенств и функций. Методы выведения, которые здесь надо применить, отличаются совершенно естественным и совершенно элементарным характером; в частности, аксиома непрерывности вовсе не выступает на этом уровне, она играет существенную роль только тогда, когда мы переходим к «высшим» арифметическим действиям возведения в степень, извлечения корней и вычисления логарифмов, и она необходима для доказательства существования иррациональных чисел. Очевидно, что неизвестна никакая другая система аксиом и первоначальных терминов, которая могла бы предоставить более удобную основу для элементарного и в то же самое время строго дедуктивного построения арифметики реальных чисел.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что множество всех положительных чисел, отношение $<$, действие умножения и число 2 образуют пример системы $\mathfrak{A}'$ и что, следовательно, эта система имеет по крайней мере две различных интерпретации в пределах арифметики.

2. Какие из отношений, перечисленных в упражнении 6 гл. V, плотны?

✳ 3. Как можем мы выразить — в символике исчисления отношений — тот факт, что отношение R плотно (в универсальном классе)? Как можем мы выразить тот факт, что отношение R как транзитивно, так и плотно, посредством одного равенства из исчисления отношений? (См. упражнение 17 главы V.)

4. Какие из следующих множеств чисел плотно упорядочены отношением «$<$»:

(a) множество всех натуральных чисел,
(b) множество всех целых чисел,
(c) множество всех рациональных чисел,
(d) множество всех положительных чисел,
(e) множество всех чисел, отличных от 0?

✳ 5. Для того, чтобы доказать на основе системы $\mathfrak{A}'$ существование числа $^1/_2$, т. е. такого числа z, что:

$$z + z = 1,$$

мы можем поступать следующим образом. Допустим, что K — множество всех чисел x, для которых

$$x + x < 1,$$

и подобным же образом допустим, что L — множество всех чисел y, для которых:

$$1 < y + y.$$

Мы показываем сначала, что множество K предшествует множеству L. Применяя теперь аксиому непрерывности, мы получаем, что существует число z, разделяющее множество K и L. Далее можно показать, что число z не может принадлежать ни к K (иначе, существовало бы число x в K, большее, чем z), ни к L. Отсюда мы можем сделать вывод, что z есть искомое число, другими словами, что

$$z + z = 1$$

выполняется. Выполните подробно описанное выше доказательство.

∗ 6. Обобщая ход рассуждения в предыдущем упражнении, докажите следующую теорему T на основе системы $\mathfrak{A}'$.

Теорема **T.** *Для любого числа x существует такое число y, что $x = y + y$.*

Сравните результат, полученный этим путем, с замечаниями в параграфе 60.

∗ 7. Замените в системе $\mathfrak{A}'$ аксиому 3′ теоремой T предыдущего упражнения. Покажите, что система высказываний, полученная таким образом, эквиполлентна системе $\mathfrak{A}'$.

Указание: для того чтобы вывести аксиому 3′ из видоизмененной системы, подставьте «$x + z$» вместо «x» в T, имея в виду антецедент аксиомы 3′; легко тогда показать, что число y является консеквентом этой аксиомы.

∗ 8. Воспользуйтесь методом доказательства при помощи интерпретации, чтобы показать, что после исключения аксиомы 1 система $\mathfrak{A}'$ превращается в систему взаимно независимых аксиом.

∗ 9. Дайте геометрическое истолкование систем аксиом $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ путем расширения упражнения 2 гл. VIII.

∗ 10. Напишите все аксиомы систем $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ в логической символике.

11. Обладают ли действия вычитания и деления и действия, упомянутые в упражнении 3 гл. VIII, единичными справа или слева элементами или просто единичными элементами в множестве всех чисел? Обладают ли действия сложения и умножения множеств точек единичными элементами в классе всех множеств точек?

∗ 12. Покажите, что любое действие, коммутативное в классе, обладает не более, чем одним единичным элементом в этом классе. Далее, путем обобщения результата полученного в упражнении 24 гл. VIII, докажите следующую теорему теории групп:

Если класс K — абелева группа относительно отношения O, то действие O обладает точно одним единичным элементом в классе K.

13. Рассмотрите пять арифметических действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Сформулируйте высказывания, утверждающие, что одно из этих действий — дистрибутивно справа и слева относительно другого (всего имеется 40 таких высказываний), и определите, какие из них истинны.

14. Решите ту же задачу, что и в предыдущем упражнении, в отношении четырех действий **A**, **B**, **C** и **L**, введенных в упражнении 3 гл. VIII. Далее, покажите, что любое действие, выполнимое в известном множестве чисел, дистрибутивно справа и слева в этом множестве относительно действий **A** и **B**.

15. Дистрибутивно ли сложение классов относительно умножения, и наоборот? (См. упражнение 15 гл. IV.)

16. Какие из множеств чисел, перечисленных в упражнении 4, суть поля относительно сложения и умножения или упорядоченные поля относительно этих действий и отношения $<$?

17. Покажите, что множество, состоящее из чисел 0 и 1, есть поле относительно действия $\oplus$, определенное в упражнении 6 гл. VIII, и умножения.

18. Найдите два действия над числами 0, 1 и 2 такого рода, что множество этих трех чисел образует поле в отношении к этим двум действиям.

19. Как можно определить символ «1» при помощи умножения?

20. Следующая теорема может быть выведена из аксиом системы $\mathfrak{A}''$:

Если $0<x$, то существует такое число y, что $x = y \cdot y$.

Предполагая, что эта теорема уже доказана, выведите с ее помощью из аксиом системы $\mathfrak{A}''$ следующую теорему:

$x < y$, если, и только если, $x \neq y$ и если существует такое число z, что $x + z \cdot z = y$.

Оправдывает ли эта теорема замечание, сделанное в параграфе 65 относительно возможного сокращения числа первичных терминов системы $\mathfrak{A}''$?

∗ 21. Докажите теорему Т упражнения 6 на основе системы $\mathfrak{A}''$. Сравните это доказательство с доказательством, предложенным в упражнении 6 в отношении системы $\mathfrak{A}$; какое из этих двух доказательств более трудно и требует большего знания логических понятий?

Указание: для того чтобы вывести теорему Т из системы $\mathfrak{A}''$, примените аксиому 15″, заменив «y» и «z» соответственно через «$1+1$» и «y» (однако сначала придется показать, что «$1+1$» отлично от 0); таким образом, получается число y, относительно которого может быть показано при помощи аксиом 13″, 17″ и 19″, что оно удовлетворяет формуле, данной в теореме Т.

∗ 22. Выведите все аксиомы системы $\mathfrak{A}'$ из аксиом системы $\mathfrak{A}''$.

Указание: для того чтобы вывести аксиому 3′, допустите, что теорема Т упражнения 6 уже доказана на основе системы $\mathfrak{A}''$ (см. предыдущее упражнение); далее поступайте таким же образом, как в упражнении 7.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКЦИИ

[1] Автор здесь рассуждает, как типичный метафизик, отрицая существование изменяющихся сущностей, и как идеалист, считая, что законы мышления первичны относительно законов природы. В современной математике действительно не рассматривается понятие «переменное число», но не по тем причинам, которые указаны автором, а потому, что для исследований математическими методами необходимо, чтобы изучаемые понятия подчинялись законам формальной логики, т. е. чтобы на вопрос о тех или иных их свойствах можно было дать вполне определенный ответ: «да» или «нет».

[2] Напоминаем, что в арифметике существуют постоянные, неозначающие числа, например знак суммы «$+$», неравенства «$>$» и т. д.

[3] Эта «сокращенная терминология» применяется потому, что если в функцию-указатель подставить на место знаков переменных какие-либо числа, то она превратится в обозначение вполне определенного (зависящего от подставленных) числа.

[4] Заметим, что это высказывание можно сформулировать и так: *как бы мы ни выбирали числа x и y, всегда найдется зависящее от них число z, такое, что*

$$x = y + z.$$

И это для действительных чисел, конечно, верно, так как вычитание для них всегда выполнимо. Но если бы мы ограничились одними только неотрицательными числами, то не для всякой пары чисел x, y существовало бы число z, такое, что $x = y + z$. Его не существовало бы для пары $x = 3$, $y = 5$.

Заметим также, что слово «найдется» не вполне подходит. Требуется только, чтобы такое число с у щ е с т в о в а л о, независимо от того, умеем ли мы его найти или нет.

[5] Заметим, что в математике иногда не ставят кванторов, но всякое доказанное выражение (аксиома или следствие из аксиом), которое содержит свободные переменные, обычно

рассматривается как высказывание, а не как функция-высказывание, причем считается, что свободные переменные связаны универсальным квантором.

Таково, например, приведенное уже автором предложение

$$a + b = b + a,$$

или

$$|\sin x| \leq 1,$$

или

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

[6] Дело здесь не в экономии мысли. Символические обозначения современной математики действительно удобнее для понимания и пользования, чем способ древних греков, состоящий в словесном описании всех предметов и действий, потому что символический способ обозначения предметов и записи предложений, добавленный к обычной разговорной речи, расширяет возможности математики.

[7] Эта общая формулировка такова:

Переменная, встречающаяся в данном месте функции-высказывания, является в этом месте связанной, если, и только если, эта же переменная встречается раньше в составе квантора, действие которого распространяется на данную часть функции-высказывания.

