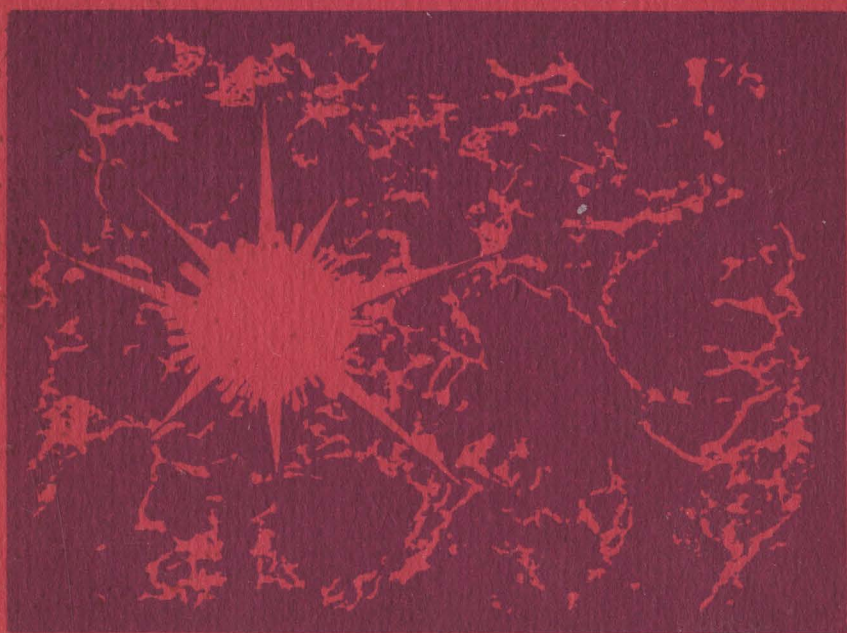


О. А. Синкевич И. П. Стаханов

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Стационарные процессы
в частично ионизованном газе



О. А. Синкевич И. П. Стаханов

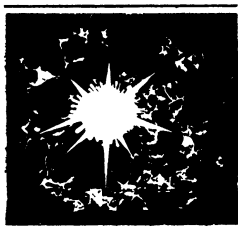
• ФИЗИКА ПЛАЗМЫ •

О. А. Синкевич, И. П. Стаханов

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Стационарные процессы
в частично ионизованном газе

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-физических
и физико-технических специальностей вузов



Москва «Высшая школа» 1991

ББК 22.333

С 38

УДК 537

Рецензенты:

кафедра физической электроники физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова; проф. Э. И. Асиновский (Институт высоких температур АН СССР)

Синкевич О. А., Стаханов И. П.

С 38 Физика плазмы (стационарные процессы в частично ионизованном газе): Учеб. пособие для вузов.— М.: Высш. шк., 1991.—191 с.: ил.

ISBN 5-06-001954-3

Пособие посвящено гидродинамическим аспектам и при электродным явлениям в физике плазмы, составляющим основу многих промышленных технологий. В книге приведены общие сведения из физики плазмы, основные критерии применимости различных подходов и моделей при описании процессов. Обсуждены свойства и особенности стационарных и нестационарных разрядов, рассмотрена физическая природа различных контракций и даны практические предложения.

С $\frac{1604120000-382}{001(01)-91}$ 7 - 91

ВБК 22.333

537

ISBN 5-06-001954-3

© О. А. Синкевич, И. П. Стаханов, 1991

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс физики плазмы входит в учебные программы многих физических, физико-технических и инженерно-физических специальностей вузов. В настоящее время существует обширная научная литература по различным разделам физики плазмы. Однако учебных пособий по ряду разделов физики плазмы все еще недостаточно, а использование в учебном процессе монографий и научных статей далеко не всегда возможно из-за сложности материала и ограниченности изданий.

Данное учебное пособие является лишь частью серии пособий, задуманных авторами. Оно посвящено анализу некоторых процессов, протекающих в низкотемпературной плазме в лабораторных и промышленных установках. В нем в первую очередь обсуждаются гидродинамические модели, используемые при описании плазмы. Затем более подробно излагаются свойства стационарных электрических разрядов при низких и повышенных давлениях и явления в приэлектродных слоях. Наряду с анализом физической картины явления авторы стараются достаточно подробно обсудить и математический аппарат, используемый в соответствующей модели процесса, чтобы читатели могли получить и количественные характеристики рассматриваемой задачи.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых одним из авторов (О. А. Синкевичем) в течение многих лет студентам-теплофизикам энергофизического факультета Московского энергетического института, и соответствует его учебной программе.

Для удобства пользования в пособии при нумерации формул ставится номер главы, параграфа и формулы. При ссылке на формулу внутри данного параграфа указывается лишь ее номер, при ссылке на формулу другого параграфа данной главы — номер параграфа и формулы, а при ссылке на формулу другой главы — номер главы, параграфа и формулы (например, ссылка (1.1.11) означает формулу (11) первого параграфа первой главы).

Авторы признательны всем тем, кто принял участие в обсуждении отдельных задач, вошедших в пособие. Особую благодар-

ность они приносят А. С. Дмитриеву, Л. П. Бычковой, И. М. Руткевичу, А. М. Семенову, И. Г. Стахановой, В. Е. Черковцу, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных указаний, способствовавших улучшению пособия. Авторы благодарят К. Н. Ульянова за разрешение использовать его материалы по контракции газового разряда, В. Ф. Чиннова — за материалы по экспериментальному исследованию в электрической дуге, а также рецензентов А. Ф. Александрова, Э. И. Асиновского и Г. С. Солнцева за доброжелательную критику и полезные замечания.

Все замечания и пожелания об учебном пособии просьба направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

В начале работы над рукописью в феврале 1987 г. скоропостижно скончался Игорь Павлович Стаханов, являвшийся ведущим специалистом в физике плазмы, автором оригинальной модели шаровой молнии и организатором широкого изучения и сбора данных о шаровой молнии. И. П. Стаханов живо интересовался широким кругом вопросов естествознания и философии (кроме книг по физике он написал и монографию по философии) и принимал самое активное участие в научной и общественной жизни нашего общества — и эти слова применительно к И. П. Стаханову не являются расхожим штампом. Учебное пособие является памятью о замечательном человеке и гражданине.

О. А. Синкевич

Горе моряку, взявшему
Неверный угол своей ладьи
И звезды:
Он разобьется о камни,
О подводные мели.

В. Хлебников

ВВЕДЕНИЕ

Большую часть космической среды занимает именно плазма. Многие процессы в звездах и их атмосферах, в межзвездной среде так или иначе связаны с плазмой. Процессы в магнитосфере Земли и обтекающем ее солнечном ветре невозможно понять, не зная свойств плазмы. Во многих естественных процессах на Земле, таких, как искра молнии и другие атмосферные электрические разряды, плазменные явления могут быть определяющими. Однако лишь в последние десятилетия плазма становится рабочим телом многих лабораторных и промышленных установок, простое перечисление которых заняло бы целую книгу. В плазме протекают интереснейшие явления, связанные с генерацией различного рода колебаний и образованием сильно неравновесных структур, в ней могут проходить неравновесные химические реакции, не протекающие в других средах и условиях. Хотя исследования плазмы интенсивно развиваются, многие явления в ней еще не изучены. Интересны явления, связанные с воздействием плазмы на другие процессы (например, роль атмосферных электрических разрядов в зарождении жизни на Земле и т. д.).

Термин «плазма» для обозначения частично или полностью ионизованного газа был введен американскими физиками Ленгмюром (I. Langmür) и Тонксом (L. Tonks) в 1929 г. Большой вклад в становление физики плазмы внесли отечественные ученые Л. А. Арцимович, А. А. Власов, Л. Д. Ландау, М. А. Леонтович, И. Е. Тамм и др. Не ясно, сознательно или нет Ленгмюр для обозначения ионизованного газа использовал термин «плазма», применявшийся в биологии еще раньше. Однако несмотря на громадную разницу в свойствах биологических систем и плазмы заряженных частиц, ряд протекающих в них явлений (например, самоорганизация и возникновение неравновесных структур) имеет очень много общего.

Под плазмой обычно понимают среду, состоящую из заряженных частиц (электронов, ионов различных сортов, а при частичной ионизации также из нейтральных частиц — молекул, атомов), в которой взаимодействие с внешними или собственными электрическими и магнитными полями играет определяющую роль. Часто плазма является практически квазинейтральной средой, и плазменное состояние относят к особому, четвертому состоянию вещества (наряду с *твердым, жидким и газообразным*). К этому есть вполне определенные основания. Несмотря на то, что не существует резкой границы по температуре при переходе от газового состояния к плазменному (типа температуры плавления при переходе от твердого состояния к жидкому или температуры кипения при переходе от жидкого состояния к газообразному, ибо диапазон перехода от неионизованного состояния к ионизованному составляет несколько тысяч кельвин), плазма по своим свойствам может существенно отличаться от газа. Это имеет место практически всегда, даже в тех случаях, когда термодинамические свойства плазмы и идеального газа отличаются слабо. Так, при не слишком высоких давлениях среды в плазме большую роль играют возбужденные коллективные степени свободы. Существование таких возбужденных степеней свободы связано с образованием в плазме волн, неравновесных структур и турбулентностей.

Физика плазмы как раздел физики занимается изучением свойств систем заряженных частиц, и ее условно можно разделить на четыре крупных раздела:

- 1) элементарные процессы и кинетика в плазме;
- 2) статистическая физика (включая термодинамику) плазмы;
- 3) гидродинамика плазмы;
- 4) электродинамика плазмы.

Часто, желая подчеркнуть специфику исследуемых явлений, физику плазмы подразделяют на *физику высокотемпературной и низкотемпературной (частично ионизованной) плазмы*.

В физике плазмы, как и во всей физике, важную роль играют модели изучаемой системы. Наши знания об окружающей среде редко бывают полными. Достаточно адекватная модель изучаемой системы должна правильно и единообразно объяснять (а соответствующая ей математическая модель и описывать количественно) изучаемое явление и предсказывать поведение системы в новых условиях (конечно, в пределах действия используемой модели).

Как известно, существуют два значительно отличающихся друг от друга подхода к описанию коллективных явлений в средах, состоящих из большого числа частиц. *Кинетический* подход основан на понятии функции $f_s(\mathbf{V}, \mathbf{r}, t)$ распределения частиц сорта s по скоростям \mathbf{V} и пространству \mathbf{r} . С помощью функции распределения можно вычислить различные макроскопические

характеристики (плотность n_s , среднемассовую скорость V_s , температуру T_s и т. д.). При *гидродинамическом* подходе оперируют с макроскопическими характеристиками среды (n_s , \mathbf{V}_s , T_s и др.), не интересуясь характером распределения частиц по скоростям.

В тех случаях, когда минимальная из длин свободного пробега l_n частиц оказывается больше или порядка характерного размера l_x системы (время τ_c между столкновениями порядка или больше характерного времени t_x изучаемого процесса), кинетический подход является единственно приемлемым для описания коллективных эффектов в системах, состоящих из большого числа частиц ($n l_x^3 \gg 1$). В простейшем случае в основе кинетического подхода для плазмы, состоящей из частиц различных сортов, лежит *система кинетических уравнений для одночастичной функции распределения* для каждого сорта s [1, 2]:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f_s + (\mathbf{G}_s/m_s) \cdot \partial f_s / \partial \mathbf{V} = \sum_{j=1}^k J_{sj}, \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (B.1)$$

Здесь k — число сортов частиц, m_s — масса частиц сорта s , \mathbf{G}_s — сила, действующая на частицы (так, при движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях $\mathbf{G}_s = eZ_s(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$, Z_s — кратность заряда, e — элементарный заряд электрона, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — индукция магнитного поля), J_{sj} — интегралы, учитывающие столкновения частиц сорта s с частицами сорта j .

Способ представления интеграла столкновений зависит от характера взаимодействия между сталкивающимися частицами [1]. Для нахождения внутренних, самосогласованных с распределениями частиц электрических и магнитных полей система кинетических уравнений (1) должна быть дополнена уравнениями Максвелла, связывающими эти поля с плотностями электрических токов \mathbf{j}_s и *объемной плотностью зарядов* ρ_e :

$$\mathbf{j} = \sum_{s=1}^k \mathbf{j}_s = \sum_{s=1}^k eZ_s \int f_s(V) \mathbf{V} d\mathbf{V}, \quad (B.2)$$

$$\rho_e = \sum_{s=1}^k eZ_s \int f_s(V) d\mathbf{V}. \quad (B.3)$$

Гидродинамическое описание оперирует с уравнениями сохранения массы, импульса и энергии. Известно [1, 2], что гидродинамические уравнения могут быть выведены из кинетических, либо получены феноменологически (3) из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии для единичного объема. В рамках феноменологического подхода остается открытым вопрос

Таблица В.1

МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ

КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

**Нерелятивистская
кинетическая теория**

**Релятивистская
кинетическая теория**

**Гидродинамика
нерелятивистской плазмы**

**Гидродинамика
релятивистской плазмы**

1. Бесстолкновительная плазма (модель А.А. Власова).
2. Столкновительная плазма, состоящая из электронов, ионов различных сортов и нейтральных частиц: молекул, атомов.
3. Столкновительная полностью ионизированная плазма, состоящая из электронов и ионов различных сортов, отличающихся массами и кратностью электрического заряда.

Одножидкостная гидродинамика

1. Одножидкостная гидродинамика столкновительной плазмы.
2. Одножидкостная гидродинамика идеально проводящей плазмы.
3. Одножидкостная гидродинамика бесстолкновительной плазмы в сильных магнитных полях.

Многожидкостная гидродинамика

1. Гидродинамика плазмы с горячими электронами и холодными тяжелыми частицами.
2. Многожидкостная гидродинамика плазмы, состоящей из электронов и ионов различных сортов.
3. Гидродинамика плазменных систем с неравновесными внутренними степенями свободы: электроны, ионы, атомы в основном и возбужденном состояниях, молекулы.

Гидродинамика турбулентной плазмы

1. Модель слабой плазменной турбулентности.
2. Квазигидродинамические модели сильной плазменной турбулентности в сильно-столкновительной плазме.
3. Модели турбулентности в идеально проводящей плазме с магнитным полем.

о связи между коэффициентами переноса (коэффициентами вязкости, теплопроводности, электропроводности и др.) и характером взаимодействия частиц среды. Использование кинетических уравнений (1) для вывода гидродинамических уравнений позволяет не только обосновать и четко определить границы применимости приближения сплошной среды, но и вывести уравнения для потоков частиц, импульса и энергии, а также дать методы расчета коэффициентов переноса.

Разнообразие кинетических и гидродинамических подходов, используемых для описания плазмы, можно систематизировать в форме, предложенной в табл. В.1. В свою очередь каждый из подразделов табл. В.1 может быть поделен на более мелкие части в зависимости от конкретной физической задачи.

Более грубым является деление всего многообразия процессов в плазме на *стационарные* и *нестационарные*.

Глава I. ОСНОВНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

Не испугайся тех страниц
Пустых, белеющих, как поле,
Листай и вглядывайся: в них
Мы снова встретимся с тобою.

О. Сулейменов

Кроме особенностей плазмы, отмеченных во введении, многие явления в ней сопровождаются протеканием различного рода реакций: реакций *ионизации*, связанных с превращением нейтральных частиц в заряженные; *рекомбинации*, когда взаимодействие заряженных частиц приводит к образованию нейтральных атомов; реакций *возбуждения колебательных и вращательных степеней свободы*; различного рода *химических реакций* (например, диссоциации и ассоциации) и т. д. Поскольку для каждой из реакций характерна своя кинетика — скорость процесса, зависящая от температуры и давления, то в отдельных областях неоднородной плазмы могут преобладать различные реакции. Так в центре разряда, где температура высока, преобладают процессы ионизации, на границе с холодной средой — рекомбинации. Кроме кинетики реакции для анализа различных явлений необходимы сведения о коэффициентах переноса, рассчитанных с учетом элементарных процессов в плазме. Исследования кинетики процессов в плазме и расчеты коэффициентов переноса требуют отдельных рассмотрений, а в данной книге используются лишь сведения о них, необходимые для разбираемых задач. Более подробно с этими вопросами можно познакомиться в монографиях [6, 7]. Здесь же будут обсуждаться основные гидродинамические модели, используемые в плазме.

Условно гидродинамические модели можно разделить на *одножидкостные* и *многожидкостные*, каждая из которых может исследоваться в *релятивистском* или *нерелятивистском приближении*. Не следует думать, что *релятивистская гидродинамика* является экзотикой. Существует много задач и в лабораторной (например, электронные пучки), и в космической плазме, для описания которых необходимо использовать релятивистские

приближения. Далее остановимся только на нерелятивистском приближении, полагая характерную скорость процесса значительно меньшей скорости света.

В одножидкостной гидродинамике можно выделить три основные модели:

1) приближение, учитывающее конечность коэффициентов переноса, или *приближение столкновительной плазмы*;

2) *приближение идеально проводящей плазмы*, в которой проводимость считается бесконечной (обратим внимание, что термин «идеальная плазма» понимается здесь не в термодинамическом смысле);

3) *гидродинамическое приближение*, учитывающее конечность ларморовского радиуса заряженных частиц — *модели Чу—Гольдбергера—Лоу* (кратко *приближение ЧГЛ*).

В многожидкостных гидродинамических моделях можно выделить:

1) *приближение плазмы горячих электронов и холодных тяжелых частиц* — атомов, ионов, рассматриваемых как единая среда;

2) *двухжидкостную гидродинамику полностью ионизированной плазмы*, состоящей из электронов и ионов, с различными температурами;

3) *трехжидкостную гидродинамику плазмы*, состоящей из электронов, ионов и атомов, рассматриваемых каждая как отдельная жидкость;

4) *гидродинамику многокомпонентных плазм*: плазмы с электронами и ионами различных сортов, плазмы с электронами, горячими и холодными ионами и т. д.;

5) *гидродинамику систем с неравновесными внутренними степенями свободы*.

Использование той или другой модели зависит от конкретной физической задачи. Правильность выбора модели — адекватность ее физической картины — может определяться внутренней непротиворечивостью выводов и соответствием с экспериментами.

§ 1.1. ОДНОЖИДКОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

Рассмотрим плазму, состоящую из заряженных частиц различных сортов: электроны, одно- и многократно заряженные положительные и отрицательные ионы одного и (или) разных сортов, электроны и ионы разных энергий, когда ее можно рассматривать как е д и н у ю с р е д у, с единой локальной температурой, плотностью и давлением. Такая модель плазмы получила название одножидкостной плазмы. В рамках одножидкостного приближения можно рассматривать и сильностолкновительную, низкотемпературную плазму, и практически бесстолкновительную, идеально проводящую, высокотемпературную плазму.

Даже в том случае, когда плазма является бесстолкновительной, но находится в сильном магнитном поле, можно проводить гидродинамическое описание ее движения. Конечно, вид гидродинамических уравнений для каждой из моделей различен. Наиболее простая из моделей — модель идеально проводящей среды получила широкое распространение в высокотемпературной плазме (лабораторные эксперименты и астрофизические явления). Для большинства задач низкотемпературной плазмы наиболее адекватной моделью является модель сильностолкновительной проводящей среды.

1.1.1. Основные уравнения гидродинамики столкновительной плазмы

Когда все компоненты частично ионизованной плазмы, состоящей из атомов, ионов и электронов, успевают обмениваться энергией за счет интенсивных столкновений и всю систему удастся, хотя бы локально, характеризовать одной температурой T , плазму можно рассматривать в одножидкостном приближении. Одножидкостное приближение успешно применяется для описания стационарных и нестационарных процессов в сильностолкновительной плазме, если характерные времена процессов значительно превышают времена установления локального термодинамического равновесия между всеми компонентами и степенями свободы плазмы. Использование одножидкостного приближения приводит, как будет видно из дальнейшего, к ограничению на интенсивность внешнего электрического поля, необходимому для того, чтобы температуры всех компонент плазмы можно было считать одинаковыми.

Плотность многокомпонентной плазмы и ее скорость в одножидкостном приближении определяются так:

$$\rho = \sum_s m_s n_s, \quad \mathbf{V} = \rho^{-1} \sum_s m_s n_s \mathbf{V}_s.$$

Суммирование производится по каждой из компонент плазмы. Если при этом каждая из компонент s ведет себя в термодинамическом смысле как идеальный газ с уравнением состояния $p_s = k_B n_s T_s$, то полное давление можно представить в виде суммы парциальных давлений компонент:

$$p = \sum_s p_s = k_B \sum_s n_s T_s.$$

Система уравнений сплошной среды для одножидкостной сильностолкновительной плазмы может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \nabla \hat{p} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{G}, \quad (1.1.2)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi + j^2/\delta. \quad (1.1.3)$$

(Ориентируясь на приложение, будем, там, где это удобно, пользоваться СИ.) Здесь \hat{p} — тензор напряжений,

$$p_{i,j} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (1.1.4)$$

p — давление, τ_{ij} — тензор вязких напряжений,

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \left(\frac{2}{3} \eta - \xi \right) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_k}{\partial x_k}, \quad (1.1.5)$$

η — динамическая вязкость плазмы, ξ — ее объемная вязкость, Φ — диссипативная функция,

$$\Phi = 2\eta \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\} + (\xi - 2\eta/3) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right), \quad (1.1.6)$$

j — плотность электрического тока, δ — коэффициент электропроводности плазмы, $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ — сила Ампера, \mathbf{G} — другие внешние силы (например, сила тяжести), действующие на плазму.

В уравнении (3) $\mathbf{q} = \mathbf{q}_r + \mathbf{q}_l$ — суммарный тепловой поток, состоящий из кондуктивного \mathbf{q}_r и лучистого \mathbf{q}_l потоков. Кондуктивный тепловой поток в простейшем случае определяется соотношением Фурье:

$$\mathbf{q}_r = -\lambda \nabla T, \quad (1.1.7)$$

где λ — коэффициент теплопроводности плазмы. В гидродинамическом подходе коэффициенты переноса η , ξ , λ , δ должны быть заданы как функции температуры и давления (плотности) плазмы.

Для расчета переноса теплоты излучением необходимо знать распределение спектральной интенсивности излучения $I_\nu(\mathbf{r}, \bar{\Omega}_1, t)$ — энергии излучения, проходящей в точке \mathbf{r} в момент времени t за единичное время через единичную площадку, ориентированную в направлении единичного вектора $\bar{\Omega}_1$, и отнесенной к интервалу частот $d\nu$ и элементу телесного угла $d\bar{\Omega}_1$.

При этом система гидродинамических уравнений (1)–(3) должна быть дополнена уравнением переноса для I_ν [8]. В простейшем случае уравнение переноса излучения для спектральной интенсивности излучения I_ν имеет вид

$$c^{-1} \frac{dI_\nu}{dt} + \vec{\Omega}_1 \cdot \nabla I_\nu = \kappa'_\nu (I_{\nu p} - I_\nu) + \varepsilon_\nu \quad (1.1.8)$$

Здесь $\vec{\Omega}_1$ — единичный вектор, характеризующий направление распространения излучения, c — скорость света, κ'_ν — спектральный коэффициент поглощения среды, зависящий от состава плазмы, давления и температуры с учетом вынужденного испускания [8], т. е. с учетом переизлучения части поглощенной энергии,

$$I_{\nu p} = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left\{ \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \right] - 1 \right\}}$$

— равновесная планковская интенсивность излучения, ε_ν — спектральная плотность объемных источников излучения, h — постоянная Планка, ν — частота, на которой происходит излучение.

При расчете излучения приходится решать самосогласованную задачу, поскольку спектральный коэффициент поглощения среды, спектральная плотность объемных источников и интенсивность излучения сами зависят от давления, температуры и состава плазмы в выбранной точке рассматриваемого объема.

Для расчета полного потока излучения при известной зависимости $I_\nu(\mathbf{r}, \vec{\Omega}_1, t)$ необходимо учесть вклад от всех частот, проинтегрировав по всему спектру:

$$\mathbf{q}_\pi = \int_0^\infty d\nu \int_0^{4\pi} d\vec{\Omega}_1 \vec{\Omega}_1 I_\nu \quad (1.1.9)$$

Существуют два частных случая, часто упрощающих решение задачи о переносе излучения: *приближение оптически толстого тела* (когда $\kappa_\nu l_x \gg 1$ и излучение в данном спектральном диапазоне выходит только с поверхности излучающего объема) и *приближение оптически тонкого тела* (когда $\kappa_\nu l_x \ll 1$ и излучение свободно выходит из объема). В тех случаях, когда излучение свободно выходит из объема (длина свободного пробега фотонов $1/\kappa_\nu$ значительно превышает характерный размер системы l_x), слагаемое $\nabla \cdot \mathbf{q}_\pi = Q_\pi$ в уравнении энергии можно представить в виде *объемного источника излучения* $Q_\pi(p, T)$, зависящего от локальных значений температуры и давления плазмы. В случае оптически тонкого тела можно пользоваться приближением лучистой теплопроводности, о котором пойдет речь в § 2.14. В промежуточном случае $\kappa_\nu l_x \sim 1$ необходимо решать уравнения переноса (8).

Иногда от уравнения энергии, записанного в форме (3), удобно перейти к уравнению, описывающему *изменение энтропии*.

Для этого можно воспользоваться известным термодинамическим соотношением для химически не реагирующей среды:

$$T dS = c_V dT + p d(1/\rho),$$

где S — энтропия плазмы единичной массы.

