И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Унитарные представления классических групп, *Тр. МИАН СССР*, 1950, том 36, 3–288

Посвящается памяти
Вячеслава Васильевича
Степанова.

Введение

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа; будем говорить, что задано представление группы $\mathfrak{G}$, если каждому элементу g группы $\mathfrak{G}$ поставлено в соответствие линейное преобразование T_g в некотором линейном пространстве $\mathfrak{H}$, так что произведению элементов группы отвечает произведение линейных преобразований:

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2} \tag{1}$$

и единице группы отвечает единичное преобразование. В дальнейшем мы будем считать, что пространство $\mathfrak{H}$ есть гильбертово пространство, т. е. в нем введено понятие скалярного произведения векторов (ξ, η) так, что при этом выполнены следующие требования

$$(\xi, \eta) = \overline{(\eta, \xi)},$$

$$(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \eta) = \alpha(\xi_1, \eta) + \beta(\xi_2, \eta),$$

$$(\xi, \xi) \geqslant 0,$$

причем равенство $(\xi, \xi) = 0$ возможно лишь при $\xi = 0$.

Операторы T_g мы будем предполагать унитарными*; кроме того, в случае, когда группа $\mathfrak{G}$ есть непрерывная группа, мы будем предполагать представление также непрерывным в том смысле, что $(T_g\xi, \eta)$ есть непрерывная функция g для любых фиксированных ξ и η. Если эти условия выполнены, то представление $g \to T_g$ называется *унитарным представлением группы* $\mathfrak{G}$.

Если в пространстве $\mathfrak{H}$ есть подпространство $\mathfrak{H}_1$ (отличное от $\mathfrak{H}$ и от (0)), инвариантное относительно всех операторов T_g, то представление называется *приводимым*. В противном случае представление $g \to T_g$ называется *неприводимым*.

Роль неприводимых унитарных представлений состоит в том, что к ним обычно сводится изучение любых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$.

---

* Оператор u называется *унитарным*, если он имеет обратный и сохраняет длины векторов, т. е. $(u\xi, u\xi) = (\xi, \xi)$ для любого ξ.

После того, как в работе [12] было доказано существование неприводимых унитарных представлений локально компактных групп, возник вопрос о фактическом определении этих представлений для случая наиболее интересных групп. Среди групп Ли основную роль играют простые группы Ли, которые, кроме пяти отдельных групп (которые мы здесь не будем рассматривать), сводятся к следующим сериям групп:

1° A_n группа всех комплексных матриц n-го порядка с определителем 1;

2° группа всех комплексных ортогональных матриц (обычно удобно рассматривать отдельно группу ортогональных матриц четного $2n$-го порядка (группа B_n) и отдельно группу ортогональных матриц $(2n+1)$-го нечетного порядка (группа D_n));

3° группа всех комплексных матриц, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную кососимметрическую билинейную форму* (такая форма имеется лишь в пространстве четного числа измерений $2n$) — группа C_n (число n — называется рангом группы).

Эти серии простых групп называются *классическими группами.*

Классические методы теории представлений, устанавливающие связь между представлениями конечной группы и представлениями ее нормального делителя и фактор-группы по нему, переносятся, по всей видимости, на произвольные группы Ли (см. Гельфанд и Наймарк [5] и дальнейшее развитие у Маскеу [29]).

Поэтому в проблеме описания представлений произвольных групп Ли центральное место занимает изучение представлений полупростых групп Ли.

Так как полупростая группа Ли есть прямое произведение простых групп Ли, то изучение представлений полупростой группы Ли сводится к изучению представлений простых групп Ли.

В 1914 году Картаном [26], [27] была решена задача о нахождении всех конечномерных представлений комплексных простых групп Ли**. Ни одно из этих представлений, кроме единичного, не является унитарным.

Предметом настоящей работы является перечисление всех неприводимых унитарных представлений приведенных выше классических групп. Результат оказывается в известной мере парадоксальным: беско-

---

* Группа ортогональных матриц есть группа матриц, оставляющих инвариантной сумму квадратов координат, т. е. симметрическую билинейную форму. Группы типа 2° и 3° являются, таким образом, группами, оставляющими инвариантной некоторую билинейную форму, соответственно симметрическую и кососимметрическую.

** Точнее, в работах Картана было показано, что каждое конечномерное представление этой группы определяется заданием системы целых чисел $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$. Кроме того, для каждого набора чисел $(m_1, \ldots, m_n)$ была указана конструкция для построения неприводимых представлений, определяемого числами $m_1, \ldots, m_n$. При помощи этой конструкции, однако, было бы затруднительно явно выписать представления, т. е. явно выписать матрицы, отвечающие элементам группы. Соответствующие явные формулы для инфинитезимальных представлений см. [15],[16].

нечномерные представления оказываются во многих отношениях проще конечномерных. Во всяком случае в результате исследования мы получаем единую схему, которая содержит в себе, как частный случай, как конечномерные, так и унитарные представления.

Более того, в результате исследования оказывается, что требование унитарности представления есть в известной мере неестественное требование. По существу, формулы, приведенные в этой работе, охватывают в некотором смысле все (а не только унитарные) неприводимые представления классических групп. Однако при современном состоянии функционального анализа авторы пока не видят, как можно точно сформулировать задачу нахождения „всех“ (а не только унитарных) неприводимых представлений.

Действительно, операторы представления будут в дальнейшем реализованы в виде операторов в пространстве функций. Оказывается, в этом пространстве можно ввести бесчисленное множество неэквивалентных между собой норм, для которых операторы представления ограничены. Так как определение эквивалентности представлений предполагает изоморфность пространств, в которых действуют операторы представления, то создается видимость необозримого количества различных представлений, созданная слишком тонким различением функциональных пространств.

Оказывается, что бесконечномерные представления любой из этих групп задаются n целыми числами: $m_1, \ldots, m_n$ и n комплексными числами $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Если числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — чисто мнимы, то представление унитарно. При целых $\rho_1, \ldots, \rho_n$ от представления можно отщепить конечномерную компоненту.

Перейдем к фактическому описанию представлений классических групп и, следовательно, краткому изложению содержания работы.

2. Для простоты рассмотрим сначала случай группы матриц второго порядка с определителем 1. Элементами группы $\mathfrak{G}$ являются, следовательно, матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Пространство $\mathfrak{H}$, в котором действуют операторы T_g представления, есть пространство функций $f(z)$ от комплексного переменного z. Представление определяется целым числом m и числом ρ; оператором T_g представления, соответствующего числам m и ρ, является оператор, который каждой функции $f(z)$ ставит в соответствие функцию*

$$T_g f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) |\beta z + \delta|^{m+\rho-2} (\beta z + \delta)^{-m}. \tag{2}$$

Если в пространство $\mathfrak{H}$ ввести скалярное произведение по формуле

$$(f_1, f_2) = \int\int f_1(z) \overline{f_2(z)}\, dx\, dy, \tag{3}$$

* Нам несколько удобнее писать $\rho - 2$ вместо ρ.

то при $\rho = i\rho'$ чисто мнимых операторы T_g будут, как это нетрудно проверить, унитарными и, таким образом, при чисто мнимых ρ формулы (2) и (3) определяют унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. При этом оказывается, что парам m, ρ и $-m$, $-\rho$ соответствуют эквивалентные представления. Однако есть еще одна возможность определить при помощи формулы (2) унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. Именно, если задать скалярное произведение формулой*

$$(f, f) = \int |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1)\overline{f(z_2)}\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 2, \tag{4}$$

а операторы T_g задать той же формулой (2), полагая в ней $m = 0$, ρ действительным, то мы также получим унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. Кроме указанных формул, есть лишь еще одно неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ — единичное представление, ставящее в соответствие каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ единичное линейное преобразование.

Таким образом, все неприводимые унитарные представления группы матриц второго порядка исчерпываются представлениями, задаваемыми формулой (2): 1° при любом целом n и произвольном чисто мнимом ρ; при этом скалярное произведение задается формулой (3) (основная серия неприводимых унитарных представлений); 2° $n = 0$ $0 < \rho < 2$ и скалярным произведением, задаваемым формулой (4), и 3° единичным представлением группы $\mathfrak{G}$.

Интересно отметить, что в формуле (2) содержатся также и конечномерные представления. Именно, возьмем ρ целым и таким, чтобы $m + \rho - 2$ было четным. Тогда, записав $|\beta z + \delta|^{m+\rho-2}$ в виде $(\beta z + \delta)^{\frac{m+\rho-2}{2}} \overline{(\beta z + \delta)}^{\frac{m+\rho-2}{2}}$, мы можем привести формулу (2) к виду

$$T_g f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)(\beta z + \delta)^{m_1}\overline{(\beta z + \delta)}^{m_2}, \tag{5}$$

где $m_1 = \frac{-m + \rho - 2}{2}$, $m_2 = \frac{m + \rho - 2}{2}$. В качестве пространства $\mathfrak{H}$ возьмем не все функции, а лишь совокупность многочленов от z и $\bar{z}$ степени не выше m_1 по z и степени не выше m_2 по $\bar{z}$, т. е.

$$f(z) = a_1 + a_2 z + a_1 \bar{z} + \cdots + a z^{n_1} \bar{z}^{n_2}. \tag{6}$$

Совокупность этих многочленов образует конечномерное пространство. Легко проверить, что $T_g f(z)$ преобразует многочлен $f(z)$, задаваемый формулой (6), снова в многочлен такого же вида. Мы получаем таким образом представление и, как можно доказать, все неприводимые

* При $\rho > 2$ формула (4) определяет скалярное произведение с конечным числом отрицательных квадратов (см. [6], стр. 453).

конечномерные представления группы $\mathfrak{G}$ матриц второго порядка с определителем 1.

В действительности, картина для неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$ должна была бы иметь следующий вид: формула (2) определяет представление для любого целого m и комплексного ρ. Из них при m целом и ρ чисто мнимом либо при $m = 0$ $0 < \rho < 2$* представления унитарны. Представления неприводимы при любых ρ, кроме ρ действительных целых и той же четности, что m. В этом случае от представления отщепляется конечномерное представление, и оставшееся представление снова бесконечномерно (см., например, предыдущую страницу, где отщеплены конечномерные представления) Мы ограничиваемся, однако, рассмотрением унитарных представлений для которых задача может быть точно сформулирована.

3. Перейдем теперь к описанию неприводимых унитарных представлений группы матриц n-го порядка с определителем 1. Как и для случая группы матриц второго порядка, представление задается в пространстве функций точки некоторого многообразия (точки z комплексной плоскости Z в предыдущем случае). Для того, чтобы задать представление группы $\mathfrak{G}$, мы опишем сначала многообразие Z, заменяющее комплексную плоскость Z для случая матриц второго порядка.

Определение 1. *Обозначим через Z совокупность комплексных матриц $z = \| z_{pq} \|$ n-го порядка, для которых $z_{pp} = 1$ ($p = 1, \ldots, n$) и $z_{pq} = 0$ для $p < q$.* (В случае $n = 2$ мы имеем: $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix}$, т. е. элемент из Z определяется точкой z_{21} комплексной плоскости).

В дальнейшем мы пользуемся следующим простым предложением (см. § 3):

Почти всякая матрица g может быть представлена, и притом единственным образом, в виде

$$g = kz, \tag{7}$$

где $z \in Z$, а k — матрица, для которой $k_{pq} = 0$, если $p > q$. Исключение представляют те матрицы g, для которых хоть один из миноров

$$\begin{vmatrix} g_{pp} & g_{p,p+1} & \ldots & g_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{np} & g_{n,p+1} & \ldots & g_{nn} \end{vmatrix}, \quad p = 2, 3, \ldots, n$$

обращается в нуль.

Пусть $z \in Z$ — произвольная матрица из $\mathfrak{G}$. Представим zg в виде

$$zg = kz_1 \tag{8}$$

и обозначим полученный элемент z_1 через $\overline{zg}$, т. е. $z_1 = \overline{zg}$ (элемент z

---

* При $\rho > 2$ квадратичная форма (4) недефинитна.

переведен преобразованием $\bar{g}$ в элемент z_1). Нетрудно сосчитать, что для случая матриц второго порядка преобразование от z к z_1 означает следующее: если

$$z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z' & 1\end{pmatrix},\quad z_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z_1' & 1\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad z_1=z\bar{g},$$

то $z_1'=\frac{\alpha z'+\gamma}{\beta z'+\delta}$.

Оказывается, что, как и в случае группы матриц второго порядка, представление задается следующим образом:

Пространство $\mathfrak{H}$, в котором действуют операторы T_g, состоит из функций $f(z)$, где $z\in Z$ (т. е. z определяется $\frac{n(n-1)}{2}$ числами z_{pq}, $p<q$). Операторы T_g представления задаются следующим образом:

$$T_g f(z)=f(z\bar{g})\,\alpha(z, g), \tag{9}$$

где $\alpha(z, g)$ есть фиксированная функция от z и g, характеризующая собой представление.

Для случая группы матриц второго порядка функция $\alpha(z, g)$, как это видно из формулы (2), имеет следующий вид:

$$\alpha(g, z)=|g_{12}z+g_{22}|^{m+\rho-2}\,|g_{12}z+g_{22}|^{m}$$

(мы изменим здесь обозначение и напишем $\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ вместо $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ в формуле (2)).

В общем случае произвольного n функция $\alpha(z, g)$ конструируется следующим образом:

Обозначим в разложении $zg=k_1z_1$ через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ диагональные элементы треугольной матрицы k_1. Тогда функция $\alpha(z, g)$ определяется числами $m_1, \ldots, m_n$ и $\rho_1, \ldots, \rho_n$, где $m_1, \ldots, m_n$ — целые числа, и задается формулой

$$\alpha(z, g)=|\delta_1|^{m_1+\rho_2}\delta_1^{-m_1}\,|\delta_2|^{m_2+\rho_2}\delta_2^{-m_2}\ldots|\delta_n|^{m_n+\rho_n}\delta_n^{-m_n}. \tag{10}$$

Явное выражение для $\alpha(z, g)$ через элементы матриц z и g смотри в формулах (5.26) и (5.27).

Так как рассматриваемая группа $\mathfrak{G}$ матриц имеет определитель 1, то $\delta_1\ldots\delta_n=1$; следовательно, $m_1, \ldots, m_n$ и аналогично, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ определены в формуле (10) с точностью до общего слагаемого. Поэтому мы можем считать, что

$$m_1+\cdots+m_n=0$$

и

$$\rho_1+\cdots+\rho_n=0.$$

Иногда мы будем употреблять другую нормировку: $\rho_1=m_1=0$.

Для того, чтобы окончательно задать унитарные представления, нужно еще задать скалярные произведения в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(z)$. Мы это сделаем несколько позже.

4. Для того, чтобы задать унитарные представления унимодулярной группы, мы должны в совокупности $\mathfrak{H}$ функций, введенных в предыдущем пункте, задать скалярное произведение и определить те m_k и ρ_k, для которых операторы T_g представления унитарны. При этом представляются две различных возможности. Первая из них дает так называемую основную серию представлений, вторая — дополнительные серии, которые будут описаны в п. 6 введения.

Основная серия унитарных представлений унимодулярной группы $\mathfrak{G}$ задается следующим образом. Мы рассматриваем пространство $\mathfrak{H}$ функций $f(x)$, $z \in Z$, для которых существует

$$\|f\|^2 = \int |f(z)|^2 \prod_{p>q} dx_{pp} dy_{pq} \tag{11}$$

$$(z_{pq} = x_{pq} + iy_{pq} \quad \text{для} \quad p > q).$$

Каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ отвечает унитарный оператор T_g, задаваемый формулой

$$T_g f(z) = f(z\overline{g})\, \alpha(z, g), \tag{12}$$

где $\alpha(z, g)$ — фиксированная функция, определяющая представление и задаваемая формулами (10) и (12). При этом в формуле (10) числа m_k целые, а числа ρ_k — чисто мнимые. Если задать норму функций формулой (11), а T_g формулой (12), то при чисто мнимых числах ρ_k, участвующих в определении функции $\alpha(z, g)$, и только при них, представление будет унитарным. Описанные здесь представления мы называем *представлениями основной серии.*

Доказывается далее индукцией по числу n, что эти представления неприводимы. Представления основной серии описываются, таким образом, числами m_i и ρ_i. Возникает вопрос, когда два разных представления основной серии эквивалентны? Имеет место следующая теорема:

Два представления основной серии, из которых первое задано числами $m_1, \ldots, m_n$; $\rho_1, \ldots, \rho_n$, а второе числами $m'_1, \ldots, m'_n$ и $\rho'_1, \ldots, \rho'_n$, эквивалентны тогда и только тогда, когда существует подстановка s, переводящая числа m'_i в m_i и числа ρ'_i в ρ_i.

Эта теорема доказывается позже в главе V с помощью переноса теории характеров некоммутативных конечных групп на классические группы.

5. Основную серию унитарных представлений унимодулярной группы, которую мы только что ввели, удобнее иногда задавать по-другому. Поясним это на примере группы матриц второго порядка. В этом случае операторы представления задаются формулой

$$T_g f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) |\beta z + \delta|^{-n+\rho-2} (\beta z + \delta)^n.$$

В некоторых случаях эта формула неудобна тем, что преобразование на z-плоскости независимого переменного $z' = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$ определено не всюду $\left(\text{а именно, точка } z = -\frac{\delta}{\beta} \text{ не отвечает точке } z'\right)$, а также тем, что при введенном понятии интеграла

$$\int |f(z)|^2 \, dx \, dy$$

мера всей комплексной плоскости бесконечна. Очень удобно поэтому в случае комплексной плоскости с помощью стереографической проекции перейти на поверхность сферы $\tilde{u}$ и рассматривать представление в виде функций $f(\tilde{u})$ от точки $\tilde{u}$ поверхности сферы.

Опишем второй способ задания представлений, основанный на обобщении стереографической проекции для случая произвольного n. Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц порядка n с определителем 1. Имеет место следующее, легко доказываемое, предложение:

Всякая матрица $g \in \mathfrak{G}$ может быть представлена в виде

$$g = ku, \tag{13}$$

где $k = \| k_{pq} \|$ попрежнему означает треугольную матрицу, для которой $k_{pq} = 0$, если $p > q$, а $u \in \mathfrak{U}$.

В этом представлении матрица $u \in \mathfrak{G}$ определена однозначно с точностью до множителя γ, являющегося диагональной унитарной матрицей. Обозначим через $\tilde{u}$ класс матриц $\{\gamma u\}$, где u — фиксировано, а γ пробегает диагональные унитарные матрицы. Тогда в разложении $g = ku$ класс $\tilde{u}$ определен однозначно.

Совокупность всех $\tilde{u}$ обозначим через $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Посмотрим, что означает $\tilde{u}$ для случая матриц второго порядка. Унитарная матрица u второго порядка с определителем 1 имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Пусть матрица γ имеет вид $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$, где $|\gamma| = 1$. Тогда $\{\gamma u\}$ это совокупность матриц $\begin{pmatrix} \gamma\alpha & \gamma\beta \\ -\gamma^{-1}\bar{\beta} & \gamma^{-1}\bar{\alpha} \end{pmatrix}$, где α и β фиксированы, а γ пробегает все комплексные числа, для которых $|\gamma| = 1$.

Таким образом, класс $\tilde{u}$ определяется парой чисел (α, β), для которых $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, заданных с точностью до множителя γ с $|\gamma| = 1$. Легко видеть, что совокупность $\tilde{u}$ гомеоморфна поверхности сферы.

Произведем теперь для любого n следующее преобразование:

Пусть z — произвольная матрица из Z. Представим ее в виде

$$z = ku \tag{14}$$

и обозначим через $\{\gamma u\}$ класс, в котором содержится u. Тогда каждому $z \in Z$ однозначно отвечает $\tilde{u}$. Обратно, каждому $\tilde{u}$, кроме «исключительных» — заполняющих многообразие меньшей размерности, однозначно соответствует некоторый z. Эти исключительные $\tilde{u}$ для случая $n=2$ превращаются в одну точку, отвечающую бесконечно удаленной точке на плоскости Z. Для случая $n=2$ матриц второго порядка соответствие между z и $\tilde{u}$, даваемое формулой (14), превращается в стереографическую проекцию.

Преобразование g, заданное в Z: $z \to \overline{zg}$ можно перенести в $\mathfrak{A}$. Действительно, пусть $\tilde{u} \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Представим ug в виде

$$ug = ku_1.$$

Тогда переход от класса $\tilde{u}_1$ к классу $\tilde{u}$ и есть преобразование $\tilde{u}$ с помощью g. Мы будем это писать так: $\tilde{u}_1 = \widetilde{ug}$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathfrak{H}$ функций $f(\tilde{u})$ и поставим в соответствие каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ линейный оператор T_g в $\mathfrak{H}$ по формуле

$$T_g f(\tilde{u}) = f(\widetilde{ug}) \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)}, \tag{15}$$

где функция $\alpha_1(g)$ удовлетворяет соотношению

$$\alpha_1(ku) = \alpha_1(k)\alpha_1(u)$$

для любых $k \in \mathfrak{K}$ и $u \in \mathfrak{U}$ и вычисляется аналогично функции $\alpha(zg)$ в предыдущем пункте. (Вычисление $\alpha_1(g)$ см. в § 8.)

Интеграл функции в $\tilde{\mathfrak{U}}$ однозначно определяется из требования, чтобы

$$\int\limits_{\tilde{\mathfrak{U}}} f(\tilde{u}u_0)\, d\tilde{\mu}(\tilde{u}) = \int\limits_{\tilde{\mathfrak{U}}} f(\tilde{u})\, d\tilde{\mu}(\tilde{u}). \tag{16}$$

При этом, при введенной нами нормировке, интеграл от единицы, т. е. мера всего $\mathfrak{U}$ равна

$$\frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ состоит из всех функций $f(\tilde{u})$, для которых существует интеграл

$$\int |f(\tilde{u})|^2 d\mu(\tilde{u}). \tag{17}$$

Указанный в этом пункте второй способ задания основной серии представлений унимодулярной группы хорошо приспособлен к изучению связи между представлениями унимодулярной группы и подгруппой унитарных матриц*. Именно, если задано неприводимое представление $g \to T_g$ группы $\mathfrak{G}$, то, рассматривая его лишь для элементов $g \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, мы получим представление унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$. Оно не является неприводимым представлением группы $\mathfrak{U}$. Пользуясь вторым способом задания представлений основной серии, мы можем указать, на какие именно неприводимые представления подгруппы $\mathfrak{U}$ и в каком числе разлагается представление $g \to T_g$ для $g \in \mathfrak{U}$.

Для того, чтобы сформулировать результат, нам придется привести здесь способ, которым обычно описывают представления группы $\mathfrak{U}$. Пусть $u \to A_u$ — некоторое неприводимое унитарное (оно обязательно конечномерно) представление группы $\mathfrak{U}$ в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Выделим в $\mathfrak{U}$ подгруппу Γ диагональных матриц

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

где $|\gamma_k| = 1$ и, следовательно, γ_k могут быть записаны в виде $\gamma_k = e^{i\varphi_k}$. Так как матрицы $\gamma \in \Gamma$ коммутируют между собой, то коммутируют соответствующие им в представлении операторы A_γ; A_γ есть, таким образом, система унитарных, попарно перестановочных операторов в конечномерном пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда существует ортогональный базис из собственных векторов $\xi_1, \dots$ преобразований A_γ, т. е.

$$A_\gamma \xi = \lambda \xi,$$

где собственное значение λ зависит, конечно, от γ: $\lambda = \chi(\gamma)$. Так как $A_{\gamma'\gamma''} = A_{\gamma'} A_{\gamma''}$, то $\chi(\gamma'\gamma'') = \chi(\gamma')\chi(\gamma'')$. Из этого функционального уравнения легко получить, что

$$\chi(\gamma) = \gamma_1^{k_1} \gamma_2^{k_2} \dots \gamma_n^{k_n},$$

где $k_1, \dots, k_n$ — целые числа.

Вектор ξ называется *весовым вектором*, а набор чисел $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ — его *весом*.

Для случая унитарной группы с определителем 1 единственное отличие состоит в том, что $\gamma_1, \dots, \gamma_n = 1$ и, следовательно, числа $k_1, \dots, k_n$ определены с точностью до общего слагаемого. Их удобно поэтому нормировать, например, взять $k_1 = 0$.

Вернемся теперь к вопросу о разложении представления $g \to T_g$ $(g \in \mathfrak{A})$ на неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$. Пусть представление $g \to T_g$ определяется числами $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ и $(m_1, \dots, m_n)$. Тогда имеет место теорема:

Пусть T_g — представление основной серии группы $\mathfrak{G}$, определяемое числами $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ и $(m_1, \dots, m_n)$. Для того, чтобы определяемое им представление $k \to T_u$ унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$ содержало данное неприводимое представление $u \to A_u$ подгруппы $\mathfrak{U}$, необходимо и достаточно, чтобы представление $u \to A(u)$ содержало вес $(m_2, \dots, m_n)$. Можно также ответить на вопрос о том, сколько раз данное представление $u \to A_u$ встречается при разложении представления T_g на неприводимые. Оказывается, что оно содержится столько раз, сколько в пространстве $\mathfrak{H}$, в котором действует представление $u \to A_u$, имеется линейно независимых векторов с весом $(m_1, \dots, m_n)$.

Укажем, в частности, когда в пространстве $\mathfrak{H}$, в котором действуют операторы T_g, существует вектор ξ_0, инвариантный относительно опе-

---

* Подгруппа унитарных матриц характеризуется как максимальная компактная подгруппа группы унимодулярных матриц.

раторов T_u, для $u \subset \mathfrak{U}$. Оказывается, что если представление T_g определяется числами $(m_2, \ldots, m_n)$ и $\rho_2, \ldots, \rho_n$, то для этого необходимо и достаточно, чтобы $m_2 = \ldots = m_n = 0$. При этом вектор ξ_0, инвариантный относительно всех T_u, $u \in \mathfrak{U}$, определяется однозначно с точностью до множителя.

С каждой группой и ее подгруппой связаны так называемые *сферические функции*, которые мы определим ниже. Это название обусловлено тем, что для случая группы вращений сферы в трехмерном пространстве и ее подгруппы вращений относительно некоторой оси эти сферические функции превращаются в хорошо известные из анализа сферические функции. Мы не можем в этой статье подробно останавливаться на интересной общей теории сферических функций и дадим им несколько формальное определение, зато быстро ведущее к цели.

Пусть имеем унитарное представление $g \to T_g$ группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{U}$ — ее подгруппа. Если в пространстве $\mathfrak{H}$, в котором действуют операторы T_g, существует вектор ξ_0, инвариантный относительно операторов T_u, $u \in \mathfrak{U}$, т. е. $T_u \xi_0 = \xi_0$, то *зональной, сферической функцией*, связанной с данным представлением, называется функция

$$\varphi(g) = (T_g \xi_0, \xi_0). \tag{18}$$

Легко видеть, что $\varphi(gu) = \varphi(ug) = \varphi(g)$. Действительно, например,

$$\varphi(gu) = (T_{gu}\xi_0, \xi_0) = (T_g T_u \xi_0, \xi_0) = (T_g \xi_0, \xi_0) = \varphi(g). \tag{19}$$

В нашем случае $\mathfrak{G}$ — группа комплексных унимодулярных матриц, $\mathfrak{U}$ — подгруппа унитарных матриц. Мы указывали, что если $g \to T_g$ представление, для которого $m_2 = \ldots m_n = 0$, то существует, и притом с точностью до множителя, единственный вектор, инвариантный относительно T_u. Тогда зональная сферическая функция, связанная с данным представлением, удовлетворяет соотношениям $\varphi(gu) = \varphi(ug) = \varphi(g)$. Всякую матрицу можно представить в виде $g = hu$, где h — эрмитова, положительно определенная матрица, а u — унитарная, следовательно, $\varphi(g) = \varphi(hu) = \varphi(h)$. Но всякую эрмитову, положительно определенную матрицу h можно представить в виде $h = u_1^{-1} \varepsilon u_1$, где u_1 — унитарная, а ε — диагональная матрица с положительными элементами $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ по диагонали. Следовательно, $\varphi(h) = \varphi(u_1^{-1} \varepsilon u_1) = \varphi(\varepsilon)$. Итак, достаточно вычислить сферическую функцию для диагональной матрицы ε. В результате вычислений мы получаем

$$\varphi(\varepsilon) = \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1!\,2! \ldots (n-1)!}{\prod\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (\rho_q - \rho_p) \prod\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (\lambda_q^2 - \lambda_p)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{i\rho_2} & \lambda_2^{i\rho_2} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{i\rho_n} & \lambda_2^{i\rho_n} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_n} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

где в формуле (20) нужно положить $\rho_1 = 0$.

Формула (20) получается в результате непосредственного вычисления выражения $(T_g\xi_0, \xi_0)$. Так как векторы ξ пространства $\mathfrak{H}$ — это функции, а скалярное произведение записывается интегралом, то вычисление $(T_g\xi_0, \xi_0)$ сводится к вычислению некоторого интеграла. Сама методика вычисления этого интеграла довольно поучительна и используется далее еще раз по другому поводу (глава VI), правда, в более сложной обстановке.

6. В п. 4 мы рассмотрели так называемую основную серию неприводимых представлений унимодулярной группы $\mathfrak{G}$. Эти представления мы реализовали как представления в пространстве функций матрицы z, т. е. функций $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных переменных. Однако этим не исчерпываются все представления группы $\mathfrak{G}$. В этом и следующих пунктах мы опишем кратко так называемые *вырожденные и дополнительные серии* неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$. Грубо говоря, вырожденные серии — это представления, реализованные в пространстве функций не от $\frac{n(n-1)}{2}$ переменных, а от меньшего числа переменных. Самым „вырожденным" из представлений является единичное представление группы. Перейдем к описанию представлений вырожденной серии.

Представим число n в виде суммы некоторого числа r, $(r \leqslant n)$ слагаемых

$$n = n_1 + \cdots + n_r. \tag{21}$$

Обозначим через g_{pq} матрицу, состоящую из n_p строк и n_q столбцов. Произвольную матрицу n-го порядка $g \in \mathfrak{G}$ мы можем считать составленной из матриц g_{pq}.

Введем теперь подгруппу Z (которую точнее следовало бы обозначать $Z_{n_1, \ldots n_r}$), состоящую из всех матриц $z = \|z_{pq}\|$, для которых

$$z_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p < q \quad \text{и} \quad z_{pp} = 1, p, \quad q = 1, \ldots, r. \tag{22}$$

Здесь 0 обозначает нулевую матрицу с n_p строками и n_q столбцами, а 1 — единичную матрицу порядка n_p. Таким образом, матрица $z \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$ зависит уже не от $\frac{n(n-1)}{2}$, а от меньшего числа параметров. Имеет место следующее простое предложение:

Почти каждый элемент $g \in \mathfrak{G}$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$g = kz, \tag{23}$$

где $z \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$, k — матрица, составленная из матриц k_{pq}, $k = \|k_{pq}\|$, для которой $k_{pq} = 0$, если $p > q$. Исключение представляют лишь те g, для которых обращается в нуль хоть один из угловых миноров порядка $n_p + \cdots + n_r$, $p = 2, 3, \ldots, r$ (миноры отсчитываются от правого нижнего угла).

Зададим теперь, как элемент $g \in \mathfrak{G}$ преобразует точки $z \in Z$. Представим zg в виде

$$zg = k_1 z_1 \tag{24}$$

и введем обозначение: $z_1 = \overline{zg}$ (z_1 получается из z преобразованием с помощью элемента g). Рассмотрим теперь пространство $\mathfrak{H}$ функций $f(z)$, для которых существует

$$\|f\|^2 = \int |f(z)|^2 \prod_{p>q} d\mu(z_{pq}) \tag{25}$$

($d\mu(z_{pq})$ обозначает произведение дифференциалов действительных и мнимых частей чисел, входящих в состав матрицы z_{pq}).

Зададим теперь представление $g \to T_g$ в пространстве $\mathfrak{H}$ следующим образом:

Положим

$$T_g f(z) = f(\overline{zg})\, \alpha(z, g). \tag{26}$$

Чтобы окончательно задать представление, достаточно задать фиксированную функцию $\alpha(z, g)$. При этом разные представления получаются за счет различных выборов функции $\alpha(z, g)$. Мы напишем сейчас формулу для $\alpha(z, g)$. Обозначим через Λ_p определители матриц k_{pp}, входящих в состав матрицы k_1 разложения

$$zg = k_1 z_1.$$

Тогда

$$\alpha(z, g) = |\Lambda_2|^{m_2+\rho_2-(n_1+n_2)} \Lambda_2^{-m_2} \times$$
$$\times |\Lambda_3|^{m_3+\rho_3-(n_1+2n_2+n_3)} \Lambda_3^{-m_3} \ldots |\Lambda_r|^{m_r+\rho_r-(n_1+2n_2+\cdots+2n_{r-1}+n_r)} \Lambda_r^{-m_r},$$

где $m_2, \ldots, m_r$ — целые числа, а $\rho_2, \ldots, \rho_r$ — чисто мнимые. Таким образом, серия, определяемая разбиением $n = n_1 + \cdots + n_r$, состоит из унитарных представлений, определяемых целыми числами $(m_2, \ldots, m_r)$ и чисто мнимыми числами $(\rho_2, \ldots, \rho_r)$.

Заметим, что если $r = n$ и $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$, то представление превращается в основную невырожденную серию унитарных представлений, описанных в п. 4. При всех других разбиениях мы получаем вырожденную серию. Самым вырожденным является единичное представление. Оно формально содержится в этой схеме при $r = 1$ и $n = n_1$. Следующей по степени вырожденности является серия с $r = 2$ и $n = (n-1) + 1$. Представления в этой серии реализуются в виде операторов в пространстве функции $f(z_1, \ldots, z_{n-1})$ с интегрируемым квадратом от $n-1$ комплексного переменного $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Оператор T_g задается формулой

$$T_g f(z_i) = f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jk} + g_{nk}}{\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn}}\right) \left|\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn}\right|^{m+\rho-n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn}\right)^{-m}. \tag{27}$$

Таким образом, в этом случае $\underline{z}$ определяется $n-1$ комплексным числом, а преобразование $z \to zg$ есть проективное преобразование в $n-1$-мерном проективном пространстве.

Относительно вырожденных серий также верна теорема:

Все представления вырожденной серии неприводимы.

Укажем также, что представления, отвечающие разбиению $n = n_1 + \dots + n_r$, не дают новых (неэквивалентных) представлений по сравнению с разбиением $n = n'_1 + \dots + n'_r$, где $n'_1, \dots, n'_r$ — некоторая перестановка чисел $n_1, \dots, n_r$.

Введенные здесь представления мы назовем *основной серией представлений*, а именно, представления, действующие в пространстве функций от $\frac{n(n-1)}{2}$ переменных (п. 4 введения) — *основной невырожденной* и введенные в этом пункте — *основной вырожденной*.

7. Кроме перечисленных выше, есть еще один тип неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$ — так называемые *дополнительные серии представлений*.

Эта новая возможность строить унитарные представления обусловлена тем, что мы можем еще по-другому определить скалярное произведение в пространстве функций $f(z)$. (Для представлений группы матриц второго порядка это скалярное произведение задается формулой $\int |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f(z_1)\overline{f(z_2)}\, dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$, см. формулу (4).)

Укажем сейчас окончательный результат. Каждое представление строится в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_r$, элементами которого являются функции $f(z)$, где $z \in Z$, а Z — совокупность матриц $z = \| z_{pq} \|$, для которых $z_{pp} = 1$ и $z_{pq} = 0$, если $p < q$. Для того, чтобы определить скалярное произведение в пространстве функций $f(z)$, нам придется ввести несколько обозначений.

Пусть τ — фиксированное целое число. Мы будем обозначать через $\dot{z}$ матрицы z вида

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_\tau \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где I_m — единичная матрица порядка $m = n - 2\tau$, а u_i — матрицы второго порядка вида

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_i & 1 \end{pmatrix}, \quad z_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, \tau.$$

Обозначим далее через $\hat{z}$ матрицы из Z, в которых стоят нули на тех местах, на которых в матрице $\dot{z}$ стоят элементы z_i, $i = 1, \dots, \tau$. Нетрудно показать, что всякую матрицу z можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$z = \dot{z}\hat{z}. \tag{29}$$

Таким образом, функцию $f(z)$ мы можем представить как функцию от $\dot{z}$ и $\hat{z}$, т. е. $f(z) = f(\hat{z}, z) = f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$.

Определим скалярное произведение функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ следующим образом:

$$(f_1, f_2) = \\ = \int \prod_{p=1}^{\tau} |z'_p - z''_p|^{-2+2\sigma_p} f_1(\hat{z}, z'_1, \ldots z'_\tau) \overline{f_2(\hat{z}, z''_1, \ldots, z''_\tau)}\, d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(\hat{z}), \tag{30}$$

где $d\mu(\hat{z})$ — произведение дифференциальных вещественных и мнимых частей элементов, входящих в состав матрицы $\hat{z}$, и аналогичный смысл имеют другие дифференциалы. Числа σ_p, входящие в определение скалярного произведения, фиксированы и удовлетворяют неравенствам $0 < \sigma_p < 1$, $p = 1, \ldots, \tau$.

Операторы T_g представления задаются формулами

$$T_g f(z) = f(\overline{zg})\, \alpha(zg), \tag{31}$$

где функция $\alpha(zg)$ строится следующим образом:

Пусть $zg = kz_1$ и пусть k_{pp} $(p = 1, \ldots, n)$ — диагональные элементы матрицы k. Мы обозначим их так: $\delta_1, \ldots, \delta_{n-2\tau}, \nu_1, \lambda_1, \nu_2, \lambda_2, \ldots, \nu_\tau, \lambda_\tau$, и положим $\alpha(zg) = \chi(zg)\, \beta_1(zg)$,* где

$$\left.\begin{aligned} \chi(zg) &= \prod_{p=2}^{n-2\tau} |\delta_p|^{m_p + i\rho_p} \delta_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{\tau} |\nu_p|^{m_p + i\sigma'_p + \sigma_p} \nu_p^{-m_p} |\lambda_p|^{m_p + i\sigma'_p - \sigma_p} \lambda_p^{-m_p}, \\ \beta_1(zg) &= |\delta_2|^{-2} |\delta_3|^{-4} \ldots |\delta_n|^{-2n+2}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Здесь m_p — целые числа, определяющие представления, а ρ_p и σ'_p, σ_p — действителные числа.

Дополнительные серии могут быть формально определены и при $\sigma_p > 1$. Формулы для T_g остаются в этом случае без изменения. Однако выражение для скалярного произведения, перестает быть положительно определенным. Таким образом представление унитарно, если

$$0 < \sigma_p < 1. \tag{33}$$

Мы видим, что формулы для операторов T_g представления дополнительной серии отличаются от формул для операторов T_g основной

---

* В работе далее вместо $\beta_1(zg)$ мы пишем $\beta^{-\frac{1}{2}}(zg)$.

серии тем, что в определении функции $\alpha(g)$ некоторые из чисто мнимых показателей ρ, которые имелись в основной серии, заменены комплексными показателями $i\sigma'_p \pm \sigma_p$.

Таким образом, формула $T_g f(z) = f(z\bar{g})\alpha(zg)$ при комплексных показателях ρ_n содержит в себе общую алгебраическую схему для представлений. Однако не при всяком выборе показателей в пространстве есть инвариантная относительно T_g положительно определенная квадратичная форма (которую мы берем в качестве скалярного произведения). Она имеется лишь в следующих случаях:

1° Если все m_i различны, то лишь при чисто мнимых показателях ρ.

2° Если некоторая пара чисел m (например, m_k и m_{k+1}) совпадает, то $i\rho_k$ и $i\rho_{k+1}$ комплексно сопряжены.

Первая возможность отвечает основной серии, вторая — дополнительным сериям. Совершенно аналогично невырожденной дополнительной серии вводятся вырожденные дополнительные серии.

8. Одним из важных орудий теории конечномерных представлений групп является теория характеров. Характер конечномерного представления определяется следующим образом.

Пусть задана группа $\mathfrak{G}$ и пусть $g \to A_g$ — ее конечномерное неприводимое представление. Рассмотрим след (сумму диагональных элементов) матрицы преобразования A_g и обозначим его $S(A_g)$. Тогда функция от g: $\pi(g) = S(A_g)$ называется *характером представления*. Так как $S(BA_gB^{-1}) = S(A_g)$ для любого B, то при переходе от данного представления к эквивалентному характер не изменяется и, следовательно, дает возможность узнать, действительно ли представления различны (неэквивалентны) или отличаются лишь способом задания. Заметим еще, что, так как $S(A_{g_0}A_gA_{g_0}^{-1}) = S(A_g)$, то характер $\pi(g)$ обладает следующим свойством для любого g

$$\pi(g_0 g g_0^{-1}) = \pi(g). \tag{34}$$

Попробуем перенести понятие характера представления на случай бесконечномерных унитарных представлений унимодулярной группы $\mathfrak{G}$.

Заметим, что унитарный оператор представления $g \to T_g$ определен в бесконечномерном пространстве и, вообще говоря, следа не имеет. Например, если $g = e$, то $T_g = E$, сумма же диагональных элементов единичного оператора равна $+\infty$. Для того, чтобы придать смысл выражению $S(T_g)$, мы применяем своеобразный метод суммирования, который состоит в следующем. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную функцию $x(g)$, равную нулю вне компактного множества на $\mathfrak{G}$. Рассмотрим далее $\int x(g)\,T_g d\mu(g)$, где $\int \ldots d\mu(g)$ означает, что интегрирование производится по параметрам унимодулярной группы $\mathfrak{G}$.

Оказывается, что имеет место следующее замечательное обстоятельство:

Оператор

$$K = \int x(g) T_g \, d\mu(g) \tag{35}$$

является вполне непрерывным. Более того, оператор K задается ядром $K(z_1, z_2)$, которое является ядром Гильберта-Шмидта, т. е. существует $\int |K(z_1, z_2)|^2 d\mu(z_1) \, d\mu(z_2)$. Тогда можно определить след оператора K:

$$S(K) = \int K(z, z) \, d\mu(z).$$

Если воспользоваться формулой (25), то можно доказать, что $S(K)$ имеет вид

$$S(K) = \int x(g) \pi(g) \, d\mu(g). \tag{36}$$

Функцию $\pi(g)$ мы назовем *характером представления* $x \to T_g$. Эта функция $\pi(g)$ обладает всеми свойствами характеров, например:

1° Функции $\pi(g)$ совпадают для двух представлений тогда и только тогда, когда эти представления эквивалентны;

2° $\pi(g_0^{-1} g g_0) = \pi(g)$ и т. д.

Функцию $\pi(g)$ можно вычислить. Прежде чем выписать результат, заметим, что так как $\pi(g_0^{-1} g g_0) = \pi(g)$, то для матрицы g с различными собственными значениями $\pi(g)$ зависит лишь от собственных значений матрицы $g \in \mathfrak{G}$, заданных с точностью до порядка. Обозначим совокупность этих собственных значений через $\delta_1, \ldots, \delta_n$; положим $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, и введем функцию

$$\chi(\delta) = |\delta_1|^{-m_1+\rho_1} \delta_1^{m_1} |\delta_2|^{-m_2+\rho_2} \delta_2^{m_2} \ldots |\delta_n|^{-m_n+\rho_n} \delta_n^{-m_n}, \tag{37}$$

где $m_1, \ldots, m_n$, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — числа, определяющие представление $g \to T_g$ основной серии (как мы уже говорили, при этом $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — чисто мнимые). Тогда имеет место следующая формула

$$\pi(g) = \frac{\Sigma \chi_s(\delta)}{\prod\limits_{i<k} |\delta_i - \delta_k|^2}, \tag{38}$$

где сумма распространена по всем $n!$ перестановкам s чисел $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Заметим, что если два собственных значения матрицы g совпадают, то $\pi(g)$ не определено. (В частности, $\pi(e) = +\infty$, что естественно, так как след единичного оператора E равен $+\infty$).

Исключительная по своей простоте формула (38) приводит нас к следующему важному результату:

Два представления основной серии эквивалентны тогда и только тогда, когда числа $(m_1, \ldots, m_n)$, $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ *первого представления* *можно некоторой перестановкой перевести в соответствующие числа второго представления.*

След $\pi(g)$ для представления дополнительной серии получается по той же формуле (38), но в определении функции $\chi(\delta)$ нужно взять те числа m_l и ρ_i, которые определяют представление дополнительной серии. Это снова показывает, что естественно также рассматривать неунитарные представления, соответствующие комплексным значениям чисел; эти представления также должны иметь след, определенный той же формулой (38).

Аналогично формулам для невырожденных серий можно получить формулы для следа в вырожденных сериях.

Формулы для следов представлений проливают также свет на связи между невырожденными представлениями и вырожденными. Мы не будем описывать эту связь в общем виде, а ограничимся лишь случаем группы матриц второго порядка.

Для случая представлений унимодулярной группы матриц второго порядка мы имеем лишь одно вырожденное представление, а именно единичное представление, след которого есть функция $\pi_0(g)$, тождественно равная единице.

След основной серии представлений группы матриц второго порядка дается формулой

$$\pi(g)=\frac{|\lambda|^{n+i\rho}\lambda^{-n}+|\lambda|^{-n-i\rho}\lambda^{n}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^{2}}, \tag{39}$$

где λ и λ^{-1} — собственные значения матрицы g ($\operatorname{Det} g=1$). Числа n и ρ — это числа, определяющие представление. В случае представления дополнительной серии, которое в такой записи определено для $n=0$, $0<\rho_1<2$, след задается формулой

$$\pi(g)=\frac{|\lambda|^{\rho_1}+|\lambda|^{-\rho_1}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^{2}}, \tag{40}$$

которая получается из формулы (39) при $m=0$ аналитическим продолжением по ρ.

Единственным вырожденным представлением в случае группы матриц второго порядка является единичное представление. Его след задается, естественно, формулой

$$\pi(g)\equiv 1.$$

Можно показать, что при $\rho\to 2$ представление дополнительной серии стремится к приводимому представлению, именно к прямой сумме единичного представления и представления основной серии, отвечающего $m=2$, $\rho=0$. Это можно усмотреть и из формулы для следов.

Действительно, при $\rho_1 = 2$ след (40) дополнительной серии стремится к

$$\frac{|\lambda|^2 + |\lambda|^{-2}}{|\lambda - \lambda^{-1}|^2}.$$

Напишем следующее тождество

$$\frac{|\lambda|^2 + |\lambda|^{-2}}{|\lambda - \lambda^{-1}|^2} = 1 + \frac{|\lambda|^2 \lambda^{-2} + |\lambda|^{-2} \lambda^2}{|\lambda - \lambda^{-1}|^2}. \tag{41}$$

В правой части (41) первое слагаемое — след единичного представления, второе — след представления основной серии при $\rho = 2$, $m = 2$. Оказывается, что для представлений группы любого порядка положение такое же. Именно, мы уже говорили, что дополнительные серии определены для случая, когда параметры (см. формулу (32)) удовлетворяют неравенствам (33). Если же некоторые из σ_k стремятся к пределу так, что неравенства переходят в равенства, то представление стремится к приводимому представлению, именно к прямой сумме представлений невырожденной и вырожденной серии.

Можно также показать, что при некоторых значениях комплексных параметров, входящих в состав функции $\chi(\delta)$, от представления (уже не унитарного) отщепляются конечномерные представления данной группы.

9. Переходим к рассмотрению аналога интеграла Фурье, связанного с представлением унимодулярной группы.

Рассмотрим на группе $\mathfrak{G}$ функцию $f(g)$, равную нулю вне некоторого компактного множества и имеющую достаточное число производных. Пусть $g \to T_g$ — неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим оператор

$$A = \int f(g)\, T_g\, d\mu(g), \tag{42}$$

где интегрирование производится по инвариантной мере в группе $\mathfrak{G}$. Задача состоит в том, чтобы, зная для любого неприводимого представления оператор A, суметь восстановить функцию $f(g)$*. Оказывается, что имеет место следующий интересный факт: *достаточно знать A лишь для представлений $g \to T_g$ основной серии.*

---

* Обычный интеграл Фурье получается, если группа $\mathfrak{G}$ есть аддитивная группа X действительных чисел. В этом случае неприводимые представления одномерны и представление задается формулой $x \to e^{itx}$, где $x \in X$, а t — фиксированное число, задающее представление. Задача состоит в том, чтобы, зная

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{itx}\, dx, \tag{43}$$

найти функцию $f(x)$. Эта задача, как известно, решается формулой обращения Фурье.

Мы указывали в предыдущем пункте, что оператор A может быть задан ядром $k(z_1, z_2)$, где $z_1, z_2 \in Z$. Ясно, что это ядро зависит еще от представления $g \to T_g$, т. е. от $m_1, \ldots, m_n$ и $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Таким образом, задача состоит в том, чтобы обратить формулу (42), т. е. выразить $f(g)$ через $K(z_1, z_2, m_k, \rho_k)$. Мы напишем сейчас лишь формулу, выражающую $f(e)$ через $K(z_1, z_2, m_k, \rho_k)$, где e — единица группы. Формула для $f(g)$ легко получается из данной сдвигом. Обозначим

$$\int K(z, z, m_k, \rho_k)\, d\mu(z) = \varphi(\chi), \tag{44}$$

где значек χ означает набор чисел m_k и ρ_k. Тогда имеет место формула

$$f(e) = \sum_{m_2, \ldots, m_n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\chi)\, \omega(\chi)\, d\rho_2 \ldots d\rho_n, \tag{45}$$

где

$$\omega(\chi) = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \prod_{p<q} [(m_p - m_q)^2 + (\rho_p - \rho_q)^2]. \tag{46}$$

Из указанной здесь формулы можно далее получить аналог теоремы Планшереля. Эта формула имеет вид

$$\int |f(g)|^2 d\mu(g) = \sum_{m_2, \ldots, m_n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} S(A_\chi^* A_\chi)\, \omega(\chi)\, d\rho_2 \ldots d\rho_n, \tag{47}$$

где A_χ—оператор, определенный формулой (42), т. е.

$$A_\chi = \int f(g)\, T_g\, d\mu(g)\ ^*,$$

$S(A_\chi^* A_\chi)$ обозначает след оператора $A_\chi^* A_\chi$.

Полученный результат показывает, что регулярное представление унимодулярной группы разлагается не на все неприводимые представления, а лишь на представления основной невырожденной серии. Аналогичное обстоятельство имеет место и для других групп, например для разрешимых. Однако в то время, как в случае разрешимых групп Ли (см., например, [5]) представления, не входящие в состав регулярного, являются в известном смысле „предельными" для тех, на которые регулярное разлагается, в случае унимодулярной группы эти „лишние" представления получаются аналитическим продолжением тех, на которые разлагается регулярное.

Методы, которыми доказываются сформулированные в этом пункте результаты, довольно поучительны. В них важную роль играет переход

---

* Оператор A_χ, зависящий от χ, т. е. набора чисел m_i, ρ_i, естественно назвать *коэффициентами Фурье* функции $f(g)$. Сравни с формулой (43) предыдущего примечания (стр. 21).

в группе унитарных матриц к специальным координатам, напоминающим, в известной мере, эллиптические координаты*.

10. Вторая часть работы посвящена исследованию неприводимых представлений других серий классических групп, а именно представлению группы ортогональных и группы симплектических матриц. То, что в первой части соответствующее исследование было проведено для случая группы унимодулярных матриц, полезно не только имеющейся с ней во второй части аналогией; мы во второй части существенно пользуемся результатами первой части.

Рассмотрим, например, группу ортогональных матриц четного порядка. Будем рассматривать эти матрицы как линейные преобразования в $2n$-мерном комплексном пространстве, оставляющие неизменной форму

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{2n} \xi_i \eta_i. \tag{48}$$

Найдем $2n$ векторов $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1, e_{-1}, \ldots, e_{-n}$, удовлетворяющих условиям

$$(e_i, e_k) = 0, \quad i \neq -k,$$

$$(e_i, e_{-i}) = 1,$$

Если координаты вектора ξ в базисе e_i $(i = -n, \ldots, n)$ обозначить через ξ_i', то (ξ, η) будет иметь вид

$$(\xi, \eta) = \sum \xi_i' \eta_{-i}'. \tag{49}$$

В новом базисе e_i $(i = -n, \ldots, n)$ наша группа будет группой матриц, оставляющих неизменной форму (49). Оказывается, что в новом базисе мы можем аналогично п. 3 ввести Z, как совокупность матриц $z = \| z_{pq} \|$, удовлетворяющих условию

$$z_{pp} = 1, \; z_{pq} = 0 \quad \text{при } p < q \tag{50}$$

и требованию, что матрица z принадлежит нашей группе. Аналогично переносятся почти все формулы и теоремы части I.

В заключение поставим следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{G}$—группа Ли, $g \to T_g$ — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим суммируемую на $\mathfrak{G}$ функцию $x(g)$ и построим оператор

$$A = \int x(g) T_g d\mu(g),$$

* Совершенно другой метод доказательства теорем этого параграфа проведен для $n = 2$ в [6] и намечен для общего случая в [11].

где интегрирование проводится по инвариантной мере. Доказать или опровергнуть, что оператор A вполне непрерывен.

Мы видим, что для случая классических групп Ли это имеет место. Нетрудно проверить, что это верно для случая представлений группы линейных преобразований прямой [5].

Тот факт, что это утверждение верно для полупростых групп Ли, приводит к тому, что для них, как вероятно вообще для групп Ли, при изучении вопроса о неприводимых унитарных представлениях, о разложении представления на неприводимые и т. д. отсутствуют осложнения теоретико-множественного характера.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ $\mathfrak{G}$

Глава I

Основная серия представлений комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$

§ 1. Конструкция представления основной серии

Задать унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ — это значит задать Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и поставить в соответствие каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ унитарный оператор T_g в $\mathfrak{H}$ так, чтобы $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$.

Линейное пространство $\mathfrak{H}$, в котором действует представление группы $\mathfrak{G}$, мы будем всюду в дальнейшем строить как пространство функций на том или ином многообразии. Каждое из таких многообразий будет таково, что группа $\mathfrak{G}$ есть группа преобразований в нем.

Сделаем несколько известных общих замечаний, относящихся к группам преобразований. Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа гомеоморфных преобразований многообразия Ξ. Мы будем писать $\xi' = \xi g$, если элемент $g \in \mathfrak{G}$ преобразует точку $\xi \in \Xi$ в точку $\xi' \in \Xi$.

Предположим, что $\mathfrak{G}$ есть транзитивная группа преобразований многообразия Ξ, т. е. что любую точку ξ можно перевести в наперед заданную точку ξ' некоторым преобразованием $g \in \mathfrak{G}$.

Возьмем фиксированную точку ξ_0 и обозначим через S совокупность всех преобразований $s \in \mathfrak{G}$, оставляющих точку ξ_0 на месте; $\xi_0 s = \xi_0 \cdot S$ называется *стационарной подгруппой точки* ξ_0.

Пусть ξ — произвольный элемент многообразия Ξ. В силу транзитивности группы $\mathfrak{G}$, существует элемент $g \in \mathfrak{G}$, такой, что $\xi_0 g = \xi$. Совокупность всех таких g при фиксированном ξ образует правый класс смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе S.

В самом деле, если g_1 и g_2 — два таких элемента группы $\mathfrak{G}$, что $\xi_0 g_1 = \xi$ и $\xi_0 g_2 = \xi$, то $\xi_0 g_2 g_1^{-1} = \xi_0$, следовательно, $g_2 g_1^{-1} \in S$. Полагая $g_2 g_1^{-1} = s$, получаем, что $g_2 = s g_1$, т. е. g_2 и g_1 принадлежат одному классу смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе S. Обратно, если элементы g_1 и g_2 принадлежат одному классу $\mathfrak{G}$ смежности по S, то они переводят ξ_0 в один и тот же элемент $\xi \in \Xi$.

Мы устанавливаем таким образом соответствие между элементами $\xi \in \Xi$ и классами смежности $\mathfrak{G}$ по S. Мы будем поэтому отождествлять ξ с соответствующими классами смежности; в частности, ξ_0 отождествляется с S. Преобразования g можно тогда трактовать, как преобразования классов ξ, которые получаются при умножении всех его элементов справа на g.

Поэтому многообразия, которые будут рассматриваться в дальнейшем, будут задаваться как пространства правых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по той или иной замечательной подгруппе S.

В этой главе роль такой подгруппы будет играть так называемая подгруппа K.

Определение 1. *Обозначим через K совокупность всех матриц $k = \| k_{pq} \| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию*

$$k_{pq} = 0 \text{ при } p > q,$$

т. е. матриц, все элементы которых, расположенные под главной диагональю, равны нулю.

Определение 2. *Обозначим через Z' многообразие всех правых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K.*

Таким образом, элементом многообразия Z' является матрица из группы $\mathfrak{G}$, заданная с точностью до множителя из K. Поэтому удобно задать „каноническую форму“ для такой матрицы, которая определялась бы классом z' единственным образом. Мы приведем в дальнейшем два конкретных способа аналитического задания элементов матрицы из класса z' путем выбора представителей в классах смежности (два способа „канонического представления“ элементов группы $\mathfrak{G}$). Каждый из этих способов приведет к своему способу описания представлений группы $\mathfrak{G}$. Однако уже сейчас мы можем наметить, как выглядит основная серия неприводимых представлений.

Как было уже сказано, пространство $\mathfrak{H}$, в котором действует представление, состоит из функций $f(z')$, где $z' \in Z'$. Рассмотрим некоторую фиксированную функцию $\alpha(z', g)$; $z' \in Z'$, $g \in \mathfrak{G}$, которая будет характеризовать представление.

Представление состоит в том, что каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ мы ставим в соответствие линейный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(z')$, задаваемый формулой:

$$T_g f(z') = f(z'g)\,\alpha(z', g); \tag{1.1}$$

$z'g$, как и ранее, означает, что точка $z' \in Z'$ преобразуется преобразованием g группы $\mathfrak{G}$. Найдем общий вид функций $\alpha(z', g)$. Для этого выведем соотношения, которым должна удовлетворять функция $\alpha(z', g)$. Именно, сравним выражения для $T_{g_1}T_{g_2}$ и $T_{g_1g_2}$. Мы имеем:

$$T_{g_1}(T_{g_2}f(z')) = T_{g_1}(f(z'g_2)\,\alpha(z', g_2)) = f(z'g_1g_2)\,\alpha(z'g_1, g_2)\,\alpha(z', g)$$

и

$$T_{g_1g_2}f(z) = f(z'g_1g_2)\,\alpha(z', g_1g_2).$$

Из условия $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$ мы получаем, что функция $\alpha(z'g)$ должна удовлетворять функциональному уравнению

$$\alpha(z', g_1g_2) = \alpha(z'g_1, g_2)\,\alpha(z', g_1). \tag{1.2}$$

Выясним, какие решения имеет уравнение (1.2). Положим

$$\alpha(e', g) = \alpha(g), \tag{1.3}$$

где e' единичный класс смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K, т. е. сама подгруппа K. Тогда $e'k = e'$ для $k \in K$. Положим в (1.2) $z' = e'$, $g_1 = k$, $g_2 = g$. Мы получим, что

$$\alpha(kg) = \alpha(g)\,\alpha(k) \tag{1.4}$$

для любых $g \in \mathfrak{G}$ и любых $k \in K$. Обратно, по каждой функции $\alpha(g)$, удовлетворяющей соотношению (1.4), можно определить и единственным образом функцию $\alpha(z', g)$, удовлетворяющую функциональному уравнению (1.2).

Действительно, пусть $g_{z_0'} \in \mathfrak{G}$ элемент, переводящий e' в z_0', т. е. $e'g_{z_0'} = z_0'$. Подставив в (1.2) $z' = e$, $g_1 = g_{z_0'}$, $g_2 = g$, имеем

$$\alpha(g_{z_0'}g) = \alpha(z_0', g)\,\alpha(g_{z_0'}),$$

т. е.

$$\alpha(z_0', g) = \frac{\alpha(g_{z_0'}g)}{\alpha(g_{z_0'})}, \tag{1.5}$$

где $g_{z_0'}$ преобразование, переводящее e' в z_0'.

Легко проверить и обратное, что если функция $\alpha(g)$ удовлетворяет соотношению (1.4), то определенная по ней формулой (1.5) функция $\alpha(z', g)$ удовлетворяет уравнению (1.2).

Для того, чтобы задать унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, нам нужно будет: 1) задать скалярное произведение функций $f(z') \in \mathfrak{H}$; 2) выяснить, при каких условиях на $\alpha(z', g)$ оператор T_g унитарный; 3) выяснить, в каких случаях функции $\alpha(z', g)$ задают эквивалентное представление и в каких нет. Ответы на эти вопросы, а также конкретные аналитические формулы для представлений будут даны в следующих параграфах этой главы.

§ 2. Некоторые подгруппы группы $\mathfrak{G}$

Аналитическое описание представлений основной серии, а также ответ на вопросы, поставленные в конце § 1, связаны с детальным рассмотрением некоторых подгрупп группы $\mathfrak{G}$.

1. Подгруппа K. Обозначим через K совокупность всех матриц $k = \| k_{pq} \| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$k_{pq} = 0 \text{ при } p > q, \tag{2.1}$$

т. е. матриц, все элементы которых, расположенные под главной диагональю, равны нулю. Определитель такой матрицы равен произведению ее диагональных элементов; следовательно, должно быть

$$k_{11} \cdot k_{22} \ldots k_{nn} = 1. \tag{2.2}$$

Очевидно, K есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

Найдем левую и правую инвариантные меры в K. Для этого возьмем за параметры в K переменные k_{pq} $(p<q)$ и k_{pp} $(p=2, \ldots, n)$ и положим $k_{pq} = u_{pq} + iv_{pq}$ $(p \leqslant q)$. Тогда левый сдвиг: $k' = k^0 k$ сводится к линейному преобразованию параметров k_{pq}, определитель Δ которого, как легко видеть, равен

$$\Delta = k_{33}^{0\,-1} \cdot k_{44}^{0\,-2} \ldots k_{nn}^{0\,2-n}.$$

Это преобразование комплексных параметров k_{pq} сводится к линейному преобразованию действительных параметров u_{pq} и v_{pq}, определитель которого равен квадрату модуля определителя соответствующего преобразования комплексных параметров *, следовательно равен

$$|\Delta|^2 = |k_{33}^0|^{-2} \cdot |k_{44}^0|^{-4} \ldots |k_{nn}^0|^{4-2n}.$$

Отсюда следует, что лево-инвариантная мера множества $E \subset K$ определяется равенством:

$$\mu_l(E) = \int_E |k_{33}|^2 |k_{44}|^4 \ldots |k_{nn}|^{2n-4} du\, dv, \tag{2.3}$$

или символически:

$$d\mu_l(k) = |k_{33}|^2 \; |k_{44}|^4 \ldots |k_{nn}|^{2n-4} du\, dv, \tag{2.3a}$$

* Мы пользуемся здесь следующим известным фактом: если $w_p = u_p + iv_p$, $p = 1, 2, \ldots, n$ аналитические функции переменных $z_p = x_p + iy_p$, то

$$\frac{D(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)} = \left| \frac{D(w_1, w_2, \ldots, w_n)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \right|^2.$$

Для $n=1$ эта формула легко следует из уравнений Коши-Римана. В общем случае она получается по индукции. Именно, если формула верна при $n = m-1$, то из равенств

$$\frac{D(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)} =$$

$$= \frac{D(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)} \; \frac{D(x_1, y_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)} =$$

$$= \frac{D(u_1, v_1)}{D(x_1, y_1)} \; \frac{D(u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)}{D(x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)} = \left| \frac{D(w_1)}{D(z_1)} \right|^2 \left| \frac{D(w_2, \ldots, w_m)}{D(z_2, \ldots, z_m)} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{D(w_1, w_2, \ldots, w_m)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_m)} \right|$$

следует ее справедливость при $n = m$.

где для краткости через du и dv обозначены произведения всех дифференциалов du_{pq} и dv_{pq} соответственно.

К этому же результату мы придем, рассматривая инфинитезимальные элементы

$$d_l k = k^{-1} dk,$$

где dk — матрица дифференциалов dk_{pq}. Эти элементы $d_l k$ инвариантны при левых сдвигах $k \to k^0 k$. Поэтому, выбирая базис в совокупности всех матриц dk и выписывая квадрат модуля определителя компонент $d_l k$ в этом базисе, мы получим дифференциал лево-инвариантной меры в группе K. Вычисляя квадрат модуля этого определителя, мы получим как раз подинтегральное выражение в (2.3).

Совершенно аналогично, рассматривая правый сдвиг $k_1 = kk^0$, найдем для право-инвариантной меры в группе K выражение:

$$\mu_r(E) = \int_E |k_{22}|^{-4} \ldots |k_{nn}|^{-2n} du\, dv, \tag{2.4}$$

или символически:

$$d\mu_r(k) = |k_{22}|^{-4} \cdot |k_{33}|^{-6} \ldots |k_{nn}|^{-2n} du\, dv. \tag{2.4a}$$

Как и выше, к этому же результату мы придем, рассматривая инфинитезимальные элементы

$$d_r k = dk \cdot k^{-1},$$

инвариантные при правых сдвигах $k \to kk^0$.

Пусть $f(k)$ — произвольная суммируемая на K функция. Через $\int f(k)\, d\mu_l(k)$ и $\int f(k)\, d\mu_r(k)$ обозначим интегралы функции $f(k)$ по всей группе K, взятые по отношению к лево-инвариантной и право-инвариантной мере соответственно. Из формул (2.3) и (2.4) тотчас же следует, что

$$\int f(kk_0)\, d\mu_l(k) = \beta(k_0^{-1}) \int f(k)\, d\mu_l(k) \tag{2.5}$$

и

$$\int f(k_0 k)\, d\mu_r(k) = \beta(k_0) \int f(k)\, d\mu_r(k), \tag{2.6}$$

где $\beta(k)$ определяется равенством:

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)} = |k_{22}|^4 \, |k_{33}|^8 \ldots |k_{nn}|^{4n-4}. \tag{2.7}$$

2. Подгруппа H. Кроме подгруппы K, полезно рассмотреть аналогичную ей подгруппу H.

Обозначим через H совокупность всех матриц $h = \| h_{pq} \| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$h_{pq} = 0 \text{ при } p < q, \tag{2.8}$$

т. е. матриц, все элементы которых, расположенные под главной диагональю, равны нулю.

Очевидно, H — подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Очевидно также, что H обладает свойствами, аналогичными тем, которые присущи K. Эти свойства можно также получить из соответствующих свойств группы K следующим образом. Обозначим через g' матрицу, которая получается из g заменой строк столбцами. Операция перехода от g к g' есть обратный автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, т. е. $(g_1g_2)' = g_2'g_1'$. Кроме того, очевидно, что эта операция переводит K в H и H в K. Следовательно, всякое множество $E \subset H$ переходит в $E' \subset K$ и лево (право)-инвариантная мера множества E в группе H совпадает, с точностью до постоянного множителя, с право (лево)-инвариантной мерой множества E' в группе K, так как инвариантная мера, с точностью до постоянного множителя, единственна.

Таким образом, в группе H

$$\mu_l(E) = \int_E |h_{22}|^{-4} |h_{33}|^{-6} \ldots |h_{nn}|^{-2n} du\, dv \tag{2.9}$$

и

$$\mu_r(E) = \int_E |h_{33}|^2 |h_{44}|^4 \ldots |h_{nn}|^{2n-4} du\, dv, \tag{2.10}$$

где через du, dv обозначены соответственно произведения всех дифференциалов переменных u_{pq} и v_{pq}, определенных равенствами $h_{pq} = u_{pq} + iv_{pq}$. Отсюда для любой суммируемой на H функции $f(h)$ имеем:

$$\int f(hh_0)\, d\mu_l(h) = \beta(h_0) \int f(h) d_l h, \tag{2.11}$$

$$\int f(h_0 h)\, d\mu_r(h) = \beta^{-1}(h_0) \int f(h)\, d_r h, \tag{2.12}$$

где

$$\beta^{-1}(h) = \frac{d\mu_l(h)}{d\mu_r(h)} = |h_{22}|^{-4} \cdot |h_{33}|^{-8} \ldots |h_{nn}|^{-4n+4}. \tag{2.13}$$

3. **Подгруппа** Z. Обозначим через Z совокупность матриц $z = \|z_{pq}\|$, удовлетворяющих условиям

$$z_{pq} = 0 \text{ при } p < q \text{ и } z_{pp} = 1. \tag{2.14}$$

Элементы группы Z будут служить в дальнейшем (см. п. 4 § 3) для описания точек многообразия Z'. Очевидно Z — подгруппа группы H. Возьмем за параметры, определяющие матрицу z, переменные $z_{pq} = x_{pq} + iy_{pq}$, $p > q$. Тогда левый или правый сдвиг в Z сводится к линейному преобразованию переменных z_{pq}, определитель которого равен 1. Отсюда следует, что в Z есть двусторонняя инвариантная мера

$$\mu(E) = \int dx\, dy, \text{ т. е. } d\mu(z) = dx\, dy, \tag{2.15}$$

где dx, dy обозначают произведения всех дифференциалов dx_{pq} и dy_{pq} соответственно.

4. Подгруппа $\mathbf{Z}$. Обозначим через $\mathbf{Z}$ совокупность тех матриц $\zeta = \|\zeta_{pq}\| \in K$, все диагональные элементы которых равны 1. Таким образом,

$$\zeta_{pq} = 0 \text{ при } p > q \text{ и } \zeta_{pp} = 1. \tag{2.16}$$

Очевидно $\mathbf{Z}$ — подгруппа группы K, следовательно и подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

Обратный автоморфизм $g \to g'$, где g' — транспонированная матрица g, переводит Z в $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}$ в Z. Поэтому в $\mathbf{Z}$ существует инвариантная мера

$$\mu(E) = \int_E d\xi\, d\eta, \quad d\mu(\zeta) = d\xi\, d\eta, \tag{2.17}$$

где $d\xi$ и $d\eta$ обозначают соответственно произведения дифференциалов переменных ξ_{pq}, η_{pq} $(p > q)$, определенных равенствами

$$\zeta_{pq} = \xi_{pq} + i\eta_{pq}, \quad p > q. \tag{2.18}$$

5. Подгруппа D. Обозначим через D совокупность всех диагональных матриц группы $\mathfrak{G}$. Таким образом, D состоит из всех матриц

$$\delta = \begin{Vmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{Vmatrix}. \tag{2.19}$$

Так как определитель δ должен быть равен единице, то

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n = 1. \tag{2.20}$$

Очевидно, группа D коммутативна; ее можно рассматривать, как прямую сумму $n-1$ мультипликативных групп всех комплексных чисел. Отсюда легко найти инвариантную меру в D. Выбрав, например, за параметры, определяющие матрицу δ, диагональные элементы $\delta_2, \dots, \delta_n$ и полагая $\delta_p = \sigma_p + i\tau_p$, найдем для инвариантной меры множества $E \subset D$ выражение:

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\sigma\, d\tau}{|\delta_2|^2 \dots |\delta_n|^2}, \qquad d\mu(\delta) = \frac{d\sigma\, d\tau}{|\delta_2|^2 \dots |\delta_n|^2}. \tag{2.21}$$

Подгруппа D есть, очевидно, пересечение групп K и H:

$$D = K \cap H. \tag{2.22}$$

§ 3. Канонические разложения; аналитическое описание многообразия Z'

Аналитическое описание многообразия Z', определенного в § 1, основано на возможности разложения элементов группы $\mathfrak{G}$ на произведение элементов рассмотренных нами подгрупп.

1. Разложение элементов группы K. Группы $\mathbf{Z}$ и D являются подгруппами группы K; поэтому всякое произведение вида $\delta\zeta$ или $\zeta\delta$, где $\zeta \in \mathbf{Z}$ и $\delta \in D$, является элементом группы K.

Обратно, всякий элемент $k \in K$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$k = \delta\zeta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in \mathbf{Z}, \tag{3.1a}$$

а также в виде

$$k = \zeta'\delta, \quad \delta \in D, \quad \zeta' \in \mathbf{Z}, \tag{3.1b}$$

причем элемент δ в обоих разложениях данного элемента k один и тот же.

В самом деле, равенство (3.1a) означает, что

$$k_{pq} = \delta_p \zeta_{pq}, \quad p > q. \tag{3.2}$$

В частности, при $p = q$, $\zeta_{pp} = 1$, так что

$$\delta_p = k_{pp}, \quad \zeta_{pq} = \frac{k_{pq}}{k_{pp}}. \tag{3.3}$$

Аналогично уравнение (3.1b) имеет единственное решение

$$\delta_p = k_{pp}, \quad \zeta'_{pq} = \frac{k_{pq}}{k_{qq}}. \tag{3.4}$$

2. Разложение элементов группы H. Аналогичные разложения мы можем получить и для элементов группы H. Всякое произведение вида δz или $z\delta$, где $z \in Z$, $\delta \in D$, есть элемент группы H, и, аналогично тому, как это сделано выше, доказывается, что всякий элемент $h \in H$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$h = \delta z, \quad \delta \in D, \quad z \in Z, \tag{3.5}$$

а также в виде

$$h = z'\delta, \quad \delta \in D, \quad z' \in Z, \tag{3.6}$$

причем элемент δ в обоих разложениях данного элемента — один и тот же.

3. Разложение элементов группы $\mathfrak{G}$

Теорема 1. *Всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$, за некоторыми исключениями, можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g = kz, \quad z \in Z, \quad k \in K. \tag{3.7}$$

Исключение будут представлять те элементы, для которых хотя бы один из миноров

$$g_m = \begin{vmatrix} g_{m,\,m} \dots g_{m,\,n} \\ \dots\dots\dots \\ g_{n,m} \dots g_{n,\,n} \end{vmatrix}, \quad m = 2, 3, \dots, n$$

обращается в нуль.

Для доказательства будем искать элемент $z \in Z$, такой, что $gz \in K$. По определению группы K, это означает, что должны обращаться в нуль все элементы матрицы gz под ее главной диагональю. Кроме того, $z_{pq} = 0$ при $p < q$, $z_{pp} = 1$. Поэтому условие $gz \in K$ эквивалентно равенствам:

$$\sum_{s=q}^{n} g_{ps} z_{sq} = 0 \qquad \text{при} \qquad p > q,$$

т. е. равенствам

$$\sum_{s=q+1}^{n} g_{ps} z_{sq} = -g_{pq}; \quad p = q+1, \dots, n. \tag{3.8}$$

При фиксированном q определитель этой системы совпадает с g_{p+1}. Поэтому, если он отличен от нуля, то (3.8) имеет вполне определенное решение относительно z_{sq}.

Таким образом, при надлежащем выборе z будет $gz = k \in K$. Отсюда $g = kz^{-1}$, что и доказывает разложение (3.7).

Аналогично можно доказать, что имеет место разложение

$$g = \zeta h \quad \zeta \in \mathbf{Z}, \quad h \in H \tag{3.9}$$

при условии, что все миноры g_m отличны от нуля.

Это разложение можно также получить из разложения (3.7), ибо, согласно пп. 1 и 2,

$$g = kz = \zeta \delta z = \zeta h. \tag{3.10}$$

Легко найти выражения для элементов k, z в формуле (3.7) через исходный элемент g.

Для этого заметим, что умножение матрицы g справа на z сводится к прибавлению к каждому столбцу матрицы g линейной комбинации столбцов с бо́льшими номерами. Поэтому при таком умножении остаются инвариантными все те миноры матрицы g, которые вместе с каждым столбцом g содержат все столбцы с бо́льшими номерами. В частности, минор g_m должен быть равен соответствующему минору матрицы k в разложении (3.7), т. е.

$$g_m = \begin{vmatrix} k_{mm} & k_{m,\,m+1} & \dots & k_{mn} \\ 0 & k_{m+1,\,m+1} & \dots & k_{m+1,n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} = k_{mm} k_{m+1,\,m+1} \dots k_{nn}, \tag{3.11}$$

откуда сразу следует, что

$$k_{pp} = \frac{g_p}{g_{p+1}}. \tag{3.12}$$

Обозначим через $\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$ минор матрицы g, составленный из элементов с номерами строк $p_1, \dots, p_m$ и столбцов $q_1, \dots, q_m$. В силу только что сказанного, минор $\begin{pmatrix} p & q+1 \dots n \\ q & q+1 \dots n \end{pmatrix}$, $p<q$ должен быть равен соответствующему минору матрицы k в разложении (3.7). Таким образом,

$$\begin{pmatrix} p & q+1 & \dots & n \\ q & q+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k_{pq} & k_{q+1,\,q+1} & \dots & k_{nq} \\ 0 & k_{q+1,\,q+1} & \dots & k_{q+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= k_{pq}\, k_{q+1,\,q+1}\, k_{q+3,\,q+2} \dots k_{nn} = k_{pq}\, g_{q+1},$$

откуда и следует, что

$$k_{pq} = \frac{\begin{pmatrix} p & q+1 & \dots & n \\ q & q+1 & \dots & n \end{pmatrix}}{g_{q+1}}, \quad p<q. \tag{3.13}$$

Наиболее краткий способ нахождения элементов z_{pq} матрицы z состоит в следующем:

Аналогично предыдущему из равенства минора $\begin{pmatrix} p & p+1 \dots n \\ q & p+1 \dots n \end{pmatrix}$, $p>q$, соответствующему минору матрицы h в разложении (3.9), находим:

$$h_{pp} = \frac{g_p}{g_{p+1}}, \quad h_{pq} = \frac{\begin{pmatrix} p & p+1 \dots & n \\ q & p+1 \dots & n \end{pmatrix}}{g_{p+1}}. \tag{3.14}$$

Чтобы получить теперь выражение для z_{pq}, запишем матрицу h в разложении (3.9) в виде $h = \delta z$; полагая $\zeta\delta = k$, мы получим равенство: $g = \zeta h = \zeta\delta z = kz$, совпадающее с разложением (3.7). Отсюда и из формулы (3.14) следует, что

$$\delta_p = h_{pp} = \frac{g_p}{g_{p+1}} \quad \text{и} \quad z = \delta^{-1} h,$$

так что

$$z_{pq} = \delta_p^{-1} h_{pq} = \frac{g_{p+1}}{g_p} \cdot \frac{\begin{pmatrix} p & p+1 \dots & n \\ q & p+1 \dots & n \end{pmatrix}}{g_{p+1}} = \frac{\begin{pmatrix} p & p+1 & \dots & n \\ q & p+1 & \dots & n \end{pmatrix}}{g_p}, p>q. \tag{3.15}$$

Аналогично, из равенства $k = \zeta\delta$ следует:

$$\zeta_{pq} = \frac{\begin{pmatrix} p & q+1 & \dots & n \\ q & q+1 & \dots & n \end{pmatrix}}{g_q}, \; p<q. \tag{3.15a}$$

4. Аналитическое описание многообразия Z'. Напомним, что многообразие Z' есть совокупность правых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K. Разложение $g = kz$, полученное в п. 3, дает теперь возможность аналитически описать это многообразие. Именно, если $g = kz$, то в классе z', определяемом элементом g, имеется один и только один элемент $z \in Z$. Мы отождествляем тогда z' с z. Тем самым Z сделается подпространством пространства Z'. Класс z' не содержит элемента $z \in Z$ лишь в том случае, когда один из миноров g_m матрицы $g \in z'$ обращается в нуль. Обращение в нуль g_m сохраняется при правом умножении на любой элемент k группы K; следовательно, равенство нулю минора g_m есть соотношение между параметрами, определяющими класс. Поэтому классы z', не содержащие элементов из Z, образуют в Z' многообразие низшей размерности.

Итак, с точностью до многообразия низшей размерности Z совпадает с Z'.

Исключительные классы z', не содержащие z, играют, очевидно, роль бесконечно удаленных элементов группы Z.

Преобразования $\bar{g}$ можно рассматривать, как преобразования в Z и писать $z\bar{g}$ вместо $z'g$, но только элемент $z\bar{g}$ определен не для всех, а для почти всех $z \in Z$.

§ 4. Интегральные соотношения

В этом параграфе мы выведем некоторые простые соотношения между интегралами. Собственно говоря, в этой главе мы непосредственно используем лишь одно соотношение — а именно преобразование интеграла при подстановке $z \to z\bar{g}$ (соотношение IV этого параграфа). Однако, так как в дальнейшем нам нужны будут и другие интегральные соотношения, то более простые из них мы приводим в этом параграфе, тем более, что с их помощью нужное нам соотношение IV выводится короче всего. Лишь более сложные интегральные соотношения мы приведем там, где они понадобятся (см. гл. II, § 7 и т. д.).

1. Интегральные соотношения на группе K. Рассмотрим функцию $f(k)$, суммируемую на группе K. Так как всякий элемент $k \in K$ можно единственным образом представить в виде $k = \delta\zeta$, то $f(k) = f(\delta\zeta)$ есть функция от $\delta \in D$ и $\zeta \in Z$.

Выведем формулу, которая сводит интегрирование по группе K к повторному интегрированию по группам D и Z. Для этой цели перейдем к параметрам, определяющим матрицы k, ζ и δ. Положим

$$k_{pq} = u_{pq} + iv_{pq}\,(p \leqslant q), \quad \zeta_{pq} = \xi_{pq} + i\eta_{pq}, \quad \delta_p = \sigma_p + i\tau_p\,(p > 1)$$

соответственно. Тогда равенство $k = \delta\zeta$ означает:

$$k_{pp} = \delta_p \quad (p > 1), \quad k_q = \delta_p \zeta_{pq}, \quad p < q.$$

Легко видеть, что якобиан соответствующего преобразования от переменных u_{pq}, v_{pq} к ξ_{pq}, η_{pq}, σ_p, τ_p равен

$$|\delta_1^{n-1}\delta_2^{n-2}\ldots\delta_{n-1}|^2 = |\delta_2|^{-2}|\delta_3|^{-4}\ldots|\delta_{n-1}|^{-2n+4}|\delta_n|^{-2n+2}.$$

Поэтому, вспоминая формулы (2.3*a*), (2.17), (2.21) для мер в рассматриваемых группах и пользуясь теоремой Фубини, имеем*:

$$\int f(k)\,d\mu_l(k) = \int_K f(k)\,|k_{33}|^2|k_{44}|^4\ldots|k_{nn}|^{2n-4}\,du\,dv =$$

$$= \int f(\delta\zeta)\,|\delta_3|^2|\delta_4|^4\ldots|\delta_n|^{2n-4}|\delta_2|^{-2}|\delta_3|^{-4}\ldots|\delta_n|^{-2n+2}\,d\xi\,d\eta\,d\sigma\,d\tau =$$

$$= \int d\xi\,d\eta\int f(\delta\eta)\,|\delta_2|^{-2}|\delta_3|^{-2}\ldots|\delta_n|^{-2}\,d\sigma\,d\tau = \int d\mu(\zeta)\int f(\delta\zeta)\,d\mu(\delta).$$

Аналогично можно показать, что

$$\int f(k)\,d\mu_r(k) = \int d\mu(\zeta)\int f(\zeta\delta)\,d\mu(\delta).$$

Таким образом:

I. *Имеют место формулы*

$$\int f(k)\,d\mu_l(k) = \int d\mu(\zeta)\int f(\delta\zeta)\,d\mu(\delta), \tag{4.1}$$

$$\int f(k)\,d\mu_r(k) = \int d\mu(\zeta)\int f(\zeta\delta)\,d\mu(\delta). \tag{4.2}$$

2. Интегральные соотношения на группе *H*. Совершенно аналогичные соотношения имеют место на группе H. Именно:

$$\int f(h)\,d\mu_l(h) = \int d\mu(z)\int f(\delta z)\,d\mu(\delta) \tag{4.3}$$

и

$$\int f(h)\,d\mu_r(h) = \int d\mu(z)\int f(z\delta)\,d\mu(\delta). \tag{4.4}$$

3. Интегральные соотношения на группе $\mathfrak{G}$. Пусть $f(g)$ — функция, суммируемая на $\mathfrak{G}$. Согласно теореме 1, п. 3, § 3 мы можем положить $g = kz$; следовательно, $f(g) = f(kz)$ есть функция от k и z. Исключение представляют лишь те матрицы $g \in \mathfrak{G}$, для которых хотя бы один из миноров

$$g_m = \begin{vmatrix} g_{mm} & \cdots & g_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{nm} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

равен нулю. Следовательно, эти „исключительные“ матрицы g образуют в $\mathfrak{G}$ многообразие низшей размерности и поэтому меры нуль относительно инвариантной меры в $\mathfrak{G}$. Для сведения интеграла по $\mathfrak{G}$ к повтор-

* Здесь и в дальнейшем, если не оговорено особо, каждый из интегралов рассматривается по всей группе, по которой ведется интегрирование.

ному интегралу по K и Z остается найти выражение в параметрах для инвариантной меры в $\mathfrak{G}$. Это выражение хорошо известно, однако ради полноты изложения приведем здесь его вывод.

Выберем за параметры, определяющие матрицу g, все элементы $g_{pq}=\alpha_{pq}+i\beta_{pq}$, кроме элемента g_{11}. При правом сдвиге $g'=gg_0$ параметры g_{pq} преобразуются по формулам:

$$g'_{pq}=\sum_{s=1}^{n} g_{ps}\,g^0_{sq},\qquad \left.\begin{array}{lll} q=2,\ldots,n & \text{при} & p=1,\\ q=1,\ldots,n & \text{при} & p>1. \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

Якобиан соответствующего преобразования параметров α_{pq}, β_{pq}, как легко видеть, равен квадрату модуля определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{12}}\,g^0_{12}+g^0_{22} & \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{12}}\,g^0_{13}+g^0_{23} & \ldots & \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{12}}\,g^0_{1n}+g^0_{2n} \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{13}}\,g^0_{12}+g^0_{32} & \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{13}}\,g^0_{13}+g^0_{33} & \ldots & \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{13}}\,g^0_{1n}+g^0_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{1n}}\,g^0_{12}+g^0_{n2} & \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{1n}}\,g^0_{13}+g^0_{n3} & \ldots & \frac{\partial g_{11}}{\partial g_{1n}}\,g^0_{1n}+g^0_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

С другой стороны, обозначая через A_{pq} алгебраическое дополнение элемента g_{pq} в g, имеем:

$$A_{11}g_{11}+A_{12}g_{12}+\cdots+A_{1n}g_{1n}=1;$$

откуда

$$g_{11}=1-\frac{A_{12}}{A_{11}}\,g_{12}-\cdots-\frac{A_{1n}}{A_{11}}\,g_{1n} \tag{4.7}$$

и

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial g_{1q}}=-\frac{A_{1q}}{A_{11}},\quad q=2,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Подставляя эти выражения в определитель (4.6) и разлагая его на сумму определителей, получим:

$$\Delta=\frac{1}{A_{11}}\left\{A_{11}\begin{vmatrix} g^0_{22}\,g^0_{23}\cdots g^0_{2n}\\ g^0_{32}\,g^0_{33}\cdots g^0_{3n}\\ \ldots\ldots\\ g^0_{n2}\,g^0_{n3}\cdots g^0_{nn}\end{vmatrix}-g^0_{13}\begin{vmatrix} A_{12}\,g^0_{23}\cdots g^0_{2n}\\ A_{13}\,g^0_{33}\cdots g^0_{3n}\\ \ldots\ldots\\ A_{1n}\,g^0_{n3}\cdots g^0_{nn}\end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-\cdots-g^0_{1n}\begin{vmatrix} g^0_{22}\,g^0_{23}\cdots g^0_{2,\,n-1}\,A_{12}\\ g^0_{32}\,g^0_{33}\cdots g^0_{3,\,n-1}\,A_{13}\\ \ldots\ldots\ldots\\ g^0_{n2}\,g^0_{n3}\cdots g^0_{n,\,n-1}\,A_{1n}\end{vmatrix}\right\} \tag{4.9}$$

Разлагая определители в формуле (4.9) по элементам столбца $A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1n}$, придем к равенству:

$$\Delta=\frac{1}{A_{11}}\left(A_{11}A^0_{11}+A_{12}A^0_{12}+\cdots+A_{1n}A^0_{1n}\right). \tag{4.10}$$

Но выражение, стоящее в скобках справа в равенстве (4.10), есть не что иное, как минор A'_{11} элемента g'_{11} в преобразованной матрице $g' = gg_0$. Таким образом, $\Delta = \frac{A_{11}'}{A_{11}}$; следовательно, якобиан преобразования (4.5) равен

$$|\Delta|^2 = \frac{|A'_{11}|^2}{|A_{11}|^2}.$$

Поэтому:

II. *Инвариантная мера в группе $\mathfrak{G}$ множества $E \subset \mathfrak{G}$ определяется формулой*

$$\mu(E) = \int\limits_E \frac{d\alpha\, d\beta}{|A_{11}|^2}, \tag{4.11}$$

где $d\alpha$ и $d\beta$ обозначают произведения всех дифференциалов переменных α_{pq} и β_{pq} соответственно ($g_{pq} = \alpha_{pq} + i\beta_{pq}$), при этом за независимые переменные мы принимаем все g_{pq} кроме g_{11}.

Это же выражение (4.11) для инвариантной меры можно получить, рассматривая инфинитезимальные элементы $d_l g = g^{-1} dg$ или $d_r g = dg_1 g^{-1}$.

Перейдем теперь к выводу интегрального соотношения на группе $\mathfrak{G}$. Так как почти всякий элемент группы $\mathfrak{G}$ можно записать в виде $g = kz$, то интегрирование по $\mathfrak{G}$ можно свести к интегрированию по K и по Z. Для того, чтобы получить соответствующую формулу, вычислим якобиан преобразования $g = kz$ от g к k и z.

В выбранных нами параметрах оно запишется в виде:

$$g = \sum_{s=\max(p,\,q)}^{n} k_{ps} z_{sq}. \tag{4.12}$$

Если расположить эти параметры в следующем порядке:

$$g_{nn};\ g_{n,\,n-1},\ g_{n-1,\,n-1}; \ldots; g_{n1}, \ldots, g_{21};$$

$$k_{nn}, \ldots, k_{1n};\ z_{n,\,n-1};\ k_{n-1,\,n-1}, \ldots, k_{1,\,n-1};\ z_{n,\,n-2},\ z_{n-1,\,n-1}, \ldots;$$

$$k_{22},\ k_{12};\ z_{n1},\ z_{n-1,\,1}, \ldots, z_{21},$$

то, как легко видеть, комплексный якобиан переменных g_{pq} относительно k_{pq} и z_{pq} равен произведению определителей:

$$\begin{vmatrix} k_{nn} & 0 \ldots 0 \\ & 1 \ldots 0 \\ & \ddots \\ & \quad 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{nn} & & 0 \ldots 0 \\ & k_{n-1,\,n-1} & \ldots 0 \\ & & 1 \ldots 0 \\ & & \ddots \\ & & \quad 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} k_{nn} & & 0 \ldots 0 \\ & k_{n-1,\,n-1} & \ldots 0 \\ & & \ddots \\ & & \quad k_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= k_{nn}^{n-1} k_{n-1,\,n-1}^{n-2} \cdots k_{22}.$$

Поэтому якобиан соответствующего преобразования действительных переменных равен

$$|k_{22}|^2 |k_{33}|^4 \ldots |k_{n-1,\, n-1}|^{2n-4} |k_{nn}|^{2n-2}.$$

Но тогда, в силу формул (2.3), (2.15), (3.11) и (4.11)

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(g) \frac{d\alpha\, d\beta}{|A_{11}|^2} = \int f(kz) \frac{|k_{22}|^2 |k_{33}|^4 \ldots |k_{nn}|^{2n-2}}{|g_2|^2} du\, dv\, dx\, dy =$$
$$= \int dx\, dy \int f(kz) |k_{33}|^2 |k_{44}|^4 \ldots |k_{nn}|^{2n-4} du\, dv = \int d\mu(z) \int f(kz)\, d\mu_l(k).$$

Таким образом:

III. *Для интеграла на группе* $\mathfrak{G}$ *имеет место формула:*

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu(z) \int f(kz)\, d\mu_l(k). \tag{4.13}$$

Совершенно аналогично можно получить следующую формулу:

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu(\zeta) \int f(\zeta h)\, d\mu_r(h). \tag{4.14}$$

Формулу (4.13) можно также получить без вычислений, исходя из следующих соображений: в силу формулы $f(g) = f(kz)$, функцию $f(g)$ можно рассматривать как функцию переменных k и z. Так как равенство $g = kz$ устанавливает аналитическую зависимость между параметрами g_{pq} и k_{pq}, z_{pq}, то должна иметь место формула вида

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu(z) \int f(kz)\, \omega(k, z)\, d\mu_l(k), \tag{4.15}$$

где $\omega(k, z)$ — некоторая положительная функция переменных k и z. Для ее определения заметим, что, в силу инвариантности меры $d\mu(g)$

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(k_0 g)\, d\mu(g).$$

В силу формулы (4.15) и левой инвариантности меры $d\mu_l(k)$, эта формула означает, что

$$\int d\mu(z) \int f(kz)\, \omega(k, z)\, d\mu_l(k) = \int d\mu(z) \int f(k_0 kz)\, \omega(k, z)\, d\mu_l(k) =$$
$$= \int d\mu(z) \int f(kz)\, \omega(k_0^{-1} k, z)\, d\mu_l(k).$$

Так как $f(kz)$ — произвольная суммируемая функция, то отсюда следует, что $\omega(k, z) = \omega(k_0^{-1} k, z)$, т. е. $\omega(k, z)$ не зависит от k. Аналогично, $\omega(k, z)$ не зависит от z. Следовательно, $\omega(k, z)$ есть константа и мы можем положить $\omega(k, z) = c$. Очевидно, c зависит от нормировки мер $d\mu(g)$, $d\mu_l(k)$, $d\mu(z)$. Определим константу c в том случае, когда эти меры пронормированы, как в формулах (2.3 а), (2.15), (4.11). Дифференцируя соотношение $g = kz$, имеем: $dg = dk \cdot z + k\, dz$. Умножая обе части последнего равенства соответственно на $g^{-1} = z^{-1}k^{-1}$, получим:

$$d_l g = z^{-1} d_l k z + d_l z.$$

В частности, в точке $g = e$, $d_l g = d_l k + d_l z$ или в параметрах

$$d_l g_{pq} = d_l k_{pq} \quad \text{при} \quad p \leqslant q,$$

$$d_l g_{pq} = d_l z_{pq} \quad \text{при} \quad p > q.$$

Следовательно, при нашей нормировке мер $d\mu(g) = d\mu_l(k)\,d\mu(z)$, т. е. $c = 1$. Подставляя в формулу (4.15) $\omega = 1$, получим формулу (4.13).

