

Ю. А. АМЕНЗАДЕ

Теория упругости

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специ-
ального образования СССР
в качестве учебника для
студентов механико-матема-
тических факультетов уни-
верситетов



МОСКВА ВЫСШАЯ ШКОЛА 1976

Рецензент: Л. И. Седов — академик АН СССР

Юсиф Аменович Амензаде

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Редактор К. И. Аношина. Художник В. З. Казакевич. Художественный редактор Н. К. Гуторов. Технический редактор З. А. Муслимова. Корректор М. И. Козлова

Сдано в набор 17/IX—75 г.	Подп. к печати 11/II—76 г.	Формат 60×90 ^{1/16}
Бум. тип. № 2.	Объем 17 печ. л. (Усл. п. л. 17)	Уч.-изд. л. 17,44
Изд. № ОТ—238	Тираж 26 000 экз.	Цена 82 коп.

План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1976 г. Позиция № 94
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
издательство «Высшая школа»

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Хохловский пер., 7. Зак. 4020.

Амензаде Ю. А.

А38 Теория упругости. Учебник для университетов. Изд. 3-е, доп. М., «Высшая школа», 1976.

272 с. с ил.

Содержание учебника соответствует утвержденной программе.

В начале книги сообщены необходимые сведения из тензорного анализа; изложены основы теории упругости дано на современном научном уровне и в современной форме.

Далее рассматриваются плоские задачи теории упругости при помощи метода функций комплексного переменного и метода интегральных преобразований, теория кручения и изгиба призматических тел, контактная задача Герца, некоторые осесимметрические задачи.

Изложена также теория распространения упругих волн в неограниченной среде и поверхностных волн Рэлея и Лява.

Приведены элементы теории изгиба тонких пластин.

Учебник отличается ясностью, оригинальностью, современным уровнем изложения и проиллюстрирован многочисленными примерами.

А 20304—145 94—76
(001)01—76

538—12

ОТ РЕЦЕНЗЕНТА ПЕРВОГО И ВТОРОГО ИЗДАНИЙ

За последние годы в отечественной и мировой литературе появился ряд монографий по теории упругости, либо содержащих изложение общей теории с той или иной точки зрения, либо посвященных разности определенных направлений.

В то же время лектор, читающий курс теории упругости по программе университета, испытывает серьезные затруднения при рекомендации студентам учебной литературы. Фактически приходится давать довольно обширный список, состоящий из книг, написанных в разное время и на разном уровне. Учебник по теории упругости, соответствующий программе современного университетского курса, практически отсутствует.

Книга Ю. А. Амензаде написана с целью восполнить этот пробел. В ней излагается на современном уровне весь материал, который входит в существующую программу, а также приведены некоторые дополнительные сведения, которые могут быть рассмотрены, например, на семинарах по теории упругости, ведущихся по традиции в университетах.

Естественно, что выбор дополнительного материала определялся личными научными интересами автора. В книге наиболее детально излагаются методы функции комплексного переменного в применении к плоским задачам теории упругости, задачам изгиба и кручения.

Ю. Н. Работнов — академик АН СССР

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ И ВТОРОМУ ИЗДАНИЯМ

Настоящий учебник содержит все основные вопросы курса теории упругости, предусмотренные программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР для механических отделений университетов. Он может быть рекомендован также студентам высших технических учебных заведений, аспирантам и научным работникам.

В предлагаемом курсе основное место отведено математической постановке задач, анализу дифференциальных уравнений равновесия и движения и их решению, общим и частным методам их интегрирования. Некоторые конкретные задачи, имеющие принципиальное значение, проиллюстрированы числовыми примерами.

В целях облегчения усвоения материала в книге изложены элементы тензорного исчисления, теория интеграла типа Коши, теорема Гарнака, краевая задача Римана и некоторые сведения об интегральном преобразовании Фурье.

Содержание книги составляет курс лекций, в течение нескольких лет читаемый автором на механико-математическом факультете Азербайджанского государственного университета имени С. М. Кирова.

Рукопись первого издания была прочитана академиком Ю. Н. Работновым, академиком АН УССР Г. Н. Савиным, профессорами Д. И. Шерманом, Л. М. Качановым. Научным редактором книги был профессор И. И. Ворович. Автор считает своим приятным долгом выразить им глубокую признательность за ценные замечания. Отдельные разделы книги были просмотрены профессорами А. Ш. Габиб-заде и В. Д. Ключниковым, старшим научным сотрудником Л. М. Флитманом и к. ф.-м. наук Р. Ю. Амензаде. Их замечания были очень полезными, за что автор им весьма благодарен.

Во втором издании книги исправлены отдельные неточности, более подробно изложены некоторые выводы и добавлены примеры.

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости изучает механику деформируемых сред, которые, после удаления сил, вызывающих деформацию, полностью восстанавливают свою первоначальную форму и возвращают всю работу, затраченную на деформацию.

Первые попытки создания теории упругости на основе понятия сплошной среды, позволяющие игнорировать ее молекулярное строение и описать макроскопические явления с помощью методов математического анализа, относятся к первой половине восемнадцатого столетия.

Фундаментальный вклад в классическую теорию внесли Гук, Навье, Коши, Ляме, Грин, Клапейрон. Гуком в 1678 г. установлен закон, линейно связывающий напряжения и деформации.

После установления Навье в 1821 г. основных уравнений и создания Коши теории напряжений и деформаций важнейшее значение для развития теории упругости имели исследования Сен-Венана. В его классических работах по теории кручения и изгиба на основе общих уравнений теории упругости дано решение задач кручения и изгиба призматических брусьев. В этих исследованиях Сен-Венан создал полуобратный метод решения задач теории упругости, сформулировал знаменитый «принцип Сен-Венана», дающий возможность получить решение задач теории упругости. С тех пор было затрачено много усилий на развитие теории упругости и ее приложений, доказан ряд общих теорем, предложены общие методы интегрирования дифференциальных уравнений равновесия и движения, решено много частных задач, представляющих принципиальный интерес. Развитие новых областей техники требует более глубокого и широкого изучения теории упругости. Большие скорости вызывают необходимость постановки и решения сложных вибрационных проблем. Легкие металлические конструкции привлекают серьезное внимание к вопросу упругой устойчивости. Концентрация напряжений вызывает опасные последствия, поэтому пренебрегать ею рискованно.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Многие задачи механики, теоретической физики и других наук приводят к понятию тензора. Это понятие имеет более сложный характер, нежели понятие вектора. Определение вектора как направленного отрезка не дает возможности естественным обобщением перейти к понятию тензора. Поэтому постараемся дать такое определение вектора, эквивалентное прежнему, чтобы обобщение его привело к понятию тензора, которое нельзя пояснить при помощи простого геометрического образа. Для этого нам понадобится ввести в рассмотрение произвольные криволинейные координаты. По отношению к этим координатам и будет дано определение вектора, а впоследствии тензора, как некоторого объекта, не меняющегося при изменении системы координат.

Преимущество тензорного исчисления в механике сплошной среды обнаруживается особенно тогда, когда мы оперируем с произвольными системами координат. В дальнейшем ограничимся рассмотрением трехмерного евклидова пространства, в котором положение каждой точки определяется тремя числами — координатами. Здесь мы приведем основные сведения из тензорного исчисления. Их изложение не претендует на полноту и строгость; дается сводка определений и формул, на которые в дальнейшем будут делаться ссылки.

Обозначим криволинейные координаты какой-либо точки через x^1, x^2, x^3 и введем новые координаты этой точки $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$, связанные со старыми соотношениями

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

которые называются формулами преобразования координат.

Допустим, что все функции x^k в рассматриваемой области изменения координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка, а также якобиан отличен от нуля. Тогда из (1.1) найдем преобразование координат, обратное преобразованию (1.1)

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Если фиксировать какие-нибудь две из трех координат и изменять третью непрерывно, то получим линию, которая называется координатной линией. Мы будем считать, что в каждой точке пространства проходят три координатных линии, не лежащие в од-

ной плоскости. Можно доказать, что это требование всегда выполняется, если якобиан преобразования (1.1) отличен от нуля.

В частном случае, при переходе от одной прямолинейной прямоугольной системы координат $ox_1x_2x_3$ к другой $ox'_1x'_2x'_3$, вместо (1.1) будем иметь

$$x_k = \sum_{n=1}^3 a_{kn} x'_n \quad (k=1, 2, 3), \quad (1.3)$$

где a_{kn} — косинусы углов между осями систем координат $ox_1x_2x_3$ и $ox'_1x'_2x'_3$.

Условимся для краткости записи здесь и в дальнейшем в (1.3) опускать знак суммы, считая, что суммирование должно быть произведено по повторяющемуся индексу от $n=1$ до $n=3$. Мы также больше не будем указывать, что имеем три формулы ($k=1, 2, 3$). Соотношения (1.3) запишутся при этом в виде

$$x_k = a_{kn} x'_n. \quad (1.4)$$

Преобразование вида (1.4) называется аффинным ортогональным.

§ 1. Определения скаляра, вектора и тензора

Пусть в некоторой системе координат x^n ($n=1, 2, 3$) имеем величину $f(x^1, x^2, x^3)$, а в системе $\bar{x}^h = \{f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)\}$; если при преобразовании (1.1) значения этих величин в одних и тех же точках равны, то эта величина называется инвариантом, или скаляром. Примерами скалярных величин являются плотность, температура.

Допустим, что в некоторой системе координат x^n ($n=1, 2, 3$) мы имеем совокупность трех величин A^n , а в системе \bar{x}^h ($h=1, 2, 3$) — \bar{A}^h ; если при преобразовании координат (1.2) величины \bar{A}^h определяются по формулам

$$\bar{A}^h = A^n \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^n}, \quad (1.5)$$

то совокупность этих величин \bar{A}^h называют контравариантным вектором, а величины A^n — его компонентами. Как и в формуле (1.4), суммирование в формуле (1.5) производится по индексу n , который фигурирует дважды. Легко заметить, что совокупность трех дифференциалов координат составляет контравариантный вектор.

Действительно, из формул (1.2) имеем

$$d\bar{x}^h = \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^3} dx^3 = dx^n \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^n}. \quad (1.6)$$

Сравнение формул (1.6) и (1.5) показывает, что dx^n являются компонентами контравариантного вектора.

Пусть в некоторой системе координат x^n мы имеем совокупность трех величин A_n , а в системе \bar{x}^h — \bar{A}_h . Если при преобразова-

нии координат (1.1) величины \bar{A}_k определяются по формулам

$$\bar{A}_k = A_n \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}, \quad (1.7)$$

то совокупность этих трех величин \bar{A}_n называют ковариантным вектором, а величины A_n — его компонентами. Легко убедиться, что в случае аффинного ортогонального преобразования определения контравариантного и ковариантного векторов совпадают. Действительно, решив уравнения (1.4) относительно

$$x'_n = \alpha_{kn} x_k, \quad (1.8)$$

из (1.4) и (1.8) найдем

$$\frac{\partial x_k}{\partial x'_n} = \frac{\partial x'_n}{\partial x_k} = \alpha_{kn}. \quad (1.9)$$

Последние соотношения показывают, что формулы преобразования (1.5) и (1.7) совпадают, т. е. имеем

$$a_n = a_m \alpha_{mn}.$$

Совокупность величин a_n ($n=1, 2, 3$) называют аффинным ортогональным вектором.

Пусть в некоторой системе координат x^a мы имеем совокупность девяти величин A^{mn} , а в системе \bar{x}^i — \bar{A}^{ik} . Если при преобразовании координат (1.2) величины \bar{A}^{ik} определяются по формулам

$$\bar{A}^{ik} = A^{mn} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}, \quad (1.10)$$

то совокупность этих девяти величин A^{mn} называют контравариантным тензором второго ранга, а величины A^{mn} — его компонентами.

В формулах (1.10) должно быть произведено двойное суммирование по всем значениям повторяющихся индексов n и m ($m, n = 1, 2, 3$). Если

$$\bar{A}_{ik} = A_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}, \quad (1.11)$$

то совокупность девяти величин A_{mn} называют ковариантным тензором второго ранга.

Если

$$\bar{A}_i^k = A_m^n \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}, \quad (1.12)$$

то совокупность девяти величин A_m^n называют смешанным тензором второго ранга. В случае аффинного ортогонального преобразования определения контравариантного, ковариантного и смешанного тензоров в силу (1.9) совпадают, т. е.

$$p'_{ik} = p_{mn} \alpha_{mi} \alpha_{nk}. \quad (1.13)$$

Совокупность девяти величин ρ_{nm} называют аффинным ортогональным тензором второго ранга.

Пусть в любой системе координат имеем совокупность следующих девяти чисел:

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & \text{когда } m=n \\ 0, & \text{когда } m \neq n. \end{cases} \quad (1.14)$$

Покажем, что δ_m^n , называемые символами Кронекера, являются компонентами смешанного тензора второго ранга; для этого мы должны показать, что δ_m^n удовлетворяют формулам (1.12)

$$\bar{\delta}_i^k = \delta_m^n \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}. \quad (1.15)$$

В силу (1.14) имеем

$$\delta_m^n \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}. \quad (1.16)$$

Подставляя (1.1) в (1.2), получим

$$\bar{x}^k = \bar{x}^s (x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)). \quad (1.17)$$

Дифференцируя обе части (1.17), найдем

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} = \bar{\delta}_i^k. \quad (1.18)$$

Из сравнения (1.18) и (1.16) получим (1.15), что и требовалось доказать.

Тензоры более высокого ранга определяются аналогичным образом. Так, например, если

$$\bar{A}_{ikr} = A_{mns} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r},$$

то совокупность 27 величин A_{mns} называют ковариантным тензором третьего ранга (число компонентов тензора определяется числом измерений пространства в степени, равной рангу тензора).

Рассмотрим контравариантный и ковариантный тензоры второго ранга A^{mn} , A_{mn} . Если при изменении порядка индексов у A^{mn} , A_{mn} имеют место соотношения

$$A^{nm} = A^{mn}; \quad A_{nm} = A_{mn}, \quad (1.19)$$

то тензоры соответственно называются симметричным контравариантным и симметричным ковариантным. Если при изменении по-

рядка индексов имеют место соотношения

$$A^{nm} = -A^{mn}, \quad A_{nm} = -A_{mn}, \quad (1.20)$$

то тензоры соответственно называются антисимметричным контравариантным и антисимметричным ковариантным.

§ 2. Сложение, умножение и свертывание тензоров. Признак тензора

а) *Сложение*. Операция сложения применима только к тензорам, имеющим одинаковое количество нижних и верхних индексов (т. е. к тензорам одного и того же ранга и типа). Если нам даны два тензора одного и того же ранга и типа, то, алгебраически суммируя каждый компонент первого тензора и соответствующий компонент второго, мы, очевидно, получим тензор того же ранга и типа, что и слагаемые. Указанная операция называется сложением, а полученный результирующий тензор называется суммой двух тензоров.

б) *Умножение*. Определим произведение двух тензоров любого ранга и типа. Перемножив каждый компонент первого тензора на каждый компонент второго тензора, получим тензор, ранг которого равен сумме рангов двух тензоров. Указанная операция называется умножением, а полученный результирующий тензор — произведением двух тензоров. Для определенности предположим, что речь идет об умножении контравариантного тензора второго ранга A^{mn} на тензор третьего ранга B'_{st} (B'_{st} — один раз контравариантный, два раза ковариантный). Тогда получим тензор C^{mnr} , компоненты которого определяются формулами

$$C^{mnr} = A^{mn} B'_{st}. \quad (1.21)$$

Это тензор пятого ранга (три раза контравариантный, два раза ковариантный).

Операции сложения и умножения могут быть распространены на любое число тензоров.

в) *Свертывание* (сокращение индексов). Операция свертывания применима только к смешанным тензорам; поясним это на ряде примеров. Возьмем, например, тензор четвертого ранга A^n_{stm} , в состав которого входят один контравариантный и три ковариантных индекса. Если мы теперь примем $m=n$, получим тензор $B_{st} = A^n_{stn}$, в котором индекс n является повторяющимся; в соответствии с нашим условием произведем суммирование от $n=1$ до $n=3$. В результате получаем ковариантный тензор второго ранга, т. е. тензор, ранг которого на две единицы ниже ранга исходного тензора. Операция свертывания в данном примере, очевидно, больше не может быть повторена.

Возьмем теперь тензор пятого ранга A^{mn}_{str} и произведем свертывание относительно любой пары индексов, один из которых является верхним, а другой — нижним. Если мы, например, по-

ложим $s=m$, то получим тензор третьего ранга $B_{tr}^n = A_{mtr}^{mn}$. Свертывание может быть продолжено еще один раз; взяв, например, $r=n$, получим ковариантный вектор $C_t = A_{mtn}^{mn}$. Из тензора пятого ранга A_{st}^{mnr} , после двукратного сокращения индексов, получим контравариантный вектор $D^a = A_{rta}^{mnr}$. Если в тензоре четвертого ранга A_{st}^{mn} произвести два раза свертывание, мы получим скаляр (инвариант) $f_1 = A_{mn}^{mn}$ или $f_2 = A_{nm}^{nm}$. В случае аффинных ортогональных тензоров операция свертывания может быть произведена по любым двум индексам, так как между контравариантным и ковариантным аффинными ортогональными тензорами нет никакой разницы.

Произведя свертывание аффинного ортогонального тензора p_{mn} по индексам m и n , получим инвариант

$$C = p_{mn} = p_{11} + p_{22} + p_{33}. \quad (1.22)$$

Комбинация операций умножения и свертывания называется скалярным (внутренним) умножением. Операция скалярного умножения двух тензоров сводится сначала к их умножению, а затем к свертыванию результирующего тензора по верхнему индексу одного тензора и нижнему индексу другого. Пусть нам даны два тензора A^{mn} и B_{rs}^s ; свертывая четырьмя способами их тензорное произведение, получим скалярное произведение, а именно: $A^{mn}B_{mt}^s$, $A^{mn}B_{rn}^s$, $A^{rn}B_{rt}^s$, $A^{mt}B_{rt}^s$. Скалярное произведение контравариантного вектора A^m и ковариантного вектора B_n дает инвариант $A^n B_n$, который можно, очевидно, назвать скалярным произведением векторов A^m и B_n . В случае аффинных ортогональных векторов a_n и b_m , получим скалярное произведение этих векторов $a \cdot b = a_n b_n$.

г) *Признак тензора.* Пусть дан какой-либо тензор, например, A_{mn}^k . Приведем в соответствие с ковариантными индексами этого тензора произвольные контравариантные векторы u^α и v^β , а с контравариантным индексом — ковариантный вектор w_γ . Если произведение $A_{mn}^k u^\alpha v^\beta w_\gamma$, представляющее собою тензор шестого ранга, свернуть по индексам m и α , n и β , k и γ , то получим инвариант

$$f = A_{mn}^k u^m v^n w_k. \quad (1.23)$$

Далее, пусть нам даны два тензора A_{mn}^k и $B^{\alpha\beta}$. Если произведение $A_{mn}^k B^{\alpha\beta}$, представляющее собою тензор пятого ранга, свернем по индексам m и α , n и β , то будем иметь контравариантный вектор

$$A_{\alpha\beta}^k B^{\alpha\beta} = C^k. \quad (1.24)$$

Таким образом, операция умножения тензоров дает снова тензор. Теперь ставится вопрос — будет ли некоторая система величин тензором, если ее произведение на тензор дает тензор. На этот счет существует теорема, позволяющая легко установить тензорный ха-

рактр данной системы величин. Эту теорему сформулируем следующим образом:

1) если при любом выборе векторов u^m, v^n, w_k произведение (1.23) представляет инвариант, то A_{mn}^k есть тензор;

2) если при любом выборе тензора $B^{\alpha\beta}$ произведение (1.24) представляет контравариантный вектор, то A_{mn}^k есть тензор;

3) если величины A_{mn} обладают свойством симметрии и произведение $A_{mn}u^m u^n$ представляет инвариант для любого вектора u^k , то A_{mn} есть тензор.

Для доказательства теоремы вида 1 необходимо убедиться в том, что компоненты A_{mn}^k удовлетворяют определению тензора.

Согласно условию теоремы для двух систем координат \bar{x}^n и x^n имеем $\bar{f}=f$, или на основании (1.23)

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^{\gamma} \bar{u}^{\alpha} \bar{v}^{\beta} \bar{w}_{\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} u^{\alpha} v^{\beta} w_{\gamma}.$$

Меняя в формулах (1.5) и (1.7) роли координат \bar{x}^n и x^n , в системе x^n получим

$$u^{\alpha} = \bar{u}^m \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^m}, \quad v^{\beta} = \bar{v}^n \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^n}, \quad w_{\gamma} = \bar{w}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\gamma}}.$$

Подставляя эти соотношения в последнюю формулу, будем иметь

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^{\gamma} \bar{u}^{\alpha} \bar{v}^{\beta} \bar{w}_{\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\gamma}} \bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}_k.$$

Отсюда

$$\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{\gamma} - A_{mn}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\gamma}} \right) \bar{u}^{\alpha} \bar{v}^{\beta} \bar{w}_{\gamma} = 0.$$

Так как по условию контравариантные векторы u^{α}, v^{β} и ковариантный вектор w_{γ} являются произвольными, то

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^{\gamma} = A_{mn}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\gamma}}.$$

Следовательно, A_{mn}^k есть тензор.

Для доказательства теоремы вида 2 соотношение (1.24) скалярно умножим на произвольный ковариантный вектор D_j ; тогда

$$A_{\alpha\beta}^k B^{\alpha\beta} D_k = C^k D_k = f,$$

где f — инвариант.

Следовательно,

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^k \bar{B}^{\alpha\beta} \bar{D}_k = A_{\alpha\beta}^k B^{\alpha\beta} D_k.$$

Меняя в формулах (1.10) и (1.7) роли координат \bar{x}^n и x^n , в системе x^n получим

$$B^{\alpha\beta} = \bar{B}^{mn} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^n}, \quad D_k = \bar{D}_i \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}.$$

Таким образом,

$$\left(\bar{A}_{\alpha\beta}^{\Gamma} - A_{mn}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\Gamma}}{\partial x^k} \right) \bar{B}^{mn} \bar{D}_{\Gamma} = 0.$$

Отсюда в виду произвольности тензоров B^{mn} и D_{Γ}

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^{\Gamma} = A_{mn}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\Gamma}}{\partial x^k},$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы вида 3 контравариантный вектор представим в виде $u^k = v^k + w^k$. Тогда

$$A_{mn} u^m u^n = A_{mn} v^m v^n + A_{mn} w^m w^n + A_{mn} v^m w^n + A_{mn} v^n w^m.$$

Так как по условию теоремы $A_{mn} u^m u^n$, $A_{mn} v^m v^n$ и $A_{mn} w^m w^n$ — инварианты и в силу симметричности величин A_{mn} имеем $A_{mn} v^m w^n = A_{mn} v^n w^m$, то $A_{mn} v^m w^n$ — инвариант. Тогда учитывая, что v^m и w^n — произвольные векторы, в силу теоремы вида 1 заключаем, что A_{mn} является ковариантным тензором второго ранга.

§ 3. Метрический тензор

Рассмотрим две бесконечно близкие точки $A(x^1, x^2, x^3)$ и $A_1(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ пространства. Эти точки определяют бесконечно малый вектор dr , не зависящий от выбора системы координат. Длину вектора dr обозначим через ds . Если e по условию определяет единичный вектор, направленный по прямой AA_1 , то

$$dr = ds e. \quad (1.25)$$

Проведем из точки $A(x^1, x^2, x^3)$ координатные линии, которые не лежат в одной плоскости и, вообще говоря, не ортогональны. Обозначим через e_n систему векторов, направленных по касательным к координатным линиям с длиной, не равной единице; тогда

$$dr_1 = dx^1 e_1, \quad dr_2 = dx^2 e_2, \quad dr_3 = dx^3 e_3,$$

где dr_1, dr_2, dr_3 — бесконечно малые векторы, определяющие параллелепипед, диагональю которого является вектор dr , т. е.

$$dr = ds e = dx^n e_n. \quad (1.26)$$

Отсюда, согласно правилам скалярного умножения векторов, найдем

$$ds^2 = (dx^n e_n \cdot dx^k e_k) = g_{nk} dx^n dx^k, \quad (1.27)$$

где

$$g_{nk} = (e_n \cdot e_k) \quad (n, k = 1, 2, 3). \quad (1.28)$$

Система векторов e_n называется ковариантным базисом координатной системы.

В квадратичной форме дифференциалов dx^m коэффициенты g_{nk} , как явствует из (1.28), образуют симметричную матрицу ($g_{nk} = g_{kn}$). Таким образом, на основании теоремы о признаке тензора g_{nk} являются компонентами ковариантного тензора, называемого ковариантным метрическим тензором.

При использовании криволинейных координат целесообразно ввести, наряду с основным базисом e_n , взаимный контравариантный базис e^k , т. е. тройку векторов e^k , связанных с основными векторами e_n формулами:

$$e_n \cdot e^k = \delta_n^k, \quad (1.29)$$

где δ_n^k — символы Кронекера.

Для этого достаточно принять

$$\begin{aligned} e^1 &= \frac{e_2 \times e_3}{g}, \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{g}, \\ e^3 &= \frac{e_1 \times e_2}{g}, \quad g = e_1 \cdot (e_2 \times e_3). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Из (1.29) также следует, что

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{e^2 \times e^3}{g_1}, \quad e_2 = \frac{e^3 \times e^1}{g_1}, \quad e_3 = \frac{e^1 \times e^2}{g_1}, \\ g_1 &= e^1 \cdot (e^2 \times e^3). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Итак, e_n перпендикулярен плоскости e^k , e^m .

Если система координат ортогональна, то, очевидно, [см. (1.30) и (1.31)] базисные векторы e_n и e^k совпадут по направлениям, но их величины, вообще говоря, различны.

Представим вектор e_n как линейную комбинацию векторов e^k

$$e_n = C_{nk} e^k \quad (k, n = 1, 2, 3).$$

Учитывая соотношения (1.28) и (1.29), получим $C_{nk} = g_{nk}$; следовательно, $e_n = g_{nk} e^k$.

Отсюда по правилу Крамера найдем

$$e^k = \frac{G_{nk}}{g} e_n = g^{nk} e_n \quad (g \neq 0). \quad (1.32)$$

Здесь G_{nk} — алгебраическое дополнение элемента g_{kn} в детерминанте g .

Из (1.32) на основании (1.29) будем иметь

$$e^k \cdot e^n = \frac{G_{nk}}{g} = g^{nk}. \quad (1.33)$$

Величины g^{nk} являются симметричными. Подставляя (1.32) в (1.29), будем иметь $(e_n \cdot e_j) g^{jk} = g_{nj} g^{jk} = \delta_n^k$.

Отсюда заключаем, что величины g^{jk} являются компонентами контравариантного тензора. Тензор g^{jk} называется контравариантным

метрическим тензором. Компоненты этого тензора g^{jk} могут быть вычислены при помощи (1.33).

Умножим теперь контравариантный вектор A^m на метрический тензор g_{kr} и свернем; тогда мы получим ковариантный вектор $g_{kr}A^k$, который мы обозначим через A_r . Следовательно,

$$A_r = g_{kr}A^k. \quad (1.34)$$

Таким же образом

$$A^r = g^{kr}A_k, \quad (1.35)$$

$$g^r_k = g_{kn}g^{nr}. \quad (1.36)$$

Векторы A_r и A^r , связанные формулами (1.34) и (1.35), называются ассоциированными векторами. Как видно из формул (1.34) и (1.35), мы легко можем вычислить компоненты одного из векторов A_r и A^r по компонентам другого. Поэтому A_r и A^r удобно рассматривать как различные соответственно ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора A .

Тензор g_k^r называется смешанным метрическим тензором. Легко доказать, что g_k^r совпадает с тензором Кронекера. Действительно, на основании формул (1.34), (1.35) и (1.36) имеем

$$A_k = g_{kr}A^r = g_{kr}g^{mr}A_m = g_k^m A_m,$$

откуда

$$A_k = g_k^m A_m.$$

Для того чтобы эти соотношения выполнялись при всех значениях A_k , компоненты смешанного метрического тензора g_k^m следует выбрать следующим образом:

$$g_k^m = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases} \quad (1.37)$$

Рассмотрим теперь ковариантный тензор A_{rh} . Если нужно поднять первый индекс r , тогда тензор A_{rh} следует умножить на g^{rm} и затем свернуть относительно первого индекса, т. е.

$$A^r_{.k} = g^{rm}A_{mk}.$$

Для того чтобы можно было узнать, какой индекс был поднят, на его место ставят точку. Например, в равенстве

$$A^k_{.r} = g^{kn}A_{rn}$$

поднят второй индекс k . Оба индекса можно поднять по формуле

$$A^{rk} = g^{rm}g^{kn}A_{mn}.$$

Эти операции, очевидно, можно полностью перенести на тензоры любого ранга. Все тензоры, полученные один из другого указанным способом, называются ассоциированными; компоненты их

также могут быть рассмотрены как компоненты одного и того же тензора.

В прямоугольной системе координат квадрат расстояния между точками A с координатами x_m и A_1 с координатами $x_m + dx_m$ будет

$$ds^2 = dx_m^2. \quad (1.38)$$

Так как

$$x_m = x_m(x^1, x^2, x^3),$$

$$dx_m = \frac{\partial x_m}{\partial x^n} dx^n.$$

Теперь формуле (1.38) можно придать вид

$$ds^2 = \frac{\partial x_m}{\partial x^n} \frac{\partial x_m}{\partial x^k} dx^n dx^k.$$

Введя обозначение

$$g_{nk} = \frac{\partial x_m}{\partial x^n} \frac{\partial x_m}{\partial x^k} = g_{kn}, \quad (1.39)$$

последней формуле придадим вид

$$ds^2 = g_{nk} dx^n dx^k. \quad (1.40)$$

На основании теоремы о признаке тензора заключаем, что g_{nk} — ковариантный тензор.

Определим значения контравариантных и ковариантных компонентов вектора a , заданного в точке P пространства. Проведем через эту точку три координатные поверхности

$$x^k = \text{const}. \quad (1.41)$$

Пересечение этих координатных поверхностей определит три координатные линии.

Вычислим углы, образуемые направлениями e_k и e^k с осями прямоугольной декартовой системы координат x_m . Вдоль e_k возьмем элементарный вектор dr_k ; длина его определится по формуле

$$ds_k = |dr_k| = \sqrt{dx_m^2}.$$

Здесь суммирование ведется по индексу m от 1 до 3. Учитывая, что вдоль координатной линии x^k координаты x_m зависят только от координаты x^k , последней формуле придадим вид

$$ds_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x_m}{\partial x^k}\right)^2} dx^k,$$

или, в силу формул (1.39),

$$ds_k = \sqrt{g_{kk}} dx^k.$$

Тогда выражение для косинуса угла между направлением e_k и осью x_m примет вид

$$\cos(e_k, x_m) = \frac{dx_m}{ds_k} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial x_m}{\partial x^k}. \quad (1.42)$$

Как известно, формула для косинуса угла между направлением e^k (или между вектором $\text{grad } x^k$) и осью x_m имеет вид

$$\cos(e^k, x_m) = \frac{1}{|\text{grad } x^k|} \frac{\partial x^k}{\partial x_m} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x^k}{\partial x_j}\right)^2}} \frac{\partial x^k}{\partial x_m}. \quad (1.43)$$

Учитывая, что в прямоугольной декартовой системе координат компоненты тензора g_{nk} равны δ_n^k , в силу (1.10) будем иметь

$$g^{nk} = \delta_l^j \frac{\partial x^n}{\partial x_l} \frac{\partial x^k}{\partial x_j},$$

отсюда

$$g^{kk} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x_j}\right)^2.$$

На основании этой формулы из (1.43) найдем

$$\cos(e^k, x_m) = \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} \frac{\partial x^k}{\partial x_m}. \quad (1.44)$$

Обозначим контравариантные и ковариантные компоненты вектора a через A^k и A_k , а его компоненты в прямоугольной декартовой системе координат — через a_m . Далее a_{e^k} и a_{e_k} обозначают проекции вектора a соответственно на e_k и e^k . Учитывая, что $a = \delta_m^i a_m$ (δ_m^i — орты прямоугольной декартовой системы координат), согласно основной формуле для проекции вектора на заданное направление получим

$$a_{e_k} = a_m \cos(e_k, x_m) = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial x_m}{\partial x^k} a_m, \quad (1.45)$$

$$a_{e^k} = a_m \cos(e^k, x_m) = \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} \frac{\partial x^k}{\partial x_m} a_m. \quad (1.46)$$

С другой стороны, на основании формул (1.5) и (1.7) имеем

$$A^k = a_m \frac{\partial x^k}{\partial x_m}, \quad A_k = a_m \frac{\partial x_m}{\partial x^k}.$$

Подставляя эти выражения соответственно в (1.45) и (1.46), окончательно получим

$$a_{e_k} = \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} A_{kk}, \quad (1.47)$$

$$a_{e^k} = \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} A^k. \quad (1.48)$$

Отметим еще раз, что в (1.47) и (1.48) по индексу k никакого суммирования производить не следует. Если криволинейная система координат ортогональна, то направления e_k и e^k совпадут, тогда $a_{e^k} = a_{e_k}$; обозначим их через a_{x^k} .

Если криволинейная система координат ортогональна, то, как известно,

$$g_{kk} = H_k^2, \quad g^{kk} = \frac{1}{H_k^2},$$

где H_k — коэффициенты Лямэ.

В этом случае из (1.47) и (1.48) получим

$$a_{x^k} = \frac{1}{H_k} A^k = H_k A^k. \quad (1.49)$$

Величины a_{x^k} называются физическими проекциями вектора \mathbf{a} .

Обозначим теперь тензор второго ранга в прямолинейных прямоугольных координатах x_i через p_{ik} , физические проекции этого тензора в криволинейных ортогональных координатах x^i через $p_{x^i x^k}$, а его контравариантные компоненты через A^{ik} , тогда по формулам преобразования компонентов тензора (1.10) будем иметь

$$A^{ik} = p_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial x_\beta}.$$

Учитывая здесь (1.44) и то, что $g^{kk} = H_k^{-2}$, можем написать

$$A^{ik} = \frac{1}{H_i H_k} p_{\alpha\beta} \cos(e^i, x_\alpha) \cos(e^k, x_\beta).$$

На основании (1.13)

$$p_{x^i x^k} = p_{\alpha\beta} \cos(e^i, x_\alpha) \cos(e^k, x_\beta),$$

тогда

$$p_{x^i x^k} = H_i H_k A^{ik}.$$

Учитывая, что $A^{ik} = g^{li} g^{kk} A_{lk} = H_i^{-2} H_k^{-2} A_{lk}$, будем иметь

$$p_{x^i x^k} = H_i H_k A^{ik} = \frac{1}{H_i H_k} A_{ik}. \quad (1.50)$$

Определим угол ϕ между двумя произвольными векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} , заданными в одной точке. Векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} можно определить линейной комбинацией вида

$$\mathbf{A} = A^k e_k = A_k e^k,$$

$$\mathbf{B} = B^n e_n = B_n e^n.$$

Скалярное произведение векторов A и B равно

$$A \cdot B = (e_k \cdot e_n) A^k B^n = (e^k \cdot e^n) A_k B_n = (e_k \cdot e^n) A^k B_n = (e^k \cdot e_n) A_k B^n,$$

или

$$A \cdot B = g_{kn} A^k B^n = g^{kn} A_k B_n = A^k B_k = A_k B^k. \quad (1.51)$$

С другой стороны,

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \vartheta, \quad (1.52)$$

где

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{g_{kn} A^k A^n} = \sqrt{g^{kn} A_k A_n} = \sqrt{A_k A^k}, \quad (1.53)$$

$$|B| = \sqrt{g_{kn} B^k B^n} = \sqrt{g^{kn} B_k B_n} = \sqrt{B_k B^k}.$$

Подставляя (1.51) и (1.53) в (1.52), найдем

$$\cos \vartheta = \frac{g_{kn} A^k B^n}{\sqrt{g_{kn} A^k A^n} \sqrt{g_{kn} B^k B^n}}. \quad (1.54)$$

Из последнего получим условие ортогональности двух векторов A и B

$$g_{kn} A^k B^n = g^{kn} A_k B_n = A^k B_k = A_k B^k = 0. \quad (1.55)$$

§ 4. Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля

Из формулы (1.26) следует

$$\frac{\partial r}{\partial x^n} = e_n. \quad (1.56)$$

Базисные векторы, вообще, являются функциями положения точки, в которой они определяют координатный триэдр. Изменения базисных векторов характеризуются значениями производных $\frac{\partial e_n}{\partial x^k}$. В евклидовом пространстве, очевидно, производная вектора по скалярному аргументу будет также вектором.

Значения $\frac{\partial e_n}{\partial x^k}$ представим в виде суммы трех векторов, параллельных базисным векторам e_n , т. е.

$$\frac{\partial e_n}{\partial x^k} = \Gamma_{nk}^j e_j. \quad (1.57)$$

Величины Γ_{nk}^j называются коэффициентами связности или символами Кристоффеля. Если координаты декартовы, то e_n — постоянные векторы, поэтому $\Gamma_{nk}^j \equiv 0$, тогда как для криволинейной системы координат $\Gamma_{nk}^j \neq 0$.

Из (1.56) следует, что

$$\frac{\partial e_n}{\partial x^k} = \frac{\partial e_k}{\partial x^n}. \quad (1.58)$$

На основании (1.58) из формул (1.57) имеем

$$\Gamma_{nk}^j e_j = \Gamma_{kn}^j e_j,$$

откуда следует, что

$$\Gamma_{nk}^j = \Gamma_{kn}^j. \quad (1.59)$$

Символы Кристоффеля выражаются через производные метрического тензора. Умножая равенство (1.57) скалярно на e_m и учитывая (1.28), получим

$$\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} - e_n \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^k} = \Gamma_{nk}^j g_{jm}. \quad (1.60)$$

Переставив в равенстве (1.60) индексы n и k и учитывая (1.59), найдем

$$\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - e_k \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^n} = \Gamma_{nk}^j g_{jm}. \quad (1.61)$$

Складывая (1.60) и (1.61), будем иметь

$$\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \left(e_n \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^k} + e_k \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^n} \right) = 2\Gamma_{nk}^j g_{jm}. \quad (1.62)$$

Вычислим в этой формуле выражение, заключенное в скобки. Учитывая соотношение (1.58), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} &= \frac{\partial}{\partial x^n} (e_n \cdot e_k) = e_n \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^n} + e_k \cdot \frac{\partial e_n}{\partial x^n} = \\ &= e_n \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^k} + e_k \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (1.62) примет вид

$$2\Gamma_{nk}^j g_{jm} = \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m}. \quad (1.63)$$

После умножения (1.63) на g^{am} и суммирования по индексу m , с учетом (1.36) и (1.37) получим

$$\Gamma_{nk}^a = \frac{1}{2} g^{am} \left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} \right). \quad (1.64)$$

Отсюда также видно, что символы Кристоффеля симметричны относительно индексов n и k .

Легко показать, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial e^n}{\partial x^k} = -\Gamma_{jk}^n e^j. \quad (1.65)$$

Дифференцируя равенство $e^n \cdot e_m = \delta_{m^n}$, получим

$$\frac{\partial e^n}{\partial x^k} \cdot e_m + e^n \cdot \frac{\partial e_m}{\partial x^k} = 0.$$

Учитывая (1.57), найдем

$$\frac{\partial e^n}{\partial x^k} \cdot e_m = -(e^n \cdot e_j) \Gamma_{m^j}^n = -\Gamma_{mk}^n \quad (1.65')$$

Теперь $\frac{\partial e^n}{\partial x^k}$ представим в виде

$$\frac{\partial e^n}{\partial x^k} = B_{jk}^n e^j.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на e_m , тогда

$$\frac{\partial e^n}{\partial x^k} \cdot e_m = B_{jk}^n \delta_m^j = B_{mk}^n.$$

Сравнивая это соотношение с выражением (1.65'), найдем

$$B_{mk}^n = -\Gamma_{mk}^n.$$

Отсюда придем к формуле (1.65).

§ 5. Параллельное векторное поле

Как мы видели выше, алгебраические операции над тензорами приводят снова к тензорам, чего нельзя утверждать, как убедимся ниже, относительно их дифференцирования. Частные производные компонентов тензора составляют тензор лишь в декартовой системе координат. В криволинейных системах координат дело обстоит сложнее. Здесь приходится вводить так называемое ковариантное дифференцирование, действие которого на тензор снова даст тензор. Ковариантная производная совпадает с обычной, когда тензор отнесен к декартовой системе координат.

Если $f(s)$ — скалярная функция (s — параметр), то в новых координатах $\bar{f} = f$, следовательно,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(s + \Delta s) - \bar{f}(s)}{\Delta s}$$

или

$$\frac{d\bar{f}}{ds} = \frac{df}{ds},$$

откуда видно, что производная скалярной функции по параметру снова является скаляром.

Определение ковариантной производной вектора и тензора будет дано в § 6. Предварительно займемся исследованием параллельного векторного поля.

Пусть координаты произвольной точки P , находящейся на рассматриваемой кривой, являются функциями параметра s . В каждой точке этой кривой построим вектор, равный вектору, заданному в точке P . Таким образом, вдоль кривой будет иметь параллельное векторное поле. Выведем уравнения, которым должно удовлетворять это поле.

Обозначим компоненты вектора рассматриваемого поля в системе координат x^k через A^k , в декартовой системе координат x_m через a_m . В декартовой системе координат компоненты параллельных векторов постоянны вдоль кривой и, следовательно, $\frac{da_m}{ds} = 0$.

По определению вектора

$$a_m = A^k \frac{\partial x_m}{\partial x^k}.$$

Дифференцируя по параметру s последнее равенство, будем иметь

$$\frac{da_m}{ds} = \frac{dA^k}{ds} \frac{\partial x_m}{\partial x^k} + A^k \frac{\partial^2 x_m}{\partial x^n \partial x^k} \frac{dx^n}{ds} = 0. \quad (1.66)$$

После умножения уравнений (1.66) на $g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_m}{\partial x^\alpha}$ и суммирования по индексу m от 1 до 3, используя (1.39) и (1.37), найдем

$$\frac{dA^\beta}{ds} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_m}{\partial x^n \partial x^k} \frac{\partial x_m}{\partial x^\alpha} A^k \frac{dx^n}{ds} = 0. \quad (1.67)$$

Продифференцировав равенства (1.39) по x^α , кроме того, будем иметь

$$\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 x_m}{\partial x^\alpha \partial x^n} \frac{\partial x_m}{\partial x^k} + \frac{\partial x_m}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x_m}{\partial x^\alpha \partial x^k}. \quad (1.68)$$

В равенствах (1.68) дважды производим круговую перестановку индексов n, k, α и из суммы полученных таким образом равенств вычитаем (1.68). Тогда найдем

$$2 \frac{\partial^2 x_m}{\partial x^k \partial x^n} \frac{\partial x_m}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g_{na}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^\alpha}. \quad (1.69)$$

Подставляя (1.69) в (1.67), будем иметь

$$\frac{dA^\beta}{ds} + \Gamma_{nk}^\beta A^k \frac{dx^n}{ds} = 0. \quad (1.70)$$

Таким образом, параллельное векторное поле вдоль заданной кривой должно удовлетворять дифференциальным уравнениям (1.70).

Возьмем какой-либо вектор в данной точке пространства и построим во всех точках этого пространства параллельные ему векторы. В этом параллельном векторном поле компоненты A^β будут функциями координат x^β . Если через любую точку этого поля про-

ведем некоторую кривую, то, очевидно, векторы на этой кривой будут удовлетворять уравнениям (1.70). Учитывая, что теперь мы имеем

$$\frac{dA^\beta}{ds} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x^n} \frac{dx^n}{ds},$$

уравнениям (1.70) придадим вид

$$\left(\frac{\partial A^\beta}{\partial x^n} + \Gamma_{nk}^\beta A^k \right) \frac{dx^n}{ds} = 0. \quad (1.71)$$

Принимая во внимание, что условие (1.71) должно быть удовлетворено для всех кривых, выходящих из точки P , получим, что параллельное векторное поле удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^n} + \Gamma_{nk}^\beta A^k = 0. \quad (1.72)$$

§ 6. Тензор Римана — Кристоффеля. Производная вектора. Формула Гаусса — Остроградского. ε -тензор

Теперь перейдем к определению новых тензоров при помощи дифференцирования данных векторов и тензоров. Пусть f — данная скалярная функция, зависящая от координат точки x^k . Тогда в новых координатах \bar{x}^m , связанных с x^k формулами (1.1), имеем $\bar{f} = f$. Учитывая последнее, а также принимая во внимание (1.1), будем иметь

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}. \quad (1.73)$$

Таким образом, производная скалярной функции по координатам дает ковариантный вектор $\frac{\partial f}{\partial x^k}$.

Рассмотрим параллельное векторное поле произвольного контравариантного вектора A^β вдоль некоторой кривой и ковариантный вектор B_β , определенный на той же кривой. В любой точке взятой кривой произведение $B_\beta A^\beta$ является скалярной функцией параметра s и поэтому $\frac{d}{ds} (B_\beta A^\beta)$ — также скаляр. В правой части равенства

$$\frac{d}{ds} (B_\beta A^\beta) = \frac{dB_\beta}{ds} A^\beta + B_\beta \frac{dA^\beta}{ds}$$

вместо $\frac{dA^\beta}{ds}$ из (1.70) подставим величину $-\Gamma_{nk}^\beta A^k \frac{dx^n}{ds}$; тогда

$$\frac{d}{ds} (B_\beta A^\beta) = \frac{dB_\beta}{ds} A^\beta - \Gamma_{kn}^\beta B_\beta A^k \frac{dx^n}{ds}$$

или

$$\frac{d}{ds}(B_\beta A^\beta) = \left(\frac{dB_\beta}{ds} - \Gamma_{\beta n}^k B_k \frac{dx^n}{ds} \right) A^\beta. \quad (1.74)$$

Учитывая, что A^β — произвольный контравариантный вектор параллельного векторного поля и что произведение такого вектора на выражение внутри скобок в правой части (1.74) является скаляром, на основании теоремы о признаке тензора заключаем, что

$$\frac{dB_\beta}{ds} - \Gamma_{\beta n}^k B_k \frac{dx^n}{ds} \quad (1.75)$$

является ковариантным вектором.

Ковариантный вектор (1.75) называется абсолютной производной ковариантного вектора B_β по параметру s и обозначается через $\frac{\delta B_\beta}{\delta s}$; следовательно,

$$\frac{\delta B_\beta}{\delta s} = \frac{dB_\beta}{ds} - \Gamma_{\beta n}^k B_k \frac{dx^n}{ds}. \quad (1.76)$$

Положим, что в какой-либо координатной системе удовлетворяется уравнение

$$\frac{dB_\beta}{ds} - \Gamma_{\beta n}^k B_k \frac{dx^n}{ds} = 0, \quad (1.77)$$

тогда оно удовлетворяется и в любой другой системе. В случае декартовой системы координат ($\Gamma_{\beta n}^k \equiv 0$) уравнение (1.77) примет вид

$$\frac{dB_\beta}{ds} = 0.$$

Отсюда следует, что вектор B_β также есть параллельное векторное поле вдоль рассматриваемой кривой. Таким образом, (1.77) есть уравнения, которым удовлетворяет параллельное ковариантное векторное поле B_β вдоль данной кривой.

Рассмотрим параллельное векторное поле произвольного ковариантного вектора A_β вдоль некоторой заданной кривой и контравариантный вектор B^β определенный на той же кривой. Поступая так же, как при выводе формулы (1.76), и учитывая, что параллельное векторное поле A_β должно удовлетворять (1.77), получим абсолютную производную контравариантного вектора по параметру s

$$\frac{\delta B^\beta}{\delta s} = \frac{dB^\beta}{ds} + \Gamma_{kn}^\beta B^k \frac{dx^n}{ds}. \quad (1.78)$$

Пусть B^β есть поле контравариантных векторов, определяемое в некотором пространстве. Возьмем какую-либо произвольную кривую, проходящую через любую фиксированную точку этого пространства; тогда из (1.78) с учетом

$$\frac{dB^\beta}{ds} = \frac{\partial B^\beta}{\partial x^n} \frac{dx^n}{ds}$$

найдем

$$\frac{\delta B^\beta}{\delta s} = \left(\frac{\partial B^\beta}{\partial x^n} + \Gamma_{kn}^\beta B^k \right) \frac{dx^n}{ds}.$$

Так как $\frac{dx^n}{ds}$ является произвольным контравариантным вектором и $\frac{\delta B^\beta}{\delta s}$ есть контравариантный вектор, то на основании теоремы

о признаке тензора заключаем, что выражение в круглых скобках представляет собой смешанный тензор второго ранга. Этот тензор называется ковариантной производной вектора B^β и обозначается через $B_{,n}^\beta$; здесь запятая перед индексом n указывает на дифференцирование по x^n . Следовательно,

$$B_{,n}^\beta = \frac{\partial B^\beta}{\partial x^n} + \Gamma_{kn}^\beta B^k. \quad (1.79)$$

Аналогичным образом получим ковариантный тензор второго ранга

$$B_{\beta,n} = \frac{\partial B_\beta}{\partial x^n} - \Gamma_{\beta n}^\alpha B_\alpha. \quad (1.80)$$

Этот тензор называется ковариантной производной вектора B_β .

Распространим эти результаты на дифференцирование тензора. Рассмотрим произвольные параллельные векторные поля B^m , C^n , определенные вдоль некоторой кривой. Пусть A_{mn} есть тензор второго ранга, определенный вдоль той же кривой. В каждой точке этой кривой $A_{mn}B^mC^n$ дает скаляр, поэтому его производная по s есть также скаляр

$$\frac{d}{ds} (A_{mn}B^mC^n) = \frac{dA_{mn}}{ds} B^mC^n + A_{mn} \frac{dB^m}{ds} C^n + A_{mn} B^m \frac{dC^n}{ds}.$$

Исключив при помощи (1.70) производные векторов, получим

$$\frac{d}{ds} (A_{mn}B^mC^n) = \left(\frac{dA_{mn}}{ds} - \Gamma_{mt}^\alpha A_{\alpha n} \frac{dx^t}{ds} - \Gamma_{nt}^\alpha A_{m\alpha} \frac{dx^t}{ds} \right) B^mC^n.$$

Следовательно, на основании теоремы о признаке тензора заключаем, что в правой части выражение в скобках есть тензор того же типа и ранга, что и A_{mn} . Его называют абсолютной производной тензора A_{mn} и обозначают через $\frac{\delta A_{mn}}{\delta s}$. Тогда

$$\frac{\delta A_{mn}}{\delta s} = \frac{dA_{mn}}{ds} - \Gamma_{mt}^\alpha A_{\alpha n} \frac{dx^t}{ds} - \Gamma_{nt}^\alpha A_{m\alpha} \frac{dx^t}{ds}. \quad (1.81)$$

Рассмотрим тензорное поле в некотором пространстве. Если в нем возьмем какую-нибудь кривую, проходящую через любую точ-

ку этого пространства, то выражение (1.81) вдоль этой кривой будет тензором.

Учитывая, что

$$\frac{dA_{mn}}{ds} = \frac{\partial A_{mn}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{ds},$$

формуле (1.81) придадим вид

$$\frac{\delta A_{mn}}{\delta s} = \left(\frac{\partial A_{mn}}{\partial x^\beta} - \Gamma_{m\beta}^a A_{an} - \Gamma_{n\beta}^a A_{ma} \right) \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (1.82)$$

Принимая во внимание, что (1.82) представляет собой тензор и $\frac{dx^\beta}{ds}$ есть произвольный контравариантный вектор, на основании теоремы о признаке тензора заключаем, что выражение в скобках есть тензор, имеющий на один ковариантный индекс больше, чем A_{mn} ; этот тензор называется ковариантной производной тензора A_{mn} и обозначается через $A_{m\beta, n}$. Здесь запятая указывает на дифференцирование по x^β , следовательно,

$$A_{m\beta, n} = \frac{\partial A_{mn}}{\partial x^\beta} - \Gamma_{m\beta}^a A_{an} - \Gamma_{n\beta}^a A_{ma}. \quad (1.83)$$

Указанным способом можно вычислить абсолютную и ковариантную производные тензора любого типа и сколь угодно высокого ранга. Так, например, если тензор задан контравариантными компонентами A^{mn} , то

$$A_{, \beta}^{mn} = \frac{\partial A^{mn}}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^m A^{\alpha n} + \Gamma_{\alpha\beta}^n A^{m\alpha}. \quad (1.84)$$

Вычислим вторую ковариантную производную ковариантного вектора B_r , т. е. с помощью формулы (1.83) определим ковариантную производную тензора $B_{r,s}$

$$\begin{aligned} B_{r, st} &= \frac{\partial B_{r, s}}{\partial x^t} - \Gamma_{rt}^m B_{m, s} - \Gamma_{st}^m B_{r, m} = \frac{\partial^2 B_r}{\partial x^t \partial x^s} - \Gamma_{rs}^m \frac{\partial B_m}{\partial x^t} - \\ &- \Gamma_{tt}^m \frac{\partial B_m}{\partial x^s} - \Gamma_{st}^m \frac{\partial B_r}{\partial x^m} - B_m \left(\frac{\partial}{\partial x^t} \Gamma_{rs}^m - \Gamma_{rp}^m \Gamma_{st}^p - \Gamma_{sp}^m \Gamma_{rt}^p \right). \end{aligned}$$

Переставим в этой формуле индексы s и t и вычтем одно выражение из другого. Пользуясь свойством симметрии символов Кристоффеля, будем иметь

$$B_{r, st} - B_{r, ts} = R_{rst}^p B_p, \quad (1.85)$$

где

$$R_{rst}^p = \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{rt}^p - \frac{\partial}{\partial x^t} \Gamma_{rs}^p + \Gamma_{rt}^m \Gamma_{ms}^p - \Gamma_{rs}^m \Gamma_{mt}^p. \quad (1.86)$$

В (1.85) левая часть является тензором и B_p есть произвольный ковариантный вектор; на основании теоремы о признаке тензора

заключаем, что $R^p{}_{rst}$ является также тензором. Тензор $R^p{}_{rst}$, который носит название тензора Римана — Кристоффеля, составлен только из ковариантного метрического тензора g_{mn} и его производных до второго порядка включительно.

Опустим в (1.85) индекс ρ , тогда

$$R_{prst} = g_{pm} R^m{}_{rst} = g_{pm} \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{rt}^m - g_{pm} \frac{\partial}{\partial x^t} \Gamma_{rs}^m + \Gamma_{rt}^m \Gamma_{p,ms} - \Gamma_{rs}^m \Gamma_{p,mt},$$

где

$$\Gamma_{p,ms} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^p} \right),$$

$$\Gamma_{m,ps} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{ps}}{\partial x^m} \right),$$

отсюда

$$\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^s} = \Gamma_{p,ms} + \Gamma_{m,ps}.$$

Учитывая, что

$$g_{pm} \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{rt}^m = \frac{\partial}{\partial x^s} (g_{pm} \Gamma_{rt}^m) - \Gamma_{rt}^m \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^s} = \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{p,rt} - \Gamma_{rt}^m (\Gamma_{p,ms} + \Gamma_{m,ps}),$$

найдем

$$R_{prst} = \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{p,rt} - \frac{\partial}{\partial x^t} \Gamma_{p,rs} + \Gamma_{rs}^m \Gamma_{m,pt} - \Gamma_{rt}^m \Gamma_{m,ps}.$$

Введем под знаки производных в последнем равенстве выражения $\Gamma_{p,ms}$ и учтем формулу (1.64). Тогда

$$R_{prst} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{pt}}{\partial x^s \partial x^r} + \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x^t \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ps}}{\partial x^t \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{rt}}{\partial x^s \partial x^p} \right) + g^{mn} (\Gamma_{m,rs} \Gamma_{n,pt} - \Gamma_{m,rt} \Gamma_{n,ps}). \quad (1.87)$$

Из последних формул непосредственно вытекают следующие свойства:

$$\begin{aligned} R_{prst} &= -R_{rpst}, \quad R_{ppst} = 0, \\ R_{prst} &= -R_{prts}, \quad R_{prt} = 0, \\ R_{prst} &= R_{stpr}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Равенства, находящиеся в первых двух строках, выражают антисимметричность тензора R_{prst} относительно каждой пары индексов p, r и s, t . Учитывая свойства (1.88), после подсчета получаем, что из 81 компонента тензора Римана — Кристоффеля остается только шесть независимых компонентов $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}$.

Известно, что во все евклидово пространство можно ввести декартову систему координат. Так как в последней компоненты метрического тензора постоянны, а следовательно, символы Кристоф-

Феля обращаются в нуль, то из формул (1.87) имеем

$$R_{prst} = 0. \quad (1.89)$$

Таким образом, условия (1.89) являются необходимыми условиями евклидовости пространства.

Можно показать и обратное. Если тензор Римана — Кристоффеля во всех точках пространства обращается в нуль, то в этом пространстве можно выбрать такие координаты x^1, x^2, x^3 , чтобы квадратичная форма приняла вид $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ с постоянными коэффициентами. Постоянство этих коэффициентов указывает на евклидовость пространства. Следовательно, равенство нулю тензора Римана — Кристоффеля является достаточным условием того, чтобы пространство было евклидовым.

Выше было показано, что в трехмерном пространстве тензор Римана — Кристоффеля имеет только шесть независимых компонентов. Следовательно, условия (1.89) могут быть заменены шестью независимыми условиями вида

$$R_{prst} = 0 (prst = 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132) \quad (1.90)$$

Таким образом, условия (1.90) являются необходимыми и достаточными условиями евклидовости пространства.

Выведем формулу Гаусса — Остроградского в криволинейной системе координат.

Формула преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности в прямоугольной системе координат — формула Гаусса — Остроградского, — как хорошо известно, имеет вид

$$\int_{\tau} \frac{\partial a_k}{\partial x^k} d\tau = \int_{\omega} a_k l_k d\omega, \quad (1.91)$$

где ω — замкнутая поверхность, ограничивающая объем τ , l_k — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности ω .

Возьмем теперь криволинейную систему координат x^k и пусть A^k обозначает контравариантный вектор, определяющий в системе координат x^k вектор a_k . Учитывая, что величина A_k^k является скаляром, будем иметь

$$A_{,k}^k = \frac{\partial a_k}{\partial x^k}. \quad (1.92)$$

Обозначим через n_k ковариантные компоненты единичного вектора внешней нормали, составляющие которого в системе координат x^k равны l_k .

С другой стороны,

$$A_k n_k = a_k l_k. \quad (1.93)$$

Следовательно, из (1.91), с учетом (1.92) и (1.93), получим

$$\int_{\tau} A_{,k}^k d\tau = \int_{\omega} A^k n_k d\omega. \quad (1.94)$$

В заключение рассмотрим \bar{e} — тензор. Пусть составляющие объекта e_{rst} изменяются по знаку, но не по абсолютному значению, при перемене мест двух индексов. При этом, очевидно, составляющие символа e_{rst} могут иметь следующие значения: 0, когда любые два индекса равны; +1, когда rst является четной перестановкой чисел 1, 2, 3, и -1, когда rst является нечетной перестановкой чисел 1, 2, 3.

Рассмотрим определитель $|a_s^r|$. Здесь верхний индекс означает строку, а нижний — столбец. Если определитель развернуть по столбцам, то он будет равен

$$|a_s^r| = \pm a_1^i a_2^j a_3^k.$$

Здесь суммирование производится по индексам i, j, k , которые образуют перестановки чисел 1, 2, 3, а знак плюс или минус ставится в соответствии с четностью или нечетностью перестановки этих чисел. На основании определения e — символов,

$$|a_s^r| = e_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k.$$

Рассмотрим сумму

$$e_{ijk} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k \quad (i, j, k, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

Учитывая, что индексы i, j, k являются индексами суммирования, будем иметь

$$e_{ijk} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k = -e_{kji} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k = -e_{ijk} a_\gamma^i a_\beta^j a_\alpha^k.$$

Таким образом, перестановка индексов α и γ приводит к перемене знака. Это остается в силе и для других индексов. Следовательно, рассматриваемая сумма антисимметрична относительно индексов α, β, γ , т. е.

$$e_{ijk} a_\alpha^i a_\beta^j a_\gamma^k = |a_s^r| e_{\alpha\beta\gamma}. \quad (1.95)$$

Если в формуле (1.95) положить $a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$ и учесть, что якобиан

$\left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right| \neq 0$, то получим

$$\bar{e}_{ijk} = \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right|^{-1} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k}. \quad (1.96)$$

Введем новую координатную систему $y^i = y^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ и составим выражение $e_{ijk} \left| \frac{\partial x^r}{\partial y^s} \right|$. Тогда на основании формулы (1.96) получим

$$e_{ijk} \left| \frac{\partial x^r}{\partial y^s} \right| = \left| \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial y^s} \right|^{-1} \bar{e}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial y^k} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| \left| \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial y^s} \right|$$

или после сокращения на $\left| \frac{\partial x^r}{\partial y^s} \right| \neq 0$ будем иметь

$$e_{ijk} \left| \frac{\partial x^r}{\partial y^s} \right| = \bar{e}_{\alpha\beta\gamma} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial y^k}.$$

Отсюда на основании определения тензора величины $e_{ijk} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right|$

представляют тензор, его обозначают через e_{ijk} .

Введем теперь три некопланарных вектора A^i, B^j, C^k . Из определения смешанного произведения следует

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A^i e_i (B^j e_j \times C^k e_k) = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right| e_{ijk} A^i B^j C^k = \varepsilon_{ijk} A^i B^j C^k. \quad (1.97)$$

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Первоначально Коши и Навье рассматривали твердое тело как систему материальных частиц. При этом каждую пару материальных частиц полагали связанной между собой силами взаимодействия, направленными по прямой, соединяющей их и линейно зависящими от расстояния между частицами. При том уровне, на котором находилась физика в начале XIX столетия, описать таким способом упругие свойства реальных тел не удалось. В настоящее время существуют строгие физические теории, позволяющие определить упругие свойства кристаллов различного строения, отходя от рассмотрения сил взаимодействия между атомами в кристаллической решетке. Более простой путь, по которому следует современная теория упругости, состоит в том, чтобы рассматривать распределение вещества тела непрерывно по всему его объему; это позволяет перемещения материальных точек принимать за непрерывные функции координат.

Для вычисления силы взаимодействия между материальными частицами, расположенными по одну сторону от произвольной площадки, мысленно выделенной внутри тела, и частицами, расположенными по другую сторону этой площадки, оказалось целесообразным ввести понятие об осредненной силе взаимодействия между ними.

Погрешность, полученная от указанной абстракции, может быть существенной в случае определения взаимных перемещений точек, первоначальные расстояния между которыми сравнимы с расстояниями между материальными частицами, и при определении силы, действующей на площадку, соизмеримую по величине с квадратом расстояния между материальными частицами.

При решении практических задач о деформации твердого тела эта абстракция не вносит ощутимых погрешностей, чем и оправдывается замена твердого тела непрерывной сплошной средой.

§ 7. Виды внешних сил

Различают два вида внешних сил, действующих на тело:

1. Поверхностные силы — это силы, которые возникают в точках поверхности тела.

Пусть на элемент $d\omega$ поверхности тела действует сила dP , тогда вектор

$$\frac{dP}{d\omega} = T_n \quad (2.1)$$

представляет собой силу, отнесенную к единице площади поверхности тела в точке M (рис. 1). Она называется интенсивностью поверхностной силы и размерность ее сила/длина².

Главный вектор и главный момент поверхностных сил, приложенных ко всей поверхности ω , на основании их определения, будут

$$V = \int_{\omega} T_n d\omega, \quad (2.2)$$

$$V = \int_{\omega} (r \times T_n) d\omega. \quad (2.3)$$

Здесь \int_{ω} — поверхностный интеграл; r — радиус-вектор точки приложения силы относительно произвольно выбранного начала координат.

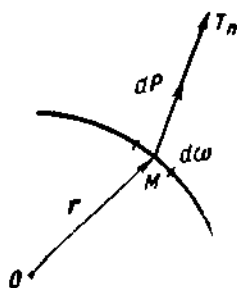


Рис. 1

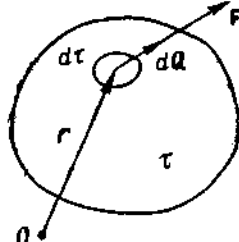


Рис. 2

Примером поверхностных сил может служить давление жидкостей или твердых тел, соприкасающихся с данным телом, давление света и др.

2. Массовые силы — это силы, которые действуют на элемент массы тела (рис. 2). Пусть на массу $dm = \rho d\tau$, заключающуюся в элементе объема $d\tau$ тела, действует сила dQ . Тогда вектор $F = \frac{dQ}{dm}$ представляет собой силу, отнесенную к единице массы в данной точке.

Рассматриваются также объемные силы F^* , которые определяются формулой

$$F^* = \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \rho \frac{dQ}{dm} = \rho F. \quad (2.4)$$

Главный вектор и главный момент объемных сил, приложенных ко всему объему τ , будут

$$V = \int_{\tau} F \rho d\tau, \quad (2.5)$$

$$L = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \rho d\tau. \quad (2.6)$$

Здесь \int_V — объемный интеграл.

Типичным примером массовых сил служат силы тяготения. Если ось x_3 направим вертикально вниз, то сила тяжести, отнесенная к единице объема, будет

$$\mathbf{F}^* = i_3 \rho g. \quad (2.7)$$

§ 8. Метод сечений. Вектор напряжения

В недеформированном теле расположение частиц соответствует состоянию его теплового равновесия. Если выделить из этого тела какой-нибудь объем, то все силы, действующие на него со стороны других частей, будут уравновешенными. Под действием же внешних сил расположение частиц в теле меняется, т. е. тело деформируется, в результате чего возникают внутренние силы. Для определения последних применяется так называемый метод сечений. Пусть имеем деформируемое тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил. Мысленно разрежем его некоторой поверхностью mn на две части. Отбросив одну часть, заменим ее действие на оставленную распределенными по поверхности сечения внутренними силами связи между частицами тела, лежащими по обе стороны сечения (рис. 3). Теперь силы, действующие в точках поверхности сечения, могут быть отнесены к внешним поверхностным силам. Для равновесия оставшейся части эти силы должны быть выбраны так, чтобы с заданными силами, действующими на рассматриваемую часть тела, они составили уравновешенную систему сил. Обозначим через ΔV , ΔL соответственно главный вектор и главный момент сил, распределенных по элементу поверхности $\Delta \omega$ сечения mn с нормалью \mathbf{n} в точке M . Направление нормали \mathbf{n} к элементу поверхности $\Delta \omega$ будем считать положительным, если она направлена от оставшейся части к отброшенной.

Полагая, что в рассмотренной нами модели сплошной среды между ее частицами осуществляется только центральное воздействие, имеем

$$\lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta \omega} = 0, \quad \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta \omega} = T_n.$$

Вектор T_n называется вектором напряжения на элементе поверхности с нормалью \mathbf{n} в точке M .

При рассмотрении модели среды, введенной Фойгтом в 1887 г., предполагается, что между ее частицами, помимо обычного центрального воздействия, осуществляется еще и вращательное. Тогда, кроме вектора напряжения T_n , будет существовать и вектор моментного напряжения M_n , равный

$$M_n = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta \omega} \neq 0.$$

На последней модели мы не останавливаемся.

Размерность вектора напряжения, как это следует из его определения, будет сила/длина².

Вектор напряжения T_n может быть разложен на две составляющие:

1. Нормальная составляющая, направленная по нормали n , называется нормальным напряжением и обозначается через σ_n .

2. Касательная составляющая, направленная по касательной к кривой пересечения плоскости, проходящей через T_n и n , с поверхностью сечения, называется касательным напряжением и обозначается через τ_n (рис. 4).

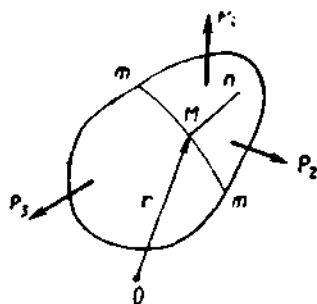


Рис. 3

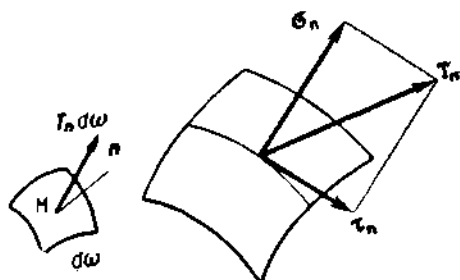


Рис. 4

Нормальное напряжение принято считать положительным, если его направление совпадает с направлением внешней нормали к поверхности сечения в данной точке, и отрицательным — в противном случае.

Если направление вектора напряжения T_n совпадает с нормалью к поверхности сечения в данной точке, то

$$T_n = \sigma_n \text{ и } \tau_n = 0.$$

В этом случае нормальное напряжение называется главным нормальным напряжением, а площадка, на которой действует это напряжение, — главной площадкой в данной точке.

Напряжение, отнесенное к поверхности элемента $d\omega$ с нормалью n , в недеформированном состоянии называется условным напряжением, а напряжение, отнесенное к поверхности элемента $d\omega'$ с нормалью n' , в деформированном состоянии — истинным напряжением.

Пусть вектор напряжения T_n характеризует действие тела A на тело B , передающееся через элемент поверхности сечения с нормалью n , а напряжение T_{-n} характеризует действие тела B на тело A , передающееся через тот же элемент поверхности (рис. 5).