[8] Все здесь сказанное относится, конечно, к формальной логике. Из всех терминов, упомянутых автором, наиболее подходящим является «математическая логика». Математическая как потому, что основным объектом ее изучения является логическая структура математических дисциплин и применяемых в них методов доказательства, так и потому, что она сама строится как математическая дисциплина. Термин «логистика» — особенно неподходящий, так как с ним связывается обычно одно из идеалистических направлений современной зарубежной буржуазной философии математики.

[9] Как отмечалось во вступительной статье, автор часто рассуждает как метафизик. Здесь, в частности, он предполагает, что всякое предложение либо истинно, либо ложно, и притом только одно из двух, так что развиваемое им исчисление высказываний всегда автоматически применимо. Поэтому он не дает определения понятию «высказывание». Для правильного понимания всей главы «Об исчислении высказываний» нужно иметь в виду, что высказыванием называется предложе-

ние, которое либо истинно, либо ложно, и притом только одно из двух.

[10] Из этого не следует, однако, делать вывод, будто в математической логике понятие истины имеет по существу отличный от обычного смысл. Суть дела в определении связки «если..., то...». Чтобы пояснить это, начну с примера. Одно и то же слово «канон» имеет хотя и сходный, но все же, в основном, различный смысл в применении, например, к церковным обрядам, с одной стороны, или к совокупности эстетических правил, с другой. И уж совсем отличный смысл в применении к музыке или же в типографском деле (где оно обозначает просто «заглавный шрифт»). Вопрос об истинности или ложности фразы, в которой это слово фигурирует, может быть решен, поэтому, лишь после того, как будет установлено, в каком именно смысле в ней употреблено слово «канон». Аналогично, если мы изменили смысл связки «если..., то...», то вопрос об истинности или ложности выражений, содержащих эту связку, должен решаться в зависимости от того, в каком именно смысле мы ее употребляем. Если, как в приведенных автором примерах, мы понимаем выражение «если A, то B» только в смысле утверждения, что «A ложно или B истинно», т. е. из двух суждений: «не-A» и «B», по крайней мере, одно верно (либо нет A, либо же, если оно есть, то есть и B), — то мы обязаны уже считать предложения: «если $2 \cdot 2 = 5$, то Нью-Йорк большой город» и «если $2 \cdot 2 = 5$, то Нью-Йорк маленький город», оба истинными. Другое дело — вопрос о том, имеет ли смысл называть такую связь между высказываниями, которая исключает возможность одновременной истинности первого и ложности второго (но и только), условным высказыванием и обозначать с помощью связки «если..., то...». Но практика математических доказательств показывает, во-первых, что с такими связями в математике постоянно приходится иметь дело и, во-вторых, что выражение их с помощью связки «если..., то...» никогда не приводит к недоразумениям. Подробнее об этом см. ниже, и особенно в следующем параграфе, специально посвященном вопросу об импликации в математике.

[11] Связка «если..., то...» и в математике указывает обычно на логическую связь основания и следствия между антецедентом и консеквентом. Однако ввиду того, что математика отражает самые простые связи между предметами внешнего мира, эти логические связи изучаются там лишь с внешней стороны и их оказывается возможным представить в виде формальной импликации, которая выражается с помощью материальной импликации и кванторов общности. Поскольку такие рассуждения достаточны в математике и в связанной с ней математической логике, там и имеют дело с материальной импликацией. В методологии дедук-

тивных наук, однако, рассмотрение логической связи производится глубже, поэтому здесь понятия материальной импликации недостаточно.

[12] По существу здесь речь идет только об определениях, встречающихся в так называемых точных науках. Термин при этом не предполагается существующим до того, как он был определен, но вводится самим определением. Так, например, «$n!$» есть вводимое с помощью такого определения сокращенное обозначение для произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Подробнее об этом см. во II части книги.

[13] Истинность этих высказываний следует из нашего определения материальной импликации и из того, что всякое высказывание либо истинно, либо ложно, и притом только одно из двух. Рассмотрим, например, высказывание

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p);$$

т. е.

(I) из p следует q или из q следует p. Так как всякое высказывание либо истинно, либо ложно, и притом только одно из двух, то могут представиться только следующие случаи:

1) высказывание p истинно и высказывание q истинно,
2) высказывание p ложно, а высказывание q истинно,
3) высказывание p истинно, а высказывание q ложно,
4) высказывание p ложно и высказывание q ложно.

В каждом из этих четырех случаев высказывание (I) истинно. Проверим, например, 3-й случай.

В этом случае высказывание «из p следует q» — ложно, так как p — истинно, а q — ложно, а высказывание «из q следует p» — истинно, так как q — ложно, а p — истинно. Так как дизъюнкция истинна, если хотя бы один из ее членов истинен, то и все высказывание (I) истинно.

Если составить схему для проведения подобной проверки истинности сложного высказывания, то и получится метод таблиц истинности.

[14] Правило подстановки представляет собой специфический для математической логики способ перехода от общего к частному. Его точная формулировка очень трудна.

[15] Однако математические объекты вовсе не автоматически допускают рассуждения по указанным здесь правилам. Необходимо специальное исследование применимости законов формальной логики (что Тарский как ученый прекрасно знает). Кроме того, математические построения часто бывают так сложны, что сделать в них ошибку не так уж трудно. Правда, пра-

вила вывода дают возможность всегда найти ошибку. Наконец, в математических построениях главное — это не отдельные рассуждения, выполненные по всем правилам полных доказательств, а весь их ход в определенном порядке и определенной связи.

[16] Высказывание (b) истинно, если оно произносится в любой день недели, кроме понедельника (тогда оно ложно). Это непосредственно следует из проверки методом таблиц истинности.

[17] Альтернативная формулировка — это такая, в которой высказывания соединены союзом: «или ... или». Соответственно этому альтернативная формулировка высказывания (a) следующая: *или* x не делится на 10, *или* x делится и на 2 и на 5.

[18] Вот формулировки трех последних выражений:

b) из p следует q, если, и только если, неверно, что p, или верно, что q;

c) из p следует q, если, и только если, неверно, что p или q;

d) из p следует q, если, и только если, q; или неверно, что p.

Обратите внимание, что (b) и (d) — истинные высказывания, а (c) — ложное (если впереди подставить универсальные кванторы).

[19] При помощи выражения (a) мы бы могли всегда, если какое-нибудь утверждение следует из другого, утверждать, что второе следует из первого. Так как истинное высказывание следует (в смысле материальной импликации) из любого, то таким образом было бы доказано любое высказывание вместе с его отрицанием. Ясно, что такая логика не имела бы никакой ценности, и поэтому высказывание (a) нельзя рассматривать как истинное. Предоставляем читателю самому разобраться в случае с высказыванием (b).

[20] Заметим, что это определение имеет смысл только, если считать известным понятие «свойство». Однако закон этот можно сформулировать в виде правила замены, и тогда понятие «свойства» явно не встретится. Формулировка этого правила имеет следующий вид:

Если p равно q, то во всяком истинном высказывании, содержащем p, можно заменить в одном или нескольких местах p на q и, наоборот: если это правило применимо, то p равно q.

Напомним, что в обычном правиле подстановки переменную нужно было заменить всюду, где она встречалась.

Это правило формулируется ниже, и на нем автор основывает все свои дальнейшие рассуждения в этой главе.

[21] Докажем законы II, III и IV при помощи нашего правила:

II. $$x = x.$$

Ясно, что если в любом высказывании, содержащем x, заменить его самим собой в одном или нескольких местах, то смысл этого высказывания не изменится.

III. $$\text{Если } x=y, \text{ то } y=x.$$

Мы предполагаем, что если во всяком истинном высказывании, содержащем x, заменить x на y в одном или в нескольких местах, то высказывание останется истинным. Пусть высказывание A содержит y, а если в нем мы y заменим на x, то получим высказывание B.

Из отрицания B следует отрицание A, так как если отрицание B истинно, то и отрицание A истинно, потому что оно получается из B заменой в некоторых местах x на y, а $x = y$; если же отрицание B ложно, то из него следует все, что угодно. Согласно закону контрапозиции поэтому верно, что из A следует B. Если теперь A истинно, то по правилу отделения мы получим, что и B истинно. Значит, в любом истинном высказывании, содержащем y, мы можем в одном или в нескольких местах заменить его на x, т. е.

$$y = x.$$

IV. $$\text{Если } x=y \text{ и } y=z, \text{ то } x=z.$$

Если мы в истинном выражении, содержащем x, заменим его в одном или нескольких местах на y, то получим истинное высказывание; если затем мы во всех этих местах y заменим на z, то получим опять истинное высказывание. Значит, если мы в истинном высказывании, содержащем x, заменим в одном или нескольких местах его на z, то получим опять истинное высказывание; следовательно, $x=z$.

[22] Это различение понятий и их наименований чрезвычайно важно. Оно приобретает особенно существенное значение в применении к функциям-указателям и функциям-высказываниям. Например,

$$x^2 + 2x + 3$$

это функция-указатель, которая принимает числовое значение, если мы вместо x подставим какое-нибудь число. Но

$$«x^2 + 2x + 3»$$

это уже объект из другого отдела математики, называемый многочленом. Таким образом из функций-указателей и функций-высказываний получают единичные объекты, которые изучаются в других частях математики и математической логики.