Преобразовав (3), получим

$$T\rho \frac{dS}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi + j^2/\delta. \quad (1.1.10)$$

Приведем еще одну форму уравнения энергии, где в качестве зависимой переменной используется *энтальпия* h плазмы единичной массы, определяемая для идеального газа термодинамическим соотношением

$$dh = c_V dT - d(p/\rho) \equiv c_p dT.$$

При этом из (3) и соотношения Фурье для кондуктивного потока теплоты (7) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h + \nabla \cdot \rho h \mathbf{V} = (\nabla \lambda / c_p) \nabla h + \Phi + (j^2/\delta) + Q_x. \quad (1.1.11)$$

Какой из форм уравнения энергии воспользоваться, определяется удобством решения конкретной физической задачи.

Система уравнений (3)—(8) должна быть дополнена *уравнением состояния плазмы*

$$p = p(\rho, T), \quad (1.1.12)$$

которое в простейшем виде превращается в уравнение состояния идеального газа $p = k_B n T$. При высоких давлениях следует учитывать эффекты термодинамической неидеальности, связанные с кулоновским взаимодействием заряженных частиц. Неидеальность плазмы сказывается на уравнении состояния, на коэффициентах переноса плазмы, на излучении и может приводить к ряду важных эффектов.

Для расчета самосогласованных с уравнениями (1)—(9) электрических и магнитных полей вышеприведенную систему необходимо дополнить уравнениями Максвелла. Термин «самосогласованные поля» означает, что электрические и магнитные поля, влияя на свойства плазмы и характер ее движения, сами определяются свойствами плазмы и ее движением, через перераспределение объемных электрических зарядов и токов.

; В СИ уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e. \quad (1.1.16)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности соответственно электрического и магнитного полей, \mathbf{D} и \mathbf{B} — индукции электрического и магнитного полей, ρ_e — плотность объемных зарядов.

Материальные уравнения, связывающие индукции и напряженности электрических и магнитных полей, записывают в виде

$$\mathbf{B} = \hat{\mu} \cdot \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1.1.18)$$

Здесь μ_0 — магнитная проницаемость вакуума (в СИ $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м), $\hat{\mu}$ — тензор относительной магнитной проницаемости плазмы; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума (в СИ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), $\hat{\epsilon}$ — тензор относительной диэлектрической проницаемости плазмы. Кроме того, необходима связь между плотностью электрического тока \mathbf{j} и электрическим полем. В простейшем случае эта связь устанавливается *законом Ома*:

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \vec{\Omega} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1.19)$$

Слагаемое $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ представляет собой индуцированное электрическое поле, возникающее при движении среды со скоростью \mathbf{v} поперек силовых линий магнитного поля. Второе слагаемое в левой части уравнения (19) (член $\mathbf{j} \times \vec{\Omega}$) обязано своим происхождением *эффекту Холла*, вызванному дрейфом заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.

Безразмерный комплекс $\Omega = \omega_e / \nu_e \equiv eB / (m_e \nu_e)$ называют *параметром Холла*. Параметр Холла, как видно из его определения, представляет собой отношение циклотронной частоты электронов $\omega_e = eB / m_e$ к частоте передачи импульса от электронов к тяжелым частицам ν_e (или отношение времени между столкновениями электронов к периоду их вращения по ларморовской окружности). Заряженные частицы, период вращения которых по ларморовской окружности значительно превышает время между столкновениями, называют замагниченными. Из-за обратной пропорциональности циклотронной частоты массе заряженной частицы при движении плазмы в магнитном поле электроны часто бывают «замагниченными» $\omega_e / \nu_e \gg 1$, а ионы — нет $\omega_i = eB / (m_i \nu_i) < 1$.

Если ввести суммарное электрическое поле $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ и *тензор проводимости* $\hat{\sigma}$, то закон Ома (19) можно записать в более компактном виде:

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}_\Sigma, \quad j_i = \sum_{l=1}^3 \sigma_{il} E_{\Sigma l}, \quad i, l = 1, 2, 3. \quad (1.1.20)$$

Представляющая в декартовой системе координат тензор проводимости σ матрица σ_{ii} в случае, когда магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси z , т. е. при $\mathbf{B}(0, 0, B)$, имеет наиболее простой вид:

$$\hat{\sigma} \equiv (\sigma_{ii}) = \sigma_0 \begin{vmatrix} (1 + \Omega^2)^{-1} & \Omega(1 + \Omega^2)^{-1} & 0 \\ -\Omega(1 + \Omega^2)^{-1} & (1 + \Omega^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.1.21)$$

Здесь σ_0 — проводимость плазмы в отсутствие магнитного поля. Если у вектора \mathbf{B} все проекции не нулевые, то все компоненты матрицы σ_{ii} отличны от нуля. Вид матрицы σ_{ii} в этом случае можно получить из (21) преобразованием компоненты тензора (матрицы) при переходе к новой системе координат. Из (21) следует, что в сильных магнитных полях, когда параметр Холла превышает единицу, проводимость становится существенно анизотропной в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, не изменяясь вдоль него.

Полная система гидродинамики плазмы для решения конкретных задач сложна даже при расчетах на ЭВМ. Однако в реальных физических задачах часто наиболее существенными оказываются один или несколько эффектов, а остальными можно пренебречь. Пренебрежение несущественными явлениями облегчает решение задачи. Как правило, отношение одних факторов к другим может быть представлено в виде безразмерного критерия. Выбор и оценка таких критериев обычно должны предшествовать формулировке соответствующей модели физического явления и решению задачи.

Наряду с обычными для сплошной среды критериями, такими, как числа Рейнольдса, Маха, Прандтля и т. д., в гидродинамике плазмы существует ряд своих специфических критериев: *магнитное число Рейнольдса, параметры взаимодействия, число Гартмана, параметр бета* ($\beta = p/p_m$), представляющий собой отношение газодинамического давления p к магнитному: $p_m = B^2/(2\mu_0)$. Например, во многих устройствах, использующих низкотемпературную плазму в магнитном поле, условие пренебрежения собственным магнитным полем B_c по сравнению с внешним B_0 может быть выражено через магнитное поле Рейнольдса Re_m :

$$B_c/B_0 = Re_m \equiv \mu_0 \sigma v_x l_x < 1.$$

Отношение силы Ампера $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ к силам инерции $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ можно выразить через параметр взаимодействия: $R_\sigma = \sigma B^2 l_x / (\rho v_x)$. Здесь v_x и l_x — характерные скорость и размер системы соответственно. Условие пренебрежения током смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$ по сравнению с током проводимости \mathbf{j} сводится к малости параметра

$R_m = t_m/t_x$, представляющего собой отношения максвелловского времени релаксации (рассасывания) объемного электрического заряда $t_m = \epsilon_0/\sigma$ к характерному времени задачи t_x .

Анизотропия процессов переноса в магнитном поле, как было показано выше, определяется безразмерным параметром Холла. Если $\beta \ll 1$, то, как будет показано в п. 1.1.3, тензор давления и температура плазмы становятся анизотропными. Более подробное описание способов введения безразмерных параметров в гидродинамику плазмы и проводящих сред приводится в монографиях [9]. Далее по ходу изложения будут введены и другие безразмерные критерии, возникающие в рассматриваемых задачах.

Иногда бывает удобно полную систему уравнений Максвелла (13)—(16) свести к одному уравнению для электрического или магнитного полей. Так, в случаях, когда можно пренебречь эффектом Холла ($\Omega \ll 1$), с помощью законов Ома и уравнений Максвелла систему (13)—(16) можно свести к одному уравнению для магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [1/(\mu_0 \sigma)] \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.1.22)$$

Уравнение (22) описывает перенос магнитного поля средой, движущейся со скоростью \mathbf{v} , и его диффузию в проводящей среде с коэффициентом диффузии $1/(\mu_0 \sigma)$, и должно решаться совместно с гидродинамическими уравнениями (1)—(3). Как известно, в общем случае электрическое поле можно разделить на две составляющие — *вихревую* и *потенциальную* (безвихревую). При выполнении условия $Re_m \ll 1$ электрическое поле можно считать безвихревым ($\nabla \times \mathbf{E} \equiv \text{rot } \mathbf{E} = 0$) и

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad (1.1.23)$$

где ϕ — электрический потенциал. При $Re_m \ll 1$ в уравнении движения в силе Ампера суммарное магнитное поле \mathbf{B} можно заменить на внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 . Уравнение для стационарного электрического поля или электрического потенциала можно получить, подставляя закон Ома в уравнение, выражающее сохранение электрического тока и следующее из уравнения Максвелла (1) после взятия от него операции дивергенции:

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{j} \equiv \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.1.24)$$

В пренебрежении эффектом Холла ($\Omega \ll 1$) из (19) и (24) получим

$$\Delta \phi + \nabla (\ln \sigma) \cdot [\nabla \phi - (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] - \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (1.1.25)$$

Приведем форму уравнений одножидкостной плазмы с ис-

пользованием тензорной записи, когда по одинаковым повторяющимся индексам проводится суммирование:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \cdot V_j \equiv - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \cdot V_j;$$

$$\frac{\partial \rho V_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V_k V_j + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) + \varepsilon_{ikm} i_k B_m + G_i = 0; \quad (1.1.26)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho V_k h = \frac{\partial}{\partial x_k} [\lambda / (\rho c_p)] \frac{\partial h}{\partial x_k} + \Phi + Q_n + j^2 / \sigma;$$

$$\varepsilon_{imk} \frac{\partial E_k}{\partial x_m} = - \frac{\partial B_i}{\partial t}; \quad \varepsilon_{smk} \partial H_k / \partial x_m = j_s;$$

$$\partial B_k / \partial x_k = 0, \quad \frac{\partial D_k}{\partial x_k} = \rho_e, \quad j_s = \sigma (E_e + \varepsilon_{smk} V_m B_k).$$

Здесь ε_{imk} — тензор Леви—Чивита, обладающий свойствами: $\varepsilon_{ikm} = 0$, если хотя бы два индекса совпадают (например, $\varepsilon_{11m} = 0$; $\varepsilon_{1m1} = 0$) и $\varepsilon_{ikm} = 1$, если ikm есть четная транспозиция индексов, и $\varepsilon_{ikm} = -1$, если ikm — нечетная транспозиция индексов; $i, k, m = 1, 2, 3$; $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$.

1.1.2. Гидродинамика идеально проводящей плазмы

В полностью ионизированной среде, состоящей из электронов и ионов, электропроводность плазмы возрастает пропорционально $T^{3/2}$ и при высоких температурах ($1 \cdot 10^6 — 1 \cdot 10^8 \text{K}$) может достигать достаточно высоких значений: $\sim 1 \cdot 10^9 \text{ См/м}$ (для сравнения, проводимость меди при 20°C составляет $5,88 \times 10^7 \text{ См/м}$). Для гидродинамики таких систем удобно пользоваться приближением идеально проводящей плазмы, считая $\sigma = \infty$.

В таком приближении уравнение энергии и закон Ома существенно упрощаются. Действительно, считая плотность электрического тока конечной при $\sigma \rightarrow \infty$ ($j/\sigma \rightarrow 0$), из закона Ома (19) получим, что электрическое поле однозначно определяется локальными значениями скорости движения плазмы и магнитного поля:

$$\mathbf{E} = - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.1.27)$$

В уравнении энергии (3) можно при этом пренебречь джоулевым нагревом ($j^2/\sigma \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$). Часто в том же приближении пренебрегают вязкостью и теплопроводностью плазмы. При $R_M \ll 1$ в уравнении Максвелла (14) можно не учитывать ток смещения:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (1.1.28)$$

Для многих плазменных задач тензор относительной магнитной проницаемости можно считать равным единице: $\hat{\mu} = 1$. В таких случаях, пользуясь уравнением Максвелла (28), можно исключить ток из силы Ампера и уравнение движения представить в виде

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla p - \mu_0^{-1} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.1.29)$$

Уравнение неразрывности сохраняет свой прежний вид (1).

При адиабатическом движении среды, когда можно пренебречь выделением теплоты (джоулевым и за счет вязкой диссипации) и ее переносом, уравнение энергии принимает вид

$$\frac{d}{dt} (p/\rho^\gamma) = 0, \quad (1.1.30)$$

где γ — показатель адиабаты.

Уравнение движения в форме (29) используют и для описания перемещения проводящей жидкости (например, ртути, лития) в магнитных и электрических полях. Для проводящих жидкостей, как известно, в приближении несжимаемости среды уравнение неразрывности сводится к виду

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1.31)$$

а уравнение состояния в однородной среде — к требованию $\rho = \text{const}$.

Приближение несжимаемой среды (31) годится и для стационарной плазмы, движущейся с характерными скоростями v_x , значительно меньшими скорости звука $a_0 = (\partial P / \partial \rho)_s^{1/2}$, что эквивалентно малости числа Маха $\mathbf{M} = v_x / a_0$ по сравнению с единицей: $\mathbf{M} \ll 1$.

В идеально проводящей плазме, когда проводимость можно считать бесконечной, имеем $\sigma = \infty$, и уравнение (22), описывающее изменение магнитного поля в движущейся среде, принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (1.1.32)$$

При преобразовании уравнения (32) учтено отсутствие магнитных зарядов и уравнение неразрывности. Для движений, не меняющихся вдоль магнитных силовых линий ($\mathbf{B} \cdot \nabla = 0$), уравнение (32) сводится к условию $d(\mathbf{B}/\rho)/dt = 0$ или $B \sim \rho$. Это соотношение показывает, что линии индукции магнитного поля как бы «вморожены» в плазму и изменение индукции магнитного поля повторяет изменение плотности плазмы.

1.1.3. Гидродинамика бесстолкновительной анизотропной плазмы

Как уже отмечалось, последовательное исследование коллективных процессов в бесстолкновительной плазме может быть

проведено только в рамках кинетической теории. Однако в сильных магнитных полях даже для бесстолкновительной плазмы можно сформулировать гидродинамическую модель сплошной среды. Такой гидродинамический подход возможен благодаря тому, что в сильном магнитном поле заряженные частицы быстро вращаются по ларморовским орбитам вокруг линий индукции магнитного поля. Кроме того, на заряженные частицы действуют самосогласованные с коллективным движением этих частиц электрические и магнитные поля, играя роль «эффективных столкновений»*. В бесстолкновительной плазме с магнитным полем в качестве характерного размера вместо длины свободного пробега можно выбрать ларморовский радиус. Когда ларморовский радиус заряженных частиц значительно меньше характерных размеров системы, можно построить своеобразную гидродинамику бесстолкновительной плазмы. Возникающая при этом сплошная среда сильно анизотропна — анизотропны давления и температура. Естественной мерой анизотропии является параметр бета: $\beta = p/p_m$.

Видно, что существенная анизотропия давления и температуры возникает при движении слабостолкновительной плазмы именно в сильных магнитных полях ($\beta \ll 1$). Эта анизотропия вызвана «неравноправностью» движения заряженных частиц вдоль и поперек линий индукции магнитного поля из-за характера воздействия силы Лоренца $eZ\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Поскольку сила Лоренца действует только на движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, заставляя заряженную частицу вращаться по ларморовской орбите, в направлении магнитного поля движение оказывается не зависящим от него — сила Лоренца в этом направлении равна нулю. Малость столкновений затрудняет обмен энергией между продольным и поперечным движениями. Поэтому такая плазма как бы «распадается» на две подсистемы, не находящиеся в термодинамическом равновесии друг с другом: *продольную* с давлением p_{\parallel} и температурой T_{\parallel} и *поперечную* с p_{\perp} и T_{\perp} . При этом каждая из подсистем ведет себя как идеальный газ, и уравнения состояния плазмы для каждой из подсистем могут быть представлены в форме

$$p_{\parallel} = k_B n T_{\parallel}, p_{\perp} = k_B n T_{\perp}. \quad (1.1.33)$$

Из (33) следует, что тензор давления имеет вид

$$p_{ij} = p_{\parallel} b_i b_j + p_{\perp} \cdot (\delta_{ij} - b_i b_j). \quad (1.1.34)$$

* Взаимодействие заряженных частиц через создаваемые ими электрические поля приводит в бесстолкновительной плазме к затуханию распространяющихся возмущений. Это специфическое затухание получило название *затухания Ландау* [1].

Здесь $\mathbf{b} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ — единичный вектор вдоль направления магнитного поля. Уравнения движения по внешнему виду аналогичны обычным уравнениям магнитной динамики невязкой плазмы:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \hat{p} - \mu_0^{-1} \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{G}. \quad (1.1.35)$$

Уравнение энергий (30) для анизотропной плазмы вырождается в два адиабатических соотношения для поперечного и продольного давлений:

$$\frac{d}{dt}(p_{\perp}/\rho B) = 0; \quad (1.1.36)$$

$$\frac{d}{dt}(p_{\parallel} B^2/\rho^3) = 0. \quad (1.1.37)$$

Соотношение адиабатичности (36) отражает сохранение магнитного момента при движении заряженной частицы в магнитном поле. Действительно: магнитный момент частицы, вращающейся с циклотронной частотой ω_z вокруг линий индукции магнитного поля, определяется как произведение тока $eZ\omega_z/(2\pi)$ на площадь охватываемого им контура πr_L^2 с ларморовским радиусом $r_L = v_{\perp}/\omega_z$, т. е. $M_z = eZ\omega_z r_L^2/2 \sim v_{\perp}^2/B$. Поскольку при движении бесстолкновительных частиц в магнитном поле работа не совершается, то усредненная за период кинетическая энергия $m_z v^2/2$ остается постоянной (v_{\perp} — скорость заряженной частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю). Таким образом,

$$\langle M_z \rangle \sim \langle v_{\perp}^2/B \rangle \sim T/B \sim p/(\rho B) = \text{const}.$$

При движении вдоль магнитного поля индукция магнитного поля и поперечное давление остаются постоянными: $B = \text{const}$, $p_{\perp} = \text{const}$, а изменяются лишь продольное давление p_{\parallel} и плотность ρ . В этом случае уравнение (37) превращается в уравнение $d(P_{\parallel}/\rho^3)/dt = 0$, что соответствует адиабатическому движению идеального газа с одной степенью свободы и показателем адиабаты γ_{\parallel} (согласно статистической физике показатель адиабаты связан со степенями свободы системы n_s соотношением $\gamma = (n_s + 2)/n_s$). При движении поперек силовых линий продольное давление постоянно $p_{\parallel} = \text{const}$, а магнитное поле из условий «вмороженности» (32) пропорционально плотности $B \sim \rho$, так как $\mathbf{V} \cdot \nabla_{\perp} = 0$. Уравнение (36) при этом превращается в уравнение $d(p_{\perp}/\rho^2)/dt = 0$, что соответствует адиабатическому движению идеального газа с двумя степенями свободы и показателем адиабаты, равным 2.

Уравнения (36), (37) получают при пренебрежении продольными и поперечными — по отношению к магнитному полю — потоками теплоты и джоулевой диссипацией. Уравнения для бесстолкновительной плазмы с анизотропным давлением справедливы, если характерный размер системы l_x превышает ларморовский радиус: $l_x/r_L \gg 1$. Последнее неравенство аналогично соотношению между длиной свободного пробега (в бесстолкновительной плазме с магнитным полем аналогом длины свободного пробега является ларморовский радиус r_L) и характерным размером системы в столкновительной плазме. В литературе рассматриваемая модель известна как *приближение ЧГЛ*, называемое по имени авторов — Чу (G. Chew), Гольдбергера (G. Goldberger), Лоу (F. Low), — предложивших эту гидродинамическую модель бесстолкновительной плазмы [10; 11]. Гидродинамическую модель бесстолкновительной плазмы с анизотропным тензором давления широко используют в астрофизике, например, при описании процессов обтекания Земли солнечным ветром.

§ 1.2. ДВУХЖИДКОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

1.2.1. Возникновение горячих электронов.

Ионизационное равновесие в многокомпонентной плазме

Рассмотрим нарушения условий использования одножидкостного приближения, когда для описания гидродинамики многокомпонентной плазмы нужны более сложные модели. В первую очередь в сильных электрических полях такое нарушение может быть связано с тем, что легкие электроны, воспринимающие энергию от электрического поля, неэффективно передает ее тяжелым частицам — атомам, ионам — при упругих столкновениях, так как при каждом упругом соударении частиц, резко отличающихся по массе, передается энергия, пропорциональная $2m_e/m$ (m — масса тяжелой частицы). Неэффективность в обмене энергиями приводит к нагреву электронов, температура же тяжелых частиц T_a остается близкой к температуре резервуара, в котором находится плазма, так как тяжелые частицы эффективно обмениваются энергией с его стенками.

Условия перегрева электронов. Найдем условия, когда температура электронов T_e отличается от температуры тяжелых частиц. Разность температур можно найти, приравняв энергию $e^2 n_e E^2 / [m_e (v_{ea} + v_{ei})]$, получаемую электронами от электрического поля, энергии, передаваемой ими при упругих столкновениях с атомами и ионами:

$$\frac{e^2 n_e E^2}{m_e \cdot (v_{ea} + v_{ei})} \equiv \sigma E^2 = \frac{3}{2} k_B n_e [(T_e - T_a) \delta_{ea} v_{ea} + (T_e - T_i) \delta_{ei} v_{ei}]. \quad (1.2.1a)$$

Здесь принято, что температуры T_a , T_i тяжелых частиц и доли передаваемой энергии δ_{ea} , δ_{ei} отличаются. Однако из-за близости масс атомов и ионов различиями их температур практически можно пренебречь:

$$T_a = T_i, \delta_{ea} = \delta_{ei} = 2m_e/m_a.$$

Следовательно, разность между температурами электронов и тяжелых частиц определяется из соотношения

$$T_e - T_a = [e^2 m_a / (3k_B m_e^2)] (E / v_\Sigma)^2, \quad (1.2.16)$$

где $v_\Sigma = v_{ea} + v_{ei}$.

В слабоионизованной квазинейтральной плазме $(n_e - n_i)/n_e \ll 1$ и (1) можно упростить. Во-первых, при малых степенях ионизации можно пренебречь частотой столкновения электронов с ионами по сравнению с частотой столкновения электрон—атом, так как $v_{ei}/v_{ea} = Q_{ei}n_e/Q_{ea}n_a < 1$. Здесь Q_{ei} , Q_{ea} — сечения столкновений электрон—ион, электрон—атом, усредненные по функции распределения. Во-вторых, можно считать, что полное давление определяется давлением нейтральных атомов $p = p_a + p_i + p_e \sim p_a$, поскольку $(p_e + p_i)/p_a = n_e(1 + T_e/T_a)/n_a < 1$, несмотря на то, что электроны горячие: $T_e > T_a$.

Если выразить частоту столкновения электрон—атом через давление плазмы $v_{ea} = (p Q_{ea}/k_B T_a) [8k_B T_e / (\pi m_e)]^{1/2}$ и подставить в (16), можно получить оценку зависимости разности температур от параметра E/p :

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi e^2 m_a}{6 m_e Q_{ea}^2} \left(\frac{E}{p} \right)^2} \right\}. \quad (1.2.2)$$

Пусть $(E/p)_{cr}$ — значение этого параметра, когда $(T_e - T_a)/T_a = 1$. При большом значении параметра E/p из соотношения (2) следует, что $(E/p) > (E/p)_{cr}$ — в сильных электрических полях, при умеренных давлениях температура электронов может существенно превышать температуру тяжелых частиц и приближение одножидкостной гидродинамики с одинаковыми температурами всех компонент становится неприемлемым. Пользуясь соотношением (2), можно рассчитать критические поля и давления, при которых электроны становятся горячими.

Таким образом, при $(E/p) > (E/p)_{cr}$ следует использовать гидродинамические модели, отличные от одножидкостного приближения. Наиболее распространенными из них являются модели частично ионизованной плазмы с горячими электронами и холодными тяжелыми частицами и модель полностью ионизованной плазмы, состоящей из электронов и ионов со своими температу-

рами. Плазма с горячими электронами и холодными тяжелыми частицами возникает в газовом разряде, при этом основные процессы разыгрываются именно в электронной компоненте. Холодные тяжелые частицы при не слишком сильных токах разряда служат своеобразным распределенным резервуаром, куда электроны сбрасывают свой импульс и энергию.

Ионизационное равновесие. При исследовании различного рода процессов в плазме необходимо знать ее состав. В настоящее время известно много различных реакций образования и гибели заряженных частиц. Вопросам кинетики ионизации и рекомбинации посвящена обширная научная литература (см., например, [4; 6]). Разнообразие этих реакций зависит от способа (самостоятельный или несамостоятельный) получения разрядом рода газа, его давления, характерных размеров системы и т. д. Состав плазмы определяется балансом между рождением, уходом и гибелью частиц в единичном объеме. Например, для электронов уравнение баланса частиц в единичном объеме записывают в виде

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{en} = N_+ - N_- \quad (1.2.3)$$

Здесь N_+ и N_- — источники рождения и гибели частиц в объеме, \mathbf{q}_{en} — поток электронов; форма записи источников зависит от характера протекающих реакций.

Рассмотрим более подробно термическую ионизацию, в результате которой возникает плазма, состоящая из нейтральных атомов, свободных электронов и положительно заряженных ионов. Для реакции ионизации атомов электронным ударом: $A + e$, скорость прямой реакции можно записать в виде

$$W_+ = k_i n_a n_e \quad (1.2.4)$$

Если гибель заряженных частиц в единичном объеме происходит за счет трехчастичной комбинации: $A^+ + 2e$, то скорость обратной реакции представляется в форме

$$W_- = \beta_3 n_e^2 n_i \quad (1.2.5)$$

Коэффициенты объемной ионизации k_i и объемной рекомбинации β_3 зависят от рода газа, давления и температуры. При этом источник рождения частиц равен скорости прямой реакции, а источник гибели — скорости обратной: $N_+ = W_+$, $N_- = W_-$.