На основании третьего закона Ньютона имеет место равенство

$$T_{-n} = -T_n. \quad (2.8)$$

§ 9. Тензор напряжений

Выберем в теле некоторую точку P и проведем через нее координатные линии произвольной криволинейной системы координат x^k .

Рассмотрим в точке P тетраэдр, мысленно выделенный из недеформированного тела тремя координатными поверхностями, определяемыми ковариантными базисными векторами e_k и поверхностью, внешней нормалью к которой служит некоторое направление n (n — единичный вектор), проходящее через ту же точку P (рис. 6).

Рассмотрим движение тетраэдра. Обозначим через $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$ и $d\omega$ соответственно площади поверхностей CPB, APC, APB

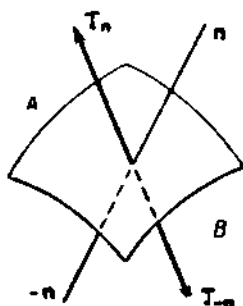


Рис. 5

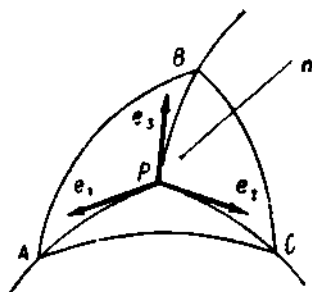


Рис. 6

и ABC . На указанных поверхностях, нормальными которых служат соответственно векторы взаимного базиса e^k и единичная нормаль n , действуют силы $-T_k d\omega_k$ ($k=1, 2, 3$) и $T_n d\omega$, где T_k и T_n — векторы напряжения в координатных площадках с нормальными e^k и n . Кроме того, массовая сила выделенного элемента равна $\rho(F - W)d\tau$ (здесь W — ускорение; ρ — плотность материала недеформированной среды).

На основании принципа отвердевания и начала Даламбера уравнение движения тетраэдра будет иметь вид

$$T_n d\omega - T_k d\omega_k - \rho(F - W)d\tau = 0. \quad (2.9)$$

Здесь во втором слагаемом суммирование ведется по индексу k от 1 до 3. Поскольку для тетраэдра сумма векторов площадей равна нулю, то

$$n d\omega = \frac{d\omega_k}{|e^k|} e^k. \quad (2.10)$$

Учитывая, что $e^k \cdot e^k = g^{kk}$ и $n = n_k e^k$ (n_k — ковариантные компоненты единичного вектора), вместо (2.10) будем иметь

$$n_k d\omega e^k = \frac{d\omega_k}{\sqrt{g^{kk}}} e^k,$$

откуда

$$d\omega_k = \sqrt{g^{kk}} n_k d\omega.$$

Подставим это в (2.9), тогда

$$T_n - T_k \sqrt{g^{kk}} n_k - \rho(F - W) \frac{d\tau}{d\omega} = 0.$$

Пусть при постоянном направлении n расстояние от точки P до поверхности ABC стремится к нулю. Принимая во внимание, что $\frac{d\tau}{d\omega} \rightarrow 0$, из последнего уравнения найдем

$$T_n = \sqrt{g^{kk}} T_k n_k. \quad (2.11)$$

Вектор напряжения T_k может быть представлен тремя составляющими по отношению к векторам ковариантного базиса e_m , т. е.

$$\sqrt{g^{kk}} T_k = \sigma^{km} e_m. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11), получим

$$T_n = \sigma^{km} n_k e_m. \quad (2.13)$$

Учитывая, что $T_n = T_n^m e_m$, где T_n^m — контравариантные компоненты вектора напряжения, найдем

$$T_n^m = \sigma^{km} n_k. \quad (2.14)$$

В (2.13) двойное суммирование ведется по индексам k и m , а в (2.14) — одинарное суммирование по индексу k .

Формула (2.14) определяет контравариантные компоненты вектора напряжения на площадке, заданной нормалью n , поэтому на основании теоремы о признаке тензора заключаем, что величины σ^{km} составляют контравариантные компоненты тензора второго ранга. Тензор σ^{km} называется контравариантным тензором напряжений.

§ 10. Уравнения движения и равновесия в компонентах тензора напряжений

Известно, что для составления уравнений движения абсолютно твердого тела необходимо и достаточно приравнять нулю главный вектор и главный момент действующих на него внешних сил и сил инерции.

Для того, чтобы составить уравнения движения деформируемого тела, необходимо и достаточно приравнять нулю главный вектор, главный момент сил и сил инерции, приложенных к каждой части тела, которую можно мысленно из него выделить.

Равенство нулю главного вектора, главного момента указанных сил налагает определенные условия (к нахождению которых мы переходим) на изменение компонентов тензора напряжений при переходе от одной точки тела к другой. В дальнейшем будем пред-

полагать, что компоненты тензора напряжений непрерывны и имеют непрерывные частные производные во всех точках тела. Мысленно вырежем внутри тела некоторый произвольный объем τ , ограниченный достаточно гладкой поверхностью ω . Главный вектор и главный момент объемных сил $\rho \mathbf{F} d\tau$, действующих на элемент объема $d\tau$, выделенного из объема τ , сил инерции $-\rho \mathbf{W} d\tau$, приложенных к этому элементу в случае динамической нагрузки, и поверхностных сил $\mathbf{T}_n d\omega$, действующих на элемент $d\omega$, должны равняться нулю, т. е.

$$\int_{\tau} \rho (\mathbf{F} - \mathbf{W}) d\tau + \int_{\omega} \mathbf{T}_n d\omega = 0. \quad (2.15)$$

$$\int_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho (\mathbf{F} - \mathbf{W})) d\tau + \int_{\omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_n) d\omega = 0. \quad (2.16)$$

Так как компонент силы $\rho (\mathbf{F} - \mathbf{W}) d\tau$ в направлении единичного вектора \mathbf{v} равен $\mathbf{v} \rho (\mathbf{F} - \mathbf{W}) d\tau$ и компонент силы $\mathbf{T}_n d\omega$ в том же направлении равен $\mathbf{v} \mathbf{T}_n d\omega$, вместо (2.15) можно написать

$$\int_{\tau} \rho (F^m - W^m) v_m d\tau - \int_{\omega} T_n^m v_m d\omega = 0. \quad (2.17)$$

Учитывая (2.14) и формулу Гаусса — Остроградского (1.94), поверхностному интегралу в (2.17) придадим вид

$$\int_{\omega} T_n^m v_m d\omega = \int_{\omega} (\sigma^{km} v_m) n_k d\omega = \int_{\tau} (\sigma^{km} v_m)_{,k} d\tau = \int_{\tau} \sigma^{km}_{,k} v_m d\tau. \quad (2.18)$$

Подставив это в (2.17), получим

$$\int_{\tau} (\rho (F^m - W^m) + \sigma^{km}_{,k}) v_m d\tau = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности подинтегральной функции, произвольности вектора v_m и объема τ следует, что подинтегральная функция должна обращаться в нуль в каждой точке тела

$$\sigma^{km}_{,k} + \rho F^m = \rho W^m. \quad (2.19)$$

Если тело находится в равновесии, то ускорение элемента $d\tau$ будет равно нулю, и уравнение примет вид

$$\sigma^{km}_{,k} + \rho F^m = 0. \quad (2.20)$$

Здесь $\sigma^{km}_{,k}$ — ковариантная производная тензора напряжений σ^{km} ; суммирование производится по индексу k от 1 до 3.

Уравнения (2.19) и (2.20), связывающие изменение компонентов тензора напряжений с массовыми силами в любой точке внутри

* Для параллельного в области τ векторного поля

$$v_{m,k} = \frac{\partial v_m}{\partial x^k} - \Gamma_{mk}^{\beta} v_{\beta} = 0.$$

тела, соответственно называются уравнениями движения и уравнениями равновесия деформируемого тела в контравариантной форме. Эти уравнения, в которые входят девять компонентов тензора напряжений, являются неоднородными уравнениями первого порядка в частных производных. В случае отсутствия массовых сил эти уравнения будут однородными.

Так как компонент момента $\mathbf{r} \times \rho(\mathbf{F} - \mathbf{W}) d\tau$ в направлении единичного вектора \mathbf{v} равен $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{F} - \mathbf{W}) d\tau$, компонент момента $\mathbf{r} \times T_n d\omega$ в том же направлении равен $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times T_n d\omega$ и радиус-вектор точки \mathbf{r} можно представить в виде $\mathbf{r} = l^i e_j$, то с учетом формулы (1.96) вместо (2.16) напомним

$$\int_{\tau} \varepsilon_{ijk} \rho (F^i - W^i) l^j v^k d\tau + \int_{\omega} \varepsilon_{ijk} T_n^i l^j v^k d\omega = 0. \quad (2.20')$$

Принимая во внимание формулу (2.13) и формулу Гаусса — Остроградского (1.94), поверхностному интегралу в уравнении (2.20') придадим вид

$$\int_{\omega} \varepsilon_{ijk} l^j v^k \sigma^{mi} n_m d\omega = \int_{\tau} (\varepsilon_{ijk} l^j v^k \sigma^{mi})_{,m} d\tau.$$

Так как $\varepsilon_{ijk,m} = 0^*$ и $v^k_{,m} = 0$, уравнение (2.20') запишем в виде

$$\int_{\tau} \varepsilon_{ijk} v^k [\rho (F^i - W^i) l^j + (\sigma^{mi} l^j)_{,m}] d\tau = 0.$$

Так как $\sigma_{,m}^{mi} + \rho F^i = \rho W^i$, поэтому

$$\int_{\tau} \varepsilon_{ijk} v^k \sigma^{mi} l^j_{,m} d\tau = 0.$$

На основании формулы $l^i_{,j} = \delta_j^i$ **, произвольности объема τ и непрерывности подынтегральной функции имеем

$$\varepsilon_{ijk} \sigma^{ji} v^k = 0.$$

Заметив, что $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$, последнему соотношению придадим вид

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\sigma^{ji} - \sigma^{ij}) v^k = 0.$$

Развернув это выражение, будем иметь

$$(\sigma^{23} - \sigma^{32}) v^1 + (\sigma^{31} - \sigma^{13}) v^2 + (\sigma^{12} - \sigma^{21}) v^3 = 0.$$

* Так как ε_{ijk} в декартовой системе координат константа, то в этой системе координат $\varepsilon_{ijk,m} = 0$, что остается справедливым и для любой другой системы координат.

** Данная формула вытекает из соотношения

$$e_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (l^\alpha e_\alpha) = \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^j} e_\alpha + l^\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial l^\alpha}{\partial x^j} + \Gamma_{\beta j}^\alpha l^\beta \right) e_\alpha = l^\alpha_{,j} e_\alpha.$$

Так как направление ν произвольно, заключаем, что

$$\sigma^{km} = \sigma^{mk}. \quad (2.21)$$

Таким образом, доказана симметричность тензора напряжений. Следовательно, тензор напряжений, характеризующий напряженное состояние в данной точке, определяется шестью независимыми компонентами.

§ 11. Условия на поверхности

В предыдущем параграфе было указано, что необходимым и достаточным условием равновесия деформируемого тела является равенство нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к каждой части тел, которую можно мысленно из него выделить. Это должно остаться в силе и для частей тела, имеющих общую с поверхностью тела поверхность. Будем считать, что компоненты тензора напряжений непрерывны вплоть до границы.

Условия равновесия бесконечно малого тетраэдра (см. рис. 6), когда поверхность ABC совпадает с поверхностью тела, дают связь между тензором напряжений и внешними силами. Эта связь имеет вид (2.13) или (2.14) с той лишь разницей, что в этих формулах n будет внешней нормалью к поверхности тела в данной точке. Эти условия называются поверхностными или граничными условиями.

Таким образом, из необходимого и достаточного условия равенства нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к каждой части тела, включая части тела, имеющие общую поверхность с поверхностью тела, вытекает, что шесть компонентов тензора напряжений должны удовлетворять внутри тела трем дифференциальным уравнениям (2.19) в случае динамической нагрузки или (2.20) — в случае статической нагрузки и трем поверхностным условиям (2.14).

Следует отметить, что шесть компонентов тензора напряжений из системы трех дифференциальных уравнений определяются неоднозначно. Каждое решение из бесконечного множества решений этой системы, удовлетворяющее трем граничным условиям, соответствует некоторому статически возможному напряженному состоянию.

Следовательно, под действием приложенных внешних сил может возникнуть бесчисленное множество статически возможных напряженных состояний. Таким образом, задача о нахождении напряженного состояния в теле является статически неопределимой.

Ниже (гл. V) будет показано, каким образом из бесконечного числа статически возможных напряженных состояний будет выделено реальное напряженное состояние.

§ 12. Уравнения движения и равновесия в декартовой системе координат

Пусть x_k — оси декартовой прямоугольной системы координат, проведенные через некоторую точку нагруженного тела. Тогда ко-

вариантные и контравариантные компоненты вектора и тензора напряжений совпадут друг с другом и, в силу формул (1.55), (1.56), будут равны физическим компонентам, а формулы (2.14) примут вид

$$T_{nk} = \sigma_{mk} n_m. \quad (2.22)$$

Здесь T_{nk} — компоненты вектора напряжений T_n , действующего на площадке, проходящей через заданную точку тела, внешняя нормаль к которой составляет с осями координат углы (n, x_n) ; σ_{mk} — компоненты аффинного ортогонального тензора напряжений, причем σ_{kk} (не суммировать) — нормальные к координатным площадкам напряжения; $\sigma_{mk} (m \neq k)$ — касательные напряжения.

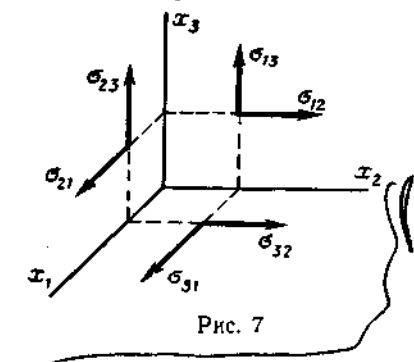


Рис. 7

Симметричность тензора напряжений выражает закон парности касательных напряжений: в любой точке тела на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения перпендикулярны к линии пересечения площадок, равны по величине и направлены в противоположные стороны (рис. 7).

Повернем оси ox_k вокруг начала координат, тогда в силу (1.13) будем иметь

$$\sigma'_{rl} = \sigma_{mk} a_{rm} a_{lk} \quad (2.23)$$

(a_{rm} — косинус угла между осями x_r и x_m).

Учитывая, что $a^2_{rs} = 1$, $a_{rs} a_{ts} = 0$ ($r \neq t$), где суммирование ведется по индексу s , из (2.23) получим

$$\sigma'_{rr} = \sigma_{rr}.$$

Следовательно, сумма нормальных компонентов напряжений, действующих на три взаимно перпендикулярные площадки, не зависит от их ориентации в данной точке.

В декартовой прямоугольной системе координат, благодаря тому, что символы Кристоффеля обращаются в нуль и ковариантные компоненты вектора и тензора напряжений совпадают с физическими компонентами, уравнения движения (2.19) и равновесия (2.20), соответственно примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + \rho F_k = \rho W_k, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + \rho F_k = 0. \quad (2.25)$$

Эти уравнения могут быть записаны и в следующем виде:

$$\operatorname{div} T_k + \rho F_k = \rho W_k \quad (2.26)$$

в случае движения,

$$\operatorname{div} T_k + \rho F_k = 0 \quad (2.27)$$

в случае равновесия.

Здесь $T_k = i_r \sigma_{kr}$ — вектор напряжения на координатной площадке $x_k = \text{const}$.

§ 13. Уравнения движения и равновесия в цилиндрических и сферических координатах

Часто бывает удобно пользоваться уравнениями движения и равновесия в цилиндрической и сферической системах координат. Физические проекции силы ρF и ускорения W в цилиндрической

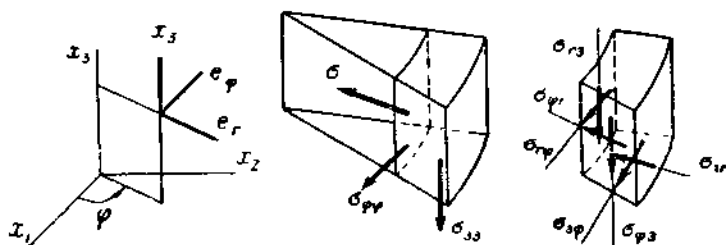


Рис. 8

системе координат соответственно обозначим через ρF_r , ρF_φ , ρF_3 и W_r , W_φ , W_3 , а физические проекции тензора напряжений в той же системе координат — через σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{33} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{r3} , $\sigma_{\varphi 3}$ (рис. 8).

На основании формул (1.49) и (1.50) с учетом того, что в цилиндрической системе координат компоненты ковариантного метрического тензора

$$g_{11} = H_1^2 = 1, \quad g_{22} = H_2^2 = r^2, \quad g_{33} = H_3^2 = 1, \quad g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho F^1 &= \rho F_r, \quad \rho F^2 = \frac{1}{r} \rho F_\varphi, \quad \rho F^3 = \rho F_3, \quad \sigma^{11} = \sigma_{rr}, \quad \sigma^{12} = \frac{1}{r} \sigma_{r\varphi}, \\ \sigma^{13} &= \sigma_{r3}, \quad \sigma^{23} = \frac{1}{r} \sigma_{\varphi 3}, \quad \sigma^{22} = \frac{1}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \sigma^{33} = \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

В силу (1.84)

$$\sigma_{,m}^{mk} = \frac{\partial \sigma^{mk}}{\partial x^m} + \Gamma_{jm}^m \sigma^{jk} + \Gamma_{jm}^k \sigma^{mj}, \quad (2.29)$$

откуда, при $k=1$, с учетом (2.28), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{,m}^{m1} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{3r}}{\partial x_3} + (\Gamma_{j1}^1 + \Gamma_{j2}^2 + \Gamma_{j3}^3) \sigma^{j1} + \\ &+ \Gamma_{j1}^1 \sigma^{1j} + \Gamma_{j2}^1 \sigma^{2j} + \Gamma_{j3}^1 \sigma^{3j}. \end{aligned}$$

Используя (1.64), найдем

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{33}^3 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r.$$

Тогда

$$\sigma_{,m}^{m1} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{3r}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}.$$

Подставляя это равенство в (2.19), получим первое уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{3r}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho F_r = \rho W_r. \quad (2.30)$$

Аналогично выводятся два других уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial x_3} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \rho F_\varphi = \rho W_\varphi,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{r3}}{r} + \rho F_3 = \rho W_3.$$

Физические проекции объемной силы и ускорения в сферической системе координат соответственно обозначим через ρF_r , ρF_φ , ρF_ψ , и W_r , W_φ , W_ψ , а физические проекции тензора напряжений в той же системе координат — через σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\psi\psi}$, $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\psi}$, $\sigma_{\psi r}$ (рис. 9). В этой системе координат $g_{11} = H_1^2 = 1$; $g_{33} = H_2^2 = r^2$, $g_{22} = H_3^2 = r^2 \sin^2 \psi$, $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$. Учитывая эти соотношения, из формул (1.49) и (1.50) найдем

$$\rho F^1 = \rho F_r, \quad \rho F^2 = \frac{1}{r \sin \psi} \rho F_\varphi; \quad \rho F^3 = \frac{1}{r} \rho F_\psi$$

$$W^1 = W_r; \quad W^2 = \frac{W_\varphi}{r \sin \psi}; \quad W^3 = \frac{1}{r} W_\psi$$

$$\sigma^{11} = \sigma_{rr}; \quad \sigma^{22} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \sigma_{\varphi\varphi}; \quad \sigma^{33} = \frac{1}{r^2} \sigma_{\psi\psi}$$

$$\sigma^{12} = \frac{1}{r \sin \psi} \sigma_{r\varphi}; \quad \sigma^{23} = \frac{1}{r^2 \sin \psi} \sigma_{\varphi\psi}; \quad \sigma^{31} = \frac{1}{r} \sigma_{\psi r}.$$

Из (2.19), (1.64) и (1.84) получим уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} + \sigma_{r\psi} \operatorname{ctg} \psi - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\psi\psi}) +$$

$$+ \rho F_r = \rho W_r$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\psi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{r\psi} + (\sigma_{\psi\psi} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \psi] +$$

$$+ \rho F_\psi = \rho W_\psi \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\psi} \operatorname{ctg} \psi) + \rho F_{\varphi} = \rho W_{\varphi}.$$

Если положить $W_r = W_{\varphi} = W_{\psi} = 0$ и $W_r = W_{\varphi} = W_{\psi} = 0$ в уравнениях (2.30) и (2.31), то мы получим уравнения равновесия в компонентах тензора напряжений соответственно в цилиндрической и сферической системах координат.

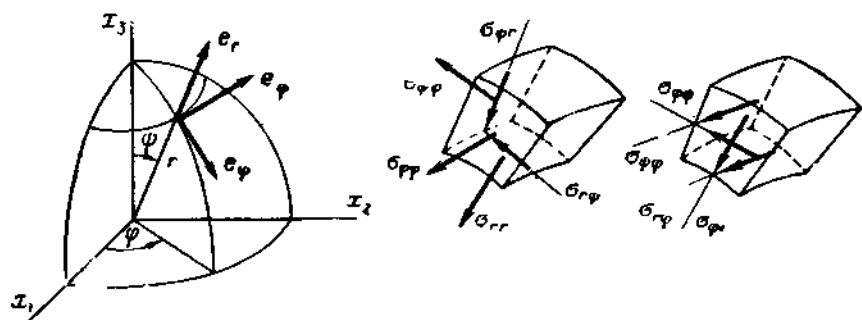


Рис. 9

§ 14. Определение главных нормальных напряжений

Возьмем прямоугольную декартову систему координат ox_k . Направление, определяемое единичным вектором n с компонентами $n_k = \cos(n, x_k)$, называется главным направлением симметричного тензора напряжений σ_{rk} , если вектор $\sigma_{rk} n_k$ параллелен вектору n

$$\sigma_{rk} n_k = \sigma n_r,$$

где σ — скалярная величина.

Последнее соотношение запишем в виде

$$(\sigma_{rk} - \sigma \delta_{rk}) n_k = 0. \quad (2.32)$$

Равенства (2.32) относительно n_k представляют линейную однородную систему трех уравнений. Условием существования ненулевых решений является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов этой системы

$$|\sigma_{rk} - \sigma \delta_{rk}| = 0. \quad (2.33)$$

Докажем теперь, что все его корни вещественны; обозначим их через σ_l ($l=1, 2, 3$). Предположим противное: пусть $\sigma_l = \alpha_l + i\beta_l$ и соответствующие значения $n_k = p_k + iq_k$; подставим это в (2.32). Если затем сравним действительную и мнимую части, то получим

$$(\sigma_{rk} - \alpha_l \delta_{rk}) p_k + \beta_l \delta_{rk} q_k = 0,$$

$$(\sigma_{rk} - \alpha_l \delta_{rk}) q_k - \beta_l \delta_{rk} p_k = 0.$$

Умножим первое равенство на q_r , а второе — на p_r и просуммируем по r от 1 до 3. Вычитая один результат из другого и учитывая симметричность σ_{rk} , δ_{rk} , получим

$$\beta_l (\delta_{rk} p_r p_k + \delta_{rk} q_r q_k) = 0. \quad (2.34)$$

Учитывая, что не все p_k , q_k равны нулю и каждое слагаемое внутри скобок (2.34) положительно, приходим к выводу, что $\beta_l = 0$. Следовательно, корни уравнения (2.33) всегда действительны и соответствующие им значения n_k^l , будучи решениями системы линейных уравнений с действительными коэффициентами (2.33), также будут действительными. Величины σ_i называются главными компонентами тензора напряжений, а n_k^l являются их направляющими косинусами.

Предположим, σ_l , σ_p — два неравных корня, а n_r^l , n_r^p — соответствующие значения n_r , тогда из (2.32) найдем

$$(\sigma_{kr} - \sigma_l \delta_{kr}) n_r^l = 0, \quad (2.35)$$

$$(\sigma_{kr} - \sigma_p \delta_{kr}) n_r^p = 0. \quad (2.36)$$

Здесь по индексам l и p суммирование не производится. Если умножим (2.35) на n_k^p , а (2.36) на n_k^l , то, вычитая один результат из другого, а затем принимая во внимание симметричность σ_{kr} и δ_{kr} , получим

$$(\sigma_l - \sigma_p) \delta_{kr} n_r^l n_k^p = 0.$$

Так как $\sigma_l \neq \sigma_p$, то

$$n_k^l n_k^p = 0.$$

Таким образом, в этом случае главные направления тензора напряжений ортогональны и определяются единственным образом. Если уравнение (2.33) имеет два одинаковых корня, например, $\sigma_1 = \sigma_2$, то направление n^3 , соответствующее третьему главному направлению, будет перпендикулярно плоскости n^1 , n^2 .

Следовательно, любые два взаимно ортогональные направления, лежащие в плоскости, перпендикулярной к n^3 , могут быть приняты за соответствующие главные направления. Если, наконец, все три главных напряжения равны между собой, то любые ортогональные направления можно принять за главные.

Теперь кубическое уравнение (2.33) запишем в виде

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (2.37)$$

По свойству корней кубического уравнения соотношения между корнями и коэффициентами имеют следующий вид:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Возьмем матрицу \bar{C} в виде

$$\bar{C} = \|\bar{c}_j^i\| = \|\bar{\sigma} \delta_j^i - \bar{\sigma}^i\|.$$

Определитель этой матрицы представляет собой левую часть уравнения (2.33), записанную в произвольной криволинейной системе координат \bar{x}^h .

Рассмотрим непрерывные взаимно-однозначные преобразования координат $\bar{x}^h = \bar{x}^h(x^1, x^2, x^3)$. Согласно преобразованию смешанных тензоров (1.12) мы имеем

$$c_j^i = \bar{c}_q^p \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}.$$

Введем здесь обозначения

$$\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} = a^q_j; \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} = b^i_p,$$

тогда

$$C = \|c_j^i\| = \|\bar{c}_q^p b^i_p a^q_j\| = \|\bar{c}_q^p\| \|b^i_p\| \|a^q_j\| = B \bar{C} B^{-1}.$$

Отсюда заключаем, что детерминанты матриц C и \bar{C} равны. Таким образом, уравнение

$$|\sigma \delta_j^i - \sigma^i_j| = 0 \quad (2.38)$$

инвариантно относительно выбора системы координат и корни его всегда определяют главные компоненты тензора напряжений. Следовательно, коэффициенты уравнения (2.37) являются инвариантами относительно преобразования координат, так как они полностью определяются корнями, т. е. главными значениями тензора напряжений. Раскрывая (2.38), получим формулы для инвариантов

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_a^a$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \frac{1}{2} [(\sigma_a^a)^2 - \sigma_a^a \sigma_a^a]$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = |\sigma_a^a|.$$

Если координатные оси совместить с главными направлениями тензора напряжений, то в этой системе координат компоненты σ_{hr} ($h \neq r$) обратятся в нуль; остаются лишь действующие на этих площадках нормальные напряжения σ_h .

ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 15. Тензор конечной деформации

Рассмотрим непрерывную среду S , в которой выбрана криволинейная система координат x^r ($r=1, 2, 3$). Если совокупность некоторых функций координат определяет удлинение любого бесконечно малого прямолинейного материального отрезка, проходящего

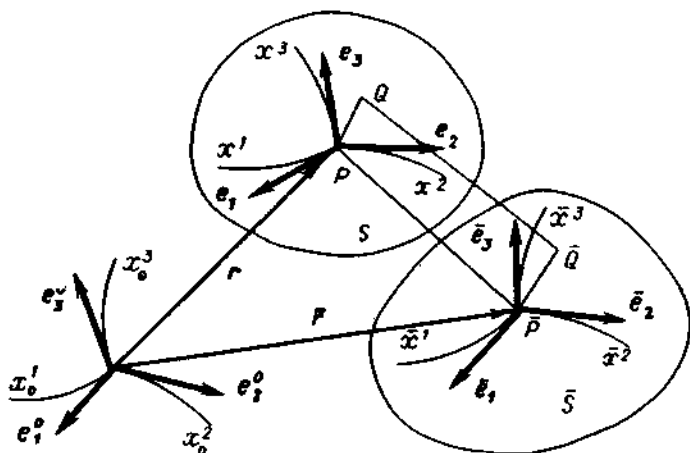


Рис. 10

через заданную точку, то будем говорить, что эти функции определяют деформацию окрестности этой точки.

Пусть координатные линии, выбранные в среде в ее начальной конфигурации, состоят из материальных точек той же среды. Будем считать, что в процессе деформирования координатные линии продолжают состоять из тех же материальных точек. В результате деформации данная система координат $Px^1x^2x^3$ с ковариантными базисными векторами e_k , искажаясь непрерывно вместе со средой, в одной из последующих конфигураций \bar{S} примет некоторое положение. Конфигурация \bar{S} может быть принята в качестве новой системы координат $\bar{P}\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3$ с базисными векторами e_k . В качестве системы отсчета, в которой определено перемещение, возьмем систему координат $o x_0^1 x_0^2 x_0^3$ с векторами базиса e_k^0 (рис. 10). Систему $o x_0^1 x_0^2 x_0^3$ можно выбрать по усмотрению, а из систем координат

x^r и \bar{x}^r произвольно можно выбрать только одну: если выбрана система x^r , то система \bar{x}^r определится деформацией и наоборот.

Согласно формуле (1.27) для квадратов линейных элементов конфигураций S и \bar{S} соответственно имеем

$$ds^2 = g_{nk} dx^n dx^k, \quad d\bar{s}^2 = \hat{g}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k. \quad (3.1)$$

Здесь g_{nk} , \hat{g}_{nk} — ковариантные метрические тензоры соответственно в S и \bar{S} ; dx^n — компоненты бесконечно малого вектора PQ , определяющего положение точки Q относительно точки P , а $d\bar{x}^n$ — компоненты вектора $\bar{P}\bar{Q}$ (см. рис. 10), который в силу непрерывности является бесконечно малым.

Деформированное состояние тела определяется разностью

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = \hat{g}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k - g_{nk} dx^n dx^k.$$

На основании (1.6) этой разности придадим вид

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2\varepsilon_{nk} dx^n dx^k, \quad (3.2)$$

где

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{nk} - g_{nk}), \quad (3.3)$$

в свою очередь,

$$\bar{g}_{nk} = \hat{g}_{im} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}. \quad (3.4)$$

Из (3.2) видно, что ε_{nk} являются компонентами симметричного ковариантного тензора второго ранга, который называется тензором деформации. Когда все $\varepsilon_{nk} = 0$ для всех точек, то $d\bar{s} = ds$ и тело не деформируется. Относительное удлинение линейного элемента ds_n вдоль координатной линии x^n , по определению, равно

$$e_n = \frac{d\bar{s}_n - ds_n}{ds_n}. \quad (3.5)$$

Согласно формулам (1.40)

$$d\bar{s}_n = \sqrt{\bar{g}_{nn}} dx^n, \quad ds_n = \sqrt{g_{nn}} dx^n. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.6) в (3.5), получим

$$e_n = \frac{d\bar{s}_n - ds_n}{ds_n} = \sqrt{\frac{\bar{g}_{nn}}{g_{nn}}} - 1.$$

Отсюда, используя (3.3), найдем

$$e_n = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{nn}}{g_{nn}}} - 1. \quad (3.7)$$

Здесь по индексу n суммирование не производится; корень взят со знаком плюс, так как при $\varepsilon_{nn} = 0$ относительное удлинение равно нулю.

Косинус угла $\bar{\theta}_{nk}$ между двумя линейными элементами $d\bar{s}_n$ и $d\bar{s}_k$, которые до деформации были направлены вдоль координатных линий x^n и x^k , согласно формулам (1.54), (1.6) и (3.6) определится по формуле

$$\cos \bar{\theta}_{nk} = \frac{\widehat{g}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k}{d\bar{s}_n d\bar{s}_k} = \frac{\widehat{g}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^n dx^k}{\sqrt{\widehat{g}_{mn} \widehat{g}_{kk}} dx^n dx^k}.$$

В силу (3.4) этой формуле придадим вид

$$\cos \bar{\theta}_{nk} = \frac{\bar{g}_{nk}}{\sqrt{\bar{g}_{nn} \bar{g}_{kk}}}.$$

Определив из (3.3) g_{nk} и подставив в последнюю формулу, найдем

$$\cos \bar{\theta}_{nk} = \frac{g_{nk} + 2\epsilon_{nk}}{\sqrt{(g_{nn} + 2\epsilon_{nn})(g_{kk} + 2\epsilon_{kk})}}. \quad (3.8)$$

Формулы (3.7) и (3.8) показывают, что шесть компонентов тензора деформаций, определяемые формулами (3.3), позволяют полностью вычислить удлинения вдоль координатных линий, исходящих из некоторой точки тела, и угол между двумя линейными элементами после деформации, которые до деформации были направлены вдоль координатных линий x^k . Так как угол между координатными линиями до деформации известен, то определится и изменение этого угла.

Теперь через компоненты вектора перемещения u определим компоненты тензора деформации ϵ_{nk} . Из рис. 10 видно, что

$$\bar{r} = r + u. \quad (3.9)$$

Пусть e_n, \bar{e}_n являются соответственно базисными векторами, тогда на основании (1.26)

$$e_k = \frac{\partial r}{\partial x^k}, \quad \bar{e}_k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{x}^k}. \quad (3.10)$$

Из векторного уравнения (3.9) следует

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial r}{\partial x^k} + \frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

Подставляя (3.10) в последние соотношения, будем иметь

$$\bar{e}_m \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial \bar{x}^k} = e_k + \frac{\partial u}{\partial x^k}. \quad (3.11)$$

Так как для конфигурации S и \bar{S} соответственно

$$g_{nk} = e_n \cdot e_k, \quad \widehat{g}_{nk} = \bar{e}_n \cdot \bar{e}_k,$$

то на основании правил скалярного умножения и формул (3.4), (3.11) найдем

$$\begin{aligned} \bar{g}_{nk} = & \left(e_n + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^n} \right) \left(e_k + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \right) = g_{nk} + e_n \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} + \\ & + e_k \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.3), получим

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{2} \left(e_n \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} + e_k \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \right). \quad (3.13)$$

Относительно системы координат x^α вектор \mathbf{u} представим в виде

$$\mathbf{u} = u^\alpha e_\alpha, \quad \mathbf{u} = u_\alpha e^\alpha, \quad (3.14)$$

здесь суммирование производится по индексу α . Тогда, учитывая (1.57), (1.79), (1.65) и (1.80), найдем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^n} = u_{,n}^\alpha e_\alpha, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = u_{,k}^\alpha e_\alpha, \quad (3.15)$$

где $u_{,n}^\alpha$, $u_{,k}^\alpha$ есть ковариантные производные соответственно контравариантного и ковариантного векторов, равные

$$u_{,n}^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^n} + \Gamma_{nm}^\alpha u^m, \quad u_{,k}^\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha k}^m u_m. \quad (3.16)$$

Следует отметить, что здесь символы Кристоффеля должны быть вычислены по метрическому тензору для конфигурации S .

Подставляя (3.15) в (3.13) окончательно будем иметь

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{2} (u_{n,k} + u_{k,n} + u_{\alpha,k} u_{,n}^\alpha). \quad (3.17)$$

По формулам (3.17) при помощи ковариантных производных ковариантных и контравариантных компонентов вектора перемещения \mathbf{u} в системе направлений базисных векторов e^α и e_α вычисляются компоненты тензора деформации.

§ 16. Тензор малой деформации

Если деформации (удлинения и сдвиги), а также углы поворота малы по сравнению с единицей и имеют одинаковый порядок малости (что имеет место при рассмотрении деформации тел, все размеры которых сравнимы друг с другом по величине), то в общей формуле (3.17) можно отбросить, как малые величины, нелинейные слагаемые. В этом случае тензор деформаций называется тензором малой деформации и обозначается через e_{nk} . Следовательно,

$$e_{nk} = \frac{1}{2} (u_{n,k} + u_{k,n}). \quad (3.18)$$

Материалы, применяющиеся в технике, за исключением таких, как резина, некоторые пластмассы и др., сохраняют упругость только при весьма малых удлинениях и сдвигах. Отсюда ясна практическая важность тензора малой деформации.

Пусть Q — точка, близкая к точке P , а \bar{Q} — ее положение после перемещения. На рис. 10 $P\bar{P} = \mathbf{u}$ и $Q\bar{Q} = \mathbf{u}_1$ представляют собой соответственно перемещения точек P и Q .

Разлагая \mathbf{u}_1 в ряд в точке P и пренебрегая членами высших порядков малости относительно dx^n (dx^n — контравариантные компоненты вектора PQ), будем иметь

$$\mathbf{u}_1(Q) = \mathbf{u}(P) + \frac{\partial \mathbf{u}(P)}{\partial x^n} dx^n = \mathbf{u}(P) + \frac{\partial}{\partial x^n} (u^k e_k) dx^n.$$

Из последнего соотношения найдем перемещение $d\mathbf{u}$ точки Q относительно точки P

$$d\mathbf{u} = u_{,n}^k e_k dx^n.$$

Представив $d\mathbf{u} = du_k e^k$ и умножив скалярно обе части приведенного выше равенства на e_m , получим

$$du_k = u_{k,n} dx^n, \quad (3.19)$$

где $u_{k,n}$ — ковариантная производная в точке P .

Введя обозначения

$$e_{kn} = \frac{1}{2} (u_{k,n} + u_{n,k}), \quad (3.20)$$

$$\omega_{kn} = \frac{1}{2} (u_{k,n} - u_{n,k}),$$

вместо (3.19) будем иметь

$$d\mathbf{u}_k = (e_{kn} + \omega_{kn}) dx^n.$$

Из формулы (3.20) заключаем, что ω_{kn} — антисимметричный тензор, называемый тензором вращения. Перемещение типа $e_{kn} dx^n$ возникает вследствие деформации окрестности точки P , тогда как перемещение типа $\omega_{kn} dx^n$ возникает вследствие вращения окрестности точки P как абсолютно твердого тела вокруг нее.

§ 17. Уравнения совместности деформаций

Компоненты тензора деформаций, как это явствует из (3.17) или (3.18), не являются независимыми, они должны удовлетворять некоторым условиям. Эти условия могут быть получены в предположении, что тело в недеформированной конфигурации находится в евклидовом пространстве и продолжает оставаться в нем в процессе деформирования. Как известно, необходимое и достаточное для этого условие состоит в том, что тензор Римана — Кристоффеля как для недеформированного состояния S , так и для деформиро-

ванного состояния \bar{S} должен равняться нулю, т. е.

$$R_{mnpq} = 0, \quad \bar{R}_{mnpq} = 0$$

или

$$\bar{R}_{mnpq} - R_{mnpq} = 0. \quad (3.21)$$

Подставляя выражения компонентов тензора Римана — Кристоффеля (1.87) в (3.21), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{np}}{\partial x^m \partial x^q} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{mp}}{\partial x^n \partial x^q} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{nq}}{\partial x^m \partial x^p} \right) + \bar{g}^{ij} (\bar{\Gamma}_{i,np} \bar{\Gamma}_{j,mq} - \\ & - \bar{\Gamma}_{i,nq} \bar{\Gamma}_{j,mp}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{np}}{\partial x^m \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^n \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{nq}}{\partial x^m \partial x^p} \right) - \\ & - g^{ij} (\Gamma_{i,np} \Gamma_{j,mq} - \Gamma_{i,nq} \Gamma_{j,mp}) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Учитывая здесь (3.3) и то, что тензор Римана — Кристоффеля имеет только шесть независимых компонентов $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}$, из (3.22) получим шесть независимых уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial x^m \partial x^q} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{nq}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{mp}}{\partial x^n \partial x^q} - 2\varepsilon_{rs} (\Gamma_{qm}^r \Gamma_{pn}^s - \Gamma_{mp}^r \Gamma_{qn}^s) + \\ & + 2\Gamma_{np}^r \varepsilon_{mqr} + 2\Gamma_{qm}^r \varepsilon_{npr} - 2\Gamma_{nq}^r \varepsilon_{mpr} - 2\Gamma_{mp}^r \varepsilon_{nqr} = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\varepsilon_{npr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{pr}}{\partial x^n} + \frac{\partial \varepsilon_{rn}}{\partial x^p} - \frac{\partial \varepsilon_{nr}}{\partial x^p} \right),$$

$mnpq$: 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132.

Эти уравнения указывают на то, что компоненты тензора деформаций ε_{nk} зависимы. Уравнения, которым должны удовлетворять компоненты тензора деформаций ε_{nk} , являются необходимыми и достаточными условиями того, что конфигурации S и \bar{S} принадлежат евклидову пространству.

§ 18. Тензор деформаций в декартовой системе координат

В декартовой системе координат ковариантные и контравариантные векторы совпадают друг с другом; совпадают также ковариантные производные с обычными производными, так как в этом случае метрический тензор постоянен, следовательно, символы Кристоффеля равны нулю.

Таким образом, согласно (3.17) в декартовой системе координат x_k компоненты тензора конечной деформации определяются по формулам

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_a}{\partial x_k} \frac{\partial u_a}{\partial x_n} \right). \quad (3.24)$$

Учитывая, что в случае декартовой ортогональной системы координат $g_{nn}=1$ и $g_{nk}=0$, формулы (3.7) и (3.8) примут вид

$$e_n = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{nn}} - 1, \quad \cos \bar{\theta}_{nk} = \frac{2\varepsilon_{kn}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{nn})(1 + 2\varepsilon_{kk})}}. \quad (3.25)$$

По этим формулам вычисляются относительные удлинения линейных элементов, исходящих из некоторой точки среды параллельно осям декартовой прямоугольной системы, и углы, образованные между этими линейными элементами после деформации.

Согласно (3.17) или (3.24) в декартовой прямоугольной системе координат x_k компонентами малой деформации будут

$$e_{kn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right). \quad (3.26)$$

Если рассматривается малая деформация, то из (3.25) будем иметь

$$e_n = 1 + \frac{1}{2} (2\varepsilon_{nn}) - \dots - 1 \cong e_{nn},$$

$$\cos \bar{\theta}_{kn} = 2\varepsilon_{kn} \left\{ 1 - \frac{1}{2} 2(\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{kk} + 2\varepsilon_{nn}\varepsilon_{kk}) + \dots \right\} \cong 2e_{kn}.$$

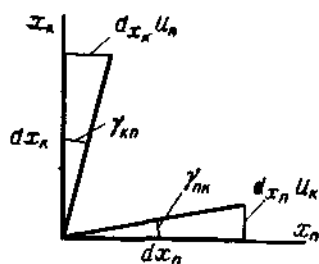


Рис. 11

Таким образом, из $e_n = e_{nn}$ следует, что величины e_{nn} суть относительные удлинения линейных элементов, которые до деформации были параллельны соответствующим осям декартовой прямоугольной системы координат. Величины $2e_{kn}$ представляют собой косинусы углов, образующихся после деформации между двумя линейными элементами, которые до деформации были параллельны осям координат.

Имеем

$$\cos \bar{\theta}_{kn} = \cos [90^\circ - (\gamma_{kn} + \gamma_{nk})] = \sin (\gamma_{nk} + \gamma_{kn}) \cong \gamma_{nk} + \gamma_{kn}.$$

Здесь γ_{kn} — угол поворота к оси ox_n линейного элемента, параллельного оси ox_k и равного $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$; γ_{nk} — угол поворота к оси ox_k

линейного элемента, параллельного оси ox_n и равного $\frac{\partial u_k}{\partial x_n}$ (рис.

11). Значит, $2e_{kn}$ представляет собой изменение угла между двумя линейными элементами, параллельными осям ox_n и ox_k ($k \neq n$).

В декартовой системе координат компоненты тензора вращения

$$\omega_{kn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \right). \quad (3.27)$$

Повернем оси ox_k декартовой прямоугольной системы координат, новые оси обозначим через ox'_k . Учитывая, что e_{kn} есть тензор, на

основании (1.13) имеем $e_{kn}' = e_{mnr} a_{mk} a_{rn}$, откуда $e_{kk}' = e_{kk}$, т. е. сумма относительных удлинений в трех взаимно ортогональных направлениях, исходящих из одной точки тела, не зависит от их ориентации в данной точке.

§ 19. Компоненты тензоров малой деформации и вращения в цилиндрических и сферических координатах

Физические проекции вектора перемещения u в цилиндрической системе координат (r, φ, x_3) обозначим через u_r, u_φ, u_3 , а физические компоненты тензора деформации — через $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{33}, e_{r\varphi}, e_{\varphi 3}, e_{3r}$. При помощи формул (1.49) и (1.50) находим

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r, & u_2 &= r u_\varphi, & u_3 &= u_3, \\ e_{11} &= e_{rr}, & e_{22} &= r^2 e_{\varphi\varphi}, & e_{33} &= e_{33}, \\ e_{12} &= r e_{r\varphi}, & e_{23} &= r e_{\varphi 3}, & e_{31} &= e_{3r}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Согласно (3.20) и (3.28) для шести независимых компонентов тензора малой деформации и тензора вращения будем иметь

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ e_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), & & & & \\ e_{\varphi 3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right), & & & & \\ e_{3r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_3} \right), & & & & \\ \omega_{r\varphi} = \omega_3 &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), & & & & \\ \omega_{\varphi 3} = \omega_r &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - r \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3} \right), & & & & \\ \omega_{3r} = \omega_\varphi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial r} \right). & & & & \end{aligned} \quad (3.29)$$

В формулах (3.30) введены сокращенные обозначения

$$\omega_{r\varphi} = \omega_3, \quad \omega_{\varphi 3} = \omega_r, \quad \omega_{3r} = \omega_\varphi.$$

Допустим, что $u_3 = 0$, а u_φ и u_r не зависят от координаты x_3 ; тогда из формул (3.29), (3.30) найдем

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \quad (3.31)$$

$$\omega_{r\varphi} = \omega_3 = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right).$$

Эти формулы определяют три компонента тензора деформаций в случае так называемой плоской деформации относительно плоскости $r\varphi$ в полярных координатах.

В сферической системе координат (r, φ, ψ) физические компоненты вектора перемещения \mathbf{u} обозначим через u_r, u_φ, u_ψ , а физические компоненты тензора деформации в той же системе координат — через $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{\psi\psi}, e_{r\varphi}, e_{\varphi\psi}, e_{\psi r}$. Согласно формулам (1.49) и (1.50) имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r, & u_2 &= r u_\varphi, & u_3 &= r \sin \psi u_\psi, \\ e_{11} &= e_{rr}, & e_{22} &= r^2 e_{\varphi\varphi}, & e_{33} &= r^2 \sin^2 \psi e_{\psi\psi}, \\ e_{12} &= r e_{r\varphi}, & e_{23} &= r^2 \sin \psi e_{\varphi\psi}, & e_{31} &= r \sin \psi e_{\psi r}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Подставляя (3.32) в (3.20), найдем

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r \operatorname{tg} \psi} u_\psi, \\ e_{\psi\psi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{r} u_r, \\ e_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi \right), \\ e_{\varphi\psi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \psi} - \frac{1}{r \operatorname{tg} \psi} u_\varphi + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} \right), \\ e_{\psi r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\psi + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} \right), \\ \omega_{\varphi\psi} = \omega_r &= \frac{1}{2r \sin \psi} \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} (u_\varphi \sin \psi) \right), \\ \omega_{\psi r} = \omega_\varphi &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\psi) \right), \\ \omega_{r\varphi} = \omega_\psi &= \frac{1}{2r \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi \sin \psi) - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

§ 20. Главные относительные удлинения

Определим по аналогии с теорией напряженного состояния в декартовой прямоугольной системе координат главные направления

тензора деформаций, как также направления, для которых выполняются условия

$$\varepsilon_{kn} \alpha_n = \varepsilon \alpha_k. \quad (3.35)$$

Здесь ε — скаляр; α_k — направляющие косинусы единичного вектора ν .

Используя символы Кронекера, систему уравнений (3.35) запишем в виде

$$(\varepsilon_{kn} - \delta_{kn} \varepsilon) \alpha_n = 0. \quad (3.36)$$

Так как все косинусы одновременно не могут быть равны нулю, то

$$|\varepsilon_{kn} - \delta_{kn} \varepsilon| = 0. \quad (3.37)$$

Главные значения тензора деформаций, которые называются главными относительными удлинениями, являются корнями кубического уравнения (3.37). Направления, соответствующие главным удлинениям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, взаимно перпендикулярны. Когда имеет место случай двух равных корней, тогда направления, соответствующие этим корням, лежат в плоскости, перпендикулярной направлению, соответствующему простому корню; в этом случае любые взаимно ортогональные направления, лежащие в этой плоскости, могут быть приняты за главные. Если все три корня равны, то любые перпендикулярные направления можно принять за главные.

Кубическое уравнение (3.37) запишем в форме

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0.$$

По свойству корней кубического уравнения соотношения между корнями и коэффициентами имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3, \\ I_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned}$$

По аналогии с теорией напряженного состояния здесь I_1, I_2, I_3 являются инвариантами. Таким образом,

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_\alpha^\alpha \\ I_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \frac{1}{2} [(\varepsilon_\alpha^\alpha)^2 - \varepsilon_\alpha^\beta \varepsilon_\beta^\alpha] \\ I_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \frac{1}{6} \varepsilon_\alpha^\beta \varepsilon_\beta^\gamma \varepsilon_\gamma^\alpha. \end{aligned}$$

Первый инвариант тензора деформации в случае малых деформаций представляет собой относительное изменение объема. Действительно, возьмем в некоторой точке P среды главные оси тензора деформаций. На них построим параллелепипед, имевший до деформации ребра, равные dx_k . После деформации рассматриваемый параллелепипед, оставаясь прямоугольным, будет иметь ребра

$(1+e_k)dx_k$. Объем параллелепипеда до деформации $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$, после деформации

$$d\tau_1 = (1+e_1)(1+e_2)(1+e_3)dx_1 dx_2 dx_3 = (1+e_1)(1+e_2)(1+e_3)d\tau.$$

Отбрасывая малые величины высшего порядка, будем иметь

$$d\tau_1 = (1+e_1+e_2+e_3)d\tau.$$

Обозначив изменение объема в точке P , отнесенное к единице объема, или относительную объемную деформацию через θ , получим

$$\theta = \frac{d\tau_1 - d\tau}{d\tau} = e_1 + e_2 + e_3.$$

Учитывая, что $I_1 = e_1 + e_2 + e_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, для относительной объемной деформации найдем

$$\theta = I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (3.38)$$

т. е. $\theta = I_1$ есть относительная объемная деформация в точке P .

Если координатные оси совместить с главными направлениями тензора деформации, то в этой системе координат компоненты e_{kr} ($k \neq r$) обратятся в нуль, останутся лишь действующие на этих площадках удлинения e_k .

§ 21. Уравнения совместности деформаций в некоторых системах координат (условия Сен-Венана)

Учитывая, что в случае декартовой системы координат символы Кристоффеля тождественно обращаются в нуль, уравнения совместности (3.23) в этой системе примут вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{mq}}{\partial x_n \partial x_p} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial x_m \partial x_q} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{nq}}{\partial x_m \partial x_p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{mp}}{\partial x_n \partial x_q} = 0, \quad (3.39)$$

где $mnpq$: 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132.

Уравнения совместности в декартовой системе координат были получены Сен-Венаном для малых деформаций непосредственно исключением компонентов перемещения из формул (3.26).

Если условия Сен-Венана для произвольного тензора e_{ij} выполнены, то можно найти такое поле перемещений, для которого e_{ij} является тензором деформаций. В случае односвязного тела перемещение определяется с точностью до перемещения абсолютного твердого тела, в случае многосвязного — необходимо выполнение некоторых дополнительных условий.

Чтобы получить уравнения совместности деформаций в цилиндрической системе координат, учтем формулы (3.28) и (1.64)

в уравнениях (3.23); тогда после некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (r e_{\varphi r})}{\partial r \partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{r3}}{\partial r \partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 e_{\varphi\varphi}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{33}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial e_{\varphi 3}}{\partial \varphi} + e_{r3} \right) &= 0, \quad (3.40) \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \varphi \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r e_{\varphi 3})}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 e_{r\varphi})}{\partial r \partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{e_{r3}}{r} \right) &= 0, \\ r \frac{\partial}{\partial x_3} \left(e_{rr} - \frac{\partial (r e_{\varphi\varphi})}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 e_{r3}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (r e_{\varphi 3})}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 (r e_{\varphi r})}{\partial x_3 \partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \left(\frac{e_{33}}{r} \right) + \frac{\partial^2 e_{r\varphi}}{\partial x_3^2} - r \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3} \left(\frac{e_{\varphi 3}}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{r3}}{\partial \varphi \partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

§ 22. Определение перемещений по компонентам тензора малой деформации

При помощи формул (3.26) вычисляются компоненты тензора малой деформации, когда в декартовой прямоугольной системе координат заданы перемещения u_k (x_1, x_2, x_3). Для вычисления последних, когда заданы компоненты тензора деформаций e_{kn} , следует решить систему шести линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (3.26). Чтобы система была совместной, заданные компоненты e_{kn} должны удовлетворять так называемым условиям совместности, или условиям интегрируемости этой системы. Примем, что e_{kn} — заданные однозначные функции x_k , имеющие непрерывные частные производные второго порядка.

Если по данным компонентам тензора деформаций найдены перемещения u_k , то, присоединяя к ним произвольное бесконечно малое перемещение тела как жесткого целого, получим новые перемещения, очевидно, также соответствующие данным компонентам тензора деформаций, так как перемещение тела как жесткого целого никакого влияния на чистую деформацию не оказывает. В силу этого для определенности дополнительно можно, например, задать проекциями вектора перемещения некоторой точки тела и компонентами тензора вращения в этой точке.

Область задания компонентов тензора деформаций, при помощи которых в этой же области, занятой до деформации телом, ищутся проекции вектора перемещения, обозначим через τ . При этом пока будем полагать, что эта область односвязна. Из (3.26)

и (3.27) имеем

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_n} = e_{kn} + \omega_{kn}. \quad (3.41)$$

Пусть в точке $M^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ заданы компоненты перемещения u_n^0 и компоненты тензора вращения ω_{nk}^0 . Из (3.41) компоненты перемещения в точке $M'(x_1', x_2', x_3')$ будут

$$u_k = u_k^0 + \int_{M^0}^{M'} (e_{kn} + \omega_{kn}) dx_n. \quad (3.42)$$

Здесь интегрирование ведется по произвольной кривой, соединяющей точки M^0 и M' и целиком лежащей в области τ , x_n — есть текущие координаты точки этой кривой; следовательно,

$$dx_n = -d(x_n' - x_n).$$

Подставим последнее соотношение в (3.42); тогда

$$u_k = u_k^0 + \int_{M^0}^{M'} e_{kn} dx_n - \int_{M^0}^{M'} \omega_{kn} d(x_n' - x_n).$$

Интегрируя последний интеграл по частям, получим

$$\begin{aligned} u_k = u_k^0 + \int_{M^0}^{M'} e_{kn} dx_n - \omega_{kn}(x_n' - x_n) \Big|_{M^0}^{M'} + \\ + \int_{M^0}^{M'} (x_n' - x_n) \frac{\partial \omega_{kn}}{\partial x_m} dx_m. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь суммирование ведется также по индексу m . На основании (3.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{kn}}{\partial x_m} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (3.26), найдем

$$\frac{\partial \omega_{kn}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_n} e_{km} - \frac{\partial}{\partial x_k} e_{nm}.$$

Подставив это в последний интеграл (3.43), окончательно получим

$$\begin{aligned} u_k = u_k^0 + \omega_{kn}^0 (x_n' - x_n^0) + \\ + \int_{M^0}^{M'} \left[e_{km} + (x_n' - x_n) \left(\frac{\partial e_{km}}{\partial x_n} - \frac{\partial e_{nm}}{\partial x_k} \right) \right] dx_m. \end{aligned} \quad (3.44)$$

По своему физическому смыслу u_k не должны зависеть от пути интегрирования M^0M' ; для этого в случае односвязной области необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение представляло полный дифференциал во всех точках (x_1, x_2, x_3) и для всех значений (x_1', x_2', x_3') области τ . Эти условия приводят к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2 e_{m\lambda}}{\partial x_k \partial x_r} + \frac{\partial^2 e_{kr}}{\partial x_m \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_m \partial x_r} - \frac{\partial^2 e_{mr}}{\partial x_k \partial x_n} = 0, \quad (3.45)$$

где $mkrn$: 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132.

Таким образом, соотношения (3.45) обеспечивают совместность шести дифференциальных уравнений (3.26) для определения трех функций u_k . Эти уравнения совпадают с условиями совместности Сен-Венана, поэтому условия Сен-Венана также обеспечивают интегрируемость шести дифференциальных уравнений (3.26). С учетом условий Сен-Венана формулы (3.44) определяют u_k независимо от формы кривой интегрирования, лежащей целиком в области τ .

Если тело многосвязно, то интеграл в формуле (3.44) может, вообще говоря, получить конечные приращения, в силу чего не обеспечивается однозначность перемещений, тогда как они должны быть однозначными. Многосвязное тело с помощью надлежащих мысленных разрезов можно обратить в односвязное, тогда при соблюдении условий совместности деформаций Сен-Венана перемещения u_k , определяемые (3.44), будут однозначными функциями, если кривая интегрирования нигде не пересекает линий разрезов. При приближении точки M' к какой-либо точке линии разреза с левого или правого берега u_k будут принимать, вообще говоря, различные значения. Отсюда становится ясно, что в случае многосвязной области для обеспечения совместности деформаций дополнительными условиями будут $(u_k)_{л.бер} = (u_k)_{пр.бер}$ вдоль всех линий разрезов.

Наиболее общее тензорное изложение теорин напряжений и деформаций для произвольной системы координат представляет особую ценность для конечных деформаций. Выведенные общие уравнения и формулы позволяют нам в дальнейшем составлять их в необходимых координатных системах.

В дальнейшем будем пользоваться, главным образом, декартовой прямоугольной системой координат.

СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННЫМ И ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЯМИ

§ 23. Обобщенный закон Гука

Уравнения, полученные в главах II и III, недостаточны для определения напряженного и деформированного состояний, возникающих в теле под действием приложенных сил. Поэтому эти уравнения должны быть дополнены определенными соотношениями, связывающими напряженное и деформированное состояния. Эти зависимости определяются исходя из физических свойств твердого тела, подвергающегося деформации. Установление связи между напряженным и деформированным состояниями является одной из важных задач механики сплошной среды, требующей постановки предварительных экспериментов. Это связь обычно идеализируется простейшими математическими формулами.

В процессе деформирования в одних случаях устранение внешних сил приводит к полному возвращению тела в естественное состояние, т. е. деформация обратима, в других же случаях после устранения нагрузки в теле сохраняются деформации, называемые остаточными или пластическими, т. е. деформация необратима. В дальнейшем мы будем изучать вполне обратимые малые деформации.

Примем, что в каждой точке рассматриваемого тела существует взаимно однозначное соответствие между напряженными и деформированными состояниями.

Выражая это аналитически, получим шесть зависимостей вида

$$\sigma^{ij} = f^{ij}(e_{kl}), \quad (4.1)$$

которые однозначно разрешимы относительно компонентов тензора деформаций

$$e^{ij} = \varphi^{ij}(\sigma_{kl}). \quad (4.2)$$

За недеформированное состояние упругого тела принимается такое его состояние, когда в нем отсутствуют напряжения. Это состояние в дальнейшем берется за начало отсчета напряжений и деформаций. Ввиду этого функции f^{ij} , а также φ^{ij} обращаются в нуль, когда их аргументы обращаются в нуль

$$f^{ij}(0) = \varphi^{ij}(0) = 0.$$

Для многих материалов зависимости (4.1) или (4.2) являются ли-

нейными, если величины напряжений не выходят за определенный предел.

Линейный закон связи между напряжениями и деформациями называется обобщенным законом Гука. Общая запись закона Гука будет следующая:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} e_{kl}. \quad (4.3)$$

Переставим поочередно в (4.3) индексы $ijkl$ на $jikl$, $ijlk$, $jilk$; из условия симметрии тензора напряжений и тензора деформаций обнаружим симметрию величин

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{jilk}, \quad (4.4)$$

которые образуют тензор четвертого ранга. Величины C^{ijkl} назовем упругими коэффициентами тела. Общее число различных коэффициентов C^{ijkl} , как можно убедиться, на основании (4.4) равно 36. Упругие коэффициенты зависят от метрического тензора g_{ij} недеформированного тела и от его физических свойств. Учитывая, что

$$g_m^\alpha = g_{km} g^{ka} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = m \\ 0 & \text{при } \alpha \neq m, \end{cases}$$

(4.3) запишем в виде

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} e_{kl} g_{km} g^{km} g_{ln} g^{ln}.$$

На основании правила скалярного умножения $C^{ijkl} g_{km} g_{ln}$ представляет собой смешанный тензор C_{mn}^{ij} , а $e_{kl} g^{km} g^{ln}$ — контравариантные компоненты тензора малой деформации.

Таким образом, вместо (4.3) имеем

$$\sigma^{ij} = C_{mn}^{ij} e^{mn}. \quad (4.5)$$

Запишем закон Гука (4.3) в виде $\sigma_{ij} = C_{ijkl} e^{kl}$ (в силу симметрии σ_{ij} и e^{kl} справедливы равенства $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$) и произведем преобразования, аналогичные вышеприведенным. Тогда получим

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{mn} e_{mn}. \quad (4.6)$$

Для случая осевого растяжения призматического бруса закон Гука записывается в виде

$$e = C\sigma, \quad e' = C'\sigma,$$

где e и e' — соответственно продольная и поперечная деформации, а C и C' — постоянные, равные

$$C = \frac{1}{E}, \quad C' = -\frac{\nu}{E}.$$

Здесь E — продольный модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

§ 24. Работа внешних сил

Пусть на упругое тело действуют поверхностные силы T_n и объемные силы ρF . Придадим этим силам приращения соответственно dT_n и ρdF . В силу этого вектор перемещения u изменится на du . Тогда работа dV сил T_n и ρF при дополнительном деформировании тела будет

$$dV = \int_{\tau} \rho F_k du_k d\tau + \int_{\omega} T_{nk} du_k d\omega,$$

где τ — объем тела, а ω — его поверхность.

Учитывая, что $T_{nk} = \sigma_{kr} n_r$ и преобразуя поверхностный интеграл в объемный, для dV получим

$$dV = \int_{\tau} \rho F_k du_k d\tau + \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x_r} (\sigma_{kr} du_k) d\tau,$$

или

$$dV = \int_{\tau} \left(\rho F_k + \frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} \right) du_k d\tau + \int_{\tau} \sigma_{kr} \frac{\partial}{\partial x_r} (du_k) d\tau.$$

В силу того, что

$$\frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} + \rho F_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_r} (du_k) = d \frac{\partial u_k}{\partial x_r},$$

будем иметь

$$dV = \int_{\tau} \sigma_{kr} d \frac{\partial u_k}{\partial x_r} d\tau. \quad (4.7)$$

В подынтегральном выражении (4.7) суммирование ведется по индексам k и r . Учитывая симметричность тензора напряжений σ_{kr} , имеем

$$\sigma_{kr} d \frac{\partial u_k}{\partial x_r} = \sigma_{kr} d \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) = \sigma_{kr} de_{kr}.$$

На основании последнего соотношения для dV окончательно получим

$$dV = \int_{\tau} \sigma_{kr} de_{kr} d\tau. \quad (4.8)$$

Эта формула в условиях статики определяет работу внешних сил ρF и T_n на приращениях компонентов тензора деформаций, вызываемых изменением упомянутых сил; работа, отнесенная к единице объема, будет

$$dA = \sigma_{kr} de_{kr}. \quad (4.9)$$

§ 25. Потенциал тензора напряжений

По идее Томсона, к изучению процесса деформирования тела применимы первый и второй законы термодинамики. Предположим,

что процесс деформирования тела термодинамически обратим, тогда состояние тела однозначно определяется термодинамическими переменными.

Если U , Q , A , S суть внутренняя энергия, количество тепла, работа внешних сил и энтропия, соответственно отнесенные к единице объема тела, то в случае малых деформаций по первому и второму законам термодинамики имеем

$$dU = dQ + dA, \quad dQ = TdS. \quad (4.10)$$

Здесь dU , dS — соответственно приращения внутренней энергии и энтропии представляющие полные дифференциалы независимых термодинамических переменных, определяющих состояние тела, T — абсолютная температура.

Исключая из (4.10) приращение тепла dQ , с учетом (4.9) получим основное термодинамическое соотношение для процесса деформирования тела

$$dU = TdS + \sigma_{kr} de_{kr}. \quad (4.11)$$

Определим упругое тело таким образом, чтобы задание тензора деформацией e_{kr} и одной термодинамической переменной (температуры T или энтропии S) полностью определяло его состояние, т. е. тензор напряжений σ_{kr} и термодинамические потенциалы U и $F = U - TS$ (последний носит название свободной энергии Гельмгольца).

В качестве независимых переменных, определяющих состояние упругого тела, выберем e_{kr} и температуру T . Тогда свободная энергия Гельмгольца будет функцией только e_{kr} и T , т. е.

$$F = F(e_{kr}, T). \quad (4.12)$$

Определив U из

$$F = U - TS. \quad (4.13)$$

и подставив его в (4.11), найдем

$$dF = \sigma_{kr} de_{kr} - SdT. \quad (4.14)$$

С другой стороны, из (4.12) имеем

$$dF = \frac{\partial F}{\partial e_{kr}} de_{kr} + \frac{\partial F}{\partial T} dT. \quad (4.15)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в (4.14) и (4.15), получим

$$\sigma_{kr} = \frac{\partial F}{\partial e_{kr}^*}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad (4.16)$$

здесь

$$e_{kk}^* = e_{kk}, \quad e_{kr}^* = 2e_{kr}, \quad (k \neq r).$$

Первое соотношение (4.16) показывает, что потенциалом тензора напряжений для упругого тела при данном выборе независимой

термодинамической переменной является свободная энергия Гельмгольца. Если в качестве независимой термодинамической переменной выберем энтропию, т. е. предположим, что состояние упругого тела полностью определяется заданием тензора деформаций e_{kr} и энтропии S , тогда $U = U(e_{kr}, S)$ и поэтому

$$dU = \frac{\partial U}{\partial e_{kr}} de_{kr} + \frac{\partial U}{\partial S} dS. \quad (4.17)$$

Из сравнения (4.11) и (4.17) получим

$$\sigma_{kr} = \frac{\partial U}{\partial e_{kr}^*}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad (4.18)$$

Первое соотношение (4.18) доказывает, что потенциалом тензора напряжений является внутренняя энергия.

В случае адиабатического процесса, т. е. когда $dQ = 0$, из первого соотношения (4.10) следует, что dA является полным дифференциалом независимых переменных e_{kr} , т. е.

$$dA = \frac{\partial A}{\partial e_{kr}} de_{kr}.$$

С другой стороны, на основании (4.9)

$$dA = \sigma_{kr} de_{kr},$$

откуда

$$\sigma_{kr} = \frac{\partial A}{\partial e_{kr}^*}. \quad (4.19)$$

Если совершается изотермический процесс ($T = \text{const}$), то в силу второго соотношения (4.10) приращение тепла dQ , так же как и dU , будет полным дифференциалом, так как известно, что приращение энтропии dS есть полный дифференциал. Следовательно, из первого соотношения (4.10) заключаем, что dA является полным дифференциалом. Тогда

$$\sigma_{kr} = \frac{\partial A}{\partial e_{kr}^*}. \quad (4.20)$$

Как видно из (4.19) и (4.20), в случае адиабатического и изотермического квазистатических процессов потенциалом служит работа внешних сил и она может быть определена из равенства

$$dA = \sigma_{kr} de_{kr} = \frac{\partial A}{\partial e_{kr}} de_{kr} \quad (4.21)$$

Если тело линейно-упругое, то согласно (4.6) величины $\frac{\partial A}{\partial e_{kr}}$ линейны и однородны относительно компонентов тензора деформаций e_{kr} . Поэтому A будет однородным многочленом второй степени относительно e_{kr} . Следовательно, по теореме Эйлера об однородных

функциях будем иметь

$$\frac{\partial A}{\partial e_{kr}} e_{kr} = 2A.$$

Это соотношение называется формулой Клапейрона.

Теперь в качестве независимых переменных, определяющих состояние упругого тела, возьмем тензор напряжений σ_{kr} и температуру T . Введем новую функцию

$$J = U - TS - \sigma_{kr} e_{kr}, \quad (4.22)$$

которая зависит только от σ_{kr} и T ; тогда

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{kr}} d\sigma_{kr} + \frac{\partial J}{\partial T} dT. \quad (4.23)$$

С другой стороны, из (4.9), (4.11) и (4.22) имеем

$$dJ = -SdT - e_{kr} d\sigma_{kr}. \quad (4.24)$$

Сравнение (4.23) и (4.24) приводит к выражениям

$$e_{kr}^* = -\frac{\partial J}{\partial \sigma_{kr}}, \quad S = -\frac{\partial J}{\partial T}. \quad (4.25)$$

Таким образом, в случае, когда в качестве независимых переменных выбраны σ_{kr} и T , функция (4.22) является потенциалом для тензора деформации упругого тела. Легко показать, что в независимых координатах σ_{kr} и T для адиабатического и изотермического процессов деформирования тела потенциалом тензора деформаций является функция

$$\sigma_{kr} e_{kr} - A. \quad (4.26)$$

Формуле (4.9) придадим вид

$$dA = \sigma_{kr} de_{kr} = d(\sigma_{kr} e_{kr}) - e_{kr} d\sigma_{kr}.$$

Отсюда, учитывая, что при адиабатическом и изотермическом процессах деформирования dA есть полный дифференциал, будем иметь

$$d(A - \sigma_{kr} e_{kr}) = -e_{kr} d\sigma_{kr}.$$

Следовательно,

$$e_{kr}^* = \frac{\partial (\sigma_{kr} e_{kr} - A)}{\partial \sigma_{kr}}.$$

Итак, функция $\sigma_{kr} e_{kr} - A$ для адиабатического и изотермического процессов является потенциалом тензора деформаций.