4. Формула преобразования меры в Z. Пользуясь интегральным соотношением (4.13), можно получить формулу, по которой преобразуется мера $d\mu(z)$ при преобразовании $z_1 = z\bar{g}$. Для этого положим в формуле (4.13)

$$x(g) = f(k)\,\varphi(z) \quad \text{при} \quad g = kz.$$

Мы получим:

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int \varphi(z)\,d\mu(z) \int f(k)\,d\mu_l(k). \tag{4.16}$$

В силу инвариантности меры $d\mu(g)$

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int x(gg_0)\,d\mu(g). \tag{4.17}$$

Найдем выражение для $x(gg_0)$ через функции $f(k)$ и $\varphi(z)$. Положим для этого

$$zg_0 = k_1 z_1, \quad \text{следовательно,} \quad z_1 = z\bar{g}_0; \tag{4.18}$$

тогда

$$gg_0 = kzg_0 = kk_1 \cdot z\bar{g}_0.$$

Отсюда

$$x(gg_0) = f(kk_1)\cdot\varphi(z\bar{g}_0).$$

Поэтому соотношение (4.17) дает:

$$\int \varphi(z)\,d\mu(z)\cdot \int f(k)\,d\mu_l(k) = \int \varphi(z\bar{g}_0)\,d\mu(z) \int f(kk_1)\,d\mu_l(k) =$$
$$= \int \varphi(z\bar{g}_0)\,\beta^{-1}(k_1)\,d\mu(z) \int f(k)\,d\mu_l(k).$$

(Последнее выражение получается в силу формулы $\int f(kk_1)\,d\mu_l(k) = \beta^{-1}(k_1) \int f(k)\,d\mu_l(k)$, см. формулу (2.5). Выражение для $\beta(k)$ дается формулой (2.7)). Отсюда

$$\int \varphi(z)\,d\mu(z) = \int \varphi(z\bar{g}_0)\,\beta^{-1}(k_1)\,d\mu(z). \tag{4.19}$$

Определим функции $\beta(k)$ на почти всей группе $\mathfrak{G}$, полагая

$$\beta(g) = \beta(k) \quad \text{при} \quad g = kz. \tag{4.20}$$

Очевидно,

$$\beta(kg) = \beta(k). \tag{4.21}$$

Тогда из (4.18) следует, что $\beta(zg_0) = \beta(k_1)$; подставляя это выражение в (4.19), приходим к следующему результату:

IV. *Если задано преобразование $z \to z\bar{g}$ многообразия Z, то имеет место формула*

$$\int \varphi(z)\, d\mu(z) = \int \varphi(z\bar{g})\, \beta^{-1}(zg)\, d\mu(z) \tag{4.22}$$

или, другими словами,

$$\frac{d\mu(z\bar{g})}{d\mu(z)} = \beta^{-1}(z, g). \tag{4.23}$$

Функция $\beta(g)$ задается сначала для элементов k формулой

$$\beta(k) = |k_{22}|^4 |k_{33}|^8 \cdots |k_{nn}|^{4n-4} \tag{4.24}$$

и затем распространяется на все g по формуле

$$\beta(g) = \beta(k), \quad \text{если} \quad g = kz. \tag{4.25}$$

Заметим, что функция $\beta(g) > 0$ и удовлетворяет уравнению $\beta(kg) = \beta(k)\beta(g)$ для любых k и g.

§ 5. Описание представлений основной серии и их неприводимость

1. Описание представлений основной серии. В § 1 мы определили операторы T_g представления основной серии; в силу формул (1.1) и (1.5), они имеют вид

$$T_g f(z') = \frac{\alpha(g_{z'} g)}{\alpha(g_{z'})} f(z'g), \tag{5.1}$$

где $\alpha(g)$ — функция на группе $\mathfrak{G}$, определяющая данное представление. Напомним, что функция $\alpha(g)$ удовлетворяет условию

$$\alpha(kg) = \alpha(k)\,\alpha(g), \tag{5.2}$$

далее $g_{z'}$ обозначает какой-нибудь элемент группы $\mathfrak{G}$, переводящий точку e' многообразия Z' в точку z' этого многообразия, т. е. любой представитель класса z'. При этом, в силу условия (5.2), выражение (5.1) не зависит от выбора элемента $g_{z'}$. В силу результатов п. 4 § 3, точки z' многообразия Z' можно изобразить элементами z группы Z. Следовательно, функции $f(z')$, заданные на Z', можно рассматривать как функции $f(z)$ на группе Z. Точке $e' \in Z'$ соответствует единичный элемент e; если поэтому точке $z' \in Z'$ соответствует элемент z группы Z, то в качестве $g_{z'}$ можно выбрать этот элемент. Поэтому формулу (5.1) можно переписать в виде

$$T_g f(z) = \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z)} f(z\bar{g}). \tag{5.3}$$

Так как в группе Z есть инвариантная мера, то мы можем определить скалярное произведение функций $f(z)$, полагая для двух таких функций f_1, f_2

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z) \overline{f_2(z)}\, d\mu(z). \tag{5.4}$$

Другими словами, мы можем определить пространство $\mathfrak{H}$ представления следующим образом:

Определение 3. *Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство всех функций $f(z)$ с суммируемым квадратом на группе Z, в котором скалярное произведение определено по формуле* (5.4).

Посмотрим, каким условиям должна удовлетворять функция $\alpha(g)$ для того, чтобы представление было унитарным. Для этого достаточно чтобы для любой функции f имело место

$$\| T_g f \| = \| f \|^2.$$

Это условие принимает в данном случае вид

$$\int \left| \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z)} \right|^2 |f(z\bar{g})|^2 d\mu(z) = \int |f(z_1)|^2 d\mu(z_1). \tag{5.5}$$

Сделаем в последнем интеграле замену $z_1 = z\bar{g}$ переменной интегрирования. В силу формулы (4.23), этот интеграл перепишется тогда в виде

$$\int |f(z\bar{g})|^2 \beta^{-1}(zg)\, d\mu(z).$$

Ввиду произвола функции $f(z)$ отсюда и из равенства (5.5) следует, что

$$\left| \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z)} \right| = \beta^{-\frac{1}{2}}(zg).$$

Полагая $z = e$, получим:

$$|\alpha(g)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(g). \tag{5.6}$$

В частности, при $g = z$

$$|\alpha(z)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(z) = 1. \tag{5.7}$$

Условие $|\alpha(g)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(g)$ является также достаточным условием унитарности. Действительно из (5.6) и (5.7) следует, что $\left| \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z)} \right| = \beta^{-\frac{1}{2}}(zg)$, т. е. что представление унитарно.

Итак, необходимым и достаточным условием унитарности представления является условие

$$|\alpha(g)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(g). \tag{5.8}$$

Покажем теперь, что, не нарушая общности, мы можем считать

$$\alpha(z) \equiv 1.$$

Действительно, в противном случае заменим каждую функцию $f(z)$ функцией $\breve{f}(z) = \alpha(z) f(z)$. В силу условия (5.7), этот переход есть унитарный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. В функциях $\breve{f}(z)$ формула (5.3) для оператора T_g примет вид

$$T_g \breve{f}(z) = \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z\bar{g})} \breve{f}(z\bar{g}). \tag{5.9}$$

Положим, далее,

$$\alpha_1(g) = \frac{\alpha(g)}{\alpha(z)} \quad \text{при} \quad g = kz. \tag{5.10}$$

Очевидно, функция $\alpha_1(g)$ также удовлетворяет условию $\alpha_1(kg) = \alpha_1(k)\alpha_1(g)$. Кроме того, $\alpha_1(z) = 1$, и

$$\alpha_1(zg) = \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z\bar{g})}.$$

Действительно, полагая $zg = k_1 z_1$, имеем: $z_1 = z\bar{g}$,

$$\alpha_1(zg) = \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z_1)} = \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z\bar{g})}.$$

Поэтому формула (5.9) принимает вид

$$T_g \breve{f}(z) = \alpha(zg) \breve{f}(z\bar{g}).$$

Итак, можно с самого начала считать, что $\alpha(z) \equiv 1$, следовательно, формула для представления имеет вид

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\bar{g}). \tag{5.11}$$

Положим теперь

$$\chi(g) = \beta^{\frac{1}{2}}(g)\alpha(g), \tag{5.12}$$

следовательно,

$$\alpha(g) = \beta^{-\frac{1}{2}}(g)\chi(g). \tag{5.13}$$

Тогда, в силу (5.6),

$$|\chi(g)| = 1. \tag{5.14}$$

Из свойств функций $\beta(g)$ и $\alpha(g)$ следует, что

$$\chi(kg) = \chi(g), \qquad \chi(\zeta) = 1, \qquad \chi(z) = 1. \tag{5.15}$$

Отсюда при $g = kz = \zeta\delta z$

$$\chi(g) = \chi(\zeta)\chi(\delta)\chi(z) = \chi(\delta). \tag{5.16}$$

Из первого из равенств (5.15) следует, что

$$\chi(\delta_1 \delta_2) = \chi(\delta_1)\chi(\delta_2); \tag{5.17}$$

в соединении с равенством $|\chi(\delta)| = 1$ (см. (5.14)) это означает, что функция $\chi(\delta)$ есть характер группы D.

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

I. *Представления основной серии определяются характерами* χ *группы* D *диагональных матриц. Представление* T_g, *соответствующее данному характеру* χ, *задается формулой*

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\overline{g}), \tag{5.18}$$

где

$$\alpha(g) = \beta^{-\frac{1}{2}}(g)\chi(g), \tag{5.19}$$

$$\chi(g) = \chi(\delta) \qquad \text{\textit{при}} \qquad g = \zeta\delta z. \tag{5.20}$$

В пространстве $\mathfrak{H}$ *функций* $f(z)$ *скалярное произведение задается формулой*

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\overline{f_2(z)}\, d\mu(z)$$

(определение функции $\beta(g)$ см. § 4, формулы (4.24) и (4.25)).

Обозначим через $\beta(g)$ какую-нибудь подстановку чисел диагональных элементов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ матрицы δ, а через δ_s — диагональную матрицу, которая получается из δ в результате применения подстановки s. Равенство $\chi_s(\delta) = \chi(\delta_s)$ определяет характер χ_s группы D. Ниже мы покажем (см. § 23), что два представления основной серии T_g и T'_g, соответствующие характерам χ и χ', эквивалентны тогда и только тогда, когда при некоторой подстановке s $\chi' = \chi_s$.

2. Формулы для представлений в параметрах. Формулу (5.18) для представления T_g можно записать подробнее, если ввести в группах Z и $\mathfrak{G}$ параметры z_{pq} $(p > q)$ и g_{pq} и воспользоваться формулами (3.12) и (3.15).

В самом деле, для нахождения элемента $z\overline{g}$ мы должны представить элемент $g^1 = zg$ в виде $zg = kz^1$. Тогда $z^1 = z\overline{g}$. Но элемент g^1 определяется по формулам

$$g^1_{pq} = \sum_{s=1}^{p-1} z_{ps} g_{sq} + g_{pq}. \tag{5.21}$$

Поэтому, применяя к g^1 формулу (3.15), мы получаем:

$$z^1_{pq} = \frac{\begin{vmatrix} g^1_{pq} & g^1_{p,\,p+1} & \cdots & g^1_{pn} \\ g^1_{p+1,\,q} & g^1_{p+1,\,p+1} & \cdots & g^1_{p+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^1_{n,\,q} & g^1_{n,\,p+1} & \cdots & g^1_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g^1_{pp} & g^1_{p,\,p+1} & \cdots & g^1_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^1_{np} & g^1_{n,\,p+1} & \cdots & g^1_{nn} \end{vmatrix}}. \tag{5.22}$$

Для нахождения функции $\alpha(zg)$ заметим прежде всего, что характер χ группы D, как характер прямой суммы $n-1$ мультипликативных групп всех комплексных чисел $\delta_2, \ldots, \delta_n$, можно представить в виде

$$\chi(\delta) = \chi_2(\delta_2)\,\chi_3(\delta_3)\ldots\chi_n(\delta_n), \tag{5.23}$$

где $\chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_n$ суть $n-1$ характеров мультипликативной группы комплексных чисел. Но каждый характер $\chi(\lambda)$ в мультипликативной группе комплексных чисел λ имеет вид:

$$\chi(\lambda) = |\lambda|^{i\rho}\left(\frac{|\lambda|}{\lambda}\right)^m = |\lambda|^{m+i\rho}\lambda^{-m},$$

где ρ — произвольное действительное число, а m — произвольное целое число. Применяя этот результат к формуле (5.23), получим для $\chi(\delta)$ выражение:

$$\chi(\delta) = |\delta_2|^{m_2+i\rho_2}\delta_2^{-m_2}\,|\delta_3|^{m_3+i\rho_3}\,\delta_3^{-m_3}\ldots|\delta_n|^{m_n+i\rho_n}\,\delta_n^{-m_n}. \tag{5.24}$$

Отсюда, в силу формул (5.19) и (2.7), для функций $\alpha(\delta)$ и $\beta(\delta)$

$$\alpha(\delta) = |\delta_2|^{m_2+i\rho_2-2}\delta_2^{-m_2}\,|\delta_3|^{m_3+i\rho_3-4}\delta_3^{-m_3}\ldots|\delta_n|^{m_n+i\rho_n-(2n-2)}\,\delta^{-m_n}. \tag{5.25}$$

Остается определить δ. Из равенства $zg = kz_1 = \zeta\delta z_1$ следует, что $\delta_p = k_{pp}$. Поэтому, применяя формулу (3.12) к матрице $g^1 = zg$, вместо g получим:

$$\delta_p = k_{pp} = \frac{g_p^1}{g_{p+1}^1},$$

где обозначено

$$g_p^1 = \begin{vmatrix} g_{pp}^1 \cdots g_{pn}^1 \\ \cdots\cdots \\ g_{np}^1 \cdots g_{nn}^1 \end{vmatrix}. \tag{5.26}$$

Подставив теперь в формулу (5.25) вместо δ_p их выражения, получим:

$$\alpha(\delta) = \left|\frac{g_2^1}{g_3^1}\right|^{m_2+i\rho_2-2}\left(\frac{g_3^1}{g_2^1}\right)^{m_2}\cdot\left|\frac{g_3^1}{g_4^1}\right|^{m_3+i\rho_3-4}\left(\frac{g_4^1}{g_3^1}\right)^{m_3}\ldots|g_n^1|^{m_n+i\rho_n-(2n-2)}(g_n^1)^{-m_n} =$$

$$= \frac{|g_2^1|^{m_2+i\rho_2-2}\,|g_3^1|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-2}\ldots|g_n^1|^{m_n-m_{n-1}+i(\rho_n-\rho_{n-1})-2}}{g_2^{1\,m_2}g_3^{1\,m_3-m_2}\ldots g_n^{1\,m_n-m_{n-1}}}. \tag{5.27}$$

Таким образом:

II. *Представления* T_g *основной серии определяются системой чисел* $\{\rho_2, \ldots, \rho_n,\ m_2, \ldots, m_n\}$, *где* $\rho_2, \ldots, \rho_n$ — *произвольные действительные, а* $m_2, \ldots, m_n$ — *произвольные целые числа. Представление*

T_g, отвечающее системе $\{\rho_2, \ldots, \rho_n, m_2, \ldots, m_n\}$, задается в параметрах формулой

$$T_g f(z_{pq}) = \frac{|g_2^1|^{m_2+i\rho_2-2} |g_3^1|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-2} \ldots |g_n^1|^{m_n-m_{n-1}+i(\rho_n-\rho_{n-1})-2}}{g_2^{1\,m_2} g_3^{1\,m_3-m_2} \ldots g_n^{1\,m_n-m_{n-1}}} f(z_{pq}^1), \tag{5.28}$$

где параметры g_{pq}^1, z_{pq}^1 и g_p^1 определяются по формулам (5.21), (5.22) *и* (5.26).

Случай $n=2$. В этом случае матрица z имеет вид:

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. определяется одним комплексным параметром z_{21}, который мы обозначим буквой z. Пространство $\mathfrak{H}$ есть поэтому пространство функций $f(z)$ с суммируемым на комплексной плоскости модулем и со скалярным произведением:

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z)\overline{f_2(z)}\, dx\, dy, \qquad (z = x + iy).$$

Из формул (5.22) и (5.26) следует, что формула (5.28) для T_g примет вид*:

$$T_g f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{m+i\rho-2} (g_{12}z + g_{22})^{-m} f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right). \tag{5.29}$$

3. Неприводимость представлений основной серии.

Теорема 2. *Все представлгния основной серии неприводимы.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}$ подгруппу группы $\mathfrak{G}$, элементами которой являются матрицы g, удовлетворяющие условию

$$g_{pn} = 0 \quad \text{для} \quad p = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.30}$$

Докажем, что T_g есть неприводимое представление группы $\mathfrak{A}$. Тем самым будет доказана неприводимость представления T_g всей группы $\mathfrak{G}$.

Доказательство мы будем вести по индукции.

Предположим, что это утверждение уже доказано для унимодулярной группы $n-1$-го порядка и докажем его для группы n-го порядка.

Обозначим через z' матрицу $n-1$-го порядка, элементами которой являются z_{pq} при $p<n$, $q<n$; тогда функцию $f(z) \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$f(z) = f(z', z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{n,n-1}), \tag{5.31}$$

причем при фиксированном z' функция f имеет суммируемый квадрат

* Случай $n=2$ подробно рассмотрен авторами в работе [6].

по отношению к $z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{n,n-1}$. Сделаем преобразование Фурье, полагая *

$$\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int f(z', z_{n1}, \ldots, z_{n,n-1}) e^{-i \operatorname{Re}(z_{n1}\bar{w}_1 + \cdots + z_{n,n-1}\bar{w}_{n-1})} dx_{n1}\, dy_{n1} \cdots$$
$$\cdots dx_{n,n-1}\, dy_{n,n-1}. \quad (5.32)$$

Это преобразование будет унитарным отображением пространства $\mathfrak{H}$ на пространство H функций $\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})|^2 d\mu(z')\, du_1\, dv_1 \cdots du_{n-1}\, dv_{n-1}, \quad (5.33)$$
$$u_p + iv_p = w_p, \qquad p = 1, \ldots n-1.$$

Поэтому все операторы представления можно рассматривать как операторы в H.

Пусть A — ограниченный оператор в H, коммутирующий со всеми операторами T_g, $g \in \mathfrak{A}$.

Группа $\mathfrak{A}$ содержит подгруппу Z, в частности, содержит все элементы $z^0 \in Z$, определяемые условиями:

$$z^0_{pq} = 0 \qquad \text{при} \qquad p < n. \quad (5.34)$$

В пространстве $\mathfrak{H}$ оператор T_{z^0} есть оператор сдвига:

$$T_{z^0} f(z) = f(zz^0). \quad (5.35)$$

С другой стороны, из условия (5.34) следует, что при сдвиге $z \to zz^0$ элементы z' остаются неизменными, а $z_{nq} \to z_{nq} + z^0_{nq}$, $q = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому формулу (5.35) можно переписать в виде:

$$T_{z^0} f(z', z_{n1}, \ldots, z_{n,n-1}) = f(z', z_{n1} + z^0_{n1}, \ldots, z_{n,n-1} + z^0_{n,n-1}). \quad (5.36)$$

Отсюда, в силу (5.32), оператор T_{z^0} в пространстве H будет иметь вид:

$$T_{z^0}\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = e^{i \operatorname{Re}(\bar{w}_1 z^0_{n1} + \cdots + \bar{w}_{n-1} z^0_{n,n-1})} \varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}). \quad (5.37)$$

Оператор A коммутирует со всеми операторами T_g, $g \in \mathfrak{A}$, следовательно, и со всеми операторами T_{z^0}, каковы бы ни были числа

---

* Преобразование Фурье функции

$$f(z) = f(x, y), \qquad (z = x + iy); \qquad \varphi(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int f(x, y) e^{i(xu + yv)} dx\, dy$$

нам удобнее записывать в виде

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int f(z) e^{i \operatorname{Re}(z\bar{w})} dx\, dy.$$

$z^0_{n1}, \ldots, z^0_{n,n-1}$; следовательно, и со всеми операторами умножения на ограниченные функции $\omega(w_1, \ldots, w_{n-1})$. Поэтому оператор A имеет вид:

$$A\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = a(w_1, \ldots, w_{n-1})\,\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}), \tag{5.38}$$

где $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ есть оператор в пространстве функций $f(z')$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |f(z')|^2 d\mu(z'), \tag{5.39}$$

определенный для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и равномерно ограниченный по отношению к этим переменным.

Рассмотрим теперь в группе $\mathfrak{A}$ подгруппу матриц, удовлетворяющих, кроме (5.30), еще условиям:

$$g_{nq} = 0 \quad \text{при} \quad q = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.40}$$

Обозначим эту подгруппу через $\mathfrak{A}^0$. Оператор A должен коммутировать со всеми операторами T_g, $g \in \mathfrak{A}^0$. Найдем эти операторы T_g. Для этого найдем сначала zg при $g \in \mathfrak{A}^0$.

Очевидно, элементами матрицы $g^1 = zg$ будут

$$g^1_{pq} = \sum_{s=1}^{p-1} z_{ps} g_{sq} + g_{pq} \quad \text{при} \quad p < n, \quad q < n, \tag{5.41}$$

$$g^1_{nq} = \sum_{s=1}^{n-1} z_{ns} g_{sq} \quad \text{при} \quad q < n, \tag{5.42}$$

$$g^1_{pn} = 0 \quad \text{при} \quad p < n, \quad g^1_{nn} = g_{nn}. \tag{5.43}$$

Поэтому, полагая $\hat{z} = z\bar{g}$, в силу (5.22), имеем:

$$\hat{z}_{pq} = \frac{\begin{vmatrix} g^1_{pq} & g^1_{p,p+1} & \cdots & g^1_{p,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^1_{n-1,q} & g^1_{n-1,p+1} & \cdots & g^1_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g^1_{pp} & g^1_{p,p+1} & \cdots & g^1_{p,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^1_{n-1,p} & g^1_{n-1,p+1} & \cdots & g^1_{n-1,n-1} \end{vmatrix}} \quad \text{при } q < p < n, \tag{5.44}$$

$$\hat{z}_{nq} = \frac{g^1_{nq}}{g^1_{nn}} = \sum_{s=1}^{n-1} z_{ns} \frac{g_{sq}}{g_{nn}} \quad \text{при } q = 1, \ldots, n-1. \tag{5.45}$$

Обозначим через g^0 матрицу $n-1$-го порядка, элементами которой являются

$$g^0_{pq} = g_{pq} \cdot c, \quad q, p < n, \tag{5.46}$$

где множитель c подобран так, что матрица g^0 унимодулярна.

Далее, положим

$$b=\frac{g_{nn}}{c}. \tag{5.47}$$

Из формул (5.44) и (5.45) следует, что при преобразовании $z\to z\overline{g}$ матрица z' переходит в $z'\overline{g}^0$, а z_{nq} переходит в $\hat{z}_{nq}$, где

$$b\hat{z}_{nq}=\sum_{s=1}^{n-1} g_{sq}^0 z_{ns}. \tag{5.48}$$

Вычислим теперь $\alpha(zg)$. Из формул (5.41), (5.42) и (5.43) следует, что главные миноры g_p^1, $p<n$, матрицы $g^1=zg$ отличаются только постоянным множителем от главных миноров $\hat{g}_p$ матрицы $n-1$-го порядка $\hat{g}=z'g^0$. Поэтому из (5.27) следует, что

$$\alpha(zg)=\left|\frac{\hat{g}_2}{\hat{g}_3}\right|^{m_2+i\rho_2-2}\left(\frac{\hat{g}_2}{\hat{g}_3}\right)^{-}\cdots\left|\frac{\hat{g}_{n-2}}{\hat{g}_{n-1}}\right|^{m_{n-2}+i\rho_{n-2}-2(n-3)}\left(\frac{\hat{g}_{n-2}}{\hat{g}_{n-1}}\right)^{-m_{n-2}}\times$$

$$\times\left|\hat{g}_{n-1}\right|^{m_{n-1}+i\rho_{n-1}-2(n-2)}\hat{g}_{n-1}^{-m_{n-1}}\cdot\left|g_{nn}\right|^{m_n+i\rho_n-2(n-1)}g_{nn}^{-m_n},$$

т. е.

$$\alpha(zg)=\alpha'(z'g^0)\cdot\alpha_0(g_{nn}), \tag{5.49}$$

где $\alpha'(z'g^0)$ — функция для группы $n-1$-го порядка, аналогичная функции $\alpha(zg)$ для группы n-го порядка, а

$$\alpha_0(g_{nn})=|g_{nn}|^{m_n+i\rho_n-2(n-1)}g_{nn}^{-mn}. \tag{5.50}$$

Таким образом, при $g\in\mathfrak{A}^0$

$$T_g f(z', z_{n1},\ldots,z_{n,n-1})=\alpha'(z'g^0)\,\alpha_0(g_{nn})f\left(z'\overline{g}^0, \hat{z}_{n1},\ldots,\hat{z}_{n,n-1}\right), \tag{5.51}$$

где $\hat{z}_{n1},\ldots,\hat{z}_{n,n-1}$ определяются формулой (5.48); другими словами,

$$T_g f(z', z_{n1},\ldots,z_{n,n-1})=\alpha_0(g_{nn})\,T_{g^0}f\left(z', \hat{z}_{n1},\ldots,\hat{z}_{n,n-1}\right), \tag{5.52}$$

где T_{g^0} — унитарное представление унимодулярной группы $n-1$-го порядка, определяемое равенством:

$$T_{g^0}f(z')=\alpha'(z'g^0)f(z'\overline{g}^0).$$

Посмотрим, как действует оператор T_g на функцию $\varphi(z', w_1,\ldots,w_{n-1})$. Мы имеем:

$$T_g\varphi(z', w_1,\ldots,w_{n-1})=\alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z'g^0)\,\frac{1}{(2\pi)^n}\int f\left(z'\overline{g}^0, \hat{z}_{n1},\ldots,\hat{z}_{n,n-1}\right)\times$$

$$\times e^{-i\operatorname{Re}\left(z_{n1}\overline{w}_1+\cdots+z_{n,n-1}\overline{w}_{n-1}\right)}dx_{n1}\,dy_{n1}\ldots dx_{n,n-1}\,dy_{n,n-1}.$$

Переходя к переменным интегрирования $\hat{z}_{n_1}, \ldots, \hat{z}_{n,n-1}$, получим:

$$T_g\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z'g^0)\,\Delta\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}\int f(z'\bar{g}^0, \hat{z}_{n1}, \ldots, \hat{z}_{n,n-1}) \times$$
$$\times e^{i\mathrm{Re}\left(\hat{z}_{n1}\bar{\hat{w}}_1+\cdots+\hat{z}_{n,n-1}\bar{\hat{w}}_{n-1}\right)}\,d\hat{x}_{n1}\,d\hat{y}_{n1}\ldots d\hat{x}_{n,n-1}\,d\hat{y}_{n,n-1}, \tag{5.53}$$

т. е.

$$T_g\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \Delta\cdot\alpha_0(g_{nn})\,T_{g^0}\varphi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}), \tag{5.54}$$

где Δ — якобиан преобразования (5.48) переменных z_{nq}, где $\hat{w}_q$ задаются формулой

$$\bar{b}\hat{w}_q = \sum_{s=1}^{n-1} b_{sq}w_s, \quad q = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5.55}$$

а матрица $b = \|b_{qs}\|$ — обратная к эрмитовски сопряженной матрице g^0, т. е. $b = (g^0)^{*-1}$.

Оператор A должен коммутировать с этим оператором T_g. В силу формул (5.38) — (5.54), это дает:

$$a(w_1, \ldots, w_{n-1})\cdot\Delta\cdot\alpha_0(g_{nn})\,T_{g^0}\varphi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}) =$$
$$= \Delta\cdot\alpha_0(g_{nn})\,T_{g^0}a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})\,\varphi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}),$$

следовательно,

$$a(w_1, \ldots, w_{n-1})\,T_{g^0} = T_{g^0}\,a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}). \tag{5.56}$$

Отсюда

$$a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}) = T_{g^0}^{-1}\,a(w_1, \ldots, w_{n-1})\,T_{g^0}. \tag{5.57}$$

для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$.

Положим в (5.46) $g^0 = e$ (e — единичная матрица); тогда

$$g = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c^{-1} \end{pmatrix},$$

так что $g_{nn} = c^{n-1}$. Тогда формула (5.55) перейдет в $\bar{b}\hat{w}_q = w_q$; $T_{q^0} = 1$, следовательно соотношение (5.56) перепишется в виде:

$$a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}) = a(\bar{b}\hat{w}_1, \ldots, \bar{b}\hat{w}_{n-1}). \tag{5.57a}$$

Это означает, что для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$ функция $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ зависит только от отношений $w_1 : w_2 : \ldots : w_{n-1}$.

Рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathfrak{W}$, в котором точка определяется как отношение $w = (w_1 : w_2 : \ldots : w_n)$. Последнее утверждение означает, что $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ можно рассматривать как функцию от $w \in \mathfrak{W}$ и писать $a(w)$.

Так как переход $g^0 \to b = (g^0)^{*-1}$ есть изоморфизм, то равенство (5.55) можно рассматривать как преобразование многообразия $\mathfrak{W}$ при помощи унимодулярной группы $\mathfrak{G}'$ $n-1$-го порядка.

Очевидно, $\mathfrak{W}$ транзитивно; поэтому его можно рассматривать как многообразие правых классов смежности по некоторой подгруппе группы $\mathfrak{G}'$.

Мы можем считать функцию $a(w)$ заданной на почти всей группе $\mathfrak{G}$, считая $a(w)$ постоянной на каждом таком классе. Но тогда равенство (5.57) перепишется в виде

$$a(gg^0) = T_{g^0}^{-1}\, a(g)\, T_{g^0}, \tag{5.58}$$

причем это равенство имеет место для почти всех $g \in \mathfrak{G}'$ при каждом фиксированном g^0.

Положим $g_1 = gg^0$; тогда (5.58) перепишется в виде:

$$a(g_1) = T_{g^{-1}g_1}^{-1}\, a(g)\, T_{g^{-1}g_1} = T_{g_1^{-1}}\, T_g\, a(g)\, T_{g^{-1}} T_{g_1},$$

отсюда

$$T_{g_1}\, a(g_1)\, T_{g_1}^{-1} = T_g\, a(g)\, T_g^{-1}. \tag{5.59}$$

Это равенство имеет место для почти всех пар (g^0, g), g^0, $g \in \mathfrak{G}'$ следовательно, по теореме Фубини, для почти всех пар $(gg^0, g) = (g_1, g)$, g_1, $g \in \mathfrak{G}'$. Таким образом, для почти всех $g \in \mathfrak{G}'$ оператор $T_g\, a(g)\, T_{g^{-1}}$ от g не зависит. Обозначим его через a. Мы имеем тогда:

$$a(g) = T_{g^{-1}}\, a T_g \tag{5.60}$$

для почти всех $g \in \mathfrak{G}'$.

Функция $a(g)$, по определению, постоянна на правых классах смежности $\mathfrak{G}'$ по стационарной подгруппе многообразия $\mathfrak{W}$. Будем исходить из точки $(0:0:\ldots:0:1)$. Ее стационарной подгруппой будет совокупность $\mathfrak{A}'$ матриц $l = \|l_{pq}\| \in \mathfrak{G}'$, таких, что матрица l^{*-1}, которую мы обозначим через $\|\hat{l}_{pq}\|$, удовлетворяет условиям:

$$\hat{l}_{nq} = 0 \text{ при } q = 1,2,\ldots, n-2;$$

следовательно, l удовлетворяет условиям:

$$l_{q,n} = 0 \text{ при } q = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Другими словами, $\mathfrak{A}'$ есть подгруппа $\mathfrak{A}$ для унимодулярной группы $\mathfrak{G}'$ порядка $n-1$.

В правой части соотношения (5.60) стоит непрерывная функция от g в смысле сходимости по норме в $\mathfrak{H}$; она совпадает для почти всех g с функцией $a(g)$, постоянной на классах смежности группы $\mathfrak{G}'$ по подгруппе $\mathfrak{A}'$. Отсюда, по теореме Фубини, следует, что почти на всех классах она постоянна с точностью до своих значений на множестве меры нуль на классе. По непрерывности отсюда следует, что $a(g)$ постоянна на каждом классе без исключения.

Взяв, в частности, в правой части (5.60) $g = l$, получим:

$$T_l a T_{l^{-1}} = T_l a T_l^{-1} = a;$$

следовательно, оператор a коммутирует со всеми операторами T_l, $l \in \mathfrak{A}'$. В силу нашего индуктивного предположения о неприводимости представления $T_{g'}$ группы $\mathfrak{A}'$ порядка $n-1$ $(n > 2)$, оператор a есть оператор умножения на скаляр: $a = \alpha \cdot 1$. Но тогда из (5.60) следует, что $a(g) = \alpha \cdot 1$ для почти всех $g \in \mathfrak{G}'$. В силу (5.38), оператор A также совпадает с $\alpha \cdot 1$.

Итак, каждый ограниченный оператор A в H, коммутирующий со всеми операторами T_g, $g \in \mathfrak{A}$, кратен единице, следовательно T_g — неприводимое представление группы $\mathfrak{A}$.

Для завершения доказательства остается рассмотреть случай $n = 2$.

В этом случае z' отсутствует и H есть пространство функций $\varphi(w)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(w)|^2 \, du \, dv < \infty, \quad w = u + iv, \tag{5.61}$$

Формула (5.38) принимает вид:

$$A\varphi(w) = a(w)\varphi(w), \tag{5.62}$$

где $a(w)$ — скалярная функция, определенная и ограниченная для почти всех w. Формула (5.57) теперь означает, что

$$a(\overline{b}\hat{w}) = a(\hat{w}).$$

Таким образом, $a(\hat{w})$ есть константа. Но тогда A есть оператор умножения на константу; следовательно, неприводимость представления T_g, $g \in \mathfrak{A}$ доказана и для этого случая.

Глава II

Описание представлений основной серии при помощи унитарной подгруппы. Связь между представлениями унимодулярной группы и ее унитарной подгруппы. Сферические функции

В главе I мы изображали точки многообразия Z' при помощи элементов z группы Z, а, следовательно, пространство $\mathfrak{H}$ представлений основной серии было реализовано как пространство функций $f(z)$ на группе Z. Однако при решении некоторых вопросов теории представлений такой способ реализации может оказаться неудобным в связи с тем, что группа Z некомпактна.

В этой второй главе мы рассмотрим поэтому другой способ реализации, при котором точки многообразия Z' изображаются при помощи унитарных матриц u. Тем самым пространство $\mathfrak{H}$ реализуется как пространство функций на унитарной подгруппе $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{G}$, т. е. подгруппе всех унитарных матриц группы $\mathfrak{G}$ (очевидно компактной), и представления основной серии описываются в терминах этой подгруппы.

Представление T_g основной серии, если его рассматривать только при $g \in \mathfrak{U}$, является также представлением унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{G}$. Оно не является, однако, неприводимым представлением группы $\mathfrak{U}$; пользуясь вторым способом реализации представления T_g, мы определяем, на какие неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ и в каком числе разлагается представление T_g, $g \in \mathfrak{U}$. В частности, мы находим все те представления основной серии, которые содержат единичное представление унитарной подгруппы, и вычисляем так называемые „сферические функции“ этих представлений (см. ниже формулу (9.28)).

В дальнейшем мы будем широко пользоваться реализацией представлений унимодулярной группы, описанной в этой главе.

§ 6. Унитарная подгруппа группы $\mathfrak{G}$

1. Подгруппы $\mathfrak{U}$ и Γ; каноническое разложение. Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц u из группы $\mathfrak{G}$, а через Γ —

совокупность всех диагональных матриц из $\mathfrak{U}$, т. е. диагональных матриц, у которых элементы по диагонали по модулю равны единице. Очевидно, $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

I. *Каждую матрицу* $g \in \mathfrak{G}$ *можно представить в виде* $g = ku$, *где** $k \in K$, $u \in \mathfrak{U}$.

Докажем, что можно найти треугольную матрицу k такую, что матрица kg унитарна. Умножение матрицы g слева на k сводится к следующим операциям над g: последняя строчка g умножается на k_{nn}, предпоследняя заменяется линейной комбинацией (с коэффициентами $k_{n-1,\,n-1}$ и $k_{n-1,\,n}$) последних двух строк матрицы g и т. д.

Этими операциями можно добиться того, чтобы строчки kg стали ортогональными нормированными векторами (процесс ортогонализации). Это и будет означать, что kg есть унитарная матрица u. Множители в k можно выбрать так, чтобы $\operatorname{Det} u = 1$. Так как $\operatorname{Det} g = 1$ и

$$kg = u,$$

то $\operatorname{Det} k = 1$.

Мы показали, следовательно, что $g = k^{-1}u$, где $k^{-1} \in K$ и $u \in \mathfrak{U}$, что и требовалось доказать.

Если даны два таких разложения $g = k_1 u_1$, $g = k_2 u_2$, то $u_1 u_2^{-1} = k_1^{-1} k_2$; следовательно, $u_1 u_2^{-1}$ — унитарная треугольная матрица. Но если унитарная матрица треугольна, то она диагональна. Действительно, если $u_0 \in K$, то и $u_0^{-1} \in K$, и $u_0^* \in K^*$, т. е. $u_0^* = u_0^{-1}$ имеет одновременно элементы, и над, и под главной диагональю равные нулю, и значит u_0 — диагональная матрица. Итак, равенство $g = ku$ определяет матрицу u с точностью до левого множителя $\gamma \in \Gamma$.

2. Описание многообразия Z' при помощи группы $\mathfrak{U}$. Результаты п. 1 означают, что

II. *В каждом правом классе смежности z' группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K содержится один и только один правый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе* Γ.

Будем обозначать через $\tilde{u}$ правый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе Γ (т. е. унитарную матрицу u с точностью до левого множителя γ), а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ — совокупность всех этих классов. В силу предложения II, мы можем отождествить каждый класс $\tilde{z}'$ с содержащимся в нем классом $\tilde{u}$ и тем самым пространство Z' с пространством** $\tilde{\mathfrak{U}}$. Преобразование $z_1' = z'\bar{g}$ можно тогда рассматривать как преобразование $\tilde{u}_1 = \widetilde{u\bar{g}}$ соответствующих классов $\tilde{u}$.

---

* K, как и в первой главе, обозначает совокупность всех матриц $k = \| k_{pq} \| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию $k_{pq} = 0$, если $p > q$.

** В этом переходе от $\tilde{z}$ к $\tilde{u}$ содержится групповой смысл подстановки, рассмотренной в п. 5 § 5 [6] для случая $n = 2$.

§ 7. Интегральные соотношения

Для того, чтобы перейти от первого способа реализации представлений (при помощи группы Z) ко второму (при помощи группы $\mathfrak{U}$), нам придется вывести некоторые новые интегральные соотношения. В частности, нам придется вывести соотношение между мерами в группе Z и многообразии $\tilde{\mathfrak{U}}$.

1. Интегральное соотношение на группе $\mathfrak{U}$. При правом умножении элементов класса $\tilde{\mathfrak{U}}$ на фиксированный элемент u_0 класс $\tilde{u}$ переходит целиком в некоторый новый класс, который мы обозначим через $\widetilde{uu_0}$. В группах $\mathfrak{U}$ и Γ существуют двусторонне инвариантные меры $d\mu(u)$ и $d\mu(\gamma)$ соответственно. Поэтому в пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$ существует мера $d\mu(\tilde{u})$, инвариантная по отношению к преобразованию $\tilde{u} \to \widetilde{uu_0}$, причем при надлежащей нормировке этой меры *

$$\int f(u)\,d\mu(u) = \int d\mu(\tilde{u}) \int f(\gamma u)\,d\mu(\gamma). \tag{7.1}$$

Если, в частности, функция $f(u)$ постоянна на каждом классе $\tilde{u}$, т. е. $f(\gamma u) = f(u)$, то эту функцию можно рассматривать как функцию от класса $\tilde{u}$ и писать $f(\tilde{u})$ (в дальнейшем такая замена будет делаться без всяких оговорок). Нормируя $d\mu(\gamma)$ так, что $\int d\mu(\gamma) = 1$, мы получим из (7.1):

$$\int f(u)\,d\mu(u) = \int f(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u}). \tag{7.2}$$

---

* Действительно, пусть сначала $d\mu_1(\tilde{u})$ — какая-нибудь мера в $\tilde{\mathfrak{U}}$. Тогда имеет место формула вида

$$\int f(u)\,d\mu(u) = \int d\mu_1(\tilde{u}) \int f(\gamma u)\,\omega(\gamma, \tilde{u})\,d\mu(\gamma),$$

где $\omega(\gamma, u)$ — якобиан перехода от $d\mu(u)$ к $d\mu(\gamma)\,d\mu_1(\tilde{u})$. В силу инвариантности меры $d\mu(u)$

$$\int f(u)\,d\mu(u) = \int f(\gamma_0 u)\,d\mu(u),$$

т. е.

$$\int d\mu_1(\tilde{u}) \int f(\gamma u)\,\omega(\gamma, \tilde{u})\,d\mu(\gamma) = \int d\mu_1(u) \int f(\gamma_0\gamma u)\,\omega(\gamma_1 \tilde{u})\,d\mu(\gamma) =$$
$$= \int d\mu_1(\tilde{u}) \int f(\gamma u)\,\omega(\gamma_0^{-1}\gamma, \tilde{u})\,d\mu(\gamma).$$

Отсюда $\omega(\gamma_0^{-1}\gamma, \tilde{u}) = \omega(\gamma, \tilde{u})$; следовательно, $\omega(\gamma, \tilde{u})$ не зависит от γ. Положим $\omega(\gamma, \tilde{u}) = \omega(\tilde{u})$ и $d\mu(\tilde{u}) = \omega(\tilde{u})\,d\mu_1(\tilde{u})$. Мы получим тогда равенство (7.1), следовательно и равенство (7.2) для функций $f(u)$, удовлетворяющих условию $f(\gamma u) = f(u)$ В силу (7.2), соотношение

$$\int f(uu_0)\,d\mu(u) = \int f(u)\,d\mu(u)$$

перепишется в виде

$$\int f(\tilde{u}\tilde{u}_0)\,d\mu(\tilde{u}) = \int f(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u});$$

это и означает, что $d\mu(\tilde{u})$ — мера в $\tilde{\mathfrak{U}}$, инвариантная при преобразованиях $\tilde{u}_1 = \widetilde{uu}$.

Отметим, что наше рассуждение применимо к любой группе Ли и ее подгруппе, имеющим двусторонне инвариантную меру.

2. Интегральное соотношение на группе $\mathfrak{G}$. В § 6 было показано, что матрица g представима в виде $g = k\tilde{u}$. Поэтому интегрирование по $\mathfrak{G}$ можно свести к повторному интегрированию по K и $\tilde{\mathfrak{U}}$.

III. *Пусть $x(g)$ — суммируемая функция на группе $\mathfrak{G}$. Тогда имеет место равенство*

$$\int x(g)\,d\mu(g) = c\int d\mu(u)\int x(ku)\,d\mu_l(k), \tag{7.3}$$

где c — некоторая константа.

Константа c будет далее вычислена (см. ниже формулу (7.40) Позже мы покажем также, что $\int x(ku)\,d\mu_l(k)$ не изменится, если заменить u на γu. Поэтому $\int x(ku)\,d\mu_l(k)$ есть функция лишь от $\tilde{u}$ и, в силу (7.2), мы можем предложение III сформулировать в следующем виде:

Имеет место соотношение

$$\int x(g)\,d\mu(g) = c\int d\mu(\tilde{u})\int x(ku)\,d\mu_l(k). \tag{7.4}$$

Покажем, что $\int x(ku)\,d\mu_l(k)$ зависит лишь от $\tilde{u}$, т. е, что формулы (7.3) и (7.4) эквивалентны. Действительно,

$$\int x(ku)\,d\mu_l(k) = \int x(ku)\,\beta(k)\,d\mu_r(k),$$

где $d\mu_l(k)$ — левая, а $d\mu_r(k)$ — правая инвариантная мера в K,

$$\beta(k) = |k_{22}|^4\,|k_{33}|^8\ldots|k_{nn}|^{4n-4} \tag{7.5}$$

(см. формулу (2.7)). Поэтому

$$\int x(k\gamma u)\,d\mu_l(k) = \int\beta(k)\,x(k\gamma u)\,d\mu_r(k) = \int\beta(k\gamma^{-1})\,x(ku)\,d\mu_r(k) =$$
$$= \int\beta(\gamma^{-1})\,\beta(k)\,x(ku)\,d\mu_r(k) = \beta(\gamma^{-1})\int x(ku)\,d\mu_l(k).$$

Так как, в силу (7.5), $\beta(\gamma) = 1$, то имеем

$$\int x(k\gamma u)\,d\mu_l(k) = \int x(ku)\,d\mu_l(k). \tag{7.6}$$

Докажем теперь соотношение III.

Так как имеется взаимно однозначное дифференцируемое соответствие между g и парой k, $\tilde{u}$, то имеет место формула

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int d\mu(\tilde{u})\int x(ku)\,\omega(k,\tilde{u})\,d\mu_l(k), \tag{7.7}$$

где $\omega(k,\tilde{u})$ — якобиан перехода от $d\mu(g)$ к $d\mu(\tilde{u})\,d\mu_l(k)$.

Докажем, что $\omega(k, \tilde{u})$ не зависит ни от k, ни от $\tilde{u}$, так что можно будет положить $\omega(k, \tilde{u}) = \mathrm{const}$. Для этого используем равенство

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int x(gu_0)\, d\mu(g).$$

В силу (7.7), это равенство перепишется в виде

$$\int d\mu(\tilde{u}) \int x(ku)\, \omega(k, \tilde{u})\, d\mu_l(k) = \int d\mu(\tilde{u}) \int x(ku\,u_0)\, \omega(k, \tilde{u})\, d\mu_l(k).$$

Так как мера $d\mu(\tilde{u})$ инвариантна относительно преобразования $\tilde{u} \to \tilde{u}\,\bar{u}_0$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\int d\mu(\tilde{u}) \int x(ku)\, \omega(k, \tilde{u})\, d\mu_l(k) = \int d\mu(\tilde{u}) \int x(ku)\, \omega(k, \tilde{u}\,\bar{u}_0)\, d\mu_l(k).$$

В силу произвола функции x, отсюда следует, что

$$\omega(k, \tilde{u}) = \omega(k, \tilde{u}\,\bar{u}_0),$$

т. е. функция $\omega(k, \tilde{u})$ не зависит от $\tilde{u}$. Аналогично, из равенства

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int x(k_0 g)\, d\mu(g)$$

мы получим, что $\omega(k, \tilde{u})$ не зависит и от k.

Таким образом, мы можем положить $\omega(k, u) = c$, где c — некоторая константа. Подставляя в (7.7) вместо $\omega(k, u)$ константу c, получим (7.4).

Вычисление константы c будет проведено в п. 5.

3. Соотношение между мерами $d\mu(\tilde{u})$ и $d\mu(z)$. Пусть $x(g)$ — суммируемая функция на $\mathfrak{G}$. Положим

$$f(g) = \int x(kg)\, \beta(kg)\, d\mu_r(k). \tag{7.8}$$

Тогда

$$f(k_0 g) = \int x(k\,k_0 g)\, \beta(k\,k_0 g)\, d\mu_r(g) = \int x(kg)\, \beta(kg)\, d\mu_r(g) = f(g),$$

т. е. функция $f(g)$ постоянна вдоль каждого класса смежности z' группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K. Мы можем поэтому положить $f(g) = f(z')$ при $g \in z'$. Выбирая в качестве представителя класса z' элемент $z \in Z$, имеем

$$f(z') = \int x(kz)\, \beta(kz)\, d\mu_r(k) = \int x(kz)\, \beta(k)\, d\mu_r(k) = \int x(kz)\, d\mu_l(k);$$

отсюда, в силу формулы (4.13), имеем

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int d\mu(z) \int x(kz)\, d\mu_l(k) = \int f(z')\, d\mu(z'), \tag{7.9}$$

где $d\mu(z') = d\mu(z)$. Так как функцию $f(z')$ можно рассматривать как функцию от $\tilde{u}$ и писать $f(\tilde{u})$, то (7.9) можно переписать в виде

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int f(\tilde{u})\,\omega(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u}), \tag{7.10}$$

где $\omega(\tilde{u})$ — якобиан перехода от $d\mu(z')$ к $d\mu(\tilde{u})$.

Выберем в качестве представителя класса z' матрицу u и положим в (7.8) $g = u$. Мы получим

$$f(\tilde{u}) = \int x(ku)\,\beta(ku)\,d\mu_r(k) = \beta(u)\int x(ku)\,\beta(k)\,d\mu_r(k) =$$
$$= \beta(u)\int x(ku)\,d\mu_l(k).$$

Отсюда формула (7.10) приобретет вид

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int d\mu(\tilde{u})\,\omega(\tilde{u})\,\beta(u)\int x(ku)\,d\mu_l(k). \tag{7.11}$$

Сравнивая (7.11) с (7.4), получаем, что*

$$\omega(\tilde{u})\,\beta(\tilde{u}) = c.$$

Вспоминая, что $\omega(\tilde{u})$ есть якобиан перехода от $d\mu(z)$ к $d\mu(\tilde{u})$, имеем:

IV. *При условии, что z и $\tilde{u}$ определяют одну и ту же точку $z' \in Z'$, между мерами $d\mu(z') \equiv d\mu(z)$ и $d\mu(\tilde{u})$ имеется следующее соотношение*

$$d\mu(z) = c\beta^{-1}(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u}). \tag{7.12}$$

4. Формула преобразования меры $d\mu(\tilde{u})$. Найдем теперь, как преобразуется мера $d\mu(\tilde{u})$ при преобразовании $\tilde{u} \to \widetilde{u\bar{g}}$. Для этого воспользуемся равенством

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int x(gg_0)\,d\mu(g). \tag{7.13}$$

При переходе от $x(g)$ к $x(gg_0)$ функция $f_1(\tilde{u}) = \int x(ku)\,d\mu_l(k)$ переходит в $\int x(kug_0)\,d\mu_l(k)$.

Положим $ug_0 = k_1u_1$; тогда

$$\int x(kug_0)\,d\mu_l(k) = \int x(kk_1u_1)\,\beta(k)\,d\mu_r(k) =$$
$$= \int x(ku_1)\,\beta(k_1^{-1})\,\beta(k)\,d\mu_r(k) = \beta^{-1}(k_1)\int x(ku_1)\,d\mu_l(k). \tag{7.14}$$

---

* Заметим, что так как $\beta(\gamma) = 1$, то $\beta(\gamma u) = \beta(\gamma)\,\beta(u) = \beta(u)$ и функция $\beta(u)$ зависит лишь от $\tilde{u}$; следовательно, мы можем писать $\beta(\tilde{u})$ вместо $\beta(u)$.

С другой стороны, если $u \in \tilde{u}$, то $u_1 \in \tilde{u}\,\bar{g}_0$. Кроме того, $\beta(ug_0) = \beta(k_1)\beta(u_1) = \beta(k_1)\beta(\tilde{u}\,\bar{g}_0)$. Поэтому равенство (7.14) принимает вид:

$$\int x(kug_0)\,d\mu_l(k) = \frac{\beta(\tilde{u}\,\bar{u}_0)}{\beta(ug_0)}\,f_1(\tilde{u}\,\bar{g}_0).$$

Отсюда и из соотношений (7.4), (7.13) следует:

V. *Имеет место формула*

$$\int f_1(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u}) = \int f_1(\tilde{u}\,\bar{g}_0)\,\frac{\beta(\tilde{u}\,\bar{u}_0)}{\beta(ug_0)}\,d\mu(\tilde{u}), \tag{7.15}$$

следовательно,

$$\frac{d\mu(\tilde{u}\,\bar{g}_0)}{d\mu(\tilde{u})} = \frac{\beta(\tilde{u}\,\bar{g}_0)}{\beta(ug_0)}. \tag{7.16}$$

5. Вычисление константы c. Вычислим константу c для того случая, когда меры $d\mu_l(k)$ и $d\mu(g)$ пронормированы так, как в §§ 2 и 4, а $\int d\mu(\tilde{u}) = 1$. Если, кроме того, $\int d\mu(\gamma) = 1$, то из (7.2) при $f(u) = 1$ следует, что также $\int d\mu(u) = 1$.

Элемент u в разложении $g = ku$ определен с точностью до левого множителя γ. Мы можем подобрать этот множитель так, чтобы все диагональные элементы u_{pp}, $p = 2, 3, \ldots, n$ матрицы были положительны. Этим условием матрица u в разложении $g = ku$ определяется однозначно. Если, в частности, $g = e$, то и $k = e$, $u = e$, ибо $u = e$ — унитарная матрица с положительными диагональными элементами.

Дифференцируя разложение $g = ku$, получим:

$$dg = dk \cdot u + k\,du.$$

Отсюда, умножая обе части последнего равенства справа на $g^{-1} = u^{-1}k^{-1}$, имеем:

$$d_r g = d_r k + k\,d_r u \cdot k^{-1}, \tag{7.17}$$

где обозначено $d_r g = g^{-1}dg$.

В частности, в точке $g = e$

$$d_r g = d_r k + d_r u, \tag{7.18}$$

Дифференцируя условие $uu^* = e$ унитарности матрицы u, получаем:

$$du \cdot u^* + u\,du^* = 0,$$

т. е.

$$d_r u + (d_r u)^* = 0, \tag{7.19}$$

ибо $d_r u = du \cdot u^{-1} = du \cdot u^*$. Равенство (7.19) означает, что $d_r u$ — есть произведение эрмитовой матрицы на i. В частности, ее диагональные элементы $d_r u_{pp}$ должны быть чисто мнимыми. С другой стороны, в точке $u = e$ дифференциал $d_r u_{pp} = du_{pp}$ должен быть действительным;

следовательно, $d_r u_{pp}=0$. Таким образом, в качестве параметра матрицы $d_r u$ можно взять ее элементы $d_r u_{pq}$, $p>q$. В силу соотношения (7.19), $d_r u_{pq}=-d_r \bar{u}_{qp}$; поэтому равенство (7.18) перепишется в матричных элементах в виде

$$d_r g_{pp}=d_r k_{pp}, \quad p=2, \ldots, n,$$

$$d_r g_{pq}=d_r u_{pq} \quad \text{при} \quad p>q,$$

$$d_r g_{pq}=d_r k_{pq}-d_r \bar{u}_{qp} \quad \text{при} \quad p<q.$$

Отсюда следует, что в точке $g=e$

$$d\mu(g)=d\mu_l(k)\, d\hat{\mu}(\tilde{u}), \tag{7.20}$$

где $d\hat{\mu}(\tilde{u})$ — мера в многообразии $\tilde{\mathfrak{U}}$, равная квадрату модуля определителя, составленного из компонент $d_r u_{pq}$, $p<q$. Так как, по условию, $\int d\mu(\tilde{u})=1$, и так как меры $d\hat{\mu}(\tilde{u})$ и $d\mu(\tilde{u})$ могут отличаться только постоянным множителем, то

$$d\hat{\mu}(\tilde{u})=\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}})\, d\mu(\tilde{u}). \tag{7.21}$$

Подставляя в формулу (7.20), получим:

$$d\mu(g)=\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}})\, d\mu_l(k)\, d\mu(\tilde{u}); \tag{7.22}$$

сравнение с (7.12) дает:

$$c=\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}). \tag{7.23}$$

Другими словами, c есть мера всего многообразия $\tilde{\mathfrak{U}}$ в переменных $d_l u_{pq}$, $p>q$.

При вычислении этой меры нам удобно будет одновременно вычислить меру $\hat{\mu}(\mathfrak{U})$ всей группы $\mathfrak{U}$ в параметрах $d_l u_{pq}$, $p>q$, $d_l u_{pp}$, $p=2, 3, \ldots, n$.

Пусть R—n-мерное комплексное эвклидово пространство, $\{f_1^0, \ldots, f_n^0\}$— ортонормальный базис в R, u — оператор, матрица которого в этом базисе совпадает с матрицей $u=\|u_{pq}\|$. Обозначим через $\mathfrak{W}$ совокупность всех матриц w из группы $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^{(n)}$, оставляющих на месте вектор f_1^0. Все матрицы w имеют вид

$$w=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{w} \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

где $\tilde{w}$ — унитарная унимодулярная матрица порядка $n-1$. Следовательно, группа $\mathfrak{W}$ изоморфна унитарной унимодулярной группе $\mathfrak{U}^{(n-1)}$ порядка $n-1$.

Первый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе $\mathfrak{W}$ определяется ортом f, который элементами этого класса переводится в орт f_1^0, т. е. определяется первой строчкой этих элементов. Выберем в правом классе, определенном ортом f, представитель $u^{(f)}$ так, чтобы элементы матрицы $u^{(f)}$ были непрерывно дифференцируемыми функциями компонент вектора f и чтобы $u^{(f_1^0)} = e$. Это можно, например, сделать, выбирая в качестве такого представителя матрицу вида

$$\begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1,\,n-1} & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-1,\,1} & u_{n-1,\,2} & u_{n-1,\,3} & u_{n-1,\,4} & \dots & u_{n-1,\,n-1} & 0 \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & u_{n4} & \dots & u_{n,\,n-1} & u_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Всякую матрицу u можно представить в виде

$$u = wu^{(f)}, \tag{7.25}$$

при этом, если $u = e$, то и $w = e$; $u^{(f)} = e$.

Ввиду компактности групп $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ имеет место формула

$$\int \varphi(u)\, d\hat{\mu}(u) = \int d\mu(f) \int \varphi(wu^{(f)})\, d\hat{\mu}(w), \tag{7.26}$$

где $d\mu(u^{(f)})$ надлежаще пронормированная мера в многообразии ортов f, инвариантная при преобразовании $f' = wf$ (см. сноску на стр. 55). В частности, при $\varphi(u) \equiv 1$ получаем

$$\hat{\mu}(\mathfrak{U}) = \hat{\mu}(\mathfrak{W}) \int d\mu(f),$$

т. е.

$$\hat{\mu}(\mathfrak{U}^{(n)}) = \hat{\mu}(\mathfrak{U}^{(n-1)}) \cdot \int d\mu(f). \tag{7.27}$$

Для определения $\int d\mu(f)$,* продифференцируем равенство (7.25); мы получим:

$$du = dw \cdot u^{(f)} + w\, du^{(f)};$$

отсюда и из равенства $u^* = u^{(f)*}w^*$ следует, что

$$du\, u^* = dw \cdot w^* + w\, du^{(f)} \cdot u^{(f)*}w^*,$$

т. е.

$$d_r u = d_r w + w\, d_r u^{(f)} \cdot w^*.$$

В точке $u = e$ это равенство перейдет в

$$d_r u = d_r w + d_r u^{(f)}.$$

---

* $d\mu(f)$ есть мера на сфере в комплексном n-мерном пространстве. Поэтому с точностью до постоянного множителя $d\mu(f)$ нам заранее известна (см. (7.37)).

Так как $dw_{1p} = d_r w_{q1} = 0$, то из последнего равенства следует, что

$$\left.\begin{aligned} d_r u_{1p} &= d_r u_{1q}^{(f)}, \quad q = 1, 2, \ldots, n, \\ d_r u_{pq} &= d_r w_{pq} + d_r u_{pq}^{(f)}, \quad 2 < p < q. \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

По условию, элементы $u_{pq}^{(f)}$ являются функциями переменных $u_{1q}^{(f)}$, отсюда следует, что элементы $d_r u_{pq}^{(f)}$ являются линейными комбинациями элементов $d_r u_{1q}^{(f)}$. Поэтому из равенств (7.28) следует, что в точке $u = e$

$$d\hat{\mu}(u) = \Delta d\hat{\mu}(w), \tag{7.29}$$

где Δ — определитель, составленный из компонент $d_r u_{1q}^{(f)}$, $q = 1, 2, \ldots, n$.

Сравнение с (7.28) показывает, что $d\mu(f) = \Delta$.

Выберем для элементов $u_{1q}^{(f)}$ параметры, полагая

$$t_q = |\, u_{1q}^{(f)} |^2, \quad q = 2, 3, \ldots, n; \qquad \theta_q = \arg u_{1q}^{(f)}, \quad q = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.30}$$

Тогда

$$u_{11}^{(f)} = \sqrt{1 - t_2 - \ldots - t_n}\; e^{i\theta_1}; \quad u_{1q}^{(f)} = \sqrt{t_q}\, e^{i\theta_q}, \quad q = 2, \ldots, n; \tag{7.31}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} du_{11}^{(f)} = &-\frac{1}{2\sqrt{1 - t_2 - \ldots - t_n}} (dt_2 + \ldots + dt_n)\, e^{i\theta_1} + \\ &+ \sqrt{1 - t_2 - \ldots - t_n}\, i e^{i\theta_1}\, d\theta_1, \end{aligned} \tag{7.32}$$

$$du_{1q}^{(f)} = \frac{1}{2\sqrt{t_q}} e^{i\theta_q} dt_q + \sqrt{t_q}\, e^{i\theta_q}\, i\, d\theta_q, \quad q = 2, \ldots, n. \tag{7.33}$$

Из этих равенств следует, что

$$d_r u_{11}^{(f)} = i\, d\theta_1; \tag{7.34}$$

далее, при $u = e$ будет $t_2 = \ldots = t_n = 0$; следовательно, формула (7.32) показывает, что дифференциал $du_{11}^{(f)}$ остается конечным* при $u = e$. С другой стороны, при $q \geqslant 2$

$$d_r u_{1q}^{(f)} = \sum_{s=1}^{n} du_{1s} \bar{u}_{qs} = du_{11} \cdot \bar{u}_{q1} + \sum_{s=2}^{n} du_{1s} \cdot \bar{u}_{qs}, \tag{7.35}$$

причем, в силу только что сказанного, слагаемые $du_{11} \cdot \bar{u}_q$ стремятся к нулю при $u \to e$. Поэтому, и в силу (7.35), при $u \to e$ определитель Δ имеет своим пределом произведение

$$\Delta_1 \,|\, u_{11} |^2 d\theta_1 = \Delta_1 d\theta_1, \tag{7.36}$$

---

* Формула (7.33) показывает, что остальные дифференциалы $du_{1q}^{(f)}$, $q > 1$ не остаются конечными при $u = e$.

где

$$u_{11}=\begin{Vmatrix} u_{22}\dots u_{2n} \\ \dots\dots \\ u_{n2}\dots u_{nn}\end{Vmatrix}=1 \quad \text{при } u=e,$$

а Δ_1 — определитель, составленный из компонент действительных и мнимых частей элементов $du_{1q}^{(f)}$, $q\geqslant 2$. Полагая $du_{1q}^{(f)}=d\xi_q+id\eta_q$, $q\geqslant 2$, из формулы (7.33) имеем

$$d\xi_q=\frac{1}{2\sqrt{t_q}}\cos\theta_q\,dt_q-\sqrt{t_q}\sin\theta_q\,d\theta_q,$$

$$d\eta_q=\frac{1}{2\sqrt{t_q}}\sin\theta_q\,dt_q+\sqrt{t_q}\cos\theta_q\,d\theta_q.$$

При фиксированном $q\geqslant 2$ определитель перехода от $d\xi_q$, $d\eta_q$ к dt_q, $d\theta_q$ равен $\frac{1}{2}$; следовательно,

$$\Delta_1=\frac{1}{2^{n-1}}\,dt_2\dots dt_n\,d\theta_2\dots d\theta_n.$$

Отсюда и из формулы (7.36) следует, что

$$d\mu(f)=\frac{1}{2^{n-1}}\,dt_2\dots dt_n\,d\theta_1\dots d\theta_n, \tag{7.37}$$

причем интеграл по $dt_2,\dots,dt_n,d\theta_1,\dots,d\theta_n$ берется в области, определенной неравенством

$$0<t_2+\dots+t_n<1,\quad t_q>0,\quad q\geqslant 2,\quad 0<\theta_p<2\pi,\quad p=1,\dots,n.$$

Поэтому

$$\int d\mu(f)=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{2\pi}d\theta_2\dots\int_0^{2\pi}d\theta_n\int_0^1 dt_2\int_0^{1-t_2}dt_3\dots\int_0^{1-t_2-\dots-t_{n-2}}dt_{n-1}\int_0^{1-t_2-\dots-t_{n-1}}dt_n;$$

откуда, в силу (7.27),

$$\hat{\mu}(\mathfrak{U}^{(n)})=\frac{2}{(n-1)!}\pi^n\,\hat{\mu}(\mathfrak{U}^{(n-1)}). \tag{7.38}$$

Применяя формулу (7.38) к группам $\mathfrak{U}^{(n-1)}, \mathfrak{U}^{(n-2)},\dots,\mathfrak{U}^{(2)}$, получим

$$\hat{\mu}(\mathfrak{U})=\frac{2}{(n-1)!}\pi^n\cdot\frac{2}{(n-2)!}\cdot\pi^{n-1}\dots\frac{2}{1!}\pi^2,$$

т. е.

$$\mu(\mathfrak{U})=\frac{2^{n-1}\pi^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}}{1!\,2!\dots(n-1)!}. \tag{7.39}$$

Совершенно аналогично вычисляется мера $\tilde{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}})$. При этом нужно только учесть, что при переходе от $\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}^{(n)})$ к $\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}^{(n-1)})$ будет отсутствовать переменное θ_1. Поэтому вместо формулы (7.38) мы будем иметь

$$\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}^{(n)}) = \frac{1}{(n-1)!}\pi^{n-1}\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}^{(n-1)}).$$

Отсюда, как и выше, получаем:

$$c = \hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}) = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\dots(n-1)!}. \tag{7.40}$$

§ 8. Второй способ описания представлений основной серии

В § 1 главы I мы задавали представления основной серии формулой:

$$T_g f(z') = \frac{\alpha(g_{z'}g)}{\alpha(g_{z'})} f(z'g), \tag{8.1}$$

где z' — элементы из классов смежности $\mathfrak{G}$ по K, $\alpha(g)$ — функция, задающая представление, $g_{z'}$ — какой-либо элемент группы $\mathfrak{G}$, переводящий единичный класс смежности e' в класс z'. Функция $\alpha(g)$ есть произвольная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению $\alpha(kg) = \alpha(k)\alpha(g)$, и такая, что $|\alpha(g)| = \beta(g)$ (определение $\beta(g)$ см. формулу (2.7)). В § 6 п. 2 мы показали, что точки z' (правые классы смежности $\mathfrak{G}$ по K) можно изображать с помощью элементов $\tilde{u}$ ($\tilde{u} = \{\gamma u\}$, где u — унитарная матрица, а γ пробегает все диагональные унитарные матрицы). Поэтому функции $f(z')$ мы можем задавать как функции $f(\tilde{u})$. Если u — элемент класса z', то $e'u = z'$ и мы можем положить $g_{z'} = u$. Тогда формула (8.1) примет вид

$$T_g f(\tilde{u}) = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)} f(\tilde{u}\bar{g}), \tag{8.2}$$

где u — любая матрица из класса $\tilde{u} = \{\gamma u\}$.

По определению, оператор T_g есть оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(z')$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |f(z')|^2 d\mu(z').$$

Если функции $f(z')$ рассматривать как функции $f(\tilde{u})$, то, в силу формулы (7.12), это выражение перепишется в виде

$$\|f\|^2 = c\int \beta^{-1}(\tilde{u})\,|f(\tilde{u})|^2 d\mu(\tilde{u}). \tag{8.3}$$

Таким образом, пространство $\mathfrak{H}$ изображается как пространство всех функций $f(\widetilde{u})$, для которых выражение (8.3) конечно.

Перейдем от пространства функций $f(\widetilde{u}) \in \mathfrak{H}$ к пространству функций

$$\varphi(\widetilde{u}) = c^{\frac{1}{2}} f(\widetilde{u})\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{u}). \tag{8.4}$$

Выражение (8.3) для нормы примет вид

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(\widetilde{u})|^2 d\mu(\widetilde{u}). \tag{8.5}$$

Таким образом, переход (8.4) от $f(\widetilde{u})$ к $\varphi(\widetilde{u})$ есть изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ функций $f(\widetilde{u})$ на пространство $\mathfrak{H}$ всех функций $\varphi(\widetilde{u})$, для которых выражение (8.5) конечно.

Посмотрим, как выглядит оператор T_g в пространстве $\mathfrak{H}$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} T_g\varphi(\widetilde{u}) &= c^{\frac{1}{2}}\beta^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{u})\cdot T_g f(\widetilde{u}) = c^{\frac{1}{2}}\beta^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{u})\, T_g\, c^{-\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}(\widetilde{u})\,\varphi(\widetilde{u}) = \\ &= \beta^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{u})\,\frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)}\,\beta^{\frac{1}{2}}(\widetilde{u}\,\overline{g})\,\varphi(\widetilde{u}\,\overline{g}); \end{aligned} \tag{8.6}$$

полагая

$$\alpha_1(g) = \alpha(g)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(u) \qquad \text{при } g = ku, \tag{8.7}$$

получим из (8.6):

$$T_g\varphi(\widetilde{u}) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)}\,\varphi(\widetilde{u}\,\overline{g}). \tag{8.8}$$

Действительно, полагая $ug = k_1u_1$ и обозначая через $\widetilde{u}$ и $\widetilde{u}_1$ классы, содержащие u и u_1, имеем: $\widetilde{u}_1 = \widetilde{u}\,\overline{g}$; следовательно, в силу (8.7)

$$\frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} = \frac{\alpha(ug)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(u_1)}{\alpha_1(u)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(u)} = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)}\cdot\frac{\beta^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{ug})}{\beta^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{u})}.$$

Из формулы (8.7) следует, что

$$\alpha_1(u) = \chi(u); \text{ следовательно, } |\alpha_1(u)| = 1. \tag{8.9}$$

Мы приходим, таким образом, к следующему результату:

Представления основной серии описываются операторами в пространстве $\mathfrak{H}_1$ *функций* $\varphi(\widetilde{u})$, *для которых выражение* (8.5) *конечно.*

Скалярное произведение в $\mathfrak{H}_1$ *задается формулой*

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(\widetilde{u}) \varphi_2(\widetilde{u})\, d\mu(\widetilde{u}). \tag{8.10}$$

Операторы T_g *представления задаются формулой* (8.8)

$$T_g\varphi(\widetilde{u}) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\widetilde{u}\,\overline{g}),$$

где фиксированная функция $\alpha_1(g)$, *определяющая представление, есть произвольная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению*

$$\alpha_1(kg) = \alpha_1(k)\,\alpha_1(g)$$

и требованию

$$|\alpha_1(u)| = 1.$$

Отметим, что разные функции $\alpha_1(g)$ могут определять одно и то же представление. Действительно, положим

$$\varphi_1(\widetilde{u}) = \varkappa(\widetilde{u})\,\varphi(\widetilde{u}), \tag{8.11}$$

где $\varkappa(\widetilde{u})$ — фиксированная функция такая, что $|\varkappa(\widetilde{u})| \equiv 1$. Переход от $\varphi(\widetilde{u})$ к $\varphi_1(\widetilde{u})$ есть унитарное отображение пространства $\mathfrak{H}_1$ на самого себя. При этом отображении оператор T_g примет вид

$$T_g\varphi_1(\widetilde{u}) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \frac{\varkappa(\widetilde{u})}{\varkappa(\widetilde{u}\,\overline{g})} \varphi_1(\widetilde{u}\,\overline{g}).$$

Введем функцию $\alpha_1'(g)$, полагая

$$\alpha_1'(g) = \frac{\alpha_1(g)}{\varkappa(\widetilde{u})} \quad \text{для} \quad g = ku. \tag{8.12}$$

Тогда мы получим

$$T_g\varphi_1(\widetilde{u}) = \frac{\alpha_1'(ug)}{\alpha_1'(u)} \varphi_1(\widetilde{u}\,\overline{g}). \tag{8.13}$$

Действительно, если $ug = k_1u_1$, то $\widetilde{u}\,\overline{g} = \widetilde{u}_1$ и, следовательно,

$$\frac{\alpha_1'(ug)}{u_1'(u)} = \frac{\alpha_1(ug)}{\varkappa(\widetilde{u}\,\overline{g})} \frac{\varkappa(\widetilde{u})}{\alpha_1(u)}.$$

Таким образом, функция $\alpha_1(g)$ и

$$\alpha_1'(g) = \frac{\alpha_1(g)}{\varkappa(\widetilde{u})},$$

где $g = ku$, а $\varkappa(\widetilde{u})$ — произвольная функция с $|\varkappa(\widetilde{u})| \equiv 1$, определяют одно и то же представление.

Заметим, что из (8.12) следует, что $\alpha_1'(k) = \alpha_1(k)$ и $\alpha_1'(u) = \frac{\alpha_1(u)}{\varkappa(\widetilde{u})}$. Так как всякий элемент g может быть записан в виде ku, а $\alpha_1(ku) = \alpha_1(k)\alpha_1(u)$, то связь между α и α_1' можно задать формулой:

$$\alpha_1'(k) = \alpha_1(k), \quad \alpha_1'(u) = \frac{\alpha_1(u)}{\varkappa(\widetilde{u})},$$

где $\varkappa(\widetilde{u})$ — произвольная функция, для которой $|\varkappa(\widetilde{u})| = 1$.

Напишем еще выражение для $\alpha_1(k)$:

$$\alpha_1(k) = |k_{22}|^{m_2+i\rho_2-2} k_{22}^{-m_2} |k_{33}|^{m_3+i\rho_3-4} k_{33}^{-m_3} \ldots |k_{nn}|^{m_n+i\rho_n-2(n-1)} k_{nn}^{-m_n}. \tag{8.14}$$

Для нахождения $\alpha_1(g)$ остается указать правило вычисления элементов λ_p матрицы δ в разложении $g = ku = \zeta\delta u$. Мы имеем $gg^* = \zeta\delta uu^*\delta^*\zeta^* = \zeta\delta\delta^*\zeta^*$. Так как $\zeta^* \in Z$, то согласно формуле (3.12), отсюда следует, что

$$|\lambda_p|^2 = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p+1}}, \quad p = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.15}$$

где Δ_p — минор матрицы gg^*, составленный из ее последних $n-p+1$ строк и столбцов, и $\Delta_{n+1} = 1$.

Отметим, что, в силу равенства $g = \zeta\delta u = \zeta\delta\gamma\cdot\gamma^{-1}u$, числа λ_p вообще определены только с точностью до своих аргументов.

Пространство $\mathfrak{H}_1$ функций $\varphi(\widetilde{u})$ можно также рассматривать как пространство функций $\varphi(u)$ на группе $\mathfrak{U}$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(\gamma u) = \varphi(u). \tag{8.16}$$

В силу формулы (7.2), для нормы $\|\varphi\|$ имеем тогда выражение

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(u)|^2 d\mu(u), \tag{8.17}$$

а для оператора T_g:

$$T_g\varphi(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(u\bar{g}), \tag{8.18}$$

где $u\bar{g}$ — произвольный элемент класса $\widetilde{u}\bar{g}$. В силу условия $\varphi(\gamma u) = \varphi(u)$, значение $\varphi(u\bar{g})$ не зависит от выбора этого элемента.

Мы указали реализацию представления на пространстве функций $\varphi(u)$, удовлетворяющих условию $\varphi(\gamma u) = \varphi(u)$; однако более естественной является его реализация в пространстве функций $\varphi(u)$ на группе $\mathfrak{U}$, удовлетворяющих равенству

$$\varphi(\gamma u) = \alpha(\gamma)\varphi(u), \tag{8.16'}$$

для которых попрежнему выражение (8.17) конечно. При этом легко показать, что функцию $\alpha_1(g)$ можно заменить эквивалентной ей функцией $\alpha_1'(g)$ так, чтобы представление приняло вид:

$$T_g\varphi(u) = \alpha_1'(ug)\varphi(u\bar{g}). \tag{8.18'}$$

§ 9. Сферические функции

1. Условие существования вектора, инвариантного по отношению к операторам T_u. Поставим теперь следующий вопрос:

При каких условиях в пространстве представления $\mathfrak{H}_1$ существует вектор $f_0(\tilde{u})$, инвариантный по отношению ко всем операторам T_u, соответствующим элементам u унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$?

Согласно формуле (8.18) для представления, искомый вектор $f_0(u)$ должен удовлетворять условию

$$\frac{\alpha_1(uu_0)}{\alpha_1(u)} f_0(uu_0) = f_0(u) \tag{9.1}$$

при каждом $u_0 \in \mathfrak{U}$ для почти всех $u \in \mathfrak{U}$. Отсюда следует, что

$$\alpha_1(uu_0) f_0(uu_0) = \alpha_1(u) f_0(u)$$

для почти всех пар (u, u_0), а поэтому и для почти всех пар (uu_0, u_0). Это означает, что $\alpha_1(u) f_0(u) = \text{const}$ для почти всех $u \in \mathfrak{G}$. Так как $f_0(\gamma u) = f_0(u)$, то это возможно тогда и только тогда, когда также $\alpha_1(\gamma u) = \alpha_1(u)$, т. е. когда $\alpha_1(\gamma) = 1$. Из формулы (8.14) следует, что условие $\alpha_1(\gamma) = 1$ эквивалентно равенствам $m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 0$. При выполнении этого условия $f_0(u) = c\alpha_1^{-1}(u)$, т. е. с точностью до постоянного множителя существует только один такой вектор.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Для того, чтобы в пространстве представления основной серии существовал вектор, инвариантный по отношению ко всем операторам представления, соответствующим унитарной подгруппе, необходимо и достаточно, чтобы $\chi(\gamma) = 1$, т. е. чтобы $m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 0$.*

При выполнении этого условия существует с точностью до постоянного множителя только один такой вектор.

2. Определение сферической функции и ее интегральное выражение. Так как при $\alpha_1(\gamma) = 1$ функция $\alpha_1(u)$ постоянна на каждом классе $\tilde{u}$, то мы можем положить $\alpha_1(u) = \alpha_1(\tilde{u})$. С другой стороны, функция $\alpha_1(u)$ определена данным представлением с точностью до множителя $\varkappa(\tilde{u})$, по модулю равного единице (см. § 8). Полагая $\varkappa(u) = \alpha_1(\tilde{u})$, мы можем таким образом добиться того, что $\alpha_1(u) \equiv 1$. Тогда $f_0(\tilde{u}) = c$. Нормируя меру $d\mu(\tilde{u})$, так, что $\int d\mu(\tilde{u}) = 1$ и полагая $f_0(\tilde{u}) \equiv 1$, мы получим нормированный вектор f_0. Положим теперь для этого вектора

$$\varphi(g) = (T_g f_0, f_0); \tag{9.2}$$

функция $\varphi(g)$ называется *сферической функцией, соответствующей* *данному представлению* T_g. Она является элементарной положительно-определенной функцией и удовлетворяет условию

$$\varphi(ug) = \varphi(gu) = \varphi(g). \tag{9.3}$$

Первое утверждение следует из того, что T_g — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ (см. [12]), второе же — из того, что, по определению вектора f_0, $T_u f_0 = f_0$. Поэтому

$$\varphi(gu) = (T_g T_u f_0, f_0) = (T_g f_0, f_0) = \varphi(g),$$

$$\varphi(ug) = (T_u T_g f_0, f_0) = (T_g f_0, T_u^{-1} f_0) = (T_g f_0, f_0) = \varphi(g).$$

Из (9.3) следует, что достаточно вычислить $\varphi(g)$ для диагональных матриц δ с положительными элементами. Действительно, всякую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде $g = au$, где a — положительно определенная эрмитова, а u — унитарная матрица. Далее, матрицу a можно представить в виде $a = u_1 \delta u_1^{-1}$, где u_1 — унитарная, а δ — диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Таким образом, $g = u_1 \delta u_2$. Отсюда $\varphi(g) = \varphi(\delta)$, следовательно, достаточно вычислить $\varphi(\delta)$. Отметим, что $\varphi(\delta)$ есть симметрическая функция диагональных элементов λ_p, $p = 1, \ldots, n$ матрицы δ, ибо всякая подстановка этих элементов достигается унитарным преобразованием вида $\delta' = u^{-1} \delta u$.

Так как $f_0(u) \equiv 1$, $\alpha_1(u) \equiv 1$, то, согласно формуле (8.18), $u_\delta f_0 = \alpha_1(u\delta)$; следовательно,

$$\varphi(\delta) = (u_\delta f_0, f_0) = \int \alpha_1(u\delta)\, d\mu(u). \tag{9.4}$$

С другой стороны, формулы (8.14) при $m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 0$ и (8.15) дают для $\alpha_1(u\delta)$ следующее выражение:

$$\alpha_1(u\delta) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\right)^{i\frac{\rho_2}{2}-1} \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_4}\right)^{i\frac{\rho_3}{2}-2} \cdots \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)^{i\frac{\rho_{n-1}}{2}-n+1} \Delta_n^{i\frac{\rho_n}{2}-n+1} =$$

$$= \Delta_2^{i\frac{\rho_2}{2}-1} \Delta_3^{i\frac{\rho_3-\rho_2}{2}-1} \cdots \Delta_n^{i\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{2}-1}, \tag{9.5}$$

где Δ_p, $(p = 2, \ldots, n)$ — минор матрицы

$$b = (u\delta)(u\delta)^* = u\delta^2 u^*,$$

составленный из ее последних $n - p + 1$ строк и столбцов. Матрицы b, u, δ^2 можно рассматривать как матрицы операторов b, u, δ^2 в n-мерном пространстве R_n по отношению к некоторому фиксированному ортонормальному базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и писать

$$b_{pq} = (bf_q, f_p) = (u\delta^2 u^* f_q, f_p) = (\delta^2 u^* f_q, u^* f_p). \tag{9.6}$$

Положим

$$u^*f_n = e_1, \quad u^*f_{n-1} = e_2, \ldots, u^*f_1 = e_n, \tag{9.7}$$

$$i\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{2} - 1 = \sigma_1, \ i\frac{\rho_{n-1} - \rho_{n-2}}{2} - 1 = \sigma_2, \ldots, i\frac{\rho_2}{2} - 1 = \sigma_{n-1}; \ \delta^2 = a. \tag{9.8}$$

Тогда векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют ортонормальный базис в R_n и когда u пробегает все элементы группы $\mathfrak{U}$, то $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пробегает все такие базисы с точностью до множителя в e_1, по модулю равного единице. При этом

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_n = (ae_1, e), \\ \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) \end{vmatrix}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) & \ldots & (ae_1, e_{n-1}) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) & \ldots & (ae_2, e_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \ldots & (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix}, \end{array}\right\} \tag{9.9}$$

так что, в силу (8.4) и (8.5):

I. *Сферическая функция* $\varphi(\delta)$ *представления* T_g *основной серии равна*

$$\varphi(\delta) = \int (ae_1, e_1)^{\sigma_1} \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) \end{vmatrix}^{\sigma_2} \cdots$$
$$\cdots \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) & \ldots & (ae_1, e_{n-1}) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) & \ldots & (ae_2, e_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \ldots & (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix}^{\sigma_{n-1}} d\mu(e), \tag{9.10}$$

где $d\mu(e)$ — *мера на множестве всех ортогональных систем* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *n-мерного пространства, инвариантная при их унитарных преобразованиях,* $a = \delta^2$, *а числа* σ_p *определяются по формуле* (9.8).

3. Вычисление сферической функции. Вычисление интеграла (9.10) мы будем проводить индуктивно. Пусть сначала $n = 2$. Тогда

$$(ae_1, e_1) = b_{22} = \tilde{\lambda}_1 |u_{21}|^2 + \tilde{\lambda}_2 |u_{22}|^2, \quad |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2 = 1,$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1^2$, $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2^2$ — собственные значения оператора a. Далее, выберем в качестве параметров в группе $\mathfrak{U}$ $t = |u_{22}|^2$ и $\theta_1 = \arg u_{21}$, $\theta_2 = \arg u_{22}$. Тогда инвариантная мера в $\mathfrak{U}$, т. е. в группе унитарных матриц второго порядка, задается формулой: $d\mu(u) = \frac{1}{(2\pi)^2}\, dt\, d\theta_1\, d\theta_2$ и формула (9.10) принимает вид:*

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^1 [\tilde{\lambda}_1 (1-t) + \tilde{\lambda}_2 t]^{\sigma_1}\, dt \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1\, d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{(\sigma_1+1)(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)} (\tilde{\lambda}_2^{\sigma_1+1} - \tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+1}),$$

т. е.

$$\varphi(\delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+1} - \tilde{\lambda}_2^{\sigma_1+1}}{(\sigma_1+1)(\mu_2-\mu_1)}. \tag{9.11}$$

Предположим теперь, что для группы порядка $n-1$ уже доказана формула

$$\varphi(\delta) = c\, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-2}+1} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-2}+1} & \dots & \tilde{\lambda}_{n-1}^{\sigma_{n-2}+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_2+\dots+\sigma_{n-2}+n-3} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_2+\dots+\sigma_{n-2}+n-3} & \dots & \tilde{\lambda}_{n-1}^{\sigma_2+\dots+\sigma_{n-2}+n-3} \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_{n-2}+n-2} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_{n-2}+n-2} & \dots & \tilde{\lambda}_{n-1}^{\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_{n-2}+n-2} \end{vmatrix}}{\prod\limits_{l=1}^{n-2} \prod\limits_{k=1}^{l} (\sigma_k + \dots + \sigma_l + l - k + 1) \prod\limits_{n-1 \geqslant p \geqslant q \geqslant 1} (\tilde{\lambda}_p - \tilde{\lambda}_q)},$$

$$c = 1!\, 2! \dots (n-2)!, \tag{9.12}$$

где $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$ — собственные значения оператора a; докажем, что эта формула будет также верна и для группы порядка n. Так как при $n = 2$ эта формула доказана, то она тем самым будет доказана для всякого n.

Для доказательства разобьем интегрирование в формуле (9.10) на интеграл по всем системам $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ при фиксированном e_n, а затем — на интеграл по всем e_n. Но при фиксированном e_n различные системы $e_1, \dots, e_{n-1}$ получаются друг из друга унитарным преобразованием в R_{n-1}, которое не изменяет последнего определителя в формуле (9.10). Следовательно, эту формулу можно переписать в виде

$$\varphi(\delta) = \int \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) & \dots & (ae_1, e_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \dots & (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix}^{\sigma_{n-1}} d\mu(e_n) \times$$

$$\times \int (ae_1, e_1)^{\sigma_1} \dots \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & \dots & (ae_1, e_{n-2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (ae_{n-2}, e_1) & \dots & (ae_{n-2}, e_{n-2}) \end{vmatrix}^{\sigma_{n-2}} d\mu(e_1, \dots, e_{n-1}). \tag{9.13}$$

* Формула (9.11) для сферических функций была получена ранее авторами в [6].

Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство всех векторов в R_n, ортогональных к e_n, а P — оператор проектирования на это подпространство. Внутренний интеграл в (9.13) есть функция φ, составленная для оператора PaP, в $n-1$-мерном пространстве* $\mathfrak{M}$. Следовательно, согласно нашему индуктивному предположению, этот интеграл выражается по формуле (9.12), где вместо $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{n-1}$ следует подставить собственные значения оператора PaP.

Определитель

$$\begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) & \ldots & (ae_1, e_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \ldots & (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix}$$

можно тоже выразить через собственные значения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ оператора PaP. Действительно, этот определитель есть определитель матрицы PaP и, следовательно, равен $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$. Окончательно интеграл (9.13) принимает вид:

$$\varphi(\delta) = \int (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-1})^{\sigma_{n-1}} \times \tag{9.13'}$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1^{\sigma_{n-2}+1} & \mu_2^{\sigma_{n-2}+1} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_{n-2}+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-3} & \mu_2^{\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-3} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-3} \\ \mu_1^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \mu_2^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} \end{vmatrix}}{\prod\limits_{l=1}^{n-2} \prod\limits_{k=1}^{l} (\sigma_k + \cdots + \sigma_l + l - k + 1) \prod\limits_{n-1 \geqslant p \geqslant q \geqslant 1} (\mu_p - \mu_q)} \, d\mu(e_n),$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ — собственные значения оператора PaP и, следовательно, зависят от e_n.

Найдем уравнение для этих собственных значений.

Если μ — одно из этих собственных значений, а f — соответствующий собственный вектор, то должно быть $Paf = \mu f$, т. е.

$$af = \mu f + \xi e_n. \tag{9.14}$$

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — базис во всем пространстве R_n, в котором оператор a диагонален, и пусть $af_k = \tilde{\lambda}_k f_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $u_1, u_2, \ldots, u_n$ проекции векторов f и e_n в этом базисе. Тогда, проектируя равенство (9.14) на вектор f, получим: $\tilde{\lambda}_k \xi_k = \mu \xi_k + \xi u_k$. Отсюда $\xi_k = \xi \frac{u_k}{\tilde{\lambda}_k - \mu}$. С другой стороны, $(f, e_n) = 0$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \bar{u}_k = 0$.

* Вместо a мы рассматриваем оператор PaP, так как подпространство, порожденное векторами $e_1, \ldots, e_{n-1}$, не инвариантно относительно a.

Подставляя вместо ξ_k его выражение, получим искомое уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|^2}{\widetilde{\lambda}_k - \mu} = 0 \tag{9.15}$$

для определения собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$.

Положим $t_k = |u_k|^2$, $\theta_k = \arg u_k$. Тогда в интеграле (9.13)

$$d\mu(e_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_n. \tag{9.16}$$

Перейдем от переменных интегрирования $t_1, \ldots, t_{n-1}$ к переменным $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$. Для этого нужно найти область изменения этих последних переменных и вычислить якобиан перехода от $t_1, \ldots, t_{n-1}$ к $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$.

Расположим числа $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_n$ в порядке их возрастания; пусть

$$\widetilde{\lambda}_1 < \widetilde{\lambda}_2 < \cdots < \widetilde{\lambda}_n. \tag{9.17}$$

В силу (9.15) числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ суть корни уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\widetilde{\lambda}_k - \mu} = 0, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \quad t_k > 0. \tag{9.18}$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\lambda}_1 < \mu_1 < \widetilde{\lambda}_2 < \mu_2 < \widetilde{\lambda}_3 < \cdots < \widetilde{\lambda}_{n-1} < \mu_{n-1} < \widetilde{\lambda}_n; \tag{9.19}$$

эти неравенства определяют границы для переменных μ_k.

Докажем, что, обратно, по заданным числам μ_k, удовлетворяющим неравенствам (9.19), единственным образом определяются числа t_k, удовлетворяющие условиям (9.17); тем самым будет доказано, что каждое из переменных μ_k полностью заполняет свой интервал $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Числа t_k определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\widetilde{\lambda}_k - \mu_i} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{9.20}$$

Положим $\nu_i = \frac{1}{\mu_i}$; $i = 1, \ldots, n-1$; $\nu_n = 0$; тогда уравнения (9.20) перепишутся в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1 & \text{при } i = n. \end{cases} \tag{9.21}$$

Согласно лемме Коши (см., например, [32] стр. 276) для определителя этой системы имеем

$$\det \left\| \frac{1}{1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k} \right\|_{i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n} = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant k < i \leqslant n} (\nu_i - \nu_k) \prod\limits_{1 \leqslant k < i \leqslant n} (\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_k)}{\prod\limits_{i,\, k=1} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k)}. \tag{9.22}$$

Отсюда

$$t_p = (-1)^{n+p} \det \left\| \frac{1}{1-\nu_i \widetilde{\lambda}_k} \right\|_{\substack{i=1,2,\ldots,n-1 \\ k=1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n}} : \det \left\| \frac{1}{1-\nu_i \widetilde{\lambda}_k} \right\|_{i,k=1,\ldots,n} =$$

$$= (-1)^{n+p} \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i_2 < i_1 \leqslant n-1} (\nu_{i_1} - \nu_{i_2}) \prod\limits_{1 \leqslant k_2 < k_1 \leqslant n} (\widetilde{\lambda}_{k_1} - \widetilde{\lambda}_{k_2})}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k)} :$$

$$: \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i_2 < i_1 \leqslant n} (\nu_{i_1} - \nu_{i_2}) \prod\limits_{1 \leqslant k_2 < k_1 \leqslant n} (\widetilde{\lambda}_{k_1} - \widetilde{\lambda}_{k_2})}{\prod\limits_{i=k=1}^{n} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k)} =$$

$$= (-1)^{n+p} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \nu_n \widetilde{\lambda}_k) \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\nu_n - \nu_k) \prod\limits_{k=1}^{p-1} (\widetilde{\lambda}_p - \widetilde{\lambda}_k) \prod\limits_{k=p+1}^{p} (\widetilde{\lambda}_k - \widetilde{\lambda}_p)}. \tag{9.23}$$

Так как по условию, $\nu_n = 0$, то это последнее равенство принимает вид

$$t_p = (-1)^{p+1} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \nu_k \prod\limits_{k=1}^{p-1} (\widetilde{\lambda}_p - \widetilde{\lambda}_k) \prod\limits_{k=p+1}^{n} (\widetilde{\lambda}_k - \widetilde{\lambda}_p)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \nu_k \prod\limits_{k \neq p} (\widetilde{\nu}_k - \widetilde{\lambda}_p)},$$

или, так как $\nu_k = \dfrac{1}{\mu_k}$, $k = 1, \ldots, n-1$,

$$t_p = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{i \neq p} (\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_p)}. \tag{9.24}$$

Из неравенств (9.19) следует, что знак числителя и знаменателя этой дроби совпадает со знаком $(-1)^{p-1}$; следовательно, эта дробь больше 0. Таким образом, полученные числа t_p удовлетворяют всем поставленным требованиям, и наше утверждение доказано.