[23] Здесь автор опять рассуждает как метафизик, считая, что во всех областях математики и при всех условиях предмет обязательно тождественен себе. Преобразования на основе законов тождества в любом отделе математики требуют предварительного исследования. Об относительности понятий равенства и неравенства свидетельствует тот отдел арифметики, который называется теорией сравнений и в котором целые числа рассматриваются как равные, если разность между ними равна заданному числу n. Правда, обычно в математике проверка допустимости применения законов тождества очень проста и потому опускается.

[24] При содержательном построении логики высказываний переменные обозначают именно высказывания. Свойство быть ложным или истинным — это свойство самого высказывания, а исчисление высказываний изучает это свойство, но только в зависимости от внешней формы высказываний. (Тарский, очевидно, считает, что в исчислении высказываний утверждается что-то лишь о свойствах наименования высказываний.)

[25] Необходимо отметить, что при обычном для математики логическом рассуждении нужно заранее ограничить область предметов, которые рассматриваются как индивидуумы, причем рассматриваемые классы состоят только из этих предметов.

[26] В этом параграфе изучаются функции-высказывания как новые единичные объекты. См. прим. 33.

[27] Еще раз напоминаем, что область индивидуальных предметов или, как мы теперь можем сказать, класс всех индивидуумов должен считаться в ходе рассуждения точно ограниченным. Правда, в математике и математической логике в качестве класса всех индивидуумов рассматриваются различные области предметов (в зависимости от изучаемых вопросов).

[28] Эти вопросы имеют чрезвычайно важное значение в современной логике. Дело в том, что если допустить все рассуждения такого типа, какой применяется в теории классов, то можно различными способами притти к противоречию (это — так называемые парадоксы теории множеств). Так как метод формальной логики не допускает противоречия (в противном случае он не имел бы никакой ценности), то возникает потреб-

ность сузить область рассуждений такого типа. Но так как без этих рассуждений нельзя обойтись во многих разделах математики, то нужно исследовать всякий раз возможность их применения, а не отказываться от них совсем. Теория логических типов Рэссела пытается сделать такие исследования излишними, в основном за счет ограничения и усложнения запаса логических средств математики. В последнее время очень ценные результаты в совершенно отличном от рэсселовского направлении были получены советскими учеными Д. А. Бочваром и П. С. Новиковым.

[29] Обращаем внимание читателя на параллелизм отношения $K \subset L$ в теории классов и отношения $p \rightarrow q$ в теории высказываний.

[30] Опять обращаем внимание читателя на параллелизм операций сложения, умножения и дополнения в теории классов с операциями логической суммы, произведения и отрицания в теории высказываний.

[31] Ниже, в параграфе 33, автор сам отмечает, что его рассуждения о равномощных классах и о мощности не вполне четки и ясны. Мы считаем, что для связности изложения эти понятия нужно пояснить именно здесь.

Пусть у нас имеются два класса K и L; каким образом лучше всего сравнивать количество элементов в этих классах? Всем известен один из способов сделать это: пересчитать элементы в одном и в другом и сравнить полученные числа. Но этот способ применим не всегда. Рассмотрим, например, случай, когда индивидуальные предметы — это целые положительные числа; попробуем сравнить класс четных чисел и класс чисел нечетных. Ясно, что пересчитать числа в каждом из этих классов не удастся, и нам придется либо отказаться от намерения сравнивать количество элементов в классе, либо придумать другой способ сравнения.

Оказывается, тот способ, который мы уже знаем, кроме того, не самый простой. Существует другой способ сравнения классов. Поясним его на примере. Предположим, что надо узнать, достаточно ли число билетов на стадион «Динамо». Для этого вовсе не требуется считать, сколько народа стоит в очереди. Просто каждому человеку продают билет; и если билетов нехватит, то людей в очереди было больше, чем билетов в кассе, а если останутся лишние билеты, то людей было меньше (на самом деле каждому человеку продают по два билета, но мы для простоты предполагаем, что каждый человек берет по билету).

Когда в кассе продают билеты, то этим самым устанавливается некоторая связь между билетами и людьми, которым они проданы. Каждому проданному билету соответствует человек, купивший его, и человеку, купившему билет, соответствует его билет. На этом примере можно выяснить понятие соответствия.

В нем мы имеем соответствие между элементами класса K (билетов на стадион «Динамо») и класса L (болельщиков). Если предположить, что все билеты были проданы (как всегда и бывает, если матч происходит между сильными командами), то каждому элементу класса K соответствует какой-то элемент класса L. Если при этом все желающие имеют билеты (случай почти невозможный), то каждому элементу класса L соответствует элемент класса K. В этом случае ясно, что количество элементов в обоих этих классах одинаково. Итак, мы получили новый способ сравнивать количество элементов в классах: нужно установить соответствие между элементами первого класса и элементами второго.

Если между элементами класса K и элементами класса L установлено соответствие так, что каждому элементу класса K соответствует элемент класса L, а каждому элементу класса L соответствует элемент класса K, причем двум разным элементам класса K соответствуют разные элементы класса L и двум разным элементам класса L соответствуют разные элементы класса K, то такое соответствие называется взаимно-однозначным.

Если между элементами классов K и L можно установить взаимно-однозначное соответствие, то такие два класса называются **равномощными** или **эквивалентными**.

Теперь мы заменим наше прежнее понятие «количество элементов» более строгим понятием — **мощностью** или **кардинальным числом**. **Мощность класса** K это то свойство, которым обладают все классы, равномощные классу K, и не обладает никакой другой класс. Классы можно сравнивать по мощности. Если у нас имеются два класса K и L, то, абстрактно рассуждая, возможны четыре случая:

1) Класс K равномощен некоторому подклассу класса L, и класс L равномощен некоторому подклассу класса K.

2) Класс K равномощен некоторому подклассу класса L, но в нем не существует подкласса, который был бы равномощен классу L.

3) Класс L равномощен некоторому подклассу класса K, но в нем не существует подкласса, который был бы равномощен классу K.

4) В классе K не существует подкласса, который был бы равномощен классу L, и в классе L не существует подкласса, равномощного классу K.

В случае 1) можно доказать, что классы K и L равномощны; в случае 2) естественно считать, что мощность класса L больше, чем мощность класса K, а в случае 3), что мощность класса K больше, чем мощность класса L; наконец, можно доказать, что случай 4) невозможен (надо иметь в виду, что сам класс целиком является своим «несобственным» подклассом). Так как случай 4) невозможен, то, каковы бы ни были два класса K и L, или мощность класса K больше, чем мощность класса L, или она меньше, или два этих класса равномощны. Поэтому мощности можно сравнивать, т. е. из двух разных мощностей одна больше другой (для того чтобы узнать — какая, нужно выбрать по классу с данными мощностями и сравнить один с другим).

Приведем несколько примеров. Множество всех пальцев правой руки человека равномощно множеству всех пальцев левой руки: мы можем поставить в соответствие пальцы с одинаковыми названиями. Множество всех пальцев на руках и ногах человека имеет бóльшую мощность, чем множество пальцев одной правой руки. Множество всех чисел, меньших 100, имеет бóльшую мощность, чем множество всех чисел, меньших 50.

Однако существуют множества, которые имеют «собственные» подмножества той же мощности, что и они сами. Рассмотрим, например, множества **I** целых чисел 0, 1, 2...; множество **D** четных чисел 0, 2, 4,... является собственным подмножеством этого множества. Однако можно установить взаимно-однозначное соответствие между множеством **I** всех целых чисел и множеством **D** всех четных чисел, а именно — каждому целому числу n мы поставим в соответствие четное число $2n$, вдвое большее, чем n, а каждому четному числу m — целое число $\frac{m}{2}$, вдвое меньшее, чем m. Легко видеть, что наше соответствие взаимно-однозначно.

Это свойство — возможность отобразить взаимно-однозначно класс на свой «собственный» подкласс — характеризует бесконечные классы в отличие от конечных. Укажем здесь, что мощность очень многих бесконечных классов равна мощности класса натуральных чисел. Например, мощность всякого бесконечного подкласса класса натуральных чисел равна мощности всего класса, мощность множества всех рациональных чисел тоже счетна (так называют мощность класса натуральных чисел). Однако существуют бесконечные классы, имеющие бóльшую мощность, например класс всех точек отрезка или класс всех действительных чисел.

Всякий конечный класс равномощен классу всех натуральных чисел, меньших какого-либо натурального числа n. Таким образом, мощность конечного класса характеризуется некоторым натуральным числом n.

[32] Утверждение Тарского, что арифметику можно свести к логике, неверно, так как аксиома бесконечности, которую для этого необходимо ввести в логику, является содержательной аксиомой математики, вместе с которой в логику уже включается вся арифметика.

[33] а) Мы говорим, что $x = y$, если, и только если, для всякого класса K, из того, что x включен в класс K, следует, что и y

включен в класс K, и обратно: если y включен в класс K, то и x включен в класс K.

b) Мы говорим про классы K и L, что $K = L$, если, и только если, для любого элемента x, из того, что x включен в K, следует, что x включен в L, и обратно: если x включен в L, то x включен в K.