Если тело линейно-упругое, то по формуле Клапейрона $\sigma_{kr} e_{kr} = 2A$ и на основании (4.26) потенциал тензора деформаций, называемый упругим потенциалом, будет равен A . Следовательно,

$$e_{kr}^* = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{kr}}. \quad (4.27)$$

Эти соотношения называются формулами Кастильяно и справедливы для линейно-упругого тела при адиабатическом и изотермическом процессах.

§ 26. Потенциал в случае линейно-упругого тела

Пусть процесс деформирования твердого тела происходит адиабатически или изотермически; тогда имеет место соотношение (4.19). При этом соотношении величина dA является полным дифференциалом непрерывной однозначной функции A , зависящей только от тензора деформацией e_{kr} . Примем тело линейно-упругим. Подставим выражения обобщенного закона Гука (4.6) в (4.9)

$$dA = C_{ij}^{mn} e_{mn} de_{ij}.$$

Чтобы правая часть этого равенства также была полным дифференциалом, должно выполняться условие $C_{mn}^{ij} = C_{ij}^{mn}$. Учитывая последнее, после интегрирования найдем

$$A = \frac{1}{2} C_{ij}^{mn} e_{mn} e_{ij}. \quad (4.28)$$

§ 27. Различные случаи упругой симметрии тела

В теории упругости рассматриваются тела однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные. Однородным называют тело, упругие свойства которого одинаковы во всех его точках; изотропным называют тело, упругие свойства которого одинаковы во всех направлениях. В противном случае тело называется неоднородным и анизотропным. Примером анизотропных тел являются кристаллы.

Применяемые в технике металлы и их сплавы имеют поликристаллическую структуру в виде беспорядочно расположенных кристаллических зерен. Полукристалл, размеры которого одного порядка с размерами кристаллических зерен, по своему существу неоднороден и анизотропен. При сравнении между собой образцов, размеры которых значительны по сравнению с размерами отдельного зерна, ввиду произвольности ориентации зерен и малости их размеров по сравнению с размерами образца (от долей микрона до десятков микронов), полукристалл ведет себя, как однородная и изотропная сплошная среда.

Следует отметить, что условия изготовления, а также различные виды механической обработки вносят в металл более или менее существенную анизотропию и неоднородность, поэтому всегда имеет место лишь приближенная однородность и изотропность материалов.

Симметричность структуры анизотропных тел приводит к связям между коэффициентами упругости. Мы рассмотрим некоторые частные случаи упругой симметрии.

Для анизотропных линейно-упругих тел, когда процесс деформирования происходит изотермически или адиабатически, ввиду того, что $C_{ij}^{mn} = C_{mn}^{ij}$, число коэффициентов упругости равно 21.

Пусть тело обладает одной плоскостью упругой симметрии, которую примем за плоскость ox_1x_2 . При изменении направления оси ox_3 на обратное следует поменять знаки x_3 и u_3 , следовательно, изменяются и знаки компонентов деформаций e_{31} , e_{23} .

Изменение направления оси ox_3 на обратное не должно менять величину упругого потенциала A , так как она является инвариантом. Поэтому в формуле (4.28) должны исчезнуть члены, содержащие e_{23} , e_{13} в первой степени, т. е.

$$C_{11}^{13} = C_{11}^{23} = C_{23}^{22} = C_{13}^{33} = C_{23}^{33} = C_{12}^{23} = C_{12}^{13} = C_{22}^{31} = 0. \quad (4.29)$$

Таким образом, в случае, когда тело имеет одну плоскость симметрии упругих свойств, число упругих постоянных уменьшается до 13.

Пусть тело обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии упругих свойств. Примем эти плоскости за координатные плоскости ox_1x_2 и ox_2x_3 . Чтобы величина упругого потенциала не изменилась от изменения направления оси ox_2 на обратное, вследствие чего изменится знак у компонента e_{12} , кроме условий (4.29), следует положить

$$C_{12}^{11} = C_{12}^{22} = C_{12}^{33} = C_{32}^{13} = 0. \quad (4.30)$$

Следовательно, если тело в каждой точке имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии упругих свойств, то имеется только 9 не равных нулю упругих постоянных; их можно представить в виде матрицы

$$\begin{vmatrix} C_{11}^{11} & C_{22}^{11} & C_{33}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{33}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12}^{12} \end{vmatrix}.$$

Из рассмотрения этой матрицы следует, что если в теле имеются две ортогональные плоскости упругой симметрии, то третья ортогональная к ним плоскость будет также плоскостью упругой симметрии. Такое тело называется ортотропным.

Если тело обладает упругими свойствами, одинаковыми относительно каждой из трех плоскостей симметрии, то, чтобы при изменении оси ox_1 на ось ox_2 , оси ox_2 на ось ox_3 и оси ox_1 на ось ox_3 , т. е. при перемене между собой e_{11} , e_{22} , e_{33} или e_{12} , e_{23} , e_{31} не изменилась величина упругого потенциала, кроме условий (4.29) и

(4.30), должны быть соблюдены еще условия

$$C_{11}^{11} = C_{22}^{22} = C_{33}^{33}; C_{11}^{22} = C_{11}^{33} = C_{22}^{33}; C_{12}^{12} = C_{13}^{13} = C_{23}^{23}. \quad (4.31)$$

Следовательно, когда тело обладает упругими свойствами, одинаковыми для каждой из трех плоскостей, упругий потенциал имеет вид

$$A = \frac{C_{11}^{11}}{2} (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + C_{11}^{22} (e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} + e_{11}e_{22}) + \\ + \frac{C_{12}^{12}}{2} (e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \quad (4.32)$$

и тогда остаются только 3 независимые упругие постоянные.

Наконец, если тело изотропное, то упругий потенциал должен быть постоянным при произвольном повороте осей координат. С другой стороны, тензор напряжений или тензор деформаций имеет три независимых инварианта первой, второй и третьей степени относительно компонентов тензоров напряжений и деформаций. Поэтому упругий потенциал должен быть выражен через инварианты тензора напряжений, если упругий потенциал представлен компонентами тензора напряжений, или через инварианты тензора деформаций, если упругий потенциал представлен компонентами тензора деформаций (4.28). В силу того, что упругий потенциал является однородной функцией второй степени, он может содержать только первый инвариант во второй степени и второй инвариант в первой степени, т. е.

$$A = P(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + Q(e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} - e_{12}^2 - e_{23}^2 - e_{31}^2). \quad (4.33)$$

Таким образом, изотропное тело характеризуется лишь двумя упругими константами P и Q . Применяя формулы (4.20) и при этом учитывая, что в них величины e_{kr} ($k \neq r$) представляют угловые деформации, тогда как в (4.33) они обозначают половины угловых деформаций, из формулы (4.33) получим

$$\sigma_{kr} = (2P + Q)\theta\delta_{kr} + (-Q)e_{kr},$$

где θ — объемная деформация, δ_{kr} символы Кронекера.

Принимая во внимание введенные Ляме обозначения

$$2P + Q = \lambda; \quad -Q = 2\mu, \quad (4.34)$$

получим формулы компонентов тензора напряжений для линейно-упругого изотропного тела через компоненты тензора малой деформации

$$\sigma_{kr} = \lambda\theta\delta_{kr} + 2\mu e_{kr}, \quad (4.35)$$

Постоянные λ и μ называются упругими постоянными Ляме.

Эти формулы, выражают обобщенный закон Гука для изотропного тела.

Заметим, что формулу (4.33) в силу формул (4.34) можно теперь представить в виде

$$2A = \lambda \epsilon^2 + 2\mu e_{rk} e_{kr}. \quad (4.36)$$

Здесь суммирование ведется по обоим индексам k и r .

Так как энергия деформации всегда положительна, то из формулы (4.36) заключаем, что $\mu > 0$. Действительно, если выбрать тензор e_{kr} таким, что $e_{kk} = 0$, то (4.36) примет вид

$$2A = 4\mu (e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2),$$

откуда $\mu > 0$.

Докажем, что в каждой точке изотропного тела главные направления тензора деформаций совпадают с главными направлениями тензора напряжений. Примем главные направления тензора деформаций в некоторой точке тела за оси координат, тогда будем иметь $e_{12} = e_{24} = e_{31} = 0$, в силу формул (4.35) также $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, что и требовалось доказать. Поэтому для изотропных тел не различают главные направления тензора деформаций и тензора напряжений; те и другие называются главными направлениями.

Пусть изотропное тело испытывает осевое растяжение; напряженное состояние в каждой его точке дано в виде

$$\sigma_{11} \neq 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0,$$

тогда формулы (4.35) примут вид

$$\lambda \theta + 2\mu e_{11} = \sigma_{11}, \quad \lambda \theta + 2\mu e_{22} = 0, \quad \lambda \theta + 2\mu e_{33} = 0. \quad (4.37)$$

Складывая эти формулы, получим

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11}. \quad (4.38)$$

Внося (4.38) в первую формулу (4.37), будем иметь

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}. \quad (4.39)$$

Сравнивая (4.39) с формулой закона Гука для осевого растяжения призматического бруса, найдем

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (4.40)$$

Из двух последних формул (4.37) с учетом (4.38) имеем

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \theta = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}.$$

Подставим в эту формулу значение σ_{11} из (4.39) и введем обозначение

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (4.41)$$

тогда

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}. \quad (4.42)$$

Равенства (4.42) выражают закон поперечного сужения при осевом растяжении, причем ν называется коэффициентом Пуассона.

Допустим, что изотропное тело подвержено всестороннему гидростатическому давлению, тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= -p, \\ \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Учитывая (4.43), из (4.35) получим

$$\lambda\theta + 2\mu e_{rr} = -p \quad (r=1, 2, 3). \quad (4.44)$$

Складывая формулы (4.44), будем иметь

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = -3p. \quad (4.45)$$

Вводя обозначение

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (4.46)$$

где K называется модулем объемного сжатия, из (4.45) получим

$$p = -K\theta. \quad (4.47)$$

Согласно закону сохранения энергии при $p > 0$ происходит уменьшение объема; учитывая это, из формулы (4.47) имеем $K > 0$. На основании формул (4.40), (4.41) и (4.46) величины λ , μ и K выразим через E и ν

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (4.48)$$

Из двух последних формул (4.48), учитывая, что $E > 0$, $\mu > 0$ и $K > 0$, получим $1-2\nu > 0$, $1+\nu > 0$, откуда область возможных значений коэффициента Пуассона будет

$$-1 < \nu < 0,5. \quad (4.49)$$

Как видно, коэффициент Пуассона может принимать также некоторые отрицательные значения. Однако, как показывают опыты, коэффициент Пуассона для известных материалов принимает положительные значения, поэтому вместо неравенства (4.49) будем иметь

$$0 < \nu < 0,5.$$

Для очень многих материалов ν имеет приблизительно одно и то же значение, близкое к $1/3$. Следовательно, из первой формулы (4.48) имеем $\lambda > 0$.

Таким образом, из (4.36) вытекает, что энергия деформации A есть положительно определенная квадратичная форма компонентов

тензора деформаций, обращаясь в нуль только тогда, когда компоненты тензора деформаций одновременно равны нулю.

Решая (4.35) относительно компонентов тензора деформаций e_{kr} и учитывая две первые формулы (4.48), мы получим обобщенный закон Гука для изотропного тела.

$$e_{kr} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kr} - \frac{3\nu}{E} \sigma \delta_{kr}, \quad (4.50)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{RR}. \quad (4.51)$$

§ 28. Температурные напряжения

Пусть T — изменение температуры в некоторой точке тела, тогда объем достаточно малой окрестности этой точки изменится пропорционально T . Вследствие этого относительное удлинение всех волокон, исходящих из данной точки, равно αT . При этом компоненты тензора деформации будут

$$e'_{11} = e'_{22} = e'_{33} = \alpha T; \quad e'_{12} = e'_{23} = e'_{31} = 0. \quad (4.52)$$

Здесь α — коэффициент линейного теплового расширения. В действительности деформация окрестности точки, возникающая под действием разности температур, встречает сопротивление среды. В этом случае полная деформация e_{kr} представляет результат суперпозиции указанного теплового расширения e_{kr}' и упругой деформации e_{kr}'' , т. е.

$$e_{kr} = e_{kr}' + e_{kr}''. \quad (4.53)$$

В изотропном линейно-упругом теле, если не превзойден предел пропорциональности, в силу гипотезы Неймана компоненты тензора деформаций e_{kr}'' связаны с компонентами тензора напряжений формулами обобщенного закона Гука

$$\sigma_{kr} = \lambda \theta'' \delta_{kr} + 2\mu e_{kr}''. \quad (4.54)$$

Согласно формулам (4.52) и (4.53)

$$\theta'' = \theta - 3\alpha T. \quad (4.55)$$

Подставляя (4.53) и (4.55) в формулы (4.54), получим

$$\sigma_{kr} = \lambda \theta \delta_{kr} + 2\mu e_{kr} - \beta T \delta_{kr}. \quad (4.56)$$

Формула (4.56), где $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, выражает обобщенный закон Гука для изотропного тела. На основании гипотезы Неймана компоненты тензора полной деформации, входящие в формулы (4.56), определяются при помощи перемещений u_k формулами (3.26).

§ 29. Интеграл энергии для уравнений движения упругого тела

Предположим, что на тело действуют поверхностная сила T_{nk} и объемная сила ρF_k . Определим работу этих сил от начального момента $t=0$, соответствующего естественному состоянию покоя, до рассматриваемого момента времени t . Перемещение точек тела за время dt будет $\frac{\partial u}{\partial t} dt$. Обозначим работу внешних сил за время dt через dR . Тогда

$$dR = \int_{\tau} \left(\rho F_k \frac{\partial u_k}{\partial t} dt \right) d\tau + \int_{\omega} \left(T_{nk} \frac{\partial u_k}{\partial t} dt \right) d\omega.$$

Подставляя $T_{nk} = \sigma_{kr} n_r$ и преобразуя поверхностный интеграл в объемный, получим

$$\frac{dR}{dt} = \int_{\tau} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} + \rho F_k \right) \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sigma_{kr} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \right] d\tau.$$

Исходя из уравнений движения, найдем

$$\frac{dR}{dt} = \int_{\tau} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \frac{\partial u_k}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \sigma_{kr} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} \right) d\tau.$$

Здесь первое слагаемое представляет собой производную кинетической энергии тела по времени. Действительно,

$$\int_{\tau} \rho \frac{\partial u_k}{\partial t^2} \frac{\partial u_k}{\partial t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right)^2 d\tau = \frac{dK}{dt}.$$

Вследствие симметрии тензора напряжений σ_{kr}

$$\int_{\tau} \sigma_{kr} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} \right) d\tau = \int_{\tau} \sigma_{kr} \frac{\partial e_{kr}}{\partial t} d\tau.$$

Если процесс упругого деформирования идет адиабатически или изотермически, то в силу (4.19) будем иметь

$$\int_{\tau} \sigma_{kr} \frac{\partial e_{kr}}{\partial t} d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial A}{\partial e_{kr}} \frac{\partial e_{kr}}{\partial t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\tau} A d\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \left(K + \int_{\tau} A d\tau \right).$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от 0 до t и учитывая, что в начальный момент времени тело находилось в естест-

венном состоянии покоя, найдем

$$R = K + \int_{\tau} A d\tau, \quad (4.57)$$

где $\int_{\tau} A d\tau$ — работа, которая должна быть затрачена внешними силами для того, чтобы возникла деформация. Эта работа равна потенциальной энергии упругой деформации; A является потенциальной энергией упругой деформации, отнесенной к единице объема. Формула (4.57) верна не только для изотермического и адиабатического процессов, только A при этом не является потенциалом.

Если тело линейно-упругое и изотропное, то A определяется по формуле (4.36). Таким образом, работа внешних сил расходуется на возникновение кинетической энергии тела и потенциальной энергии деформации. Формула (4.57) представляет закон сохранения механической энергии.

Если под действием внешних сил тело из естественного состояния покоя перейдет в новое, деформированное состояние покоя, то кинетическая энергия будет равна нулю и формула (4.57) примет вид

$$R = \int_{\tau} A d\tau. \quad (4.58)$$

§ 30. Тождество Бетти

Пусть тело линейно-упругое и находится в двух различных напряженных состояниях (σ'_{ij}, e'_{ij}) и $(\sigma''_{ij}, e''_{ij})$. Тогда

$$\sigma'_{ij} = C_{ij}^{mn} e'_{mn}, \quad (4.59)$$

$$\sigma''_{ij} = C_{ij}^{mn} e''_{mn}. \quad (4.60)$$

Составляя $\sigma'_{ij} e''_{ij}$, учитывая в нем (4.59), а затем собирая коэффициенты при e'_{ij} , с учетом (4.60) получим тождество Бетти

$$\sigma'_{ij} e''_{ij} = \sigma''_{ij} e'_{ij}. \quad (4.61)$$

Тождество Бетти показывает, что для одного и того же линейно-упругого тела работа первого напряженного состояния на деформации второго напряженного состояния равна работе второго напряженного состояния на деформации первого напряженного состояния.

§ 31. Теорема Клапейрона

Пусть линейно-упругое тело под действием поверхностной силы T_n и объемной силы ρF находится в состоянии покоя. Работа упомянутых сил на перемещениях u_k равна

$$R = \int_{\tau} \rho F_k u_k d\tau + \int_{\omega} T_{nk} u_k d\omega.$$

Внося сюда $T_{nk} = \sigma_{kr} n_r$ и преобразуя поверхностный интеграл в объемный, будем иметь

$$R = \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} + \rho F_k \right) u_k + \sigma_{kr} \frac{\partial u_k}{\partial x_r} \right] d\tau.$$

В силу уравнений равновесия (2.25) и симметрии тензора напряжений σ_{kr} , получим

$$R = \int_V \sigma_{kr} e_{kr} d\tau.$$

Если процесс деформирования идет адиабатически или изотермически, то на основании формулы Клапейрона

$$\int_V A d\tau = \frac{1}{2} R. \quad (4.62)$$

Из равенства (4.62) следует, что работа упругой деформации равна половине работы внешних статически приложенных сил на перемещениях. Это положение носит название теоремы Клапейрона.

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 32. Уравнения упругого равновесия и движения в перемещениях

Уравнениями (4.1), связывающими тензоры напряжений и деформаций, замыкается система основных уравнений (2.24), (3.26) теории упругости, т. е. имеет место система девяти уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho F_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(e_{rk}). \quad (5.2)$$

Здесь неизвестными являются шесть компонентов тензора напряжений σ_{ij} и три перемещения u_k . С помощью формул (3.26) через u_k вычисляются компоненты тензора малой деформации e_{rk} .

Система уравнений (5.1) и (5.2) содержит одновременно и компоненты вектора перемещения, и компоненты тензора напряжений. Чтобы получить уравнения равновесия или движения в перемещениях, из (5.2) определяем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{rk}} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_r} \right).$$

Здесь коэффициенты при вторых производных неизвестных функций u_k являются функциями первых производных от этих функций.

В результате имеем систему трех нелинейных уравнений в частных производных второго порядка относительно трех функций u_k трех независимых переменных x_r в случае равновесия и четырех независимых переменных x_r и времени t — в случае динамического приложения сил. Эти уравнения не приводим ввиду их сложности. Их удобнее составлять непосредственно в каждой конкретной задаче.

В случае, когда имеет место закон вида (4.6), коэффициенты $\frac{\partial f_{ij}}{\partial e_{rk}}$ будут представлять собой упругие постоянные C_{ij}^{rk} и дифференциальные уравнения составят систему трех линейных уравнений с переменными коэффициентами, когда тело неоднородное, и с постоянными коэффициентами, когда тело однородное.

Для изотропного однородного линейно-упругого тела будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.3)$$

Подставляя выражения этих частных производных в уравнения (5.1), найдем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j + \rho \left(F_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Полученные уравнения движения в перемещениях, содержащие три функции u_j , называются дифференциальными уравнениями Ляме. Система уравнений (5.4) эквивалентна дифференциальному уравнению в векторной форме

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (5.5)$$

которое получится из уравнений (5.4), если каждое из них умножить на i_j , а затем просуммировать по индексу j , учитывая, что $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$. При этом для упругого равновесия вместо системы уравнений (5.4) и уравнения (5.5) будем иметь

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j + \rho F_j = 0, \quad (5.6)$$

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0 \quad (5.7)$$

Для случая, когда на тело действуют только поверхностные силы, т. е. когда объемная сила $\rho \mathbf{F}$ равна нулю, уравнения (5.6) примут вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j = 0. \quad (5.8)$$

Продифференцируем (5.8) по x_j и сложим по индексу j . Тогда

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \theta = 0.$$

откуда

$$\Delta \theta = 0.$$

Таким образом, в случае отсутствия массовых сил относительная объемная деформация является гармонической функцией.

Действуя оператором Δ на обе части (5.8), получим

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta \theta + \mu \Delta \Delta u_j = 0.$$

Учитывая, что $\Delta \theta = 0$, будем иметь

$$\Delta \Delta u_j = 0,$$

т. е. вектор перемещения является бигармонической функцией.

Сложим формулы обобщенного закона Гука (4.50) (при $r=k$), тогда

$$\theta = 3 \frac{1-2\nu}{E} \sigma, \quad (5.9)$$

где 3σ — сумма нормальных напряжений, действующих в трех взаимно перпендикулярных площадках. Так как θ — гармоническая функция, то в силу (5.9) σ также является гармонической функцией.

Действуя оператором Δ на обе части каждой из формул обобщенного закона Гука для изотропного и однородного тела и учитывая, что относительная объемная деформация есть гармоническая функция, а u_j суть бигармонические функции, приходим к выводу, что компоненты напряжения также суть бигармонические функции.

Подставим выражение, определяемое формулой (4.56), в дифференциальные уравнения (5.1), тогда

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j + \rho \left(F_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) - \beta \frac{\partial T}{\partial x_j} = 0. \quad (5.10)$$

Эти дифференциальные уравнения называются термоупругими уравнениями Дюгамеля — Неймана.

Следует отметить, что упругие постоянные λ и μ являются функциями температуры n , как установлено экспериментами, при повышении температуры обычно уменьшаются. Для случая, когда градиенты температуры в теле не слишком велики, λ и μ можно считать постоянными.

Система дифференциальных уравнений (5.10) содержит три неизвестных функции u_k , так как изменение температуры T предполагается известным; последнее определяется следующим образом: пусть в теле происходит изменение температуры, зависящее от координат его точки и времени t . Допустим, что тело термически изотропно и однородно; кроме того, коэффициент теплопроводности λ^* и удельная теплоемкость c не зависят от изменения температуры. Это допущение при не слишком больших разностях температуры вполне оправдывается. В этом случае функция $T(x_1, x_2, x_3; t)$ должна во всем теле удовлетворять уравнению теплопроводности Фурье

$$a^2 \Delta T + \frac{Q}{c\gamma} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (5.11)$$

где Δ — оператор Лапласа; γ — удельный вес, a — температуропроводность, $a^2 = \lambda^* c^{-1} \gamma^{-1}$; Q — количество тепла в единице объема, выделяемое или поглощаемое за единицу времени источником тепла, расположенным в данной точке тела.

В случае стационарного температурного состояния тела уравнение (5.11) приводится к уравнению Пуассона

$$\Delta T = - \frac{Q}{\lambda^*}. \quad (5.12)$$

Если тело не содержит источников тепла, то получим уравнение Лапласа

$$\Delta T = 0, \quad (5.13)$$

т. е. температура будет гармонической функцией.

Для полного определения функции T нужно задать соответствующие граничные, а в случае нестационарного температурного состояния еще и начальные условия. Предполагается, что искомая функция и ее частные производные непрерывны вплоть до поверхности тела. Начальным значением T может быть любая, непрерывная или разрывная, наперед заданная функция $f(x_1, x_2, x_3)$, т. е.

$$T(x_1, x_2, x_3; 0) = f(x_1, x_2, x_3). \quad (5.14)$$

В простейшем случае граничным условием служит задание температуры на поверхности ω рассматриваемого тела в виде функции координат и времени

$$T|_{\omega} = T^0(x_1, x_2, x_3; t) \quad (5.15)$$

в любой момент времени $t > 0$.

На границе можно также задать поток тепла через поверхность тела

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\omega} = -q^0(x_1, x_2, x_3; t), \quad (5.16)$$

где q^0 — количество тепла, втекающее или вытекающее через единицу площади поверхности тела за единицу времени.

Наконец, согласно закону охлаждения Ньютона, условие на поверхности тела может быть также задано в виде

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\omega} = \frac{k}{\lambda^*} (T^* - T^0). \quad (5.17)$$

Здесь T^* — температура среды; $\frac{k}{\lambda^*}$ — коэффициент относительной теплопередачи; k — коэффициент теплоотдачи.

В случае совместного рассмотрения задачи теплопроводности и термоупругости мы имеем дело с обобщенным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + b^2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = a^2 \Delta T. \quad (5.18)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор упругого перемещения;

$$b^2 = \frac{c_p - c_v}{\alpha c_v}, \quad (c_p > c_v),$$

c_p, c_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; α — коэффициент линейного расширения.

Обобщенное уравнение теплопроводности (5.18) отличается от обычного (5.11) при $Q=0$ присутствием добавочного слагаемого

$b^2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u}$ и может быть получено из первого закона термодинамики. Идея такой постановки задачи принадлежит известному русскому физику Н. А. Умову, который сформулировал ее в 1871 г. в работе «Теория термомеханических явлений в твердых упругих телах». При таком подходе решение задачи термоупругости сводится к совместному решению обобщенного уравнения теплопроводности с уравнениями движения и совместности деформаций при соответствующих начальных и граничных условиях для температуры и напряжений. В такой постановке задача реализуется тогда, когда, помимо температурных полей, на тело действуют быстро изменяющиеся внешние силы, которые могут вызвать в теле довольно существенное перераспределение температурных полей, что в свою очередь может повлечь к перераспределению напряжений. В тех случаях, когда температурные напряжения возникают в теле только за счет нагрева, подводимого к нему извне, в обобщенном уравнении теплопроводности можно пренебречь слагаемым $b^2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u}$.

Тогда из задачи термоупругости выделяется отдельная задача теплопроводности. Совершенно ясно, что во всех статических задачах слагаемое $b^2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u}$ обращается в нуль, поэтому здесь задачи термоупругости и теплопроводности решаются отдельно.

Вышеизложенным способом из (2.30) и закона Гука (4.35) с учетом формул (3.29), (3.30) легко получить дифференциальные уравнения движения в перемещениях в цилиндрической системе координат. Они таковы:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_3} (r \omega_\varphi) \right) + \rho r \left(F_r - \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right) + \rho \left(F_\varphi - \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \right) &= 0, \quad (5.19) \\ (\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) + \rho r \left(F_3 - \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\theta = e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{33} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (5.20)$$

Также из (2.31) и (4.35) с учетом формул (3.33) и (3.34) получим дифференциальные уравнения движения в перемещениях в сферической системе координат. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) r \sin \psi \frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_\psi}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \psi} (\omega_\psi \sin \psi) \right) + \\ + \rho r \sin \psi \left(F_r - \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_r) \right) + \rho r \left(F_\varphi - \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (5.21)$$

$$(\lambda + 2\mu) \sin \psi \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi \sin \psi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right) + \rho r \sin \psi \left(F_\psi - \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2} \right) = 0,$$

где

$$\theta = e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{\psi\psi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} (u_\psi \sin \psi) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (5.22)$$

Для осесимметрической задачи уравнения (5.19) примут вид

$$(\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2\mu r \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x_3} + \rho r \left(F_r - \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) = 0, \quad F_\varphi = 0, \quad (5.23)$$

$$(\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - 2\mu \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) + \rho r \left(F_3 - \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) = 0,$$

ибо $u_\varphi = 0$, а u_r и u_3 не зависят от координаты φ . В силу последнего обстоятельства $\omega_r = \omega_3 = 0$ и

$$\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (5.24)$$

Для случая равновесия и когда $F_r = F_3 = 0$, уравнения (5.23) приводятся к виду

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x_3} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial x_3^2} = 0.$$

Определив решение ω_φ этого уравнения, с помощью одного из уравнений (5.25) найдем также θ . Тогда для определения u_r и u_φ из (3.30) и (5.24) получим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial r} = 2\omega_\varphi \quad (5.25')$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \theta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Найдя решение u_r последнего уравнения, с помощью одного из уравнений (5.25) найдем также u_3 .

Для осесимметричной задачи уравнения движения в сферической системе координат примут вид

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2\mu \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\omega_\varphi \sin \psi) + \rho r \left(F_r - \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) = 0, \quad F_\varphi = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - 2\mu \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi \sin \psi) + \rho r \left(F_\psi - \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2} \right) = 0,$$

где

$$\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (u_\psi \sin \psi),$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \right), \quad \omega_r = \omega_\psi = 0,$$

так как $u_\varphi = 0$, $u_\psi = u_\psi(r, \psi)$ и $u_r = u_r(r, \psi)$.

§ 33. Уравнения в компонентах напряжений

Рассмотрим основные уравнения статики линейно-упругого изотропного тела

$$\frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r} + \rho F_k = 0, \quad (5.26)$$

$$e_{kr} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kr} - \frac{3\nu}{E} \sigma \delta_{kr}. \quad (5.27)$$

Девять уравнений (5.26) и (5.27) содержат девять неизвестных функций u_k, σ_{kr} .

В третьей главе было сказано, что шесть компонентов тензора деформаций e_{kr} не являются произвольными функциями координат точки тела, а должны удовлетворять шести условиям совместности деформаций Сен-Венана. Учитывая это обстоятельство, подставим формулы (5.27) в условия совместности деформаций Сен-Венана; тогда после ряда преобразований найдем шесть соотношений, связывающих между собою компоненты тензора напряжений. Следовательно, в итоге будем иметь три дифференциальных уравнения (5.26) и шесть соотношений между компонентами тензора напряжений, к выводу которых и приступим. Будем считать, что тело однородное, т. е. λ и μ не зависят от координат. Тогда полученная система уравнений будет применима только для изотропных, однородных и линейно-упругих тел.

Подставляя (5.27) в условия Сен-Венана (3.45), после ряда преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{3\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{3\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (5.29)$$

и еще четыре подобных соотношения, соответствующих также условиям (3.45). Продифференцируем первое уравнение (5.26) по x_1 , второе — по x_2 , третье — по $(-x_3)$ и сложим их; тогда

$$-2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \rho \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right). \quad (5.30)$$

Внося (5.30) в (5.28), будем иметь

$$\frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{3\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_3} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)$$

или

$$\Delta \sigma - \frac{1}{3} (1+\nu) \Delta \sigma_{33} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} = \frac{1}{3} (1+\nu) \rho \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_3} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right).$$

$$\Delta \sigma - \frac{1}{3} (1+\nu) \Delta \sigma_{22} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} = \frac{1}{3} (1+\nu) \rho \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right), \quad (5.31)$$

$$\Delta \sigma - \frac{1}{3} (1+\nu) \Delta \sigma_{11} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} = \frac{1}{3} (1+\nu) \rho \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right).$$

Два последних соотношения получаются аналогично из оставшихся двух уравнений типа (5.28).

Складывая последние равенства, найдем формулу

$$\Delta \sigma = -\rho \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \frac{\partial F_r}{\partial x_r}. \quad (5.32)$$

Подставляя (5.32) в (5.31), получим

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{11} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} &= -\frac{2}{3} \rho (1+\nu) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \rho \frac{\nu(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\partial F_r}{\partial x_r}, \\ \frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{22} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} &= -\frac{2}{3} \rho (1+\nu) \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \rho \frac{\nu(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\partial F_r}{\partial x_r}, \\ \frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{33} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} &= -\frac{2}{3} \rho (1+\nu) \frac{\partial F_3}{\partial x_3} - \rho \frac{\nu(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\partial F_r}{\partial x_r}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Эти равенства составляют первую группу соотношений Бельтрами — Митчелла.

Для получения второй группы соотношений Бельтрами — Митчелла преобразуем (5.29). С этой целью продифференцируем второе уравнение (5.26) по x_3 , третье — по x_2 и сложим их; полученный результат суммируем с (5.29); тогда будем иметь

$$\frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{23} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = -\rho \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right).$$

Аналогично получаются остальные два уравнения этого типа.

Таким образом, вторая группа соотношений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{12} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\rho \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right), \\ \frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{23} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} &= -\rho \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right), \\ \frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{31} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} &= -\rho \frac{1+\nu}{3} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Следовательно, соотношения Бельтрами — Митчелла представляют собой шесть линейных дифференциальных уравнений, содержащих шесть функций σ_{rs} .

Важно отметить, что система уравнений (5.33), (5.34) пригодна только для случая линейно-упругого изотропного однородного тела при изотермическом или адиабатическом процессе деформирования его, тогда как шесть уравнений совместности Сен-Венана пригодны для любого тела.

В случае, когда массовые силы отсутствуют или постоянны, соотношения Бельтрами — Митчелла принимают вид

$$\frac{1+\nu}{3} \Delta \sigma_{sr} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_s \partial x_r} = 0. \quad (5.35)$$

Подобным образом при помощи (4.50) и (2.30), когда $F_r = F_\varphi = F_3 = W_r = W_\varphi = W_3 = 0$, уравнениям совместности (3.40) в цилиндрической системе координат придадим вид

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \theta &= 0, \\ \Delta \sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\Delta \sigma_{r\varphi} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\varphi} = 0,$$

$$\Delta \sigma_{\varphi 3} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial x_3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{3r}}{\partial \varphi} - \frac{\sigma_{\varphi 3}}{r^2} = 0,$$

$$\Delta \sigma_{3r} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x_3} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{3\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\sigma_{3r}}{r^2} = 0,$$

где

$$\theta = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{33}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Для осесимметричной задачи уравнения (5.36) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} &= 0, \\ \Delta \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_{zr} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x_3} - \frac{1}{r^2} \sigma_{zr} &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

так как $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$, а остальные компоненты тензора деформации не зависят от координаты φ .

§ 34. Основные граничные задачи статики упругого тела. Единственность решения

На практике наиболее широкое распространение имеют следующие случаи загрузки и закрепления тел: 1) заданы силы, приложенные на поверхности тела; 2) заданы перемещения точек его поверхности; 3) на одной части поверхности заданы перемещения, а на другой — внешние силы. В связи с этим различают три типа основных граничных задач статики упругого тела.

Первая основная граничная задача состоит в нахождении в области, занятой телом, трех проекций вектора перемещения и шести компонентов тензора напряжений, которые должны быть непрерывными вплоть до поверхности тела функциями координат и удовлетворять уравнениям (5.1) и (5.2), а на поверхности его еще следующим условиям:

$$\sigma_{sr} n_r = T_{ns}(x_1, x_2, x_3), \quad (5.38)$$

где T_{ns} — проекции заданных сил, действующих на поверхности тела.

Вторая основная граничная задача состоит в нахождении такого решения уравнений (5.1) и (5.2), которое на поверхности тела удовлетворяет граничным условиям

$$u_r = u_r^\circ(x_1, x_2, x_3), \quad (5.39)$$

где u_r° — проекции заданного вектора перемещения точек поверхности тела.

Третья основная задача состоит в определении такого решения уравнений (5.1) и (5.2), которое на одной части удовлетворяет условиям (5.38), а на другой — условиям (5.39). Кроме этих задач

встречаются и другие задачи, также имеющие прикладное значение. На некоторых из них мы в дальнейшем остановимся.

Для задач термоупругости, в которых, помимо температур, действуют также поверхностные силы, граничные условия (2.22) принимают вид

$$\begin{aligned} T_{n1} &= (\lambda\theta + 2\mu e_{11} - \beta T)n_1 + 2\mu e_{12}n_2 + 2\mu e_{13}n_3, \\ T_{n2} &= 2\mu e_{21}n_1 + (\lambda\theta + 2\mu e_{22} - \beta T)n_2 + 2\mu e_{23}n_3, \\ T_{n3} &= 2\mu e_{31}n_1 + 2\mu e_{32}n_2 + (\lambda\theta + 2\mu e_{33} - \beta T)n_3. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Уравнения (5.10) и (5.40) показывают, что вектор упругого перемещения u в теле будет таким, какой возникает, если на тело, кроме массовых и поверхностных сил, будет действовать еще силы $\beta \nabla T$, приложенные в каждой точке его и отнесенные к единице объема, а на поверхности — давление $p\beta T$.

Доказательство существования решения указанных задач представляет трудную проблему математического анализа. Однако в настоящее время разрешимость всех краевых задач теории упругости установлена при весьма общих условиях. Принимая существование решений упомянутых граничных задач, перейдем к доказательству их единственности.

Допустим, что одна из указанных основных граничных задач имеет два решения: u_k', σ_{rk}' и u_k'', σ_{rk}'' . Очевидно, разность этих решений

$$u_k = u_k' - u_k''; \quad \sigma_{rk} = \sigma_{rk}' - \sigma_{rk}''$$

при отсутствии массовых сил должна удовлетворять основным уравнениям статики упругого тела (5.1), (5.2). В силу этого для u_k и σ_{rk} имеет место формула (4.62)

$$\int_{\omega} T_{nr} u_r d\omega = 2 \int_{\tau} A d\tau. \quad (5.41)$$

В случае первой основной граничной задачи для решения, составленного из разности двух решений данной задачи, на поверхности тела $T_{nr} = 0$, так как оба решения должны удовлетворять условиям (5.38) при одних и тех же силах, заданных на поверхности этого тела.

В случае второй основной граничной задачи для решения, составленного из разности двух решений данной задачи, аналогично предыдущему случаю, на поверхности тела будем иметь $u_r = 0$.

Наконец, в случае смешанной задачи на одной части поверхности $T_{nr} = 0$, а на другой $u_r = 0$.

Таким образом, во всех трех основных граничных задачах подинтегральная функция на поверхности тела равна нулю, т. е.

$$T_{nr} u_r = 0,$$

поэтому во всех трех случаях

$$\int_{\tau} A d\tau = 0. \quad (5.42)$$

Учитывая, что A есть положительная квадратичная форма, из (5.42) получим

$$A=0.$$

Как следует из (4.36), это, в свою очередь, возможно при $e_{rk}=0$. Отсюда заключаем, что $e_{rk}' \equiv e_{rk}''$ или, на основании обобщенного закона Гука (4.35), $\sigma_{rk}' \equiv \sigma_{rk}''$. Следовательно, оба решения дают одинаковое напряженное или деформированное состояние.

Таким образом, теоремы единственности решения указанных задач доказаны. Необходимо отметить, что из равенства нулю компонентов малой деформации, как это вытекает из формулы (3.26), не следует $u_r \equiv 0$. Поэтому при решении первой основной граничной задачи мы можем получить для проекции перемещения u_r различные значения, отличающиеся друг от друга только жестким перемещением всего тела, не влияющим на напряженное или деформированное состояние тела. Во второй и третьей основных граничных задачах указанного различия не будет, ибо на всей поверхности во второй задаче или на части поверхности в третьей задаче будут заданы перемещения.

В этом параграфе мы доказали, что система (5.1), (5.2) при заданных внешних силах однозначно определяет напряженное или деформированное состояние тела. В приведенном доказательстве теоремы единственности решения упомянутых граничных задач, которое дано Кирхгофом, тело может быть принято как односвязным, так и многосвязным.

§ 35. Основные задачи динамики упругого тела

В случае динамики упругого тела, как и в случае статики, для уравнений (5.4) также ставятся три основные задачи. В отличие от основных граничных задач статики упругого тела, в случае динамической нагрузки к граничным условиям следует присоединить еще и начальные условия, состоящие в задании проекции вектора перемещения u_k^0 и проекции вектора скорости v_k^0 точки тела в некоторый момент времени t_0 , с которого начинается изучение задачи, т. е.

$$u_k(x_1, x_2, x_3; t)|_{t=t_0} = u_k^0(x_1, x_2, x_3), \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_k(x_1, x_2, x_3; t)|_{t=t_0} = v_k^0(x_1, x_2, x_3). \quad (5.44)$$

Таким образом, интегралы системы уравнений (5.4) должны удовлетворять не только граничным, но и начальным условиям (5.43), (5.44).

Как и в предыдущем параграфе, докажем теоремы единственности решений указанных здесь задач, не останавливаясь на доказательствах теорем существования.

Допуская, что эти задачи имеют два решения, рассмотрим их разность, являющуюся решением системы уравнений (5.4) при $F_k=0$. Для этого решения:

в случае первой задачи на поверхности тела вектор напряжения $T_n=0$ при $t \geq t_0$;

в случае второй задачи вектор перемещения точки поверхности тела $u=0$ при $t \geq t_0$ и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ на поверхности ω ;

в случае же третьей задачи на одной части поверхности $T_n=0$ при $t \geq t_0$, а на другой $u=0$ при $t \geq t_0$, следовательно, на этой части поверхности тела $\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

Так как оба решения задачи должны удовлетворять одним и тем же начальным условиям, то для разности этих решений начальные условия будут однородными, т. е. в начальный момент времени t_0 имеет место

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (5.45)$$

Из сказанного следует, что работа R , вычисленная для разности решений u при $t \geq t_0$, равна нулю. Учитывая это, из формулы (4.57) будем иметь

$$K + \int A d\tau = 0. \quad (5.46)$$

Так как кинетическая энергия тела K и энергия деформации суть положительные величины, то из (5.46) получим

$$K=0; \quad A=0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad e_{rk} = 0 \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Из условия $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ следует, что вектор перемещения u не зависит от времени; из условия $e_{rk} = 0$ следует, что деформация равна нулю. Следовательно, решение u может выражать только жесткое перемещение тела. По условию в начальный момент $u=0$, следовательно, это жесткое перемещение должно быть равно нулю во всех точках тела и во все моменты времени. Таким образом, два решения совпадают полностью.

§ 36. Принцип Сен-Венана (принцип смягчения граничных условий)

Рассматривая задачи об изгибе и кручении длинных призматических брусьев, Сен-Венан в 1855 г. опубликовал свой знаменитый принцип: «Способ приложения и распределения сил по концам призмы безразличен для эффектов, вызванных на остальной длине,

так что всегда возможно с достаточной степенью приближения заменить силы, которые были приложены, статически эквивалентными силами, имеющими тот же полный момент и ту же равнодействующую».

Спустя тридцать лет, в 1885 г. первая общая формулировка этого принципа была дана Буссинеском: «Уравновешенная система внешних сил, приложенная к упругому телу, когда все точки приложения сил этой системы лежат внутри данной сферы, производит деформации, пренебрежимо малые на расстояниях от сферы, достаточно больших по сравнению с ее радиусом».

Буссинеск для доказательства принципа Сен-Венана рассмотрел полубесконечное тело, находящееся под действием сосредоточенных сил, перпендикулярных к его плоской границе. Небезынтересно заметить, что до сих пор строго общего доказательства прин-

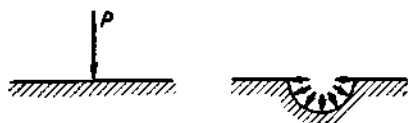


Рис. 12

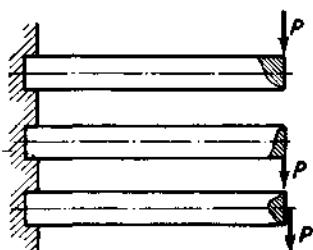


Рис. 13

ципа Сен-Венана не имеется. Существующие в этом направлении попытки посвящены в основном оценке погрешности принципа Сен-Венана применительно к призматическим, а также к телам, все размеры которых являются величинами одного порядка. Вопрос об оценке погрешности этого принципа применительно к тонкостенным стержням и оболочкам, ввиду его большой сложности, разработан слабо.

При решении задач теории упругости часто обращаются к принципу Сен-Венана. Если при решении задачи граничные условия задаются точно согласно истинному распределению сил, то решение может оказаться весьма сложным. В силу принципа Сен-Венана можно, смягчив граничные условия, добиться такого решения, чтобы оно дало для большей части тела поле тензора напряжений, очень близкое к истинному. Определение тензора напряжений в месте приложения нагрузок составляет особые задачи теории упругости, называемые контактными задачами или задачами по исследованию местных напряжений. На рис. 12 показаны две статически эквивалентные системы сил: одна в виде сосредоточенной силы P , перпендикулярной к плоской границе полубесконечной пластинки, а другая — в виде равномерно распределенных на полуцилиндрической поверхности сил, равнодействующая которых равна силе P и перпендикулярна к границе пластинки. В достаточно удаленных

от места приложения указанных сил точках тензор напряжений в обоих случаях практически одинаков. Области консольной балки, тензор напряжений в которых существенно зависит от способа приложения силы, на рис. 13 заштрихованы.

Эффективное решение указанных в § 34 граничных задач упругого равновесия в общем случае представляет большие трудности. Принцип Сен-Венана в этом отношении занимает особое место в теории упругости. Благодаря этому принципу в настоящее время мы располагаем решениями многочисленных задач теории упругости, ибо принцип Сен-Венана позволяет смягчить граничные условия: заданная система сил, приложенная к небольшой части упругого тела, заменяется другой, удобной для упрощения задачи, статически эквивалентной системой сил, приложенной к той же части поверхности тела.

§ 37. Прямые и обратные решения задач теории упругости. Полуобратный метод Сен-Венана

В прямых решениях задач об упругих телах ищутся тензоры напряжений, деформаций и вектор перемещения, вызываемые действующими на них внешними силами. Для этого следует проинтегрировать дифференциальные уравнения Ляме (5.4), если за основные неизвестные приняты перемещения u_k , и дифференциальные уравнения (5.26) и соотношения Бельтрами — Митчелла (5.33), (5.34), если за основные неизвестные приняты компоненты тензора напряжений при заданных граничных и начальных условиях. В первом случае говорят, что задача решается в перемещениях, во втором — в напряжениях.

В решениях обратных задач задаются либо перемещения, либо компоненты тензора деформаций в рассматриваемом теле и определяются все остальные величины, в том числе и внешние силы. Решения обратных задач особых трудностей не представляют, однако не всегда возможно прийти к решениям, представляющим какой-либо практический интерес. Исходя из этого Сен-Венаном предложен полуобратный метод, состоящий в частичном задании одновременно перемещений и напряжений, затем в определении при помощи уравнений теории упругости уравнений, которым должны удовлетворять оставшиеся перемещения и напряжения. Полученные уравнения сравнительно легко интегрируются. Таким образом, этим методом можно получить полное и точное решение для большого числа частных задач, наиболее часто встречающихся в практике. Сен-Венан применил свой метод к задачам нестесненного кручения и изгиба призматических тел.

§ 38. Простейшие задачи теории упругости

К простейшим задачам теории упругости мы будем относить те из них, в которых в любой точке тела компоненты напряжений, а следовательно, и деформаций постоянны или линейно зависят от координат. Очевидно, в простейших задачах соотношения Бельтрами — Митчелла или уравнения сплошности деформаций удовлетворяются тождественно. Эти задачи решаются полуобратным методом.

1. Всестороннее равномерное давление.

Пусть тело подвержено всестороннему равномерному внешнему давлению $-p$ (n — единичный вектор по нормали к поверхности тела). Массовыми силами пренебрегаем. Зададимся тензором напряжений в виде

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \quad (5.47)$$

который удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия (2.25), а также соотношениям Бельтрами — Митчелла.

Определим внешние силы, вызывающие в рассматриваемом теле тензор напряжений в виде (5.47); на основании формул (2.22) имеем

$$T_{nk} = -pn_k$$

или

$$T_n = -pn,$$

т. е. вектор напряжения, приложенный на поверхности тела, должен представлять собой давление $-pn$, что имеет место по заданию. Таким образом, во всех точках тела любые три взаимно перпендикулярные сечения суть главные площадки. На основании обобщенного закона Гука (4.50) компоненты тензора деформаций будут равны

$$e_{kk} = -\frac{1-2\nu}{E} p; \quad e_{kr} = 0 \quad (k \neq r). \quad (5.48)$$

Допустим, что данное тело закреплено в некоторой точке, которую примем за начало координатных осей, и в этой точке закреплено элементарное волокно, расположенное на оси x_3 ; кроме того, стеснен поворот элементарного волокна, расположенного на оси x_2 , в плоскости x_1x_2 . Аналитическая запись этих условий закрепления соответственно для всех $x_k = 0$ такова

$$u_k = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0. \quad (5.49)$$

Подставляя решение (5.48) в формулы (3.44) и учитывая условия закрепления (5.49), после несложных вычислений определим проекции вектора упругого перемещения.

$$u_k = -\frac{1-2\nu}{E} px_k. \quad (5.50)$$

Следовательно, перемещения точек тела радиальные, причем они растут пропорционально расстоянию от начала координат и симметричны относительно него.

2. Осевое растяжение призматического бруса.

Пусть призматическое тело с прямолинейной осью и перпендикулярными к ней основаниями произвольной формы подвержено осевому растяжению. Массовыми силами пренебрегаем. Тензор напряжений, выбранный в виде

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{33} = p, \quad (5.51)$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия (2.25), а также соотношениям Бельтрами — Митчелла. Определим внешние силы, вызывающие в данном призматическом теле тензор напряжений вида (5.51). В силу формул (2.22) имеем: на боковой поверхности бруса ($n_3 = 0$)

$$T_{\pi 1} = T_{\pi 2} = T_{\pi 3} = 0, \quad (5.52)$$

на основаниях бруса [$\cos(x_3, x_1) = \cos(x_3, x_2) = 0$; $\cos(x_3, x_3) = \pm 1$]

$$T_{31} = T_{32} = 0, \quad T_{33} = \pm p. \quad (5.53)$$

Равенства (5.52) показывают, что боковая поверхность тела должна быть свободна от внешних сил, что вполне справедливо, так как на тело действуют только осевые силы. Равенства (5.53) показывают, что на основаниях бруса должны быть приложены равномерно распределенные растягивающие усилия интенсивностью p . Фактически передача растягивающей силы на рассматриваемый брус может сильно отличаться от равномерно распределенных растягивающих сил. Однако, согласно принципу Сен-Венана, на достаточной удаленной от оснований бруса части его решение (5.51) можно принять за точное.

На основании обобщенного закона Гука (4.50) компоненты тензора деформаций будут равны

$$e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0, \\ e_{11} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad e_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad e_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}. \quad (5.54)$$

В центре тяжести верхнего сечения бруса, в котором расположено начало координат, как и в первой задаче, примем граничные условия

$$u_k = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{для } x_k = 0. \quad (5.55)$$

Подставляя решение (5.44) в формулы (3.44), с учетом (5.55) получим

$$u_1 = -\frac{\nu p}{E} x_1, \quad u_2 = -\frac{\nu p}{E} x_2, \quad u_3 = \frac{p}{E} x_3. \quad (5.56)$$

Первые две формулы (5.56) показывают, что во всех поперечных

сечениях перемещения u_1 и u_2 одинаковы и пропорциональны расстоянию данной точки поперечного сечения до оси бруса. Третья формула (5.56) показывает, что плоские сечения после деформации остаются плоскими. В курсе сопротивления материалов последний результат принимается за исходное предположение, носящее название «гипотеза плоских сечений».

3. Растяжение призматического бруса под действием собственного веса.

а) Пусть призматический брус длиной l , закрепленный своим верхним концом, подвержен деформации растяжения под действием собственного веса. Обозначим через ρ плотность материала. Оси системы координат выберем так, чтобы начало ее поместилось в центре тяжести верхнего основания, перпендикулярного к оси бруса, и одна из осей системы, направленная вертикально вниз, например, x_3 , совпала с осью бруса. Тогда проекции массовой силы будут

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = g.$$

Пользуясь полуобратным методом Сен-Венана, выберем компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \\ \sigma_{33} = ax_3 + b. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Здесь a , b — пока неизвестные постоянные. Этими компонентами тензора напряжений соотношения Бельтрами — Митчелла удовлетворяются тождественно; тождественно удовлетворяются также первые два уравнения равновесия, а из третьего уравнения получаем

$$a = -\rho g.$$

В силу этого будем иметь

$$\sigma_{33} = -\rho g x_3 + b.$$

Учитывая формулы (5.57) и имея в виду, что $n_3 = 0$, где n — внешняя нормаль к поверхности бруса, для проекции силы, действующей на боковой поверхности бруса, на основании (2.22) будем иметь

$$T_{n1} = T_{n2} = T_{n3} = 0.$$

Как видно из последних равенств, боковая поверхность бруса должна быть свободна от сил, что имеет место в действительности, так как брус находится под действием лишь собственного веса. На нижнем основании бруса при $x_3 = l$ имеем

$$n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1,$$

где n — внешняя нормаль нижнего основания. Согласно формулам (2.22)

$$T_{n1}^* = 0, \quad T_{n2}^* = 0, \quad T_{n3}^* = -\rho g l + b,$$

В силу условий задачи нижнее основание свободно от сил, поэтому

$$T_{n3}^* = -\rho g l + b = 0,$$

откуда

$$b = \rho g l.$$

Окончательно имеем

$$q_{33} = \rho g (-x_3 + l). \quad (5.58)$$

Поступая аналогичным образом, на верхнем основании бруса при $x_3 = 0$ будем иметь

$$T_{n1}^{**} = T_{n2}^{**} = 0, \quad T_{n3}^{**} = -\rho g l.$$

Это соответствует такому закреплению верхнего основания, при котором в нем возникают только нормальные, равномерно распределенные по всему основанию напряжения. Такое закрепление практически осуществить не представляется возможным, но в силу принципа Сен-Венана решение (5.57) может быть принято за точное и при любом другом способе закрепления.

На основании обобщенного закона Гука компоненты тензора деформаций будут

$$e_{11} = e_{22} = -\frac{\nu}{E} \rho g (-x_3 + l), \quad e_{33} = \frac{1}{E} \rho g (-x_3 + l), \\ e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0. \quad (5.59)$$

При граничных условиях (5.55) второй задачи с учетом (5.59) из формул (3.44) будем иметь

$$u_1 = \frac{\nu g \rho}{E} x_1 (x_3 - l), \quad u_2 = \frac{\nu g \rho}{E} x_2 (x_3 - l), \\ u_3 = -\frac{g \rho}{2E} [x_3^2 + \nu (x_1^2 + x_2^2) - 2l x_3] \quad (5.60)$$

Точки, лежащие на оси бруса, как показывает третья формула (5.60), перемещаются лишь вдоль этой оси.

Так как в поперечных сечениях бруса отсутствуют касательные напряжения, а следовательно, и сдвиги, то эти сечения после деформации бруса останутся нормальными ко всем волокнам и, как показывает третья формула (5.60), сечения обращаются в параболы вращения, обращенные выпуклостью вниз.

б) Призматический брус длиной l , закрепленный своим верхним концом, находится под действием своего веса и силы P , приложенной к свободному концу в направлении оси бруса. Поместим начало координат в центре тяжести верхнего сечения и одну из осей x_3 направим вдоль оси бруса вниз. Исходя из принципа Сен-Венана, заменим силу P статически ей эквивалентной, равномерно распределенной по нижнему основанию бруса нагрузкой интенсивностью $p = \frac{P}{\omega}$ (ω — площадь нижнего основания, перпендикулярного к

оси бруса); тогда, в силу линейности задачи, решение будет представлено в виде суммы решений второй и третьей задач.

4. Кручение круглого призматического бруса.

Пусть на крайних поперечных сечениях круглого призматического бруса с осью ox_3 действуют пары сил, моменты которых по величине равны, но знаки различны; в этом случае брус подвержен деформации кручения (рис. 14); боковая поверхность бруса свободна от поверхностных сил и объемные силы отсутствуют ($F_k = 0$).

Элементарное решение задачи в теории сопротивления материалов основывается на предположении, что поперечные сечения бруса, оставаясь плоскими, с сохранением между собой расстояний поворачиваются относительно друг друга и их радиусы не искривляются. Если принять во внимание это предположение, то проек-

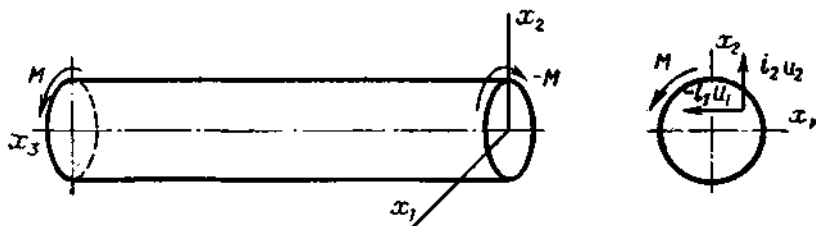


Рис. 14

ция вектора перемещения некоторой точки в каком-либо поперечном сечении бруса будет

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = 0, \quad (5.61)$$

где τ — постоянный угол закручивания, рассчитанный на единицу длины бруса.

Проверим, совместимы ли эти перемещения со всеми основными уравнениями теории упругости. Подставив (5.61) в формулы (3.18), для компонентен тензора деформаций будем иметь

$$\begin{aligned} e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} &= 0, \\ 2e_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \tau x_1, \\ 2e_{31} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\tau x_2. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Объемная деформация

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0. \quad (5.63)$$

Как видно из формул (5.62), уравнения совместности Сен-Венана удовлетворяются тождественно.

Учитывая, что массовые силы равны нулю и имеет место соотношение (5.63), убеждаемся, что (5.61) удовлетворяют уравнениям упругого равновесия Ляме (5.8).

На основании обобщенного закона Гука компоненты напряжений будут

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} &= 0, \\ \sigma_{23} = \mu\tau x_1 \quad \sigma_{31} &= -\mu\tau x_2\end{aligned}\quad (5.64)$$

Таким образом, в любом поперечном сечении бруса действуют только два компонента касательных напряжений. Подставляя (5.64) в формулы (2.22), на боковой поверхности, где $n_3=0$, будем иметь $T_{nk}=0$. Следовательно, боковая поверхность бруса должна быть свободна от напряжений, что действительно имеет место. Далее, подставляя (5.64) в формулы (2.22) для крайних поперечных сечений ($n_1=n_2=0$, $n_3=\pm 1$), получим поверхностные силы, соответствующие решению (5.61), в виде

$$T_{n1} = \mp \mu\tau x_2, \quad T_{n2} = \pm \mu\tau x_1, \quad T_{n3} = 0.$$

Таким образом, решение (5.61) приводит к выводу, что в крайних поперечных сечениях бруса должны действовать только касательные силы, распределенные по закону (5.64). Главный вектор и главный момент этих сил относительно центра круга будут

$$\begin{aligned}V_1 &= \int_{\omega} T_{n1} d\omega = -\mu\tau \int_{\omega} x_2 d\omega, \\ V_2 &= \int_{\omega} T_{n2} d\omega = \mu\tau \int_{\omega} x_1 d\omega, \\ L &= \int_{\omega} (T_{n2}x_1 - T_{n1}x_2) d\omega = \mu\tau \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) d\omega.\end{aligned}$$

В силу того, что оси ox_1 и ox_2 проходят через центр тяжести круга, статические моменты его площади будут

$$\int_{\omega} x_2 d\omega = \int_{\omega} x_1 d\omega = 0.$$

Окончательно имеем

$$V_1 = V_2 = 0, \quad L = \mu\tau I_0,$$

где I_0 — полярный момент инерции площади круга,

$$I_0 = \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) d\omega = \frac{\pi R^4}{2},$$

здесь R — радиус окружности.

Осуществление передачи внешних сил на концах бруса по закону (5.64) практически невозможно, но на основании принципа Сен-Венана решение (5.64) можно считать точным при любом законе передачи внешних сил, если соблюдены условия статической эквивалентности, т. е. постоянную τ выбираем так (это возможно), чтобы момент M приложенной пары сил на одном из крайних сечений был равен равнодействующему моменту L_0 , т. е.

$$L_0 \mu \tau I_0 = M,$$

откуда получаем

$$\tau = \frac{M}{\mu I_0},$$

что дает закон Гука при кручении круглого призматического бруса.

5. Чистый изгиб призматического бруса.

Примем ось бруса за ox_3 , а главные центральные оси инерции поперечного сечения за ox_1 и ox_2 , при этом ось ox_1 направим в сторону растянутых волокон (рис. 15).

Предположим, что боковая поверхность бруса свободна от внешних сил и массовые силы отсутствуют. Кроме того, пусть в крайних сечениях рассматриваемого бруса приложены две пары сил, плоскости действия которых совпадают с одной из главных его плоскостей, моменты их равны по величине и знаки противоположны. В этом случае брус подвергается чистому изгибу и, как известно из теории сопротивления

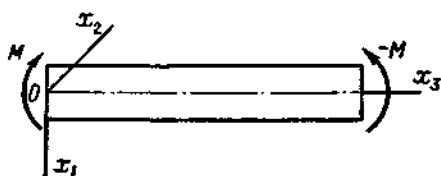


Рис. 15

материалов, решение этой задачи основано на предположении, что каждое поперечное сечение, оставаясь плоским, поворачивается вокруг центральной оси этого сечения, перпендикулярной плоскости действия пар (нейтральная ось — ox_2), на определенный угол.

Положим, что компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{32} = 0; \quad \sigma_{33} = a x_1, \quad (5.65)$$

где a — некоторая постоянная; x_1 — расстояние точки поперечного сечения, в которой вычисляется нормальное напряжение σ_{33} , до нейтральной оси этого сечения.

Проверим, совместимы ли компоненты напряжений с основными уравнениями теории упругости. Ввиду того, что рассматриваемая задача также является простейшей задачей теории упругости, компоненты тензора напряжений (5.65) тождественно удовлетворяют соотношениям Бельтрами — Митчелла. Компоненты тензора напряжений (5.65) также удовлетворяют уравнениям упругого равновесия.

На боковой поверхности бруса, где $n_3 = 0$, на основании формул (2.22) с учетом (5.65) будем иметь

$$T_{n1} = T_{n2} = T_{n3} = 0.$$

Таким образом, боковая поверхность должна быть свободна от внешних сил, что имеет место в действительности.

В крайних сечениях, где $\cos(x_3, x_1) = \cos(x_3, x_2) = 0$, $\cos(x_3, x_3) = \pm 1$, также на основании формул (2.22) с учетом (5.65) имеем

$$T_{n1}^* = T_{n2}^* = 0, \quad T_{n3}^* = \pm a x_1. \quad (5.66)$$

Формулы (5.66) показывают, что в крайних сечениях бруса должны быть приложены только нормальные напряжения, распределенные по закону (5.66). Главный вектор и главный момент этих сил будут

$$V_3 = \int_{\omega} \sigma_{33} d\omega = a \int_{\omega} x_1 d\omega,$$

$$L_1 = \int_{\omega} \sigma_{33} x_2 d\omega = a \int_{\omega} x_1 x_2 d\omega,$$

$$L_2 = \int_{\omega} \sigma_{33} x_1 d\omega = a \int_{\omega} x_1^2 d\omega.$$

Учитывая, что оси ox_1 и ox_2 направлены вдоль главных центральных осей инерции поперечного сечения, статический момент относительно оси ox_2 и центробежный момент инерции площади сечения относительно осей ox_1 и ox_2 равны нулю, окончательно имеем

$$L_2 = aI,$$

где I — момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси ox_2 .

На практике осуществить передачу внешних сил по закону (5.66) не представляется возможным; поэтому, исходя из принципа Сен-Венана, вместо этих сил можно взять нагрузку в виде изгибающих моментов так, чтобы было выполнено условие эквивалентности

$$aI = M,$$

откуда

$$a = \frac{M}{I}$$

и, таким образом,

$$\sigma_{33} = \frac{M}{I} x_1.$$

На основании обобщенного закона Гука для компонентов тензора деформаций будем иметь

$$e_{11} = e_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\nu M^2}{EI} x_1,$$

$$e_{33} = \frac{M}{EI} x_1, \quad (5.67)$$

$$e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0.$$

Поместим начало координат в центре тяжести левого крайнего сечения, в котором закрепим брус так, чтобы удовлетворялись условия

$$u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

Тогда из (3.44) с учетом условий закрепления и формул (5.67) после некоторых преобразований для определения перемещений получим формулы

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M}{2EI} [x_3^2 - \nu(x_1^2 - x_2^2)], \\ u_2 &= -\frac{\nu M}{EI} x_1 x_2, \\ u_3 &= \frac{M}{EI} x_1 x_3. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Ось бруса до деформации $x_1 = x_2 = 0$, как показывают формулы (5.68), оставаясь в плоскости ox_1x_3 , называемой плоскостью изгиба, после деформации обращается в параболу

$$u_1 = -\frac{M}{2EI} x_3^2, \quad u_2 = u_3 = 0.$$

Кривизна упругой линии с точностью до малых величин высшего порядка равна

$$K = \frac{1}{R} = \frac{d^2 u_1}{dx_3^2}.$$

Подставляя выражение u_1 , получаем формулу

$$\frac{1}{R} = -\frac{M}{EI},$$

определяющую кривизну оси бруса, пропорциональную величине изгибающего момента. Так как кривизна постоянна, то упругая линия — парабола с точностью до малых величин высшего порядка может быть заменена окружностью.

Как следует из формулы для перемещения u_1 , любое поперечное сечение $x_3 = \text{const}$ после деформации переходит в плоское сечение.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При решении задач теории упругости для общего случая трехмерных тел встречаются большие математические затруднения; это обстоятельство вынуждает переходить к решению более или менее широких классов частных задач, одним из которых является плоская задача теории упругости. В плоской задаче теории упругости рассматриваются три случая упругого равновесия тела, имеющих большое значение для практики: плоская деформация, плоское напряженное состояние и обобщенное плоское напряженное состояние.

§ 39. Плоская деформация

Деформация тел называется плоской, если вектор перемещения любой точки параллелен некоторой плоскости, называемой плоскостью деформации, и не зависит от расстояния рассматриваемой точки до этой плоскости.

Допустим, что тело имеет плоскую деформацию, параллельную плоскости ox_1x_2 , тогда

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0. \quad (6.1)$$

Внося (6.1) в формулы (3.26), для компонентов тензора деформаций будем иметь

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad (6.2)$$

последние, вообще говоря, отличны от нуля и не зависят от x_3 , а остальные

$$e_{23} = e_{31} = e_{33} = 0.$$

При этом объемная деформация равна

$$\theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

и также является функцией лишь координат x_1 и x_2 .

В этом случае формулы обобщенного закона Гука примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \theta_1 + 2\mu e_{11}, & \sigma_{22} &= \lambda \theta_1 + 2\mu e_{22}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu e_{12}, & \sigma_{23} &= \sigma_{31} = 0, & \sigma_{33} &= \lambda \theta_1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Следовательно, при плоской деформации тензор напряжений, в об-

шем случае, состоит из четырех отличных от нуля компонентов, зависящих от двух аргументов x_1 и x_2 . Благодаря наличию компонента σ_{33} обеспечивается состояние плоской деформации. Легко показать, что при плоской деформации тела число независимых компонентов тензора напряжений равно трем. В самом деле, складывая первые две формулы (6.3) и учитывая пятую формулу (6.3), получим

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

откуда с учетом формулы (4.41) имеем

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (6.4)$$

В разбираемом случае дифференциальные уравнения равновесия (2.25) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho F_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 = 0, \quad F_3 = 0. \quad (6.5)$$

Эти уравнения показывают, что массовая сила, приложенная к любой точке тела, должна быть параллельна плоскости деформации и не должна зависеть от координаты x_3 .

Уравнения Ляме (5.6) также соответственно упрощаются, принимая вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 + \rho F_1 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + \rho F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

здесь Δ — двумерный оператор Лапласа.

Из условий совместности деформаций Сен-Венана, как легко видеть, остается следующее:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (6.7)$$

остальные же пять условий удовлетворяются тождественно.

Для изотропного однородного тела уравнение совместности (6.7) при отсутствии массовых сил на основании (6.3) и (6.5) примет вид

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (6.8)$$

Действительно, из формул закона Гука (6.3) с учетом соотношения (6.4) имеем

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{11} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right], \\ e_{22} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{22} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12},$$

с другой стороны, из дифференциальных уравнений (6.5) при $F_1 = F_2 = 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = -2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (6.10)$$

Подставим (6.9) в (6.7), с учетом (6.10) придем к уравнению (6.8), которое называется уравнением Леви.

Учитывая закон Гука в форме (6.9), условию совместности деформаций (6.7) придадим другой вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (6.11)$$

Из определения плоской деформации вытекает, что она точно возникает в призматическом теле бесконечно большой длины с прямолинейной осью и притом поперечные и массовые силы должны лежать в плоскостях поперечных сечений и не должны зависеть от координаты вдоль оси тела. Когда призматическое тело имеет конечную длину, плоская деформация в нем реализуется не точно, причем чем длиннее тело, тем точнее реализуется плоская деформация при условии, что на его торцах приложены силы, распределенные по закону $\sigma_{33} = \lambda \theta_1$.

Поскольку, согласно определению, условия на боковой поверхности призматического тела не зависят от координаты x_3 , граничные условия задаются на контуре одного из поперечных сечений или на нескольких контурах, если сечение многосвязное. Таким образом, система дифференциальных уравнений равновесия (6.5) и соотношения (6.3), наряду с контурными условиями, характеризуют более простые задачи статики упругого тела (§ 35); при этом здесь также различают три основные двумерные граничные задачи.