Найдем теперь якобиан $\frac{D(t_1, \ldots, t_{n-1})}{D(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})}$. Из формулы (9.24) имеем:

$$\frac{\partial t_p}{\partial \mu_i} = \frac{\prod\limits_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} (\mu_j - \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{j\neq p} (\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_p)} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{j\neq p} (\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_p)} \cdot \frac{1}{\mu_i - \widetilde{\lambda}_p};$$

следовательно,

$$\frac{D(t_1, \ldots, t_{n-1})}{D(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})} = \frac{\prod\limits_{j,\, p=1}^{n-1} (\mu_j - \widetilde{\lambda}_p)}{\prod\limits_{\substack{i,p=1\\ j\neq p}}^{n-1} (\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_p)} \cdot \operatorname{Det} \left\| \frac{1}{\mu_i - \widetilde{\lambda}_p} \right\|_{i,\, p=1,\, \ldots,\, n-1} =$$

$$= \prod_{1\leqslant k<i\leqslant n-1} (\mu_i - \mu_k) : \prod_{1\leqslant l<p\leqslant n} (\widetilde{\lambda}_l - \lambda_p).$$

В силу неравенств (9.19), отсюда следует, что модуль этого определителя равен

$$\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n-1} (\mu_i - \mu_k) : \prod_{1\leqslant p<l\leqslant n} (\widetilde{\lambda}_l - \lambda_p). \tag{9.25}$$

Подставляя в формулу (9.13′), получаем:

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{\prod\limits_{1\leqslant l<p\leqslant n} (\widetilde{\lambda}_p - \widetilde{\lambda}_l) \prod\limits_{l=1}^{n-2} \prod\limits_{k=1}^{l} (\sigma_k + \cdots + \sigma_l + l - k - 1)} \times$$

$$\times \int\limits_{\widetilde{\lambda}_{n-1}}^{\widetilde{\lambda}_n} \int\limits_{\widetilde{\lambda}_{n-2}}^{\widetilde{\lambda}_{n-1}} \cdots \int\limits_{\widetilde{\lambda}_1}^{\widetilde{\lambda}_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1^{\sigma_{n-2}+1} & \mu_2^{\sigma_{n-2}+1} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_{n-2}+1} \\ \mu_1^{\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}+2} & \mu_2^{\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}+2} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \mu_2^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \mu_1^{\sigma_{n-1}} \mu_2^{\sigma_{n-1}} \ldots \mu_{n-1}^{\sigma_{n-1}} d\mu_1\, d\mu_2 \ldots d\mu_{n-1}. \tag{9.26}$$

Внося множители $\mu_1^{\sigma_{n-1}}$, $\mu_2^{\sigma_{n-1}+1}, \ldots$ в первый, соответственно второй, столбцы этого определителя и производя интегрирование, получим, что интеграл в (9.26) равен

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\sigma_k+\dots+\sigma_{n-1}+n-k)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \tilde\lambda_2^{\sigma_{n-1}+1}-\tilde\lambda_1^{\sigma_{n-1}+1} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_{n-1}+1}-\tilde\lambda_{n-1}^{\sigma_{n-1}+1} \\ \tilde\lambda_2^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2}-\tilde\lambda_1^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2}-\tilde\lambda_{n-1}^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde\lambda_2^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1}-\tilde\lambda_1^{\sigma_1+\dots+\sigma_n+n-1} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1}-\tilde\lambda_{n-1}^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\sigma_k+\dots+\sigma_{n-1}+n-k)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde\lambda_1^{\sigma_{n-1}+1} & \tilde\lambda_2^{\sigma_{n-1}+1} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_{n-1}+1} \\ \tilde\lambda_1^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \tilde\lambda_2^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde\lambda_1^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} & \tilde\lambda_2^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} \end{vmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (9.26), получим

$$\varphi(\delta)=\frac{1}{\prod\limits_{1\leqslant i<p\leqslant n}(\tilde\lambda_p-\tilde\lambda_i)\prod\limits_{l=1}^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{l}(\sigma_k+\dots+\sigma_l+l-k+1)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde\lambda_1^{\sigma_{n-1}+1} & \tilde\lambda_2^{\sigma_{n-1}+1} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_{n-1}+1} \\ \tilde\lambda_1^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+1} & \tilde\lambda_2^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde\lambda_1^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} & \tilde\lambda_2^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} & \dots & \tilde\lambda_n^{\sigma_1+\dots+\sigma_{n-1}+n-1} \end{vmatrix}, \tag{9.27}$$

а это выражение получается из формулы (9.12), если туда подставить n вместо $n-1$. Тем самым, формула (9.27) доказана для всякого n.

Подставим в эту формулу вместо $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-2}$ их выражения из (9.8), а вместо чисел $\tilde\lambda_i$ их выражения $\tilde\lambda_i=\tilde\lambda_i^2$, через диагональные элементы λ_i матрицы δ. Мы придем тогда к следующей теореме:

Теорема 4. *Если T_g — неприводимое представление основной серии группы $\mathfrak{G}$, отвечающее характеру* $\chi(\delta)=|\lambda_2|^{i\rho_2}|\lambda_3|^{i\rho_3}\dots|\lambda_n|^{i\rho_n}$, *то соответствующая сферическая функция определяется формулой*

$$\varphi(\delta) = \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\prod\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n}(\rho_q-\rho_p)\prod\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n}(\lambda_q^2-\lambda_p^2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{i\rho_2} & \lambda_2^{i\rho_2} & \dots & \lambda_n^{i\rho_2} \\ \lambda_1^{i\rho_3} & \lambda_2^{i\rho_3} & \dots & \lambda_n^{i\rho_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{i\rho_n} & \lambda_2^{i\rho_n} & \dots & \lambda_n^{i\rho_n} \end{vmatrix}.$$

§ 10. Разложение по представлениям унитарной подгруппы

Пусть

$$T_g f(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} f(u\bar{g}) \tag{10.1}$$

— представление основной серии, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Если элемент g пробегает подгруппу $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{G}$, то мы получаем представление T_u группы $\mathfrak{U}$. Следовательно, его можно разложить на неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$, каждое из которых конечномерно в силу компактности этой группы.

Выясним, какие неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ и с какой кратностью содержатся в представлении T_u.

Частный случай, а именно, для единичного представления группы $\mathfrak{U}$ был рассмотрен в теореме 3 § 9.

Итак, пусть $u \to c(u)$ — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{U}$ степени m (так что $c(u) = \|c_{pq}(u)\| p, q = 1, \dots, m$ — конечная унитарная матрица) и пусть это представление содержится в нашем представлении T_u. Это означает, что в пространстве $\mathfrak{H}_1$ представления T_u существует инвариантное подпространство $\mathfrak{M}$ размерности m базисом $f_1(u), \dots, f_m(u)$ таким, что всякий оператор T_{u_0}, $u_0 \in \mathfrak{U}$, рассматриваемый как оператор в $\mathfrak{M}$, имеет в этом базисе матрицу $c(u_0)$. В силу (10.1), последнее утверждение эквивалентно равенствам

$$\frac{\alpha_1(uu_0)}{\alpha_1(u)} f_q(uu_0) = \sum_{p=1}^{m} c_{pq}(u_0) f_p(u), \qquad q = 1, \dots, m. \tag{10.2}$$

Будем рассматривать систему $\{f_1(u), \dots, f_m(u)\}$ как вектор-функцию $f(u)$ со значениями из m-мерного пространства. Тогда условия (10.2) перепишутся в виде

$$\frac{\alpha_1(uu_0)}{\alpha_1(u)} f(uu_0) = c'(u_0) f(u), \tag{10.3}$$

где $c'(u)$ — транспонированная матрица.

Это равенство имеет место для почти всех пар (u, u_0), следовательно, при почти каждом u для почти всех u_0. Фиксируя одно из таких значений u, мы получим, что для почти всех u_0

$$f(uu_0) = \frac{\alpha_1(u)}{\alpha_1(uu_0)} c'(u_0) f(u). \tag{10.4}$$

Так как первая часть этого равенства есть непрерывная функция от u_0 (напомним, что $|\alpha(u)|=1$), то изменением функции $f(u)$ на множестве меры нуль можно добиться того, чтобы функция $f(u)$ была непрерывной.

Положим в (10.3) $u=e$ и $u_0=\gamma$; мы получим:

$$\alpha_1(\gamma)f(\gamma)=c'(\gamma)f(e). \tag{10.5}$$

Так как функция $f(u)$ удовлетворяет условию $f(\gamma u)=f(u)$, то $f(\gamma)=f(e)$; так как $\alpha_1(\gamma)=\chi(\gamma)$, то равенство (10.5) принимает вид:

$$c'(\gamma)f(e)=\chi(\gamma)f(e). \tag{10.6}$$

Будем обозначать через $\overline{f(u)}$ вектор с компонентами $\{\overline{f_1(u)},\ldots,\overline{f_m(u)}\}$, комплексно сопряженными компонентам вектора $f(u)$. Переходя в (10.6) к комплексно сопряженным числам, получим, что

$$\overline{c'(\gamma)}\,\overline{f(e)}=\overline{\chi(\gamma)}\cdot\overline{f(e)},$$

т. е.

$$c^*(\gamma)\overline{f(e)}=\overline{\chi(\gamma)}\cdot\overline{f(e)}. \tag{10.7}$$

Применяя к обеим частям этого равенства матрицу $c(\gamma)$, мы получим, что $\overline{f(e)}=\overline{\chi(\gamma)}\cdot c(\gamma)\cdot\overline{f(e)}$, следовательно,

$$c(\gamma)\overline{f(e)}=\chi(\gamma)\overline{f(e)}; \tag{10.8}$$

при этом $\overline{f(e)}\neq 0$. Действительно, полагая в (10.3) $n_0=u^{-1}$, находим, что $c'(u^{-1})f(u)=\frac{1}{\alpha_1(u)}f(e)$, т. е. $f(u)=\frac{1}{\alpha_1(u)}c_1(u)f(e)$. Если поэтому $f(e)=0$, то также $f(u)=0$, что невозможно.

Вектор $f_0\neq 0$ из пространства представления $c(u)$ называется *весовым вектором* этого представления с весом $\lambda(\gamma)$, если $c(\gamma)f_0=\lambda(\gamma)f_0$ для всех $\gamma\in\Gamma$. Наши рассуждения показывают, что вектор $f(e)$ есть весовой вектор представления $c(u)$ с весом $\chi(\gamma)$.

Пусть теперь, обратно, в пространстве представления $c(u)$ существует весовой вектор f_0 с весом $\chi(\gamma)$. Отсюда следует, что

$$c'(\gamma)\overline{f}_0=\chi(\gamma)\overline{f}_0. \tag{10.9}$$

Положим

$$f(u)=\frac{1}{\alpha_1(u)}c'(u)\overline{f}_0. \tag{10.10}$$

Функция $f(u)$ непрерывна и постоянна на каждом классе. Действительно,

$$f(\gamma u)=\frac{1}{\alpha_1(\gamma u)}c'(\gamma u)\overline{f}_0=\frac{1}{\alpha_1(\gamma)\alpha_1(u)}c'(u)c'(\gamma)\overline{f}_0=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1(\gamma)\alpha_1(u)}c'(u)\ \chi(\gamma)\overline{f}_0=\frac{1}{\alpha_1(u)}c'(u)\overline{f}_0=f(u).$$

Далее,

$$c'(u_0)f(u)=\frac{1}{\alpha_1(u)}c'(u_0)c'(u)\overline{f}_0=\frac{1}{\alpha_1(u)}c'(uu_0)f_0=\frac{\alpha_1(uu_0)}{\alpha_1(u)}f(uu_0),$$

т. е. функция $f(u)$ удовлетворяет соотношению (10.3). Следовательно, подпространство в $\mathfrak{H}_1$, натянутое на функции $f_1(u), \ldots, f_m(u)$, является инвариантным подпространством, в котором представления T_u и $c(u)$ совпадают.

Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Пусть T_g — представление основной серии группы $\mathfrak{G}$, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Для того, чтобы полученное из него представление T_u унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$ содержало данное неприводимое представление $c(u)$ этой подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве представления $c(u)$ содержался весовой вектор f_0 веса $\chi(\gamma)$.*

Выясним теперь, сколько раз данное неприводимое представление $c(u)$ содержится в представлении T_u основной серии. Пусть $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(r)}$ — линейно независимые инвариантные подпространства в $\mathfrak{H}_1$, в каждом из которых представление T_u эквивалентно представлению $c(u)$; пусть $f^{(1)}(u), f^{(2)}(u), \ldots, f^{(r)}(u)$ — соответствующие вектор-функции, так что

$$\frac{\alpha_1(uu_0)}{\alpha_1(u)} f^{(p)}(uu_0) = c'(u) f^{(p)}(u), \qquad p = 1, 2, \ldots, r. \tag{10.11}$$

Положим $f_0^{(p)} = \overline{f^{(p)}(e)}$, $p = 1, \ldots, r$; в силу доказанного выше, $f_0^{(p)}$ весовые векторы представления $c(u)$ с одним и тем же весом $\chi(\gamma)$. Эти векторы линейно независимы. Действительно, пусть

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_p f_0^{(p)} = 0, \tag{10.12}$$

следовательно, также

$$\sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p \overline{f}_0^{(p)} = 0.$$

Из формулы (10.10) следует тогда, что

$$\sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p f^{(p)}(u) = \sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p \frac{1}{\alpha_1(u)} c'(u) \overline{f}_0^{(p)} = \frac{1}{\alpha_1(u)} c'(u) \sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p \overline{f}_0^{(p)} = 0. \tag{10.13}$$

Так как пространства $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(r)}$ линейно независимы, то отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Следовательно, векторы $f_0^{(p)}$ линейно независимы.

Таким образом, число подпространств $\mathfrak{M}^{(p)}$ не превышает числа линейно независимых векторов с данным весом $\chi(\gamma)$.

Обратно, пусть теперь $f_0^{(1)}, \ldots, f_0^{(r)}$ — полная система линейно независимых весовых векторов с весом $\chi(\gamma)$. Пользуясь формулой (10.10), положим

$$f^{(p)}(u) = \frac{1}{\alpha_1(u)} c'(u) \overline{f}_0^{(p)}. \tag{10.14}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^{(p)}$ подпространство, натянутое на функции $f_1^{(p)}(u), \ldots, f_m^{(p)}(u)$. Докажем, что подпространства $\mathfrak{M}^{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots, r$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{m} \lambda_{pq} f_q^{(p)}(u) \equiv 0, \tag{10.15}$$

требуется доказать, что все $\lambda_{pq} = 0$. Формула (10.14) означает

$$f_q^{(p)}(u) = \frac{1}{\alpha_1(u)} \sum_{j=1}^{m} c_{jq}(u) \overline{f}_{0,j}^{(p)}, \qquad p = 1, \ldots, r;\ q = 1, \ldots, m.$$

Подставляя эти выражения в (10.15), получим, что

$$\sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{m} \lambda_{pq} \frac{1}{\alpha(u)} \sum_{j=1}^{m} c_{jq}(u) \overline{f}_{0,j}^{(p)} \equiv 0,$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{r} \lambda_{pq} \overline{f}_{0,j}^{(p)} \right) c_{jq}(u) \equiv 0.$$

Так как представление $c(u)$ по условию неприводимо, то функции $c_{jq}(u)$ линейно независимы. Поэтому из последнего равенства следует, что $\sum_{p=1}^{r} \lambda_{pq} \overline{f}_{0,j}^{(p)} = 0$; так как векторы $\overline{f}_0^{(p)}$ линейно независимы, то это возможно только тогда, когда все $\lambda_{pq} = 0$. Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 6. *Данное неприводимое представление $c(u)$ группы $\mathfrak{U}$ встречается в представлении основной серии T_u, соответствующем характеру χ, столько раз, сколько в пространстве представления $c(u)$ имеется линейно независимых весовых векторов f_0 с весом $\chi(\gamma)$.*

Из доказанной теоремы можно вывести интересное

Следствие. *В разложении представления T_u на неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ представление с наинизшим возможным старшим весом встречается лишь один раз. Этот наинизший старший вес есть $\chi(\gamma)$.*

Глава III

Вырожденные серии неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$

В главе I мы рассмотрели так называемую основную серию неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$ (унимодулярных матриц). Эти представления мы реализовали как представления в пространстве функций от матрицы z, т. е. функций от $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных переменных. Однако этим не исчерпываются все неприводимые унитарные представления группы $\mathfrak{G}$. В этой и следующей главах мы укажем так называемые *вырожденные и дополнительные серии* неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$. В дальнейшем будет доказано, что этими представлениями и представлениями главы I исчерпываются все неприводимые унитарные представления группы $\mathfrak{G}$.

Перейдем к краткому описанию вырожденных серий. Совсем грубо вырожденные серии можно охарактеризовать как представления в пространстве функций $f(z)$, зависящих, однако, не от всех $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров z_{pq}, а лишь от части их. Самым „вырожденным" из представлений является единичное представление, которое каждому элементу g ставит в соответствие тождественное преобразование в одномерном пространстве. Его можно трактовать как преобразование в одномерном пространстве констант, т. е. функций $f(z)$, не зависящих ни от одного из параметров z_{ik}.

Точнее, вырожденные серии представлений описываются так же, как представления главы I, именно, как преобразования в пространстве функций, определенных на классах смежности группы $\mathfrak{G}$ по некоторой ее подгруппе. Однако, в случае вырожденной серии эта подгруппа отличается от подгруппы K, рассмотренной в главе I.

Укажем, как строятся эти подгруппы. Пусть $n_1, \ldots, n_r$ — натуральные числа, в сумме равные n: $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Обозначим через g_{pq} матрицу, состоящую из n_p строк и n_q столбцов. Матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно представить себе как матрицу, составленную из матриц g_{pq}

$$g = \| g_{pq} \|, \qquad p, q = 1, \ldots, r.$$

Определение 1. *Обозначим через* $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ *подгруппу группы* $\mathfrak{G}$, *состоящую из матриц* $k = \| k_{pq} \|$, $p, q = 1, \ldots, r$ *таких, что* k_{pq} *есть нулевая матрица при* $p > q$.

Группа K, введенная в главе I, получается если k_{pq} не матрицы, а числа, т. е. когда $r = n$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$, т. е. в этих обозначениях должна быть записана как $K_{1, 1, \ldots, 1}$. Ясно, что $K_{1, 1, \ldots, 1}$ содержится в $K_{n_1, \ldots, n_r}$.

Определение 2. *Многообразие классов смежности* $\mathfrak{G}$ *по* $K_{n_1, \ldots, n_r}$ *мы будем обозначать* $Z'_{n_1, \ldots, n_r}$.

Многообразие Z', введенное в главе I, будет обозначаться сейчас через $Z'_{1, 1, \ldots, 1}$. Так как $K_{1, 1, \ldots, 1} \subset K_{n_1, \ldots, n_r}$, то класс смежности $Z'_{1, \ldots, 1}$ составлен из классов смежности $Z'_{n_1, \ldots, n_r}$, т. е. многообразие $Z'_{n_1, \ldots, n_r}$ имеет меньшую размерность чем $Z'_{1, \ldots, 1}$.

Представления вырожденных серий задаются операторами в пространстве функций на $Z'_{n_1, \ldots, n_r}$. Так как каждой точке $z' \in Z'_{n_1, \ldots, n_r}$ отвечает множество в многообразии $Z'_{1, 1, \ldots, 1}$, то функции на $Z'_{n_1, \ldots, n_r}$ можно рассматривать как функции на $Z'_{1, \ldots, 1}$, постоянные на некоторых множествах в $Z'_{1, 1, \ldots, 1}$.

С этими изменениями представления вырожденных серий строятся в основном аналогично представлениям основной серии, рассмотренной в главе I.

Укажем для примера простейшую после единичного представления вырожденную серию.

Представление из этой серии задается парой чисел (m, ρ), где m — целое, а ρ — действительное числа; его операторы действуют в пространстве функций $f(z_1, \ldots, z_{n-1})$ от $n - 1$ комплексных чисел $z_1, \ldots, z_{n-1}$, таких, что

$$\| f \|^2 = \int | f(z_1, \ldots, z_{n-1}) |^2 dx_1 dy_1 \ldots dx_{n-1} dy_{n-1} < +\infty$$

$$(z_p = x_p + i y_p, \qquad p = 1, \ldots, n-1)$$

и задаются формулой

$$T_g f(z_p) = f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1} z_j g_{jp} + g_{np}}{\sum\limits_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn}} \right) \cdot \left| \sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn} \right|^{m + i\rho - n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn} \right)^{-m}$$

(подробнее см. § 14, п. 1).

Для случая $n=2$ эта серия становится основной; она подробно описана авторами в [6].

Так называемая дополнительная серия будет рассмотрена в следующей главе.

§ 11. Некоторые подгруппы группы $\mathfrak{G}$

Пусть $\mathfrak{G}$ — унимодулярная группа порядка n и пусть $n_1, \ldots, n_r$ — натуральные числа такие, что $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Обозначим через g_{pq} матрицу, состоящую из n_p строк и n_q столбцов. Матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно тогда представить себе составленной из матриц g_{pq}:

$$g = \| g_{pq} \|, p, q = 1, \ldots, r \tag{11.1}$$

В дальнейшем все подгруппы мы будем строить для одной и той же системы чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$ и, если это нужно подчеркнуть особо, писать индексы $n_1, \ldots, n_r$. С этой точки зрения подгруппы, рассмотренные в § 2, следует обозначать через $K_{1, 1, \ldots, 1}$, $H_{1, 1, \ldots, 1}$ и т. д., ибо в этом случае $r = n$, $n_1 = \cdots = n_r = 1$. Однако в тех случаях, когда это не приведет к недоразумениям, мы будем опускать эти индексы.

1. Подгруппа K. Обозначим через K совокупность всех матриц $k = \| {}_{pq}k \| \in \mathfrak{G}$ таких, что

$$k_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p > q. \tag{11.2}$$

Определитель матрицы k равен произведению определителей ее диагональных элементов; поэтому, полагая для краткости

$$\det k_{jj} = \Lambda_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{11.3}$$

имеем

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdots \Lambda_r = 1. \tag{11.4}$$

Очевидно, K есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Отметим, что при любых $r, n_1, \ldots, n_r$ группа $K_{n_1, \ldots, n_r}$ содержит группу $K_{1, 1, \ldots, 1}$, рассмотренную в § 2.

Найдем лево- и правоинвариантную меры в группе K.

Для этого нужно каким-нибудь образом выбрать параметры в группе K; выберем их, например, следующим образом.

Обозначим через $\mathfrak{G}^{n_i}$ унимодулярную группу, а через $\mathfrak{A}^{n_i}$ группу всех неособенных матриц порядка n_i и положим $\widetilde{k}_{11} = \lambda k_{11}$, где $\lambda^n = \Lambda_2 \ldots \Lambda_r$. В силу соотношения (11.4), матрицы $\widetilde{k}_{11} \in \mathfrak{G}^{n_1}$. Так как точка $\lambda = 0$ исключается, то отображение $k_{11} \to \widetilde{k}_{11}$ локально взаимно-однозначно.

Левый сдвиг $k' = k^0 k$ сводится к преобразованию

$$\left.\begin{array}{l}
\widetilde{k}'_{11} = \varepsilon \widetilde{k}^0_{11} \widetilde{k}_{11}, \quad k'_{12} = k^0_{11} k_{12} + k^0_{12} k_{22}, \ldots, k'_{1r} = k^0_{11} k_{1r} + \cdots + k^0_{1r} k_{22}, \\
k'_{22} = k^0_{22} k_{22}, \quad k'_{23} = k^0_{22} k_{23} + k^0_{23}, \ldots, k'_{2r} = k_{22} k^0_{2r} + \cdots + k^0_{2r} k_{rr}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k'_{rr} = k^0_{rr} k_{rr} \quad (\varepsilon \text{ есть корень степени } n_1 \text{ из } 1, \text{ т. е. } \varepsilon^{n_1} = 1).
\end{array}\right\} \tag{11.5}$$

комплексный определитель которого равен

$$(\Lambda_1^0)^{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_r}(\Lambda_2^0)^{n_2+n_3+\cdots+n_r}(\Lambda_3^0)^{n_3+\cdots+n_r}\ldots(\Lambda_r^0)^{n_r}=$$
$$=(\Lambda_3^0)^{-n_2}(\Lambda_4^0)^{-n_2-n_3}\ldots(\Lambda_r^0)^{-n_2-n_3-\cdots-n_{r-1}}$$
$$(\Lambda_i^0=\det k_{ii}^0).$$

Поэтому лево-инвариантная мера в K определяется равенством

$$d\mu_l(k)=|\Lambda_3|^{2n_2}|\Lambda_4|^{2(n_2+n_3)}\ldots|\Lambda_r|^{2(n_2+n_3+\cdots+n_{r-1})}\times$$
$$\times\, d\mu(\widetilde{k}_{11})\cdot\prod_{p=2}^{r}d\mu(k_{pp})\cdot\prod_{p<q}d\mu(k_{pq}), \tag{11.6}$$

где $d\mu(\widetilde{k}_{11})$, $d\mu(k_{pp})\,(p>1)$ — инвариантные меры в группах $\mathfrak{G}^n$ и $\mathfrak{A}^{n_p}$ ($\mathfrak{G}^n$ — группа унимодулярных матриц порядка n_1, $\mathfrak{A}^{n_p}$ — группа всех невырожденных матриц порядка n_p), $p=2,\ldots,r$ соответственно, $d\mu(k_{pq})$, $p<q$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы k_{pq}. Совершенно аналогично найдем, что правоинвариантная мера в K определяется равенством

$$d\mu_r(k)=|\Lambda_2|^{-2(n_1+n_2)}|\Lambda_3|^{-2(n_1+n_2+n_3)}\ldots|\Lambda_r|^{-2(n_1+n_2+\cdots+n_r)}\times$$
$$\times\, d\mu(\widetilde{k}_{11})\prod_{p=2}^{r}d\mu(k)\prod_{p<q}d\mu(k_{pq}). \tag{11.7}$$

Поэтому, полагая

$$\beta(k)=\frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}, \tag{11.8}$$

имеем

$$\beta(k)=|\Lambda_2|^{2(n_1+n_2)}|\Lambda_3|^{2(n_1+2n_2+n_3)}\ldots|\Lambda_r|^{2(n_1+2n_2+\cdots+2n_{r-1}+n_r)}, \tag{11.9}$$

где

$$\Lambda_p=\det k_{pp}$$

или

$$\beta(k)=|\Lambda_1|^{-2(n_2+n_3+\ldots+n_r}|\Lambda_2|^{2(n_1-n_3-\cdots-n_r)}\ldots|\Lambda_r|^{2(n_1+n_2+\cdots+n_{r-1})}. \tag{11.10}$$

2. Подгруппа H. Обозначим через H совокупность всех матриц $h=\|h_{pq}\|\in\mathfrak{G}$ таких, что

$$h_{pq}=0 \text{ при } p<q. \tag{11.11}$$

Полагая

$$\det h_{jj}=\Lambda_j,\ j=1,2,\ldots,r, \tag{11.12}$$

мы получим, что для элементов $h\in H$ также должно иметь место соотношение (11.4).

При любых $n_1,\ldots,n_r$ группа $H_{n_1,\ldots,n_r}$ содержит группу $H_{1,1,\ldots,1}$, рассмотренную в п. 2 § 2.

Обозначим через g' матрицу, которая получается из g заменой строк столбцами. Операция $g \to g'$ есть обратный автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, т. е. $(g_1 g_2)' = g_2' g_1'$. Эта операция переводит K в H и H в K, и всякое множество $E \subset H$ — в множество $E' \subset K$. Поэтому лево (право)-инвариантная мера множества $E \subset H$ с точностью до постоянного множителя совпадает с право (лево)-инвариантной мерой соответствующих множеств $E' \subset K$. Отсюда следует, что лево- и право-инвариантные меры μ_l и μ_r в группе H определяются равенством

$$d\mu_l(h) = |\Lambda_2|^{-2(n_1+n_2)} |\Lambda_3|^{-2(n_1+n_2+n_3)} \ldots |\Lambda_r|^{-2(n_1+n_2+\cdots+n_r} \times$$

$$\times\, d\mu(\widetilde{h}_{11}) \prod_{p=1}^{r} d\mu(h_{pp}) \cdot \prod_{p>q} d\mu(h_{pq}), \tag{11.13}$$

$$d\mu_r(h) = |\Lambda_3|^{2n_2} |\Lambda_4|^{2(n_2+n_3)} \ldots |\Lambda_r|^{2(n_2+n_3+\cdots+n_{r-1})} \times$$

$$\times\, d\mu(\widetilde{h}_{11}) \prod_{p=2}^{r} d\mu(h_{pp}) \cdot \prod_{p>q} d\mu(h_{pq}), \tag{11.14}$$

где меры $d\mu(\widetilde{h}_{11})$, $d\mu(h_{pp})$, $d\mu(h_{pq})$ аналогичны мерам $d\mu(\widetilde{k}_{11})$, $d\mu(k_{pp})$, $d\mu(k_{pq})$ для группы K.

Полагая

$$\beta^{-1}(h) = \frac{d\mu_l(h)}{d\mu_r(h)}, \tag{11.15}$$

имеем:

$$\beta(h) = |\Lambda_1|^{-2(n_2+n_3+\cdots+n_r)} |\Lambda_2|^{2(n_1-n_3-\cdots-n_r)} \ldots |\Lambda_r|^{2(n_1+n_2+\cdots+n_{r-1})}. \tag{11.16}$$

3. Подгруппа Z. Обозначим через z совокупность матриц $z = \| z_{pq} \| \in H$, все диагональные элементы которых являются единичными матрицами. Таким образом,

$$z_{pq} = 0 \ \text{при}\ p < q,\ z_{pp} = 1, \tag{11.17}$$

где 0 и 1 обозначают здесь нулевую и единичную матрицы соответственно.

Очевидно Z — подгруппа группы H и при любых $n_1, \ldots, n_r$ содержится в группе $Z_{1,\ldots,1}$, рассмотренной в § 2; последняя же, в свою очередь, всегда содержится в группе $H_{n_1,\ldots,n_r}$.

Возьмем за параметры в группе Z матрицы z_{pq}, $p > q$.

Левый и правый сдвиги сводятся к линейному преобразованию элементов этих матриц, определитель которого равен единице. Поэтому в группе Z есть двусторонне-инвариантная мера:

$$d\mu(z) = \prod_{p>q} d\mu(z_{pq}), \tag{11.18}$$

где $d\mu(z_{pq})$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы z_{pq}.

4. Подгруппа Z. Обозначим через $\mathbf{Z}$ совокупность матриц $\zeta = \| \zeta_{pq} \| \in K$, все диагональные элементы которых являются единичными матрицами. Таким образом,

$$\zeta_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p > q, \ \zeta_{pp} = 1. \tag{11.19}$$

Очевидно, $\mathbf{Z}$ — подгруппа группы K и при любых $n_1, \ldots, n_r$ содержится в группе $\mathbf{Z}_{1,\ldots,1}$, рассмотренной в главе I; последняя же всегда содержится в группе $K_{n_1,\ldots,n_r}$.

Обратный автоморфизм $g \to g'$ переводит Z в $\mathbf{Z}$ и обратно. Поэтому в группе $\mathbf{Z}$ существует двусторонне-инвариантная мера

$$d\mu(\zeta) = \prod_{p<q} d\mu(\zeta_{pq}). \tag{11.20}$$

5. Подгруппа D. Обозначим через D совокупность всех матриц $\delta \in \mathfrak{G}$, в которых $\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$. Матрицу δ_{pp} обозначим для краткости через δ_p и будем писать $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$.

Полагая снова

$$\Lambda_p = \det \delta_p, \tag{11.21}$$

имеем

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_r = 1. \tag{11.22}$$

Выберем в группе D параметры $\tilde{\delta}_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, где $\tilde{\delta}_1 = \lambda\delta_1$ и где $\lambda^{n_1} = \Lambda_2 \ldots \Lambda_r$.

Тогда $\tilde{\delta}_1 \in \mathfrak{G}^{n_1}$; следовательно, группа D локально изоморфна прямой сумме групп $\mathfrak{G}^{n_1}, \mathfrak{A}^{n_2}, \ldots, \mathfrak{A}^{n_r}$, где $\mathfrak{G}^{n_1}$ — группа унимодулярных матриц порядка n_1, $\mathfrak{A}^{n_k}$ — группа всех невырожденных матриц порядка n_k. Поэтому в группе D есть двусторонне-инвариантная мера

$$d\mu(\delta) = d\mu(\tilde{\delta}_1)\, d\mu(\delta_2) \ldots d\mu(\delta_r), \tag{11.23}$$

где

$$d\mu(\tilde{\delta}_1), \ d\mu(\delta_2), \ldots, d\mu(\delta_r).$$

— дифференциалы инвариантных мер в $\mathfrak{G}^{n_1}, \mathfrak{A}^{n_2}, \ldots, \mathfrak{A}^{n_r}$ соответственно.

Отметим еще очевидное соотношение

$$D = K \cap H. \tag{11.24}$$

Группа $D_{n_1,\ldots,n_r}$ содержит, очевидно, группу $D_{1,\ldots,1}$, рассмотренную в главе I, § 2.

§ 12. Некоторые соотношения между введенымин подгруппами]

Так же, как и в случае $r = n$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$, разобранном в главе I, элементы группы $\mathfrak{G}$ за некоторыми исключениями представляются в виде произведений элементов наших подгрупп.

1. Представление элементов группы K. Так как Z и D являются подгруппами группы K, то всякое произведение вида $\delta\zeta$ или $\zeta\delta$ есть элемент группы K. Обратно, всякий элемент $k \in K$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$k = \delta\zeta, \tag{12.1}$$

а также в виде

$$k = \zeta\delta, \tag{12.2}$$

причем элемент δ в обоих представлениях данного элемента один и тот же.

Действительно, равенство (12.1) эквивалентно системе матричных равенств

$$k_{pq} = \delta_p \zeta_{pq}, \quad p > q.$$

При $p = q$ получаем:

$$\delta_p = k_{pp}. \tag{12.3}$$

Отсюда

$$\zeta_{pq} = k_{pp}^{-1} k_{pq}. \tag{12.4}$$

Аналогично, (12.2) имеет единственное решение

$$\delta_p = k_{pp}, \quad \zeta_{pq} = k_{pq} k_{qq}^{-1}. \tag{12.5}$$

2. Представление элементов группы H. Всякое произведение вида δz или $z\delta$ есть элемент группы H. Обратно, так же, как и выше, доказывается, что всякий элемент h можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$h = \delta z, \tag{12.6}$$

а также в виде

$$h = z\delta, \tag{12.7}$$

причем элемент δ в обоих представлениях данного элемента h один и тот же.

3. Представление элементов группы $\mathfrak{G}$. Перейдем теперь к представлению произвольных элементов группы $\mathfrak{G}$. Так же, как и в § 2, мы будем обозначать через $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \dots p_m \\ q_1 & q_2 \dots q_m \end{pmatrix}$ минор матриц g, составленный из элементов с номерами строк $p_1, \dots, p_m$ и столбцов $q_1, \dots, q_m$, а через g_m — минор $\begin{pmatrix} m & m+1 \dots n \\ m & m+1 \dots n \end{pmatrix}$.

Докажем, что всякий элемент g, за некоторыми исключениями, можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$g = \zeta h. \tag{12.8}$$

Исключение представляют лишь те элементы, для которых хотя бы один из миноров

$$g_{n_1 + \dots + n_p + 1}, \quad p = 1, 2, \dots, r - 1 \tag{12.9}$$

обращается в нуль.

Для доказательства подберем элемент ζ' так, чтобы $\zeta' g \in H$. По определению группы H, это условие эквивалентно системе матричных равенств

$$\sum_{s=p}^{r} \zeta'_{ps} g_{sq} = 0 \text{ при } p < q,$$

т. е. равенств

$$\sum_{s=p+1}^{r} \zeta'_{ps} g_{sq} = -g_{pq}, \quad q = p+1, \ldots, n. \tag{12.10}$$

Условимся обозначать через $\zeta_{(i,k)}$, $g_{(i,k)}$ обычные (нематричные) элементы матриц $\zeta, g, \ldots$. Равенства (12.10) можно тогда переписать в виде

$$\sum_{j=n_1+\cdots+n_p+1}^{n} \zeta'_{(n_1+n_2+\cdots+n_{p-1}+\alpha, j)} g_{(j, n_1+n_2+\cdots+n_{q-1}+\beta)} = $$
$$= -g_{(n_1+\cdots+n_{p-1}+\alpha,\, n_1+\cdots+n_{q-1}+\beta)}, \tag{12.11}$$
$$q = p+1, \ldots, n; \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n_p; \quad 1 \leqslant \beta \leqslant n_q.$$

При фиксированных p и α эти равенства представляют собою систему уравнений относительно $\zeta_{n_1+n_2+\cdots+n_{p-1}+\alpha}$, определитель которой есть как раз минор $g_{n_1+\cdots+n_p+1}$.

Таким образом, если все эти миноры отличны от нуля, то система (12.11), следовательно, и система (12.10) имеют одно вполне определенное решение. Поэтому существует один и только один элемент ζ' такой, что $\zeta' g = h \subset H$. Отсюда $g = \zeta'^{-1} h$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что имеет место представление

$$g = kz \tag{12.12}$$

при условии, что все миноры $g_{n_1+\cdots+n_p+1} \neq 0$. Его можно также получить из представления $g = \zeta h$, ибо, в силу доказанного в пп. 1, 2,

$$g = \zeta h = \zeta \delta z = kz.$$

Так же, как и в § 2, можно найти выражения для элементов матриц ζ, h и k, z в формулах (12.8) и (12.12) через элементы матрицы g. Для этого заметим, что умножение матрицы g слева на ζ сводится к прибавлению к строке с номером $n_1 + \cdots + n_{p-1} + \alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n_p$ линейной комбинации строк с номерами $j \geqslant n_1 + n_2 + \cdots + n_p + 1$. Поэтому при таком умножении остаются инвариантными все те миноры матрицы g, которые вместе со строкой с номером $n_1 + \cdots + n_{p-1} + \alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n_p$ содержат все строки с номерами $j \geqslant n_1 + n_2 + \cdots + n_p + 1$. В частности, минор $g_{n_1+\cdots+n_p+1}$ должен равняться аналогичному минору матрицы h; последний же, как легко видеть, равен $\Lambda_{p+1}\Lambda_{p+2}\ldots\Lambda_r$, где $\Lambda_q = \det h_{qq}$.

Таким образом, $\Lambda_{p+1}\Lambda_{p+2}\dots\Lambda_r = g_{n_1+\dots+n_p+1}$, откуда

$$\Lambda_p = \frac{g_{n_1+\dots+n_{p-1}+1}}{g_{n_1+\dots+n_p+1}}. \tag{12.13}$$

Обозначим через $h_{pq}^{(\lambda,\,\mu)}$ элементы матрицы h_{pq} в формуле (12.8) и рассмотрим минор

$$\begin{pmatrix} n_1+\dots+n_{p-1}+\lambda, & n_1+\dots+n_p+1 & n_1+\dots+n_p+2,\dots, n \\ n_1+\dots+n_{q-1}+\mu, & n_1+\dots+n_p+1 & n_1+\dots+n_p+2,\dots, n \end{pmatrix}$$

матрицы g. В силу сказанного выше, он должен быть равен соответствующему минору в матрице h. Последний же, как легко видеть, равен $h_{pq}^{(\lambda,\,\mu)}\cdot g_{n_1+\dots+n_p+1}$. Поэтому

$$h_{pq}^{(\lambda,\mu)} = \frac{1}{g_{n_1+\dots+n_p+1}} \begin{pmatrix} n_1+\dots+n_{p-1}+\lambda, \; n_1+\dots+n_p+1, \; n_1+\dots+n_p+2,\dots, n \\ n_1+\dots+n_{q-1}+\mu, \; n_1+\dots+n_p+1, \; n_1+\dots+n_p+2,\dots, n \end{pmatrix},$$

$$p \geqslant q, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant n_p, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n_q. \tag{12.14}$$

Аналогично, обозначая через $k_{pq}^{(\lambda,\,\mu)}$ элементы матрицы k_{pq} в формуле (12.12) так же, как и выше, найдем: (12.15)

$$k_{pq}^{(\lambda,\,\mu)} = \frac{1}{g_{n_1+\dots+n_q+1}} \begin{pmatrix} n_1+\dots+n_{p-1}+\lambda, \; n_1+\dots+n_q+1, \; n_1+\dots+n_q+2,\dots, n \\ n_1+\dots+n_{q-1}+\mu, \; n_1+\dots+n_q+1, \; n_1+\dots+n_q+2,\dots, n \end{pmatrix}.$$

Что касается ζ и z в формулах (12.8) и (12.12), то, согласно пп. 1 и 2, они находятся по формулам:

$$\zeta_{pq} = k_{pq}k_{qq}^{-1}; \quad z_{pq} = h_{pp}^{-1}h_{pq}. \tag{12.16}$$

При $r = n$, $n_1 = \dots = n_r = 1$ эти формулы переходят в соответствующие формулы главы I.

4. Классы смежности по K. Как и в п. 4 § 3, мы рассмотрим правые классы смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K, где теперь $K = K_{n_1,\dots,n_r}$ с произвольными $n_1,\dots,n_r$. Обозначим эти классы через z', а их совокупность — через Z'. При умножении справа на g класс z' переходит в другой класс, который обозначим через $z'\overline{g}$; группа $\mathfrak{G}$ реализуется, таким образом, как группа преобразований $z' \to z'\overline{g}$ в пространстве Z'.

Если $g = kz$ (см. п. 3 § 7), то в классе z', содержащем g, содержится также z, причем других элементов группы Z в этом классе нет. Мы отождествим тогда z' с z; тем самым группа Z заполнит все пространство Z', за исключением многообразия низшей размерности.

Преобразование $\overline{g}$ можно также рассматривать, как преобразование в Z и писать $z\overline{g}$ вместо $z'\overline{g}$, но только элемент $z\overline{g}$ определен не для всех, а для почти всех $z \in Z$.

Очевидно, равенство $z_1 = z\overline{g}$ означает, что для некоторого элемента k_1 $zg = k_1 z_1$.

§ 13. Интегральные соотношения

1. Интегральное соотношение на группе K. Пусть $f(k)$ — функция, суммируемая на группе K по отношению к лево-инвариантной мере. Так как всякий элемент k можно единственным образом представить в виде $k = \delta\zeta$, то $f(k)$ можно также рассматривать как функцию от δ и ζ. Поэтому для сведения интеграла* $\int f(k)\,d\mu_l(k)$ к повторным интегралам по D и Z достаточно найти соотношения между мерами K, D и Z при условии $k = \delta\zeta$.

Дифференцируя это равенство и полагая $d_l k = k^{-1}dk$, найдем, что

$$d_l k = \zeta^{-1} d_l \delta \zeta + d_l \zeta. \tag{13.1}$$

Равенство (13.1) в матричной записи принимает вид

$$\left.\begin{aligned} d_l k_{pp} &= d_l \delta_p, \\ d_l k_{pq} &= \sum_{s=p}^{q} \zeta'_{ps} \cdot d_l \delta_s \cdot \zeta_{sq} + d\zeta_{pq}, \quad p < q, \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

где ζ'_{pq} — матрицы, составляющие обратную матрицу ζ^{-1}. Из этих последних равенств следует, что определитель, составленный из компонент $d_l k$, равен произведению определителя, составленного из компонент $d_l \delta$, на определитель, составленный из компонент $d_l \zeta$. Следовательно, $d\mu_l(k) = d\mu(\delta)\,d\mu(\zeta)$. Отсюда, по теореме Фубини,

$$\int f(k)\,d\mu(k) = \int d\mu(\delta) \int f(\delta\zeta)\,d\mu(\zeta) = \int d\mu(\zeta) \int f(\delta\zeta)\,d\mu(\delta). \tag{13.3}$$

Аналогично, найдем, что

$$\int f(k)\,d\mu_r(k) = \int d\mu(\delta) \int f(\zeta\delta)\,d\mu(\zeta) = \int d\mu(\zeta) \int f(\zeta\delta)\,d\mu(\delta). \tag{13.4}$$

2. Интегральные соотношения на группе H. Совершенно аналогично

$$\int f(h)\,d\mu_l(h) = \int d\mu(\delta) \int f(\delta z)\,d\mu(z) = \int d\mu(z) \int f(\delta z)\,d\mu(\delta), \tag{13.5}$$

$$\int f(h)\,d\mu_r(h) = \int d\mu(\delta) \int f(z\delta)\,d\mu(z) = \int d\mu(z) \int f(z\delta)\,d\mu(\delta). \tag{13.6}$$

3. Интегральные соотношения на группе $\mathfrak{G}$. Пусть теперь $f(g)$ — функция, суммируемая на группе $\mathfrak{G}$ по отношенаю к инвариантной мере в $\mathfrak{G}$. Согласно п. 3 § 12, мы можем положить $g = kz$; следовательно, $f(g) = f(kz)$ есть функция от k и z. Исключение представляют

---

* Всюду в дальнейшем, если не указаны области интегрирования, интеграл рассматривается по всей группе, указанной соответствующим дифференциалом меры.

лишь те элементы d группы $\mathfrak{G}$, для которых обращается в нуль хотя бы один из миноров $g_{n_1+\dots+n_p+1}$. Эти исключительные элементы g образуют в группе $\mathfrak{G}$ многообразие низшей размерности и, значит, меры нуль относительно инвариантной меры в $\mathfrak{G}$.

Для сведения интеграла по $\mathfrak{G}$ к повторному интегралу по K и Z остается найти связь между инвариантными мерами в $\mathfrak{G}$, K и Z при условии $g = kz$. Дифференцируя это равенство и полагая

$$d_l g = g^{-1} dg, \quad d_l k = k^{-1} dk, \quad d_l z = z^{-1} dz,$$

найдем, что

$$d_l g = z^{-1} d_l k z + d_l z. \tag{13.7}$$

В матричной записи это последнее равенство сводится к равенствам

$$d_l g_{pq} = \sum_{t=q}^{r} \sum_{s=1}^{p} z'_{ps} d_l k_{st} z_{tq} =$$

$$= d_l k_{pq} + \sum_{t=q}^{r} \sum_{s=1}^{p-1} z'_{ps} d_l k_{st} z_{tq} + \sum_{t=q+1}^{r} d_l k_{pt} z_{tq} \qquad \text{при } p \leqslant q,$$

$$d_l g_{pq} = \sum_{t=q}^{r} \sum_{s=1}^{p} z'_{ps} d_l k_{st} z_{tq} + d_l z_{pq} \qquad \text{при } p > q,$$

где z'_{pq} — матрицы, составляющие обратную матрицу z^{-1}.

Отсюда видно, что переход от переменных $d_l g_{pq}$ к переменным $d_l k_{pq}$ и $d_l z_{pq}$ есть линейное преобразование, определитель которого равен единице. Поэтому так же, как и в п. 2, мы получаем, что при условии $g = kz$

$$d\mu(g) = d\mu_l(k)\, d\mu(z).$$

Отсюда по теореме Фубини

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu_l(k) \int f(kz)\, d\mu(z) = \int d\mu(z) \int f(kz)\, d\mu_l(k). \tag{13.8}$$

Аналогично найдем, что

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu_r(h) \int f(\zeta h)\, d\mu(\zeta) = \int d\zeta \int f(\zeta h)\, d\mu_r(h). \tag{13.9}$$

Эти формулы можно получить также, повторяя рассуждения п. 3 § 4. Именно, равенство $g = kz$ устанавливает взаимно-однозначное и дифференцируемое соотношение между параметрами в g и k, z. Поэтому должно иметь место равенство вида

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu(z) \int f(kz)\, \omega(k, z)\, d\mu_l(k).$$

Из инвариантности мер $d\mu(g)$, $d\mu_l(k)$ и $d\mu(z)$ легко следует, что $\omega(k, z) = \text{const}$. Из равенства (13.7) при $z = l$ легко следует, что эта константа равна единице.

4. Формула преобразования меры $d\mu(z)$. Найдем, как преобразуется мера $d\mu(z)$ при переходе от z к $\overline{zg^0}$; другими словами, найдем соотношение между $d\mu(z)$ и $d\mu(z_1)$ при условии $zg^0 = k_1 z_1$.

Для этой цели рассмотрим функцию

$$f(g) = f(kz) = f_1(k) f_2(z),$$

где $f_1(k)$, $f_2(z)$ — суммируемые функции на K (по $d\mu_l(k)$ и Z соответственно; согласно формуле (13.8),

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f_1(k)\, d\mu_l(k) \cdot \int f_2(z)\, d\mu(z). \tag{13.10}$$

С другой стороны, в силу инвариантности меры $d\mu(g)$,

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(gg^0)\, d\mu(g) = \int f(kzg^0)\, d\mu(g) =$$

$$= \int f(kk_1 z_1)\, d\mu(g) = \int f_2(z_1) \left[\int f_1(kk_1)\, d\mu_l(k) \right] d\mu(z). \tag{13.11}$$

Но в силу (11.8),

$$\int f_1(kk_1)\, d\mu_l(k) = \int f_1(kk_1)\, \beta(k)\, d\mu_r(k) = \int f_1(k)\, \beta(kk^{-1})\, d\mu_r(k) =$$

$$= \beta^{-1}(k_1) \cdot \int f_1(k)\, \beta(k)\, d\mu_r(k) = \beta^{-1}(k_1) \int f_1(k)\, d\mu_l(k).$$

Поэтому

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f_2(z_1)\, \beta^{-1}(k_1)\, d\mu(z) \cdot \int f_1(k)\, d\mu_l(k)$$

и сравнение с (13.11) дает:

$$\int f_2(z)\, d\mu(z) = \int f_2(z_1)\, \beta^{-1}(k_1)\, d\mu(z). \tag{13.12}$$

Чтобы переписать эту формулу в более удобном виде, распространим функцию $\beta(k)$ за пределы группы K, полагая

$$\beta(kz) = \beta(k). \tag{13.13}$$

Согласно результатам п. 3 § 12, функция $\beta(g)$ будет тем самым определена на всей группе $\mathfrak{G}$ за исключением некоторого многообразия низшей размерности.

Из формулы $zg^0 = k_1 z_1$ следует тогда, что $\beta(k_1) = \beta(zg^0)$ и $z_1 = zg^0$. Поэтому формулу (13.12) можно переписать в виде

$$\int f_2(z)\, d\mu(z) = \int f_2(\overline{zg^0})\, \beta^{-1}(zg^0) d\mu(z). \tag{13.14}$$

Очевидно, эта формула эквивалентна равенству

$$\frac{d\mu(z\bar{g}_0)}{d\mu(z)} = \beta^{-1}(zg^0), \tag{13.15}$$

которое и дает искомое соотношение между $d\mu(z\bar{g}_0)$ и $d\mu(z)$.

§ 14. Основные серии неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$.

1. Описание основных серий. В главе I была построена основная серия представлений группы $\mathfrak{G}$. Напомним, что пространство, в котором действуют операторы этих представлений, можно реализовать в виде совокупности $\mathfrak{H}$ всех функций $f(z)$ с суммируемым квадратом на группе $Z = Z_{1, 1, \ldots, 1}$, причем операторы представления задаются формулой

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\bar{g}),$$

где

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta), \quad \alpha(\zeta\delta z) = \alpha(\delta),$$

а χ — характер группы $D = D_{1, 1, \ldots, 1}$.

Совершенно аналогичными формулами задаются представления и в случае произвольной группы $Z = Z_{n_1, \ldots, n_r}$. Именно, пусть теперь $\mathfrak{H}$ — совокупность всех функций $f(z)$, $z \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$ с суммируемым квадратом. Введем в группе $D = D_{n_1, \ldots, n_r}$ функцию

$$\chi(\delta) = \chi_2(\Lambda_2)\chi_3(\Lambda_3)\ldots\chi_r(\Lambda_r), \tag{14.1}$$

где $\chi_j(\Lambda)$, $j = 2, \ldots, r$ — произвольные характеры мультипликативной группы комплексных чисел Λ, т. е. $\chi_j(\Lambda) = |\Lambda|^{m_j + i\rho_j} \Lambda^{-m_j}$. Очевидно,

$$\chi(\delta_1\delta_2) = \chi(\delta_1)\chi(\delta_2).$$

Положим, далее,

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta) \tag{14.2}$$

и

$$\alpha(g) = \alpha(\delta) \quad \text{для} \quad g = \zeta\delta z. \tag{14.3}$$

Тем самым функция $\alpha(g)$ определена на всей группе $\mathfrak{G}$, за исключением некоторого многообразия низшей размерности.

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathfrak{H}$ оператор T_g, полагая для $f(z) \in \mathfrak{H}$

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\bar{g}). \tag{14.4}$$

Оператор T_g изометричен. Действительно,

$$\|T_g f\|^2 = \int |\alpha(zg)|^2 |f(z\bar{g})|^2 d\mu(z) = \int \beta^{-1}(zg) |f(z\bar{g})|^2 d\mu(z).$$

Согласно формуле (13.15), этот последний интеграл равен

$$\int |f(z)|^2 d\mu(z) = \|f\|^2.$$

Докажем, что соответствие $g \to T_g$ есть представление группы $\mathfrak{G}$. Мы имеем

$$T_{g_1} \cdot T_{g_2} f(z) = T_{g_1} \alpha(zg_2) f(z\overline{g_2}) = \alpha(zg_1) \alpha(z\overline{g_1}g_2) f((z\overline{g_1}(\overline{g_2}), \qquad (14.5)$$

$$T_{g_1 g_2} f(z) = \alpha(zg_1g_2) f(z\overline{g_1g_2}). \qquad (14.6)$$

Положим $zg_1 = k_1z_1$, следовательно, $z_1 = z\overline{g_1}$, $\alpha(zg_1) = \alpha(k_1)$; тогда

$$\alpha(zg_1g_2) = \alpha(k_1z_1g_2) = \alpha(k_1)\alpha(z_1g) = \alpha(zg_1)\alpha(z\overline{g_1}\cdot g_2)$$

и, кроме того, $(z\overline{g_1})\overline{g_2} = z \cdot \overline{g_1 \cdot g_2}$. Поэтому правые части (14.5) и (14.6) равны, так что

$$T_{g_1} \cdot T_{g_2} = T_{g_1g_2}.$$

В частности, полагая $g_1 = g$, $g_2 = g^{-1}$, мы получаем, что T_g и $T_{g^{-1}}$ — обратные друг другу и определенные во всем пространстве $\mathfrak{H}_z$ — изометрические операторы. Следовательно, оператор T_g унитарен.

Тем самым доказано, что соответствие $g \to T_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}$.

При фиксированных $n_1, \ldots, n_r$ каждой системе характеров $\chi_2(\Lambda_2), \ldots, \chi_r(\Lambda_r)$ отвечает некоторое представление $g \to T_g$. Совокупность всех таких представлений мы назовем *основной серией представлений с индексом* $(n_1, \ldots, n_r)$.

Если $r = n$, следовательно, $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 1$, то $f(z)$ есть функция от $\frac{n(n-1)}{2}$ независимых комплексных параметров. Эта серия представлений (с индексом $(1, 1, \ldots, 1)$) была рассмотрена в главе I и была там названа основной серией представлений. Начиная с этого момента, мы будем ее называть *основной невырожденной серией представлений группы* $\mathfrak{G}$.

Если же $r < n$, то $f(z)$ есть функция от независимых комплексных параметров, число которых меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

Соответствующую серию представлений мы будем называть *основной вырожденной серией представлений группы* $\mathfrak{G}$.

Укажем простой пример вырожденной серии представлений. Положим $r = 2$ и рассмотрим подгруппу $K_{n-1,1}$. Точки многообразия $Z_{n-1,1}$ классов смежности $\mathfrak{G}$ по $K_{n-1,n}$ описываются (за некоторыми исключениями) матрицами из $Z_{n-1,1}$, т. е. матрицей: $\begin{pmatrix} I & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix}$, где I — матричная единица $n-1$-го порядка, z_{21} — совокупность $n-1$ чисел

$z_1, \ldots, z_{n-1}$. Итак, матрицу $z \in Z_{n-1, 1}$ можно задавать ее строчкой: $z \sim (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Представление будет реализовано в пространстве функций $f(z_1, \ldots, z_{n-1})$ с интегрируемым квадратом. Вычислим $z\overline{g} = \widetilde{z}$. Пусть $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1 \ldots, \widetilde{z}_{n-1})$. Тогда легко получить

$$\widetilde{z}_p = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jp} + g_{np}}{\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn}},$$

т. е. группа $\mathfrak{G}$ рассматривается здесь как группа проективных преобразований многообразия $Z'_{n-1, 1}$; $Z'_{n-1, 1}$ есть, следовательно, $n-1$-мерное проективное пространство.

Само представление описывается двумя числами: целым числом m и действительным числом ρ и задается формулой *

$$T_g f(z_p) = f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jp} + g_{np}}{\sum_{j=1}^{n-1} z_j g_{jn} + g_{nn}}\right) \cdot \left|\sum z_j g_{jn} + g_{nn}\right|^{m+i\rho-n} \left(\sum z_j g_{jn} + g_{nn}\right)^{-m}.$$

2. Формулы для представлений вырожденных серий в параметрах. Операторы T_g представлений основных серий были даны в групповых терминах формулой (14.4). Пользуясь формулами § 12, можно переписать эту формулу в комплексных параметрах. Обозначая элементы матрицы $z = \|z_{pq}\|$, где z_{pq} — матрица с n_p строчками и n_q столбцами, через $z_{pq}^{(\alpha, \beta)}$, $p,q = 1, \ldots, r$; $\alpha = 1, \ldots, n_p$; $\beta = 1, \ldots, n_q$, $p > q$, мы можем функцию $f(z) \in \mathfrak{H}_z$ представить как функцию $f(z_{pq}^{(\alpha, \beta)})$, удовлетворяющую условию

$$\int |f(z_{pq}^{(\alpha, \beta)})|^2 \prod d\mu(z_{pq}^{(\alpha, \beta)}) < +\infty, \tag{14.7}$$

где при $z_{pq}^{(\alpha, \beta)} = x_{pq}^{(\alpha, \beta)} + i y_{pq}^{(\alpha, \beta)}$,

$$d\mu(z_{pq}^{(\alpha, \beta)}) = dx_{pq}^{(\alpha,\beta)} dy_{pq}^{(\alpha, \beta)},$$

а произведение $\prod$ распространяется на все индексы $p > q$ и $\alpha = 1, \ldots, n_p$, $\beta = 1, \ldots, n_q$. Для нахождения элементов $z_{pq}^{(\alpha, \beta)}$ преобразованной матрицы z' достаточно заметить, что $zg = k'z'$ и воспользоваться формулами (12.14) и (12.16), в которых вместо g поставлена

* Для случая $n = 2$ это есть основная невырожденная серия (см. [6]). Для больших n это одна из сильно вырожденных серий представлений.

матрица $g' = zg$. Далее, для нахождения $\alpha(zg)$ достаточно заметить, что, согласно формуле (12.13),

$$\Lambda_p = \frac{g^1_{n_1+\ldots+n_{p-1}+1}}{g^1_{n_1+\ldots+n_p+1}}, \tag{14.8}$$

где штрих обозначает, что вместо матрицы g подставлена матрица $g^1 = zg$. Характер $\chi_p(\Lambda_p)$ в мультипликативной группе комплексных чисел задается некоторым целым числом m_p и действительным числом ρ_p по формуле

$$\chi_p(\Lambda_p) = |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p}.$$

Поэтому, пользуясь формулой (11.9) для $\beta(k)$ получаем, что

$$\alpha(\delta) = |\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2-(n_1+n_2)} \Lambda_2^{-m_2} \times$$
$$\times |\Lambda_3|^{m_3+i\rho_3-(n_1+2n_2+n_3)} \Lambda_3^{-m_3} \ldots |\Lambda_r|^{m_r+i\rho_r-(n_1+2n_2+\ldots+2n_{r-1}+n_r)} \Lambda_r^{-m_r}.$$

Подставляя сюда выражение (14.8) для Λ_p, найдем, что

$$\alpha(zg) = |g^1_{n_1+1}|^{m_2+i\rho_2-(n_1+n_2)} g^{1\,-m_2}_{n_1+1} |g^1_{n_1+n_2+1}|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-(n_2+n_3)} \cdot g^{1\,-m_3}_{n_1+n_2+1} \times \ldots$$
$$\ldots \times |g^1_{n_1+\ldots+n_{r-1}+1}|^{m_r-m_{r-1}+i(\rho_r-\rho_{r-1})-(n_{r-1}+n_r)} g^{1\,-m_r}_{n_1+\ldots+n_{r-1}+1}. \tag{14.9}$$

Таким образом, в этих обозначениях формула (14.4) для T_g принимает вид

$$T_g f(z^{(\alpha,\beta)}_{pq}) =$$
$$= |g^1_{n_1+1}|^{m_2+i\rho_2-(n_1+n_2)} g^{1\,-m_2}_{n_1+1} |g^1_{n_1+n_2+1}|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-(n_2+n_3)} \cdot g^{1\,-m_3}_{n_1+n_2+1} \times \ldots$$
$$\ldots \times |g^1_{n_1+\ldots+n_{r-1}+1}|^{m_r-m_{r-1}+i(\rho_r-\rho_{r-1})-(n_{r-1}+n_r)} g^1_{n_1+\ldots+n_{r-1}+1} \cdot f(z'^{(\alpha,\beta)}_{pq}). \tag{14.10}$$

Формулы для вычисления $z^{1(\alpha,\beta)}_{pq}$ указаны в § 12 (формулы (12.14) и (12.16), в которых нужно вместо g подставить $g^1 = zg$).

3. Неприводимость представлений основных вырожденных серий. В § 5 главы I была показана неприводимость всех представлений основной невырожденной серии. Докажем теперь неприводимость представлений всех остальных основных серий.

Теорема 2'. *Все представления каждой из основных серий неприводимы.*

Доказательство. В главе V (см. п. 5 § 23) мы докажем, что если $n'_1, n'_2, \ldots, n'_r$ те же числа $n_1, n_2, \ldots, n_r$, но написанные в другом порядке, то каждое представление серии $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ эквивалентно некоторому представлению серии $(n'_1, n'_2, \ldots, n'_r)$ и обратно. Поэтому, не нарушая общности, можем считать, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r$.

Введем группу

$$\widetilde{H} = H_{m;\,1,\,\dots,\,1},$$

где единица повторяется n_r раз. Таким образом, элементы $\widetilde{h}$ группы $\widetilde{H}$ имеют вид:

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} \widetilde{h}_{11} & h_{12} & \dots h_{1m} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{h}_{m1} & \widetilde{h}_{m2} & \dots \widetilde{h}_{mm} & 0 & \dots 0 \\ \widetilde{h}_{m+1,\,1} & \widetilde{h}_{m+1,\,2} & \dots \widetilde{h}_{m+1,\,m} & \widetilde{h}_m & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{h}_{n,\,1} & \widetilde{h}_{n,\,2} & \dots \widetilde{h}_{n,\,m} & \widetilde{h}_{n,\,m+1} & \dots \widetilde{h}_{n_0 m} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что все операторы $T_{\widetilde{h}}$, $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$ образуют неприводимую систему. Тем самым будет также доказана неприводимость и всей системы операторов T_g, $g \in \mathfrak{G}$.

Доказательство мы проведем индукцией по r. Именно, полагая, что утверждение верно для $r-1$ $(r \geqslant 2)$, докажем, что оно также верно для r. Кроме того, докажем справедливость утверждения для $r=2$.

Итак, пусть утверждение верно для $r-1$. Представим элементы $z \in Z_{n_1,\,\dots,\,n_r}$ в виде:

$$z = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ u & 1_{n_r} \end{pmatrix} = \hat{z}' \cdot \hat{u},$$

где

$$\hat{z}' = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & 1_{n_r} \end{pmatrix}, \qquad \hat{u} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ u & 1_{n_r} \end{pmatrix},$$

u — матрица из m строк и n_r столбцов, $z' \in Z_{n_1,\dots,n_{r-1}}$, и 1_m, 1_{n_r} — единичные матрицы порядков m и n_r соответственно.

Функцию $f(z)$ можно тогда рассматривать как $f(z',\, u)$, причем из формулы (11.18) для $d\mu(z)$ следует, что

$$\|f\|^2 = \int |f(z)|^2\, d\mu(z) = \int |f(z',\, u)|^2\, d\mu(z')\, d\mu(u).$$

Поэтому для почти всех z' функция $f(z',\, u)$ имеет суммируемый квадрат по $d\mu(u)$.

Сделаем преобразование Фурье, полагая *

$$\varphi(z',\, w) = \frac{1}{(2\pi)^{mn_r}} \int f(z',\, u)\, e^{i\,\mathrm{Re}\, s_p(uw^*)}\, d\mu(u), \tag{14.11}$$

* Указанное выражение действительно есть преобразование Фурье по примененным u_{ik} — элементам матрицы u, так как

$$s_p(uw^*) = \sum_{i,\,k} u_{ik} \overline{w}_{ik}.$$

где w — матрица из n_r строк и m столбцов; w^* — сопряженная матрица, $s_p(uw^*)$ — след матрицы uw^*. Согласно теореме Планшереля, это преобразование есть изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ на пространство H всех функций $\varphi(z', w)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(z', w)|^2 d\mu(z') d\mu(w). \tag{14.12}$$

Поэтому все операторы представления можно рассматривать как операторы в пространстве H.

Пусть A — ограниченный оператор в H, перестановочный со всеми операторами $T_{\widetilde{h}}$; неприводимость этой системы будет доказана, если мы покажем, что A кратен единице.

Элемент

$$\hat{u}_0 = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ u_0 & 1_{n_r} \end{pmatrix}$$

принадлежит группе $\hat{H}$. Поэтому оператор A перестановочен со всеми операторами T_{u_0}. С другой стороны, $\hat{u}_0 \in Z$; поэтому из формулы (14.4) для T_g следует, что

$$T_{\hat{u}_0} f(z) = f(z\hat{u}_0) = f(z'\hat{u}\,\hat{u}_0).$$

В силу равенства

$$\hat{u}\hat{u}_0 = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ u & 1_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ u_0 & 1_{n_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ u + u_0 & 1_{n_r} \end{pmatrix}$$

это означает, что

$$T_{\hat{u}_0} f(z', u) = f(z', u + u_0). \tag{14.13}$$

Если поэтому рассматривать $T_{\hat{u}_0}$, как оператор в пространстве H, то, в силу (14.11),

$$T_{\hat{u}_0} \varphi(z', w) = e^{-i \operatorname{Re} s_p (w_0 w^*)} \varphi(z', w).$$

Оператор A перестановочен со всеми такими операторами $T_{\hat{u}_0}$, следовательно, со всеми операторами умножения на ограниченную функцию от w. Поэтому оператор A должен иметь вид

$$A\varphi(z', w) = a(w)\varphi(z', w), \tag{14.14}$$

где $a(w)$ — оператор в пространстве $\mathfrak{H}^{(1)}$ функций $f(z')$ с суммируемым квадратом по группе $Z_{n_1, \ldots, n_{r-1}}$, ограниченный для почти всех w, норма $\|a(w)\|$ которого есть существенно ограниченная функция от w.

Положим, далее,

$$\delta^0 = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} 1_m & 0 \\ 0 & \lambda^m 1_{nr} \end{pmatrix},$$

где λ — произвольное комплексное число. Из формулы (14.4) следует, что $T_{\delta^0} f(z) = \alpha(\delta^0) f(\delta^{0^{-1}} z \delta^0)$. С другой стороны,

$$\delta^{0^{-1}} z \delta^0 = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ \lambda^{-2} u & 1 \end{pmatrix};$$

поэтому

$$T_{\delta^0} f(z', u) = f(z', \lambda^{-2} u). \tag{14.15}$$

Отсюда, в силу (14.11), получаем:

$$T_{\delta^0} \varphi(z', w) = \alpha(\delta^0)\, \omega(\lambda)\, \varphi(z', \bar{\lambda}^2 w), \tag{14.16}$$

где $\omega(\lambda)$ — якобиан перехода от u к $u' = \lambda^{-2} u$.

Так как $\delta^0 \in \widetilde{H}$, то оператор A перестановочен со всеми такими операторами T_{δ^0}. В силу (14.16), это дает: $a(\bar{\lambda}^2 w) = a(w)$ для почти всех w. Так как $\bar{\lambda}^2$ — произвольное комплексное число $\neq 0$, то это условие можно также переписать в виде:

$$a(\lambda w) = a(w). \tag{14.17}$$

Положим теперь

$$g^0 = \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix},$$

где g' — произвольный элемент унимодулярной группы $\mathfrak{G}$ порядка m, h'' — произвольный элемент группы $H_{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n_r}}$ порядка n_r. Найдем T_g; положим для этого

$$z' g' = \delta' \zeta' z_1', \quad \delta' \in D_{n_1, \ldots, n_{r-1}}, \quad \zeta' \in Z_{n_1, \ldots, n_{r-1}}, \quad z_1' \in Z_{n_1, \ldots, n_{r-1}}$$

(следовательно, $z_1' = \overline{z' g'}$) и

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix}, \quad \hat{\zeta}' = \begin{pmatrix} \zeta' & 0 \\ 0 & 1_{n_r} \end{pmatrix}, \quad \hat{z}_1' = \begin{pmatrix} z_1' & 0 \\ 0 & 1_{n_r} \end{pmatrix}. \tag{14.18}$$

Тогда $\delta \in D_{n_1, \ldots, n_r}$, $\hat{\zeta}' \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$, $\hat{z}' \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$ и

$$\hat{z}' g^0 = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta' \zeta' z_1' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix} = \delta \hat{\zeta}' \hat{z}'. \tag{14.19}$$

Кроме того,

$$g^{0^{-1}} \hat{u} g^0 = \begin{pmatrix} g'^{-1} & 0 \\ 0 & h''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h''^{-1} u g' & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.20}$$

Из равенств (14.19) и (14.20) следует, что

$$z g^0 = \hat{z} \hat{u} g^0 = \delta \hat{\zeta}' \hat{z}_1' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h''^{-1} u g' & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.21}$$

Поэтому

$$f(z\bar{g}^0) = f(z_1', h''^{-1}ug') = f(z'\bar{g}', h''^{-1}ug'). \qquad (14.22)$$

Так как, кроме того, $\Lambda_r = \det h'' = 1$, то из формул (14.21) следует, что $\alpha(zg^0) = \alpha(\delta) = \alpha'(\delta') = \alpha'(z'g')$, где α' — функция α, построенная для унимодулярной группы $\mathfrak{G}'$ порядка $m-n-n_r$ по характеру $\chi' = (\chi_2, \ldots, \chi_{r-1})$. Поэтому формула (14.22) дает:

$$T_{g^0} f(z', u) = \alpha'(z'g') f(z'\bar{g}', h''^{-1}ug') = T_{g'} f(z', h''^{-1}ug'), \qquad (14.23)$$

где $T_{g'}$ — представление унимодулярной группы $\mathfrak{G}'$ в пространстве $\mathfrak{H}^{(1)}$. Отсюда, рассматривая T_{g^0} как оператор в H, получаем:

$$T_{g^0}\varphi(z', w) = \frac{1}{(2\pi)^{n_r m}} \int T_{g'} f(z', h''^{-1}ug')\, e^{i \operatorname{Re} s_p (uw^*)}\, d\mu(u) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n_r m}}\, \omega(g^0) \int T_{g'} f(z', u')\, e^{i \operatorname{Re} s_p (h''u'g'^{-1}w'')}\, d\mu(u'), \qquad (14.24)$$

где $\omega(g^0)$—якобиан перехода от u к $u' = h''^{-1}ug'$. Так как $s_p(h''u'g'^{-1}w^*) = s_p(u'g'^{-1}w^*h'')$, то равенство (14.24) дает:

$$T_{g^0}\varphi(z', w) = \omega(g^0)\, T_{g'}\varphi(z', h''^*wg'^{*-1}). \qquad (14.25)$$

Так как $g^0 \in \widetilde{H}$, то этот оператор T_{g^0} также перестановочен с оператором A. Но, в силу (14.14),

$$T_{g^0}A\varphi(z', w) = \omega(g^0)\, T_{g'}a(h''wg'^{*-1})\, \varphi(z', h''^*wg'^{*-1}),$$

$$AT_{g^0}\varphi(z', w) = \omega(g^0)\, a(w)\, T_{g'}\varphi(z', h''^*wg'^{*-1}).$$

Следовательно, должно быть $a(w)\, T_{g'} = T_{g'}a(h''^*wg'^{*-1})$. Отсюда

$$T_{g'}^{-1} a(w)\, T_{g'} = a(h''^*wg'^{*-1}). \qquad (14.26)$$

Причем для каждой пары (g', h'') это равенство имеет место для почти всех w. Полагая здесь $g' = e$, получим, что $a(h''^*w) = a(w)$. В соединении с (14.17) это дает:

$$a(\lambda h''^* w) = a(w), \qquad (14.27)$$

причем для каждой пары (λ, h'') равенство (14.27) имеет место для почти всех w; поэтому равенство (14.27) имеет место для почти всех систем (λ, h'', w). В силу теоремы Фубини, отсюда следует, что для почти каждого фиксированного w равенство (14.27) имеет место для почти всех систем (λ, h'').

Условимся считать две матрицы w_1 и w_2 эквивалентными и писать $w_1 \sim w_2$, если $\lambda h''^* w_1 = w_2$. Совокупность всех матриц w разобьется тогда на классы эквивалентных между собою элементов.

Обозначим эти классы через $\mathfrak{w}$, а их совокупность — через $\mathfrak{W}$.

Равенство (14.27) означает, что почти вдоль каждого из классов $\mathfrak{w}$ функция $a(w)$ остается существенно постоянной. Ее можно поэтому рассматривать как функцию $a(\mathfrak{w})$ от $\mathfrak{w}$, определенную почти всюду на $\mathfrak{W}$.

Рассмотрим теперь преобразование $w' = wg'^{*^{-1}}$ в пространстве матриц w. Очевидно, оно переводит эквивалентные матрицы w в эквивалентные. Следовательно, его можно рассматривать как преобразование $\mathfrak{w} \to \mathfrak{w}\bar{g}'$ в пространстве $\mathfrak{W}$. Так как соответствие $g' \to g'^{*^{-1}}$ есть автоморфизм группы $\mathfrak{G}'$, то эту группу можно рассматривать как группу преобразований $\mathfrak{w} \to \mathfrak{w}\bar{g}'$ пространства $\mathfrak{W}$. Равенство (14.26) переходит тогда в

$$T_{g'}^{-1} a(\mathfrak{w})\, T_{g'} = a(\mathfrak{w}\bar{g}'), \tag{14.28}$$

причем это последнее равенство имеет место для почти всех систем $(g', \mathfrak{w})$.

Пространство $\mathfrak{W}$ транзитивно по отношению к группе $\mathfrak{G}'$. Действительно, по нашему предположению $r > 2$, следовательно, $m = n_1 + \cdots + n_{r-1} > n_r$. Поэтому мы можем положить

$$w_0 = (0', 1_{n_r}), \quad g'^{*^{-1}} = \begin{pmatrix} p & q \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}, \tag{14.29}$$

где p, s — квадратные матрицы порядков $m - n_r$ и n_r — соответственно $0'$, ρ — матрицы из n_r строк и $m - n_r$ столбцов, q — матрица из n_r строк и $m - n_r$ столбцов, причем $0'$ состоит из нулей. Тогда

$$w_0 g'^{*^{-1}} = (\rho, \sigma), \tag{14.30}$$

а правая часть представляет собой произвольную матрицу w.

Из транзитивности пространства $\mathfrak{W}$ следует, что его можно рассматривать как совокупность правых классов смежности группы $\mathfrak{G}'$ по стационарной подгруппе какой-либо точки из $\mathfrak{W}$, например, класса $\mathfrak{w}_0$, содержащего матрицу w_0 в (14.29).

Обозначим через $\mathfrak{A}$ эту стационарную подгруппу. Функцию $a(w)$ можно таким образом рассматривать как функцию на правых классах смежности группы $\mathfrak{G}'$ по подгруппе $\mathfrak{A}$. Следовательно, функцию $a(w)$ можно продолжить на почти всю группу $\mathfrak{G}'$, считая ее постоянной на каждом классе.

Полученную функцию обозначим через $a(g')$. Равенство (14.28) можно тогда переписать в виде:

$$T_{g'} a(g_1')\, T_{g'} = a(g_1' g'), \tag{14.31}$$

причем это последнее равенство имеет место для почти всех пар (g_1', g').

Положим $g_1'g' = g_2'$; тогда (14.31) примет вид:

$$T_{g_2'}^{-1} T_{g_1'} a(g_1') \, T_{g_1'}^{-1} T_{g_2'} = a(g_2')$$

или

$$T_{g_1'} a(g_1') \, T_{g_1'}^{-1} = T_{g_2'} a(g_2') \, T_{g_2'}^{-1}. \tag{14.32}$$

В силу предыдущего, равенство (14.32) имеет место для почти всех пар $(g_1', g_1''g_2')$, следовательно, также для почти всех пар (g_1', g_2'). Оно означает поэтому, что функция $T_{g'}a(g')T_{g'}$ постоянна почти для всех значений g'. Обозначая через a это постоянное значение, имеем, следовательно,

$$a(g') = T_{g'} a T_{g'} \tag{14.33}$$

для почти всех g'. Правая часть (14.33) есть непрерывная функция в смысле нормы в $\mathfrak{H}^{(1)}$; почти всюду на $\mathfrak{G}'$ она совпадает с функцией $a(g')$, постоянной на почти каждом правом классе смежности по подгруппе $\mathfrak{A}$. В силу теоремы Фубини, отсюда следует, что правая часть (14.33) существенно постоянна вдоль почти каждого из этих классов. В силу своей непрерывности, она просто постоянна вдоль почти каждого класса; отсюда по непрерывности снова следует, что она вообще постоянна на каждом классе.

В частности, для элементов g' из стационарной группы $\mathfrak{A}$ получаем:

$$T_{g'} a \, T_{g'} = T_e a T_e,$$

следовательно, оператор a перестановочен со всеми операторами $T_{g'}$, $g' \in \mathfrak{A}$.

Положим теперь $\tilde{H}' = H_{n_1+\dots+n_{r-1},\, 1, \dots, 1}$, где 1 повторяется n_{r-1} раз, и докажем, что $\tilde{H}' \subset \mathfrak{A}$. Отсюда будет следовать, что оператор a перестановочен со всеми операторами $T_{\tilde{h}^{-1}}$, $\tilde{h}' \in \tilde{H}'$. В силу нашего индуктивного предположения, операторы $T_{\tilde{h}^{-1}}$ образуют неприводимую систему; следовательно, оператор a кратен единице. Но тогда из формул (14.33) и (14.14) следует, что A также кратен единице, что и требовалось доказать.

Итак, остается показать, что $\tilde{H}' \subset \mathfrak{A}$.

Группа $\mathfrak{A}$ есть стационарная подгруппа точки w_0.

По определению, это означает, что для $g \in \mathfrak{A}$ существуют матрица h'' и число λ такие, что $w_0 g'^{*^{-1}} = \lambda h''$.

В силу (14.29) и (14.30) это означает, что

$$(\rho, \sigma) = (0', \lambda h''^*).$$

Следовательно, $\rho = 0'$; $\sigma = \lambda h''^*$. Таким образом,

$$g'^{*^{-1}} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & \lambda h''^* \end{pmatrix}, \quad g'^{-1} = \begin{pmatrix} p^* & 0 \\ g^* & \bar{\lambda} h'' \end{pmatrix}.$$

Но тогда такой же вид имеет и матрица g', так что

$$\mathfrak{A} = H_{m-n_r;\, 1, \ldots, 1},$$

где 1 повторяется n_r раз.

Так как по условию $n_{r-1} \geqslant n_r$, то отсюда непосредственно следует, что

$$\widetilde{H}' = H_{m-n_{r-1};\, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_{r-1}}} \subset H_{m-n_r,\, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_r}} = \mathfrak{A}.$$

Для завершения доказательства остается рассмотреть случай $r = 2$. В этом случае z' отсутствует и $A\varphi(w) = a(w)\varphi(w)$, где $a(w)$ — числовая функция. Вместо соотношений (14.27) и (14.28) мы получаем теперь, что

$$a(w) = a(\lambda h''^* w g'^{*-1}) \tag{14.34}$$

для почти всех систем $\{w, h'', g', \lambda\}$.

Так как при фиксированном w выражение $\lambda h''^* w g'^{*-1}$ пробегает совокупность всех матриц w, то из (14.34) следует, что функция $a(w)$ существенно постоянна. Следовательно, и в этом случае оператор A кратен единице.

§ 15. Описание представлений вырожденных серий при помощи унитарной подгруппы

В §§ 11—14 была дана реализация представлений вырожденных серий при помощи $Z = Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, где $n_1, n_2, \ldots, n_r$ — целые числа, в сумме равные n, определяющие данную вырожденную серию.

Другая реализация может быть получена при помощи унитарной подгруппы, аналогично тому, как это было сделано в главе II.

Отличие состоит лишь в том, что роль группы Γ, по которой берутся классы смежности унитарной группы $\mathfrak{U}$, играет теперь пересечение группы $\mathfrak{U}$ с группой $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, как мы увидим ниже, это пересечение состоит из всех матриц $\gamma \in \mathfrak{G}$ вида

$$\gamma = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & u_r \end{pmatrix},$$

где u_p — унитарная матрица порядка n_p, $p = 1, 2, \ldots, r$.

Чтобы избежать повторений, мы лишь в кратких чертах наметим, как реализуются вырожденные серии представлений при помощи унитарной подгруппы.

1. Описание многообразия Z'. Как было показано в п. 1 § 6, всякую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде

$$g = ku, \quad k \in K_{1, 1, \ldots, 1}, \quad u \in \mathfrak{U}. \tag{15.1}$$

С другой стороны,

$$K_{1,1,\ldots,1} \subset K_{n_1, n_2, \ldots, n_r};$$

поэтому разложение (15.1) является также разложением вида

$$g = ku, \quad k \in K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}, \quad u \in \mathfrak{U}. \tag{15.2}$$

Пусть $g = k_1 u_1$ — другое разложение того вида, тогда $ku = k_1 u_1$; следовательно, $k_1^{-1} k = u_1 u^{-1}$.

Положим $u_0 = u_1 u^{-1}$; из последнего равенства следует, что элемент u_0 принадлежит пересечению групп $K = K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $\mathfrak{U}$. Обозначим это пересечение через* $\Gamma = \Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Мы получаем, что

I. *Разложение* (15.2) *определяет матрицу и с точностью до левого множителя* $\gamma \in \Gamma$.

Обозначим через $\tilde{u}$ правый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе Γ, а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ — совокупность всех этих классов. Предложение I означает, что:

II. *В каждом правом классе смежности z' группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $K = K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ содержится один и только один правый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе $\Gamma = \Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.*

В силу этого предложения, каждый класс z' можно отождествить с содержащимся в нем классом $\tilde{u}$ и пространство Z' — с пространством $\tilde{\mathfrak{U}}$. Преобразование $z_1' = \overline{z'g}$ можно тогда рассматривать как преобразование $\tilde{u}_1 = \widetilde{ug}$ соответствующих классов $\tilde{u}$.

Найдем, из каких матриц состоит группа Γ. Если $\gamma \in \Gamma$, то γ — унитарная матрица; следовательно, $\gamma^* = \gamma^{-1} \in \Gamma$. С другой стороны, $\gamma^{-1} \in K$, $\gamma^* \in H$, поэтому равенство $\gamma^{-1} = \gamma'$ означает, что γ^{-1} (следовательно, и γ) принадлежит пересечению группы K и H. Поэтому матрица γ должна иметь вид

$$\gamma = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & u_r \end{pmatrix}, \tag{15.3}$$

где u_p — унитарная матрица порядка n_p.

Итак, *группа* Γ *состоит из всех матриц вида* (15.3), *где* u_p — *унитарная матрица порядка* n_p, *и*

$$\det u_1 \det u_2 \ldots \det u_r = 1.$$

2. Интегральные соотношения. Повторяя те же рассуждения, что и в § 7, получим формулу:

$$\int f(u)\, d\mu(u) = \int d\mu(\tilde{u}) \int f(\gamma u)\, d\mu(\gamma), \tag{15.4}$$

---

* В дальнейшем, как и выше, мы опускаем индексы $n_1, n_2, \ldots, n_r$, когда это не вызывает недоразумения.

где $d\mu(\widetilde{u})$ — мера в $\widetilde{\mathfrak{U}}$, инвариантная по отношению к преобразованию $\widetilde{u} \to \widetilde{u u_0}$. В частности, если функция $f(u)$ удовлетворяет условию $f(\gamma u) = f(u)$, а мера $d\mu(\gamma)$ пронормирована так, что $\int d\mu(\gamma) = 1$, то

$$\int f(u)\, d\mu(u) = \int f(\widetilde{u})\, d\mu(\widetilde{u}), \quad f(\widetilde{u}) = f(u) \text{ при } u \in \widetilde{u}. \tag{15.5}$$

Далее,

$$\int x(g)\, d\mu(g) = c \int d\mu(\widetilde{u}) \int x(ku)\, d\mu_l(k), \tag{15.6}$$

$$\frac{d\mu(\widetilde{u g_0})}{d\mu(\widetilde{u})} = \frac{\beta(\widetilde{u g_0})}{\beta(u g_0)} \tag{15.7}$$

и

$$d\mu(z) = c\beta^{-1}(\widetilde{u})\, d\mu(\widetilde{u}) \tag{15.8}$$

при условии, что z и $\widetilde{u}$ определяют один и тот же класс z'. При этом c обозначает некоторую константу, а

$$\left.\begin{aligned} \beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)} = |\Lambda_2|^{2(n_1+n_2)}\, |\Lambda_3|^{2(n_1+2n_2+n_3)} \ldots |\Lambda_r|^{2(n_1+2n_2+\cdots+2n_{r-1}+n_r)}, \\ \Lambda_p = \det k_{pp} \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

(см. (11.9)).

Мы не останавливаемся на вычислении константы c, так как ее значение нам не понадобится.

3. Второй способ описания представлений вырожденных серий. Применяя результаты пп. 1, 2 и повторяя дословно те же рассуждения, что и в § 8, придем к следующему результату:

Представления вырожденных серий описываются операторами в пространстве $\mathfrak{H}_1$ функций $\varphi(\widetilde{u})$, определенных на классах смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе $\Gamma = \Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, для которых $\int |\varphi(\widetilde{u})|^2\, d\mu(\widetilde{u}) < +\infty$; скалярное произведение в $\mathfrak{H}_1$ задается формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(\widetilde{u})\, \overline{\varphi_2(\widetilde{u})}\, d\mu(\widetilde{u}). \tag{15.10}$$

Операторы представления T_g задаются формулой

$$T_g \varphi(\widetilde{u}) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\widetilde{u g}), \tag{15.11}$$

где фиксированная функция $\alpha_1(g)$, определяющая представление, есть произвольная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\alpha_1(kg) = \alpha_1(k)\, \alpha_1(g), \qquad k \in K_{n_1, n_2, \ldots, n_r} \tag{15.12}$$

и требованию

$$|\alpha_1(u)| = 1. \tag{15.13}$$

При этом функции

$$\alpha_1(g) \quad \text{и} \quad \alpha_1'(g) = \frac{\alpha_1(g)}{\varkappa(\tilde{u})} \quad \text{при } g = ku,$$

где $\varkappa(\tilde{u})$ — *произвольная функция с* $|\varkappa(\tilde{u})| \equiv 1$, *определяют одно и то же представление.*

Пространство $\mathfrak{H}_1$ можно также реализовать как пространство функций $\varphi(u)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(\gamma u) = \varphi(u), \quad \gamma \in \Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}, \tag{15.14}$$

$$\int |\varphi(u)|^2 d\mu(u) < +\infty. \tag{15.15}$$

Тогда формула для представления вырожденных серий примет вид

$$T_g \varphi(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\overline{ug}), \tag{15.16}$$

где $\overline{ug}$ — произвольный элемент класса $\widetilde{\overline{ug}}$.

4. Разложение по представлениям унитарной подгруппы. Пусть T_g — представление вырожденной серии, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Если элемент g пробегает только унитарную подгруппу $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{G}$, то мы получаем представление T_u группы $\mathfrak{U}$. Повторяя рассуждения § 10, можно выяснить, на какие неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ и с какой кратностью разлагается это представление T_u.

Для того, чтобы сформулировать окончательный результат, введем понятие весового вектора по отношению к подгруппе $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Вектор f_0 в пространстве неприводимого представления $c(u)$ группы $\mathfrak{U}$ называется *весовым вектором* по отношению к подгруппе $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, если

$$c(\gamma) f_0 = \lambda(\gamma) f_0 \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r},$$

где $\lambda(\gamma)$ — скалярная функция от γ.

Теоремы 5 и 6 § 10 остаются верными и для вырожденных серий, если в них под f_0 понимать весовой вектор относительно группы $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Глава IV

Дополнительные серии неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$

Основная серия представлений, рассмотренная в главе I, а также вырожденные основные серии, рассмотренные в главе III, описывались следующим образом. Пространство, в котором действовали операторы представления, состояло из всех функций $f(z)$ (где z пробегает для каждой из серий свою группу Z), для которых интеграл

$$\|f\|^2 = \int |f(z)|^2 d\mu(z) \tag{1}$$

конечен. Сами операторы представления задавались при этом формулами *

$$T_g f(z) = f(z\bar{g}) \frac{\alpha(zg)}{\alpha(z)}, \tag{2}$$

где $\alpha(g)$ была фиксированной функцией, характеризующей собой представление. На допустимые функции $\alpha(g)$ накладывались два требования:

1° Функциональное уравнение $\alpha(kg) = \alpha(k)\alpha(g)$ для элементов k, принадлежащих подгруппе K;

2° $|\alpha(g)|$ — заданная функция.

Второе из этих требований вытекало из того, что операторы T_g должны быть унитарны, т. е., что норма $\|f\|^2$, задаваемая формулой (1), не должна меняться при преобразовании T_g.

Однако в рамках схемы, указанной формулой (2), для операторов T_g представления есть еще одна возможность строить неприводимые унитарные представления группы $\mathfrak{G}$. Эта возможность состоит в том, что мы можем по другому задавать норму (скалярное произведение) в гильбертовом пространстве.

---

* Мы нормировали затем функцию $\alpha(g)$ так, что $\alpha(z) \equiv 1$, после чего представление записывалось в виде

$$T_g f(z) = f(z\bar{g})\, \alpha(zg).$$

Проще всего объяснить положение для случая унимодулярной группы второго порядка ($n=2$). В этом случае матрица z имеет вид

$$z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix},$$

где мы комплексное число в матрице обозначаем той же буквой z. Представление записывается следующим образом: каждой матрице

$$g=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$$

ставится в соответствие линейное преобразование по формуле

$$T_g f(z)=f\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right)|g_{12}z+g_{22}|^{m+\rho_1}(g_{12}z+g_{22})^{-m}. \tag{3}$$

Таким образом, в этом случае

$$\alpha(z, g)=|g_{12}z+g_{22}|^{m+\rho_1}(g_{12}z+g_{22})^{-m}, \tag{4}$$

где m — целое число. Если задать скалярное произведение формулой

$$\|f\|^2=\int|f(z)|^2\,dx\,dy \qquad [z=x+iy],$$

то из требования унитарности мы получим, что ρ_1 должно быть чисто мнимым ($\rho_1=i\rho$) и мы получим основную серию представлений.

Однако есть еще одна возможность: зададим скалярное произведение формулой:

$$(f_1, f_2)=\int a(z_1, z_2)f(z_1)\overline{f_2(z_2)}\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2, \tag{5}$$

где $a(z_1, z_2)$ — некоторое ядро. При этом ядро $a(z_1, z_2)$ должно удовлетворять следующим условиям: a) для выражения (5) выполняются аксиомы скалярного произведения и b) это скалярное произведение инвариантно относительно преобразований T_g при каких-нибудь ρ и m.

Оказывается, что из этих условий следует, что

$$a(z_1, z_2)=c\,|z_1-z_2|^{-2+\rho}$$

и что $m=0$, а $\rho_1=\rho$ — действительное число из интервала $0\leqslant\rho\leqslant 2$.

Таким образом, кроме чисто мнимых ρ_1 и произвольных целых m возможны еще при $m=0$ действительные ρ_1, $0\leqslant\rho_1<2$ при соответственно подобранном скалярном произведении.

Опишем теперь представления дополнительной серии унимодулярной группы любого порядка.

Появление дополнительной серии связано с тем, что многообразие всех пар не является транзитивным по отношению к группе $\mathfrak{G}$ преобразований, которые пару (z_1, z_2) переводят в пару $(z_1\overline{g}, z_2\overline{g})$. Именно, при $n=2$ это многообразие разбивается на два следующих транзитивных многообразия:

1) многообразие всех пар (z, z),

2) многообразие всех пар (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$.

Скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\overline{f_2(z)}\, d\mu(z)$$

в пространстве представлений основной серии есть интеграл произведения $f_1 \cdot \overline{f_2}$ по первому многообразию; скалярное же произведение

$$(f_1, f_2) = \int a(z_1, z_2) f_1(z_1)\overline{f_2(z_2)}\, d\mu(z_1) d\mu(z_2)$$

есть интеграл произведения $f_1 \cdot \overline{f_2}$ по второму многообразию.

Поэтому построение дополнительных серий в случае унимодулярной группы любого порядка связано с рассмотрением транзитивных многообразий в пространстве пар $\{z_1, z_2\}$.

Рассмотрим поэтому множество $\mathfrak{M}$ пар (z_1', z_2'), инвариантное относительно преобразований группы $\mathfrak{G}$, т. е. удовлетворяющее условию:

$$\text{если } (z_1', z_2') \in \mathfrak{M}, \text{ то и } (z_1'\overline{g}, z_2'\overline{g}) \in \mathfrak{M}.$$

Далее, в множестве $\mathfrak{M}$ пар (z_1', z_2') зададим меру $\mu(z_1', z_2')$.

Определим теперь скалярное произведение функций $f_1(z')$ и $f_2(z')$ по формуле:

$$(f_1, f_2) = \int_{\mathfrak{M}} a(z_1', z_2') f_1(z_1') f_2(z_2')\, d\mu(z_1', z_2'). \tag{6}$$

Ядро $a(z_1', z_2')$ будем искать из условия инвариантности скалярного произведения относительно преобразований T_g, задаваемых формулой (2).

Мы должны выяснить таким образом, какие множества $\mathfrak{M}$ возможны и какие из них пригодны для построения на них скалярного произведения. При этом оказывается, что всего существует $n!$ транзитивных множеств $\mathfrak{M}$. Однако далеко не все они пригодны для построения скалярного произведения. Далее, можно показать, что в некоторых случаях различные многообразия $\mathfrak{M}$ приводят к эквивалентным представлениям. Мы в §§ 16 и 17 приведем лишь простейший вид скалярных произведений, указав на другие возможности в § 18. В этом же § 18 будет дано перечисление возможных многообразий $\mathfrak{M}$.

Серию представлений, описанную в § 16 и пп. 1—4 § 17, мы называем *дополнительной невырожденной серией*; она является, так сказать, «аналитическим продолжением» основной невырожденной серии.* Аналогично строится в п. 5 § 17 дополнительная вырожденная серия.