В стационарном состоянии термодинамического равновесия потоки отсутствуют и источники рождения и гибели частиц в объеме должны уравновешиваться:

$$N_+ - N_- = n_e (k_i n_a - \beta_3 n_e n_i) = 0 \quad (1.2.6)$$

Равенство (6) также отражает тот факт, что, согласно физической кинетике, *вследствие принципиальной обратимости всех элементарных процессов в термодинамически равновесной системе скорости прямых и обратных реакций должны быть равными:*

$$W_+ = W_- ,$$

Таким образом, из (6) вытекает связь между концентрациями частиц в плазме и константой равновесия реакции термической ионизации (отношением коэффициентов ионизации и рекомбинации):

$$n_i n_e / n_a = k_i / \beta_3 \equiv K(T). \quad (1.2.7)$$

Константу равновесия реакции K можно определить из условия равенства в состоянии термодинамического равновесия [6] химических потенциалов веществ, вступающих в реакцию (в данном случае атомов μ_a), и продуктов реакции (в данном случае ионов μ_i и электронов μ_e):

$$\mu_a = \mu_e + \mu_i. \quad (1.2.8)$$

Далее воспользуемся известным из статистической физики соотношением для химического потенциала

$$\mu_j = k_B T \ln(n_j / z_{cj}), \quad (1.2.9)$$

где $j = e, i, a$; $z_{cj} = z_{nj} z_{bj}$, $z_{nj} = (2\pi m_j k_B T / h^2)^{3/2}$ — статистическая сумма по поступательным степеням свободы, а $z_{bj} = \sum_k g_k \exp \times (-\varepsilon_{jk} / k_B T)$ — статистическая сумма по внутренним степеням свободы (ε_{jk} — энергия k -го состояния, g_k — статистический вес этого состояния). Подставляя (9) в (8), находим

$$n_i n_e / n_a = \frac{z_{be} z_{bi}}{z_{ba}} (2\pi m_e k_B T / h^2)^{3/2} \exp[-eI / (k_B T)]. \quad (1.2.10)$$

В (10) $z_{be} = 2$; z_{bi} , z_{ba} — статистические суммы по внутренним степеням свободы ионов и атомов соответственно, в которых отсчет энергии идет от индивидуального нуля системы (см., например, [6]), I — потенциал ионизации атомов. В состоянии равновесия уравнение (7) должно совпадать с термодинамическим условием (10).

Сравнивая (7) и (10), находим константу равновесия реакции термической ионизации

$$K = (2z_{bi} / z_{ba}) (2\pi m_e k_B T / h^2)^{3/2} \exp\left(-\frac{eI}{k_B T}\right) \quad (1.2.11)$$

Для расчета состава плазмы по уравнению (10) при заданной

температуре T и давлении $p = k_B T (n_a + n_i + n_e)$ необходимо воспользоваться условием квазинейтральности $n_e = n_i$.

Соотношение (10) в литературе называют *уравнением Саха* (M. Saha). Часто низкотемпературную плазму характеризуют *степенью ионизации* α ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$\alpha = n_e / (n_a + n_i) = n_e / n_0, \quad n_0 = n_a + n_i. \quad (1.2.12)$$

При этом концентрации электронов и атомов выражаются через степень ионизации α следующим образом:

$$n_e = n_i = \alpha n_0, \quad n_a = (1 - \alpha) n_0, \quad (1.2.13)$$

где $n_0 = p / (k_B T)$. Пользуясь соотношением (10), для α имеем

$$\alpha = \sqrt{K_1 / (1 + K_1)}, \quad K_1 = K k_B T / p. \quad (1.2.14)$$

Сложнее рассчитать состав в термически неравновесной плазме, когда температура электронов отличается от температуры тяжелых частиц $T_e \neq T_i = T_a$. Однако и при $T_e \neq T_i = T_a$, если успевают установиться больцмановское распределение атомов по энергетическим уровням с электронной температурой, можно пользоваться уравнением Саха, в котором фигурирует электронная температура:

$$n_e^2 / n_a = (2z_{bi} / z_{ba}) (2\pi m_e k_B T_e / h^2)^{3/2} \exp\left(-\frac{eI}{k_B T_e}\right). \quad (1.2.15)$$

Как показывают оценки (см. [4]) и эксперименты, если концентрация электронов превышает некоторое граничное значение n_c (т. е. $n_e > n_c$), то успевают устанавливаться больцмановское распределение атомов по уровням с электронной температурой и уравнение Саха (15) представляет собой обобщение уравнения (10) на случай термически неравновесной плазмы $T_e \neq T_i = T_a$. Расчеты граничного значения n_c приведены в монографии [4].

Уравнение для полного давления плазмы в этом случае должно учитывать отличие температур электронов и тяжелых частиц:

$$p = k_B [n_a T_a + n_e (T_a + T_e)].$$

Иногда при расчете состава приходится задавать не полное давление p и температуру T , а полное число частиц в единичном объеме и температуру. Такая ситуация возникает в безрасходных разрядах, горящих в камере постоянного объема, когда газ из неионизированного состояния переходит в плазму, а масса среды остается постоянной вне зависимости от изменения температуры:

$$M = m_a n_a + m_i n_i = m_a (n_a + n_e) = \text{const}; \quad n_a + n_e = n_0 = \text{const}. \quad (1.2.16)$$

Повышение или понижение температуры в таких разрядах приво-

дит к изменению давления внутри камеры, оставляя массу газа постоянной. Аналогичным образом можно рассчитать состав плазмы, когда в результате термической ионизации получаются **многократно заряженные ионы**: $A^+ \rightleftharpoons A^{++} + e$, $A^{++} \rightleftharpoons A^{+++} + e$ и т. д.

Проводя выводы, аналогичные тем, что привели к уравнениям (8) и (10), получаем обобщение уравнения Саха на случай многократно ионизированной плазмы. Используя (8) и (10) для определения концентрации ионов n_{il} кратности l , приходим к следующему уравнению:

$$n_{il} = (n_a / z_{ba}) (2/n_e)^l (2m_e \pi k_B T / h^2)^{3/2} \exp \left(- \sum_{j=1}^l \frac{eI_j}{k_B T} \right). \quad (1.2.17)$$

Здесь I_j — потенциала j -кратной ионизации атома.

1.2.2. Гидродинамика плазмы с горячими электронами и холодными тяжелыми частицами

Как уже отмечалось, гидродинамические уравнения могут быть получены из кинетических. Наиболее просто эта процедура осуществляется, если все компоненты плазмы находятся в локальном термодинамическом равновесии ($T_e \sim T_i \sim T_a$) и преобладают лишь упругие столкновения. Сложнее обстоит дело в неравновесной ($T_e \neq T_i \sim T_a$) полностью ионизированной плазме (см. п. 1.2.3), и проблема еще больше осложняется в слабоионизированной плазме во внешних полях. В этих случаях, даже в нулевом приближении по отклонению от равновесности, функция распределения электронов f_{e0} может существенно отличаться от локальной максвелловской и уравнения для нее (B1) приходится решать численно.

При выводе гидродинамических уравнений для слабоионизированной плазмы из кинетического уравнения, которому удовлетворяет функция распределения электронов по скоростям, можно выделить два предельных случая:

1) частично ионизованная неоднородная плазма в слабых электрических полях $E < E_c = k_B T / (el_c)$;

2) слабоионизованная плазма в сильных электрических полях $E > E_c$.

Магнитное поле (параметр Холла $\Omega \sim B$) в обоих приближениях может быть произвольным.

В первом случае, когда энергия, набираемая электроном на длине свободного пробега, мала по сравнению с тепловой ($K_E = eEl_c / (k_B T) \ll 1$) и отношение длины свободного пробега к характерному размеру неоднородности l_x мало: $K_n = l_c / l_x \ll 1$

(безразмерный параметр $K_p = l_c/l_x$ носит название *числа Кнудсена*), из-за малости отношения масс электрона и тяжелых частиц можно считать, что атомы и ионы покоятся и их функции распределения по скоростям остаются максвелловскими. Неравновесность системы в этом случае приводит лишь к слабому изменению (порядка $K_E \sim K_p \ll 1$) локально максвелловской функции распределения электронов.

В таком приближении уравнения гидродинамики электронов можно получить, воспользовавшись интегро-дифференциальным (из-за учета электрон-электронных столкновений) уравнением для функции распределения электронов (В.1). Однако для вывода уравнений для потоков и формул для коэффициентов переноса необходимо находить следующее f_1 -приближение к локально-максвелловской функции распределения:

$$f_{e0} = n_e(r) \left[m_e / (2\pi k_B T(r)) \right] \exp \left[- m_e v^2 / (2k_B T(r)) \right].$$

Именно это приближение $f_1 \sim K_p \sim K_E$ и позволяет рассчитать коэффициенты переноса, так как в изотропном максвелловском распределении потоки отсутствуют. При достаточно малых степенях ионизации можно сделать еще одно упрощение: пренебречь столкновением электронов между собой по сравнению со столкновениями электронов с атомами и ионами.

Пользуясь полученной в этом приближении функцией распределения электронов, удастся вывести систему гидродинамических уравнений, включая соотношения для потоков и кинетических коэффициентов переноса. Как уже отмечалось, при $E/p > (E/p)_{cr}$ температура электронов превышает температуру тяжелых частиц ($T_e > T_a \sim T_i$) и следует пользоваться двухжидкостной гидродинамикой электронов и гидродинамикой тяжелых частиц (атомы и ионы, находящиеся в локальном термодинамическом равновесии, рассматриваются как единая среда). Иногда вместо системы уравнений для тяжелой компоненты используют систему уравнений для плазмы в целом. Система гидродинамических уравнений тяжелых частиц не слишком отличается от системы для плазмы в целом и аналогична уравнениям (1.1) — (1.7). Однако система гидродинамических уравнений для горячих электронов в электрическом и магнитном полях нуждается в более подробном пояснении. Уравнение баланса электронов аналогично ранее приведенному уравнению (3):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{en} = N_+ - N_- + N_e. \quad (1.2.18)$$

Уравнение (18) отличается от (3) учетом внешних источников ионизации (слагаемое N_e), если таковые имеются: пучки электронов, протонов, излучения и т. д. Для ионизации электронным

ударом и для трехчастичной рекомбинации вид N_+ , N_- приведен в [2].

Уравнение энергии для электронов имеет вид

$$\frac{3}{2} n_e k_B \frac{\partial T_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{ет}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - F_- - F_{\Sigma}. \quad (1.2.19)$$

Здесь $\mathbf{q}_{\text{ет}}$ — поток теплоты, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ — объемное джоулево тепловыделение. Слагаемое F_- учитывает потери энергии при упругом столкновении электронов с атомами и ионами и может быть записано, аналогично (1), в виде

$$F_- = (3\delta k_B/2) (T_e - T_a) (v_{ea} + v_{ei}) n_e, \quad \delta = 2m_e/m_a. \quad (1.2.20)$$

Член $F_{\Sigma} = F_{\text{и}} + F_{\text{в}}$ (см. [2]) учитывает потери при неупругих столкновениях нейтральных атомов с электронами: на ионизацию $F_{\text{и}}$ и на возбуждение $F_{\text{в}}$.

Потери на ионизацию при $N_e = 0$ могут быть записаны в виде

$$F_{\text{и}} = I (N_+ - N_-). \quad (1.2.21)$$

Потери на возбуждение можно записать в виде

$$F_{\text{в}} = \sum \varepsilon_j n_j / \tau_j. \quad (1.2.22)$$

Здесь ε_j — энергия возбуждения уровня j ; n_j — концентрации частиц, находящихся в возбужденном состоянии с энергией ε_j , а τ_j — характерное время возбуждения. В общем случае для расчета n_j надо привлекать кинетику заселения этих уровней: элементарные процессы заселения и гибели этих состояний, позволяющие рассчитать τ_j .

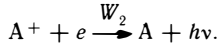
Условие электронейтральности плазмы при наличии многократно заряженных ионов запишется в виде $n_e = \sum_{j=1}^l n_{ij}$. Расчет состава проводится, как отмечалось выше, либо при постоянном давлении $p = \text{const}$, либо при заданном числе частиц — заданной массе — в единичном объеме:

$$n_0 = n_a + \sum_{j=1}^l n_{ij} = \text{const}.$$

Зная константу равновесия реакции (11) или (15) и один из коэффициентов — ионизации или рекомбинации, можно, пользуясь уравнением (7), выразить неизвестный коэффициент через K и через известный.

Наряду с прямой реакцией ионизации электронным ударом в открытой системе, из которой свободно выходит излучение,

обратным процессом рекомбинации может оказаться процесс двухчастичной рекомбинации:



Скорость двухчастичной рекомбинации, выраженная через коэффициент двухчастичной рекомбинации β_2 , имеет вид: $W_2 = \beta_2 n_i n_e$. Приравнявая ее скорости прямой реакции (4), приходим к уравнению ионизационного равновесия в системе:

$$n_i/n_a = k_i/\beta_2 = K_2.$$

Последнее соотношение носит название *уравнения Эльверта* (G. Elwert) и свидетельствует, что в такой системе ионизационное равновесие не зависит от концентрации электронов.

В более сложных случаях равновесий в каждой задаче требуется конкретизировать вид реакции ионизации и рекомбинации.

В простейшем случае, когда преобладает возбуждение какого-то одного уровня, а обратный процесс девозбуждения и выход связанного с ним излучения из неравновесной системы затруднены или когда все возбужденные уровни можно заменить одним эффективным, уравнение (22) можно представить в простой форме:

$$F_B = n_{\text{eff}} \varepsilon_{\text{eff}} / \tau_{\text{eff}}. \quad (1.2.23)$$

Используя (20), (21), (23), уравнение энергии можно записать в виде:

$$\frac{3}{2} n_e k_B \frac{\partial T_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{er}} + Ie \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{en}} \right) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - (3\delta k_B/2) (T_e - T_a) (v_{ea} + v_{ei}) n_e - \varepsilon_{\text{eff}} n_{\text{eff}} / \tau_{\text{eff}}. \quad (1.2.24)$$

Входящие в (18), (24) выражения для потоков частиц \mathbf{q}_{en} , потоков теплоты \mathbf{q}_{er} и плотности тока \mathbf{j} могут быть рассчитаны в рамках кинетической теории частично ионизованной плазмы.

Как уже отмечалось, наиболее простые соотношения получаются в *модели лоренцева газа*, когда массы сталкивающихся частиц резко отличаются и пренебрегается столкновением электронов между собой, а учитываются лишь столкновения электронов с тяжелыми частицами — атомами и ионами. Условие применимости такого приближения может быть записано в виде

$$n_e Q_{ei} / (n_e Q_{ei} + n_a Q_{ea}) < 1.$$

Это соотношение выполняется тем лучше, чем меньше степень ионизации ($\alpha < 1 \cdot 10^{-3}$). При высоких степенях ионизации необходимо учитывать поправки в коэффициентах переноса, обусловленные электрон-электронными столкновениями. Эти поправки

приводят к уменьшению соответствующих кинетических коэффициентов в выражениях для потоков электронов \mathbf{q}_{en} , потока теплоты, переносимой электронами, \mathbf{q}_{eT} и плотности электронного тока.

Потоки частиц и теплоты, рассчитанные из кинетической теории по функции распределения f_1 , для лоренцевского газа имеют вид:

$$\mathbf{q}_{en} + \mathbf{q}_{en} \times \Omega = -D_e \nabla n_e - D_T (v - 3/2) \nabla T_e + \mu_e n_e \mathbf{E}, \quad (1.2.25)$$

$$\mathbf{q}_{eT} + \mathbf{q}_{eT} \times \Omega = -k_n \nabla n_e - \lambda_e \nabla T_e - k_e \mathbf{E}. \quad (1.2.26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_e &= k_B T_e \tau_\delta / m_e - \text{коэффициент диффузии электронов,} \\ D_T &= k_B n_e \tau_\delta / m_e - \text{коэффициент термодиффузии электронов,} \\ \lambda_e &= k_B^2 T_e \tau_\delta / m_e - \text{коэффициент теплопроводности электронов,} \\ \mu_e &= -e \tau_\delta / m_e - \text{подвижность электронов,} \\ \Omega &= e v \tau_\delta / m_e = \omega_e \tau_\delta - \text{параметр Холла,} \\ k_n &= (k_B T_e)^2 \tau / m_e, k_e = e k_B T_e n_e \tau / m_e, \xi = \tau / \tau_\delta. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

При этом характерные времена τ_δ , τ_λ , τ находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_\delta &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{3/2} v_\Sigma^{-1}(u) e^{-u} du, \tau = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{5/2} v_\Sigma^{-1}(u) e^{-u} du, \\ \tau_\lambda &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{5/2} (u - 3/2) v_\Sigma^{-1}(u) e^{-u} du, v_\Sigma = v_{ea}(u) + v_{ei}(u). \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Если основной электрический ток переносится электронами (ионы как тяжелые частицы можно считать покоящимися), то $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e = -e \mathbf{q}_{en}$ и закон Ома принимает вид

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \Omega = \sigma \mathbf{E} + e D_e \nabla n_e + e D_T (\varphi - 3/2) \nabla T_e, \quad (1.2.29)$$

где

$$\sigma = n_e \mu_e = e^2 n_e \tau_\sigma / m_e. \quad (1.2.30)$$

Из (29) следует, что только в частном случае однородной среды и в отсутствие магнитного поля закон Ома имеет привычный вид: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Пользуясь уравнением состояния $p_e = k_B n_e T_e$, можно ввести в закон Ома электронное давление:

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \Omega = \sigma \mathbf{E} + [e D_e / (k_B T_e)] \nabla p_e + e D_T (\varphi - 5/2) \nabla T_e.$$

Проведем еще одно преобразование уравнений для потоков (25)–(27), удобное для использования в системах с локальным ионизационным равновесием. Во-первых, если концентрация

электронов определяется локальной температурой, ее градиент в уравнениях для потоков можно выразить через градиент температуры: $\nabla n_e = (\partial n_e / \partial T_e) \cdot \nabla T_e$. Во-вторых, в уравнениях для потоков частиц и теплоты электрическое поле можно выразить через ток, пользуясь законом Ома (29):

$$\mathbf{E} = \sigma^{-1} \{ \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\Omega} - e D_e \nabla n_e - e D_T (\varphi - 3/2) \nabla T_e \}.$$

При этом выражение для потока теплоты можно представить в виде

$$\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\Omega} = -\lambda \nabla T_e - (k_B T_e \varphi / e) (\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}),$$

где

$$\lambda = \lambda_e [1 - (\varphi - 3/2) \tau / \tau_\lambda].$$

Первое из слагаемых в вышеприведенном уравнении учитывает перенос теплоты за счет теплопроводности, второе — конвективный перенос, обусловленный электрическим током (или дрейфовой скоростью).

Из уравнений (27) получается полезное соотношение между подвижностью и коэффициентом диффузии (аналогичное соотношение получается в кинетической теории и для ионов, см. [1; 2]):

$$D_e / \mu_e = -k_B T_e / e, \quad D_i / \mu_i = k_B T_i / e. \quad (1.2.31)$$

Уравнения (31) известны в литературе как соотношения Эйнштейна. В уравнении энергии можно выделить отдельно слагаемые, связанные с конвективным переносом теплоты движущимися электронами, представив произведение $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ в виде

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = (j^2 / \sigma) - [k_B T_e / (en_e)] \mathbf{j} \cdot \nabla n_e - \frac{k_e}{e} (\varphi - 3/2) \mathbf{j} \cdot \nabla T_e$$

Члены $\nabla \cdot \mathbf{q}_{et} + eI \cdot \nabla \mathbf{q}_{en}$ в уравнении (24) можно объединить, введя суммарный поток теплоты:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{et} + eI \mathbf{q}_{en}. \quad (1.2.32)$$

Слагаемое $eI \mathbf{q}_{en}$ — можно трактовать как перенос внутренней энергии. При этом уравнение энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k_B n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + eI \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{k_B T_e}{e} (\mathbf{j} \cdot \nabla n_e) + k_B \frac{\varphi - 3/2}{e} (\mathbf{j} \cdot \nabla T_e) + \nabla \cdot \mathbf{q} = \\ = (j^2 / \sigma) - \frac{3}{2} \delta k_B (T_e - T_a) (v_{ea} + v_{ei}) n_e - \varepsilon_{\text{eff}} n_{\text{eff}} / \tau_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

В стационарной, однородной среде в отсутствие внешних полей, как и должно быть в равновесной термодинамике, все потоки обращаются в нуль и устанавливается баланс между рождением N_+ и гибелью N_- электронов в единичном объеме: $N_+ = N_-$.

Зная кинетику реакции ионизации, можно оценить время τ_n , за которое в системе устанавливается ионизационное равновесие. Для реакции ионизации электронным ударом, рассмотренной в разделе 1.2.1, когда $N_+ = k_i n_a n_e$, это время порядка

$$\tau_n \sim 1/(k_i n_a), \quad (1.2.34)$$

Для характерных времен задачи t_x , превосходящих время установления ионизационного равновесия, и в отсутствие внешних воздействий можно считать (с точностью до малого параметра $\tau_n/t_x \ll 1$), что в слабонеоднородной среде имеет место локальный баланс между рождением и гибелью частиц: $N_+ = N_-$. В случае ионизации электронным ударом и трехчастичной рекомбинации из условия баланса следует, что концентрация в каждой точке разряда определяется локальными значениями температуры и давления по уравнению Саха (10). При наличии локальной зависимости концентрации электронов от температуры градиент концентрации в выражениях для потоков можно выразить через градиент температур: $\nabla n_e = (\partial n_e / \partial T_e)_p \nabla T_e^*$ и представить поток теплоты в более компактном виде:

$$\mathbf{q}_{et} + q_{et} \times \vec{\Omega} = -\lambda_{e\Sigma} \cdot \nabla T_e - k_e \mathbf{E}. \quad (1.2.35)$$

Здесь

$$\lambda_{e\Sigma} = \lambda_e + (\partial n_e / \partial T_e) k_n = \lambda_e \left(1 - \left(\frac{\partial \ln n_e}{\partial \ln T_e} \right)_p \tau / \tau_\lambda \right). \quad (1.2.36)$$

При этом составляющая $(\partial \ln n_e / \partial \ln T_e)_p \tau / \tau_\lambda$ существенно зависит от степени ионизации плазмы и может трактоваться как составляющая теплопроводности, связанная с химической реакцией ионизации. Аналогично эффекту Холла, приводящему к анизотропии проводимости в магнитном поле (см. п. 1.1.1), как следует из (35), в плазме с магнитным полем возникает анизотропия в коэффициенте теплопроводности, который становится тензорной величиной — *терромагнитный эффект [эффект Риги—Людюка (Righi—Leduc)]*. Действительно, (35) при $\Omega \neq 0$ можно записать в виде

$$\mathbf{q} = -\hat{\lambda} \nabla T.$$

Вид тензора $\hat{\lambda}(\Omega)$, когда магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси z , аналогичен виду тензора электропроводности $\hat{\sigma}$ с заменой σ_0 на λ .

* Индекс p у производной подчеркивает, что состав плазмы определяется из локально равновесного баланса частиц.

Уравнения неразрывности и движения для плазмы в целом имеют вид, аналогичный уравнениям (1.1), (1.2), а уравнения энергии для тяжелых частиц кроме слагаемых, характерных для уравнения (1.3), учитывают энергию, передаваемую от электронов при упругих столкновениях между атомами и ионами, определяемую из уравнения (20). Таким образом, уравнение энергии для тяжелых частиц можно записать в виде

$$\rho c_{v\Sigma} \frac{dT_a}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi + F_- + Q_a. \quad (1.2.37)$$

Здесь

$$F_- = (3/2) \delta k_B (T_e - T_a) (v_{ei} + v_{ea}) n_e$$

— энергия, передаваемая от электронов тяжелым частицам, $c_{v\Sigma} = c_{va} + c_{vi}$, $p = p_a + p_i$, \mathbf{q} — тепловой поток тяжелых частиц, в простейшем случае $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$, λ — коэффициент теплопроводности плазмы за вычетом электронной теплопроводности, Q_a — вклад за счет излучений. В таком подходе с точностью до малого параметра $m_e/m_i \ll 1$ пренебрежено джоулевым нагревом ионов $\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{E}$.

Часто при исследовании свойств плазмы из-за анизотропии коэффициентов переноса (σ , λ , D) вдоль и поперек магнитного поля удобно бывает выделить составляющие вдоль магнитного поля (далее обозначаем их нижним индексом \parallel) и поперек поля (обозначаем их нижним индексом \perp):

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}, \quad \nabla T_e = \nabla_{\parallel} T_e + \nabla_{\perp} T_e,$$

$$\nabla n_e = \nabla_{\parallel} n_e + \nabla_{\perp} n_e, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}.$$

При таком разделении коэффициенты переноса в потоках вдоль поля не отличаются от своих значений в плазме без магнитного поля. Для потоков в плоскости поперек поля приходится пользоваться полными уравнениями (25), (26). Однако система уравнений в этом случае может быть двухмерной, если переменные вдоль поля и поперек независимы.

Рассмотрим кратко особенности гидродинамики плазмы в сильных полях, когда $E > E_c = k_B T_e / (el_e)$ и уже нулевое приближение сферически симметричной функции распределения электронов по скоростям отличается от максвелловской. При малых степенях ионизации обратным воздействием электронов на нейтральную компоненту можно пренебречь, считая, что свойства атомов и молекул остаются неизменными. При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле следует учитывать и изменения самого электрического поля $\partial E / \partial t$. При этом наряду с числом Кнудсена $Kn = l_e / l_x$ возникают параметры: $K_E = eEl_c / (k_B T_e)$ и ω / ν , где ω — характерная частота изменения

внешнего электрического поля. Каждый из приведенных параметров определяет степень неравновесности системы по данному каналу воздействия: K_n определяет неравновесность, связанную с неоднородностью среды, K_E — с воздействием внешнего поля, ω/ν — с нестационарностью процесса. При этом гидродинамические уравнения, получаемые из кинетической теории, могут существенно зависеть от соотношения между приведенными параметрами.