Для первой основной граничной задачи контурные условия, согласно (2.22), записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 &= T_{r1}, \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= T_{r2}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Дифференциальные уравнения равновесия и уравнение Леви, а также контурные условия (6.12) при отсутствии массовых сил не содержат упругих постоянных материала. Следовательно, в случае плоской деформации при отсутствии массовых сил напряженное состояние тела в любом его односвязном сечении, параллельном плоскости деформации, определяется заданными на контуре этого сечения силами, его формой и не зависит от свойств материала.

Если сечение представляет собой многосвязную область, то независимость напряженного состояния от свойств материала обеспечивается при дополнительном условии, заключающемся в уравно-

вешивании внешних сил, приложенных к каждой из границ области. (Доказательство этого положения будет дано несколько позже.) Сказанное и составляет теорему Мориса Левн, лежащую в основе определения тензора напряжений на моделях из материала с другими упругими свойствами.

При плоской деформации, очевидно, будем иметь

$$2\omega_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad 2\omega_{23} = 0, \quad 2\omega_{13} = 0.$$

В дальнейшем для удобства ω_{12} обозначено через ω_3 . Из формул

$$2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

определив выражения

$$\Delta u_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}, \quad \Delta u_2 = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}$$

и подставив их в уравнения равновесия Ляме (6.6), получим систему дифференциальных уравнений для θ_1 и ω_3 в виде

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - 2\mu \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + \rho F_1 = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + 2\mu \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + \rho F_2 = 0.$$

Если принять $F_1 = F_2 = 0$, то последние уравнения примут вид

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega^*}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial \omega^*}{\partial x_1},$$

где $\omega^* = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \omega_3$. Эти уравнения составляют дифференциальные соотношения Коши — Римана, следовательно, функции θ_1 , ω^* суть гармонически между собой сопряженные.

§ 40. Плоское напряженное состояние

Напряженное состояние пластинки называется плоским, если вектор напряжения на площадках, параллельных основаниям, равен нулю по всему ее объему.

Примем среднюю плоскость пластинки толщиной $2h$ за координатную плоскость Ox_1x_2 (рис. 16). В силу определения

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0,$$

поэтому система дифференциальных уравнений (2.25) принимает вид (6.5).

Так как $\sigma_{33} = 0$, для изотропного тела будем иметь

$$\sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

Внеся отсюда значение $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ через $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ в остальные формулы закона Гука, получим соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda^* \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \sigma_{22} &= \lambda^* \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).\end{aligned}\quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,\end{aligned}\quad (6.14)$$

где

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Как видно, формулы (6.13) получаются из первых трех формул (6.3) путем замены коэффициента Ляме λ на коэффициент λ^* . Подставив (6.14) в уравнения (5.6), получим

$$\begin{aligned}(\lambda^* + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 + \rho F_1 &= 0, \\ (\lambda^* + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + \rho F_2 &= 0, \quad F_3 = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Эти уравнения отличаются от уравнения (6.6) только заменой коэффициента λ на коэффициент λ^* и являются трехмерными.

Таким образом, несмотря на значительное упрощение основных уравнений задачи о плоском напряженном состоянии, эта задача остается трехмерной, поскольку координата x_3 не исключена из приведенных выше уравнений.

Однако Файлоном для случая, когда толщина пластинки достаточно мала, дана идея, позволяющая привести указанную задачу к двумерной. Она заключается в том, что вычисление значений средних величин вектора перемещения и тензора напряжений в тонкой пластинке достаточно точно определяет решение задачи о плоском напряженном состоянии;

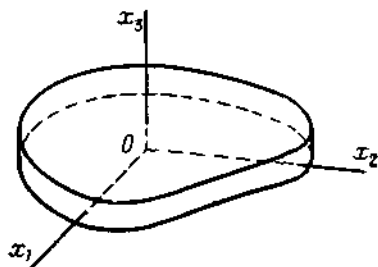


Рис. 16

последнее, следуя Ляву, называют «обобщенным плоским напряженным состоянием».

§ 41. Обобщенное плоское напряженное состояние

Теперь допустим, что пластинка высотой $2h$ нагружена по боковой поверхности внешними силами, параллельными основаниям и симметрично распределенными относительно средней плоскости; основания пластинки приемем свободными от внешних сил. Кроме того, будем считать, что составляющая массовой силы, перпендикулярная средней плоскости пластинки, равна нулю, а две другие составляющие распределены симметрично относительно средней плоскости пластинки. Возникающее в такой пластинке напряженное состояние называется обобщенным плоским напряженным состоянием; оно часто встречается в приложениях и является важным для практики случаем.

По условию, на основаниях $x_3 = \pm h$

$$T_{n1} = \sigma_{13} = 0, \quad T_{n2} = \sigma_{23} = 0, \quad T_{n3} = \sigma_{33} = 0, \quad (6.15)$$

а на боковой поверхности пластинки $T_{n3} = 0$, кроме того, $F_3 = 0$.

Из третьего дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 = 0,$$

учитывая условия (6.15), при $x_3 = \pm h$ будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0.$$

Следовательно, при $x_3 = \pm h$ обращается в нуль не только величина σ_{33} , но и ее производная по координате x_3 ; поэтому при достаточно малой толщине пластинки величина σ_{33} будет очень малой и мы можем считать $\sigma_{33} = 0$ во всей пластинке.

В силу симметрии очевидно, что проекция вектора перемещения любой точки средней плоскости на ось ox_3 равна нулю и является нечетной функцией относительно x_3 , поэтому ее среднее значение $u_3^* = 0$. Будем также считать, что изменения проекций $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$ по толщине пластинки малы, поэтому вместо величин u_1, u_2 можно рассматривать их средние значения по толщине, которые определяются формулами

$$u_1^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_1 dx_3, \quad u_2^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_2 dx_3. \quad (6.16)$$

Умножим обе части системы дифференциальных уравнений равновесия (2.25) на $(2h)^{-1} dx_3$ и проинтегрируем по координате x_3 от $-h$ до $+h$; тогда, в силу условий (6.15),

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \frac{1}{2h} [\sigma_{13}]_{-h}^h = 0,$$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3 = \frac{1}{2h} [\sigma_{23}]_{-h}^h = 0.$$

Окончательно получим (помня, что $\sigma_{33}=0$, $F_3=0$)

$$\frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_2} + \rho F_1^* = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^*}{\partial x_2} + \rho F_2^* = 0, \quad (6.17)$$

$$-\frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^*}{\partial x_2} = 0, \quad (6.18)$$

где

$$\sigma_{11}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \sigma_{11} dx_3, \dots, F_2^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} F_2 dx_3$$

представляют собой средние значения величин σ_{11} , ..., F_2 по толщине пластинки.

Из определения плоского напряженного состояния вытекает, что u_1 , u_2 , σ_{11} , σ_{22} , σ_{21} — четные функции x_3 , а σ_{13} , σ_{23} — нечетные. Следовательно, средние значения σ_{13}^* , σ_{23}^* равны нулю и уравнение (6.18) является тождеством.

Осредняя значения данных на боковой поверхности пластинки внешних сил по ее толщине на контуре какого-либо сечения, параллельного основаниям (или на контурах, если сечение многосвязное), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* n_1 + \sigma_{12}^* n_2 &= T_{n1}^*, \\ \sigma_{12}^* n_1 + \sigma_{22}^* n_2 &= T_{n2}^*, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где

$$T_{n1}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} T_{n1} dx_3, \quad T_{n2}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} T_{n2} dx_3.$$

Из формул закона Гука (6.13), переходя к средним значениям и учитывая, что $\sigma_{33}=0$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \lambda^* \theta_1^* + 2\mu \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^* = \lambda^* \theta_1^* + 2\mu \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}, \\ \sigma_{12}^* &= \mu \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

где введено обозначение

$$\theta_1^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}.$$

Соотношения (6.20) между средними значениями компонентов тензора напряжений σ_{11}^* , σ_{22}^* , σ_{12}^* и производными средних значений

перемещений u_1^* , u_2^* , при обобщенном плоском напряженном состоянии отличаются от соотношений (6.3) при плоской деформации только тем, что вместо упругой постоянной Ляме λ участвует постоянная λ^* . Дифференциальные уравнения равновесия (6.17) и контурные условия (6.19), которым должны удовлетворять σ_{11}^* , σ_{22}^* , σ_{12}^* , полностью совпадают с дифференциальными уравнениями равновесия (6.5) и контурными условиями (6.12) при плоской деформации. Следовательно, для плоского обобщенного напряженного состояния уравнения равновесия Ляме и соотношения Бельтрами — Митчелла для осредненных величин будут записываться так же, как при плоской деформации (6.6) и (6.11), с той лишь разницей, что вместо λ будет фигурировать λ^* .

Таким образом, приходим к весьма важному выводу, что различные по существу задачи плоской теории упругости — плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние — математически идентичны.

§ 42. Функция напряжений Эри

Решение задач плоской теории упругости значительно упрощается, если массовыми силами пренебречь либо в силу их малости, либо, имея в виду, что всегда задачу при наличии массовых сил можно свести к задаче без массовых сил, если найти какое-либо частное решение соответствующих неоднородных дифференциальных уравнений равновесия. В дальнейшем будем предполагать, что массовые силы отсутствуют.

В плоской задаче теории упругости большую роль играет введенная впервые Эри вспомогательная функция. Следует отметить, что благодаря введению этой функции был создан плодотворный метод решения задач плоской теории упругости.

В случае отсутствия массовых сил уравнения (6.5) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (6.21)$$

Первое уравнение (6.21) показывает, что выражение $\sigma_{11}dx_2 - \sigma_{12}dx_1$ является полным дифференциалом некоторой функции $Q(x_1, x_2)$, следовательно,

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial P}{\partial x_2}. \quad (6.22)$$

Таким же образом из второго уравнения имеем

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad (6.23)$$

где $P(x_1, x_2)$ — некоторая функция. Сравнение этих формул для одной и той же величины дает соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2},$$

которое показывает, что выражение $Pdx_1 + Qdx_2$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $\Phi(x_1, x_2)$, так что

$$Pdx_1 + Qdx_2 = d\Phi,$$

откуда

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}.$$

Подставляя значения P и Q в формулы (6.22) и (6.23), получим

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}. \quad (6.24)$$

Эти формулы были впервые получены Эрн. Функция $\Phi(x_1, x_2)$ называется функцией напряжения Эрн.

Очевидно, если допустить, что имеют место соотношения (6.24), уравнения (6.21) будут удовлетворены тождественно. Кроме того, как известно, для того, чтобы величины σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} соответствовали действительному напряженному состоянию, они должны удовлетворять условию совместности (6.8), т. е.

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (6.25)$$

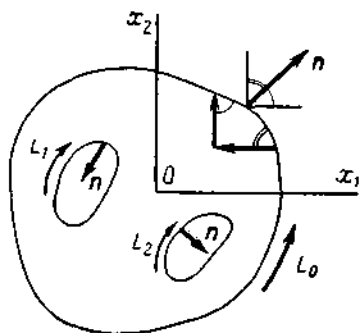


Рис. 17

С другой стороны, из соотношений (6.24) имеем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \Delta \Phi.$$

Учитывая последнее равенство, из (6.25) окончательно получим

$$\Delta \Delta \Phi = 0, \quad (6.26)$$

где

$$\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}.$$

В дальнейшем мы будем считать, что функция напряжений в области имеет непрерывные производные вплоть до четвертого порядка.

Таким образом, для того чтобы функция напряжений определяла некоторое действительное напряженное состояние, необходимо и достаточно, чтобы она была бигармонической.

Выведем теперь контурные условия, которым должна удовлетворять функция Эрн. Допуская, что на границе данной области заданы внешние силы T_{n1} , T_{n2} , преобразуем контурные условия (6.12).

Мы будем в дальнейшем предполагать, что контуры простые, т. е. не самопересекающиеся, и достаточно гладкие.

Выразим n_1 и n_2 через производные координат x_1 и x_2 по дуге l , отсчитываемой в положительном направлении вдоль рассматриваемого контура. Из рис. 17 имеем

$$n_1 = \frac{dx_2}{dl}; \quad n_2 = -\frac{dx_1}{dl}. \quad (6.27)$$

Внося (6.24) и (6.27) в контурные условия (6.12), получим на L_r ($r=0, 1, 2, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dl} &= T_{n1}, \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{dl} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dl} &= T_{n2} \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = T_{n1}, \quad \frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = -T_{n2}. \quad (6.28)$$

Для произвольной точки N контура L_r введем обозначения

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right|_N = A_r, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right|_N = B_r. \quad (6.29)$$

Тогда, интегрируя равенства (6.28), получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = A_r - \int_N^M T_{n2} dl; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = B_r + \int_N^M T_{n1} dl. \quad (6.30)$$

Итак, приращения функций $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ при переходе из точки N в точку M (эти точки лежат на одном и том же контуре) равны соответственно проекциям на ось ox_2 и на ось ox_1 результирующего вектора внешних сил, приложенных к контуру между этими двумя точками. Имея формулы (6.30), нетрудно найти производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dl} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl}, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dn}. \quad (6.32)$$

Внося значения $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ из (6.30) в (6.31) и интегрируя полученный результат по l , будем иметь

$$\Phi = C_r + A_r x_1 + B_r x_2 + \int_N^M \left[-\frac{dx_1}{dl} \int_N^M T_{n2} dl + \frac{dx_2}{dl} \int_N^M T_{n1} dl \right] dl. \quad (6.33)$$

Формула (6.33) показывает, что по заданным на любом контуре значениям внешних сил можно вычислить значение Φ в любой точке того же контура с точностью до линейного слагаемого вида

$$C_r + A_r x_1 + B_r x_2.$$

Следует отметить, что это слагаемое для компонентов тензора напряжений, вычисляемых формулами (6.24), выпадает.

Если заданная область односвязна, то на контуре L_0 можно C_0 , A_0 и B_0 принять равными нулю. Если область многосвязна, то, положив постоянные C_r , B_r и A_r равными нулю на каком-либо одном из контуров, мы не можем распорядиться остальными по произволу.

Подставляя значения $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ из (6.30) в (6.32), определим значение нормальной производной

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left(A_r - \int_N^M T_{n2} dl \right) \frac{\partial x_1}{\partial n} + \left(B_r + \int_N^M T_{n1} dl \right) \frac{\partial x_2}{\partial n} \quad (6.34)$$

по заданным внешним силам, приложенным на контурах.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к определению бигармонической функции по известным на контурах значениям этой функции и ее нормальной производной.

При полном обходе любого замкнутого контура в силу формул (6.30), (6.33) будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = - \oint T_{n2} dl = -V_2, \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \oint T_{n1} dl = V_1,$$

$$\Phi = \oint \left[- \frac{dx_1}{dl} \int_N^M T_{n2} dl + \frac{dx_2}{dl} \int_N^M T_{n1} dl \right] dl, \quad (6.36)$$

где V_1 и V_2 — соответственно проекции на ось ox_1 и на ось ox_2 главного вектора внешних сил, приложенных к рассматриваемому контуру. Интегрируя (6.36) по частям, получим

$$\Phi = -x_{1N} V_2 + x_{2N} V_1 + \oint (x_1 T_{n2} - x_2 T_{n1}) dl, \quad (6.37)$$

где x_{1N} и x_{2N} — координаты произвольной точки N рассматриваемого контура L_r , с которой начинается полный обход. Третий член (6.37) определяет значение главного момента всех внешних сил, приложенных к рассматриваемому контуру, относительно произвольно выбранного начала координат.

Формулы (6.35) и (6.37) позволяют установить условия однозначности функции Φ и ее производных $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$. Функция Φ

и ее производные $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ будут однозначными в том случае, если главный вектор и главный момент внешних сил, приложенных к каждому контуру области, в отдельности равны нулю; если главный вектор равен нулю, то функция будет, вообще говоря, неоднозначной, а ее производные $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ будут однозначными функциями; если же главный вектор не равен нулю, то неоднозначными будут как сама функция Φ , так и ее производные.

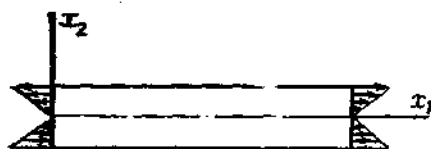


Рис. 18

Ряд интересных решений уравнения (6.26) можно получить, задавшись функцией Эри в виде полиномов различных степеней. В качестве простейшего примера выберем функцию Эри в виде полинома второй степени, который, очевидно, удовлетворяет уравнению (6.26)

$$\Phi = \frac{1}{2} a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2.$$

В случае отсутствия массовых сил по формулам Эри (6.24) для компонентов тензора напряжений получим

$$\sigma_{11} = c_2; \quad \sigma_{22} = a_2; \quad \sigma_{12} = -b_2.$$

Таким образом, все три компонента постоянны по всей области. Для прямоугольной полосы со сторонами, параллельными осям координат (рис. 18), силы, приложенные к контуру, где $\alpha_{11} = \pm 1$, $\alpha_{22} = \pm 1$, в силу формулы (6.12) будут

$$T_{11} = \sigma_{11} = c_2; \quad T_{12} = \sigma_{12} = -b_2; \quad T_{22} = \sigma_{22} = a_2.$$

Уравнению (6.26) также удовлетворяет полином третьей степени

$$\Phi = \frac{a_3}{6} x_1^3 + \frac{b_3}{2} x_1^2 x_2 + \frac{c_3}{2} x_1 x_2^2 + \frac{d_3}{6} x_2^3.$$

На основании формулы (6.24) компоненты напряжений будут

$$\sigma_{11} = c_3 x_1 + d_3 x_2; \quad \sigma_{22} = a_3 x_1 + b_3 x_2; \quad \sigma_{12} = -b_3 x_1 - c_3 x_2. \quad (6.38)$$

Предполагая $c_3 = a_3 = b_3 = 0$, $d_3 \neq 0$, мы получим

$$\sigma_{11} = d_3 x_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (6.39)$$

Эта система компонентов тензора напряжений соответствует чистому изгибу прямоугольной полосы внешними силами, приложенными на обоих ее концах $x_1 = 0$, $x_1 = l$. Эти внешние силы на основании формул (6.12) должны быть равны $-d_3 x_2$ на конце $x_1 = 0$ и $d_3 x_2$ на конце $x_1 = l$. Главный вектор и главный момент этих сил, очевидно,

будут

$$V = \delta \int_{-c}^c \sigma_{11} dx_2 = 0, \quad M = \delta \int_{-c}^c \sigma_{31} x_2 dx_2 = \frac{2}{3} a_3 c^3 \delta,$$

здесь δ — толщина полосы; $2c$ — высота полосы.

Согласно принципу Сен-Венана найденное решение применимо вдали от концов полосы также для случая, когда вместо внешних сил, приложенных на обоих концах полосы и распределенных по закону (6.39), действуют статически эквивалентные пары сил с моментом M , причем вблизи места приложения пар напряженное состояние будет отличаться от (6.39). Если не равен нулю только коэффициент a_3 , то отличным от нуля компонентом тензора напряжений будет нормальное напряжение $\sigma_{22} = a_3 x_1$. Если же только один из коэффициентов b_3, c_3 не равен нулю, например $c_3 \neq 0$, то в дополнение к нормальному напряжению σ_{11} появляется касательное напряжение σ_{12} . Когда используются полиномы более высокой степени, чем третья, то бигармоническое уравнение удовлетворяется при некоторых соотношениях между их коэффициентами.

§ 43. Функция Эри в полярных координатах.

Задача Ляме

Уравнения равновесия плоской задачи теории упругости в полярной системе координат на основании уравнения (2.30), когда отсутствуют массовые силы, примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Решение этой системы может быть принято в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

где $\Phi(r, \varphi)$ — функция напряжений Эри в полярной системе координат.

Первые два соотношения (6.41) должны удовлетворять условию (6.25), т. е.

$$\Delta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (6.42)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Подставляя выражения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ из (6.41) в (6.42), для определения функции Эри получим бигармоническое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \times \\ \times \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right) = 0. \quad (6.43)$$

Для случая симметричного распределения напряжений относительно начала координат уравнение (6.43) примет вид

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d \Phi}{dr} = 0,$$

общее решение которого будет

$$\Phi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (6.44)$$

Подставляя (6.44) в формулы (6.41), для случая симметричного распределения напряжений относительно начала координат получим компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = A \frac{1}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -A \frac{1}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \quad (6.45) \\ \sigma_{r\varphi} = 0.$$

Если точка $r=0$ принадлежит области, то для ограничения компонентов тензора напряжений, определяемых формулами (6.45), следует A и B брать равными нулю, тогда

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = C.$$

Задача о деформации полого круглого цилиндра, подверженного равномерному давлению на внутренней и внешней поверхности, впервые решена Ляме. Решение этой задачи можно легко получить из соотношений (6.45), подчиняя их граничным условиям

$$\sigma_{rr} = -p_1 \text{ на цилиндре } r = r_1, \\ \sigma_{rr} = -p_2 \text{ на цилиндре } r = r_2, \quad (6.46)$$

где r_1 , r_2 — соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра.

Для определения коэффициентов A , B , C нужно, кроме двух граничных условий (6.46), иметь еще и третье условие. Третьим условием является независимость проекций вектора перемещения u_r , u_φ от полярного угла φ , так как независимость компонентов тензора напряжений от угла φ не обязательно приводит к независимости вектора перемещения от полярного угла φ . Для случая плоской деформации u_r и u_φ определяются из формул закона Гука

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}] = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{A}{r^2} + B[(1-4\nu) + 2(1-2\nu)\ln r] + 2C(1-2\nu) \right\}, \\ \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{1+\nu}{E} [-\nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\varphi] = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{A}{r^2} + B[(3-4\nu) + 2(1-2\nu)\ln r] + 2C(1-2\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений найдем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{A}{r} - B[1-2(1-2\nu)\ln r]r + 2C(1-2\nu)r \right\} + f(\varphi), \\ u_\varphi &= \frac{4(1-\nu^2)}{E} B r \varphi - \int f(\varphi) d\varphi + g(r). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Здесь функции $f(\varphi)$ и $g(r)$ подлежат определению.

Так как проекции вектора перемещения u_r , u_φ не должны зависеть от φ ; то следует положить

$$f(\varphi) = 0, \quad B = 0. \quad (6.48)$$

В соотношениях (6.45), положив $B=0$, из граничных условий (6.46) найдем

$$\frac{A}{r_1^2} + 2C = -p_1; \quad \frac{A}{r_2^2} + 2C = -p_2.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$A = \frac{(p_2 - p_1)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad C = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{2(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (6.49)$$

Учитывая (6.49) в (6.45), для компонентов напряжений окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Принимая во внимание соотношения (6.49), в формулах (6.47) будем иметь

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1+\nu}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2) \frac{1}{r} + (1-2\nu)(r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2) r \right], \\ u_\varphi &= g(r). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Так как $\sigma_{r\varphi} = 0$, то, следовательно,

$$2\mu e_{r\varphi} = 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{du_{\varphi}}{dr} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right) = 0$$

и тогда

$$\frac{dg(r)}{g(r)} = \frac{dr}{r},$$

откуда

$$g(r) = qr,$$

где q — интегральная постоянная.

Таким образом, тангенциальная проекция вектора перемещений u_{φ} представляет собой вращение абсолютно твердого тела.

Рассмотрим теперь задачу определения напряженного состояния тонкого концентрического круглого диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . На диск действует объемная сила $\rho F_r = \rho \omega^2 r$.

Учитывая, что здесь деформация относительно полюса O является симметричной, имеем $u_{\varphi} = 0$, $\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = 0$. Тогда из формул (3.29) и (2.30)

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad (6.52)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho\omega^2 r = 0. \quad (6.53)$$

Учитывая (6.52) из (3.40), получим уравнение совместности деформаций в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{de_{\varphi\varphi}}{dr} \right) - \frac{de_{rr}}{dr} = 0$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{de_{\varphi\varphi}}{dr} + (e_{\varphi\varphi} - e_{rr}) \right] = 0.$$

Последнее соотношение удовлетворяется, если

$$\frac{de_{\varphi\varphi}}{dr} = \frac{1}{r} (e_{rr} - e_{\varphi\varphi}). \quad (6.54)$$

На основании формул закона Гука (5.27) и того, что $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$ соотношению (6.54) придадим вид

$$\frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \nu \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{1 + \nu}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}).$$

Подставляя в это уравнение выражение $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ из (6.53), будем иметь

$$\frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} = - \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - (1 + \nu) \rho \omega^2 r. \quad (6.55)$$

Дифференцируем (6.53) по r , тогда

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} + 2\rho\omega^2 r = 0.$$

Подставляя (6.55) в последнее уравнение, найдем

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_{rr}) \right] + (3 + \nu) \rho \omega^2 r = 0.$$

Интегрируем это уравнение

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2. \quad (6.56)$$

Из (6.53) и (6.56) имеем

$$\sigma_{\varphi\varphi} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2.$$

Для нахождения постоянных A и B у нас имеются следующие граничные условия

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ на цилиндре } r = r_2,$$

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ на цилиндре } r = r_1.$$

Отсюда

$$A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 = 0,$$

$$A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 = 0.$$

Решения этой системы уравнений будут

$$A = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2), \quad B = -\frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r_1^2 r_2^2.$$

Следовательно,

$$\sigma_{rr} = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right). \quad (6.57)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\rho \omega^2}{8} \left[(3 + \nu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right].$$

На основании этих формул нетрудно убедиться, что напряжение σ_r является растягивающим и достигает максимального значения при $r = \sqrt{r_1 r_2}$. Напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ также является растягивающим и наибольшее значение наблюдается при $r = r_1$. При очень маленьком отверстии ($r_1 \ll r_2$) у его края резко изменяется напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$, т. е. возникает концентрация напряжений. При этом из второй формулы (6.57)

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\max} = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 r_2^2.$$

Если диск сплошной ($r_1=0$), то тогда для получения ограниченно-го решения следует принять $B=0$, тогда

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r^2), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\nu)r_2^2 - (1+3\nu)r^2].$$

В этом случае в центре будем иметь

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r_2^2.$$

Таким образом, в диске с очень маленьким отверстием у его края напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ вдвое больше, чем в центре сплошного диска. Если стенка диска весьма тонкая, то можно $r_2 \approx r_1$; тогда из второй формулы (6.57)

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \rho \omega^2 r_1^2.$$

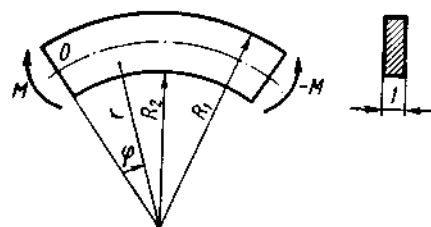


Рис. 19

В качестве одной из задач исследуем распределение напряжений и перемещений при чистом изгибе кругового бруса (рис. 19). Ввиду того, что тензор напряжений не зависит от координаты φ , функцию напряжений берем в форме (6.44). Сформулируем граничные условия задачи в виде

в форме (6.44). Сформулируем граничные условия задачи в виде

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при } r = R_2,$$

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при } r = R_1,$$

$$\int_{R_2}^{R_1} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = M \quad \text{при } \varphi = 0.$$

На основании формул (6.45) этим условиям придадим вид

$$\frac{1}{R_2^2} A + (1 + 2 \ln R_2) B + 2C = 0,$$

$$\frac{1}{R_1^2} A + (1 + 2 \ln R_1) B + 2C = 0,$$

$$-A \ln \frac{R_1}{R_2} + B [R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2 + R_1^2 - R_2^2] + (R_1^2 - R_2^2) C = M.$$

Решения этой системы уравнений следующие:

$$A = -\frac{4M}{D} R_1^2 R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2},$$

$$B = -\frac{2M}{D} (R_1^2 - R_2^2).$$

$$C = \frac{M}{D} [R_1^2 - R_2^2 + 2(R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2)],$$

где

$$D = -(R_1^2 - R_2^2)^2 + 4R_1^2 R_2^2 \ln^2 \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M}{D} \left(\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \ln \frac{R_1}{R_2} + R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} + R_2^2 \ln \frac{R_2}{r} \right).$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{4M}{D} \left(-\frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \ln \frac{R_1}{R_2} + R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} + R_2^2 \ln \frac{R_2}{r} + R_1^2 - R_2^2 \right).$$

Определим теперь перемещения u_r и u_φ . Для данной задачи формулы закона Гука с учетом формул (4.50), (3.31) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{E} [(1+\nu)Ar^{-2} + 2(1-\nu)B \ln r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} &= \frac{1}{E} [-(1+\nu)Ar^{-2} + 2(1-\nu)B \ln r + \\ &\quad + (3-\nu)B + 2(1-\nu)C], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Интегрируем последовательно первое и второе уравнения этой системы; тогда

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E} [-(1+\nu)Ar^{-1} + 2(1-\nu)Br \ln r - (1+\nu)Br + \\ &\quad + 2(1-\nu)Cr] + f_1'(\varphi), \\ u_\varphi &= \frac{4B}{E} r\varphi - f_1(\varphi) + f_2(r). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения в третьем уравнении системы (6.58), получим

$$\frac{1}{r} f_1''(\varphi) + f_2'(r) + \frac{1}{r} f_1(\varphi) - \frac{1}{r} f_2(r) = 0.$$

Отсюда

$$f_1''(\varphi) + f_1(\varphi) = C, \quad r f_2'(r) - f_2(r) = -C.$$

Общие решения этих двух уравнений соответственно будут

$$f_1(\varphi) = P_1 \sin \varphi + P_2 \cos \varphi + C, \quad f_2(r) = P_3 r + C.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E} [-(1+\nu)Ar^{-1} + 2(1-\nu)Br \ln r - (1+\nu)Br + \\ &\quad + 2(1-\nu)Cr] + P_1 \cos \varphi - P_2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$u_\varphi = \frac{4B}{E} r\varphi - P_1 \sin \varphi - P_2 \cos \varphi + P_3 r.$$

Для определения постоянных P_1 , P_2 и P_3 следует взять некоторую точку, например O , и закрепить брус так, чтобы исключить его движение как твердого тела, т. е. следует положить в этой точке

$$u_r = u_\varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = 0.$$

Тогда

$$P_1 = -\frac{1}{E} \left[-(1+\nu)A \frac{2}{R_1+R_2} + 2(1-\nu)B \frac{R_1+R_2}{2} \ln \frac{R_1+R_2}{2} - \right. \\ \left. -(1+\nu)B \frac{R_1+R_2}{2} + 2(1-\nu)C \frac{R_1+R_2}{2} \right], \\ P_2 = P_3 = 0.$$

Окончательно перемещения примут вид

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1+\nu)Ar^{-1} + 2(1-\nu)Br \ln r - (1+\nu)Br + \right. \\ \left. + 2(1-\nu)Cr \right] + P_1 \cos \varphi, \\ u_\varphi = \frac{4B}{E} r\varphi - P_1 \sin \varphi.$$

Из формулы для перемещения u_φ видно, что при чистом изгибе поперечные сечения остаются плоскими.

§ 44. Комплексное представление бигармонической функции, компонентов вектора перемещения и тензора напряжений

В предыдущем параграфе решение уравнений плоской теории упругости свелось к граничной задаче для бигармонического уравнения, которому удовлетворяет функция Эри. К решению уравнений плоской теории упругости могут быть с успехом применены также методы теории функций комплексного переменного. Впервые применение этих методов было дано в фундаментальных исследованиях Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили. Комплексное представление общего решения уравнений плоской теории упругости оказалось весьма плодотворным для эффективного решения основных задач плоской теории упругости.

В § 32 было показано, что для изотропного однородного тела, когда отсутствуют массовые силы, объемная деформация является гармонической функцией; в случае плоской деформации имеем

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_2^2} = 0. \quad (6.59)$$

Комплексное представление решений этого уравнения проще всего получить, если записать его в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \bar{z} \partial z} = 0, \quad (6.60)$$

что непосредственно получается из (6.59) введением новых независимых комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$ и $\bar{z} = x_1 - ix_2$ вместо переменных x_1 и x_2 , где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Из уравнения (6.60) получим, что гармоническая функция в некоторой области плоскости комплексного переменного z может быть представлена в виде

$$\theta_1 = \frac{1}{\lambda + \mu} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad (6.61)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция переменного z .

Умножив второе уравнение (6.6) на мнимую единицу i и сложив с первым, с учетом $F_1 = F_2 = 0$ получим

$$\mu \Delta (u_1 + iu_2) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \theta_1 = 0.$$

Учитывая, что

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

предыдущее уравнение запишем в комплексной форме

$$2\mu \frac{\partial^2 (u_1 + iu_2)}{\partial z \partial \bar{z}} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Интегрируя это равенство по аргументу \bar{z} , получим

$$2\mu \frac{\partial (u_1 + iu_2)}{\partial z} + (\lambda + \mu) \theta_1 = \varphi_1(z), \quad (6.62)$$

где $\varphi_1(z)$ — некоторая также аналитическая функция переменного z .

Переходя в (6.62) к сопряженным выражениям, будем иметь

$$2\mu \frac{\partial (u_1 - iu_2)}{\partial \bar{z}} + (\lambda + \mu) \theta_1 = \overline{\varphi_1(z)}. \quad (6.63)$$

Сложив равенства (6.62) и (6.63) и учитывая наряду с соотношением

$$2\mu \left[\frac{\partial (u_1 + iu_2)}{\partial z} + \frac{\partial (u_1 - iu_2)}{\partial \bar{z}} \right] = 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 2\mu \theta_1 \quad (6.64)$$

также выражение (6.61), найдем

$$2(\lambda + 2\mu)\theta_1 = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)}, \quad (6.65)$$

откуда

$$\varphi_1(z) = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varphi'(z) + ic; \quad (6.66)$$

здесь c — вещественная постоянная.

Подставляя последнюю формулу, а также формулу (6.61) в равенство (6.62), после интегрирования полученного результата будем иметь

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + icz,$$

где $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu$; $\psi(z)$ — аналитическая функция аргумента z .

Отбрасывая слагаемое icz , дающее только жесткое перемещение, получаем важную формулу комплексного представления перемещения при плоском деформированном состоянии тела

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (6.67)$$

Эта формула выражает также перемещение в случае обобщенного плоского напряженного состояния тонкой пластинки, если вместо κ взять величину κ^* , определяемую соотношением

$$\kappa^* = \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + \mu} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}.$$

Так как $\nu < 0,5$, то $\kappa > 1$ и $\kappa^* > 1$.

Теперь перейдем к выводу формул комплексного представления компонентов напряжений при помощи той же пары аналитических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$. С этой целью запишем формулы обобщенного закона Гука (6.3) в комплексной форме следующим образом:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\mu + \lambda)\theta_1,$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\mu(e_{22} - e_{11} + 2ie_{12}) = -2 \frac{\partial}{\partial z} [2\mu(u_1 - iu_2)]. \quad (6.68)$$

Учитывая (6.61) в первой формуле (6.68) и равенство (6.67) во второй формуле (6.68), получим существенно важные соотношения, дающие комплексное представление компонентов тензора напряжений при плоском деформированном состоянии среды

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\text{Re}[\varphi'(z)], \quad (6.69)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z)].$$

Формулы (6.67), (6.69) получили широкое распространение в пло-

ской теории упругости, они удобны еще потому, что свойства фигурирующих в них аналитических функций хорошо изучены.

Выразим теперь функцию напряжений $\Phi(x_1, x_2)$ через те же аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Из формул (6.24) имеем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta \Phi = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}}; \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Из этих формул, учитывая (6.69), получим

$$2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}; \quad 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}.$$

Интегрируя первое уравнение по z , а второе по \bar{z} , найдем

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{g_1(z)},$$

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + g_2(z).$$

Из сравнения этих равенств будем иметь

$$\varphi(z) - g_2(z) = \overline{\psi(z)} - \overline{g_1(z)}.$$

Отсюда

$$\overline{g_1(z)} = \overline{\psi(z)} + c_1, \quad g_2(z) = \varphi(z) + c_1,$$

и, следовательно,

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + c_1,$$

откуда

$$2\Phi = \overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \int \overline{\psi(z)} d\bar{z} + \chi(z) + c_1\bar{z}. \quad (6.70)$$

Учитывая, что вторые производные функции напряжений (6.24) являются вещественными величинами, сама функция должна быть вещественной с точностью до $cz + c_0$. Исходя из сказанного в выражении (6.70) необходимо положить

$$\chi(z) = \int \overline{\psi(z)} d\bar{z} + cz + c_0,$$

где c , c_0 — произвольные комплексные постоянные. Если принять $c_1 = 0$, $c = 0$, $c_0 = 0$, что не скажется на напряженном состоянии, то формула комплексного представления функции напряжения Эри окончательно примет вид

$$2\Phi = \overline{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad (6.71)$$

или

$$\Phi = \text{Re}(\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)). \quad (6.72)$$

Здесь символ Re означает, что нужно взять действительную часть выпясанного после него выражения.

Выведем в комплексной форме выражение для главного вектора сил, действующих со стороны положительной нормали на некоторую кривую AB (рис. 20), взятую внутри среды в плоскости деформации ox_1x_2 . Подставим в соотношении (6.12) формулы (6.24), выражающие компоненты тензора напряжений через производные функции Эри, и учтем, что

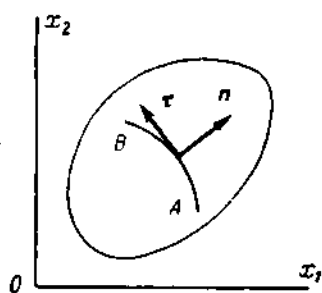


Рис. 20

$$n_1 = \frac{dx_2}{dl},$$

$$n_2 = -\frac{dx_1}{dl}.$$

Тогда получим

$$T_{n1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \quad (6.73)$$

$$T_{n2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{dl} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dl} =$$

$$= -\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right).$$

Используя эти формулы, составим выражение вида

$$T_{n1} + iT_{n2} = -i \frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right).$$

Обозначая через (V_1, V_2) компоненты названного главного вектора, из предыдущей формулы найдем

$$V_1 + iV_2 = \int_{AB} (T_{n1} + iT_{n2}) dl = -i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_A^B,$$

где символ $()_A^B$ обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, вдоль кривой AB .

В силу (6.71), а также соотношения $\chi'(z) = \psi(z)$ из предыдущей формулы получим комплексное представление главного вектора сил, действующих на кривую AB ,

$$V_1 + iV_2 = -i (\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)})_A^B. \quad (6.74)$$

Главный момент L_0 сил, приложенных к кривой AB со стороны положительной нормали, относительно начала координат равен

$$L_0 = \int_{AB} (x_1 T_{n2} - x_2 T_{n1}) dl.$$

Из последнего равенства, учитывая (6.73) и выполнив интегрирование по частям, получим

$$L_0 = - \left(x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_A^B + (\Phi)_A^B. \quad (6.75)$$

Очевидно, что

$$x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \operatorname{Re} \left[z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right].$$

С другой стороны, в силу формулы (6.71) имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \overline{\varphi(z)} + \overline{z} \varphi'(z) + i \psi'(z).$$

Это равенство вместе с (6.72) позволяет придать формуле (6.75) требуемое комплексное представление главного момента

$$L_0 = \operatorname{Re} (\chi(z) - z\psi(z) - \overline{z}z\varphi'(z))_A^B. \quad (6.76)$$

§ 45. Степень определенности введенных функций и ограничения, накладываемые на них

Нетрудно показать, что при заданном тензоре напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} функция $\varphi'(z)$ определяется с точностью до аддитивной мнимой постоянной ci , а функция $\psi'(z)$ находится точно.

Пусть $\varphi'(z)$, $\psi'(z)$ — пара аналитических функций, связанных с заданными компонентами σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} формулами (6.69); тогда

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \quad (6.77)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 [\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]. \quad (6.78)$$

Пусть также $\varphi_1'(z)$, $\psi_1'(z)$ — другая пара функций, связанных с теми же σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} соотношениями

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} \varphi_1'(z), \quad (6.79)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 [\overline{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)]. \quad (6.80)$$

После сравнения равенств (6.77) и (6.79) получаем

$$\varphi_1'(z) = \varphi'(z) + ci.$$

Из формул же (6.78) и (6.80) следует

$$\psi_1'(z) = \psi'(z).$$

Из двух последних равенств вытекает, что

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + ciz + \gamma, \quad (6.81)$$

$$\psi_1(z) = \psi(z) + \gamma', \quad (6.82)$$

где γ , γ' — вообще говоря, комплексные постоянные.

Имеет место и обратное утверждение. Если $\varphi(z)$ заменить функцией $\varphi(z) + ciz + \gamma$, а $\psi(z)$ — функцией $\psi(z) + \gamma'$, то напряженное состояние тела не изменится. Справедливость этого положения вытекает из непосредственной подстановки этих функций в формулы (6.77) и (6.78).

Легко видеть, что при заданных проекциях вектора перемещения нельзя произвольно задавать постоянные c , γ и γ' . Пусть $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — пара функций, связанных с заданными компонентами вектора перемещения формулой (6.67); тогда

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (6.83)$$

При замене $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ согласно (6.81) и (6.82) из предыдущей формулы получим

$$2\mu(u_1 + iu_2) = 2\mu(u_1 + iu_2) + (\kappa + 1)ciz + \kappa\gamma - \overline{\gamma'}.$$

Отсюда видно, что при этом проекции вектора перемещения не изменятся, если

$$c = 0, \quad \kappa\gamma - \overline{\gamma'} = 0. \quad (6.84)$$

Таким образом, в этом случае можно произвольно задавать только одну из постоянных γ , γ' . При заданных напряжениях подходящим выбором постоянных γ , c , γ' можно обеспечить соблюдение условий

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \text{Im } \varphi'(z_0) = 0; \quad \psi(z_0) = 0, \quad (6.85)$$

где z_0 — некоторая фиксированная точка области. Этими условиями вполне фиксируется пара аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

При заданных проекциях вектора перемещения можно путем выбора одной из постоянных γ или γ' положить

$$\varphi(z_0) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(z_0) = 0. \quad (6.86)$$

Одним из этих условий вполне фиксируется пара аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Если деформируемая среда занимает односвязную область, то функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ будут однозначными в этой области. Если замкнутая кривая AA рассматривается в односвязной области, где функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ — однозначны, то из (6.74), (6.76) следует

$$V_1 + iV_2 = 0, \quad L_0 = 0,$$

т. е. главный вектор и главный момент сил, приложенных к этой кривой, равны нулю. При многосвязной области, как, например, в случае пластинки с отверстиями, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут оказаться многозначными.

Перейдем к исследованию характера многозначности этих функций сперва для случая конечной и затем — бесконечной многосвязной области. Ясно, что физически компоненты тензора напряжений должны быть однозначными в области; такое же условие наложим и на вектор перемещения. Поэтому, согласно формулам (6.69),

вдоль произвольной замкнутой кривой AA , проведенной в многосвязной области, занятой телом, мы будем иметь

$$(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)})_A^A = 0, \quad (6.87)$$

$$(\overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z))_A^A = 0. \quad (6.88)$$

Из (6.87) ясно, что $\operatorname{Re} \varphi'(z)$ является однозначной гармонической функцией. Однако известно, что при этом аналитическая функция $\varphi'(z)$ может оказаться многозначной в неодносвязной области, ибо при обходе замкнутой кривой, расположенной в области и охватывающей какой-либо из внутренних контуров, мнимая часть $\varphi'(z)$, вообще говоря, изменяется на некоторую постоянную величину, а следовательно, сама функция $\varphi'(z)$ получает приращение, равное чисто мнимой постоянной. Ниже убедимся, что в данном случае такое приращение не имеет места. В силу ранее сказанного очевидно, что функция $\varphi''(z)$ будет голоморфной, т. е. однозначной аналитической функцией. Учитывая, что

$$(\varphi''(z))_A^A = (\overline{\varphi''(z)})_A^A = 0, \quad (6.89)$$

из (6.88) имеем

$$(\overline{\psi'(z)})_A^A = (\psi'(z))_A^A = 0, \quad (6.90)$$

т. е. $\psi'(z)$ является голоморфной функцией в многосвязной области.

Дифференцируя выражение (6.67) по координате x_1 , будем иметь

$$2\mu \frac{\partial(u_1 + iu_2)}{\partial x_1} = \kappa\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}.$$

Вследствие однозначности величин $\overline{z\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}$ (вторая формула (6.69)) и $\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 + iu_2)$ из последнего равенства имеем

$$(\kappa\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)})_A^A = 0.$$

Сравнение этого равенства с (6.87) дает

$$(\varphi'(z))_A^A = (\overline{\varphi'(z)})_A^A = 0, \quad (6.91)$$

т. е. $\varphi'(z)$ также есть голоморфная функция.

На основании (6.91) формулы (6.74), (6.76) для замкнутой кривой примут вид

$$\begin{aligned} V_1 + iV_2 &= -i(\varphi(z) + \overline{\psi(z)})_A^A, \\ L_0 &= \operatorname{Re}(\chi(z) - z\psi(z))_A^A. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Обозначим через z_k ($k=1, 2, \dots, m$) аффиксы произвольно выбранных точек внутри соответствующих контуров L_k , не имеющих общих точек и охватываемых внешним контуром L_0 . Функцию $\varphi(z)$ запи-

шем в виде

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z \varphi'(z) dz + c, \quad (6.93)$$

где z_0 — произвольно фиксированная точка в рассматриваемой многосвязной области. Интеграл

$$\int_{z_0}^z \varphi'(z) dz$$

является, как правило, неоднозначной функцией и в общем случае при обходе любого внутреннего контура L_k получает приращение $2\pi i A_k$, где A_k , вообще говоря, комплексная постоянная (множитель $2\pi i$ введен для удобства).

Легко заметить, что функция

$$\varphi^*(z) = \int_{z_0}^z \varphi'(z) dz - \sum_{k=1}^m A_k \ln(z - z_k) + c \quad (6.94)$$

в рассматриваемой области будет голоморфной. Действительно, при однократном обходе вокруг контура L_k функция $A_k \ln(z - z_k)$ получает то же приращение $2\pi i A_k$, между тем как остальные слагаемые суммы не получают приращений; так что функция $\varphi^*(z)$ возвращается к своему прежнему значению.

Учитывая формулу (6.94), из равенства (6.93) получаем

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^m A_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad (6.95)$$

где $\varphi^*(z)$ — голоморфная функция. Далее, исходя из формулы

$$\psi(z) = \int_{z_0}^z \psi'(z) dz + c'$$

и рассуждая аналогично предыдущему, будем иметь

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^m B_k \ln(z - z_0) + \psi^*(z), \quad (6.96)$$

где B_k — вообще говоря, комплексные постоянные и $\psi^*(z)$ — голоморфная функция.

Подставим в формулу (6.67) выражения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$; при однократном обходе по замкнутой кривой L_k' , расположенной в данной области и охватывающей только контур L_k , вектор перемещения $u_1 + iu_2$ получит приращение

$$(u_1 + iu_2)_{L_k'} = \frac{\pi}{\mu} i(\kappa A_k + \bar{B}_k).$$

Из этой формулы видно, что для однозначности перемещений должно быть выполнено условие

$$\alpha A_k + \bar{B}_k = 0. \quad (6.97)$$

Теперь определим коэффициенты A_k и \bar{B}_k ; для этого по первой формуле (6.74) вычислим главный вектор сил, приложенных с надлежащей стороны к той же кривой L_k' ; его значение дается формулой

$$V_{1k} + iV_{2k} = -2\pi(A_k - \bar{B}_k). \quad (6.98)$$

Отсюда следует, что главный вектор (V_{1k}, V_{2k}) не зависит от выбора кривой L_k' .

Решая совместно уравнения (6.97) и (6.98), получим

$$A_k = -\frac{V_{1k} + iV_{2k}}{2\pi(1 + \alpha)}, \quad B_k = \frac{\alpha(V_{1k} - iV_{2k})}{2\pi(1 + \alpha)}. \quad (6.99)$$

Внеся эти значения A_k и B_k в формулы (6.95) и (6.96), окончательно будем иметь

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1 + \alpha)} \sum_{k=1}^m (V_{1k} + iV_{2k}) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad (6.100)$$

$$\psi(z) = \frac{\alpha}{2\pi(1 + \alpha)} \sum_{k=1}^m (V_{1k} - iV_{2k}) \ln(z - z_k) + \psi^*(z). \quad (6.101)$$

Рассмотрим случай бесконечной многосвязной области, например, занимаемой неограниченной пластинкой, ослабленной конечным числом криволинейных отверстий; она может быть получена из ранее рассмотренной области при удалении внешнего контура L_0 на бесконечность. Для всякой точки, расположенной вне окружности L , охватывающей все границы отверстий, будем иметь

$$\ln(z - z_k) = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right).$$

Функция $\ln(1 - z_k z^{-1})$ будет голоморфной вне окружности L , включая бесконечно удаленную точку; поэтому из формул (6.100) и (6.101) найдем

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1 + \alpha)} \ln z + \varphi^{**}(z), \quad (6.102)$$

$$\psi(z) = \frac{\alpha(V_1 - iV_2)}{2\pi(1 + \alpha)} \ln z + \psi^{**}(z), \quad (6.103)$$

где (V_1, V_2) — главный вектор сил, приложенных на всех контурах области; $\varphi^{**}(z)$, $\psi^{**}(z)$ — функции, голоморфные всюду вне окружности L , за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки.

Подставляя выражения (6.102), (6.103) в (6.69) и налагая условие ограниченности компонентов тензора напряжений во всей рассматриваемой бесконечной области, приходим к соотношениям

$$\varphi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi_0(z), \quad (6.104)$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(V_1 - iV_2)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma'z + \psi_0(z), \quad (6.105)$$

где Γ , Γ' , вообще говоря, комплексные постоянные; $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные вне окружности L , включая бесконечно удаленную точку, так что в ее окрестности справедливы разложения

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots; \quad (6.106)$$

$$\psi_0(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

В силу формул (6.85), не меняя напряженного состояния среды, всегда можем принять

$$a_0 = b_0 = 0; \quad \text{Im } \Gamma = 0.$$

Величина $\text{Im } \Gamma$ имеет механический смысл. Чтобы показать это, поступим следующим образом. Продифференцируем соотношение (6.67) по x_1 и по ix_2 , а затем сложим полученные выражения.

Тогда

$$\begin{aligned} \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + i \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] &= \kappa \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} = \\ &= (\kappa - 1) \text{Re } \varphi'(z) + i(\kappa + 1) \text{Im } \varphi'(z). \end{aligned}$$

Отсюда значение вращения ω определится формулой

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}}{2i}.$$

Из этой формулы с учетом (6.104) при $z \rightarrow \infty$ находим

$$\omega_\infty = \frac{1+\kappa}{2\mu} \text{Im } \Gamma.$$

Отсюда

$$\text{Im } \Gamma = \frac{2\mu\omega_\infty}{1+\kappa}. \quad (6.106')$$

Пусть σ_1 , σ_2 — значения главных напряжений на бесконечности и α — угол между направлением σ_1 и осью ox_1 ; для них имеем

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

На основании этих формул

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha}.$$

Сопоставляя последние выражения с формулами (6.69) и учитывая (6.104), (6.105) и (6.106), при $z \rightarrow \infty$ получим

$$\operatorname{Re} \Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (6.107)$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha}.$$

Значит, в бесконечно удаленных частях плоскости имеет место распределение тензора напряжений, бесконечно мало отличающееся от равномерного.

Подставляя формулы (6.104) и (6.105) в (6.67), для больших $|z|$ будем иметь

$$2\mu(u_1 + iu_2) = -\frac{\kappa(V_1 + iV_2)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z\bar{z}) + (\kappa\Gamma - \bar{\Gamma}')z - \bar{\Gamma}'\bar{z} + \dots, \quad (6.108)$$

где многоточие обозначает слагаемые, остающиеся ограниченными при возрастающем $|z|$.

Таким образом, перемещение на бесконечности не ограничено; оно будет ограничено, если главный вектор (V_1, V_2) сил, действующих на все контуры области, и напряжения на бесконечности равны нулю, а также $\operatorname{Im} \Gamma = 0$, т. е. бесконечно удаленная часть плоскости не испытывает вращения.

Если напряжения на бесконечности равны нулю, а главный вектор внешних сил не равен нулю, то перемещение все же возрастает как $\ln(z\bar{z}) = 2\ln r$.

§ 46. Основные граничные задачи и приведение их к задачам теории функций комплексного переменного

Под основными граничными задачами плоской теории упругости, аналогично тому, как для трехмерного тела (§ 34), мы будем понимать следующие задачи:

Первая основная задача. Определение упругого равновесия, когда заданы внешние силы, приложенные к границе L области S .

Вторая основная задача. Определение упругого равновесия, когда заданы перемещения точек границы L .

Основная смешанная задача. Определение упругого равновесия, когда на одной части границы заданы приложенные к ней силы, а на другой — перемещения точек.

Если область S бесконечна, то в случае первой основной задачи должны быть заданы напряжения на бесконечности, т. е. $\text{Re } \Gamma$ и Γ' ; в случае же второй основной задачи и основной смешанной задачи — величины $V_1, V_2, \Gamma, \Gamma'$. Допуская, что решение указанных задач существует, его единственность для конечной области можно доказать аналогично доказательству, приведенному в случае соответствующих пространственных задач; на доказательстве теоремы единственности для бесконечной области мы не останавливаемся; при надобности читатель сможет ознакомиться с ним в монографии Н. И. Muskhelishvili «Некоторые основные задачи математической теории упругости».

Из формул (6.67), (6.77), (6.78) видно, что решение плоской задачи теории упругости сводится к отысканию пары функций комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитических в данной области S , при этом на ее границе L эти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны удовлетворять определенным условиям, отвечающим какой-либо из сформулированных задач.

Будем считать, что граница L области S не пересекает себя, замкнута и в каждой точке имеет касательную. Кроме того, примем, что компоненты вектора перемещения и тензора напряжений непрерывны вплоть до границы L .

1. Для первой основной задачи функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в случае конечной односвязной области S , ограниченной контуром L , должны на основании (6.74) удовлетворять краевому условию

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1 + if_2 + c. \quad (6.109)$$

Здесь $t = x_1 + ix_2$ — аффикс точки L и x_1 и x_2 — ее декартовы координаты, причем

$$f_1 + if_2 = i \int_0^l (T_{n1} + iT_{n2}) dl, \quad (6.110)$$

где T_{n1}, T_{n2} — заданные значения проекций внешних сил, действующих на L .

Выражение слева в (6.109) дает граничное значение функции $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$, когда z , оставаясь внутри области S , стремится к точке t контура L . Это граничное условие существует в силу принятого предположения о непрерывности компонентов тензора напряжений вплоть до контура L . (Следует отметить, что в формуле (6.74) дуга, обозначенная через AB , целиком лежит в области S . Однако в силу предположения о непрерывности компонентов тензора напряжений вплоть до контура, мы вполне законно применили эту формулу для случая, когда дуга AB принадлежит контуру L .)

2. Для второй основной задачи функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, в случае той же конечной односвязной области S , должны на основании

(6.67) удовлетворяют на контуре L соотношению

$$x\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu(u_1^* + iu_2^*), \quad (6.111)$$

где u_1^* и u_2^* — заданные значения перемещения точки L .

Здесь, так же как и выше, левая часть равенства (6.111) представляет собой граничное значение выражения

$$x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad \text{при } z \rightarrow t.$$

Это граничное значение существует, так как

$$x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(u_1 + iu_2),$$

а по условию, принятому нами выше, u_1 и u_2 непрерывны вплоть до контура L .

3. Для первой основной задачи в случае бесконечной области S , ограниченной замкнутым контуром L , регулярные в ней функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, на основании условия (6.109) с учетом формул (6.104) и (6.105), должны удовлетворять краевому соотношению

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_1^\circ + if_2^\circ + c. \quad (6.112)$$

При этом введено обозначение

$$\begin{aligned} f_1^\circ + if_2^\circ = f_1 + if_2 + \frac{V_1 + iV_2}{2\pi(1+\alpha)} (\ln t - \alpha \ln \bar{t}) + \\ + \frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1-\alpha)} \frac{t}{\bar{t}} - (\Gamma + \bar{\Gamma})t - \bar{\Gamma}'\bar{t}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Когда точка t описывает контур L в положительном направлении, выражения $f_1 + if_2$, $\ln t$ и $\ln \bar{t}$ получают соответственно приращения $i(V_1 + iV_2)$, $-2\pi i$ и $+2\pi i$, так что приращение выражения $f_1^\circ + if_2^\circ$, как легко убедиться, будет равно нулю. Поэтому функция $f_1^\circ + if_2^\circ$ является однозначной и непрерывной на L .

4. Для второй основной задачи в случае бесконечной же области S , ограниченной контуром L , для функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ на основании формулы (6.111) с учетом формул (6.104) и (6.105) будем иметь краевое условие

$$x\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 2\mu(u_1^\circ + iu_2^\circ), \quad (6.114)$$

где

$$\begin{aligned} 2\mu(u_1^\circ + iu_2^\circ) = 2\mu(u_1^* + iu_2^*) + \frac{\alpha(V_1 + iV_2)}{2\pi(1+\alpha)} \ln(\bar{t}) - \\ - \frac{V_1 - iV_2}{2\pi(1+\alpha)} \frac{t}{\bar{t}} - (\alpha\Gamma - \bar{\Gamma})t + \bar{\Gamma}'\bar{t}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Как видно из (6.115), правая часть равенства (6.114) представляет собой однозначную и непрерывную на L функцию, поскольку таковыми являются все содержащиеся в ней члены.

5. В основной смешанной задаче будем иметь условия вида (6.109) на тех частях границы, где заданы проекции вектора напряжения, и условия вида (6.111) на остальных ее частях, где заданы проекции вектора перемещения.

Выше мы убедились, что условие непрерывности компонентов тензора напряжений вплоть до границы L области S приводит к непрерывности вплоть до границы выражения

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)},$$

а условие непрерывности проекции вектора перемещения — к непрерывности вплоть до границы выражения

$$x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Очевидно, что выражение $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ может быть непрерывным вплоть до границы без обязательного соблюдения условия непрерывности (вплоть до границы L) компонентов тензора напряжений. Поэтому последнее условие может быть заменено более слабым условием непрерывности вплоть до границы указанного выражения. В дальнейшем будем считать, что для двух первых основных задач функции $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ непрерывно продолжимы на все точки границы L области S ; это накладывает сильное условие на искомые функции, но и значительно упрощает рассуждения при применении методов эффективного решения основных задач.

Условие непрерывности $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ в случае первой основной задачи исключает разрывные внешние нагрузки, например сосредоточенные силы; для смешанной задачи функции $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ в отдельности не будут непрерывными в точках стыка.

§ 47. Теорема Мориса Леви

Рассмотрим первую основную задачу для конечной односвязной области. Так как искомые аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ однозначны в данной области S и упругие постоянные λ и μ не входят в граничное условие (6.109), то решение этой задачи, даваемое функциями $\varphi(z)$, $\psi(z)$, не зависит от упругих постоянных λ и μ , иначе говоря, при заданных внешних силах на границе конечной односвязной области напряженное состояние в заполняющем ее теле не зависит от упругих свойств материала. Для конечной многосвязной области решение, определяемое функциями $\varphi(z)$, $\psi(z)$, зависит от материала среды. Чтобы решение, определяемое функциями $\varphi(z)$, $\psi(z)$, не зависело от упругой постоянной κ , главные векторы сил, приложенных к каждому из контуров L_k , как это следует из формул (6.100), (6.101), должны быть в отдельности равны нулю. Именно в этом случае напряженное состояние не зависит от упругих постоянных тела. Этот результат и составляет теорему Мориса Леви, лежащую в основе метода нахождения напряженного состояния в каждой точке изотропной однородной среды на мо-

делях из другого материала. В частности, эта теорема дает возможность заменить определение напряженного состояния в однородных и изотропных материалах определением напряженного состояния в прозрачных телах, оптически чувствительных к возникающему в них напряженному состоянию.

Основными методами, позволяющими решать задачи плоской теории упругости для достаточно широкого класса областей, являются метод конформного отображения и метод интеграла типа Коши. Совместное применение этих методов оказывается наиболее эффективным для односвязных областей.

Исследование многосвязных областей значительно сложнее и здесь рассматриваться не будет.

§ 48. Метод конформных отображений

Пусть конечная или бесконечная односвязная область в плоскости переменного z , ограниченная простым контуром L , взаимно однозначно отображается на единичный круг $|\zeta| < 1$ в плоскости ζ посредством аналитической функции

$$z = \omega(\zeta), \quad (6.116)$$

причем примем, что $\omega(0) = 0$ для конечной области и $\omega(0) = \infty$ для бесконечной области.

Для бесконечной области рассмотрим случай, когда перемещения u_1, u_2 на бесконечности ограничены; при этом величины $V_1, V_2, \Gamma, \Gamma'$ в условии (6.108) должны быть равны нулю; также будут нулевыми компоненты тензора напряжений на бесконечности. Искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут голоморфными (регулярными) в области S , включая и точку $z = \infty$.

Чтобы использовать конформное отображение (6.116) при решении основных задач и вообще задач плоской теории упругости, преобразуем граничные условия (6.109), (6.111) к переменному ζ .

Введя новые обозначения

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\zeta), \quad \psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi_1(\zeta), \quad (6.117)$$

получим, что функции $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ являются голоморфными в области единичного круга $|\zeta| < 1$; его границу обозначим через γ .

Введем полярные координаты (r, θ) на плоскости ζ ; их можно рассматривать как криволинейные координаты точки (x_1, x_2) плоскости z ; в силу конформности отображения координатные линии, соответствующие $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, ортогональны между собой. Возьмем на плоскости z точку (x_1, x_2) и проведем через эту точку

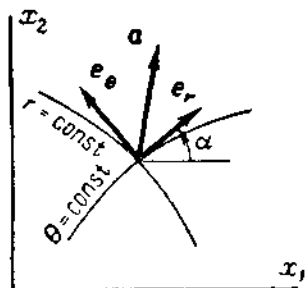


Рис. 21

координатные линии $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ (рис. 21). Обозначим проекции вектора \mathbf{a} , приложенного в точке z , в системе координат x_1, x_2 через a_1, a_2 , а в системе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ — через a_r, a_θ . Из рис. 21 очевидно

$$a_r + ia_\theta = (a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha) + i(-a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha)$$

или

$$a_r + ia_\theta = e^{-i\alpha} (a_1 + ia_2), \quad (6.118)$$

где α — угол, составляемый направлением \mathbf{e}_r с осью x_1 и отсчитываемый от этой оси в положительном направлении. Чтобы вычислить $e^{i\alpha}$ точку z переместим в направлении \mathbf{e}_r в положение $z + dz$; тогда соответствующая точка $\zeta = re^{i\theta}$ в плоскости ζ переместится в радиальном направлении в положение $\zeta + d\zeta$, поэтому будем иметь

$$dz = e^{i\alpha} |dz|, \quad d\zeta = e^{i\theta} |d\zeta|,$$

откуда с учетом (6.116)

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta) d\zeta}{|\omega'(\zeta)| |d\zeta|} = e^{i\theta} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}.$$

Из последнего соотношения найдем

$$e^{-i\alpha} = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}. \quad (6.119)$$

Подставляя (6.119) в (6.118), получим

$$a_r + ia_\theta = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} (a_1 + ia_2). \quad (6.120)$$

При этом проекции вектора перемещения на направления \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ определяются из равенства

$$u_r + iu_\theta = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} (u_1 + iu_2). \quad (6.121)$$

На основании формул (1.13) для плоского напряженного состояния и плоской деформации ($k, l, r, s = 1, 2$) между компонентами тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ в полярных координатах и компонентами тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ в прямоугольных декартовых координатах имеют место соотношения

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad (6.122)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) e^{2i\alpha},$$

справедливость которых проверяется непосредственно. Определив из (6.119)

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{r^2} \frac{(\omega'(\zeta))^2}{|\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2}{r^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}$$

и учитывая формулы (6.69), (6.116) и (6.117), из формул (6.122) найдем

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 [\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}], \quad (6.123)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = -\frac{2\zeta^2}{r^2\omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta)],$$

где $\Phi_1(\zeta) = \varphi'(z) = \Phi(z)$; $\Psi_1(\zeta) = \psi'(z) = \Psi(z)$.

В этом случае вместо граничных условий (6.109), (6.111) соответственно будем иметь

$$\varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} = f_1^*(\sigma) + i f_2^*(\sigma) + c, \quad (6.124)$$

$$i\varphi_1(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1(\sigma)} - \overline{\psi_1(\sigma)} = 2\mu [u_1^{**}(\sigma) + i u_2^{**}(\sigma)], \quad (6.125)$$

где

$$f_1^*(\sigma) = f_1(t), \quad f_2^*(\sigma) = f_2(t),$$

$$u_1^{**}(\sigma) = u_1^*(t), \quad u_2^{**}(\sigma) = u_2^*(t)$$

и σ — аффикс точки окружности γ .

Следует отметить, что ввиду взаимной однозначности конформного отображения необходимо $\omega'(\zeta) \neq 0$. Новые неизвестные аналитические функции $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$, отвечающие прежним $\varphi(z)$, и $\psi(z)$, можно искать в виде степенных рядов

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \psi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k,$$

где коэффициенты a_k и b_k , вообще говоря, комплексные величины.

Граничные условия (6.124) или (6.125) дают возможность построить для определения этих коэффициентов бесконечную систему линейных уравнений.

В тех случаях, когда отображающая функция $\omega(\zeta)$ является полиномом, задача сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений (этот результат получен Н. И. Мусхелишвили). Ограничившись здесь только приведенными общими замечаниями, перейдем к изложению теории интеграла типа Коши, теоремы Гарнака и задачи Римана.

§ 49. Интеграл типа Коши

Как известно, задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа решаются с помощью потенциалов простого и двойного слоев, а при решении краевых задач для других дифференциальных уравнений применяются различного рода обобщенные потенциалы. Краевые задачи теории аналитических функций комплексного переменного, к которым приводятся задачи плоской теории упругости,

решаются с помощью интеграла типа Коши и различных его обобщений. Исходя из этого, мы приведем без доказательств несколько результатов из теории интегралов Коши, типа Коши и предельных значений последнего.

1. Интеграл Коши. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в односвязной области S , ограниченной простой кусочно-гладкой замкнутой линией L , и непрерывная в $S+L$. Тогда значение функции $f(z)$ в любой точке $z \in S$ определится граничным значением этой функции на линии L в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z}. \quad (6.126)$$

Здесь интегрирование ведется по линии L в положительном направлении. Интеграл, входящий в правую часть (6.126), называется интегралом Коши. Если точка z находится вне L , то в силу теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = 0, \quad (6.127)$$

ибо подынтегральная функция $f(t)/(t-z)$ будет аналитической в S и непрерывной в $S+L$.

В случае многосвязной ограниченной области формула Коши имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (6.128)$$

где $L = L_0^+ + L_1^- + \dots + L_m^-$; каждый из L_ν является простой кусочно-гладкой замкнутой линией, причем все L_ν ($\nu = 1, 2, \dots, m$) находятся внутри L_0 . Если z — точка вне L , то в силу теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = 0. \quad (6.129)$$

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в односвязной бесконечной области S^- , ограниченной простой кусочно-гладкой замкнутой линией L , включая и бесконечно удаленную точку, т. е. $f(\infty) = c_0$, и непрерывная в S^-+L . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = -f(z) + f(\infty) \quad (6.130)$$

для точек z , лежащих вне L ;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = f(\infty) \quad (6.131)$$

для точек z , лежащих внутри L . Формула (6.130) называется формулой Коши для бесконечной области.

2. Интеграл типа Коши. Пусть $f(t)$ — заданная на простой кусочно-гладкой замкнутой линии L непрерывная функция, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} \quad (6.132)$$

выражает однозначную аналитическую функцию во всякой односвязной области, не содержащей точек линии L . Интеграл (6.132) называется интегралом типа Коши, функция $f(t)$ называется его плотностью, а $\frac{1}{t-z}$ — ядром, и для производной всех порядков интеграла типа Коши имеет место формула

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{(t-z)^{n+1}}. \quad (6.133)$$

Прежде чем перейти к изучению поведения интеграла типа Коши на линии интегрирования, рассмотрим вопрос о классах функций. Пусть $f(t)$ — некоторая функция, причем аргумент t и функция $f(t)$ могут быть как действительными, так и комплексными. Если $f(t)$ является функцией из класса непрерывных функций, то, по определению, приращение аргумента $|t_2 - t_1|$ и функции $|f(t_2) - f(t_1)|$ одновременно стремятся к нулю. При этом вопрос о порядке малости приращения функции по отношению к приращению аргумента не рассматривается. Однако многие свойства функции, например разложение ее в ряды и быстрота их сходимости, представление интегралами и т. п., тесно связаны с порядком модуля непрерывности функции, т. е. $\omega(\delta) = \sup |f(t_2) - f(t_1)|$, где t_1 и t_2 принадлежат кривой L и $|t_2 - t_1| < \delta$.