§ 16. Описание некоторых транзитивных многообразий в пространстве пар (z_1, z_2)

1. Многообразия $\mathfrak{M}_\tau$. В этом параграфе мы опишем многообразия $\mathfrak{M}$ пар (z_1, z_2) $(z \in Z)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1° Вместе с $(z_1, z_2) \in \mathfrak{M}$ для любого g также $(z_1\overline{g}, z_2\overline{g}) \in \mathfrak{M}$ (инвариантность $\mathfrak{M}$ относительно групповых преобразований из $\mathfrak{G}$).

2° Любые две пары из $\mathfrak{M}$ можно перевести друг в друга преобразованиями из $\mathfrak{G}$ (транзитивность).

Как мы указывали, таких многообразий всего n! Они будут перечислены в § 18. Однако для того, чтобы построить представления дополнительной серии, достаточно некоторых из них. При этом некоторые из других $\mathfrak{M}$ дадут нам возможность записать представления дополнительной серии в другой форме (которая иногда может оказаться полезной), а с другими нельзя связать унитарных представлений. В этом параграфе мы перечислим лишь те из многообразий $\mathfrak{M}$, которые дадут нам возможность получить дополнительные серии в наиболее простом виде.

Каждую пару $(z_1, z_2) \in \mathfrak{M}$ можно преобразованием с помощью элемента $g = z_1^{-1}$ привести к виду $(e, z_2 z_1 z_1^{-1}) = (e, \dot{z})$. Таким образом, чтобы задать $\mathfrak{M}$, достаточно задать множество Z всех матриц z, участвующих в парах $(e, \dot{z}) \in \mathfrak{M}$.

Обозначим через Z_τ совокупность всех матриц $\dot{z} \in Z$ вида

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_\tau \end{pmatrix}, \qquad (16.1)$$

где I_m — единичная матрица порядка $m = n - 2\tau$, u_i — матрицы второго порядка вида

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_i & 1 \end{pmatrix}, \quad z_i \neq 0, \; i = 1, \dots, \tau. \qquad (16.2)$$

Определение. *Обозначим через $\mathfrak{M}_\tau$ множество пар вида $(z, \dot{z}z)$, где z пробегает группу Z, а $\dot{z}$ пробегает $\dot{Z}$.*

---

* Что это не есть лишь способ выражения, видно из следующей главы, где формулы для следов основной и дополнительной серий получаются друг из друга аналитическим продолжением по ρ. То же самое относится к формулам для сферических функций.

I. *Для любого* $g \in \mathfrak{G}$ *пара* $(z\bar{g}, (\dot{z}z)\bar{g})$ *также принадлежит* $\mathfrak{M}_\tau$ (т. е. $\mathfrak{M}_\tau$ — инвариантна относительно преобразований группы $\bar{\mathfrak{G}}$).

Доказательство. Положим $zg = kz_1$, тогда $z\bar{g} = z_1$. Так как $\dot{z}zg = \dot{z}kz_1$, то если мы покажем, что $\dot{z}k$ представимо в виде

$$\dot{z}k = k_1\dot{z}_1, \quad \text{где} \quad \dot{z}_1 \in \dot{Z}, \tag{16.3}$$

то мы покажем, что пара $(z\bar{g}, (\dot{z}z)\bar{g})$ имеет вид $(z_1, \dot{z}_1 z_1)$ и, следовательно, $\in \mathfrak{M}_\tau$.

Представим k в виде

$$k = \begin{pmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} \ldots v_{0\tau} \\ 0 & v_{11} & v_{12} \ldots v_{1\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots v_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \tag{16.4}$$

где v_{00} — квадратная матрица порядка $m = n - 2\tau$, v_{0k} — матрицы из m строк и двух столбцов, v_{pq}, $p, q > 0$ — матрицы второго порядка, причем v_{pp} имеют вид

$$v_{pp} = \begin{pmatrix} v_p & \mu_p \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

$$\prod_{p=0}^{\tau} \det v_{pp} = 1.$$

Из (16.1) и (16.4) следует, что

$$\dot{z}k = \begin{pmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} \ldots v_{0\tau} \\ 0 & u_1 v_{11} & u_1 v_{12} \ldots u_1 v_{1\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots u_\tau v_{\tau\tau} \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

С другой стороны, записывая аналогичным образом k_1 и $\dot{z}_1$, получаем

$$k_1\dot{z}_1 = \begin{pmatrix} v'_{00} & v'_{01}u'_1 & v'_{02}u'_2 \ldots v'_{0\tau}u'_\tau \\ 0 & v'_{11}u'_1 & v'_{12}u'_2 \ldots v'_{1\tau}u'_\tau \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots v'_{\tau\tau}u'_\tau \end{pmatrix}. \tag{16.7}$$

Поэтому равенство $\dot{z}k = k_1\dot{z}_1$ будет удовлетворено, если

$$\left.\begin{aligned} & v'_{00} = v_{00}, \quad v'_{0p} = v_{0p}u'^{-1}_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau, \\ & v'_{pq} = u_p v_{pq} u'^{-1}_q, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \tau; \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

$$u_p v_{pp} = v'_{pp}u'_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau. \tag{16.9}$$

Равенства (16.9) однозначно определяют u'_p и u'_{pp}. Именно

$$z'_p = \frac{v_p z_p}{\mu_p z_p + \lambda_p}, \quad p = 1, \ldots, \tau, \tag{16.10}$$

$$v'_p = \frac{\lambda_p v_p}{\mu_p z_p + \lambda_p}, \quad \mu'_p = \mu_p, \ \lambda'_p = \mu_p z_p + \lambda_p, \ p = 1, \ldots, \tau. \tag{16.11}$$

Но тогда равенства (16.8) однозначно определяют все остальные элементы матриц z_1 и k_1 и представление $\dot{z}k = k_1\dot{z}_1$, а значит и предложение I доказано.

Введем теперь обозначение:

$$\{z, \dot{z}z\}\,\bar{g} = \{z\bar{g}, (\dot{z}z)\,\bar{g}\}.$$

В силу предложения I, переход от $\{z, \dot{z}z\}$ к $\{z, \dot{z}z\}\,\bar{g}$ есть преобразование пространства $\mathfrak{M}_\tau$. Группу $\mathfrak{G}$ можно поэтому рассматривать как группу преобразований $\bar{g}$ пространства $\mathfrak{M}_\tau$.

II. *Многообразие* $\mathfrak{M}_\tau$ *транзитивно относительно группы* $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Так как $\{e, \dot{z}\}\,\bar{z} = \{z, \dot{z}z\}$, то достаточно показать, что преобразованиями $\bar{k}$ можно получить все элементы $\{e, \dot{z}_1\}$ из какого-нибудь одного такого элемента $\{e, \dot{z}\}$.

Выберем k специального вида, положив

$$k = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & v_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & v_{\tau\tau} \end{pmatrix}. \tag{16.12}$$

Тогда $\dot{z}k = \dot{z}_1$ определяется, согласно формулам (16.9), из равенств $v'_{pp}u'_p = u_p v_{pp}$. Последние же, при надлежащем выборе v_{pp}, переводят любой элемент $u_p \neq e$ в любой другой элемент u'_p.

2. Мера в $\mathfrak{M}_\tau$. Каждый элемент из $\mathfrak{M}_\tau$ задается как пара вида $(z, \dot{z}z)$, где z пробегает Z, а $\dot{z}$ пробегает $\dot{Z}$. Зададим меру в $\dot{z}$ формулой

$$d\mu(\dot{z}) = \prod_{p=1}^{\tau} d\mu(z_p), \tag{16.13}$$

где z_p — элементы матрицы $\dot{z}$ (формула (16.2)), а $d\mu(z_p) = dx_p\,dy_p$, если $z_p = x_p + iy_p$.

Зададим в $\mathfrak{M}_\tau$ меру формулой $d\mu(\dot{z}), d\mu(z)$, где $d\mu(z)$ — определенная ранее мера в Z.

Найдем для дальнейшего, как преобразуется мера $d\mu(\dot{z})$ при отображении $\dot{z} \to \dot{z}\bar{k}$ (мы видели в процессе доказательства предложения I этого параграфа, что $\dot{z}\bar{k} \in \dot{Z}$).

Введем функцию $\gamma(g)$, положив

$$\gamma(k) = \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{\lambda_p}{v_p} \right|^2, \text{ и } \gamma(kz) = \gamma(k), \tag{16.14}$$

где λ_p и v_p — диагональные элементы матрицы k в записи (16.4) и (16.5).

Из равенств (16.10) и (16.11) следует, что

$$\frac{d\mu(z'_p)}{d\lambda(z_p)} = \frac{|\lambda_p \lambda'_p|^2}{|\mu_p z_p + \lambda_p|^4} = \left| \frac{v'_p}{\lambda'_p} \right|^2;$$

отсюда

$$\frac{d\mu(\dot{z}_1)}{d\mu(z_1)} = \prod_{p=1}^{\tau} \frac{d\mu(u'_p)}{d\mu(u_p)} = \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{v'_p}{\lambda_p} \right|^2 = \gamma^{-1}(k'). \tag{16.15}$$

Поэтому, в силу (16.14),

$$\frac{d\mu(\dot{z}\bar{k})}{d\mu(\dot{z})} = \gamma^{-1}(\dot{z}k). \tag{16.16}$$

§ 17. Описание представлений дополнительной серии

1. Определение $\alpha(g)$ и скалярного произведения. Будем искать представления дополнительной серии в виде

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\bar{g}), \tag{17.1}$$

где попрежнему для

$$\alpha(\zeta\delta z) = \alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta), \tag{17.2}$$

$$\chi(\delta) = |\lambda_2|^{m_2+i\rho_2} \lambda_2^{-m_2} \ldots |\lambda_n|^{m_n+i\rho_n} \lambda_n^{-m_n}, \tag{17.3}$$

но где $\rho_2, \ldots, \rho_n$ уже не обязательно действительные числа.

Скалярное произведение функций $f(z)$ будем при этом искать в виде

$$(f_1, f_2) = \int a(z, \dot{z}z) f_1(z) \overline{f_2(\dot{z}z)}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}), \tag{17.4}$$

где f_1, f_2 таковы, что интеграл в (17.4) сходится абсолютно*.

Условие унитарности оператора T_g дает:

$$\int a(z, \dot{z}z)\, \alpha(zg)\, f_1(z\bar{g})\, \overline{\alpha((\dot{z}z)g)}\, \overline{f_2((\dot{z}z)\bar{g})}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}) =$$

$$= \int a(z_1, \dot{z}_1 z_1) f_1(z_1) \overline{f_2(\dot{z}_1 z_1)}\, d\mu(z_1)\, d\mu(\dot{z}_1). \tag{17.5}$$

---

* Мы, конечно, пополним затем пространство по введенному скалярному произведению.

Сделаем во втором интеграле замену переменных

$$z_1 = z\bar{g}, \quad \dot{z}_1 = \dot{z}\bar{k},$$

где

$$zg = kz_1.$$

В силу формул (9.7) и (16.16), этот интеграл перейдет в

$$\int a(z\bar{g}, (\dot{z}z)\bar{g}) f_1(z\bar{g}) \overline{f_2((\dot{z}z)\bar{g})}\, \beta^{-1}(zg)\,\gamma^{-1}(\dot{z}k)\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}).$$

В силу произвола функций f_1, f_2, отсюда и из (17.5) следует, что

$$a(z, \dot{z}z)\,\alpha(zg)\,\overline{\alpha((\dot{z}z)g)} = a(z\bar{g}, (\dot{z}z)\bar{g})\,\beta^{-1}(zg)\,\gamma^{-1}(\dot{z}k). \qquad (17.6)$$

Это — функциональное уравнение для определения функции $a(z, \dot{z}z)$, по которой строится скалярное произведение.

Покажем, во-первых, что $a(z, \dot{z}z)$ зависит лишь от $\dot{z}$. Для этого в равенстве (17.6) положим $g = z_0$; тогда $k = e$ и мы получим

$$a(z, \dot{z}z) = a(zz_0, \dot{z}zz_0),$$

или если $z_0 = z^{-1}$, то $a(z, \dot{z}z) = a(e, \dot{z})$.

Обозначим

$$a(e, \dot{z}) = a(\dot{z}).$$

Тогда мы имеем

$$a(z, \dot{z}z) = a(\dot{z}). \qquad (17.7)$$

Далее, нам нужно найти $a(\dot{z}) = a(e, \dot{z})$ и определить, при каких α существует ненулевое решение функционального уравнения (17.6). Положим в равенстве (17.6) $z = e$, $g = k$. Так как $e\bar{k} = e$, то имеем

$$a(\dot{z})\,\alpha(k)\,\overline{\alpha(\dot{z}k)} = a(\dot{z}\bar{k})\,\beta^{-1}(k)\,\gamma^{-1}(\dot{z}k). \qquad (17.8)$$

Чтобы найти условия на $\alpha(g)$, выберем какой-либо элемент $\dot{z}$ и такие k, чтобы $\dot{z}\bar{k} = \dot{z}$ Тогда в (17.8) можно будет сократить $a(\dot{z})$. Возьмем для этого $\dot{z} = \dot{z}^0$, где $z_p^0 = 1$, $p = 1, \ldots, \tau$, и выберем те k, для которых $\dot{z}_0\bar{k} = \dot{z}_0$. В силу формул для преобразования $\dot{z}_0$ (формула (16.10)), мы имеем $v_p = \mu_p + \lambda_p$, так как $z_p^0 = z_p^{0'} = 1$ и, в силу (16.11), $v'_p = \lambda_p$, $\lambda'_p = v_p$ и $\mu'_p = \mu_p$.

Здесь $\lambda_p, \ldots$ — элементы матрицы k_1, определяемой из равенств $\dot{z}^0 k = k_1\dot{z}^0$.

Равенство (17.8) после сокращения на $a(\dot{z}_0)$ приобретает вид

$$\alpha(k)\,\overline{\alpha(\dot{z}^0 k)} = \beta^{-1}(k)\,\gamma^{-1}(\dot{z}^0 k),$$

где k произвольная матрица из K, удовлетворяющая условию $\dot{z}_0 k = \dot{z}_0$ или иначе $\dot{z}^0 k = k_1\dot{z}^0$. Таким образом, имеем

$$\alpha(k)\,\overline{\alpha(k_1)} = \beta^{-1}(k)\,\gamma^{-1}(k_1). \qquad (17.9)$$

Мы получили необходимое и, как легко видеть, достаточное условие на α, при котором существуют отличные от нуля функции $\dot{a}(z)$.

Так как функция $\alpha(\delta)$ выражается через функцию

$$\chi(\delta) = |\lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\lambda_2^{-m_2}\ldots|\lambda_n|^{m_n+i\rho_n}\lambda_n^{-m_n},$$

то найдем условие на $m_2, \rho_2, \ldots, m_n, \rho_n$.

Зададим матрицу k в виде

$$k = \begin{pmatrix} v_{00} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1_2 \end{pmatrix},$$

где 1_2 — единичная матрица второго порядка. Тогда мы получим из формул (16.8), (16.9), что в этом случае $k_1 = k$, $\gamma^{-1}(k) = 1$, следовательно, $|\alpha(k)|^2 = \beta^{-1}(k)$, т. е. для таких k

$$|\chi(k)| = 1.$$

Так как для таких k последние 2τ собственных значений равны 1, первые же произвольны, то, следовательно, все числа $\rho_1, \ldots, \rho_{n-2\tau}$ действительны.

Положим теперь

$$k = \begin{pmatrix} I_m & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_2 & \ldots & & & \\ & & & v_{p_0p_0} & & \\ 0 & & & 0 & \ldots & I_2 \end{pmatrix},$$

где

$$v_{p_0p_0} = \begin{pmatrix} v_{p_0} & \mu_{p_0} \\ 0 & \lambda_{p_0} \end{pmatrix} \quad (v_{p_0} = \mu_{p_0} + \lambda_{p_0})^*.$$

Тогда

$$k_1 = \begin{pmatrix} I_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_2 & & \\ & & v'_{p_0p_0} & \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

где

$$v'_{p_0p_0} = \begin{pmatrix} v'_{p_0} & \mu'_{p_0} \\ 0 & \lambda'_{p_0} \end{pmatrix}, \quad \mu'_{p_0} = \mu_{p_0}, \ \lambda'_{p_0} = v_{p_0}, \ v'_{p_0} = \lambda_{p_0}.$$

Подставим полученные значения k и k_1 в равенство (17.9)

$$\alpha(k)\overline{\alpha(k_1)} = \beta^{-1}(k)\gamma^{-1}(k_1).$$

---

* Условие $v_{p_0} = \mu_{p_0} + \lambda_{p_0}$ следует из требования $\dot{z}_0\bar{k} = \dot{z}_0$; см. стр. 114.

Так как по диагонали в k и k_1 отличные от 1 элементы стоят лишь на месте с номерами $q = n - 2\tau + 2p_0 - 1$ и $q + 1 = n - 2\tau + 2p_0$, то, подставив их в (17.9), получим

$$|v_{p_0}|^{m_q + i\rho_q - 2q + 2} v_{p_0}^{-m_q} |\lambda_{p_0}|^{m_{q+1} + i\rho_{q+1} - 2q} \lambda_{p_0}^{-m_{q+1}} |\lambda_{p_0}|^{m_q - \bar{i}\bar{\rho}_q - 2q + 2} \lambda_{p_0}^{-m_q} \times$$
$$\times |v_{p_0}|^{m_{q+1} - \bar{i}\bar{\rho}_{q+1} - 2q} v_{p_0}^{-m_{q+1}} = |v_{p_0}|^{-4q+4} |\lambda_{p_0}|^{-4q} |v_{p_0}|^{-2} |\lambda_{p_0}|^2.$$

Отсюда, сравнивая показатели, имеем:

$$m_q = m_{q+1}, \quad i\rho_q - \bar{i}\bar{\rho}_{q+1} = 0,$$

где

$$q = n - 2\tau + 1, \quad n - 2\tau + 3, \ldots, n - 1.$$

Из последнего равенства следует, что ρ_q и ρ_{q+1} имеют вид

$$\rho_q = \sigma_p' - i\sigma_p'', \quad \rho_{q+1} = \sigma_p'' + i\sigma_p''.$$

Таким образом, характер $\chi(\delta)$ имеет вид

$$\chi(\delta) = \prod_{p=2}^{n-2\tau} |\delta_p|^{m_p + i\rho_p} \delta_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{\tau} |v_p|^{m_p + i\sigma_p' + \sigma_p''} v_p^{-m_p} |\lambda_p|^{m_p + i\sigma_p' - \sigma_p''} \lambda_p^{-m_p}, \quad (17.10)$$

где δ — диагональная матрица

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{n-2\tau}, v_1, \lambda_1, v_2, \lambda_2, \ldots, v_\tau, \lambda_\tau),$$

m_p — целые числа, σ_p' и σ_p'' — действительные числа.

Итак, для существования функции $a(\dot{z})$ нужно, чтобы функция $\chi(\delta)$ имела вид (17.10). Найдем теперь само выражение для функции $a(\dot{z})$.

Положим в формуле (17.8), из которой нужно определить $a(\dot{z})$

$$\dot{z} = \dot{z}^0, \quad v_{00} = 1_m \text{ и } v_p = z_p(\mu_p + \lambda_p), \quad v_{pp} = \begin{pmatrix} v_p & \mu_p \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix},$$

где v_{00}, v_{pp} суть компоненты матрицы k, так что, в силу (16.10), $\dot{z}^0\bar{k} = \dot{z}$. Мы получим тогда

$$a(\dot{z}) = c\alpha(k)\overline{\alpha(\dot{z}k)}\beta(k)\gamma(\dot{z}k), \quad (17.11)$$

где постоянная c равна $a(\dot{z}_0)$. Так как при этом $\chi(\delta)$ в (17.10) удовлетворяет соотношению (17.9), то безразлично, какой взять элемент k, удовлетворяющий условию $\dot{z}^0\bar{k} = \dot{z}$. Выберем его, например, так, что

$$\delta_p = 1 \text{ при } p = 2, \ldots, n - 2\tau; \quad \mu_p = 0, \quad \lambda_p = 1 \text{ при } p = 1, \ldots, \tau;$$

следовательно, $v_p = z_p$. Тогда в силу (16.11),

$$v_p' = v_p = z_p, \quad \mu_p' = 0, \quad \lambda_p' = \lambda_p = 1$$

и равенства (17.10), (17.11) дают:

$$a(\dot{z}) = c\prod_{p=1}^{\tau}|z_p|^{m_p+i\sigma_p'+\sigma_p''}z_p^{-m_p}\prod_{p=1}^{\tau}|z_p|^{m_p-i\sigma_p'+\sigma_p''}z_p^{-m_p}\prod_{p=1}^{\tau}|z_p|^{-2},$$

т. е.

$$a(\dot{z}) = c\prod_{p=1}^{\tau}|z_p|^{-2+2\sigma_p''}. \tag{17.12}$$

Итак, *если* $\chi(\delta)$ *и* $a(\dot{z})$ *задаются формулами* (17.10), (17.12), *то оператор* T_g, *определяемый формулой*

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(\overline{zg}),$$

оставляет инвариантной эрмитову форму (17.4)

$$\int a(z, \dot{z}z) f_1(z) \overline{f_2(\dot{z}z)}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}).$$

2. Преобразование формы (17.4) к более удобному виду. Для того, чтобы форма (17.4) могла быть скалярным произведением, достаточно, чтобы она была положительно определенной. Мы выясним здесь условие положительной определенности (17.4). Раньше запишем выражение (17.4) в параметрах. Нам понадобятся для этого несколько вспомогательных утверждений.

Пусть z — некоторая матрица из Z. Выделим в ней элементы

$$z_p = z_{r-2\tau+2p,\, r-2\tau+2p-1}, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau \tag{17.13}$$

(это те места, на которых в $\dot{z}$ стоят элементы, отличные от нуля). Обозначим через $\hat{z}$ матрицы z, в которых все $z_p = 0$. Имеет место следующее предложение:

Всякую матрицу z *можно представить, и при том единственным образом, в виде* $z = \dot{z}\hat{z}$,
причем

$$\dot{z}_{r-2\tau+2p,\, r-2\tau+2p-1} = z_{r-2\tau+2p,\, r-2\tau+2p-1}, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau \tag{17.14}$$

Доказательство. Из определения $\dot{z}$ следует, что в равенстве (17.14) первые m строк матриц z и $\hat{z}$ совпадают. Далее,

$$z_{pq} = \hat{z}_{pq} \quad \text{при } p = r - 2\tau + 2v - 1,\ v = 1, \ldots, \tau, \tag{17.15}$$

$$z_{pq} = \hat{z}_{pq} + \dot{z}_{p,\, p-1}\hat{z}_{p-1,\, q} \quad \text{при } p = r - 2\tau + 2v,\ q < p - 1, \tag{17.16}$$

$$z_{p,\, p-1} = \dot{z}_{p,\, p-1} \quad \text{при } p = r - 2\tau + 2v, \tag{17.17}$$

а эти равенства однозначно определяют $\hat{z}$ и $\dot{z}$.

При условии $z = \dot{z}\hat{z}$ имеет место соотношение

$$d\mu(z) = d\mu(\dot{z})\, d\mu(\hat{z}), \tag{17.18}$$

где $d\mu(\hat{z})$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех переменных элементов матрицы $\hat{z}$.

Это утверждение непосредственно следует из равенств (17.15), (17.16) и (17.17).

В силу доказанного выше предложения, мы можем положить:

$$f(z) = f(\dot{z}\hat{z}) = f(\hat{z}, \dot{z}) = f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau). \tag{17.19}$$

В силу соотношения (17.18) для мер и равенства $a(z, \dot{z}z) = a(\dot{z})$ мы можем выражение (17.4) для скалярного произведения переписать в виде

$$(f_1, f_2) = \int a(\dot{z}) f_1(\dot{z}'\hat{z}) \overline{f_2(\dot{z}\dot{z}'\hat{z})}\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(\dot{z}')\, d\mu(\dot{z}) =$$

$$= \int a(\dot{z}\dot{z}'^{-1}) f_1(\dot{z}'\hat{z}) \overline{f_2(\dot{z}\hat{z})}\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(\dot{z}')\, d\mu(\dot{z}) =$$

$$= \int \prod_{p=1}^{\tau} | z_p - z_p' |^{-2+2\sigma_p''} \left[\int f_1(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau) \overline{f_2(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)}\, d\mu(\hat{z}) \right] \times$$

$$\times\, d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_\tau).$$

Мы получим таким образом, что скалярное произведение функций $f_1(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$ и $f_2(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$ задается формулой:

$$(f_1, f_2) = \int \prod_{p=1}^{\tau} | z_p - z_p' |^{-2+2\sigma_p''} \left[\int f_1(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau) \overline{f_2(\hat{z}, z_1', \ldots, z_\tau')}\, d\mu(\hat{z}) \right] \times$$

$$\times\, d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_\tau'). \tag{17.20}$$

Из этого равенства следует, что для сходимости интеграла (17.20) должно быть $\sigma_p > 0$.

3. Условие положительной определенности формы (14.4). Пополнение пространства $\mathfrak{H}'$. Обозначим через $\mathfrak{H}'$ совокупность всех ограниченных измеримых функций $f(z) = f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_p)$, таких, что

$$\int \prod_{p=1}^{\tau} | z_p - z_p' |^{-2+2\sigma_p''} | f(z, \hat{z}_1, \ldots, z_\tau) || f(\hat{z}, z_1', \ldots, z_\tau') | \times$$

$$\times\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_\tau') < +\infty \tag{17.21}$$

и для $f \in \mathfrak{H}'$ положим

$$(f, f) = \int \prod_{p=1}^{\tau} | z_p - z_p' |^{-2+2\sigma_p''} f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau) \overline{f(\hat{z}, z_1', \ldots, z_\tau')} \times$$

$$\times\, d\mu(\hat{z}) d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_\tau'). \tag{17.22}$$

Далее, при $0 < \sigma''_p < 1$, $p = 1, \ldots, \tau$ обозначим через H совокупность всех функций $\varphi(\hat{z}, w_1, \ldots, w_\tau)$, таких, что

$$\| \varphi \|^2 = \prod_{p=1}^{\tau} 2^{2\sigma''_p} \frac{\Gamma(\sigma''_p)}{\Gamma(1-\sigma''_p)} \int | w_1 |^{-2\sigma''_1} \ldots | w_\tau |^{-2\sigma''_\tau} | \varphi(\hat{z}, w_1, \ldots, w_\tau)|^2 \times$$
$$\times d\mu(w_1) \ldots d\mu(w_\tau) d\mu(\hat{z}) < +\infty. \qquad (17.23)$$

Очевидно, H — гильбертово пространство с нормой $\| \varphi \|$.

Докажем, что *если* $0 < \sigma''_p < 1$, $p = 1, \ldots, \tau$ *то для любой функции* $f \in \mathfrak{S}'$ *интеграл*

$$\varphi(\hat{z}, w_1, \ldots, w_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^\tau} \int f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau) e^{i \operatorname{Re}(\overline{w}_1 z_1 + \cdots + \overline{w}_\tau z_\tau)} d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_\tau) \qquad (17.24)$$

сходится в среднем в смысле нормы $\| \varphi \|$ *и при этом* $(f, f) = \| \varphi \|^2$.

Этим будет доказано, что для $0 < \sigma''_p < 1$ форма (f, f) положительно определена.

Доказательство. Пусть функция $f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$ измерима, ограничена и равна нулю вне некоторого компактного множества значений $\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau$ и с суммируемым квадратом по $d\mu(\hat{z})$. Тогда интегралы (17.22) и (17.24) существуют. Применяя τ раз лемму § 8 [6] (в которой соответствующее утверждение доказано для $\tau = 1$), мы получаем, что $\| \varphi \|^2 = (f, f)$.

Пусть теперь $f(z) = f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$ — произвольная функция из $\mathfrak{S}'$, а Q — произвольное компактное множество точек $z = (\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$.

Положим

$$f_Q(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при} \quad z \in Q, \\ 0 & \text{при} \quad z \overline{\in} Q. \end{cases}$$

Соответствующую функцию φ обозначим через φ_Q. По только что доказанному

$$\| f_Q \|^2 = \| \varphi_Q \|^2. \qquad (17.25)$$

С другой стороны, при $Q' > Q$ будет $f_{Q'} - f_Q = f_{Q'-Q}$ и $\varphi_{Q'} - \varphi_Q = \varphi_{Q'-Q}$. Поэтому из (17.25) следует, что

$$\| f_{Q'} - f_Q \|^2 = \| \varphi_{Q'} - \varphi_Q \|^2.$$

Так как интеграл (17.21) сходится, то $\| f_{Q'} - f_Q \| \to 0$ при неограниченном расширении множеств Q', Q. Поэтому также $\| \varphi_{Q'} - \varphi_Q \|^2 \to 0$. Отсюда следует, что интеграл (17.24) сходится в среднем в пространстве H к пределу $\varphi \in H$. Переходя в (17.25) к пределу, мы получаем требуемое равенство $(f, f) = \| \varphi \|^2$.

Мы доказали, что *при* $0<\sigma_p<1$, $p=1,\ldots,\tau$ (f,f) *есть положительно определенная форма.*

Обозначим через $\mathfrak{H}$ пополнение пространства $\mathfrak{H}'$ по норме $(f,f)^{\frac{1}{2}}$. Изометрическое соответствие $f\to\varphi$ продолжается, и притом единственным образом, до изометрического соответствия пространства $\mathfrak{H}$ в пространство H. Докажем, что образ пространства $\mathfrak{H}$ при этом соответствии есть все пространство H. Для этого достаточно показать, что образ H' пространства $\mathfrak{H}'$ плотен в H.

Последнее, однако, следует из результатов [6] (§ 8, стр. 453—454). Именно, положим

$$f(\hat{z}, z_1,\ldots,z_\tau)=f_0(\hat{z})f_1(z_1)\ldots f_\tau(z_\tau),$$

где $f_0,\ldots,f_\tau$ — ограниченные измеримые функции, равные нулю вне некоторых компактных множеств. Тогда

$$\varphi(\hat{z}, w_1,\ldots,w_\tau)=f_0(\hat{z})\varphi_1(w_1)\ldots\varphi_\tau(w_\tau),$$

где

$$\varphi_p(w_p)=\frac{1}{2\pi}\int f_p(z_p)e^{i\,\mathrm{Re}\,(\overline{w}_p z_p)}\,d\mu(z_p), \qquad p=1,\ldots,\tau.$$

По доказанному в § 8 в [6], функции $\varphi_p(w)$ плотны в пространстве всех функций, удовлетворяющих условию

$$\int|w_p|^{-2\sigma_p''}|\varphi_p(w_p)|^2\,d\mu(w_p)<+\infty.$$

Поэтому линейные комбинации функций

$$f_0(\hat{z})\varphi_1(w_1)\ldots\varphi_\tau(w_\tau)$$

образуют плотное множество в пространстве H.

4. Представления дополнительной серии. Оператор T_g, определенный равенствами (17.1), (17.2) и (17.10), отображает $\mathfrak{H}'$ на самого себя с сохранением нормы $(f,f)^{\frac{1}{2}}$. Его можно поэтому продолжить, и притом единственным образом, до унитарного оператора в $\mathfrak{H}$, который мы также обозначим через T_g. Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 7. *При* $0<\sigma_p''<1$, $p=1,\ldots,\tau$ *равенства* (17.1), (17.2), (17.10) *определяют унитарное представление группы* $\mathfrak{G}$ *в пространстве* $\mathfrak{H}$, *в котором скалярное произведение определено формулой* (17.4).

Замечание. Если некоторые из чисел σ_p'' равны единице, то форма (f,f) остается неотрицательной, но может обращаться в нуль для функций, отличных от нуля. А именно в этом случае в ядре $\prod_{p=1}^{\tau}|z_p-z_p'|^{-2+2\sigma_p''}$ формулы (17.22) некоторые множители равны единице. Поэтому выражение (17.22) зависит в этом случае не от $f(\hat{z}, z_1,\ldots,z_\tau)$, а лишь от ее интеграла по соответствующим переменным и обращается в нуль, если эти интегралы равны нулю. Если функции, для которых $(f, f)=0$, отождествить с нулем, то мы получим представления вырожденной серии. Как получить аналогичным процессом все представления вырожденной серии, как предельные для представлений дополнительной серии, см. ниже § 18.

Совокупность всех таких представлений, соответствующих при фиксированном τ всевозможным характерам $\chi(\delta)$ вида (17.10), мы будем называть *дополнительной серией представлений группы* $\mathfrak{G}$.

Теорема 8. *Все представления дополнительных серий неприводимы.*

Доказательство этой теоремы является почти дословным повторением доказательства теоремы 2 § 5.

5. Вырожденные дополнительные серии представлений. Аналогичным образом мы можем построить представления дополнительных вырожденных серий.

Дополнительная вырожденная серия определяется числом τ и системой чисел $n_1, \ldots, n_r$, в которой последние 2τ чисел равны 1.

Представление задается в пространстве функцией $f(z)$, где $z \in Z_{n_1, \ldots, n_r}$. Дальнейшие формулы для представлений и скалярного произведения ничем не отличаются от формул для дополнительной невырожденной серии. Нужно только в этих формулах под $\chi(\delta)$ понимать вместо выражения (17.3) следующую функцию

$$\chi(\delta)= |\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\Lambda_2^{-m_2}|\Lambda_3|^{m_3+i\rho_3}\Lambda_3^{-m_3}\ldots|\Lambda_r|^{m_r+i\rho_r}\Lambda_r^{-m_r}; \qquad (17.26)$$

выражения для $\dot{z}, \hat{z}$ и т. д. ничем не отличаются от приведенных в пп. 2—5. Имеет место:

Теорема 9. *Представления вырожденных дополнительных серий неприводимы.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2′ § 14.

§ 18. Классы транзитивности множества пар. Другая запись представлений дополнительной серии

Этот параграф посвящен изложению некоторых вопросов, связанных с изучением многообразия пар (z_1', z_2'), которое, как мы это видели во введении к этой главе, связано, в свою очередь, с изучением дополнительных серий.

1. Двусторонние классы смежности $\mathfrak{G}$ по K. Пусть Z', как и ранее, многообразие левых классов смежности $\mathfrak{G}$ по подгруппе K треугольных матриц.

Рассмотрим множество всех пар (z_1', z_2'), где $z_1', z_2' \in Z'$. Нам нужно найти множество $\mathfrak{M}$ пар (z_1', z_2'), удовлетворяющих условиям:

1° Если $(z_1', z_2') \in \mathfrak{M}$, то $(z_1'\overline{g}, z_2'\overline{g}) \in \mathfrak{M}$.

2° Многообразие $\mathfrak{M}$ транзитивно, т. е. для всяких двух пар $(z_1', z_2') \in \mathfrak{M}$ и $(z_1'', z_2'') \in \mathfrak{M}$ существует преобразование $g \in \mathfrak{G}$ такое, что $(z_1'', z_2'') = (z_1'\overline{g}, z_2'\overline{g})$.

Мы покажем, что таких многообразий $\mathfrak{M}$ существует $n!$ и опишем их.

Ясно, что в каждом классе $\mathfrak{M}$ существуют пары вида (e', z_2'), где e' — единичный класс смежности $\mathfrak{G}$ по K. Действительно, если (z_1', z_2') — произвольная пара из $\mathfrak{M}$ и g_1 — элемент из класса z_1', то также $(e', z_2'\overline{g}_1^{-1}) \in \mathfrak{M}$.

Для того, чтобы описать $\mathfrak{M}$, достаточно описать множество пар вида $(e', z') \in \mathfrak{M}$. Если $(e', z') \in \mathfrak{M}$, то для любого $k \in K$ $(e', z'\bar{k}) \in \mathfrak{M}$. Действительно, $(e'\bar{k}, z'\bar{k}) = (e', z'\bar{k})$ и следовательно, $(e', z'\bar{k}) \in \mathfrak{M}$. Обратно, если (e', z') — какая-либо пара из $\mathfrak{M}$, то любая другая пара вида (e', z'') из $\mathfrak{M}$ имеет вид $(e', z'\bar{k})$. Действительно, в силу транзитивности $\mathfrak{M}$, существует такое g, что $(e'\bar{g}, z'\bar{g}) = (e', z'')$. Но из $e'\bar{g} = e'$ следует, что $g \in K$.

Таким образом, задача описания $\mathfrak{M}$ сводится к исследованию множества элементов вида $z'\bar{k}$, где z' фиксировано. Так как z' есть класс смежности $\mathfrak{G}$ по K, т. е. множество элементов вида $k_1 g_0$, где g_0 фиксировано, то окончательно задача ставится так:

Какое множество в $\mathfrak{G}$ заполняют элементы вида $k_1 g_0 k_2$, где g_0 — фиксировано, а k_1, k_2 — произвольные элементы из K.

Такое множество в $\mathfrak{G}$ называется *двусторонним классом смежности* $\mathfrak{G}$ *по* K.

Имеет место следующее предложение:

Всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ *может быть представлен в виде*

$$g = k_1 s k_2, \tag{18.1}$$

где $k_1, k_2 \in K$, *а* s — *матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце имеется лишь один элемент, отличный от нуля. Эти элементы в* s *можно выбрать все равными* $+1$ *за исключением какого-либо одного, который определяется из условия* $\det(s) = 1$.

Таким образом, существенно различных s имеется $n!$

Докажем сформулированное утверждение. Покажем, что для всякого элемента $g \in \mathfrak{G}$ можно подобрать k_1 и k_2 так, что $k_1 g k_2$ есть один из элементов s.

Умножение матрицы g слева на k_1 сводится к умножнию n-ой строки на число, замене $n-1$-ой строки линейной комбинацией n-ой и $n-1$-ой и так далее. Умножение на k_2 справа сводится к умножению первого столбца в g на число, замене второго столбца линейной комбинацией первых двух и так далее. Нужно этими операциями привести g к виду, в котором в каждом столбце и строке есть лишь один элемент, отличный от нуля. Рассмотрим в последней строке первый, отличный от нуля элемент. Пусть это будет g_{nk_1}. Тогда, умножая k_1-ый столбец на число, заменяя $k+1$-ый столбец линейной комбинацией k_1-го с k_1+1-ым, k_1+2-ой линейной комбинацией k_1-го, k_1+1-го, k_1+2-го, и так далее, мы добьемся, чтобы $g_{n,\, k_1+1} = g_{n,\, k_1+2} = \cdots = g_{nn} = 0$, а $g_{nk_1} = 1$. Далее, умножением последней строки на числа $-g_{n-1,\, k_1}, -g_{n-2,\, k_1}, \ldots, -g_{1k_1}$ и прибавлением ее соответственно к $n-1$-ой, $n-2$-ой, ..., 1-ой строке мы добьемся того, что все элементы k_1-го столбца равны нулю, кроме g_{nk_1}. Вычеркнем теперь в полученной матрице последнюю строку и k_1-ый столбец и с оставшейся матрицей проделаем те же операции и т. д. Мы придем таким образом к матрице s, у которой в каждой строке и в каждом столбце есть лишь один элемент, отличный от нуля. Все эти элементы равны 1 за исключением последнего, равного $+1$ или -1 (знак последнего предписан требованием, чтобы определитель равнялся 1).

Мы показали, таким образом, что существуют такие k_1 и k_2, что $k_1 g k_2 = s$ или

$$g = k_1^{-1} s k_2^{-1}, \tag{18.2}$$

что и требовалось доказать.

Докажем единственность s в представлении $\mathfrak{G}$ в виде

$$g = k_1 s k_2.$$

Пусть $g = k_1' s_1 k_2'$ и $g = k_1'' s_2 k_2''$, т. е. $k_1' s_1 k_2' = k_1'' s_2 k_2''$ или $k_1 = s_1^{-1} k_2 s_2$, где $k_1 = k_1''^{-1} k_1'$ и $k_2 = k_2'' k_2'^{-1}$. Пусть подстановка s_1 переводит i в n_i, а $s_2 \to i$ в m_i.

Тогда, если k_{ii} — диагональные элементы матрицы k_2, а a_{pq} — элементы матрицы $k_1 = s_1^{-1} k_2 s_2$, то $a_{n_i m_i} = \pm k_{ii}$. Так как $a_{pq} = 0$, если $p > q$, а $k_{ii} \neq 0$, то должно быть $n_i \leqslant m_i$ для любого i. Но если $\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ m_1 \ldots m_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ m'_1 \ldots m'_n \end{pmatrix}$ — две подстановки и $m'_i \leqslant \leqslant m_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то эти подстановки совпадают, т. е. $s_1 = s_2$.

Матрицы k_1 и k_2 в представлении (18.1) определяются неоднозначно. Действительно, пусть $k'_1 s k'_2 = k''_1 s k''_2$, т. е. $s k_2 s^{-1} = k_1$, где $k_1 = k_1''^{-1} k'_1$, $k_2 = k_2 k_2'^{-1}$. Обозначим через K_s подгруппу группы K, состоящую из элементов, для которых $k \in K$ и $s^{-1} k s \in K$. Таким образом, $k_2 \in K_s$; обозначим $k_2 = k_s$. Окончательно получаем, что $k_2 k_2'^{-1} = k_s$, т. е. $k''_2 = k_s k'_2$. Таким образом, в разложении $g = k'_1 s k'_2$ элемент k'_2 определен с точностью до левого множителя из K_s. При задании k'_2, матрица k'_1 определяется уже однозначно.

Заметим, что для $s = e$ k_s совпадает с k; для

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.3}$$

$K_{s_0} = D$ (т. е. состоит лишь из диагональных матриц) *.

Итак, мы доказали, что двусторонний класс смежности $\mathfrak{G}$ по подгруппе K однозначно определяется заданием подстановки s и состоит из всех элементов вида $g = k_1 s k_2$. Обозначим этот класс через $\mathfrak{G}_s$.

Поставим вопрос: чему равна размерность $\mathfrak{G}_s$? Для этого выясним раньше, чему равна размерность K_s. Пусть $k = \| k_{pq} \| \in K$ и пусть s задается подстановкой $\begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ m_1 \cdots m_n \end{pmatrix}$. Тогда $sks^{-1} = k'$ имеет элементы $k'_{pq} = k_{m_p m_q}$. Так как должно быть $k'_{pq} = 0$ при $p > q$, то $k_{m_p m_q} = 0$, если $p > q$. Мы должны, следовательно, наложить требование: $k_{m_p, m_q} = 0$, если $p > q$ и $m_p > m_q$.

Обозначим через τ число инверсий в подстановке s. Тогда число условий, наложенное на k, равно τ. Так как размерность K равна $\frac{n(n+1)}{2}$, то размерность K_s равна $\frac{n(n+1)}{2} - \tau$.

Найдем теперь размерность $\mathfrak{G}_s$. Каждый элемент $g \in \mathfrak{G}_s$ представим в виде $g = k_1 s k_2$, где k_2 определен с точностью до множителя из k_s, а k_1 по k_2 определен однозначно. Поэтому размерность $\mathfrak{G}_s$ равна

$$2 \frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{n(n+1)}{2} - \tau \right] = \frac{n(n+1)}{2} + \tau.$$

---

* Полученный здесь результат можно сформулировать еще так: всякий элемент g можно представить в виде

$$g = ksz. \tag{18.4}$$

Действительно, представим gs_0, где матрица s_0 определена формулой (18.3) в виде $gs_0 = k_1 s_1 k_2$. Отсюда $g = k_1 s_1 s_0^{-1} s_0 k_2 s_0^{-1}$. Так как $s_0 k_2 s_0^{-1} \in H$, а диагональные элементы k_2 можно считать равными 1, то, обозначив $s_1 s_0^{-1} = s$ и $s_0 k_2 s^{-1} = z$, мы получим требуемое разложение.

Итак, *размерность двустороннего класса смежности* $\mathfrak{G}_s$ *группы* $\mathfrak{G}$ *по* K, *определяемого подстановкой* s, *равна* $\frac{n(n+1)}{2}+\tau$, *где* τ — *число инверсий в подстановке* s.

Мы описали двусторонние классы смежности $\mathfrak{G}$ по K и тем самым транзитивные многообразия $\mathfrak{M}$ пар (z_1', z_2'). Каждое такое многообразие $\mathfrak{M}$ задается некоторой подстановкой s и мы его будем обозначать через $\mathfrak{M}_s$. Найдем еще размерность $\mathfrak{M}_s$. Для пар вида (e', z'), z' есть, как мы видели, левый класс смежности, принадлежащий $\mathfrak{G}_s$. Поэтому размерность множества таких z' равна $\frac{n(n+1)}{2}+\tau-\frac{n(n+1)}{2}=\tau$. Так как размерность Z' равна $\frac{n(n-1)}{2}$, то размерность $\mathfrak{M}_s$ равна $\frac{n(n-1)}{2}+\tau$. В частности, для

$$s_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

размерность $\mathfrak{M}_{s_0}$ равна $n(n-1)$.

2. Другая запись представлений дополнительной серии. Аналогично тому, как это было сделано в § 17, можно искать скалярные произведения, определенные ядром $a(z_1', z_2')$, где пары (z_1', z_2') пробегают некоторое $\mathfrak{M}_s$.

Надо отметить, что в таких терминах (без перехода от z' к z) все рассуждения приобретают более естественный характер. Мы оставляем их проведение читателю, как хорошее упражнение.

Оказывается, что скалярное произведение с эрмитовой функцией $a(z_1, z_2)$ существует лишь для тех $\mathfrak{M}_s$, для которых подстановка s удовлетворяет условию

$$s^2=e. \tag{18.5}$$

Действительно, условие эрмитовости требует, чтобы вместе с парой (z_1', z_2') функция $a(z_1', z_2')$ была определена на паре (z_2', z_1'), т. е. чтобы вместе с $(z_1', z_2')\in\mathfrak{M}_s$ и $(z_2', z_1')\in\mathfrak{M}_s$.

В частности, вместе с парой (e', s') левых классов смежности, определяемой парой e и s в $\mathfrak{M}_s$ должна лежать пара (s', e'), определяемая парой s и e, т. е. должно существовать преобразование g группы $\mathfrak{G}$, переводящее (e', s') в (s', e'). Следовательно, существуют такие k, k_1 g, что $eg=ks$ и $sg=k_1e$. Отсюда $ks=s^{-1}k_1$, т. е. $ksk_1^{-1}=s^{-1}$ или, ввиду единственности s в представлении (18.2), $s=s^{-1}$, т. е. $s^2=e$.

Подстановка s, для которой $s^2=e$ разбивается на циклы длины 2 и 1. Пусть число циклов длины 2 равно τ. Можно показать, что если для двух различных подстановок s_1 и s_2 число τ циклов длины 2 совпадает, то каждому представлению дополнительной серии, связанному с первой подстановкой, отвечает эквивалентное ему представление дополнительной серии, связанное со второй подстановкой. В § 16 и § 17 построение представлений было связано со следующей реализацией подстановки s ($s^2=e$) с τ циклами длины 2:

$$s=(1)(2)\ldots(n-2\tau)(n-2\tau+1,\ n-2\tau+2)(n-2\tau+3,\ n-2\tau+4)\ldots(n-1, n). \tag{18.6}$$

Глава V

След в представлениях комплексной унимодулярной группы

В теории представлений конечных и комплексных групп существенную роль играет след неприводимого представления *, который обычно называется его *характером*. При переходе от данного представления к эквивалентному след не изменяется; он является, таким образом инвариантом данного представления.

Возникает вопрос, нельзя ли перенести на построенные нами неприводимые представления комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$ понятие следа и, следовательно, построить теорию, аналогичную теории характеров конечномерных представлений. Очевидно, непосредственное перенесение невозможно, ибо операторы T_g построенных нами неприводимых представлений являются унитарными операторами в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, следовательно, не имеют следа в обычном смысле, как, например, для оператора $T_e = E$. Оказывается, однако, что если вместо оператора T_g рассмотреть интеграл

$$T_x = \int x(g) T_g \, d\mu(g), \tag{1}$$

где $x(g)$ — произвольная непрерывная функция на группе $\mathfrak{G}$, равная нулю вне некоторого компактного множества, то оператор T_x имеет след в обычном смысле; более того, оператор T_x имеет ядро $K(z_1, z_2)$, которое является ядром Гильберта — Шмидта. Ядро $K(z_1, z_2)$ задается формулой

$$K(z_1, z_2) = \int x(z_1^{-1} k z_2) \, \alpha(k) \, d\mu_l(k).$$

Отсюда получается формула для следа $S(T_x)$ оператора $T_x = \int x(g) T_g \, d\mu(g)$:

$$S(T_x) = \int K(z, z) \, d\mu(z) = \int x(z^{-1} k z) \, \alpha(k) \, d\mu_l(k) \, d\mu(z). \tag{2}$$

---

* Напомним, что неприводимое представление компактной группы обязательно конечномерно, следовательно, его операторы изображаются матрицами конечного порядка. *Следом представления* называется сумма диагональных элементов такой матрицы. След матрицы равен сумме ее собственных значений.

При доказательстве этого результата мы пользуемся реализацией представлений при помощи унитарной группы $\mathfrak{U}$; существенную роль при этом играет компактность группы $\mathfrak{U}$.

. Мы показываем далее, что интегрирование по $d\mu_l(k)$ и $d\mu(z)$ в формуле (2) можно заменить интегрированием по $d\mu(g)$. В результате для представлений невырожденных серий получается следующая формула для следа

$$S(T_x) = \int x(g) \frac{\Sigma\chi(\delta_g)}{D(\delta_g)} d\mu(g), \tag{3}$$

где δ_g — диагональная матрица из собственных значений $\lambda_g^{(p)}, p=1, \ldots, n$ матрицы g,

$$D(\delta_g) = \prod_{p<q} |\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^2,$$

$\chi(\delta)$ — характер группы D, определяющий представление, а сумма распространяется на все перестановки собственных значений $\lambda_g^{(p)}$.

Аналогичная формула получается для представлений вырожденных серий (см. ниже § 21).

Сравнение формул (1) и (3) показывает, что в случае невырожденных серий оператору T_g естественно приписать след, равный

$$\sum \frac{\chi(\delta_g)}{D(\delta_g)},$$

где сумма распространяется на все перестановки собственных значений матрицы g.

Аналогичное выражение получается для следа представления вырожденных серий.

Тем самым теория характеров представлений переносится на представления T_g.

В частности, пользуясь этими выражениями для следа, мы выясняем, какие из описанных нами представлений T_g эквивалентны или неэквивалентны друг другу. Именно, так как след является инвариантом представления, то представления с различными следами заведомо неэквивалентны. Мы показываем, что, обратно, представления с одним и тем же следом эквивалентны.

§ 19. След в представлениях основной серии

1. Групповое кольцо группы $\mathfrak{G}$. Переход от операторов T_g к операторам $T_x = \int x(g) T_g d\mu(g)$ есть по существу переход от представления группы $\mathfrak{G}$ к представлению ее группового кольца. Групповое кольцо группы $\mathfrak{G}$ определяется следующим образом:

Пусть R' — совокупность всех функций $x(g)$, суммируемых на группе $\mathfrak{G}$. Определим для этих функций сложение и умножение на скаляр, как сложение функций и умножение их на константу, а умножение двух таких функций $x(g)$, как их «свертывание»:

$$(x_1x_2)(g) = \int x_1(gg_1^{-1})x_2(g_1)\,d\mu(g_1). \tag{19.1}$$

Кольцо R, которое получается формальным присоединением к R' единицы e, называется *групповым кольцом группы* $\mathfrak{G}$.

Таким образом, кольцо R состоит из выражений $\lambda e + x$, $x \in R'$, и операции в кольце R определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 e + x_1) + (\lambda_2 e + x_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2)e + (x_1 + x_2),\\ \mu(\lambda e + x) &= \mu\lambda e + \mu x,\\ (\lambda_1 e + x_1)(\lambda_2 e + x_2) &= \lambda_1\lambda_2 e + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + x_1 \cdot x_2,\\ (\lambda e + x)^* &= \bar{\lambda} e + x^*,\end{aligned}\right\} \tag{19.2}$$

где по определению

$$x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}.$$

2. Связь между представлениями группы и представлениями ее группового кольца. Пусть T_g — унитарное представление группы $\mathfrak{G}$; каждому элементу $a = \lambda e + x$ группового кольца R группы $\mathfrak{G}$ поставим в соответствие оператор

$$T_a = \lambda E + \int x(g)\,T_g\,d\mu(g), \tag{19.3}$$

где E — единичный оператор. При этом интеграл в правой части (19.3) сходится в смысле нормы оператора.

Переход от a к оператору T_a есть отображение кольца R в кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве; это отображение обладает следующими свойствами:

$$T_{\lambda a} = \lambda T_a, \tag{19.4}$$

$$T_{a_1+a_2} = T_{a_1} + T_{a_2}, \tag{19.5}$$

$$T_{a_1a_2} = T_{a_1} \cdot T_{a_2}, \tag{19.6}$$

$$T_{a^*} = (T_a)^*. \tag{19.7}$$

Свойства (19.4) и (19.5) совершенно очевидны; свойства (19.6) и (19.7) получаются из равенств

$$\begin{aligned}T_{x_1x_2} &= \int (x_1x_2)(g)\,T_g\,d\mu(g) = \int x_1(gg_2^{-1})\,x_2(g_2)\,T_g\,d\mu(g_2)\,d\mu(g) =\\ &= \int x_1(g_1)\,x_2(g_2)\,T_{g_1g_2}\,d\mu(g_1)\,d\mu(g_2) =\\ &= \int x_1(g_1)\,T_{g_1}\,d\mu(g_1) \cdot \int x(g_2)\,T_{g_2}\,d\mu(g_2) = T_{x_1} \cdot T_{x_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{x^*} &= \int \overline{x(g^{-1})}\,T_g\,d\mu(g) = \int \overline{x(g)}\,T_{g^{-1}}\,d\mu(g) = \int \overline{x(g)}\,T_g^*\,d\mu(g) =\\ &= \left(\int x(g)\,T_g\,d\mu(g)\right)^* = (T_x)^*.\end{aligned}$$

Всякое отображение кольца R в кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условиям (19.4)—(19.7), называется *представлением кольца* R.

Мы приходим к следующему результату:

I. *Всякому унитарному представлению* T_g *группы* $\mathfrak{G}$ *соответствует представление*

$$T_a = T_{\lambda e + x} = \lambda E + \int x(g)\, T_g\, d\mu(g)$$

ее группового кольца.

Можно показать (см., например, [7], [21]), что и обратно, всякому представлению T_a группового кольца группы $\mathfrak{G}$ соответствует унитарное представление T_g группы $\mathfrak{G}$, из которого представление группового кольца получается по формуле (19.3). Нам, однако, этот результат не понадобится.

3. Ядро оператора T_x; достаточные условия существования следа. Будем задавать представление основной серии в пространстве $\mathfrak{H}_1$ функций $\varphi(u)$ на унитарной группе $\mathfrak{U}$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(\gamma u) = \varphi(u), \quad \gamma \in \Gamma$$

(см. § 8; напомним, что Γ есть группа всех диагональных унитарных матриц с определителем, равным 1). Оператор T_g представления основной серии имеет в этом пространстве вид

$$T_g \varphi(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\overline{ug}). \tag{19.8}$$

Найдем теперь выражение для оператора

$$T_x = \int x(g)\, T_g\, d\mu(g). \tag{19.9}$$

Из формулы (19.8) следует, что при условии абсолютной сходимости всех рассматриваемых интегралов

$$\begin{aligned} T_x \varphi(u) &= \int T_g\, x(g)\, \varphi(u)\, d\mu(g) = \int x(g) \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\overline{ug})\, d\mu(g) = \\ &= \int x(u^{-1}g) \frac{\alpha_1(g)}{\alpha_1(u)} \varphi(\overline{u\bar{u}^{-1}g})\, d\mu(g) = \\ &= c \int d\mu(u_1) \int x(u^{-1}ku_1) \frac{\alpha_1(ku_1)}{\alpha_1(u)} \varphi(\overline{u\bar{u}^{-1}k\bar{u}_1})\, d\mu_l(k), \end{aligned} \tag{19.10}$$

где c — некоторая константа (см. п. 5 § 7). С другой стороны, класс $\overline{u\bar{u}^{-1}k\bar{u}_1}$ содержится в классе z' с представителем $uu^{-1}ku_1 = ku_1$, следовательно, и с представителем u_1. Поэтому можно положить $\varphi(\overline{u\bar{u}^{-1}k\bar{u}_1}) = \varphi(u_1)$ и равенство (19.10) перепишется в виде:

$$T_x \varphi(u) = c \int \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(u)} \left[\int x(u^{-1}ku_1)\, \alpha_1(k)\, d\mu_l(k) \right] \varphi(u_1)\, d\mu(u_1). \tag{19.11}$$

Это означает, что оператор T_x имеет ядро

$$K(u, u_1, \chi) = c\frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(u)}\int x(u^{-1}ku_1)\,\alpha_1(k)\,d\mu_l(k). \tag{19.12}$$

Пусть теперь функция $x(g)$ такова, что

$$\int |K(u, u_1, \chi)|^2 d\mu(u)\,d\mu(u_1) < +\infty. \tag{19.13}$$

В силу свойств (19.6) и (19.7) представления группового кольца, «свертке» функций $x(g)$ отвечает умножение операторов T_x, следовательно, композиция их ядер $K(u, u_1, \chi)$; функции $x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}$ отвечает сопряженный оператор $(T_x)^*$, следовательно, ядро $K^*(u, u_1, \chi)$, связанное с ядром $K(u, u_1, \chi)$ оператора T_x формулой

$$K^*(u, u_1, \chi) = \overline{K(u_1, u, \chi)}. \tag{19.14}$$

Поэтому интеграл в (19.13) есть след оператора $T_{x^* x}$.

Таким образом имеем:

II. *При абсолютной сходимости всех интегралов в* (19.10) *и выполнении условия* (19.13) *оператор* T_{x^*x} *имеет след* $S(T_{x^*x})$, *причем*

$$S(T_{x^*x}) = \int |K(u, u_1, \chi)|^2 d\mu(u)\,d\mu(u_1). \tag{19.15}$$

4. Функции $x(g)$, для которых существует след оператора T_x. Укажем теперь простой класс функций $x(g)$, для которых выполнены все условия, сформулированные в конце п. 1. Именно, пусть R'' — совокупность всех ограниченных измеримых функций на $\mathfrak{G}$, равных нулю вне некоторого компактного множества $Q \subset \mathfrak{G}$, вообще различного для различных функций.

II. *Множество R'' есть подкольцо без единицы кольца* $R_{\mathfrak{G}}$.

Действительно, пусть

$$x_1(g), \quad x_2(g) \in R''$$

и пусть

$$|x_1(g)| \leqslant c_1, \quad |x_2(g)| \leqslant c_2,$$

$$x_1(g) = 0 \text{ при } g \overline{\in} Q_1, \quad x_2(g) = 0 \text{ при } g \overline{\in} Q_2,$$

где Q_1, Q_2 — компактные множества. Тогда

$$|\lambda x_1(g)| \leqslant |\lambda| c_1, \quad |x_1^*(g)| \leqslant c_1, \quad |x_1(g) + x_2(g)| \leqslant c_1 + c_2,$$

$$\lambda x_1(g) = 0 \text{ при } g \overline{\in} Q_1, \quad x_1^*(g) = 0 \text{ при } g \overline{\in} Q_1^{-1}, \tag{19.16}$$

$$x_1(g) + x_2(g) = 0 \text{ при } g \overline{\in} Q_1 + Q_2. \tag{19.17}$$

Кроме того,

$$|x_1 \cdot x_2(g)| = \left|\int x_1(gg_1^{-1})\,x_2(g_1)\,d\mu(g_1)\right| \leqslant c_1 c_2\,\mu(Q_1), \tag{19.18}$$

$$x_1 \cdot x_2(g) = 0 \text{ при } g \overline{\in} Q_1 \cdot Q_2. \tag{19.19}$$

При этом Q^{-1}, $Q_1 \cdot Q_2$ обозначают соответственно множество всех элементов вида g_1^{-1}, $g_1 \cdot g_2$, $g_1 \in Q_1$, $g_2 \in Q_2$, а $Q_1 + Q_2$ — теоретико-множественную сумму множеств Q_1 и Q_2. Так как эти множества компактны, из их соотношений (19.16) — (19.19) следует, что

$$\lambda x_1, \ x_1^*, \ x_1 + x_2, \ x_1 \cdot x_2 \in R''.$$

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 9. *Пусть T_g — представление основной серии, определенное функцией $\alpha_1(g)$; тогда для любой ограниченной измеримой функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, оператор*

$$T_{x_1} = \int x_1(g) T_g d\mu(g),$$

соответствующий функции

$$x_1(g) = (x^* \cdot x)(g) = \int \overline{x(g_1 g^{-1})} x(g_1) d\mu(g_1),$$

имеет след, $S(T_{x_1})$, причем

$$S(T_{x_1}) = c \int x_1(u^{-1} k u) \alpha_1(k) d\mu_l(k) d\mu(u), \tag{19.20}$$

где c — некоторая константа.

Доказательство. Пусть $x(g) \in R''$; и пусть $\varphi(u)$ — ограниченная измеримая функция; тогда каждый из интегралов в (19.10) есть интеграл ограниченной функции по компактному множеству, следовательно, сходится абсолютно.

Действительно, пусть Q — множество, вне которого $x(g) = 0$. Тогда первые два интеграла в (19.10) фактически берутся по множеству Q, третий — по множеству $uQ \subset \mathfrak{U}Q$, а внутренний интеграл в (19.11) по пересечению с K множества $uQu_1^{-1} \subset \mathfrak{U}Q\mathfrak{U}$. Так как множества $\mathfrak{U}Q$ и $\mathfrak{U}Q\mathfrak{U}$ компактны, то все эти интегралы действительно берутся по компактным множествам.

Пусть далее $|x(g)| \leqslant c$ и пусть c' — наибольшее значение функции $\alpha_1(k)|$ на множестве $\mathfrak{U}Q\mathfrak{U}$; тогда

$$\left| \int x(u^{-1} k u_1) \alpha_1(k) d\mu_l(k) \right| \leqslant c c' \mu_l(\mathfrak{U}Q\mathfrak{U} \cap K). \tag{19.21}$$

Поэтому внешний интеграл в (19.11) есть интеграл ограниченной функции по компактному множеству $\mathfrak{U}$. Оценка (19.21) показывает, что ядро $K(u, u_1, \chi)$ в формуле (19.12) ограничено, ибо $|\alpha_1(u)| = 1$; следовательно, интеграл в (19.13) конечен, как интеграл ограниченной функции по компактному множеству всех пар (u, u_1), u, $u_1 \in \mathfrak{U}$.

В силу предложения II п. 3, тем самым доказано, что для функции $x(g) \in R''_{\mathfrak{G}}$ оператор $T_{x^* x}$ имеет след.

Положим для краткости $x_1 = x^* x$ и найдем явное выражение для следа $S(T_{x_1})$ оператора T_{x_1}. Обозначим через $K_1(u, u_1, \chi)$ ядро этого оператора. Тогда, применяя к этому ядру формулу (19.12), получаем:

$$S(T_{x_1}) = \int K_1(u, u, \chi)\, d\mu(u) = c \int x_1(u^{-1}ku)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k)\, d\mu(u).$$

Теорема 9 тем самым полностью доказана.

5. Выражение для следа через интеграл по группе Z. Выразим результаты пп. 3 и 4 в терминах группы Z. Заметим, прежде всего, что функция $K(u, u_1, \chi)$ удовлетворяет условию

$$K(\gamma u, \gamma_1 u_1, \chi) = K(u, u_1, \chi). \tag{19.22}$$

Действительно,

$$K(\gamma u, u_1, \chi) = \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(\gamma u)} \int x(u^{-1}\gamma^{-1}ku_1)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k) =$$

$$= \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(\gamma u)} \int x(u^{-1}ku_1)\, \alpha(\gamma k)\, d\mu_l(k) =$$

$$= \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(u)} \int x(u^{-1}ku_1)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k) = K(u, u_1, \chi),$$

ибо $\alpha_1(\gamma u) = \alpha_1(\gamma)\, \alpha_1(u), \quad \alpha_1(\gamma k) = \alpha_1(\gamma)\, \alpha_1(k)$.

Аналогично,

$$K(u, \gamma u_1, \chi) = K(u, u_1, \chi).$$

Поэтому функцию $K(u, u_1, \chi)$ можно рассматривать как функцию от z, z_1 и положить

$$K(u, u_1, \chi) = K'(z, z_1, \chi) \text{ при } u = k_0 z,\ u_1 = k_1 z_1. \tag{19.23}$$

Легко найти явное выражение для $K(z, z_1, \chi)$.

Прежде всего напомним (см. (8.7)), что функции $\alpha(g)$ и $\alpha_1(g)$, определяющие представление T_g в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}$ функций $\varphi(u)$ и $f(z)$ соответственно, связаны соотношением

$$\alpha_1(g) = \beta^{\frac{1}{2}}(u)\, \alpha(g) \quad \text{при } g = ku. \tag{19.24}$$

В частности, при $g = k$, $u = e$ мы получаем:

$$\alpha_1(k) = \alpha(k). \tag{19.25}$$

Отсюда и из формулы (19.12) для ядра $K(u, u_1, \chi)$ следует, что

$$K'(z, z_1, \chi) = c\, \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(u)} \int x(z^{-1}k_0^{-1}kk_1 z_1)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k) =$$

$$= c\, \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(u)} \int x(z^{-1}kz_1)\, \alpha(k_0 k k_1^{-1})\, \beta(k_1^{-1})\, d\mu_l(k) =$$

$$= c\, \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(k_1)\, \beta(k_1)} \cdot \frac{\alpha_1(k_0)}{\alpha_1(u)} \int x(z^{-1}kz_1)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k). \tag{19.26}$$

С другой стороны, из формул (19.24) при $g = u$ и (19.23) следует, что $\alpha_1(u) = \alpha(u)\, \beta^{\frac{1}{2}}(u) = \alpha(k_0)\, \beta^{\frac{1}{2}}(u), \quad \alpha_1(u_1) = \alpha(k_1)\, \beta^{\frac{1}{2}}(u_1), \quad \beta(k_1) = \beta(u_1)$.

Поэтому формула (19.26) принимает вид:

$$K'(z, z_1, \chi) = c\beta^{-\frac{1}{2}}(u)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(u_1)\int x(z^{-1}kz_1)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k). \tag{19.27}$$

Легко видеть (повторяя те же рассуждения, что и в п. 3), что функция

$$\tilde{K}(z, z_1, \chi) = \int x(z^{-1}kz_1)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k) \tag{19.28}$$

есть ядро оператора T_x в пространстве $\mathfrak{H}$. Формула (19.28) перепишется в виде

$$K(u, u_1, \chi) = K'(z, z_1, \chi) = c\beta^{-\frac{1}{2}}(u)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(u_1)\,\tilde{K}(z, z_1, \chi) \tag{19.29}$$

$$\text{при } u = k_0 z,\ u_1 = k_1 z_1.$$

Применим эту формулу к ядру $K_1(u, u_1, \chi)$ оператора T_{x_1}, где $x_1 = x^* \cdot x$, $x \in R''$. Соответствующие функции K', $\tilde{K}$ обозначим через K_1' и $\tilde{K}_1$. Мы имеем тогда

$$\int K_1(u, u, \chi)\,d\mu(u) = c\int \beta^{-\frac{1}{2}}(u)\,\tilde{K}(z, z, \chi)\,d\mu(u).$$

Применяя к последующему интегралу формулу (7.12), получаем

$$\int K_1(u, u, \chi)\,d\mu(u) = \int \tilde{K}(z, z, \chi)\,d\mu(z) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z).$$

В силу теоремы 9, тем самым доказано, что:

III. *Если $x(g)$ — измеримая ограниченная функция, равная нулю вне некоторого компактного множества, то для следа $S(T_{x_1})$ оператора*

$$T_{x_1} = \int x_1(g)\,T_g\,d\mu(g),$$

соответствующего функции

$$x_1(g) = (x^* \cdot x)(g) = \int \overline{x(g_1 g^{-1})}\,x(g_1)\,d\mu(g_1),$$

имеет место формула

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{19.30}$$

где $\alpha(g)$ — функция, определяющая представление T_g основной серии.

Если $\tilde{K}(z, z_1, \chi)$ — ядро оператора T_x, то, очевидно,

$$S(T_{x_1}) = S(T_x^* T_x) = \int |\tilde{K}(z, z_1, \chi)|^2\,d\mu(z)\,d\mu(z_1). \tag{19.31}$$

Отсюда имеем:

IV. *Если $x(g) \in R''$, то оператор T_x есть оператор с ядром Гильберта — Шмидта.*

§ 20. Выражение для следа в представлениях основной серии через интеграл по группе $\mathfrak{G}$

В предыдущем параграфе мы получили следующую формулу для следа оператора T_{x_1}

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z). \tag{20.1}$$

Поставим теперь задачу — преобразовать этот интеграл в интеграл вида $\int x(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g)$. Это преобразование связано с разложениями элементов g вида $g = z^{-1}kz$. Поэтому в первую очередь мы займемся такими разложениями; им аналогичны разложения $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$ элементов группы K. Мы начинаем с этих разложений.

1. Разложения вида $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$.

I. *Всякий элемент $k \in K$ с различными диагональными элементами можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \zeta^{-1}\delta\zeta, \quad \zeta \in Z, \quad \delta \in D, \tag{20.2}$$

где $\delta_p = k_{pp}$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Переписывая (20.2) в виде $\zeta k = \delta\zeta$ и переходя к соответствующим равенствам в матричных элементах, получим:

$$\delta_p \zeta_{pq} = \sum_{s=p}^{q} \zeta_{ps} k_{sq}, \quad p \leqslant q. \tag{20.3}$$

При $q = p$ равенство (20.3) переходит в

$$\delta_p = k_{pp}, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.4}$$

Следовательно, условие (20.4) необходимо для выполнения (20.2). Пусть это условие соблюдено. Тогда (20.3) можно переписать в виде:

$$(\delta_p - \delta_q)\,\zeta_{pq} = k_{pq} + \sum_{s=p+1}^{q-1} \zeta_{ps} k_{sq}, \quad p < q. \tag{20.5}$$

Если все δ_p различны, то при фиксированном p и $q = p+1, p+2, \ldots, n$ равенство (20.5) является системой рекуррентных уравнений относительно ζ_{pq}, в которых $\delta_p - \delta_q \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение относительно ζ_{pq}.

2. Разложение вида $g = z^{-1}kz$. Исследование таких разложений основано на следующем простом предложении:

II. *Всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ с различными собственными значениями можно представить в виде*

$$g = x^{-1}\delta x, \quad \delta \in D, \quad x \in g. \tag{20.6}$$

В самом деле, соотношение (20.6) эквивалентно равенству $\delta x = xg$, т. е.

$$\sum_{s=1} g_{sq}\, x_{ps} = {}_p x_{pq}. \tag{20.7}$$

Отсюда видно, что δ_p — собственное значение матрицы g, а $\{x_{p1}, \ldots, x_{pn}\}$ — соответствующий собственный вектор. Так как по условию все δ_p различны, то этот вектор определяется уравнениями (20.7) однозначно, с точностью до множителя, и при разных p соответствующие собственные векторы линейно независимы. Поэтому определитель матрицы $x = \| x_{pq} \|$ $(p, q = 1, \ldots, n)$ отличен от нуля, и, пронормировав соответствующим образом решения, можно сделать его равным единице; тем самым предложение II доказано.

Если также $g = y^{-1}\delta y$, $y \in g$, то $yx^{-1}\delta = \delta yx^{-1}$. Так как все диагональные элементы матрицы δ различны, то отсюда следует, что yx^{-1} — диагональная матрица: $yx^{-1} = \delta_1 \in D$, следовательно, $y = \delta_1 x$. Таким образом, при фиксированном δ равенство (20.6) определяет x с точностью до левого множителя $\delta_1 \in D$.

Итак, *всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ с различными собственными значениями можно представить в виде* (20.6), *причем диагональными элементами матрицы δ являются собственные значения матрицы g, написанные в любом порядке. При заданном порядке собственных значений матрицы g на главной диагонали δ соотношения* (20.6) *определяют x однозначно с точностью до левого множителя $\delta_1 \in D$.*

Примем теперь эти замечания для доказательства следующего предложения:

III. *Всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ с различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно представить в виде*

$$g = z^{-1} kz, \quad k_{pp} = \lambda_p, \tag{20.8}$$

если только выполнено условие

$$x_m = \begin{vmatrix} x_{mm} & \ldots & x_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{nm} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad m = 2, \ldots, n, \tag{20.9}$$

где x — матрица, составленная из соответствующим образом пронормированных решений системы

$$\sum_{s=1}^{n} g_{sq}\, x_{ps} = \lambda_p\, x_{pq}, \tag{20.10}$$

$$p = 1, 2, \ldots, n.$$

Порядок собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали ма-

трицы k произволен; при заданном порядке чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ это равенство определяет z и k единственным образом.

Доказательство. Запишем матрицу g в виде

$$g = x^{-1}\delta x. \tag{20.11}$$

В силу условия (20.9), матрицу x можно представить, и притом единственным образом, в виде (см. теорему 1, формулу (3.7))

$$x = kz = \delta_1 \zeta z, \quad \delta_1 \in D, \quad \zeta \in \mathbf{Z}, \quad z \in Z. \tag{20.12}$$

Подставляя в (20.11) вместо x его выражение, получим:

$$g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta\zeta z, \quad z \in Z, \quad \zeta \in \mathbf{Z}, \quad \delta \in D. \tag{20.13}$$

При заданном порядке собственных значений на диагонали матрицы δ, z и ζ определяются равенством (20.13) единственным образом. В самом деле, пусть $g = z_1^{-1}\zeta_1^{-1}\delta\zeta_1 z_1$ — другое разложение матрицы g вида (20.13) с тем же δ. Так как x определяется равенством (20.11) с точностью до левого множителя $\delta_2 \subset D$, то $x = \delta_1 \zeta z = \delta_2 \zeta_1 z_1$; откуда, в силу единственности разложения (20.12), следует, что $\delta_1 = \delta_2$ $\zeta = \zeta_1$, $z = z_1$.

Так как $\zeta^{-1}\delta\zeta \in K$, то, полагая $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$, получим разложение, (20.13), причем $k_{pp} = \delta_p$. Обратно, если $g = z_1^{-1} k' z_1$, где $k'_{pp} = k_{pp}$, то применим к k' разложение $k' = \zeta_1^{-1}\delta\zeta_1$, $\delta_p = k_{pp}$ п. 1. Тогда получим: $g = z_1^{-1}\zeta_1^{-1}\delta\zeta_1 z_1$. В силу единственности представления (20.13), отсюда следует, что $\zeta = \zeta_1$, $z = z_1$, следовательно, $k' = k$. Тем самым доказана единственность разложения (20.13).

3. Интегральное соотношение.

IV. *Имеет место формула*

$$\int f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int f(g)\,\frac{\sum \varphi(k_g)\,\beta^{\frac{1}{2}}(k_g)}{\prod\limits_{p<q} |\lambda_p - \lambda_q|}\,d\mu(g), \tag{20.14}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы g, k_g — матрица k в разложении $g = z^{-1}kz$, $k_{pp} = \lambda_p$, а сумма распространяется на все перестановки этих собственных значений.

Доказательство. Выбросим из группы K все те матрицы k, у которых совпадают модули хотя бы двух диагональных элементов. Мы тем самым рассечем группу K на $n!$ связных областей K_s, таких, что в одной и той же области K_s нет двух матриц k, диагональные элементы которых отличаются только порядком.

Так как при рассечении K на K_s было выброшено лишь многообразие низшей размерности, то интеграл по K разобьется на сумму $n!$ интегралов по K_s.

Положим $g = z^{-1}kz$, $z \in Z$, $k \in K_s$. Если k пробегает K_s, а z пробегает Z, то, согласно III п. 2 элемент g пробежит по одному разу все элементы группы $\mathfrak{G}$ за исключением тех, которые имеют равные по модулю собственные значения, а также тех, для которых хотя бы один из миноров x_m равен нулю. Но эти исключительные элементы g образуют в $\mathfrak{G}$ многообразие низшей размерности; следовательно, элементы вида $g = z^{-1}kz$ заполняют всю группу $\mathfrak{G}$, кроме многообразия низшей размерности.

Очевидно, формула $g = z^{-1}kz$, $k \in K_s$ устанавливает дифференцируемые соотношения между элементами g_{pq}, z_{pq} и k_{pq} матриц g, z и $k \in K_s$. Поэтому должна иметь место формула

$$\int\limits_{K_s} x(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int x(g)\,\varphi(k_g)\,\omega(g)\,d\mu(g), \tag{20.15}$$

где $\omega(g)$ — якобиан перехода от $d\mu_l(k)d\mu(z)$ к $d\mu(g)$ при условии $g = z^{-1}kz$.

В силу инвариантности мер $d\mu(z)$ и $d\mu(g)$, интеграл в левой части (20.15) равен

$$\int\limits_{K_s} x(z_0^{-1}z^{-1}kzz_0)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int x(z_0^{-1}gz_0)\,\varphi(k_g)\,\omega(g)\,d\mu(g) =$$

$$= \int x(g)\,\varphi(k_g)\,\omega(z_0 g z_0^{-1})\,d\mu(g).$$

Сравнение с (20.15) показывает, что

$$\omega(z_0 g z_0^{-1}) = \omega(g); \tag{20.16}$$

следовательно, полагая $g = z^{-1}k_g z$, мы получаем, что

$$\omega(g) = \omega(k_g), \tag{20.17}$$

так что достаточно вычислить ω при условии $z = e$. Для его вычисления перепишем равенство $g = z^{-1}kz$ в виде $zg = kz$ и продифференцируем обе части этого равенства. Мы получим:

$$dz\cdot g + z\,dg = dk\cdot z + k\,dz;$$

отсюда $z\,dg = dk\cdot z + k\,dz - dz\cdot z^{-1}kz$. Умножая обе части последнего равенства слева на $g^{-1}z^{-1} = z^{-1}k^{-1}$, мы придем к соотношению:

$$d_l g = d_l k + d_l z - z^{-1}k^{-1}\cdot d_l k\cdot z^{-1}kz, \tag{20.18}$$

где, как обычно,

$$d_l g = g^{-1}dg, \quad d_l k = k^{-1}dk, \quad d_l z = z^{-1}dz.$$

Так как нужно вычислить ω при $z = e$, то, полагая в (20.18) $z = e$, получаем:

$$d_l g = d_l k + d_l z - k\,d_l z k. \tag{20.19}$$

В матричных элементах это равенство принимает вид

$$d_l g_{pq} = \left(1 - \frac{k_{pq}}{k_{pp}}\right) d_l z_{pq} + \sum{}' (k^{-1})_{ps} d_l z_{st} k_{tq}, \quad p > q, \tag{20.20}$$

$$d_l g_{pq} = d_r k_{pq} - \sum (k^{-1})_{ps} d_l z_{st} k_{tq}, \quad p \leqslant q, \tag{20.21}$$

где $'$ в первой сумме обозначает, что исключается одно слагаемое, соответствующее $s = p$, $t = q$.

Очевидно, равенства (20.20), (20.21) представляют собой линейное преобразование от $d_l g_{pq}$ к $d_l z_{pq}$ и $d_l k_{pq}$, матрица которого при надлежащей нумерации этих переменных имеет треугольную форму с элементами $\left(1 - \frac{k_{qq}}{k_{pp}}\right)$, и 1 на главной диагонали. Соответствующий якобиан равен квадрату модуля определителя этой матрицы, т. е. равен

$$\prod_{p>q} \left| 1 - \frac{k_{qq}}{k_{pp}} \right|^2 = \prod_{p>q} | k_{pp} - k_{qq} |^2 \, | k_{22} |^{-2} \, | k_{33} |^{-4} \ldots | k_{nn} |^{-2n+2} =$$
$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(k) \prod_{p>q} | k_{pp} - k_{qq} |^2$$

(см. формулу (2.7) для $\beta(k)$); отсюда

$$\omega(k) = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}(k)}{\prod\limits_{p>q} | k_{pp} - k_{qq} |^2}. \tag{20.22}$$

Подставляя это выражение в (20.15) и вспоминая, что числа $k_{pp} = \lambda_p$ являются собственными значениями λ_g матрицы g, получим:

$$\int\limits_{K_s} x(z^{-1}kz) \varphi(k) \, d\mu_l(k) \, d\mu(z) = \int x(g) \frac{\varphi(k_g) \beta^{\frac{1}{2}}(k_\sigma)}{\prod\limits_{p>q} | \lambda_p - \lambda_q |^2} \, d\mu(g). \tag{20.23}$$

Суммируя это равенство по всем областям K_s, получим формулу (20.14).

4. Формула для следа. Применяя формулу (20.14) к выражению

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz) \, \alpha(k) \, d\mu_l(k) \, d\mu(z)$$

для следа и вспоминая, что

$$\alpha(\zeta^{-1}\delta\zeta) = \alpha(\delta) = \chi(\delta) \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta),$$

получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть T_g — представление основной серии, соответствующее характеру $\chi(\delta)$ группы D, и пусть $x(g) \in R''$. Тогда след оператора*

$$T_{x_1} = \int x_1(g) \, T_g d\mu(g),$$

соответствующего функции

$$x_1(g) = (x^* \cdot x)(g) = \int \overline{x(g_1 g^{-1})}\, x(g_1)\, d\mu(g_1),$$

вычисляется по формуле

$$S(T_{x_1}) = \int x(g) \frac{\sum \chi(\delta)}{\prod\limits_{p>q} |\lambda_p - \lambda_q|^2} d\mu(g), \tag{20.24}$$

где $\delta_1 = \lambda_1$, $\delta_2 = \lambda_2, \ldots, \delta_n = \lambda_n$ — *собственные значения матрицы* g *и где сумма распространяется на все перестановки этих собственных значений.*

Из этой теоремы следует, что оператору T_g следует приписать след, равный

$$\frac{\sum \chi(\delta)}{\prod\limits_{p>q} |\lambda_p - \lambda_q|^2}. \tag{20.25}$$

§ 21. След в представлениях основных вырожденных серий

1. Условия существования следа оператора T_x для представлений основных вырожденных серий. Рассуждения в пп. 3 — 5 § 19 и соответствующие теоремы переносятся без существенных изменений на представления основных вырожденных серий, если под группами K, Z и Γ понимать теперь $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. В частности, если $x \in R''$, то для следа $S(T_{x_1})$ оператора $T_{x_1} = T_x^* T_x$ имеем:

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k)\, d\mu(z). \tag{21.1}$$

Менее непосредственным является перенесение на случай вырожденных серий результатов § 20. Поэтому остановимся подробнее на этом вопросе. Конечно всюду в этом параграфе буквы K, Z и Γ будут обозначать группы $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ и $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ для данной вырожденной серии.

2. Разложение вида $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$.

I. *Всякую матрицу k с простыми собственными значениями можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \zeta^{-1}\delta\zeta, \tag{21.2}$$

где

$$\delta_p = k_{pp}. \tag{21.3}$$

Доказательство. Перепишем равенство (21.2) в виде

$$\zeta k = \delta\zeta; \tag{21.4}$$

переходя к соответствующим равенствам в матричных элементах, получим

$$\delta_p \zeta_{pq} = \sum_{s=p}^{q} \zeta_{ps} k_{sq}, \quad p \leqslant q. \tag{21.5}$$

При $q = p$ равенство (21.5) переходит в

$$\delta_p = k_{pp}; \tag{21.6}$$

следовательно, условие (21.6) необходимо для выполнения равенства (21.2).

Пусть это условие соблюдено. Перепишем тогда равенство (21.5) в виде:

$$\delta_p \zeta_{pq} - \zeta_{pq} \delta_q = \sum_{s=p}^{q-1} \zeta_{ps} k_{sq},$$

отсюда

$$\delta_p \zeta_{pq} \delta_q^{-1} - \zeta_{pq} = k_{pq} \delta_q^{-1} + \sum_{s=p+1}^{q-1} \zeta_{ps} k_{sq} \delta_q^{-1}. \tag{21.7}$$

При фиксированном p равенства (21.7) можно рассматривать как систему рекуррентных уравнений относительно матриц ζ_{pq}. Следовательно, эта система имеет единственное решение, если определитель каждого из линейных преобразований

$$\zeta_{pq} \to \delta_p \zeta_{pq} \delta_q^{-1} - \zeta_{pq} \tag{21.8}$$

отличен от нуля.

Вычислим этот определитель. Для этого заметим, что преобразование

$$\zeta_{pq} \to \delta_p \zeta_{pq} \delta_q^{-1}$$

есть кронекеровское произведение линейных преобразований δ_p и δ_q^{-1}; преобразование же (21.8) получается из него вычитанием единичного преобразования. Следовательно, при вычислении определителя преобразования (21.8) мы можем считать, что матрицы δ_p и δ_q^{-1} приведены к диагональному виду. Но тогда, обозначая через $\lambda_{p,i}$, $i = 1, \ldots, n$ диагональные элементы матрицы δ_p, а через

$$\zeta_{pq}^{(\alpha, \beta)}, \quad \alpha = 1, \ldots, n_p; \quad \beta = 1, \ldots, n_q$$

элементы матрицы ζ_{pq}, мы можем переписать преобразование (21.8) в виде

$$\zeta_{pq} \to \lambda_{p,\alpha} \zeta_{pq}^{(\alpha, \beta)} \lambda_{q,\beta}^{-1} - \zeta_{pq}^{(\alpha, \beta)},$$

т. е.

$$\zeta_{pq} \to \zeta_{pq}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\lambda_{p\alpha}}{\lambda_{q\beta}} - 1 \right). \tag{21.9}$$

Это означает, что преобразование (21.8) также приведено к диагональному виду, причем диагональными элементами являются

$$\frac{\lambda_{p,\alpha}}{\lambda_{q,\beta}} - 1.$$

Следовательно, искомый определитель равен

$$\prod_{\alpha=1}^{n_p} \prod_{\beta=1}^{n_q} \left(\frac{\lambda_{p,\alpha}}{\lambda_{q,\beta}} - 1 \right). \tag{21.10}$$

Отсюда следует, что этот определитель отличен от нуля тогда и только тогда, когда ни одно из собственных значений матрицы δ_p не совпадает ни с одним из собственных значений матрицы δ_q, $p \neq q$.

Если, в частности, матрица k не имеет кратных собственных значений, то все такие определители отличны от нуля и система (21.5) имеет единственное решение.

3. Разложение вида $g = z^{-1}kz$. Условимся обозначать в этом п. 3 через $\hat{K}$, $\hat{Z}$ группы $K_{1,\ldots,1}$, $Z_{1,\ldots,1}$, а через $\hat{k}$, $\hat{z}$ — их элементы. Далее, обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ все собственные значения матрицы g, написанные в каком угодно порядке, и разобьем это множество собственных значений на системы

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}}_{\mathrm{I}} \quad \underbrace{\lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_1+n_2}}_{\mathrm{II}}, \ldots, \quad \underbrace{\lambda_{n_1+\ldots+n_{r-1}+1}, \ldots, \lambda_n}_{r}.$$

Совокупность всех подстановок чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, только переставляющих между собой элементы каждой из систем и не переводящих, следовательно, элемент одной системы в элемент другой, образует подгруппу порядка $n_1!, n_2!, \ldots, n_r!$ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. Обозначим эту подгруппу через $\sum_n$. Тогда

II. *Всякую матрицу g с различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно представить в виде*

$$g = z^{-1}kz, \tag{21.11}$$

если только выполнено условие

$$x_{n_1+\ldots+n_p+1} \neq 0, \quad p = 1, 2, \ldots, r-1, \tag{21.12}$$

где x — матрица из группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условию

$$g = x^{-1}\delta x, \tag{21.13}$$

а $\hat{\delta}$ — диагональная матрица из собственных значений матрицы g.

При этом k можно представить в виде

$$k = \zeta^{-1}\delta^{-1}\hat{\delta}\,\delta\zeta. \tag{21.14}$$

Порядок собственных значений на главной диагонали матрицы $\hat{\delta}$ *произволен; при заданном таком порядке равенства* (21.11) *и* (21.14) *определяют матрицы* z, ζ *и* $\delta' = \delta^{-1}\hat{\delta}\delta$, *а, следовательно, и* k *единственным образом.*

Две различных перестановки собственных значений на главной диагонали приводят к одним и тем же матрицам z *и* ζ (следовательно, и k) *тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга подстановкой* из подгруппы* $\sum_n$.

Доказательство. Согласно предложению II п. 2 § 20, матрицу g можно представить в виде

$$g = x^{-1}\,\hat{\delta}x, \tag{21.15}$$

где $x \in \mathfrak{G}$, а $\hat{\delta}$ — диагональная матрица из собственных значений матрицы g. В силу условия (21.12), матрицу x можно представить в виде (см. п. 3 § 3):

$$x = \delta\zeta z = k_1 z, \tag{21.16}$$

где k_1, z, δ, ζ—элементы групп

$K = K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, $Z = Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, $D = D_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, $Z = Z_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$,

соответственно. Отсюда

$$g = z'^{-1}\,\zeta'^{-1}\,\delta'^{-1}\hat{\delta}\,\delta'\zeta'z'. \tag{21.17}$$

Докажем, что при заданной матрице δ разложение (21.17) определяет δ, ζ и z единственным образом, а δ — с точностью до левого множителя из группы $\hat{D}$. Действительно, если

$$g = z'^{-1}\zeta'^{-1}\delta'^{-1}\hat{\delta}\delta'\zeta'z' \tag{21.18}$$

— другое такое разложение, то, полагая $x = \delta\zeta z$ и $x' = \delta'\zeta'z'$, мы получим:

$$g = x^{-1}\hat{\delta}x, \qquad g = x'^{-1}\hat{\delta}x'.$$

В силу сказанного в п. 2 § 20 отсюда следует, что матрицы x и x' отличаются друг от друга только левым множителем из группы $\hat{D}$. Таким образом, обозначая этот множитель через $\hat{\delta}_0$, имеем:

$$\delta'\zeta'z' = \hat{\delta}_0\delta\zeta z.$$

В силу единственности представления вида $g = \delta\zeta z$ отсюда следует, что $\zeta' = \zeta$, $z' = z$, $\delta' = \hat{\delta}_0\delta$, что требовалось доказать.

---

* Следовательно, число различных разложений (21.11) равно $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$.

Положим теперь

$$\delta^0 = \delta^{-1}\hat{\delta}\,\delta \tag{21.19}$$

и

$$k = \zeta^{-1}\delta^0\zeta. \tag{21.20}$$

Тогда, в силу равенства (21.18), мы получим требуемое разложение $g = z^{-1}kz$, причем по доказанному в п. 2

$$k_{pp} = \delta_p^0 = \delta_p^{-1}\hat{\delta}_p\delta_p.$$

Обратно, пусть дано разложение $g = z^{-1}kz$. Матрица k имеет те же собственные значения, что и матрица g; следовательно, согласно основному нашему предположению относительно g, все собственные значения матрицы k также простые. Мы можем поэтому применить основной результат п. 2 и представить k в виде

$$k = \zeta^{-1}\delta^0\zeta, \tag{21.21}$$

причем

$$k'_{pp} = \delta_p^0. \tag{21.22}$$

С другой стороны, применяя предложение II п. 2 § 20 о разложении* $g = x^{-1}\hat{\delta}x$ к матрице δ_p^0, найдем, что

$$\delta_p^0 = \delta_p^{-1}\hat{\delta}_p\delta_p, \tag{21.23}$$

где $\hat{\delta}_p$ — диагональная матрица (порядка n_p) из собственных значений матрицы δ_p, вписанных в каком угодно порядке. Матрицу

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r) \tag{21.24}$$

можно, очевидно, пронормировать так, что $\det\delta = 1$; тогда $\delta \in D$ и равенство (21.23) означает, что $\delta^0 = \delta^{-1}\hat{\delta}\delta$, где $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \ldots, \hat{\delta}_n)$.

В соединении с равенствами $k = \zeta^{-1}\delta^0\zeta$ и $g = z^{-1}kz$ это дает

$$g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta^{-1}\hat{\delta}\delta\zeta z.$$

В силу доказанной единственности матриц z, ζ, δ (последней с точностью до левого множителя $\hat{\delta}_0 \in \hat{D}$) при заданной матрице $\hat{\delta}$ отсюда следует единственность матриц z и k в разложении $g = z^{-1}kz$ при заданной нумерации собственных значений матрицы k.

Равенство (21.23) показывает, что при фиксированной матрице δ_p^0 можно одновременным изменением матриц $\hat{\delta}_p$ и δ_p добиться какого угодно расположения собственных значений матрицы δ_p^0 на диагонали

* Это предложение мы применяем к матрице δ_p^0, определитель которой, вообще, не равен единице. Очевидно, однако, что предложение верно и в этом случае, но не обязательно уже $\det \delta_p = 1$.

матрицы $\hat{\delta}_p$; так как при этом матрица δ^0 не изменяется, то равенство

$$g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta^0\zeta z$$

не нарушается.

Другими словами, подстановки группы $\sum_n$ над системой диагональных элементов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ матрицы g не изменяют матриц k и z в разложении $g = z^{-1} kz$.

Тем самым предложение II полностью доказано.

4. Интегральное соотношение. Найдем теперь интегральное соотношение, связанное с разложением матрицы g в виде $g = z^{-1}kz$. Именно, докажем, что:

III. *Имеет место формула*

$$\int d\mu(z) \int f(z^{-1}kz)\varphi(k)\,d\mu_l(k) =$$

$$= \int f(g)\left\{\sum \varphi(k_g)\frac{|D(\delta_1)|\;|D(\delta_2)|\ldots|D(\delta_n)|}{|D(\delta_n)|}\;|\Lambda_2|^{2n_1}\times\right.$$

$$\left.\times\;|\Delta_3|^{2n_1+2n_2}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+2n_2+\ldots+2n_{r-1}}\right\} d\mu(g), \qquad (21.25)$$

где $f(g)$ — функция на $\mathfrak{G}$, $\varphi(k)$ — функция на K; $k = k_g$ — элемент группы K в разложении $g = z^{-1}kz$,

$$\delta_p = k_{pp}, \quad (p = 1, \ldots, r),$$

$D(\delta_p)$ — дискриминант характеристического многочлена матрицы δ_p, $\Lambda_p = \det \delta_p$, а сумма распространяется на все слагаемые, соответствующие всевозможным различным разложениям $g = z^{-1}kz$ данного элемента g.