Для случая $K_n \sim \omega/\nu \sim 1$ и $K_E \gg 1$ вывод гидродинамических уравнений приведен в [12]. Поскольку энергия ε , набираемая электроном на пути свободного пробега l_c , определяемом транспортным Q_τ и эффективным сечением неупругих процессов Q_{eff} ($l_c = n_a \sqrt{Q_\tau Q_{\text{eff}}}$), превышает тепловую ε_τ (т. е. $\varepsilon > \varepsilon_\tau$), можно не пользоваться уравнением энергии, а ограничиться лишь уравнением баланса электронов, в котором коэффициенты диффузии D_e и подвижности μ_e зависят от отношения E/n_a :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{en} + N_+ - N_-,$$

где

$$\mathbf{q}_{en} = -n_a^{-1} \nabla D_e n_e n_a + n_e \mu_e \mathbf{E}.$$

Коэффициенты диффузии и подвижности могут быть рассчитаны по нулевой функции распределения:

$$D_e = 1/3 \int_0^\infty V^4 v_m^{-1} f_{e0} dV / \int_0^\infty V^2 f_{e0} dV,$$

$$\mu_e = -e/3m_e \int_0^\infty v^3 v_m^{-1} \left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \right) dv / \int_0^\infty v^2 f_{e0} dv$$

В том же приближении уравнение неразрывности для ионов имеет вид, в котором пренебрегают ионной диффузией из-за ее малости:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \nabla \cdot \mu_i n_i \mathbf{E} = N_+ - N_-$$

Для частного случая, когда интеграл столкновений представляется в форме $J_{ee} = v^{-2} \partial (v^2 v_m f) / \partial v$, зависимости коэффициентов D_e , μ_e от отношения E/n_a приведены в [18].

1.2.3. Гидродинамика полностью ионизованной двухкомпонентной плазмы

Рассмотрим теперь особенности гидродинамики полностью ионизованной плазмы, состоящей из ионов с кратностью заряда Z_i и с концентрацией n_i и электронов. Основное отличие

гидродинамических уравнений такой плазмы от соответствующих уравнений для частично ионизированной плазмы заключается в отсутствии источников рождения и гибели частиц в уравнениях неразрывности и в наличии только кулоновских взаимодействий между заряженными частицами плазмы.

Наличие электрических полей — внешних или собственных — приводит к тому, что электроны, получая энергию от электрического поля, из-за большой разности масс с ионом при упругом столкновении передают им лишь часть, пропорциональную $2m_e/m_i \ll 1$. Затрудненность обмена энергиями между электронами и ионами ведет к возникновению локальной термической неравновесности: электроны находятся при температуре T_e , а ионы — при температуре T_i (т. е. $T_i \neq T_e$). При этом время установления локального термодинамического равновесия для электронной подсистемы — порядка времени между столкновениями электронов с электронами τ_{ee} , для ионной подсистемы оно — порядка времени столкновения ионов между собой τ_{ii} . Время обмена энергиями между электронной и ионной компонентами плазмы — порядка времени столкновения между электронами и ионами $\tau_{ei} \sim (m_i/m_e) \tau_{ee}$.

Приведем соотношения для времен между столкновениями. Усредняя по локально максвелловской функции распределения сечения кулоновских столкновений для времен между столкновениями, имеем:

$$\begin{aligned}\tau_{ee} &= \frac{1}{v_{ee}} = \frac{3\sqrt{m_e} \varepsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} e^4 n_e \ln \Lambda_K}, \\ \tau_{ii} &= \frac{1}{v_{ii}} = \frac{3\sqrt{m_i} \varepsilon_0^2 (k_B T_i)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} Z_i^4 e^4 n_i \ln \Lambda_K}, \\ \tau_{ei} &= \frac{1}{v_{ei}} = \frac{3\sqrt{m_e} \varepsilon_0 (k_B T_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} Z_i^2 e^4 n_i \ln \Lambda_K}.\end{aligned}\tag{1.2.38}$$

Входящий в (38) множитель Λ_K носит название *кулоновского логарифма* и учитывает ограничение области интегрирования по передаваемому импульсу на верхнем и нижнем пределах [2]:

$$\Lambda_K = \begin{cases} (\varepsilon_0 k_B T_e / e^2)^{3/2} / \sqrt{n_e}; T_e < T_L = \frac{4m_e}{k_B} [\pi e^2 / (h \varepsilon_0)]^2 \sim 3 \cdot 10^5 \text{ К}, \\ (4\pi^2 k_B T_e / h^2) \cdot \sqrt{m_e \varepsilon_0 / (n_e e^2)}, T > T_L \end{cases}\tag{1.2.39}$$

Из (38) следует, что в плазме с разными температурами электронов и ионов имеют место следующие соотношения между характерными временами:

$$\tau_{ee}/\tau_{ei} \sim m_e/m_i \ll 1, \tau_{ii}/\tau_{ei} \sim (T_i/T_e)^{3/2} \sqrt{m_i/m_e} Z_i^{-2} \sim 1. \quad (1.2.40)$$

Различие масс, температур и зарядности ионов приводит, как видно из написанных выше соотношений, к различию в характерных временах установления процессов и может порождать ряд специфических эффектов в полностью ионизованной плазме с магнитным полем.

Уравнения гидродинамики двухкомпонентной плазмы похожи на уравнение одножидкостной плазмы (1.1) — (1.8), но отличаются наличием слагаемых, учитывающих обмен импульсом и энергиями между отдельными компонентами. Уравнения гидродинамики полностью ионизированной плазмы также могут быть получены из кинетических уравнений [1; 2] для функций распределения электронов и ионов по скоростям, слабо отличающихся от локально максвелловских функций распределения. Поскольку в полностью ионизированной плазме рождение и гибель заряженных частиц в объеме отсутствует (для однократной ионизации это означает пренебрежение многократной ионизацией, если таковая возможна), *уравнения неразрывности для каждой из компонент* имеют вид:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot n_s \mathbf{v}_s = 0 \quad (1.2.41)$$

Уравнение движения

$$m_s n_s \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \nabla \cdot \hat{p}_s + e Z_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) + \mathbf{G}_s \quad (1.2.42)$$

Уравнение энергии

$$\frac{3}{2} n_s k_B \frac{d_s T_s}{dt} + p_s \nabla \cdot \mathbf{v}_s = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + \Phi_s + D_s, \quad (1.2.43)$$

$$s = e, i; Z_e = -1, Z_i > 0, \frac{d_s}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla$$

Тензор давления для электронов и ионов определяется соотношением типа (1.4) для каждой из них. Компоненты тензора $p_{si} = -p_s \delta_{ij} + \tau_{sij}$, диссипативные функции Φ_s определяются соотношением, аналогичным (1.6). В отсутствие электрического и магнитного полей *коэффициенты вязкости ионов и электронов* определяются формулами:

$$\eta_i = 0,96 k_B T_i n_i \tau_{ei}, \eta_e = 0,73 k_B T_e n_e \tau_{ei}. \quad (1.2.44)$$

При наличии магнитного поля элемент тензора вязких напряжений τ_{sij} зависит от магнитного поля; вид таких элементов приведен в работе [1].

В уравнениях движения слагаемые \mathbf{G}_s учитывают потери им-

пульса при упругих соударениях электронов с ионами:

$$\mathbf{G}_i = -\mathbf{G}_e = -\mathbf{R}_n + \mathbf{R}_T. \quad (1.2.45)$$

При этом потеря импульса обусловлена как скольжением \mathbf{R}_n электронов относительно ионов ($\mathbf{u} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$), так и неоднородностью \mathbf{R}_T потока импульса при наличии градиента температуры электронов:

$$\mathbf{R}_n = -m_e n_e v_{ei} (0,51 \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) = en_e [(\mathbf{j}_{\parallel}/\sigma_{\parallel}) + \mathbf{j}_{\perp}/\sigma_{\perp}], \quad (1.2.46)$$

$$\mathbf{R}_T = -0,71 n_e k_B \nabla T_e + [\nabla T_e \times \mathbf{B}/B] \cdot 3k_B n_e / (2\Omega_e).$$

В уравнениях (46) выделены продольные по отношению к магнитному полю компоненты скорости \mathbf{u}_{\parallel} и плотности электрического тока \mathbf{j}_{\parallel} и поперечные \mathbf{u}_{\perp} , \mathbf{j}_{\perp} — составляющие. При этом плотность \mathbf{j} электрического тока определяется как

$$\mathbf{j} = -e (n_e \mathbf{v}_e - Z_i n_i \mathbf{v}_i),$$

или, учитывая условие электронейтральности плазмы

$$n_e = Z_i n_i, \quad (1.2.47)$$

имеем

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}.$$

Коэффициенты продольной и поперечной электропроводности определяются как:

$$\sigma_{\perp} = e^2 n_e \tau_{ei} / m_e; \quad (1.2.48)$$

$$\sigma_{\parallel} = 1,96 \sigma_{\perp}. \quad (1.2.49)$$

В уравнении энергии для электронов (43) ($s = e$) член D_e включает джоулев нагрев D_J , передачу энергии ионам при упругих столкновениях F_- и конвективный перенос теплоты, связанный с электрическим током и неоднородностью температуры $\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_T$:

$$D_e = D_J - F_- + \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_T. \quad (1.2.50)$$

С учетом анизотропии коэффициента электропроводности в магнитном поле имеем

$$D_J = (j_{\parallel}^2 / \sigma_{\parallel}) + (j_{\perp}^2 / \sigma_{\perp}). \quad (1.2.51)$$

Для ионов D_i учитывает поступление энергии за счет столкновений с электронами:

$$D_i = F_- = 3/2 \delta k_B (T_e - T_i) v_{ei} n_e. \quad (1.2.52)$$

Потоки теплоты электронов \mathbf{q}_e , аналогично предыдущему разделу, складываются из конвективного переноса током $\mathbf{q}_{e\kappa}$ и переноса теплопроводностью \mathbf{q}_{eT} :

$$\mathbf{q}_e \equiv \mathbf{q}_{e\kappa} + \mathbf{q}_{eT} = 0,71n_e k_B T_e \mathbf{u}_{\parallel} + \frac{3n_e k_B T_e}{2\Omega_e} [\mathbf{b} \times \mathbf{u}] - \lambda_{e\parallel} (\nabla_{\parallel} T_e) - \lambda_{e\perp} (\nabla_{\perp} T_e) - \frac{5k_B^2 T_e n_e}{2m_e v_{ei} \Omega_e} [\mathbf{b} \times \nabla T_e], \quad (1.2.53)$$

$$\mathbf{q}_i = -\lambda_{i\parallel} (\nabla_{\parallel} T_i) - \lambda_{i\perp} (\nabla_{\perp} T_i) - \frac{5k_B^2 T_i n_i}{2m_i v_{ii} \Omega_i} \cdot [\mathbf{b} \times \nabla T_i]. \quad (1.2.54)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_{e\parallel} &= 3,16k_B^2 T_e n_e / (v_{ei} m_e); & \lambda_{e\perp} &= 4,66\lambda_{e\parallel} / (3,16\Omega_e^2), \\ \lambda_{i\parallel} &= 3,9k_B^2 T_i n_i / (v_{ii} m_i); & \lambda_{i\perp} &= 2\lambda_{i\parallel} / (3,9\Omega_i^2); \\ \mathbf{b} &= \mathbf{B}/|\mathbf{B}|; & \Omega_e &= \omega_e \tau_{ei}; & \Omega_i &= eZ_i B \tau_{ii} / m_i. \end{aligned} \quad (1.2.55)$$

Система уравнений (41) — (43) должна быть дополнена уравнениями состояния электронов и ионов. В приближении идеального газа имеем

$$p_e = k_B n_e T_e, \quad p_i = k_B n_i T_i. \quad (1.2.56)$$

Каждое из уравнений (42), (43) может быть упрощено в зависимости от конкретной задачи. Так, при отсутствии магнитного поля везде следует оставить лишь продольные коэффициенты переноса σ_{\parallel} , $\lambda_{e\parallel}$, $\lambda_{i\parallel}$, так как анизотропия коэффициентов переноса

исчезает. Поскольку $\eta_e/\eta_i \sim (T_e/T_i) \sqrt{m_e/m_i} < 1$, во многих задачах часто учитывается лишь вязкость ионов, а вязкость электронов по сравнению с другими силами пренебрежима. В некоторых задачах необходим учет вязкости в уравнении движения: $\eta \Delta V / \nabla p \gtrsim 1$, но выделением теплоты за счет вязкостной диссипации в уравнении энергии можно пренебречь, так как $\Phi_s/F_s < 1$. Аналогично соотношению (1.10) вместо уравнений энергии в форме (43) можно использовать уравнение для изменения энтропии на основании термодинамического соотношения

$$T_s dS_s = c_{vs} dT_s + p_s \cdot d(1/\rho_s).$$

В том случае, когда движение полностью ионизированной плазмы происходит в самосогласованных электрических и магнитных полях, система (41) — (43) должна быть дополнена уравнениями Максвелла (13) — (18).

§ 1.3. МНОГОЖИДКОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ И ПРОЦЕССЫ НА ГРАНИЦАХ

1.3.1. Плазма с неравновесными внутренними степенями свободы

Для многих плазменных задач рассмотренные ранее гидродинамические подходы оказываются недостаточными. Простейший, но далеко не единственный пример связан с частично ионизированной плазмой, когда тяжелые компоненты — атомы и ионы — не находятся в локальном термодинамическом равновесии, а также когда существенно отличаются их гидродинамические скорости. Другие подходы связаны с наличием в плазме ионов различных сортов (пример такой системы см. в [1]) или с использованием плазм, состоящих из различных элементов (например, инертные газы и пары щелочных металлов). В данном параграфе кратко остановимся лишь на гидродинамических моделях плазм, состоящих из атомов, электронов и ионов, и плазм, в которых имеются неравновесности, связанные с возбуждением внутренних степеней свободы.

Иногда удается выделить несколько подсистем, каждая из которых характеризуется своей локальной температурой, плотностью и скоростью перемещения. Например, атомы плазмы можно разделить на два сорта: возбужденные с температурой T_b и концентрацией n_b и атомы, находящиеся в основном состоянии с концентрацией n_a и температурой T_a . Кроме того, в этой плазме присутствуют ионы ($n_i, T_i = T_a$) и свободные электроны ($n_e, T_e \neq T_a$). В такой среде в общем случае для описания ее свойств можно пользоваться четырехжидкостной гидродинамикой, если характерное время и размеры задачи значительно превышают наименьшую из длин свободного пробега и максимальное из времен установления локального равновесного состояния в каждой из компонент. Уравнение неразрывности каждой из компонент аналогично уравнению (2.18), поскольку происходит рождение и гибель частиц каждого сорта. Некоторые из уравнений неразрывности сводятся к балансу между рождением и гибелью частиц сорта j : $N_{j+} = N_{j-}$.

Уравнения движения имеют вид, аналогичный уравнению (42) с учетом обмена импульсом между компонентами G_j . Уравнения энергии имеют вид, аналогичный (43) с учетом передачи энергии от одной компоненты к другой при упругих и неупругих столкновениях D_j . Соответствующие потоки теплоты q_{jT} должны учитывать как перенос поступательными степенями свободы — теплопроводностью $q_{j\lambda}$, так и перенос энергии внутренними степенями свободы q_{jB} . В простейшем случае, когда сечение неупруго-

го рассеяния значительно меньше сечения упругого рассеяния и поддерживается термодинамическое равновесие между внутренними степенями свободы — бoльцмановское распределение, позволяющее связать плотность частиц в возбужденном состоянии с плотностью частиц в основном состоянии:

$$n_j = n_a (g_j/g_0) \exp[-\varepsilon_j/(k_B T)], \quad (1.3.1)$$

где g_j , g_0 — статистические веса возбужденного и основного состояний соответственно, ε_j — энергия возбужденного состояния. В этом случае перенос энергии в н у т р е н н и м и степенями свободы определится как

$$\mathbf{q}_{jв} = \sum_j \varepsilon_j \mathbf{q}_{jn} = - \sum_j D_j \varepsilon_j \nabla n_j. \quad (1.3.2)$$

Перенос теплоты поступательными степенями свободы, как обычно, выражается через коэффициент теплопроводности

$$\mathbf{q}_{j\lambda} = -\lambda_j \nabla T_j.$$

Таким образом, для суммарного потока энергии имеем

$$\mathbf{q}_{j\tau} = \mathbf{q}_{j\lambda} + \mathbf{q}_{jв} = -\lambda_{j\Sigma} \nabla T_j, \quad (1.3.3)$$

где

$$\lambda_{j\Sigma} = \lambda_j + \sum_j D_j \varepsilon_j \partial n_j / \partial T_j. \quad (1.3.4)$$

Более детальное рассмотрение этих систем можно найти в [7]. Следует отметить, что плазмы, состоящие из различных сортов частиц, обладают большими возможностями для возбуждения различного рода неустойчивостей, приводящих к возникновению разнообразных неравновесных—неоднородных (стационарных или нестационарных) структур.

1.3.2. О ламинарных и турбулентных плазменных течениях

Из гидродинамики известно, что течения с числами Рейнольдса $Re = \rho v l / \eta$, превышающими критическое Re_c (для каждой задачи оно свое), существенно отличаются от течений при $Re < Re_c$. Течения с $Re > Re_c$ характеризуются высоким уровнем пульсаций скорости потока, температуры и т. д., хотя средние характеристики (например, средние по большому периоду наблюдений) меняются достаточно плавно. Режимы с $Re > Re_c$ получили название *турбулентных*, а само явление, связанное с появлением нерегулярных пульсаций,— *турбулентности*. Режимы с $Re < Re_c$ называют *ламинарными*. Турбулентные режимы течений характеризуются возбуждением коллективных степеней

свободы. Развитие флуктуации приводит к тому, что турбулентный перенос импульса (турбулентный коэффициент вязкости η_T), теплоты (турбулентный коэффициент теплопроводности λ_T), тока (турбулентная проводимость σ_T) и другие могут существенно превышать соответствующие данным условиям значения молекулярных характеристик (η , λ , σ). В этом смысле переход от ламинарного течения к турбулентному можно рассматривать как переход в новое состояние среды (своеобразный «фазовый» переход). В настоящее время известно несколько гипотез о возможных механизмах возникновения турбулентности после потери устойчивости основным течением:

1) *механизм Ландау*, связанный с возникновением в закритической области квазипериодических режимов с несоизмеримыми частотами и случайными фазами;

2) *механизм Рюэлля—Такенса* (D. Ruelle, F. Takens), связанный с возникновением так называемых *странных аттракторов* после трехкратной бифуркации — множество в фазовом пространстве системы, с чрезвычайно нерегулярным поведением траектории системы в нем;

3) *механизм Фейгенбаума* (M. Feigenbaum), связанный с удвоением периодов и в конечном счете появлением странного аттрактора, но в отличие от механизма Рюэлля—Такенса — через бесконечное число бифуркаций;

4) *механизм перемежаемости*, когда последовательно сменяются во времени периодические и турбулентные режимы.

Какая из гипотез является наиболее правильной? Ответ на этот вопрос заключается не в выборе гипотез, а в создании условий, при которых реализуется тот или иной механизм возникновения турбулентности. Вполне вероятно, что в плазменных течениях могут реализовываться и другие механизмы. Например, механизм, связанный с взаимодействием множества волн, уширением спектральных линий в амплитудно-частотном разложении переменных и образованием сплошного спектра при перекрывании уширенных линий.

В плазменных системах проблема турбулентности может оказаться более сложной. Это связано с тем, что в плазме существует большее число каналов, по которым развиваются коллективные явления — плазменная турбулентность [13]. Например, даже в простейшем переходе от ламинарного к турбулентному режимам при течении плазмы в цилиндрическом канале — типа течения Пуазейля — процесс определяется не только критическим числом Рейнольдса (Re_c), но и другими безразмерными плазменными параметрами (параметром взаимодействия). Единой модели плазменной турбулентности не существует.

В тех случаях, когда справедливо применение одножидкостной гидродинамики плазмы, можно провести обобщение извест-

ных в обычной гидродинамике подходов и на плазму. При таком подходе к описанию турбулентных течений из основной системы уравнений можно получить отдельно уравнения для определенного по ансамблю реализаций течения и для пульсаций. Однако, как известно, такая система не является замкнутой [14]. Используя дополнительные гипотезы относительно замыкания, можно получить систему усредненных уравнений и уравнений для характеристик турбулентности (например, для турбулентной энергии и масштаба турбулентности), выраженных через усредненные величины. Даже простейшие турбулентные режимы следовало бы относить к двухжидкостным приближениям, считая такое течение состоящим как бы из двух сред, одна из которых соответствует усредненному течению, плавно меняющемуся в пространстве и времени, вторая — пульсациям, характеристики которой во времени и в пространстве меняются нерегулярным образом. Более сложные турбулентные состояния могут возникать в двухжидкостной плазменной гидродинамике. Здесь могут возникать режимы, когда одна из компонент — например, холодная тяжелая — оказывается ламинарной, а другая — электроны — находится в турбулентном состоянии.

Существует тесная связь возникновения турбулентности с неустойчивостями в плазме. Если в совершенном газе основную роль играют две неустойчивости: *неустойчивость Кельвина—Гельмгольца*, связанная с неоднородностью поля скоростей, и *неустойчивость Рэлея—Тэйлора*, связанная с неоднородностью плотности в поле сил тяжести (или инерции), то в плазмах существует большое число неустойчивостей, многие из которых приводят к специфическим турбулентным режимам.

Условно при описании плазменных турбулентностей можно выделить три подхода: приближение *слабой турбулентности* [13]; *сильная турбулентность в бесстолкновительной плазме* и *сильная турбулентность в частично ионизованной, сильно-столкновительной плазме*.

Модель слабой турбулентности плодотворна для плазменных сред, в которых в результате неустойчивости генерируются волны в общем случае немалой амплитуды. При этом энергия взаимодействия волн мала по сравнению с общей энергией волн и поэтому в исследовании характеристик такой турбулентности можно ограничиться лишь многоволновыми взаимодействиями, т. е. в первом приближении волны между собой не взаимодействуют, а при исследовании взаимодействия достаточно ограничиться лишь простейшими нелинейными членами разложения в ряд по амплитуде.

Другие подходы к турбулентности развиваются для описания процессов в идеально проводящей одножидкостной плазме или в проводящих несжимаемых жидкостях при их течениях в магнитных полях. Эти подходы близки к моделям турбулентности

в несжимаемых, непроводящих средах, но учитывают специфику процессов, связанную с флуктуацией магнитного поля и тем самым амперовой силы. В этих моделях также эффективно используется идея разделения движения на крупномасштабное усредненное и мелкомасштабное флуктуационное, приводящая к возникновению турбулентной диффузии и турбулентной магнитной проницаемости. Такие турбулентные модели широко используются для описания процессов в астрофизике и в особенности при объяснении эффекта *магнитного динамо* — самовозбуждения магнитного поля вследствие движения проводящих сред.

Турбулентность, возникающая в сжимаемой сильностолкновительной плазме, обладает рядом существенных особенностей. Основное отличие турбулентности в таких средах от аналогичных явлений в непроводящих и идеально проводящих жидкостях заключается в учете наряду с флуктуацией амперовой силы флуктуаций джоулева тепловыделения. При этом пульсации джоулева тепловыделения могут быть связаны как с флуктуацией электропроводности (эти флуктуации из-за сильной зависимости коэффициента электропроводности от температуры могут оказаться определяющими), так и флуктуаций электрического поля, а следовательно, и электрического тока. Флуктуации температуры, электрического тока и магнитного поля приводят к флуктуациям амперовой силы и скорости среды.

При этом из-за электромагнитной природы флуктуации электрических полей источники плазменной турбулентности могут оказаться дальнедействующими и свойства плазменной турбулентности могут сильно отличаться от обычной гидродинамической турбулентности. Кроме того, при наличии джоулева тепловыделения может развиваться специфическая плазменная турбулентность (*перегревная турбулентность*) даже в отсутствие течения среды, что совершенно нехарактерно для обычной гидродинамики.

В отличие от моделей слабой турбулентности, где существуют достаточно хорошо разработанные подходы, для сильной турбулентности в настоящее время отсутствуют единообразные подходы к решению ее проблем. Все существующие модели основаны на введении гипотез, связанных с замыканием уравнений, связывающих пульсационные характеристики с характеристиками усредненного течения, и базируются на эмпирических соотношениях, границы применимости которых зачастую неизвестны.