Мы остановимся на наиболее интересном классе функций, для которых модуль непрерывности представим в виде степенной функции от приращения аргумента, т. е.

$$|f(t_2) - f(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\alpha. \quad (6.134)$$

Здесь $f(t)$ — функция точек гладкой кривой L ; t_1, t_2 — любые две точки кривой L ; A и α — положительные числа. A называется постоянной Гельдера, а α — показателем Гельдера, $0 < \alpha \leq 1$. Условие (6.134) называется условием Гельдера (условие H), и функция $f(t)$, удовлетворяющая условию H , называется функцией из класса H . Очевидно, при $\alpha > 1$ из условия (6.134) вытекало бы, что всюду $f'(t) = 0$, а отсюда $f(t) \equiv \text{const}$. При $\alpha = 1$ условие Гельдера совпадает с условием Липшица. Если при достаточно близких друг к другу t_1 и t_2 условие H выполняется для некоторого показателя α_1 , то оно будет, очевидно, выполняться и для всякого показателя $\alpha < \alpha_1$. Таким образом, меньшему α соответствует более широкий класс функций. Наиболее узким классом будет класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

3. Главное значение интеграла типа Коши. Пусть $f(x)$ — заданная действительная функция, обращающаяся в бесконечность в

некоторой точке c конечного интервала интегрирования $a \leq c \leq b$. Если вырежем совершенно произвольную окрестность точки c , то функция $f(x)$ в $a \leq x \leq c - \varepsilon_1$ и $c + \varepsilon_1 \leq x \leq b$ будет ограничена, а в $c - \varepsilon_1 \leq x \leq c + \varepsilon_2$ — не ограничена. Точка c называется особой точкой.

Предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon_1}^c f(x) dx \right\}, \quad (6.135)$$

если он существует, называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от a до b . В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в промежутке $[a, b]$. Если же интеграл бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл расходится. Известно, что несобственный интеграл существует, если порядок бесконечности функции меньше единицы, т. е.

$$|f(x)| < \frac{M}{|x-c|^\beta} \quad (\beta < 1). \quad (6.136)$$

В случае обращения функции $f(x)$ в бесконечность порядка первого или выше несобственный интеграл не существует.

Если в криволинейном интеграле (6.132) вместо точки z подставим точку t_0 контура L , то получим сингулярный криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt. \quad (6.137)$$

Представим его в виде

$$\int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt = \int_L \frac{f(t) - f(t_0)}{t-t_0} dt + f(t_0) \int_L \frac{dt}{t-t_0}.$$

Так как в силу условия Гельдера

$$|f(t) - f(t_0)| < A |t - t_0|^\alpha$$

или

$$\left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right| < \frac{A}{|t - t_0|^\beta},$$

где $\beta = 1 - \alpha < 1$, то первый интеграл, на основании (6.136), существует как несобственный.

Во втором слагаемом подынтегральная функция допускает первообразную функцию $\ln(t-t_0)$, которая является многозначной. Примем, что $\ln(t-t_0)$ есть контурное значение аналитической функции $\ln(z-t_0)$, однозначной в плоскости, разрезанной вдоль некоторой кривой, соединяющей точки t_0 и ∞ . Условимся для определенности, что разрез произведен справа от линии L . Проведем из точки t_0 линии L , как из центра, окружность радиуса ε и пусть

t_1 и t_2 — точки пересечения этой окружности с линией L (рис. 22). Следуя (6.135), будем иметь

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{t_1} \frac{dt}{t-t_0} + \int_{t_2}^a \frac{dt}{t-t_0} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}$$

или

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} \right| + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\arg(t_1-t_0) - \arg(t_2-t_0)].$$

Так как $|t_2-t_0| = |t_1-t_0|$, то, следовательно, $\ln \left| \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} \right| = 0$.

Выражение в квадратных скобках будет равно углу между векто-

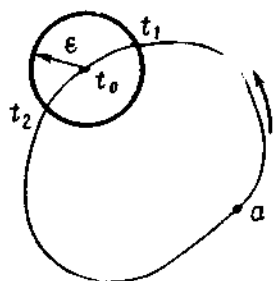


Рис. 22

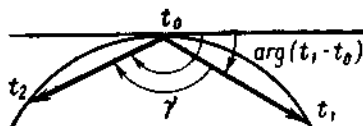


Рис. 23

рами t_0t_1 , t_0t_2 (рис. 23), причем в силу выбора разреза этот угол должен отсчитываться слева от кривой, поэтому

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} = i\pi,$$

следовательно,

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} = i\pi.$$

Таким образом, главное значение, по Коши, сингулярного интеграла (6.137) для функции $f(t)$, удовлетворяющей условию Гельдера, равно

$$\int_L \frac{f(t)}{t-t_0} dt = \int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dt + i\pi f(t_0). \quad (6.138)$$

4. Предельные значения интеграла типа Коши. Пусть L — простая гладкая замкнутая линия и на ней дана удовлетворяющая условию Гельдера функция $f(t)$; тогда интеграл типа Коши (6.132) имеет предельные значения

$$F^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-t_0} - \frac{1}{2} f(t_0) \quad (6.139)$$

при $z \rightarrow t_0$ извне L и

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{2} f(t_0) \quad (6.140)$$

при $z \rightarrow t_0$ изнутри L .

Здесь сингулярный интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-t_0}$ понимается в смысле главного значения по Коши и вычисляется по формуле (6.138). Складывая формулы (6.139) и (6.140), найдем значение интеграла типа Коши в точке, лежащей на линии L ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-t_0} = \frac{F^+(t_0) + F^-(t_0)}{2}. \quad (6.141)$$

Рассмотрим теперь интеграл типа Коши для случая, когда линия интегрирования представляет собой прямую, простирающуюся в бесконечность. Не нарушая общности, эту прямую совместим с действительной осью x_1 и обозначим ее через L (рис. 22). Верхнюю полуплоскость обозначим через S^+ , а нижнюю — S^- ; точки оси x_1 не включаются ни в S^+ , ни в S^- .

Пусть $f(t)$ — вообще комплексная функция действительного переменного t , удовлетворяющая условию H при всех конечных значениях t и стремящаяся к определенному пределу $f(\infty)$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, функция $f(t)$ для больших значений t удовлетворяет условию

$$|f(t) - f(\infty)| < \frac{B}{|t|^\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad B > 0. \quad (6.142)$$

Положим также, что функция $f(t)$ стремится к одному и тому же конечному пределу $f(\infty)$ при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$. Если $f(\infty) \neq 0$, то интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (6.143)$$

если считать точку z не лежащей на оси x_1 , будет расходящимся. Действительно, имеем

$$\int_{N'}^{N''} \frac{f(t) dt}{t-z} = \int_{N'}^{N''} \frac{f(t) - f(\infty)}{t-z} dt + f(\infty) \int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z}.$$

В первом интеграле правой части подынтегральная функция в силу (6.142) будет при больших значениях $|t|$ порядка $|t|^{-1-\lambda}$, поэтому упомянутый интеграл, на основании известного критерия сходимости интегралов с бесконечными пределами, будет сходящимся. Вычислим второй интеграл

$$\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z} = \ln(N'' - z) - \ln(N' - z) = \pm i\alpha + \ln \frac{r''}{r'},$$

где α — угол, заключенный между прямыми, соединяющими точку z с точками N' , N'' , а r' , r'' — расстояния точки z соответственно до N' и N'' (рис. 24). В последнем равенстве знак первого члена следует брать положительным, если z лежит в верхней полуплоскости, и отрицательным — если в нижней полуплоскости. Если N' и N'' независимо друг от друга стремятся соответственно к $-\infty$, $+\infty$, то α стремится к π , а $\ln \frac{r''}{r'}$ не стремится ни к какому пределу; отсюда следует, что данный интеграл не стремится ни к какому пределу. Теперь будем считать, что во всем процессе $ON' = -ON'' = ON$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln \frac{r''}{r'} = \ln 1 = 0$$

и будем иметь

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{f(t) dt}{t-z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) - f(\infty)}{t-z} \times \times dt \pm \pi f(\infty). \quad (6.144)$$

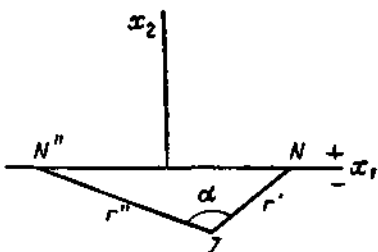


Рис. 24

Если $f(\infty) = 0$, то интеграл (6.143), как показывает ход исследования, при условии (6.142) будет сходящимся.

Таким образом, сингулярный интеграл

$$\int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{f(t) dt}{t-z},$$

по Коши, называется главным значением и определяется формулой (6.144). При указанных выше условиях, наложенных на функцию $f(t)$, функция $F(z)$, определяемая формулой

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (6.145)$$

будет, очевидно, голоморфной в S^+ и S^- . Для данного случая формулы Сохоцкого — Племеля для бесконечной прямой имеют вид

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{t-t_0}, \quad (6.146)$$

$$F^-(t_0) = -\frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{t-t_0}.$$

Здесь $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ — пределы $F(z)$ при $z \rightarrow t_0$ соответственно из верхней и нижней полуплоскостей.

§ 50. Теорема Гарнака

Пусть L — простая замкнутая линия. Обозначим через S^+ конечную часть плоскости, ограниченную линией L , а через S^- — бесконечную часть плоскости, расположенную вне этой кривой. При этом линию L мы не относим ни к S^+ , ни к S^- . Возьмем действительную непрерывную функцию точки линии L . Тогда, если

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = 0 \text{ для всех } z \in S^+,$$

то $f(t) = 0$ всюду на L . Если же

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} = 0 \text{ для всех } z \in S^-,$$

то $f(t) = \text{const}$ на L .

При применении теоремы Гарнака к разности двух действительных непрерывных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, заданных на L , для всех $z \in S^+$ на L будем иметь $f_1(t) = f_2(t)$ и для всех $z \in S^-$ на L будем иметь $f_1(t) = f_2(t) + c$.

Теорема Гарнака формулируется аналогично предыдущей, когда L — бесконечная прямая.

§ 51. Краевая задача Римана

Пусть L обозначает совокупность конечного числа n простых не пересекающихся дуг и замкнутых линий плоскости комплексного переменного z . Затем положим, что на каждой дуге и линии, входящих в L , выбрано определенное положительное направление. Разомкнутые дуги обозначим через $a_k b_k$, выбирая обозначения так, чтобы положительное направление вело от a_k к b_k . Функцию $F(z)$ будем называть кусочно-голоморфной во всей плоскости, если она голоморфна в плоскости комплексного переменного z , разрезанной вдоль L , непрерывно продолжима на все точки L слева и справа, за исключением концов a_k, b_k , и вблизи концов a_k, b_k имеет место неравенство

$$|F(z)| < \frac{B}{|z-c|^\lambda}, \quad 0 \leq \lambda < 1,$$

где c — аффикс любого из концов a_k, b_k ; λ и B — положительные постоянные.

Пусть на L заданы функции $G(t)$ и $f(t)$, удовлетворяющие условию H , причем $G(t) \neq 0$ на L . Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $F(z)$, граничные значения которой на L слева и справа, кроме концов a_k, b_k (понятие граничных значений слева

и справа неопределенно) удовлетворяют условию

$$F^+(t) - G(t)F^-(t) = f(t), \quad (6.147)$$

где $G(t)$ носит название коэффициента задачи Римана, а $f(t)$ — ее свободного члена. В случае, когда на L функция $f(t) = 0$, задача называется однородной.

При $G(t) = 1$ получим задачу Римана частного вида

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t) \text{ на } L. \quad (6.148)$$

В этом случае задача сводится к определению кусочно-голоморфной функции $F(z)$ по заданному скачку $f(t)$ на L . Решение этой задачи можно получить из интеграла типа Коши

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z}. \quad (6.149)$$

Аналогично сказанному функция $F_0(z)$ представляет собой кусочно-голоморфную функцию, исчезающую на бесконечности, и, кроме того, она удовлетворяет в окрестности любого конца c линии L условию

$$|F_0(z)| < \frac{B}{|z - c|^\lambda}, \quad (6.150)$$

а также

$$F_0^+(t) - F_0^-(t) = f(t), \quad (6.151)$$

кроме концов a_k, b_k . Следовательно, (6.149) является одним из решений задачи (6.148).

Рассмотрим разность $F(z) - F_0(z) = F_*(z)$, где $F(z)$ — искомое решение задачи (6.148). На основании (6.148) и (6.149) на L имеем

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = 0. \quad (6.152)$$

Согласно известной теореме значения функции $F_*(z)$ слева и справа от L аналитически продолжают друг друга. Поэтому, если приписать функции $F_*(z)$ надлежащие значения на L и учесть, что в силу условия (6.150) любой конец c является устранимой особенностью, мы можем считать $F_*(z)$ ограниченной голоморфной на всей плоскости. Согласно теореме Лиувилля будем иметь $F_*(z) = \text{const}$ на всей плоскости, следовательно, $F(z) = F_0(z) + K$ или

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z} + K, \quad (6.153)$$

где K — произвольная постоянная. Если принять, что решение $F(z)$ в бесконечно удаленной точке исчезает, тогда следует положить $K = 0$. Если допустить, что решение задачи (6.148) должно представлять собою кусочно-голоморфную функцию всюду, кроме бесконечно удаленной точки, где она может иметь полюс порядка

не выше m , тогда в силу обобщенной теоремы Лиувилля

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-z} dt + C_0 + C_1 z + \dots + C_{m-1} z^{m-1} + C_m z^m, \quad (6.154)$$

где C_0, C_1, \dots, C_m — произвольные постоянные.

Особый интерес представляет случай, когда $G(t) = g$, где g — заданная вообще комплексная, отличная от единицы постоянная. Тогда на L

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t), \quad (6.155)$$

кроме концов. При допущении полюса порядка не выше m на бесконечности общее решение задачи (6.155) будет иметь вид

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z)P(z), \quad (6.156)$$

где $P(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_{m-1} z^{m-1} + C_m z^m$;

C_0, C_1, \dots, C_m — произвольные постоянные; $X_0(z)$ — частное решение однородной задачи

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-1} (z - b_k)^{\nu-1}. \quad (6.157)$$

В свою очередь

$$\nu = \frac{\ln |g|}{2\pi i}, \quad 0 \leq \arg g < 2\pi. \quad (6.158)$$

Изложенные здесь результаты легко распространяются на случай, когда линия L представляет собой неограниченную прямую. В дальнейшем на основе этих результатов будут решены основные граничные задачи для полуплоскости.

§ 52. Приведение основных краевых задач к функциональным уравнениям

Используя имеющийся произвол относительно функции $\psi(z)$, мы можем положить $\psi(0) = 0$ для конечной области и $\psi(\infty) = 0$ для бесконечной области. Так как в случае конечной области точке $\zeta = 0$ соответствует точка $z = 0$, а для бесконечной области той же точке $\zeta = 0$ соответствует $z = \infty$, то мы можем в обоих случаях принять $\psi_1(0) = 0$.

Для бесконечной области будем считать, что напряжения равны нулю на бесконечности, главный вектор внешних сил, приложенных к границе, равен нулю и равно нулю вращение на бесконечности. Тогда функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ будут голоморфны внутри круга $|\zeta| < 1$.

Будем также считать, что функции $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ непрерывны вплоть до окружности γ рассматриваемого круга.

а) Запишем граничное условие (6.124) и ему сопряженное для первой основной задачи:

$$\varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} = f_1 + if_2, \quad (6.159)$$

$$\overline{\varphi_1(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) + \psi_1(\sigma) = f_1 - if_2.$$

Умножим обе части равенств (6.159) на ядро Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

где ζ — точка, лежащая внутри единичного круга $|\zeta| < 1$, и проинтегрируем их по окружности γ . Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi_1(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_1'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\psi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = A(\zeta), \quad (6.160)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\varphi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_1'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = B(\zeta);$$

здесь положено

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1 + if_2}{\sigma - \zeta} d\sigma; \quad B(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1 - if_2}{\sigma - \zeta} d\sigma.$$

Согласно теореме Гарнака соотношения (6.159) и (6.160) эквивалентны. Учитывая, что функции $\varphi_1(\sigma)$ и $\psi_1(\sigma)$ являются граничными значениями регулярных внутри круга $|\zeta| < 1$ функций $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$, а $\overline{\varphi_1(\sigma)}$, $\overline{\psi_1(\sigma)}$ — граничными значениями функций, регулярных вне круга $|\zeta| < 1$ и обращающихся в нуль на бесконечности, на основании свойств интеграла Коши окончательно найдем

$$\varphi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_1'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = A(\zeta). \quad (6.161)$$

$$\psi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_1'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = B(\zeta). \quad (6.162)$$

Первое уравнение, представляющее функциональное уравнение, совместно с условием $\varphi_1(0) = 0$ (в случае конечной области величину $\text{Im } \varphi_1'(0)$ можно фиксировать произвольно) вполне определяет $\varphi_1(\zeta)$, а затем из второго соотношения может быть найдена функция $\psi_1(\zeta)$.

б) Поступая как в случае первой основной задачи, для второй основной задачи получим

$$\begin{aligned} \kappa\varphi_1(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma &= A_1(\zeta), \\ \psi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \kappa\overline{\varphi_1(0)} &= B(\zeta), \end{aligned}$$

где

$$A_1(\zeta) = \frac{2\mu}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_1 + iu_2}{\sigma - \zeta} d\sigma; \quad B(\zeta) = -\frac{2\mu}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_1 - iu_2}{\sigma - \zeta} d\sigma.$$

Совершенно аналогично можно получить функциональное уравнение для смешанной краевой задачи, которое имеет несколько более сложный вид; мы на нем не останавливаемся.

Выписанные функциональные уравнения могут быть сведены путем несложного преобразования к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода; мы на этом также не останавливаемся.

§ 53. Равновесие кругового полого цилиндра

Рассмотрим равновесие кругового полого цилиндра, находящегося под действием: а) равномерно распределенных касательных сил, приложенных на границах; б) постоянного давления на границах. Оба случая относятся к первой краевой задаче.

В случае а) главные векторы приложенных на каждой из границ $r=r_1$ и $r=r_2$ сил в отдельности равны нулю, поэтому из формул (6.100) и (6.101) следует, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны внутри кольца (рис. 25). Эти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из граничных условий

$$\varphi(t_1) + t_1\overline{\varphi'(t_1)} + \overline{\psi(t_1)} = f(t_1) + c_1 \text{ на окружности } r=r_1, \quad (6.163)$$

$$\varphi(t_2) + t_2\overline{\varphi'(t_2)} + \overline{\psi(t_2)} = f(t_2) + c_2 \text{ на окружности } r=r_2,$$

где

$$f(t_1) = i \int_0^l (T_{11} + iT_{12}) dl = ir_1 T_1 \int_0^\alpha (-\sin \alpha + i \cos \alpha) d\alpha = iT_1(t_1 - r_1),$$

$$f(t_2) = iT_2(t_2 - r_2).$$

Вследствие равенства моментов соотношение между касательными силами T_1 и T_2 имеет вид

$$T_1 r_1^2 = T_2 r_2^2.$$

В круговом кольце функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ возьмем в виде

$$\varphi(z)=0, \quad \psi(z)=\frac{b}{z}. \quad (6.164)$$

Учитывая (6.164) в граничных условиях, найдем

$$\bar{b}_1 = iT_1 r_1^2; \quad c_1 = iT_1 r_1,$$

откуда

$$b = -iT_1 r_1^2.$$

Таким образом,

$$\varphi(z)=0, \quad \psi(z) = -iT_1 r_1^2 \frac{1}{z}.$$

Подставляя эти функции в формулы (6.123), получим

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2i\sigma_{r\theta} = -2iT_1 r_1^2 \frac{1}{z^2}.$$

Отсюда найдем, что

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{T_1 r_1^2}{r^2}.$$

В свою очередь, из формулы (6.121) с учетом (6.67) найдем

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = i \frac{T_1 r_1^2}{r},$$

откуда

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{T_1 r_1^2}{2\mu} \frac{1}{r}.$$

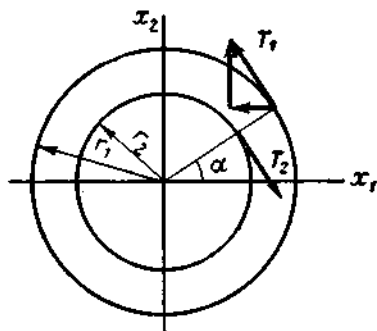


Рис. 25

Задача б) выше была решена методом функции напряжений, здесь эта же задача решается методом функции комплексного переменного. В задаче б) главные векторы и главные моменты сил, приложенных на каждой из границ $r=r_1$ и $r=r_2$, в отдельности равны нулю. На основании формул (6.100) и (6.101) и для этой задачи функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ являются внутри кольца голоморфными и определяются из условий (6.163), здесь $f(t_1)$, $f(t_2)$ принимают вид

$$f(t_1) = -ip_1 r_1 \int_0^\alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) d\alpha = -p_1(t_1 - r_1), \quad (6.165)$$

$$f(t_2) = -p_2(t_2 - r_2).$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ возьмем в виде

$$\varphi(z) = az; \quad \psi(z) = \frac{b}{z}, \quad (6.166)$$

где коэффициенты a и b предполагаются вещественными. Для них, подставляя (6.164) и (6.166) в граничные условия (6.163), получим систему двух линейных уравнений

$$2a + b \frac{1}{r_1^2} = -p_1; \quad 2a + b \frac{1}{r_2^2} = -p_2.$$

Корнями этой системы будут

$$a = -\frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{2(r_2^2 - r_1^2)}; \quad b = -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Тогда

$$\varphi(z) = -\frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{2(r_2^2 - r_1^2)} z; \quad \psi(z) = -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{z}.$$

Подставляя эти функции в формулы (6.123) и (6.121), для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, получим при $q=0$ соотношения (6.50) и (6.51).

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Пусть на окружности L отверстия радиуса R в бесконечной пластинке приложены заданные напряжения T_{nr} и $T_{n\theta}$. Пластинка на бесконечности находится в однородном напряженном состоянии. Определим напряженное состояние пластинки.

На основании формул (6.69) и (6.122) имеем

$$\sigma_r - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})} - [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] e^{2i\alpha}. \quad (6.167)$$

Подставим (6.104) и (6.105) в (6.167), тогда с учетом (6.106) на окружности L будем иметь

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k+2) \frac{a_k}{R^{k+1}} \left(\frac{R}{t}\right)^{k+1} + k \frac{\bar{a}_k}{R^{k+1}} \left(\frac{t}{R}\right)^{k+1} - k \frac{b_k}{R^{k+1}} \left(\frac{R}{t}\right)^{k-1} \right] - \\ & - \frac{V_1 + iV_2}{\pi(1+\nu)} \frac{R}{t} - \frac{V_1 - iV_2}{2\pi R} \frac{t}{R} + 2\operatorname{Re}\Gamma - \Gamma' \left(\frac{t}{R}\right)^2 = T_{nr} - iT_{n\theta}. \end{aligned} \quad (6.168)$$

Разложим $T_{nr} - iT_{n\theta}$ на окружности $r=R$ в комплексный ряд Фурье

$$T_{nr} - iT_{n\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \left(\frac{t}{R}\right)^k + \alpha_{-k} \left(\frac{R}{t}\right)^k \right] + \alpha_0, \quad (6.169)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T_{nr} - iT_{n\theta}) \left(\frac{t}{R}\right)^k d\theta, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6.170)$$

Подставим (6.169) в (6.168) и сравним в обеих частях полученного соотношения коэффициенты с одинаковыми степенями $\frac{t}{R}$, $\frac{R}{t}$.

Тогда

$$\frac{b_1}{R^2} + 2\operatorname{Re} \Gamma = \alpha_0, \quad 2 \frac{b_2}{R^3} - \frac{V_1 + iV_2}{\pi(1+\nu)R} = \alpha_{-1}; \quad -\frac{V_1 - iV_2}{2\pi R} = \alpha_1,$$

$$\frac{\bar{a}_1}{R^2} - \Gamma' = \alpha_2, \quad -k \frac{\bar{a}_k}{R^{k+1}} = \alpha_{k+1}, \quad (6.171)$$

$$-k(k+2) \frac{a_k}{R^{k+1}} + (k+2) \frac{b_{k+2}}{R^{k+3}} = \alpha_{-(k+1)} \quad (k=2, 3, \dots).$$

Определив из этих рекуррентных соотношений a_k и b_k , по формулам (6.123) найдем компоненты тензора напряжений. Рассмотрим случай, когда $T_{n\theta} = T_2 = \text{const}$, $T_{nr} = 0$ и на бесконечности напряженное состояние отсутствует, т. е. $\Gamma = \Gamma' = 0$, тогда из (6.170) и (6.171) с учетом того, что $V_1 = V_2 = 0$, будем иметь

$$\alpha_0 = -iT_2, \quad \alpha_k = 0 \quad (k = \mp 1, \mp 2, \dots),$$

$$a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad b_1 = -iT_2 R^2, \quad b_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Следовательно,

$$\varphi(z) \equiv 0, \quad \psi(z) = -iT_2 \frac{R^2}{z}$$

и

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{T_2 R^2}{r^2}.$$

Полученное решение совпадает с предыдущим решением, если принять

$$r_1 = \infty, \quad T_1 = 0, \quad r_2 = R.$$

Для случая $T_{n\theta} = 0$, $T_{nr} = -p$ и $\Gamma = \Gamma' = 0$ будем иметь

$$\alpha_0 = -p, \quad \alpha_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$a_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad b_1 = -pR^2, \quad b_k = 0, \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Следовательно,

$$\varphi(z) \equiv 0, \quad \psi(z) = -pR^2 \frac{1}{z}$$

и

$$\sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_r = -pR^2 \frac{1}{r^2}, \quad \sigma_\theta = pR^2 \frac{1}{r^2}.$$

Последние формулы совпадают с формулами (6.50), если в них принять $r_2 = \infty$, $p_2 = 0$, $p_1 = p$ и $r_1 = R$.

**§ 54. Бесконечная пластинка
с эллиптическим отверстием**

Методом конформного отображения решим задачу о ненагруженной эллиптической пластинке в бесконечной пластинке, подверженной действию равных главных нормальных напряжений p на бесконечности.

Поскольку величина $\text{Im } \Gamma$ не влияет на напряженное состояние, примем ее равной нулю; из формул (6.107) найдем

$$\Gamma = \frac{1}{2} p; \quad \Gamma' = 0. \quad (6.172)$$

С помощью формулы

$$z = \omega(\zeta) = A(\zeta^{-1} + m\zeta); \quad A > 0, \quad 0 \leq m < 1 \quad (6.173)$$

внешность эллипса с центром в точке $z=0$ и полуосями $A(1+m)$, $A(1-m)$ конформно отображается на единичный круг $|\zeta| < 1$.

Учитывая, что отверстие не нагружено, из соотношений (6.104) и (6.105) с учетом (6.172) найдем

$$\varphi(z) = \frac{p}{2} z + \varphi_0(z); \quad \psi(z) = \psi_0(z). \quad (6.174)$$

Отсюда в силу (6.117) и формулы (6.173) будем иметь отвечающие (6.174) равенства

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{Ap}{2} \zeta^{-1} + \frac{Am p}{2} \zeta + \varphi_0^*(\zeta), \quad \psi_1(\zeta) = \psi_*(\zeta),$$

или $\varphi_1(\zeta) = \frac{Ap}{2} \zeta^{-1} + \varphi_*(\zeta), \quad \psi_1(\zeta) = \psi_*(\zeta),$

$$\varphi_*(\zeta) = \frac{Am p}{2} \zeta + \varphi_0^*(\zeta),$$

где $\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$ — функции, голоморфные внутри круга.

Подставив функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$ в (6.124), убедимся, что функции $\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$ должны удовлетворять тому же уравнению, которому удовлетворяют функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$, если правую часть заменить

$$f(\sigma) = f_1^*(\sigma) + i f_2^*(\sigma) + \frac{Ap}{2} \left(-\sigma^{-1} + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma) \sigma^2} \right) + C.$$

Принимая во внимание, что для данной задачи $f_1^*(\sigma) = f_2^*(\sigma) = 0$ и можно принять $C=0$, после некоторых преобразований будем иметь

$$f(\sigma) = -\frac{Ap}{2} \left[\sigma^{-1} + \frac{\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2 - m} \right].$$

В функциональном уравнении (6.161) и в соотношении (6.162) вместо функций $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$, $f_1(\sigma) + i f_2(\sigma)$ (при условии $\varphi_*(0) = 0$) введем функции $\varphi_*(\zeta)$, $\psi_*(\zeta)$, $f(\sigma)$, т. е.

$$\varphi_*(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi'_*(\sigma)}}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma, \quad (6.175)$$

$$\psi_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-\zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)\varphi'_*(\sigma)}}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} d\sigma. \quad (6.176)$$

Подставляя (6.173) в уравнение (6.175), найдем

$$\begin{aligned} \varphi_*(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+m\sigma^2) \overline{\varphi'_*(\sigma)} d\sigma}{\sigma(m-\sigma^2)(\sigma-\zeta)} = \\ = -\frac{\rho A}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma-\zeta} \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m} \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (6.177)$$

Функции

$$\frac{1+m\sigma^2}{\sigma(m-\sigma^2)} \overline{\varphi'_*(\sigma)}, \quad \frac{1}{\sigma}$$

являются граничными значениями регулярных вне окружности γ функций

$$\frac{1+m\zeta^2}{\zeta(m-\zeta^2)} \overline{\varphi'_*\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad \frac{1}{\zeta},$$

которые обращаются в нуль на бесконечности.

Функция $\frac{\sigma(1+m\sigma^2)}{\sigma^2-m} \frac{1}{\sigma-\zeta}$ внутри γ имеет полюсы $\zeta = \pm \sqrt{m}$, $\zeta = \sigma$.

Учитывая все вышесказанное, а также то, что точка ζ лежит внутри круга $|\zeta| < 1$, из (6.177), на основании свойств интеграла Коши и теоремы о вычетах, получим

$$\varphi_*(\zeta) = -\frac{1}{2} \rho A m \zeta. \quad (6.178)$$

Тогда

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{A\rho}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - m\zeta \right). \quad (6.179)$$

Подставляя (6.174), (6.175) и производную функции (6.179) в (6.176), найдем

$$\begin{aligned} \psi_*(\zeta) = -\frac{\rho A}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\sigma + \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \\ - \frac{\rho A m}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma(\sigma^2+m)}{(1-m\sigma^2)(\sigma-\zeta)} d\sigma. \end{aligned} \quad (6.180)$$

Поскольку

$$\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)} = \frac{m}{\sigma} + \frac{(1+m^2)\sigma}{1-m\sigma^2},$$

и $m < 1$, в (6.180) функции σ , $\frac{(1+m^2)\sigma}{1-m\sigma^2}$, $\frac{\sigma(\sigma^2+m)}{1-m\sigma^2}$ являются граничными значениями функций

$$\zeta, \frac{(1+m^2)\zeta}{1-m\zeta^2}, \frac{\zeta(\zeta^2+m)}{1-m\zeta^2},$$

регулярных внутри $|\zeta| < 1$, а m/σ — граничным значением функции $\frac{m}{\zeta}$, регулярной вне $|\zeta| < 1$.

Следовательно, учитывая, что точка ζ лежит внутри круга $|\zeta| < 1$, на основании формулы Коши из (6.180) найдем

$$\psi_1(\zeta) = \psi_*(\zeta) = -Ap(1+m^2) \frac{\zeta}{1-m\zeta^2}. \quad (6.181)$$

Соотношения (6.179) и (6.181) нетрудно выразить через основную переменную z , подставив в них вместо ζ определению из (6.173) обратную функцию

$$\zeta = \frac{1}{2mA} (z - \sqrt{z^2 - 4mA^2})$$

(перед радикалом взят знак $(-)$, так как точка z , отвечающая $|\zeta| < 1$, находится вне эллипса); при этом компоненты вектора перемещения и тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} могут быть легко найдены из формул (6.121) и (6.123).

§ 55. Решение граничных задач для полуплоскости

Приводим некоторые обозначения. Пусть $\Phi(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ является некоторой функцией комплексного переменного z , определенной в некоторой области плоскости z . Тогда через $\overline{\Phi}(z)$ будем обозначать функцию, принимающую сопряженные с $\Phi(z)$ значения в точках \bar{z} , сопряженных с z ,

$$\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})} \quad (6.182)$$

или

$$\overline{\Phi}(z) = u_1(x_1, x_2) + iv_1(x_1, x_2),$$

где

$$u_1(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2); \quad v_1(x_1, x_2) = -v(x_1, -x_2). \quad (6.183)$$

Легко заметить, что если $\Phi(z)$ голоморфна в некоторой области S , то $\overline{\Phi}(z)$ голоморфна в области \bar{S} , представляющей собой область, симметричную области S относительно действительной оси. В самом деле, положим, что $\Phi(z)$ голоморфна в S ; тогда в области \bar{S} имеет место

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (C-R)$$

Учитывая в условиях (C—R) соотношения (6.183), в области S^- будем иметь

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_1}.$$

Последние соотношения показывают, что функции $u_1(x_1, x_2)$ и $v_1(x_1, x_2)$ удовлетворяют условиям (C—R) в области \bar{S} .

Пусть тело занимает нижнюю полуплоскость, ограниченную прямой, которую примем за ось абсцисс. Обозначим нижнюю полуплоскость $\text{Im}(z) \leq 0$, остающуюся справа, если двигаться по оси ox_1 в положительном направлении, через S^- , а верхнюю полуплоскость — через S^+ .

Пусть функция $\Phi(z)$ определена в S^- , тогда функция $\overline{\Phi}(z)$ будет определена в области S^+ , и пусть существует граничное значение $\Phi^-(t)$, где t — аффикс некоторой точки оси ox_1 ; тогда из формулы (6.182) непосредственно следует, что существует и граничное значение $\overline{\Phi}^+(t)$, причем

$$\overline{\Phi^-(t)} = \overline{\Phi^+}(t)$$

или

$$\overline{\Phi^-}(t) = \overline{\Phi^+}(t). \quad (6.184)$$

Пусть в области S^- определены комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и имеются ненагруженные отрезки границы ox_1 .

Приведем формулы (6.77), (6.78) и (6.83) к удобному для применения виду; с этой целью построим аналитическое продолжение функции $\Phi(z)$ в S^+ через ненагруженные отрезки границы. Из формул (6.77) и (6.78) в области S^- имеем

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad (6.185)$$

где

$$\varphi'(z) = \Phi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z).$$

Возьмем функцию

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi}(z), \quad (6.186)$$

определяемую этим равенством в области S^+ .

На основании вышесказанного ясно, что функция $\Phi(z)$, определяемая равенством (6.186), будет голоморфной в области S^+ .

Напишем в (6.186) \bar{z} вместо z , считая, что z находится в S^- , и перейдем к сопряженным значениям, тогда

$$\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z) - z\Phi'(z) - \Psi(z),$$

отсюда

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi}(z) - z\Phi'(z) \quad (6.187)$$

формула (6.187) определяет функцию $\Psi(z)$ в области S^- через функцию $\Phi(z)$, продолженную и на верхнюю полуплоскость.

На границе $\text{Im}=0$ выражение (6.186) (при $z \rightarrow t$ со стороны обла-

сти S^+) примет вид

$$\Phi^+(t) = -\bar{\Phi}^+(t) - t\bar{\Phi}'^+(t) - \bar{\Psi}^+(t). \quad (6.188)$$

Выражение (6.185) на границе $\text{Im } z=0$ имеет вид

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12}|_{x_2=0} = \Phi^-(t) + \bar{\Phi}^-(t) + t\bar{\Phi}'^-(t) + \bar{\Psi}^-(t), \quad (6.189)$$

поэтому на тех участках границы, где $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, найдем

$$\Phi^-(t) = -\bar{\Phi}^-(t) - t\bar{\Phi}'^-(t) - \bar{\Psi}^-(t). \quad (6.190)$$

Сравнивая (6.188) и (6.190) и учитывая (6.184) [в силу определения $\bar{\Phi}^+(t)$ и $\bar{\Psi}^+(t)$], получим

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t). \quad (6.191)$$

Следовательно, функция $\Phi(z)$, определенная с помощью (6.186) в верхней полуплоскости, является аналитическим продолжением через ненагруженные участки границы голоморфной в нижней полуплоскости функции $\Phi(z)$; иными словами, функция $\Phi(z)$, определяемая формулой (6.186), представляет кусочно-голоморфную функцию по всей плоскости, разрезанной вдоль нагруженных участков границы $\text{Im } z=0$.

Из равенства, сопряженного с выражением (6.189), на ненагруженных участках следует продолжимость через них функции $\Psi(z)$. Представим соотношение (6.185) в иной форме. Для этого подставим (6.187) в (6.78) и (6.185), получим удобные для применения формулы

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) - \bar{\Phi}(z)], \quad (6.192)$$

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}). \quad (6.193)$$

Преобразуем теперь формулу (6.83). С этой целью продолжим голоморфную в области S^- функцию $\varphi(z)$ в область S^+ так, чтобы в этой области

$$\varphi'(z) = \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ дается правой частью (6.186). (Как выяснено, она при наличии ненагруженных участков аналитически продолжает сквозь них искомую функцию $\Phi(z)$, регулярную в нижней полуплоскости.) Учитывая формулу (6.186), последнему соотношению придадим вид

$$\varphi'(z) = -[\bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z)] = -[z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z)];$$

при этом в области S^+ будем иметь

$$\varphi(z) = -z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z) + c_1.$$

Из этого уравнения вытекает, что в области S^- справедливо соотношение

$$\psi(z) = -\bar{\varphi}(z) - z\varphi'(z) + \bar{c}_1.$$

При помощи его формула (6.83) примет вид

$$2\mu(u_1 + iu_2) = x\varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + c. \quad (6.194)$$

В дальнейшем будем предполагать, что кроме, быть может, конечного числа точек t_k , функция $\Phi(z)$ на контуре $\text{Im } z = 0$ непрерывна слева и справа и, кроме того,

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} x_2 \Phi'(z) = 0 \quad (6.195)$$

для любой точки контура, тогда как вблизи точек t_k справедливо неравенство

$$|\varphi'(z)| = |\Phi(z)| < \frac{A}{|z - t_k|^\lambda}, \quad 0 \leq \lambda < 1. \quad (6.196)$$

Эти условия обеспечивают непрерывную продолжимость тензора напряжений и вектора перемещения на все точки границы, кроме, быть может, точек t_k .

Будем считать, что при больших $|z|$ функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ могут быть представлены следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi(z) = \frac{\gamma'}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad (6.197)$$

где γ, γ' — постоянны; символ $o\left(\frac{1}{z}\right)$ обозначает величину такую, что $\left|o\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{\epsilon}{|z|}$ (ϵ зависит от $|z|$ и стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$). К этим условиям присоединим еще условия, что при больших $|z|$ имеют место выражения:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \gamma \ln z + 0(1) + \text{const}, \\ \psi(z) &= \gamma' \ln z + 0(1) + \text{const}, \end{aligned} \quad (6.198)$$

где

$$|0(1)| < \epsilon \quad (\epsilon \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty).$$

При этих соотношениях компоненты тензора напряжений на бесконечности равны нулю.

Пусть (V_1', V_2') представляет собой главный вектор сил, приложенных к отрезку AB границы $\text{Im } z = 0$ со стороны области S^- . Подставляя (6.198) в формулу (6.74), при удалении конца A влево, а конца B вправо независимо друг от друга, найдем

$$V_1' + iV_2' = i(\gamma + \bar{\gamma}') \ln \frac{r''}{r'} + \pi(\bar{\gamma}' - \gamma) + i\epsilon.$$

Здесь r', r'' — расстояния точек A и B от начала координат и ϵ — величина, стремящаяся к нулю при r' и $r'' \rightarrow \infty$. Для того чтобы главный вектор (V_1', V_2') оставался конечным, когда r' и $r'' \rightarrow \infty$

независимо друг от друга, следует принять

$$\gamma + \bar{\gamma}' = 0, \quad (6.199)$$

тогда

$$V_1' + iV_2' = \pi(\bar{\gamma}' - \gamma).$$

С другой стороны, должно иметь место соотношение

$$V_1' + iV_2' = V_1 + iV_2,$$

где (V_1, V_2) — главный вектор внешних сил, приложенных ко всей границе (он будет всегда конечен, если силы приложены на конечном участке границы); следовательно,

$$V_1 + iV_2 = \pi(\bar{\gamma}' - \gamma). \quad (6.200)$$

Из двух линейных уравнений (6.199) и (6.200) имеем

$$\gamma = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi}, \quad \bar{\gamma}' = \frac{V_1 - iV_2}{2\pi}. \quad (6.201)$$

1. Решение первой основной задачи. В этой задаче на контуре L внешние силы задаются следующим образом:

$$T_{n_2} = \sigma_{22} = -p(t); \quad T_{n_1} = \sigma_{12} = \tau(t),$$

где $p(t)$ и $\tau(t)$ — соответственно давление и касательная сила, удовлетворяющие условию Гельдера на контуре $\text{Im } z = 0$, включая окрестность бесконечно удаленной точки. Кроме того, $p(\infty) = \tau(\infty) = 0$. Согласно (6.193) и (6.195) граничное условие примет вид

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = p(t) + i\tau(t). \quad (6.202)$$

Из (6.202) видно, что решение первой основной задачи сведено к определению кусочно-голоморфной функции по заданному скачку. Решение этой задачи, исчезающее на бесконечности, согласно (6.149) будет

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(t) + i\tau(t)}{t-z} dt. \quad (6.203)$$

Зная функцию $\Phi(z)$, можно по формулам (6.192), (6.193) и (6.194) определить компоненты тензора напряжений $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ и вектора перемещения (u_1, u_2) .

2. Решение второй основной задачи. Здесь значения компонентов вектора перемещения на контуре L задаются в виде

$$u_1 = g_1(t), \quad u_2 = g_2(t), \quad (6.204)$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — заданные функции, имеющие производные, удовлетворяющие условию Гельдера, включая и бесконечно удаленную точку, и $u_1(\infty) = u_2(\infty) = 0$.

Продифференцируем (6.194) по t ; при этом граничное условие (6.204) примет вид

$$\Phi^+(t) + \kappa \Phi^-(t) = 2\mu [(g_1'(t) + i g_2'(t))]. \quad (6.205)$$

Введем кусочно-голоморфную функцию, обозначаемую через $\Omega(z)$, так, чтобы

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \Phi(z) \text{ в области } S^-, \\ \Omega(z) &= -\frac{1}{\kappa} \Phi(z) \text{ в области } S^+. \end{aligned} \quad (6.206)$$

Тогда граничное условие (6.205) примет вид

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = -\frac{2\mu}{\kappa} (g_1'(t) + i g_2'(t)).$$

Из этого уравнения видно, что вторая основная задача также сведена к определению кусочно-голоморфной функции по заданному скачку; ее решение имеет вид

$$\Omega(z) = -\frac{\mu}{\kappa \pi i} \int_L \frac{g_1'(t) + i g_2'(t)}{t - z} dt. \quad (6.207)$$

Таким образом, из (6.206) окончательно имеем

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Omega(z) & \text{в области } S^- \\ -\kappa \Omega(z) & \text{в области } S^+. \end{cases}$$

3. Решение основной смешанной задачи. Пусть на совокупности конечного числа n отрезков $a_k b_k$ границы $\text{Im } z = 0$ заданы проекции вектора перемещения $g_1(t)$ и $g_2(t)$, а на ее остальной части — проекции внешней силы $p(t)$ и $\tau(t)$. Совокупность отрезков $a_k b_k$ обозначим через L' , остальную часть границы — через L'' . Поскольку нам уже известно решение первой основной задачи, то влияние заданных на L'' сил удобнее учесть отдельно; в соответствии с этим мы всегда можем предполагать, что на L'' составляющие $p(t) = \tau(t) = 0$.

Таким образом, крайевые условия для рассматриваемой несколько видоизмененной смешанной задачи принимают вид

$$u_1 + i u_2 = g(t) + c(t) \text{ на } L', \quad (6.208)$$

$$p(t) = 0, \quad \tau(t) = 0 \text{ на } L'', \quad (6.209)$$

где $g(t) = g_1(t) + i g_2(t)$ — заданная на L' функция. Упомянутая задача связана с расчетом штампов.

Если в условии (6.208) величина $c(t)$ является постоянной на L' , тогда, не нарушая общности, ее можно положить равной нулю, ибо в этом случае значение c влияет только на жесткое поступательное перемещение всей системы. Здесь предполагается, что дополнительно задан главный вектор (V_1, V_2) сил, приложенных к L' .

Основная смешанная задача в такой постановке соответствует случаю n жестко соединенных штампов.

В случае, когда $c(t) = c_k$ (где c_k — какие-то постоянные), можно на $a_k b_k$, не нарушая общности, произвольно зафиксировать только одну из них, остальные же постоянные c_k подлежат определению. В этом случае, в отличие от предыдущего, предполагается, что заданы главные векторы (V_{1k}, V_{2k}) сил, приложенных к каждому отрезку $a_k b_k$ в отдельности. Такая формулировка задачи соответствует действию n штампов, независимо совершающих вертикальные перемещения. Когда $n=1$, названные задачи совпадают. На основании (6.208) для обеих задач граничное условие (6.205) на L' примет вид

$$\Phi^+(t) + \chi \Phi^-(t) = 2\mu g'(t). \quad (6.210)$$

В силу (6.193), с учетом (6.195), граничное условие (6.209) на L'' эквивалентно соотношению $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, так что функция $\Phi(z)$ является голоморфной во всей плоскости, разрезанной вдоль L' . Следовательно, решение основной смешанной задачи сведено к неоднородной задаче Римана.

Положим, что $g'(t)$ на L' удовлетворяет условию Гельдера. Тогда решение задачи (6.210), не исчезающее на бесконечности, может быть представлено в виде

$$\Phi(z) = \frac{\mu X_0(z)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) P(z), \quad (6.211)$$

где $X_0(z)$ — частное решение однородной задачи, соответствующей (6.210), голоморфное во всей плоскости, разрезанной вдоль L' ; оно равно

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\beta} (z - b_k)^{\beta-1},$$

причем постоянная

$$\beta = \frac{\ln(-\chi)}{2\pi i} = \frac{1}{2} - i \frac{\ln \chi}{2\pi}.$$

Кроме того $P(z)$ — некоторый полином.

В силу того, что голоморфная функция $\Phi(z)$ должна исчезать на бесконечности, полином $P(z)$ не должен иметь степень выше $n-1$; поэтому

$$P(z) = P_{n-1}(z) = C_0 z^{n-1} + C_1 z^{n-2} + \dots + C_{n-1}.$$

Коэффициенты C_0, C_1, \dots, C_{n-1} полинома $P_{n-1}(z)$ определяются из дополнительных условий задачи. В случае, когда $c(t) = c_k$ на отрезке $a_k b_k$, в качестве таких условий принимается равенство главного вектора (V_{1k}, V_{2k}) сил, приложенных к каждому отрезку $a_k b_k$, заданным величинам.

Согласно (6.202) имеем

$$p(t_0) + i\tau(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0),$$

где t_0 — аффикс точки L' . В этом соотношении, учитывая (6.210), будем иметь на L'

$$p(t_0) + i\tau(t_0) = \frac{x+1}{x} \Phi^+(t_0) - \frac{2\mu}{x} g'(t_0). \quad (6.212)$$

Применяя к правой части (6.211) формулу Сохоцкого — Племеля, найдем

$$\Phi^+(t_0) = \mu g'(t_0) + \frac{\mu X_0^+(t_0)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t-t_0)} + X_0^+(t_0) P_{n-1}(t_0). \quad (6.213)$$

Внеся отсюда значение $\Phi^+(t_0)$ в условие (6.212), получим

$$p(t_0) + i\tau(t_0) = \frac{\mu(x-1)}{x} g'(t_0) + \frac{(x+1)\mu X_0^+(t_0)}{x\pi i} \times \\ \times \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t-t_0)} + \frac{x+1}{x} X^+(t_0) P_{n-1}(t_0). \quad (6.214)$$

Подставляя в очевидное соотношение

$$\int_{a_k b_k} [p(t_0) + i\tau(t_0)] dt_0 = -V_{2k} + iV_{1k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

значение подынтегральной функции из предшествующего равенства, придем к системе n линейных уравнений для постоянных C_{k-1} ($k=1, 2, \dots, n$), ее однозначная разрешимость следует из единственности решения исходной смешанной задачи.

Для решения задачи, когда $c(t) = \text{const}$ на L' ($c_1 = c_2 = \dots = c_n$), вычислим значения $2\mu(u_1' + iu_2')$ на ненагруженной части L'' границы L . Учитывая, что в этом случае функция $\Phi(z)$ продолжима на ненагруженные отрезки границы L'' , согласно формулам (6.194) и (6.211) получим

$$2\mu(u_1' + iu_2') = (x+1) \Phi(t_1) = \\ = \frac{(x+1)\mu X_0^+(t_1)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X_0^+(t)(t-t_1)} + (x+1) X_0^+(t_1) P_{n-1}(t_1). \quad (6.215)$$

Здесь t_1 — аффикс точки L'' : $u_1' = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$; $u_2' = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$.

С другой стороны, на ненагруженных участках $b_k a_{k+1}$ имеем очевидное соотношение

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} (u_1' + iu_2') dt_1 = g(a_{k+1}) - g(b_k) \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

Учитывая в этом соотношении формулу (6.215), приходим к системе $n-1$ линейных уравнений для C_k ($k=0, 1, \dots, n-1$).

Дополнительное уравнение получим, используя заданную величину главного вектора (V_1, V_2) сил, приложенных к L' . На основании первых формул (6.197) и (6.201) имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z\Phi(z) = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi},$$

с другой стороны, исходя из формулы (6.211), находим $\lim_{z \rightarrow \infty} z\Phi(z) = C_0$. Следовательно,

$$C_0 = -\frac{V_1 + iV_2}{2\pi}.$$

Таким образом, остается лишь определить C_1, C_2, \dots, C_{n-1} из упомянутой системы $n-1$ уравнений, однозначная разрешимость которой вытекает из единственности решения исходной задачи.

В случае, когда $g'(t) = 0$, что соответствует прямолинейному основанию штампа, параллельному границе $\text{Im } z = 0$, формулы (6.211), (6.213), (6.214) и (6.215), в силу обращения в них интегрального члена в нуль, значительно упрощаются.

§ 56. Некоторые сведения об интегральном преобразовании Фурье

Интегральное преобразование Фурье представляет собой эффективный метод решения задач теории упругости, когда тело является бесконечным или полубесконечным. Приведем без доказательства несколько результатов, относящихся к интегральным преобразованиям Фурье.

1. Преобразованием Фурье некоторой функции $f(x)$, заданной в промежутке $(-\infty, \infty)$, называется интеграл

$$\bar{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad (6.216)$$

где ξ — произвольное вещественное число.

Для существования преобразования Фурье $\bar{f}(\xi)$ достаточно предположить, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$.

Для функции $f(x)$, удовлетворяющей также условиям Дирихле* в любом конечном промежутке, в точках непрерывности справедлива формула обращения Фурье

* Если функция $f(x)$ в интервале $(0, A)$ имеет не более, чем конечное число конечных разрывов непрерывности и конечное число максимумов и минимумов, то говорят, что эта функция удовлетворяет условиям Дирихле в данном интервале.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (6.217)$$

выражающая функцию $f(x)$ через ее интегральное преобразование Фурье. В точках разрыва правая часть равенства (6.217) дает величину

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)].$$

Для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле в любом открытом промежутке $0 < x < A$ и абсолютно интегрируемых в интервале $(0, \infty)$, имеет место

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(\xi) \sin(\xi x) d\xi; \quad f_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\xi x) dx; \quad (6.218)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(\xi) \cos(\xi x) dx; \quad f_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx.$$

Функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x-\xi) d\xi$$

называется сверткой функций f и g в интервале $(-\infty, \infty)$.

Теорема. Если $\bar{f}(\xi)$ и $\bar{g}(\xi)$ являются преобразованиями Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е.

$$\bar{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx; \quad \bar{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\xi x} dx,$$

то преобразование Фурье произведения $\bar{f}(\xi)\bar{g}(\xi)$ равно свертке функций $f(x)$ и $g(x)$. Действительно, полагая, что изменение порядка интегрирования справедливо, можем написать

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x-\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) e^{-i t(x-\xi)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) e^{-i t x} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i t \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) \bar{g}(t) e^{-i t x} dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) \bar{g}(t) e^{-i t x} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x-\xi) d\xi. \quad (6.219)$$

Теорема. Преобразование Фурье функции $d^r f/dx^r$ равно преобразованию Фурье функции $f(x)$, умноженному на $(-i\xi)^r$, если $d^k f/dx^k \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ ($k=0, \dots, r-1$), т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f(x)}{dx^r} e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^r \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx. \quad (6.220)$$

Согласно определению преобразования Фурье

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f(x)}{dx^r} e^{i\xi x} dx = \frac{d^r \bar{f}(\xi)}{d\xi^r}. \quad (6.221)$$

Интегрируя левую часть (6.221) по частям, найдем

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^{r-1} f(x)}{dx^{r-1}} e^{i\xi x} \right]_{-\infty}^{\infty} - i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1} f(x)}{dx^{r-1}} e^{i\xi x} dx = \frac{d^r \bar{f}(\xi)}{d\xi^r}.$$

Так как $d^{r-1} f(x)/dx^{r-1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то будем иметь

$$-i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-1} f(x)}{dx^{r-1}} e^{i\xi x} dx = \frac{d^r \bar{f}(\xi)}{d\xi^r}. \quad (6.222)$$

Интегрируя теперь левую часть (6.222) по частям, имеем

$$(-i\xi)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r-2} f(x)}{dx^{r-2}} e^{i\xi x} dx = \frac{d^r \bar{f}(\xi)}{d\xi^r}.$$

Повторяя это действие, при условии, что $d^n f(x)/dx^n \rightarrow 0$ ($n=1, 2, \dots, r-1$) при $x \rightarrow \pm\infty$, получаем окончательно

$$(-i\xi)^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx = \frac{d^r \bar{f}(\xi)}{d\xi^r}.$$

С учетом (6.221) последнее равенство примет вид (6.220).

2. Кратные преобразования Фурье. Теорию преобразования Фурье функций одной переменной можно распространить на функции нескольких переменных. Предположим, например, что $f(x_1, x_2)$ — функция двух независимых переменных x_1 и x_2 ; тогда функция f , рассматриваемая как функция от x_1 , имеет преобразование Фурье

$$\bar{f}(\xi_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi_1 x_1} dx_1, \quad (6.223)$$

а функция $\bar{f}(\xi_1, x_2)$, рассматриваемая как функция от x_2 — преобразование Фурье

$$F(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi_1, x_2) e^{i\xi_1 x_2} dx_2. \quad (6.224)$$

Из выражений (6.223) и (6.224) видим, что связь между функциями $f(x_1, x_2)$ и $F(\xi_1, \xi_2)$ имеет вид

$$F(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2. \quad (6.225)$$

Функция $F(\xi_1, \xi_2)$ — двумерное преобразование Фурье функции $f(x_1, x_2)$. На основании (6.217) функцию $f(x_1, x_2)$ можно выразить через $\bar{f}(\xi_1, x_2)$ при помощи следующей формулы

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi_1, x_2) e^{-i\xi_1 x_1} d\xi_1. \quad (6.226)$$

Аналогично из выражения (6.224) находим, что

$$\bar{f}(\xi_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) e^{-i\xi_2 x_2} d\xi_2. \quad (6.227)$$

Из соотношений (6.226) и (6.227) следует формула, называемая формулой обращения для двумерного преобразования Фурье

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.228)$$

Распространение этой формулы на функции большого числа переменных очевидно.

Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n)$, тогда n -мерное преобразование Фурье этой функции будет

$$\begin{aligned} & F(\xi_1, \dots, \xi_n) = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (6.229)$$

Для этого случая формула обращения имеет вид

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_n) = \\ & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \dots, \xi_n) e^{-i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

Составим теперь на основании (6.228) для произведения функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ формулу обращения Фурье, т. е.

$$f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) G(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2.$$

Отсюда в силу формулы (6.225) будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) G(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) \times \right. \\ & \quad \left. \times e^{i(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \times \\ & \quad \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1, \xi_2) e^{-i[\xi_1(x_1 - t_1) + \xi_2(x_2 - t_2)]} d\xi_1 d\xi_2 \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая здесь (6.228), получим формулу свертки

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) g(x_1 - t_1, x_2 - t_2) dt_1 dt_2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_2) G(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (6.230)$$

В качестве n -мерного аналога формулы (6.230) получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) g(x_1 - t_1, \dots, x_n - t_n) dt_1 \dots dt_n = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \dots, \xi_n) G(\xi_1, \dots, \xi_n) e^{-i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned} \quad (6.231)$$

§ 57. Бесконечная плоскость, деформируемая под действием массовых сил

Пусть на бесконечную плоскость действуют заданные объемные силы $\rho F_1(x_1, x_2)$, $\rho F_2(x_1, x_2)$ и при $x_1, x_2 \rightarrow \infty$ проекции вектора перемещения и компоненты тензора напряжений стремятся к нулю. Определим для случая плоской деформации напряженное состояние. Умножим уравнения равновесия (6.5) и уравнение совместности деформаций (6.11) на ядро Фурье $\exp i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)$ и проинте-

грируем их по каждой из переменных x_1 и x_2 от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1 \bar{\sigma}_{11} + \xi_2 \bar{\sigma}_{12} &= -i\rho \bar{F}_1, \quad \xi_1 \bar{\sigma}_{12} + \xi_2 \bar{\sigma}_{22} = -i\rho \bar{F}_2, \\ \bar{\sigma}_{11} [(1-\nu)\xi_1^2 - \nu\xi_2^2] + \bar{\sigma}_{22} [(1-\nu)\xi_2^2 - \nu\xi_1^2] - 2\xi_1 \xi_2 \bar{\sigma}_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (6.232)$$

где введены двумерные преобразования Фурье функций σ_{kr} , $F_k(r, k=1, 2)$, определяемые (6.225)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{kr}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{kr}(x_1, x_2) \exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] dx_1 dx_2, \\ \bar{F}_k(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(x_1, x_2) \exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Решая систему (6.232), найдем

$$\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} = -\frac{\rho}{1-\nu} \frac{i\xi_1 \bar{F}_1 + i\xi_2 \bar{F}_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad (6.233)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22} &= -\frac{\rho(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} (i\xi_1 \bar{F}_1 + i\xi_2 \bar{F}_2) - \\ &= -4\rho \frac{\xi_1 \xi_2 (i\xi_2 \bar{F}_1 - i\xi_1 \bar{F}_2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}, \end{aligned} \quad (6.234)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{\rho(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} (i\xi_1 \bar{F}_2 - i\xi_2 \bar{F}_1) - \rho \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\xi_1 \xi_2 (i\xi_1 \bar{F}_1 + i\xi_2 \bar{F}_2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}. \quad (6.235)$$

На основании формулы обращения для двумерного преобразования Фурье (6.228) из (6.233) найдем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{\rho}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi_1 \bar{F}_1 + i\xi_2 \bar{F}_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \exp[-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] d\xi_1 d\xi_2.$$

Покажем, что функция $i\xi_k/(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ является преобразованием Фурье функции $x_k/(x_1^2 + x_2^2)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \exp i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) dx_1 dx_2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_2 x_2} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 e^{i\xi_1 x_1}}{x_1^2 + x_2^2} dx_1, \end{aligned}$$

здесь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 e^{i x_1 \xi_1}}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \text{ выч. } \frac{x_1 e^{i x_1 \xi_1}}{(x_1 + i x_2)(x_1 - i x_2)} \Big|_{x_1 = i x_2} & \begin{cases} \text{при } x_2 > 0 \\ \xi_1 > 0 \end{cases} \\ -\pi i e^{-\xi_1 x_2} & \text{при } \begin{cases} x_2 < 0 \\ \xi_1 < 0 \end{cases} \\ 2\pi i \text{ выч. } \frac{x_1 e^{i x_1 \xi_1}}{(x_1 + i x_2)(x_1 - i x_2)} \Big|_{x_1 = -i x_2} & \begin{cases} -\pi i e^{\xi_1 x_2} & \text{при } \begin{cases} x_2 > 0 \\ \xi_1 < 0 \end{cases} \\ \pi i e^{\xi_1 x_2} & \text{при } \begin{cases} x_2 < 0 \\ \xi_1 > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \exp i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 i e^{x_2(\xi_1 + i \xi_2)} dx_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} i e^{x_2(-\xi_1 + i \xi_2)} dx_2 = \frac{i \xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Учитывая, что функция $i \xi_k / (\xi_1^2 + \xi_2^2)$ является преобразованием Фурье функции $x_k / (x_1^2 + x_2^2)$, на основании формулы свертки (6.230) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \xi_k \bar{F}_k(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \exp [-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(a_1, a_2) \frac{x_k - a_k}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} da_1 da_2 \quad (k=1, 2).$$

Из этой формулы и вычислений, аналогичных приведенным выше [функции $2i \xi_1 \xi_2^2 / (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2$, $i \xi_1 (\xi_1^2 - \xi_2^2) / 2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2$ являются преобразованиями Фурье функций $x_1 (x_1^2 - x_2^2) / (x_1^2 + x_2^2)^2$ и $x_1 x_2^2 / (x_1^2 + x_2^2)^2$], получим

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{\rho}{2\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1) F_1(a_1, a_2) + (x_2 - a_2) F_2(a_1, a_2)}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} da_1 da_2.$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} =$$

$$= -\frac{\rho(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) [(x_2 - a_2) F_1(a_1, a_2) - (x_1 - a_1) F_2(a_1, a_2)]}{[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times da_1 da_2 = \frac{\rho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2}{[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^2} [(x_1 - a_1) F_1(a_1, a_2) + \\ & \quad + (x_2 - a_2) F_2(a_1, a_2)] da_1 da_2; \\ \sigma_{12} &= -\frac{\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - a_2)^2 - (x_1 - a_1)^2}{[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^2} [(x_2 - a_2) F_1(a_1, a_2) - \\ & \quad - (x_1 - a_1) F_2(a_1, a_2)] da_1 da_2 - \\ & - \frac{\rho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)[(x_1 - a_1) F_1(a_1, a_2) + (x_2 - a_2) F_2(a_1, a_2)]}{[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^2} da_1 da_2. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим задачу о действии сосредоточенной силы F на неограниченную плоскость. Решение этой задачи позволит выявить характер особенностей, которые имеют напряжения в окрестности точки приложения силы. Выберем начало координат в точке приложения силы и будем считать, что направление силы совпадает с отрицательным направлением оси x_1 . Тогда массовые силы можно представить в виде

$$F_1(x_1, x_2) = -\frac{F}{\rho} \delta(x_1) \delta(x_2); \quad F_2(x_1, x_2) = 0.$$

Здесь $\delta(x_k)$ — функция Дирака, обладающая следующими свойствами: она равна нулю для всех значений $x_k \neq 0$, за исключением

$$x_k = 0, \text{ т. е. } \delta(x_k) = 0 \text{ при } x_k \neq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_k) dx_k = 1.$$

Тогда из последних формул окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{F x_1}{4\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)} \left\{ (1-2\nu) + \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \\ \sigma_{22} &= \frac{F x_1}{4\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)} \left\{ (1+2\nu) - \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \\ \sigma_{12} &= \frac{F x_2}{4\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)} \left\{ (1-2\nu) + \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.236)$$

В свою очередь, компонент тензора напряжений σ_{33} определится известной формулой

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Из формул (6.236) ясно, что при $x_k \rightarrow 0$ все компоненты тензора напряжений беспредельно возрастают.

§ 58. Решение бигармонического уравнения для невесомой полуплоскости

Для решения плоской задачи теории упругости в случае отсутствия массовых сил, как было установлено в § 42, приходится интегрировать двумерное бигармоническое уравнение (6.26). Решение этого уравнения приведем для полуплоскости, ограниченной прямой. Пусть эта полуплоскость в прямоугольной системе координат занимает область $x_1 > 0$.

Умножим (6.26) на $\exp i\xi x_2$ и проинтегрируем по переменной x_2 от $-\infty$ до $+\infty$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right) e^{i\xi x_2} dx_2 = 0. \quad (6.237)$$

На основании формулы (6.220) равенству (6.237) придадим вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx_1^4} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\xi x_2} dx_2 + 2(-i\xi)^2 \frac{d^2}{dx_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\xi x_2} dx_2 + \\ + (-i\xi)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\xi x_2} dx_2 = 0 \end{aligned}$$

или же

$$\frac{d^4 Q}{dx_1^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 Q}{dx_1^2} + \xi^4 Q = 0, \quad (6.238)$$

где

$$Q(x_1, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, x_2) d^{i\xi x_2} dx_2. \quad (6.239)$$

Корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (6.238) равны

$$r_1 = r_2 = |\xi|, \quad r_3 = r_4 = -|\xi|.$$

Тогда общее решение (6.238) будет иметь вид

$$Q = (A + Bx_1) e^{-|\xi|x_1} + (C + Dx_1) e^{|\xi|x_1}.$$

Для получения ограниченного решения необходимо положить $C = D = 0$, при этом

$$Q = (A + Bx_1) e^{-|\xi|x_1}. \quad (6.240)$$

Коэффициенты A и B определяются граничными условиями задачи.

По формуле обращения Фурье (6.217) и (6.239) найдем

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x_1, \xi) e^{-i\xi x_2} d\xi. \quad (6.241)$$

Таким образом, функцию напряжений можно получить квадратурой.

Умножим формулы Эри (6.24) на $\exp i\xi x_2$ и проинтегрируем по аргументу x_2 от $-\infty$ до $+\infty$; учитывая формулы (6.216), (6.220) и (6.239), найдем

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} e^{i\xi x_2} dx_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 Q(x_1, \xi). \quad (6.242)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} e^{i\xi x_2} dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2 Q(x_1, \xi)}{dx_1^2}, \quad (6.243)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} e^{i\xi x_2} dx_2 = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \frac{dQ(x_1, \xi)}{dx_1}. \quad (6.244)$$

Из (6.242), (6.243) и (6.244) по формуле обращения Фурье получим

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{11}(x_1, \xi) e^{-i\xi x_2} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 Q e^{-i\xi x_2} d\xi, \quad (6.245)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 Q}{dx_1^2} e^{-i\xi x_2} d\xi, \quad \sigma_{12} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{dQ}{dx_1} e^{-i\xi x_2} d\xi.$$

Этим методом решим две задачи.

1. Полуплоскость, к границе которой приложена распределенная сила. Примем ось x_2 за границу полуплоскости и направим ось x_1 внутрь этой полуплоскости. Допустим, что на границе $x_1=0$ заданы $T_{21}=0$ и $T_{11}=p(x_2)$ и на полуплоскость не действуют массовые силы. Будем считать, что при $x_1 \rightarrow \infty$ компоненты тензора напряжений стремятся к нулю. В решении (6.240) интегральные постоянные A и B определяются из граничных условий

$$T_{11} = -\sigma_{11}(0, x_2) = p(x_2), \quad T_{21} = -\sigma_{12}(0, x_2) = 0.$$

Умножим эти условия на $\exp i\xi x_2$ и проинтегрируем по переменной x_2 , тогда при $x_1=0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{11}(0, x_2) e^{i\xi x_2} dx_2 = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) e^{i\xi x_2} dx_2 = -\bar{p}(\xi), \end{aligned} \quad (6.246)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = 0.$$

Подставляя (6.240) в (6.242) и (6.244), из граничных условий (6.246) найдем

$$A = \frac{\sqrt{2\pi}}{\xi^2} \bar{p}(\xi), \quad B = \frac{\sqrt{2\pi}}{\xi^2} |\xi| \bar{p}(\xi). \quad (6.247)$$

Учитывая (6.247) в (6.240) и подставляя полученный результат в формулы (6.245), найдем

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) [1 + |\xi| x_1] e^{|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \quad (6.248)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) [1 - |\xi| x_1] e^{|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi,$$

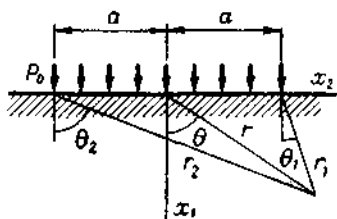


Рис. 26

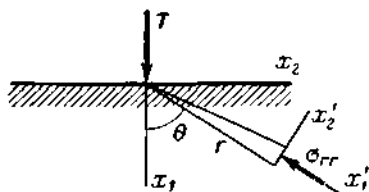


Рис. 27

$$\sigma_{12} = -\frac{ix_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \xi e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi.$$

Если, в частности, на границе $x_1=0$ давление равномерно распределено на участке $-a \leq x_2 \leq a$ (рис. 26), то на основании формулы (6.246) будем иметь

$$\bar{p}(\xi) = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{i\xi x_2} dx_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} p_0 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}. \quad (6.249)$$

Учитывая четность функции (6.249) по ξ , формулы (6.248) перепишем в виде

$$\sigma_{11} = -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \xi x_1}{\xi} e^{-\xi x_1} \sin(\xi a) \cos(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \xi x_1}{\xi} e^{-\xi x_1} \sin(\xi a) \cos(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2p_0 x_1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi x_1} \sin(\xi a) \sin(\xi x_2) d\xi.$$

Вычисляя теперь эти интегралы, найдем компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2], \\ \sigma_{22} &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2], \\ \sigma_{12} &= \frac{p_0}{2\pi} (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1), \end{aligned} \quad (6.250)$$

где, согласно рис. 26,

$$\theta_1 = \arctg \frac{x_2 - a}{x_1}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{x_2 + a}{x_1}.$$

2. Полуплоскость, к границе которой приложена сосредоточенная сила. Рассмотрим распределение напряжений в полуплоскости (рис. 27), к границе которой в начале координат приложена в направлении оси x_1 сосредоточенная сила T , а массовые силы отсутствуют. Решение этой задачи может быть получено из решения (6.248), если в формуле (6.249) предположить, что $p_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{l} T/2a$ и

$a \rightarrow 0$. Тогда

$$\bar{p}(\xi) = \frac{T}{2} \frac{\sin(a\xi)}{(a\xi)} \Big|_{a \rightarrow 0} = \frac{T}{2}. \quad (6.251)$$

Учитывая (6.251) в формулах (6.248), после вычислений интегралов найдем

$$\sigma_{11} = -\frac{2T}{\pi} \frac{x_1^3}{r^4}, \quad \sigma_{22} = -\frac{2T}{\pi} \frac{x_1 x_2^2}{r^4}, \quad \sigma_{12} = -\frac{2T}{\pi} \frac{x_1^2 x_2}{r^4}, \quad (6.252)$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

При $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$ компоненты тензора напряжений бесконечно возрастают. Вычислим нормальное и тангенциальное напряжения в площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору. Возьмем за поперечные оси координат оси, совпадающие с направлениями нормали и касательной к данной площадке (рис. 27). На основании формул (1.13)

$$\sigma'_{re} = \sigma_{mk} \alpha_{rm} \alpha_{ek}$$

и таблицы находим

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{2T}{\pi} \frac{x_1}{r^2} = -\frac{2T}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \sigma'_{22} &= 0, \quad \sigma'_{12} = 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $\sigma'_{11} = \sigma_{rr}$, $\sigma'_{12} = \sigma_{r\theta}$, $\sigma'_{22} = \sigma_{\theta\theta}$, получим формулы

$$\sigma_{rr} = -\frac{2T}{\pi} \frac{x_1}{r^2} = -\frac{2T}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0.$$

	x_1	x_2	x_3
x_1^1	$\alpha_{11} = \cos \theta = \frac{x_1}{r}$	$\alpha_{12} = \sin \theta = \frac{x_2}{r}$	0
x_2^1	$\alpha_{21} = -\sin \theta = -\frac{x_2}{r}$	$\alpha_{22} = \cos \theta = \frac{x_1}{r}$	0
x_3^1	0	0	1

КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

§ 59. Кручение призматического тела произвольного односвязного поперечного сечения

Пусть к основаниям однородного изотропного призматического тела приложены силы, приводящиеся к скручивающим парам. Кроме того, массовые силы отсутствуют, и боковая поверхность тела свободна от внешних сил.