Доказательство. Выбросим из группы K все те матрицы k, у которых совпадают модули хотя бы двух собственных значений. Мы рассечем тогда группу K на $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$ областей K_s таких, что в одной и той же области нет двух различных матриц k_1, k_2, для которых при некоторых z_1, z_2 будет $z_1^{-1} k_1 z_1 = z_2^{-1} k_2 z_2$.

Так как при рассечении группы K на области K_s было выброшено лишь многообразие низшей размерности, то интеграл по K разобьет сумму $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$ интегралов по областям K_s.

Положим $g = z^{-1} kz$, $k \in K_s$. Если k пробегает какую-либо область K_s, а z пробегает всю группу Z, то, согласно предложению II п. 3, элемент g пробегает по одному разу все элементы группы $\mathfrak{G}$ за исключением тех, которые имеют равные по модулю собственные значения, а также тех, для которых хотя бы один из миноров $x_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1}$ равен нулю. Но эти исключительные элементы g образуют в группе $\mathfrak{G}$ многообразие низшей размерности; следовательно, наши элементы

$g=z^{-1}kz$ заполняют всю группу $\mathfrak{G}$ за исключением многообразия низшей размерности.

Повторяя те же рассуждения, что и в п. 3 § 20, получим, что

$$\int\limits_{K_s} x(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int x(g)\,\varphi(k_g)\,\omega(k_g)\,d\mu(g), \tag{21.26}$$

где $\omega(k)$ — якобиан перехода от $d\mu_l(k)\,d\mu(z)$ к $d\mu(g)$ при $g=z^{-1}kz$ и $z=e$.

Для нахождения $\omega(k)$ мы так же, как и в п. 3 § 20, дифференцируем равенство $zg=kz$ и приходим к равенству

$$d_l g = d_l k + d_l z - k^{-1}d_l z\cdot k, \tag{21.27}$$

которое в матричных элементах принимает вид

$$d_l g_{pq} = (d_l z_{pq} - k_{pp}^{-1}\,d_l z_{pq} k_{qq}) + \sum{}'(k^{-1})_{ps}\,d_l z_{st}\cdot k_{tq}, \tag{21.28}$$

$$d_l g_{pq} = d_r k_{pq} - \sum (k^{-1})_{ps}\,d_l s_{st}\cdot k_{tq}, \tag{21.29}$$

где $'$ снова обозначает, что в сумме исключается одно слагаемое, соответствующее $s=p$, $t=q$.

Равенства (21.28), (21.29) представляют собой линейные преобразования от элементов матриц $d_l g_{pq}$ к элементам матриц $d_l z_{pq}$, $d_l k_{pq}$. Матрица его при надлежащей нумерации этих элементов принимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0\ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots a_{rr} \end{pmatrix},$$

где по диагонали расположены матрицы преобразований

$$d_l z_{pq} \to d_l z_{pq} - k_{pp}^{-1} d_l z_{pq} k_{qq} \tag{21.30}$$

и единичные матрицы.

Поэтому соответствующий якобиан равен произведению квадратов модулей определителей преобразований (21.30). Как было показано в п. 2 (формула (21.10)), этот определитель равен

$$\prod_{\alpha=1}^{n_p}\prod_{\beta=1}^{n_q}\left(\frac{\lambda_{q,\beta}}{\lambda_{p,\alpha}}-1\right),$$

где $\lambda_{p,\alpha}$, $\alpha=1,\ldots,n_p$ — собственные значения матрицы δ_p. Поэтому из всего сказанного выше следует, что при $g=z^{-1}kz$

$$d\mu(g) = \prod_{p>q}\prod_{\alpha=1}^{n_p}\prod_{\beta=1}^{n_q}\left|\frac{\lambda_{q,\beta}}{\lambda_{p,\alpha}}-1\right|^2 d\mu_l(k)\,d\mu(z).$$

Отсюда

$$d\mu_l(k)\,d\mu(z)=\prod_{p>q}\prod_{\alpha=1}^{n_p}\prod_{\beta=1}^{n_q}\left|\frac{\lambda_{q,\beta}}{\lambda_{p,\alpha}}-1\right|^{-2}d\mu(g)=$$

$$=\frac{|D(\delta_1)|\,|D(\delta_2)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}\prod_{p>q}\left(\prod_{\alpha=1}^{n_p}|\lambda_{p,\alpha}|^{-2}\right)^{n_q}d\mu(g). \qquad (21.31)$$

Так как

$$\prod_{\alpha=1}^{n_p}\lambda_{p,\alpha}=\Lambda_p,$$

где Λ_p — определитель матриц δ_p, то

$$\prod_{p>q}\left(\prod_{\alpha=1}^{n_p}|\lambda_{p,\alpha}|^2\right)^{n_q}=\prod_{p>q}|\Lambda_p|^{2n_q}=|\Lambda_2|^{2n_1}|\Lambda_3|^{2n_1+2n_2}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+\cdots+2n_r}.$$

Отсюда и из (21.31)

$$d\mu_l(k)\,d\mu(z)=$$

$$=\frac{|D(\delta_1)|\,|D(\delta_2)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}|\Lambda_2|^{2n_1}|\Lambda_3|^{2n_1+2n_2}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+\cdots+2n_{r-1}}d\mu(g),$$

следовательно, формула (21.26) перепишется в виде

$$\int d\mu(z)\int_{K_s}f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)=$$

$$=\int f(g)\,\varphi(k)\frac{|D(\delta_1)|\,|D(\delta_2)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}|\Lambda_2|^{2n_1}\times$$

$$\times|\Lambda_3|^{2n_1+2n_2}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+\cdots+2n_{r-1}}d\mu(g), \qquad (21.32)$$

где $k=k_g\in K$ и удовлетворяет условию $z^{-1}k_gz=g$, а $\delta_p=k_{pp}$.

Просуммируем равенство (21.32) по всем областям K_s. Мы получим равенство, в левой части которого будет

$$\int d\mu(z)\int_K f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k),$$

а в правой:

$$\int f(g)\sum\varphi(k_g)\frac{|D(\delta_1)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}|\Lambda_2|^{2n_1}|\Lambda_3|^{2n_1+2n_2}\ldots|\Lambda_r|^{2n_1+\cdots+2n_{r-1}}d\mu(g),$$

где сумма распространяется на все $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$ различные разложения $g=g_{-1}k_gz$. Поэтому мы окончательно придем к формуле (21.25).

5. Формула для следа в основной вырожденной серии. Применяя IV п. 4 к формуле (21.1) для следа $S(T_x)$, получаем следующую теорему:

Теорема 11. *Пусть T_g — представление основной вырожденной серии, соответствующее характеру*

$$\chi(\delta) = |\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\Lambda_2^{-m_2}|\Lambda_3|^{m_3+i\rho_3}\Lambda_3^{-m_3}\dots|\Lambda_r|^{m_r+i\rho_r}\Lambda_r^{-m_r}, \tag{21.33}$$

$$\Lambda_p = \det \delta_p, \quad p = 2, 3, \dots, n$$

и пусть $x(g)$ — ограниченная измеримая функция на $\mathfrak{G}$, равная нулю вне некоторого компактного множества. Тогда для следа $S(T_{x_1})$ оператора $T_{x_1} = \int x_1(g)\,T_g\,d\mu(g)$, соответствующего функции $x_1(g) = (x^*\cdot x)(g)$, имеет место формула

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(g)\Big\{\sum \chi(\delta)\frac{|D(\delta_1)|\,|D(\delta_2)|\dots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|}\times$$
$$\times|\Lambda_1|^{-n_1}|\Lambda_2|^{-n_2}\dots|\Lambda_r|^{-n_r}\Big\}\,d\mu(g), \tag{21.34}$$

где сумма распространяется на все различные разложения $g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta\zeta z$.

§ 22. След в представлениях дополнительных серий

1. Ядро оператора T_x в случае представлений дополнительных серий. Пусть теперь T_g — представление дополнительной серии. Рассматривая оператор $T_x = \int x(g)\,T_g\,d\mu(g)$ как оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ (по поводу всех обозначений см. §§ 16 и 17) и повторяя те же рассуждения, что и в § 19, получаем, что в пространстве $\mathfrak{H}$ этот оператор имеет ядро:

$$K_1(z, z_1, \chi) = \int x_1(z^{-1}kz_1)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k), \tag{22.1}$$

и что для функции $x_1 = x^*x$, $x \in R''$ сходится абсолютно интеграл

$$I = \int K_1(z, z, \chi)\,d\mu(z) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{22.2}$$

где

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi(\delta), \tag{22.3}$$

а $\chi(\delta)$ — характер, определенный формулой

$$\chi(\delta) = \prod_{p=2}^{r-2\tau}|\Lambda_p|^{m_p+i\rho_p}\Lambda_p^{-m_p}\prod_{p=1}^{\tau}|\mu_p|^{m_p'+i\sigma_p'+\sigma_p''}\mu_p^{-m_p'}\prod|v_p|^{m_p'+i\sigma_p''}v_p^{-m_p} \tag{22.4}$$

(см. (17.10)). В пространстве $\mathfrak{H}$ скалярное произведение уже не есть интеграл квадрата модуля, а определяется формулами (17.4), (17.12)

Тем не менее (см. следующий п. 2) оказывается, что интеграл I будет следом оператора T_x. В следующем п. 2 мы докажем, что $I = S(T_x)$.

2. Выражение для следа через ядро. Докажем, что интеграл I в формуле (22.2) действительно совпадает с следом оператора T_{x_1}. Для этого положим:

$$\varphi(z, z', \delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x(z^{-1}\delta\zeta z')\, d\mu(\zeta). \tag{22.5}$$

Если $x(g) \in R''$, $|x(g)| \leqslant c$ и $x(g) = 0$ при $g \overline{\in} Q$, то при фиксированных z, z', δ интегрирование фактически ведется по компактному множеству $\subset \delta^{-1} Q z'^{-1}$. Поэтому интеграл в (22.5) существует для почти всех z, z' и δ. Если же функция $x(g)$ непрерывна, то этот интеграл существует для всех значений z, z', δ и представляет собой непрерывную функцию этих переменных. Рассмотрим некоторые свойства функции φ.

I. *Если $x_1, x_2 \in R''$ и $x_3 = x_1 \cdot x_2$, то для соответствующих функций φ_1, φ_2, φ_3 имеет место равенство*

$$\varphi_3(z, z', \delta) = \int \varphi_1(z, z'', \delta\delta_1)\, \varphi_2(z'', z', \delta_1^{-1})\, d\mu(z'')\, d\mu(\delta_1). \tag{22.6}$$

Действительно,

$$x_3(g) = \int x_1(g g_1^{-1})\, x_2(g_1)\, d\mu(g_1),$$

следовательно,

$$\varphi_3(z, z', \delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x_1(z^{-1}\delta\zeta z' g_1)\, x_2(g_1^{-1})\, d\mu(g_1)\, d\mu(\zeta) =$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x_1(z^{-1}\delta\zeta g_1)\, x_2(g_1^{-1} z')\, d\mu(g_1)\, d\mu(\zeta) =$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x_1(z^{-1}\delta\zeta\delta_1\zeta_1 z_1)\, x_2(z_1^{-1}\zeta_1^{-1}\delta_1^{-1} z')\, d\mu(\delta_1)\, d\mu(\zeta_1)\, d\mu(z_1)\, d\mu(\zeta).$$

Полагая здесь $\zeta\delta_1 = \delta_1\zeta'$, $\zeta_1^{-1}\delta_1^{-1} = \delta_1^{-1}\zeta_1'$, получим

$$\varphi_3(z, z', \delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x_1(z^{-1}\delta\delta_1\zeta' z_1)\, x_2(z^{-1}\delta_1^{-1}\zeta_1' z_2)\, d\mu(\delta_1) d\mu(\zeta_1') d\mu(z_1) d\mu(\zeta'),$$

а это равенство совпадает с (22.6). Отметим, что функция $x_3(g)$ непрерывна, так что равенство (22.6) имеет место для всех z, z' и δ.

II. *Если $x_1 \in R''$ и $x_2 = \overset{*}{x_1}$, то для соответствующих функций φ_1 и $\varphi_2 = \overset{*}{\varphi_1}$ имеет место равенство*

$$\overset{*}{\varphi_1}(z, z', \delta) = \overline{\varphi_1(z', z, \delta^{-1})}. \tag{22.7}$$

Действительно,

$$\varphi^*(z, z', \delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x^*(z^{-1}\delta\zeta z')\, d\mu(\zeta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int \overline{x(z'^{-1}\zeta^{-1}\delta^{-1}z)}\, d\mu(\zeta).$$

Положим здесь $\zeta^{-1}\delta^{-1} = \delta^{-1}\zeta'$; тогда $\frac{d\mu(\zeta)}{d\mu(\zeta')} = \beta(\delta)$; следовательно,

$$\varphi^*(z, z', \delta) = \beta^{\frac{1}{2}}(\delta) \int \overline{x(z'^{-1}\delta^{-1}\zeta' z)}\, d\mu(\zeta') = \overline{\varphi(z', z, \delta^{-1})}.$$

III. *Если $x(g)$ — непрерывная функция из R'', то при любом значении $\delta \in D$ сходится абсолютно интеграл*

$$I_\delta = \int \varphi(z, z, \delta)\, d\mu(z) \tag{22.8}$$

Действительно, по определению функции $\varphi(z_1, z_2, \delta)$,

$$I_\delta = \beta^{\frac{1}{2}}(\delta) \int x(z^{-1}\delta\zeta z)\, d\mu(z)\, d\mu(\zeta). \tag{22.9}$$

Положим в этом равенстве $z = \zeta_0 \delta_0 u$ и сделаем замену переменной интегрирования:

$$\zeta' = (\delta_0^{-1}\delta^{-1}\zeta_0^{-1}\delta\delta_0)\,\delta_0^{-1}\zeta\zeta_0\delta_0.$$

Тогда

$$\frac{d\mu(\zeta)}{d\mu(\zeta')} = \beta^{-1}(\delta_0) = \beta(u);$$

следовательно, применяя формулу (7.12), получим:

$$I_\delta = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x(u^{-1}\delta_0^{-1}\delta\delta_0\zeta' u)\, \beta(u)\, d\mu(z)\, d\mu(\zeta) =$$

$$= c\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x(u^{-1}\delta_0^{-1}\delta\delta_0\zeta u)\, d\mu(u)\, d\mu(\zeta).$$

Если $x(g) = 0$ при $g \overline{\in} Q$, то интегрирование по ζ фактически ведется по множеству тех ζ, для которых

$$k = \delta_0^{-1}\delta\delta_0\zeta \in \mathfrak{U}Q\mathfrak{U}.$$

Так как диагональные матрицы k_{pp}, δ'_{pp} матриц k и $\delta' = \delta_0^{-1}\delta\delta_0$ совпадают, то и соответствующие матрицы δ' образуют некоторое компактное множество $\mathfrak{D}$. Но тогда интегрирование по ζ ведется по компактному множеству $\subset \mathfrak{D}\mathfrak{U}Q\mathfrak{U}$. В силу ограниченности функции $x(g)$, отсюда следует, что интеграл в (22.9) существует; поэтому интеграл в (22.8) сходится абсолютно.

Применим теперь предложения I, II, III к функции $x_1 = xx^*$, где $x \in R''_{\mathfrak{G}}$. Функция x_1 непрерывна; следовательно, в силу III, сходится абсолютно* интеграл

$$\int \varphi_1(z, z_1\delta)\, d\mu(z) = \int \varphi(z, z'\delta\delta_1^{-1})\, \varphi^*(z', z, \delta)\, d\mu(\delta_1)\, d\mu(z)\, d\mu(z'). \tag{22.10}$$

В частности, при $\delta = e$ сходится интеграл

$$\int \varphi_1(z, z, e)\, d\mu(z) = \int \varphi(z, z', \delta_1^{-1})\, \varphi^*(z', z, \delta_1)\, d\mu(\delta_1)\, d\mu(z)\, d\mu(z'). \tag{22.11}$$

---

* В абсолютной сходимости можно легко убедиться, заменяя в III функцию $x(g)$ функцией $|x(g)|$.

В силу II, эту формулу можно переписать в виде:

$$\int \varphi_1(z, z, e)\, d\mu(z) = \int |\varphi(z, z', \delta_1^{-1})|^2\, d\mu(\delta_1)\, d\mu(z)\, d\mu(z') =$$
$$= \int |\varphi(z, z', \delta)|^2\, d\mu(\delta)\, d\mu(z)\, d\mu(z'). \tag{22.12}$$

Положим теперь*

$$\varphi(\hat{z}\dot{z}, \hat{z}'\dot{z}', \delta) = \varphi(\hat{z}, \hat{z}', \dot{z}, \dot{z}', \delta); \tag{22.13}$$

тогда (22.12) примет вид:

$$\int \varphi_1(z, z, e)\, d\mu(z) = \int |\varphi(\hat{z}, \hat{z}', \dot{z}, \dot{z}', \delta)|^2\, d\mu(\delta)\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(\hat{z}')\, d\mu(\dot{z})\, d\mu(\dot{z}') \tag{22.14}$$

так что последний интеграл конечен.

Но тогда можно в (22.14) перейти от функций φ, φ^* к их трансформациям Фурье

$$\Phi(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \delta) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{2\tau}} \int \varphi(\hat{z}, \hat{z}', \dot{z}, \dot{z}', \delta) \exp i \operatorname{Re}\left\{\sum_{p=1}^{\tau} (\bar{z}_p w_p - \bar{z}'_p w'_p)\right\} d\mu(\dot{z}) d\mu(\dot{z}') d\mu(\hat{z}) \ldots d\mu(\hat{z}'), \tag{22.15}$$

$$\Phi^*(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \delta) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{2\tau}} \int \varphi^*(\hat{z}, \hat{z}', \dot{z}, \dot{z}', \delta) \exp \operatorname{Re}\left\{\sum_{p=1}^{\tau} (\bar{z}_p w_p - \bar{z}'_p w'_p)\right\} d\mu(\dot{z}) d\mu(\dot{z}')\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(\hat{z}'), \tag{22.16}$$

$$w = (w_1, \ldots, w_\tau), \quad w' = (w'_1, \ldots, w'_\tau).$$

Формула (22.10) примет тогда вид:

$$\int \varphi_1(z, z, \delta)\, d\mu(z) =$$
$$= \int \Phi(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \delta\delta_1^{-1}) \Phi^*(\hat{z}', \hat{z}, w', w, \delta_1) d\mu(\hat{z})\, d\mu(\hat{z}') d\mu(w)\, d\mu(w') d\mu(\delta_1), \tag{22.17}$$

причем, в силу (22.14), интеграл в (22.17) сходится абсолютно. Умножая обе части (22.17) на характер $\chi(\delta)$, соответствующий данному представлению T_g дополнительной серии, и, интегрируя по $d\mu(\delta)$, получим, в силу свойства I функций φ,

$$I = \int \varphi_1(z, z, \delta)\, \chi(\delta)\, d\mu(z)\, d\mu(\delta) =$$
$$= \int L(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi) L^*(\hat{z}', \hat{z}, w', w, \chi)\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(\hat{z}')\, d\mu(w)\, d\mu(w'), \tag{22.18}$$

где, в силу формул (22.12), (22.5), (22.15), (22.16),

$$L(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi) = \int \varphi(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \delta)\, \chi(\delta)\, d\mu(\delta), \tag{22.19}$$

$$L^*(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi) = \int \varphi^*(z, \hat{z}', w, w', \delta)\, \chi(\delta)\, d\mu(\delta) \tag{22.20}$$

---

* По поводу обозначений см. § 17.

— ядра операторов T_x, T_x^* в пространстве * H. Поэтому для любых функций $f_1, f_2 \in H$

$$\int L(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi) f_1(\hat{z}', w') \cdot \prod_{p=1}^{\tau} |w_p|^{-2\sigma_p} \overline{f_2(\hat{z}, w)} d\mu(\hat{z}) d\mu(\hat{z}') d\mu(w) d\mu(w') =$$

$$= \int f_1(\hat{z}', w') \prod_{p=1}^{\tau} |w'_p|^{-2\sigma_p} \overline{L^*(\hat{z}', z, w', w, \chi) f_2(\hat{z}, w)} d\mu(\hat{z}) d\mu(\hat{z}') d\mu(w) d\mu(w');$$

отсюда

$$L^*(\hat{z}', \hat{z}, w', w, \chi) = \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{w'_p}{w_p} \right|^{2\sigma_p} \overline{L(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi)}. \tag{22.21}$$

Подставляя это выражение в (22.18), получим:

$$I = \int \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{w'_p}{w_p} \right|^{2\sigma_p} |L(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi)|^2 d\mu(\hat{z}) d\mu(\hat{z}') d\mu(w) d\mu(w'). \tag{22.22}$$

Пусть теперь $f(\hat{z}, w) \in H$; положим

$$\tilde{f}(\hat{z}, w) = f(\hat{z}, w) \prod_{p=1}^{\tau} |w_p|^{-\sigma_p}. \tag{22.23}$$

Переход от f к $\tilde{f}$ есть изометрическое отображение пространства H на пространство $\tilde{H}$ всех функций $\tilde{f}$, удовлетворяющих условию:

$$\|\tilde{f}\|^2 = \int |f(\hat{z}, w)|^2 d\mu(\hat{z}) d\mu(w) < +\infty. \tag{22.24}$$

В этом пространстве $\tilde{H}$ оператор T_x имеет ядро:

$$\tilde{L}(\hat{z}, \hat{z}', w, w') = L(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi) \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{w'_p}{w_p} \right|^{\sigma_p}, \tag{22.25}$$

следовательно, формула (22.22) переходит в

$$I = \int |\tilde{L}(\hat{z}, \hat{z}', w, w')|^2 d\mu(\hat{z}) d\mu(\hat{z}') d\mu(w) d\mu(w'). \tag{22.26}$$

Так как в пространстве $\tilde{H}$ норма задается формулой (22.24), т. е. как интеграл квадрата модуля функции, то последнее выражение есть след оператора T_{x^*x}.

3. Формулы для следа в дополнительных сериях. Применяя к интегралу I в (22.2) те же преобразования, что и в §§ 20, 21, приходим к следующей теореме:

Теорема 12. *Пусть T_g — представление дополнительной серии, соответствующее характеру*

$$\chi(\delta) = \prod_{p=2}^{r-2\tau} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{\tau} |v_p|^{m_p + i\sigma'_p + \sigma''_p} v_p^{-m_p} |\lambda_p|^{m_p + i\sigma'_p - \sigma''_p} \lambda_p^{-m_p}.$$

* Определение пространства H см. в п. 3 § 17.

Для любой ограниченной измеримой функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, оператор

$$T_{x_1} = \int x_1(g)\, T_g\, d\mu(g), \tag{22.27}$$

соответствующий функции $x_1 = x^* x$, имеет след. В случае невырожденной дополнительной серии этот след определяется формулами

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int x_1(g)\,\frac{\sum \chi(\delta)}{\prod |\lambda_p - \lambda_q|^2}\,d\mu(g), \tag{22.28}$$

где δ — диагональная матрица, диагональным элементом которой являются собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы g, а сумма распространяется на все перестановки этих собственных значений.

В случае же вырожденной дополнительной серии след определяется формулами

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) =$$

$$= \frac{1}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!} \int x_1(g) \left\{ \sum \chi(\delta)\,\frac{|D(\delta_1)|\,|D(\delta_2)|\ldots|D(\delta_r)|}{|D(\delta)|} \times \right.$$

$$\left. \times\, |\Lambda_1|^{-n_1}\,|\Lambda_2|^{-n_2}\,|\Lambda_r|^{-n_r} \right\} d\mu(g), \tag{22.29}$$

$$K = K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}, \qquad m = r - 2\tau,$$

где δ — диагональная матрица, диагональным элементом которой являются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы g, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ — диагональные матрицы порядков $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$ с диагональными элементами

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2};\ \lambda_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}; \ldots, \lambda_{n_r}$$

соответственно; $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_r$ — определители этих матриц, $D(\delta)$, $D(\delta_1), \ldots, D(\delta_r)$ — дискриминанты их характеристических многочленов, а сумма распространяется на все перестановки собственных значений матрицы g.

§ 23. Непрерывность следа и полная непрерывность операторов T_x; критерии эквивалентности

Формулы для следа, полученные в §§ 20, 21 и 22, дают возможность указать простой критерий эквивалентности представлений T_g одной или различных серий. Этот критерий основан на том, что след должен быть унитарным инвариантом представления. Мы устанавливаем этот критерий сперва для случая $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r$, так как в дальнейшем доказываем (см. п. 5), что представления других серий эквивалентны представлениям серий, удовлетворяющих этому условию. Таким образом, на протяжении всего этого параграфа, за исключением п. 5, мы будем предполагать, не оговаривая особо, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r$. Мы используем также результаты §§ 20—22 для доказательства того, что для любой суммируемой функции $x(g)$ оператор $T_x = \int x(g) T_g d\mu(g)$ вполне непрерывен и что для плотного множества таких функций след $S(T_x)$ есть непрерывная функция характера χ.

1. Полная непрерывность операторов T_x. В §§ 20—22 было показано, что для любой ограниченной измеримой функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, оператор $T_x^* T_x$, где

$$T_x = \int x(g) T_g d\mu(g),$$

имеет след, а поэтому вполне непрерывен. Отсюда следует:

I. *Если T_g — представление основной или дополнительной* (вырожденной или невырожденной) *серии, то для любой суммируемой функции $x(g)$ оператор*

$$T_x = \int x(g) T_g d\mu(g) \tag{23.1}$$

вполне непрерывен.

Действительно, пусть $x(g)$ — суммируемая функция и пусть $\varepsilon > 0$; существует ограниченная измеримая функция $x_1(g)$, равная нулю вне некоторого компактного множества, такая, что

$$\int |x(g) - x_1(g)| d\mu(g) < \varepsilon.$$

Тогда

$$|T_x - T_{x_1}| \leqslant \int |x(g) - x_1(g)| |T_g| d\mu(g) = \int |x(g) - x_1(g)| d\mu(g) < \varepsilon,$$

ибо $|T_g| = 1$; следовательно, T_x есть предел, в смысле нормы оператора, вполне непрерывных операторов T_{x_1}. Поэтому T_x вполне непрерывен.

2. Непрерывность следа представлений основных серий. Представления T_g основной серии определяются характерами $\chi(\delta)$ группы D. Совокупность всех этих характеров есть топологическая группа характеров группы D; обозначим ее через X.

Докажем, что:

II. *Если T_g — представление основной серии, соответствующее характеру χ и*

$$T_x = \int x(g) T_g d\mu(g),$$

то для любой измеримой ограниченной функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, след $S(T_x^*T_x)$ есть непрерывная функция характера χ на группе X характеров группы D.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$S(T_x^*T_x) = \int I_\delta \chi(\delta)\, d\mu(\delta), \tag{23.2}$$

где

$$I_\delta = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x_1(z^{-1}\delta\zeta z)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(z), \tag{23.3}$$

$$x_1 = x^* x. \tag{23.4}$$

Как было показано в п. 2 § 22, при наших предположениях относительно $x(g)$, функция I_δ ограничена и обращается в нуль вне некоторого компактного множества группы D; следовательно, I_δ — суммируемая функция на группе D. С другой стороны, интеграл (23.2) для любой суммируемой функции I_δ есть непрерывная функция характера χ на группе X.

3. Лемма о представлениях. Вывод критериев эквивалентности представлений T_g основан на следующей общей лемме о представлениях.

Лемма. *Пусть V_g — унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, кратное данному неприводимому представлению U_g этой группы, и пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство в пространстве $\mathfrak{H}$ представления V_g, инвариантное по отношению ко всем операторам V_g. Тогда всякая часть $\tilde{V}_g$ представления V_g в подпространстве $\mathfrak{M}$ также кратна неприводимому представлению U_g.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}_0$ — пространство представления U_g. Представление V_g, кратное представлению U_g, можно реализовать следующим образом:

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов α; пространство $\mathfrak{H}$ состоит из всех комплексов $\xi = \{\xi_\alpha\}$, $\xi_\alpha \in \mathfrak{H}_0$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию

$$\|\xi\|^2 = \sum_\alpha \|\xi_\alpha\|^2 < +\infty \tag{23.5}$$

и

$$U_g\xi = \{U_g\xi_\alpha\}. \tag{23.6}$$

Пусть P — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на инвариантное подпространство $\mathfrak{M}$. В силу инвариантности $\mathfrak{M}$, оператор P перестановочен со всеми операторами V_g. С другой стороны, оператор P можно представить в виде матрицы $P \sim \|P_{\alpha,\beta}\|$ ограниченных операторов $P_{\alpha,\beta}$ в пространстве $\mathfrak{H}_0$. В силу (23.6) перестановочность оператора P с V_g эквивалентна равенствам

$$U_g P_{\alpha,\beta} = P_{\alpha,\beta} U_g; \tag{23.7}$$

так как U_g — неприводимое представление, то равенства (23.7) возможны лишь тогда, когда $P_{\alpha,\beta}$ есть оператор умножения на скаляр $P_{\alpha,\beta} = \lambda_{\alpha,\beta}\, 1$. Таким образом,

$$P \sim \|\lambda_{\alpha,\beta}\, 1\|. \tag{23.8}$$

Обозначим через H_0 совокупность всех комплексов $c = \{c_\alpha\}$ чисел c_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию

$$\|c\|^2 = \sum_\alpha |c_\alpha|^2 < +\infty. \tag{23.9}$$

Тогда матрица $p = \|\lambda_{\alpha,\beta}\|$ определяет проекционный оператор на некоторое подпространство $\mathfrak{M}_0 \subset H_0$. Если $\mathfrak{M}'$ — инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$, содержащееся в $\mathfrak{M}$, а $P' \sim \|\lambda_{\alpha\beta}\, 1\|$ — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$, то

$$P'P = P'. \tag{23.10}$$

Но тогда матрица $p' = \|\lambda'_{\alpha\beta}\|$ удовлетворяет условию

$$p'p = p'. \tag{23.11}$$

Следовательно, соответствующее подпространство $\mathfrak{M}_0'$ содержится в $\mathfrak{M}_0$. Обратно, если $\mathfrak{M}_0' \subset \mathfrak{M}_0$, а $p' = \|\lambda'_{\alpha\beta}\|$ — матрица оператора проектирования на $\mathfrak{M}_0'$, то выполняется (23.11). Поэтому оператор проектирования $P' \sim \|\lambda'_{\alpha\beta}\, 1\|$ удовлетворяет условию (23.10). Следовательно, он проектирует на инвариантное подпространство $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$.

Пусть, в частности, $\mathfrak{M}_0'$ — одномерное подпространство в $\mathfrak{M}_0$; тогда p' — минимальный оператор проектирования в H_0, удовлетворяющий условию (23.11). Соответствующий оператор P' есть минимальный оператор проектирования, перестановочный со всеми операторами U_g и удовлетворяющий условию (23.10). Следовательно, P' есть оператор проектирования на минимальное инвариантное подпространство $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$.

Поэтому часть V_g' представления $\tilde{V}_g$ в пространстве $\mathfrak{M}'$ является неприводимым представлением. Согласно теореме 3 § 3 в [7], представление V_g' эквивалентно представлению U_g. Подпространство $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ также инвариантно относительно всех операторов V_g. Применяя к нему тот же прием, мы выделим минимальное инвариантное подпространство $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$, в котором представление V_g эквивалентно представлению U_g и т. д. Тем самым доказано, что $\mathfrak{M}$ есть прямая сумма минимальных инвариантных подпространств, в каждом из которых представление V_g эквивалентно данному неприводимому представлению U_g.

Лемма доказана.

4. Критерий эквивалентности.

Теорема 13. *Два представления T_g, T'_g из основных или дополнительных серий эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой измеримой ограниченной функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, следы операторов*

$$T_{x_1} = \int x_1(g) T_g \, d\mu(g), \quad T'_{x_1} = \int x_1(g) T'_g \, d\mu(g),$$

соответствующих функции $x_1 = x^* x$, совпадают:

$$S(T_{x_1}) = S(T'_{x_1}). \tag{23.12}$$

Доказательство. Необходимость условия (23.12) очевидна, ибо след $S(T_{x_1})$ есть унитарный инвариант.

Пусть условие (23.12) выполнено. Докажем, что представления эквивалентны.

Каждой функции* $x(g) \in R''$ поставим в соответствие ядро $K(z, z', \chi)$ оператора T_x и обозначим через $\mathfrak{K}$ совокупность всех полученных таким образом ядер. Если $x(g) \in R''$, то при любом $g_0 \in \mathfrak{G}$ также $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1} g) \in R''$, поэтому соответствующее ядро $K_{g_0}(z, z'_0, \chi)$ также $\in \mathfrak{K}$. Найдем это ядро. Мы имеем:

$$K_{g_0}(z, z', \chi) = \int x_{g_0}(z^{-1} k z) \alpha(k) \, d\mu_l(k) = \int x(g_0^{-1} z^{-1} k z) \alpha(k) \, d\mu_l(k). \tag{23.13}$$

Положим

$$z g_0 = k_1 z_1, \quad \text{следовательно,} \quad z_1 = \overline{z g_0}; \tag{23.14}$$

тогда из (23.13) получаем

$$K_{g_0}(z, z', \chi) = \int x(z_1^{-1} k_1^{-1} k z') \alpha(k) \, d\mu_l(k) =$$
$$= \int x(z_1^{-1} k z') \alpha(k_1 k) \, d\mu_l(k) = \alpha(k_1) K(z_1, z', \chi),$$

т. е., в силу (23.14),

$$K_{g_0}(z, z', \chi) = \alpha(z g_0) K(\overline{z g_0}, z', \chi). \tag{23.15}$$

Другими словами,

III. *Переход от ядра K к K_g осуществляется применением оператора T_{g_0} к ядру $K(z, z', \chi)$, рассматриваемому как функция от z, причем множество $\mathfrak{K}$ остается инвариантным при таком переходе.*

Рассмотрим теперь следующие случаи:

1. T_g — представление основной серии.

---

* Напомним, что R'' обозначает совокупность всех ограниченных измеримых функций $x(g)$, равных нулю вне некоторого компактного множества.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$ совокупность всех функций $F(z, z')$ таких, что

$$\|F\|^2 = \int |F(z, z')|^2 d\mu(z) d\mu(z') < +\infty. \tag{23.16}$$

Определим в $\tilde{\mathfrak{H}}$ оператор V_g, полагая:

$$V_g F(z, z') = \alpha(zg) F(z\bar{g}, z'). \tag{23.17}$$

Очевидно, V_g — унитарное представление группы $\mathfrak{G}$; докажем, что оно кратно представлению T_g.

Пусть $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$. Положим

$$f_n(z) = \int F(z, z') \overline{\varphi_n(z')} d\mu(z'): \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{23.18}$$

тогда

$$\int |F(z, z')|^2 d\mu(z) d\mu(z') = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(z)|^2 d\mu(z). \tag{23.19}$$

Следовательно, переход от $F(z, z')$ к $\{f_n(z)\}$ есть изометрическое отображение пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$ на счетную прямую сумму $\mathfrak{H} + \mathfrak{H} + \ldots$ пространств, равных $\mathfrak{H}$.

Оператор V_g можно рассматривать как оператор в $\mathfrak{H} + \mathfrak{H} + \ldots$ Очевидно,

$$V_g \{f_n(z)\} = \{T_g f_n(z)\}. \tag{23.20}$$

Следовательно, представление V_g кратно представлению T_g.

Множество $\mathfrak{K}$ всех ядер K, соответствующих функциям $x(g) \in R''$, есть линейное многообразие в $\tilde{\mathfrak{H}}$, инвариантное по отношению к представлению V_g. Действительно, согласно предложению IV § 19,

$$\int |K(z, z', \chi)|^2 d\mu(z) d\mu(z') = S(T_{x^* x}) < +\infty \tag{23.21}$$

так что $\mathfrak{K} \subset \tilde{\mathfrak{H}}$; кроме того, в силу III, применение оператора V_{g_0} к ядру $K \in \mathfrak{K}$ есть переход к ядру $K_{g_0} \in \mathfrak{K}$. Следовательно, $\mathfrak{K}$ инвариантно по отношению к T_g. Поэтому пополнение $\tilde{\mathfrak{K}}$ множества $\mathfrak{K}$ в смысле метрики в $\tilde{\mathfrak{H}}$ есть подпространство в $\tilde{\mathfrak{H}}$, инвариантное относительно операторов V_g. Но тогда, согласно лемме п. 3, часть $\check{V}_g$ представления* V_g в пространстве $\tilde{\mathfrak{K}}$ кратна неприводимому представлению T_g.

2. T_g — представление дополнительной серии.

Каждой функции $x(g) \in R''$ поставим в соответствие ядро $\tilde{L}(\hat{z}, \hat{z}', w, w', \chi)$ оператора T_x в пространстве** $\tilde{H}$ и обозначим через $\mathfrak{K}$

---

* В действительности, пользуясь леммой и тем, что если $K(z, z', \chi) \in \mathfrak{K}_\chi$, то и $K(z', z, \chi) \in \mathfrak{K}_\chi$, можно показать, что $\tilde{\mathfrak{K}} = \tilde{\mathfrak{H}}$. Нам это, однако, в данном параграфе не понадобится.

** Определение пространства $\tilde{H}$ см. в п. 2 § 22.

совокупность всех таких ядер $\widetilde{L}$. Далее, обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всех функций $f(\hat{z}, \hat{z}', w, w')$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 = \int |f(\hat{z}, \hat{z}', w, w')|^2 d\mu(z)\, d\mu(z')\, d\mu(w)\, d\mu(w') < +\infty,$$

и определим в $\mathfrak{H}$ оператор V_g, полагая при фиксированных $\hat{z}'$, w'

$$V_g f(\hat{z}, \hat{z}', w, w') = T_g f(\hat{z}, \hat{z}', w, w'), \tag{23.22}$$

так что в правой части оператор T_g применяется к функции $f(\hat{z}, \hat{z}', w, w')$, рассматриваемой как функция от $\hat{z}$, w, принадлежащая пространству H.

Рассуждая, как и в случае 1), мы убеждаемся в том, что представление V_g кратно неприводимому представлению T_g.

Далее, так как при

$$S(T_{x^* x}) = \int |\widetilde{L}(\hat{z}, \hat{z}', w, w')|^2 d\mu(\hat{z})\, d\mu(z')\, d\mu(w)\, d\mu(w') < +\infty, \tag{23.23}$$

то $\mathfrak{K} \subset H$. Поэтому замыкание $\widetilde{\mathfrak{K}}$ множества $\mathfrak{K}$ в смысле метрики в H есть подпространство в H. Из формулы (23.15) следует, что это подпространство инвариантно относительно всех операторов V_g. Согласно лемме п. 3, часть $\widetilde{V}_g$ представления V_g в $\widetilde{\mathfrak{K}}$ также кратна неприводимому представлению T_g.

Пусть теперь представления T_g и T_g' удовлетворяют условию (23.12)

$$S(T_{x_1}) = S(T'_{x_1}).$$

Поставим в соответствие друг другу элементы из $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$, отвечающие одной и той же функции $x(g) \in R''$. В силу (23.12), это соответствие изометрично; оно продолжается, и притом единственным образом, до изометрического соответствия W между $\widetilde{\mathfrak{K}}$ и $\widetilde{\mathfrak{K}}'$. Так как при сдвиге $x(g) \to x(g_0^{-1}g)$ элементы множеств $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$ преобразуются операторами $\widetilde{V}_g$ и $\widetilde{V}_g'$ соответственно, то W переводит друг в друга операторы $\widetilde{V}_g$ и $\widetilde{V}_g'$. Следовательно, представления $\widetilde{V}_g$ и $\widetilde{V}_g'$ эквивалентны. Но эти представления кратны неприводимым представлениям T_g и T_g'; следовательно, согласно следствию 5 § 3 в [7], сами представления T_g и T_g' также эквивалентны.

Применим теперь теорему 13 к различным конкретным представлениям рассмотренных нами серий.

Пусть T_g — представление невырожденной основной или дополнительной серии, соответствующее характеру χ, и пусть s — произвольная подстановка диагональных элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы δ. Обозначим через δ_s результат применения подстановки s к диагональной матрице $\delta \in \mathfrak{D}$; положим

$$\chi_s(\delta) = \chi(\delta_s), \tag{23.24}$$

$$S(\chi, \delta) = \sum_s \chi_s(\delta), \tag{23.25}$$

где сумма распространяется на все $n!$ перестановок s чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Если же T_g — представление вырожденной серии, то для диагональной матрицы δ мы полагаем $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$, где δ_p — диагональная матрица порядка n_p и

$$\omega(\delta, \chi) = \chi(\delta) \, |D(\delta_1)| \, |D(\delta_2)| \ldots |D(\delta_r)| \, |\Lambda_1|^{-n_1} |\Lambda_2|^{-n_2} \ldots |\Lambda_r|^{-n_r}, \quad (23.26)$$

$$\omega_s(\delta; \chi) = \omega(\delta_s; \chi), \quad (23.27)$$

$$S(\chi; \delta) = \sum_s \omega_s(\delta; \chi), \quad (23.28)$$

где $D(\delta_1)$, $D(\delta_2), \ldots, D(\delta_r)$ — дискриминанты характеристических многочленов матриц $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ и где сумма состоит из $\frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_r!}$ слагаемых, соответствующих подстановкам S из различных классов смежности симметрической группы по подгруппе Σ (см. п. 3 § 21). При этих обозначениях формулы (20.24), (21.34), (22.28), (22.29) для следа запишутся в одном и том же виде:

$$S(T_x) = \int x(g) \frac{S(\chi; \delta)}{D(\delta)} \, d\mu(g), \quad (23.29)$$

где δ — диагональная матрица из собственных значений матрицы g.

Из формулы (23.29) и теоремы 13 получаем следующую теорему.

Теорема 14. *Два представления T_g и T'_g из основных или дополнительных серий эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой диагональной матрицы $g \in \mathfrak{G}$*

$$S(\chi; \delta) = S(\chi', \delta). \quad (23.30)$$

Действительно, если условие (23.30) выполнено, то из (23.29) следует, что $S(T_{x^* x}) = S(T'_{x^* x})$. Но тогда, согласно теореме 13, представления T_g и T'_g эквивалентны. Обратно, если представления T_g и T'_g эквивалентны, то $S(T_{x^* x}) = S(T'_{x^* x})$. Полагая здесь

$$x = x_1 \pm x_2 \quad \text{и} \quad x = x_1 \pm i x_2,$$

где x_1, $x_2 \in R''$, мы получим, что

$$S(T_{x_1^* x_2}) = S(T'_{x_1^* x_2}). \quad (23.31)$$

Возьмем функцию $x_1(g)$, равную нулю вне некоторой окрестности единичного элемента $g = e$, и функцию $x_2(g)$, равную нулю вне некоторой окрестности диагональной матрицы $g = \delta$, с различными диагональными элементами. Пронормируем эти функции надлежащим образом и перейдем в равенстве (23.31) к пределу при условии, что указанные выше окрестности стягиваются в точку. Мы получим в пределе

$$\frac{S(\chi; \delta)}{D(\delta)} = \frac{S(\chi'; \delta)}{D(\delta)}, \quad (23.32)$$

откуда

$$S(\chi;\ \delta) = S(\chi';\ \delta). \tag{23.33}$$

Теорема 14 тем самым доказана.

Пользуясь линейной независимостью различных слагаемых в суммах $S(\chi;\ \delta)$, из теоремы 14 получаем следующие теоремы:

Теорема 15. *Представления различных серий попарно неэквивалентны.*

Теорема 16. *Для представления T_g, T'_g одной и той же серии, соответствующие функциям $\chi(\delta)$ и $\chi'(\delta)$, эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторой подстановки*

$$\chi'(\delta) = \chi_s(\delta). \tag{23.34}$$

При этом в случае представлений основной невырожденной серии возможна любая подстановка s; в случае же представлений других серий возможны лишь те подстановки s, которые данную функцию $\chi(\delta)$ переводят в функцию $\chi_s(\delta)$, определяющую представление той же серии. Именно, в случае представления дополнительной невырожденной серии, соответствующего функции

$$\chi(\delta) = \prod_{p=2}^{n-2\tau} |\lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \lambda_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{\tau} |\mu_p|^{m_p + i\sigma'_p + \sigma''_p} \mu_p^{-m_p} |\nu_p|^{m_p + i\sigma'_p - \sigma''_p} \nu_p^{-m_p}, \tag{23.35}$$

где

$$\mu_p = \lambda_{n-2\tau+2p-1}, \qquad \nu_p = \lambda_{n-2\tau+2p}, \qquad p = 1, \ldots, \tau, \tag{23.36}$$

возможны те и только те подстановки s, которые переставляют между собой числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ и пары $\{\mu_p, \nu_p\}$, $p = 1, \ldots, \tau$. В случае представления основной вырожденной серии, соответствующей числам $n_1, n_2, \ldots, n_r$ и характеру

$$\chi(\delta) = \prod_{p=2}^{r} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p}, \qquad \Lambda_p = \det \delta_p, \qquad p = 1, \ldots, r, \tag{23.37}$$

возможны только подстановки s, которые переставляют между собой диагональные матрицы δ_p одинаковой размерности.

5. Случай произвольной перестановки чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$. До сих пор мы рассматривали только вырожденные серии, соответствующие числам $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$, расположенным в невозрастающем порядке $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r$. Докажем теперь, что всякая другая перестановка тех же чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$ приводит по существу к той же серии представлений. Именно, имеет место

Теорема 17. *Пусть*

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r, \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_r \tag{23.38}$$

и пусть $n_1', n_2', \ldots, n_r'$ — *какая-нибудь перестановка тех же чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_r$. *Тогда каждое представление* T_g' *из серии* $(n_1', n_2', \ldots, n_r')$ *эквивалентно некоторому представлению* T_g *из серии* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$. *Именно, если система характеров*

$$\chi_1'(\Lambda_1), \quad \chi_2'(\Lambda_2), \ldots, \chi_r'(\Lambda_r) \tag{23.39}$$

получается из системы характеров

$$\chi_1(\Lambda_1), \quad \chi_2(\Lambda_2), \ldots, \chi_r(\Lambda_r) \tag{23.40}$$

при помощи той же подстановки, что и система $(n_1', n_2', \ldots, n_r')$ *из системы* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, *то представление* T_g' *из серии* $(n_1', n_2', \ldots, n_r')$, *соответствующее характеру*

$$\chi'(\delta) = \chi_1'(\Lambda_1)\,\chi_2'(\Lambda_2)\ldots\chi_r'(\Lambda_r), \tag{23.41}$$

эквивалентно представлению T_g *из серии* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, *соответствующему характеру*

$$\chi(\delta) = \chi_1(\Lambda_1)\,\chi_2(\Lambda_2)\ldots\chi_r(\Lambda_r). \tag{23.42}$$

Доказательство. При доказательстве существования следа и выводе формулы для него мы нигде не пользовались тем, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r$. Поэтому теорема 11 § 21 о следе имеет место и для представлений из серии $(n_1', n_2', \ldots, n_r')$. Из формулы (21.34) для следа и наших предположений относительно представлений T_g и T_g' непосредственно следует, что

$$S(T_{x_1}') = S(T_{x_1}), \tag{23.43}$$

где

$$T_{x_1} = \int x_1(g)\,T_g\,d\mu(g), \qquad T_{x_1}' = \int x_1(g)\,T_g'\,d\mu(g) \tag{23.44}$$

и $x_1 = x^*x$, $x \in R''$.

Повторяя рассуждение в доказательстве теоремы 13, построим пространства $\widetilde{\mathfrak{K}}$ и $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ и в них представления $\widetilde{V}_g$ и $\widetilde{V}_g'$, кратные представлениям T_g и T_g'. В силу равенства (23.43), представления $\widetilde{V}_g$ и $\widetilde{V}_g'$ эквивалентны.

Пусть W — изометрический оператор, построенный при доказательстве теоремы 13, который отображает $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ на $\widetilde{\mathfrak{K}}$ и переводит $\widetilde{V}_g'$ в $\widetilde{V}_g$. Это отображение переводит часть T_g' представления V_g' в некоторую часть — обозначим ее через $\hat{V}_g'$ — представления V_g. Но, так как представление V_g кратно неприводимому представлению T_g, то, в силу леммы п. 3, представление $\hat{V}_g'$ также кратно представлению T_g. Следовательно, и представление T_g', эквивалентное представлению $\hat{V}_g'$, кратно представлению T_g. Поэтому след $S(T_x')$ должен получаться из следа $S(T_{x_1})$ умножением на натуральное число (конечное или бесконечное), равное кратности T_g в T_g'. В силу равенства (23.43), это натуральное число равно единице, т. е. представление T_g' эквивалентно представлению T_g, что и требовалось доказать.

Глава VI

Аналог формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$

Известно, что если $f(x)$ — функция с суммируемым квадратом на прямой $-\infty < x < +\infty$, то существует в смысле сходимости в среднем ее трансформация Фурье

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx, \tag{1}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{2}$$

Эта вторая формула называется *формулой Планшереля*. В силу того, что функции $e^{i\alpha x}$ образуют группу всех характеров аддитивной группы всех действительных чисел, эта формула имеет групповой смысл. Известно также обобщение этого результата на произвольную коммутативную локально бикомпактную группу $\mathfrak{G}$. Если $f(g)$ — функция с суммируемым квадратом на $\mathfrak{G}$ по отношению к инвариантной мере $d\mu(g)$, а $\chi(g)$ — какой-нибудь характер группы $\mathfrak{G}$, то существует в смысле сходимости в среднем интеграл

$$\varphi(\chi) = \int f(g) \overline{\chi(g)} d\mu(g), \tag{3}$$

причем

$$\int |f(g)|^2 d\mu(g) = \int |\varphi(\chi)|^2 d\mu(\chi), \tag{4}$$

где $d\mu(\chi)$ — инвариантная мера в группе характеров группы $\mathfrak{G}$, а второй интеграл берется по всей этой группе характеров.

С точки зрения теории представлений этот результат имеет следующий смысл.

По самому своему определению характер $\chi(g)$ есть числовая функция, удовлетворяющая условиям

$$\chi(g_1)\chi(g_2)=\chi(g_1g_2), \qquad |\chi(g)|=1;$$

она осуществляет поэтому одномерное, следовательно, неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$.

С другой стороны, рассмотрим так называемое *регулярное представление группы* $\mathfrak{G}$. Оно определяется следующим образом: пространство $\mathfrak{H}$ представления состоит из всех функций $f(g)$ с конечной нормой $\|f\|$, где

$$\|f\|^2=\int |f(g)|^2 d\mu(g),$$

а оператор представления задается формулой

$$T_{g_0}f(g)=f(gg_0).$$

Формулы (3) и (4) осуществляют разложение пространства $\mathfrak{H}$ в континуальную прямую сумму одномерных пространств, причем компонента функции $f(g)$ в χ-ом одномерном пространстве равна $\varphi(\chi)$. Оператору T_{g_0} регулярного представления отвечает при этом оператор одномерного представления в каждом из этих одномерных пространств, именно, оператор умножения на $\chi(g_0)$, ибо функции $f(gg_0)$ отвечает вместо $\varphi(x)$

$$\int f(gg_0)\overline{\chi(g)}\,d\mu(g)=\int f(g)\overline{\chi(gg_0^{-1})}\,d\mu(g)=$$

$$=\chi(g_0)\int f(g)\chi(g)\,d\mu(g)=\chi(g_0)\varphi(\chi).$$

Это означает, что регулярное представление T_g группы $\mathfrak{G}$ разлагается в континуальную прямую сумму одномерных ее представлений.*

Аналогичные результаты имеют место для компактной группы $\mathfrak{G}$. Ее неэквивалентные неприводимые унитарные представления образуют дискретную систему $T_g^{(n)}$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Формулам (3) и (4) соответствуют формулы

$$T_n=\int f(g)\,T_g^{(n)}d\mu(g), \tag{5}$$

$$\int |f(g)|^2 dg=\sum_{n=1}^{\infty} c_n S(T_g^{(n)*}T_g), \tag{6}$$

---

* Представление T_g в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *континуальной прямой суммой представлений* $T_{g,\alpha}$ *в пространстве* $\mathfrak{H}_0$, если пространство $\mathfrak{H}$ можно изометрически отобразить на пространство всех вектор-функций f_α со значениями из $\mathfrak{H}_0$ с нормой, равной $\int |f_\alpha|^2 d\sigma(\alpha)$ (σ — некоторая мера) и притом так, что если вектору f отвечает функция f_α, то вектору $T_g f$ отвечает $T_{g,\alpha}f_\alpha$.

где c_n — некоторые константы, зависящие от размерностей представлений $T_g^{(n)}$, а $S(T_n^* T_n)$ — след оператора $T_n^* T_n$. В этом случае, как и в случае коммутативной группы, в разложении регулярного представления данной группы участвуют все ее неприводимые представления.

Комплексная унимодулярная группа $\mathfrak{G}$ не является ни коммутативной, ни компактной; тем не менее мы показываем в этой главе, что и для этой группы имеет место формула, аналогичная формулам (4) и (6). А именно, положим

$$T_\chi = \int f(g)\, T_g\, d\mu(g), \tag{7}$$

где T_g — представление основной невырожденной серии, соответствующее характеру χ группы D.

Как было показано в главе V, существует след $S(T_\chi^* T_\chi)$ оператора $T_\chi^* T_\chi$. Мы докажем в этой главе, что

$$\int |f(g)|^2 d\mu(g) = \int S(T_\chi^* T_x)\, \omega(\chi)\, d\mu(\chi), \tag{8}$$

где $\omega(\chi) = \dfrac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!\,(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \prod\limits_{p<q} [(m_p - m_q)^2 + (\rho_p - \rho_q)^2]$, $m_1 = \rho_1 = 0$, если характер χ равен $|\lambda_2|^{m_2+i\rho_2} \lambda_2^{-m_2} |\lambda_3|^{m_3+i\rho_3} \lambda_3^{-m_3} \ldots |\lambda_n|^{m_n+i\rho_n} \lambda_n^{-m_n}$. Множитель $\omega(\chi)$ играет роль множителя c_n в формуле (6), который связан с размерностью представления.

Формулу (8) мы и называем *аналогом формулы Планшереля.*

Отметим, что в отличие от коммутативных и компактных групп в (8) участвуют уже не все неприводимые представления группы $\mathfrak{G}$, а только основная невырожденная серия ее представлений.

План вывода формулы (8) следующий:

Мы исходим из функции

$$I_\delta = c\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x(u^{-1}\delta\zeta u)\, d\mu(u)\, d\mu(\zeta),$$

построенной в § 22, из которой след $S(T_\chi)$ получается по формуле:

$$S(T_\chi) = \int I_\delta \chi(\delta)\, d\mu(\delta). \tag{9}$$

Оказывается, что

$$(LI_\delta)_{\delta=e} = c_0 x(e),$$

где L — следующий дифференциальный оператор

$$L = \prod_{2 \leqslant p < q \leqslant n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau_p} - \frac{\partial}{\partial \tau_q}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_p} - \frac{\partial}{\partial \varphi_q}\right)^2\right] \prod_{p=2}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_p^2}\right), \quad \delta_p = e^{\tau_p + i\varphi_p},$$

а

$$c_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\, \pi^{n^2-n} n!$$

Отсюда, переходя от функции I_δ к следу $S(T_\chi)$, мы получаем, что

$$x(e) = \int S(T_\chi)\,\omega(\chi)\,d\mu(\chi). \tag{10}$$

Применяя формулу (10) к функции

$$x_1(g) = \int x(gg_1)\,\overline{x(g_1)}\,d\mu(g_1),$$

мы и придем к формуле (8).

§ 24. Некоторые интегральные соотношения

Для того, чтобы вычислить выражение $(LI_\delta)_{\delta=e}$, нам удобно будет в формуле

$$I_\delta = c\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\int x(u^{-1}\delta\zeta u)\,d\mu(u)\,d\mu(\zeta) \tag{24.1}$$

перейти от интегрирования по $d\mu(\zeta)$ к интегрированию по $d\mu(\tilde{u})$, ибо тем самым вместо интеграла по некомпактной группе Z мы будем иметь интеграл по компактной группе $\mathfrak{U}$ унитарных матриц.

Возможность такого перехода основана на некоторых новых интегральных соотношениях, которые мы и рассмотрим.

1. Подгруппа E и разложение вида $g = u_1\varepsilon u_2$. Условимся обозначать через E совокупность всех диагональных матриц $\varepsilon\in\mathfrak{G}$ с положительными собственными значениями. Очевидно, E есть прямая сумма $n-1$ мультипликативных групп всех положительных чисел. Если ε_p, $p=r,\dots,n$ — диагональные элементы матрицы E, то инвариантная мера в группе E определяется формулой

$$d\mu(\varepsilon) = \frac{d\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\cdot\frac{d\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\cdots\frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n}. \tag{24.2}$$

I. а) *Всякий элемент g можно представить в виде*

$$g = u_1\varepsilon u_2,\qquad u_1, u_2\in\mathfrak{U},\qquad \varepsilon\in E. \tag{24.3}$$

б) *Для всякого другого разложения $g = u_1'\varepsilon u_2'$ с тем же элементом ε*

$$u_1' = u_1 v^{-1},\qquad u_2' = vu_2, \tag{24.4}$$

где

$$\varepsilon v = v\varepsilon,\qquad v\in\mathfrak{U}. \tag{24.5}$$

в) *Если все диагональные элементы матрицы ε различны, то для всякого другого разложения $g = u_1'\varepsilon' u_2'$.*

$$u_1' = u_1\gamma s,\qquad u_2' = s^{-1}\gamma^{-1},\qquad \varepsilon^{-1} = s^{-1}\varepsilon s, \tag{24.6}$$

где s — матрица, осуществляющая подстановку строк, а γ — диагональная унитарная матрица.

Доказательство. а) Положим $a = (g^*g)^{\frac{1}{2}}$, $u = ga^{-1}$; тогда a — положительно определенная, u — унитарная матрица из $\mathfrak{G}$

$$g = ua. \tag{24.7}$$

Пусть u_2 — унитарная матрица, которая приводит матрицу a к диагональному виду, т. е. $a = u_2^{-1}\varepsilon u_2$, где ε — диагональная матрица из собственных значений матрицы a. Очевидно, $\varepsilon \in E$; подставляя это выражение для a в (24.7), получим формулу (24.3), где $u_1 = uu_2^{-1}$.

б) Если также $g = u_1'\varepsilon u_2'$, то $u_1\varepsilon u_2 = u_1'\varepsilon u_2'$. Отсюда, полагая $v_1 = u_1'^{-1}u_1$; $v_2 = u_2' \cdot u_2^{-1}$, получаем:

$$v_1\varepsilon = \varepsilon v_2. \tag{24.8}$$

Поэтому $v_1\varepsilon \cdot \varepsilon v_1^* = \varepsilon v_2 v_2^* \varepsilon$, т. е. $v_1\varepsilon^2 v_1^* = \varepsilon^2$.

Таким образом, оператор v_1 перестановочен с ε^2, а, следовательно и с ε. Но тогда равенство (24.8) можно переписать в виде $v_1\varepsilon = v_2\varepsilon$, откуда $v_1 = v_2$. Поэтому, полагая $v = v_1 = v_2$, получаем:

$$u_1' = u_1v^{-1}; \qquad u_2' = vu_2, \qquad v\varepsilon = \varepsilon v.$$

в) Пусть теперь в каком-нибудь одном из разложений вида (24.3) все диагональные элементы матрицы ε различны и пусть

$$g = u_1'\varepsilon' u_2' \tag{24.9}$$

— другое разложение того же вида элемента g. Полагая снова $v_1 = u_1'^{-1}u_1$, $v_2 = u_2'u_2^{-1}$, как и выше, получаем:

$$v_1\varepsilon = \varepsilon' v_2.$$

Отсюда $v_1\varepsilon^2 v_1 = \varepsilon'^2$. Последнее равенство возможно только тогда, когда матрицы ε^2 и ε'^2 (следовательно, ε и ε') имеют с точностью до порядка одни и те же диагональные элементы. Поэтому существует матрица s такая, что $\varepsilon' = s\varepsilon s^{-1}$ и разложение (24.9) принимает вид: $g = (u_1's)\varepsilon(s^{-1}u_2')$. Но тогда, по доказанному в б),

$$u_1's = u_1v^{-1}; \qquad s^{-1}u_2' = vu_2, \qquad v\varepsilon = \varepsilon v,$$

отсюда

$$v = \gamma, \qquad u_1' = u_1\gamma^{-1}s^{-1}, \qquad u_2' = s\gamma u_2.$$

2. Интегральное соотношение на группе $\mathfrak{G}$

II. *Если меры в группах* Γ *и* $\mathfrak{U}$ *пронормированы так, что*

$$\int d\mu(\gamma) = 1, \qquad \int d\mu(u) = 1,$$

то имеет место равенство

$$n! \int x(g)\, d\mu(g) = c_1 \int x(u^{-1}\varepsilon v) \prod_{p<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)^2\, d\mu(u)\, d\mu(v) d\mu(\varepsilon), \quad (24.10)$$

где $d\mu(\varepsilon)$ — *инвариантная мера в группе* E, c_1—*число, определенное формулой*

$$c_1 = \frac{2^{n-1}\pi^{n^2-1}}{[1!\,2!\dots(n-1)!]^2},$$

а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — *диагональные элементы матрицы* ε.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что формула (24.10) эквивалентна формуле

$$n! \int x(g)\, d\mu(g) = c_1 \int x(u^{-1}v^{-1}\varepsilon v) \prod_{p<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)\, d\mu(u)\, d\mu(\tilde{v})\, d\mu(\varepsilon), \quad (24.11)$$

где $\tilde{v}$ — класс, содержащий матрицу v. Действительно, заменив в интеграле в правой части равенства (24.10) u на vu, мы получим для него выражение

$$c_1 \int x(u^{-1}v^{-1}\varepsilon v) \prod_{p<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)\, d\mu(u)\, d\mu(v)\, d\mu(\varepsilon). \quad (24.12)$$

С другой стороны, функция $x(u^{-1}v^{-1}\varepsilon v)$ в действительности зависит только от $\tilde{v}$, ибо при переходе от v к γv, в силу равенства $\gamma\varepsilon = \varepsilon\gamma$, мы получаем:

$$x(u^{-1}v^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon\gamma v) = x(u^{-1}v^{-1}\varepsilon v).$$

Поэтому, применяя к интегралу (24.12) формулу (7.2), мы придем к его выражению в правой части (24.11). Докажем поэтому формулу (24.11).

Выбросим из группы E все элементы ε, у которых совпадают хотя бы два диагональных элемента. Тем самым группа E разобьется на $n!$ областей E_p, так что интеграл по $d\mu(\varepsilon)$ в правой части (24.11) разобьется на сумму $n!$ интегралов по областям E_p. Очевидно, что при $\varepsilon \in E_p$ соотношение $s\varepsilon s^{-1} \in E_p$ возможно только тогда, когда $s = e$. Поэтому из предложения I следует, что при данном элементе g в каждой из областей E_p существует только один элемент ε, удовлетворяющий условию $g = u^{-1}\varepsilon v$. Кроме того, в силу в) I, матрицы u и v в разложении $g = u^{-1}\varepsilon v$, $\varepsilon \in E_p$ определяются однозначно с точностью до левого множителя γ.

Положим в этом разложении $w = v^{-1}u$; разложение примет тогда вид

$$g = w^{-1}v^{-1}\varepsilon v. \quad (24.13)$$

При переходе от u и v к γu и γv матрица w не изменяется; следовательно, при условии $\varepsilon \in E_p$ разложение (24.13) однозначно определяет матрицы w, ε и класс $\tilde{v}$. Другими словами, это разложение устанавливает взаимно-однозначное отображение прямого произведения $E_p \times \mathfrak{U} \times \tilde{\mathfrak{U}}$ на почти всю группу $\mathfrak{G}$. Очевидно, это отображение также дифференцируемо; следовательно, должно иметь место равенство

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int_{E_p} d\mu(\varepsilon) \int x(w^{-1}v^{-1}\varepsilon v)\, \omega(\varepsilon, w, \tilde{v})\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v}), \quad (24.14)$$

где $\omega(\varepsilon, v, \tilde{v})$ — якобиан перехода от $d\mu(g)$ к $d\mu(\varepsilon)\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v})$.

Докажем, что функция $\omega(\varepsilon, w, \tilde{v})$ в действительности от w и $\tilde{v}$ не зависит. Для этого заметим, что

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int x(w_0 g)\, d\mu(g). \quad (24.15)$$

В силу формулы (24.14), это соотношение приводит к равенству

$$\int_{E_p} d\mu(\varepsilon) \int x(w^{-1}v^{-1}\varepsilon v)\, \omega(\varepsilon, w, \tilde{v})\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v}) =$$
$$= \int_{E_p} d\mu(\varepsilon) \int x(w_0 w^{-1}v^{-1}\varepsilon v)\, \omega(\varepsilon, w, \tilde{v})\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v}).$$

Заменяя в последнем интеграле $w_0 w^{-1}$ на w^{-1} и пользуясь инвариантностью меры $d\mu(w)$, получим

$$\int_{E} d\mu(\varepsilon) \int x(w^{-1}v^{-1}\varepsilon v)\, \omega(\varepsilon, w, \tilde{v})\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v}) =$$
$$= \int_{E} d\mu(\varepsilon) \int x(w^{-1}v^{-1}\varepsilon v)\, \omega(\varepsilon, w w_0, \tilde{v})\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v}).$$

Ввиду произвола функции x отсюда следует, что

$$\omega(\varepsilon, w, \tilde{v}) = \omega(\varepsilon, w w_0, \tilde{v}),$$

т. е. функция $\omega(\varepsilon, w, \tilde{v})$ не зависит от w. Мы можем поэтому положить

$$\omega(\varepsilon, w, \tilde{v}) = \omega(\varepsilon, \tilde{v}). \quad (24.16)$$

Аналогично, пользуясь соотношением

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int x(v_0 g)\, d\mu(g),$$

получим, что $\omega(\varepsilon, \tilde{v})$ не зависит и от $\tilde{v}$. Мы можем поэтому положить

$$\omega(\varepsilon, w, \tilde{v}) = \omega(\varepsilon, \tilde{v}) = \omega(\varepsilon). \quad (24.17)$$

Остается, таким образом, определить функцию $\omega(\varepsilon)$.

В силу доказанной независимости функции ω от w и $\tilde{v}$, для этого достаточно найти якобиан перехода от $d\mu(g)$ к $d\mu(\varepsilon)\,d\mu(w)\,d\mu(\tilde{v})$ при $w=e$, $\tilde{v}=\tilde{e}$. Матрица v в соотношении

$$g = w^{-1}v^{-1}\varepsilon v \tag{24.18}$$

определена с точностью до левого множителя γ; мы можем поэтому пронормировать ее так, чтобы ее диагональные элементы (если они отличны от нуля) были положительны. Тем самым мы в почти каждом классе $\tilde{v}$ однозначно выберем представителя v. В частности, при $\tilde{v}=e$ будет $v=e$. Перепишем соотношение (24.18) в виде

$$vwg = \varepsilon v$$

и продифференцируем обе части этого равенства. Мы получим:

$$dv\cdot w\cdot g + v\,dw\cdot g + vw\cdot dg = d\varepsilon\cdot v + \varepsilon\,dv. \tag{24.19}$$

Умножая обе части (24.19) справа на $g^{-1}w^{-1}v^{-1} = v^{-1}\varepsilon^{-1}$, получим:

$$d_rv + v\,d_rw\cdot v^{-1} + vw\,d_rg\cdot w^{-1}v^{-1} = d_r\varepsilon + \varepsilon\,d_rv\cdot\varepsilon^{-1}.$$

В частности, при $v=e$, $w=e$

$$d_rv + d_rw + d_rg = d_r\varepsilon + \varepsilon\,d_rv\cdot\varepsilon^{-1},$$

т. е.

$$d_rg = d_r\varepsilon - d_rw + \varepsilon\,d_rv\cdot\varepsilon^{-1} - d_rv. \tag{24.20}$$

Заметим, что из условия унитарности $ww^* = e$ следует, что $(d_rw)^* + d_rw = 0$, т. е.

$$d_rw_{qp} = -\overline{d_rw_{pq}} \tag{24.21}$$

и аналогично

$$d_rv_{qp} = -d_r\bar{v}_{pq}. \tag{24.22}$$

В частности, диагональные элементы d_rw_{pp} и d_rv_{pp} должны быть чисто мнимыми. С другой стороны, согласно выбору матрицы v, элементы d_rv_{pp}, $p \geqslant 2$ в точке $v=e$ должны быть действительными. Поэтому

$$d_rv_{pp} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{24.23}$$

Отсюда следует, что в качестве параметров для матриц d_rw, d_rv можно соответственно выбрать

$$d_rw_{pp}, \quad p = 2, 3, \ldots, n, \quad d_rw_{pq}, \quad p < q \tag{24.24}$$

и

$$d_rv_{pq}, \quad p < q. \tag{24.25}$$

Выберем, далее, в качестве параметров матрицы $d_r\varepsilon$ ее диагональные элементы

$$d_r\varepsilon_p, \quad p = 2, 3, \ldots, n, \tag{24.26}$$

а матрицы $d_r g$ — элементы

$$d_r g_{pp}, \quad p=2, 3, \ldots, n; \quad d_r g_{pq} \text{ и } d_r \bar{g}_{qp}, \quad p<q. \tag{24.27}$$

В этих параметрах, в силу соотношений (24.21), (24.22) и (24.23), формула (24.20) перепишется в виде

$$d_r g_{pp} = d_r \varepsilon_p - d_r w_{pp}, \quad p=2, 3, \ldots, n; \tag{24.28}$$

$$\left.\begin{aligned} d_r g_{pq} &= -d_r w_{pq} + \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q} - 1\right) d_r v_{pq}, \\ d_r \bar{g}_{qp} &= d_r w_{pq} - \left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_p} - 1\right) d_r v_{pq}, \end{aligned}\right\} p<q. \tag{24.29}$$

Так как числа $d_r \varepsilon_p$ действительны, а $d_r w_{pp}$ чисто мнимы, то при фиксированном p якобиан перехода (24.28) от $d_r g_{pp}$ к $d_r \varepsilon_p$ и $d_r w_{pp}$ равен единице. Далее, при фиксированных p и q, $p<q$ определитель преобразования (24.29) от $d_r g_{pq}$, $d_r \bar{g}_{qp}$ к $d_r w_{pq}$ и $d_r v_{pq}$ равен $\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_p} - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}\right)$. Поэтому якобиан соответствующего преобразования действительных и мнимых частей равен

$$\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_p} - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}\right)^2 = (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)^2 \varepsilon_p^{-2} \varepsilon_q^{-2}.$$

Но тогда якобиан перехода от параметров (24.27) к параметрам (24.24), (24.25) и (24.26) равен

$$\prod_{p<q} (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)\, \varepsilon_p^{-2} \varepsilon_q^{-2} = \prod_{p<q} (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)^2,$$

ибо

$$\prod_{p<q} \varepsilon_p^{-2} \varepsilon_q^{-2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)^{-n(n-1)} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$d\mu(g) = \prod_{p<q} (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)\, d\mu(\varepsilon)\, d\hat{\mu}(w)\, d\hat{\mu}(\tilde{v}), \tag{24.30}$$

где $d\hat{\mu}(w)$, $d\hat{\mu}(\tilde{v})$ — инвариантные меры в параметрах (24.24) и (24.25) соответственно. Эти меры могут отличаться от мер $d\mu(w)$, $d\mu(\tilde{v})$ только постоянным множителем; следовательно,

$$d\hat{\mu}(w) = \hat{\mu}(\mathfrak{U})\, d\mu(w), \quad d\hat{\mu}(\tilde{v}) = \hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}})\, d\mu(\tilde{v}), \tag{24.31}$$

где $\hat{\mu}(\mathfrak{U})$ и $\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}})$ — меры всей группы $\mathfrak{U}$ и всего многообразия $\tilde{\mathfrak{U}}$ в параметрах (24.24) и (24.25) соответственно. Подставляя эти выражения в формулу (24.30), получим:

$$d\mu(g) = c_1 \prod_{p<q} (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu(w)\, d\mu(\tilde{v}), \tag{24.32}$$

где

$$c_1 = \hat{\mu}(\mathfrak{U})\,\hat{\mu}(\hat{\mathfrak{U}}). \tag{24.33}$$

Это и есть искомое соотношение между $d\mu(g)$ и $d\mu(\varepsilon)\,d\mu(w)\,d\mu(\widetilde{v})$.

В п. 5 § 7 (формулы (7.39) и (7.40)) константы $\hat{\mu}(\mathfrak{U})$ и $\hat{\mu}(\widetilde{\mathfrak{U}})$ были вычислены. Мы получили для них выражения:

$$\hat{\mu}(\mathfrak{U}) = \frac{2^{n-1}\pi^{\frac{(n+2)\cdot(n-1)}{2}}}{1!\,2!\cdots(n-1)!}.$$

$$\hat{\mu}(\widetilde{\mathfrak{U}}) = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\cdots(n-1)!}.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 = \frac{2^{n-1}\pi^{n^2-1}}{[1!2!\cdots(n-1)!]^2}. \tag{24.34}$$

Из формулы (24.32) следует, что

$$\int x(g)\,d\mu(g) = c_1 \int_{E_p} d\mu(\varepsilon) \int x(w^{-1}v^{-1}\varepsilon v) \prod_{p<q} (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)\,d\mu(w)\,d\mu(\widetilde{v}). \tag{24.35}$$

Суммируя по всем $n!$ областям E_p, получим формулу (24.11)

$$n! \int x(g)\,d\mu(g) = c_1 \int x(w^{-1}v^{-1}\varepsilon v) \prod_{p<q} (\varepsilon_q^2 - \varepsilon_p^2)\,d\mu(w)\,d\mu(\widetilde{v})\,d\mu(\varepsilon).$$

3. Формула перехода от интеграла по $d\mu(\zeta)$ к интегралу по $d\mu(\widetilde{u})$. Результаты п. 2 мы используем теперь для вывода формулы, о которой шла речь в начале этого параграфа. Именно, имеет место следующее предложение.

III. *Если переменные интегрирования ε', u, v, ε, ζ связаны соотношением*

$$\varepsilon\zeta = u\varepsilon' v,$$

то

$$c_1 \int f(\varepsilon\zeta) \prod (\varepsilon_p'^2 - \varepsilon_q'^2)^2 d\mu(\varepsilon')\,d\mu(u) = n!\,\mu(\widetilde{\mathfrak{U}})\,(2\pi)^{n-1} \int f(\varepsilon\zeta)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\zeta). \tag{24.36}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что функцию $f(\varepsilon\zeta)$ можно распространить на всю группу K, полагая

$$f(\varepsilon\zeta\gamma) = f(\varepsilon\zeta).$$

Мы получим функцию $f(k)$, удовлетворяющую условию

$$f(k\gamma) = f(k). \tag{24.37}$$

Поэтому будем доказывать формулу (24.36) для такой функции $f(k)$.

Положим

$$f(k) = \int x(ku)\,d\mu(u); \tag{24.38}$$

очевидно, функция $f(k)$ удовлетворяет соотношению

$$f(k\gamma) = f(k). \tag{24.39}$$

Обратно, всякую такую функцию можно получить по формуле (24.38) из функции

$$x(g) = f(k) \qquad \text{при } g = ku.$$

Из формул (24.38) и (7.3) следует, что

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int f(k)\,d\mu_l(k) = \mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int f(\varepsilon\gamma\zeta')\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\gamma)\,d\mu(\zeta') =$$
$$= \mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int f(\varepsilon\gamma\zeta'\gamma^{-1}\gamma)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\gamma)\,d\mu(\zeta').$$

При этом в соотношении $d\mu(\delta) = d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\gamma)$ следует считать

$$\int d\mu(\gamma) = (2\pi)^{n-1},$$

следовательно, сделав подстановку $\gamma\zeta' p^{-1} = \zeta$, в силу соотношения (24.39), получаем:

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int f(\varepsilon\zeta)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\zeta) \int d\mu(\gamma) =$$
$$= (2\pi)^{n-1}\mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int f(\varepsilon\zeta)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\zeta). \tag{24.40}$$

С другой стороны, полагая

$$\varepsilon\zeta = u_1\varepsilon' u_2, \tag{24.41}$$

имеем:

$$f(\varepsilon\zeta) = \int x(\varepsilon\zeta u)\,d\mu(u) = \int x(u_1\varepsilon' u_2 u)\,d\mu(u) = \int x(u_1\varepsilon' u)\,d\mu(u).$$

Следовательно, полагая для краткости

$$\omega(\varepsilon) = \prod_{p<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)^2, \tag{24.42}$$

и пользуясь формулой (24.10), получаем:

$$c_1 \int f(\varepsilon\zeta)\,\omega(\varepsilon')\,d\mu(\varepsilon')\,d\mu(u_1) = c_1 \int x(u_1\varepsilon' u)\,\omega(\varepsilon')\,d\mu(\varepsilon')\,d\mu(u_1)\,d\mu(u) =$$
$$= n! \int x(g)\,d\mu(g) = n!\,\mu(\widetilde{\mathfrak{U}})\,(2\pi)^{n-1} \int f(\varepsilon\zeta)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\zeta),$$

т. е. формулу (24.36).

§ 25. Выражение для функции I_δ в параметрах

Следуя общему плану, намеченному во введении к данной главе, мы исходим из функции

$$I_\delta = c\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x(u^{-1}\delta\zeta u)\,d\mu(u)\,d\mu(\zeta), \tag{25.1}$$

из которой в дальнейшем путем применения некоторого дифференциального оператора в точке $\delta = e$ получится выражение $c_0 x(e)$. Результат применения этого дифференциального оператора проще всего вычислить, если, говоря не совсем точно, в интеграле (25.1) перейти от интегрирования по группе Z к интегрированию по $\mathfrak{U}$, а это последнее интегрирование свести к интегрированию по удобным параметрам. В этом параграфе мы, во-первых, перейдем к интегрированию по $\mathfrak{U}$ и затем введем в группе $\mathfrak{U}$ удобные параметры. Эти параметры, определяющие собой унитарную матрицу, являются развитием параметризации, которую мы рассматривали при вычислении сферических функций. При этом мы раз навсегда предполагаем в этой главе, если не оговорено особо, что функция $x(g)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема по всем переменным g_{pq}, $\overline{g}_{pq}$ и обращается в нуль вне некоторого компактного множества значений этих переменных. В силу результатов §§ 19 и 22, это предположение гарантирует существование интеграла в (25.1), достаточно высокую непрерывную дифференцируемость функции I_δ и ее обращение в нуль вне некоторого компактного множества в группе D.

1. Переход к интегралу по группе $\mathfrak{U}$; функция $F(u, \varepsilon')$. Вместо функции I_δ нам удобно будет рассматривать ее интеграл

$$I[\Phi, \gamma] = \int I_{\varepsilon\gamma} \Phi(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon) =$$
$$= \mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int x(u^{-1}\gamma\varepsilon\zeta u)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, d\mu(u)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(\varepsilon), \tag{25.2}$$

где $\Phi(\varepsilon)$ — пока произвольная суммируемая на E функция.

Применяя к интегралу

$$\mu(\widetilde{\mathfrak{U}}) \int x(u^{-1}\gamma\varepsilon\zeta u)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(\varepsilon)$$

при фиксированных u и γ формулу (24.36), получим для него выражение

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \cdot \frac{c_1}{n!} \int x(u^{-1}\gamma u_1 \varepsilon' u_2 u)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon')\, d\mu(\varepsilon')\, d\mu(u_1), \tag{25.3}$$

где

$$\varepsilon\zeta = u_1 \varepsilon' u_2;$$

следовательно,

$$u_1 \varepsilon' = \varepsilon\zeta u_2^{-1} \tag{25.4}$$

и

$$\omega(\varepsilon') = \prod_{p<q} (\varepsilon_q'^2 - \varepsilon_p'^2)^2. \tag{25.5}$$

Поэтому формула (25.2) перепишется в виде

$$I[\Phi, \gamma] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \frac{c_1}{n!} \int x(u^{-1}\gamma u_1 \varepsilon' u_2 u)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon')\, d\mu(u)\, d\mu(u_1) d\mu(\varepsilon').$$

Полагая в этой формуле $v = u_2 u$, получим:

$$I[\Phi, \gamma] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \frac{c_1}{n!} \int x(v^{-1}u_2\gamma u_1\varepsilon' v)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\,\Phi(\varepsilon)\,\omega(\varepsilon')\,d\mu(v)\,d\mu(u_1)d\mu(\varepsilon'). \tag{25.6}$$

Положим теперь

$$F(u, \varepsilon) = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x(v^{-1}u\varepsilon' v)\,d\mu(v); \tag{25.7}$$

тогда формула (25.6) перепишется в виде:

$$I[\Phi, \gamma] = \frac{1}{n!} \int F(u_2^{-1}\gamma u_1, \varepsilon')\,\beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\,\Phi(\varepsilon)\,\omega(\varepsilon')\,d\mu(u_1)\,d\mu(\varepsilon'), \tag{25.8}$$

при этом $\int d\mu(v) = 1$, следовательно,

$$F(e, e) = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x(e)\,d\mu(v) = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}}\,x(e). \tag{25.9}$$

Таким образом, наша задача нахождения выражения для $x(e)$ будет решена, если мы сумеем выразить $F(e, e)$ через $I[\Phi, \gamma]$ в (25.8).

В силу предполагаемой непрерывности функции $x(g)$, $F(u, \varepsilon')$ есть непрерывная функция матриц u и ε'. Кроме того, функция $F(u, \varepsilon')$ обладает следующими свойствами:

$$F(\gamma^{-1}u\gamma, \varepsilon') = F(u, \varepsilon'), \tag{25.10}$$

$$F(s^{-1}us, s^{-1}\varepsilon' s) = F(u, \varepsilon'). \tag{25.11}$$

Действительно,

$$F(\gamma^{-1}u\gamma, \varepsilon') = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x(v^{-1}\gamma^{-1}u\gamma\varepsilon' v)\,d\mu(v) = \int x((\gamma v)^{-1}u\varepsilon'(\gamma v))\,d\mu(v) =$$
$$= \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x(v^{-1}u\varepsilon' v)\,d\mu(v) = F(u, \varepsilon'),$$

$$F(s^{-1}us, s^{-1}\varepsilon' s) = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x(v^{-1}s^{-1}us\cdot s^{-1}\varepsilon' sv)\,d\mu(v) =$$
$$= \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x((sv)^{-1}u\varepsilon'(sv))\,d\mu(v) = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}} \int x(v^{-1}u\varepsilon' v)\,d\mu(v) = F(u, \varepsilon').$$

Как и в § 24, разобьем интеграл по E в (25.8) на сумму $n!$ интегралов по областям E_p. Для каждой из этих областей существует подстановка s_p такая, что преобразование $\varepsilon \to s_p^{-1}\varepsilon s_p$ отображает область E_1, определенную неравенствами

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_n,$$

на область E_p. Поэтому формулу (25.8) можно переписать в виде

$$I[\Phi, \gamma] = \frac{1}{n!} \sum_p \int_{E_p} \omega(\varepsilon')\, d\mu(\varepsilon') \int F(u_2\gamma u_1, \varepsilon')\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, d\mu(u_1) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_p \int_{E_1} \omega(\varepsilon')\, d\mu(\varepsilon') \int F(u_2\gamma u_1, s_p^{-1}\varepsilon' s_p)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, d\mu(u_1). \quad (25.12)$$

Сделаем здесь подстановку $u_1 = u_1' s_p$; тогда ε и u_2 определятся из равенства

$$u_1' s_p \cdot s_p^{-1} \varepsilon' s_p = \varepsilon\zeta u_2^{-1},$$

т. е.

$$u_1'\varepsilon' = \varepsilon\zeta u_2^{-1} s_p^{-1}.$$

Полагая $u_2' = s_p u_2$, получим:

$$u_1'\varepsilon' = \varepsilon\zeta u_2'^{-1} \quad (25.13)$$

и $u_2 = s_p^{-1} u_2'$; следовательно, в силу соотношения (25.11),

$$F(u_2\gamma u_1, s_p^{-1}\varepsilon' s_p) = F(s_p^{-1} u_2' \gamma u_1' s_p, s_p^{-1}\varepsilon' s_p) = F(u_2'\gamma u_1', \varepsilon').$$

Поэтому все слагаемые в правой части (25.12) равны между собой, так что:

I. *Для интеграла* $I[\Phi, \gamma]$ *имеет место формула* *

$$I[\Phi, \gamma] = \int_{E_1} \omega(\varepsilon')\, d\mu(\varepsilon') \int F(v\gamma u, \varepsilon')\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\, \Phi(\varepsilon)\, d\mu(u), \quad (25.14)$$

где

$$u\varepsilon' = \varepsilon\zeta v^{-1}. \quad (25.15$$

2. Параметризация группы унитарных матриц. Выберем в группе $\mathfrak{U}$ параметры следующим образом. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — ортонормальный базис в n-мерном комплексном евклидовом пространстве R из собственных векторов матрицы ε'. Как и § 9, положим

$$e_p = u^* f_p, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \quad (25.16)$$

Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ также образуют базис в пространстве R; интегрирование по u можно заменить интегрированием по всем ортонормальным системам $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Его можно поэтому разбить на интегрирование по всем системам $e_2, \ldots, e_n$ при фиксированном орте e_1, а затем на интегрирование по орту e_1.

Положим

$$e_1 = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k1} f_k; \quad (25.17)$$

* Мы изменили здесь обозначения и заменили u_1, u_2 на u и v соответственно.

и выберем в качестве параметров, определяющих орт e, числа

$$t_{k1}=|\beta_{k1}|^2,\quad k=1, 2, \ldots, n-1;\quad \theta_{k1}=\arg\beta_{k1}\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Тогда (см. § 9), при условии, что $\int d\mu(u)=1$,

$$d\mu(u)=\frac{(n-1)!}{(2\pi)^n}\,d\mu(e_2, \ldots, e_n)\,dt_{11}\,dt_{21}\ldots dt_{n-1,1}\,d\theta_{11}\ldots d\theta_{n1}. \tag{25.18}$$

Введем теперь вместо $t_{11}, \ldots, t_{n-1,1}$ другие переменные интегрирования следующим образом: обозначим через $\mathfrak{M}_1$ пространство, натянутое на векторы $\{e_2, \ldots, e_n\}$, а через P_1 — оператор проектирования в R на $\mathfrak{M}_1$; пусть $\nu_{11}^2, \nu_{21}^2, \ldots, \nu_{n-1,1}^2$ — собственные значения оператора $a_1=P_1\varepsilon'^2P_1$ в пространстве $\mathfrak{M}_1$, расположенные в порядке возрастания. Перейдем от переменных интегрирования $t_{11}, \ldots, t_{n-1,1}$ к новым переменным $\nu_{11}, \nu_{21}, \ldots, \nu_{n-1,1}$. Как было показано в § 9, для якобиана D_1 перехода от переменных $t_{11}, \ldots, t_{n-1,1}$ к переменным $\nu_{11}, \nu_{21}, \ldots$ $\ldots, \nu_{n-1,1}$ имеем:

$$D_1=\frac{\prod\limits_{n-1\geqslant i>k\geqslant 1}(\nu_{i1}^2-\nu_{k1}^2)}{\prod\limits_{n\geqslant i>p\geqslant 1}(\varepsilon_i'^2-\varepsilon_p'^2)}. \tag{25.19}$$

При этом интегрирование по переменным $\nu_{11}, \nu_{21}, \ldots, \nu_{n-1,1}$ ведется в области

$$\varepsilon_1'<\nu_{11}<\varepsilon_2'<\nu_{21}<\varepsilon_3'<\ldots<\varepsilon_{n-1}'<\nu_{n-1,1}<\varepsilon_n'. \tag{25.20}$$

Далее, выберем в качестве базиса в пространстве $\mathfrak{M}_1$ собственные векторы $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_{n-1}^{(1)}$ оператора a_1, соответствующие собственным значениям $\nu_{11}^2, \nu_{21}^2, \ldots, \nu_{n-1,1}^2$, и положим

$$e_2=\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{k2}f_{k2}^{(1)},\quad t_{k2}=|\beta_{k2}|^2,\quad \theta_{k2}=\arg\beta_{k2};\quad k=1, 2, \ldots, n-1.$$

При фиксированном векторе e_1 числа t_{k2}, $k=1, 2, \ldots, n-2$ и θ_{k2}, $k=1, 2, \ldots, n-1$ определяют вектор e_2 и аналогично формуле (25.18)

$$d\mu(e_2, \ldots, e_n)=\frac{(n-2)!}{(2\pi)^{n-1}}\,d\mu(e_3, \ldots, e_n)\,dt_{12}\,t_{22}\ldots t_{n-2,2}\,d\theta_{12}\,d\theta_{22}\ldots d\theta_{n-1,2}. \tag{25.21}$$

Введем вместо переменных интегрирования $t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{n-1,2}$ новые переменные следующим образом: обозначим через $\mathfrak{M}_2$ пространство, натянутое на векторы $\{e_3, \ldots, e_n\}$, а через P_2 — оператор проектирования в $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$; пусть $\nu_{12}^2, \nu_{22}^2, \ldots, \nu_{n-2,2}^2$ — собственные значения оператора $a_2=P_2a_1P_2$ в пространстве $\mathfrak{M}_2$, расположенные в порядке возрастания. Перейдем от переменных $t_{12}, t_{22}, \ldots, t_{n-2,2}$

к переменным $\nu_{12}, \nu_{22}, \ldots, \nu_{n-2,2}$; как и выше, для якобиана D_2 этого перехода имеем:

$$D_2 = \frac{\prod\limits_{n-2 \geqslant i > k \geqslant 1} (\nu_{i2}^2 - \nu_{k2}^2)}{\prod\limits_{n-1 \geqslant i > k \geqslant 1} (\nu_{i1}^2 - \nu_{k1}^2)}. \tag{25.22}$$

При этом интегрирование по переменным $\nu_{12}, \nu_{22}, \ldots, \nu_{n-2,2}$ ведется в области

$$\nu_{11} < \nu_{12} < \nu_{21} < \nu_{22} < \ldots < \nu_{n-2,1} < \nu_{n-2,2} < \nu_{n-1,1}. \tag{25.23}$$

Повторяя это рассуждение, получим:

II. *Для интеграла $I[\Phi, \gamma]$ имеет место формула*

$$I[\Phi, \gamma] = \frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{\Omega} F(v\gamma u, \varepsilon') \beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon) \Phi(\varepsilon) \psi(\varepsilon') \, d\mu(\varepsilon') \, d\nu \, d\theta, \tag{25.24}$$

где

$$N = \frac{(n+2)(n-1)}{2}, \quad C = (n-1)!\,(n-2)!\ldots 2!\,1!, \quad \psi(\varepsilon') = \prod_{p>q} (\varepsilon_p'^2 - \varepsilon_q'^2), \tag{25.25}$$

$$d\nu = \prod_{q=1}^{n-1} \prod_{p=1}^{n-q} d\nu_{pq}; \quad d\theta = \prod_{q=1}^{n-1} \prod_{p=2}^{n-q+1} d\theta_{pq}, \tag{25.26}$$

Ω — *область переменных* $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_{n-1}'$ ν_{pq} и θ_{pq}, *определенная неравенствами*:

$$\varepsilon_1' < \varepsilon_2' < \ldots < \varepsilon_{n-1}' < \varepsilon_n'; \quad \varepsilon_1' \varepsilon_2' \cdots \varepsilon_n' = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu_{p,q-1} < \nu_{pq} < \nu_{p+1,q-1}; \; q = 1, 2, \ldots, n-1, \; p = 1, 2, \ldots, n-q, \\ &0 < \theta_{pq} < 2\pi, \; q = 1, 2, \ldots, n-1, \; p = 1, 2, 3, \ldots, n-q+1 \end{aligned}\right\} \tag{25.27}$$

и где обозначено $\nu_{p0} = \varepsilon_p'$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

3. Выражение для диагональных элементов матрицы ε через параметры. Выразим диагональные элементы ε_p матрицы ε через наши параметры. Из равенства (25.15) следует, что

$$u\varepsilon'^2 u^* = \varepsilon\zeta\zeta^*\varepsilon = \varepsilon\zeta\varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^{-1}\zeta^*\varepsilon. \tag{25.28}$$

Так как $\varepsilon^{-1}\zeta^*\varepsilon \in Z$, то последнее выражение в (25.28) есть разложение элемента $u\varepsilon'^2 u^*$ на произведение вида $\zeta\delta z$, ($\delta = \varepsilon^2$); поэтому, согласно формуле (3.12),

$$\varepsilon_q^2 = \frac{\Delta_q}{\Delta_{q+1}}, \quad q = 1, 2, \ldots, n, \tag{25.29}$$

где Δ_q — минор матрицы $u\varepsilon'^2 u^*$, составленный из ее последних $n - q + 1$ строк и столбцов, и $\Delta_{n+1} = 1$.