1.3.3. Система уравнений турбулентных течений сильностолкновительной плазмы

Для получения *системы уравнений, описывающих турбулентные течения* в сильностолкновительной плазме, воспользуемся

уравнениями (1.1)–(1.3), представляя каждую зависимую переменную f в виде суммы из *усредненной составляющей* \bar{f} и *пульсационной составляющей* f' , т. е. $f = \bar{f} + f'$, где $\langle f \rangle = \bar{f}$, $\langle f' \rangle = 0$, а символ $\langle \rangle$ означает усреднение по некоторому ансамблю реализаций [14]. Далее, ограничимся стационарными усредненными течениями, т. е. $\partial \bar{f} / \partial t = 0$. Будем использовать уравнение энергии в форме (1.11), записанное через энтальпию \bar{h} . При этом для удобства записи уравнений гидродинамики воспользуемся тензорными обозначениями вида (1.26), когда по одинаковым индексам происходит суммирование:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k + \langle \rho' v'_k \rangle) = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_k + \langle \rho' v'_i \rangle \bar{v}_k + \bar{v}_i \langle \rho' v'_k \rangle + \bar{P} \delta_{ik} - (\bar{\tau}_{ik} + \tau_{ik}^{\bar{t}})] = \bar{G}_i, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k \bar{h} + \langle \rho' v'_k \rangle \bar{h} + \bar{v}_k \rho' h' - (\bar{\lambda} / c_p) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_k} - q_k^{\bar{t}}) = \bar{Q}_v, \quad (1.3.3)$$

$$\bar{j}_k = \bar{\sigma} \bar{E}_k + \langle \sigma' E'_k \rangle. \quad (1.3.4)$$

Здесь $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv y$; $x_3 \equiv z$; $\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{B}} + \langle \mathbf{j}' \times \mathbf{B}' \rangle$ — амперова сила, кроме того, в законе Ома пренебрегают индуцированным электрическим полем, считая $vB/E \ll 1$. В уравнении энергии пренебрегается вязкостной диссипацией по сравнению с джоулевым нагревом:

$$\bar{Q}_v = \bar{j}_k \bar{E}_k + \langle j'_k E'_k \rangle + \bar{Q}_\pi. \quad (1.3.5)$$

Входящие в (2) и (3) соотношения $\tau_{ik}^{\bar{t}}$, $q_k^{\bar{t}}$ представляют собой *турбулентный тензор напряжений* и *турбулентный тепловой поток*, определяемые через пульсации

$$\tau_{ik}^{\bar{t}} = -\bar{\rho} \langle v'_i v'_k \rangle, \quad q_k^{\bar{t}} = \bar{\rho} \langle v'_k h' \rangle,$$

и могут быть выражены, как и другие величины вида $\langle \rho' v' \rangle$, $\langle \rho' h' \rangle$, $\langle \sigma' E' \rangle$, входящие в (1)–(4), через пульсации. Уравнения для пульсации можно получить из исходных гидродинамических уравнений, используя усредненные уравнения (1)–(4), но эти уравнения наряду со средними величинами \bar{f} содержат более высокие моменты, поэтому возникает известная в турбулентности проблема обрыва бесконечной цепочки моментных уравнений. Процедуры «обрыва» всегда должны содержать в себе некоторые дополнительные физические гипотезы [14]. Модели турбулентности в сильношоковой плазме обсуждаются в литературе [1] к гл. I.

1.3.4. Граничные условия для плазменных задач

В отличие от обычной гидродинамики проблема граничных условий для плазменных задач может оказаться значительно более сложной. Эта сложность связана не только с многокомпонентностью плазмы, но и с тем, что само существование плазмы поддерживается за счет внешних полей, электрических токов, протекающих через систему, источников ионизации; плазменные системы, как правило, оказываются незамкнутыми, обмениваясь с окружающей средой энергией, массой и импульсом. Такой обмен приводит к тому, что процессы в самой плазме оказываются тесно связанными с характером взаимодействия плазмы с внешней средой. В классических задачах массо- и теплообмена также возникает необходимость учета внешней среды. Обычно такие взаимодействия учитываются посредством введения коэффициентов тепло- и массоотдачи, позволяющих не рассматривать внешнюю среду. В плазменных задачах проблема взаимодействия может оказаться сложнее даже при расчете полей температур. Нагрев плазмы осуществляется протекающими в ней токами и зависит не только от условий теплообмена, но и от силы тока и распределения токов. Если электрические токи выходят во внешнюю цепь, то многие процессы в плазме зависят от того, как организована электрическая цепь. Распределение электрических и магнитных полей, определяющих силовое воздействие на плазму, также зависит от способа организации внешней цепи.

Кроме отмеченных особенностей во многих плазменных задачах (даже стационарных) проблема граничных условий усложняется еще тем, что положение самой границы, отделяющей плазму от неионизованного газа или вакуума, заранее не известно и должно быть найдено в процессе решения задачи. Соотношения на таких границах часто требуют дополнительных рассмотрений в рамках моделей, отличных от модели, используемой в области вне границы.

Поясним это на примере *фронта ионизации*, отделяющего неионизованный газ от полностью ионизованной плазмы. Гидродинамические системы уравнений полностью ионизованной плазмы и холодного нейтрального газа отличаются, в этих средах можно не учитывать появления и исчезновения заряженных частиц (электронов, ионов) по сравнению с другими процессами. Однако в структуре самого фронта ионизации процессы рождения частиц играют определяющую роль, и получить соотношения на фронте ионизации можно лишь на основе модели среды, отличной от моделей вне границы раздела.

Другой пример характерен для слоя плазмы вблизи электрода, который обеспечивает эмиссию электрического тока с поверхности. Сам ток эмиссии (например, термоавтоэлектронной эмиссии) зависит от температуры поверхности и электрического поля

на ней, которые определяются процессами в электроде и тонком слое плазмы вблизи электрода, где нарушены условия электронейтральности. Часто толщина такого слоя, называемого *ленгмюровским*, оказывается меньше длины свободного пробега, и гидродинамическое рассмотрение в этой области неприменимо, хотя вне него гидродинамика прекрасно описывает все явления. Поэтому для задания гидродинамических граничных условий необходимо знать изменение параметров в ленгмюровском слое, но такое изменение может быть получено только на основе кинетической теории. Рассмотрению процессов вблизи электрода посвящена гл. III настоящей книги.

Таким образом, проблема возникновения внутренних границ (они могут быть стационарными и движущимися) и установления соотношений на таких границах является достаточно важной для плазменных задач и играет самостоятельную роль в различных исследованиях. Эта задача тесно связана с возникновением и устойчивостью самоорганизующихся плазменных структур.

Условно множество граничных условий в плазменных задачах можно разделить на два типа: *активные* и *пассивные*. Процессы на активных границах могут приводить к качественно новым особенностям в поведении интегральных характеристик системы. Например, процессы на активной границе могут приводить к неоднозначности вольт-амперной характеристики системы с плазмой. Пассивные граничные условия приводят лишь к количественному изменению решений.

Проблема граничных условий применительно к одножидковому движению плазмы в обычных условиях сводится к требованию обращения в нуль скорости потока на непроницаемых стенках (нормальной составляющей — из-за отсутствия протекания через систему, касательной — из-за условий прилипания). В задачах с проницаемыми границами, например в задаче со вдувом через границу, может задаваться распределение у границы нормальной к поверхности составляющей потока массы и различных условий для температуры. Для плазмы в дополнение к вышеназванным условиям возникает необходимость в задании электродинамических условий для электрических и магнитных полей и для плотности электрического тока. Все многообразие соотношений для электрических магнитных полей должно обеспечивать непрерывность касательной составляющей электрического и нормальной составляющей магнитного полей по границе раздела сред с разными свойствами. Более подробно вопросы граничных условий мы будем рассматривать в соответствующих задачах. Некоторые из этих вопросов разбираются в [9].

Сложнее оказывается задание граничных условий в двухтемпературной плазме, состоящей из горячих электронов и холодных тяжелых частиц. Если для тяжелых частиц эти граничные условия сводятся к вышеуказанным, то для концентрации электронов и их температуры существует большое разнообразие в способе

задания граничных условий в зависимости от конкретных физических задач: проходит ли поверхностная ионизация или нет, приходят ли электроны на границе в температурное равновесие с тяжелыми частицами или нет и т. д. Некоторые задачи подобного рода применительно к процессам на электродах разбираются более подробно в гл. III.

Глава II. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СТОЛБ. ПРОЦЕССЫ В ОБЪЕМЕ

Пламя рдеет, пламя пышет,
Искры брызжут и летят.

Ф Тютчев

Получение плазмы и ее поддержание часто связаны с различными нестационарными процессами: электрическим и (или) тепловым пробоем — образованием плазмы — в различных полях, распространением волн ионизации и т. д. Нестационарные процессы в плазме требуют специального изучения и в этой книге, как правило, не обсуждаются.

В многообразии стационарных процессов в плазме — стационарные электрические разряды, плазменные струи, сгустки, слои и т. п. можно условно выделить системы, где основными являются процессы в объеме, а граница, хотя и играет роль, но далеко не главную, а также пристеночные (приэлектродные) слои, в которых граница и процессы на ней являются определяющими.

Далее рассмотрим наиболее важные для различных приложений явления в так называемом *положительном столбе* и некоторые другие объемные процессы в плазме.

§ 2.1. УСТАНОВИВШИЙСЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СТОЛБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

Обычно под *электрическим разрядом* понимается процесс, связанный с протеканием электрического тока через среду и изменением свойств этой среды под действием тока. Несмотря на почти двухвековую историю исследования электрических разрядов, только в последнее время возникает понимание различных сторон его природы. Сложность изучения электрических разрядов связана с их большим разнообразием. Разряды могут отличаться и внешними характеристиками: формой (типом симметрии), характером свечения, временем существования, и внутренними свойствами: видом *вольт-амперной характеристики* (VAX), наличием ($T_e \sim T_a \sim T_i$) или отсутствием ($T_e > T_a \sim T_i$) локального термического равновесия между отдельными компонентами плазмы, равномерным или нет распределением плотности тока по сечению канала и т. д. Даже в самом разряде его свойства вблизи электродов могут сильно отличаться от свойств в объеме.

Рассмотрим лишь достаточно общие характеристики наиболее

часто встречающихся в лабораториях стационарных разрядов, горящих в постоянном электрическом поле: термически неравновесном ($T_e > T_a \sim T_i$) разряде низкого давления и термически равновесном ($T_e \sim T_a \sim T_i$) разряде высокого — близкого к атмосферному — давления. Многие из рассматриваемых здесь типов и их свойства описаны в книгах [15—22].

2.1.1. Образование положительного столба разряда. Амбиполярная диффузия

По способу поддержания разряды можно разделить на две группы: *самостоятельные* и *несамостоятельные*. Под *несамостоятельными* понимаются разряды, в которых ионизация частично или полностью осуществляется за счет внешнего источника: излучение, γ -кванты, быстрые электроны, протоны, вспомогательное внешнее переменное электрическое поле. *Самостоятельные* разряды горят в отсутствие внешнего источника ионизации.

По способу реализации все разряды можно разделить на *свободногогорящие* и *разряды, создаваемые в камерах, ограниченных стенками*. Далее рассматриваются только *самостоятельные разряды* в постоянных электрических полях. В таких разрядах, горящих в замкнутых камерах, обычно можно выделить *приэлектродные* — прикатодную и прианодную — *области* и *столб разряда*. Процессы в приэлектродных областях во многом определяются явлениями, происходящими на поверхности электродов (см. гл. III) и в бесстолкновительном слое вблизи него. Процессы в столбе электрического разряда часто зависят лишь от напряженности электрического поля, давления, рода газа и радиуса разрядной камеры, в которой горит стабилизированный стенками разряд. В пристеночном слое электронейтральность нарушена — число положительных и отрицательных зарядов не совпадает.

Оценим характерные размеры области, в которой нарушение электронейтральности существенно, пользуясь уравнением Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \Delta \varphi = \rho_e \equiv e(n_i - n_e)$$

и считая, что электроны и ионы в потенциальном электрическом поле $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ распределены по Больцману:

$$n_e = n_0 \exp [e\varphi / (k_B T)]; \quad n_i = n_0 \exp [-e\varphi / (k_B T)].$$

Пусть энергия электростатического взаимодействия мала по сравнению с тепловой $e\varphi < k_B T$. Тогда для характерного размера области нарушения электронейтральности из соображений размерности получаем следующую по порядку величин оценку:

$$\Delta\varphi \sim \varphi/r_D^2 \sim \rho_e/\varepsilon_0 \sim -(en_0/\varepsilon_0) (e^{-e\varphi/(k_B T)} - e^{e\varphi/(k_B T)}) \sim \\ \sim 2e^2 n_0 \varphi / \varepsilon_0 k_B T, \quad r_D = \sqrt{\varepsilon_0 k_B T / (2e^2 n_0)}. \quad (2.1.1)$$

Характерный размер области нарушения электронейтральности r_D носит названия *радиуса Дебая*. Учет различия в температурах электронов и ионов, а также кратности зарядов ионов Z_i приводит к следующему уточненному выражению для радиуса Дебая:

$$r_D^2 = (\varepsilon_0 k_B / e^2) \left(\frac{n_e}{T_e} + \frac{Z_i n_i}{T_i} \right)^{-1}. \quad (2.1.2)$$

Для большинства плазменных условий отношение радиуса Дебая к характерному размеру системы, в которой находится плазма, например радиусу цилиндрической трубки r_w , мало: $r_D/r_w \ll 1$. Поэтому плазму, за исключением тонких пристеночных слоев, можно считать электронейтральной.

Остановимся теперь на некоторых процессах, происходящих в плазменных областях, достаточно удаленных от электродов и находящихся в разрядной камере с непроводящими стенками (камера считается цилиндрической радиуса r_w). Пусть ось камеры ориентирована вдоль внешнего электрического поля $\mathbf{E}(0, 0, E_{0z})$, направленного по оси z . За счет этого поля и протекающего тока j_{0z} в камере поддерживается плазма с концентрацией n_e и температурой T_e . Электроны и ионы в результате ионизации рождаются преимущественно в объеме плазмы ($r < r_w$), а гибнут — рекомбинируют — в основном на стенке камеры при $r \sim r_w$. В таких процессах концентрации электронов и ионов оказываются неоднородными: $n_e(r)$, $n_i(r)$. Неоднородность концентраций заряженных частиц приводит к возникновению диффузии в радиальном направлении: $q_{er} = -D_e \partial n_e / \partial r$, $q_{ir} = -D_i \partial n_i / \partial r$. В осевом направлении плазма однородна и перенос заряда осуществляется за счет дрейфа в однородном электрическом поле E_{0z} : $j_{0z} = -e(\mu_e n_e - \mu_i n_i) E_{0z}$.

К каким последствиям приводит возникновение диффузии в радиальном направлении? Поскольку в основном из объема уходят более подвижные электроны ($D_e/D_i \sim T_e m_i / T_i m_e \gg 1$ и $\partial n_e / \partial r \sim \partial n_i / \partial r$), столб разряда обогащается положительными, менее подвижными ионами, и возникает нарушение электронейтральности плазмы. Образовавшийся объемный заряд приводит к возникновению радиального электрического поля E_r , не связанного явно с внешним полем E_{0z} . Возникновение радиального электрического поля изменит и диффузию, т. е. в дополнение к «градиентному» переносу $D_s \partial n_s / \partial r$ возникнет конвективный

перенос частиц в радиальном электрическом поле: $n_s \mu_s E_r$. Так как в стационарном состоянии накопление электрического заряда не происходит, а суммарный электрический ток в радиальном направлении отсутствует (стенки разрядной камеры считаются непроводящими), полное число положительных и отрицательных зарядов, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную радиусу, оказывается одним и тем же:

$$i_r = j_{er} + j_{ir} = e \left(D_e \frac{\partial n_e}{\partial r} + n_e \mu_e E_r \right) + e \left(-D_i \frac{\partial n_i}{\partial r} + n_i \mu_i E_r \right) = 0 \quad (2.1.3)$$

Полученное соотношение позволяет выразить неизвестное радиальное электрическое поле через градиенты концентрации. Если при этом учесть следующее соотношение

$$\frac{\rho_e}{en_e} = \frac{n_i - n_e}{n_e} < 1, \text{ т. е. } \frac{\partial n_e}{\partial r} = \frac{\partial n_i}{\partial r}, n_e = n_i,$$

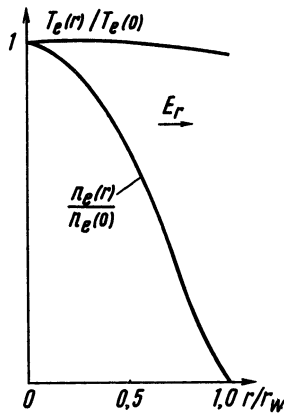
то для E_r из (3) получим

$$E_r = \frac{D_i - D_e}{n_e (\mu_e + \mu_i)} \frac{\partial n_e}{\partial r} \quad (2.1.4)$$

Видно, что электрическое поле E_r направлено так, чтобы уменьшить поток электронов и увеличить поток ионов на стенку (рис. 2.1), обеспечивая полное отсутствие радиального электрического тока j_r . Так как радиальное электрическое поле оказывается пропорциональным градиенту концентрации $\partial n_e / \partial r$, его можно исключить из соотношения для суммарного радиального потока частиц. Используя уравнение (4) для потока электронов, получаем

$$q_{er} = D_e \frac{dn_e}{dr} + n_e \mu_e E_r = -D_a \frac{dn_e}{dr}. \quad (2.1.5)$$

Рис. 2.1. Распределения концентрации и температуры электронов по радиусу газоразрядной трубки, r_w — радиус трубки



Коэффициент

$$D_a = (\mu_e D_i + \mu_i D_e) / (\mu_e + \mu_i)$$

носит название *коэффициента амбиполярной диффузии*, подчеркивая тот факт, что перенос частиц хотя и обусловлен градиентом концентрации, но включает в себя и часть, обязанную своим происхождением разделению электрических зарядов. Пользуясь соотношением Эйнштейна (1.2.31) $D_j / \mu_j = k_B T_j / e$, можно пред-

ставить коэффициент амбиполярной диффузии в другом виде:

$$D_a = D_i \frac{1 + \mu_i D_e / \mu_e D_i}{1 + \mu_i / \mu_e} \cong \begin{cases} D_e \mu_i / \mu_e = D_i T_e / T_i \text{ при } T_e > T_i, \\ 2D_i \text{ при } T_e \sim T_i. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Таким образом, установлено, что возникновение собственного радиального электрического поля существенно меняет характер радиальной диффузии электронов в разряде. Проверим теперь условие выполнения неравенства $\rho_e \ll en_e$, проводя следующие оценки:

$$\rho_e / en_e = (\epsilon_0 / en_e) \partial E_r / \partial r \sim (\epsilon_0 k_B T / e^2 n_e^2) \partial^2 n_e / \partial r^2 \sim (r_0 / r_w)^2.$$

Из полученных оценок следует, что *условие образования квазинейтральной плазмы сводится к требованию малости радиуса Дебая по сравнению с радиусом разрядной камеры*. Поэтому в протяженных электрических разрядах с $r_D / r_w < 1$, несмотря на наличие собственного электрического поля E_r , вызванного нарушением электронейтральности ($\rho_e \neq 0$), с точностью до малого параметра r_D / r_w плазму можно считать электронейтральной: $n_e = n_i$. Однако поскольку имеет место соотношение $\rho_e = e(n_i - n_e) = (\epsilon_0 k_B T / en_e) \frac{\partial^2 n_e}{\partial r^2} > 0$, концентрация ионов во внутренней области разряда — как это и следовало из элементарных рассуждений — превышает концентрацию электронов и внутренняя область обогащена положительным зарядом. Поэтому эта область разряда получила названия *положительного столба*.

2.1.2. Разряд в термически неравновесной плазме (тлеющий разряд)

Одним из широко распространенных типов стационарных разрядов, горящих в замкнутом объеме с образованием положительного столба, являются *тлеющие разряды*. В тлеющем разряде температура электронов T_e превышает температуру тяжелых частиц, практически совпадающую с температурой стенки T_w : $T_i \sim T_a \sim T_w$. О происхождении названия «тлеющий разряд» смотри [15]. При не слишком сильных токах, протекающих через разряд, и малых давлениях температура стенки мало отличается от комнатной, однако хотя электронов и мало, они нагреты до высокой температуры. Поскольку, как было показано в [2], $(T_e - T_a) / T_a \sim (E/p)^2$, для возникновения разрядов с холодными тяжелыми частицами и горячими электронами необходимы низкие давления.

Рассмотрим более подробно условия существования тлеющего

разряда и его основные свойства. Будем считать выполненными условия использования гидродинамического приближения — длина свободного пробега частиц l_c значительно меньше характерного размера системы l_x ($l_c/l_x \ll 1$) — и условие квазинейтральности плазмы ($r_D/l_x \ll 1$). Ограничимся областью положительного столба, считая ее цилиндрической с радиусом r_w и осью вдоль Oz. Если расстояние между электродами l_z значительно превосходит радиус трубки ($l_z > r_w$), то можно пренебречь изменением всех параметров вдоль трубки, за исключением приэлектродных областей, которые здесь не рассматриваются. Кроме того, в силу условий симметрии относительно вращений вокруг оси z все зависимые переменные являются только функциями радиуса системы. Поэтому при оценке квазинейтральности и применимости гидродинамического подхода и радиус Дебая, и длину свободного пробега необходимо сравнить с радиусом трубки $l_x = r_w$. В таких приближениях уравнение баланса электронов имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r D_a \frac{dn_e}{dr} + v_i (T_e n_a) n_e - \beta_2 n_e^2 = 0. \quad (2.1.7)$$

Здесь уже учтено, что диффузия электронов носит амбиполярный характер, а рекомбинация осуществляется за счет столкновения двух частиц: иона и электрона.

Оценим по порядку величин отношение потерь электронов за счет рекомбинации к потерям за счет ухода частиц на стенку при амбиполярной диффузии, считая, что все ушедшие на стенку электроны гибнут:

$$\beta_2 n_e^2 / \frac{D_a n_e}{r_w^2} = \beta_2 n_e r_w^2 m_i n_a Q_{ia} \sqrt{8k_B T_a / \pi m_i} / (k_B T_e) \sim n_a \sim p. \quad (2.1.8)$$

Из соотношения (8) следует, что при низких давлениях $p < p_c$ в уравнении баланса электронов можно пренебречь рекомбинацией в объеме по сравнению с амбиполярной диффузией. При этом p_c определяется из условия равенства этих процессов гибели

$$\beta_2 n_e r_w^2 / D_a \equiv f(p_c) = 1.$$

Если выполнено неравенство $\beta_2 n_e r_w^2 / D_a \ll 1$, то в уравнении (7) пренебрегается последним членом и оно имеет простой вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r D_a \frac{dn_e}{dr} + v_i (T_e, n_a) \cdot n_e = 0. \quad (2.1.9)$$

Для нахождения профиля концентрации электронов в канале разряда это уравнение следует решать с условием равенства нулю концентрации на границе ($r = r_w$) и условием симметрии на оси разряда ($r = 0$):

$$n_e(r_w) = 0, \left. \frac{dn_e}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.1.10)$$

Прямая ионизация электронным ударом, используемая в уравнении (10), не является единственным возможным процессом рождения электронов в газовых разрядах. Существуют условия, когда преобладающим процессом является ступенчатая ионизация нейтральных частиц электронным ударом: т. е. сначала нейтральные частицы при соударении переходят в возбужденные состояния (таких состояний может быть несколько), а затем возбужденные атомы ионизируются. Если все возбужденные уровни характеризовать единым образом и обозначить число возбужденных атомов n_b , а константу ступенчатой ионизации k_c , то уравнение баланса электронов (9) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r D_a \frac{dn_e}{dr} + k_c n_b n_a = 0$$

Граничные условия (10) сохраняются.

Концентрация возбужденных частиц n_b определяется из уравнения баланса этих частиц, появляющихся в процессах возбуждения нейтральных атомов электронами (с константой реакции k_b) и гибели за время τ за счет излучения фотонов:

$$k_b n_e n_a - n_b / \tau = 0.$$

Константа реакции возбуждения k_b , константа ступенчатой ионизации k_c и время жизни возбужденных состояний τ зависят от функции распределения электронов по скоростям, температуры электронов и давления газа. Более подробно о различного рода процессах ионизации изложено, например, в [5].

Вернемся теперь к другим уравнениям, описывающим поведение электронов в газовом разряде. Уравнение движения электронов в направлении внешнего электрического поля E_z — оси Oz — принимает вид, аналогичный закону Ома:

$$v_{ez} = e \mu_e E_z j_z = -e^2 n_e \mu_e E_z, \quad (2.1.11)$$

где $\mu_e = \frac{e \tau_{ea}}{m_e}$ — подвижность электронов.