Направим ось ox_3 параллельно образующим боковой поверхности, а оси ox_1 и ox_2 возьмем на одном из оснований бруса (рис. 28).

Задача об упругом равновесии призматического тела при указанных условиях сводится к нахождению величины $\sigma_{\alpha\gamma}$, удовлетворяющих в области, занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия (2.25) при отсутствии массовых сил и формулам закона Гука (4.35), а также граничным условиям на боковой поверхности и основаниях призматического тела.

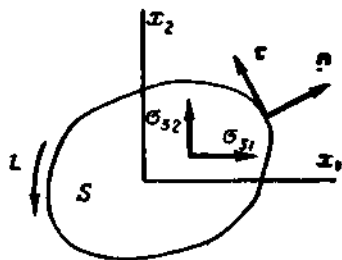


Рис. 28

Поставленная в таком виде задача представляет большие математические трудности. Поэтому на основании принципа Сен-Венана, при достаточно большой длине призматического тела по сравнению с размерами его оснований, мы можем смягчить граничные условия на основаниях таким образом, чтобы главный вектор и главный момент сил, приложенных к основаниям, имели заданные значения; при этом действительное распределение сил на основаниях практически не оказывает влияния на части тела, находящиеся вдали от них. Такое интегральное удовлетворение условий на основаниях создает довольно широкий произвол в выборе решения.

Сен-Венан, исходя из вышеуказанных предположений, своим полуобратным методом решил указанную проблему в перемещениях. Решение в перемещениях поставленной проблемы Сен-Венан ищет в виде

$$u_1 = -\tau x_2 x_3; \quad u_2 = \tau x_1 x_3; \quad u_3 = \tau \varphi(x_1, x_2), \quad (7.1)$$

где τ — постоянная величина, называемая степенью закручивания, а $\varphi(x_1, x_2)$ — некоторая функция, подлежащая определению.

Перемещения (7.1) показывают, что поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются, причем все сечения одинаково.

Из формул закона Гука (4.35) с учетом формул (3.26) для компонентов тензора напряжений σ_{ik} , соответствующих перемещениям (7.1), получим

$$\sigma_{31} = \mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad \sigma_{32} = \mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \quad (7.2)$$

и

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0. \quad (7.3)$$

Подставляя (7.2) и (7.3) в дифференциальные уравнения равновесия (2.25), когда массовые силы отсутствуют, мы увидим, что первые два из них удовлетворяются тождественно, а третье уравнение дает

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0. \quad (7.4)$$

Последнее соотношение показывает, что функция $\varphi(x_1, x_2)$, называемая функцией кручения Сен-Венана, должна быть гармонической функцией переменных x_1 и x_2 в области S , занятой поперечным сечением тела. Из третьей формулы (7.1) вытекает, что перемещение u_3 также должно быть гармонической функцией.

Учитывая, что внешняя нормаль n к контуру любого поперечного сечения перпендикулярна к оси ox_3 , имеем $n_3 = 0$. Тогда первые два условия (2.22), ввиду отсутствия внешних сил на боковой поверхности и по условию (7.3), будут удовлетворены тождественно; третье условие (2.22) на L с учетом (7.2) примет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) n_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) n_2 = 0, \quad (7.5)$$

где через L обозначена граница области S .

Учитывая, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

вместо (7.5) на L получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2, \quad (7.6)$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ — производная φ по нормали n .

Задача определения функции $\varphi(x_1, x_2)$ есть, таким образом, задача Неймана для уравнения Лапласа. Легко показать, что в нашем случае условие существования решения задачи Неймана выполняется. Действительно,

$$\int_L \frac{\partial\varphi}{\partial n} dl = \int_L (x_2 n_1 - x_1 n_2) dl =$$

$$= \int_L \left(x_2 \frac{dx_2}{dl} + x_1 \frac{dx_1}{dl} \right) dl = \int_L d \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

При соблюдении этого условия решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Это слагаемое не существенно, ибо замена функции φ на $\varphi + c$ не меняет напряженного состояния, что следует из формул (7.2), а вызывает, как показывает третья формула (7.1), лишь жесткое поступательное перемещение тела вдоль оси ox_3 .

Для гармонической функции φ справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[x_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[x_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2, \quad (7.7)$$

на основании которого, с учетом граничного условия (7.6), обнаруживаем, что главный вектор касательных напряжений, приложенных в поперечном сечении, равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{\omega} \sigma_{13} d\omega = \mu \tau \int_{\omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) d\omega = \\ &= \mu \tau \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[x_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[x_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] \right\} d\omega. \end{aligned}$$

На основании формулы Гаусса — Остроградского из последнего равенства получим

$$V_1 = \mu \tau \int_L x_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) n_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) n_2 \right] dl.$$

В последней формуле, учитывая граничное условие (7.6), мы будем иметь $V_1 = 0$; аналогично доказывается, что $V_2 = 0$. Поэтому касательные напряжения, приложенные в поперечном сечении, сводятся к паре сил, момент которой равен (рис. 28)

$$M = \int_{\omega} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) d\omega. \quad (7.8)$$

Внося в эту формулу значения σ_{32} , σ_{31} из формул (7.2), окончательно получим

$$M = D\tau.$$

В этой формуле

$$D = \mu \int_{\omega} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) d\omega. \quad (7.9)$$

Из условия равновесия на основаниях имеем $M_k = M = D\tau$, откуда

$$\tau = \frac{M_k}{D},$$

где M_A называется крутящим моментом; D — жесткостью при кручении.

Принимая во внимание формулу (7.6), из формулы Гаусса — Остроградского найдем

$$\int_{\omega} \left(x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) d\omega = \int_{\omega} \left(\frac{\partial (-x_2 \varphi)}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_1 \varphi)}{\partial x_2} \right) d\omega = - \int_L \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl.$$

С другой стороны, на основании первой формулы Грина

$$\int_L \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\omega.$$

Следовательно,

$$\int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] d\omega = 0.$$

Умножим обе части последнего соотношения на μ и сложим с (7.9), получим

$$D = \mu \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right] d\omega.$$

Отсюда следует, что всегда $D > 0$.

Введем гармоническую функцию $\psi(x_1, x_2)$, сопряженную с функцией $\varphi(x_1, x_2)$, тогда по условиям Коши — Римана будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (7.10)$$

Граничное условие, которому удовлетворяет функция $\psi(x_1, x_2)$, получится из (7.6), если внести туда условия (7.10) и учесть (6.27). В результате получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dl} - \left(x_2 \frac{dx_2}{dl} + x_1 \frac{dx_1}{dl} \right) = 0.$$

Интегрируя обе части этого равенства по контуру поперечного сечения, будем иметь

$$\psi \Big|_L = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + C. \quad (7.11)$$

Для компонентов тензора напряжений на основании (7.2) с учетом условий (7.10) мы получим формулы

$$\sigma_{31} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_2 \right), \quad \sigma_{32} = -\mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_1 \right). \quad (7.12)$$

Из этих формул хорошо видно, что решение задачи не изменится, если в функции $\psi(x_1, x_2)$ прибавить постоянную величину. Следо-

вательно, определение функции сведено к задаче Дирихле для уравнения Лапласа.

Часто вместо функции $\psi(x_1, x_2)$ вводят другую $\Phi(x_1, x_2)$, называемую функцией напряжений при кручении или функцией напряжений Прандтля. Эта функция определяется формулой

$$\Phi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (7.13)$$

В этом случае из (7.12) будем иметь

$$\sigma_{31} = \mu\tau \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{32} = -\mu\tau \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \quad (7.14)$$

Из (7.13), учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -2. \quad (7.15)$$

Для функции Φ граничное условие на основании (7.11) примет вид

$$\Phi(x_1, x_2)|_L = C. \quad (7.16)$$

Таким образом, задача определения $\Phi(x_1, x_2)$ есть задача Дирихле для уравнения Пуассона (7.15) при граничном условии (7.16). Из формулы (7.8) с учетом (7.14) для определения крутящего момента будем иметь

$$M_k = -\mu\tau \int_{\omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_2 \right) d\omega. \quad (7.17)$$

Эта формула показывает, что величина момента M_k не меняется, если к функции Φ прибавить любую постоянную. Записав (7.17) в виде

$$M_k = -\mu\tau \int_{\omega} \left[\frac{\partial(x_1 \Phi)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2 \Phi)}{\partial x_2} \right] d\omega + 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega$$

и применив к первому интегралу формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$M_k = -\mu\tau \Phi \int_L (x_1 n_1 + x_2 n_2) dl + 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega. \quad (7.18)$$

Принимая в (7.16) постоянную C равной нулю, что допустимо, так как изменение $\Phi(x_1, x_2)$ на постоянную величину не меняет решения задачи, что видно из (7.14) и (7.17), вместо формулы (7.18) будем иметь

$$M_k = 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega. \quad (7.19)$$

Эта важная формула принадлежит Прандтлю.

§ 60. Некоторые свойства касательных напряжений

Покажем, теперь, что вектор касательного напряжения $T_3 = i_1\sigma_{31} + i_2\sigma_{32}$ в произвольной точке M поперечного сечения призматического тела направлен по касательной к кривой $\Phi(x_1, x_2) = \text{const}$, проходящей через точку M . Действительно, вдоль кривой $\Phi(x_1, x_2) = \text{const}$ имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Учитывая здесь формулы (6.27) и (7.14), находим

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = T_3 \cdot n = 0,$$

откуда $T_3 \perp n$.

На основании доказанного кривые $\Phi(x_1, x_2) = \text{const}$ называют траекториями или линиями касательных напряжений. Так как на контуре поперечного сечения $\Phi(x_1, x_2) = \text{const}$, то он является траекторией касательных напряжений.

Легко доказать, что как σ_{31} , так и σ_{32} являются гармоническими функциями в поперечном сечении. В самом деле, действуя гармоническим оператором Δ на обе части формул (7.14) и допуская законность перестановки дифференциальных операторов, с учетом (7.15) будем иметь

$$\Delta \sigma_{31} = \mu\tau \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \mu\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta \Phi = 0,$$

$$\Delta \sigma_{32} = -\mu\tau \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta \Phi = 0.$$

Отсюда вытекает, что σ_{31} и σ_{32} достигают наибольших значений на контуре поперечного сечения призматического тела.

Докажем, что вектор касательного напряжения T_3 также достигает своего наибольшего значения на контуре; для этого отправимся от противоположного: допустим, что вектор касательного напряжения достигает наибольшего значения внутри контура поперечного сечения в точке M . Выберем в поперечном сечении новую прямоугольную декартову систему координат $ox_1'x_2'$ и одну из ее осей, например ось ox_2' , направим параллельно вектору T_3 , приложенному в точке M . В этой системе координат в точке M будем иметь тензор напряжений с компонентами $\sigma'_{31} = 0$, $\sigma'_{32} \neq 0$, причем они относительно новой системы координат являются также гармоническими. В силу этого σ'_{32} достигает своего наибольшего значения на контуре, а не внутри контура, как это было допущено в начале рассуждения.

Следовательно, вектор касательного напряжения достигает своего максимального значения на контуре поперечного сечения призматического тела.

§ 61. Кручение полых призматических тел

Пусть призматическое тело ограничено несколькими цилиндрическими поверхностями, оси которых параллельны. Любое поперечное сечение такого бруса представляет собою многосвязную область. В этом случае граничные условия (7.11) примут вид

$$\psi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + C, \text{ на } L_v,$$

где C_v — постоянные, принимающие определенные значения на каждом из контуров L_v , совокупность которых образует контур сечения.

Функция кручения ψ должна быть однозначной; в противном случае перемещение $u_3 = \tau\psi$ было бы многозначным (нас интересуют однозначные перемещения). При этом функция ψ , сопряженная с однозначной гармонической функцией, определяемая из условий Коши — Римана (7.10), может быть, вообще говоря, многозначной; в нашем случае этого не должно быть, ибо функция ψ возвращается к первоначальному значению при обходе по любому из контуров L_v , что видно из граничного условия для нее. Исходя из этого постоянные C_v не могут быть фиксированы произвольным образом. Действительно, если фиксировать их произвольно, а затем определять функцию ψ (для этого следует решить задачу Дирихле, которая, как известно, всегда имеет единственное решение), то функция ψ , найденная из условий Коши — Римана с помощью функции ψ , может оказаться многозначной.

В данном случае, на основании (7.16), функция $\Phi(x_1, x_2)$ должна быть постоянной на всех контурах, ограничивающих сечение. Таким образом, граничное условие для функции $\Phi(x_1, x_2)$ на контуре L_v имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2) = C_v. \quad (7.20)$$

Как мы видели, в формулы для деформаций, напряжений и перемещений входят частные производные функции Φ . Поэтому достаточно определить функцию $\Phi(x_1, x_2)$ с точностью до произвольной постоянной. Это обстоятельство дает возможность положить одну из постоянных C_v равной нулю.

Покажем, что тангенциальные напряжения σ_{31} и σ_{32} на торцах призматического тела удовлетворяют условиям

$$\int_{\omega} \sigma_{31} d\omega = \int_{\omega} \sigma_{32} d\omega = 0 \quad (7.21)$$

(в противном случае, помимо приложенного крутящего момента, на торцах имелись бы изгибающие призматическое тело поперечные силы).

Учитывая в интегралах (7.21) формулы (7.14) и преобразуя их в интегралы по контуру $L = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_m$, получим

$$V_1 = \mu\tau \oint_L \Phi n_2 dl, \quad V_2 = -\mu\tau \int_L \Phi n_1 dl. \quad (7.22)$$

Эти интегралы можно записать в виде

$$V_1 = \mu\tau \int_{L_0} \Phi n_2 dl + \mu\tau \int_{L_1} \Phi n_2 dl + \dots + \mu\tau \int_{L_m} \Phi n_2 dl,$$

$$-V_2 = \mu\tau \int_{L_0} \Phi n_1 dl + \mu\tau \int_{L_1} \Phi n_1 dl + \dots + \mu\tau \int_{L_m} \Phi n_1 dl.$$

С учетом (7.20) будем иметь

$$V_1 = \mu\tau C_0 \int_{L_0} n_2 dl + \mu\tau C_1 \int_{L_1} n_2 dl + \dots + \mu\tau C_m \int_{L_m} n_2 dl,$$

$$-V_2 = \mu\tau C_0 \int_{L_0} n_1 dl + \mu\tau C_1 \int_{L_1} n_1 dl + \dots + \mu\tau C_m \int_{L_m} n_1 dl;$$

поскольку

$$\oint_{L_0} n_2 dl = -\oint_{L_0} dx_1 = 0, \quad \oint_{L_0} n_1 dl = \oint_{L_0} dx_2 = 0,$$

то и $V_1 = V_2 = 0$, что и требовалось доказать.

На основании формул (7.14) и рис. 28 имеем

$$M_k = -\mu\tau \int_{\omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_2 \right) d\omega =$$

$$= -\mu\tau \int_{\omega} \left(\frac{\partial (x_1 \Phi)}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_2 \Phi)}{\partial x_2} \right) d\omega + 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega. \quad (7.23)$$

Преобразуя первый интеграл в контурный, будем иметь

$$M_k = -\mu\tau \oint_L (x_1 n_1 + x_2 n_2) \Phi dl + 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega \quad (7.24)$$

или, учитывая, что $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ окончательно получим

$$M_k = -\mu\tau C_0 \int_{L_0} (x_1 n_1 + x_2 n_2) dl - \mu\tau C_1 \int_{L_1} (x_1 n_1 + x_2 n_2) dl - \dots$$

$$\dots - \mu\tau C_m \int_{L_m} (x_1 n_1 + x_2 n_2) dl + 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega. \quad (7.25)$$

Преобразуем контурные интегралы в поверхностные, при этом, учитывая, что обход по внешнему контуру сечения должен выполняться против часовой стрелки, а по всем внутренним контурам — по часовой стрелке, формулу (7.25) представим в виде

$$M_z = 2\mu\tau \left(\sum_{v=1}^m C_{v,\omega_v} - C_0\omega_0 \right) + 2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega, \quad (7.26)$$

где ω_v — площадь, ограниченная контуром L_v ($v=0, 1, 2, \dots$). В случае односвязной области получим формулу (7.19).

§ 62. Теорема о циркуляции касательного напряжения

Циркуляция вектора напряжения $i_1\sigma_{31} + i_2\sigma_{32}$ вдоль замкнутой линии l , целиком лежащей в сечении, равна

$$\Gamma = \oint_l (i_1\sigma_{31} + i_2\sigma_{32}) \cdot dr. \quad (7.27)$$

Учитывая в подынтегральном выражении формулы (7.2) и (7.1), для Γ будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu\tau \oint_l (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + \mu \oint_l \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 \right) = \\ &= 2\mu\tau\omega + \mu \oint_l \frac{\partial u_3}{\partial l} dl. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Так как перемещение u_3 должно быть однозначной функцией в сечении, то

$$\oint_l \frac{\partial u_3}{\partial l} dl = 0.$$

В силу последнего обстоятельства из (7.28) находим

$$\Gamma = 2\mu\tau\omega. \quad (7.29)$$

Здесь ω — площадь, ограниченная линией интегрирования.

Формула (7.29) справедлива как для односвязных, так и для многосвязных сечений, причем линия интегрирования может охватывать одну или несколько внутренних контуров сечения или вовсе не охватывать их. Эта формула представляет теорему о циркуляции касательных напряжений.

Циркуляцию касательных напряжений выразим через функцию $\Phi(x_1, x_2)$; с этой целью подставим (7.14) в подынтегральное выражение (7.27), тогда

$$\Gamma = -\mu\tau \oint_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_2 \right) dl = -\mu\tau \oint_l \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl, \quad (7.30)$$

где n_j — косинус угла между внешней нормалью к линии интегрирования и осью ox_j ($j=1, 2$).

Из сравнения формул (7.29) и (7.30) получим

$$-\oint_l \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl = 2\omega. \quad (7.31)$$

Если в качестве линии интегрирования взять внутренний контур L_v , тогда

$$-\oint_{L_v} \frac{\partial \Phi}{\partial n_v} dl = 2\omega_v \quad (v=1, 2, \dots, m), \quad (7.32)$$

где n_v — внешняя нормаль к контуру L_v ; ω_v — площадь, ограниченная замкнутым контуром L_v . Формулы (7.32) могут быть использованы для определения неизвестных констант C_v , входящих в граничные условия (7.20).

§ 63. Аналогии при кручении

а. Мембранная аналогия. Мембраной называется тонкая пленка, не оказывающая сопротивления изгибу, а сопротивляющаяся только растяжению.

Пусть однородная мембрана постоянной толщины натянута одинаково по всем направлениям силой T на плоский контур того же очертания, что и контур поперечного сечения скручиваемого призматического тела, и нагружена нормальной к ней равномерно распределенной нагрузкой q на единицу площади. Пусть ось координат ox_1 и ox_2 лежат в плоскости мембраны, которая провисает под действием нагрузки q на величину $u_0(x_1, x_2)$.

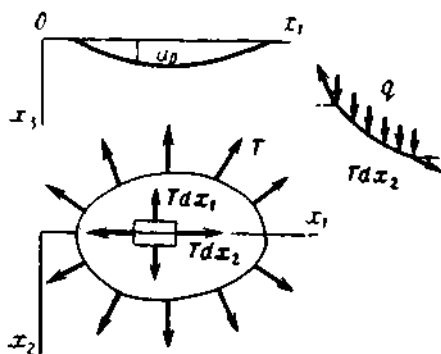


Рис. 29

Выведем дифференциальное уравнение равновесия; для этого вырежем элемент, имеющий форму прямоугольника со сторонами dx_1, dx_2 (рис. 29).

Приведем к нулю сумму проекций на ось ox_3 всех сил, действующих на него;

$$-T \frac{\partial u_0}{\partial x_1} dx_2 + \left[T \frac{\partial u_0}{\partial x_1} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \right] - T \frac{\partial u_0}{\partial x_2} dx_1 + \left[T \frac{\partial u_0}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_1 \right] + q dx_1 dx_2 = 0.$$

Отсюда получим уравнение для прогиба u_0 равномерно нагруженной мембраны

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} = -\frac{q}{T}. \quad (7.33)$$

Так как на контуре мембраны прогиб u_0 равен нулю, следовательно, контурное условие будет $u_0 = 0$. (7.34)

Таким образом, контурное условие (7.34) тождественно совпадает с контурным условием для функции Φ . Если положить $u_0 = k\Phi$, тогда дифференциальное уравнение (7.15) совпадает с (7.33). Внесем $u_0 = k\Phi$ в уравнение (7.33), тогда

$$k \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) = -\frac{q}{T}.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -2.$$

Из последних двух уравнений $k = \frac{q}{2T}$. Тогда

$$u_0 = \frac{q}{2T} \Phi. \quad (7.35)$$

Следовательно, задача кручения призматического тела может быть решена путем измерения прогибов равномерно нагруженной мембраны.

Если расечь мембрану плоскостями $u_0 = \text{const}$, то полученные линии равного перемещения в задаче кручения будут совпадать с траекториями касательных напряжений $\Phi = \text{const}$. Уклон мембраны $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ в направлении внешней нормали n к линии равного перемещения в некоторой ее точке определяет касательное напряжение t в соответствующей точке сечения, т. е. $T = \frac{\mu\tau}{k} \frac{\partial u_0}{\partial n}$. Действительно,

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial k\Phi}{\partial n} = k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_2 \right) = -\frac{k}{\mu\tau} (\sigma_{32} n_1 - \sigma_{31} n_2) = \frac{k}{\mu\tau} t,$$

откуда

$$t = \frac{\mu\tau}{k} \frac{\partial u_0}{\partial n}.$$

Согласно этой формуле наибольший угол наклона мембраны определяет наибольшее касательное напряжение.

Жесткость призматического тела при кручении определяется объемом v , ограниченным поверхностью деформированной мембраны, и плоскостью ее до деформации, т. е. $D = \frac{2\mu}{k} v$. Действительно, так как

$$v = \int_{\omega} u_0 d\omega = \frac{q}{2T} \int_{\omega} \Phi d\omega,$$

а также учитывая, что

$$2\mu\tau \int_{\omega} \Phi d\omega = M_k \quad \text{и} \quad M_k = D\tau,$$

найдем $v = \frac{q}{4\mu T} D$, откуда

$$D = \frac{2\mu}{k} v. \quad (7.36)$$

Ценность мембранной аналогии заключается не только в том, что она позволяет экспериментально исследовать проблему кручения, но и в том, что при помощи этой аналогии можно без какого-либо эксперимента в каждой конкретной задаче о кручении призматического тела составить качественное представление о виде траекторий касательных напряжений и о наибольшем тангенциальном напряжении.

Мембранная аналогия легко обобщается и на случай полых призматических тел. В этом случае, как явствует из соотношения $u_0 = k\Phi$, которое выведено из сравнения уравнений (7.15) и (7.33), должны быть соблюдены следующие условия:

1) внешний контур мембраны должен быть подобным внешнему контуру L_0 сечения призматического тела и закреплен неподвижно;

2) все внутренние контуры сечения призматического тела должны быть имитированы абсолютно жесткими плоскими невесомыми дисками, параллельными друг другу, и должны получить поступательные перемещения $u_v = kC_v$ (C_v — константы, входящие в граничные условия на внутренних контурах сечения призматического тела);

3) эти диски должны быть загружены тем же равномерно распределенным нормальным давлением q , что и сама мембрана. Последнее обстоятельство вытекает из теоремы о циркуляции касательных напряжений в задаче о кручении, в справедливости чего сейчас убедимся.

Подставим $\Phi = \frac{1}{k} u_0$ в (7.32), тогда

$$-\oint \frac{\partial u_0}{\partial n_v} dl = 2k\omega_v = \frac{q}{T} \omega_v. \quad (7.37)$$

Здесь $\frac{\partial u_0}{\partial n_v}$ — уклон мембраны в направлении внешней нормали n_v к внутреннему контуру L_v ; ω_v — площадь, ограниченная внутренним контуром L_v .

Умножив обе части (7.37) на величину равномерного натяжения мембраны T , будем иметь

$$-\oint T \frac{\partial u_0}{\partial n_v} dl = q\omega_v. \quad (7.38)$$

Очевидно, левая часть этого равенства есть сумма проекций сил натяжения мембраны в сечении ее по данному контуру L_v на направление, перпендикулярное плоскости контура L_v .

Таким образом, (7.38) дает условие равновесия каждого диска под действием равномерно распределенного давления и натяжения мембраны в сечении ее по контуру этих дисков. Если такого рода

мембрану вместе с диском загрузить равномерным давлением, то получим мембранную аналогию задачи о кручении призматического тела с профилем в виде многосвязного сечения (рис. 30), т. е. перемещение мембраны будет пропорционально функции $\Phi(x_1, x_2)$, а линии равного перемещения будут подобны траекториям тангенциальных напряжений.

Осуществление эксперимента мембранной аналогии в случае задачи о кручении призматического тела с профилем в виде многосвязного сечения представляет большие трудности. Однако для качественного изучения конкретной задачи о кручении полого призматического тела, как уже указывалось для случая односвязных областей, мембранная аналогия имеет большую ценность.

Рассмотрим в качестве примера задачу о кручении тонкостенных труб.

Для исследования кручения тонкостенных труб способом мембранной аналогии необходимо закрепить мембрану по ее контуру, который должен быть подобен внешнему контуру сечения, и на-

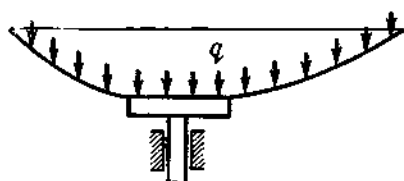
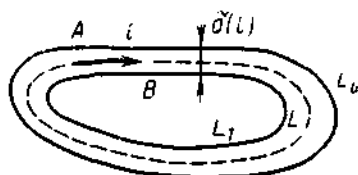


Рис. 30

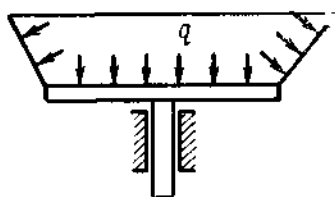


Рис. 31

ложить абсолютно жесткий плоский диск, имеющий форму внутреннего контура. Далее мембрану и диск надо нагрузить равномерно распределенным давлением, обеспечив диску поступательное движение в направлении, перпендикулярном его плоскости (рис. 30). Поскольку рассматривается случай, когда толщина стенки трубы мала, то деформация мембраны будет определяться в основном нагрузкой, действующей на диск; что касается нагрузки, действующей непосредственно на мембрану, то ею можно пренебречь. В силу сказанного выше поверхность деформированной мембраны будет очень близка к конической поверхности, соединяющей оба контура. Сделанный вывод позволяет при изучении кручения тонкостенных труб произвольного поперечного сечения строить приближенный расчет.

Внутри кольцевого сечения проведем линию L , равноудаленную от обеих его границ (рис. 31), и какую-либо точку A на этой линии примем за начало отсчета ее дуги l . Кольцевое сечение будет задано, если известны линия L и толщина $\delta = \delta(l)$. О величине кас-

тельного напряжения T в данной точке можно приблизительно судить по среднему уклону мембраны в этой точке, поэтому приближительное значение тангенциального напряжения в точке B определится формулой

$$T = \mu\tau \frac{C_1 - C_0}{\delta(l)}.$$

Полагая, что на внешнем контуре $C_0 = 0$, будем иметь

$$T = \mu\tau \frac{C_1}{\delta(l)}. \quad (7.39)$$

Как видно из этой формулы,

$$T_{\max} = \mu\tau \frac{C_1}{\delta_{\min}}. \quad (7.40)$$

Из формулы (7.26) имеем

$$M_k = 2\mu\tau \left(C_1 \omega_1 + \int_{\omega} \Phi d\omega \right),$$

где ω_1 — площадь, ограниченная внутренним контуром; C_1 — постоянное значение функции Φ на внутреннем контуре.

Учитывая, что среднее значение функции Φ на линии L приближенно равно $\frac{1}{2}C_1$, последней формуле придадим вид

$$M_k = 2\mu\tau C_1 \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \int_{\omega} d\omega \right) = 2\mu\tau C_1 \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \int_L \delta(l) dl \right). \quad (7.41)$$

В правой части (7.41) выражение внутри скобок представляет собой площадь, ограниченную средним контуром L , поэтому формулу (7.41) перепишем в виде

$$M_k = 2\mu\tau C_1 \omega, \quad (7.42)$$

где

$$\omega = \omega_1 + \frac{1}{2} \int_L \delta(l) dl.$$

С другой стороны, на основании (7.32) имеем

$$-\oint_L \frac{0 - C_1}{\delta(l)} dl = 2\omega. \quad (7.43)$$

Исключим C_1 из формул (7.42) и (7.43), тогда

$$M_k = \frac{4\mu\tau\omega^2}{l}, \quad (7.44)$$

где

$$l = \int_L \frac{dl}{\delta(l)}.$$

Формула (7.44) дана Бредтом.

Из сравнения формул (7.39) и (7.42) найдем

$$T = \frac{M_k}{2\omega \delta(l)}.$$

Эта формула также принадлежит Бредту.

б. Гидродинамическая аналогия Буссинеска. Рассмотрим ламинарное движение вязкой жидкости по призматической трубе с поперечным сечением, совпадающим с поперечным сечением призматического тела, кручение которого исследуется. Обозначим ось трубы через ox_3 . Скорость $v(x_1, x_2)$ текущей по трубе жидкости должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \quad (7.45)$$

где $\frac{\partial p}{\partial x_3}$ — падение гидродинамического давления по оси трубы, принимаемое постоянным.

На стенках трубы имеем условие Рейнольдса

$$v = 0. \quad (7.46)$$

Таким образом, контурное условие (7.46) тождественно совпадает с контурным условием для функции Φ .

Если положить $v = k\Phi$, тогда дифференциальное уравнение (7.15) совпадает с (7.45). Внесем $v = k\Phi$ в уравнение (7.45) и полученное уравнение сравним с уравнением (7.15); тогда

$$k = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x_3}}{2\nu_0}$$

и

$$v = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x_3}}{2\nu_0} \Phi.$$

§ 64. Комплексная функция кручения

Часто бывает удобно для решения задачи кручения вводить функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, связанную с функцией кручения $\varphi(x_1, x_2)$ и с сопряженной с ней функцией $\psi(x_1, x_2)$, в виде

$$iF(z) = \varphi + i\psi. \quad (7.47)$$

Функция $F(z)$, очевидно, голоморфна в области, занятой любым поперечным сечением тела.

В силу (7.11) для многосвязной области граничные условия, которым должна удовлетворять функция $F(z)$, примут вид

$$F(t) + \overline{F(t)} = t\bar{t} + C., \quad (7.48)$$

где t — аффикс точки; C_v — постоянные, одну из которых можно фиксировать произвольно, а остальные подлежат определению.

В случае односвязной области будем иметь

$$F(t) + \overline{F(\bar{t})} = t\bar{t} + C. \quad (7.49)$$

На основании формул (7.2)

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = \mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - i \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - x_2 - ix_1 \right),$$

откуда, учитывая, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$, окончательно получим

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = \mu\tau i [F'(z) - \bar{z}]. \quad (7.50)$$

Жесткость при кручении призматического тела определяется по формуле (7.9), которой придадим вид

$$D = \mu \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) d\omega - \mu \int_{\omega} \left[\frac{\partial(x_2\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_1\varphi)}{\partial x_2} \right] d\omega.$$

Применив ко второму интегралу формулу Гаусса — Остроградского и введя обозначение $I_0 = \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) d\omega$, получим

$$D = \mu \left[I_0 - \int \varphi (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \right],$$

здесь I_0 — полярный момент инерции площади поперечного сечения. На основании формулы (7.47) и принимая во внимание, что $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = \frac{1}{2} d(t\bar{t})$, последней формуле можно придать вид

$$D = \mu \left[I_0 - \frac{i}{4} \int_L (F(t) - \overline{F(\bar{t})}) d(t\bar{t}) \right].$$

Если поперечное сечение призматического тела представляет многосвязную область, то последняя формула примет вид

$$D = \mu \left[I_0 - \frac{i}{4} \sum_{j=0}^m \int_{L_j} (F(t) - \overline{F(\bar{t})}) d(t\bar{t}) \right]. \quad (7.51)$$

Здесь интегрирование ведется по всем контурам L_0, L_1, \dots, L_m , обход которых таков, что область остается слева.

§ 65. Решение частных задач кручения

Приведем несколько примеров решения частных задач кручения призматических брусьев.

а) Призматический брус эллиптического профиля. Функция напряжения Прандтля $\Phi(x_1, x_2)$ должна быть постоянной на эллипсе

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Функция $\Phi(x_1, x_2)$, удовлетворяющая граничному условию, может быть представлена в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = A \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \right), \quad (7.52)$$

где A — неизвестная постоянная.

Кроме того, функция $\Phi(x_1, x_2)$ внутри эллипса должна удовлетворять уравнению Пуассона; следовательно, для определения величины A получим соотношение

$$2A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2,$$

откуда найдем

$$A = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Тогда

$$\Phi(x_1, x_2) = -\frac{b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2}{a^2 + b^2}. \quad (7.53)$$

Подставляя (7.53) в соотношения (7.14), для напряжений σ_{31} и σ_{32} получим формулы

$$\sigma_{31} = -\frac{2a^2 \mu \tau}{a^2 + b^2} x_2;$$

$$\sigma_{32} = \frac{2b^2 \mu \tau}{a^2 + b^2} x_1.$$

б) Призматический брус, сечение которого представляет равносторонний треугольник (рис. 32). Уравнения сторон равностороннего треугольника с высотой h будут

$$x_2 = 0; \quad x_2 = -\sqrt{3}x_1 + h; \quad x_2 = \sqrt{3}x_1 + h.$$

На этих сторонах функция $\Phi(x_1, x_2)$ должна быть постоянной. Это, так же как и в первой задаче, наводит нас на мысль представить функцию в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = Ax_2 [(x_2 - h) + \sqrt{3}x_1] [(x_2 - h) - \sqrt{3}x_1]. \quad (7.54)$$

Эта функция на сторонах треугольника равна нулю. Кроме того, функция $\Phi(x_1, x_2)$ внутри треугольника должна удовлетворять уравнению Пуассона. Отсюда находим, что $A = \frac{1}{2h}$. Окончательно получим

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} x_2 [(x_2 - h)^2 - 3x_1^2].$$

Из формул (7.14) найдем

$$\sigma_{13} = \frac{\mu\tau}{2h} [3(x_2^2 - x_1^2) + h(h - 4x_2)]; \quad \sigma_{23} = \frac{3\mu\tau}{h} x_1 x_2.$$

в) Круглый призматический брус с полукруглой продольной выточкой (рис. 33). Уравнение контура сечения будет

$$(x_1 - b)^2 + x_2^2 - b^2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0.$$

Функцию напряжения, которая на контуре должна быть равна нулю, ищем в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{A}{x_1^2 + x_2^2} [(x_1 - b)^2 + x_2^2 - b^2](x_1^2 + x_2^2 - a^2)$$

или

$$\Phi(x_1, x_2) = A \left(x_1^2 + x_2^2 - a^2 - 2bx_1 + \frac{2ba^2x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

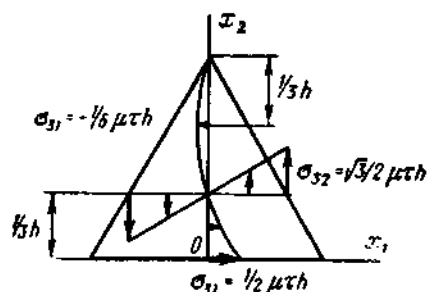


Рис. 32

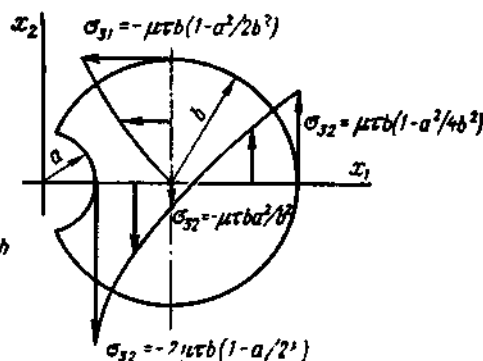


Рис. 33

Кроме того, функция $\Phi(x_1, x_2)$ внутри упомянутого контура должна удовлетворять уравнению (7.15). Тогда найдем, что $A = -1/2$. Следовательно,

$$\Phi(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \left[x_1^2 + x_2^2 - a^2 - 2bx_1 \left(\frac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} - 1 \right) \right].$$

Согласно формулам (7.14) имеем

$$\sigma_{31} = -\mu\tau \left[1 - \frac{2ba^2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right] x_2,$$

$$\sigma_{32} = \mu\tau \left[(x_1 - b) + \frac{a^2b}{x_1^2 + x_2^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right].$$

г) Призматический брус с профилем в виде прямоугольника. Чтобы найти решение задачи кручения указанного бруса, определим гармоническую функцию $\psi(x_1, x_2)$, которая на границах $x_1 = \pm a$; $x_2 = \pm b$ прямоугольника принимает значение $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

Искомую функцию $\psi(x_1, x_2)$ представим в виде суммы двух гармонических функций

$$a^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) \text{ и } q(x_1, x_2),$$

т. е.

$$\psi(x_1, x_2) = a^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + q(x_1, x_2). \quad (7.55)$$

Введенная новая гармоническая функция $q(x_1, x_2)$ на границе прямоугольника должна удовлетворять условиям

$$q(\pm a, x_2) = 0, \quad q(x_1, \pm b) = x_1^2 - a^2. \quad (7.56)$$

Гармоническую функцию $q(x_1, x_2)$ возьмем в виде ряда

$$q(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \operatorname{ch}(\beta_n x_2) \cos(\beta_n x_1). \quad (7.57)$$

Учтывая (7.57) в граничных условиях (7.56), получим

$$\beta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a},$$

$$x_1^2 - a^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \operatorname{ch}(\beta_n b) \cos(\beta_n x_1).$$

Из второго соотношения находим

$$\alpha_n = \frac{1}{a \operatorname{ch}(\beta_n b)} \int_{-a}^a (x_1^2 - a^2) \cos(\beta_n x_1) dx_1 = -\frac{4}{a \beta_n^3} \frac{\sin(\beta_n a)}{\operatorname{ch}(\beta_n b)}.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) = & a^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \\ & - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch}(2n+1) \frac{\pi}{2a} x_2}{\operatorname{ch}(2n+1) \frac{\pi}{2a} b} \cos(2n+1) \frac{\pi}{2a} x_1. \end{aligned}$$

Теперь компоненты тензора напряжений могут быть вычислены по формулам (7.12).

д) Призматическое тело круглого сечения с круглым эксцентричным отверстием. Обозначим через S область, занятую каким-

либо поперечным сечением тела, ограниченную извне окружностью L_0 радиуса R , а изнутри — окружностью L_1 радиуса r ; аффикс центра этой окружности назовем e (рис. 34). Для данного случая граничные условия (7.48) примут вид

$$F(t) + \overline{F(t)} = t\bar{t} + C_0 \text{ на } L_0, \quad (7.58)$$

$$F(t) + \overline{F(t)} = t\bar{t} + C_1 \text{ на } L_1. \quad (7.59)$$

Так как на L_0 имеем $t\bar{t} = R^2$ и постоянную C_0 можем выбрать равной $-R^2$, условие (7.58) запишется в виде

$$F(t) + \overline{F(t)} = 0 \text{ на } L_0; \quad (7.60)$$

на L_1 выражение для $t\bar{t}$ может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} t\bar{t} &= (e + re^{i\theta})(e + re^{-i\theta}) = \\ &= er \left\{ \frac{t-e}{r} + \frac{r}{t-e} \right\} + e^2 + r^2, \end{aligned}$$

тогда на L_1 будем иметь

$$\begin{aligned} F(t) + \overline{F(t)} &= er \left\{ \frac{t-e}{r} + \frac{r}{t-e} \right\} + \\ &+ d_0. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Здесь $d_0 = e^2 + r^2 + C_1$.

Решение задачи ищем в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{z-e} \right)^k, \quad (7.62)$$

где первый ряд представляет собой голоморфную функцию внутри L_0 , а второй ряд — голоморфную функцию вне L_1 . Коэффициенты a_k и b_k предполагаются вещественными.

Подставим граничные значения функции $F(z)$ в условия (7.58) и (7.59), тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{t} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k = 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k = er \left\{ \frac{t-e}{r} + \frac{r}{t-e} \right\} + d_0. \quad (7.64)$$

Преобразуем второе слагаемое, входящее в условие (7.63), тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{R} \right)^k \left(\frac{R}{t} \right)^k \frac{1}{\left(1 - \frac{e}{t} \right)^k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{R} \right)^k \left(\frac{R}{t} \right)^k \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v C_{-k}^v \left(\frac{e}{t} \right)^v = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{R} \right)^k \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v C_{-k}^v \left(\frac{e}{R} \right)^v \left(\frac{R}{t} \right)^{k+v}, \end{aligned}$$

где $C_{-k}^v = (-1)^v C_{k+v-1}^v$.

Введем вместо индекса v новый индекс $n = k + v$, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{R} \right)^k \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n-k} C_{-k}^{n-k} \left(\frac{e}{R} \right)^{n-k} \left(\frac{R}{t} \right)^n.$$

Здесь двойное суммирование ведется по целочисленным точкам угла ABC (рис. 35).

Меняя в последней двойной сумме порядок суммирования, найдем

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{t} \right)^n, \quad (7.65)$$

где

$$B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \left(\frac{r}{R} \right)^k \left(\frac{e}{R} \right)^{n-k} C_{-k}^{n-k} b_k. \quad (7.66)$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k \left(\frac{r}{t-e} \right)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{t}{R} \right)^n. \quad (7.67)$$

Учитывая в условии (7.63) разложение (7.65), получим $a_0 = 0$ и бесконечную систему линейных уравнений

$$a_n + B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.68)$$

Для получения второй бесконечной системы линейных уравнений преобразуем первое слагаемое, входящее в условие (7.64), тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t-e}{R} + \frac{e}{R}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^k C_k^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\frac{e}{R}\right)^{k-n} \left(\frac{t-e}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

Здесь двойное суммирование ведется по целочисленным точкам угла AOB (рис. 36). Меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{t-e}{r}\right)^n, \quad (7.69)$$

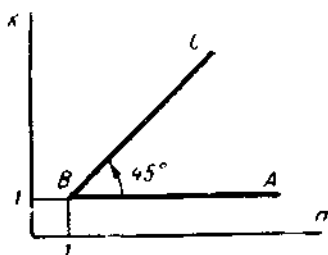


Рис. 35

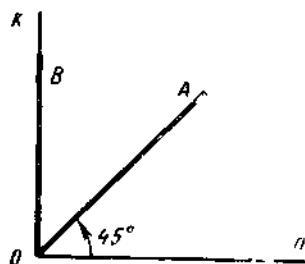


Рис. 36

где

$$A_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left(\frac{e}{R}\right)^{k-n} a_k. \quad (7.70)$$

Очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{t-e}{r}\right)^n. \quad (7.71)$$

Тогда условие (7.64) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_n + b_n) \left[\left(\frac{t-e}{r}\right)^n + \left(\frac{r}{t-e}\right)^n \right] \right\} + 2A_0 &= \\ &= er \left\{ \frac{t-e}{r} + \frac{r}{t-e} \right\} + d_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{d_0}{2} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e}{R}\right)^k a_k = \frac{d_0}{2}, \quad (7.72)$$

$$A_n + b_n = er \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.73)$$

где $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_n = 0$ при $n = 2, 3, 4, \dots$

На основании теоремы существования и единственности решения задач теории упругости можем сделать заключение, что совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (7.68), (7.73) имеет решение и притом оно единственное и ограниченное приближенным ее решением будет решение двух конечных систем, причем число этих уравнений должно фиксироваться в зависимости от параметра, характеризующего близость контуров сечения, и от требуемой точности расчета. После определения корней уравнений (7.68) и (7.73) из соотношения (7.72) определится постоянная C_1 .

Для иллюстрации решения рассмотрим числовой пример. Возьмем из уравнений (7.68) и (7.73) по три первых уравнения, тогда

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{r}{R} b_1 &= 0, \\ a_2 + \frac{r}{R} \frac{e}{R} b_1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 b_2 &= 0, \\ a_3 + \frac{r}{R} \left(\frac{e}{R}\right)^2 b_1 + 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{e}{R} b_2 + \left(\frac{r}{R}\right)^3 b_3 &= 0, \\ \frac{r}{R} a_1 + 2\frac{r}{R} \frac{e}{R} a_2 + 3\frac{r}{R} \left(\frac{e}{R}\right)^2 a_3 + b_1 &= \frac{e}{R} \frac{r}{R} R^2, \\ \left(\frac{r}{R}\right)^2 a_2 + 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{e}{R} a_3 + b_2 &= 0, \\ \left(\frac{r}{R}\right)^3 a_3 + b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Из первых трех уравнений этой системы имеем

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{R}{r} a_1; \quad b_2 = -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(a_2 - \frac{e}{R} a_1\right); \\ b_3 &= -\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left\{a_3 - \left(\frac{e}{R}\right)^2 a_1 - 2\frac{e}{R} \left(a_2 - \frac{e}{R} a_1\right)\right\}; \end{aligned}$$

тогда три последних уравнения системы (7.74) примут вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right) a_1 + 2\frac{r}{R} \frac{e}{R} a_2 + 3\frac{r}{R} \left(\frac{e}{R}\right)^2 a_3 &= \frac{e}{R} \frac{r}{R} R^2, \\ \frac{e}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 a_1 + \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right] a_2 + 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{e}{R} a_3 &= 0, \\ -\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{e}{R}\right)^2 a_1 + 2\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{e}{R} a_2 + \left[\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] a_3 &= 0. \end{aligned}$$

При относительных размерах $r/R=0,2$, $e/R=0,6$ корни будут

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,262167 \cdot 10^{-1} R^2; \quad a_2 = -0,157831 \cdot 10^{-1} R^2; \\ a_3 &= -0,250176 \cdot 10^{-2} R^2; \quad b_1 = 0,131084 R^2; \\ b_2 &= 0,125 \cdot 10^{-2} R^2; \quad b_3 = 0,125 \cdot 10^{-1} R^2. \end{aligned}$$

Для разбираемого примера из (7.72) имеем $C_1 = -0,446929 R^2$.
Значения величины

$$\Delta = \frac{F(t) + \overline{F(\bar{t})}}{\bar{t}t + C_0} 100\%$$

для точек $t=R, t=iR, t=-R$ окружности L_0 и величины

$$\Delta = \frac{F(t) + \overline{F(\bar{t})} - (t\bar{t} + C_1)}{\bar{t}t + C_1} 100\%,$$

для точек $t=e+r$ и $t=e-r$ окружности L_1 соответственно равны: 1,490%, 1,012%, -0,249%, 0,132%, -6,7%. Эти величины свидетельствуют о приемлемом выполнении граничных условий, следовательно, решение вполне эффективное.

На основании формулы (7.50) вычислены значения касательных напряжений, действующих в точках оси x_1 , и построена их эпюра (рис. 37). Как видно из эпюры, возмущение, внесенное отверстием, носит местный характер.

Определим теперь жесткость. Учитывая, что на L_0 и L_1 соответственно имеем $d(\bar{t}t) = dR^2 = 0$, $d(\bar{t}t) =$

$= red\left(\frac{r}{t-e} + \frac{t-e}{r}\right)$, из формулы (7.51) получим

$$D = \mu \frac{\pi R^4}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 + 2\left(\frac{e}{R}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] -$$

$$- \frac{i}{4} \mu \oint_{L_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \left[\left(\frac{t}{R}\right)^k - \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k \right] + b_k \left[\left(\frac{r}{t-e}\right)^k - \left(\frac{t-e}{r}\right)^k \right] \right\} \times \\ \times d\left(\frac{r}{t-e} + \frac{t-e}{r}\right) \frac{r}{R} \frac{e}{R} R^2.$$

При помощи формулы (7.69) и теоремы Коши окончательно получим

$$D = \mu \frac{\pi R^4}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 + 2\left(\frac{e}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] + \pi (A_1 - b_1) \frac{r}{R} \frac{e}{R} R^2 \mu.$$

Для рассматриваемого примера $D = 1,559 \mu R^4$, тогда

$$\tau = \frac{M_k}{D} = 0,641 \frac{M_k}{\mu R^4}.$$

Здесь M_k — заданный крутящий момент.

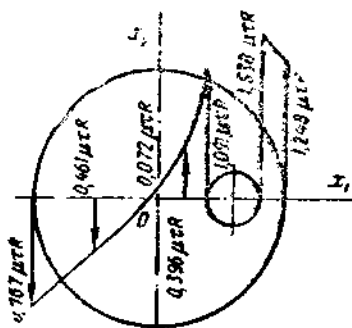


Рис. 37

§ 66. Изгиб призматического тела,
закрепленного одним концом

Пусть призматическое тело длиной l закреплено одним концом, а на свободном конце несет нагрузку, статически эквивалентную силе P , перпендикулярной к оси тела. Массовые силы и силы на боковой поверхности тела отсутствуют. Начало координат поместим в произвольной точке какого-либо сечения. При этом ось ox_3 направим параллельно оси тела, а ось ox_1 — параллельно силе P (рис. 38). Сечение предполагается односвязным.

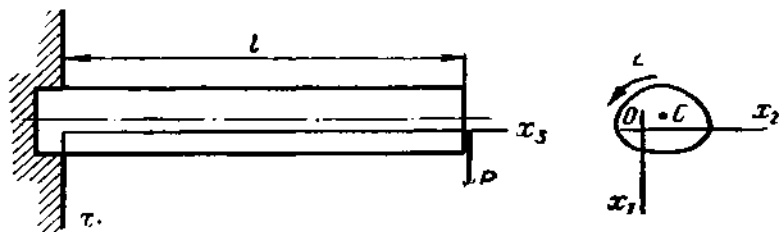


Рис. 38

Решение задачи дается в напряжениях полуобратным методом Сен-Венана. Исходя из физических соображений, примем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad (7.75)$$

$$\sigma_{33} = P(ax_1 + bx_2 + e)(1 - x_3); \quad (7.76)$$

компоненты же тензора напряжений σ_{31} и σ_{32} должны быть определены. Ниже покажем, что коэффициенты a , b , e однозначно определяются формой и размерами поперечного сечения тела и выбором системы координат.

Компоненты тензора напряжений σ_{33} , σ_{31} и σ_{32} в сечении x_3 в данной задаче должны удовлетворять условиям равновесия

$$\int_{\omega} \sigma_{31} d\omega - P = 0, \quad \int_{\omega} \sigma_{32} d\omega = 0, \quad \int_{\omega} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) d\omega = 0, \quad (7.77)$$

$$\int_{\omega} \sigma_{33} d\omega = 0, \quad \int_{\omega} \sigma_{33} x_2 d\omega = 0, \quad \int_{\omega} \sigma_{33} x_1 d\omega + P(l - x_3) = 0. \quad (7.78)$$

Подставим выражение (7.76) в условия (7.78); тогда для коэффициентов a , b и e получим систему трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} aS_2 + bS_1 + e\omega &= 0, \\ aI_{12} + bI_{11} + eS_1 &= 0, \\ aI_{22} + bI_{12} + eS_2 &= -I, \end{aligned} \quad (7.79)$$

где I_{11} , I_{22} , I_{12} , S_1 и S_2 — моменты инерции и статические моменты площади поперечного сечения тела относительно осей x_1 , x_2 , а ω — площадь сечения.

Корни системы (7.79) будут

$$a = -\frac{I_{11}\omega - S_1^2}{B}, \quad b = \frac{I_{12}\omega - S_1S_2}{B}, \quad (7.80)$$

$$e = \frac{I_{11}S_2 - I_{12}S_1}{B},$$

причем

$$B = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & \omega \end{vmatrix}.$$

На основании формул $S_1 = \omega x_{1c}$, $S_2 = \omega x_{2c}$ формуле для коэффициента e придадим вид

$$e = -ax_{1c} - bx_{2c}. \quad (7.81)$$

Здесь x_{1c} , x_{2c} — координаты центра тяжести площади поперечного сечения.

Подставив (7.75) и (7.76) в дифференциальные уравнения равновесия, с учетом $F_j = 0$ получим

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0, \quad (7.82)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - P(ax_1 + bx_2 + e) = 0. \quad (7.83)$$

Из (7.82) следует, что σ_{31} и σ_{32} не зависят от координаты x_3 , следовательно, они одинаково распределены во всех поперечных сечениях.

Уравнению (7.83) придадим вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{31} - \frac{1}{2}P(ax_1^2 + ex_1) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{32} - \frac{1}{2}P(bx_2^2 + ex_2) \right] = 0. \quad (7.84)$$

Из этого уравнения следует, что существует функция $\chi(x_1, x_2)$, связанная с σ_{31} и σ_{32} равенствами

$$\sigma_{31} = \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + ax_1^2 + ex_1 \right), \quad (7.85)$$

$$\sigma_{32} = \frac{P}{2} \left(-\frac{\partial \chi}{\partial x_1} + bx_2^2 + ex_2 \right).$$

Действительно, при подстановке (7.85) в равенство (7.84) последнее удовлетворяется тождественно.

Выведем условия, которым должна удовлетворять функция $\chi(x_1, x_2)$. Для этого подчиним (7.75), (7.76) и (7.85) соотношениям

Бельтрами — Митчелла и граничному условию на боковой поверхности тела.

Из шести соотношений Бельтрами — Митчелла четыре соотношения удовлетворяются тождественно, а два соотношения приводят к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta \chi) = -\frac{2\nu}{1+\nu} a,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta \chi) = -\frac{2\nu}{1+\nu} b,$$

откуда

$$d(\Delta \chi) = \left(-\frac{2\nu}{1+\nu} a \right) dx_2 + \frac{2\nu}{1+\nu} b dx_1.$$

Тогда

$$\Delta \chi = \frac{2\nu}{1+\nu} (bx_1 - ax_2) - 2C. \quad (7.86)$$

Здесь C — постоянная интегрирования, которая должна быть определена.

Условия отсутствия на боковой поверхности тела нагрузки в данном случае дают

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \text{ на } L. \quad (7.87)$$

Учитывая формулы (7.85), а также формулы (6.27), из (7.87) будем иметь граничное условие для функции $\chi(x_1, x_2)$ на L

$$\frac{\partial \chi}{\partial l} = (bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl}. \quad (7.88)$$

Затем задачу (7.86), (7.88) заменим двумя задачами; для этого функцию $\chi(x_1, x_2)$ представим следующим образом:

$$\chi = \Psi + C\Phi, \quad (7.89)$$

где Ψ и Φ — новые функции, подлежащие определению.

Подставляя последнее соотношение в (7.86) и (7.88), задачу (7.86), (7.88) разобьем на две следующие задачи:

$$\Delta \Phi = -2, \quad (7.90)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0 \text{ на } L,$$

$$\Delta \Psi = \frac{2\nu}{1+\nu} (bx_1 - ax_2), \quad (7.91)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = (bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl} \text{ на } L.$$

Следовательно, функция Φ представляет собой функцию напряжения Прандтля.

Таким образом, задача [(7.86), (7.88)] о поперечном изгибе призматического тела разбита на задачу (7.90) о его кручении и задачу

(7.91) об отыскании вспомогательной функции Ψ , называемой функцией изгиба.

Для односвязных поперечных сечений граничные условия на L приводятся к виду

$$\Phi = 0, \quad (7.92)$$

$$\Psi = \int_0^l \left[(bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl} \right] dl. \quad (7.93)$$

Легко убедиться, что при полном обходе контура L значение интеграла (7.93) равно нулю. Действительно, взяв интеграл (7.93) по замкнутому контуру поперечного сечения и применяя к нему формулу Гаусса — Остроградского, а также учитывая первое уравнение системы (7.79), получим

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\omega} \left[[(bx_2^2 + ex_2)] dx_1 + [-(ax_1^2 + ex_1)] dx_2 \right] = \\ &= -2 \int_{\omega} (ax_1 + bx_2 + e) d\omega = -2(aS_2 + bS_1 + e\omega) = 0. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Аналогичным образом можно также убедиться, что при полном обходе контура L значение интеграла (7.88) равно нулю. Это положение и равенство (7.94) в дальнейшем будут использованы.

Нетрудно проверить, что найденные компоненты тензора напряжений σ_{31} и σ_{32} на конце $x_3 = l$ тождественно удовлетворяют первым двум условиям (7.77). Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sigma_{31} d\omega &= \int_{\omega} \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + ax_1^2 + ex_1 \right) d\omega = \\ &= \int_{\omega} \left\{ \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + ax_1^2 + ex_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 \left[\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - P(ax_1 + bx_2 + e) \right] \right\} d\omega \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sigma_{31} d\omega &= \frac{P}{2} \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[x_1 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + ax_1^2 + ex_1 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[x_1 \left(-\frac{\partial \chi}{\partial x_1} + bx_2^2 + ex_2 \right) \right] \right\} d\omega - P(aI_{22} + bI_{12} + eS_2). \end{aligned}$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского и учитывая условие (7.88), а также третье уравнение (7.79), получим

$$\int_{\omega} \sigma_{31} d\omega = P.$$

Аналогичным образом

$$\int_{\omega} \sigma_{32} d\omega = 0.$$

Третье же условие (7.77) позволяет определить входящую в (7.89) постоянную C . Подставив в это условие, согласно (7.85), значения σ_{31} и σ_{32} , получим

$$\begin{aligned} M_3 = & \int_{\omega} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) d\omega = \frac{P}{2} \int_{\omega} \left[- \left(x_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & \left. + (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 \right] d\omega = - \frac{P}{2} \int_{\omega} \left[\frac{\partial (x_1 \chi)}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_2 \chi)}{\partial x_2} \right] d\omega + \\ & + P \int_{\omega} \chi d\omega + \frac{1}{2} P \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} M_3 = & - \frac{P}{2} \int_L [x_1 dx_2 - x_2 dx_1] \chi dl + P \int_{\omega} \chi d\omega + \\ & + \frac{P}{2} \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\omega_l = \frac{1}{2} \int_0^l (x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

тогда

$$M_3 = -P \int_L \chi \frac{d\omega_l}{dl} dl + P \int_{\omega} \chi d\omega + \frac{P}{2} \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega.$$

Произведя интегрирование по частям, найдем

$$M_3 = P \int_L \omega_l \frac{\partial \chi}{\partial l} dl + P \int_{\omega} \chi d\omega + \frac{P}{2} \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega. \quad (7.95)$$

Учитывая в (7.95) формулы (7.88), (7.89), будем иметь

$$\begin{aligned} M_3 = & P \left\{ C \int_{\omega} \Phi d\omega + \int_{\omega} \Psi d\omega + \frac{1}{2} \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega + \right. \\ & \left. + \int_L \left[(bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl} \right] \omega_l dl \right\}. \quad (7.96) \end{aligned}$$

Из условия $M_3=0$ следует

$$C = - \frac{\int \Psi d\omega + \int (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega + \int Q dl}{\int \Phi d\omega}, \quad (7.97)$$

где

$$Q = \left[(bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl} \right] \omega_l. \quad (7.98)$$

Если в качестве координатных осей взять главные центральные оси, то $S_1=S_2=I_{12}=0$. Следовательно, из формул (7.80) получим $a = -\frac{1}{I_{22}}$; $b=e=0$. В этом случае вышеприведенные формулы заметно упрощаются.

§ 67. Центр изгиба

По формулам закона Гука (4.50) компоненты тензора деформаций, соответствующие компонентам тензора напряжений (7.75), (7.76) и (7.85), равны

$$\begin{aligned} e_{11} = e_{22} &= -\frac{\nu P}{E} (ax_1 + bx_2 + e)(l - x_3), \quad e_{12} = 0, \\ e_{33} &= \frac{P}{E} (ax_1 + bx_2 + e)(l - x_3), \\ e_{31} &= \frac{(\nu + 1)P}{2E} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + ax_1^2 + ex_1 \right), \\ e_{32} &= \frac{(1 + \nu)P}{2E} \left(-\frac{\partial \chi}{\partial x_1} + bx_2^2 + ex_2 \right). \end{aligned} \quad (7.99)$$

На основании формул (3.27) угол поворота элемента тела вокруг оси ox_3 будет

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

В силу этой формулы и формул (3.26) найдем

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = \frac{\partial e_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{11}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} = \frac{\partial e_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}.$$

Аналогичным образом можно вывести подобные формулы для частных производных по координатам x_k от остальных углов поворота ω_1 и ω_2 . Величина $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}$ представляет собой кручение волокон призматического тела, параллельных оси ox_3 .

Среднее значение кручения для всего поперечного сечения, обозначаемое через τ , определяется формулой

$$\tau = \frac{1}{\omega} \int \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} d\omega = \frac{(1 + \nu)P}{E} \left[C - \frac{\nu}{1 + \nu} (bx_{1c} - ax_{2c}) \right]. \quad (7.100)$$

Таким образом, выясняется, что под действием поперечной силы, приложенной к свободному концу призматического тела, изгиб сопровождается кручением. Как видно из формулы (7.100), чтобы под действием упомянутой силы призматическое тело испытывало только изгиб без участия кручения, постоянную C следует определить формулой

$$C = \frac{\nu}{1 + \nu} (bx_{1c} - ax_{2c}). \quad (7.101)$$

Подставляя (7.101) в формулу (7.96), для крутящего момента M_3 будем иметь

$$M_3 = P \left\{ \frac{\nu}{1 + \nu} (bx_{1c} - ax_{2c}) \int_{\omega} \Phi d\omega + \int_{\omega} \Psi d\omega + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega + \int_L Q dl \right\}. \quad (7.102)$$

Чтобы изгиб тела не сопровождался кручением, необходимо, кроме силы P , действующей в точке o поперечного сечения, приложить к этому сечению еще крутящий момент M_3 , вычисляемый по формуле (7.102). Сложив силу P и крутящий момент M_3 , получим силу P , равную заданной силе, направленную параллельно ей и находящуюся на расстоянии x_2^0 , которое определяется по формуле

$$x_2^0 = -\frac{M_3}{P} = \frac{\nu}{1 + \nu} (-bx_{1c} + ax_{2c}) \int_{\omega} \Phi d\omega - \int_{\omega} \Psi d\omega - \\ - \frac{1}{2} \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega - \int_L Q_* dl. \quad (7.103)$$

Допустим теперь, что поперечная сила P , приложенная в начале координат, направлена вдоль оси ox_2 . Рассуждая аналогичным образом, получим силу P , равную заданной, направленную параллельно ей и находящуюся на расстоянии x_1^0 , которое определяется по формуле

$$x_1^0 = -\frac{\nu}{1 + \nu} (a_* x_{2c} - b_* x_{1c}) \int_{\omega} \Phi d\omega + \int_{\omega} \Psi_* d\omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{\omega} (b_* x_2 - a_* x_1) x_1 x_2 d\omega + \int_L Q_* dl, \quad (7.104)$$

где $Q_* = \left[(b_* x_2^2 + e_* x_2) \frac{dx_1}{dt} - (a_* x_1^2 + e_* x_1) \frac{dx_2}{dt} \right] \omega_t$.

В формуле (7.104) функция Ψ_* удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Psi_* = \frac{2\nu}{1 + \nu} (b_* x_1 - a_* x_2) \quad (7.105)$$

и граничному условию

$$\Psi_* = \int_0^l \left[(b_* x_2^2 + e_* x_2) \frac{dx_1}{dt} - (a_* x_1^2 + e_* x_1) \frac{dx_2}{dt} \right] dt. \quad (7.106)$$

В этих формулах

$$a_* = \frac{I_{12}\omega - S_1 S_2}{B}, \quad b_* = \frac{S_2^2 - \omega I_{22}}{B}, \quad (7.107)$$

$$e_* = \frac{I_{22} S_1 - I_{12} S_2}{B} = -a_* x_{1c} - b_* x_{2c}.$$

Точка пересечения прямых $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ называется центром изгиба.

Любая поперечная сила, приложенная к сечению свободного конца, проходящая через центр изгиба, вызывает изгиб без участия кручения. Чтобы определить положение центра изгиба, совершенно не обязательно решать задачу об изгибе призматического тела, достаточно решить задачу о его кручении. Следуя Новожилову, покажем, что выражения, входящие в (7.104) и (7.103), могут быть вычислены с помощью функции $\Phi(x_1, x_2)$. Для доказательства применим известную формулу Грина для функций Φ и Ψ ; в качестве контура интегрирования возьмем контур поперечного сечения тела

$$\int_{\omega} (\Phi_{\Delta} \Psi - \Psi_{\Delta} \Phi) d\omega = \int_L \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dt. \quad (7.108)$$

Учитывая первые уравнения (7.90), (7.91) и условие (7.92), вместо (7.108) будем иметь

$$-\frac{2\nu}{1+\nu} \int_{\omega} (bx_1 - ax_2) \Phi d\omega + 2 \int_{\omega} \Psi d\omega = - \int_L \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dt. \quad (7.109)$$

На основании соотношений (7.13), (7.10) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -x_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \quad (7.110)$$

Учитывая здесь формулы (6.27), найдем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2 \frac{d\omega_l}{dt}. \quad (7.111)$$

Подставив (7.111) в правую часть (7.109) и интегрируя по частям, с учетом второго соотношения (7.91) получим

$$\int_L \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dt = - \int_L \Psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2 \frac{d\omega_l}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_L (\varphi + 2\omega_2) \frac{\partial \Psi}{\partial l} dl = I + 2 \int_L Q dl, \quad (7.112)$$

где $I = \int_L \{ [(bx_2^2 + ex_2) \varphi] dx_1 + [-(ax_1^2 + ex_1) \varphi] dx_2 \}$.

На основании формулы Гаусса — Остроградского имеем

$$I = - \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [(ax_1^2 + ex_1) \varphi] + \frac{\partial}{\partial x_2} [bx_2^2 + ex_2) \varphi] \right\} d\omega,$$

или

$$I = -2 \int_{\omega} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi d\omega - \\ - \int_{\omega} \left[(ax_1^2 + ex_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + (bx_2^2 + ex_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right] d\omega.$$

Подставим в эту формулу из (7.110) значения $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$; тогда

$$I = -2 \int_{\omega} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi d\omega + \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega + \\ + \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial [(bx_2^2 + ex_2) \Phi]}{\partial x_1} - \frac{\partial [(ax_1^2 + ex_1) \Phi]}{\partial x_2} \right\} d\omega.$$

Интегрируя третье слагаемое по частям и учитывая, что на контуре L функция $\Phi = 0$, убедимся, что оно обращается в нуль. Следовательно,

$$I = -2 \int_{\omega} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi d\omega + \int_{\omega} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega. \quad (7.113)$$

Учитывая (7.112) и (7.113) в (7.109), а затем подставляя полученный результат в (7.103), окончательно получим формулу для координаты центра изгиба

$$x_2^0 = - \int_{\omega} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi d\omega + \frac{\nu}{1 + \nu} \int_{\omega} [b(x_1 - x_{1c}) - \\ - a(x_2 - x_{2c})] \Phi d\omega. \quad (7.114)$$

Аналогичным образом из (7.104) получим формулу для другой координаты центра изгиба

$$x_1^0 = \int_{\omega} (a_* x_1 + b_* x_2 + e_*) \varphi d\omega - \\ - \frac{\nu}{1 + \nu} \int_{\omega} [b_*(x_1 - x_{1c}) - a_*(x_2 - x_{2c})] \Phi d\omega, \quad (7.115)$$

Как видно, в формулы для определения центра изгиба призматического тела с односвязным сечением входят функции φ и Φ , связанные только с решением задачи о кручении тела. Следует отметить, что если известна одна из функций φ , Φ , то другая определяется путем квадратуры из (7.110).