С другой стороны, из равенств

$$(u\varepsilon'^2 u^* f_p,\ f_q) = (\varepsilon'^2 e_p,\ e_q),\quad p,\ q = 1, 2, \ldots, n$$

следует, что эта матрица есть матрица оператора ε'^2 в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$; отсюда и из равенств

$$(u\varepsilon'^2 u^* f_p, f_q) = (P_1\varepsilon'^2 P_1 e_p,\ e_q) = (a_1 e_p, e_q),\ p,\ q = 2, \ldots, n$$

следует, что Δ_2 есть определитель матрицы оператора a_1. Следовательно, он равен произведению всех собственных значений оператора a_1, т. е.

$$\Delta_2 = \prod_{p=1}^{n-1} \nu_{p1}^2. \tag{25.30}$$

Аналогично,

$$\Delta_3 = \prod_{p=1}^{n-2} \nu_{p2}^2, \ldots,\ \Delta_n = \nu_{1,\,n-1}^2, \tag{25.31}$$

следовательно, формула (25.29) дает:

$$\varepsilon_q^2 = \frac{\prod\limits_{p=1}^{n-q+1} \nu^2_{\ \ -1}}{\prod\limits_{p=1}^{n-q} \nu_{p,\,q}^2};\quad q = 2, \ldots, n-1; \tag{25.32}$$

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{\prod\limits_{p=1}^{n-1} \nu_{p,\,1}^2};\quad \varepsilon_n^2 = \nu_{1,\,n-1}^2. \tag{25.33}$$

4. **Выражение для функции** I_δ. Пользуясь предыдущими результатами, мы можем теперь найти выражение для функции I_δ в виде интеграла по нашим параметрам. Прежде всего заметим, что из формул (25.32), (25.33) для $\beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon)$ получается выражение:

$$\beta^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon) = \varepsilon_2^{-2}\varepsilon_3^{-4}\ldots\varepsilon_n^{-2(n-1)} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}\left(\frac{\Delta_4}{\Delta_3}\right)^2 \ldots \left(\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)^{n-2} \frac{1}{\Delta_n^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_2\Delta_3\ldots\Delta_n} = \frac{1}{\prod\limits_{q=1}^{n-1}\prod\limits_{p=1}^{n-q} \nu_{pq}^2} = \frac{1}{\nu^2}.$$

Поэтому формула (25.24) принимает вид

$$I[\Phi,\gamma] = \frac{C}{(2\pi)^N}\int\limits_\Omega F(v\gamma u,\ \varepsilon')\,\Phi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon')\,d\mu(\varepsilon')\,\frac{d\nu}{\nu}\,d\theta, \tag{25.34}$$

где

$$d\nu = \prod d\nu_{pq}, \quad d\theta = \prod d\theta_{pq}. \tag{25.35}$$

Для дальнейшего нам удобно будет перейти к новым переменным τ_{pq}, сделав подстановку

$$\nu_{pq} = e^{\tau_{pq}}, \ q = 0, 1, \ldots, n-1; \ p = 1, 2, \ldots, n-q.$$

Тогда (25.34) перепишется в виде

$$I[\Phi, \gamma] = \frac{C}{(2\pi)^N} \int F(v\gamma u, \varepsilon') \Phi(\varepsilon) \psi(\varepsilon') \, d\tau \, d\theta, \tag{25.36}$$

где

$$d\tau = \prod_{q=1}^{n-1} \prod_{p=1}^{n-q} d\tau_{pq}; \quad \psi(\varepsilon') = \prod_{p>q} (e^{2\tau_{p0}} - e^{2\tau_{q0}}), \tag{25.37}$$

а θ — область, определенная неравенствами:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{10} < \tau_{20} < \ldots < \tau_{n0}; \ \tau_{10} + \tau_{20} + \cdots + \tau_{n0} = 0, \\ \tau_{p,\,q-1} < \tau_{pq} < \tau_{p+1,\,q-1}, \ q = 1, 2, \ldots, n-1; \ p = 1, 2, \ldots, n-q, \\ 0 < \theta_{pq} < 2\pi; \ q = 1, 2, \ldots, n-1; \ p = 1, 2, \ldots, n-q+1. \end{array}\right\} \tag{25.38}$$

Далее, перейдем от переменных ε_q, γ_q к переменным σ_q, ω_q, полагая

$$\varepsilon_q = e^{\tau_q}; \ \gamma_q = e^{i\varphi_q}, \ q = 1, 2, \ldots, n, \tag{25.39}$$

$$\sigma_q = \sum_{p=1}^{n-q+1} \tau_{p,\,q-1}, \ \omega_q = \varphi_q + \cdots + \varphi_n, \ q = 2, 3, \ldots, n. \tag{25.40}$$

Из формул (25.32) и (25.33) следует тогда, что

$$\tau_1 = -\sigma_2, \ \tau_q = \sigma_q - \sigma_{q+1} \text{ при } q = 2, \ldots, n-1, \ \tau_n = \sigma_n; \tag{25.41}$$

кроме того,

$$\varphi_1 = -\omega_2; \ \varphi_q = \omega_q - \omega_{q+1} \text{ при } q = 2, \ldots, n-1; \ \varphi_n = \omega_n. \tag{25.42}$$

Поэтому функцию $I_\delta = I_{\varepsilon\gamma}$ можно рассматривать как функцию переменных $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$; $\omega_2, \ldots, \omega_n$, а $\Phi(\varepsilon)$ — как функцию переменных $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Ввиду произвола этой последней функции из формулы (25.36) следует:

III. *Для функции* $I_\delta = I(\sigma_2, \ldots, \sigma_n; \omega_2, \ldots, \omega_n)$ *имеет место формула*

$$I_\delta = \frac{C}{(2\pi)^N} \int_D d\tilde{\tau} \int_{\mathfrak{D}} F(v\gamma u, \varepsilon') \psi(\varepsilon') \, d\theta, \tag{25.43}$$

где D — *область переменных* τ_{pq}, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $1 \leqslant p \leqslant n-q-1$, *определенная условиями*:

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{10}\leqslant\tau_{20}\leqslant\ldots\leqslant\tau_{n0};\ \tau_{10}+\cdots+\tau_{n0}=0,\\ \tau_{p,\,q-1}\leqslant\tau_{pq}\leqslant\tau_{p+1,\,q-1},\ \sum\limits_{p=1}^{n-q+1}\tau_{p,\,q-1}=\sigma_q,\quad q=1,2,\ldots,n-1;\ p=1,2,\ldots,n-q,\\ \tau_{1,\,n-1}=\sigma_n,\quad d\tilde{\tau}=\prod\limits_{q=1}^{n-1}\prod\limits_{p=1}^{n-q-1}d\tau_{pq},\end{array}\right\} \tag{25.44}$$

а $\mathfrak{D}$ — область переменных θ_{pq}, $q=1,2,\ldots,n-1$; $p=1,\ldots,n-q+1$, *определенная условиями*

$$0\leqslant\theta_{pq}\leqslant 2\pi. \tag{25.45}$$

5. Выражение для элементов матрицы u через параметры. Выразим теперь элементы u_{pq} матрицы через переменные τ_{pq} и θ_{pq}. Из равенств $u^*f_1=e_1$ и (25.17) следует, что

$$\beta_{1k}=(e_1,f_k)=(u^*f_1,f_2)=(f_1,uf_k)=\left(f_1,\ \sum_{j=1}^{n}u_{jk}f_j\right)=\bar{u}_{1k}. \tag{25.46}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}e_1=\sum_{k=1}^{n}\bar{u}_{1k}f_k,\\ \bar{u}_{1k}=\beta_{1k}=\sqrt{t_{k1}}e^{i\theta_{k1}},\end{gathered} \tag{25.47}$$

где, в силу (9.24),

$$t_{k1}=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(\nu_{j1}^2-\nu_{k0}^2)}{\prod\limits_{j\neq k}(\nu_{j0}^2-\nu_{k0}^2)}=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(e^{2\tau_{j1}}-e^{2\tau_{k0}})}{\prod\limits_{j\neq k}(e^{2\tau_{j0}}-e^{2\tau_{k0}})}. \tag{25.48}$$

Если $f^{(1)}\in\mathfrak{M}$ — собственный вектор оператора a_1, соответствующий собственному значению ν^2, то $a_1f=\nu^2 f$, т. е.

$$af^{(1)}=\nu^2 f^{(1)}+\alpha e_1.$$

Поэтому, полагая $f^{(1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k f_k$, получаем

$$\varepsilon_k'^2\xi_k=\nu^2\xi_k+\alpha\bar{u}_{1k},$$

отсюда

$$\xi_k=\alpha\frac{\bar{u}_{1k}}{\varepsilon_k'^2-\nu^2}. \tag{25.49}$$

Подставляя сюда вместо ν^2 собственные значения ν_{p1}^2, $k=1,\ldots,n-1$ оператора a_1, получим соответствующие собственные векторы

$$f_p^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{kp}f_k,\quad p=1,2,\ldots,n-1, \tag{25.50}$$

образующие ортонормальный базис в пространстве $\mathfrak{M}_1$, где

$$\xi_{kp}=\alpha_p^{(1)}\frac{\overline{u}_{1k}}{\varepsilon_k^{\prime 2}-\nu_{p1}^2}=\alpha_p^{(1)}\frac{\overline{u}_{1k}}{\nu_{k0}^2-\nu_{p1}^2}=\alpha_p^{(1)}\frac{\overline{u}_{1k}}{e^{2\tau_{k0}}-e^{2\tau_{p1}}},\ p=1,2,\ldots,\ n-1. \tag{25.51}$$

При этом множители $\alpha_p^{(1)}$ определяются из условий нормировки; следовательно, можно положить

$$\alpha_p^{(1)}=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{|u_{1k}|^2}{(\nu_{k0}^2-\nu_{p1}^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{|u_{1k}|^2}{(e^{2\tau_{k0}}-e^{2\tau_{p1}})^2}\right]^{-\frac{1}{2}},\ p=1,2,\ldots,\ n-1. \tag{25.52}$$

Найдем более удобные выражения для $\alpha_p^{(1)}$; положим для этого

$$\Phi(\mu)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|u_{1k}|^2}{\nu_{k0}^2-\mu};\quad \Psi(\mu)=\Phi(\mu)\prod_{k=1}^{n}(\mu-\nu_{k0}^2). \tag{25.53}$$

Очевидно, $\Psi(\mu)$ — многочлен относительно μ степени $n-1$, корнями которого являются $\nu_{11}^2,\ \nu_{21}^2,\ldots,\ \nu_{n-1,1}^2$, следовательно,

$$\Psi(\mu)=\Psi_0\prod_{j=1}^{n-1}(\mu-\nu_{j1}^2).$$

Для определения константы Ψ_0 заметим, что

$$\Psi_0=\lim_{\mu\to\infty}\frac{\Psi(\mu)}{\mu^{n-1}}=\lim_{\mu\to\infty}\mu\Phi(\mu)=-\sum_{k=1}^{n}|u_{1k}|^2=-1;$$

следовательно,

$$\Psi(\mu)=-\prod_{j=1}^{n-1}(\mu-\nu_{j1}^2).$$

Отсюда

$$\Psi'(\nu_{p1}^2)=-\prod_{j=1,\ j\neq p}^{n-1}(\nu_{p1}^2-\nu_{j1}^2). \tag{25.54}$$

С другой стороны, из формул (25.52) и (25.53) следует, что

$$\Psi'(\nu_{p1}^2)=\Phi'(\nu_{p1}^2)\prod_{k=1}^{n}(\nu_{p1}^2-\nu_{k0}^2),$$

$$\Phi'(\nu_{p1}^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|u_{1k}|^2}{(\nu_{k0}^2-\nu_{p1}^2)^2}=\alpha_p^{(1)-2}.$$

Поэтому

$$\alpha_p^{(1)^2} = -\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (\nu_{p1}^2 - \nu_{k0}^2)}{\prod\limits_{j=1,\, j\neq p}^{n-1} (\nu_{p1}^2 - \nu_{j1}^2)} . \tag{25.55}$$

В силу формул (25.51), (25.52) и (25.46)

$$(f_p^{(1)}, f_k) = \alpha_p^{(1)} \frac{(e_1, f_k)}{\nu_{k0}^2 - \nu_{p1}^2} . \tag{25.56}$$

Применяя эти же рассуждения к векторам $\{f_1^{(1)}, \ldots, f_{n-1}^{(1)}\}$, $\{e_2, \ldots, e_n\}$ и оператору a_1, вместо $\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и ε'^2, придем к формулам:

$$(e_2, f_k^{(1)}) = \sqrt{t_{k2}}\, e^{i\theta_{k2}}, \quad t_{k2} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2} (\nu_{j2}^2 - \nu_{k1}^2)}{\prod\limits_{j=1,\, j\neq k}^{n-1} (\nu_{j1}^2 - \nu_{k1}^2)} ,$$

$$(f_p^{(2)}, f_k^{(1)}) = \alpha_p^{(2)} \frac{(e_2, f_k^{(1)})}{\nu_{k1}^2 - \nu_{p2}^2}, \quad \alpha_p^{(2)^2} = -\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\nu_{p2}^2 - \nu_{k1}^2)}{\prod\limits_{j=1,\, j\neq p}^{n-2} (\nu_{p2}^2 - \nu_{j2}^2)} ,$$

$$p = 1, 2, \ldots, n-2; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Вообще, для любого q, $1 \leqslant q \leqslant n-1$

$$(e_q, f_k^{(q-1)}) = \sqrt{t_{kq}}\, e^{i\theta_{kq}}, \quad t_{kq} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-q} (\nu_{jq}^2 - \nu_{k,\, q-1}^2)}{\prod\limits_{j=1,\, j\neq k}^{n-q+1} (\nu_{j,\, q-1}^2 - \nu_{k,\, q-1}^2)} , \tag{25.57}$$

$$(f_p^{(q)}, f_k^{(q-1)}) = \alpha_p^{(q)} \frac{(e_q, f_k^{(q-1)})}{\nu_{k,\, q-1}^2 - \nu_{p,\, q}^2}, \quad \alpha_p^{(q)^2} = -\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-q+1} (\nu_{pq}^2 - \nu_{j,\, q-1}^2)}{\prod\limits_{j=1,\, j\neq p}^{n-q} (\nu_{pq}^2 - \nu_{jq}^2)} , \tag{25.58}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-q+1; \quad p = 1, 2, \ldots, n-q.$$

При этом в случае $q = n-1$ знаменатель в последней формуле (25.58) следует положить равным единице.

Так как вектор $f_1^{(n-1)}$ принадлежит пространству, натянутому на вектор e_n, то

$$f_1^{(n-1)} = \varkappa e_n, \text{ где } |\varkappa| = 1. \tag{25.59}$$

Элементы u_{pk} матрицы u вычисляются тогда по формулам

$$\left.\begin{aligned}
u_{1k} &= (f_k, e_k),\\
u_{2k} &= (f_k, e_2) = \sum_{j=1}^{n-1} (f_k, f_j^{(1)})(f_j^{(1)}, e_2),\\
u_{3k} &= (f_k, e_3) = \sum_{j_1=1}^{n-1}\sum_{j_2=1}^{n-2} (f_k, f_{j_1}^{(1)})(f_{j_1}^{(1)}, f_{j_2}^{(2)})(f_{j_2}^{(2)}, e_3).\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
u_{n-1,k} &= (f_k, e_{n-1}) = \sum_{j_1=1}^{n-1}\sum_{j_2=1}^{n-2}\cdots\sum_{j_{n-2}=1}^{2} (f_k, f_{j_1}^{(1)})(f_{j_1}^{(1)}, f_{j_2}^{(2)})\cdots(f_{j_{n-2}}^{(n-2)}, e_{n-1}),\\
u_{n,k} &= (f_k, e_n) = \sum_{j_1=1}^{n-1}\sum_{j_2=1}^{n-2}\cdots\sum_{j_{n-2}=1}^{2} (f_k, f_{j_1}^{(1)})(f_{j_1}^{(1)}, f_{j_2}^{(2)})\cdots(f_{j_{n-2}}^{(n-1)}, e_n)
\end{aligned}\right\} \tag{25.60}$$

ибо, в силу (25.59),

$$(f_{j_{n-2}}^{(n-2)}, f_1^{(n-1)})(f_1^{(n-1)}, e_n) = |\varkappa|^2 (f_{j_{n-2}}^{(n-2)}, e_n)(e_n, e_n) = (f_{j_{n-2}}^{(n-2)} e_n).$$

Из формул (25.57) и (25.58) следует, что только скалярные произведения $(e_{n-1}, f_k^{(n-2)})$, $(e_n, f_k^{(n-2)})$ зависят от σ_n, ибо только они содержат $\tau_{1,n-1} = \sigma_n$. С другой стороны, в силу формул (25.60), эти скалярные произведения содержатся только в выражениях для $u_{n-1,k}$ и $u_{n,k}$. Следовательно, только элементы $u_{n-1,k}$, u_{nk} матрицы u зависят от σ_n.

6. Выражения для элементов $v_{p,n}$, $v_{p,n-1}$ матрицы v через параметры. Выясним теперь, какие элементы матрицы v зависят от σ_n. Из равенства $u\varepsilon' = \varepsilon\zeta v^*$ следует, что $\varepsilon'^{-1}u^* = v\zeta^{-1}\varepsilon^{-1}$. Отсюда $\varepsilon'^{-1}u^* f_k = v\zeta^{-1}\varepsilon^{-1} f_k$, т. е.

$$\varepsilon'^{-1} e_k = v\left[\sum_{j=1}^{k-1} (\zeta^{-1})_{jk} \varepsilon_j^{-1} f_j + \varepsilon_k^{-} f_k\right] = \sum_{j=1}^{k-1} (\zeta^{-1})_{jk} \varepsilon_j^{-1} v f_j + \varepsilon_k^{-1} v f_k. \tag{25.61}$$

Векторы vf_k, $k = 1, \dots, n$ образуют ортонормальную систему; поэтому, равенства (25.61) показывают, что эти векторы получаются из векторов $\varepsilon'^{-1} e_k$, $k_1 = 1, 2, \dots, n$ процессом ортогонализации. С другой стороны в силу формул (25.60), при $k \leqslant n-2$ векторы * e_k не зависят от σ_n поэтому векторы $\varepsilon'^{-1} e_k$, $k \leqslant n-2$ не зависят от σ_n. Но тогда и векторы vf_k, $k \leqslant n-2$, которые получаются ортогонализацией из векторов $\varepsilon'^{-1} e_k$, $k \leqslant n-2$, не зависят от σ_n. Следовательно, зависеть от σ_n могут только векторы vf_{n-1} и vf_n.

* То есть их компоненты в базисе $\{f_1, \dots, f_n\}$.

В силу равенства $v_{pq} = (vf_q, f_p)$, отсюда следует, что *только элементы $v_{p,n-1}$ и v_{pn} матрицы v зависят от σ_n.*

Положим $w = v\gamma u$; тогда в выражении

$$w_{pq} = \sum_{j=1}^{n} v_{pj}\,\gamma_j\,u_{jq}$$

зависеть от σ_n и ω_n будет только сумма

$$\xi_{pq} = v_{p,\,n-1}\,\gamma_{n-1}\,u_{n-1,\,q} + v_{pn}\,\gamma_n u_{nq}. \tag{25.62}$$

Найдем теперь элементы $v_{p,\,n-1}$ и v_{pn}; из равенства $u\varepsilon' = \varepsilon\zeta\,v^*$ следует, что

$$u_{pq}\,\varepsilon_q' = \sum_{j=p+1}^{n} \varepsilon_p\,\zeta_{pj}\,\overline{v}_{qj} + \varepsilon_p\,\overline{v}_{qp}. \tag{25.63}$$

Отсюда при $p = n$ и $p = n - 1$

$$u_{nq}\,\varepsilon_q' = \varepsilon_n\overline{v}_{qn}\,, \tag{25.64}$$

$$u_{n-1,q}\,\varepsilon_q' = \varepsilon_{n-1}\overline{v}_{q,n-1} + \varepsilon_n\,\zeta_{n-1,\,n}\,\overline{v}_{qn}; \tag{25.65}$$

следовательно,

$$v_{qn} = \frac{\varepsilon_q'}{\varepsilon_n}\,\overline{u}_{nq}\,, \tag{25.66}$$

$$v_{q,\,n-1} = \frac{1}{\varepsilon_{n-1}}\left(\overline{u}_{n-1,q}\,\varepsilon_q' - \varepsilon_n\,\overline{\zeta}_{n-1,\,n}\,v_{qn}\right). \tag{25.67}$$

Для определения $\zeta_{n-1,\,n}$ умножим обе части последнего равенства на $\overline{v}_{qn}$ и просуммируем по q. В силу унитарности матрицы v, мы получим:

$$\sum_{q=1}^{n} u_{n-1,q}\,\varepsilon_q' \cdot \overline{v}_{qn} = \varepsilon_n\,\overline{\zeta}_{n-1,\,n}\,.$$

Отсюда, в силу (25.66),

$$\varepsilon_n\zeta_{n-1,\,n} = \frac{1}{\varepsilon_n}\sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q'^2\,u_{n-1,\,q}\,\overline{u}_{nq} = \frac{1}{\varepsilon_n}\,(\varepsilon'^2 e_n, e_{n-1}), \tag{25.68}$$

ибо

$$\varepsilon'^2 e_p = \sum_{q=1}^{n} (\varepsilon'^2 e_p, f_q) f_q = \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q'^2\,(e_p, f_q) f_q = \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q'^2\,\overline{u}_{pq} f_q\,.$$

Так как векторы e_{n-1}, e_n принадлежат пространству $\mathfrak{M}_{n-2} = \{e_{n-1}, e_n\}$, то, полагая $P_{n-2} = P_{\mathfrak{M}_{n-2}}$ и $a_{n-2} = P_{n-2}\,\varepsilon'^2\,P_{n-2}$, мы можем переписать формулу (25.68) в виде

$$\varepsilon_n\,\zeta_{n-1,\,n} = \frac{1}{\varepsilon_n}\,(a_{n-2}\,e_n, e_{n-1}) = \frac{1}{\varepsilon_n}\sum_{k=1}^{2} \nu_{k,\,n-2}^2\,(e_n, f_k^{(n-2)})\,(f_k^{(n-2)}, e_{n-1}).$$

Отсюда, в силу формул (25.58) при $q=n-1$ и (25.59)

$$\varepsilon_n \zeta_{n-1,n} = \frac{1}{\varepsilon_n}\sum_{k=1}^{2} \nu_{k,n-2}^2 \overline{\varkappa\alpha_1^{(n-1)}} \frac{|(e_{n-1}, f_k^{(n-2)})|}{\nu_{k,n-2}^2-\nu_{k,n-1}^2} =$$

$$= \frac{\overline{\varkappa\alpha_1^{(n-1)}}}{\varepsilon_n}\sum_{k=1}^{2}|(e_{n-1}, f_k^{(n-2)})|^2 + \frac{\overline{\varkappa\alpha_1^{(n-1)}}}{\varepsilon_n}\nu_{k,n-1}^2\sum_{k=1}^{2}\frac{|(e_{n-1}, f_k^{(n-2)})|^2}{\nu_{k,n-2}^2-\nu_{k,n-1}^2};$$

следовательно,

$$\varepsilon_n \zeta_{n-1,n} = \frac{\overline{\varkappa}}{\varepsilon_n}\alpha_1^{(n-1)}, \tag{25.69}$$

ибо $\nu_{k,n-1}^2$ — корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{|(e_{n-1}, f_k^{(n-2)})|^2}{\nu_{k,n-2}^2-\mu} = 0 \tag{25.70}$$

и

$$\sum_{k=1}^{2}|(e_{n-1}, f_k^{(n-2)})|^2 = 1.$$

Подставляя полученное выражение для $\varepsilon_n\zeta_{n-1,n}$ в формулу (25.67) для $v_{q,n-1}$ и пользуясь формулой (25.66), получим:

$$v_{q,n-1} = \frac{\varepsilon_q'}{\varepsilon_n}\left(\overline{u}_{n-1,q} - \frac{\varkappa}{\varepsilon_n^2}\alpha_1^{(n-1)}\overline{u}_{nq}\right). \tag{25.71}$$

Запишем выражения для элементов u_{nq} и $u_{n-1,q}$ в виде

$$u_{n-1,q} = (f_q, e_{n-1}) = \sum_{k=1}^{2}(f_q, f_k^{(n-2)})(f_k^{(n-2)}, e_{n-1}), \tag{25.72}$$

$$u_{nq} = (f_q, e_n) = \sum_{k=1}^{2}(f_q, f_k^{(n-2)})(f_k^{(n-2)}, e_n). \tag{25.73}$$

Подставляя эти выражения в (25.66) и (25.71) и пользуясь формулами (25.57) и (25.58) при $q=n-1$, получим, что

$$v_{pn}\gamma_n u_{nk} = \frac{\varepsilon_p'}{\nu_{2,n-2}^2-\nu_{1,n-2}^2}e^{i\omega_n}\Big\{\overline{(f_p, f_1^{(n-2)})}(f_k, f_1^{(n-2)})\left(e^{2\tau_{2,n-2}-\sigma_n}-e^{\sigma_n}\right)+$$

$$+\overline{(f_p, f_2^{(n-2)})}(f_k, f_2^{(n-2)})\left(e^{\sigma_n}-e^{2\tau_{1,n-2}-\sigma_n}\right)-$$

$$-[\overline{(f_p, f_1^{(n-2)})}(f_k, f_2^{(n-2)})e^{i(\theta_{2,n-1}-\theta_{1,n-1})}+$$

$$+\overline{(f_p, f_2^{(n-2)})}(f_k, f_1^{(n-2)})e^{i(\theta_{1,n-1}-\theta_{2,n-1})}]\,\mathfrak{u}\Big\}, \tag{25.74}$$

$$v_{p,\, n-1}\, \gamma_{n-1}\, u_{n-1,\, k} =$$

$$= e^{-i\omega_n} \frac{\varepsilon'_p\, e^{-\sigma_{n-1}+i\omega_{n-1}}}{\nu^2_{2,\, n-2} - \nu^2_{1,\, n-2}} \left\{ \overline{(f_p, f_1^{(n-2)})}\, (f_k, f_1^{(n-2)})\ \nu^2_{2,\, n-2} \left(e^{\sigma_n} - e^{2\tau_{1,\, n-2}-\sigma_n}\right) + \right.$$

$$+ \overline{(f_p, f_2^{(n-2)})}\, (f_k, f_2^{(n-2)})\ \nu^2_{1,\, n-2} \left(e^{2\tau_{2,\, n-2}-\sigma_n} - e^{\sigma_n}\right) +$$

$$+ \left[\overline{(f_p, f_2^{(n-2)})}\, (f_k, f_1^{(n-2)})\ \nu^2_{1,\, n-2}\ e^{i\,(\theta_{1,\, n-1} - \theta_{2,\, n-1})} + \right.$$

$$\left. + \overline{(f_p, f_1^{(n-2)})}\, (f_k, f_2^{(n-2)})\ \nu^2_{2,\, n-2}\, e^{i\,(\theta_{2,\, n-1} - \theta_{1,\, n-1})}\right] \mathfrak{A} \Big\}, \tag{25.75}$$

где

$$\mathfrak{A} = \left(e^{\sigma_n} - e^{2\tau_{1,\, n-2}-\sigma_n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{2\tau_{2,\, n-2}-\sigma_n} - e^{\sigma_n}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{25.76}$$

§ 26. Выражение для $x(e)$ через функцию I_δ

Результаты предыдущего параграфа мы используем теперь для вывода формулы, выражающей $x(e)$ через функцию I_δ. Напомним, что функция $x(g)$ предполагается равной нулю вне некоторого компактного множества и достаточное число раз непрерывно дифференцируемой по всем переменным g_{pq}, $\bar{g}_{pq}$.

Так как в формуле (25.1) для I_δ интегрирование по $d\mu(u)$ и $d\mu(\zeta)$ ведется по компактным множествам, то функция I_δ обращается в нуль вне некоторого компактного множества и достаточное число раз непрерывно дифференцируема по переменным δ_p, следовательно, и по переменным σ_p, ω_p, $p = 2, \ldots, n$ в формуле (25.43).

Во введении к этой главе мы уже указывали, что выражение для $x(e)$ получается в результате применения к I_δ в точке $\delta = e$ некоторого дифференциального оператора по σ_p и ω_p. Так как пределы интегрирования в формуле (25.43) для I_δ зависят от σ_p, то применение дифференциального оператора к I_δ сводится к дифференцированию по пределам интегрирования и к дифференцированию под знаком интеграла.

Мы показываем, что при надлежащем выборе дифференциального оператора результат его дифференцирования под знаком интеграла обращается в нуль при $\delta = e$, а результат дифференцирования по пределам при $\delta = e$ равен произведению $x(e)$ на некоторую константу, мы получаем, таким образом, интересующий нас результат $cx(e) = (LI_\delta)_{\delta=e}$.

1. Дифференциальный оператор L. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$\left.\begin{aligned} L_{pq} &= \frac{\partial}{\partial\sigma_p} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\sigma_q} + i\left(\frac{\partial}{\partial\omega_p} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\omega_q}\right), \\ \bar{L}_{pq} &= \frac{\partial}{\partial\sigma_p} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\sigma_q} - i\left(\frac{\partial}{\partial\omega_p} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\omega_q}\right), \end{aligned}\right\} p \leqslant q, \tag{26.1}$$

где

$$\sigma_k = -\sum_{p=1}^{k-1} \tau_p, \text{ а } \omega_k = -\sum_{p=1}^{k-1} \varphi_p, \ \delta_k = e^{\tau_k + i\varphi_k}, \ p \geqslant 2 \tag{26.2}$$

(δ_k — диагональные элементы матрицы δ), и положим

$$L = \prod_{2 \leqslant p < q \leqslant n} \overline{L}_{pq} \cdot L_{pq}.$$

Мы покажем, что выражение для $x(e)$ получается в результате применения этого оператора L к функции I_δ в точке $\delta = e$. Прежде всего дадим другое, более удобное выражение для операторов L_{pq}.

1. *Оператор L_{pq} можно представить в виде*

$$L_{pq} = \frac{\partial}{\partial \sigma_q} + i \frac{\partial}{\partial \omega_q}, \tag{26.3}$$

если дифференцировать по σ_p и ω_q, считая постоянными

$$\sigma_{q-1} - \sigma_q, \ \sigma_{q-2} - \sigma_{q-1}, \ \ldots, \ \sigma_p - \sigma_{p+1};$$

$$\omega_{q-1} - \omega_q, \ \omega_{q-2} - \omega_{q-1}, \ \ldots, \ \omega_p - \omega_{p+1},$$

а также

$$\sigma_j, \omega_j \text{ при } j < p \text{ и } j > q.$$

Для доказательства введем новые переменные

$$\xi_q = \sigma_q, \ \xi_{q-1} = \sigma_{q-1} - \sigma_q, \ \xi_{q-2} = \sigma_{q-2} - \sigma_{q-1}, \ \ldots, \ \xi_p = \sigma_p - \sigma_{p+1}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial}{\partial \xi_p}; \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_{p+1}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_p} + \frac{\partial}{\partial \xi_{p+1}}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial \sigma_q} = -\frac{\partial}{\partial \xi_{q-1}} + \frac{\partial}{\partial \xi_q},$$

следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_p} + \cdots + \frac{\partial}{\partial \sigma_q} = \frac{\partial}{\partial \xi_q}. \tag{26.4}$$

Аналогичное рассуждение нетрудно провести для переменных ω_p.

2. Применение оператора L к функции I_δ. Заметим прежде всего, что, в силу существования и непрерывности всех производных функции I_δ, фигурирующих в выражении для оператора L, достаточно найти $(LI_\delta)_{\delta=e}$ при приближении к точке $\delta = e$ из области

$$\sigma_2 - \sigma_3 < \cdots < \sigma_{n-2} - \sigma_{n-1} < \sigma_{n-1} - \sigma_n < \sigma_n < 0. \tag{26.5}$$

Поэтому мы выпишем формулу (25.43) для I_δ в предположении, что имеют место неравенства (26.5).

Из определения (25.44) области D следует, что

$$\tau_{1,\,n-2} \leqslant \sigma_n \leqslant \tau_{2,\,n-2} = \sigma_{n-1} - \tau_{1,\,n-2}.$$

Поэтому, в силу (26.5),

$$\tau_{1,\,n-2} \leqslant \min\{\sigma_n, \sigma_{n-1}-\sigma_n\} = \sigma_{n-1}-\sigma_n$$

и формула (25.43) перепишется в виде

$$I_\delta = \frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{1,\,n-1} \int\limits_{D_{0,1}} d\tau^{(1)} \int\limits_{\mathfrak{D}} F\psi\, d\theta, \tag{26.6}$$

где $D_{0,1}$ — область всех остальных переменных $\tau_{p,q}$, определенная условиями (25.44) при $q = 1, 2, \ldots, n-2$, и $d\tau^{(1)}$ — произведение дифференциалов этих остальных переменных. Отметим, что область $D_{0,1}$ не зависит от σ_n. Применим к этому выражению оператор L_{nn}.

Обозначим через $D_{1,1}$ область $D_{0,1}$ при $\tau_{1,\,n-1} = \sigma_{n-1} - \sigma_n$, а через F_{11} — значение функции F при $\tau_{1,\,n-1} = \sigma_{n-1} - \sigma_n$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_n} I_\delta = -\frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{D_{1,1}} d\tau^{(1)} \int\limits_{\mathfrak{D}} F_{11}\psi\, d\theta + \frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{1,\,n-1} \int\limits_{D_{0,1}} d\tau^{(1)} \int\limits_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial}{\partial\sigma_n} F\right)\psi\, d\theta$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\omega_n} I_\delta = \frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{1,\,n-1} \int\limits_{D_{0,1}} d\tau^{(1)} \int\limits_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial}{\partial\omega_n} F\right)\psi\, d\theta;$$

следовательно,

$$L_{nn} I_\delta = I_{1,1}^{(1)} + I_{1,1}^{(2)}, \tag{26.7}$$

де

$$I_{11}^{(1)} = -\frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{D_{0,1}} d\tau^{(1} \int\limits_{\mathfrak{D}} F_{11}\psi\, d\theta, \tag{26.8}$$

$$I_{11}^{(2)} = \frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{1,\,n-1} \int\limits_{D_{0,1}} d\tau^{(1)} \int\limits_{\mathfrak{D}} (L_{nn}\, F)\psi\, d\theta. \tag{26.9}$$

Обозначим через M_{11} произведение всех дифференциальных операторов L_{pq}, $\overline{L}_{pq}$, содержащихся в L, кроме L_{nn}, так что $L = M_{11} L_{nn}$. Из равенства (26.7) следует тогда, что

$$LI_\delta = M_{11} I_{11}^{(1)} + M_{11} I_{11}^{(2)}.$$

Ниже мы покажем, что в точке $\delta = e$ $M_{11} I_{11}^{(2)} = 0$. Поэтому рассмотрим $M_{11} I_{11}^{(1)}$.

По определению, область D_{11} задается условиями:

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_{10}\leqslant\tau_{11}\leqslant\tau_{20}\leqslant\cdots\leqslant\tau_{n-1,\,1}\leqslant\tau_{n0}\,,\quad \tau_{10}+\tau_{20}+\cdots+\tau_{n0}=0,\\
&\tau_{11}\leqslant\tau_{12}\leqslant\tau_{21}\leqslant\cdots\leqslant\tau_{n-2,\,2}\leqslant\tau_{n-1,1},\quad \tau_{11}+\tau_{21}+\cdots+\tau_{n-1,\,1}=\sigma_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\tau_{1,n-4}\leqslant\tau_{1,n-3}\leqslant\tau_{2,n-4}\leqslant\tau_{2,n-3}\leqslant\tau_{3,n-4}\leqslant\tau_{3,n-3}\leqslant\tau_{4,n-4},\\
&\qquad\qquad\tau_{1,n-4}+\cdots+\tau_{4,n-4}=\sigma_{n-3},\\
&\tau_{1,n-3}\leqslant\sigma_{n-1}-\sigma_n\leqslant\tau_{2,n-3}\leqslant\sigma_n\leqslant\tau_{3,n-3},\ \tau_{1,n-3}+\tau_{2,n-3}+\tau_{3,n-3}=\sigma_{n-2}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{26.10}$$

Последние неравенства в (26.10) можно переписать в виде

$$\tau_{1,n-3}\leqslant\sigma_{n-1}-\sigma_n\leqslant\tau_{2,n-3}\leqslant\sigma_n\leqslant\sigma_{n-2}-\tau_{1,n-3}-\tau_{2,n-3};$$

следовательно, они эквивалентны неравенствам

$$\sigma_{n-1}-\sigma_n\leqslant\tau_{2,\,n-3}\leqslant\sigma_n;\tag{26.11}$$

$$\tau_{1,\,n-3}\leqslant\sigma_{n-1}-\sigma_n,\qquad \tau_{2,\,n-3}\leqslant\sigma_{n-2}-\sigma_n-\tau_{2,\,n-3}.\tag{26.12}$$

В силу неравенств (26.11),

$$\sigma_{n-2}-\sigma_n-\tau_{2,\,n-3}\leqslant\sigma_{n-2}-\sigma_n-(\sigma_{n-1}-\sigma_n)=\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1};$$

так как последнее выражение $\leqslant\sigma_{n-1}-\sigma_n$, в силу (26.5), то первое из неравенств (26.12) является следствием остальных.

Поэтому выражение (26.8) для $I_{11}^{(1)}$ можно переписать в виде

$$I_{11}^{(1)}=-\frac{C}{(2\pi)^N}\int\limits_{\sigma_{n-1}-\sigma_n}^{\sigma_n}d\tau_{2,\,n-3}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-2}-\sigma_n-\tau_{2,\,n-3}}d\tau_{1,\,n-3}\int\limits_{D_{0,2}}d\tau^{(2)}\int\limits_{\mathfrak{D}}F_{11}\,\psi\,d\theta,\tag{26.13}$$

где $d\tau^{(2)}$ обозначает произведение дифференциалов переменных τ_{pq}, $q\geqslant n-4$, а D_{02} — область этих переменных, определенная всеми условиями (26.10) кроме условий в последней строчке. Очевидно, область D_{02} не зависит от переменных σ_n, σ_{n-1}. Применим к $I_{11}^{(1)}$ оператор $L_{n-1,\,n-1}$. Рассуждая так же, как и при выводе (26.7), т. е. дифференцируя сперва по σ_{n-1} в нижнем пределе $\sigma_{n-1}-\sigma_n$, а затем под знаком интеграла, получаем:

$$L_{n-1,\,n-1}I_{11}^{(1)}=I_{12}^{(1)}+I_{12}^{(2)},\tag{26.14}$$

где

$$I_{12}^{(1)}=\frac{C}{(2\pi)^N}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}}d\tau_{1,\,n-3}\int\limits_{D_{1,2}}d\tau^{(2)}\int\limits_{\mathfrak{D}}F_{12}\,\psi\,d\theta,\tag{26.15}$$

$$I_{12}^{(2)}=-\frac{C}{(2\pi)^N}\int\limits_{\sigma_{n-1}-\sigma_n}^{\sigma_n}d\tau_{1,\,n-3}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-2}-\sigma_n-\tau_{2,\,n-3}}d\tau_{1,\,n-3}\int\limits_{D_{02}}d\tau^{(2)}\int\limits_{\mathfrak{D}}(L_{n-1,\,n-1}F_{11})\,\psi\,d\theta,\tag{26.16}$$

D_{12} — область D_{02} при $\tau_{2,\,n-3} = \sigma_{n-1} - \sigma_n$, а F_{12} — значение функции F_{11} при $\tau_{2,\,n-3} = \sigma_{n-1} - \sigma_n$.

Обозначим через M_{12} произведение всех дифференциальных операторов L_{pq}, $\bar{L}_{pq}$ из M_{11}, кроме $L_{n-1,\,n-1}$, так что $M_{11} = M_{12} \cdot L_{n-1,\,n-1}$. Тогда из равенства (26,14) следует, что

$$M_{11}\, I_{11}^{(1)} = M_{12}\, I_{12}^{(1)} + M_{12}\, I_{12}^{(2)}.$$

Ниже мы покажем, что в точке $\delta = e$ $M_{12} I_{12}^{(2)} = 0$, поэтому рассмотрим $M_{12}\, I_{12}^{(1)}$. Применим к $I_{12}^{(1)}$ оператор $L_{n-1,\,n}$; при его применении следует считать постоянными $\sigma_{n-1} - \sigma_n$, $\omega_{n-1} - \omega_n$ и σ_p, ω_p при $p \leqslant n-2$, так что и область D_{12} следует считать постоянной. С другой стороны, в силу равенства $\sigma_{n-2} - \sigma_{n-1} = \sigma_{n-2} - (\sigma_{n-1} - \sigma_n) - \sigma_n$, верхний предел $\sigma_{n-2} - \sigma_{n-1}$ в формуле (26.15) следует считать зависящим от σ_n. Поэтому

$$L_{n-1,\,n}\, I_{12}^{(1)} = I_{22}^{(1)} + I_{22}^{(2)}, \tag{26.17}$$

где

$$I_{22}^{(1)} = -\frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{D_{22}} d\tau^{(2)} \int\limits_{\mathfrak{D}} F_{22}\, \psi\, d\theta, \tag{26.18}$$

$$I_{22}^{(2)} = \frac{C}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\infty}^{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}} d\tau_{1,\,n-3} \int\limits_{D_{12}} d\tau^{(2)} \int\limits_{\mathfrak{D}} (L_{n-1,\,n}\, F_{12})\, \psi\, d\theta, \tag{26.19}$$

D_{22} — область D_{12} при $\tau_{1,\,n-3} = \sigma_{n-2} - \sigma_{n-1}$, а F_{22} — значение функции F_{12} при $\tau_{1,\,n-3} = \sigma_{n-2} - \sigma_{n-1}$.

Повторяя это рассуждение $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ раз, придем к функции

$$I_{n-2,\,n-2}^{(1)} = \alpha \int\limits_{D_{n-2,\,n-2}} d\tau^{(n-2)} \int\limits_{\mathfrak{D}} F_{n-2,\,n-2}\, \psi\, d\theta, \tag{26.20}$$

где

$$\alpha = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{C}{(2\pi)^N}, \tag{26.21}$$

$d\tau^{(n-2)}$ — произведение дифференциалов переменных $\tau_{10}, \tau_{20}, \ldots, \tau_{n-1,\,0}$, $D_{n-2,\,n-2}$ — область этих переменных, определенная условиями

$$\begin{gathered}\tau_{10} \leqslant \sigma_2 - \sigma_3 \leqslant \tau_{20} \leqslant \sigma_3 - \sigma_4 \leqslant \cdots \leqslant \tau_{n-2,\,0} \leqslant \sigma_{n-1} - \sigma_n \leqslant \\ \leqslant \tau_{n-1,\,0} \leqslant \sigma_n \leqslant -\tau_{10} - \tau_{20} - \cdots - \tau_{n-1,\,0},\end{gathered} \tag{26.22}$$

а $F_{n-2,\,n-2}$ — значение функции F при

$$\tau_{pq} = \sigma_{p+q} - \sigma_{p+q+1},\ q = 1, 2, \ldots, n-1;\ p = 1, 2, \ldots, n-q;\ \sigma_{n+1} = 0. \tag{26.23}$$

К этой функции нужно применить оператор

$$M_{n-2,\,n-2} = \Big(\prod_{2 \leqslant p \leqslant q \leqslant n} \bar{L}_{pq}\Big) \cdot L_{22} L_{23} \ldots L_{2n}. \tag{26.24}$$

Неравенства (26.22) эквивалентны неравенствам

$$\sigma_{n-1}-\sigma_n \leqslant \tau_{n-1,\,0} \leqslant \sigma_n;\ \ \sigma_{n-2}-\sigma_{n-1} \leqslant \tau_{n-2,\,0} \leqslant \sigma_{n-1}-\sigma_n, \ldots$$
$$\ldots, \sigma_2-\sigma_3 \leqslant \tau_{20} < \sigma_3-\sigma_4,\ \ \tau_{10} \leqslant \sigma_2-\sigma_3 \tag{26.25}$$

$$\tau_{10} \leqslant -\tau_{20}-\cdots-\tau_{n-1,\,0}-\sigma_n. \tag{26.26}$$

Но из неравенств (26.25) следует, что

$$-\tau_{20}-\cdots-\tau_{n-1,\,0}-\sigma_n \geqslant \sigma_4-\sigma_3+\sigma_5-\sigma_4+\cdots+\sigma_n-\sigma_{n-1}-$$
$$-\sigma_n-\sigma_n=-\sigma_3-\sigma_n > \sigma_2-\sigma_3 \geqslant \tau_{10},$$

ибо, в силу неравенств (26.5), $\sigma_2<0, -\sigma_n>0$; поэтому неравенство (26.26) является следствием неравенства (26.25) и его можно отбросить. Это означает, что интеграл (26.20) можно записать в виде

$$I^{(1)}_{n-2,\,n-2}=$$
$$=\alpha\int\limits_{\sigma_{n-1}-\sigma_n}^{\sigma_n} d\tau_{n-1,\,0}\int\limits_{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{n-2,\,0}\cdots\int\limits_{\sigma_2-\sigma_3}^{\sigma_3-\sigma_4} d\tau_{20}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_2-\sigma_3} d\tau_{10}\int\limits_{\mathfrak{D}} F_{n-2,\,n-2}\,\psi\,d\theta, \tag{26.27}$$

где $\mathfrak{D}$ — область переменных θ_{iq}, определенная неравенствами $0 \leqslant \theta_{pq} \leqslant 2\pi$.

Применим к $I_{n-2,\,n-2}$ оператор L_{2n}; при его применении следует считать постоянными $\sigma_{n-1}-\sigma_n$, $\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_2-\sigma_3$ и $\omega_{n-1}-\omega_n$, $\omega_{n-2}-\omega_{n-1}, \ldots, \omega_2-\omega_3$. Поэтому нужно только дифференцировать по верхнему пределу σ_n в первом интеграле и под знаком всех интегралов. Следовательно,

$$L_{2n}\, I^{(1)}_{n-2,\,n-2}=I^{(1)}_{1,\,n-1}+I^{(2)}_{1,\,n-1}, \tag{26.28}$$

где

$$I^{(1)}_{1,\,n-1}=$$
$$=\alpha\int\limits_{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{n-2,\,0}\int\limits_{\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2}}^{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}} d\tau_{n-3,\,0}\cdots\int\limits_{\sigma_2-\sigma_3}^{\sigma_3-\sigma_4} d\tau_{20}\int\limits_{-\omega}^{\sigma_2-\sigma_3} d\tau_{10}\int\limits_{\mathfrak{D}} F_{1,\,n-1}\,\psi_1\,d\theta, \tag{26.29}$$

$$I^{(2)}_{1,\,n-1}=$$
$$=\alpha\int\limits_{\sigma_{n-1}-\sigma_n}^{\sigma_n} d\tau_{n-1,\,0}\int\limits_{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n} d\tau_{n-2,\,0}\cdots\int\limits_{\sigma_2-\sigma_3}^{\sigma_3-\sigma_4} d\tau_{20}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_2-\sigma_3} d\tau_{10}\int\limits_{\mathfrak{D}} (L_{2n}\,F_{n-2,\,n-2})\,\psi\,d\theta, \tag{26.30}$$

$F_{1,n-1}$, ψ_1 — значения функций $F_{n-2,n-2}$ и ψ при $\tau_{n-1,0}=\sigma_n$. Положим

$$M_{1,n-1}=\left(\prod_{2\leqslant p\leqslant q\leqslant n}\bar{L}_{pq}\right)L_{22}\ldots L_{2,n-1};\tag{26.31}$$

из равенства (26.28) следует, что

$$M_{n-2,n-2}I_{n-2,n-2}=M_{1,n-1}I^{(1)}_{1,n-1}+M_{1,n-1}I^{(2)}_{1,n-1}.\tag{26.32}$$

Ниже мы покажем, что в точке $\delta=e$ $M_{1,n-1}I^{(2)}_{1,n-1}=0$. Поэтому рассмотрим $M_{1,n-1}I^{(1)}_{1,n-1}$. Применим к $I^{(1)}_{1,n-1}$ оператор $L_{2,n-1}$; при его применении следует считать постоянными σ_n, $\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}$, $\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2},\ldots$ $\ldots,\sigma_2-\sigma_3$, $\omega_n,\omega_{n-2}-\omega_{n-1},\ldots,\omega_2-\omega_3$, так что дифференцировать следует только по верхнему пределу в первом интеграле в (26.29) и под знаком всего этого интеграла. Мы получаем:

$$L_{2,n-1}I^{(1)}_{1,n-1}=I^{(1)}_{2,n-1}+I^{(2)}_{2,n-1},\tag{26.33}$$

где

$$I^{(1)}_{2,n-1}=\alpha\int\limits_{\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2}}^{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}}d\tau_{n-3,0}\ldots\int\limits_{\sigma_2-\sigma_3}^{\sigma_3-\sigma_4}d\tau_{20}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_2-\sigma_3}d\tau_{10}\int\limits_{\mathfrak{D}}F_{2,n-1}\psi_2\,d\theta,\tag{26.34}$$

$$I^{(2)}_{2,n-1}=\alpha\int\limits_{\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}}^{\sigma_{n-1}-\sigma_n}d\tau_{n-2,0}\ldots\int\limits_{\sigma_2-\sigma_3}^{\sigma_3-\sigma_4}d\tau_{20}\int\limits_{-\infty}^{\sigma_2-\sigma_3}d\tau_{10}\int\limits_{\mathfrak{D}}(L_{2,n-1}F_{1,n-1})\,\psi_1\,d\theta,\tag{26.35}$$

$F_{2,n-1}$, ψ_2 — значения функций $F_{1,n-1}$, ψ_1 при $\tau_{n-2,0}=\sigma_{n-1}-\sigma_n$.

Повторяя это рассуждение, после $n-1$ шагов придем к функции

$$I^{(1)}_{n-1,n-1}=\alpha\int\limits_{\mathfrak{D}}F_{n-1,n-1}\psi_{n-1}\,d\theta,\tag{26.36}$$

где $F_{n-1,n-1}$, ψ_{n-1} — значения функций $F_{n-2,n-2}$ и ψ при

$$\tau_{10}=\sigma_2-\sigma_3,\quad \tau_{20}=\sigma_3-\sigma_4,\ldots,\tau_{n-2,0}=\sigma_{n-1}-\sigma_n,\quad \tau_{n-1,0}=\sigma_n.\tag{26.37}$$

К функции $I_{n-1,n-1}$ нужно применить оператор

$$M_{n-1,n-1}=\prod_{2\leqslant p\leqslant q\leqslant n}\bar{L}_{pq}.\tag{26.38}$$

Докажем сначала, что при условиях (26.23) и (26.37) матрица $w=v\gamma u$ зависит только от γ. Для этого найдем элементы матрицы u при условиях (26.23) и (26.37). Из равенств $\tau_{1,n-1}=\sigma_n$, $\tau_{1,n-2}=\sigma_{n-1}-\sigma_n$, $\tau_{2,n-2}=\sigma_n$ и формулы (25.57) при $q=n-1$ следует, что $(f_1^{(n-2)},e_{n-1})=0$. Так как пространства $\{f_1^{(n-2)},f_2^{(n-2)}\}$ и $\{e_{n-1},e_n\}$ совпадают, то отсюда следует, что

$$f_1^{(n-2)}=\varkappa_1^{(n-2)}e_{n-1},\quad f_2^{(n-2)}=\varkappa_2^{(n-2)}e_n,\quad |\varkappa_1^{(n-2)}|=|\varkappa_2^{(n-2)}|=1.\tag{26.39}$$

Далее, из равенств $\tau_{1, n-2}=\sigma_{n-1}-\sigma_n$; $\tau_{2, n-2}=\sigma_n$; $\tau_{1, n-3}=\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}$; $\tau_{2, n-3}=\sigma_{n-1}-\sigma_n$, $\tau_{3, n-3}=\sigma_n$ и формул (25.57) при $q=n-2$ следует, что $(f_k^{(n-3)}, e_{n-2})=0$ при $k=2$, 3. Поэтому вектор $f_1^{(n-3)}$ кратен вектору e_{n-2}, а векторы $f_2^{(n-3)}, f_3^{(n-3)}$ принадлежат пространству $\{e_{n-1}, e_n\}$.

Далее, из формул (25.58) при $q=n-1$ следует, что $(f_3^{(n-3)}, f_1^{(n-2)})=0$, так что в силу соотношений (26.39), также $(f_3^{(n-3)}, e_{n-1})=0$. Но тогда должно быть

$$f_1^{(n-3)}=\varkappa_1^{(n-3)} e_{n-2}, \quad f_2^{(n-3)}=\varkappa_2^{(n-3)} e_{n-1}; \quad f_3^{(n-3)}=\varkappa_3^{(n-3)} e_n. \tag{26.40}$$

Повторяя это рассуждение, мы придем к выводу, что вообще

$$f_k^{(p)}=\varkappa_k^{(p)} e_{n-p+k}, \quad p=1,2,\ldots, n-2; \quad k=1,2,\ldots, n-p. \tag{26.41}$$

В частности,

$$f_1^{(1)}=\varkappa_1^{(1)} e_2; \quad f_2^{(1)}=\varkappa_2^{(1)} e_3, \ldots, \quad f_{n-1}^{(1)}=\varkappa_{n-1}^{(1)} e_n. \tag{26.42}$$

Рассмотрим, наконец, равенства

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{11}=\sigma_2-\sigma_3, \quad \tau_{21}=\sigma_3-\sigma_4, \ldots, \tau_{n-2,1}=\sigma_{n-1}-\sigma_n, \quad \tau_{n-1,1}=\sigma_n, \\ \tau_{10}=\sigma_2-\sigma_3, \tau_{20}=\sigma_3-\sigma_4, \ldots, \tau_{n-2,0}=\sigma_{n-1}-\sigma_n, \tau_{n-1,0}=\sigma_n; \tau_{n0}=-\sigma_2.\end{array}\right\} \tag{26.43}$$

Из этих равенств и формул (25.57) при $q=1$ следует, что $(f_k, e_1)=0$ при $k=1,2,\ldots,n-1$, так что вектор e_1 кратен вектору f_n, а векторы $f_1,\ldots,f_{n-1}$ принадлежат пространству $\{e_2, e_3,\ldots,e_n\}$. Далее, из формул (25.58) при $q=1$ следует, что $(f_1^{(1)}, f_k)=0$ при $k=2,\ldots,n-1$, т. е., в силу (26.42), $(e_2, f_k)=0$. Это означает, что вектор e_2 кратен вектору f_1, а векторы $\{f_2,\ldots,f_{n-1}\}$ принадлежат пространству $\{e_3,\ldots,e_n\}$.

Аналогично $(f_2^{(1)}, f_k)=0$ при $k=3,\ldots, n-1$, т. е., в силу (26.42), $(e_3, f_k)=0$ при $k=3,\ldots, n-1$. Это означает, что вектор e_3 кратен вектору f_2.

Повторяя эти рассуждения, приходим к выводу, что

$$e_1=\varkappa_1 f_n, \quad e_2=\varkappa_2 f_1, \quad e_3=\varkappa_3 f_2, \ldots, e_n=\varkappa_n f_{n-1}, \tag{26.44}$$

следовательно, матрица u имеет вид

$$u=\tilde{\gamma} s, \tag{26.45}$$

где

$$\gamma=\begin{pmatrix}\bar{\varkappa}_1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \bar{\varkappa}_2 & 0\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots \bar{\varkappa}_n\end{pmatrix}; \quad s=\begin{pmatrix}0 & 0\ldots 0 & 1 \\ 1 & 0\ldots & \\ \ldots & \ldots & \\ 0 & 0\ldots 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{26.46}$$

Но тогда равенство $u\varepsilon'=\varepsilon\zeta v^*$, определяющее матрицу v, запишется в виде:

$$\tilde{\gamma} s\varepsilon'=\varepsilon\zeta v^*. \tag{26.47}$$

Положим $\varepsilon'' = s\varepsilon' s^{-1}$; матрица ε'' диагональна, следовательно, перестановочна $\tilde{\gamma}$. Поэтому равенство (26.47) можно переписать в виде $\varepsilon''\tilde{\gamma} = \varepsilon\zeta v^* s^{-1}$.

Так как $\tilde{\gamma}$ и $v^* s^{-1}$ — унитарные матрицы, то, в силу единственности разложения вида $g = \varepsilon\zeta u$, должно быть $\varepsilon'' = \varepsilon$, $\zeta = e$; $v^* s^{-1} = \tilde{\gamma}$. Отсюда $v^* = \tilde{\gamma}s$, $v = s^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}$; следовательно

$$w = v\gamma u = s^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\gamma\tilde{\gamma}s = s^{-1}\gamma s. \tag{26.48}$$

Поэтому, полагая $F = F(w, \tau_{10}, \tau_{20}, \ldots, \tau_{n-1, n})$, имеем

$$F_{n-1, n-1} = F(s^{-1}\gamma s, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_4, \ldots, \sigma_{n-1} - \sigma_n, \sigma_n). \tag{26.49}$$

Это выражение не зависит от углов θ_{pq}; следовательно, формула (26.36) для $I^{(1)}_{n-1\ \ n-1}$ принимает вид (см. (26.21) и (25.25))

$$I^{(1)}_{n-1, n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} CF(s^{-1}\gamma s, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_4, \ldots, \sigma_{n-1} - \sigma_n, \sigma_n)\,\psi_{n-1}, \tag{26.50}$$

где

$$C = (n-1)!\,(n-2)!\ldots 2!\,1! \tag{26.51}$$

К этому выражению $I^{(1)}_{n-1, n-1}$ надо применить оператор

$$M_{n-1, n-1} = \prod_{2\leqslant p\leqslant q\leqslant n} \bar{L}_{pq}. \tag{26.52}$$

В результате мы получим сумму слагаемых, в каждом из которых некоторые операторы $\bar{L}_{pq}$ применены к F, а остальные — к ψ_{n-1}. Докажем, что при $\delta = e$ из всех этих слагаемых отлично от нуля лишь то, в котором весь оператор $M_{n-1, n-1}$ применен к ψ_{n-1}. Для этого рассмотрим подробнее выражение для ψ_{n-1}. Так как

$$\psi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ e^{2\tau_{10}} & e^{2\tau_{20}} & \ldots e^{2\tau_{n0}} \\ e^{4\tau_{10}} & e^{4\tau_{20}} & \ldots e^{4\tau_{n0}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{2(n-1)\tau_{10}} & e^{2(n-1)\tau_{20}} & \ldots e^{2(n-1)\tau_{n0}} \end{vmatrix}, \tag{26.53}$$

то

$$\psi_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 & 1 & 1 \\ e^{2(\sigma_2-\sigma_3)} & e^{2(\sigma_3-\sigma_4)} & \ldots e^{2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)} & e^{2\sigma_n} & e^{-2\sigma_2} \\ e^{4(\sigma_2-\sigma_3)} & e^{4(\sigma_3-\sigma_4)} & \ldots e^{4(\sigma_{n-1}-\sigma_n)} & e^{4\sigma_n} & e^{-4\sigma_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{2(n-1)(\sigma_2-\sigma_3)} & e^{2(n-1)(\sigma_3-\sigma_1)} & \ldots e^{2(n-1)(\sigma_{n-1}-\sigma_n)} & e^{2(n-1)\sigma_n} & e^{-2(n-1)\sigma_2} \end{vmatrix}. \tag{26.54}$$

При применении оператора $\overline{L}_{pq}$ к ψ_{n-1} переменными являются только элементы $p-2$-го столбца,* содержащие $\sigma_{p-1}-\sigma_p=\sigma_{p-1}-(\sigma_p-\sigma_{p+1})-\cdots-(\sigma_{q-1}-\sigma_q)-\sigma_q$ и $q-1$-го столбца, содержащие $\sigma_q-\sigma_{q+1}$; поэтому

$$\overline{L}_{pq}\psi_{n-1}=2(-a_{p-2}+a_{q-1})\psi_{n-1}, \tag{26.55}$$

где a_p обозначает оператор умножения элементов p-го столбца на числа $0, 1, 2, \ldots, n-1$ соответственно.

Отсюда

$$\begin{aligned}&\overline{L}_{p_1q_1}\overline{L}_{p_2q_2}\ldots\overline{L}_{p_kq_k}\psi_{n-1}=\\&=2^k(-a_{p_1-2}+a_{q_1-1})(-a_{p_2-2}+a_{q_2-1})\cdots(-a_{p_k-2}+a_{q_k-1})\psi_{n-1}.\end{aligned} \tag{26.56}$$

Это выражение может быть отличным от нуля при $\delta=e$ только в том случае, когда в нем содержатся слагаемые вида

$$\pm 2^m a^0_{p_1}a^1_{p_2}\ldots a^{n-1}_{p_n}\psi_{n-1}, \tag{26.57}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, ибо только в этом случае соответствующий определитель имеет разные столбцы. Такие слагаемые могут получиться лишь в том случае, когда порядок применяемого оператора равен $\frac{n(n-1)}{2}$, т. е. когда применяемый оператор совпадает с оператором $M_{n-1,n-1}=\prod\limits_{2\leqslant p\leqslant q\leqslant n}\overline{L}_{pq}$. Поэтому в выражении (26.50) для $T^{(1)}_{n-1,n-1}$ оператор $M_{n-1,n-1}$ следует применить только к ψ_{n-1}. Все остальные слагаемые, которые получаются применением к ψ_{n-1} не всех множителей $\overline{L}_{pq}$ к $M_{n-1,n-1}$, должны, в силу предыдущего, обращаться в нуль в точке $\delta=e$. Таким образом,

$$(M_{n-1,n-1}I^{(1)}_{n-1,n-1})_{\delta=e}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}CF(e,e)(M_{n-1,n-1}\psi_{n-1})_{\delta=e}, \tag{26.58}$$

где мы снова вернулись к обозначению $F=F(w,\varepsilon')$.

Вычислим теперь $(M_{n-1,n-1}\psi_{n-1})_{\delta=e}$. Из формулы (26.56) следует, что

$$\begin{aligned}M_{n-1,n-1}\psi_{n-1}&=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{2\leqslant p\leqslant q\leqslant n}(-a_{p-2}+a_{q-1})\psi_{n-1}=\\&=(-1)^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}1&1&\ldots 1\\a_1&a_2&\ldots a_n\\a_1^2&a_2^2&\ldots a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_n^{n-1}\end{vmatrix}\psi_{n-1}.\end{aligned} \tag{26.59}$$

---

* В случае $p=2$ число $p-2=0$ следует заменить числом n.

С другой стороны, в точке $\delta = e$

$$a_1^0 a_2^1 \dots a_n^{n-1} \varphi_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{n-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant p < q \leqslant n-1} (q-p) =$$

$$= (1.2 \dots (n-1))(1.2 \dots (n-2)) \dots (1.2)\, 1 = (n-1)!\, (n-2)! \dots 2!\, 1!. \qquad (26.60)$$

Применение всякой перестановки $\pm a_{p_1}^0 a_{p_2}^1 \dots a_{p_n}^{n-1}$ сводится к соответствующей подстановке столбцов в определителе (26.60); поэтому все $n!$ слагаемых в (26.59) друг другу равны и

$$(M_{n-1,\, n-1} \psi_{n-1})_{\delta=e} = (-1)^{n-1} (n!\,(n-1)! \dots 2!\,!1)\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}. \qquad (26.61)$$

Подставляя это выражение в (26.58), получаем:

II. *Имеет место формула:*

$$(M_{n-1,\, n-1} I^{(1)}_{n-1,\, n-1})_{\delta=e} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\, [(n-1)! \dots 2!\, 1!]^2 F(e, e). \qquad (26.62)$$

3. Равенство нулю выражения $(M_{pq} I^{(2)}_{pq})_{\delta=e}$. Перейдем теперь к доказательству высказанного выше утверждения, что

$$(M_{pq} I^{(2)}_{pq})_{\delta=e} = 0,\ q = 1, 2, \dots, n-1;\ p = 1, 2, \dots, q. \qquad (26.63)$$

Рассмотрим, например, $M_{11} I^{(2)}_{11}$. Обозначим через M произведение операторов $\overline{L}_{nn}$, $\overline{L}_{p,\, n-1}$, $L_{p,\, n-1}$, $\overline{L}_{pn}$, L_{pn}, $2 \leqslant p \leqslant n-1$; применение к $I^{(2)}_{11}$ каждого из этих операторов сводится к применению этих операторов под знаком всех интегралов по $d\tau_{pq}$ и к дифференцированию по пределам этих интегралов. В результате $MI^{(2)}_{11}$ представится в виде суммы интегралов вида

$$I = \int_{D'} d\tau' M' \int_{\mathfrak{D}} (L_{nn} F) \psi\, d\theta, \qquad (26.64)$$

где M' — произведение некоторых (или всех) дифференциальных операторов из M, а D' — область, составленная из граней некоторой размерности области D. В частности, D может совпадать с самой областью D.

Докажем, что каждый из таких интегралов I равен нулю.

Положим, для краткости,

$$\xi_1 = e^{i\omega_n} (e^{2\tau_{2,\, n-2} - \sigma_n} - e^{\sigma_n}) + e^{2\tau_{2,\, n-2} - \sigma_{n-1} - i\omega_n + i\omega_{n-1}} (e^{\sigma_n} - e^{2\tau_{1,\, n-2} - \sigma_n}), \qquad (26.65)$$

$$\xi_2 = e^{i\omega_n} (e^{\sigma_n} - e^{2\tau_{1,\, n-2} - \sigma_n}) + e^{2\tau_{1,\, n-2} - \sigma_{n-1} - i\omega_n + i\omega_{n-1}} (e^{2\tau_{2,\, n-2} - \sigma_n} - e^{\sigma_n}), \qquad (26.66)$$

$$\eta_1 = \mathfrak{A} (e^{2\tau_{2,\, n-2} - \sigma_{n-1} + i\omega_{n-1} - i\omega_n} - e^{i\omega_n}), \qquad (26.67)$$

$$\eta_2 = \mathfrak{A}\,(e^{2\tau_{1,\,n-2} - \sigma_{n-1} + i\omega_{n-1} - i\omega_n} - e^{i\omega_n}), \tag{26.68}$$

$$\theta_0 = \theta_{21} - \theta_{11}. \tag{26.69}$$

Из формул (25.74) — (25.76) следует, что матрицу w можно представить в виде

$$w = A^{(0)} + A^{(1)}\xi_1 + A^{(2)}\xi_2 + B^{(1)}\eta_1 e^{i\theta_0} + B^{(2)}\eta_2 e^{-i\theta_2}, \tag{26.70}$$

где $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ — матрицы, не зависящие от σ_n и ω_n.

Положим

$$\Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2) = \int_{-\pi}^{\pi} F(w,\ \varepsilon')\, d\theta_0 \tag{26.71}$$

и перейдем в формуле (26.64) от переменных θ_{21}, θ_{11} к θ_0, θ_{21}; эта формула перепишется тогда в виде

$$I = \int_{D'} d\tau' M' \int_{\mathfrak{D}^{(1)}} (L_{nn}\Phi)\,\psi\, d\tau^{(1)}\, d\theta^{(1)}, \tag{26.72}$$

где $d\theta^{(1)}$ — произведение всех дифференциалов $d\theta_{pq}$ кроме $d\theta_{11}$, а $\mathfrak{D}^{(1)}$ — соответствующая область переменных θ_{pq} (кроме θ_{11}). Из формул (26.70) и (26.71) легко следует, что функция Φ удовлетворяет условию

$$\Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \varkappa\eta_1,\ \varkappa^{-1}\eta_2) = \Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2) \tag{26.73}$$

для любого числа $\varkappa$ по модулю равного единице. Поэтому функцию Φ можно представить в виде

$$\Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2) = \Phi_1\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1\eta_2,\ \left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\right|\right). \tag{26.74}$$

С другой стороны, полагая в формулах (26.67) и (26.68) $\rho = e^{\sigma_{n-1} - 2\tau_{1,\,n-2}}$, $\alpha = 2\omega_n - \omega_{n-1}$ и пользуясь соотношением $\tau_{1,\,n-2} + \tau_{2,\,n-2} = \sigma_{n-1}$, имеем

$$\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\right| = \frac{|e^{\sigma_{n-1} - 2\tau_{1,\,n-2}} - e^{i\alpha}|}{|e^{2\tau_{1,\,n-2} - \sigma_{n-1}} - e^{i\alpha}|} = \rho\frac{|\rho - e^{i\alpha}|}{|\rho - e^{i\alpha}|} = \rho,$$

так что отношение $\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\right|$ не зависит от σ_n и ω_n.

Поэтому мы можем положить

$$\Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2) = \Psi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3), \tag{26.75}$$

где

$$\xi_3 = \eta_1\eta_2. \tag{26.76}$$

Отсюда

$$\xi_3 = \mathfrak{U}^2\,[e^{2\tau_{1,\,n-2} + 2\tau_{2,\,n-2} - 2\sigma_{n-1} + 2i\omega_{n-1} - 2i\omega_n} + e^{2i\omega_n} - (e^{2\tau_{1,\,n-2}} + e^{2\tau_{2,\,n-2}})\, e^{-\sigma_{n-1} + i\omega_{n-1}}]$$

или, в силу (25.76),

$$\xi_3 = -\left[(e^{2\sigma_n} + e^{2\sigma_{n-1}-2\sigma_n}) - (e^{2\tau_{1,\,n-2}} + e^{2\tau_{2,\,n-2}})\right]\cdot\left[(e^{2i\omega_{n-1}-2i\omega_n} + e^{2i\omega_n}) - \right.$$
$$\left. - (e^{2\tau_{1,\,n-2}} + e^{2\tau_{2,\,n-2}})\, e^{-\sigma_{n-1}+i\omega_{n-1}}\right]. \qquad (26.77)$$

Применяя к ξ_i, $\overline{\xi}_i$ оператор L_{nn}, в силу формул (26.65), (26.66), получаем:

$$L_{nn}\,\xi_1 = 2e^{2\tau_{2,\,n-2}}\left(e^{\sigma_n-\sigma_{n-1}+i(\omega_{n-1}-\omega_n)} - e^{i\omega_n-\sigma_n}\right),$$

$$L_{nn}\,\overline{\xi}_1 = 2\left(e^{\sigma_{n-1}-\sigma_n-i(\omega_{n-1}-\omega_n)} - e^{\sigma_n-i\omega_n}\right),$$

$$L_{nn}\,\xi_2 = 2e^{2\tau_{1,\,n-2}}\left(e^{-\sigma_n+i\omega_n} - e^{\sigma_n-\sigma_{n-1}+i(\omega_{n-1}-\omega_n)}\right),$$

$$L_{nn}\,\overline{\xi}_2 = 2\left(e^{\sigma_n-i\omega_n} - e^{\sigma_{n-1}-\sigma_n-i(\omega_{n-1}-\omega_n)}\right),$$

$$L_{nn}\,\xi_3 = -4e^{2i(\omega_{n-1}-\omega_n)+2\sigma_n} + 4e^{2i\omega_n+2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)} +$$
$$+ 2\left(e^{2\tau_{1,\,n-2}} + e^{2\tau_{2,\,n-2}}\right)\left[\left(e^{2\sigma_n} - e^{2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)}\right)e^{-\sigma_{n-1}+i\omega_{n-1}} + \right.$$
$$\left. + e^{2i(\omega_{n-1}-\omega_n)} - e^{2i\omega_n}\right],$$

$$L_{nn}\,\overline{\xi}_3 = 4e^{-2i(\omega_{n-1}-\omega_n)+2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)} - 4e^{-2i\omega_n+2\sigma_n} -$$
$$- 2\left(e^{2\tau_{1,\,n-2}} + e^{2\tau_{2,\,n-2}}\right)\left[\left(e^{-2i(\omega_{n-1}-\omega_n)} - e^{-2i\omega_n}\right) - \right.$$
$$\left. - e^{-\sigma_{n-1}-i\omega_{n-1}}\left(e^{2\sigma_n} - e^{2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)}\right)\right].$$

Отсюда и из равенства

$$L_{nn}\,\Phi = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}\cdot L_{nn}\,\xi_k + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{\xi}_k}\cdot L_{nn}\,\overline{\xi}_k$$

следует, что при $\sigma_{n-1} = \sigma_n = 0$, $\omega_{n-1} = \omega_n = 0$

$$M'(L_{nn}\Phi) = 0.$$

Тем самым доказано, что при $\delta = e$ $M_{11}\,I_{11}^{(2)} = 0$.

Аналогично можно показать, что при $\delta = e$ вообще $M_{pq}\,I_{pq}^{(2)} = 0$. Но тогда, в силу результатов п. 2 (формулы (26.7) — (26.62))

$$(LI_\delta)_{\delta=e} = (-2)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, n!\,[(n-1)!\ldots 2!\,1!]^2\, F(e, e). \qquad (26.78)$$

С другой стороны, согласно формуле (25.9)

$$F(e, e_1) = \frac{c_1}{(2\pi)^{n-1}}\, x(e),$$

где

$$c_1 = \frac{2^{n-1}\,\pi^{n^2-1}}{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^2}.$$

Поэтому

$$(LI_\delta)_{\delta=e} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{n^2-n} n!\, x(e). \tag{26.79}$$

Вернемся теперь к переменным τ_q, φ_q, $q = 2, 3, \ldots, n$ (см. формулы (25.41), (25.42)), через которые диагональные элементы δ_p матрицы δ выражаются по формулам

$$\delta_p = e^{\tau_p + i\varphi_p}, \quad p = 2, 3, \ldots, n. \tag{26.80}$$

В силу равенств

$$\tau_q = \sigma_q - \sigma_{q+1} \text{ при } q = 2, 3, \ldots, n-1; \quad \tau_n = \sigma_n \tag{26.81}$$

оператор L в переменных τ_q, φ_q запишется в виде

$$L = \prod_{2 \leqslant p < q \leqslant n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau_p} - \frac{\partial}{\partial \tau_q} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_p} - \frac{\partial}{\partial \varphi_q} \right)^2 \right] \prod_{p=2}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_p^2} \right). \tag{26.82}$$

Мы приходим к следующему результату:

Теорема 18. *Для любой функции $x(g)$, непрерывно дифференцируемой по g_{pq}, $\bar{g}_{pq}$ до $n(n-1)$-го порядка включительно и равной нулю вне некоторого компактного множества, имеет место формула*

$$(LI_\delta)_{\delta=e} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{n^2-n} n!\, x(e), \tag{26.83}$$

где L — дифференциальный оператор, определенный формулами (26.82) *и* (26.80) *и где*

$$I_\delta = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \int x(z^{-1}\delta\zeta z)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(z). \tag{26.84}$$

§ 27. Аналог формулы Планшереля

1. Формула для $x(e)$ через след. Основной результат § 26 дает возможность получить формулу, которая является аналогом формулы Планшереля. Именно, следуя плану, намеченному во введении к этой главе, перейдем от функции I_δ к ее интегралу

$$S(T_x) = \int I_\delta\, \chi(\delta)\, d\mu(\delta), \tag{27.1}$$

который, в силу формул (26.84) и (19.30), является следом $S(T_x)$ оператора T_x. В силу равенств $\delta_p = e^{\tau_p + i\varphi_p}$, функцию I_δ можно рассматривать как функцию $I(\tau_2, \ldots, \tau_n; \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ параметров τ_p, φ_p, $\delta_p = e^{\tau_p + i\varphi_p}$. Так как

$$\chi(\delta) = e^{i(\tau_2\rho_2 + \tau_3\rho_3 + \cdots + \tau_n\rho_n + m_2\varphi_2 + m_3\varphi_2 + \cdots + m_n\varphi_n)}, \tag{27.2}$$

то в этих параметрах формула (27.1) перепишется в виде

$$S(T_x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_3 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_3 \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{\infty} I e^{i(\tau_2\rho_2+\tau_3\rho_3+\cdots+\tau_n\rho_n+m_2\varphi_2+m_3\varphi_3+\cdots+m_n\varphi_n)} d\tau_n,$$

т. е. след $S(T_x)$ есть произведение на $(2\pi)^{n-1}$ трансформации Фурье функции I по параметрам τ_p, φ_p, $p=2, 3, \ldots, n$. Отсюда, применяя обратную трансформацию Фурье, получим, что

$$I = \frac{1}{(2\pi)^{2(n-1)}} \sum_{m_1, \ldots m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots$$

$$\cdots \int S(T_x) e^{-i(\tau_2\rho_2+\tau_3\rho_3+\cdots+\tau_n\rho_n+m_2\varphi_2+m_3\varphi_3+\cdots+m_n\varphi_n)} d\tau_2 d\tau_3 \ldots d\tau_n. \qquad (27.3)$$

Предположим, что функция $x(g)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема по всем параметрам g_{pq} и обращается в нуль вне некоторого компактного множества. Тогда функция I также достаточное число раз непрерывно дифференцируема по параметрам τ_p, φ_p, $p=2, 3, \ldots, n$ и обращается в нуль вне некоторого компактного множества в $2(n-1)$-мерном пространстве $\{\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$. Следовательно, можно в формуле (27.3) применить дифференциальный оператор L под знаком интеграла. В силу формулы (26.82), для этого оператора мы получаем тогда

$$LT = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^{2(n-1)}} \times$$

$$\times \sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int S(T_x)\, \omega(\chi)\, e^{-i(\tau_2\rho_2+\cdots+\tau_n\rho_n+m_2\varphi_2+\cdots+m_n\varphi_n)} d\tau_2 \ldots d\tau_n,$$

где (27.4)

$$\omega(\chi) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} [(\rho_p - \rho_q)^2 + (m_p - m_q)^2], \; \rho_p = m_p = 0. \qquad (27.5)$$

С другой стороны, элементу $\delta = e$ группы D отвечают значения параметров $\tau_2 = \tau_3 = \cdots = \tau_n = 0$; $\varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = \varphi_n = 0$; поэтому

$$(LI)_{\delta=e} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^{2(n-1)}} \sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int S(T_x)\, \omega(\chi)\, d\tau_2 \ldots d\tau_n. \qquad (27.6)$$

Сравнение с формулой (26.83) дает следующую теорему:

Теорема 19. *Если функция $x(g)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема по параметрам g_{pq} и обращается в нуль* *вне некоторого компактного множества, то имеет место формула*

$$x(e) = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!\,(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int S(T_x)\,\omega(\chi)\,d\tau_2 \ldots d\tau_n, \tag{27.7}$$

где $\omega(\chi)$ — *функция, определенная формулой* (27.5), $S(T_x)$ — *след оператора* $T_x = \int x(g)\,T_g\,d\mu(g)$.

2. Вывод аналога формулы Планшереля. Обозначим через $C^{(N)}$, класс функций $x(g)$ N раз непрерывно дифференцируемых по параметрам g_{pq} и равных нулю вне некоторого компактного множества, где $N = n(n-1)$. Если $x(g) \in C^{(N)}$, то и функция

$$y(g) = (x^* \cdot x)(g) = \int x\overline{(g_1 g^{-1})}\,x(g_1)\,d\mu(g_1) \tag{27.8}$$

принадлежит множеству $C^{(N)}$.

Применим к этой функции формулу (27.7); так как

$$T_y = T_{x^* x} = T_x^* T_x$$

и, в силу (27.8),

$$y(e) = \int |x(g)|^2\,d\mu(g),$$

то формула (27.7) принимает вид

$$\int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!\,(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int S(T_x^* T_x)\,\omega(\chi)\,d\rho_2 \ldots d\rho_n. \tag{27.9}$$

Это и есть аналог формулы Планшереля.

Напомним (см. (19.31)), что

$$S(T_x^* T_x) = \int |K(z_1, z_2, \chi)|^2\,d\mu(z_1)\,d\mu(z_2),$$

где $K(z_1, z_2, \chi)$ — ядро оператора T_x, определяемое формулой

$$K(z_1, z_2, \chi) = \int x(z^{-1}\delta\zeta z)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi(\delta)\,d\mu(\delta)\,d\mu(\zeta)\,d\mu(z). \tag{27.10}$$

Формула (27.9) была нами выведена для достаточно гладких функций $x(g)$; покажем, как расширить область ее применимости.

Обозначим через $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ гильбертово пространство всех функций $x(g)$ с суммируемым квадратом на группе $\mathfrak{G}$, в котором скалярное произведение определяется равенством

$$(x_1, x_2) = \int x_1(g)\,\overline{x_2(g)}\,d\mu(g). \tag{27.11}$$

Далее, обозначим через $\mathfrak{H}_k$ совокупность всех функций $K(z_1, z_2, \chi)$

таких, что

$$\sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int \left[\int |K(z_1, z_2, \chi)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2)\right] \omega(\chi) d\rho_2 \ldots d\rho_n < +\infty. \tag{27.12}$$

Если ввести для таких функций скалярное произведение, полагая

$$(K_1, K_2) = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!\,(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \times$$

$$\times \sum_{m_2, \ldots, m_n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \left[\int K_1(z_1, z_2, \chi) \overline{K_2(z_1, z_2, \chi)}\right] \omega(\chi) d\rho_2 \ldots d\rho_n, \tag{27.13}$$

то $\mathfrak{H}_k$ становится гильбертовым пространством.

Формула (27.9) означает тогда, что переход от функции $x(g)$ к функции $K(z_1, z_2, \chi)$, описанный равенством (27.10), есть изометрическое отображение множества $C^{(N)}$ в пространство $\mathfrak{H}_k$. С другой стороны, множество $C^{(N)}$ плотно в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ в смысле нормы в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$.

Отсюда, повторяя обычные рассуждения, получаем следующую теорему:

Теорема 20. *Для любой функции $x(g)$ с суммируемым квадратом на группе $\mathfrak{G}$ интеграл*

$$K(z_1, z_2, \chi) = \int x(z^{-1}\delta\zeta z)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\, \chi(\delta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta)\, d\mu(z) \tag{27.14}$$

сходится в смысле нормы

$$\|K\|^2 = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!\,(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \times$$

$$\times \sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \left[\int |K(z_1, z_2, \chi)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2)\right] \omega(\chi) d\rho_2 \ldots d\rho_n, \tag{27.15}$$

где

$$\omega(\chi) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} [(\rho_p - \rho_q)^2 + (m_p - m_q)^2], \quad \rho_1 = m_1 = 0. \tag{27.16}$$

При этом имеет место равенство

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!\,(2\pi)^{(n-1)(n+2)}} \times$$

$$\times \sum_{m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \left[\int |K(z_1, z_2, \chi)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2)\right] \omega(\chi) d\rho_2 \ldots d\rho_n. \tag{27.17}$$

Примечание. Интеграл

$$\int |K(z_1, z_2, \chi)|\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)$$

есть след оператора $T_x^* T_x$; следовательно, это выражение не изменяется при переходе от характера χ к характеру χ_s, определенному формулой

$$\chi_s(\delta) = \chi(\delta_s),$$

где s — произвольная подстановка диагональных элементов матрицы δ, а δ_s — диагональная матрица, которая получается в результате этой подстановки (см. § 23). Внешний интеграл и сумма в (27.17) есть интеграл по всей группе характеров X группы D. В силу только что сказанного, X можно разбить на $n!$ частей X_s, которые получаются друг из друга преобразованием $\chi \to \chi_s$, причем интегралы

$$\int\limits_{X_s} \left[\int |K(z_1, z_2, \chi)|^2 d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\right] d\mu(\chi)$$

друг другу равны. Поэтому (27.17) можно переписать в виде *

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^{(n-1)(n-2)}} \int\limits_{X_e} \left[\int |K(z_1, z_2, \chi)|^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2)\right] \omega(\chi)\, d\mu(\chi). \quad (27.18)$$

Обозначим через H гильбертово пространство всех функций

$$K(z_1, z_2, \chi) \qquad z_1, z_2 \in Z, \qquad \chi \in X_e$$

с нормой $\|K\|$, определенной формулой

$$\|K\|^2 = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi)^{(n-1)(n-2)}} \int\limits_{X_e} \left[\int |K(z_1, z_2, \chi)|^2 d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\right] \omega(\chi)\, d\mu(\chi).$$

Равенство (27.18) устанавливает изометрическое соответствие между пространствами $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ и H. Оказывается, что:

Образ пространства $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ при соответствии $x(g) \sim K(z_1, z_2, \chi)$ есть все пространство H.

Этот результат непосредственно вытекает из следующей общей теоремы о представлениях, которая является континуальным аналогом леммы Шура и которую мы приводим здесь без доказательства.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое бикомпактное пространство, $\sigma(\Delta)$ — некоторая, вполне аддитивная мера в $\mathfrak{A}$. Пусть каждому $\alpha \in \mathfrak{A}$ поставлено в соответствие неприводимое представление $T_{\alpha;\,\chi}$ в одном и том же пространстве $\mathfrak{H}$ нормированного кольца с инволюцией R так, что выполнены следующие условия:

1° *Операторы $T_{\alpha;\,\chi}$ вполне непрерывны при любых α и χ,*

2° *Оператор $T_{\alpha;\,\chi}$ есть непрерывная функция α,*

3° *Если $\alpha \neq \beta$, то представления $T_{\alpha;\,\chi}$ и $T_{\beta;\,\chi}$ неэквивалентны.*

---

* Пользуемся случаем указать, что в кратком сообщении об этом последнем результате в ДАН [11] вкралась ошибка в выражении для множителя перед суммой в (27.17).

Пусть H — *гильбертово пространство всех измеримых вектор-функций* $\xi = \{\xi_\alpha\}$, $\xi_\alpha \in \mathfrak{H}$ *с нормой, определенной формулой*

$$\| \xi \| = \int \| \xi_\alpha \|^2 \, d\sigma(\Delta_\alpha).$$

Если тогда $\xi^0 = \{\xi_\alpha^0\}$ *элемент из* H *такой, что* $\xi_\alpha^0 \neq 0$ *почти всюду на* $\mathfrak{A}$, *то элементы* ξ *вида* $\xi = \{T_{\alpha;\,\chi}\xi_\alpha^0\}$, $\chi \in R$ *образуют множество, плотное в* H.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ $\mathfrak{G}$

В первой части были подробно рассмотрены неприводимые унитарные представления одного из четырех больших классов простых групп Ли, именно, комплексной унимодулярной группы. Оказывается, что многие из результатов, полученных в части I, используются при получении аналогичных результатов для остальных трех классов групп и ряд рассуждений части I переносится без существенных изменений на остальные три класса. Поэтому мы и рассмотрели сначала комплексную унимодулярную группу.

Напомним определение четырех классов простых групп. Каждая из этих групп есть группа линейных преобразований с определителем равным 1 в линейном пространстве R_m комплексной размерности m. Группа всех преобразований с определителем равным 1 есть комплексная унимодулярная группа m-го порядка; она обозначается через A_{m-1}. При $m = 2, 3, 4, \ldots$ получается первый класс простых групп.

Группа всех преобразований с определителем равным 1, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную симметрическую форму, называется *ортогональной группой*; при m нечетном $m = 2n + 1$, эта группа обозначается через B_n; при m четном $m = 2n$, она обозначается через D_n.

Группа всех преобразований в четномерном пространстве ($m = 2n$) с определителем равным 1, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную кососимметрическую форму, называется *симплектической группой* и обозначается через C_n.

В дальнейшем, если не оговорено особо, буква $\mathfrak{G}$ будет обозначать любую из этих групп.

Как и в части I, пространство представления каждой из этих групп строится в виде пространства функций на том или ином многообразии Ξ, причем группа $\mathfrak{G}$ оказывается транзитивной группой гомеоморфных преобразований многообразия Ξ. Поэтому многообразие Ξ можно рассматривать как пространство классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по некоторой его подгруппе, которую, как и в части I, обозначим через K.

Оказывается, что при надлежащем выборе базиса в пространстве R_m группа K, как и в части I, определяется как группа всех матриц $k = \|k_{pq}\|$ из группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям:

$$k_{pq} = 0 \qquad \text{при} \qquad p > q.$$

Следует, однако, отметить, что в отличие от случая комплексной унимодулярной группы A_{m-1}, рассмотренного в части I, в случае групп остальных трех классов не все параметры k_{pq}, $p < q$ будут независимы друг от друга. Например, для ортогональных групп надо потребовать, чтобы матрица k также была ортогональной, что накладывает новые условия на элементы k_{pq}.

Оказывается далее, что совершенно аналогично можно построить и остальные подгруппы, рассмотренные в части I. На эти подгруппы без существенных изменений переносятся результаты части I, в связи с чем и представления групп любого из остальных трех классов строятся совершенно аналогичным образом.

План части II несколько отличается от плана части I. Именно, в первых двух параграфах мы даем описание всех рассматриваемых подгрупп и алгебраических соотношений между ними, а также всех интегральных соотношений, после чего в следующих параграфах мы переходим к описанию самих представлений.

Глава VII

Основная серия представлений группы $\mathfrak{G}$

§ 28. Некоторые подгруппы группы $\mathfrak{G}$; канонические разложения

1. Выбор базиса. Пусть $\mathfrak{G}$ — ортогональная или симплектическая группа линейных преобразований в пространстве R_m. По определению, $\mathfrak{G}$ есть группа всех линейных преобразований в пространстве R_m с определителем равным 1, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную билинейную форму

$$\varphi(\xi, \eta), \qquad \xi, \eta \in R_m, \tag{28.1}$$

симметрическую, если $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа, и кососимметрическую, если $\mathfrak{G}$ — симплектическая группа.

Обозначим через s_0 матрицу формы φ в некотором базисе.

Как известно (см., например, [19] стр. 74), можно в R_m выбрать базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ так, что матрица s_0 формы φ в этом базисе в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$ принимает вид

$$s_0 = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}, \tag{28.2}$$

а в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$

$$s_0 = \left(\begin{array}{ccc:ccc} & & & & & -1 \\ & & & & -1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}\right), \tag{28.3}$$

где все остальные места в (28.2) и (28.3) заняты нулями и число $+1$ и -1 в случае (28.3) одно и то же и равно n.

Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$; $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ — координатное представление векторов из R_m в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, то, полагая

$$(\xi, \eta) = \sum_k \xi_k \eta_k, \tag{28.4}$$

имеем:

$$\varphi(\xi, \eta) = (s_0 \xi, \eta). \tag{28.5}$$

Найдем условие инвариантности формы φ по отношению к преобразованию с матрицей g; в силу (28.5), это условие имеет вид

$$(s_0 g \xi, g\eta) = (s_0 \xi, \eta).$$

Отсюда $g' s_0 g = s_0$, т. е.

$$g'^{-1} = s_0 g s_0^{-1}, \tag{28.6}$$

где g' — транспонированная матрица. Таким образом,

I. *Группа* $\mathfrak{G}$ *состоит из тех и только тех матриц порядка* m ($m = 2n + 1$ или $m = 2n$) *с определителем равным* 1 (т. е. тех элементов g унимодулярной группы A_{m-1}), *которые удовлетворяют условию* (28.6).

Другими словами,

II. *В группе* $\mathfrak{G} \subset A_{m-1}$ *автоморфизм* $g \to g'^{-1}$ *группы* A_{m-1} *является внутренним автоморфизмом* $g \to s_0 g s_0^{-1}$.

В дальнейшем нам часто удобно будет пользоваться условием (28.6) в следующей форме

$$g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0. \tag{28.6a}$$

Запишем теперь условие (28.6) в матричной форме; для этого перенумеруем базис в пространстве R_m следующим образом:

$$\{e_{-n}, e_{-n+1}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ при } m \text{ нечетном: } m = 2n + 1, \tag{28.7}$$

$$\{e_{-n}, e_{-n+1}, \ldots, e_{-1}, e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ при } m \text{ четном } m = 2n. \tag{28.8}$$

Преобразование $g \to s_0 g s_0^{-1}$ означает тогда переход

$$g_{pq} \to g_{-p, -q}$$

для ортогональной группы, и

$$g_{pq} \to \operatorname{sign}(pq)\, g_{-p, -q}$$

для симплектической группы. Поэтому условие (28.6), т. е. условие $g' s_0 g s_0^{-1} = e$, означает, что

$$\sum_j g_{jp} g_{-j, -q} = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq q, \\ 1 & \text{при } p = q \end{cases} \tag{28.9a}$$

для ортогональной группы и

$$\sum_j \operatorname{sign}(jq)\, g_{jp}\, g_{-j,\,-q} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq q, \\ 1 & \text{при} \quad p = q \end{cases} \tag{28.9b}$$

для симплектической группы.

2. Определение основных подгрупп. Определим теперь в группе $\mathfrak{G}$ подгруппы, аналогичные подгруппам K, Z, ... для унимодулярной группы.

Именно, группа $\mathfrak{G}$ есть (ортогональная или симплектическая) группа матриц порядка m ($m = 2n+1$, или $m = 2n$); обозначим через A_{m-1} унимодулярную группу порядка m. Подгруппы K, Z, ..., построенные в §§ 2 и 6, мы снабдим теперь индексом A, чтобы подчеркнуть, что они построены для унимодулярной группы.

Подгруппы K, $\boldsymbol{Z}$, H, $\boldsymbol{Z}$, ... определяются как совокупность тех элементов групп K_A, $\boldsymbol{Z}_A$, H_A, $\boldsymbol{Z}_A$, ..., которые принадлежат группе $\mathfrak{G}$.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} K = \mathfrak{G} \cap K_A, \quad \boldsymbol{Z} = \mathfrak{G} \cap \boldsymbol{Z}_A, \quad Z = \mathfrak{G} \cap Z_A, \quad H = \mathfrak{G} \cap H_A, \\ D = \mathfrak{G} \cap D_A, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{U}_A, \quad \Gamma = \mathfrak{G} \cap \Gamma_A, \end{aligned}\right\} \tag{28.10}$$

т. е. группы K, $\boldsymbol{Z}$ состоят из тех и только тех матриц групп K_A, $\boldsymbol{Z}_A$, ... соответственно, которые удовлетворяют условиям (28.9a) или (28.9b).

Например, группа K есть группа всех унимодулярных матриц $k = \|k_{pq}\|$, удовлетворяющих условиям (28.9a), в случае ортогональной группы, или условиям (28.9b), в случае симплектической группы, и таких, что

$$k_{pq} = 0 \qquad \text{при} \qquad p > q.$$

Переходим теперь к рассмотрению канонических разложений, аналогичных каноническим разложениям в части I. Идея получения таких разложений в группе $\mathfrak{G}$, например, разложения $g = kz$ состоит в следующем. Мы пользуемся аналогичным разложением $g = kz$ для унимодулярной группы и затем, пользуясь единственностью разложения, доказываем, что множители в этом разложении (k и z) в нашем примере также принадлежат группе $\mathfrak{G}$.

3. Разложение элементов группы H.

III. *Всякий элемент h группы H можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$h = \delta z, \qquad \delta \in D, \qquad z \in Z, \tag{28.11}$$

а также в виде

$$h = z\delta, \qquad \delta \in D, \qquad z \in Z. \tag{28.12}$$

Доказательство. Так как $h \in H_A$, то, в силу п. 2 § 3, имеет место разложение

$$h = \delta z, \qquad \text{где} \qquad \delta \in D_A, \qquad z \in Z_A, \tag{28.13}$$

в котором δ и z определяются единственным образом.

Поэтому достаточно доказать, что эти матрицы δ и z удовлетворяют соотношению $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$.

По условию, матрица h удовлетворяет этому соотношению, т. е.

$$h = s_0^{-1} h'^{-1} s_0.$$

Подставляя сюда δz вместо h, получим:

$$\delta z = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \cdot s_0^{-1} z'^{-1} s_0.$$

В этом последнем равенстве, как легко проверить непосредственно

$$s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \in D_A, \qquad s_0^{-1} z'^{-1} s_0 \in Z_A.$$

Следовательно, в силу единственности разложения (28.13), должно быть

$$\delta = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0, \qquad z = s_0^{-1} z'^{-1} s_0.$$

4. Разложение элементов группы K. Аналогично можно доказать, что:

IV. *Всякий элемент* k *группы* K *можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \delta\zeta \quad \delta \in D, \quad \zeta \in \mathbf{Z}, \tag{28.14}$$

а также в виде

$$k = \zeta\delta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in \mathbf{Z}. \tag{28.15}$$

5. Разложение вида $g = kz$. Обозначим через g_p, $p = n+1, \ldots, n$ минор матрицы g, составленный из строк и столбцов с номерами $p, p+1, \ldots, n$.