[34] Если в исчислении классов переменные, обозначающие классы, заменить переменными, обозначающими высказывания, а символы операций дополнения ($'$), объединения ($\cup$) и пересечения ($\cap$) заменить соответственно символами отрицания ($\sim$) логической суммы ($\vee$) и произведения ($\wedge$), то формулы исчисления классов перейдут в соответствующие формулы исчисления высказываний, а формулы, изображающие универсальный класс, перейдут в истинные формулы логики высказываний. Причина этого в том, что логика высказываний — это исчисление классов в случае, когда существует всего один индивидуум; тогда существуют всего два класса, универсальный и нулевой, которые мы ставим в соответствие истине и лжи.

С другой стороны, если мы будем рассматривать функции-высказывания

$$x \in K, \quad x \in L,$$

то мы опять получим соответствие между операциями исчисления высказываний и исчисления классов, выражаемое формулами:

$$x \in K \cup L \leftrightarrow (x \in K \vee x \in L),$$
$$x \in K \cap L \leftrightarrow (x \in K \wedge x \in L),$$
$$x \in K' \leftrightarrow \sim (x \in K).$$

Можно построить аналогичным способом операцию, соответствующую знаку следования, если истолковать импликацию $A \to B$ как $\sim A \vee B$; но она не представляет существенного интереса. Однако исчисление классов связано с исчислением высказываний еще и другим способом. Именно, если мы рассмотрим классы K и L, при $K \subset L$, то из того, что элемент x обладает свойством класса K, будет следовать, что x обладает свойством класса L, символически:

$$K \subset L \leftrightarrow (x \in K \to x \in L),$$

где знак $\to$ принадлежит исчислению высказываний. Но этот параллелизм неполон.

Нужно при этом иметь в виду, что исчисление классов богаче исчисления высказываний хотя бы потому, что операции исчисления высказываний являются частным случаем операций исчисления классов — когда универсальный класс состоит из одного элемента.

[35] Это различие обозначений объясняется тем, что в других разделах логики рассматриваются связанные, например, отношением равенства предметы, а здесь само отношение равенства является изучаемым предметом. Здесь мы имеем дело с применением абстракции, превращением свойства (множества) или отношения в предмет. В математике этот метод употребляется часто и является весьма плодотворным. Например, в теории функций рассматривается как предмет функция, т. е. некоторое отношение между числами. Затем это понятие опять подвергается абстракции, и мы получаем новую математическую дисциплину, функциональный анализ, в котором изучающимися предметами являются соответствующие отношения между функциями.

[36] Докажем, что если отношение R симметрично, транзитивно и рефлексивно в классе K, то оно определяет отношение равенства, если в качестве предметов рассматривать подклассы класса K, в каждом из которых любая пара элементов x и y удовлетворяет отношению R.

Пусть $[x]$ — класс, состоящий из всех элементов z, для которых справедлива формула

$$xRz.$$

Нам необходимо доказать, что

$$[x] = [y],$$

если, и только если,

$$xRy.$$

Пусть имеет место xRy; докажем, что в этом случае классы $[x]$ и $[y]$ совпадают. Действительно, если $z \in [x]$, т. е.

$$xRz,$$

тогда формула yRx справедлива вследствие закона симметрии, а вследствие

$$yRx \text{ и } xRz,$$

по закону транзитивности,

$$yRz,$$

т. е. $z \in [y]$.

Если, наоборот, $z \in [y]$, т. е.

$$yRz,$$

тогда из формул

$$xRy \text{ и } yRz$$

следует, ввиду транзитивности отношения R:

$$xRz,$$

т. е. $z \in [x]$. Таким образом, если элемент z входит в класс $[x]$, то он входит также и в класс $[y]$, и, наоборот, если элемент z входит в класс $[y]$, то он входит в класс $[x]$, т. е. классы $[x]$ и $[y]$ совпадают.

Пусть классы $[x]$ и $[y]$ совпадают; докажем, что в этом случае имеет место отношение

$$xRy.$$

Действительно, элемент y входит в класс $[y]$, так как вследствие рефлексивности отношения R формула

$$yRy$$

справедлива. Следовательно, $y \in [x]$, так как классы $[y]$ и $[x]$ совпадают, а отсюда следует:

$$xRy.$$

[37] Если отношение R асимметрично, транзитивно и связно в классе K, то мы будем говорить, когда имеет место формула

$$xRy,$$

что x предшествует y.

Ввиду асимметрии этого отношения, если x предшествует y, то y не предшествует x. Ввиду транзитивности, если x предшествует y, а y предшествует z, то x предшествует z; ввиду связности, из двух элементов x и y один обязательно предшествует другому. Эти свойства и объясняют, почему такое отношение называется отношением порядка.

[38] Однако здесь рассматриваются различные понятия, которые автор смешивает. В формуле

$$xRy$$

R — отношение, xRy после подстановки предметов вместо x и y становится истиной или ложью; если же мы рассмотрим выражение $R(y)$, то после подстановки какого-либо предмета (из соответствующей области) вместо y мы получим предмет, т. е. нечто, вообще говоря, отличное от истины и лжи. Таким образом, R здесь — функция-указатель. Связь между этими понятиями выражается следующей теоремой:

Всякое однозначное отношение xRy эквивалентно некоторому тождеству $x = R(y)$, где R — функция-указатель, соответствующая отношению R.

[39] Рассмотрим, например, отношение

$$(B/\breve{C}) \cup [H/(S/\breve{C})]:$$

$\breve{C}$ — это отношение «быть родителем»; $xB/\breve{C}y$ — существует человек z, для которого x брат z, а z — родитель y, т. е. x — дядя y.

$xS/\breve{C}y$ — аналогично: x — тетя y;

$xH/(S/\breve{C})y$ означает, что существует человек z, для которого

x — муж z, а z — тетя y;

короче:

x — муж тети y.

Отсюда $x\{B/\breve{C} \cup [H/(S/\breve{C})]\}y$ означает:

x — дядя или муж тети y.

Заметим здесь еще, что брат сестры x — не обязательно брат x, это может быть сам x; символически:

$$B/S = B \cup I$$

(здесь I — символ тождества).

[40] Рассмотрим, например, отношения B/F и F/B предыдущего упражнения. Первое обозначает дядю, второе — отца (отец брата то же, что и отец). Докажем теперь второе утверждение. Пусть справедлива формула

$$x(\breve{R/S})y;$$

значит, верно также, что

$$y(R/S)x,$$

т. е. существует z такой, что yRz и zSx,

откуда:

существует z такой, что $x\breve{S}z$ и $z\breve{R}y$;

следовательно,

$$x\breve{R}/\breve{S}y.$$

Так же доказывается и в другую сторону.

[41] c) Мы имеем

$$\sim xRx,$$

так как, вследствие асимметрии, для всякого y, в том числе и $y=x$, хотя бы одна из формул xRy и yRx неверна. Написанная выше формула эквивалентна:

$$xR'x;$$

таким образом, отношение R' рефлексивно.

Далее, из двух формул xRy и yRx, вследствие асимметрии, хотя бы одна неверна. Значит, из формул

$$xR'y \text{ или } yR'x$$

хотя бы одна верна.

d) Пусть справедливы формулы:

$$xR'y \text{ и } yR'z;$$

иначе говоря:

$$\sim xRy \text{ и } \sim yRz;$$

вследствие связности отношения R отсюда следует, что

$$zRy \text{ и } yRx.$$

Если бы формула

$$xR'z$$

не была верна, т. е. была бы верна формула

$$xRz,$$

то, вследствие транзитивности отношения R, из формул

$$xRz \text{ и } zRy$$

следовало бы:

$$xRy.$$

Таким образом, формула $xR'z$ справедлива.

[42] xR/Ry означает, что существует z такой, что

$$xRz \text{ и } zRy.$$

Все высказывание $\mathrm{R/R} \subset \mathrm{R}$ означает:

если существует z такой, что xRz и zRy, то xRy, т. е. определение транзитивности.

Формула, $\mathbf{D} \subset R \cup \breve{R}$ означает:

если x отлично от y, то xRy или yRx —

это определение связности отношения R.

Отношение симметричности подобным образом выражается формулой:

$$R = \breve{R},$$

асимметричности — формулой:

$$\breve{R} \subset R';$$

интранзитивности — формулой:

$$R/R \subset R'.$$

Формула $R/\breve{R} \subset I$ означает:

если существует z такой, что xRz и $z\breve{R}y$ (или yRz), то $x = y$. Это — определение того, что отношение R однозначно.

[43] Эти рассуждения автора довольно бессодержательны. Его идеал не имеет никакого научного значения, и принципы построения математических дисциплин не возникли в результате какого-то компромисса.

На самом деле задачей аксиоматического или дедуктивного метода является установление связей между предложениями данной дисциплины и дальнейшее ее развитие.

[44] Выбор тех или иных предложений в качестве аксиом диктуется не обязательно их очевидностью. Вспомним, например, аксиому о параллельных в геометрии Лобачевского. (О выборе аксиом смотри параграф 39 этой книги и примечание 56.)

[45] Ниже (см. прим. 62) автор не следует этому определению истинности.