В работе* выведены формулы для определения координат центра изгиба (x_1^0, x_2^0) в случае многосвязной области

$$\begin{aligned}
 x_1^0 = & \int_{\omega} (a_* x_1 + b_* x_2 + e_*) \operatorname{Im} F(z) d\omega - \frac{\nu}{\nu+1} \left\{ \int_{\omega} [b_* (x_1 - x_{1c}) - \right. \\
 & \left. - a_* (x_2 - x_{2c})] \left(\operatorname{Re} F(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right) d\omega + \right. \\
 & \left. + [b_* (x_{1c}^0 - x_{1c}) - a_* (x_{2c}^0 - x_{2c})] C_0 \omega_0 - \sum_{k=1}^n [b_* (x_{1c}^k - x_{1c}) - \right. \\
 & \left. - a_* (x_{2c}^k - x_{2c})] C_k \omega_k \right\} \\
 x_2^0 = & \int_{\omega} (a x_1 + b x_2 + e) \operatorname{Im} F(z) d\omega + \frac{\nu}{\nu+1} \left\{ \int_{\omega} [b (x_1 - x_{1c}) - \right. \\
 & \left. - a (x_2 - x_{2c}) \left(\operatorname{Re} F(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right) d\omega + [b (x_{1c}^0 - x_{1c}) - \right. \\
 & \left. - a (x_{2c}^0 - x_{2c})] C_0 \omega_0 - \sum_{k=1}^n [b (x_{1c}^k - x_{1c}) - a (x_{2c}^k - x_{2c})] C_k \omega_k \right\}
 \end{aligned}$$

где:

$F(z)$ — комплексная функция кручения, x_{1c}^k, x_{2c}^k — координаты центра тяжести площади, заключенной внутри контура L_k , x_{1c}, x_{2c} — координаты центра тяжести площади сечения, ω_k — площадь, заключенная внутри контура L_k , C_k — константы, вводимые в (7.20). Постоянные (a, b, e) , (a_*, b_*, e_*) определяются соответственно по формулам (7.80), (7.107).

Рассмотрим задачу об определении центра изгиба, когда сечение консоли представляет собою область, ограниченную извне окружностью L_0 радиуса R , а изнутри — окружностью L_1 радиуса r (рис. 34). Приближенное выражение комплексной функции кручения $F(z)$ для этой задачи определяется формулой (7.62).

Для принятой системы координат $e = a = 0$, $b = 1,288 R^{-1}$. Для относительных размеров, указанных в задаче D , на основании вышеприведенных формул $x_1^0 = -0,1170 R$, $x_2^0 = 0$.

* Ю. А. Амензаде, О. Л. Бубутейшвили, «Центр изгиба консоли с многосвязным поперечным сечением». ДАН Азерб. ССР, том 29, № 10, 1973 г.

**§ 68. Изгиб призматического тела
с эллиптическим поперечным
сечением**

Пусть плоскости ox_1 и ox_2 будут плоскостями симметрии призматического тела, а нагрузка, действующая на его торцев, статически эквивалентна силе P , которая направлена вдоль оси x_1 и приложена в центре торца. В этих условиях, очевидно, тело будет работать на изгиб без кручения.

На основании формул (7.80) будем иметь

$$a = -\frac{1}{I_{22}}; \quad b = c = 0.$$

Учитывая эти соотношения в (7.91), будем иметь

$$\Delta \Psi = \frac{2\nu}{(1 + \nu) I_{22}} x_2, \quad (7.116)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = \frac{1}{I_{22}} x_1^2 \frac{dx_2}{dl} \text{ на } L. \quad (7.117)$$

Следуя приему Тимошенко, введем вместо функции изгиба Ψ новую функцию

$$Q(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2) + f(x_2), \quad (7.118)$$

где $f(x_2)$ — произвольная функция только от x_2 .

Подставляя (7.118) в (7.117), получим граничные условия на L

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = \left(\frac{1}{I_{22}} x_1^2 + f' \right) \frac{dx_2}{dl}. \quad (7.119)$$

В частном случае функцию $f(x_2)$ можно выбрать таким образом, чтобы выражение, находящееся в скобках, обращалось в нуль, тогда граничное условие на L примет простой вид

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 0. \quad (7.120)$$

Поскольку поперечное сечение односвязное, (7.120) на L может быть записано в виде

$$Q = 0. \quad (7.121)$$

Например, для случая, когда поперечное сечение представляет собой эллипс, равенству (7.120) можно удовлетворить, положив

$$f(x_2) = \frac{a_1^2}{I_{22}} x_2 \left(\frac{1}{3} \frac{x_2^2}{b_1^2} - 1 \right). \quad (7.122)$$

Здесь a_1 и b_1 — полуоси эллипса.

Рассмотрим задачу об изгибе эллиптического цилиндра. Для данной задачи, в силу (7.118), функция Q примет вид

$$Q(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2) + \frac{a_1^2}{I_{22}} x_2 \left(\frac{1}{3} \frac{x_2^2}{b_1^2} - 1 \right). \quad (7.123)$$

Учитывая (7.123) в (7.116), получим уравнение вида

$$\Delta Q = n x_2, \quad (7.124)$$

где

$$n = \frac{2}{I_{22}} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} + \frac{a_1^2}{b_1^2} \right). \quad (7.125)$$

Решение уравнения (7.124) ищем в виде

$$Q = K \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{b_1^2} - 1 \right) x_2. \quad (7.126)$$

Это решение удовлетворяет граничному условию (7.121).

Подставляя (7.126) в уравнение (7.124), будем иметь

$$2K \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{3}{b_1^2} \right) = n,$$

откуда

$$K = \frac{1}{I_{22}} \frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2 + 3a_1^2} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} + \frac{a_1^2}{b_1^2} \right). \quad (7.127)$$

Зная функцию Q , из (7.123) можем определить функцию Ψ

$$\Psi = K \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{b_1^2} - 1 \right) x_2 - \frac{a_1^2}{I_{22}} x_2 \left(\frac{1}{3} \frac{x_2^2}{b_1^2} - 1 \right). \quad (7.128)$$

На основании формул (7.85) с учетом того, что для заданной задачи $\chi = \Psi$, будем иметь

$$\sigma_{13} = \frac{P}{2} \left\{ K \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{3x_2^2}{b_1^2} - 1 \right) - \frac{a_1^2}{I_{22}} \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{b_1^2} - 1 \right) \right\}, \quad (7.129)$$

$$\sigma_{23} = -PK \frac{x_1 x_2}{a_1^2};$$

из формулы (7.76)

$$\sigma_{33} = -\frac{P}{I_{22}} x_1 (l - x_3). \quad (7.130)$$

Последняя формула нормального напряжения полностью совпадает с формулой элементарной теории изгиба, чего нельзя сказать в отношении формул для тангенциальных напряжений σ_{13} и σ_{23} . Со-

гласно элементарной теории изгиба, в данной задаче $\sigma_{23}=0$, а σ_{13} зависит только от x_1 .

На оси $x_1=0$ имеем

$$\sigma_{13} = \frac{P a_1^2}{2I_{22}(1+\nu)(b_1^2 + 3a_1^2)} \{b_1^2 + 2(1+\nu)a_1^2 - x_2^2(1-2\nu)\}, \quad (7.131)$$

$$\sigma_{23} = 0,$$

тогда как по формуле Журавского на этой оси

$$\sigma_{13} = \frac{P a_1^2}{3I_{22}}. \quad (7.132)$$

Если материал несжимаем, т. е. $\nu=0,5$, формулы (7.131) и (7.132) совпадают.

В данной главе мы рассмотрели теорию кручения и изгиба призматических тел, имеющую большое значение для техники. Здесь не обсуждается большое число специальных задач, исследованных многими авторами.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

В настоящей главе мы остановимся на некоторых принципах теории упругости, имеющих важное значение для получения группы методов весьма эффективного численного решения граничных задач теории упругости. С одной из общих теорем теории упругости — теоремой Клапейрона мы познакомимся в четвертой главе.

§ 69. Теорема взаимности Бетти

Обозначим через σ'_{kr} , u'_k , e'_{kr} и σ''_{kr} , u''_k , e''_{kr} соответственно компоненты тензора напряжений, вектора перемещения и тензора деформаций, которые возникают в упругом теле под действием внешних сил $\rho F'$, T'_n и $\rho F''$, T''_n .

Работа сил $\rho F'$, T'_n , включая и силы инерции $-\rho \frac{\partial^2 u'_k}{\partial t^2}$ на перемещениях u''_k , равна

$$A_{12} = \int_{\tau} \left[\left(F'_k - \frac{\partial^2 u'_k}{\partial t^2} \right) u''_k \right] \rho d\tau + \int_{\omega} (T'_{nk} u''_k) d\omega.$$

Внося в последнее выражение $T'_{nk} = \sigma'_{kr} n_r$ и учитывая симметричность тензора напряжений, после преобразования поверхностного интеграла в объемный будем иметь

$$A_{12} = \int_{\tau} \left[\frac{\partial \sigma'_{kr}}{\partial x_r} + \rho \left(F'_k - \frac{\partial^2 u'_k}{\partial t^2} \right) \right] u''_k d\tau + \int_{\tau} \sigma'_{kr} e''_{kr} d\tau.$$

В силу (2.24)

$$A_{12} = \int_{\tau} \sigma'_{kr} e''_{kr} d\tau. \quad (8.1)$$

Работа сил $\rho F''$, T''_n , $-\rho \frac{\partial^2 u''_k}{\partial t^2}$ на перемещениях u'_k равна

$$A_{21} = \int_{\tau} \left[\left(F''_k - \frac{\partial^2 u''_k}{\partial t^2} \right) u'_k \right] \rho d\tau + \int_{\omega} (T''_{nk} u'_k) d\omega.$$

Выполнив для A_{21} преобразования, аналогичные преобразованиям для A_{12} , получим

$$A_{21} = \int_V \sigma_{kr}' e_{kr}' d\tau. \quad (8.2)$$

В силу тождества Бетти (4.61) из (8.1) и (8.2) получим

$$A_{21} = A_{12}. \quad (8.3)$$

Это и есть теорема взаимности Бетти. Из нее следует, что работа первой системы внешних сил на перемещениях упругого тела, вызванных второй системой внешних сил, равна работе второй системы внешних сил на перемещениях того же тела, вызванных первой системой сил.

§ 70. Принцип минимума потенциальной энергии

Обозначим истинный вектор перемещения через u , а соответствующий ему тензор напряжений — через σ_{mk} . Этот тензор напряжений удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + \rho F_k = 0 \quad (8.4)$$

и условиям на поверхности

$$T_{nm} = \sigma_{mk} n_k. \quad (8.5)$$

Придадим вектору перемещения вариацию δu , тогда на основе $u^* = u + \delta u$ из формул (3.26) будем иметь

$$e_{mk} + \delta e_{mk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) + \frac{1}{2} \left(\delta \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \delta \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right). \quad (8.6)$$

Отсюда найдем изменение тензора деформаций

$$\delta e_{mk} = \frac{1}{2} \left(\delta \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \delta \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right). \quad (8.7)$$

Обозначая удельную работу деформации варьированного состояния равновесия через $A(e_{mk} + \delta e_{mk})$ и разлагая ее выражение в ряд Тейлора, получим

$$A(e_{mk} + \delta e_{mk}) = A(e_{mk}) + \left(\frac{\partial A}{\partial e_{11}} \delta e_{11} + \dots + \frac{\partial A}{\partial e_{31}} \delta e_{31} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial e_{11}^2} \delta e_{11}^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial e_{11} \partial e_{22}} \delta e_{11} \delta e_{22} + \dots + \frac{\partial^2 A}{\partial e_{31}^2} \delta e_{31}^2 \right). \quad (8.8)$$

Здесь $A(e_{mk})$ — значение удельной работы деформации в истинном состоянии равновесия. Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{kk} \partial e_{rr}} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial e_{kk}}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial e_{kr}^2} = \frac{\partial (2\sigma_{kr})}{\partial e_{kr}} \quad (k \neq r)$$

и принимая во внимание закон Гука, последнему члену (8.8) придадим вид

$$\frac{1}{2} [\lambda (\delta\theta)^2 + 2\mu \delta e_{mk} \delta e_{km}]. \quad (8.9)$$

Выражение (8.9), как известно из (4.36), представляет собой значение удельной работы деформации, соответствующее вариации вектора перемещения $\delta \mathbf{u}$, и всегда положительно-определенно.

Используя (4.20) и (8.7), второму члену (8.8) придадим вид

$$\sigma_{11} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \sigma_{31} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \sigma_{mk} \frac{\partial \delta u_m}{\partial x_k}. \quad (8.10)$$

Обозначим векторы напряжения на координатных площадках через T_m ; тогда вместо (8.10) будем иметь

$$\sigma_{mk} \frac{\partial \delta u_m}{\partial x_k} = T_m \cdot \nabla \delta u_m, \quad (8.11)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Из (8.8), с учетом (8.9), (8.11), найдем

$$\delta R = \int_{\tau} T_m \cdot \nabla \delta u_m d\tau + \int_{\tau} \frac{1}{2} (\lambda \delta\theta^2 + 2\mu \delta e_{mk} \delta e_{km}) d\tau, \quad (8.12)$$

выражающую приращение работы деформации. Непосредственной проверкой легко найти, что

$$\operatorname{div} \delta u_m T_m = \delta u_m \operatorname{div} T_m + T_m \cdot \nabla \delta u_m, \quad (8.13)$$

(здесь по индексу m суммирование не производится), откуда

$$\int_{\tau} T_m \cdot \nabla \delta u_m d\tau = \int_{\tau} \operatorname{div} \delta u_m T_m d\tau - \int_{\tau} \delta u_m \operatorname{div} T_m d\tau. \quad (8.14)$$

При помощи формулы Гаусса — Остроградского получим

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \delta u_m T_m d\tau = \int_{\omega} \delta u_m \sigma_{mk} n_k d\omega. \quad (8.15)$$

В правой части второго равенства подынтегральное выражение суммируется по индексу k ; n_k — косинусы углов между нормалью \mathbf{n} и осями координат x_k .

На основании формулы (8.5) из (8.15) найдем

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \delta u_m T_m d\tau = \int_{\omega} T_{nm} \delta u_m d\omega,$$

а на основании уравнения равновесия (2.27)

$$\int_{\tau} \delta u_m \operatorname{div} T_m d\tau = \int_{\tau} -\rho F_m \delta u_m d\tau.$$

Следовательно, из (8.12) с учетом (8.14) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta R = & \int_{\tau} \rho F_m \delta u_m d\tau + \int_{\omega} T_{nm} \delta u_m d\omega + \\ & + \int_{\tau} \frac{1}{2} (\lambda \delta \theta^2 + 2\mu \delta e_{mk} \delta e_{km}) d\tau. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Пусть $\omega_{\bar{u}}$ — сумма тех частей поверхности, на которых вектор перемещения принимает заданные значения, а ω_{τ} — оставшаяся часть поверхности, на которой заданы силы T_{nm} . Учитывая, что на $\omega_{\bar{u}}$, где поверхностные силы неизвестны, $\delta u_m = 0$ и на ω_{τ} поверхностные силы T_{nk} , так же, как и массовые силы, не варьируются, из (8.16) найдем

$$\delta \left(R - \int_{\tau} \rho F_m u_m d\tau - \int_{\omega_{\tau}} T_{nm} u_m d\omega \right) = \frac{1}{2} \int_{\tau} [\lambda \delta \theta^2 + 2\mu \delta e_{mk} \delta e_{km}] d\tau \quad (8.17)$$

или

$$\delta \Pi = \varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi = & R - \int_{\tau} \rho F_m u_m d\tau - \int_{\omega_{\tau}} T_{nm} u_m d\omega, \\ \varepsilon = & \frac{1}{2} [\lambda \delta \theta^2 + 2\mu \delta e_{mk} \delta e_{km}] d\tau. \end{aligned}$$

Здесь R — работа деформаций, соответствующая истинным перемещениям; $\int_{\tau} \rho F_m u_m d\tau$ — работа объемных сил на истинных перемещениях; $\int_{\omega_{\tau}} T_{nm} u_m d\omega$ — работа заданных на ω_{τ} поверхностных сил на перемещениях u_m ; Π — потенциальная энергия тела; ε — положительно-определенная величина.

Равенство (8.17) позволяет сформулировать следующую теорему: потенциальная энергия упругого тела, рассматриваемая как функционал произвольной системы перемещений, удовлетворяющей кинематическим граничным условиям, принимает минимальное значение для системы перемещений, фактически реализуемой в упругом теле.

§ 71. Принцип минимума дополнительной работы — принцип Кастильяно

Рассмотрим теперь равновесие, при котором заданы перемещения u_k и соответствующий тензор напряжений σ_{mk} . При переходе от истинного напряженного состояния σ_{mk} к смежному $\sigma_{mk} + \delta \sigma_{mk}$ изменение удельной работы деформации будет

$$\delta A = A(\sigma_{mk} + \delta \sigma_{mk}) - A(\sigma_{mk}).$$

Измененный тензор напряжений $\sigma_{mk} + \delta\sigma_{mk}$ так же, как истинный тензор напряжений σ_{mk} , должен удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия, т. е.

$$\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + \rho F_k = 0, \quad \frac{\partial (\sigma_{mk} + \delta\sigma_{mk})}{\partial x_m} + \rho F_k = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial \delta\sigma_{mk}}{\partial x_m} = 0. \quad (8.18)$$

Разложив выражение удельной работы деформации $A(\sigma_{mk} + \delta\sigma_{mk})$ в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \delta A = A(\sigma_{mk} + \delta\sigma_{mk}) - A(\sigma_{mk}) = & \left(\frac{\partial A}{\partial \sigma_{11}} \delta\sigma_{11} + \dots + \frac{\partial A}{\partial \sigma_{31}} \delta\sigma_{31} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_{11}^2} \delta\sigma_{11}^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_{11} \partial \sigma_{22}} \delta\sigma_{11} \delta\sigma_{22} + \dots + \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_{31}^2} \delta\sigma_{31}^2 \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Второй член правой части второго равенства (8.19), как это было и в (8.9), представляет собой удельную работу деформации, соответствующую вариации тензора напряжений $\delta\sigma_{mk}$, и всегда положительно-определен.

Пользуясь формулами (4.27), приведем первый член правой части второго равенства (8.19) к виду

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_k} \delta\sigma_{mk}$$

или

$$\delta T_m \cdot \nabla u_m.$$

В свою очередь, аналогично (8.13), имеем

$$\delta T_m \cdot \nabla u_m = \operatorname{div} (u_m \delta T_m) - u_m \operatorname{div} \delta T_m. \quad (8.20)$$

Учитывая (8.18) в (8.20), получим

$$\delta T_m \cdot \nabla u_m = \operatorname{div} (u_m \delta T_m).$$

Следовательно, из (8.19) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta R = & \int_V \operatorname{div} (u_m \delta T_m) d\tau + \\ & + \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_{11}^2} \delta\sigma_{11}^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_{11} \partial \sigma_{22}} \delta\sigma_{11} \delta\sigma_{22} + \dots + \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma_{31}^2} \delta\sigma_{31}^2 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Если в подынтегральном выражении второго интеграла учесть (4.27) и формулы закона Гука (4.50), мы получим работу деформации, выраженную через вариации тензора напряжений $\delta\sigma_{mk}$.

Применяя к первому слагаемому формулу Гаусса — Остроградского и обозначая второй интеграл через ε , будем иметь

$$\delta R = \int_{\omega} u_m \delta \sigma_{mk} n_k d\omega + \varepsilon = \int_{\omega} u_m \delta T_{nm} d\omega + \varepsilon. \quad (8.21)$$

Наложим на измененный тензор напряжений $\sigma_{mk} + \delta \sigma_{mk}$ условие, чтобы он был уравновешен заданными поверхностными силами. Тогда на тех частях поверхности, на которых заданы силы, $\delta T_n = 0$. Исходя из этого, (8.21) примет вид

$$\delta R = \int_{\omega_u} u_m \delta T_{nm} d\omega + \varepsilon.$$

Здесь ω_u — сумма тех частей поверхности, на которых заданы перемещения. Учитывая, что на ω_u перемещения u_m не варьируются, последней формуле придадим вид

$$\delta R^* = \varepsilon, \quad (8.22)$$

где

$$R^* = R - \int_{\omega_u} u_m T_{nm} d\omega.$$

Здесь $\int_{\omega_u} u_m T_{nm} d\omega$ — работа поверхностных сил на заданных на ω_u перемещениях; R^* называется дополнительной работой.

Принимая во внимание, что ε всегда положительно-определенная величина, приходим к выводу, что R^* принимает минимальное значение.

Равенство (8.22) позволяет сформулировать следующую теорему: дополнительная работа упругого тела, рассматриваемая как функционал произвольной системы напряжений, удовлетворяющей уравнениям равновесия внутри тела и на его поверхности, принимает минимальное значение для системы напряжений, фактически реализуемой в упругом теле.

§ 72. Метод Рэля-Ритца

Решение задачи теории упругости часто связано со значительными математическими трудностями. В этих случаях прибегают к принципам минимумов потенциальной или дополнительной энергии. Применение этих принципов заключается в отыскании функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи, и минимизации потенциальной энергии P или дополнительной энергии R^* .

Одним из наиболее эффективных вариационных методов является метод Рэля — Ритца. По этому методу решение представляется в виде выражения, удовлетворяющего граничным условиям и содержащего неизвестные коэффициенты c_k , где $k=1, 2, 3, 4, \dots$ Затем вычисляется значение потенциальной или дополнительной энергии. Полученные таким образом выражения будут функциями коэффи-

центов c_k . Эти коэффициенты для истинного состояния равновесия можно определить из условий минимизации потенциальной или дополнительной энергии, т. е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = 0 \text{ или } \frac{\partial R^*}{\partial c_k} = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4 \dots \infty).$$

Если $k=1, 2, 3, \dots, n$, то $\frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = 0$ или $\frac{\partial R^*}{\partial c_k} = 0$ приводят к системе n линейных уравнений относительно коэффициентов c_k . Подставляя значения этих коэффициентов в вышеуказанное выражение, получим приближенное решение задачи. Следует отметить, что полученное таким образом решение задачи является точным, если взятое выражение включает полную последовательность функций, т. е. последовательность измеримых функций класса C , где произвольная функция из этого класса может быть аппроксимирована с заданной точностью при помощи линейной комбинации конечного числа этих функций. Однако в большинстве случаев удается принять во внимание только конечное число коэффициентов c_k .

В качестве примера рассмотрим нестесненное кручение призматических брусьев. Учитывая, что при кручении $e_{11}=e_{22}=e_{33}=\theta=e_{12}=0$, $e_{31}=\sigma_{31}/2\mu$ и $e_{32}=\sigma_{32}/2\mu$, из формулы (4.36) в бруссе длиной a получим накопленную величину энергии деформаций

$$R = \frac{a}{2\mu} \int_{\omega} (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2) dx_1 dx_2,$$

где ω — площадь поперечного сечения брусса.

На основании (7.14) последняя формула примет вид

$$R = \frac{\mu \tau^2 a}{2} \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2.$$

На боковой поверхности брусса заданные поверхностные силы равны нулю, поэтому работа на этой поверхности обращается в нуль, а на обоих торцах его она будет

$$\int_{\omega} [u_1 T_{n1} + u_2 T_{n2}] dx_1 dx_2 |_{x_3=0} + \int_{\omega} [u_1 T_{n1} + u_2 T_{n2}] dx_1 dx_2 |_{x_3=a}. \quad (8.23)$$

Здесь на основании формул (7.1) при $x_3=0$ имеем $u_1=u_2=0$; при $x_3=a$ имеем $u_1=-\tau x_2 a$, $u_2=\tau x_1 a$, а на основании формул (2.22), с учетом того, что $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=0$, при $x_3=a$ имеем $T_{n1}=\sigma_{31}$, $T_{n2}=\sigma_{32}$. Тогда вместо (8.23) будем иметь

$$\mu \tau^2 a \int_{\omega} \left(-x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2.$$

Последнему выражению придадим вид

$$2\mu\tau^2 a \int_{\omega} \Phi dx_1 dx_2 - \mu\tau^2 a \int_{\omega} \left(\frac{\partial(x_1\Phi)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2\Phi)}{\partial x_2} \right) d\omega,$$

откуда при помощи формулы Гаусса — Остроградского получим

$$2\mu\tau^2 a \int_{\omega} \Phi dx_1 dx_2 - \mu\tau^2 a \int_l \Phi (x_1 dx_2 + x_2 dx_1),$$

где l — контур области, занятой поперечным сечением бруса.

Таким образом, дополнительная энергия на основании ее определения будет

$$R^* = \frac{\mu\tau^2 a}{2} \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right)^2 - 4\Phi \right] dx_1 dx_2 + \\ + \mu\tau^2 a \int_l \Phi (x_1 dx_2 + x_2 dx_1).$$

В силу (7.16) на контуре l имеем $\Phi = \text{const}$, с другой стороны, эту постоянную можно взять равной нулю; тогда окончательно будем иметь

$$R^* = \frac{\mu\tau^2 a}{2} \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right)^2 - 4\Phi \right] dx_1 dx_2. \quad (8.24)$$

Возьмем брус прямоугольного сечения со сторонами $2b$ и $2c$. Учитывая, что функция напряжений Прандтля Φ на сторонах $x_1 = \pm b$ и $x_2 = \pm c$ должна быть равной нулю и симметричной относительно x_1 и x_2 , в ее выражение включим только члены с четными степенями x_1 и x_2 , т. е.

$$\Phi = (x_1^2 - b^2)(x_2^2 - c^2)(c_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_2^2 + c_4 x_1^2 x_2^2 + \dots).$$

В первом приближении возьмем выражение

$$\Phi = c_1 (x_1^2 - b^2)(x_2^2 - c^2). \quad (8.25)$$

Подставляя (8.25) в формулу (8.24), найдем

$$R^* = \frac{\mu\tau^2 a}{2} \int_{-b}^b \int_{-c}^c [4c_1^2 [x_1^2 (x_2^2 - c^2)^2 + (x_1^2 - b^2)^2 x_2^2] - \\ - 4c_1 (x_1^2 - b^2)(x_2^2 - c^2)] dx_1 dx_2,$$

откуда

$$R^* = \frac{\mu\tau^2 a}{2} \frac{64}{45} [2c_1^2 b^3 c^3 (b^2 + c^2) - 5c_1 b^3 c^3].$$

Так как для истинного состояния равновесия дополнительная энергия должна принимать минимальное значение, то

$$\frac{\partial R^*}{\partial c_1} = 0,$$

откуда

$$c_1 = \frac{5}{4(b^2 + c^2)}. \quad (8.26)$$

С помощью формулы (7.19) определим крутящий момент

$$M_k = 2\mu\tau \int_{-b}^b \int_{-c}^c \Phi dx_1 dx_2 = 2c_1 \mu\tau \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x_1^2 - b^2)(x_2^2 - c^2) dx_1 dx_2 = \frac{32}{9} b^3 c^3 c_1 \mu\tau. \quad (8.27)$$

Максимальное касательное напряжение T_{\max} , действующее посредине длинной стороны ($b > c$), будет

$$T_{\max} = \mu\tau \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_2 = -c \\ x_1 = 0}} = 2b^2 c c_1 \mu\tau. \quad (8.28)$$

Подставив значение c_1 из (8.27) в формулу (8.28), найдем

$$T_{\max} = \frac{9}{16} \frac{c}{b} \frac{M_k}{c^3}.$$

На основании формул (8.26) и (8.27) для жесткости бруса при кручении будем иметь

$$D = \frac{M_k}{\tau} = \frac{40}{9} \mu \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^3}{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} b^4.$$

В случае бруса квадратного сечения приближенное решение дает значение жесткости $D = 2,222 \mu b^4$ и $T_{\max} = 0,563 M_k / b^3$, в то время как точные значения их будут $D = 2,250 \mu b^4$ и $T_{\max} = 0,600 M_k / b^3$; погрешность соответственно составляет $-1,2\%$ и $-6,2\%$.

Теперь функцию напряжений Φ возьмем в виде

$$\Phi = (x_1^2 - b^2)(x_2^2 - c^2)(c_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_2^2).$$

Тогда

$$R^* = \frac{\mu\tau^2 a}{2} \frac{64}{4725} b^3 c^3 [210(b^2 + c^2)c_1^2 + b^4(66c^2 + 10b^2)c_2^2 + c^4(66b^2 + 10c^2)c_3^2 + b^2(84c^2 + 60b^2)c_1 c_2 + c^2(84b^2 + 60c^2)c_1 c_3 + 12b^2 c^2 (b^2 + c^2)c_2 c_3 - 525c_1 - 105b^2 c_1 - 105c^2 c_3].$$

Из условия минимизации дополнительной энергии

$$\frac{\partial R^*}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial R^*}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial R^*}{\partial c_3} = 0$$

приходим к линейной системе трех уравнений

$$\begin{aligned} 140(b^2 + c^2)c_1 + b^2(28c^2 + 20b^2)c_2 + c^2(28b^2 + 20c^2)c_3 &= 175, \\ (84c^2 + 60b^2)c_1 + b^2(132c^2 + 20b^2)c_2 + 12c^2(b^2 + c^2)c_3 &= 105, \\ (84b^2 + 60c^2)c_1 + 12b^2(b^2 + c^2)c_2 + c^2(132b^2 + 20c^2)c_3 &= 105. \end{aligned}$$

Для случая $c/b = 1$ найдем

$$c_1 = \frac{1295}{2216b^2}, \quad c_2 = c_3 = \frac{525}{4432b^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_k &= 2\mu\tau \int_{S_2} \Phi dx_1 dx_2 = 2,246b^4\mu\tau, \\ T_{\max} &= \mu\tau \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=b \\ x_2=0}} = 0,626 \frac{M_k}{b^3}. \end{aligned}$$

Теперь погрешности соответственно составляют $-0,18\%$ и $+4,3\%$.

Из приведенных числовых примеров явствует, что при возрастании числа неизвестных коэффициентов точность решения повышается. Если точное решение задачи неизвестно, то единственный путь, который позволяет получить ориентировочное представление о точности решения, состоит в последовательном увеличении числа неизвестных коэффициентов и сравнении окончательных результатов. Если результаты быстро сходятся, то можно аппроксимацию считать удачной.

§ 73. Вариационный принцип Рейсснера

В § 71 и 72 нами были изложены два хорошо известных в теории упругости вариационных принципа: принцип минимума потенциальной энергии, который также называется принципом возможных перемещений, и принцип минимума дополнительной работы, на который ссылаются как на принцип Кастильяно.

Рейсснером предложен вариационный принцип, также позволяющий находить приближенные решения задач теории упругости. В этом принципе варьируются независимо друг от друга и тензор напряжений, и перемещения.

Вариационный принцип Рейсснера заключается в том, что вариационное уравнение

$$\delta I = 0, \quad (8.29)$$

где I — функционал Рейсснера,

$$I = \int_{\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) \sigma_{kr} - A \right] d\tau - \int_{\omega} \bar{T}_{nk} u_k d\omega, \quad (8.30)$$

эквивалентно системе шести соотношений между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{kr}^*} \quad (8.31)$$

$$(\sigma_{kr}^* = \sigma_{kr}, \text{ когда } (k=r), \quad \sigma_{kr}^* = 2\sigma_{kr}, \text{ когда } (k \neq r))$$

трем уравнениям равновесия (в целях упрощения массовые силы не учитываются)

$$\frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_k} = 0, \quad (8.32)$$

и граничным условиям

$$T_{nk} = \bar{T}_{nk} \text{ на } \omega_T, \quad (8.33)$$

$$u_k = \bar{u}_k \text{ на } \omega_u. \quad (8.34)$$

Здесь ω_T — сумма тех частей поверхности, на которых заданы силы \bar{T}_{nk} , а ω_u — оставшая часть поверхности, на которой заданы перемещения \bar{u}_k .

Для доказательства этого принципа используем известные соотношения

$$\delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_k} \right).$$

Тогда из (8.29) и (8.30) получим

$$\int_{\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_k} \right) \sigma_{kr} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) \delta \sigma_{kr} - \right. \\ \left. - \frac{\partial A}{\partial \sigma_{kr}^*} \delta \sigma_{kr} \right] d\tau - \int_{\omega_T} \bar{T}_{nk} \delta u_k d\omega = 0.$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, будем иметь

$$\int_{\tau} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_k} \right) \sigma_{kr} d\tau = \int_{\omega} \sigma_{kr} n_r \delta u_k d\omega - \int_{\tau} \frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} \delta u_k d\tau.$$

Учитывая, что $\sigma_{kr} n_r = T_{nk}$ и $\omega = \omega_T + \omega_u$, получим

$$\int_{\tau} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial \delta u_r}{\partial x_k} \right) \sigma_{kr} d\tau = \int_{\omega_T} T_{nk} \delta u_k d\omega + \int_{\omega_u} T_{nk} \delta u_k d\omega - \int_{\tau} \frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} \delta u_k d\tau.$$

Здесь в первом и во втором подынтегральных выражениях суммирование производится по индексу k , а в третьем — по индексам k и r .

В силу последнего соотношения будем иметь

$$\int_{\tau} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial A}{\partial \sigma_{kr}^*} \right] \delta \sigma_{kr} - \frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} \delta u_k \right\} d\tau + \\ + \int_{\tau} (T_{nk} - \bar{T}_{nk}) \delta u_k d\omega + \int_{\omega_u} T_{nk} \delta u_k d\omega = 0.$$

Последний интеграл равен нулю, так как по условию $\delta u_k = 0$ на ω_u .

Поскольку вариация перемещений и напряжений произвольны и независимы, вследствие основной леммы вариационного исчисления мы заключаем, что из написанного условия следует равенство нулю множителей при соответствующих вариациях как в объемном, так и в поверхностном интеграле, т. е. уравнения (8.31), (8.32) и граничные условия (8.33), (8.34).

§ 74. Уравнения равновесия и граничные условия для геометрически нелинейного тела

При решении некоторых задач теории упругости, как например, задач устойчивости, необходимо принимать во внимание компоненты тензора конечной деформации, определяемые формулами (3.17). Здесь мы ограничимся выводом условий равновесия и граничных условий для этого случая.

Из вариационного уравнения равновесия выведем уравнения равновесия и граничные условия для случая, когда компоненты тензора деформаций заданы в декартовой системе координат (3.24)

$$\epsilon_{nk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} \right). \quad (8.35)$$

Предположим, что тело под действием поверхностной силы T_ν и объемной силы ρF находится в равновесии. Тогда вариационное уравнение будет иметь вид

$$\int_{\tau} \sigma_{nk} \delta \epsilon_{nk} d\tau - \int_{\tau} \rho F_k \delta u_k - \int_{\omega} T_{nk} \delta u_k d\omega = 0. \quad (8.36)$$

Варьируя выражение (8.35), получим

$$\delta \epsilon_{nk} = \frac{1}{2} \left(\delta \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \delta \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} \delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right).$$

Непосредственным вычислением легко обнаружить, что данному выражению можно придать вид

$$\delta \epsilon_{nk} = \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{nk} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right) \delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} + \left(\delta_{nk} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} \right) \delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right]. \quad (8.37)$$

Здесь δ_{nk} — символы Кронекера.

На основании (8.37) вариационное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{nk} \left(\delta_{nk} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right) \delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{nk} \left(\delta_{nk} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} \right) \delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} d\tau - \\ - \int_{\tau} \rho F_k \delta u_k - \int_{\omega} T_{nk} \delta u_k d\omega = 0. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Введем несимметричный тензор вида

$$s_{an} = \sigma_{nk} \left(\delta_{ak} + \frac{\partial u_a}{\partial x_k} \right). \quad (8.39)$$

Учитывая это, вариационному уравнению равновесия придадим вид

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} s_{an} \delta \frac{\partial u_a}{\partial x_n} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} s_{ak} \delta \frac{\partial u_a}{\partial x_k} d\tau - \int_{\tau} \rho F_k \delta u_k - \int_{\omega} T_{\nu k} \delta u_k d\omega = 0.$$

Последнее равенство представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x_n} (s_{an} \delta u_a) d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial s_{an}}{\partial x_n} \delta u_a d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial x_k} (s_{ak} \delta u_a) d\tau - \\ - \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial s_{ak}}{\partial x_k} \delta u_a d\tau - \int_{\tau} \rho F_k \delta u_k d\tau - \int_{\omega} T_{\nu k} \delta u_k d\omega = 0. \end{aligned}$$

Применяя здесь формулу Гаусса — Остроградского, найдем

$$\int_{\omega} (s_{an} \nu_n - T_{\nu a}) \delta u_a d\omega - \int_{\tau} \left(\frac{\partial s_{an}}{\partial x_n} + \rho F_a \right) \delta u_a d\tau = 0.$$

На основании леммы вариационного исчисления будем иметь

$$\frac{\partial s_{an}}{\partial x_n} + \rho F_a = 0, \quad s_{an} \nu_n - T_{\nu a} = 0.$$

Учитывая здесь (8.39), получим уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left[\sigma_{nk} \left(\delta_{ak} + \frac{\partial u_a}{\partial x_k} \right) \right] + \rho F_a = 0 \quad (8.40)$$

и граничные условия

$$s_{an} \nu_n = T_{\nu a}. \quad (8.41)$$

ТРЕХМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Для решения трехмерных статических задач теории упругости мы не располагаем таким эффективным аналитическим аппаратом, как в плоской теории упругости. Здесь мы рассмотрим такие частные решения уравнения равновесия в случае отсутствия массовых сил, для которых вблизи определенных точек перемещение неограниченно возрастает. Эти точки должны лежать вне тела или содержаться в особых полостях внутри него. Следует отметить, что наиболее простой тип изолированной особой точки представляет собою точка приложения сосредоточенной силы.

§ 75. Решения Кельвина
и Буссинеска — Папковича

Если на тело действуют массовые силы, то векторное уравнение равновесия имеет вид (5.7). Будем предполагать, что область, занятая телом, простирается безгранично по всем направлениям, а массовая сила F отлична от нуля в области τ_1 , совпадающей либо со всей областью τ , либо с частью ее.

Приводим общую форму частного решения, данную Кельвином. Выразим вектор перемещения при помощи скалярного потенциала φ и векторного потенциала ψ формулой

$$u = \nabla\varphi + \text{rot}\psi. \quad (9.1)$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона.

Предположим также, что массовые силы могут быть представлены в виде

$$F = \nabla\Phi + \text{rot}\Psi. \quad (9.2)$$

Используя в уравнении равновесия (5.7) векторное тождество

$$\text{rot rot } u = \nabla \text{div } u - \Delta u,$$

придем к уравнению

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \text{div } u - \mu \text{rot rot } u + \rho F = 0. \quad (9.3)$$

Из (9.1) вычислим

$$\begin{aligned} \nabla \text{div } u &= \nabla \Delta \varphi, \\ \text{rot rot } u &= \text{rot rot } (\nabla\varphi + \text{rot}\psi) = \text{rot } (\text{rot rot } \psi) = \\ &= \text{rot } (\nabla \text{div } \psi - \Delta\psi) = -\text{rot } \Delta\psi. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения и (9.2) в уравнение равновесия (9.3), найдем

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \Delta\varphi + \rho\Phi] + \text{rot} [\mu\Delta\psi + \rho\Psi] = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \Phi, \quad \Delta\psi = -\frac{\rho}{\mu} \Psi. \quad (9.4)$$

Таким образом, частное решение уравнения (9.3) можно получить на основе частных решений уравнений Пуассона (9.4), имеющих, как известно из теории потенциала, вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_{\tau_1} \frac{\Phi(r')}{l} d\tau_1, \quad (9.5)$$

$$\psi(r) = \frac{\rho}{4\pi\mu} \int_{\tau_1} \frac{\Psi(r')}{l} d\tau_1, \quad (9.6)$$

где $l = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2}$ — расстояние от точки r' (x'_1, x'_2, x'_3) области τ_1 до точки r (x_1, x_2, x_3), для которой вычисляются функции φ и ψ ; интегралы распространяются по области τ_1 , вне которой массовые силы равны нулю (рис. 39); функции $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ определяются по формулам

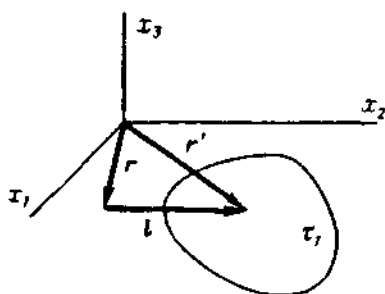


Рис. 39

$$\Phi(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} F \cdot \nabla l^{-1} d\tau_1, \quad (9.7)$$

$$\Psi(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} F \times \nabla l^{-1} d\tau_1, \quad (9.8)$$

которые вытекают из условия, что массовую силу F можно представить в виде (9.2). Действительно, при $\text{div rot } \Psi = 0$ из (9.2) найдем

$$\text{div } F = \text{div } \nabla \Phi, \quad \text{rot } F = \text{rot rot } \Psi$$

или при $\text{div } \Psi = 0$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x'_3},$$

$$\Delta\Psi_1 = -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x'_3}\right), \quad \Delta\Psi_2 = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x'_1}\right),$$

$$\Delta\Psi_3 = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x'_2}\right).$$

Частные решения этих уравнений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x'_3} \right) \frac{1}{l} d\tau_1, \\ \Psi_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x'_3} \right) \frac{1}{l} d\tau_1, \\ \Psi_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x'_1} \right) \frac{1}{l} d\tau_1, \\ \Psi_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x'_2} \right) \frac{1}{l} d\tau_1.\end{aligned}\tag{9.9}$$

Применим формулу Гаусса — Остроградского к первому равенству (9.9); тогда

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{1}{l} F_k n_k d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} F_k \frac{\partial l^{-1}}{\partial x'_k} d\tau_1,\tag{9.10}$$

где ω — поверхность области τ_1 .

Полагая, что массовая сила непрерывна в области τ вплоть до ее границы (тогда на этой границе $F_k=0$, а также $\frac{\partial l^{-1}}{\partial x'_k} = -\frac{\partial l^{-1}}{\partial x_k}$), вместо (9.10) получим (9.7). Таким же образом, из трех оставшихся уравнений (9.9) найдем

$$\begin{aligned}\Psi_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(F_3 \frac{\partial l^{-1}}{\partial x_2} - F_2 \frac{\partial l^{-1}}{\partial x_3} \right) d\tau_1, \\ \Psi_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(F_1 \frac{\partial l^{-1}}{\partial x_3} - F_3 \frac{\partial l^{-1}}{\partial x_1} \right) d\tau_1, \\ \Psi_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_1} \left(F_2 \frac{\partial l^{-1}}{\partial x_1} - F_1 \frac{\partial l^{-1}}{\partial x_2} \right) d\tau_1.\end{aligned}$$

Эти три скалярные равенства эквивалентны одному векторному равенству (9.8).

Для получения решения Буссинеска — Папковича общее решение уравнения равновесия (9.3) представим в виде

$$\mathbf{u} = A \nabla (\varphi + \mathbf{r} \cdot \psi) + B \psi,\tag{9.11}$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки тела; A и B — неизвестные постоянные; φ и ψ — неизвестные функции координат.

Действуя на обе части равенства (9.11) оператором rot rot и учитывая векторные тождества $\text{rot rot} = \nabla \text{div} - \Delta$, $\text{rot } \nabla = 0$,

найдем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = B (\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} - \Delta \boldsymbol{\phi}).$$

Так как

$$\operatorname{div} \nabla = \Delta; \quad \Delta (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{r} \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} + 2 \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}, \quad (9.12)$$

из (9.11) будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = A \Delta \varphi + A \mathbf{r} \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} + (2A + B) \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}. \quad (9.13)$$

Учитывая (9.12), (9.13) и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = B (\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} - \Delta \boldsymbol{\phi})$ в уравнении (9.3), будем иметь

$$(\lambda + 2\mu) A \nabla (\Delta \varphi + \mathbf{r} \cdot \Delta \boldsymbol{\phi}) + [(\lambda + 2\mu)(B + 2A) - \mu B] \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} + \mu B \Delta \boldsymbol{\phi} + \rho \mathbf{F} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\begin{aligned} \Delta \varphi + \mathbf{r} \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)(B + 2A) - \mu B &= 0, \\ B \Delta \boldsymbol{\phi} + \frac{\rho}{\mu} \mathbf{F} &= 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Из второго уравнения (9.14) найдем

$$B = -\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} A = -4(1 - \nu) A.$$

Приняв $A = 1$, из третьего уравнения будем иметь

$$\Delta \boldsymbol{\phi} = \frac{\rho}{4(1 - \nu)\mu} \mathbf{F}. \quad (9.15)$$

Подставив (9.15) в первое уравнение (9.14), получим

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{4(1 - \nu)\mu} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}. \quad (9.16)$$

Таким образом, решение уравнения равновесия (9.3) может быть найдено в форме (9.11), если векторная функция $\boldsymbol{\phi}$ и скалярная функция φ удовлетворяют соответственно уравнениям Пуассона (9.15) и (9.16). Решение Буссинеска — Папковича включает четыре скалярные функции — скалярную функцию φ и три проекции вектора $\boldsymbol{\phi}$. Представление, в котором $\boldsymbol{\phi}$ является не гармонической, а бигармонической функцией, было дано Буссинеском и независимо от него Б. Г. Галеркиным.

Некоторые задачи можно решить, не используя такого количества функций. Если, например, в решении (9.11) принять $\boldsymbol{\phi} = 0$, то получим простое решение вида

$$\mathbf{u} = A \nabla \varphi. \quad (9.17)$$

На основании первого уравнения (9.14) функция φ является

гармонической; кроме того из третьего уравнения (9.14) следует, что решение (9.17) годно для случая, когда отсутствуют массовые силы.

Из (9.17) найдем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = A \operatorname{div} \nabla \varphi = A \Delta \varphi = 0.$$

Таким образом, для простого решения вида (9.17) объемная деформация тождественно равна нулю.

На основании формул (4.35) для решения вида (9.17) формулы тензора напряжений примут вид

$$\sigma_{kr} = 2\mu A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_r}. \quad (9.18)$$

§ 76. Элементарные решения Буссинеска первого и второго рода

В этом параграфе из решения Кельвина мы получим решение для случая сосредоточенной силы F_3 , приложенной в начале координат к твердому телу и действующей в направлении оси x_3 .

Возьмем сколь угодно малую окрестность точки приложения силы (простейшей особой точки), ограниченную плоскостями $x_k = \pm \frac{1}{2} \varepsilon$, и положим, что $F = \frac{F_3}{\rho \varepsilon^3}$; тогда из (9.7) и (9.8) найдем

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{F_3}{4\pi\rho} \frac{x_3}{r^3}, \quad \Psi(\mathbf{r}) = \frac{F_3}{4\pi\rho} \left(-i_1 \frac{x_2}{r^3} + i_2 \frac{x_1}{r^3} \right). \quad (9.19)$$

Подставляя (9.19) в (9.4), получим

$$\Delta \varphi + \frac{F_3}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{x_3}{r^3} = 0; \quad \Delta \psi + \frac{F_3}{4\pi\mu} \left(-i_1 \frac{x_2}{r^3} + i_2 \frac{x_1}{r^3} \right) = 0.$$

Так как $\Delta \left(\frac{x_k}{r} \right) = -\frac{2x_k}{r^3}$, то последние уравнения можно записать в виде

$$\Delta \left(\varphi - \frac{F_3 x_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)r} \right) = 0,$$

$$\Delta \left[\psi + \frac{F_3}{8\pi\mu} \left(i_1 \frac{x_2}{r} - i_2 \frac{x_1}{r} \right) \right] = 0.$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{F_3 x_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)r}, \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{F_3}{8\pi\mu} \left(-i_1 \frac{x_2}{r} + i_2 \frac{x_1}{r} \right),$$

откуда

$$\nabla \varphi = \frac{F_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[-i_1 \frac{x_1 x_3}{r^3} - i_2 \frac{x_2 x_3}{r^3} + i_3 \left(\frac{1}{r} - \frac{x_3^2}{r^3} \right) \right],$$

$$\operatorname{rot} \psi = \frac{F_3}{8\pi\mu} \left[i_1 \frac{x_1 x_3}{r^3} + i_2 \frac{x_2 x_3}{r^3} + i_3 \left(\frac{1}{r} + \frac{x_3^2}{r^3} \right) \right].$$

Подставив эти выражения в формулу (9.1), найдем

$$u = \frac{(\lambda + \mu) F_3}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[i_1 \frac{x_1 x_3}{r^3} + i_2 \frac{x_2 x_3}{r^3} + i_3 \left(\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (9.20)$$

Формула (9.20), полученная из решения Кельвина как частный пример, впервые выведена Буссинеском и названа им элементарным решением первого рода.

На основании (9.20) из формул закона Гука для шести компонентов тензора напряжений имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B \frac{x_3}{r^3} \left[3 \left(\frac{x_1}{r} \right)^2 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], & \sigma_{12} &= 3B \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}, \\ \sigma_{22} &= B \frac{x_3}{r^3} \left[3 \left(\frac{x_2}{r} \right)^2 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], & \sigma_{23} &= B \frac{x_2}{r^3} \left[3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \\ \sigma_{33} &= B \frac{x_3}{r^3} \left[3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], & \sigma_{31} &= B \frac{x_1}{r^3} \left[3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right], \end{aligned} \quad (9.21)$$

где $B = -\frac{(\lambda + \mu) F_3}{4\pi(\lambda + 2\mu)}$.

Элементарным решением второго рода называется решение (9.17), в котором гармоническая функция φ равна

$$\varphi = A \ln(r + x_3).$$

Тогда

$$u_1 = A \frac{x_1}{r(x_3 + r)}, \quad u_2 = A \frac{x_2}{r(x_3 + r)}, \quad u_3 = A \frac{1}{r}. \quad (9.22)$$

На основании формул (9.18) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu A \left(\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(x_3 + r)} - \frac{x_1^2}{r^2(x_3 + r)^2} \right), \\ \sigma_{22} &= 2\mu A \left(\frac{x_1^2 + x_3^2}{r^3(x_3 + r)} - \frac{x_2^2}{r^2(x_3 + r)^2} \right), \\ \sigma_{33} &= -2\mu A \frac{x_3}{r^3}, \quad \sigma_{12} = -2\mu A \frac{x_1 x_2 (x_3 + 2r)}{r^3(x_3 + r)^2}, \\ \sigma_{23} &= -2\mu A \frac{x_2}{r^3}, \quad \sigma_{31} = -2\mu A \frac{x_1}{r^3}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Компоненты вектора напряжения, действующего на площадку, проходящую через данную точку, перпендикулярную к радиусу-вектору r , на основании формул (2.22) с учетом (9.23), а также с учетом того, что $\cos(r, x_k) = \frac{x_k}{r}$, будут

$$T_{r1} = -2\mu A \frac{x_1}{r^2(x_3 + r)}, \quad (9.24)$$

$$T_{r2} = -2\mu A \frac{x_2}{r^2(x_3 + r)}, \quad T_{r3} = -2\mu A \frac{1}{r^2}.$$

Опишем из особой точки — начала координат — сферу радиуса $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ее часть, расположенную в области $x_3 > 0$. На основании формул (9.24) без вычислений можно утверждать, что главный момент всех сил, действующих на поверхности полусферы, и проекции главного вектора этих сил на оси x_1 и x_2 равны нулю, а проекция главного вектора на ось x_3 равна

$$R_3 = \int_{\omega} T_{r3} d\omega = -2\mu A \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega} d\omega = -4\pi\mu A.$$

Следовательно, равнодействующая всех сил, действующих на поверхности полусферы, направлена вдоль оси x_3 и имеет величину

$$R_3 = -4\pi\mu A. \quad (9.25)$$

Таким образом, начало координат представляет собой простой тип изолированной особой точки, в которой приложена сосредоточенная сила, направленная вдоль оси ox_3 и имеющая величину $F_3 = = 2R_3 = -8\pi\mu A$.

§ 77. Давление на поверхность полубесконечного тела

Чтобы найти поле тензора напряжений в теле, занимающем полупространство $x_3 > 0$, подверженное воздействию сосредоточенной силы T , приложенной нормально к плоской границе $x_1 x_2$ этого тела, воспользуемся результатами предыдущих параграфов. Перенесем начало координат в точку приложения этой силы.

Возьмем решение уравнения (9.3) в виде суммы решений (9.20) и (9.22). Тогда

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\lambda + \mu) F_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \frac{x_1 x_3}{r^3} + A \frac{x_1}{r(x_3 + r)}, \\ u_2 &= \frac{(\lambda + \mu) F_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \frac{x_2 x_3}{r^3} + A \frac{x_2}{r(x_3 + r)}, \\ u_3 &= \frac{(\lambda + \mu) F_3}{8\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} \right] + A \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Эти соотношения представляют решение уравнения (9.3) всюду, за исключением точки приложения силы T .

Постараемся определить величины F_3 и A таким образом, чтобы на границе $x_3 = 0$ были выполнены условия отсутствия внешних сил, т. е. $T_{33} = T_{31} = T_{32} = 0$; отсюда

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad (9.27)$$

и на основании законов статики в точке приложения силы

$$T = \frac{F_3}{2} + 4\pi\mu A. \quad (9.28)$$

Учитывая формулы (9.21) и (9.23), из (9.27) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &= -\frac{2x_1}{r^3} \mu \left[\frac{F_3}{8\pi(\lambda+2\mu)} + A \right] = 0, \quad \sigma_{33} = 0; \\ \sigma_{32} &= -\frac{2x_2}{r^3} \mu \left[\frac{F_3}{8\pi(\lambda+2\mu)} + A \right] = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)} F_3 + A = 0. \quad (9.29)$$

Таким образом, для определения F_3 и A мы получили два уравнения (9.28) и (9.29), из которых находим

$$F_3 = \frac{2(\lambda+2\mu)T}{\lambda+\mu}, \quad A = -\frac{T}{4\pi(\lambda+\mu)}.$$

Подставляя полученные значения F_3 и A в формулы (9.26), найдем формулы Буссинеска

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{T}{4\pi\mu} \frac{x_1 x_3}{r^3} - \frac{T}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{x_1}{r(x_3+r)}, \\ u_2 &= \frac{T}{4\pi\mu} \frac{x_2 x_3}{r^3} - \frac{T}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{x_2}{r(x_3+r)}, \\ u_3 &= \frac{T}{4\pi\mu} \frac{x_3^2}{r^3} + \frac{T(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{r}.\end{aligned} \quad (9.30)$$

Решения (9.30) дают значения перемещений во всех точках упругого тела, достаточно удаленных от точки приложения силы T .

В точках границы Ox_1x_2 , где $x_3=0$, величины перемещений определяются по формулам

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{T}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{x_1}{r^2}, \\ u_2 &= -\frac{T}{4\pi(\lambda+\mu)} \frac{x_2}{r^2}, \\ u_3 &= \frac{T(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{r},\end{aligned} \quad (9.31)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Внося значения F_3 и A в формулы (9.21) и (9.23) для определения поля тензора напряжений в рассматриваемом полупространстве, получим

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{T x_3}{2\pi r^3} \left[3 \left(\frac{x_1}{r} \right)^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \right] - \frac{\mu T}{2\pi(\lambda+\mu)} \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_1^2}{r^2(r+x_3)^2} \right], \\ \sigma_{22} &= -\frac{T x_3}{2\pi r^3} \left[3 \left(\frac{x_2}{r} \right)^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \right] - \frac{\mu T}{2\pi(\lambda+\mu)} \left[\frac{x_1^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_2^2}{r^2(r+x_3)^2} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -\frac{T x_3}{2\pi r^3} \left[3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right] + \frac{\mu T}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{x_3}{r^3}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{3T x_1 x_2 x_3}{2\pi r^5} + \frac{\mu T}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{x_1 x_2 (x_3 + 2r)}{r^3 (r + x_3)^2}, \\ \sigma_{23} &= -\frac{T x_2}{2\pi r^3} \left[3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right] + \frac{\mu T}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{x_2}{r^3}, \\ \sigma_{31} &= -\frac{T x_1}{2\pi r^3} \left[3 \left(\frac{x_3}{r} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right] + \frac{\mu T}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{x_1}{r^3}. \end{aligned}$$

Пусть $q(\xi, \eta)$ является интенсивностью силы, распределенной по некоторой площади ω граничной плоскости ox_1x_2 полупространства. На элементарной площадке $d\xi d\eta$ будет действовать сила

$$d\Gamma = q(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

и на основании решения (9.30) перемещения будут

$$u_1 = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\omega} \left(\frac{x_1 x_3}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{x_1}{r(x_3 + r)} \right) q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (9.32)$$

$$u_2 = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\omega} \left(\frac{x_2 x_3}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{x_2}{r(x_3 + r)} \right) q(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$u_3 = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\omega} \left(\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} \right) q(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $r = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + x_3^2}$.

Здесь ξ, η — координаты точки приложения силы $d\Gamma$; x_1, x_2, x_3 — координаты точки, в которой ищутся перемещения u_1, u_2, u_3 .

Перемещение по оси x_3 любой точки границы ox_1x_2 согласно (9.32), равно

$$u_{30} = \theta \int_{\omega} \frac{q(\xi, \eta)}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}} d\xi d\eta, \quad (9.33)$$

где $\theta = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)}$.

§ 78. Задача Герца о давлении двух соприкасающихся тел

Допустим, что два однородных изотропных тела 1 и 2 с различными упругими постоянными соприкасаются в точке o , которую примем за начало прямоугольной декартовой системы координат $x_1x_2x_3$. Расположим оси ox_1, ox_2 в плоскости, касательной к обоим телам в точке o , а оси $x_3^{(1)}, x_3^{(2)}$ совместим соответственно с внутренними нормальными поверхностями этих тел (рис. 40). Относительно этих систем координат уравнения поверхностей соприкасающихся

тел до их деформации будут

$$x_3^{(1)} = f_1(x_1, x_2), \quad x_3^{(2)} = f_2(x_1, x_2). \quad (9.34)$$

Уравнения (9.34) поверхностей тел вблизи точки их касания O (точка O предполагается регулярной) с достаточной степенью точности можно представить в виде

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_1^2} \bigg|_{0,0} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_2^2} \bigg|_{0,0} x_2^2 + \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \bigg|_{0,0} x_1 x_2,$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(2)}}{\partial x_1^2} \bigg|_{0,0} x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(2)}}{\partial x_2^2} \bigg|_{0,0} x_2^2 + \frac{\partial^2 x_3^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} \bigg|_{0,0} x_1 x_2.$$

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 соприкасающихся поверхностей, лежащих на одной нормали к касательной плоскости Ox_1x_2 , определится, согласно последним соотношениям, формулой

$$x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = (A_1 + A_2)x_1^2 + (B_1 + B_2)x_2^2 + (H_1 + H_2)x_1x_2. \quad (9.35)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_1^2} \bigg|_{0,0}; \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(2)}}{\partial x_1^2} \bigg|_{0,0};$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_2^2} \bigg|_{0,0};$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_3^{(2)}}{\partial x_2^2} \bigg|_{0,0}; \quad H_1 = \frac{\partial^2 x_3^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \bigg|_{0,0}; \quad H_2 = \frac{\partial^2 x_3^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} \bigg|_{0,0}.$$

Квадратичная форма $(A_1 + A_2)x_1^2 + (B_1 + B_2)x_2^2 + (H_1 + H_2)x_1x_2$, определяющая расстояние между указанными точками M_1 и M_2 , должна быть положительной при любом выборе осей x_1 и x_2 , и мы можем оси выбрать так, чтобы коэффициент $H_1 + H_2$ обращался в нуль. Тогда, введя обозначения $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$, будем иметь

$$x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = Ax_1^2 + Bx_2^2. \quad (9.36)$$

Следовательно, коэффициенты A и B будут положительными.

Обозначим через $R_1^{(1)}$ и $R_2^{(1)}$ главные радиусы кривизны в точке касания для первого тела, а через $R_1^{(2)}$ и $R_2^{(2)}$ — для второго тела. Если считать их положительными, то

$$2A = \frac{1}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{R_2^{(1)}}, \quad 2B =$$

$$= \frac{1}{R_1^{(2)}} + \frac{1}{R_2^{(2)}}.$$

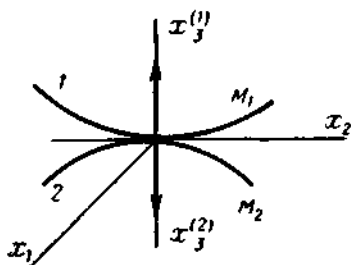


Рис. 40

Из (9.36) делаем вывод, что кривые равных расстояний между двумя точками обеих соприкасающихся поверхностей, лежащих на одной нормали к касательной плоскости ox_1x_2 , будут концентрическими эллипсами.

Допустим, что оба тела прижаты друг к другу силой T , направленной по нормали к касательной плоскости ox_1x_2 в точке o , тогда вблизи этой точки тела будут соприкасаться по малой поверхности. Эта поверхность называется поверхностью давления, а ее контур — контуром давления. Проекцию поверхности давления на касательную плоскость ox_1x_2 называют областью контакта. Можно с достаточной степенью точности допустить, что тела при сжатии приходят в соприкосновение в точках, лежащих до деформации на одной нормали к плоскости ox_1x_2 . Тогда из (9.36) видно, что поверхность давления имеет эллиптическое очертание.

В результате сжатия двух тел любые две точки, лежащие на осях $x_3^{(1)}$ и $x_3^{(2)}$ на столь больших расстояниях от точки o , что деформациями в них можно пренебречь, сблизятся на некоторую величину α , равную сумме перемещений $u_{30}^{(1)}$ и $u_{30}^{(2)}$ точки o .

Обозначим через $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ соответственно перемещения точек обеих соприкасающихся поверхностей, лежащих на одной нормали к плоскости ox_1x_2 в направлениях осей $ox_3^{(1)}$ и $ox_3^{(2)}$. Расстояние между двумя такими точками уменьшится на величину, равную $\alpha - (u_3^{(1)} + u_3^{(2)})$. Таким образом, для всех точек поверхности давления имеет место соотношение

$$x_3^{(1)} + u_3^{(1)} + x_3^{(2)} + u_3^{(2)} = \alpha, \quad (9.37)$$

а для точек вне поверхности давления должно быть

$$x_3^{(1)} + u_3^{(1)} + x_3^{(2)} + u_3^{(2)} > \alpha.$$

Учитывая соотношение (9.36) в формуле (9.37), найдем

$$u_3^{(1)} + u_3^{(2)} = \alpha - Ax_1^2 - Bx_2^2. \quad (9.38)$$

Для определения упругих перемещений и напряжений в области контакта обоих тел будем считать, что поверхность давления очень мала и оба тела можно заменить полупространствами. На эти полупространства по области контакта ω действует нормальное давление $q(\xi, \eta)$; силами трения по поверхности давления будем пренебрегать, т. е. будем считать, что касательные напряжения в области контакта отсутствуют.

Используя в (9.38) формулу (9.33), получим

$$\int_{\omega} \frac{q(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta = (\alpha - Ax_1^2 - Bx_2^2)(\theta_1 + \theta_2)^{-1}, \quad (9.39)$$

здесь $\theta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}$; $\theta_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}$; λ_1 , μ_1 и λ_2 , μ_2 — упругие постоянные Ляме соответственно первого и второго тел; A и B суть известные положительные величины, определяемые по формам соприкасающихся поверхностей.

Итак, решение контактной задачи Герца сводится к определению давления $q(\xi, \eta)$, сближения тел α , а также размеров и формы области контакта ω . В уравнении (9.39) значение сходящегося несобственного интеграла представляет собой потенциал простого слоя распределенного с плотностью $q(\xi, \eta)$ по области контакта. Этот потенциал в точках области контакта, согласно (9.39), представляет квадратичную функцию координат. С другой стороны, известно, что потенциал во внутренних точках однородного эллипсоида

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

является квадратичной функцией координат точки и имеет вид

$$\varphi = \pi abc\rho \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} - \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} - \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda}\right) d\lambda}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{1/2}}.$$

Сопоставляя эти факты, Герц заключает, что правая часть формулы (9.39) может быть принята за потенциал однородного эллипсоида, толщина которого в направлении оси ox_3 стремится к нулю ($c \rightarrow 0$), а плотность ρ пропорционально возрастает, так что масса эллипсоида остается неизменной. Тогда область контакта ω — эллипс, в который вырождается эллипсоид при $c \rightarrow 0$, и имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} (\alpha - Ax_1^2 - Bx_2^2) = \\ & = \pi ab \operatorname{lim} (c\rho) \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} - \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda}}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{1/2}} d\lambda. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Плотность простого слоя $q(\xi, \eta)$ будет равна массе, которая заключена в призме с единичным основанием и высотой

$$2c \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}},$$

т. е. для контактных давлений получим

$$q(\xi, \eta) = 2 \operatorname{lim} (c\rho) \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}. \quad (9.41)$$

Сила T , прижимающая тела, на основании законов статики может быть получена, очевидно, как равнодействующая всех усилий $q(\xi, \eta)$ по области контакта ω . Следовательно, по величине она равна массе всего эллипсоида, т. е.

$$T = \frac{4}{3} \pi ab \operatorname{lim} (c\rho). \quad (9.42)$$

Исключая теперь из формул (9.41) и (9.42) величину $\lim (c\rho)$, окончательно получим

$$q(\xi, \eta) = \frac{3T}{2\pi a b} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}. \quad (9.43)$$

Из равенства (9.40) находим

$$A = \frac{3}{4} T (\theta_1 + \theta_2) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{3/2} [(b^2 + \lambda) \lambda]^{1/2}}, \quad (9.44)$$

$$B = \frac{3}{4} T (\theta_1 + \theta_2) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)^{3/2} [(a^2 + \lambda) \lambda]^{1/2}}, \quad (9.45)$$

$$\alpha = \frac{3}{4} T (\theta_1 + \theta_2) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) \lambda]^{1/2}}. \quad (9.46)$$

Определив из первых двух уравнений полуоси a и b , из третьего уравнения найдем α . В общем случае определение a , b и α связано с вычислением эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода.

Если оба соприкасающихся тела являются шарами, то вычисления упрощаются. В этом случае $A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, где R_1 и R_2 — радиусы шаров. Учитывая, что $A = B$, на основании формул (9.44) и (9.45) имеем $a = b$ (поверхность давления — круг); следовательно, формула (9.44) примет вид

$$A = \frac{3T (\theta_1 + \theta_2)}{4} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) 2\lambda^{3/2}}.$$

Обозначив $\lambda = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$, найдем

$$A = \frac{3T (\theta_1 + \theta_2)}{4a^3} \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \varphi d\varphi$$

или

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{3T (\theta_1 + \theta_2) \pi}{8a^3}.$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 (\theta_1 + \theta_2) \pi T}{4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}}, \quad (9.47)$$

т. е. радиус круга давления пропорционален кубическому корню из силы T .

Из формул (9.43) и (9.46) соответственно имеем

$$q(\xi, \eta) = \frac{3T}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - (\xi^2 + \eta^2)}, \quad (9.48)$$

$$a = \frac{3}{2} T (\theta_1 + \theta_2) \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{3}{4a} T (\theta_1 + \theta_2) \pi$$

или

$$a = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} T^2 (\theta_1 + \theta_2)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (9.49)$$

В случае двух одинаковых шаров имеют место равенства

$$R_1 = R_2 = R, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta.$$

Тогда на основании формул (9.47) и (9.49) будем иметь

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \pi \theta T R}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 \theta^2 T^2}{2R}}.$$

Если второе тело представляет собой полупространство ($R_2 = \infty$), то

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \pi (\theta_1 + \theta_2) T R_1}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16 R_1} T^2 (\theta_1 + \theta_2)^2}.$$

При вдавливании силой T упругого шара в абсолютно жесткую плоскость ($\theta_2 = 0$) имеем

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \pi \theta_1 T R_1}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16 R_1} \theta_1^2 T^2}.$$

Давление $q(\xi, \eta)$ определяется во всех этих случаях по формуле (9.48).

§ 79. Симметричная деформация тела вращения

Пусть тело, представляющее собой тело вращения около оси x_3 , деформируется под действием поверхностных сил (массовые силы отсутствуют) симметрично относительно этой оси вращения. Тогда перемещение в направлении, перпендикулярном плоскости, проходящей через ось x_3 , будет равно нулю, а две другие проекции u_r и u_φ не будут зависеть от полярного угла φ . Для решения этой задачи удобно пользоваться цилиндрическими координатами r, φ, x_3 . Компоненты симметрического тензора деформаций в цилиндрической системе координат, согласно формулам (3.29), будут иметь вид

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ e_{r3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right), \quad e_{r\varphi} = e_{\varphi 3} = 0. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Подставим (9.50) в формулы закона Гука и выразим коэффициенты Ляме λ и μ через E и ν ; тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], \\ \sigma_{r3} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (9.51)$$

Если положить

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial x_3}, \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{E} \left[(1-2\nu) \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right],\end{aligned}\quad (9.52)$$

то формулы (9.51) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left[(2-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right], \\ \sigma_{r3} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right],\end{aligned}\quad (9.53)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\Phi(r, x_3)$ — функция напряжений.