V. *Между минорами* g_p *имеет место соотношение*

$$g_{-p} = \pm (g_{p+1}), \quad 0 \leqslant p \leqslant n-1. \tag{28.16}$$

Доказательство. Согласно известному тождеству между минорами данной и присоединенной матрицы

$$g_{-p} = \begin{vmatrix} A_{-n,\,-n}, & A_{-n,\,-n+1}, & \ldots, & A_{-n,\,-p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{-p-1,\,-n}, & A_{-p-1,\,-n+1}, & \ldots, & A_{-p-1,\,p-1} \end{vmatrix}, \tag{28.17}$$

где A_{pq} — алгебраическое дополнение элемента g_{pq} в матрице g. С другой стороны, соотношение $g'^{-1} = s_0 g s_0^{-1}$ означает, что $A_{pq} = \pm g_{-p,\,-q}$; комбинируя это равенство с (28.17), получим требуемое соотношение (28.16).

VI. *Если все миноры* g_m, $m=1,2,\ldots,m$ *матрицы* $g\in\mathfrak{G}$ *отличны от нуля, то ее можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g=kz,\quad k\in K,\quad z\in Z, \tag{28.18}$$

а также в виде

$$g=\zeta h,\quad \zeta\in\mathbf{Z},\quad h\in H. \tag{28.19}$$

Доказательство. В силу соотношения (28.16), будет также $g_{-m}\neq 0$, $0\leqslant m\leqslant n-1$. Поэтому, согласно теореме 1 п. 3 § 3, имеют место, и притом единственные, разложения

$$g=kz,\quad k\in K_A,\quad z\in Z_A, \tag{28.20}$$

$$g=\zeta h,\quad \zeta\in\mathbf{Z}_A,\quad h\in H_A. \tag{28.21}$$

Остается только показать, что все эти элементы удовлетворяют условию $g=s_0^{-1}g'^{-1}s_0$. Элемент g, как элемент группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяет этому условию. В силу (28.20), это означает, что

$$g=kz=s_0^{-1}k'^{-1}s_0\cdot s_0^{-}\ z'^{-1}s_0. \tag{28.22}$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$s_0^{-1}k'^{-1}s_0\in K_A,\quad s_0^{-1}z'^{-1}s_0\in Z_A.$$

Поэтому из (28.22), в силу единственности разложения (28.20), следует, что

$$k=s_0^{-1}k'^{-1}s_0,\quad z=s_0^{-1}z'^{-1}s_0.$$

Аналогично доказывается, что элементы ζ и h в разложении (28.19) также удовлетворяют условию $g=s_0^{-1}g'^{-1}s_0$.

Из предложения VI следует, что исключительные элементы g, для которых неприменимы разложения (28.18), (28.19), образуют в $\mathfrak{G}$ многообразие низшей размерности.

Так как каждое из разложений (28.18), (28.19) есть одновременно разложение в унимодулярной группе, то для элементов k_{pq}, z_{pq} и ζ_{pq}, h_{pq} матриц k, z и ζ, h в этих разложениях остаются в силе формулы п. 3 § 2.

6. Разложение вида $g=ku$.

VII. *Всякий элемент* $g\in\mathfrak{G}$ *можно представить в виде*

$$g=ku,\quad k\in K,\quad u\in\mathfrak{U}. \tag{28.23}$$

Если $g=k_1u_1$ — *другое такое разложение, то*

$$k_1=k\gamma;\quad u_1=\gamma^{-1}u,\quad \gamma\in\Gamma. \tag{28.24}$$

Доказательство. В силу предложения I п. 1 § 6 имеет место разложение

$$g=ku,\ \text{где}\ k\in K_A,\quad u\in\mathfrak{U}_A; \tag{28.25}$$

это разложение единственно при дополнительном условии

$$k_{pp} > 0. \tag{28.26}$$

Докажем, что при условии $k_{pp} > 0$ матрицы k и u удовлетворяют соотношению (28.6а). Так как g этому соотношению удовлетворяет, то

$$ku = s_0^{-1} k'^{-1} s_0 \cdot s_0^{-1} u'^{-1} s_0. \tag{28.27}$$

С другой стороны, $s_0^{-1} k'^{-1} s_0$ есть элемент группы K_A, также удовлетворяющий условию $k_{pp} > 0$; кроме того, $s_0^{-1} u'^{-1} s_0 \in \mathfrak{U}$, ибо s_0 — унитарная матрица. Поэтому из (28.27) следует, что $k = s_0^{-1} k'^{-1} s_0$, $u = s_0^{-1} u'^{-1} s_0$. Разложение (28.23) тем самым доказано.

Если $g = k_1 u_1$ — другое разложение вида (28.23), то, в силу доказанного в п. 1 § 6,

$$k_1 = k\gamma, \quad u_1 = \gamma^{-1} u, \quad \text{где} \quad \gamma \in \Gamma_A.$$

Но k_1, k, u_1, $u \in \mathfrak{G}$; следовательно, также $\gamma \in \mathfrak{G}$; отсюда $\gamma \in \Gamma$.

7. Разложение вида $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$.

VIII. *Всякий элемент $k \in K$ с различными собственными значениями можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \zeta^{-1} \delta\zeta, \quad \zeta \in \mathbf{Z}, \quad \delta \in D. \tag{28.28}$$

Доказательство. В силу предложения I п. 1 § 20, имеет место, и притом единственное, разложение

$$k = \zeta^{-1} \delta\zeta, \quad \zeta \in \mathbf{Z}_A, \quad \delta \in D_A. \tag{28.29}$$

Остается показать, что ζ, δ удовлетворяют условию $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$. Матрица k, как элемент группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяет этому условию; следовательно,

$$k = \zeta^{-1} \delta\zeta = s_0^{-1} k'^{-1} s_0 = (s_0^{-1} \zeta'^{-1} s_0)^{-1} \cdot s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \cdot (s_0^{-1} \zeta'^{-1} s_0).$$

В силу единственности разложения (28.29) и соотношений

$$s_0^{-1} \zeta'^{-1} s_0 \in \mathbf{Z}_A, \quad s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \in D_A$$

отсюда следует, что

$$\zeta = s_0^{-1} \zeta'^{-1} s_0, \quad \delta = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0.$$

8. Разложение вида $g = z^{-1}kz$. Перейдем теперь к выводу разложения вида $g = z^{-1} kz$. Прежде всего сделаем следующее замечание:

Если $g \in \mathfrak{G}$ и если λ — собственное значение матрицы g, то λ^{-1} есть также собственное значение этой матрицы.

Действительно, из соотношения $g'^{-1} = s_0 g s_0^{-1}$ следует, что матрицы g'^{-1} и g имеют одни и те же собственные значения; с другой стороны, если λ — собственное значение матрицы g, то λ^{-1} — собственное значение матрицы g'^{-1}.

Пусть теперь g — матрица из группы $\mathfrak{G}$ с различными собственными значениями. Согласно замечанию II п. 2 § 20, ее можно тогда представить в виде

$$g = x^{-1}\delta x, \tag{28.30}$$

где δ — диагональная матрица из собственных значений матрицы g, написанных в произвольном порядке, а $x = \| x_{pq} \|$ — унимодулярная матрица. Если при этом

$$\begin{vmatrix} x_{pp} & x_{p,\,p+1} & \dots & x_{pn} \\ x_{p+1,\,p} & x_{p+1,\,p+1} & \dots & x_{p+1,\,n} \\ x_{np} & x_{n,\,p+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad p = -n+1, \; -n, \dots, n, \tag{28.31}$$

то, в силу III п. 2 § 20, матрицу g можно также представить в виде

$$g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta\zeta z, \quad z \in Z_A, \quad \zeta \in \mathbf{Z}_A, \quad \delta \in D_A, \tag{28.32}$$

и для заданной матрицы δ элементы ζ и z определяются из (28.32) единственным образом.

Покажем, что порядок диагональных элементов в матрице δ можно выбрать так, чтобы $\delta \in \mathfrak{G}$, т. е. чтобы матрица δ удовлетворяла условию $\delta'^{-1} = s_0 \delta s_0^{-1}$. Действительно, это условие в матричной записи принимает вид

$$\delta_p^{-1} = \delta_{-p}; \tag{28.33}$$

в силу сделанного нами выше замечания о собственных значениях матрицы g, надлежащей их нумерацией можно добиться выполнения этого условия.

Докажем, что при $\delta \in \mathfrak{G}$ также тогда $z \in \mathfrak{G}$, $\zeta \in \mathfrak{G}$. Матрицы g и δ удовлетворяют условию $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$; отсюда, в силу (28.32),

$$\begin{aligned} g = z^{-1}\zeta^{-1}\delta\zeta z &= (s_0^{-1} z'^{-1} s_0)^{-1} (s_0^{-1}\zeta'^{-1} s_0)^{-1} s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 (s_0^{-1}\zeta'^{-1} s_0)(s_0^{-1} z'^{-1} s_0) = \\ &= (s_0^{-1} z'^{-1} s_0)^{-1} (s_0^{-1}\zeta'^{-1} s_0)^{-1} \delta (s_0^{-1}\zeta'^{-1} s_0)(s_0^{-1} z'^{-1} s_0). \end{aligned} \tag{28.34}$$

Так как

$$s_0^{-1} z'^{-1} s_0 \in Z_A, \quad s_0^{-1}\zeta'^{-1} s_0 \in \mathbf{Z}_A,$$

то, в силу единственности разложения (28.32) при заданной матрице δ из (28.34), следует, что

$$z = s_0^{-1} z'^{-1} s_0, \quad \zeta = s_0^{-1}\zeta'^{-1} s_0,$$

следовательно, $z \in \mathfrak{G}$ и $\zeta \in \mathfrak{G}$.

Положим теперь в (28.32) $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$; так как $\delta \in D$, $\zeta \in \mathbf{Z}$, то $k \in K$. Тем самым мы получаем для матрицы $g \in \mathfrak{G}$ разложение

$$g = z^{-1} k z, \quad z \in Z, \quad k \in K. \tag{28.35}$$

По доказанному в III п. 2, это разложение единственно при заданном порядке собственных значений матрицы g на главной диагонали матрицы k.

Отсюда следует, что имеется столько различных разложений вида (28.35), сколько есть различных способов нумерации собственных значений λ_p матрицы g, удовлетворяющих условию

$$\lambda_p \lambda_{-p} = 1, \tag{28.36}$$

т. е. сколько есть подстановок этих собственных значений, не нарушающих соотношения (28.36). Такими подстановками являются: а) транспозиции $(p, -p)$ собственных значений λ_p, λ_{-p}; б) произвольные подстановки пар $(\lambda_1, \lambda_{-1})$, $(\lambda_2, \lambda_{-2}), \ldots, (\lambda_n, \lambda_{-n})$; в) всевозможные произведения подстановок вида а) и б). Очевидно, этим исчерпываются все подстановки, не нарушающие соотношения (28.36); поэтому их число равно

$$2^n . n!$$

Итак, доказано следующее предложение:

IX. *Всякую матрицу* $g \in \mathfrak{G}$ *с различными собственными значениями, удовлетворяющую условию* (28.31), *можно представить в виде*

$$g = z^{-1} kz, \quad z \in Z, \quad k \in K. \tag{28.37}$$

При этом k_{pp} — *собственные значения матрицы* g, *расположенные в произвольном порядке, удовлетворяющем условию*

$$k_{-p,\,-p} k_{pp} = 1. \tag{28.38}$$

При заданном таком порядке матрицы z *и* k *определяются единственным образом. Число различных разложений вида* (28.47) *данной матрицы* g *равно* $2^n n!$.

Из этого предложения следует, что исключительные элементы g, для которых разложение (28.37) неприменимо, образуют в $\mathfrak{G}$ многообразие низшей размерности.

9. Разложение вида $g = u_1 \varepsilon u_2$. Как было показано в п. 1 § 24, всякую унимодулярную матрицу g можно представить в виде

$$g = u_1 \varepsilon u_2, \tag{28.39}$$

где u_1, u_2 — унитарные унимодулярные матрицы, а ε — диагональная матрица с положительными диагональными элементами, квадраты которых являются собственными значениями матрицы

$$gg^* = u_1 \varepsilon^2 u_1^*, \tag{28.40}$$

записанными в произвольном порядке.

Докажем, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы $\varepsilon \in \mathfrak{G}$. Для этого сделаем следующее замечание:

X. *Если* $g \in \mathfrak{G}$, *то также** $\bar{g}, g', g^* \in \mathfrak{G}$.

В самом деле, так как s — матрица с действительными элементами, то, переходя в соотношении $g'^{-1} = sgs^{-1}$ к комплексно-сопряженным матрицам, получим: $\bar{g}'^{-1} = s\bar{g}s^{-1}$; следовательно, $\bar{g} \in \mathfrak{G}$.

Далее, применяя операцию $'$ к обеим частям соотношения $g'^{-1} = sgs^{-1}$, получим

$$(g')'^{-1} = s\,g'\,s^{-1},$$

ибо $s' = s^{-1}$; следовательно, $g' \in \mathfrak{G}$. Отсюда $g^* = (\bar{g})' \in \mathfrak{G}$.

Из предложения X следует, что при $g \in \mathfrak{G}$ также $gg^* \in \mathfrak{G}$. Поэтому, в силу замечания в начале п. 8, собственные значения ε_p^2 матрицы gg^* можно расположить в таком порядке, что $\varepsilon \in \mathfrak{G}$.

Докажем теперь, что при $\varepsilon \in \mathfrak{G}$ матрицы u_1, u_2 в (28.39) можно выбрать так, чтобы и они принадлежали группе $\mathfrak{G}$.

Пусть сначала все собственные значения матрицы gg^* различны; тогда при заданном ε всевозможные пары u_1, u_2 в равенстве (28.39) имеют вид $(u_1\gamma,\ \gamma^{-1}u_2)$. Если поэтому все диагональные элементы матрицы u_1 отличны от нуля, то при заданном ε пара (u_1, u_2) однозначно определится условием положительности этих диагональных элементов.

С другой стороны, если $g \in \mathfrak{G}$, то

$$g = s^{-1}g'^{-1}s = s^{-1}u_1'^{-1}s \cdot s^{-1}\varepsilon'^{-1}s \cdot s^{-1}u_2'^{-1}s. \tag{28.41}$$

Так как

$$u_1'^{-1} = \bar{u}_1,\ u_2'^{-1} = \bar{u}_2,\ s^{-1}\varepsilon'^{-1}s = \varepsilon,$$

то из равенства (28.41) следует, что

$$g = u_1\varepsilon u_2 = s^{-1}\bar{u}_1 s \cdot \varepsilon \cdot s^{-1}\bar{u}_2 s, \tag{28.42}$$

причем $s^{-1}\bar{u}_1 s$, $s^{-1}\bar{u}_2 s$ — унитарные матрицы.

Пусть все диагональные элементы матрицы u_1 положительны; тогда все диагональные элементы матрицы $s^{-1}\bar{u}_1 s$ также положительны. Следовательно, в силу единственности пары (u_1, u_2) при условии положительности диагональных элементов матрицы u_1, должно быть

$$u_1 = s^{-1}\bar{u}_1 s;\ u_2 = s^{-1}\bar{u}_2 s,$$

т. е.

$$u_1 = s^{-1}u_1'^{-1}s;\ u_2 = s^{-1}u_2'^{-1}s.$$

Это означает, что $u_1, u_2 \in \mathfrak{G}$.

---

* В этом пункте, в отличие от наших обычных обозначений, $\bar{g}$ обозначает матрицу с комплексно-сопряженными элементами.

Если теперь g — произвольный элемент группы $\mathfrak{G}$, то существует последовательность $g^{(n)} \in \mathfrak{G}$ такая, что $g^{(n)} \to g$ при $n \to \infty$ и что в равенстве

$$g^{(n)} = u_1^{(n)} \varepsilon^{(n)} u_2^{(n)}, \quad \varepsilon^{(n)} \in \mathfrak{G} \tag{28.43}$$

все диагональные элементы матрицы $\varepsilon^{(n)}$ различны, а все диагональные элементы матрицы $u_1^{(n)}$ положительны. В силу только что доказанного, $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)} \in \mathfrak{G}$.

Из компактности группы U_A следует, что для некоторой подпоследовательности, которую снова обозначим через $g^{(n)}$, последовательности $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$ будут стремиться к определенным пределам, которые обозначим через u_1 и u_2. Отсюда следует, что и $\varepsilon^{(n)}$ стремится к некоторому пределу ε. Так как $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)} \in \mathfrak{G}$, то и $u_1, u_2, \varepsilon \in \mathfrak{G}$.

Следовательно, переходя в равенстве (28.43) к пределу, получим

$$g = u_1 \varepsilon u_2, \quad u_1, u_2 \in \mathfrak{U}, \quad \varepsilon \in E.$$

Таким образом имеем следующее предложение.

XI. *Всякую матрицу* $g \in \mathfrak{G}$ *можно представить в виде*

$$g = u_1 \varepsilon u_2, \quad u_1, u_2 \in \mathfrak{U}, \quad \varepsilon \in E. \tag{28.44}$$

При этом диагональные элементы матрицы ε *являются корнями квадратными из собственных значений матрицы* gg^*, *расположенными так, что* $\varepsilon_{-p}\varepsilon_p = 1$. *При таком заданном расположении общий вид пар* (u_1, u_2) *определяется формулой* $(u_1\gamma, \gamma^{-1}u_2)$, *где* γ — *произвольная матрица из* $\mathfrak{U}$, *перестановочная с* ε.

10. Классы смежности по K. Как и в части I, представления основной серии будут в дальнейшем строиться в виде операторов в пространстве функций $f(\tilde{z})$ заданных на правых классах смежности* $\tilde{z}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K.

Совокупность всех таких классов обозначим через $\tilde{Z}$. Умножение справа на элемент g_0 есть преобразование в пространстве $\tilde{Z}$; мы будем писать $\tilde{z}_1 = \tilde{z}\bar{g}_0$, если класс $\tilde{z}_1$ получается из $\tilde{z}$ правым умножением на g_0.

Пространство $\tilde{Z}$ можно описать при помощи группы Z. Именно, если $g \in \tilde{z}$ и если $g = kz$ (см. п. 5), то в классе $\tilde{z}$ содержится элемент z; в силу единственности разложения $g = kz$, такой элемент z может быть только один. Мы отождествим тогда z с $\tilde{z}$; тем самым группа Z заполнит все $\tilde{Z}$, за исключением некоторого многообразия низшей размерности. Преобразование $\tilde{z}_1 = \tilde{z}\bar{g}_0$ можно трактовать как преобразование $z_1 = z\bar{g}_0$ в группе Z. Пространство $\tilde{Z}$ можно также описать при помощи группы $\mathfrak{U}$. Именно, из VII п. 6 § 28 следует, что

* Здесь мы в отличие от части I обозначаем классы смежности через $\tilde{z}$, а не через z', ибо g' обозначает теперь транспонированную матрицу.

в каждом классе $\tilde{z}$ содержится в точности один правый класс смежности $\tilde{u}$ группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе Γ. Мы отождествим тогда $\tilde{z}$ с этим классом $\tilde{u}$. Тем самым $\tilde{Z}$ совпадет с $\mathfrak{U}$. Преобразование $\tilde{z}_1 = \tilde{z}\bar{g}_0$ можно теперь рассматривать как преобразование $\tilde{u}_1 = \tilde{u}\bar{g}_0$ в пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$.

§ 29. Интегральные соотношения

Элементы g группы $\mathfrak{G}$ являются матрицами, удовлетворяющими условию

$$g' s_0 g s_0^{-1} = e; \tag{29.1}$$

следовательно, не все элементы g_{pq} таких матриц являются независимыми. Аналогичное обстоятельство имеет место и для подгрупп $K, Z, \ldots$ группы $\mathfrak{G}$.

Мы покажем здесь, как выбрать в этих группах независимые параметры, и дадим формулы для инвариантной меры через выбранные независимые параметры.

1. Параметры и мера в группе Z.

а) Случай ортогональной группы четного порядка ($m = 2n$, $\mathfrak{G} = D_n$). Будем записывать матрицы $z \in Z$ в виде

$$z = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ a & \eta \end{pmatrix}, \tag{29.2}$$

где η_{-1}, η, a — квадратные матрицы порядка n, 0 — нулевая матрица. Очевидно, η, η_{-1} — матрицы из группы Z для унимодулярной группы A_{n-1} n-го порядка; обозначим эту группу через $Z_{A_{n-1}}$.

Рассмотрим матрицы специального вида

$$x = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ \xi & 1_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \tag{29.3}$$

где 1_n — единичная матрица, ξ — произвольная матрица порядка n.

I. *Всякую матрицу $z \in Z$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$z = xy. \tag{29.4}$$

При этом также $x, y \in Z$.

Доказательство. Перемножая матрицы x и y, получаем

$$xy = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ \xi\eta_{-1} & \eta \end{pmatrix}. \tag{29.5}$$

Это выражение совпадает с матрицей z в (29.2) при $a = \xi\eta_{-1}$, $\xi = a\eta_{-1}^{-1}$, тем самым доказано существование разложения (29.4) и его единственность.

Остается показать, что при $z \in \mathfrak{G}$ также $x, y \in \mathfrak{G}$. Если $z \in \mathfrak{G}$, то $z = s_0^{-1} z'^{-1} s_0$; отсюда, в силу (29.4),

$$z = xy = s_0^{-1} x'^{-1} s_0 \cdot s_0^{-1} y'^{-1} s_0. \tag{29.6}$$

С другой стороны, легко видеть, что $s_0^{-1} x'^{-1} s_0$ и $s_0^{-1} y'^{-1} s_0$ снова являются матрицами вида x и y в (29.3). Отсюда и из единственности разложения (29.4) следует, что

$$x = s_0 x'^{-1} s_0, \quad y = s_0^{-1} y'^{-1} s_0, \tag{29.7}$$

т. е. $x \in \mathfrak{G}$, $y \in \mathfrak{G}$. Предложение I тем самым доказано.

Выясним теперь, при каких условиях матрицы x и y принадлежат группе $\mathfrak{G}$. Запишем матрицу s_0 в виде

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{29.8}$$

где s_1 — матрица порядка n вида

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29.9}$$

Подставляя в условия (29.7) вместо x, y и s_0 их выражения (29.3) и (29.8) в виде матриц и перемножая эти матрицы, получим, после сравнения соответствующих элементов, что условия (29.7) эквивалентны равенствам:

$$\xi = -s_1^{-1} \xi' s_1, \tag{29.10}$$

$$\eta_{-1} = s_1^{-1} \eta'^{-1} s_1, \tag{29.11}$$

$$\eta = s_1^{-1} \eta_{-1}'^{-1} s_1. \tag{29.12}$$

Последнее условие эквивалентно условию (29.11). Действительно, так как $s' = s$, то из (29.11) следует, что

$$\eta = (s_1 \eta_{-1} s_1^{-1})'^{-1} = s_1^{-1} \eta_{-1}'^{-1} s_1;$$

это условие совпадает с (29.12).

Условие (29.11) означает, что из матриц η_{-1}, η независимой является только одна, например, η, а вторая через нее выражается.

Условие (29.10) можно записать в более удобной форме, если положить

$$\hat{\xi} = s_1 \xi. \tag{29.13}$$

Переписывая условие (29.10) в виде $s_1 \xi = -\xi' s_1 = -(s_1 \xi)'$ (напомним, что $s_1' = s_1$), мы видим, что оно эквивалентно условию

$$\hat{\xi}' = -\hat{\xi}, \tag{29.14}$$

т. е. $\hat{\xi}$ — кососимметрическая матрица. Итак, получаем:

Независимыми «параметрами» в группе Z являются матрица η из $Z_{A_{n-1}}$ (группы Z для унимодулярной группы A_{n-1} порядка n) *и кососимметрическая матрица $\hat{\xi}$ порядка n. Соответствующая этим параметрам матрица $z \in Z$ имеет вид*

$$z = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ s_1^{-1}\hat{\xi}\eta_{-1} & \eta \end{pmatrix}, \text{ где } \eta_{-1} = s_1^{-1}\eta'^{-1}s_1. \tag{29.15}$$

Отсюда следует, что в качестве числовых независимых параметров в группе Z можно взять матричные элементы

$$\eta_{pq},\ p > q,\quad \hat{\xi}_{pq},\quad p < q \tag{29.16}$$

матриц η и $\hat{\xi}$, ибо остальные элементы матрицы η_{pq} равны нулю или единице, а остальные элементы матрицы $\hat{\xi}_{pq}$ определяются из условия косой симметрии

$$\hat{\xi}_{qp} = -\hat{\xi}_{pq}. \tag{29.17}$$

Найдем теперь инвариантную меру $d\mu(z)$ в группе Z в параметрах η и $\hat{\xi}$.

Всякую функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = f(\eta, \hat{\xi}), \tag{29.18}$$

поэтому интеграл функции $f(z)$ по мере $d\mu(z)$ должен иметь вид

$$\int f(z)\,d\mu(z) = \int f(\eta, \hat{\xi})\,\omega(\eta, \hat{\xi})\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}), \tag{29.19}$$

где $\omega(\eta, \hat{\xi})$, — некоторая функция от η и $\hat{\xi}$, $d\mu(\eta)$ — инвариантная мера в группе $Z_{A_{n-1}}$, а

$$d\mu(\hat{\xi}) = \prod_{p<q} d\mu(\hat{\xi}_{pq}). \tag{29.20}$$

При этом, как обычно, мы пользуемся обозначением

$$d\mu(\lambda) = d\sigma d\tau \quad \text{при} \quad \lambda = \sigma + i\tau. \tag{29.21}$$

Докажем, что $\omega(\eta, \hat{\xi}) = \text{const}$, т. е. не зависит от η и $\hat{\xi}$. Для этого воспользуемся инвариантностью меры $d\mu(z)$, в силу которой

$$\int f(z)\,d\mu(z) = \int f(x_0 z)\,d\mu(z), \tag{29.22}$$

$$\int f(z)\,d\mu(z) = \int f(zy_0)\,d\mu(z). \tag{29.23}$$

Но, если $z = xy$, то равенства $x_0 z = (x_0 x) y$; $zy_0 = x(yy_0)$ являются разложениями вида (29.4); с другой стороны, умножение матриц x сводится к сложению соответствующих матриц $\hat{\xi}$, а умножение матриц

y — к умножению соответствующих матриц η. Отсюда и из (29.19) следует, что равенства (29.22) и (29.23) можно переписать в виде

$$\int f(\eta, \hat{\xi})\,\omega(\eta, \hat{\xi})\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}) = \int f(\eta, \hat{\xi}+\hat{\xi}_0)\,\omega(\eta, \hat{\xi})\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}), \tag{29.22a}$$

$$\int f(\eta, \hat{\xi})\,\omega(\eta, \hat{\xi})\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}) = \int f(\eta_0\eta, \hat{\xi})\,\omega(\eta, \hat{\xi})\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}). \tag{29.23a}$$

В силу инвариантности мер $d\mu(\hat{\xi})$ и $d\mu(\eta)$ при сдвигах $\hat{\xi}\to\hat{\xi}+\hat{\xi}_0$, $\eta\to\eta_0\eta$ соответственно, правые части (29.22a) и (29.23a) соответственно равны

$$\int f(\eta, \hat{\xi})\,\omega(\eta, \hat{\xi}-\hat{\xi}_0)\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi})$$

и

$$\int f(\eta, \hat{\xi})\,\omega(\eta_0^{-1}\eta, \hat{\xi})\,d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}).$$

Поэтому из (29.22a) и (29.23a) следует, что

$$\omega(\eta, \hat{\xi}) = \omega(\eta, \hat{\xi}-\hat{\xi}_0) = \omega(\eta_0^{-1}\eta, \hat{\xi}),$$

так что ω действительно не зависит от η и $\hat{\xi}$; $\omega = \text{const}$. Нормируя меру $d\mu(z)$ так, что эта константа равна единице, имеем:

Инвариантная мера $d\mu(z)$ *в параметрах* η *и* $\hat{\xi}$ *задается формулой*

$$d\mu(z) = d\mu(\eta)\,d\mu(\hat{\xi}). \tag{29.24}$$

Вспоминая, что

$$d\mu(\eta) = \prod_{p>q} d\mu(\eta_{pq})$$

и определение (29.20) меры $d\mu(\hat{\xi})$, мы получаем выражение для $d\mu(z)$ в комплексных параметрах:

$$d\mu(z) = \prod_{p>q} d\mu(\eta_{pq})\cdot\prod_{p<q} d\mu(\hat{\xi}_{pq}). \tag{29.25}$$

Можно также выбрать независимые параметры среди элементов z_{pq} матрицы z. Прежде всего заметим, что, в силу (29.15),

$$\eta_{pq} = z_{pq} \quad \text{при } p>q>0. \tag{29.26}$$

Рассмотрим, далее, матрицу $c=\hat{\xi}\eta_{-1}$ в (29.15); полагая $\eta_{-1} = \|\eta'_{pq}\|$, $c=\|c_{pq}\|$, имеем

$$c_{pq} = \hat{\xi}_{pq} + \sum_{j=q+1}^{n} \xi_{pj}\eta'_{jq}.$$

При фиксированном p и $q=p+1,\ p+2, \ldots, n$ эти равенства представляют собой линейное преобразование от ξ_{pq} к c_{pq}, матрица которого имеет треугольную форму с единицами на диагонали; следовательно, определитель этой матрицы равен единице.

Отсюда следует, что вместо переменных $\hat{\xi}_{pq}$, $p<q$ можно взять в качестве параметров переменные c_{pq}, $p<q$ и что формула (29.25) для меры $d\mu(z)$ примет в этих переменных вид:

$$d\mu(z)=\prod_{p>q} d\mu(\eta_{pq})\cdot\prod_{p<q} d\mu(c_{pq}). \tag{29.27}$$

С другой стороны, формула (29.15) показывает, что

$$z=\begin{pmatrix}\eta_{-1} & 0\\ s_1^{-1}c & \eta\end{pmatrix}; \tag{29.28}$$

но умножение слева на $s_1^{-1}=s_1$ сводится к подстановке строк матрицы c_{pq}, при которой первая строка занимает последнее место, вторая — предпоследнее место и т. д.; поэтому элементы c_{pq}, $p<q$, которые в матрице c находились под главной диагональю, станут элементами матрицы $s_1^{-1}c$, расположенными под ее диагональю, соединяющей нижний левый угол матрицы с ее верхним правым. Другими словами, эти элементы совпадут с z_{pq}, $p>-q$. Отсюда и из равенств (29.26) следует:

IIa) *Независимыми параметрами в группе Z являются элементы*

$$z_{pq},\quad p>|q|>0 \tag{29.29}$$

матрицы $z\in Z$. В этих параметрах инвариантная мера $d\mu(z)$ в Z задается формулой

$$d\mu(z)=\prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}). \tag{29.30}$$

б) Случай симплектической группы ($\mathfrak{G}=C_n$). Для симплектической группы предыдущие рассуждения повторяются почти дословно. Разница состоит в том, что теперь матрица s_0 имеет вид

$$s_0=\begin{pmatrix}0 & -s_1\\ s_1 & 0\end{pmatrix}, \tag{29.31}$$

в связи с чем $\hat{\xi}$ уже симметрическая матрица (а не кососимметрическая, как в предыдущем случае). Поэтому в качестве параметров для матрицы $\hat{\xi}$ можно взять ее элементы

$$\hat{\xi}_{pq},\quad p\leqslant q. \tag{29.32}$$

Отсюда и из дальнейших рассуждений п. а следует:

II б) *Независимыми параметрами в группе Z являются элементы*

$$z_{pq},\quad p\geqslant|q|>0,\quad p\neq q \tag{29.33}$$

матрицы $z \in Z$. *При этом инвариантная мера* $d\mu(z)$ *в группе* Z *задается формулой*

$$d\mu(z) = d\mu(\eta)\, d\mu(\hat{\xi}) = \prod_{\substack{p \geqslant |q| > 0 \\ p \neq q}} d\mu(z_{pq}). \tag{29.34}$$

в) Случай ортогональной группы нечетного порядка ($\mathfrak{G} = B_n$, $m = 2n+1$). В этом случае матрицы $z \in Z$ мы будем записывать в виде

$$z = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ a & \mu & \eta \end{pmatrix}, \tag{29.35}$$

где η_{-1}, η — попрежнему матрицы из групп $Z_{A_{n-1}}$ (группы Z для унимодулярной группы A_{n-1} порядка n), a — квадратная матрица порядка n, а λ и μ — строка и столбец из n чисел. Рассуждая, как и в п. а, получаем, что матрицу z можно представить в виде произведения

$$z = xy, \tag{29.36}$$

где x и y — матрицы из группы Z вида

$$x = \begin{pmatrix} 1_n & 0' & 0 \\ \eta_0 & 1 & 0 \\ \xi & \xi_0 & 1_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \tag{29.37}$$

Найдем условия, при которых эти матрицы действительно принадлежат группе Z. Для этого запишем матрицу s_0 в виде

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{29.38}$$

где попрежнему s_1 — матрица n-го порядка вида:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим в условие $g'^{-1} = s_0 g s_0$ вместо g последовательно матрицы x и y из (29.37), а вместо s_0 — ее выражение (29.38), перемножим фактически эти матрицы и сравним элементы в левой и правой части полученного равенства. Мы получим тогда, что:

$$\eta_{-1} = -s_1^{-1}\eta'^{-1}s_1; \qquad \eta_0 = -\xi_0' s_1, \qquad s_1\xi' + \xi s_1 + \xi_0\xi_0' = 0. \tag{29.39}$$

Последнее из этих равенств означает, что матрица

$$\hat{\xi} = s_1\xi' + \frac{1}{2}\xi_0\xi_0' \tag{29.40}$$

кососимметрична. Отсюда:

Матрица $z \in Z$ определяется следующими независимыми „параметрами“: матрицей $\eta \in \mathbf{Z}_{A_{n-1}}$, кососимметрической матрицей $\hat{\xi}$ порядка n, и строкой ξ_0 из n чисел.

Повторяя, далее, те же рассуждения, что и в конце п. а, приходим к следующему результату:

II в) *Независимыми параметрами в группе Z являются элементы**

$$z_{pq}, \quad p > |q| \geqslant 0 \tag{29.41}$$

матрицы $z \in Z$. При этом инвариантная мера $d\mu(z)$ в группе Z задается формулой

$$d\mu(z) = \prod_{p > |q| \geqslant 0} d\mu(z_{pq}). \tag{29.42}$$

2. Параметры и мера в группе Z. Группа $\mathbf{Z}$ получается из группы Z, если заменить каждую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ матрицей g'. Поэтому из результатов п. 1 непосредственно следует:

III. *Независимыми параметрами в группе $\mathbf{Z}$ являются элементы*

$$\zeta_{pq}, \quad |p| < q \tag{29.43}$$

матрицы $\zeta \in \mathbf{Z}$ в случае ортогональной группы и элементы*

$$\zeta_{pq}, \quad |p| \leqslant q, \quad p \neq q \tag{29.43a}$$

матрицы $\zeta \in \mathbf{Z}$ в случае симплектической группы.

В первом случае инвариантная мера $d\mu(\zeta)$ в группе $\mathbf{Z}$ задается формулой

$$d\mu(\zeta) = \prod_{|p| < q} d\mu(\zeta_{pq}), \tag{29.44}$$

а во втором случае — формулой

$$d\mu(\zeta) = \prod_{|p| \leqslant q,\, p \neq q} d\mu(\zeta_{pq}). \tag{29.44a}$$

3. Параметры и мера в группе D. Для диагональной матрицы δ условие $\delta'^{-1} = s\delta s^{-1}$ означает, что

$$\delta_{-p} = \delta_p^{-1}; \tag{29.45}$$

* Отметим, что в отличие от ортогональной группы четного порядка, среди этих параметров есть элементы z_{p0}, $p > 0$, ибо неравенство в (29.41) не исключает теперь случая $q = 0$.

в частности, в случае ортогональной группы нечетного порядка мы получаем, что $\delta_0 = \delta_0^{-1}$, так что $\delta_0 = \pm 1$. Условие $\det \delta = 1$ совместно с условиями (29.45) дает тогда, что $\delta_0 = 1$. Поэтому во всех трех случаях:

IV. *Независимыми параметрами в группе D являются диагональные элементы*

$$\delta_p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{29.46}$$

матрицы $\delta \in D$. Инвариантная мера $d\mu(\delta)$ задается в этих параметрах формулой:

$$d\mu(\delta) = \frac{d\mu(\delta_1)}{|\delta_1|^2} \cdot \frac{d\mu(\delta_2)}{|\delta_2|^2} \cdots \frac{d\mu(\delta_n)}{|\delta_n|^2}. \tag{29.47}$$

4. **Параметры в группе** K. В силу (28.14), всякий элемент k можно представить в виде $k = \delta\zeta$; поэтому независимыми параметрами в группе K являются независимые параметры в группах D и $\mathbf{Z}$. Но равенство $k = \delta\zeta$ означает, что

$$k_{pp} = \delta_p, \qquad k_{pq} = \delta_p \zeta_{pq};$$

поэтому, в силу III и IV,

V. *Независимыми параметрами в группе K являются элементы*

$$k_{pp}, \quad p > 0 \quad \text{и} \quad k_{pq}, \quad |p| < q \tag{29.48}$$

матрицы $k \in K$ в случае ортогональной группы и элементы

$$k_{pp}, \quad k_{-p,p}, \quad p > 0; \quad k_{pq} \quad |p| < q \tag{29.48a}$$

матрицы $k \in K$ в случае симплектической группы.

5. **Интегральные соотношения и меры в группе** K.

VI. *В группе K имеют место формулы:*

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \int f(\delta\zeta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta), \tag{29.49}$$

$$\int f(k)\, d\mu_r(k) = \int f(\zeta\delta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta), \tag{29.50}$$

где $d\mu_l(k)$, $d\mu_r(k)$ — лево-и право-инвариантные меры в группе K.

Доказательство. Равенство $k = \delta\zeta$ устанавливает взаимнооднозначное и дифференцируемое соответствие между параметрами k_{pq} и δ_p, ζ_{pq}. Поэтому имеет место равенство вида

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \int f(\delta\zeta)\, \omega(\delta, \zeta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta), \tag{29.51}$$

где $\omega(\delta, \zeta)$ — якобиан перехода от $d\mu_l(k)$ к $d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta)$. Докажем, что $\omega(\delta, \zeta)$ не зависит ни от δ, ни от ζ, т. е. $\omega(\delta, \zeta) = \text{const}$. В силу левой инвариантности меры $d\mu_l(k)$

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \int f(\delta_0 k)\, d\mu_l(k).$$

Отсюда и из инвариантности меры $d\mu(\delta)$, как обычно, получаем, что $\omega(\delta_0^{-1}\delta, \zeta) = \omega(\delta, \zeta)$; следовательно, $\omega(\delta, \zeta)$ не зависит от δ и мы можем положить $\omega(\delta, \zeta) = \omega(\zeta)$.

Далее,

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \int f(\zeta_0 k)\, d\mu_l(k).$$

В силу (29.49), из этого равенства следует:

$$\int f(\delta\zeta)\,\omega(\zeta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta) = \int f(\zeta_0\delta\zeta)\,\omega(\zeta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta) =$$

$$= \int d\mu(\delta) \int f(\delta\cdot\delta^{-1}\zeta_0\delta\zeta)\,\omega(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int d\mu(\delta) \int f(\delta\zeta)\,\omega(\delta^{-1}\zeta_0^{-1}\delta\cdot\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

ибо $\delta^{-1}\zeta_0\delta \in \mathbf{Z}$. Отсюда

$$\omega(\zeta) = \omega(\delta^{-1}\zeta_0\delta\cdot\zeta);$$

следовательно, $\omega(\zeta)$ не зависит от ζ.

Таким образом, $\omega(\zeta) = \mathrm{const}$; нормируя меру $d\mu_l(k)$ так, что эта константа равна единице, получим (29.49). Аналогично доказывается формула (29.50).

Найдем явные выражения для мер $d\mu_l(k)$ и $d\mu_r(k)$. Равенство $k = \delta\zeta$ записывается в параметрах в виде

$$k_{pp} = \delta_p, \qquad k_{pq} = \delta_p\zeta_{pq}.$$

Следовательно, якобиан перехода от k_{pp}, k_{pq} к δ_p, ζ_{pq}, в случае ортогональной группы, равен

$$\prod_{|p|<q} |\delta_p|^2 = 1, \tag{29.52}$$

ибо в этом произведении одинаковое число раз встречаются δ_p и δ_{-p}, произведение которых равно единице.

Отсюда

$$d\mu_l(k) = d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta) = \prod_{p=1}^{n} |\delta_p|^{-2}\, d\mu(\delta_p) \prod_{|p|<q} d\mu(\zeta_{pq}) =$$

$$= \prod_{p=1}^{n} |k_{pp}|^{-2}\, d\mu(k_{pp}) \cdot \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}).$$

В случае симплектической группы вместо выражения (29.52) мы имеем для якобиана выражение

$$\prod_{|p|<q} |\delta_p|^2 \prod_{p=-q} |\delta_p|^2 = \prod_{p=1}^{n} |\delta_{-p}|.$$

Следовательно, в этом случае

$$d\mu_l(k) = \prod_{p=1}^{n} d\mu(k_{pp})\, d\mu(k_{-p,\,p}) \cdot \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}).$$

Таким образом,

VII. *Лево-инвариантная мера в группе К задается формулой*

$$d\mu_l(k) = \prod_{p=1}^{n} |k_{pp}|^{-2} d\mu(k_{pp}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}) \tag{29.53a}$$

в случае ортогональной группы, и

$$d\mu_l(k) = \prod_{p=1}^{n} d\mu(k_{pp}) d\mu(k_{-p,p}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}) \tag{29.53b}$$

в случае симплектической группы.

Применяя аналогичные рассуждения к формуле (29.50), получим:

VIII. *Право-инвариантная мера в группе К задается формулой*

$$d\mu_r(k) = |k_{11}|^{-2} |k_{22}|^{-6} \cdots |k_{nn}|^{-4n+2} \prod_{p=1}^{n} d\mu(k_{pp}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}) \tag{29.54a}$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$d\mu_r(k) = |k_{11}|^{-4} |k_{22}|^{-8} \cdots |k_{nn}|^{-4n} \prod_{p=1}^{n} d\mu(k_{pp}) \prod_{|p|<q} d\mu |k_{pq}| \tag{29.54b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка, и

$$d\mu_r(k) = |k_{11}|^{-4} |k_{22}|^{-8} \cdots |k_{nn}|^{-4n} \prod_{p=1}^{n} d\mu(k_{pp}) d\mu(k_{-p,p}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}) \tag{29.54c}$$

в случае симплектической группы.

Положим

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}. \tag{29.55}$$

Из формул (29.53) и (29.54) следует, что

$$\beta(k) = |k_{22}|^4 |k_{33}|^8 \cdots |k_{nn}|^{4n-4} \tag{29.55a}$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$\beta(k) = |k_{11}|^2 |k_{22}|^6 \cdots |k_{nn}|^{4n-2} \tag{29.55b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка и

$$\beta(k) = |k_{11}|^4 |k_{22}|^8 \cdots |k_{nn}|^{4n} \tag{29.55c}$$

в случае симплектической группы.

6. Параметры, интегральные соотношения и меры в группе H. Так как отображение $g \to g'$ переводит группу K в группу H, то из результатов, полученных в пп. 4, 5, для группы K следует:

IX. *Независимыми параметрами в группе* H *являются элементы*

$$h_{pp},\quad p>0;\qquad h_{pq},\quad p>|q|$$

для ортогональной группы, и

$$h_{pp},\quad h_{p,-p},\quad p>0;\qquad h_{pq},\quad p>|q|$$

для симплектической группы.

Лево-инвариантная мера в группе H *задается формулой*

$$d\mu_l(h)=|h_{11}|^{-2}\,|h_{22}|^{-6}\cdots|h_{nn}|^{-4n+2}\prod_{p=1}^{n}d\mu(h_{pp})\prod_{|q|<p}d\mu(h_{pq})\qquad(29.56a)$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$d\mu_l(h)=|h_{11}|^{-4}\,|h_{22}|^{-8}\ldots|h_{nn}|^{-4n}\prod_{p=1}^{n}d\mu(h_{pp})\prod_{|q|<p}d\mu(h_{pq})\qquad(29.56b)$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка и

$$d\mu_l(h)=|h_{11}|^{-4}\,|h_{22}|^{-8}\ldots|h_{nn}|^{-4n}\prod_{p=1}^{n}d\mu(h_{pp})d\mu(h_{p,-p})\prod_{|q|<p}d\mu(h_{pq})\qquad(29.56c)$$

в случае симплектической группы.

Право-инвариантная мера $d\mu_r(h)$ *в группе* H *задается формулой*

$$d\mu_r(h)=\prod_{p=1}^{n}|h_{pp}|^{-2}\,d\mu(h_{pp})\prod_{|q|<p}d\mu(h_{pq})\qquad(29.57a)$$

для ортогональной группы и

$$d\mu_r(h)=\prod_{p=1}^{n}d\mu(h_{pp})\,d\mu(h_{p,-p})\prod_{|q|<p}d\mu(h_{pq})\qquad(29.57b)$$

для симплектической группы.

При этом имеют место формулы

$$\int f(h)\,d\mu_l(h)=\int f(\delta z)\,d\mu(\delta)\,d\mu(z),\qquad(29.58)$$

$$\int f(h)\,d\mu_r(h)=\int f(z\delta)\,d\mu(\delta)\,d\mu(z).\qquad(29.59)$$

Положим

$$\beta(h)=\frac{d\mu_r(h)}{d\mu_l(h)}.\qquad(29.60)$$

Из формул (29.56) и (29.57) следует тогда, что

$$\beta(h)=|h_{22}|^{4}\,|h_{33}|^{8}\ldots|h_{nn}|^{4n-4}\qquad(29.61a)$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$\beta(h) = |h_{11}|^2 \, |h_{22}|^6 \ldots |h_{nn}|^{4n-2} \tag{29.61b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка и

$$\beta(h) = |h_{11}|^4 \, |h_{22}|^8 \ldots |h_{nn}|^{4n} \tag{29.61c}$$

в случае симплектической группы.

7. Интегральные соотношения на группе $\mathfrak{G}$.

а) Сведéние к интегралу K и Z.

X. *Для интеграла на группе $\mathfrak{G}$ имеют место формулы:*

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(kz)\, d\mu_l(k)\, d\mu(z), \tag{29.62}$$

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(\zeta h)\, d\mu(\zeta)\, d\mu_r(h), \tag{29.63}$$

где $d\mu(g)$ — инвариантная мера в группе $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Равенство $g = kz$ устанавливает взаимно однозначное и дифференцируемое соответствие между параметрами в g и параметрами в k и z. Поэтому имеет место формула вида

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(kz)\, \omega(k, z)\, d\mu_l(k)\, d\mu(z), \tag{29.64}$$

где $\omega(k, z)$ — якобиан перехода от $d\mu(g)$ к $d\mu_l(k)\, d\mu(z)$.

В силу инвариантности меры $d\mu(g)$,

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int g(k_0 g)\, d\mu(g) = \int f(g z_0)\, d\mu(g),$$

отсюда легко следует $\omega(k, z) = \text{const}$. При надлежащей нормировке меры $d\mu(g)$, эта константа равна единице и (29.64) совпадает с (29.62).

Аналогично доказывается (29.63).

Отметим, что при нашей нормировке мера $d\mu(g)$ есть мера, построенная при помощи инфинитезимальных элементов. Это следует из того, что, дифференцируя соотношение $g = kz$, при $k = e$, $z = e$, получаем

$$d_l g = d_l k + d_l z.$$

б) Формула преобразования меры в группе Z. Из формулы (29.62), повторяя дословно рассуждения п. 4 § 4, получаем:

XI. *При переходе от z к $z\overline{g}$ мера $d\mu(z)$ преобразуется по формуле*

$$\frac{d\mu(z\overline{g})}{d\mu(z)} = \beta^{-1}(zg), \tag{29.65}$$

где функция $\beta(g)$ определяется равенством $\beta(kz) = \beta(k)$ (формулу для $\beta(k)$ см. (29.56a), (29.56b), (29.56c)).

в) Сведéние интеграла по группе $\mathfrak{G}$ к интегралу по K и $\mathfrak{U}$.

XII. *Для интеграла по группе $\mathfrak{G}$ имеет место формула*

$$\int f(g)\, d\mu(g) = c \int f(ku)\, d\mu_l(k)\, d\mu(\widetilde{u}), \tag{29.66}$$

где c — некоторая константа.

При условии $\int d\mu(\gamma) = 1$ эта формула эквивалентна формуле

$$\int f(g)\, d\mu(g) = c \int f(ku)\, d\mu_l(k)\, d\mu(u). \tag{29.67}$$

В силу VII п. 6 § 28, доказательство этого предложения является повторением доказательства III п. 2 § 7.

Вычислим константу c для того случая, когда $d\mu(u)$, $d\mu(\widetilde{u})$ пронормированы так, что

$$\int d\mu(u) = 1, \quad \int d\mu(\widetilde{u}) = 1,$$

а $d\mu_l(k)$, $d\mu(g)$ — как в пп. 5 и а.

Прежде всего найдем независимые параметры в группе $\mathfrak{U}$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$; так как u — унитарная матрица, то $\overline{u'} = u^* = u^{-1}$; так как $u \in \mathfrak{G}$, то $u'^{-1} = s_0 u s_0^{-1}$. Подставляя сюда $\overline{u}$ вместо u'^{-1}, получим

$$\overline{u} = s_0 u s_0^{-1},$$

т. е.

$$\overline{u}_{pq} = u_{-p,\,-q} \tag{29.68}$$

в случае ортогональной группы, и

$$\overline{u}_{pq} = \operatorname{sign}(pq)\, u_{-p,\,-q} \tag{29.69}$$

в случае симплектической группы.

Рассмотрим случай ортогональной группы. Тогда в качестве параметров в $\widetilde{\mathfrak{U}}$ можно взять элементы

$$u_{pq}, \quad |p| < q. \tag{29.70}$$

Дифференцируя соотношение $g = ku$, получаем, что при $k = e$, $u = e$:

$$d_r g = d_l k + d_l u. \tag{29.71}$$

Отсюда, как и в п. 5 § 7, получим, что

$$c = \hat{\mu}(\widetilde{\mathfrak{U}}), \tag{29.72}$$

где $d\hat{\mu}(\widetilde{u})$ — мера в параметрах $d_r u_{pq}$, $|p| < q$, $q \geqslant 0$.

Для нахождения $\hat{\mu}(\widetilde{\mathfrak{U}})$ в этом случае мы применим по существу тот же прием, что и в п. 5 § 7.

Пусть $\mathfrak{R}$ — m-мерное комплексное эвклидово пространство, $\{f^0_{-n}, f_{-n+1}, \ldots, f^0_n\}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{R}$, u — оператор, матрица которого в этом базисе совпадает с матрицей $u = \|u_{pq}\|$.

Обозначим через $\mathfrak{V}$ совокупность всех матриц v из группы $\mathfrak{U}$, оставляющих на месте вектор f_{-n}. В силу формул (29.68) и (29.69) все матрицы v имеют вид

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \tag{29.73}$$

где w — матрица из группы $\mathfrak{U}_{m-2}$ порядка $m-2$ ($m = 2n$, или $m = 2n+1$). Правый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе $\mathfrak{V}$ определяется ортом f_n, который матрицами этого класса переводится в орт f^0_{-n}, т. е. определяется первой (или, что то же, последней) строкой этих матриц.

Выберем в каждом таком классе представителя $u^{(f)}$ так, чтобы его элементы были непрерывно дифференцируемыми функциями компонент вектора f и чтобы $u^{(f^0_{-n})} = e$. Всякую матрицу $u \in \mathfrak{U}$ можно представить в виде

$$u = vu^{(f)}, \quad w \in \mathfrak{V}, \tag{29.74}$$

где $f = uf^0_{-n}$; при этом, если $u = e$, то и $w = e$; $u^{(f_{-n})} = e$.

Отсюда, как и в п. 5 § 7, получаем, что в точке $u = e$

$$d_r u = d_r v + d_r u^{(f)}, \tag{29.75}$$

следовательно,

$$d_r u_{-n,\,q} = d_r u^{(f)}_{-n,\,q}, \quad q = -n, -n+1, \ldots, n, \tag{29.76}$$

$$d_r u_{pq} = d_r u^{(f)}_{pq} + d_r w_{pq}, \; -n < p \leqslant 0, \quad p < q. \tag{29.77}$$

Эти выражения $d_r u_{-n,\,q}$, $d_r u_{pq}$ являются полной системой дифференциалов в пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$; следовательно, из равенств (29.76) и (29.77) следует, что

$$d\mu(u) = \Delta d\mu(v),$$

где Δ — определитель, составленный из компонент дифференциалов $d_r u^{(f)}_{-n,\,p}$. Отсюда, повторяя те же рассуждения, что и в п. 5 § 7, находим:

$$\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}) = \frac{1}{(m-1)!}\,\pi^{m-1}\,\hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}_{m-2}). \tag{29.78}$$

Применяя эту формулу к группам $\mathfrak{U}^{(n-1)}, \mathfrak{U}^{(n-2)}, \ldots$, получим, что

$$c = \hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}) = \frac{\pi^{n^2}}{1!\,3!\ldots(2n-1)!} \tag{29.79a}$$

в случае симплектической группы и ортогональной группы четного порядка и

$$c = \hat{\mu}(\widetilde{\mathfrak{U}}) = \frac{2\pi^{n(n+1)}}{2!\,4!\ldots(2n)!} \tag{29.79b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка.

Аналогично можно найти, что

$$\hat{\mu}(\mathfrak{U}) = \frac{2^n \pi^{n^2+n}}{1!\,3!\ldots(2n-1)!} \tag{29.80a}$$

в случае симплектической группы и ортогональной группы четного порядка, и

$$\hat{\mu}(\widetilde{\mathfrak{U}}) = \frac{2^{n+1}\pi^{n^2+2n}}{2!\,4!\ldots(2n)!} \tag{29.80b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка.

г) Соотношение между мерами $d\mu(z)$ и $d\mu(\bar{u})$; формула преобразования меры $d\mu(\widetilde{u})$. Пользуясь формулой (29.66) и повторяя рассуждения п. 3 § 7, получаем:

XIII. *При условии, что z и $\widetilde{u}$ определяют один и тот же класс $\widetilde{z}$, между мерами $d\mu(z)$ и $d\mu(\widetilde{u})$ имеет место соотношение*

$$d\mu(z) = c\beta^{-1}(\widetilde{u})\, d\mu(\widetilde{u}). \tag{29.81}$$

XIV. *При переходе от $\widetilde{u}$ к $\widetilde{u}\bar{g}$ мера $d\mu(\widetilde{u})$ преобразуется по формуле*

$$\frac{d\mu(\widetilde{u}\bar{g})}{d\mu(\widetilde{u})} = \frac{\beta(\widetilde{u}\bar{g}_0)}{\beta(ug_0)}. \tag{29.82}$$

д) Интегральное соотношение, связанное с разложением $g = z^{-1}kz$.

XV. Имеет место формула

$$\int f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int f(g)\,\frac{\sum \varphi(k_g)\beta^{\frac{1}{2}}(k_g)}{D(g)}\,d\mu(g), \tag{29.83}$$

где k_g — матрица k, определяемая разложением $g = z^{-1}k_g z$, а сумма распространяется на все $2^n n!$ различных матриц k_g, которые получаются при данном g. Далее, $D(g)$ — функция, определяемая равенствами:

$$D(g) = D(k) \quad \text{при} \quad g = z^{-1}kz, \tag{29.84}$$

$$D(k) = |k_{22}|^{-2}\,|k_{33}|^{-4}\ldots|k_{nn}|^{-2n+2}\prod_{p>|q|}|k_{pp}-k_{qq}|^2 \tag{29.85a}$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$D(k) = |k_{11}|^{-1}\,|k_{22}|^{-3}\ldots|k_{nn}|^{-2n+1}\prod_{p>|q|}|k_{pp}-k_{qq}|^2 \tag{29.85b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка и

$$D(k) = |k_{11}|^{-2}\,|k_{22}|^{-4}\ldots|k_{nn}|^{-2n}\prod_{p=1}^{n}|k_{pp}-k_{-p,-p}|^2 \times$$
$$\times\prod_{p>|q|}|k_{pp}-k_{qq}|^2 \tag{29.85c}$$

в случае симплектической группы.

Доказательство. Как и в п. 8 § 28, обозначим через S совокупность всех подстановок s чисел $(-n, -n+1, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n)$, переставляющих между собой элементы пар $(-p, p)$ и сами эти пары; напомним, что число этих перестановок равно $n!\ 2^n$.

Обозначим, далее, через K_l совокупность всех элементов $k \in K$ удовлетворяющих условиям

$$|k_{11}| < |k_{22}| < \cdots < |k_{nn}|\,. \tag{29.86}$$

Пусть вообще $s = (p_{-n}, p_{-n+1}, \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — одна из подстановок группы S; обозначим через K_s — совокупность всех элементов $k \in K$ удовлетворяющих условию

$$|k_{p_1p_1}| < |k_{p_2p_2}| < \cdots < |k_{p_np_n}|\,. \tag{29.87}$$

Очевидно, сумма всех множеств K_s исчерпывает почти всю группу K, так что интеграл в левой части (29.83) равен сумме интегралов

$$\int d\mu(z)\int_{K_s} f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k). \tag{29.88}$$

В силу предложения IX п. 8 § 28, при фиксированном s элементы $z^{-1}kz$, $z \in Z$, $k \in K_s$ пробегают по одному разу почти все элементы группы $\mathfrak{G}$, поэтому мы можем свести интеграл (29.88) к интегралу по всей группе $\mathfrak{G}$, если найдем соотношение между мерами $d\mu(g)$, $d\mu(k)$ $d\mu(z)$ при условии $g = z^{-1}kz$.

При фиксированном s равенство $g = z^{-1}kz$, $k \in K$ устанавливает взаимно-однозначное и дифференцируемое соответствие между параметрами в g и в z, k. Поэтому должно иметь место равенство вида

$$\int d\mu(z)\int_{K_s} f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k) = \int f(g)\,\varphi(k_g)\,\omega(g)\,d\mu(g), \tag{29.89}$$

где $k_g \in K_s$ и где $\omega(g)$ — якобиан перехода от $d\mu_l(k)\,d\mu(z)$ к $d\mu(g)$ при условии $g = z^{-1}kz$, $k \in K_s$. Пользуясь инвариантностью мер $d\mu(z)$ и $d\mu(g)$ так же, как и в п. 3 § 20, найдем, что $\omega(z^{-1}gz) = \omega(g)$. Следовательно,

$$\omega(g) = \omega(z^{-1}k_gz) = \omega(k_g) \tag{29.90}$$

и мы можем искать $\omega(g)$ при условии $z=e$. Переписывая равенство $g=z^{-1}kz$ в виде $zg=kz$, дифференцируя обе его части и умножая затем слева на $g^{-1}z^{-1}=z^{-1}k^{-1}$, получим, что при $z=e$

$$d_l g = d_l k + d_l z - k^{-1}\, d_l z k. \tag{29.91}$$

Пусть, например, $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа четного порядка. Запишем равенство (29.91) в независимых матричных элементах; мы получим

$$d_l g_{pq} = \left(1-\frac{k_{qq}}{k_{pp}}\right) d_l z_{pq} - \sum{}' (k^{-1})_{ps}\, d_l z_{st} k_{tq} \quad \text{при } p>|q|, \tag{29.92}$$

$$d_l g_{pq} = d_l k_{pq} - \sum (k^{-1})_{ps}\, d_l z_{st} k_{tq} \quad \text{при } q>|p| \text{ или } p=q>0 \tag{29.93}$$

где $'$ при сумме в (29.92) означает, что в этой сумме исключается одно слагаемое, соответствующее $s=p$, $t=q$.

В равенствах (29.92) и (29.93) не все переменные $d_l z_{st}$ являются независимыми. Найдем поэтому соотношения между $d_l z_{st}$. Нас они интересуют при $z=e$, так что $d_l z = dz$. Дифференцируя равенство

$$z' s_0 z = s_0$$

в точке $z=e$, получим

$$dz' \cdot s_0 + s_0\, dz = 0.$$

Следовательно,

$$s_0\, dz\, s_0^{-1} = -dz'. \tag{29.94}$$

В матричных элементах это означает, что

$$dz_{-p,-q} = -dz_{qp}; \tag{29.95}$$

в частности,

$$dz_{-p,p} = dz_{p,-p} = 0. \tag{29.96}$$

Расположим теперь переменные $d_l g_{pq}$, $d_z z_{pq}$, $p>|q|$ в порядке $p=n, n-1, \ldots$, а при фиксированном p — в порядке $q=-n, -n+1, \ldots$; далее, расположим переменные $d_l g_{pq}$, $d_l k_{pq}$, ($q>|p|$ или $q=p>0$) в каком угодно порядке. Тогда из равенств (29.95), (29.96) следует, что матрица преобразования (29.92), (29.93) имеет треугольную форму с диагональными элементами $=\left(1-\frac{k_{qq}}{k_{pp}}\right)$ при $p>|q|$ и $=1$ при $q>|p|$ или $p=q>0$. Поэтому определитель преобразования (29.92), (29.93) равен

$$\prod_{p>|q|}\left(\quad \frac{k_{qq}}{k_{pp}}\right).$$

Отсюда следует, что при $g=z^{-1}kz$

$$d\mu(g) = \prod_{p>|q|}\left|1-\frac{k_{qq}}{k_{pp}}\right|^2 d\mu_l(k)\, d\mu(z). \tag{29.97}$$

В силу формулы (29.56 а), для $\beta(k)$ это последнее равенство можно переписать в виде

$$d\mu(g)=D(k)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{29.98}$$

где

$$D(k)=|k_{22}|^{-2}|k_{33}|^{-4}\ldots|k_{nn}|^{-2n+2}\prod_{p>|q|}|k_{pp}-k_{qq}|. \tag{29.99a}$$

Мы рассмотрели случай ортогональной группы четного порядка. Совершенно аналогично получим формулу (29.98) для остальных двух случаев, причем

$$D(k)=|k_{11}|^{-1}|k_{22}|^{-3}\ldots|k_{nn}|^{-2n+1}\prod_{p>|q}|k_{pp}-k_{qq}|^2 \tag{29.99b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка, и

$$D(k)=|k_{11}|^{-2}|k_{22}|^{-4}\ldots|k_{nn}|^{-2n}\prod_{p=1}^{n}|k_{pp}-k_{-p,-p}|^2\prod_{p>q|}|k_{pp}-k_{qq}|^2 \tag{29.99c}$$

в случае симплектической группы. Легко проверить, что в каждом из этих случаев функция $D(k)$ инвариантна при подстановках группы S.

Положим при $g=z^{-1}kz$

$$D(g)=D(k). \tag{29.100}$$

Очевидно, функция $D(g)$ зависит только от собственных значений $\lambda_p=k_{pp}$ матрицы g и, в силу инвариантности относительно подстановок группы S, не зависит от выбора k в разложении $g=z^{-1}kz$.

Из формулы (29.98) следует, что

$$\int d\mu(z)\int_{K_s} f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)=\int f(g)\frac{\varphi(k_g)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(k_g)}{D(g)}\,d\mu(g),$$

где элемент k_g определяется условиями $g=z^{-1}k_gz$, $k_g\in K$. Суммируя это равенство по всем подстановкам s группы S, мы и получим формулу (29.83).

е) Интегральное соотношение, связанное с разложением $g=u\varepsilon v$.

XVI. *Пусть мера в группе* $\mathfrak{U}$ *пронормирована так, что*

$$\int d\mu(u)=1. \tag{29.101}$$

Тогда

$$\int f(g)\,d\mu(g)=\frac{c_1}{2^n n!}\int f(u\varepsilon v)\,\omega(\varepsilon)\,d\mu(u)\,d\mu(v)\,d\mu(\varepsilon), \tag{29.102}$$

где

$$\omega(\varepsilon)=\omega_1^{-4}\omega_2^{-8}\ldots\omega_n^{-4n}\prod_{1\leqslant|p|<q}(\varepsilon_q^2-\varepsilon_p^2) \tag{29.103a}$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$\omega(\varepsilon) = \omega_2^{-4}\omega_3^{-8}\dots\omega_n^{-4n+4}\prod_{0\leqslant|p|<q}(\varepsilon_q^2-\varepsilon_p^2)^2 \tag{29.103b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка и

$$\omega(\varepsilon) = \omega_2^{-4}\omega_3^{-8}\dots\omega_n^{-4n+4}\prod_{q=1}^{n}(\varepsilon_q^2-\varepsilon_{-q}^2)\prod_{1\leqslant|p|<q}(\varepsilon_q^2-\varepsilon_p^2)^2 \tag{29.103c}$$

в случае симплектической группы. Далее,

$$c_1 = \frac{2^n\pi^{2n^2+n}}{[1!\,3!\dots(2n-1)!]^2} \tag{29.104a}$$

в случае симплектической группы и ортогональной группы четного порядка и

$$c_1 = \frac{2^{n+1}\pi^{2n(n+1)+n}}{[2!\,4!\dots(2n)!]^2} \tag{29.104b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка.

Доказательство. Повторяя те же рассуждения, что и в п. 2 § 24, получаем, что при условии $\int d\mu(\gamma)=1$ формула (29.102) эквивалентна формуле

$$\int f(g)\,d\mu(g) = \frac{c_1}{2^n n!}\int f(uv^{-1}\varepsilon v)\,\omega(\varepsilon)\,d\mu(u)\,d\mu(\tilde{v})\,d\mu(\varepsilon). \tag{29.105}$$

Докажем поэтому формулу (29.105).

Обозначим через E_s, $s\in S$ — множество всех матриц $\varepsilon\in E$ таких, что

$$\varepsilon_{p_1}<\varepsilon_{p_2}<\dots<\varepsilon_{p_n}, \tag{29.106}$$

где $s=(-p_{-n}, p_{-n+1},\dots,p_n)$. Очевидно, $\sum\limits_s E_s$ совпадает с почти всей группой E. Поэтому интеграл в правой части (29.105) есть сумма интегралов

$$\frac{c_1}{2^n n!}\int d\mu(u)\,d\mu(\tilde{v})\int\limits_{E_s} f(uv^{-1}\varepsilon v)\,\omega(\varepsilon)\,d\mu(\varepsilon).$$

В силу XI п. 9 § 28, при фиксированном s элементы g вида $g=u^{-1}v\varepsilon v$, $u\in\mathfrak{U}$, $v\in\tilde{v}\in\tilde{\mathfrak{U}}$, $\varepsilon\in E_s$ пробегают по одному разу почти всю группу $\mathfrak{G}$; поэтому должна иметь место формула вида

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int\limits_{E_s} d\mu(\varepsilon)\int f(u^{-1}v^{-1}\varepsilon v)\,\omega_1(\varepsilon, u, \tilde{v})\,d\mu(u)\,d\mu(\tilde{v}), \tag{29.107}$$

где $\omega(\varepsilon, u, \tilde{v})$ — якобиан перехода от $d\mu(g)$ к $d\mu(\varepsilon)\,d\mu(u)\,d\mu(\tilde{v})$. В силу инвариантности меры $d\mu(g)$

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int x(u_0 g)\,d\mu(g) = \int x(g v_0)\,d\mu(g);$$

отсюда следует, что $\omega(\varepsilon, u, \tilde{v})$ от u и $\tilde{v}$ не зависит, так что можно положить

$$\omega_1(\varepsilon, u, \tilde{v}) = \omega_1(\varepsilon). \tag{29.108}$$

В силу доказанной независимости якобиана ω_1 от u и $\tilde{v}$, мы можем его искать при $u = e$ и $v = e$. Матрица v в разложении $g = u^{-1}v^{-1}\varepsilon v$ определена с точностью до левого множителя γ. Мы можем этот множитель выбрать так, чтобы элементы v_{pp}, $p > 0$ (если они отличны от нуля) были положительны. Тем самым мы в почти каждом классе $\tilde{v}$ однозначно выберем представителя v. В частности, при $\tilde{v} = \tilde{e}$ будет $v = e$. Перепишем соотношение $g = u^{-1}v^{-1}\varepsilon v$ в виде

$$vug = \varepsilon v.$$

Дифференцируя это равенство и умножая обе его части справа на $g^{-1}u^{-1}v^{-1} = v^{-1}\varepsilon^{-1}$, получим, что при $u = e$, $v = e$

$$d_r g = d_r \varepsilon - d_r u + \varepsilon\, d_r v \varepsilon^{-1} - d_r v. \tag{29.109}$$

Из условия унитарности $uu^* = e$ следует, что

$$(d_r u)^* + d_r u = 0,$$

т. е.

$$d_r u_{qp} = -\overline{d_r u_{pq}}. \tag{29.110}$$

Аналогично

$$d_r v_{qp} = -\overline{d_r v_{pq}}. \tag{29.111}$$

В частности, в силу нашего выбора матрицы v элементы $d_r v_{pp}$, $p > 0$ при $v = e$ должны быть одновременно действительными и чисто мнимыми; следовательно, при $v = e$

$$d_r v_{pp} = 0, \quad p > 0. \tag{29.112}$$

Рассмотрим сначала случай ортогональной группы четного порядка. Тогда в качестве независимых параметров для $d_r u$ и $d_r v$ можно взять элементы

$$\left.\begin{array}{lll} d_r u_{pq}, & |p| < q \text{ и } d_r u_{pp} & p > 0, \\ d_r v_{pq}, & |p| < q, & \end{array}\right\} \tag{29.113}$$

а в качестве параметров для $d_r\varepsilon$ и $d_r g$ — элементы

$$d_r \varepsilon_p, \quad p > 0, \tag{29.114}$$

$$d_r g_{pp}, \quad p > 0; \quad d_r g_{pq} \text{ и } \overline{d_r g_{qp}} \text{ при } |p| < q. \tag{29.115}$$

В силу (29.110) — (29.112), равенство (29.109) запишется в этих параметрах в виде

$$d_r g_{pp} = d_r \varepsilon_{pp} - d_r u_{pp}, \quad p > 0, \tag{29.116}$$

$$\left.\begin{aligned} d_r g_{pq} &= -d_r u_{pq} + \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q} - 1\right) d_r v_{pq}, \\ \overline{d_r g_{qp}} &= d_r u_{pq} - \left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_p} - 1\right) d_r v_{pq}, \end{aligned}\right\} |p| < q. \tag{29.117}$$

При фиксированных p и q определитель преобразования (29.117) от $d_r g_{pq}$, $\overline{d_r g_{qp}}$ к $d_r u_{pq}$ и $d_r v_{pq}$ равен $\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_p} - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}\right)$. Кроме того, $d_r \varepsilon_{pp}$ действительно и $d_r u_{pp}$ чисто мнимо. Поэтому определитель преобразования (29.116), (29.117) от переменных (29.113), (29.114) к переменным (29.115) равен

$$\prod_{|p|<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)\, \varepsilon_p^{-1} \varepsilon_q^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$d\mu(g) = \prod_{|p|<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)^2\, \varepsilon_p^{-2} \varepsilon_q^{-2}\, d\hat{\mu}(u)\, d\hat{\mu}(\tilde{v})\, d\mu(\varepsilon) =$$
$$= \omega_1^{-4} \omega_2^{-8} \dots \omega_n^{-4n} \prod_{|p|<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)\, d\hat{\mu}(u)\, d\mu(\tilde{v})\, d\mu(\varepsilon),$$

где $d\hat{\mu}(u)$, $d\hat{\mu}(v)$ — меры в $\mathfrak{U}$ и $\tilde{\mathfrak{U}}$ в параметрах $d_r u_{pq}$, $d_r v_{pq}$. Но

$$d\hat{\mu}(u) = \hat{\mu}(\mathfrak{U})\, d\mu(u), \quad d\hat{\mu}(\tilde{v}) = \hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}})\, d\mu(\tilde{v});$$

следовательно, полагая

$$c_1 = \hat{\mu}(\mathfrak{U})\, \hat{\mu}(\tilde{\mathfrak{U}}),$$

получаем

$$d\mu(g) = c_1 \omega(\varepsilon)\, d\mu(u)\, d\mu(\tilde{v})\, d\mu(\varepsilon), \tag{29.118}$$

где

$$\omega(\varepsilon) = \omega_1^{-4} \omega_2^{-8} \dots \omega_n^{-4n} \prod_{|p|<q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2) \tag{29.119}$$

и где, в силу (29.79) и (29.80),

$$c_1 = \frac{2^n \pi^{2n^2+n}}{[1!\,3! \dots (2n-1)!]^2}.$$

Из (29.118) следует, что

$$\int f(g)\, d\mu(g) = c_1 \int_{E_s} d\mu(\varepsilon) \int f(u^{-1} v^{-1} \varepsilon v)\, \omega(\varepsilon)\, d\mu(u)\, d\mu(\tilde{v})\, d\mu(\varepsilon).$$

Суммируя это равенство по всем $2^n n!$ подстановкам s, получаем формулу (29.105).

Мы получаем формулу (29.105) в случае ортогональной группы четного порядка; совершенно аналогично она выводится и получаются выражения для $\omega(\varepsilon)$ и c_1 в случае ортогональной группы нечетного порядка и симплектической группы.

Из доказанной формулы (29.102) так же, как и в п. 3 § 24, получаем:

XVII. *Если переменные интегрирования* ε', u; ε, ζ *связаны соотношением*

$$\varepsilon\zeta = u\varepsilon' v, \tag{29.120}$$

то

$$c_1 \int f(\varepsilon\zeta)\,\omega(\varepsilon')\,d\mu(\varepsilon')\,d\mu(u) = 2^n n!\,(2\pi)^n \int f(\varepsilon\zeta)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu(\zeta). \tag{29.121}$$

§ 30. Описание основной серии представлений группы $\mathfrak{G}$

В предыдущих двух параграфах был изложен весь вспомогательный материал, необходимый для построения и изучения представлений основных серий. Были определены подгруппы, аналогичные подгруппам, рассмотренным в части I, и полученные для этих подгрупп соотношения, также аналогичные соответствующим соотношениям в части I. Поэтому представления основной серии строятся точно так же, как и в части I.

В силу принятых нами обозначений, формулы для представлений основных серий будут внешне совпадать с соответствующими формулами части I для унимодулярной группы; однако их смысл будет меняться в зависимости от того, какая из групп рассматривается в качестве группы $\mathfrak{G}$. Как и в части I, мы исходим из пространства $\tilde{Z}$ правых классов смежности $\tilde{z}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K. Представления задаются в виде операторов T_g в пространстве функций $f(\tilde{z})$ по формуле

$$T_g f(\tilde{z}) = \frac{\alpha(g_z g)}{\alpha(g_z)} f(\widetilde{\tilde{z}g}),$$

где $\alpha(g)$ — функция, определяющая данное представление и удовлетворяющая условию

$$\alpha(kg) = \alpha(k)\,\alpha(g),$$

а g_z — произвольный элемент из класса $\tilde{z}$.

Описывая классы $\tilde{z}$ при помощи содержащихся в них элементов z или классов $\tilde{u}$, мы получаем два способа реализации представлений T_g.

1. Описание представлений основной серии при помощи подгруппы Z. Повторяя дословно рассуждения п. 1 § 5 и пользуясь формулой (29.65), получаем:

I. *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *пространство всех функций* $f(z)$ *с суммируемым* *квадратом на группе Z, в котором скалярное произведение определено по формуле*

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\overline{f_2(z)}\,d\mu(z). \tag{30.1}$$

Представления основной серии определяются характером χ группы D диагональных матриц $\delta \in \mathfrak{G}$. Представление, соответствующее данному характеру χ, есть оператор T_g в пространстве $\mathfrak{H}$, определяемый формулами

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\bar{g}), \tag{30.2}$$

где

$$\alpha(g) = \beta^{-\frac{1}{2}}(g)\chi(g), \tag{30.3}$$

$$\beta(\delta\zeta z) = \beta(\delta), \tag{30.4}$$

$$\chi(\delta\zeta z) = \chi(\delta). \tag{30.5}$$

$\left(\text{Напомним, что } \beta(k) = \dfrac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}.\right)$

2. Формулы для представлений основной серии в параметрах. Представления T_g основной серии можно также задать в независимых параметрах z_{pq}, определяющих элементы $z \in Z$. Рассмотрим отдельно представления каждого из трех классов групп.

а) Случай ортогональной группы четного порядка. Независимыми параметрами в группе Z являются элементы

$$z_{pq}, \quad p > |q| > 0$$

(см. II а) п. 1 § 29); следовательно, функции $f(z) \in \mathfrak{B}$ можно рассматривать как функции $f(z_{pq})$ этих параметров. Скалярное произведение (f_1, f_2) таких функций запишется тогда в виде

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_{pq})\overline{f_2(z_{pq})} \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}). \tag{30.6}$$

Каждое представление T_g основной серии задается характером $\chi(\delta)$ группы D. С другой стороны, независимыми параметрами в группе D являются диагональные элементы

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

матрицы δ. Поэтому группа D изоморфна прямому произведению n мультипликативных групп комплексных чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, так что характер $\chi(\delta)$ должен иметь вид

$$\chi(\delta) = |\delta_1|^{m_1+i\rho_1}\delta_1^{-m_1}|\delta_2|^{m_2+i\rho_2}\delta_2^{-m_2}\ldots|\delta_n|^{m_n+i\rho_n}\delta_n^{-m_n}, \tag{30.7}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — целые, а $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — действительные числа.

Но, в силу (29.56а),

$$\beta(\delta) = |\delta_2|^4 |\delta_3|^8 \ldots |\delta_n|^{4n-4}; \tag{30.8}$$

поэтому

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta) = |\delta_1|^{m_1+i\rho_1}\delta_1^{-m_1}|\delta_2|^{m_2-2+i\rho_2}\delta_2^{-m_2}\ldots|\delta_n|^{m_n-2n+i\rho_n}\delta_n^{-m_n}. \tag{30.9}$$

Для того, чтобы определить $\alpha(zg)$ в (30.2), положим

$$g^1 = zg \tag{30.10}$$

и запишем элемент g^1 в виде

$$g^1 = \delta\zeta z^1, \tag{30.11}$$

так что

$$z^1 = z\bar{g}. \tag{30.12}$$

Тогда

$$\alpha(zg) = \alpha(g^1) = \alpha(\delta). \tag{30.13}$$

В силу (3.12), элементы $\delta_p, p > 0$ матрицы δ определятся из формул

$$\delta_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p+1}}, \quad p = 1, 2, \ldots, n, \quad \Delta_{n+1} = 1, \tag{30.14}$$

где Δ_p — минор матрицы g^1, составленный из ее строк и столбцов с номерами $p, p+1, p+2, \ldots, n$. Согласно формуле (30.13), для определения $\alpha(zg)$ следует подставить в (30.9) вместо чисел δ_p их выражения из (30.14). Поэтому

$$\alpha(zg) = |\Delta_1|^{m_1+i\rho_1}\Delta_1^{-m_1}|\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i(\rho_2-\rho_1)}\Delta_2^{-m_2+m_1}|\Delta_3|^{m_3-m_2-2+i(\rho_3-\rho_2)}\times$$
$$\times\Delta_3^{-m_3+m_2}\ldots|\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i(\rho_n-\rho_{n-1})}\Delta_n^{-m_n+m_{n-1}} \tag{30.15}$$

и мы приходим к следующему результату:

II а) *Пространство $\mathfrak{H}$ есть пространство функций $f(z_{pq})$ переменных z_{pq}, $p > |q| > 0$, удовлетворяющих условию*

$$\int |f(z_{pq})|^2 \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}) < +\infty, \tag{30.16}$$

причем скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_{pq})\overline{f_2(z_{pq})} \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}). \tag{30.17}$$

Представления T_g основной серии определяются системой

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n; \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n), \tag{30.18}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — целые, а $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — действительные числа.

Представление, отвечающее данной системе (30.18), *есть оператор* T_g *в пространстве* $\mathfrak{H}$, *который задается формулой*

$$T_g f(z_{pq}) = |\Delta_1|^{m_1+i\rho_1} \Delta_1^{-m_1} |\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i(\rho_2-\rho_1)} \times$$
$$\times \Delta_2^{-m_2+m_1} \ldots |\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i(\rho_n-\rho_{n-1})} \Delta_n^{-m_n+m_{n-1}} f(z^1_{pq}), \quad (30.19)$$

где числа z^1_{pq} — *элементы матрицы* $z^1 = z\overline{g}$.

Отметим, что числа z^1_{pq} определяются по формулам:

$$z^1_{pq} = \frac{\begin{pmatrix} p & p+1 \ldots p+n \\ q & p+1 \ldots n \end{pmatrix}}{\Delta_p},$$

где $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \ldots p_n \\ q_1 & q_2 \ldots q_n \end{pmatrix}$ обозначает минор матрицы $g^{-1} = zg$, составленный из ее строк и столбцов с номерами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n$ соответственно. При этом можно еще учесть, что, в силу соотношения $g' s_0 g s_0^{-1} = e$, должны также выполняться равенства (см. (28.9a))

$$\sum_{j=p}^{q} z_{jp} z_{-j,-q} = 0 \text{ при } p < q, \quad (30.20)$$

из которых все элементы z_{pq} выражаются через независимые z_{pq}, $p > |q|$.

б) Случай ортогональной группы нечетного порядка. Предложение IIa) переносится на этот случай со следующими изменениями:

Так как индексы p, q в z_{pq} могут принимать теперь значения, равные нулю, то среди независимых параметров z_{pq}, $p > |q|$ будут также параметры z_{p0}. Поэтому функции $f(z_{pq})$, $p > |q|$ и интеграл (30.17) для скалярного произведения будут теперь содержать переменные z_{p0}.

Наконец, в случае ортогональной группы нечетного порядка

$$\beta(\delta) = |\delta_1|^2 |\delta_2|^6 \ldots |\delta_n|^{4n-2}.$$

Поэтому:

II б) *Пространство* $\mathfrak{H}$ *есть пространство функций* $f(z_{pq})$, $p > |q| \geqslant 0$, *удовлетворяющих условию*

$$\int |f(z_{pq})|^2 \prod_{p>|q|\geqslant 0} d\mu(z_{pq}) < +\infty,$$

причем скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ *задается формулой*

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_{pq}) \overline{f_2(z_{pq})} \prod_{p>|q|\geqslant 0} d\mu(z_{pq}).$$

Представления T_g *основной серии определяются системой*

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n;\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n), \tag{30.21}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *— целые, а* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ *— действительные числа; представление, отвечающее данной системе* (30.21), *есть оператор* T_g *в пространстве* $\mathfrak{H}$, *который задается формулой*:

$$T_g f(z_{pq}) = |\Delta_1|^{m_1+i\rho_1-1} \Delta_1^{-m_1} |\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i(\rho_1-\rho_2)} \times$$
$$\times \Delta_2^{-m_2+m_1} \ldots |\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i(\rho_n-\rho_{n-1})} \Delta_n^{-m_n+m_{n-1}} f(z_{pq}^1). \tag{30.22}$$

в) Случай симплектической группы. Предложение IIa переносится и на этот случай со следующими изменениями:

Независимыми параметрами в группе Z являются

$$z_{pq},\ p > |q| \text{ и } z_{p,-p},\ p > 0.$$

Поэтому пространство $\mathfrak{H}$ состоит из функций $f(z_{pq}, z_{p,-p})$ таких, что

$$\int |f(z_{pq}, z_{p,-p})|^2 \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}) \prod_{p>0} d\mu(z_{p,-p}) < +\infty, \tag{30.23}$$

причем скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_{pq}, z_{p,-p}) \overline{f_2(z_{pq}, z_{p,-p})} \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}) \prod_{p>0} d\mu(z_{p,-p}). \tag{30.24}$$

Наконец, в нашем случае

$$\beta(\delta) = |\delta_1|^4 |\delta_2|^8 \ldots |\delta_n|^{4n}.$$

Поэтому:

II в) *Пространство* $\mathfrak{H}$ *есть пространство функций* $f(z_{pq}, z_{p,-p})$, *удовлетворяющих условию*

$$\int |f(z_{pq}, z_{p,-p})|^2 \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}) \prod_{p>0} d\mu(z_{p,-p}) < +\infty,$$

причем скалярное произведение в $\mathfrak{H}$ *задается формулой*

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_{pq}, z_{p,-p}) \overline{f_2(z_{pq}, z_{p,-p})} \prod_{p>|q|>0} d\mu(z_{pq}) \prod_{p>0} d\mu(z_{p,-p}).$$

Представления T_g *основной серии определяются системой*

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n;\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n), \tag{30.25}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *— целые, а* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ *— действительные числа; представление, отвечающее данной системе* (30.25), *есть оператор* T_g *в пространстве* $\mathfrak{H}$, *который задается формулой*

$$T_g f(z_{pq}, z_{p,-p}) = |\Delta_1|^{m_1-2+i\rho_1} \Delta_1^{-m_1} |\Delta_2|^{m_2-m_1-2+i\rho_1} \times$$
$$\times \Delta_2^{-m_2+m_1} \ldots |\Delta_n|^{m_n-m_{n-1}-2+i\rho_1} \Delta_n^{-m_n+m_{n-1}} f(z_{pq}^1, z_{p,-p}^1).$$

3. Описание представлений основной серии при помощи унитарной подгруппы. Правые классы смежности $\tilde{z}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K можно описывать при помощи содержащихся в них правых классов смежности $\tilde{u}$ унитарной группы $\mathfrak{U}$ по ее подгруппе Γ. Отсюда, повторяя рассуждения п. 1 § 8, получаем:

III. *Представления основной серии описываются операторами T_g в пространстве $\mathfrak{H}_1$ функций $\varphi(\tilde{u})$ таких, что*

$$\int |\varphi(\tilde{u})|^2 \, d\mu(\tilde{u}) < +\infty; \tag{30.26}$$

скалярное произведение в $\mathfrak{H}_1$ задается формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(\tilde{u}) \overline{\varphi_2(\tilde{u})} \, d\mu(\tilde{u}). \tag{30.27}$$

Представления определяются функциями $\alpha_1(g)$, удовлетворяющими условиям

$$\alpha_1(kg) = \alpha_1(k)\, \alpha_1(g), \quad |\alpha_1(u)| = 1, \tag{30.28}$$

причем представление T_g, соответствующее данной функции $\alpha_1(g)$, задается формулой

$$T_g \varphi(\tilde{u}) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\widetilde{u}\,\overline{g}), \tag{30.29}$$

где u — произвольный элемент класса $\tilde{u}$.

Функции $\alpha_1(g)$ и

$$\alpha_1'(g) = \frac{\alpha_1(g)}{\varkappa(\tilde{u})} \quad \text{при } g = ku, \tag{30.30}$$

где $\varkappa(\tilde{u})$ — произвольная функция, по модулю равная единице, определяют одно и то же представление.

Пространство $\mathfrak{H}_1$ можно также рассматривать как пространство) функций $\varphi(u)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(\gamma u) = \varphi(u), \tag{30.31}$$

$$\int |\varphi(u)|^2 \, d\mu(u) < +\infty. \tag{30.32}$$

При этом

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(u) \overline{\varphi_2(u)} \, d\mu(u) \tag{30.33}$$

и

$$T_g \varphi(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(\overline{ug}), \tag{30.34}$$

где $\overline{ug}$ — произвольный элемент класса $\widetilde{\overline{ug}}$.

Представление T_g основной серии при $g = u$ есть представление T_u группы $\mathfrak{U}$, т. е. группы всех унитарных матриц $u \in \mathfrak{G}$. Следовательно, оно разлагается на неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ каждое из которых конечномерно в силу компактности этой группы.

Чтобы определить, на какие эти неприводимые представления и с какой кратностью разлагается представление T_u, достаточно повторить рассуждения § 10, ибо формула (30.34) формально совпадает с соответствующей формулой (8.18) для случая унимодулярной группы.

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 21. *Пусть* T_g — *представление основной серии, соответствующее характеру* $\chi(\delta)$. *Для того, чтобы полученное из него представление* T_u *унитарной подгруппы* $\mathfrak{U}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *содержало данное неприводимое представление* $c(u_0)$ *этой подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве представления* $c(u)$ *содержался весовой вектор* f_0 *веса* $\chi(\gamma)$.

Представление $c(u)$ *столько раз встречается в разложении представления* T_u, *сколько в пространстве представления есть линейно-независимых весовых векторов с весом* $\chi(\gamma)$.

При этом вектор f_0 называется *весовым вектором представления* $c(u)$ *с весом* $\chi(\gamma)$, *если*

$$c(\gamma) f_0 = \chi(\gamma) f_0. \tag{30.35}$$

Из этой теоремы следует:

IV. *Среди неприводимых представлений* $c(u)$, *на которые разлагается представление* T_u, *имеется одно и только одно с наинизшим весом и этот вес есть* $\chi(\gamma)$.

Взяв в качестве $c(u)$ единичное представление группы $\mathfrak{U}$ из теоремы 21 получаем:

V. *Для того, чтобы в пространстве представления* T_g *был вектор* f_0, *инвариантный по отношению ко всем операторам* T_u, $u \in \mathfrak{U}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\chi(\gamma) = 1$, *т. е., чтобы характер* $\chi(\delta)$, *определяющий представление* T_g, *был равен*

$$|\delta_1|^{i\rho_1} |\delta_2|^{i\rho_2} \ldots |\delta_n|^{i\rho_n},$$

(т. е. $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$).

При выполнении этого условия существует с точностью до постоянного множителя только один такой вектор f_0.

4. Сферические функции. Пусть T_g — представление основной серии, соответствующее характеру $\chi(\delta)$, и пусть $\chi(\gamma) = 1$. Обозначим через f_0 нормированный вектор, инвариантный по отношению к операторам T_u. Функция

$$\varphi(g) = (T_g f_0, f_0) \tag{30.36}$$

называется *сферической функцией, соответствующей данному пред-*

ставлению; она является элементарной, положительно определенной функцией, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(ug) = \varphi(g); \quad \varphi(gu) = \varphi(g). \tag{30.37}$$

Отсюда и из разложения $g = u_1 \varepsilon u_2$ следует, что достаточно знать $\varphi(\varepsilon)$, причем функция $\varphi(\varepsilon)$ не изменяется при подстановке группы S, т. е. подстановках s чисел $\{\lambda_{-n}, \lambda_{-n+1}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, переставляющих между собой элементы пар $\{\lambda_p \lambda_p\}$ и сами эти пары.

Мы не будем здесь проводить вычисление сферических функций $\varphi(\varepsilon)$ (такое вычисление мы провели в § 9 для случая унимодулярной группы) и, укажем, что окончательный результат приведен в [10].

Глава VIII

Вырожденные и дополнительные серии представлений группы $\mathfrak{G}$

Как и в случае унимодулярной группы, представлениями основной серии, рассмотренными в главе VII, не исчерпываются все неприводимые унитарные представления группы $\mathfrak{G}$. В этой главе мы даем описание и так называемых вырожденных и дополнительных серий неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$; в дальнейшем будет доказано, что этими представлениями вместе с представлениями, рассмотренными в главе VII, исчерпываются все неприводимые унитарные представления группы $\mathfrak{G}$. Принцип построения представлений вырожденных и дополнительных серий тот же, что и в случае унимодулярной группы (главы III и IV).

Представления вырожденных серий, так же, как и представления основной серии, рассмотренные в главе VII, реализуются в виде операторов в пространстве функций $f(z)$ в пространстве $\widetilde{Z}$ правых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по некоторой ее подгруппе K. Для определения этой подгруппы представим себе элементы g группы $\mathfrak{G}$ составленными не из чисел, а из матриц g_{pq}, $p, q = -r, -r+1, \ldots, r$; группа K определяется тогда как группа всех матриц $k = \|k_{pq}\| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$k_{pq} = 0 \text{ при } p > q,$$

где 0 — нулевая матрица. Если при этом матрица k_{pq} состоит из n_p строк и n_p столбцов $\left(\text{так что } \sum n_p = n\right)$, то условие $k \in \mathfrak{G}$ накладывает некоторые условия на числа n_p. Именно, должно выполняться условие

$$n_{-p} = n_p$$

(если имеется n_0, то на него никакие условия не накладываются).

Если все числа n_p равны единице, то, как частный случай, получается подгруппа K, рассмотренная в главе VII.

Дополнительные серии получаются, если строить скалярное произведение функций $f(\widetilde{z})$ в виде интеграла по транзитивным многообразиям в пространстве пар $(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2)$.

Частным случаем такого интеграла, соответствующим транзитивному многообразию пар $(\tilde{z}, \tilde{z})$ из одинаковых элементов, является скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z) \overline{f_2(z)} \, d\mu(z)$$

в пространстве представлений основной серии.

§ 31. Некоторые дальнейшие подгруппы группы $\mathfrak{G}$

1. Определение подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Пусть

$$n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_{r-1}, n_r \tag{31.1}$$

— система натуральных чисел такая, что

$$n_{-p} = n_p \tag{31.2}$$

и

$$\sum_{p=-r}^{r} n_p = m, \tag{31.3}$$

где, как обычно, m — порядок матриц g, из которых состоит группа $\mathfrak{G}$. Матрицы g порядка m можно тогда представить себе составленными из матриц g_{pq} из n_p строк и n_q столбцов, $p, q = -r, -r+1, \ldots, r$.

Обозначим через A_{m-1} унимодулярную группу матриц порядка m, т. е. совокупность всех матриц с определителем, равным единице. При помощи чисел n_p можно для A_{m-1} построить подгруппы* $K_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r} = K_{n_p}$, $Z_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r} = Z_{n_p}$, как это было сделано в главе III; мы снабдим теперь эти подгруппы индексом A, чтобы подчеркнуть, что они построены для унимодулярной группы.

Таким образом, например, $K_{A;\, n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r} = K_{A, n_p}$ есть группа всех матриц $k = \|k_{pq}\|$ с определителем равным 1, удовлетворяющих условиям

$$k_{pq} = 0 \text{ при } p > q, \tag{31.4}$$

где 0 обозначает матрицу, состоящую из нулей; аналогично, $Z_{A;\, -n_{-r}, -n_{-r+1}, \ldots, n_r}$ есть группа всех матриц $z = \|z_{pq}\|$, удовлетворяющих условиям

$$z_{pq} = 0 \text{ при } p < q;\ z_{pp} = 1, \tag{31.5}$$

где 0 и 1 — нулевая и единичная матрицы, и т. д.