[46] Автор здесь сообщает, чем мы не имеем права пользоваться в дедуктивной теории для установления истинности предложений, но не дает полного представления о средствах, находящихся в нашем распоряжении. Кроме неопределяемых терминов и аксиом, должны быть известны правила, которые дают возможность получать из высказываний, признанных истинными, другие высказывания, которые тоже нужно считать истинными. Здесь автор, вероятно, предполагает, что применяются обычные правила рассуждения; ниже (параграф 40) автор отметит необходимость иметь правила вывода для построения дедуктивной теории, причем эти правила он будет рассматривать в формализованном виде.

В дедуктивной теории, кроме аксиом и неопределяемых терминов, даются также правила вывода, с помощью которых можно получать новые высказывания этой теории — теоремы. Необходимо отметить, что по мере развития этой теории запас правил расширяется, так как каждое новое доказанное положение можно сформулировать в виде правила вывода, пригодного для получения новых теорем (правда, их можно вывести и при помощи старых правил).

Значение дедуктивного метода (кроме установления связи между предложениями данной теории) заключается в том, что в тех науках, где он применим, нет необходимости проверять практике все положения данной теории; достаточно проверить правильность исходных положений и применимость правил вывода в данной теории.

[47] Следует отметить, что таким способом (и притом при помощи правил вывода) можно построить не всю математическую логику, а всегда лишь некоторую ее часть.

[48] Неверно, что «Начала» Евклида являются примером проведения дедуктивного метода. Например, в них нет системы аксиом геометрии: сформулированные там аксиомы относятся почти все к логическому понятию тождества, а постулаты устанавливают, какие задачи Евклид считает решенными (постулат о параллельных, например, сформулирован в виде указания, в каком случае задача найти точку пересечения двух прямых может считаться решенной); значительную роль в этой книге играет сведение других геометрических задач к тем, которые уже считаются решенными.

[49] Если считать, что в дедуктивной теории существует лишь конечное число исходных положений (аксиом и эффективно выполнимых правил вывода), то дедуктивно нельзя построить почти ни одну значительную математическую теорию, хотя одно время считали, что математические теории именно тем отличаются от других наук, что в первых все положения можно вывести из конечного числа основных. Уже арифметику невозможно построить таким образом.

[50] Этот прекрасно изложенный пример показывает, что методология дедуктивных наук нужна не только для общего рассмотрения этих наук, но что при ее помощи в этих науках можно получить существенные результаты. Вопрос об интерпретации имел важное значение для геометрии Лобачевского, которая возникла в результате методологического исследования о независимости аксиомы о параллельных линиях от остальных аксиом геометрии. Когда была дана интерпретация геометрии Лобачевского в обыкновенной геометрии, то этот вопрос тем самым был окончательно решен в положительном смысле.

[51] Необходима все-таки известная осторожность при пользовании этим законом. Пусть, например, наша система состоит из одной аксиомы

$$a=0 \vee a=1.$$

Из этой аксиомы можно вывести в качестве следствия (просто другой записи при помощи универсального квантора):

$$(x)(x=0 \vee x=1).$$

Легко построить модель этой системы, состоящую из двух элементов, один из которых обозначается символом 0, а другой — символом 1. Однако теорема, которую можно получить при помощи неосторожного применения закона дедукции:

$$a=0 \vee a=1 \rightarrow (x)(x=0 \vee x=1),$$

неверна.

Для того чтобы избежать возможности такого применения закона о дедукции, последний формулируют иногда таким образом:

Если в дедуктивной теории из аксиом $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_n$ следует теорема $\mathfrak{B}$, причем при доказательстве этой теоремы не производят подстановки в переменные, имеющиеся в наших аксиомах, и не связывают их кванторами, то верна следующая теорема логики:

$$\mathfrak{A}'_1 \wedge \mathfrak{A}'_2 \wedge \dots \wedge \mathfrak{A}'_n \rightarrow \mathfrak{B}',$$

где $\mathfrak{A}'_k$ — это формула логики, которая получается, если в выражении $\mathfrak{A}_k$ все термины данной теории заменить соответствующими логическими переменными. Если в исходных аксиомах нет свободных переменных (что и имеет место при способе изложения Тарского), то можно не делать оговорки о том, что в доказательстве нельзя употреблять замену переменных и связывание их кванторами.

[52] Автор неправильно отрывает практическое значение дедуктивного метода от его теоретической ценности. Практическое значение его обусловлено именно его теоретической ценностью, т. е. тем, что он правильно отражает действительность. Вместо рассуждений об экономии мысли, излюбленных махистами, лучше сказать, что тот, кто вооружен теоретическим пониманием дела, располагает поэтому большей практической возможностью получить результат.

[53] Теория рассматривается как формальная система, если ее термины понимаются как переменные, т. е. не связываются с какой-либо одной определенной интерпретацией; это точнее, чем

говорить, что мы рассматриваем их так, как будто не знаем их смысла.

[54] Дело не в том, что формальная система, которой нельзя дать интерпретацию, неинтересна, а в том, что она не имеет никакого отношения к науке, которая изучает действительность.

[55] См. примечание 32 (к параграфу 26).

[56] В связи с каждой дедуктивной теорией возникает вопрос о том, чтобы обозреть все эквиполлентные системы аксиом и первичных терминов. По существу, возможность такого обозрения означает завершение данной дедуктивной теории. После этого выбор системы аксиом происходит не стихийно, а сознательно, исходя из желаемого характера изложения теории.

[57] Дедуктивный метод можно рассматривать как самый совершенный только в тех науках, где можно его применять и им ограничиться.

[58] Автор пытается здесь подменить понятие объективной истины, основанное на критерии практики, идеалистическим (так как оно не предполагает соответствия с реальной действительностью) определением объективного, состоящим в требовании соблюдения некоторых формальных правил.

Действительное значение формализации основывается на том, что она дает возможность высказать общие положения о всем бесконечном множестве предложений рассматриваемой научной теории. Так, чтобы проверить, например, что все предложения этой теории обладают некоторым свойством S, достаточно убедиться в том, что этим свойством обладают все аксиомы теории и что каждый возможный шаг вывода переводит предложения, обладающие этим свойством, в предложения, также обладающие им. Подобным образом выполняются многие доказательства непротиворечивости и независимости для системы аксиом рассматриваемой теории.

Поскольку правила образования предложений и правила их преобразования (правила вывода) носят при этом формальный характер, общий для всех содержательных интерпретаций, термин «формализация» является вполне уместным.

[59] Мы уже отмечали, что в формализованной теории символы рассматриваются в известном смысле как переменные, а не как сочетания знаков, ничего вообще не означающих; заметим, кроме того, что без содержательных аксиом нельзя построить даже вполне формализованной теории: правила обращения со знаками теории носят содержательный характер.

[60] По этому поводу см. прим. 66 (к параграфу 41).

[61] Выше Тарский утверждал, что методологическая правильность рассуждений как раз и нужна для ясности и понятности,

а здесь оказывается, наоборот,—ясность и понятность проигрывают от «методологической правильности».

[62] Здесь Тарский понимает истинность не в том смысле, в каком он ее определяет в параграфе 36 (см. прим. 43),— не в смысле доказуемости. Его понимание истинности здесь более правильно. Истинность высказывания в конечном счете доказывается всегда критерием практики.

[63] Дело здесь не в идеальности теории, а в том, что только непротиворечивую содержательную теорию можно развивать и дедуктивным методом, так как в этом методе необходимо пользоваться законами формальной логики, только в случае полноты всю эту теорию можно развить дедуктивным методом.

[64] Тарский показал, что можно построить непротиворечивую теорию, которую тем не менее нельзя считать истинной. В этой теории доказуемы все следующие высказывания.

Существует целое положительное число x, для которого $Q(x)$ неверно [здесь $Q(x)$ — некоторая фиксированная функция-высказывание].

$Q\ (1)$ — верно.

$Q\ (2)$ — верно

. . . .

. . . .

$Q\ (n)$ — верно.

. . . .

Дедуктивную систему, в которой нельзя одновременно доказать все эти высказывания, называют ω-непротиворечивой.

[65] Автор здесь не вполне точно изображает дело. Не арифметика и геометрия неполны, а любая формализованная теория, которая содержит значительную часть арифметики (или высшей геометрии), неполна, т. е. арифметику (и высшую геометрию) нельзя полностью формализовать.

[66] Автор придает неправильный смысл понятию «теоретический» (здесь и в конце параграфа 40), считая, что имеют какое-либо теоретическое значение или теоретический смысл вещи, которые не существуют (в конце параграфа 40 он говорит, что

теоретически можно себе представить всякую математическую дисциплину в формализованном виде, но мы только что видели невозможность формализовать уже арифметику).

Проблемы непротиворечивости и полноты имеют большое теоретическое и практическое значение. Кроме значительных исследований по этим проблемам, упомянутым в конце этого параграфа, большую роль в построении дедуктивных теорий играют относительные доказательства непротиворечивости. В этих исследованиях считают какую-либо математическую теорию непротиворечивой и при этом условии доказывают непротиворечивость других математических теорий (обычно при помощи интерпретации). Например, непротиворечивость неевклидовых геометрий (в том числе геометрии Лобачевского) доказывается в предположении непротиворечивости евклидовой геометрии Кроме того, и для арифметики возможны доказательства непротиворечивости, хотя бы в следующем смысле. Если считать обоснованными те предложения арифметики, истинность которых для каждого натурального числа (группы чисел) может быть эффективно (практически) проверена, то при помощи интерпретации всей арифметики натуральных чисел на эту ее часть можно доказать ее непротиворечивость. Этот результат был получен советским математиком Колмогоровым в 1925 г., а затем Геделем в 1933 г. В еще более строгом смысле непротиворечивость была доказана Генценом и советским математиком П. С. Новиковым.