Функции (9.53) тождественно удовлетворяют первым двум дифференциальным уравнениям равновесия (2.30), а третье уравнение принимает вид

$$\Delta \Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)^2 \Phi = 0. \quad (9.54)$$

При этом условии функции (9.53) тождественно удовлетворяют уравнениям совместности (5.37). Таким образом, задача симметричной деформации тела вращения сводится к нахождению решения бигармонического уравнения, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям.

Приведем решение задачи о симметричной деформации сплошного круглого цилиндра, возникшей под действием сил, приложенных на его боковой поверхности и симметрично распределенных

относительно его оси. Для решения этой задачи определим из уравнения (9.54) функцию напряжений Φ . Очевидно, решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (9.55)$$

будет также решением уравнения (9.54). Это решение можно взять в виде

$$\Phi^* = \Phi_1(r) \sin kx_3. \quad (9.56)$$

Тогда из уравнения (9.55) для функции $\Phi_1(r)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_1}{dr} - k^2 \Phi_1 = 0. \quad (9.57)$$

Учитывая, что одно из фундаментальных решений уравнения (9.57) обращается в бесконечность при $r=0$, будем интересоваться ограниченным решением, которое имеет вид

$$\Phi_1 = c_1 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{k^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right). \quad (9.58)$$

Ряд в скобках выражения (9.58) называется бесселевой функцией нулевого порядка с мнимым аргументом (ikr) и обозначается символом $I_0(ikr)$; тогда вместо (9.56) будем иметь

$$\Phi^* = c_1 I_0(ikr) \sin kx_3. \quad (9.59)$$

Производная от бесселевой функции по мнимому аргументу (ikr) с отрицательным знаком называется бесселевой функцией первого порядка и обозначается символом $I_1(ikr)$. Непосредственной проверкой легко установить, что имеет место соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) \Phi_2(r) = 2k^2 I_0(ikr),$$

если

$$\Phi_2(r) = r \frac{d}{dr} I_0(ikr) = -ikr I_1(ikr).$$

Учитывая, что функция $I_0(ikr)$ является решением уравнения (9.57), придем к заключению, что функция $\Phi_2(r)$ является решением уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) \left(\frac{d^2 \Phi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_2}{dr} - k^2 \Phi_2 \right) = 0.$$

Следовательно, решение уравнения (9.54) можно представить в виде

$$\Phi^{**} = c_2 ikr I_1(ikr) \sin kx_3. \quad (9.60)$$

Таким образом, на основании (9.59) и (9.60), функцию напряжений можно представить в виде

$$\Phi = [c_1 I_0(ikr) + c_2 ikr I_1(ikr)] \sin kx_3. \quad (9.61)$$

Подставив эту функцию напряжений Φ в формулы (9.52), найдем компоненты тензора напряжений; например, для σ_{rr} и σ_{r3} будем иметь

$$\sigma_{rr} = [c_1 \psi_1(r) + c_2 \psi_2(r)] \cos kx_3, \quad (9.62)$$

$$\sigma_{r3} = [c_1 \psi_3(r) + c_2 \psi_4(r)] \sin kx_3,$$

где $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$, $\psi_3(r)$, $\psi_4(r)$ — вполне определенные функции, выраженные через $I_0(ikr)$ и $I_1(ikr)$, которые здесь не приводятся.

На основании (9.62) граничные условия на боковой поверхности цилиндра будут

$$T_{rr} = [c_1 \psi_1(R) + c_2 \psi_2(R)] \cos kx_3, \quad (9.63)$$

$$T_{r3} = [c_1 \psi_3(R) + c_2 \psi_4(R)] \sin kx_3.$$

Соответствующим подбором постоянных k , c_1 , c_2 можно изучить различные случаи симметричной относительно оси цилиндра нагрузки, действующей на его боковой поверхности. Например, для случая, когда на боковую поверхность цилиндра действуют нормальные давления $p_n \cos \frac{\pi x_3}{L}$ и касательные силы $q_n \sin \frac{\pi x_3}{L}$,

и когда $k = \frac{\pi x}{L}$ (L длина цилиндра), из формул (9.63) найдем

$$c_1 \psi_1(R) + c_2 \psi_2(R) = -p_n, \quad (9.64)$$

$$c_1 \psi_3(R) + c_2 \psi_4(R) = q_n.$$

Отсюда получим значения постоянных c_1 и c_2 . Если решение уравнения (9.54) взять в виде

$$\Phi = [c_3 I_0(ikr) + c_4 ikr I_1(ikr)] \cos kx_3, \quad (9.65)$$

то соответствующим подбором постоянных c_3 , c_4 , k получим решение задачи, когда на боковую поверхность цилиндра действуют нормальные давления $p_n \sin \frac{\pi x_3}{L}$ и касательные силы $q_n \cos \frac{\pi x_3}{L}$.

Таким образом, комбинируя решения (9.61) и (9.65) и пользуясь принципом сложения действия сил, мы можем получить любое симметричное относительно оси цилиндра распределение нормальных и касательных сил на его боковой поверхности. При этом на торцах цилиндра могут возникнуть некоторые силы, распределенные симметрично относительно оси цилиндра. Налагая на эти силы осевую растягивающую или сжимающую силу, всегда можем добиться того, чтобы равнодействующая всех сил обращалась в нуль. Согласно принципу Сен-Венана влиянием этих сил на напряженное состояние на некотором расстоянии от торцов можно пренебречь.

Теперь рассмотрим задачу об изгибе круглой пластинки постоянной толщины.

Известно, что в сферической системе координат в случае осевой симметрии бигармоническое уравнение таково

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)^2 \Phi = 0. \quad (9.66)$$

Рассмотрим сначала уравнение Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \Phi = 0 \quad (9.67)$$

и найдем его частные решения в виде

$$\Phi_n(R, \psi) = R^n \Phi_n(\psi), \quad (9.68)$$

где n — целое положительное число.

Подставим (9.67) в (9.68), тогда

$$\frac{d^2 \Phi_n}{d\psi^2} + \operatorname{ctg} \psi \frac{d\Phi_n}{d\psi} + n(n+1) \Phi_n = 0. \quad (9.69)$$

Замена независимой переменной $\eta = \cos \psi$ приводит уравнение (9.69) к уравнению Лежандра

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 \Phi_n}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Phi_n}{d\eta} + n(n+1) \Phi_n = 0, \quad (9.70)$$

решение которого ищем в виде многочлена

$$\Phi_n(\psi) = a_1 \eta^n + a_2 \eta^{n-2} + a_3 \eta^{n-4} + \dots + a_r \eta^{n-2r+2} + \dots$$

Подставив это выражение в уравнение (9.70), найдем

$$\begin{aligned} & [n(n-1)a_1 + 2(2n-1)a_2] \eta^{n-2} + \dots + \{ [n(n+1) - (n-2r+2) \times \\ & \times (n-2r+3)] a_r + (n-2r+4)(n-2r+3) a_{r-1} \} \times \\ & \times \eta^{n-2r+2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_r = - \frac{(n-2r+4)(n-2r+3)}{2(r-1)(2n-2r+3)} a_{r-1} \quad (r=2, 3, \dots).$$

Следовательно,

$$\Phi_n(\psi) = a_1 \left[\eta^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \eta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \eta^{n-4} - \dots \right]$$

Подставим это решение в (9.68). Учитывая, что

$$\eta = \cos \psi = \frac{x_3}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + x_3^2}$$

при $n=0, 1, 2, \dots$, получим следующие решения уравнения (9.67):

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= A_0, \\ \Phi_1 &= A_1 x_3, \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = A_2 \left[x_3^2 - \frac{1}{3} (r^2 + x_3^2) \right], \quad (9.71)$$

$$\Phi_3 = A_3 \left[x_3^3 - \frac{3}{5} x_3 (r^2 + x_3^2) \right],$$

$$\Phi_4 = A_4 \left[x_3^4 - \frac{6}{7} x_3^2 (r^2 + x_3^2) + \frac{3}{35} (r^2 + x_3^2)^2 \right].$$

Здесь A_0, A_1, \dots — неизвестные постоянные коэффициенты. Эти решения являются, очевидно, также решениями уравнения (9.66).

Если $R^n \Phi_n(\psi)$ является решением уравнения (9.67), то легко установить, что $R^{n+2} \Phi_n(\psi)$ является решением уравнения (9.66). Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Phi_n(\psi) = \\ = 2(2n+3) R^n \Phi_n(\psi). \end{aligned}$$

Подставим последнее соотношение в уравнение (9.66), тогда, учитывая, что $R^n \Phi_n(\psi)$ является решением уравнения (9.67), будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)^2 R^{n+2} \Phi_n(\psi) = \\ = 2(2n+3) \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \times \\ \times R^n \Phi_n(\psi) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, умножением решений (9.71) на $R^2 = r^2 + x_3^2$ получим решения уравнения (9.66), которые уже не будут решениями уравнения (9.67)

$$\begin{aligned} \Phi_0^* &= B_0 (r^2 + x_3^2), \\ \Phi_1^* &= B_1 x_3 (r^2 + x_3^2), \\ \Phi_2^* &= B_2 (2x_3^2 - r^2)(r^2 + x_3^2), \\ \Phi_3^* &= B_3 (2x_3^3 - 3r^2 x_3)(r^2 + x_3^2). \end{aligned} \quad (9.72)$$

С помощью предыдущих решений рассмотрим различные случаи симметрично нагруженной круглой пластинки (рис. 41).

а) На основании (9.71) и (9.72) функцию напряжений $\Phi(r, x_3)$ представим в виде полинома третьей степени

$$\Phi(r, x_3) = a_3 (2x_3^3 - 3r^2 x_3) + b_3 (x_3^3 + r^2 x_3). \quad (9.73)$$

Подставим эту функцию в формулы (9.53), тогда

$$\sigma_{rr} = 6a_3 + (10\nu - 2) b_3,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_{33} &= -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, \\ \sigma_{r3} &= 0.\end{aligned}\quad (9.74)$$

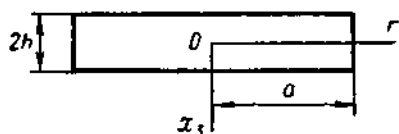


Рис. 41

Таким образом, для функции напряжений (9.73) компоненты тензора напряжений являются постоянными по всей пластинке. Постоянные a_3 и b_3 определяются, если на торцах и боковой поверхности пластинки соответственно заданы равномерно распределенные $\sigma_{33} = T_{33}$ и $\sigma_{rr} = T_{rr}$.

б) Теперь при помощи (9.71) и (9.72) функцию напряжений представим в виде

$$\Phi(r, x_3) = a_4(8x_3^4 - 24r^2x_3^2 + 3r^4) + b_4(2x_3^4 + r^2x_3^2 - r^4).$$

На основании формул (9.53) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 96a_4x_3 + 4b_4(14\nu - 1)x_3, \\ \sigma_{33} &= -192a_4x_3 + 8b_4(8 - 7\nu)x_3, \\ \sigma_{r3} &= 96a_4r - 4b_4(8 - 7\nu)r.\end{aligned}\quad (9.74, a)$$

Если положить $96a_4 - 4b_4(8 - 7\nu) = 0$, тогда

$$\sigma_{33} = \sigma_{r3} = 0, \quad \sigma_{rr} = 28(1 + \nu)b_4x_3.$$

Постоянная b_4 определится, если на боковой поверхности пластинки задано постоянное значение изгибающего момента M_r . Тогда

$$2 \int_0^h \sigma_{rr} x_3 dx_3 = M_r.$$

Данное условие является интегральным, но согласно принципу Сен-Венана найденное напряженное состояние будет достаточно точным в точках, удаленных от боковой поверхности пластинки.

Из последнего соотношения найдем

$$b_4 = \frac{3M_r}{56(1 + \nu)h^3}.$$

Тогда

$$\sigma_{rr} = \frac{3M_r}{2h^3} x_3, \quad \sigma_{33} = \sigma_{r3} = 0.$$

Это решение представляет чистый изгиб пластинки моментами, равномерно распределенными по ее боковой поверхности.

в) Исходя из (9.71) и (9.72), возьмем функцию напряжений

$$\Phi(r, x_3) = \frac{1}{3} a_6 (16x_3^6 - 120x_3^4 r^2 + 90x_3^2 r^4 - 5r^6) + \\ + b_6 (8x_3^6 - 16x_3^4 r^2 - 21x_3^2 r^4 + 3r^6) + a_4 (8x_3^4 - 24r^2 x_3^2 + 3r^4).$$

Для этой функции напряжения таковы

$$\sigma_{rr} = a_6 (320x_3^3 - 720r^2 x_3) + b_6 [64(2 + 11\nu)x_3^3 + \\ + (504 - 48 \cdot 22\nu)r^2 x_3] + 96a_4 x_3, \\ \sigma_{33} = a_6 (-640x_3^3 + 960r^2 x_3) + b_6 [(-960 + 320 \cdot 22(2 - \nu))x_3^3 + \\ + [384 - 48 \cdot 22(2 - \nu)]r^2 x_3] - 192a_4 x_3, \\ \sigma_{r3} = a_6 (960r x_3^2 - 240r^3) + b_6 [(-672 + 48 \cdot 22\nu)x_3^2 r + \\ + (432 - 12 \cdot 22\nu)r^3] + 96a_4 r.$$

К напряжениям σ_{33} прибавим равномерное в направлении оси ox_3 растяжение $\sigma_{33}' = b$, тогда получим компоненты тензора напряжений, которые содержат четыре постоянных a_6 , b_6 , a_4 и b .

Пусть имеем граничные условия

$$\sigma_{33} = 0 \text{ при } x_3 = h, \\ \sigma_{33} = -p \text{ при } x_3 = -h, \\ \sigma_{r3} = 0 \text{ при } x_3 = \pm h,$$

где p — интенсивность равномерной нагрузки.

Подставив в эти граничные условия выражения тензора напряжений, определим постоянные a_6 , b_6 , a_4 и b . Следовательно,

$$\sigma_{rr} = p \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{x_3^3}{h^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 x_3}{h^3} - \frac{3}{8} \frac{x_3}{h} \right], \\ \sigma_{33} = p \left(-\frac{x_3^3}{4h^3} + \frac{3}{4} \frac{x_3}{h} - \frac{1}{2} \right), \\ \sigma_{r3} = \frac{3pr}{8h^3} (h^2 - x_3^2).$$
(9.75)

Напряжения σ_{rr} на боковой поверхности пластинки дают изгибающие моменты M_r , равномерно распределенные по контуру.

Чтобы получить решение для свободно опертой пластинки, к компонентам тензора напряжений (9.75) прибавим напряжения чистого изгиба, и постоянную b_4 определим так, чтобы на боковой поверхности $r = a$

$$M_r = \int_{-h}^h \sigma_{rr} x_3 dx_3 = 0. \quad (9.76)$$

Тогда

$$\sigma_{rr} = \rho \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{x_3^3}{h^3} - \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{r^2 x_3}{h^3} - \frac{3}{8} \frac{2+\nu}{5} \frac{x_3}{h} + \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{a^2 x_3}{h^3} \right). \quad (9.77)$$

Выполнение условия (9.76) означает, что приложение чистого изгиба устраняет изгибающие моменты M_r на боковой поверхности пластинки, при этом действуют напряжения σ_{rr} , равные

$$\sigma_{rr} = \frac{2+\nu}{8} \rho \left(\frac{x_3^3}{h^3} - \frac{3}{5} \frac{x_3}{h} \right).$$

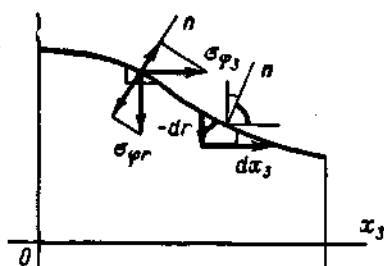


Рис. 42

Учитывая, что главный вектор и главный момент напряжений σ_{rr} равны нулю, на основании принципа Сен-Венана можно утверждать, что поле тензора напряжений будет достаточно точным в точках, удаленных от боковой поверхности.

Рассмотрим кручение тела вращения. Пусть к основаниям тела вращения (рис. 42) приложены заданные усилия, удовлетворяющие условиям равновесия абсолютно твердого тела и приводящиеся к скручивающим парам. Массовые силы отсутствуют и боковая поверхность тела свободна от поверхностных сил.

Эту задачу решим в перемещениях в цилиндрических координатах, полагая, что $u_r = u_3 = 0$, а u_φ , благодаря осевой симметрии деформирования тела вращения, не будет зависеть от полярного угла φ и будет функцией только r и x_3 . Так как $u_r = u_3 = 0$ и $u_\varphi = u_\varphi(r, x_3)$, из формул (3.29) находим

$$\begin{aligned} e_{rr} = e_{\varphi\varphi} = e_{33} = e_{3r} = 0, \\ e_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad e_{\varphi 3} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Подставим (9.78) в формулы закона Гука; тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{33} = \sigma_{3r} = 0, \\ \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \sigma_{\varphi 3} = \mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Учитывая, что компоненты $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi 3}$ также не зависят от угла φ и массовые силы отсутствуют, из уравнений (2.30) получим

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial x_3} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0.$$

Последнему уравнению придадим вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (r^2 \sigma_{\varphi 3}) = 0. \quad (9.80)$$

Решение уравнения (9.80) будет

$$\sigma_{\varphi 3} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \quad (9.81)$$

Здесь функция $\Phi(r, x_3)$, называемая функцией напряжений, определится из уравнений совместности.

Условия совместности деформаций (3.40) с учетом (9.79) для данной задачи примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{\varphi\theta}) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \sigma_{r\varphi})}{\partial r \partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}}{\partial x_3^2} - r \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3} \left(\frac{\sigma_{\varphi 3}}{r} \right) &= 0. \end{aligned}$$

С учетом (9.81) второе уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right) = 0.$$

Последнее удовлетворяется, если

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0. \quad (9.82)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при условии (9.82) первое уравнение удовлетворяется тождественно. Таким образом, условие совместности деформаций для данной задачи имеет вид (9.82).

Граничное условие для функции Φ определится из следующего рассуждения. В силу того, что боковая поверхность бруса свободна от поверхностных сил, сумма проекций касательных напряжений $\sigma_{\varphi 3}$ и $\sigma_{r\varphi}$, действующих в точках границы осевого сечения на нормаль к границе (рис. 42), должна обращаться в нуль, т. е.

$$\sigma_{r\varphi} \cos(n, r) + \sigma_{\varphi 3} \cos(n, x_3) = 0. \quad (9.83)$$

Согласно рис. 42 имеем

$$\cos(n, r) = \frac{dx_3}{dl}; \quad \cos(n, x_3) = -\frac{dr}{dl}, \quad (9.84)$$

где dl — элемент дуги границы.

Подставляя (9.81) и (9.84) в граничное условие (9.83), найдем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dl} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{dl} = 0,$$

откуда $\frac{d\Phi}{dl} = 0$ или $\Phi = C$.

Величина крутящего момента связана с функцией Φ соотношением

$$M = 2\pi \int_0^{R(x_3)} \sigma_{\varphi\varphi} r^2 dr = 2\pi \int_0^{R(x_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = 2\pi \{ \Phi [R(x_3), x_3] - \Phi(0, x_3) \}. \quad (9.85)$$

Если тело вращения имеет форму конуса (рис. 43), то на поверхности его имеет место соотношение

$$\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} = \cos \alpha. \quad (9.86)$$

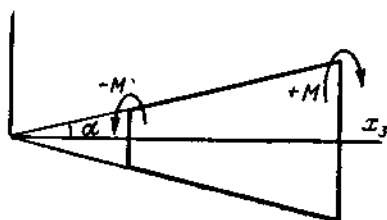


Рис. 43

Очевидно, любая функция аргумента, представляющего собой левую часть (9.86), будет величиной постоянной на поверхности конуса. Попробуем функцию напряжений искать в виде

$$\Phi(r, x_3) = A \left[\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} + B \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)^n \right], \quad (9.87)$$

где A , B , n — неизвестные постоянные.

На основании вышесказанного эта функция на поверхности конуса удовлетворяет условию $\Phi(r, x_3) = \text{const}$. Функция (9.87) удовлетворяет уравнению (9.82), если принять

$$B = -\frac{1}{3}; \quad n = 3.$$

Таким образом,

$$\Phi(r, x_3) = A \left[\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)^3 \right].$$

Постоянную A определяем из (9.85)

$$A = -\frac{3M}{2\pi(2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha)}.$$

Согласно формулам (9.81) касательные напряжения будут

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -A \frac{r x_3}{(r^2 + x_3^2)^{3/2}}; \quad \sigma_{r\varphi} = -A \frac{r^2}{(r^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

§ 80. Температурные напряжения

Определим напряжения и деформации в полой сфере от воздействия стационарного температурного поля, когда на внутренней поверхности этой сферы поддерживается постоянная температура T_a , а на наружной — температура T_b . В данной задаче распределение всех искомого величин будет симметричным относительно центра сферы, т. е. все искомые величины будут зависеть только от радиуса r . Поэтому уравнение (5.13) и граничные условия (5.15) в сферической системе координат примут вид

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (9.88)$$

$$T = T_a \text{ при } r = a, \quad (9.89)$$

$$T = T_b \text{ при } r = b.$$

Решение задачи (9.88), (9.89) будет

$$T = \frac{A}{r} + B, \quad (9.90)$$

где

$$A = \frac{ab}{b-a} (T_a - T_b); \quad B = \frac{ab}{b-a} \left(\frac{T_a}{b} - \frac{T_b}{a} \right).$$

В силу симметричности напряженного состояния относительно центра сферы, будем иметь

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \sigma_{\psi\psi}(r), \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\psi} = \sigma_{\varphi\psi} = 0, \quad \sigma_r = \sigma_r(r).$$

Тогда дифференциальное уравнение равновесия в силу (2.31) примет вид

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (9.91)$$

Для нашей задачи $u_\varphi = u_\psi = 0$ и $u_r = u_r(r)$, при этом из (3.32) найдем

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\psi\psi} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{r\varphi} = e_{r\psi} = e_{\varphi\psi} = 0. \quad (9.92)$$

Учитывая (9.92) в (4.56), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + 2\lambda \frac{u_r}{r} - \beta T, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} &= \lambda \frac{du_r}{dr} + 2(\lambda + \mu) \frac{u_r}{r} - \beta T, \\ \sigma_{\varphi r} = \sigma_{\psi r} = \sigma_{r\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Подставим соотношения (9.93) в (9.91), тогда

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2u_r}{r^2} = g \frac{dT}{dr},$$

где $g = \frac{1+\nu}{1-\nu} a$,

или
$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} \right] = g \frac{dT}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$u_r = \frac{g}{r^2} \int_a^r T r^2 dr + c_1 r + \frac{c_2}{r^2}. \quad (9.94)$$

Подставляя в это выражение функцию $T = T(r)$ из (9.90), получим

$$u_r = g \left[\frac{A}{2} + B \frac{r}{3} - \frac{A}{2} \frac{a^2}{r^2} - \frac{B}{3} \frac{a^3}{r^2} \right] + c_1 r + \frac{c_2}{r^2}. \quad (9.95)$$

Учитывая выражение (9.95) в (9.93), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) & \left[\frac{Bg}{3} + \frac{Aga^2}{r^3} + \frac{2Bga^3}{3r^3} + c_1 - \frac{2c_2}{r^3} \right] + \\ & + 2\lambda \left[\frac{Ag}{2r} + \frac{Bg}{3} - \frac{Ag}{2} \frac{a^2}{r^3} - \frac{Bg}{3} \frac{a^3}{r^3} + c_1 + \frac{c_2}{r^2} \right] - \beta T, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda & \left[\frac{Bg}{3} + \frac{Aga^2}{r^3} + \frac{2Bga^3}{3r^3} + c_1 - \frac{2c_2}{r^3} \right] + \\ & + 2(\lambda + \mu) \left[\frac{Ag}{2r} + \frac{Bg}{3} - \frac{Ag}{2} \frac{a^2}{r^3} - \frac{Bg}{3} \frac{a^3}{r^3} + c_1 + \frac{c_2}{r^2} \right] - \beta T. \end{aligned}$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из граничных условий: $\sigma_{rr} = 0$ при $r = a$ и $r = b$.

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

§ 81. Два типа волн

Пуассоном впервые доказано существование в однородной изотропной среде двух типов волн; один из типов волн носит название волн сжатия — разрежения, другой — волн сдвига. Им было показано, что они характеризуются различными скоростями распространения фронта, а также тем, что в волнах сжатия — разрежения отсутствует вращение частиц, а сдвиговые волны не сопровождаются изменением объема.

Перейдем к доказательству существования двух типов волн. Будем рассматривать безграничную среду. Представим массовые силы F , действующие на эту среду, и поле перемещений u в виде

$$F = \nabla \Phi + \text{rot } \Psi, \quad (10.1)$$

$$u = \nabla \phi + \text{rot } \psi. \quad (10.2)$$

Здесь Φ и ϕ — скалярные функции координат (x_1, x_2, x_3) и времени t , а Ψ и ψ — векторные функции координат и времени t .

Из (10.2) следует

$$\text{div } u = \Delta \phi. \quad (10.3)$$

Подставляя в уравнения движения упругой среды (5.5) выражения (10.1), (10.2), учитывая (10.3) и изменяя порядок дифференциальных операторов, получим

$$\nabla \left[c_1^2 \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Phi \right] + \text{rot} \left[c_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Psi \right] = 0. \quad (10.4)$$

Здесь обозначено

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (10.5)$$

Легко видеть, что (10.4) будет удовлетворено, если положить

$$c_1^2 \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\Phi, \quad (10.6)$$

$$c_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Psi. \quad (10.7)$$

Таким образом, доказано, что векторное поле u , определяемое (10.2), является решением уравнения (5.5), если функции ϕ и ψ

удовлетворяют (10.6) и (10.7), функция φ называется продольным потенциалом, а ψ — поперечным потенциалом.

Возникает вопрос, есть ли у этих уравнений решения, которые нельзя представить в указанном нами виде. Можно показать, что таких решений нет. Отметим некоторые важные следствия.

а. Пусть $\Psi \equiv 0$, а начальные условия таковы, что при $t=t_0$, $\psi = 0$. Тогда для определения ψ получается однородное уравнение (10.7) с нулевыми начальными условиями. Это означает, что $\psi = 0$ всегда; из уравнения (10.2) следует тогда, что $u = \nabla\varphi$ и $\text{rot } u = 0$.

Это показывает, что в волне, описываемой функцией φ , не происходит вращение частиц среды, т. е. каждая из них движется поступательно. Поэтому такие волны называются продольными. Следует подчеркнуть еще раз, что если $\Psi = 0$ и в некоторый момент волновое поле имеет продольный характер, то оно остается продольным всегда, т. е. продольные волны в изотропной однородной и безграничной среде при своем распространении не генерируют поперечных.

Уравнение (10.6), описывающее продольные волны, является неоднородным волновым уравнением. Известно, что если функция Φ и начальные условия в конечной части пространства отличны от нуля, то поверхность, отделяющая возмущенную область от невозмущенной (фронт волны), распространяется в направлении своей нормали в сторону невозмущенной области со скоростью c_1 .

б. Пусть теперь $\Phi \equiv 0$, а начальные условия таковы, что при $t=t_0$, $\varphi = 0$. Тогда $\varphi \equiv 0$ и $u = \text{rot } \psi$. В таком поле объемное расширение равно нулю. Действительно, $\text{div } u = \text{div rot } \psi = 0$.

Волны, обладающие таким свойством, называются поперечными или волнами сдвига. Поперечные волны, распространяясь в безграничной среде, не генерируют продольных волн. Скорость распространения фронта поперечных волн равна c_2 .

В однородной среде с границей продольные и поперечные волны распространяются независимо лишь до того момента, пока фронт не пересечет границу. Тогда образуются так называемые отраженные волны обонх типов, так как обычно системе граничных условий нельзя удовлетворить, введя отраженную волну какого-либо одного типа.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Плоская продольная волна. Пусть массовые силы отсутствуют, поперечный потенциал ψ тождественно равен нулю, а продольный потенциал φ зависит только от x_1 и t . Тогда уравнение (10.6) превращается в уравнение колебаний струны

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

и имеет решение вида

$$\varphi = f(x_1 - c_1 t) + g(x_1 + c_1 t), \quad (10.8)$$

где f и g — произвольные, дважды дифференцируемые функции.

Первое слагаемое в (10.8) представляет волну постоянной формы, распространяющуюся со скоростью c_1 в положительном направлении оси x_1 , а второе — волну постоянной формы, распространяющуюся в противоположном направлении.

Перемещение, соответствующее решению (10.8), на основе (10.2) будет

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = f'(x_1 - c_1 t) + g'(x_1 + c_1 t). \quad (10.9)$$

Выражение (10.9) показывает, что на каждой плоскости, перпендикулярной к оси x_1 , при фиксированном t при переходе от точки к точке волновое поле не меняется и параллельно оси x_1 . Если направление распространения плоской волны не совпадает с осью x_1 , то поле перемещений будет описываться более сложными формулами, хотя физическая картина останется той же. Выведем соответствующие формулы.

Пусть направление распространения плоских продольных волн n составляет с координатными осями углы, косинусы которых есть n_k . Обозначим через l расстояние, отсчитываемое вдоль прямой, параллельной направлению n . Для простоты рассмотрим волну, распространяющуюся в одном направлении. Подставляя вместо l его выражение $l = x_k n_k$ ($k=1, 2, 3$), получим

$$\varphi = f(l - c_1 t) = f(x_k n_k - c_1 t).$$

Из (10.2) для компонентов вектора перемещения получим

$$u_k = n_k f'(x_k n_k - c_1 t) \quad (v=1, 2, 3).$$

2. Сферическая продольная волна. Рассмотрим случай, когда продольный потенциал φ в сферической системе координат зависит лишь от радиуса r и времени t . Поперечный потенциал ψ вновь тождественно равен нулю. Массовые силы не действуют.

В этом случае в сферических координатах уравнение (10.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) = 0.$$

Решение этого уравнения будет

$$r\varphi = f(r - c_1 t) + g(r + c_1 t),$$

отсюда

$$\varphi = \frac{1}{r} f(r - c_1 t) + \frac{1}{r} g(r + c_1 t). \quad (10.10)$$

Первое слагаемое (10.10) представляет волну, расходящуюся от центра, а второе — волну, сходящуюся к центру.

Рассмотрим волну, расходящуюся от центра. Поскольку продольный потенциал φ зависит лишь от r и t , то в сферических координатах (r, φ, θ) отличной от нуля проекцией вектора u будет

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} f'(r - c_1 t) - \frac{1}{r^2} f(r - c_1 t). \quad (10.11)$$

Выражение (10.11) указывает, что перемещение u_r направлено строго по радиусу и не меняется при переходе от точки к точке, если они лежат на одной и той же сфере (при фиксированном времени).

Важно подчеркнуть, что при r , стремящемся к нулю, u_r стремится к бесконечности, это же происходит с деформациями и напряжениями. Вообще говоря, уравнения Ляме не годятся для описания среды, испытывающей большие деформации. Но формально эти уравнения такие решения допускают и они пригодны и удобны для описания реальных процессов, когда r ограничено снизу. Пусть, например, упругая волна вызвана равномерным давлением, приложенным к поверхности сферической полости радиуса r_0 . Тогда формула (10.11) описывает решение в области $r \geq r_0$, и особенность при $r \rightarrow 0$ оказывается вне области, в которой ищется решение. В этом примере функция f , фигурирующая в формуле (10.11), легко определяется по заданному на полости давлению $p = p(r_0, t)$.

Итак, решение (10.11) имеет особенность при $r=0$. Такая особенность называется центром расширения. Отметим, что в отличие от плоской волны, которая при распространении не меняет своей формы, сферическая волна свою форму меняет. В самом деле, коэффициенты $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{r^2}$ в формуле (10.11) показывают, что амплитуды волны с изменением r меняются.

3. Плоская поперечная волна. Пусть снова массовые силы отсутствуют; продольный потенциал $\varphi \equiv 0$, а поперечный потенциал ψ имеет лишь один отличный от нуля компонент ψ_3 , который зависит только от x_1 и t . Тогда из (10.7) получаем

$$c_2^2 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда

$$\psi_3 = f(x_1 - c_2 t) + g(x_1 + c_2 t).$$

Для простоты будем рассматривать только волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x_1 . Для проекций вектора перемещения получим формулы

$$u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = -f'(x_1 - c_2 t).$$

Здесь направление оси x_1 — направление распространения волны. Однако, в отличие от плоской продольной волны, скорость ее распространения равна c_2 , а направление перемещения ее совпадает с направлением распространения волны, а перпендикулярно ему (в данном случае перемещение направлено вдоль оси x_2).

Нетрудно убедиться, что объемное расширение в такой волне, как и в общем случае поперечной волны, равно нулю

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0.$$

Согласно формулам (3.27) для компонентов тензора вращения частиц получим

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} f''(x_1 - ct),$$

т. е. частицы вращаются вдоль оси, параллельной оси x_3 .

§ 82. Поверхностные волны Рэлея

Рассмотрим упругое полупространство. Начало координат поместим на его поверхности, ось x_1 направим вдоль границы, ось x_2 — в глубь среды (рис. 44). Предполагается, что объемные силы отсутствуют. Будем искать решение уравнений (10.6) и (10.7), которое не зависит от x_3 (плоская деформация), во времени меняется по синусоидальному закону, затухает с глубиной, а на границе $x_3 = 0$ удовлетворяет условиям $T_{21} = T_{22} = 0$. Тогда при $x_3 = 0$

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0. \quad (10.12)$$

Это — задача о свободных колебаниях полупространства.

Решение попытаемся найти в виде

$$\varphi = Ae^{-\alpha x_2 + iq(x_1 - ct)} \quad (\alpha > 0), \quad (10.13)$$

$$\psi_3 = Be^{-\beta x_2 + iq(x_1 - ct)} \quad (\beta > 0), \quad \psi_1 = \psi_2 = 0.$$

Здесь q — заданная частота. Постоянные α , β , c (c — фазовая скорость), A , B должны быть подобраны так, чтобы (10.13) удовлетворяло уравнениям (10.6), (10.7) и граничным условиям (10.12).

Подставляя (10.13) в (10.6) и (10.7), после простых преобразований получим

$$\alpha = q \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}, \quad (10.14)$$

$$\beta = q \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}.$$

На основании решения (10.13) и формулы (10.2) найдем

$$u_1 = (iqAe^{-\alpha x_2} - \beta Be^{-\beta x_2}) e^{iq(x_1 - ct)},$$

$$u_2 = (-\alpha Ae^{-\alpha x_2} - iqBe^{-\beta x_2}) e^{iq(x_1 - ct)}.$$

Следовательно, вектор перемещения u находится в плоскостях, перпендикулярных к оси x_3 .

Перемещения на границе $x_2=0$ будут

$$u_1 = (iqA - \beta B) e^{-iq(x_1 - ct)}, \quad u_2 = -(\alpha A + iqB) e^{iq(x_1 - ct)}. \quad (10.15)$$

Пользуясь формулами для перемещения и законом Гука, нетрудно получить выражения для компонентов тензора напряжений на границе

$$\sigma_{22} = \mu q^2 \left\{ \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) A + 2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} B \right\} e^{iq(x_1 - ct)},$$

$$\sigma_{12} = \mu q^2 \left\{ -2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} A + \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) B \right\} e^{iq(x_1 - ct)}.$$

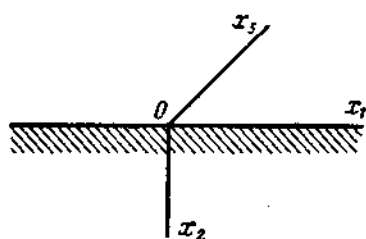


Рис. 44

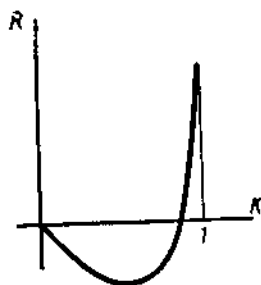


Рис. 45

Чтобы удовлетворить граничным условиям (10.12), нужно положить

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) A + 2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} B = 0, \quad (10.16)$$

$$-2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} A + \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) B = 0.$$

Относительно A и B мы получили линейную однородную систему уравнений. Для того чтобы A и B были отличны от нуля, необходимо приравнять к нулю определитель R этой системы

$$R = \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)} = 0, \quad (10.17)$$

или

$$R = (2 - k)^2 - 4 \sqrt{(1 - k)(1 - \gamma k)} = 0.$$

где

$$k = \frac{c^2}{c_2^2}, \quad \gamma = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1.$$

Это уравнение определяет фазовую скорость c ; важно подчеркнуть, что последняя не зависит от частоты q , а зависит лишь от отношения c_2/c_1 .

Покажем, что $c^2 < c_2^2$. Действительно, полагая $c = c_2$, получим $R = 1$. С другой стороны, при $c = 0$ имеем $R = 0$, а $R' = -2(1 - \gamma) < 0$. Отсюда следует, что уравнение (10.17) при любом значении $\frac{c_2}{c_1}$

имеет корень $k = \frac{c^2}{c_2^2} < 1$ (рис. 45). Можно показать, что на отрезке $[0, 1]$ других корней нет (корень $c = 0$, соответствующий нулевому решению, в расчет не принимаем). В частности, при $\lambda = \mu$, т. е.

$$\text{при } \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} c_2.$$

Из (10.16) получаем

$$A = -2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \frac{D}{q}, \quad B = \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) \frac{D}{q},$$

где D — произвольная постоянная. Тогда

$$u_1 = D \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \left[2e^{-\alpha x_1} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) e^{-\beta x_1} \right] e^{iq(x_1 - ct)},$$

$$u_2 = iD \left[2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)} e^{-\alpha x_1} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) e^{-\beta x_1} \right] e^{iq(x_1 - ct)}.$$

Мы построили решение в комплексной форме, но поскольку уравнения и краевые условия задачи линейные, ее решением будет как действительная, так и мнимая часть получаемых выражений; например,

$$u_1 = D \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \left[2e^{-\alpha x_1} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) e^{-\beta x_1} \right] \cos q(x_1 - ct), \quad (10.18)$$

$$u_2 = -D \left[2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)} e^{-\alpha x_1} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) e^{-\beta x_1} \right] \sin q(x_1 - ct).$$

Так как коэффициенты α и β [формулы (10.14)], характеризующие затухание с глубиной, растут с увеличением частоты q , то в силу (10.18) приходим к выводу, что чем волна длиннее, тем на большей глубине она ощущается.

При $x_2=0$ из (10.18) получаем

$$u_1 = D \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \frac{c^2}{c_2^2} \cos q(x_1 - ct), \quad (10.19)$$

$$u_2 = -D \left[2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) \right] \sin q(x_1 - ct).$$

Отсюда следует, что точки поверхности движутся по эллипсам.

Рассмотренные выше волны были впервые изучены Рэлеем. Они наблюдаются вдали от источника возмущения. Поскольку энергия, которую эти волны несут, сконцентрирована у поверхности и рассеивается по поверхности, то ее рассеивание происходит медленнее, чем в волнах, где энергия рассеивается по объему возмущенной области. Поэтому при землетрясениях для наблюдателя, удаленного от эпицентра, наибольшую опасность представляют рэлеевские волны.

§ 83. Волны Лява

Рассмотрим упругий слой постоянной толщины H с упругими постоянными λ, μ плотностью ρ , лежащий на упругом полупространстве с параметрами λ_*, μ_*, ρ_* . Будем предполагать, что скорость распространения поперечных волн в слое c_2 меньше соответствующей скорости $c_{*,2}$ в полупространстве

$$c_2 < c_{*,2}. \quad (10.20)$$

Направим ось x_1 вдоль границы раздела, ось x_2 — вглубь полупространства (рис. 46).

Пусть граница слоя $x_2 = -H$ свободна от нагрузки $T_{21} = T_{22} = T_{23} = 0$. Тогда при $x_2 = -H$

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \quad (10.21)$$

а на границе раздела

$$u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^*, \quad u_3 = u_3^*, \quad (10.22)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^*, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^*, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^*, \quad (10.23)$$

(звездочкой отмечены величины, относящиеся к полупространству).

Кроме того, потребуем, чтобы при x_2 , стремящемся к бесконечности, смещения стремились к нулю.

Попытаемся найти такие решения уравнения (5.5) для слоя и полупространства, у которых были бы отличны от нуля только компоненты u_3 и u_3^* и при этом они не зависели бы от x_3 . Такая волна, если она существует, является поперечной, так как $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

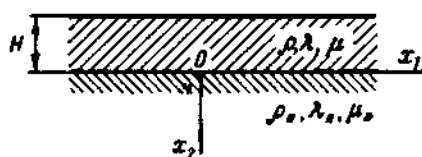


Рис. 46

Из уравнения (5.5) (без учета объемных сил) получаем

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_{*2}^2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^2}. \quad (10.24)$$

В силу сделанных относительно перемещений предположений первые пары условий (10.21), (10.22) и (10.23) удовлетворяются автоматически, а последние дают:

при $x_2 = -H$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad (10.25)$$

при $x_2 = 0$

$$u_3 = u_3^*, \quad \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \mu_* \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}. \quad (10.26)$$

Будем разыскивать такие решения, зависимость которых от x_1 и t описывается синусоидальным законом, т. е.

$$u_3 = f(x_2) e^{iq(x_1 - ct)}; \quad u_3^* = f_*(x_2) e^{iq(x_1 - ct)}. \quad (10.27)$$

Здесь q — заданная частота; c — неизвестная фазовая скорость, относительно которой будем предполагать $c_2 < c < c_{*2}$, что не противоречит (10.20).

Подставляя (10.27) в уравнения (10.24), получаем

$$f'' + q^2 \alpha^2 f = 0 \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} \right), \quad (10.28)$$

$$f_*'' - q^2 \beta^2 f_* = 0 \quad \left(\beta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{*2}^2}} \right),$$

откуда

$$f(x_2) = A \sin(\alpha q x_2) + B \cos(\alpha q x_2), \quad (10.29)$$

$$f_*(x_2) = C e^{-\beta q x_2} + C_1 e^{\beta q x_2}.$$

Для ограниченности решения $f_*(x_2)$ следует принять $C_1 = 0$, тогда

$$f_*(x_2) = C e^{-\beta q x_2}. \quad (10.30)$$

Из граничных условий (10.26) следует

$$B = C, \quad A = -\frac{\mu_* \beta}{\mu \alpha} C. \quad (10.31)$$

Подставляя (10.27) в (10.25) и пользуясь (10.29), получаем

$$A \cos(\alpha q H) + B \sin(\alpha q H) = 0,$$

или при помощи (10.31)

$$\operatorname{tg}(\alpha q H) = \frac{\mu_* \beta}{\mu \alpha} . \quad (10.32)$$

Так как α и β с помощью формул (10.28) выражаются через c , c_2 , c_{*2} , то (10.32) представляет собой уравнение для определения отношения $\frac{c}{c_2}$ как функции параметров qH , c_2/c_{*2} , μ_*/μ .

Покажем, что корни уравнения (10.32) существуют. Будем считать неизвестным $\xi = qH$, а остальные параметры заданными. Тогда при изменении $\xi = qH$ от нуля до $\frac{\pi}{2\alpha}$ тангенс $(\alpha q H)$ будет меняться от нуля до бесконечности, а так как тангенс — непрерывная функция, найдется такое значение $\xi = \xi_0$, при котором (10.32) будет удовлетворено. Последнее и доказывает существование корня уравнения (10.32).

Выпишем окончательные формулы для перемещений

$$u_3 = C \left[\cos(\alpha q x_2) - \frac{\mu_* \beta}{\mu \alpha} \sin(\alpha q x_2) \right] e^{i q (x_1 - ct)},$$

$$u_3^* = C e^{-\alpha \beta x_2 + i q (x_1 - ct)}.$$

Полученное решение представляет собой волну, бегущую в направлении оси x_1 со скоростью c . Перемещения в волне лежат в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, и параллельны границам слоя. Существенно отметить, что фазовая скорость их зависит от частоты (10.32), т. е. эти волны имеют дисперсию.

Эти волны впервые были открыты Лявом и поэтому носят его имя. Волны Лява, отличаясь от рэлеевских волн наличием дисперсии, своим чисто поперечным характером и др., имеют тем не менее с ними много общих черт. Как и рэлеевские волны, они обычно наблюдаются при землетрясениях на значительных расстояниях от эпицентра. Как и в рэлеевских волнах, в волнах Лява энергия концентрируется вблизи поверхности раздела, и поэтому они затухают медленнее, чем другие волны.

ТЕОРИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

§ 84. Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластинок

Тело, имеющее срединную поверхность в виде плоскости и толщина которого достаточно мала по сравнению с другими его двумя размерами, называется тонкой пластинкой. Пластинки находят широкое применение в технике; в качестве типичных примеров можно указать на бетонные и железобетонные плиты, применяемые в строительных конструкциях, для обшивки корпуса корабля. Плоскость, делящая толщину пластинки пополам, называется ее срединной плоскостью. Выберем оси координат x_1 и x_2 в срединной плоскости, а ось x_3 — перпендикулярно ей.

Если прогиб срединной плоскости пластинки мал по сравнению с толщиной пластинки, то имеют место следующие допущения: 1) нормаль к срединной плоскости до изгиба переходит в нормаль к срединной плоскости после изгиба; 2) компонент тензора напряжений σ_{33} мал по сравнению с другими компонентами тензора напряжений; 3) при изгибе пластинки срединная плоскость не деформируется.

Обозначим через w прогиб срединной плоскости, а через u_1 и u_2 — перемещения, параллельные соответственно осям x_1 и x_2 .

Рассмотрим сечения пластинки, параллельные плоскостям x_1x_3 и x_2x_3 , как показано соответственно на рис. 47, 48. Из этих рисунков, с учетом первого допущения для перемещений точки B , находящейся на нормали к срединной плоскости пластинки, имеем

$$u_1 = -x_3 \operatorname{tg} \alpha, \quad u_2 = -x_3 \operatorname{tg} \beta.$$

Так как прогиб считается малым, то

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \beta = \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial w}{\partial x_2}.$$

Учитывая последние соотношения, найдем

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}. \quad (11.1)$$

Принимая во внимание (11.1), из формул (3.26) найдем

$$e_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad e_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad e_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (11.2)$$

В силу допущения 1) имеем

$$e_{13} = e_{23} = 0. \quad (11.3)$$

На основании допущения 2) примем $\sigma_{33} = 0$; тогда с учетом формул (11.2) закон Гука примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{E x_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ \sigma_{22} &= -\frac{E x_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \\ \sigma_{12} &= -\frac{E x_3}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

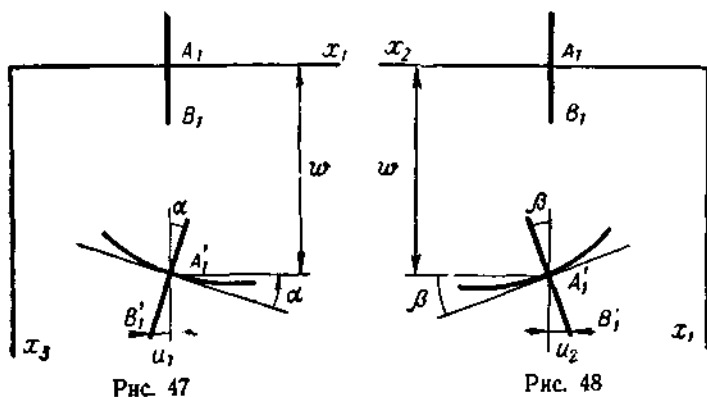


Рис. 47

Рис. 48

Обозначим через M_1 , M_2 изгибающие моменты, $M_{12} = M_{21}$ — крутящие моменты и Q_1 , Q_2 — поперечные силы, отнесенные к единице длины сечений, параллельных плоскостям $x_1 x_3$ и $x_2 x_3$ (рис. 49), тогда

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \\ M_{12} = M_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} x_3 dx_3, \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_3, & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_3. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Несмотря на то, что согласно (11.3) следует принять $\sigma_{31} = 2\mu e_{31} = 0$, $\sigma_{32} = 2\mu e_{32} = 0$, при составлении уравнений равновесия необходимо учесть результирующие силы Q_1 и Q_2 (поперечные силы), определяемые касательными напряжениями σ_{31} и σ_{32} , как величины того же порядка, что интенсивность поперечной силы p и моменты M_1 , M_2 и M_{12} .

Подставляя выражения σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} в первые три соотношения (11.5), для однородной пластинки найдем

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \\ M_{12} &= D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

Рассмотрим элемент, вырезанный из пластинки двумя парами плоскостей, параллельных координатным плоскостям x_1x_3 и x_2x_3 (рис. 50). Для равновесия этого элемента необходимо, чтобы сумма сил, действующих на этот элемент, и сумма их моментов относительно осей x_1 и x_2 в отдельности были равны нулю. Не учитывая массовые силы и пренебрегая величинами третьего порядка малости, имеем

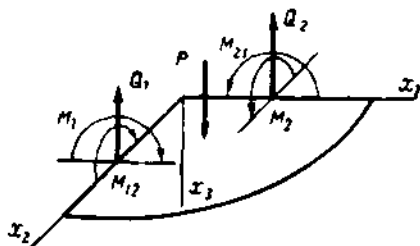


Рис. 49

$$\begin{aligned} d_{x_1} Q_1 dx_2 + d_{x_2} Q_2 dx_1 + p dx_1 dx_2 &= 0, \\ d_{x_1} M_{12} dx_2 - d_{x_2} M_2 dx_1 + Q_2 dx_1 dx_2 &= 0, \\ d_{x_2} M_{21} dx_1 - d_{x_1} M_1 dx_2 + Q_1 dx_2 dx_1 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь d_{x_k} — частный дифференциал следующей за ним функции по координате x_k . После некоторых преобразований найдем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + p = 0, \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + Q_2 = 0, \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + Q_1 = 0. \quad (11.9)$$

Учитывая соотношения (11.6) в (11.8) и (11.9), для пластинки постоянной толщины будем иметь

$$\begin{aligned} Q_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ Q_2 &= -D \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Подставляя выражения Q_1 и Q_2 в уравнение (11.7), получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{p}{D}. \quad (11.11)$$

Это уравнение было впервые получено Софи Жермен.

Таким образом, задача об изгибе пластинки поперечной силой p сводится к интегрированию уравнения (11.11).

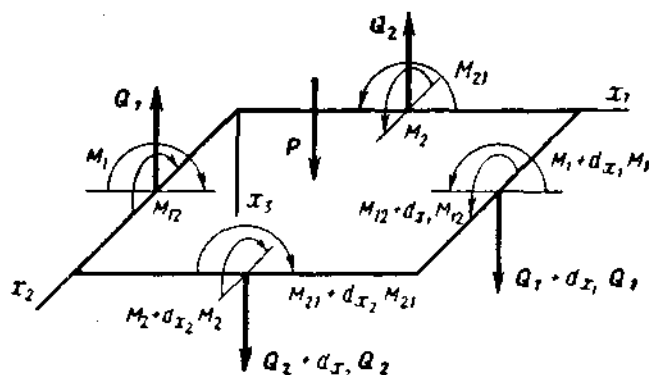


Рис. 50

§ 85. Граничные условия

Установим граничные условия для прямоугольной пластинки при некоторых способах закрепления ее краев; оси x_1 и x_2 направим параллельно краям пластинки.

а. Зашемленный край. Если край пластинки $x_1=0$ зашемлен, то прогиб в точках этого края равен нулю и плоскость, касательная к изогнутой срединной поверхности, совпадает со срединной плоскостью пластинки до изгиба

$$w \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0. \quad (11.12)$$

б. Шарнирно-опертый край. Если край пластинки $x_1=0$ оперт и может свободно поворачиваться, то прогиб и изгибающий момент на этом крае должны быть равны нулю

$$w \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0.$$

Так как вдоль края $x_1=0$ имеем $w=0$, то

$$w \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial w}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} = 0.$$

Следовательно, граничные условия для шарнирно-опертого края будут

$$\varpi \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0. \quad (11.13)$$

в. Свободный край. Если край $x_1 = a$ свободен, то, на первый взгляд, нужно потребовать, чтобы вдоль него изгибающий момент M_{12} , крутящий момент M_{12} и поперечная сила Q_1 равнялись нулю

$$M_1|_{x_1=a} = 0, \quad M_{12}|_{x_1=a} = 0, \quad Q_1|_{x_1=a} = 0. \quad (11.14)$$

Таким образом, в этом случае получаются три граничных условия, тогда как в других их было два. Условия (11.14) были получены Пуассоном. Позже Кирхгофф показал, что для полного определения прогиба ϖ , удовлетворяющего уравнению (11.11), достаточно двух граничных условий, так как два условия Пуассона, относящиеся к крутящему моменту M_{12} и поперечной силе Q_1 , можно объединить в одно граничное условие. Следовательно, система краевых условий Пуассона (11.14) для уравнения Софи Жермен (11.11) является переопределенной.

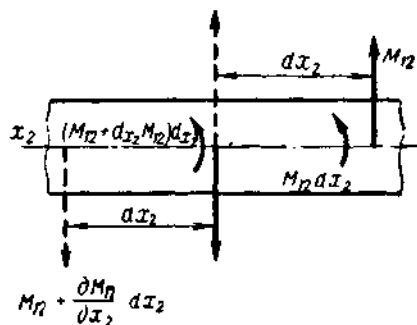


Рис. 51

Рассмотрим по краю $x_1 = a$ два примыкающих друг к другу элемента длины dx_2 (рис. 51). Крутящий момент, приходящийся на элемент длины dx_2 , будет $M_{12} dx_2$; его можно заменить двумя поперечными силами, равными M_{12} и действующими на расстоянии dx_2 друг от друга; на рис. 51 эти силы показаны сплошными векторами. Для следующего элемента dx_2 крутящий момент $(M_{12} + dM_{12}/dx_2) dx_2$ можно также заменить двумя поперечными силами $M_{12} + dM_{12}/dx_2$, они показаны пунктирными векторами. Таким образом, найдем, что распределение крутящих моментов M_{12} статически эквивалентно распределению поперечных сил интенсивности $Q'_1 = -\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}$.

Такая замена на основании принципа Сен-Венана окажет влияние на напряженное состояние в непосредственной близости к кромке, но на остальной части пластинки напряженное состояние останется без изменений.

Следовательно, для свободного края пластинки в граничных условиях (11.14) вместо двух последних получим одно условие

$$\left(Q_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right)_{x_1=0} = 0. \quad (11.15)$$

На основании соотношений (11.6) и (11.10) для свободного края граничные условия (11.15) и $M_1|_{x_1=0}=0$ можно выразить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} &= 0. \end{aligned} \quad (11.16)$$

В случае пластинки с криволинейной кромкой направляем оси координат в точке кромки по нормали n и по касательной τ , как показано на рис. 52 и 53. Соотношения между M_n ; $M_{n\tau}$; Q_n и M_1 , M_{12} , Q_1 , Q_2 определяются из условий равновесия элемента пластинки, изображенного на рис. 52 и 53,

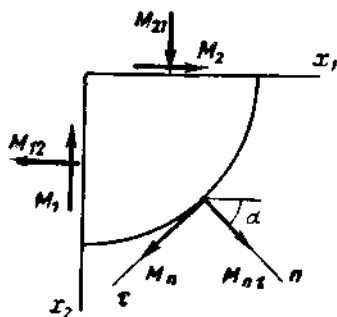


Рис. 52

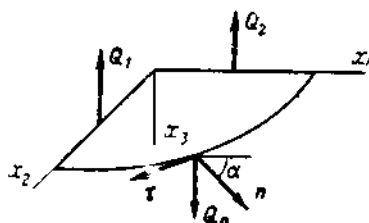


Рис. 53

$$\begin{aligned} M_n &= M_1 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha - M_{12} \sin 2\alpha, \\ M_{n\tau} &= M_{12} \cos^2 2\alpha + \frac{M_1 - M_2}{2} \sin 2\alpha, \\ Q_n &= Q_1 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11.17)$$

При заделке криволинейной кромки пластинки

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}=0, \quad (11.18)$$

в случае же свободного опирания

$$w=0, \quad M_n=0.$$

Если кромка пластинки свободна, то

$$M_n=0, \quad Q_n - \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial \tau} = 0, \quad (11.19)$$

где слагаемое $-\frac{\partial M_{n\tau}}{\partial \tau}$ получается аналогично рис. 51.

§ 86. Уравнение изгиба пластинки в полярных координатах

При изучении изгиба круглой пластинки выгодно использовать полярную систему координат (r, φ) . В этой системе координат на основании формул, выражающих зависимость между полярными и декартовыми координатами

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad (11.20)$$

гармонический оператор принимает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (11.21)$$

Следовательно, уравнение изгиба пластинки (11.11) в полярной системе координат запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w = \frac{p}{D}. \quad (11.22)$$

Если нагрузка p распределена симметрично относительно центра пластинки, то прогиб w будет зависеть только от полярного радиуса. В этом случае уравнение (11.22) примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \frac{p}{D}.$$

Обозначим действующие в сечениях с нормальными r и φ изгибающие моменты соответственно через M_r , M_φ , а крутящий момент через $M_{r\varphi}$. Эти моменты, как обычно, отнесены к единице длины. Предположим, что ось ox_1 совпадает с полярным радиусом r , тогда моменты M_r , M_φ и $M_{r\varphi}$ будут иметь те же самые значения, что и моменты M_1 , M_2 , M_{12} (рис. 54). Таким образом, в формулах (11.6), переходя с помощью (11.20) от декартовых координат к полярным и принимая $\varphi=0$, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)_{\varphi=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ M_{r\varphi} &= (1-\nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Аналогичным приемом из (11.10) получим формулы для поперечных сил

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w \right], \quad (11.24)$$

$$Q_\varphi = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w \right]. \quad (11.25)$$

Если край круглой пластинки радиуса a зашпемлен, то

$$w \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0; \quad (11.26)$$

если свободно оперт, то

$$w \Big|_{r=a} = M_r \Big|_{r=a} = 0; \quad (11.27)$$

если свободен от нагрузки, то

$$M_r \Big|_{r=a} = 0, \quad \left(Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (11.28)$$

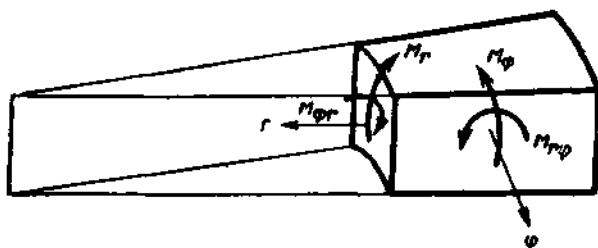


Рис. 54

Общее решение уравнения (11.22)

$$w = w_0 + w_1,$$

где w_0 — какое-либо частное решение уравнения (11.22); w_1 — общее решение однородного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_1 = 0. \quad (11.29)$$

Общее решение этого уравнения Клебшем дано в виде

$$w_1 = R_0^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(1)}(r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(2)}(r) \sin n\varphi. \quad (11.30)$$

Решение $R_0^{(0)}(r)$, не зависящее от угла φ , представляет симметричный изгиб круглой пластинки. Подставим это решение в уравнение (11.29), тогда

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R_n^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n^{(k)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R_n^{(k)} \right) = 0,$$

где $k=0, 1, 2$. Общее решение этого уравнения при $n=0$ таково:

$$R_0^{(0)} = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r, \quad (11.31)$$

при $n=1$

$$R_1^{(k)} = A_1^{(k)} r + B_1^{(k)} r^3 + C_1^{(k)} r^{-1} + D_1^{(k)} r \ln r, \quad (11.32)$$

при $n \geq 2$

$$R_n^{(k)} = A_n^{(k)} r^n + B_n^{(k)} r^{-n} + C_n^{(k)} r^{n+2} + D_n^{(k)} r^{n+2}. \quad (11.33)$$

Постоянные интегрирования $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ и $D_n^{(k)}$ ($k=1, 2$) определяются из условий закрепления края пластинки.

§ 87. Симметричный изгиб круглой пластинки

Рассмотрим поперечный изгиб круглой пластинки радиуса a под действием равномерно распределенной нагрузки p , когда пластинка 1) оперта по краю, 2) защемлена по краю. Решение задачи в силу осесимметричности изгиба на основании решения Клебша (11.30) ищем в виде

$$w = w_0 + R_0^{(0)}(r),$$

где w_0 — частное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) w = \frac{p}{D}, \quad (11.34)$$

которое вытекает из (11.22); это решение будет таким:

$$w_0 = \frac{p}{64D} r^4.$$

Для ограниченности решения $R_0^{(0)}(r)$, определяемого формулой (11.31), следует взять $C_0=0$; тогда

$$w = A_0 + B_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + \frac{p}{64D} r^4.$$

На основании формулы (11.24) в сечении r

$$Q_r = -D \left[\frac{p}{2D} r + 4D_0 \frac{1}{r} \right].$$

С другой стороны, $Q_r = -\frac{p}{2} r$. Отсюда $D_0=0$.

Таким образом,

$$w = A_0 + B_0 r^2 + \frac{p}{64D} r^4. \quad (11.35)$$

Коэффициенты A_0 , B_0 определяются из условия закрепления пластинки по краю. Для случая 1) при $r=a$ имеем

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (11.36)$$

Для случая 2) при $r=a$

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0. \quad (11.37)$$

Подставляя (11.35) в условия (11.36) и (11.37) для случая 1) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{P}{64D} a^4 = 0, \\ 2B_0 + \frac{3P}{16D} a^2 + \nu \left(2B_0 + \frac{P}{16D} a^2 \right) = 0,$$

для случая 2)

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{P}{64D} a^4 = 0, \\ 2B_0 a + \frac{P}{16D} a^3 = 0.$$

Определив постоянные A_0, B_0 , окончательно получим для случая 1):

$$w = \frac{P}{64D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right),$$

для случая 2):

$$w = \frac{P}{64D} (a^2 - r^2)^2.$$

Исходя из первой формулы (11.4), для случая 1

$$\sigma_{rr} = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{p x_3}{h^3} (a^2 - r^2).$$

Это напряжение в центре пластинки ($r=0$) равно

$$\sigma_{rr} = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 p x_3}{h^3}.$$

По точному решению, на основании формулы (9.77) в центре пластинки

$$\sigma_{rr} = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 p x_3}{h^3} + \frac{2 + \nu}{8} p \left(\frac{x_3^3}{h^3} - \frac{3}{5} \frac{x_3}{h} \right).$$

Сравнивая последние две формулы, замечаем, что дополнительный член, входящий в точное решение, мал, если толщина пластинки мала по сравнению с радиусом. Так, например, когда $\nu=0,25$ и $x_3=h$, при $\frac{2h}{a} = \frac{1}{20}$; $\frac{2h}{a} = \frac{1}{10}$; $\frac{2h}{a} = \frac{1}{5}$ дополнительный член составляет соответственно 0,94, 3,8 и 15% основного члена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. М., Физматгиз, 1959.
2. Веква И. Н. Основы тензорного анализа. Тбилиси. Изд-во Тбилисского ун-та, 1967.
3. Колосов Г. В. Примененне комплексной переменной в теории упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.
4. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М., «Наука», 1965.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ НКГ и П СССР, 1935.
7. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М., Физматгиз, 1963.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», 1966.
9. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
10. Папкович П. Ф. Теория упругости. Л.—М., Оборонгиз, 1939.
11. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
12. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
13. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
14. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1957.
15. Снеддон И. Н. и Берри Д. С. Классическая теория упругости. Физматгиз, 1961.
16. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.—М., ОНТИ, 1937.
17. Треффц Е. Математическая теория упругости. М., Гостехиздат, 1932.
18. Green A. E. and Zerna W. Theoretical Elasticity at the clarendon Press, Oxford, 1954.
19. Reissner E. On a variational theorem in elasticity J. math. and Phys., 1950, 29, № 2, 90—95.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От рецензента первого и второго изданий	3
Предисловие к первому и второму изданиям	4
Введение	5
Глава I. Элементы тензорного исчисления	6
§ 1. Определения скаляра, вектора и тензора	7
§ 2. Сложение, умножение и свертывание тензоров. Признак тензора	10
§ 3. Метрический тензор	13
§ 4. Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля	19
§ 5. Параллельное векторное поле	21
§ 6. Тензор Римана — Кристоффеля. Производная вектора. Формула Гаусса — Остроградского. ϵ -тензор	23
Глава II. Теория напряжений	31
§ 7. Виды внешних сил	31
§ 8. Метод сечений. Вектор напряжения	33
§ 9. Тензор напряжений	35
§ 10. Уравнения движения и равновесия в компонентах тензора напряжений	36
§ 11. Условия на поверхности	39
§ 12. Уравнения движения и равновесия в декартовой системе координат	39
§ 13. Уравнения движения и равновесия в цилиндрических и сферических координатах	41
§ 14. Определение главных нормальных напряжений	43
Глава III. Теория деформаций	46
§ 15. Тензор конечной деформации	46
§ 16. Тензор малой деформации	49
§ 17. Уравнения совместности деформаций	50
§ 18. Тензор деформаций в декартовой системе координат	51
§ 19. Компоненты тензоров малой деформации и вращения в цилиндрических и сферических координатах	53
§ 20. Главные относительные удлинения	54
§ 21. Уравнения совместности деформаций в некоторых системах координат (условия Сен-Венана)	56
§ 22. Определение перемещений по компонентам тензора малой деформации	57

<i>Глава IV.</i>	Связь между напряженным и деформированным состояниями	60
§ 23.	Обобщенный закон Гука	60
§ 24.	Работа внешних сил	62
§ 25.	Потенциал тензора напряжений	62
§ 26.	Потенциал в случае линейно-упругого тела	66
§ 27.	Различные случаи упругой симметрии тела	66
§ 28.	Температурные напряжения	71
§ 29.	Интеграл энергии для уравнения движения упругого тела	72
§ 30.	Тождество Бетти	73
§ 31.	Теорема Клапейрона	73
<i>Глава V.</i>	Полная система основных уравнений теории упругости	75
§ 32.	Уравнения упругого равновесия и движения в перемещениях	75
§ 33.	Уравнения в компонентах напряжений	81
§ 34.	Основные граничные задачи статики упругого тела. Единственность решения	84
§ 35.	Основные задачи динамики упругого тела	86
§ 36.	Принцип Сен-Венана (принцип смягчения граничных условий)	87
§ 37.	Прямые и обратные решения задач теории упругости. Полуобратный метод Сен-Венана	89
§ 38.	Простейшие задачи теории упругости	90
<i>Глава VI.</i>	Плоская задача теории упругости	99
§ 39.	Плоская деформация	99
§ 40.	Плоское напряженное состояние	102
§ 41.	Обобщенное плоское напряженное состояние	104
§ 42.	Функция напряжений Эри	106
§ 43.	Функция Эри в полярных координатах. Задача Ляме	111
§ 44.	Комплексное представление бигармонической функции, компонентов вектора перемещения и тензора напряжений	118
§ 45.	Степень определенности введенных функций и ограничения, накладываемые на них	123
§ 46.	Основные граничные задачи и приведение их к задачам теории функций комплексного переменного	129
§ 47.	Теорема Мориса Леви	132
§ 48.	Метод конформных отображений	133
§ 49.	Интеграл типа Коши	135
§ 50.	Теорема Гарнака	142
§ 51.	Краевая задача Римана	142
§ 52.	Приведение основных краевых задач к функциональным уравнениям	144
§ 53.	Равновесие кругового полого цилиндра	146
§ 54.	Бесконечная пластинка с эллиптическим отверстием	150
§ 55.	Решение граничных задач для полуплоскости	152
§ 56.	Некоторые сведения об интегральном преобразовании Фурье	160
§ 57.	Бесконечная плоскость, деформируемая под действием массовых сил	164
§ 58.	Решение бигармонического уравнения для невесомой полуплоскости	168
<i>Глава VII.</i>	Кручение и изгиб призматических тел	173
§ 59.	Кручение призматического тела произвольного односвязного поперечного сечения	173
§ 60.	Некоторые свойства касательных напряжений	178
§ 61.	Кручение полых призматических тел	179
§ 62.	Теорема о циркуляции касательного напряжения	181
§ 63.	Аналогии при кручении	182

§ 64. Комплексная функция кручения	187
§ 65. Решение частных задач кручения	188
§ 66. Изгиб призматического тела, закрепленного одним концом	197
§ 67. Центр изгиба	202
§ 68. Изгиб призматического тела с эллиптическим поперечным сечением	207
Глава VIII. Общие теоремы теории упругости. Вариационные методы	210
§ 69. Теорема взаимности Бетти	210
§ 70. Принцип минимума потенциальной энергии	211
§ 71. Принцип минимума дополнительной работы — принцип Кастильяно	213
§ 72. Метод Рэлея — Ритца	215
§ 73. Вариационный принцип Рейсснера	219
§ 74. Уравнения равновесия и граничные условия для геометрически нелинейного тела	221
Глава IX. Трехмерные статические задачи	223
§ 75. Решения Кельвина и Буссинеска — Папковича	223
§ 76. Элементарные решения Буссинеска первого и второго рода	227
§ 77. Давление на поверхность полубесконечного тела	229
§ 78. Задача Герца о давлении двух соприкасающихся тел	231
§ 79. Симметричная деформация тела вращения	236
§ 80. Температурные напряжения	247
Глава X. Теория распространения упругих волн	249
§ 81. Два типа волн	249
§ 82. Поверхностные волны Рэлея	253
§ 83. Волны Лява	256
Глава XI. Теория тонких пластинок	259
§ 84. Дифференциальное уравнение изгиба тонких пластинок	259
§ 85. Граничные условия	262
§ 86. Уравнение изгиба пластинки в полярных координатах	265
§ 87. Симметричный изгиб круглой пластинки	267
Литература	269