Подгруппа K_{n_p} определяется как совокупность всех матриц из группы $K_{A;\, n_p}$, которые принадлежат группе $\mathfrak{G}$.

* Для краткости обозначим через n_p совокупность индексов $n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r$.

Аналогично определяются подгруппы

$$Z_{n_p}, H_{n_p}, \mathbf{Z}_{n_p}, D_{n_p}, \Gamma_{n_p}$$

группы $\mathfrak{G}$.

Очевидно, определение этих групп можно сформулировать следующим образом.

Подгруппа K_{n_p} есть совокупность всех матриц $k = \|k_{pq}\| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$k_{pq} = 0 \text{ при } p > q.$$

Подгруппа H_{n_p} есть совокупность всех матриц $h = \|h_{pq}\| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$h_{pq} = 0 \text{ при } p < q.$$

Подгруппа Z_{n_p} есть совокупность всех матриц $z = \|z_{pq}\| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$z_{pq} = 0 \text{ при } p < q, \ z_{pp} = 1,$$

где 0 и 1 обозначают нулевую и единичную матрицы соответственно.

Подгруппа $\mathbf{Z}_{n_p}$ есть совокупность всех матриц $\zeta = \|\zeta_{pq}\| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$\zeta_{pq} = 0 \text{ при } p > q, \ \zeta_{pp} = 1.$$

Подгруппа D_{n_p} есть совокупность всех матриц $\delta = \|\delta_{pp}\| \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$\delta_{pq} = 0 \text{ при } p \neq q.$$

Матрицы δ_{pp} на диагонали мы будем обозначать через δ_p и писать

$$\delta = \{\delta_{-r}, \delta_{-r+1}, \ldots, \delta_r\}.$$

Подгруппа Γ_{n_p} есть совокупность всех унитарных матриц $\gamma = \|\gamma_{pq}\|$ из группы D_{n_p}.

Таким образом, $\gamma_{pq} = 0$ при $p \neq q$ и γ_{pp} — унитарная матрица. Матрицы γ_{pp} мы будем обозначать через γ_p и писать

$$\gamma = \{\gamma_{-r}, \gamma_{-r+1}, \ldots, \gamma_r\}.$$

В дальнейшем, когда это не вызовет недоразумения, мы будем опускать индексы $n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r$ в обозначении этих подгрупп.

Подгруппы K, Z, H, $\mathbf{Z}$, D и Γ, построенные в § 28, являются, очевидно, частным случаем рассмотренных здесь подгрупп; они получаются, если все числа n_p равны единице.

2. Канонические разложения. Принцип получения канонических разложений тот же, что и в § 28. Мы исходим из того, что такие разложения уже доказаны в § 12 для унимодулярной группы, A_{m-1}

и доказываем, что сомножители в таких разложениях принадлежат группе $\mathfrak{G}$, т. е. удовлетворяют соотношению

$$g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0, \tag{31.6}$$

где

$$s_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & \\ & 1 & & \\ 1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & & & \end{pmatrix}$$

в случае ортогональных групп и

$$s_0 = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & \\ & .1 & & \\ 1^{\cdot^{\cdot}} & & & \end{pmatrix}$$

в случае симплектической группы (см. п. 1 § 28).

Последнее же обстоятельство является следствием единственности каждого из канонических разложений и следующего предложения:

I. *Преобразование*

$$g_1 = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$$

есть автоморфизм в унимодулярной группе A_{m-1}, который переводит в себя каждую из подгрупп

$$K_{A;\, n_p},\ Z_{A;\, n_p},\ H_{A;\, n_p},\ \mathbf{Z}_{A;\, n_p},\ D_{A;\, n_p}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай ортогональной группы; случай симплектической группы рассматривается аналогично. В случае ортогональных групп матрицу s_0 можно представить в виде

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & s_{-r} \\ 0 & \ldots & s_{-r+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_r & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31.7}$$

где s_p — матрица из n_p строк и столбцов вида

$$s_p = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31.8}$$

Так как $n_{-p} = n_p$, то

$$s_{-p} = s_p. \tag{31.9}$$

Таким образом, матричные элементы s_{pq} матрицы s задаются равенствами

$$s_{pq} = 0 \text{ при } p + q \neq 0; \ s_{p,\,-p} = s_p. \tag{31.10}$$

Докажем наше утверждение для группы $K_A = K_{A;\,n_{-r},\,n_{-r+1},\,\ldots,\,n_r}$.

Если k — матрица из этой группы, то k' принадлежит группе $H_A = H_{A;\,n_{-r},\,n_{-r+1},\,\ldots,\,n_r}$; следовательно, и k'^{-1} принадлежит группе H_A. Положим $k'^{-1} = \|h_{pq}\|$; в силу (32.10), матричными элементами матрицы $g = s_0^{-1} k'^{-1} s_0$ будут тогда

$$g_{pq} = s_p^{-1} h_{-p,\,-q}\, s_q.$$

Это выражение обращается в нуль при $-p < -q$, т. е. при $p > q$. Следовательно, по определению группы K_A,

$$s_0^{-1} k'^{-1} s_0 \in K_A.$$

Аналогично доказывается предложение I для остальных подгрупп.

В силу предложения I, вывод канонических разложений в рассматриваемом здесь случае является повторением аналогичных рассуждений в § 28.

Мы рассмотрим поэтому для примера вывод только некоторых из этих разложений, а остальные приведем без вывода.

II. *Всякий элемент k можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \delta\zeta, \tag{31.11}$$

а также в виде

$$k = \zeta\delta. \tag{31.12}$$

При этом в обоих случаях

$$k_{pp} = \delta_p. \tag{31.13}$$

Доказательство. По доказанному в п. 1 § 12 элемент k можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$k = \delta\zeta. \tag{31.14}$$

Остается показать, что $\delta \in \mathfrak{G}$ и $\zeta \in \mathfrak{G}$. По условию, $k \in \mathfrak{G}$; следовательно, (см. (31.6))

$$k = s_0^{-1} k'^{-1} s_0.$$

В силу (31.14), это означает, что

$$k = \delta\zeta = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \cdot s_1^{-1} \zeta'^{-1} s_0. \tag{31.15}$$

Но, согласно I, $s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \in D_A$ и $s_0^{-1} \zeta'^{-1} s_0 \in \mathbf{Z}_A$; поэтому из последнего равенства и из единственности разложения (31.14) следует, что

$$\delta = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0, \quad \zeta = s_0^{-1} \zeta'^{-1} s_0,$$

что и требовалось доказать.

III. *Всякий элемент h можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$h = \delta z, \tag{31.16}$$

а также в виде

$$h = z\delta. \tag{31.17}$$

При этом в обоих случаях

$$h_{pp} = \delta_p. \tag{31.18}$$

Обозначим через g_p минор матрицы p, составленный из ее строк и столбцов с номерами $p, p+1, \ldots, n$. Напомним (см. (28.16)), что между этими минорами имеет место соотношение

$$g_{-p} = \pm g_{p+1}. \tag{31.19}$$

IV. *Если все миноры**

$$g_{n_0+n_1+\cdots+n_{p-1}+1}, \quad p = 1, 2, \ldots, r \tag{31.20}$$

матрицы $g \in \mathfrak{G}$ отличны от нуля, то эту матрицу можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$g = kz, \tag{31.21}$$

а также в виде

$$g = \zeta h. \tag{31.22}$$

Доказательство. В силу соотношения (31.19), и равенств $n_{-p} = n_p$ также

$$g_{-n_{-p+1}-n_{-p+2}-\cdots-n_0} \neq 0. \tag{31.23}$$

Поэтому можно применить основной результат п. 3 § 12, в силу которого элемент g можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$g = kz, \; g = \zeta h, \; k \in K_A, \; z \in Z_A, \; \zeta \in \mathbf{Z}_A, \; h \in H_A.$$

Пользуясь тем, что $g \in \mathfrak{G}$, и предложением I, как и выше, доказываем, что $k, z, \zeta, h \in \mathfrak{G}$.

V. *Всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде*

$$g = ku, \; k \in K, \; u \in \mathfrak{U}. \tag{31.24}$$

Если $g = k_1 u_1$ — другое такое разложение, то

$$k_1 = k\gamma, \; u = \gamma^{-1} u, \; \gamma \in \Gamma. \tag{31.25}$$

VI. *Всякий элемент $k \in K$ с различными собственными значениями можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \zeta^{-1} \delta \zeta. \tag{31.26}$$

---

* n_0 считается равным нулю, если среди чисел n_p нет числа n_0.

При этом

$$k_{pp} = \delta_p. \tag{31.27}$$

VII. *Пусть g — матрица из группы $\mathfrak{G}$ с различными собственными значениями, а $\hat{\delta}$ — диагональная матрица из собственных значений матрицы $\mathfrak{G}$, занумерованных в некотором порядке. Этот порядок можно выбрать так, чтобы*

$$\hat{\delta} \in \mathfrak{G}; \tag{31.28}$$

в этом случае существует матрица $x \in \mathfrak{G}$ такая, что

$$g = x^{-1} \hat{\delta} x. \tag{31.29}$$

Если миноры x_p матрицы x удовлетворяют условиям

$$x_{n_0+\dots+n_{p-1}+1} \neq 0, \quad p = 1, 2, \dots, r, \tag{31.30}$$

то g можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$g = z^{-1} kz, \tag{31.31}$$

где

$$k = \zeta^{-1} \delta \hat{\delta} \delta \zeta, \tag{31.32}$$

т. е. k имеет те же собственные значения, что и $\hat{\delta}$.

Ответ на вопрос о числе представлений (31.31) дает следующее утверждение:

VIII. *Две различные матрицы $\hat{\delta} \in \mathfrak{G}$ из собственных значений матрицы g приводят к одному и тому же разложению $g = z^{-1} kz$ тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга подстановкой, переставляющей между собой только собственные значения внутри каждой группы чисел*

$$\lambda_{n_0+n_1+\dots+n_{p-1}+1}, \ \lambda_{n_0+n_1+\dots+n_{p-1}+2}, \dots, \lambda_{n_0+n_1+\dots+n_{p-1}+n_p}, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует, что число различных разложений $g = z^{-1} kz$ равно

$$\frac{2^n n!}{2^{n_0} n_0! \, n_1! \, n_2! \dots n_r!}.$$

3. Классы смежности по K. Представления вырожденных серий строятся в дальнейшем в виде операторов в пространстве функций $f(\tilde{z})$, заданных на правых классах смежности $\tilde{z}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $K = K_{n_r, -n-r+1, \dots, n_r}$. Совокупность всех таких классов $\tilde{z}$ обозначим через $\tilde{Z}$.

Умножение справа на элемент g_0 есть преобразование в пространстве $\tilde{Z}$; мы будем писать $\tilde{z}_1 = \tilde{z} g_0$, если класс $\tilde{z}_1$ получается из z умножением справа на g_0.

Пользуясь предложениями IV и V п. 2, можно описать классы $\tilde{z}$ при помощи содержащихся в них элементов $z \in Z$ или правых классов $\tilde{u}$ группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе $\Gamma = \Gamma_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$.

Преобразование $\tilde{z}_1 = \tilde{z}\bar{g}_0$ можно тогда рассматривать как преобразование $z_1 = z\bar{g}_0$ или $\tilde{u}_1 = \tilde{u}\bar{g}_0$ соответствующих элементов z_1, $z \in Z$ или классов $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}$.

§ 32. Независимые параметры, меры и интегральные соотношения

1. Независимые параметры и мера в группе Z.

а) Случай ортогональной группы; $n_0 = 0$. Пусть $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа четного порядка $m = 2n$. Как и в п. 1 § 29, мы будем изображать матрицы z в виде

$$z = \begin{pmatrix} z_{-1} & 0 \\ a & z_1 \end{pmatrix}, \tag{32.1}$$

где z_{-1}, z_1, a — квадратные матрицы порядка n, а 0 — нулевая матрица порядка n.

Легко видеть, что матрицы z_{-1}, z_1 должны принадлежать подгруппе $Z_{A_{n-1};\, n_1, n_2, \ldots, n_r}$, построенной для унимодулярной группы A_{n-1} порядка n.

Далее, рассмотрим матрицы вида

$$x = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ \xi & 1_n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \qquad \eta \in Z_{A_{n-1};\, n_1, \ldots, n_r}, \tag{32.2}$$

где 1_n — единичная матрица порядка n, ξ — квадратная матрица порядка n. Повторяя рассуждение п. 1 § 29, получаем:

Всякую матрицу $z \in Z$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$z = xy; \quad x, y \in Z. \tag{32.3}$$

Отсюда, записывая матрицу s_0 в виде

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ s_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{32.4}$$

где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы порядка n, и подставляя матричные выражения для x, y, s_0 в условия

$$x = s_0^{-1} x'^{-1} s_0, \qquad y = s_0^{-1} y'^{-1} s_0,$$

приходим к следующему результату:

I а) *Независимыми параметрами в группе Z являются кососимметрическая матрица $\hat{\xi}$ порядка n и матрица $\eta \in Z_{A_{n-1};\, n_1, \ldots, n_r}$. Матрица $z \in Z$ и инвариантная мера $d\mu(z)$ в группе Z выражаются через эти параметры по формулам*

$$z = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ s_1^{-1} \hat{\xi}\, \eta_{-1} & \eta \end{pmatrix}, \quad \eta_{-1} = s_1^{-1} \eta'^{-1} s_1, \tag{32.5a}$$

$$d\mu(z) = d\mu(\eta)\, d\mu(\hat{\xi}), \tag{32.6a}$$

где $d\mu(\hat{\xi})$ обозначает произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы $\hat{\xi}$, расположенных над ее главной диагональю, $d\mu(\eta)$ — инвариантную меру в группе $Z_{A_{n-1}}$.

Отсюда, так же, как и в п. 1 § 29, следует:

II а) *Независимыми параметрами в группе Z являются матрицы*

$$z_{pq}, \quad p > |q| > 0. \tag{32.7a}$$

Инвариантная мера $d\mu(z)$ задается в этих параметрах формулой

$$d\mu(z) = \prod_{p > |q| > 0} d\mu(z_{pq}), \tag{32.8a}$$

где $d\mu(z_{pq})$ обозначает произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы z_{pq}.

б) Случай симплектической группы; $n_0 = 0$. Этот случай отличается от предыдущего тем, что $\hat{\xi}$ будет симметрической матрицей. Поэтому:

I б) *Независимыми параметрами в группе Z являются симметрическая матрица $\hat{\xi}$ порядка n и матрица $\eta \in Z_{A_{n-1};\, n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Матрица $z \in Z$ и инвариантная мера $d\mu(z)$ в группе Z определяются через эти параметры по формулам:*

$$z = \begin{pmatrix} \eta_{-1} & 0 \\ s_1^{-1} \hat{\xi}\, \eta_{-1} & \eta \end{pmatrix}, \quad \eta_{-1} = s_1^{-1} \eta'^{-1} s_1 \tag{32.5b}$$

$$d\mu(z) = d\mu(\eta)\, d\eta(\hat{\xi}), \tag{32.6b}$$

где $d\mu(\hat{\xi})$ обозначает произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы $\hat{\xi}$, расположенных над и на ее главной диагонали; $d\mu(\eta)$ — инвариантная мера в группе $Z_{A_{n-1}}$.

Отсюда:

II б) *Независимыми параметрами в группе Z являются матрицы*

$$z_{pq}, \; p > |q| > 0; \quad z_{p,-p}, \; p > 0. \tag{32.7b}$$

Инвариантная мера $d\mu(z)$ задается в этих параметрах формулой

$$d\mu(z) = \prod_{p > |q| > 0} d\mu(z_{pq}) \prod_{p > 0} d\mu(z_{p,-p}). \tag{32.8b}$$

в) Случай ортогональной группы; $n_0 \neq 0$. В этом случае мы будем записывать матрицы z в виде

$$z = \begin{pmatrix} \gamma_{l-1} & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ a & \mu & \eta \end{pmatrix};$$

повторяя рассуждения п. 1 § 29, получаем:

I в) *Независимыми параметрами в группе Z являются кососимметрическая матрица $\hat{\xi}$ порядка n, матрица $\eta \in Z_{A_{n-1};\, n_1, \dots, n_r}$ и строчка $\lambda = (\lambda_r, \lambda_{r-1}, \dots, \lambda_1)$ из матриц $\lambda_r, \lambda_{r-1}, \dots, \lambda_1$ из n_0 строк и $n_r, n_{r-1}, \dots, n_1$ столбцов соответственно. Мера $d\mu(z)$ задается в этих параметрах по формуле*

$$d\mu(z) = d\mu(\eta)\, d\mu(\hat{\xi})\, d\mu(\lambda), \tag{32.6c}$$

где $d\mu(\eta)$ — мера в группе $Z_{A_{n-1};\, n_1, \dots, n_r}$, $d\mu(\hat{\xi})$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы $\hat{\xi}$, расположенных над ее главной диагональю, и $d\mu(\lambda)$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы λ.

Отсюда следует:

II в) *Независимыми параметрами в группе Z являются матрицы*

$$z_{pq}, \quad p > |q| \geqslant 0. \tag{32.7c}$$

Инвариантная мера $d\mu(z)$ задается в этих параметрах по формуле

$$d\mu(z) = \prod_{p > |q| \geqslant 0} d\mu(z_{pq}), \tag{32.8c}$$

где $d\mu(z_{pq})$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы z_{pq}.

г) Случай симплектической группы; $n_0 \neq 0$. Отличие этого случая от случая в) состоит в том, что $\hat{\xi}$ — симметрическая матрица. Поэтому:

I г) *Независимыми параметрами в группе Z являются симметрическая матрица $\hat{\xi}$ порядка n, матрица $\eta \in Z_{A_{n-1};\, n_1, \dots, n_r}$ и строка $\lambda = (\lambda_r, \lambda_{r-1}, \dots, \lambda_1)$ из матриц $\lambda_r, \lambda_{r-1}, \dots, \lambda_1$ из n_0 строк и $n_r, n_{r-1}, \dots, n_1$ столбцов соответственно. Мера $d\mu(z)$ задается в этих параметрах по формуле*

$$d\mu(z) = d\mu(\eta)\, d\mu(\hat{\xi})\, d\mu(\lambda), \tag{32.6d}$$

где $d\mu(\eta)$ — *мера в группе $Z_{A_{n-1};\, n_1, \dots, n_r}$, $d\mu(\hat{\xi})$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы $\hat{\xi}$, расположенных над и на ее главной диагонали, и $d\mu(\lambda)$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы λ.*

Отсюда следует:

II г) *Независимыми параметрами в группе Z являются матрицы*

$$z_{pq}, \quad p > |q| \geqslant 0, \quad z_{p,-p}, \quad p > 0. \tag{32.7d}$$

Инвариантная мера $d\mu(z)$ задается в этих параметрах по формуле

$$d\mu(z) = \prod_{p>|q|\geqslant 0} d\mu(z_{pq}) \prod_{p>0} d\mu(z_{p,-p}), \tag{32.8d}$$

где $d\mu(z_{pq})$ — произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы z_{pq}.

2. Параметры и меры в группе $\mathbf{Z}$. Группа $\mathbf{Z}$ получается из группы Z, если заменить каждую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ матрицей g'. Поэтому из результатов п. 1 непосредственно следует:

III. *Независимыми параметрами в группе $\mathbf{Z}$ являются матрицы*

$$\zeta_{pq}, \quad |p| < q \tag{32.9}$$

в случае ортогональных групп, и матрицы

$$\zeta_{pq}, \quad |p| \leqslant q, \quad p \neq q \tag{32.10}$$

в случае симплектической группы.

В первом случае инвариантная мера $d\mu(\zeta)$ в группе $\mathbf{Z}$ задается формулой

$$d\mu(\zeta) = \prod_{|p|<q} d\mu(\zeta_{pq}), \tag{32.11}$$

а во втором — формулой:

$$d\mu(\zeta) = \prod_{|p|<q} d\mu(\zeta_{pq}) \prod_{p>0} d\mu(\zeta_{-p,p}), \tag{32.12}$$

где $d\mu(\zeta_{pq})$ обозначает произведение дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матрицы ζ_{pq}.

3. Параметры и меры в группе D. Для матрицы $\delta \in D$ условие $\delta'^{-1} = s\delta s^{-1}$ означает, что

$$\delta_p'^{-1} = s_p \delta_{-p} s_p^{-1}. \tag{32.13}$$

В частности, если $n_0 \neq 0$, то матрица δ_0 удовлетворяет условию

$$\delta_0'^{-1} = s_0 \delta_0 s_0^{-1}, \tag{32.14}$$

т. е. δ_0 — ортогональная или симплектическая матрица порядка n_0. Поэтому:

IV. *Независимыми параметрами в группе D являются неособенные матрицы* *

$$\delta_p, \quad p = 1, 2, \ldots, r$$

* Т. е. матрицы с определителем $\neq 0$.

и при $n_0 \neq 0$ — *ортогональная* (в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$), *соответственно симплектическая* (в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$) *матрица* δ_0. *Инвариантная мера* $d\mu(\delta)$ *в группе* D *определяется формулой*

$$d\mu(\delta) = \prod_{p>0} d\mu(\delta_p) \quad \text{при} \quad n_0 = 0, \tag{32.15a}$$

$$d\mu(\delta) = d\mu(\delta_0) \prod_{p>0} d\mu(\delta_p) \quad \text{при} \quad n_0 \neq 0, \tag{32.15b}$$

где $d\mu(\delta_p)$, $p > 0$ — *инвариантная мера в группе всех неособенных матриц порядка* n_p, *а* $d\mu(\delta_0)$ — *инвариантная мера в ортогональной группе* (если $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа), *соответственно симплектической группе* (если $\mathfrak{G}$ — симплектическая группа) *матриц порядка* n_0.

4. Параметры в группе K. В силу (31.11), всякий элемент k можно представить, и притом единственным образом, в виде $k = \delta\zeta$. Отсюда, пользуясь результатами пп. 2 и 3 и повторяя рассуждения п. 4 § 29, получаем:

V. *Независимыми параметрами в группе* K *являются матрицы*

$$k_{pp},\ p > 0\ (\text{и } k_{00} \text{ при } n_0 \neq 0);\quad k_{pq},\quad |p| < q \tag{32.16a}$$

в случае ортогональной группы и матрицы

$$k_{pp},\ p > 0\ (\text{и } k_{00} \text{ при } n_0 \neq 0);\quad k_{pq},\quad |p| < q \tag{32.16b}$$

в случае симплектической группы. При этом k_{pp}, $p > 0$ — *произвольные неособенные матрицы, а* k_{00} *при* $n_0 \neq 0$ — *произвольная ортогональная матрица в первом случае и произвольная симплектическая матрица во втором случае порядка* n_0.

5. Интегральные соотношения и меры в группе K. Повторяя рассуждения п. 5 § 29, получаем:

VI. *В группе* K *имеют место формулы*

$$\int f(k)\, d\mu_l(k) = \int f(\delta\zeta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta), \tag{32.17}$$

$$\int f(k)\, d\mu_r(k) = \int f(\zeta\delta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta), \tag{32.18}$$

где $d\mu_l(k)$, $d\mu_r(k)$ — *лево- и право-инвариантные меры в группе* K.

Найдем эти меры $d\mu_l(k)$ и $d\mu_r(k)$, для чего воспользуемся формулами (13.17) и (13.18).

Рассмотрим сначала случай ортогональной группы $\mathfrak{G}$. Равенство $k = \delta\zeta$ означает, что

$$k_{pp} = \delta_p, \quad k_{pq} = \delta_p \zeta_{pq}. \tag{32.19}$$

Второе из этих равенств есть линейное преобразование от элементов каждого столбца матрицы ζ_{pq} к элементам соответствующего столбца матрицы k_{pq}, определитель которого равен $\det \delta_p$. Так как число таких столбцов равно n_q, то отсюда следует, что якобиан преобразования (32.19) от независимых параметров матриц δ и ζ к независимым параметрам матрицы k равен

$$\prod_{|p|<q} |\det \delta_p|^{2n_q}. \tag{32.20}$$

С другой стороны, из соотношения $\delta_p'^{-1} = s_0 \delta_{-p} s_0^{-1}$ следует, что

$$\det \delta_{-p} \det \delta_p = 1; \tag{32.21}$$

так как в выражении (32.20) одинаковое число раз встречаются $\det \delta_p$ и $\det \delta_{-p}$, то отсюда следует, что это выражение равно единице. Поэтому, пользуясь формулой (32.17) и результатом пп. 2 и 3, получаем

$$\begin{aligned} d\mu_l(k) &= d\mu(\delta)\, d\mu(\zeta) = \prod_{p\geqslant 0} d\mu(\delta_p) \prod_{|p|<q} d\mu(\zeta_{pq}) = \\ &= \prod_{p\geqslant 0} d\mu(k_{pp}) \prod_{|p|>q} d\mu(k_{pq}), \end{aligned} \tag{32.22}$$

где $d\mu(k_{pp})$ обозначает инвариантную меру в группе всех неособенных матриц порядка n_p при $p>0$ и всех ортогональных матриц порядка n_0 при $p=0$, $n_0 \neq 0$.

В случае симплектической группы $\mathfrak{G}$ вместо выражения (32.20) для якобиана преобразования (32.19) мы будем иметь выражение

$$\prod_{|p|<q} |\det \delta_p|^{2n_q} \prod_{p\geqslant 0} |\det \delta_{-p}|^{2n_p} = \prod_{p\geqslant 0} |\Lambda_p|^{-2n_p}, \tag{32.23}$$

где для краткости обозначено

$$\Lambda_p = \det \delta_p. \tag{32.24}$$

Поэтому для лево-инвариантной меры $d\mu_l(k)$ мы получим формулу

$$d\mu_l(k) = \prod_{p=1}^{n} |\Lambda_p|^{2n_p} \prod_{p\geqslant 0} d\mu(k_{pp}) \prod_{p>0} d\mu(k_{-p,p}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}). \tag{32.25}$$

Таким образом, имеем:

VII. *Лево-инвариантная мера $d\mu_l(k)$ в группе K задается формулой*

$$d\mu_l(k) = \prod_{p\geqslant 0} d\mu(k_{pp}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}) \tag{32.26a}$$

в случае ортогональной группы и формулой

$$d\mu_l(k) = \prod |\Lambda_p|^{2n_p} \prod_{p\geqslant 0} d\mu(k_{pp}) \prod_{p>0} d\mu(k_{-p,p}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}), \tag{32.26b}$$

$$\Lambda_p = \det k_{pp}$$

в случае симплектической группы. При этом $d\mu(k_{pq})$, $d\mu(k_{-p,p})$ *обозначают произведения дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов этих матриц,* $d\mu(k_{pp})$ — *инвариантную меру в группе всех неособенных матриц порядка* n_p, *а* $d\mu(k_{00})$ $(n_0 \neq 0)$ *обозначает инвариантную меру в группе ортогональных матриц порядка* n_0, *если* $\mathfrak{G}$ — *ортогональная группа, и симплектических матриц порядка* n_0, *если* $\mathfrak{G}$ — *симплектическая группа.*

Аналогично, пользуясь формулой (32.18), получаем:

VIII. *Право-инвариантная мера* $d\mu_r(k)$ *в группе* K *задается формулой*

$$d\mu_r(k) = |\Lambda_1|^{-2n_0} |\Lambda_2|^{-2n_0-4n_1} \dots |\Lambda_r|^{-2n_0-4(n_1+\dots+n_{r-1})} \prod_{p\geqslant 0} d\mu(k_{pp}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pq}) \tag{32.27a}$$

в случае ортогональной группы и формулой

$$d\mu_r(k) = |\Lambda_1|^{-2(n_0+n_1)} |\Lambda_2|^{-2n_0-4n_1-2n_2} \dots |\Lambda_r|^{-2n_0-4(n_1+\dots+n_{r-1})-2n_r} \times$$

$$\times \prod_{p\geqslant 0} d\mu(k_{pp}) \prod_{p>0} d\mu(k_{-p,p}) \prod_{|p|<q} d\mu(k_{pp}) \tag{32.27b}$$

в случае симплектической группы.

При этом $d\mu(k_{pp})$, $d\mu(k_{-p,p})$ *и* $d\mu(k_{pq})$ *обозначают то же, что и в предложении* VII.

При $r = n$, $n_1 = n_2 = \dots = n_2 = 1$ эти формулы переходят в соответствующие формулы п. 5 § 29.

Положим

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(h)}{d\mu_r(h)}. \tag{32.28}$$

Из формул (32.26) и (32.27) следует тогда, что

$$\beta(k) = |\Lambda_1|^{2n_0} |\Lambda_2|^{2n_0+4n_1} \dots |\Lambda_r|^{2n_0+4(n_1+\dots+n_{r-1})} \tag{32.29a}$$

в случае ортогональных групп и

$$\beta(k) = |\Lambda_1|^{2n_0+4n_1} |\Lambda_2|^{2n_0+4(n_1+n_2)} \dots |\Lambda_r|^{2n_0+4(n_1+\dots+n_r)} \tag{32.29b}$$

в случае симплектической группы.

6. Параметры, интегральные соотношения и меры в группе H Отображение $g \to g'$ переводит K в H; поэтому из результатов пп. 4, 5 для группы K следует:

IX. *Независимыми параметрами в группе* H *являются матрицы*

$$h_{pp},\ p>0;\ h_{00}\,(\text{при } n_0 \neq 0);\ h_{pq},\ p>|q| \tag{32.30a}$$

в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$ *и*

$$h_{pp},\ h_{p,-p},\ p>0;\ h_{00}\,(\text{при } n_0 \neq 0);\ h_{pq},\ p>|q| \tag{32.30b}$$

в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$. *При этом* h_{pq}, $p > |q|$, $h_{p,-p}$, $p > 0$ — *произвольные матрицы;* h_{pp}, $p > 0$ — *произвольные неособенные матрицы порядка* n_p, *а* h_{00} (при $n_0 \neq 0$) — *произвольная ортогональная матрица порядка* n_0 *в случае ортогональной группы* $\mathfrak{G}$, *и произвольная симплектическая матрица порядка* n_0 *в случае симплектической группы* $\mathfrak{G}$. *Лево-и право-инвариантная меры в группе* H *задаются формулами*

$$d\mu_l(h) = |\Lambda_1|^{-2n_0}|\Lambda_2|^{-2n_0-4n_1} \ldots |\Lambda_r|^{-2n_0-4(n_1+\cdots+n_{r-1})} \prod_{p \geqslant 0} d\mu(h_{pp}) \prod_{|q|<p} d\mu(h_{pq}), \tag{32.31a}$$

$$d\mu_r(h) = \prod_{p \geqslant 0} d\mu(h_{pp}) \prod_{|q|<p} d\mu(h_{pq}) \tag{32.32a}$$

в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$ *и формулами*

$$d\mu_l(h) = |\Lambda_1|^{-2(n_0+n_1)}|\Lambda_2|^{-2n_0-4n_1-2n_2} \ldots |\Lambda_r|^{-2n_0-4(n_1+\cdots+n_{r-1})-2n_r} \times$$

$$\times \prod_{p \geqslant 0} d\mu(h_{pp}) \prod_{p>0} d\mu(h_{p,-p}) \prod_{|q|<p} d\mu(h_{pq}), \tag{32.31b}$$

$$d\mu_r(h) = \prod_{p>0} |\Lambda_p|^{2n_p} \prod_{p \geqslant 0} d\mu(h_{pp}) \prod_{p>0} d\mu(h_{p,-p}) \prod_{|q|<p} d\mu(h_{pq}) \tag{32.32b}$$

в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$, *где* $d\mu(h_{pq})$, $p > |q|$, $d\mu(h_{p,-p})$, $p > 0$ — *произведения дифференциалов действительных и мнимых частей всех элементов матриц* h_{pq}, $h_{p,-p}$; $d\mu(h_{pp})$ — *инвариантная мера в группе всех неособенных матриц порядка* n_p; $d\mu(h_{00})$ — (при $n_0 \neq 0$) *инвариантная мера в группе всех ортогональных матриц порядка* n_0, *если* $\mathfrak{G}$ — *ортогональная группа, и всех симплектических матриц порядка* n_0, *если* $\mathfrak{G}$ — *симплектическая группа. При этом имеют место формулы*

$$\int f(h)\, d\mu_l(h) = \int f(\delta z)\, d\mu(\delta)\, d\mu(z), \tag{32.33}$$

$$\int f(h)\, d\mu_r(h) = \int f(z\delta)\, d\mu(\delta)\, d\mu(z). \tag{32.34}$$

Положим

$$\beta(h) = \frac{d\mu_r(h)}{d\mu_l(h)}. \tag{32.35}$$

Из формул (32.31) и (32.32) следует, что

$$\beta(h) = |\Lambda_1|^{2n_0}|\Lambda_2|^{4n_0+4n_1} \ldots |\Lambda_r|^{2n_0+4(n_1+\cdots+n_{r-1})} \tag{32.36a}$$

в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$ и

$$\beta(h) = |\Lambda_1|^{2n_0+4n_1}|\Lambda_2|^{2n_0+4(n_1+n_2)} \ldots |\Lambda_r|^{2n_0+4(n_1+\cdots+n_r)} \tag{32.36b}$$

в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$.

7. Интегральные соотношения на группе $\mathfrak{G}$.

X. *Для интеграла на группе $\mathfrak{G}$ имеют место формулы*

$$\int f(g)\,d\mu(g) = \int f(kz)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{32.37}$$

$$\int f(g)\,d\mu(g) = \int f(\zeta h)\,d\mu(\zeta)\,d\mu_r(h). \tag{32.38}$$

Доказательство этих соотношений является дословным повторением доказательства предложения X п. 7 § 29.

Из предложения X, как и в п. 4 § 4, следует:

XI. *При переходе от z к $z\bar{g}$ мера $d\mu(z)$ преобразуется по формуле*

$$\frac{d\mu(z\bar{g})}{d\mu(z)} = \beta^{-1}(zg), \tag{32.39}$$

где функция $\beta(g)$ определяется равенством

$$\beta(kz) = \beta(k) \tag{32.40}$$

(см. формулы (32.29a) и (32.29b) для $\beta(k)$).

XII. *Имеет место формула*

$$\int f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int f(g)\left\{\sum \varphi(k_g)\,\frac{\prod\limits_{p=-r}^{r} D_p(\delta)}{D(\delta)}\,\beta(k_g)\right\}d\mu(g), \tag{32.41}$$

где k_g — матрица k в разложении $g = z^{-1}kz$, $z \in Z$, $k \in K$, δ_p — диагональная матрица из собственных значений $\lambda_{p,\alpha}$ матричного элемента k_{pp} матрицы $k = k_g$, δ — диагональная матрица из собственных значений λ_p матрицы g, определенная соотношением

$$\delta = \{\delta_{-n_{-r}}, \delta_{-n_{-r+1}}, \ldots, \delta_{n_r}\}. \tag{32.42}$$

Далее,

$$D(\delta) = \prod_{p>|q|} |\lambda_p - \lambda_q|^2$$

и при $n_0 \neq 0$

$$D_p(\delta_p) = \prod_{n_p \geqslant \alpha > \beta > 0} |\lambda_{p,\alpha} - \lambda_{p,\beta}|^2, \quad p > 0, \tag{32.43}$$

$$D_0(\delta_0) = \prod_{n_p \geqslant \alpha > |\beta|} |\lambda_{0\alpha} - \lambda_0|^2. \tag{32.44}$$

Доказательство. Выбросим из группы K все те матрицы $k \in K$, у которых совпадают модули хотя бы двух собственных значений. Тем самым группа K разобьется на $\frac{2^n n!}{2^{n_0} n_0! n_1! n_2! \ldots n_r!}$ областей K_s таких что в одной и той же области K_s не существует двух разных матриц k_1 и k_2, для которых при некоторых z_1 и z_2 будет $z_1^{-1}k_1z_1 = z_2^{-1}k_2z_2$. Сумма всех множеств K_s исчерпывает почти всю группу K; следовательно, интеграл в левой части (32.41) равен сумме интегралов

$$\int d\mu(z) \int\limits_{K_s} f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k). \tag{32.45}$$

В силу VIII п. 2 § 31, при фиксированной области K_s элементы $g = z^{-1}kz$, $z \in Z$, $k \in K_s$ пробегают почти всю группу $\mathfrak{G}$, так что равенство $g = z^{-1}kz$, $z \in Z$, $k \in K_s$ устанавливает взаимно-однозначное и дифференцируемое соответствие между независимыми параметрами элементов g и z, k ($k \in K_s$). Поэтому должна иметь место формула

$$\int d\mu(z) \int\limits_{K_s} f(z^{-1}kz)\,\varphi(k)\,d\mu_l(k) = \int f(g)\,\varphi(k_g)\,\omega(g)\,d\mu(g), \tag{32.46}$$

где $\omega(g)$ — якобиан перехода от $d\mu(g)$ к $d\mu(z)\,d\mu_l(k)$ при условии

$$g = z^{-1}kz,\quad z \in Z,\quad k \in K_s,$$

а k_g — матрица k в разложении $g = z^{-1}kz$.

Пользуясь инвариантностью мер $d\mu(z)$ и $d\mu(g)$, так же, как и в п. 3 § 20, получаем

$$\omega(z^{-1}gz) = \omega(g), \tag{32.47}$$

следовательно,

$$\omega(g) = \omega(z^{-1}k_gz) = \omega(k_g), \tag{32.48}$$

так что достаточно вычислить ω при условии $z = l$. Дифференцируя соотношение $zg = kz$, так же, как и в п. 3 § 20, получим:

$$d_lg = d_lk + d_lz - k^{-1}\,d_lz \cdot k. \tag{32.49}$$

Пусть, например, $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа. Запишем (32.49) в независимых матричных элементах; мы получим:

$$d_lg_{pq} = d_lz_{pq} - k_{pp}^{-1}\,d_lz_{pq}\cdot k_{qq} - \sum{}' (k^{-1})_{ps}\,d_lz_{st}k_{tq}, \quad \text{при } p > |q|, \tag{32.50}$$

$$d_lg_{pq} = d_lk_{pq} - \sum (k^{-1})_{ps}\,d_lz_{st}k_{tq} \text{ при } q > |p| \text{ или } p = q \geqslant 0, \tag{32.51}$$

где $'$ при сумме в (32.50) означает, что в этой сумме исключается одно слагаемое, соответствующее $s = p$, $t = q$.

В этих равенствах не все матрицы d_lz_{st} независимы; чтобы найти соотношения между ними, продифференцируем в точке $z = l$ равенство $z's_0z = s_0$. Мы получим, что при $z = l$

$$s_0 \cdot d_lz \cdot s_0^{-1} = -d_lz'; \tag{32.52}$$

следовательно,

$$s_p\, d_l z_{-p,-q} s_q^{-1} = -d_l z_{qp}. \tag{32.53}$$

Отсюда следует, что равенства (32.50), (32.51) представляют собой линейное преобразование от элементов матриц $d_l z_{pq}$, $d_l k_{pq}$ к элементам матриц $d_l g_{pq}$, причем матрица этого линейного преобразования при надлежащей нумерации этих переменных имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \ldots a_{rr} \end{pmatrix},$$

где $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ — матрицы преобразований

$$d_l z_{pq} \to d_l z_{pq} - k_{pp}^{-1} \cdot d_l z_{pq} \cdot k_{pp} \tag{32.54}$$

и единичные матрицы. Но, как было показано в п. 2 § 21, определитель преобразования (32.54) равен

$$\prod_{\alpha=1}^{n_p} \prod_{\beta=1}^{n_q} \left(1 - \frac{\lambda_{q,\beta}}{\lambda_{p,\alpha}}\right); \tag{32.55}$$

поэтому якобиан преобразования (32.50), (32.51) равен

$$\prod_{p>|q|} \prod_{\alpha=1}^{n_p} \prod_{\beta=1}^{n_q} \left|1 - \frac{\lambda_{q,\beta}}{\lambda_{p,\alpha}}\right|^2 =$$

$$= \frac{D(\delta)}{\prod\limits_{p=-r}^{r} D_p(\delta_p)} \prod_{p>|q|} |\Lambda_p|^{-2n_q} = \frac{D(\delta)}{\prod\limits_{p=-r}^{r} D_p(\delta_p)}\, \beta^{-1}(\delta).$$

Так как ω есть якобиан обратного преобразования, то отсюда следует, что

$$\omega = \frac{\prod\limits_{p=-r}^{r} D_p(\delta_p)}{D(\delta)}\, \beta(\delta). \tag{32.56}$$

Подставляя это выражение для ω в формулу (32.46), получаем

$$\int d\mu(z) \int\limits_{K_1} f(z^{-1}kz)\, \varphi(k)\, d\mu_l(k) = \int f(g)\, \varphi(k_g) \frac{\prod\limits_{p=-r}^{r} D_p(\delta_p)}{D(\delta)}\, \beta(\delta)\, d\mu(g).$$

Суммируя последнее равенство по всем областям K_s, приходим к формуле (32.41).

§ 33. Основные вырожденные серии представлений группы $\mathfrak{G}$

Основные вырожденные серии определяются системами чисел n_p, $p = -r, -r+1, \ldots, r$ $(\Sigma n_p = m)$, так что каждой такой системе отвечает некоторая основная вырожденная серия. Построение этих серий формально ничем не отличается от построения основной (невырожденной) серии.

Исходя из данной системы чисел n_p, мы рассматриваем подгруппу $K = K_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$ группы $\mathfrak{G}$ и правые классы смежности $\tilde{z}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K. Операторы T_g представлений вырожденной серии, соответствующей данной системе чисел n_p, определяются тогда как операторы в пространстве функций $f(\tilde{z})$ по формуле

$$T_g f(\tilde{z}) = \frac{\alpha(g_1 g)}{\alpha(g_1)} f(\widetilde{zg}), \tag{33.1}$$

где g_1 — произвольный элемент из класса $\tilde{z}$, а $\alpha(g)$ — функция, определяющая данное представление и удовлетворяющая условию

$$\alpha(kg) = \alpha(k)\,\alpha(g). \tag{33.2}$$

Исходя из того, что классы $\tilde{z}$ можно описывать при помощи элементов $z \in Z = Z_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$, а также при помощи правых смежностей классов $\tilde{u}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\Gamma = \Gamma_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$ мы получаем два различных способа описания представлений основных вырожденных серий.

1. Описание основных вырожденных серий при помощи группы Z. В силу VI п. 5 § 28, классы $\tilde{z}$ можно описывать при помощи содержащихся в них элементов $z \in Z$, следовательно, функции $f(\tilde{z})$ можно рассматривать как функции $f(z)$ на группе Z. Отсюда, повторяя обычные рассуждения (см. п. 1 § 5 и п. 1 § 14), получаем:

I. *Основная вырожденная серия, соответствующая данной системе чисел*

$$n_p,\ p = -r, -r+1, \ldots, r,\ n_{-p} = n_p, \tag{33.3}$$

описывается при помощи операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(z)$ на группе $Z = Z_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$, удовлетворяющих условию

$$\int |f(z)|^2 d\mu(z) < +\infty, \tag{33.4}$$

причем скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z)\overline{f_2(z)}\, d\mu(z). \tag{33.5}$$

Каждое из представлений данной серии определяется системой чисел

$$(m_1, m_2, \ldots, m_r;\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r), \tag{33.6}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_r$ — *целые, а* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ — *действительные числа. Представление* T_g, *отвечающее данной системе* (33.6), *задается формулой*

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(\overline{zg}), \tag{33.7}$$

где

$$\alpha(g) = \alpha(\delta) \text{ при } g = \delta\zeta z, \tag{33.8}$$

$$\alpha(\delta) = \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta), \tag{33.9}$$

$$\chi(\delta) = |\Lambda_1|^{m_1+i\rho_1}\Lambda_1^{-m_1}|\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\Lambda_2^{-m_2}\ldots|\Lambda_r|^{m_r+i\rho_r}\Lambda_r^{-m_r} \tag{33.10}$$

и Λ_p — *определитель матрицы* $\delta_p = \delta_{pp}$.

Формулу (33.7) для представления T_g можно также выписать в параметрах. Для этого заметим, что независимыми параметрами в группе Z являются элементы матриц z_{pq}, $p > |q|$ в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$ и z_{pq}, $p > |q|$, $z_{p,-p}$, $p > 0$ в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$ Функции $f(z)$ можно тогда рассматривать, как функции $f(z_{pq})$ и $f(z_{pq}, z_{p,-p})$ $p > |q|$ соответственно. При переходе от z к $\overline{zg}$ элементы матриц z_{pq}, $z_{p,-p}$ преобразуются по формулам, для получения которых достаточно положить

$$g^1 = zg, \quad g^1 = \delta^1\zeta^1 z^1. \tag{33.11}$$

Тогда $z^1 = \overline{zg}$ и элементы матрицы z^1 вычисляются по формулам (12.14), (12.16).

Далее, для вычисления $\alpha(zg)$ заметим, что числа Λ_p определяются из (14.8) в виде отношения соответствующих миноров матрицы $g^1 = zg$ и что, в силу (32.29a) и (32.29b),

$$\beta(\delta) = |\Lambda_1|^{2n_0}|\Lambda_2|^{2n_0+4n_1}\ldots|\Lambda_r|^{2n_0+4(n_1+\ldots+n_{r-1})} \tag{33.12a}$$

в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$ и

$$\beta(\delta) = |\Lambda_1|^{2n_0+4n_1}|\Lambda_2|^{2n_0+4(n_1+n_2)}\ldots|\Lambda_r|^{2n_0+4(n_0+\ldots+n_{r-1})} \tag{33.12b}$$

в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$.

Подставляя это выражение в (33.10) и (33.9), получим выражение для $\alpha(zg)$.

2. Описание основных вырожденных серий при помощи группы $\mathfrak{U}$. Классы $\tilde{z}$ можно описывать при помощи содержащихся в них правых классов $\tilde{u}$ группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе $\Gamma = \Gamma_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$. Функции $f(\tilde{z})$ можно поэтому рассматривать как функции $f(\tilde{u})$; повторяя, далее, рассуждения § 8 (см. также п. 3 § 15 и п. 3 § 30), получаем:

II. *Представления основных вырожденных серий описываются операторами в пространстве* $\mathfrak{H}_1$ *функций* $\varphi(\tilde{u})$ *таких, что*

$$\int |\varphi(\tilde{u})|^2 d\mu(\tilde{u}) < +\infty. \tag{33.13}$$

Скалярное произведение в $\mathfrak{H}_1$ задается формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(\tilde{u}) \overline{\varphi_2(\tilde{u})}\, d\mu(\tilde{u}). \tag{33.14}$$

Представления данной серии определяются функциями $\alpha_1(g)$, удовлетворяющими условиям

$$\alpha_1(kg) = \alpha_1(k)\alpha_1(g), \tag{33.15}$$

$$|\alpha_1(u)| = 1. \tag{33.16}$$

Представление T_g, соответствующее данной функции $\alpha_1(g)$, задается формулой

$$T_g\varphi(\tilde{u}) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)}\varphi(\tilde{u}\bar{g}). \tag{33.17}$$

При этом функции

$$\alpha_1(g) \text{ и } \alpha_1'(g) = \frac{\alpha_1(g)}{\varkappa(\tilde{u})} \quad \text{при } g = ku, \tag{33.18}$$

где $\varkappa(\tilde{u})$ — произвольная функция, по модулю равная единице, определяют одно и то же представление.

Пространство $\mathfrak{H}_1$ можно также рассматривать как пространство функций $\varphi(u)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(\gamma u) = \varphi(u), \tag{33.19}$$

$$\int |\varphi(u)|^2 d\mu(u) < +\infty, \tag{33.20}$$

причем скалярное произведение в $\mathfrak{H}_1$ задается формулой

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(u)\overline{\varphi_2(u)}\, d\mu(u). \tag{33.21}$$

Тогда формула для представления T_g примет вид

$$T_g\varphi(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)}\varphi(u\bar{g}) \tag{33.22}$$

где $u\bar{g}$ — произвольный элемент класса $\tilde{u}\bar{g}$.

3. Разложение по представлениям унитарной подгруппы. Формула (33.22) для представлений основных вырожденных серий дает возможность перенести на основные вырожденные серии результаты п. 3 § 30. Для этого нужно только обобщить понятие весового вектора.

Вектор f_0 в пространстве неприводимого представления $c(u)$ группы $\mathfrak{U}$ называется *весовым вектором по отношению к группе* $\Gamma = \Gamma_{-n_{-r}, -n_{-r+1}, \ldots, n_r}$, если он удовлетворяет условию

$$c(\gamma) f_0 = \lambda(\gamma) f_0 \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma, \tag{33.23}$$

где $\lambda(\gamma)$ — скалярная функция от γ.

Теорема 21 и предложение V п. 3 § 30 остаются верными и для основных вырожденных серий, если в них под f_0 понимать весовой вектор относительно группы $\Gamma_{-n_{-r}, -n_{-r+1}, \ldots, n_r}$.

§ 34. Дополнительные серии представлений группы $\mathfrak{G}$

Представления основных серий (невырожденной или вырожденных) описывались в виде операторов в пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(z)$, в котором скалярное произведение определялось формулой

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z) \overline{f_2(z)} \, d\mu(z). \qquad (34.1)$$

Оказывается, однако, что есть еще одна возможность задать скалярное произведение в пространстве функций $f(z)$; эта возможность приводит к новым сериям представлений, которые мы будем в дальнейшем называть *дополнительными сериями*. Эти новые серии представлений попрежнему задаются формулой

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z). \qquad (34.2)$$

Однако, в силу того, что скалярное произведение будет определено формулой, отличной от (34.1), функция $\alpha(g)$ будет удовлетворять некоторым новым условиям, которые следуют из того, что оператор T_g должен быть унитарным. Построение других скалярных произведений, отличных от (34.1), связано с транзитивными многообразиями в пространстве пар $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$.

Многообразие $\mathfrak{M}$ пар $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ мы назовем *транзитивным*, если: 1°) из $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \in \mathfrak{M}$ следует, что $(\widetilde{z_1 g}, \widetilde{z_2 g}) \in \mathfrak{M}$; 2°) если $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ и $(\tilde{z}_3, \tilde{z}_4)$ — две произвольные пары из $\mathfrak{M}$, то существует g такое, что $\tilde{z}_3 = \widetilde{z_1 g}$, $\tilde{z}_4 = \widetilde{z_2 g}$. Если $\mathfrak{M}$ — транзитивное многообразие, то скалярное произведение (f_1, f_2) можно задать формулой

$$(f_1, f_2) = \int a(\tilde{z}_1, \tilde{z}) f_2(\tilde{z}_1) f_2(\tilde{z}_2) \, d\mu(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2), \qquad (34.3)$$

где $a(z_1, z_2)$ — некоторая функция, а $d\mu(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ — некоторая мера на $\mathfrak{M}$. Формула (34.1) есть частный случай (34.3), соответствующий многообразию $\mathfrak{M}$ пар $(\tilde{z}, \tilde{z})$.

Скалярное произведение (34.3) должно быть инвариантным по отношению к преобразованиям T_g в (34.2). Это условие накладывает ограничения на функцию $\alpha(g)$, функцию $a(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ и многообразие $\mathfrak{M}$.

Кроме того, оказывается, что различные допустимые многообразия $\mathfrak{M}$ могут приводить по существу к одним и тем же сериям представлений (см. по этому поводу § 18). Мы ограничимся, поэтому, рассмотрением только тех многообразий, которые приводят к наиболее простым формулам для скалярного произведения, не останавливаясь на других возможностях задать представления при помощи других многообразий.

1. Множества Z_τ. Пусть $\mathfrak{G}$ — (ортогональная или симплектическая) группа матриц порядка m и пусть τ — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию

$$m_0 = m - 4\tau \geqslant 0. \tag{34.4}$$

Пусть, далее, n_p — система натуральных чисел такая, что

$$\sum_{p=-r}^{r} n_p = m_0 \tag{34.5}$$

и

$$n_p = 1 \quad \text{при} \quad |p| > r. \tag{34.6}$$

Дополнительные серии мы будем в дальнейшем строить для таких систем n_p.

Обозначим через $\dot{Z}_{A;\tau}$ совокупность всех матриц вида

$$z = \begin{pmatrix} u_{-\tau} & & & & & & & \\ & u_{-\tau+1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & u_{-1} & & & & \\ & & & & 1_{m_0} & & & \\ & & & & & u_1 & & \\ & & & & & & u_2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & u_\tau \end{pmatrix}, \tag{34.7}$$

где 1_{m_0} — единичная матрица порядка m_0, u_i — матрица второго порядка вида

$$u_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad z_p \neq 0, \quad p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \tau \tag{34.8}$$

и где все остальные места в матрице (35.7) заняты нулями. Очевидно, $z_{A;\tau}$ принадлежит подгруппе $Z_A = Z_{A;\,n_p}$ комплексной унимодулярной группы A_{m-1}, где n_p — система натуральных чисел, удовлетворяющая соотношениям (34.5) и (34.6).

Обозначим через $\dot{Z}_\tau$ совокупность матриц $\dot{z} \in \dot{Z}_{A,\tau}$, принадлежащих группе $\mathfrak{G}$.

Очевидно,

$$\dot{Z}_\tau \subset Z. \tag{34.9}$$

Найдем условия, при которых $\dot{z} \in \mathfrak{G}$, для чего запишем матрицу s_0 в виде

$$s_0 = \begin{pmatrix} & & & & & & \pm s_2 \\ & & & & & \pm s_2 & \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & \pm s_2 & & & \\ & & s_{m_0} & & & & \\ & s_2 & & & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & \\ s_2 & & & & & & \\ s_2 & & & & & & \end{pmatrix}, \tag{34.10}$$

где все остальные места заняты нулями и где s_2 — матрица второго порядка:

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

s_{m_0} — матрица s_0 для группы матриц порядка m_0 ортогональной, если $\mathfrak{G}$ — ортогональная группа, симплектической, если $\mathfrak{G}$ — симплектическая группа; при этом знаки $+$ или $-$ в (34.10) берутся в зависимости от того, будет ли $\mathfrak{G}$ ортогональной или симплектической группой.

Матрица $\dot{z}$ принадлежит группе $\mathfrak{G}$, если она удовлетворяет соотношению

$$z'^{-1} = s_0 \dot{z} s_0^{-1}. \tag{34.11}$$

Подставляя в это соотношение вместо $\dot{z}$ и s_0 их выражения (34.7) и (34.10), мы получим, что (34.11) эквивалентно условиям

$$u_p'^{-1} = s_2 u_{-p} s_2^{-1}. \tag{34.12}$$

Для чисел z_p в (34.8) условие (34.12) означает, что

$$z_{-p} = -z_p. \tag{34.13}$$

Таким образом:

Множество Z_τ состоит из всех матриц z вида (34.7), удовлетворяющих условиям

$$z_{-p} = -z_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Отсюда следует, что независимыми параметрами в множестве $\dot{Z}_\tau$ являются числа

$$z_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau. \tag{34.14}$$

Обозначим через $K_A = K_{A;\, n_p}$ подгруппу K для унимодулярной группы $Z_{A_{n-1}}$, соответствующую числам n_p.

I. *Если* $\dot{z} \in \dot{Z}_{A;\,\tau}$, $k \in A_A$, *то в разложении*

$$zk = k^1 z^1, \quad k^1 \in K_A, \quad z^1 \in Z_A \tag{34.15}$$

также $z^1 \in \dot{Z}_{A,\,\tau}$.

Доказательство. Запишем матрицу k в виде

$$k = \| v_{pq} \|, \quad p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \tau, \tag{34.16}$$

где v_{00} — квадратная матрица порядка m_0, v_{0q} — матрица из m_0 строк и двух столбцов, v_{p0} — матрица из двух строк и m_0 столбцов, v_{pq} при $p, q \neq 0$ — квадратная матрица второго порядка. При этом из того, что $k \in K_A$, следует, что

$$v_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p > q, \tag{34.17}$$

$$v_{pp} = \begin{pmatrix} v_p & \mu_p \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad p \neq 0. \tag{34.18}$$

Запишем, далее, искомую матрицу k^1 аналогичным образом в виде $k^1 = \| v^1_{pq} \|$ и будем искать матрицу z^1 в (34.15) в виде матрицы $\dot{z}^1 \in \dot{Z}_A$. Равенство $\dot{z}k = k^1\dot{z}^1$ означает тогда, что

$$v^1_{00} = v_{00}, \quad v^1_{p0} = u_p v_{p0}, \quad v^1_{0p} u^1_p = v_{0p}, \quad p > 0, \tag{34.19}$$

$$u_p v_{pq} = v^1_{pq} u^1_q \quad \text{при} \quad p, q \neq 0. \tag{34.20}$$

В частности, при $q = p$

$$u_p v_{pp} = v^1_{pp} u^1_p. \tag{34.21}$$

Вспоминая, что

$$u_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{pp} = \begin{pmatrix} \nu_p & \mu_p \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \tag{34.22}$$

и записывая аналогичным образом v^1_{pp} и u^1_p:

$$u^1_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z'_p & 1 \end{pmatrix}, \quad v^1_{pp} = \begin{pmatrix} \nu'_p & \mu'_p \\ 0 & \lambda'_p \end{pmatrix}, \tag{34.23}$$

сравнением элементов матриц в левой и правой части (34.21) легко находим, что (34.21) имеет относительно v^1_{pp} и u^1_p единственное решение. Именно,

$$\lambda'_p = \lambda_p + \mu_p z_p, \quad \mu'_p = \mu_p, \quad \nu'_p = \frac{\lambda_p \nu_p}{\lambda_p + \mu_p z_p}, \tag{34.24}$$

$$z'_p = \frac{\nu_p z_p}{\lambda_p + \mu_p z_p}. \tag{34.25}$$

Определив, таким образом, u^1_p и v^1_{pp}, мы найдем остальные элементы v^1_{pq} матрицы k^1 из (34.19) и (34.20) (см. аналогичное рассуждение в п. 1 § 16).

II. *Если $\dot{z} \in \dot{Z}_\tau$ и $k \in K$, то имеет место разложение*

$$\dot{z}k = k^1\dot{z}^1, \quad k^1 \in K, \quad \dot{z}^1 \in \dot{Z}_\tau.$$

Доказательство. В силу I,

$$\dot{z}k = k^1\dot{z}^1, \qquad k^1 \in K_A, \qquad \dot{z}^1 \in \dot{Z}_{A,\tau}. \tag{34.26}$$

Остается доказать, что $k^1 \in \mathfrak{G}$, $z^1 \in \mathfrak{G}$, т. е. что эти матрицы удовлетворяют условию

$$g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0.$$

Матрицы $\dot{z}$, k удовлетворяют этому условию; поэтому из (34.26) следует

$$\dot{z}k = s_0^{-1}\dot{z}'^{-1}s_0 \cdot s_0^{-1}k'^{-1}s_0 = s_0^{-1}(k')'^{-1}s_0 \cdot s_0^{-1}(\dot{z}^1)'^{-1}s_0. \tag{34.27}$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$s_0^{-1}(k^1)'^{-1}s_0 \in K_A, \qquad s_0^{-1}(\dot{z})'^{-1}s_0 \in \dot{Z}_{A;\tau},$$

следовательно, в силу единственности разложения (34.26),

$$k^1 = s_0^{-1}(k^1)'^{-1}s_0, \qquad \dot{z}^1 = s_0^{-1}(\dot{z}^1)'^{-1}s_0.$$

Очевидно, доказанное нами предложение II означает, что, если $\dot{z} \in \dot{Z}_\tau$ то и $\overline{\dot{z}k} \in \dot{Z}_\tau$ при любом $k \in K$.

2. Многообразия $\mathfrak{M}_\tau$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\tau$ совокупность всех пар вида $(z, \dot{z}z)$, где z пробегает группу Z, а $\dot{z}$ — множество $\dot{Z}_\tau$.

III. *Множество* $\mathfrak{M}_\tau$ *есть транзитивное многообразие в пространстве пар* (z_1, z_2).

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\mathfrak{M}_\tau$ удовлетворяет следующим двум условиям:

а) Если $(z_1, z_2) \in \mathfrak{M}_\tau$, то для любого $g \in \mathfrak{G}$ также $(z_1\bar{g}, z_2\bar{g}) \in \mathfrak{M}_\tau$.

б) Если $(z_1, z_2) \in \mathfrak{M}_\tau$ и $(\overset{0}{z}_1, \overset{0}{z}_2) \in \mathfrak{M}_\tau$, то существует элемент $g \in \mathfrak{G}$ такой, что $\overset{0}{z}_1\bar{g} = z_1$ и $\overset{0}{z}_2\bar{g} = z_2$.

По определению, всякая пара из $\mathfrak{M}_\tau$ имеет вид $(z, \dot{z}z)$; мы докажем что условие а) выполнено, если покажем, что пара $(z\bar{g}, (\dot{z}z)\bar{g})$ имеет тот же вид.

Положим

$$zg = kz_1, \tag{34.28}$$

тогда

$$z_1 = z\bar{g}. \tag{34.29}$$

Рассмотрим, далее, произведение $\dot{z}k$; в силу II п. 1, его можно представить в виде

$$\dot{z}k = k_1\dot{z}_1, \qquad k_1 \in K, \qquad \dot{z}_1 \in \dot{Z}_\tau. \tag{34.30}$$

Отсюда и из (34.28) следует:

$$(z\dot{z})\,g = \dot{z}kz_1 = k_1\dot{z}_1z_1,$$

т. е.

$$(\dot{z}z)\,\bar{g} = \dot{z}_1z_1.$$

Это равенство вместе с (34.29) дает:

$$(z\bar{g}, (\dot{z}z)\bar{g}) = (z_1, \dot{z}_1 z_1);$$

следовательно, а) доказано.

Для доказательства б) заметим сначала, что пару $(z, \dot{z}z)$ можно перевести в пару вида (e, z) применением к ее элементам преобразования $g = z^{-1}$. Поэтому достаточно доказать б) для пар вида $(e, \dot{z})$. Такие пары переводятся в пары того же вида преобразованиями $g = k \in K$, ибо $e\bar{k} = e$. Поэтому достаточно показать, что если $\dot{z}^0$ — фиксированная матрица из $\dot{z}_\tau$, например, определенная равенствами

$$z_p^0 = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tau,$$

то всякую другую матрицу $\dot{z} \in \dot{Z}_\tau$ можно получить из $\dot{z}^0$ при помощи некоторого $k \in K$ по формуле

$$\dot{z}^0 k = k_1 \dot{z}.$$

Последнее, однако, непосредственно следует из (34.25); если положить там $z_p = 1$, то можно распорядиться числами λ_p, ν_p и μ_p так, чтобы z'_p было произвольным числом, отличным от нуля.

3. **Мера в множестве** $\dot{Z}_\tau$. Каждая матрица $\dot{z} \in \dot{Z}_\tau$ определяется параметрами

$$z_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Зададим меру в $\dot{Z}_\tau$, полагая

$$d\mu(\dot{z}) = \prod_{p=1}^{\tau} d\mu(z_p), \tag{34.31}$$

где $d\mu(z_p) = dx_p dy_p$ при $z_p = x_p + iy_p$.

Найдем, как преобразуется мера $d\mu(\dot{z})$ при переходе от z к $\dot{z}\bar{k}$.

Введем для этой цели функцию $\gamma(g)$, полагая

$$\gamma(k) = \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{\lambda_p}{\gamma} \right|^2, \qquad \gamma(kz) = \gamma(k). \tag{34.32}$$

IV. *При переходе от* $\dot{z}$ *к* $z\bar{k}$ *мера* $d\mu(\dot{z})$ *преобразуется по формуле*

$$\frac{d\mu(\dot{z}\bar{k})}{d\mu(\dot{z})} = \gamma^{-1}(\dot{z}k). \tag{34.33}$$

Доказательство. Из формул (34.25) и (34.24) следует, что

$$\frac{d\mu(z'_p)}{d\mu(z_p)} = \frac{|\lambda_p \nu_p|^2}{|\lambda_p + \mu_p z_p|^4} = \left| \frac{\nu'_p}{\lambda'_p} \right|^2.$$

Отсюда

$$\frac{d\mu(\dot{z}\overline{k})}{d\mu(\dot{z})} = \prod_{p=1}^{\tau} \left| \frac{\nu'_p}{\lambda'_p} \right|^2 = \gamma^{-1}(k^1) = \gamma^{-1}(\dot{z}k).$$

4. Определение функции $\alpha(g)$ и скалярного произведения в дополнительных сериях. Будем искать представления дополнительной серии в виде

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\overline{g}), \tag{34.34}$$

где

$$\alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta), \tag{34.35}$$

$$\chi(\delta) = \prod_{p=1}^{r+2\tau} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p}, \qquad \Lambda_p = \det \delta_p, \tag{34.36}$$

но где ρ_p уже не обязательно действительные числа.

Скалярное произведение функций $f(z)$ будем при этом искать в виде

$$(f_1, f_2) = \int a(z, \dot{z}z) f_1(z) \overline{f_2(\dot{z}z)}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}), \tag{34.37}$$

где f_1 и f_2 таковы, что интеграл в (35.37) сходится абсолютно*.

Оператор T_g должен быть унитарным в этом скалярном произведении, т. е. это скалярное произведение должно быть инвариантным при применении к функциям f_1, f_2 оператора T_g. Мы получаем

$$\int a(z, \dot{z}z) f_1(z) \overline{f_2(\dot{z}z)}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}) =$$

$$= \int a(z, \dot{z}z)\, \alpha(zg) f_1(z\overline{g})\, \overline{\alpha(\dot{z}zg) f_2((\dot{z}z)\overline{g})}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}).$$

Повторяя, далее, дословно рассуждения п. 1 § 17 и пользуясь формулой (34.33), приходим к следующему результату:

V. *Интеграл*

$$(f_1, f_2) = \int a(z, \dot{z}z) f_1(z) f_2(\dot{z}z)\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z})$$

инвариантен по отношению к оператору

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\overline{g}),$$

где

$$\alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta)$$

* Пространство будет затем пополнено по этому скалярному произведению.

тогда и только тогда, когда функции $\chi(\delta)$ *и* $a(z, \dot{z}z)$ *имеют следующий вид:*

$$\chi(\delta) = \prod_{p=1}^{r} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{\tau} |\nu_p|^{m_p + i\sigma'_p + \sigma''_p \nu - m_p} |\lambda_p|^{m_p + i\sigma'_p - \sigma''_p} \lambda_p^{-m_p}, \tag{34.38}$$

$$a(z, \dot{z}z) = a(e, \dot{z}) = c \prod_{p=1}^{\tau} |z_p|^{-2+2\sigma''_p}, \tag{34.39}$$

где m_p *— целые,* ρ_p, σ'_p, σ''_p *— действительные числа,* c *— константа,*

$$\Lambda_p = \det \delta_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, r,$$

а

$$\nu_1, \lambda_1, \nu_2, \lambda_2, \ldots, \nu_\tau, \lambda_\tau$$

диагональные элементы

$$\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \delta_{r+3}, \delta_{r+4}, \ldots, \delta_{n-1}, \delta_n$$

матрицы δ.

5. Выражение для формы (f_1, f_2) **в параметрах.** Для того, чтобы форма (f_1, f_2), определенная формулами (34.37) и (34.39), могла быть принята в качестве скалярного произведения, она должна быть положительно определенной. Это условие накладывает ограничения на числа σ''_p в формуле (34.39). Чтобы получить это условие положительно определенным, мы сначала запишем выражения для формы (f_1, f_2) в параметрах.

Условимся обозначать через $\hat{z}$ матрицы z, у которых обращаются в нуль как раз те элементы, которые находятся на местах, занятых элементами z_p матрицы $\hat{z}$.

Очевидно, матрицы $\hat{z}$ будут элементами группы $Z_{n'_p}$, где n'_p — система чисел, определенная условиями

$$n'_p = n_p \quad \text{при} \quad |p| \leqslant r, \qquad n_p = 2 \quad \text{при} \quad |p| > r. \tag{34.40}$$

Обозначим эту группу через $\hat{Z}$.

VI. *Всякую матрицу* z *можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$z = \dot{z}\hat{z}. \tag{34.41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\hat{Z}_A$ группу Z_{A, n'_p}, составленную для унимодулярной группы A_{m-1}. В п. 2 § 17 было доказано, что матрицу z можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$z = \dot{z}\hat{z}, \qquad \dot{z} \in Z_{A, \tau}, \qquad \hat{z} \in \hat{Z}_A. \tag{34.42}$$

Повторяя обычные рассуждения, из условия $z \in \mathfrak{G}$ и единственности разложения (34.42) получаем, что также $\dot{z} \in \mathfrak{G}$, $\hat{z} \in \mathfrak{G}$.

VII. *При условии $z = \dot{z}\hat{z}$ мера $d\mu(z)$ выражается по формуле*

$$d\mu(z) = d\mu(\dot{z})\, d\mu(\hat{z}),$$

где $d\mu(\hat{z})$ — инвариантная мера в группе $\hat{Z}$.

Доказательство. Положим

$$d\mu(z) = \omega(\dot{z}, \hat{z})\, d\mu(\dot{z})\, d\mu(\hat{z}).$$

Из инвариантности мер $d\mu(z)$ и $d\mu(\hat{z})$ легко следует, что $\omega(\dot{z}, \hat{z}) = c = \text{const}$ и что при нашей нормировке этих мер $c = 1$.

Из предложения VI следует, что всякую функцию $f(z)$ можно рассматривать как функцию от $\dot{z}$ и $\hat{z}$. Таким образом, можно положить

$$f(z) = f(\hat{z}, \dot{z}) = f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau). \tag{34.43}$$

Подставляя это выражение для f и выражение (34.39) для $a(z, \dot{z}z)$ в формулу (34.37) для (f_1, f_2) и пользуясь предложением VI, получаем

VIII. *Скалярное произведение (f_1, f_2) функций $f_1(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$ $f_2(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$ задается формулой*

$$(f_1, f_2) = \int \prod_{p=1}^{\tau} |z_p - z_p'|^{-2+2\sigma_p''} \left[\int f_1(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau) \overline{f_2(\hat{z}, z_1', \ldots, z_\tau')}\, d\mu(\hat{z})\right] d\mu(z_1) \ldots$$
$$\ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_p'). \tag{34.44}$$

Из этой формулы следует, что для сходимости интеграла (34.44) должно выполняться условие $\sigma_p'' > 0$.

6. Условие положительной определенности формы (f_1, f_2); пополнение пространства $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всех ограниченных измеримых функций $f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)$, для которых

$$\int \prod_{p=1}^{\tau} |z_p - z_p'|^{-2+2\sigma_p''} |f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)|\, |f(\hat{z}, z_1', \ldots, z_p')|\, d\mu(\hat{z}) d\mu(z_1) \ldots$$
$$\ldots d\mu(z_\tau)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_\tau') < +\infty, \tag{34.45}$$

и для таких функций f определим форму (f_1, f_2) по формуле (34.44).

Далее, при $0 < \sigma_p'' < 1$ обозначим через H совокупность всех функций $\varphi(\hat{z}, w_1, \ldots, w_\tau)$ таких, что

$$\|\varphi\|^2 = \prod_{p=1}^{\tau} 2^{2\sigma_p''} \frac{\Gamma(\sigma_p'')}{\Gamma(1-\sigma_p'')} \int |w_1|^{-2\sigma_1''} \ldots |w_\tau|^{-2\sigma_\tau''} |\varphi(\hat{z}, w_1, \ldots, w_\tau)|^2\, d\mu(w_1) \ldots$$
$$\ldots d\mu(w_\tau)\, d\mu(\hat{z}) < +\infty. \tag{34.46}$$

Очевидно, H — гильбертово пространство с нормой $\|\varphi\|$.

Из результатов п. 3 § 17 следует:

IX. *Если*

$$0 < \sigma_p'' < 1, \qquad p = 1, 2, \ldots, \tau, \tag{34.47}$$

то для любой функции $f \in \mathfrak{H}$ *интеграл*

$$\varphi(\hat{z}, w_1, \ldots, w_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(\hat{z}, z_1, \ldots, z_\tau)\, e^{i \operatorname{Re}(\bar{w}_1 z_1 + \ldots + \bar{w}_p z_p)}\, d\mu(z_1) \ldots d\mu(z_p) \tag{34.48}$$

сходится в среднем в смысле нормы $\|\varphi\|$ *и при этом*

$$(f, f) = \|\varphi\|^2. \tag{34.49}$$

Отсюда:

X. *При*

$$0 < \sigma_p'' < 1, \qquad p = 1, 2, \ldots, \tau$$

интеграл

$$(f_1, f_2) = \int \prod_{p=1}^{\tau} |z_p - z_p'|^{-2+2\sigma_p''} f_1(\hat{z}, z_1, \ldots, z_p) \overline{f_2(\hat{z}, z_1', \ldots, z_p')}\, d\mu(\hat{z})\, d\mu(z_1) \ldots$$
$$\ldots d\mu(z_p)\, d\mu(z_1') \ldots d\mu(z_p')$$

есть положительно определенная форма.

Мы можем поэтому взять форму (f_1, f_2) в качестве скалярного произведения в $\mathfrak{H}'$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ пополнение по отношению к форме (f, f). В силу IX, формула (34.48) устанавливает изометрическое отображение $f \to \varphi$ пространства $\mathfrak{H}'$ в пространство H. Это отображение продолжается, и притом единственным образом, до изометрического отображения пространства в пространство H.

Образ пространства $\mathfrak{H}$ при этом отображении есть все пространство H.

Доказательство этого предложения совпадает с доказательством аналогичного результата в п. 3 § 17.

7. Описание дополнительных серий представлений группы $\mathfrak{G}$. Оператор T_g, определенный формулами (34.34), (34.35) и (34.38), отображает $\mathfrak{H}'$ на себя с сохранением норм (f, f). Его можно поэтому продолжать, и притом единственным образом, до унитарного оператора T_g в $\mathfrak{H}$. Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 22. *Дополнительные серии унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$ определяются натуральным числом τ, удовлетворяющим условию*

$$m_0 = m - 4\tau \geqslant 0,$$

и неотрицательными целыми числами n_p такими, что

$$\sum_{p=-r}^{r} n_p = m_0, \quad n_p = 1 \quad \text{при } |p| > r,\ n_{-p} = n_p.$$

Представления T_g из данной дополнительной серии задаются целыми числами

$$m_1, \ldots, m_r$$

и действительными числами

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r; \sigma_1', \ldots, \sigma_\tau'; \sigma_1'', \ldots, \sigma_\tau'',$$

причем

$$0 < \sigma_p'' < 1, \quad p = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Представление, соответствующее данной системе таких чисел, описывается унитарными операторами T_g в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, полученном пополнением множества $\mathfrak{H}'$ функций $f(z)$ на группе $Z = Z_{np}$ по скалярному произведению

$$(f_1, f_2) = \int \prod_{p=1}^{\tau} |z_p|^{-2+2\sigma_p''} f_1(z) \overline{f_2(\dot{z}z)}\, d\mu(z)\, d\mu(\dot{z}),$$

причем

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(z\bar{g}),$$

где

$$\alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\chi(\delta),$$

$$\chi(\delta) = \prod_{p=1}^{r} |\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \Lambda_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{\tau} |\nu_p|^{m_p + i\sigma_p' + \sigma_p''} \nu_p^{-m_p} |\lambda_p|^{m_p + i\sigma_p - \sigma_p''} \lambda_p^{-m_p},$$

$$\Lambda_p = \det \delta_p, \quad p = 1, 2, \ldots, r;$$

$$\nu_1 = \delta_{r+1}, \quad \lambda_1 = \delta_{r+2}, \quad \nu_2 = \delta_{r+3}, \quad \lambda_l = \delta_{r+4}, \ldots, \quad \nu_\tau = \delta_{n-1}, \quad \lambda_\tau = \delta_n,$$

и где

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}.$$

Дополнительная серия называется невырожденной, если все числа $n_p = 1$, и вырожденной — в противном случае.

Определение δ, ζ, z и δ_p см. § 32.

Глава IX

След в представлениях группы $\mathfrak{G}$

В главе V мы видели, как можно построить след в представлении комплексной унимодулярной группы и тем самым перенести на эти представления теорию характеров конечных групп.

Формулы для представлений, полученные в §§ 30, 31, 34, и интегральные соотношения в §§ 29, 32 дают возможность перенести результаты главы V на представления ортогональной и симплектической группы $\mathfrak{G}$.

§ 35. Условия существования и формулы для следа

1. След в основной невырожденной серии. Пусть $x(g)$ — ограниченная измеримая функция, равная нулю вне некоторого компактного множества и пусть

$$T_g \varphi(u) = \frac{\alpha_1(ug)}{\alpha_1(u)} \varphi(ug) \tag{35.1}$$

— представление основной невырожденной серии, реализованное в пространстве $\mathfrak{H}_1$ функций $\varphi(u)$ на группе $\mathfrak{U}$, удовлетворяющих условию $\varphi(\gamma u) = \varphi(u)$.

Рассмотрим оператор

$$T_x = \int x(g) T_g d\mu(g). \tag{35.2}$$

Повторяя рассуждения пп. 3 и 4 § 19, мы получаем, что оператор T_x имеет ядро

$$K(u, u_1, \chi) = c \frac{\alpha_1(u_1)}{\alpha_1(u)} \int x(u^{-1}ku_1) \alpha_1(k) d\mu_l(k), \tag{35.3}$$

где c — константа, связанная с нормировкой мер и определенная в п. 7в) § 29. При этом существует интеграл

$$\int |K(u, u_1, \chi)|^2 d\mu(u) d\mu(u_1), \tag{35.4}$$

который является следом $S(T_x^*T_x)$ оператора $T_x^*T_x$. Как и в п. 4 § 19, существование интеграла (35.4) следует из компактности группы $\mathfrak{U}$ и наших исходных предположений о функции $x(g)$, ибо интеграл в (35.4) оказывается интегралом ограниченной функции по компактному множеству.

Представление T_g можно также реализовать в пространстве функции $f(z)$ по формуле

$$T_g f(z) = \alpha(zg) f(\overline{zg}). \tag{35.5}$$

В этой реализации оператор T_x имеет ядро

$$\widetilde{K}(z, z_1, \chi) = \int x(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k), \tag{35.6}$$

которое связано с ядром $K(u, u_1, \chi)$ соотношением

$$K(u, u_1, \chi) = c\beta^{-\frac{1}{2}}(u)\,\beta^{-\frac{1}{2}}(u_1)\,K(z, z_1, \chi) \tag{35.7}$$

при $u = k_0 z, \quad u_1 = k_1 z_1$. (35.8)

Отсюда и из формулы (29.81) перехода от $d\mu(z)$ к $d\mu(\widetilde{u})$ следует, что

$$\int |K(u, u_1, \chi)|^2 d\mu(u) = \int |\widetilde{K}(z, z_1, \chi)|^2 d\mu(z) = \int \widetilde{K}_1(z, z, \chi)\,d\mu(z) =$$
$$= \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{35.9}$$

где

$$x_1(g) = (x^*x)(g) = \int \overline{x(g_1 g^{-1})}\,x(g_1)\,d\mu(g_1),$$

а $\widetilde{K}_1(z, z_1, \chi)$ — ядро оператора $T_{x_1} = T_x^*T_x$.

Применяя к последнему интегралу в (35.9) интегральное соотношение (29.83), приходим к следующей теореме:

Теорема 23. *Пусть T_g — представление основной невырожденной серии, определенное функцией*

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi(\delta);$$

тогда для любой ограниченной измеримой функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, оператор

$$T_{x_1} = \int x_1(g)\,T_g\,d\mu(g), \tag{35.10}$$

соответствующий функции

$$x_1(g) = (x^*x)(g) = \int \overline{x(g_1 g^{-1})}\,x(g_1)\,d\mu(g_1), \tag{35.11}$$

имеет след $S(T_{x_1})$. *Этот след вычисляется по формуле*

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z) = \int x_1(g)\frac{\Sigma\chi(\delta)}{D(\delta)}\,d\mu(g), \tag{35.12}$$

где δ — *диагональная матрица из собственных значений* $\lambda_p = \delta_p$ *матрицы* g,

$$D(\delta) = |\delta_2|^{-2}|\delta_3|^{-4}\ldots|\delta_n|^{-2n+2}\prod_{p>|q|>0}|\delta_p - \delta_q|^2 \tag{35.13a}$$

в случае ортогональной группы четного порядка,

$$D(\delta) = |\delta_1|^{-1}|\delta_2|^{-3}\ldots|\delta_n|^{-2n+1}\prod_{p>|q|\geqslant 0}|\delta_p - \delta_q|^2 \tag{35.13b}$$

в случае ортогональной группы нечетного порядка, и

$$D(\delta) = |\delta_1|^{-2}|\delta_2|^{-2}\ldots|\delta_n|^{-2n}\prod_{p=1}^{n}|\delta_p - \delta_{-p}|^2\prod_{p>|q|>0}|\delta_p - \delta_q|^2 \tag{35.13c}$$

в случае симплектической группы, а сумма в (35.12) *распространяется на все подстановки* s *этих собственных значений, которые матрицу* $\delta\in\mathfrak{G}$ *переводят в матрицу* $\delta_s\in\mathfrak{G}$.

Эта теорема показывает, что оператору T_g основной невырожденной серии естественно приписать след

$$S(T_g) = \frac{\Sigma\chi(\delta)}{D(\delta)}. \tag{35.14}$$

2. След в представлениях основных вырожденных серий. Рассуждения п. 1 полностью переносятся на представления основных вырожденных серий. Мы снова получаем формулу (см. (35.9))

$$S(T_{x_1}) = \int|K(u, u_1, \chi)|^2 d\mu(u) = \int|\tilde{K}(z, z_1, \chi)|^2 d\mu(z) =$$
$$= \int\tilde{K}_1(z, z, \chi)\,d\mu(z) = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{35.15}$$

где $x_1(g) = (x^*x)(g)$, а $x(g)$ — ограниченная измеримая функция, равная нулю вне некоторого компактного множества, и где интеграл берется по группам $K_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$, $Z_{n_{-r}, n_{-r+1}, \ldots, n_r}$ для данной вырожденной серии. Применяя к последнему интегралу в (35.15) формулу (32.11), приходим к следующей теореме:

Теорема 24. *Пусть* T_g — *представление основной вырожденной серии, определенное числами*

$$n_p, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm r; \quad n_{-p} = n_p, \tag{35.16}$$

и функцией

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\cdot\chi(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\prod_{p=1}^{r}|\Lambda_p|^{m_p + i\rho_p}\Lambda_p^{-m_p}, \tag{35.17}$$

где

$$\Lambda_p = \det \delta_p, \qquad \delta = \{\delta_{n_{-r}}, \quad \delta_{n_{-r+1}}, \ldots, \delta_r\}. \tag{35.18}$$

Тогда для любой ограниченной измеримой функции $x(g)$, равной нулю вне некоторого компактного множества, оператор

$$T_{x_1} = \int x_1(g)\, T_g\, d\mu(g), \tag{35.19}$$

соответствующий функции

$$x_1(g) = (x^* x)(g) = \int \overline{x(g_1 g^{-1})}\, x(g_1)\, d\mu(g_1), \tag{35.20}$$

имеет след $S(T_{x_1})$. Этот след вычисляется по формуле

$$S(T_{x_1}) = \int x_1(z^{-1}kz)\, \alpha(k)\, d\mu_l(k)\, d\mu(z) =$$

$$= \int x(g) \left\{ \sum \frac{\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\, \chi(\delta)}{\widetilde{D}(\delta)} \prod_{p=-r}^{r} \widetilde{D}_p(\delta_p) \right\} d\mu(\delta), \tag{35.21}$$

где δ — диагональная матрица из группы $\mathfrak{G}$, диагональными элементами которой являются собственные значения λ_p матрицы g,

$$\delta = \{\delta_{n_{-r}}, \quad \delta_{n_{-r+1}}, \ldots, \delta_{n_r}\}$$

— ее разбиение на диагональные матрицы δ_p порядка n_p,

$$\widetilde{D}_p(\delta_p) = \prod_{p>q} |\lambda_{p,\alpha} - \lambda_{p,\beta}|^2, \quad p \neq 0; \tag{35.22}$$

далее,

$$\widetilde{D}_0(\delta) = \prod_{\alpha>|\beta|} |\lambda_{0,\alpha} - \lambda_{0,\beta}|^2, \qquad \widetilde{D}(\delta) = \prod_{p>|q|} |\lambda_p - \lambda_q|^2 \tag{35.23a}$$

в случае ортогональной группы $\mathfrak{G}$, и

$$\widetilde{D}_0(\delta) = \prod_{\alpha>|\beta|} |\lambda_{0,\alpha} - \lambda_{0,\beta}|^2 \prod_{\alpha=1}^{n_0} |\lambda_{0,\alpha} - \lambda_{0,-\alpha}|^2,$$

$$\widetilde{D}(\delta) = \prod_{p>|q|} |\lambda_p - \lambda_q|^2 \prod_{p=1}^{n} |\lambda_p - \lambda_{-p}|^2 \tag{35.23b}$$

*в случае симплектической группы $\mathfrak{G}$, $\lambda_{p,\alpha}$ — диагональные элементы матрицы δ_p и *:*

$$\beta(k) = \frac{d\mu_l(k)}{d\mu_r(k)}. \tag{35.24}$$

* Формулы для $\beta(k)$ см. в п. 5 § 32.

При этом сумма в (35.21) *состоит из* $\frac{2^n n!}{2^{n_0} n_0! n_1! \ldots n_r!}$ *слагаемых, соответствующих различным разложениям*

$$g = z^{-1}kz, \quad z \in Z_{n_p}, \quad k \in K_{n_p}. \tag{35.25}$$

Из этой теоремы следует, что оператору T_g основной вырожденной серии естественно приписать след

$$S(T_g) = \sum \frac{\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi(\delta)}{\widetilde{D}(\delta)} \prod_{p=-r}^{r} \widetilde{D}_p(\delta_p). \tag{35.26}$$

3. **След в представлениях дополнительных серий.** Пусть T_g — представление дополнительной (вырожденной или невырожденной) серии. Повторяя рассуждения п. 1, мы получаем, что и в этом случае существует интеграл

$$I = \int x_1(z^{-1}kz)\,\alpha(k)\,d\mu_l(k)\,d\mu(z), \tag{35.27}$$

где $\alpha(k)$ — функция, определяющая данное представление T_g дополнительной серии.

Но в пространстве $\mathfrak{H}$ представления дополнительной серии скалярное произведение уже не есть интеграл квадрата модуля функции $f(z)$, а задается более сложным образом; поэтому нужно доказать, что выражение (35.27) есть попрежнему след оператора T_{x_1}. Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством аналогичного утверждения для унимодулярной группы в п. 2 § 22. Отсюда следует, что теоремы 23 и 24 остаются верными и для представлений дополнительной невырожденной и дополнительной вырожденной серии соответственно, если под $\alpha(\delta)$ и $\chi(\delta)$ понимать теперь функции (см. п. 4 § 34)

$$\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\,\chi(\delta), \tag{35.28}$$

$$\chi(\delta) = \prod_{p=1}^{r} |\lambda_p|^{m_p + i\rho_p} \lambda_p^{-m_p} \prod_{p=1}^{r} |\nu_p|^{m_p + i\sigma_p' + \sigma_p''} \nu_p^{-m_p} |\lambda_p|^{m_p + i\sigma_p' - \sigma_p''} \lambda_p^{-m_p}, \tag{35.29}$$

определяющие эти представления.

§ 36. Непрерывность следа и полная непрерывность операторов T_x; критерии эквивалентности

1. **Полная непрерывность операторов T_x.** Повторяя рассуждения п. 1 § 23, получаем:

I. *Если T_g — представление основной или дополнительной* (невырожденной или вырожденной) *серии, то для любой суммируемой* *функции* $x(g)$ *оператор*

$$T_x = \int x(g)\, T_g\, d\mu(g) \tag{36.1}$$

вполне непрерывен.

2. Непрерывность следа в представлениях основной серии. Представления T_g основной серии определяются характером $\chi(\delta)$ группы D. Совокупность всех характеров группы D есть топологическая группа; обозначим ее через X.

Очевидно, рассуждения п. 2 § 23 применимы и к нашему случаю. Следовательно:

II. *Если* T_g — *представление основной серии, соответствующее характеру* χ, *и*

$$T_x = \int x(g)\, T_g\, d\mu(g),$$

то для любой измеримой ограниченной функции $x(g)$, *равной нулю вне некоторого компактного множества, след* $S(T_x^* T_x)$ *есть непрерывная функция характера* χ *на группе* X *характеров группы* D.

3. Критерии эквивалентности. Применяя лемму п. 3 § 23, так же, как и в п. 4 § 23, приходим к следующей теореме:

Теорема 25. *Два представления* T_g *и* T'_g *из основных или дополнительных серий эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой измеримой ограниченной функции* $x(g)$, *равной нулю вне некоторого компактного множества, следы операторов*

$$T_{x_1} = \int x_1(g)\, T_g\, d\mu(g), \qquad T'_{x_1} = \int x_1(g)\, T'_g\, d\mu(g), \tag{36.2}$$

соответствующих функции $x_1 = x^* x$, *совпадают*:

$$S(T_{x_1}) = S(T'_{x_1}). \tag{36.3}$$

Пользуясь этой теоремой и повторяя рассуждения п. 5 § 23, можно показать, что различные подстановки одних и тех же чисел n_p приводят к эквивалентным сериям представлений. Поэтому мы в дальнейшем будем считать, что

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r. \tag{36.4}$$

При этом условии имеет место следующая теорема:

Теорема 26. *Представления различных серий попарно неэквивалентны. Два представления* T_g *и* T'_g *одной и той же серии, соот-*

ветствующих функциям $\chi(\delta)$ и $\chi'(\delta)$, эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторой подстановки

$$\chi'(\delta) = \chi(\delta_s). \tag{36.5}$$

При этом, в случае представлений основной невырожденной серии, возможна любая подстановка s группы S, т. е. любая подстановка, которая матрицу $\delta \in \mathfrak{G}$ переводит в матрицу $\delta_s \in \mathfrak{G}$. В случае же представлений других серий возможны лишь те подстановки $s \in S$, которые функцию $\chi(\delta)$ переводят в функцию $\chi_s(\delta) = \chi(\delta_s)$, определяющую представление той же серии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., О вложении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сборник, **т. 12 (54)** (1943), 197—217.
2. Gelfand I. and Neumark M., Unitary repressentations of the Lorentz group. Journal of Physics, X (1946), 93—94.
3. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Об унитарных представлениях комплексной унимодулярной группы, Доклады АН СССР, **т. 54** (1946), 195—198.
4. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Основная серия неприводимых представлений комплексной унимодулярной группы, Доклады АН СССР, **т. 56** (1947), 3—5.
5. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы линейных преобразований прямой, Доклады АН СССР, **т. XV**, № 7 (1947), 571—574.
6. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Изв. АН СССР, сер. матем., 11 (1947), 411—504.
7. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Кольца с инволюцией и их представления, Изв. АН СССР, сер. матем., 12 (1948), 445—480.
8. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Дополнительные и вырожденные серии представлений комплексной унимодулярной группы, Доклады АН СССР, **т. 58**, № 8 (1947), 1577—1580.
9. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., След в основных и дополнительных сериях представлений комплексной унимодулярной группы, Доклады АН СССР, **т. 61**, № 1 (1948), 9—11.
10. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., О связи между представлениями комплексной полупростой группы Ли и ее максимальной компактной подгруппы, Доклады АН СССР, **т. 63** (1948), 225—228.
11. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Аналог формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы, Доклады АН СССР, **т. 63** (1948), 609—612.
12. Гельфанд И. М. и Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально-бикомпактных групп, Математич. сборник, **т. 13** (55), (1943), 301—316.
13. Гельфанд И. М., Сферические функции на симметрических римановых пространствах, Доклады АН СССР, **т. 70** № 1 (1950), 5—8.
14. Гельфанд И. М., Центр инфинитезимального группового кольца, Математич. сборник, **т. 26** (68), № 1 (1950), 103—112.
15. Гельфанд И. М. и Цетлин М. Л., Конечномерные представления группы унимодулярных матриц, Доклады АН СССР, т. 71, № 5 (1950), 825—828.
16. Гельфанд И. М. и Цетлин М. Л., Конечномерные представления группы ортогональных матриц, Доклады АН СССР, т. 71, № 6 (1950), 1017—1020.
17. Гуревич А., Математич. сборник, т. 13 (55) (1943), вып. 1, 79—86.
18. Дынкин Е. Б., Классификация простых групп Ли, Математич. сборник, **т. 18** (60) (1946), 347—352.

19. Дынкин Е. Б., Структура полупростых алгебр Ли, Успехи матем. наук, **т. II**, вып. 4 (20), (1947), 59—127.
20. Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936), 77—140.
21. Наймарк М. А., Кольцо с инволюцией, Успехи матем. наук, **т. III, вып.** 5 (1948), 52—145.
22. Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов 1, Успехи матем. наук, IX (1941), 3—125.
23. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, 1938.
24. Bargman, Annals of Mathematics, т. 48, № 3 (1947), 568—640.
25. Cartan E., Sur la structure des groupes finis et continus, Thèse, Nony, Paris, 1894.
26. Cartan E., Bull. Soc. Math. de France, **t. 41** (1913).
27. Cartan E., Journal de Mathém. (6), **t. 10** (1914).
28. Killing W., Die Zusammensetzung der Stetigen endlichen Transformationgruppen. Math. Ann., I. **T. 31** (1888), 252—290; II. T. **33** (1889), 1—48; III. **T. 34** (1889), 57—122; IV. **T. 36** (1890), 161—189.
29. Mackey. Proc. of the Nat. Acad., vol. 35 N, 9 (1949).
30. Riess F., Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, Acta Sceged, **t. V** (1930), 23—54.
Русский перевод этой статьи см. Успехи матем. наук, IX (1941), 157—181.
31. Weyl H., Theorie der Darstellung Kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. Math. Zeitschr., I. **T. 23** (1925), 271—309; II. **T. 24** (1925), 328—376; III. **T. 24** (1925), 377—392.
Русский (неполный) перевод этой статьи см. Успехи матем. наук, вып. IV (1938), 201—257.
32. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, Москва, 1947.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ $\mathfrak{G}$

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии Наук СССР

Редактор издательства *А. З. Рывкин* Технический редактор *Н. А. Невраева*

РИСО АН СССР № 4238. Т-08000. Издат. № 2764. Тип. заказ № 585. Подп. к печ. 2/XII 1950 г.
Формат бум. $70 \times 108^1/_{16}$. Печ. л. 24,66. Уч.-издат. 20. Бум. л. 9. Тираж 2000.

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10.