Уравнение энергии электронов может быть записано в виде:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \lambda_e \frac{dT_e}{dr} = j_z E_z - \frac{3}{2} \delta k_b (T_e - T_a) v_{ea} n_e - F_n - F_b. \quad (2.1.12)$$

В уравнении (12) функция F_n учитывает неупругие потери энергии электронами на ионизацию, а F_b — потери на возбуждение нейтральных атомов, $\delta = 2m_e/m_a$ — коэффициент, учитывающий энергию, передаваемую электронами при упругом столкновении с атомами и ионами. Часто, особенно в прикладных задачах,

три последних слагаемых в уравнении (12) объединяют в одно, вводя эффективный коэффициент потерь энергии электронами при столкновениях: $\delta_{\text{eff}} = \delta\delta_{\text{от}}$. При этом коэффициент $\delta_{\text{от}}$ может существенно превышать единицу и изменяться в широких пределах в зависимости от рода учитываемых процессов. При введении коэффициента δ_{eff} три последних слагаемых в уравнении (12) запишутся в виде

$$\frac{3}{2} \delta v_{ea} n_a k_B (T_e - T_a) + F_n + F_b = \frac{3}{2} \delta_{\text{eff}} k_B n_e v_{ea} (T_e - T_a).$$

В рассматриваемом типе стационарного газового разряда возникает специфическая картина в распределении температуры и концентрации электронов по радиусу разрядной камеры. Поскольку перенос теплоты осуществляется электронной теплопроводностью $\lambda_e = k_B^2 T_e n_e / (m_e v_{ea})$, которая в условиях тлеющего разряда велика, перенос электронов осуществляется за счет амбиполярной диффузии $D_a \sim 1/m_a$, коэффициент которой мал, то температура электронов по радиусу меняется более плавно по сравнению с изменением концентрации электронов. Оценки показывают в тлеющем разряде, за исключением узких пограничных слоев у стенки (шириной порядка $l_n \sim \sqrt{\lambda T / (\sigma E^2)}$, температура электронов остается постоянной по радиусу ($T_e(r) = \text{const}$). В таких условиях с точностью до малых членов порядка $ln/r_w \ll 1$ в уравнении (12) для внутренней области разряда можно пренебречь переносом теплоты за счет теплопроводности и записать его в виде

$$e^2 E_z^2 / (m_e v_{ea}) = \frac{3}{2} \delta_{\text{eff}} k_B v_{ea} (T_e - T_a). \quad (2.1.13)$$

Уравнение энергии для тяжелой компоненты имеет вид, в котором переносом теплоты за счет теплопроводности пренебречь нельзя:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \lambda_a \frac{dT_a}{dr} = \frac{3}{2} \delta n_e v_{ea} k_B (T_e - T_a) = \sigma E_z^2. \quad (2.1.14)$$

Граничные условия для уравнения (14) имеют вид

$$T_a(r_w) = T_w, \quad \frac{dT_a}{dr}(r=0) = 0. \quad (2.1.15)$$

Уравнение состояния плазмы

$$p = k_B [(n_a + n_e) T_a + n_e T_e]. \quad (2.1.16)$$

В слабоионизованной плазме ($T_e \sim 1$ эВ или $1 \cdot 10^4$ К, $T_a \sim 1 \cdot 10^{-2}$ эВ или $1 \cdot 10^2$ К), несмотря на то, что температура электронов превышает температуру тяжелых частиц, из-за малости степени ионизации (обычно степень ионизации в тлеющем разряде находится в пределах $1 \cdot 10^{-8} \div 1 \cdot 10^{-5}$) можно пренеб-

речь электронным и ионным давлениями по сравнению с давлением нейтральных атомов ($n_e T_e < n_a T_a$, хотя $T_e > T_a$) и считать давление заданным $p = k_B n_a T_a = \text{const}$ (или считать заданной концентрацию тяжелых частиц n_a). Таким образом, расчет свойств плазмы тлеющего разряда сводится к решению уравнений (9), (13) с граничными условиями (10) при заданном давлении газа в разряде. Электрический ток, протекающий в разряде, находится из уравнения

$$I = 2\pi \int_0^{r_w} j_z r dr = [2\pi e^2 E_z / (m_e v_{ea})] \int_0^{r_w} n_e(r) r dr. \quad (2.1.17)$$

Рассмотрим решение уравнения (9). Если ввести следующие безразмерные переменные $n = n_e / n_e(0)$, $\xi = r / r_w$, $K^2 = v_i r_w^2 / D_a$, где $n_e(0)$ — концентрация электронов на оси разряда, то уравнение (9) и граничные условия (10) можно представить как

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dn}{d\xi} + K^2 n = 0, \quad (2.1.18)$$

$$n(1) = 0, \quad \frac{dn}{d\xi}(\xi = 0) = 0. \quad (2.1.19)$$

Уравнение (18) есть уравнение Бесселя, и его решение выражается через функцию Бесселя первого рода нулевого порядка

$$n_e(r) = n_e(0) J_0(K\xi). \quad (2.1.20)$$

Решение (20) автоматически удовлетворяет условию симметрии на оси разряда, так как

$$\frac{dJ_0}{d\xi}(\xi = 0) = J_1(0) = 0.$$

Однако условие на стенке — $\xi = 1$ и $J_0(K) = 0$ — будет выполнено, если параметр K есть собственное значение задачи (18), т. е. является первым нулем функции Бесселя нулевого порядка. Известно, что первым нулем является число 2,405, т. е.

$$K = \sqrt{v_i / D_a} r_w^2 = 2,405.$$

Конечно, формально можно выбрать и другие — более высокие — корни функции Бесселя, но тогда бы распределение концентрации электронов по радиусу канала разряда изменялось немонотонно и возникали области отрицательной концентрации, что, разумеется, физически нереально. Таким образом, распределение концентрации электронов по радиусу имеет вид (см. рис. 2.1)

$$n_e(r) = n_0 J_0(2,405r/r_w). \quad (2.1.21)$$

При этом коэффициент ионизации оказывается однозначно связанным с радиусом канала разряда соотношением

$$v_i = D_a (2,405)^2 / r_w^2. \quad (2.1.22)$$

Решение для *распределения концентрации электронов* по радиусу канала (21) носит название *решения Шотки* (W. Schottky), а условие (22) иногда называют *условием Шотки*. При известной зависимости коэффициента ионизации от температуры электронов $v_i = v_i(T_e)$ при заданном давлении газа p и радиусе канала r_w из соотношения (22) можно выразить температуру электронов как функцию параметра pr_w : $T_e = T_e(pr_w) = T_e(n_e r_w)$. Полученная таким образом температура электронов как бы не зависит от напряженности электрического поля. С другой стороны, можно воспользоваться уравнением энергии (13) и, зная сечение столкновения электрон—атом в функции от температуры

$$Q_{ea}(T_e) v_{ea} = n_a Q_{ea} \sqrt{8T_e k_B / (\pi m_e)}$$

представить температуру электронов в зависимости от параметра E/p , т. е. $T_e = T_e(E/p) = T_e(E/n_a)$.

Указанное противоречие разрешается, если принять во внимание, что в тлеющем разряде при пренебрежении рекомбинацией и столкновениями электронов с ионами уравнение состава вырождается в (22) и не может вместе с уравнением энергии (13) быть использовано для определения двух внутренних параметров n_e , T_e через внешние p , E_z , r_w . Самосогласованное решение получается, если E_z , p , r_w зависимы: т. е. $E_z = f(pr_w)$ и электрическое поле в тлеющем разряде наряду с концентрацией электронов и температурой является внутренним параметром, зависящим от внешних p и r_w . Именно поэтому соотношения (13), (22) используются одновременно для определения температуры электронов и напряженности электрического поля в разряде:

$$T_e = T_e(pr_w) = T_e(n_a r_w), E_z = E(pr_w) = E(n_a r_w).$$

Соотношения (13), (22) показывают, что в тлеющем разряде естественным параметром подобия являются произведение давления на радиус трубки pr_w или произведение концентрации тяжелых частиц на радиус трубки $(n_a r_w)$. Однако из уравнений (13), (22) нельзя определить концентрацию электронов (в уравнении (21) $n_e(0)$ — неизвестная величина). Для нахождения n_e следует воспользоваться уравнением электротехнической цепи, в которой горит разряд:

$$\varepsilon_s = (R_k + R_a + R) J + E_z l.$$

Здесь ε_3 — ЭДС цепи; R_a , R_k — активные сопротивления анодной и катодной частей, R — активное сопротивление внешней цепи газоразрядной установки, включенное последовательно тлеющему разряду, $E_z l$ — падение напряжения в положительном столбе тлеющего разряда (l — протяженность положительного столба). В принципе можно воспользоваться и более сложной схемой цепи, в которой горит разряд.

Таким образом, ток, протекающий через газовый разряд, может быть найден при известных значениях $\varepsilon_3 R_a R_k$ и $E_z l$:

$$I = (\varepsilon_3 - E_z l) / (R_a + R_k + R). \quad (2.1.23)$$

В общем случае, когда R_a и R_k зависят от протекающего тока, уравнение цепи можно решать численно (или графически) для нахождения тока. С другой стороны, ток, протекающий через положительный столб радиуса r_w , может быть представлен в виде

$$I = \pi r_w^2 [e^2 \bar{n}_e / (m_e v_{ea})] E_z. \quad (2.1.24)$$

Здесь введено среднее по радиусу трубки значение концентрации электронов \bar{n}_e , определяемое как

$$\bar{n}_e = 2\pi \int_0^{r_w} n_e(r) r dr / (\pi r_w^2) = 2n_e(0) \int_0^1 J_0(2,405\xi) \xi d\xi. \quad (2.1.25)$$

Следовательно, зная ток в разряде, можно найти концентрацию электронов $n_e(0)$. Из (24), (25) можно определить сопротивление положительного столба плазмы по соотношению

$$R_l = l / (\pi r_w^2 e^2 n_e m_e^{-1} v_{ea}^{-1}).$$

Итак, для определения концентрации электронов необходимо знать давление в газовом разряде, радиус разрядной трубки и схему цепи.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные соотношения, позволяющие рассчитать характеристики тлеющего разряда. Представим частоту ионизации в зависимости от температуры электронов, усредняя дифференциальное сечение ионизации $Q_i(v)$ по максвелловской функции распределения электронов по скоростям:

$$v_i = n_a \int_0^{\infty} Q_i(v) v^3 [m_e / (2\pi k_B T_e)]^{3/2} e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}} dv. \quad (2.1.26)$$

Поскольку ионизацию могут производить только высокоэнергетические электроны — электроны с энергией $m_e v^2/2$, превосходящей энергию ионизации eI , сечение ионизации имеет пороговый характер. Часто сечение ионизации при не слишком высоких энергиях хорошо аппроксимируется соотношением типа

$$Q_i = \alpha_i \left(\frac{m_e v^2}{2} - eI \right). \quad (2.1.27)$$

Здесь α_i — коэффициент пропорциональности, зависящий от рода газа. Например, для аргона $\alpha_i = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{Дж}$, для азота — $5,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{Дж}$. Подробнее о сечениях ионизации можно прочесть в [4; 6; 15]. Подставляя (27) в интеграл (26) и проводя интегрирование, приходим к уравнению для частоты ионизации

$$v_i = \alpha_i eI \sqrt{8k_B T_e / (\pi m_e)} e^{-eI/(k_B T_e)} n_a = k_i n_a. \quad (2.1.28)$$

Множитель $\exp(-eI/k_B T_e)$ в коэффициенте ионизации

$$k_i = \alpha_i eI \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}} e^{-\frac{eI}{k_B T_e}}$$

учитывает долю быстрых электронов, способных производить ионизацию атомов электронным ударом.

В соотношении (26) было использовано максвелловское распределение электронов по скоростям, однако в газовом разряде, особенно при малых степенях ионизации, функция распределения может отличаться от максвелловской тем, что область больших энергий обеднена электронами (это распределение носит название *распределения Друйвестейна* (Druyvesteyn) [15]). По мере увеличения степени ионизации — электрического тока в разряде — происходит переход к максвелловскому распределению. Учет этого обстоятельства может привести к тому, что коэффициент ионизации кроме зависимости от температуры электронов может зависеть при больших степенях ионизации еще и от концентрации электронов, но в рассматриваемом приближении это обстоятельство не учитывается.

Воспользуемся теперь формулой (22) для расчета температуры электронов. Подставляя в нее коэффициент амбиполярной диффузии $D_a = D_i T_e / T_i = k_B T_e / (m_i v_{ia})$ и вводя безразмерную температуру электронов $T = k_B T_e / (eI)$, приходим к следующему *универсальному уравнению для определения температуры*:

$$T^{1/2} \exp(1/T) = \chi_n (n_a r_w)^2 = \chi_p (P r_w)^2. \quad (2.1.29)$$

Здесь

$$\chi_n = \frac{8\alpha_i eI Q_{ia}}{\pi (2,405)^2} \sqrt{m_i k_B T_a / (m_e eI)}, \quad \chi_p = \chi_n / (k_B^2 T_a^2)$$

Эта зависимость названа универсальной потому, что для различных газов изменяются лишь коэффициенты χ_n , χ_p , а сама функциональная связь (29) сохраняется. На рис. 2.2 приведена зависимость безразмерной температуры от параметра r_w . Как видно из рис. 2.2, уравнение (29) не имеет решений при произ-

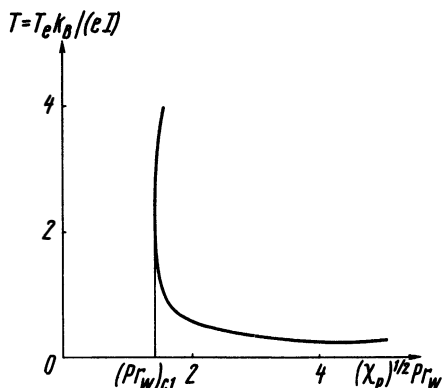


Рис. 2.2. Зависимость безразмерной температуры электронов в тлеющем разряде от комплекса Pr_w

ведении давления на радиус трубки, меньшем некоторого критического $pr_w < (pr_w)_1$. В этом нет ничего удивительного, поскольку при малых давлениях длина свободного пробега $l_c(p)$ становится соизмеримой с радиусом положительного столба $l_c(P_1) \sim r_w$ и рассматриваемое гидродинамическое приближение теряет силу. Развиваемая теория несправедлива и при больших давлениях $pr_w > (pr_w)_2$, когда объемная рекомбинация начинает преобладать над амбиполярной диффузией, см. соотношение (8). Однако, как видно из рис. 2.2, при $pr_w > (pr_w)_1$ уравнение (29) имеет два решения: низкотемпературное и высокотемпературное.

В расчетах следует пользоваться нижней — падающей ветвью, так как при высоких температурах несправедлив ряд сделанных при расчете универсальной характеристики предположенной, в частности линейная аппроксимация дифференциального сечения ионизации (28). Пересчет полученной зависимости $T_e = T(pr_w)$ на другие газы осуществляется изменением константы $\chi_{p1} = \chi_n$ и потенциала ионизации I .

С помощью (29) из уравнения энергии (13) при $T_e > T_a$ можно найти функциональную связь между напряженностью электрического поля тлеющего разряда и комплексом: произведение давления газа на радиус разрядной трубки pr_w :

$$E/p = \chi T, \text{ где } \chi = \sqrt{\frac{12\delta_{aif}}{\pi}} [eI Q_{ia} / (k_B T_a)] \quad (2.1.30)$$

Приближенно (30), исключая T на основе уравнения (29), можно представить в виде

$$E/p \cong \chi / (2 \ln \sqrt{\chi_p pr_w}).$$

Значения константы χ_p и потенциала ионизации I для ряда газов приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Параметр	Значения χ_p [(Па · м) ⁻²] и I (В) для различных газов					
	Ar	Ne	He	N ₂	H ₂	O ₂
$\chi_p I / (\text{Па} \cdot \text{м})^2$	$5,76 \cdot 10^4$	$7,14 \cdot 10^2$	$3,12 \cdot 10^2$	$2,51 \cdot 10^4$	$2,26 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^4$
$I, \text{В}$	15,7	21,47	24,47	15,8	15,4	12,5

Значения этих величин для других газов, а также константы χ_n , χ могут быть рассчитаны по формулам (29), (30).

Полученные зависимости T и E/p от произведения pr_w^* позволяют легко объяснить ряд характерных особенностей тлеющего разряда, например близкие значения температур электронов для газов с близкими значениями потенциала ионизации (аргон — 15,8 эВ, азот — 15,6 эВ) и в больших разницах в значениях отношения E/p (сравнение производится, разумеется, при одинаковых значениях pr_w). Действительно, как следует из (30), отношение E/p существенно зависит от доли энергии, передаваемой от электронов к тяжелым частицам δ_{eff} , поэтому отношения напряженностей в тлеющем разряде для двух газов оказываются пропорциональными $E_1/E_2 \sim \sqrt{\delta_{\text{eff}1}/\delta_{\text{eff}2}}$. Однако инертный газ аргон и азот могут существенно отличаться значениями параметров из-за различия процессов передачи энергии и тем самым должны отличаться и напряженности полей, хотя температуры разряда окажутся близкими.

Рассмотренный здесь нормальный тлеющий разряд не исчерпывает всего многообразия стационарных слаботочных разрядов. Так, в трубках наряду с нормальным тлеющим разрядом низкого давления при некоторых условиях могут возникать аномальные тлеющие разряды, в которых с ростом тока возрастает напряжение; так называемые *темные разряды* и т. д. Более сложное явление представляют собой тлеющие разряды, в которых существенную роль играют возбужденные атомы или молекулы и ступенчатая ионизация. В таких разрядах вольт-амперная характеристика может становиться неоднозначной, возникать ограничение по току, а сам разряд становится резко неоднородным. В природе часто встречаются слаботочные разряды, получившие название *коронного*, и т. д.

* Из (30) следует: график безразмерного комплекса $E/(\chi p)$ в зависимости от произведения $\chi_p^{1/2} p l$ совпадает с графиком $T(\chi_p^{1/2} p l)$ на рис. 2.2.

При более низких давлениях газа, когда длина свободного пробега электронов становится порядка и больше радиуса разрядной трубки, для расчета характеристик тлеющего разряда необходимо использовать кинетический подход. Существенной особенностью таких разрядов становится то, что функция распределения электронов перестает быть локальной и зависит от поперечного профиля электрического потенциала. Это приводит к тому, что распределение потенциала уже не соответствует бальцмановскому, а амбиполярная диффузия становится сильно нелинейной (см., например, [9] в списке дополнительной литературы к гл. II). Более подробно о различных типах разрядов можно прочесть в [15, 17, 18].

2.1.3. Термически равновесный электрический разряд, стабилизированный стенками (электрическая дуга)

При увеличении давления среды, в которой горит стационарный электрический разряд, соотношения между процессами в нем могут существенно изменяться. С ростом давления возрастает доля теплоты, переносимой излучением, объемная рекомбинация начинает преобладать над амбиполярной диффузией, см. соотношение (8). При $p > p_c$ уравнение ионизационного равновесия в объеме $v_i n_e = \beta_2 n_e^2$ приводит к локальной зависимости концентрации электронов от давления и температуры в данной точке разряда: $n_e = n_e(T_e, T_a, p)$. Рост давления приводит и к уменьшению отношения E/p и тем самым к тому, что разряд становится локально термодинамически равновесным $T_e - T_a \sim (E/p)^2$, т. е. температура электронов становится практически равной температуре тяжелых частиц: $T_e \sim T_a \sim T_i$. Максимальные температуры, достигнутые в стационарных электрических дугах, оказываются порядка $1 \cdot 10^5$ К, а плотности электронов — $1 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{19}$ см⁻³. Связь между концентрацией электронов, температурой плазмы и давлением устанавливается для процесса термической ионизации *уравнением Саха'* (1.12.12):

$$n_e \sim T \sqrt{p} \exp \left[-eI / (2k_B T) \right].$$

Такие разряды будем называть *термически равновесными* (или *дуговыми*). Для описания их свойств можно пользоваться гидродинамическими уравнениями для плазмы в целом [см. (1.1.1)], если длина свободного пробега частиц значительно меньше характерного размера системы. Рассмотрим сначала простейший разряд, горящий в цилиндрическом канале, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, и расход газа через канал отсутствует. Как и в предыдущем разделе, ограни-

чимся областью, удаленной от электродов — областью положительного столба, считая, что зависимые переменные не изменяются вдоль канала, а только по радиусу разряда.

Пусть электрическое поле направлено по оси канала $\mathbf{E}(0, 0, E)$, совпадающей с осью Oz , а плотность тока связана с полем законом Ома: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. При отсутствии расхода газа уравнение движения вырождается в уравнение баланса между градиентом давления и силой Ампера:

$$\frac{dp}{dr} = -j_z B_0. \quad (2.1.31)$$

Уравнение энергии с учетом джоулева тепловыделения может быть записано в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \lambda \frac{dT}{dr} + \sigma(T, p) E^2 + Q_n = 0. \quad (2.1.32)$$

При не слишком больших токах и давлениях плазмы в центральной части дуги может иметь место неравенство $Q_n/(\sigma E^2) < 1$ (см. распределение различных составляющих по радиусу дуги на рис. 2.3, a^*), что позволяет пренебречь вкладом от лучистого переноса. Эксперимент был выполнен в плазме аргона давлением 1 атм с присадкой калия (доля присадки составляла 0,015—0,02%) в канале диаметром 16 мм, ток 3 А, напряженность электрического поля $E = 2,7 \div 2,8$ В/см. В уравнении (32) джоулев нагрев можно выразить и через плотность тока j^2/σ , и через напряженность электрического поля σE^2 , однако для электрических разрядов, стабилизированных стенками, последняя форма предпочтительнее, так как из стационарного уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = d\mathbf{E}_z/dr = 0$ следует, что напряженность поля не зависит от радиуса и является внешним параметром задачи:

$$E = E_z = \text{const.} \quad (2.1.33)$$

Уравнение (32) должно решаться с условием симметрии на оси разряда ($r = 0$) и заданными граничными условиями теплообмена на стенке, например, при заданной температуре стенки T_w :

$$\frac{dT}{dr}(r = 0) = 0, T(r_w) = T_w. \quad (2.1.34)$$

При протекании осевого тока j_z в разряде возникает азимутальное магнитное поле B_θ , и даже в отсутствие внешнего магнитного поля радиальная составляющая амперовой силы отлична от нуля. Наличие радиальной амперовой силы $j_z B_\theta$ вызывает изменение давления по радиусу разряда. Из рис. 2.3, b видно, что амперова сила увеличивает давление в центре разряда.

* Этот рисунок взят из работы [2] списка дополнительной литературы к гл. II.

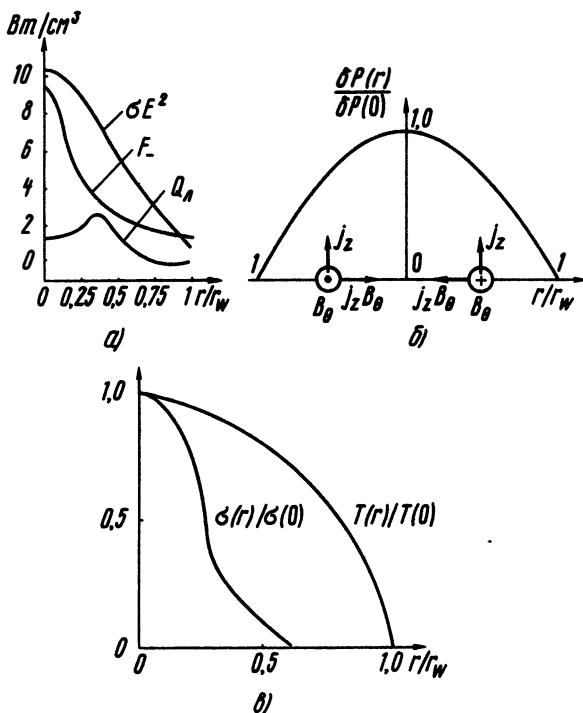


Рис. 2.3, а. Распределение различных составляющих уравнения баланса энергии по радиусу электрической дуги, стабилизированной стенками: δE^2 — джоулев нагрев, Q_n — объемный источник излучения, $F_- = 3\delta k_a (T_e - T_a) \cdot (v_{ea} + v_{ei}) n_e / 2$ — энергия, передаваемая электронами тяжелым частицам — атомам и ионам — при упругих столкновениях

Рис. 2.3, б. Направление тока, собственного магнитного поля и амперовой силы в электрической дуге и распределение избыточного давления по радиусу разряда.

Рис. 2.3, в. Распределения температуры и коэффициента электропроводности по радиусу электрической дуги: $T(0)$ — температура на оси дуги, $\delta(0)$ — коэффициент электропроводности на оси дуги

Сделаем оценку, когда таким изменением давления можно пренебречь и считать его в канале разряда постоянным. Для осесимметричной картины разряда, пользуясь уравнением Максвелла (1.1.11) и теоремой Стокса, можно найти изменение азимутального магнитного поля по радиусу разряда

$$\oint B_\theta dl = B_\theta 2\pi r = \iint \text{rot } \mathbf{B} ds = \int \mu_0 j_z 2\pi r dr.$$

Отсюда имеем

$$B_{\theta}(r_w) = \mu_0 I / (2\pi r_w),$$

где I — полный ток, протекающий в разряде

Изменение магнитного поля по радиусу разряда можно легко найти, полагая $j_z \sigma E = \text{const}$; получаем $B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 \sigma E r}{2}$. Из уравнения равновесия сил (31) находим перепад давления между осью разряда и его границей:

$$\delta p \equiv p(r_w) - p(0) = \int_0^{r_w} \frac{dp}{dr} dr = - \int_0^{r_w} j_z(r) B_{\theta}(r) dr = - \mu_0 (\sigma E r_w)^2 / 4.$$

Таким образом, оценка отношения перепада δp давления к давлению газа p может быть представлена в виде

$$\delta p / p \sim \mu_0 (\sigma E r_w)^2 / (4p) \sim \mu_0 I^2 / (p \pi^2 r_w^2). \quad (2.1.35)$$

Из (35) следует, что при повышенных давлениях и не слишком сильных токах в разряде можно пренебречь изменением давления по радиусу канала разряда $\delta p < p$ и пользоваться условием

$$p = \text{const}. \quad (2.1.36)$$

Зная зависимости коэффициентов электро- и теплопроводности σ , λ от температуры, давления и состава (такие зависимости могут быть получены из кинетической теории и (или) эксперимента), можно решать уравнение (32) с граничными условиями (34) при $E = \text{const}$, $p = \text{const}$. Найдя из решения уравнения энергии распределение температуры по радиусу канала, можно построить *вольт-амперную характеристику* разряда (ВАХ-разряд):

$$I \equiv 2\pi \int_0^{r_w} j(r) r dr = 2\pi E \int_0^{r_w} \sigma(T(r)) r dr.$$

В литературе по электрическим дугам уравнение энергии (32) часто называют *уравнением Эленбааса—Хеллера* (Elnbaas—Heller). Численное решение уравнения (32) с граничными условиями (34) и построение ВАХ-разряда ($E = E(I)$) на сегодняшний день не представляет принципиальных трудностей и может быть выполнено без привлечения каких-либо дополнительных к сформулированным выше условий. Однако аналитическое решение задачи в общем случае затруднительно из-за нелинейности, связанной с зависимостью коэффициентов электро- и теплопроводности плазмы от температуры.