Критерий непротиворечивости, который некоторые математики хотят рассматривать как критерий допустимости той или иной математической теории, не может быть противопоставлен критерию практики. Он представляет собой одну из форм критерия практики в математике. Так, большинство обычных доказательств непротиворечивости (абсолютных и относительных) основано на построении модели, т. е. на нахождении объектов, удовлетворяющих данной теории.

[67] Правилами вывода, которыми можно пользоваться в этом и следующих упражнениях, является все исчисление высказываний. Обращаем внимание читателя на отличие знаков $\cup$ и $\cap$ (которые обозначают операции, т. е. задают некоторые функции от связанных ими объектов) от знака $\subset$ (который обозначает отношение между связываемыми им объектами, т. е. после подстановки конкретных объектов $K \subset L$ означает истину или ложь). Это отличие выражено в аксиомах тем, что знак $\subset$ встречается в них и без других знаков, а знаки $\cap$ и $\cup$ только вместе со знаком $\subset$.

[68] Проверив, что все исследуемые нами аксиомы и определения являются истинными высказываниями, мы должны далее проверить при помощи тех же таблиц истинности, что наши правила вывода, примененные к истинным высказываниям, дают

снова истинные высказывания (это довольно легко сделать); так как все теоремы получаются из аксиом при помощи последовательного применения правил вывода, то они также являются истинными высказываниями (см. прим. 58).

[69] Это имеет место потому, что если система аксиом полна, то всякое высказывание, которое может быть сформулировано в пределах рассматриваемой теории, может быть или доказано, или опровергнуто. Значит, отрицание высказывания, недоказуемого в нашей системе, может быть доказано. Следовательно, если мы добавим такое высказывание, то в системе будет иметься некоторое высказывание вместе с его отрицанием. Полнота, о которой здесь идет речь, называется обычно полнотой в строгом смысле.

ПОСЛЕСЛОВИЕ РЕДАКЦИИ

По своим философским взглядам А. Тарский примыкает к так называемому «логическому позитивизму» (или «логическому эмпиризму», как его еще называют), распространившемуся в течение примерно двух последних десятилетий в некоторых странах Европы и особенно культивируемому теперь в США (наиболее известными из его представителей являются: в Англии — Витгенштейн и А. Айэр, в США — члены бывшего «Венского кружка» во главе с Р. Карнапом и польские эмигранты А. Кожибский и А. Тарский. Этому направлению близки также такие махровые философские реакционеры, как Б. Рэссел, А. Уайтхед и Д. Дьюи).

По своим принципиальным установкам «логический позитивизм», претендующий на оригинальность и новизну, есть лишь продолжение махизма, субъективно-идеалистические прорехи которого он пытается залатать, спекулируя на некоторых достижениях математической логики. Делая безнадежную попытку избавиться от солипсизма, неизбежного на почве субъективного идеализма, его сторонники производят жульническую операцию, подменяя критерий объективной истинности критерием логической и математической выводимости (так называемый «интерсубъективный критерий»).

С махизмом это направление сближает также вздорное и реакционное намерение преодолеть материализм и идеализм путем сведения всего материала нашего опыта к понятию «чувственных данных» (sense-data), которые, будучи сформулированы в виде «высказываний» или «предложений», становятся «сырым материалом науки». «Преодоление» двух основных философских направлений заключается в том, что борьба между ними объявляется «псевдопроблемой», якобы не имеющей никакого реального значения и смысла, т. к. возникновение этой «псевдопроблемы» будто бы никак не связано с историческими потребностями и общественными вопросами и есть лишь следствие несовершенства языка нашей повседневной речи. Стремясь запутать читателей в основном вопросе философии, вокруг которого идет все более и более острая борьба между материализмом и идеализмом, сторонники «научного эмпиризма» (и так еще называется это направленьице) пытаются подменить философские вопросы вопросами лингвистическими. «Преодоление» материализма и идеализма оказывается на деле самым обычным субъективным идеализмом. Все, что было сказано в свое время

Лениным о махистах, целиком и полностью относится и к «логическим позитивистам», всецело стоящим на почве субъективного идеализма Беркли и Юма. О такого рода ученых Ленин писал, что они способны давать самые ценные работы в специальных областях, но им «нельзя верить ни в едином слове, раз речь заходит о философии» *.

Что касается наших специальных возражений и дополнений к книге, то они сводятся к следующему.

1. В книге А. Тарского много примечаний исторического характера, содержащих биографические и библиографические сведения. Называя какого-нибудь автора, Тарский никогда не забывает при этом отметить его национальность, что делает, впрочем, не всегда правильно. Так, он причислил к немцам (см. стр. 150) известного чешского философа и математика первой половины XIX в. Б. Больцано, которому австрийское правительство запретило всякие публичные выступления и математические работы которого, содержащие ряд результатов и идей, более чем на 30 лет опередивших соответствующие открытия Вейерштрасса и Г. Кантора, увидели свет лишь после его смерти, — самые основные почти через 100 лет после того, как они были написаны.

В этой связи редакция не может пройти мимо того обстоятельства, что в то время как английские, американские, немецкие и близкие Тарскому польские логики и математики весьма охотно (часто не по одному разу) упоминаются в его книге, работы русских ученых полностью им обойдены.

2. Советские ученые, работающие в области математической логики, особое внимание уделяют таким вопросам, которые связаны с возможностью непосредственно математических или технических приложений. Собственно логические проблемы, разрабатываемые советскими учеными, стоящими на позициях диалектического материализма, представляют интерес в первую очередь потому, что опровергают установки позитивизма, формализма, интуиционизма и других направлений и оттенков современного все более и более реакционного идеализма.

3. Весьма значительные результаты в области исчисления классов, рассматриваемого им в первую очередь как теория логических умозаключений, были получены в 80-х годах прошлого века талантливым русским ученым астрономом-наблюдателем и приват-доцентом Казанского университета Платоном Сергеевичем Порецким (1846 — 1907).

В отличие от остальных пионеров в области работ по математической логике (Буля, Джевонса, Шредера, Пирса) Порецкий не преувеличивал логического значения разрабатываемых им проблем. В своей большой работе ** «О способах решения ло-

---

* *Ленин,* Соч., т. XIII, стр. 280.

** П. С. Порецкому принадлежит более 15 работ по матемагических равенств и об обратном способе математической логики», содержащей два сообщения, читанные 27 февраля и 23 марта 1882 г. в заседаниях физико-математической секции Общества естествоиспытателей при Казанском университете, П. С. Порецкий писал:

«*Система трех операций* (соответствующих рассматриваемым у Тарского действиям над классами, обозначаемым с помощью знаков $\cup$, $\cap$, $'$. — *Ред.*), вполне достаточная для построения *полной* теории *качественных* умозаключений (под *качеством* Порецкий понимает функцию-высказывание с одним аргументным переменным. — *Ред.*), показывает нам, что *мышление над качественными формами*, основанное на этих трех операциях, *не обнимает* собой даже *алгебраического* мышления, не говоря уже о *математическом* мышлении вообще... А потому, если действительно все процессы *логического* мышления основаны на началах теории *качественных* умозаключений, то необходимо будет признать логическое мышление не только *не общим*, но, наоборот, *крайне специальным* и притом весьма элементарным, так как оно может быть поставлено в параллель только с теми начатками количественного мышления, которые соответствуют элементарной стороне алгебры» (стр. XXI).

Но при этом Порецкий ясно сознавал значительность принадлежащего ему в истории математической логики места. «Обращаясь к нашему сочинению, предлагаемому ныне на суд читателя, — писал он, — мы должны сказать, что: 1) оно заключает в себе *первый* опыт (не только в нашей, но и в иностранной литературе) построения *полной* и вполне законченной теории качественных умозаключений и 2) оно представляет собой (за исключением немногих страниц, посвященных изложению приемов других авторов) вполне *самостоятельную* работу, имеющую тем большее значение, что самые *общие* формулы и приемы этой теории получены впервые только нами. Целая же часть этой теории (переход от умозаключений к посылкам) вполне и безраздельно принадлежит нам, как по приемам, так и по самой идее о возможности решения этой задачи» (стр. XXIII — XXIV).

Что Порецкий не ошибся в этой оценке, видно уже из того, что хотя его основные работы были написаны на русском языке и печатались в малодоступных изданиях, по ним учились его иностранные коллеги. Так, в своей известной «Алгебре логики» Л. Кутюра излагал методы Порецкого как наиболее совершенный этап всего развития алгебры логики, достигнутый к тому времени (книга Кутюра вышла в свет в 1905 г.).

тической логике, бо̀льшая часть которых была опубликована в различных изданиях Физико-математического общества при Казанском университете.

4. Наиболее близкими по тематике к работам П. С. Порецкого являются первые три работы по математической логике * профессора Московского университета Ивана Ивановича Жегалкина (1869—1947). Написанные исключительно просто и элементарно, эти работы должны быть вполне доступны читателю, ознакомившемуся с книгой Тарского.

Заметим, что И. И. Жегалкин был первым, построившим исчисление высказываний в виде,—говоря на языке современной алгебры,— алгебраического кольца, изоморфного кольцу вычетов по модулю 2; иными словами, он построил логику высказываний как аналог такой арифметики, где имеются только два числа: 0 и 1 (остатки при делении любого целого числа на 2), над которыми выполняются две операции: *сложение* и *умножение*, отличающиеся от обычных только тем, что $1 + 1 = 0$ (сумма двух нечетных чисел есть четное число). Если мы составим таблицы сложения и умножения в такой «2-арифметике», то получим

p	q	$p+q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Истолкуем теперь «1» как знак для *истины*, а «0» как знак для *лжи*, благодаря чему наши таблицы примут вид

p	q	$p+q$
и	*и*	*л*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

p	q	$p \cdot q$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

Ясно, что вторая из них соответствует логической связке «и», а первая — строго разделительному «или» («или — или»), т. е. высказыванию вида «или *p*, или *q*», верному только в том случае, когда одно, и только одно, из двух высказываний *p*, *q* верно. Если мы введем, кроме того, знаки «0» и «1» в самое наше исчисление, то остальные операции логики высказываний

* И. И. Жегалкин, О технике вычислений предложений символической логики, Математ. сборник, т. 34, вып. 1, 1927; Арифметизация символической логики, I, Математ. сборник, т. 35, вып. 3—4, 1928; II, там же, т. 36, вып. 3—4, 1929.

нетрудно будет свести к этим двум, т. е. к сложению и умножению. Так, например, отрицание p выразится в виде $p+1$. Действительно, отрицание определяется следующей таблицей:

p	$\sim p$
и	*л*
л	*и*

или

p	$\sim p$
1	0
0	1

а для $p+1$ мы имеем в «2-арифметике»:

p	$p+1$
1	$1+1=0$
0	$0+1=1$

т. е. в точности ту же самую таблицу. Таким образом, логика высказываний превращается полностью в «2-арифметику», законы которой давно изучены и могут быть непосредственно применены поэтому к технике вычислений с сложными высказываниями.

Совсем недавно, в 1946 г., в «Докладах Парижской Академии наук» появилась заметка Lalan'a, в которой он предлагает построение исчисления высказываний как алгебраического кольца по методу И. И. Жегалкина, не упоминая, однако, работ последнего *.

На основе своего исчисления высказываний (предложений) И. И. Жегалкин строит дальше исчисление предикатов («функций-высказываний» в терминологии А. Тарского) и исключительно просто и красиво решает *проблему разрешимости* (см. стр. 187 настоящей книги) для случая формул, содержащих только одноместные функции-высказывания, т. е. для логики классов, и притом как первой, так и второй ступени (см. стр. 114). Остальные работы И. И. Жегалкина посвящены значительно более сложным случаям формул определенного вида, для которых ему удается решить (для любых конечных областей) неразрешимую, как мы теперь знаем, в общем случае ** проблему разрешимости.

5. Начавшийся вместе с кризисом физики кризис естествознания эпохи империализма распространился вскоре и на основы математики, где достиг особой силы уже в послевоенные (двадцатые) годы. Трудности, связанные с теоретико-множественным обоснованием математики и особенно с применением закона исключенного третьего к утверждениям существования,

* На что обращает внимание Черч, рецензирующий заметку Lalan'a.

** См. стр. 188—189 настоящей книги.

относящимся к бесконечным областям объектов, привели интуиционистов Брауэра и Вейля к выводу, что здание математического анализа, которое казалось наконец прочно обоснованным трудами Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда, покоится на песке. Предложенный ими выход, требовавший, в частности, исключения из математики всех предложений существования неконструктивного характера, т. е. не основанных на эффективном построении предмета, существование которого утверждается, означал, однако, необходимость столь тяжелых ограничений, налагаемых на математику, и столь безвыходное противоречие между идеалистическими философскими взглядами и математическим творчеством таких ученых, как Брауэр и Вейль, что им действительно оставалось только провозгласить безысходный кризис основ математики. Выступивший против интуиционистов известный математик Гильберт сделал попытку найти выход из трудностей на путях формализма, т. е. за счет лишения предложений математики содержательного смысла и превращения этой науки в своеобразную игру формулами.

Уже в 1925 г. советский математик А. Н. Колмогоров опубликовал работу «О принципе tertium non datur» *, смело и остро направленную как против формализма, так и против интуиционизма, разделявшихся весьма авторитетными математиками. Основная идея этой работы состояла в указании приема, позволяющего отобразить предложения классической математики в соответствующие им предложения «интуиционистской» так, чтобы при этом не нарушилась связь доказательства, т. е. предложение, доказуемое классически, превратилось в предложение, доказуемое «интуиционистски» (= без применения закона исключенного третьего в сомнительных случаях). При материалистическом подходе для кризиса основ математики таким образом не оставалось места. Ибо оказывалось, что, признав обоснованной «интуиционистскую» (конструктивную) математику, мы должны будем признать обоснованной и классическую (если только не навяжем себе догматически субъективно-идеалистического интуиционистского критерия истины). Заметим, что работа А. Н. Колмогорова на 7 лет предварила известный результат К. Геделя, показавшего с помощью аналогичного приема, что «интуиционистская арифметика и теория чисел лишь по видимости уже, чем классическая, в действительности же содержит всю классическую, только в несколько отличной интерпретации».

Другой известный результат Геделя (1932 г.), состоящий в том, что отвергающая закон исключенного третьего «интуиционистская» логика предложений не адэкватна никакой таблично построенной логике высказываний, допускающей конечное число

* Математ. сборник, т. 32, стр. 646—667 (1924—1925).

различных «состояний» (значений истинности), был предварен советским математиком В. И. Гливенко, остроумно показавшим еще в 1928 г., что логика Брауэра несовместна с допущением — наряду с истинностью и ложностью — какого-нибудь «третьего» состояния. В 1929 г. В. И. Гливенко доказал, кроме того, что если в классической логике высказываний доказуемо предложение p, то в «интуиционистской» доказуемо двойное отрицание p $[\sim(\sim p)]$. Если же $\sim p$ доказуемо классически, то оно доказуемо и «интуиционистски».

Говоря об «интуиционистской» логике, мы сознательно заключали этот термин в кавычки. Дело в том, что интуиционисты разделяют взгляды махрового субъективного идеализма неокантианского толка, с позиций которого действительно не существует выхода из провозглашенного ими кризиса основ математики. Советских же математиков вопрос о трудностях, возникающих в математике в случаях необоснованного применения закона исключенного третьего, интересовал с радикально отличной точки зрения. Свободное от гносеологических посылок интуиционизма материалистическое объяснение содержательного смысла «конструктивной» логики имеется в работе А. Н. Колмогорова (1932), содержащей истолкование «интуиционистской» логики как «исчисления проблем».

6. В связи с вопросом о непротиворечивости дедуктивной теории Тарский упоминает известный результат Геделя, ставящий вообще под сомнение возможность прямого (конструктивного) доказательства непротиворечивости арифметики. Советский математик П. С. Новиков предложил, однако, исключительно простое по идее и остроумное доказательство непротиворечивости арифметики, в основе которого лежит построенное П. С. Новиковым логическое исчисление, допускающее, кроме операций логики высказываний, бесконечные (счетные) логические суммы и произведения *.

Если область объектов, о которых идет речь, счетна (см. примеч. 31), то утверждение, что *все* предметы этой области обладают свойством S, может быть заменено бесконечным *произведением* утверждений: «предмет a_1 обладает свойством S *и* предмет a_2 обладает свойством S,..., *и* предмет a_n обладает свойством S, *и*...»; утверждение же, что *существует* предмет, обладающий свойством S, — бесконечной *суммой*: «предмет a_1 обладает свойством S, *или* предмет a_2 обладает свойством S, ..., *или* предмет a^u обладает свойством S, *или*...» Допустив в применении к этим «суммам» и «произведениям» только такие средства рассуждения, которые допускаются в применении к бесконечности и «интуиционистской» математикой, П. С. Новиков показал, что в его исчислении недоказуема

* Доклады Академии наук СССР, XXIII, № 5, 1939, Математ. сборник, т. 12 (54), вып. 2, 1943, стр. 231—261

принадлежащая этому исчислению формула «A». (Если бы формула «A» была доказуема, то по правилу подстановки из нее можно было бы вывести любую формулу, — в частности, обе формулы B и $\sim B$, из которых одна есть отрицание другой, т. е. исчисление было бы противоречиво. Наоборот, если бы исчисление П. С. Новикова было противоречиво, то в нем можно было бы доказать любую формулу, в том числе и «A».)

Особенно замечательным оказалось при этом, что полученное П. С. Новиковым доказательство непротиворечивости содержит результат уже не только логического, но и непосредственно математического значения. Именно, если мы имеем арифметическую функцию-высказывание $F(x)$, истинность или ложность которой для всякого целого числа x может быть проверена конечным числом операций, и если нам удалось доказать вообще *существование* числа n, для которого $F(n)$ — истинное высказывание, то из этого «чистого» доказательства существования по предложенному П. С. Новиковым методу мы сумеем извлечь эффективный способ вычисления числа n; сумеем превратить, так сказать, доказательство *возможности* в средство ее претворения в *действительность* *.