Обсудим некоторые модели проводимости плазмы, допускающие аналитическое решение задачи об электрическом разряде в канале. Смысл аналитических решений состоит в том, что

можно получить удобные для оценки соотношения, разумно передающие свойства разряда. Разумные аналитические модели должны правильно отражать основные физические свойства разряда, в частности вид ВАХ. От нелинейностей, связанных с зависимостью λ от T в стационарном уравнении (32), легко можно избавиться, введя *переменную Кирхгофа*:

$$\Theta = \int \lambda(T) dT. \quad (2.1.37)$$

Поскольку функция $\lambda(T)$ является гладкой, всюду положительной, то существует однозначная связь $T = T(\Theta)$, используя которую, можно получить зависимость $\sigma(\Theta)$, и таким образом в уравнении (32) сохранится лишь нелинейность, связанная с джоулевым тепловыделением σE^2 .

Все существующие модели электрической дуги, допускающие аналитическое решение задачи, основаны либо на аппроксимации распределения джоулевой теплоты по радиусу канала разряда, либо на аппроксимации зависимости коэффициента электропроводности от переменной Кирхгофа (или температуры). Аппроксимация джоулева тепловыделения основана на том, что даже достаточно плавное изменение температуры по радиусу разряда $T(r)$ сопровождается резким изменением коэффициента электропроводности по радиусу канала $\sigma(r)$. Резкое изменение $\sigma(r)$ (см. рис. 2.3, в) объясняется почти экспоненциальным ростом проводимости с температурой в частично ионизованной плазме $\sigma \sim n_e \sim \exp[-Ie/(2k_B T)]$. Так как при постоянном по радиусу значении электрического поля E_z профиль плотности тока в канале соответствует профилю электропроводности — $j(r) = \sigma(r) E$ — возникает возможность аппроксимировать значение тока по радиусу ступенькой, считая, что основной ток протекает через узкий, по сравнению с радиусом камеры, приосевой канал: $r_k < r_w$. Поэтому получившая широкое распространение в технических приложениях так называемая *канальная модель электрической дуги* основана на следующей аппроксимации температуры и проводимости, а следовательно, и джоулева тепловыделения, по радиусу канала:

$$T(r) = T_0 = \text{const}; \sigma(r) = \sigma(T_0) = \text{const}; 0 \leq r \leq r_k;$$

$$\sigma(r) = 0; r_k < r \leq r_w.$$

При такой аппроксимации джоулева тепловыделения решение уравнения (32) в бестоковой области $r_k \leq r \leq r_w$ легко находится и имеет вид (λ для простоты считается постоянной величиной):

$$T(r) = T_w + \frac{T_0 - T_w}{\ln r_k/r_w} \ln(r/r_w).$$

Для определения температуры в проводящей зоне T_0 , следо-

вательно, и проводимости $\sigma(T_0)$, поскольку она является функцией T_0 , можно воспользоваться уравнением энергии в интегральной форме для проводящего цилиндрического столба разряда радиуса r_w , приравнивая джоулево тепловыделение на единицу длины разряда $\sigma_0 E^2 \pi r_w^2$ теплоте $2\pi r_k \lambda \frac{dT(r_k)}{dr}$, отводимой теплопроводностью в бестоковую область между разрядом и стенкой камеры:

$$\sigma_0 E^2 = 2\lambda (T_0 - T_w) / [r_k^2 \ln(r_k/r_w)].$$

Однако последнее равенство содержит две неизвестные величины (r_k и T_0), которые из одного соотношения одновременно определены быть не могут. В различных приложениях для получения дополнительного соотношения, позволяющего найти все величины, используются различные экстремальные принципы [15; 16; 17]:

1) принцип *минимума напряжения (мощности)* на разряде $dE/dr_k = 0$. Этот принцип известен также как *принцип Штеенбека* (M. Steenbeck), впервые предложившего каналовую модель дуги;

2) принцип *минимума производства энтропии* (см., например, [3]);

3) другие эквивалентные (например, *вариационные*) принципы, строгое обоснование которых затруднительно. Отметим также, что используемое в каналовой модели дуги предположение $T(r) = T_0 = \text{const}$ при $0 \leq r \leq r_k$ не является последовательным, так как $T = \text{const}$ не удовлетворяет уравнению (32) в проводящей области.

Выбор физически более последовательных аппроксимаций зависимостей $\sigma(\Theta)$ или $\sigma(T)$ позволяет аналитически решать поставленную задачу о дуге без привлечения дополнительных соотношений. В настоящее время для многих плазм, используемых на практике, для широкого диапазона давлений и температур ($p \sim 0,1-100$ атм, $T \sim 3 \cdot 10^3 - 50 \cdot 10^3$ К) имеются расчетные и экспериментальные данные зависимостей $\lambda(T)$, $\sigma(T)$, позволяющие построить функцию $\sigma(\Theta)$. Рассмотрим наиболее распространенные аппроксимации зависимости $\sigma(\Theta)$, допускающие аналитическое решение задачи об электрической дуге в канале. Эти аппроксимации, соответствующие им решения уравнения (32) с граничными условиями (34) и качественный вид получающихся из решения ВАХ, приведены в табл. 2.2. Модель 2а получила название *скачковой модели проводимости*. Ее часто также называют *каналовой моделью проводимости*, поскольку в рамках этой модели ток протекает лишь в канале радиуса $r_k < r_w$. Однако в отличие от каналовой модели Штеенбека для

нахождения радиуса проводящего канала и всех остальных характеристик разряда не требуется привлечения экстремальных принципов.

На примере простейшей аппроксимации 2а проведем полное построение решения задачи об электрической дуге. При использовании переменной Кирхгофа уравнение (32) и граничные условия (34) принимают вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Theta}{dr} + \sigma(\Theta) E^2 = 0,$$

$$\frac{d\Theta}{dr}(r=0) = 0, \Theta(r=r_w) = \Theta_w$$

Решение вышеприведенного уравнения с граничными условиями для аппроксимации 2а легко находятся для внутренней — проводящей — области:

$$\Theta_i(r) = \Theta(0) - \sigma_2 E^2 r^2 / 4, 0 \leq r \leq r_k, \quad (2.1.38)$$

и внешней — непроводящей — области:

$$\Theta_e(r) = \Theta_w + C \ln(r/r_w), r_k \leq r \leq r_w. \quad (2.1.39)$$

В формулы для Θ_i и Θ_e входят три неизвестные величины: температура (говоря о переменной Кирхгофа, для простоты будем называть ее температурой) на оси канала $\Theta(0)$, константа C и радиус проводящей зоны r_k , где одно решение должно плавно переходить в другое. Покажем, что в отличие от каналовой модели Штеенбека в рассматриваемой постановке вполне хватает условий для определения всех искомых величин без привлечения каких-либо экстремальных принципов. Поскольку граница проводящей зоны соответствует изотерме Θ^* , при которой происходит включение проводимости (при более низких температурах согласно этой модели среда не проводящая), неизвестные величины могут быть определены из трех условий при $r = r_k$:

$$\Theta_i(r_k) = \Theta_e(r_k) = \Theta^*, \frac{d\Theta_i(r=r_k)}{dr} = \frac{d\Theta_e(r=r_k)}{dr} \quad (2.1.40)$$

Подставляя $\Theta_i(r)$ и $\Theta_e(r)$ в (40), находим:

$$\Theta(0) = \Theta^* + \sigma_2 E^2 r_k^2 / 4, C = (\Theta^* - \Theta_w) / \ln(r_k/r_w) \quad (2.1.41)$$

и уравнение для определения радиуса проводящего канала r_k в зависимости от внешних параметров задачи, которые могут быть объединены в один безразмерный комплекс $\Lambda_\sigma^2 = \sigma_2 E^2 r_w^2 / [2(\Theta^* - \Theta_w)]$:

$$F(\xi) \equiv -\xi_k^2 \ln \xi_k = \Lambda_\sigma^{-2}, \xi_k = r_k/r_w. \quad (2.1.42)$$

Аналогичным образом строится решение задачи и для ап-

Номер аппроксимации	Вид аппроксимации граничными условиями (34)	Вид решения уравнения (32) с граничными условиями
1	$\sigma(\theta) = \begin{cases} 0, \theta < \theta^*, \\ \sigma_\theta(\theta - \theta^*), \theta \geq \theta^* \end{cases}$	$\theta(\xi) = \begin{cases} \theta(0)J_0(k\xi) + \theta^*, \\ 0 \leq \xi \equiv \frac{r}{r_w} \leq \xi_k = \frac{r_k}{r_w}, \\ \theta_w + \frac{\theta^* - \theta_w}{\ln \xi_k} \ln \xi, \\ \xi_k \leq \xi \leq 1 \end{cases}$
2а	$\sigma_1 = 0$	$\theta(\xi) = \begin{cases} \theta^* + \frac{\sigma_2 E^2 r_w^2}{4} (\xi_k^2 - \xi^2), \\ 0 \leq \xi \equiv \frac{r}{r_w} \leq \xi_k, \\ \theta_w + \frac{\theta^* - \theta_w}{\ln \xi_k} \ln \xi, \\ \xi_k = \frac{p_k}{r_w} \leq \xi \leq 1 \end{cases}$
2	$\sigma(\theta) = \begin{cases} \sigma_1 = \text{const}, \theta < \theta^*, \\ \sigma_2 = \text{const}, \theta \geq \theta^*, \end{cases}$	$\theta(\xi) = \begin{cases} \theta^* + \frac{\sigma_2 E^2 r_w^2}{4} (\xi_k^2 - \xi^2), \\ 0 \leq \xi \leq \xi_k, \\ \theta_w + \frac{\sigma_1 E^2 r_w^2}{4} (1 - \xi^2) + \\ + [\theta^* - \theta_w - \frac{\sigma_1 E^2 r_w^2}{4} \times \\ \times (1 - \xi_k^2)] \frac{\ln \xi}{\ln \xi_k}, \xi_k \leq \xi \leq 1 \end{cases}$
2б	$\sigma_2 > \sigma_1 > 0$	$\theta(\xi) = \begin{cases} \theta^* + \frac{\sigma_2 E^2 r_w^2}{4} (\xi_k^2 - \xi^2), \\ 0 \leq \xi \leq \xi_k, \\ \theta_w + \frac{\sigma_1 E^2 r_w^2}{4} (1 - \xi^2) + \\ + [\theta^* - \theta_w - \frac{\sigma_1 E^2 r_w^2}{4} \times \\ \times (1 - \xi_k^2)] \frac{\ln \xi}{\ln \xi_k}, \xi_k \leq \xi \leq 1 \end{cases}$
3	$\sigma(\theta) = \sigma_0 e^{\alpha\theta}$	$\theta(\xi) = \frac{2}{\alpha} \ln \left(\frac{2\chi}{\Lambda(\xi^2 + \chi^2)} \right),$ $2\Lambda = \alpha\sigma_0 E^2 r_w^2,$ $\chi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \Lambda^2}}{\Lambda}$
4	$\sigma(\theta) = \sigma_0 \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1}$	$\frac{\theta(\xi) - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1} = \begin{cases} J_0(2,405\xi/\xi_k), 0 \leq \xi \leq \xi_k \\ \theta_w - \frac{\theta_w \ln \xi}{\ln \xi_k}, \xi_k \leq \xi \leq 1, \\ \theta_0 \equiv \theta(0), \sigma_0 = \sigma(\theta(0)) \end{cases}$

Примечание. Коэффициенты аппроксимации σ_θ , σ_0 , α , σ_1 , σ_2 , θ^* , θ_1

Уравнения для определения радиуса высокопроводящей зоны

$$r_k = 2,405 r_w / K.$$

$$K^2 = \sigma_0 E^2 r_w^{-2},$$

$$\Theta(0) = \frac{\Theta^* - \Theta_w}{2,405 \cdot J_0'(K \xi_k) \ln \frac{2,405}{K}}$$

$$F_a(\xi_k) \equiv -\xi_k^2 \ln \xi_k = \Lambda_\sigma^{-2},$$

$$\Lambda_\sigma^2 = \frac{\sigma_2 E^2 r_w^2}{2(\Theta^* - \Theta_w)}.$$

$$F_\sigma \equiv F_a + (\sigma/2) [1 + \xi_k^2 (2 \ln \xi_k - 1)] = \Lambda_\sigma^2,$$

$$\sigma = \sigma_1 / \sigma_2 < 1$$

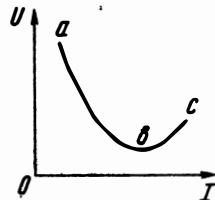
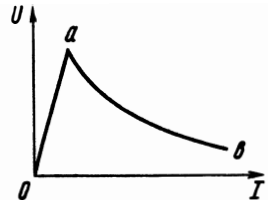
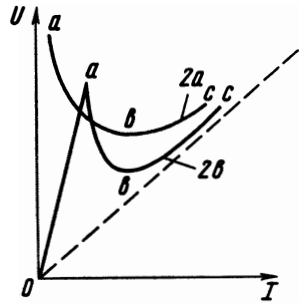
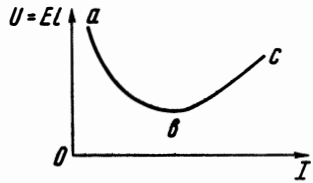
$$\frac{\sigma_0(\Theta_0) E^2 r_w^2}{\Theta_0 - \Theta_1} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{\Theta_w - \Theta_1}{\Theta_0 - \Theta_1} \left(\frac{2}{2,405 J_1(2,405)} \right) \right] =$$

$$= (2,405)^2,$$

$$\xi_k = \exp \left[-\frac{\Theta_w - \Theta_1}{(\Theta_0 - \Theta_1) 2,405 J_1(2,405)} \right]$$

Качественный вид вольт-амперной характеристики



зависят от рода газа, давления среды

проксимации 2б, вид которого приведен в табл. 2.1. На рис. 2.4 представлены зависимости радиуса проводящего канала r_k от напряженности электрического поля E для аппроксимаций 2а, 2б. Зная из решения зависимость $\Theta(r)$, находим ток, а следовательно, вольт-амперную характеристику разряда:

$$I = 2\pi \int_0^{r_w} j(r) r dr = \pi \sigma_2 r_k^2 E, r_k = r_k(E). \quad (2.1.43)$$

Вид получающихся ВАХ для аппроксимаций 2а, б приведен на рис. 2.5. Из рисунка видно, что ВАХ разряда не однозначна по напряжению. Так, для аппроксимации 2а решение задачи существует при $E \geq E_c(a)$. Пользуясь уравнением (42), можно найти значение бифуркационного параметра, в данном случае — напряженности электрического поля $E_c(a)$, и соответствующего ему электрического тока $I_c(a)$:

$$E_c(a) = [4 \cdot 2,72 (\Theta^* - \Theta_w) / (\sigma_2 r_w^2)]^{1/2}, I_c(a) = 2,72 \cdot \pi \sigma_2 r_w = E_c(a).$$

При этих значениях напряженности электрического поля (тока) радиус токового канала составляет $1/\sqrt{2,72}$ от радиуса разрядной камеры r_w . Распределение температуры по радиусу разрядной камеры для аппроксимации 2б приведено на рис. 2.6 для фиксированного значения напряженности $E_f = 1,163 E_{c1}$.

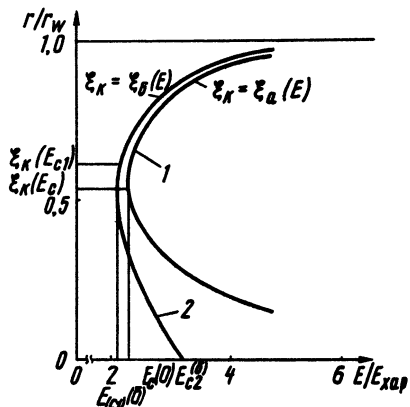


Рис. 2.4. Зависимость радиуса проводящего канала от относительной напряженности электрического поля для двух различных аппроксимаций проводимости из табл. 2.1: 1 — аппроксимация 2а, 2—2б

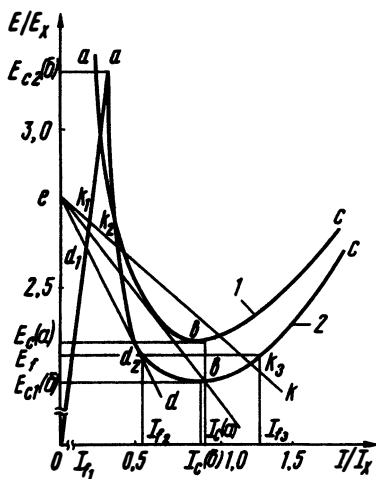


Рис. 2.5. Вольт-амперные характеристики электрической дуги, стабилизированной стенками, для различных модельных зависимостей проводимости от переменной Кирхгофа из табл. 2.1: 1 — аппроксимация 2а, 2—2б; ek, eg, eh — нагрузочные линии

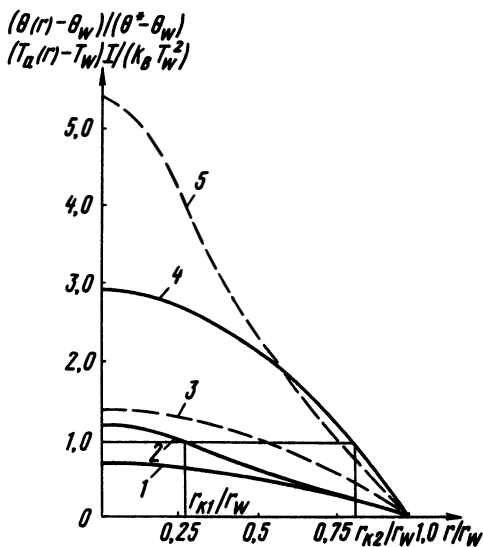


Рис. 2.6. Распределение относительного значения переменной Кирхгофа (температуры) $\frac{\theta(r) - \theta_w}{\theta^* - \theta_w}$ (сплошная линия) по радиусу электрической дуги для различных значений электрического тока, протекающего через дугу: 1 — $I_1/I_c = 0,21$; 2 — 0,46, 3 — 1,88; для всех значений тока напряженность одинакова ($E_1/E_{c1} = 1,163$). Распределение относительной температуры $\frac{(T_a(r) - T_w) I}{h_a T_w^2}$ (штриховая линия) по радиусу дуги для аппроксимации (2.2.3) для различных значений тока: 4 — $I_1/I_c = 0,36$; 5 — 2,27, при одинаковых значениях напряженности ($E_1/E_c = 0,7$)

В рамках канальной модели можно, исходя из равенства $\pi r_k^2 \sigma_2 E^2 = 2\pi r_k \alpha (T(0) - T_w)$, ввести коэффициент теплоотдачи от разряда к стенкам камеры $\alpha(E)$. Пользуясь полученными решениями задачи, удастся построить зависимость $\alpha(E)$, которую удобно использовать для расчета максимальной температуры в разряде:

$$T(0) = T_w + I(E) E / [2\pi r_k(E) \alpha(E)].$$

Рассмотрим более подробно физические механизмы, приводящие к особенностям распределения температуры по радиусу и виду ВАХ-разряда. Из рис. 2.5 видно, что одному и тому же значению напряженности на разряде E_1 могут соответствовать три различных распределения температуры и соответственно три значения электрического тока в канале: I_{f1} , I_{f2} , I_{f3} (для других аппроксимаций 1, 2а, 3 определенному значению напряжения могут соответствовать два различных режима). При этом току

I_{f1} соответствует распределение температуры 1; т. е. $\Theta_1(r)$, в котором максимальная температура на оси канала не превышает температуры включения высокой проводимости σ_2 ; т. е. $\Theta_1(0) < \Theta^*$. Это распределение температур является достаточно плавным, а небольшой электрический ток, хотя и протекает по всему сечению канала, порождается невысокой проводимостью σ_1 и большим сопротивлением разряда.

В других режимах при той же напряженности в разряде E существуют две области: центральная высокопроводящая, где температура превосходит температуру включения высокой проводимости ($\Theta(r) \geq \Theta^*$), и периферийная область с температурой, не превышающей температуры включения ($\Theta(r) < \Theta^*$), и низкой проводимостью σ_1 . Ток $I_{f3}(E_f)$ превышает ток $I_{f2}(E_f)$ из-за того, что в этом режиме больше размер проводящей зоны ($r_k(I_{f3}) > r_k(I_{f2})$) и соответственно меньше сопротивление ($R(I_{f3}) < R(I_{f2})$).

Приведенные решения нелинейного уравнения (32) с граничными условиями (34) наглядно демонстрируют возможности существования неоднозначных решений нелинейной задачи при одних и тех же граничных условиях. Значения внешних параметров задачи — в данном случае напряженностей электрического поля E_{c1} , E_{c2} , при которых решение задачи становится неоднозначным (появляются новые ветви решения), в математике называют *бифуркационными параметрами*.

По виду ВАХ, изображенной на рис. 2.5, для аппроксимации 2б можно проследить, как меняются режимы разряда по мере увеличения на нем напряжения. При возрастании напряжения от нуля до E_{c1} решение задачи единственно (распределение температуры типа $\Theta_1(r) < \Theta^*$), ток с ростом E возрастает, а сопротивление остается постоянным, равным $R_2 = l/(\pi r_w^2 \sigma_1)$. При $E = E_{c1}$ возникает и другой режим разряда. При $E_{c1} < E < E_{c2}$ могут существовать три различных режима горения разряда: один — ветвь oa ВАХ — состоит целиком из области низкой «однофазной» проводимости (ток I_{f1}), два других «двухфазных» режима содержат высокопроводящие зоны с проводимостью σ_2 и низкопроводящие зоны с проводимостью $\sigma_1 < \sigma_2$ и отличаются размерами высокопроводящей зоны и соответственно тока $r_k(I_{f2}) < r_k(I_{f3})$. В таких «двухфазных» режимах на одной из ветвей ВАХ — ветви ba , существующей при $E_{c1} \leq E \leq E_{c2}$, сопротивление разряда с ростом напряжения возрастает, а ток соответственно падает, на другой ветви bc сопротивление разряда с ростом напряжения падает, а ток возрастает. На этой ветви разряд асимптотически снова стремится к «однофазному» режиму с постоянным сопротивлением, но уже с высокой проводимостью σ_2 :

$$R_2 = l/(\pi\sigma_2 r_w^2) < R_1.$$

Из табл. 2.2 видно, что отмеченные особенности разряда не связаны с характером аппроксимации зависимости $\sigma(\Theta)$: падающие и растущие ветви ВАХ существуют во всех трех аппроксимациях проводимости и возникают при числовых расчетах на ЭВМ и экспериментально наблюдаются в разрядах. Обычно падающую ветвь ВАХ (с ростом напряжение падает) объясняют тем, что с увеличением тока возрастает температура плазмы, а следовательно, и ее проводимость, так как $\sigma(T)$ является для обычных условий растущей функцией от температуры и снижением сопротивления разряда $R \sim 1/\sigma$.

Такое рассуждение верно лишь отчасти и не может объяснить появление растущей ветви ВАХ при монотонно растущей зависимости σ от T (например, ветви oa для аппроксимации 3).

Существование растущих и падающих ветвей ВАХ легко объяснить на основе дифференциального сопротивления R_d , определяемого производной от напряжения по току: $R_d = dU/dI$. Очевидно, что на растущей ветви ВАХ $R_d > 0$, на падающей — $R_d < 0$. Пользуясь нелинейным законом Ома для дуги $E = R(I)I$, можно получить для дифференциального сопротивления следующее уравнение:

$$R_d = R + \frac{dR}{dI} I = R(1 + d \ln R / \ln I).$$

Из соотношения для R_d видно, что отрицательное дифференциальное сопротивление может возникать только при достаточно быстром уменьшении сопротивления с ростом тока: $d \ln R / d \ln I < -1$.

При расчете R_d следует помнить, что сопротивление разряда определяется не только переменной по сечению разряда проводимостью среды, но и размерами области, в которой сосредоточена основная часть тока r_k ; т. е. $R \sim 1(\sigma r_k^2)$. Для аппроксимаций 1, 2а, 2б это соответствует переходу от низкопроводящей зоны к высокопроводящей, для аппроксимации 3 — размеру области, где проводимость в 2 раза меньше своего максимального значения на оси разряда. Размеры токопроводящей зоны r_k также зависят от тока (напряжения) на разряде — как это хорошо демонстрируется уравнением (42) — и не совпадают с радиусом разрядной камеры r_w . Этот плазменный проводник, радиус проводящего канала которого (и конечно, проводимость) изменяется в зависимости от напряжения, существенно отличается от проводника фиксированного сечения. В последнем сопротивление $R(I)$ также может зависеть от тока (напряжения), но эта зависимость связана лишь с характером изменения проводимости. Следовательно, появление падающей и растущих ветвей ВАХ электричес-

ких разрядов в плазме связано как с изменением температуры и проводимости разряда, так и с изменением размеров токопроводящей зоны. Видно, что неоднозначная ВАХ стационарного электрического разряда возникает при немонотонной зависимости дифференциального сопротивления от тока (напряжения).
Условие

$$d \ln R / d \ln I \equiv f(I_c, E_c) = -1$$

позволяет рассчитать критические значения тока I_c и напряжения E_c , соответствующие началу возникновения новых ветвей ВАХ (бифуркационные параметры).