7. Мы уже отметили в предисловии, что как раз наиболее интересные и спорные вопросы математической логики и теории математического доказательства, вокруг которых между учеными идет острая борьба, имеющая принципиальный характер, попросту обойдены в книге Тарского. В частности, это относится к вопросам о парадоксах математической логики и связанной с ними теории логических типов Рэссела, по существу которых Тарский ограничивается замечанием, что они принадлежат «к наиболее запутанным проблемам современной логики» (стр. 114).

Между тем советским ученым Д. А. Бочвару и П. С. Новикову** удалось найти такое простое и убедительное решение

---

* Читателю, который пожелал бы ознакомиться ближе с исчислением П. С. Новикова, можно рекомендовать также работу Д. А. Бочвара «Об одном пропозициональном исчислении со счетными логическими суммами и произведениями», содержащую доказательство полноты системы Новикова (Математ. сборник, т. 7 (49), вып. 1, 1940, стр. 65—100).

** Д. А. Бочвар, К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств, Математ. сборник, т. 15 (57), вып. 3, 1944, стр. 369—384. Работа начинается словами: «Настоящая работа представляет собой исследование расширенного функционального исчисления без теории типов и так называемых парадоксов математической логики с некоторой новой точки зрения, не применявшейся, насколько известно автору, в опубликованных до сих пор фундаментальных трудах и работах, имеющих отношение к этим проблемам. Это новая точка зрения, очень этих проблем, которое вполне доступно читателю, овладевшему основным материалом книги Тарского. С нашей точки зрения, решение это тем более заслуживает подробного изложения даже в элементарном учебнике, что представляет собой наглядный пример, свидетельствующий о том, насколько важно и для работы в области формальной логики владение основами материалистической диалектики, и как, наоборот, субъективистская идеалистическая метафизика неизбежно заводит исследователя в тупик, как только речь заходит о более тонких вопросах логики (например, об изменяющихся — в связи с рассуждением о них — областях предметов этого рассуждения).

8. Существенную роль в истории развития математической логики сыграли работы русского ученого М. И. Шейнфинкеля (1887—1942), ученика талантливого одесского математика С. О. Шатуновского (1859—1929), которому также принадлежит ряд интересных и оригинальных идей, относящихся к вопросам логики и логического обоснования математики *.

Выступивший с глубокими исследованиями, по-новому осветившими основное для математики понятие функции и открывшими новые пути построения логических исчислений, М. И. Шейнфинкель, к сожалению, рано выбыл из строя в связи с тяжелым заболеванием. Опубликованная в 1924 г. на основании доклада, сделанного еще в 1920 г., работа Шейнфинкеля «О кирпичах здания математической логики» была широко использована в дальнейшем в *комбинаторном исчислении* и *исчислении* λ*-конверсии* американских логиков и математиков Карри и Черча. (Идеи комбинаторного исчисления Карри и «s-комбинаций» Черча идут непосредственно от Шейнфинкеля; исчисление λ-конверсии Черча вообще представляет собой некоторую формализацию системы идей о функциях, принадлежащей Шейнфинкелю.) Благодаря тому, что известный резуль-

---

простая, ясная и естественная, представляет вместе с тем всю проблему парадоксов в совершенно новом свете».

См. также:

Д. А. Бочвар, Некоторые логические теоремы о нормальных множествах и предикатах, Математ. сборник, т. 16 (58), № 3, 1945;

Д. А. Бочвар, Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления, Математ. сборник, т. 4 (46), №2, 1938;

Д. А. Бочвар, К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления, Математ. сборник, т. 12 (54), № 3, 1943;

П. С. Новиков, О логических парадоксах, Доклады Академии наук СССР, 1947, т. LVI, № 5.

* См. статью Н. Г. Чеботарева о Шатуновском в «Успехах математических наук», вып. VII, 1940, стр. 314—321.

тат Черча о неразрешимости проблемы разрешимости* был получен им именно для восходящей к Шейнфинкелю теории комбинаций, его оказалось возможным использовать для получения непосредственно математических следствий. Так, советский математик А. А. Марков построил таким образом ряд задач в теории ассоциативных систем, для которых не существует алгоритмического приема решения **.

9. Непосредственно математическим приложениям одной из теорем математической логики была посвящена работа советского математика А. И. Мальцева «Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп» ***.

Серия результатов в теории рекурсивных функций, являющейся одной из глав современной математической логики, обнаруживших ее связь с теорией аналитических множеств, была получена П. С. Новиковым и участниками руководимого им семинара.

10. Приоритет в применении аппарата математической логики к вопросам электротехники (связанным с построением релейно-контактных схем) принадлежит молодому советскому физику В. И. Шестакову, работа которого ****, написанная еще в январе 1935 г., к сожалению, не была своевременно опубликована, хотя и легла в основу его кандидатской диссертации. Для решения задачи символического представления структуры более сложных релейно-контактных схем, содержащих, — помимо последовательных и параллельных, — так называемые «мостиковые» соединения, советским инженером М. А. Гавриловым было построено специальное исчисление *****.

11. Обзор работ советских ученых по математической логике и ее приложениям мы могли бы значительно продолжить. Нам представляется, однако, что и приведенного достаточно для подтверждения двух основных положений:

1) Советских ученых математическая логика интересует в

---

* См. § 41 настоящей книги.

** Доклады Академии наук СССР, т. LV, № 7 и т. LVIII, № 3, 1947.

*** Ученые записки Ивановского Госуд. пед. ин-та, т. I, вып. 1, 1941.

****«Алгебра релейно-контактных схем». Из работ В. И. Шестакова отметим: «Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра А-схем)», Ж. Т. Ф., т. XI, вып. 6, 1941; «Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами». Изв. Академии наук СССР, Сер. математ., вып. 10, 1946, стр. 529—552.

***** Первая работа М. А. Гаврилова «Релейно-контактные схемы с вентильными элементами» была опубликована в Изв. Академии наук СССР, Техн. сер., 1945, стр. 153—164.

первую очередь как часть математики, как новая математическая дисциплина, обладающая специальным аппаратом и располагающая уже такими результатами и методами, которые могут быть непосредственно использованы в математике и в технике.

2) В своей работе по математической логике передовые советские ученые не разделяют позиций лживой научной «беспартийности», от имени которой говорит Тарский и которая на деле означает служение целям империалистической реакции, схоластики и поповщины. Ученые нашей страны стоят на точке зрения самой передовой революционной философии, единственно совместной с подлинной наукой нашего времени, — философии диалектического материализма, и готовы принять бой с силами реакции на всех фронтах, в том числе и на участке проблем, связанных с математической логикой и логическими основаниями математики.

СОДЕРЖАНИЕ

VI. О дедуктивном методе

Часть вторая

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ И МЕТОДОЛОГИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

VII. Построение математической теории: порядковые законы для чисел

VIII. Построение математической теории: законы сложения и вычитания

IX. Методологические соображения относительно построенной теории

X. Расширение построенной теории: основы арифметики действительных чисел

СПИСОК ОПЕЧАТОК

к книге А. Тарского „Введение в логику и методологию дедуктивных наук“.

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
35	17 сверху	Числа 2 и 5	Числа 2 и 3
58	14 снизу		— *Прим. ред.*
83	10—11 снизу	закон	правило
91	4—5 сверху	к которым относятся вышеприведенные выражения	которые относятся к вышеприведенным выражениям
114	2 сверху	считать	рассматривать
118	8 снизу	множество всех	множества всех
122	6 сверху	$x \in Ky$ (II)	$x \in K$, и (II).
124	10 сверху	в параграфе 20	в параграфе 24
126	11 снизу	$= K \cup L'$.	$= K' \cup L'$.
131	12—13 снизу	функции-высказыванию в этой связи,	функции-высказыванию; в этой связи
141	13 снизу	транзитивно	рефлексивно
155 156	1 снизу 8 снизу	$(\breve{R} / \breve{S})$	$\overbrace{(R / S)}$
158	11 снизу	на страницах 40 и 91	на страницах 1—42 и 2—93
160	18 снизу	отношение	к отношению
163 173	4 сверху 1 снизу	определенные	определяемые
164	16 сверху	определяемыми	неопределяемыми
192	13 снизу	$V \subset K \cup K$	$V \subset K \cup K'$
193	6 снизу	$L \cup K$	$L \cap K$
203	16—17 снизу	установленные	определяемые
243	13—14 снизу	В обратном случае мы скажем, что точка Y предшествует точке X	В том же случае мы скажем, что точка Y следует за точкой X
252	9 сверху	на систему,	на систему $\mathfrak{A}^{(1)}$,
259	3 сверху	$x+(y+z)=(x+z+y)$	$x+(y+z)=(x+z)+y$
268	13 сверху	$x < y$	x⧀y
268	17 сверху	«<»	«⧀»

Редактор В. Соколов

Технический редактор В. Полтев

Корректор Н. Булгаков

*

Сдано в производство 30/IX 1947 г.
Подписано к печати 6/XII 1947 г.
А-11976. Печ. л. $20^1/_2$. Уч.-издат. л. 14,9
Формат $82 \times 108^1/_{32}$. Издат. № 9/9
Заказ № 230
Цена 15 руб.

*

Типография Государственного
издательства иностранной литературы
Москва, Ново-Алексеевская, 52