Посмотрим, к каким последствиям в эксперименте могут приводить отмеченные особенности ВАХ дуговых разрядов. Если посмотреть, как изменяется характер горения разряда, пользуясь нагрузочной характеристикой цепи, в которой горит разряд (линии ek или ed на рис. 2.5 в зависимости от активного сопротивления внешней цепи), можно обнаружить, что по мере увеличения тока существующий сначала один режим горения на растущей ветви oa ВАХ может смениться двумя режимами (режимы d_1 , d_2 на рис. 2.5), а затем и тремя — k_1 , k_2 , k_3 . При дальнейшем возрастании снова существует лишь один сильноточный режим f_3 . При уменьшении тока — увеличении внешнего сопротивления цепи — разряд может скачком из режима d_2 перейти в режим d_1 . Таким образом, при непрерывном изменении активного сопротивления в сторону его уменьшения, а затем увеличения могут наблюдаться гистерезисные явления в разряде. Возникновение гистерезисных явлений в дуговых разрядах тесно связано с устойчивостью отдельных режимов и тепловой контракцией, о которых пойдет речь в § 2.2.

2.1.4 Излучающие термически равновесные разряды

Если стенки камеры, в которой горит разряд, или границы окружающей среды находятся достаточно далеко и не оказывают существенного влияния на формирование токового канала, то такой разряд можно считать свободногорящим. Рассмотрим свойства цилиндрического свободногорящего стационарного сильноточного разряда [20], считая, что плазма и окружающий ее газ покоятся. В сильноточных разрядах возникает и сильное собственное магнитное поле, а магнитное давление $p_m = B^2 / (2\mu_0)$ может быть порядка плазменного, давление p_r окружающего разряд холодного газа может быть значительно ниже плазменного p_n : $p_r < p_n \sim p_m$.

Большие электрические токи и высокие температуры и давления плазмы приводят к тому, что излучение начинает играть

существенную роль в уносе теплоты из разряда. Часто в таких разрядах лучистый поток превышает поток теплоты за счет теплопроводности $q_{\tau}/q_{\lambda} < 1$. В общем случае для количественного анализа свойств такого разряда и расчета его характеристик кроме уравнений силового равновесия и энергии необходимо решать уравнение переноса излучения, см. (1.1.8). В двух предельных случаях: разряды с длиной свободного пробега излучения меньшей, чем характерный размер системы, и разряды, в которых эта длина значительно превышает размер системы,— решение задачи упрощается и может быть получено аналитически.

Рассмотрим разряд, в котором длина свободного пробега фотонов значительно меньше радиуса канала и излучение выходит в основном с поверхности разряда и близко к излучению абсолютно черного тела при температуре поверхности. В этом случае решение уравнения (1.1.8) при $\epsilon_v = 0$ близко к локально равновесному планковскому и его можно представить в виде

$$I_v \equiv I_{v,p} + I_1 = I_{v,p} - \bar{\Omega}_1 \nabla I_{v,p} / \kappa'_v. \quad (2.1.44)$$

Интегрируя I_v по телесному углу $\bar{\Omega}_1$ (от 0 до 4π) и частотам (от 0 до ∞), получим для лучистого потока теплоты следующее выражение:

$$q_{\lambda} = - \frac{16 \sigma_a T^3 I_p}{3} \nabla T. \quad (2.1.45)$$

Здесь обозначено

$$I_p = \left(\int_0^{\infty} \kappa_v^{-1} \frac{dI_{v,p}}{dT} dv \right) \left(\int_0^{\infty} \frac{dI_{v,p}}{dT} dv \right)^{-1} = \frac{c}{16 \sigma_a T^3} \int_0^{\infty} \frac{4\pi}{c \kappa_v} \frac{dI_{v,p}}{dT} dv. \quad (2.1.46)$$

Величина I_p носит название *расселандовой длины пробега квантов*, $\sigma_a = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) — *постоянная Стефана—Больцмана*.

Соотношение (45) иногда называют *приближением лучистой теплопроводности*, поскольку оно аналогично соотношению Фурье для потока теплоты с коэффициентом лучистой теплопроводности

$$\lambda_{\lambda} = (16/3) \sigma_a I_p T^3. \quad (2.1.47)$$

Росселандова длина свободного пробега фотонов зависит от механизма излучения. Для характерных ионов с зарядовым числом Z_i величина I_p (выраженная в метрах) имеет вид:

$$5,4 \cdot 10^{24} \frac{T^{7/2}}{z_i^3 n_i} \text{ — однократно ионизованные среды,}$$

$$\frac{4,4 \cdot 10^{24} T^{7/2}}{Z_i (1 + Z_i)^2 n_i^2} \text{ — многократно ионизованные атомы,}$$

$4,8 \cdot 10^{26} \frac{T^{7/2}}{Z_i^3 n_i}$ — тормозное излучение при свободном переходе.

Определим характеристики рассматриваемого разряда. Будем считать плазму полностью ионизованной, при этом преобладают электронные столкновения. Коэффициент электропроводности такой плазмы может быть записан в виде

$$\sigma = 0,2 \sqrt{\frac{\pi}{8m_e}} \frac{k_B T^{3/2}}{Z_i e^2} \equiv \sigma_s T^{3/2}, \quad (2.1.48)$$

где

$$\sigma_s = 0,2 \sqrt{\frac{\pi}{8m_e}} k_B / (Z_i e^2).$$

Используем уравнение Максвелла (1.1.11), записанное с учетом радиальной зависимости переменных:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r B_\theta = \mu_0 j_z = \mu_0 \sigma E_z. \quad (2.1.49)$$

Исключим плотность тока j_z из уравнения баланса радиальных сил в разряде, представив это уравнение в виде

$$\frac{dp_n}{dr} + j_z B_\theta = \frac{dp_n}{dr} + [1/(\mu_0 r)] B_\theta \frac{d}{dr} r B_\theta = 0. \quad (2.1.50)$$

Уравнение энергии имеет привычный вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \lambda_n \frac{dT}{dr} + \sigma(T) E^2 = 0. \quad (2.1.51)$$

Поскольку среду считаем термически равновесной $T_e = T_i$, уравнение состояния электронейтральной плазмы ($n_e = Z_i n_i$) имеет вид

$$p_n = p_e + p_i = k_B T (1 + Z_i) n_i. \quad (2.1.52)$$

Представим следующую картину излучающего сильноточного, свободноточного плазменного шнура, окруженного холодным, прозрачным для оптического излучения (считается, что выходящее из разряда излучение поглощается на бесконечности) газом низкого — в пределе нулевого — давления p_n .

Пусть радиус цилиндрического канала и температура на поверхности канала T_k подлежат определению из решения задачи. Будем считать в росселандовой длине свободного пробега фотонов l_p плотность ионов постоянной и равной n_k и учитывать лишь зависимость ее от температуры $l_p \sim T^{7/2}$. Проводимость в канале разряда будем считать постоянной при соответствующей температуре T_k , т. е. $\sigma = \sigma_s T_k^{3/2} = \text{const}$. В этом случае из

уравнения (49) для $\sigma = \text{const}$ находим распределение магнитного поля по сечению канала:

$$B_{\theta}(r) = \mu_0 \sigma E r / 2, \quad (2.1.53)$$

а из уравнения равновесия (50) — распределение давления по сечению канала:

$$p(r) = p(0) - \mu_0 (\sigma E r)^2 / 4. \quad (2.1.54)$$

Давление на оси разряда $p(0)$ определяется из условия равенства давлений плазмы и окружающего газа при $r=r_k$, $p_p(r_k) = p_g$:

$$P(0) = p_g + \mu_0 (\sigma E r)^2 / 4. \quad (2.1.55)$$

Пользуясь уравнением энергии (51) и условием симметрии на оси разряда $dT(0)/dr = 0$, найдем распределение температуры по его сечению. Условие на границе разряда можно заменить более удобным для отыскания температуры T_k интегральным соотношением, следующим из (51): джоулево тепловыделение на единицу длины разряда отводится с единицы длины поверхности излучением:

$$\pi r_k^2 \sigma E^2 \equiv \pi r_k^2 \sigma_s T_k^{3/2} E^2 = 2\pi r_k \sigma_d T^4. \quad (2.1.56)$$

Полагая $l_p = l_i T^{7/2}$, введем, как и ранее, переменную Кирхгофа:

$$\Theta = \int \lambda_d(T) dT = 2\lambda_s T^{15/2} / 15.$$

Множитель $\lambda_s = 16\sigma_d l_z / 3$ зависит от зарядности ионов Z , их концентрации n_i согласно табл. 2.2. Таким образом, решение уравнения (51) можно записать в виде

$$\Theta(r) = \Theta_k + \sigma(T_k) (Er_k/2)^2 (1 - r^2/r_k^2), \\ T(r) = [15\Theta(r)/(2\lambda_s)]^{2/15}. \quad (2.1.57)$$

Из (57) следует, что температура плазмы из-за большого значения коэффициента лучистой теплопроводности изменяется достаточно медленно по радиусу канала: $T \sim r^{4/15}$. Поэтому во многих приложениях, относящихся к сильноточным оптически излучающим разрядам, температуру в канале принимают постоянной, равной ее значению на границе разряда: $T(r) = T_k = \text{const}$. Зная радиус r_k токового канала, температуру T_k на его поверхности можно определить из соотношения (56). Для определения радиуса токового канала можно воспользоваться условием сохранения массы разряда единичной длины:

$$2\pi \int_0^{r_k} n(r) r dr = M_p = \text{const}. \quad (2.1.58)$$

Левую часть (58) можно преобразовать, воспользовавшись уравнением состояния (5) и пренебрегая изменением температуры. После этого условие сохранения погонной массы газа можно записать в виде

$$\frac{\pi r_k^2 (\rho_r + \mu_0 \sigma^2 (T_k) E^2 r_k^2 / 8)}{(1 + Z) k_B T_k} = M_p. \quad (2.1.59)$$

Таким образом, по заданному значению электрического поля E или тока $I = E / [\pi r_k^2 \sigma (T_k)]$ и погонной массе M_p можно определить из уравнений (56), (59) и радиус плазменного канала, и его температуру.

В простейшем случае, когда давление окружающего газа пренебрежимо мало ($8\rho_r / [\mu_0 \sigma^2 (T_k) E^2 r_k^2] \ll 1$), а заданной величиной является ток разряда, из уравнения (59) получаем соотношение для температуры по поверхности канала разряда:

$$T_k = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi (1 + Z) k_B M_p}. \quad (2.1.60)$$

Радиус канала находится из уравнения (56):

$$r_k = (I^2 / 2\pi^2 \sigma_l \sigma_s T_k^{11/2})^{1/3} \sim M_p^{11/6} Z^{1/3} (1 + Z)^{11/6} I^{-3}. \quad (2.1.61)$$

При этом ВАХ излучающего свободногорящего разряда оказывается растущей: $E \sim I^4$.

Полученные результаты позволяют найти интенсивность излучения с единицы длины излучающего разряда в зависимости от силы тока, погонной массы исходного газа и заряда образовавшихся ионов:

$$Q_l = 2\pi r_k \sigma_l T_k^4 = 5 \cdot 10^{18} I^5 Z_i^{1/3} (1 + Z_i)^{-13/6} M_p^{-13/6}. \quad (2.1.62)$$

Здесь ток подставляется в амперах, а масса газа — в част/м. Таким образом, видно, что увеличение тока приводит к сжатию излучающего разряда, увеличению его температуры и потока излучения с единицы длины разряда.

В общем случае при исследовании таких разрядов, поскольку при высоких температурах происходит многократная ионизация исходного вещества, необходимо учитывать зависимость кратности заряда ионов Z_i от температуры, пользуясь уравнением Саха, см. (1.2.1). Во многих приближениях, приемлемых для оценок, зависимость Z_{eff} от T_K можно представлять в виде $Z_{\text{eff}} = 0,5 \sqrt{T_K}$ (здесь температура выражена в электрон-вольтах), при этом Z_{eff} изменяется в диапазоне $1 \div 6$.

Для оптически излучающих разрядов, в которых длина свободного пробега фотонов превышает радиус канала разряда (такая картина характерна для длинноволновой части спектра

излучения) и излучение свободно выходит из объема, в уравнении энергии джоулев нагрев становится равным объемному излучению из данной точки разряда. Существует также ряд моделей, допускающих аналитическое решение задачи, см. [20].

2.1.5. Разряд в продольном потоке охлаждающего газа

Рассмотренные ранее электрические разряды происходили в покоящемся газе. Остановимся теперь на свойствах разрядов, горящих в потоке охлаждающего газа. Сначала, следуя работе [23], обсудим характеристики продольно обтекаемого газом разряда, начинающегося на точечном катоде. Считается, что катод расположен в начале координат ($x = 0$), а анод — на бесконечности ($x = \infty$). Кроме того, предполагается наличие осевой симметрии относительно оси x , и все зависимые переменные являются функциями координат x, y . В общем случае необходимо решать полную задачу и находить поле скоростей, давлений и температур с заданными условиями на эти переменные на большом удалении от разряда: при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_\infty (V_\infty, 0, 0), T \rightarrow T_\infty$. При решении полный ток, проходящий через канал разряда, считается заданным:

$$I = 2\pi \int_0^{r_K(x)} j_x(r) r dr = I_0 = \text{const.}$$

По мере удаления от катода радиус канала разряда может изменяться, и закон его изменения должен быть найден в процессе решения задачи (рис. 2.7, а).

Полная задача о построении решения может быть разделена на две: *внутреннюю* в области разряда ($0 \leq r \leq r_K$) и *внешнюю*

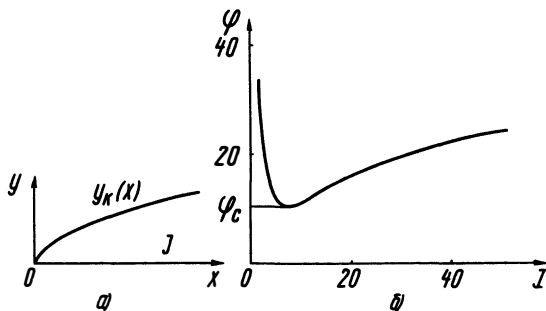


Рис. 2.7. Безразмерный радиус токового канала в зависимости от расстояния от точечного катода — а; вольт-амперная характеристика разряда, обтекаемого продольным потоком охлаждающего газа в

$r \geq r_k$ — и сшиваться на найденной в решении границе разряда. Задача о поле скоростей и теплоты в области разряда может решаться в приближении пограничного слоя, когда изменение поперек слоя превышает изменения вдоль его. Однако ограничимся более простой моделью, считая течение с постоянной скоростью v во всей области — в разряде и вне его. Проводимость в зависимости от переменной Кирхгофа Θ (37) будем аппроксимировать, как и ранее, ступенчатой зависимостью (2а из табл. 2.1) а число $Re = c_p \rho v l_x / \lambda$ считать постоянным и равным единице. При таком выборе числа Пекле характерным размером задачи является величина $l_x = \lambda / (c_p \rho v)$. В отличие от п. 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 для данного разряда электрическое поле изменяется, а постоянной величиной является полный ток I_0 в канале. Задача аналитически решается в плоской геометрии, и электрическое поле E_x связано с током I_0 соотношением, вытекающим из закона Ома:

$$I_0 = E_x(x) \int_0^{\infty} \sigma(\Theta(x, y)) dy = E_x \sigma_2 y_k(x).$$

Размер в направлении, перпендикулярном плоскости xoy , принят равным единице. Введем безразмерные переменные по формулам

$$\Theta_6 = (\lambda_{\infty} T_{\infty})^{-1} \int \lambda(T) dT, \quad x_6 = x/l_x, \quad y_6 = y/l_x.$$

Далее индекс «6» у безразмерных величин опускается. Уравнение энергии (1.5) в безразмерном виде для $x \geq 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial y^2} + q_v, \quad 0 \leq y \leq y_k(x), \\ \frac{\partial \Theta_e}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Theta_e}{\partial y^2}, \quad y_v \leq y < \infty \end{aligned} \quad (2.1.63)$$

Здесь

$$q_v = \Lambda_{\parallel}^2 / y_k^2, \quad \Lambda_{\parallel}^2 = (I_0 \rho c_p v)^2 / (\sigma_2 T_{\infty} \lambda_{\infty}^3).$$

Граничные условия

$$\frac{d\Theta}{dy}(x, y) = 0, \quad \Theta(x, y \rightarrow \infty) \rightarrow \Theta_{\infty}, \quad \Theta(y_k(x)) = \Theta^+ = \text{const}$$

Будем искать автомодельное решение уравнения (63) для тех случаев, когда $\Theta(\xi(x, y))$ зависит лишь от комбинации x, y , т. е. $\xi = y / (2\sqrt{x})$. С использованием автомодельной переменной ξ уравнения (63) сводятся к двум обыкновенным уравнениям

$$-2\xi \Theta_i' = \Theta_i'' + \Lambda_{\parallel}^2 / \xi_k^2, \quad -2\xi \Theta_e' = \Theta_e'', \quad (2.1.64)$$

так как $\partial\Theta/\partial x = -[\xi/(2x)] d\Theta/d\xi$, $\partial\Theta/\partial y = (1/(2\sqrt{x})) \partial\Theta/\partial\xi$. Здесь штрихами обозначено дифференцирование по автомодельной переменной ξ .

Граничные условия (64), записанные в автомодельных переменных ξ , представимы в форме

$$\Theta'_i(0) = 0, \Theta_e(\infty) = \Theta_\infty, \Theta_e(\xi_k) = \Theta_i(\xi_k) = \Theta^+, \quad (2.1.65)$$

$$\Theta'_i(\xi_k) = \Theta'_e(\xi_k), \xi_k = y_k/(2\sqrt{x}).$$

Решение уравнений (64) с учетом первых четырех граничных условий (65) можно записать в форме:

$$\Theta_i(\xi) = \Theta(0) - (\Lambda_{||}/\xi_k)^2 \int_0^{\xi} e^{-s^2} \left(\int_0^s e^{t^2} dt \right) ds, \quad (2.1.66)$$

$$\Theta_e(\xi) = \Theta^+ - (\Theta^+ - \Theta_\infty) I_1^{-1} \int_{\xi_k}^{\xi} e^{-t^2} dt,$$

где $I_1 = \int_{\xi_k}^{\infty} e^{-t^2} dt$.

Для того чтобы определить, как изменяется радиус проводящего канала в зависимости от x , надо найти автомодельную переменную ξ_k . Это можно сделать, используя последнее из граничных условий (65), представляющих собой равенство потоков теплоты. Подставляя решение (66) в эти соотношения, приходим к уравнению

$$(\Theta^+ - \Theta_\infty) I_1^{-1} = \Lambda_{||}^2 \xi_k^{-2} \int_0^{\xi_k} e^{s^2} ds,$$

которое можно представить в виде, удобном для графического анализа искомой зависимости ξ_k от параметров задачи $(\Lambda_{||}, \Theta^+ - \Theta_\infty)$:

$$\xi_k^2 \Phi^{-1}(\xi_k) = \Lambda_{||}^2 / (\Theta^+ - \Theta_\infty), \quad (2.1.67)$$

где введена функция Φ следующего вида: $\Phi = I_1(\xi_k) I_2(\xi_k)$,

$$I_1 = \int_{\xi_k}^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi(1 - \operatorname{erf}(\xi_k))/2, I_2 = \int_0^{\xi_k} e^{t^2} dt. \quad (2.1.68)$$

Исследуем поведение функции Φ при больших и малых значениях ξ . Используя известные [28] представления функции ошибок erf , имеем:

$$I_1(\xi_k) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\pi}/2, \xi_k \rightarrow 0, \\ e^{-\xi_k^2} (2\xi_k)^{-1}, \xi_k \rightarrow \infty, \end{cases} \quad I_2(\xi_k) \rightarrow \begin{cases} \xi_k, \xi_k \rightarrow 0, \\ e^{\xi_k^2} (2\xi_k), \xi_k \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.1.69)$$

Таким образом, в предельных случаях приходим к разложению для Φ вида

$$\Phi(\xi_k) \rightarrow \begin{cases} (\sqrt{\pi}/2) \xi_k, \xi_k \rightarrow 0, \\ 1/4 \xi_k, \xi_k \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.1.70)$$

Подставив (70) в уравнение (67), получим соотношения, позволяющие определить зависимость автоматического радиуса проводящего канала при больших и малых его значениях от тока (остальные величины, входящие в параметр Λ_{\parallel} , фиксированы):

$$\xi_k = \sqrt{\pi} \Lambda_{\parallel}^2 / [2(\Theta^* - \Theta_{\infty})] \sim I_0^2, I_0 \rightarrow 0, \quad (2.1.71)$$

$$\xi_k = [\Lambda_{\parallel}^2 / 4 (\Theta^* - \Theta_{\infty})]^{1/4} \sim \sqrt{I_0}, I_0 \rightarrow \infty. \quad (2.1.72)$$

Зная зависимость радиуса проводящего канала от тока, можно построить ВАХ разряда. Пусть $\delta\varphi(x_{\phi})$ — разность потенциалов между катодом (началом координат) и сечением радиуса $y_k(x_{\phi})$, находящимся на расстоянии x_{ϕ} от начала координат. Пользуясь законом Ома и свойством автомодельности, имеем

$$\delta\varphi(x_{\phi}) = \int_0^{x_{\phi}} E_x(x) dx = I_0 \sqrt{\frac{x_{\phi}}{l_x}} / \sigma_2 \xi_k. \quad (2.1.73)$$

Подставляя полученные зависимости радиуса проводящего канала от тока (71), (72) в (73), находим

$$\delta\varphi = \begin{cases} 2I_0 (\Theta^* - \Theta_{\infty}) \left[\sqrt{x_{\phi}/l_x} / (\sigma_2 \Lambda_{\parallel}^2 \sqrt{\pi}) \right], I_0 \rightarrow 0, \\ \sqrt{2x_{\phi}/l_x} [(\Theta^* - \Theta_{\infty}) / \Lambda_{\parallel}^2]^{1/4} I_0, I_0 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Вспоминая, что I_0 есть ток, отнесенный к единичной длине в направлении, перпендикулярном плоскости xoy , введем следующие безразмерные значения тока и напряжения на разряде фиксированной длины x_{ϕ} :

$$I = I_0 / I_{\text{хар}} = \Lambda_{\parallel}; \quad \varphi = \delta\varphi \sigma_2 / (I_{\text{хар}} \sqrt{x_{\phi}/l_x}), \quad I_{\text{хар}} = \sqrt{\sigma_2 \lambda_{\infty} T_{\infty}}.$$

Вольт-амперную характеристику разряда в таких безразмерных переменных можно представить в виде

$$\varphi = \begin{cases} 2(\Theta^* - \Theta_{\infty}) / (I \sqrt{\pi}), I \rightarrow 0, \\ (\Theta^* - \Theta_{\infty})^{1/4} \sqrt{2I}, I \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.1.74)$$

На рис. 2.7, б построены ВАХ разряда, обтекаемого продольным потоком охлаждающего газа. Из полученных результатов следует, что разряд существует лишь при напряжениях, превос-

ходящих некоторое критическое $\delta\varphi_c$, зависящее от свойств плазмы и охлаждающего газа и от ее скорости. При $\delta\varphi > \delta\varphi_c$ ВАХ не однозначна: существуют падающая и растущая ветви. Выбор рабочего режима существенно зависит от организации внешней цепи.

2.1.6. Разряд в поперечном потоке охлаждающего газа

Рассмотрим свойства свободногорящего электрического разряда, охлаждаемого поперечным к нему плоскопараллельным ($\mathbf{v}(r) \rightarrow \mathbf{v}_\infty(v_\infty, 0, 0)$) потоком газа, считая среду безграничной, а температуру потока на большом расстоянии от разряда фиксированной ($T(r) \rightarrow T_w$ при $r \rightarrow \infty$). Пусть внешнее стационарное и однородное электрическое поле направлено по оси z , т. е. имеем $\mathbf{E}(0, 0, E_0)$, и пусть бесконечно протяженный вдоль поля электрический разряд имеет цилиндрическую форму. Считается также, что поток охлаждающего газа в плазму не проникает и обтекает разряд как жесткий цилиндр. Поток газа не проникает внутрь плазмы, во-первых, из-за повышенного давления в ней (особенно при сильных токах), во-вторых, из-за того, что вязкость плазмы существенно превышает вязкость холодного газа. Справедливость того, что можно пренебрегать проникновением газа в плазму, подтверждается экспериментами с обдуваемыми дугами. Поэтому плазму внутри разряда считаем покоящейся. Охлаждающий газ считаем несжимаемым, а течение его ламинарным.

В ходе решения задачи обтекания необходимо определить характеристики разряда: распределение температур в плазме и движущемся газе, радиус и ВАХ разряда. Решение задачи можно разделить на решение внутренней задачи — в плазменном цилиндре, где протекает весь электрический ток и происходит джоулево тепловыделение, и внешней — где перенос теплоты осуществляется конвекцией и теплопроводностью, а токи отсутствуют. Считается, что та часть теплоты, которая переносится излучением, в охлаждающем газе не поглощается, а выносится на бесконечность (в более реальных расчетах T_w следует задавать с учетом поглощения выходящего из разряда излучения). Для аналитического решения поставленной задачи воспользуемся ступенчатой аппроксимацией зависимости проводимости от переменной Кирхгофа (37) — зависимостью 2 из табл. 2.2.

Скорость плоского потока вокруг цилиндра может быть выражена либо через гидродинамический потенциал скорости $\varphi(x, y)$, либо через функцию тока $\psi(x, y)$:

$$v_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y, v_y = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

При этом φ и ψ могут быть найдены из решений уравнений Лапласа [24]:

$$\Delta\varphi = 0, \Delta\psi = 0.$$

Решение такой задачи с условиями обращения в нуль на поверхности цилиндра ($r = r_k$) нормальной составляющей скорости $v_n (r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = r_k) = 0$ и выходом на бесконечном удалении от цилиндра на плоскопараллельное течение v_∞ хорошо известно и имеет вид [24]:

$$\varphi = v_\infty x (1 + r_k^2/r^2) = (r^2 + r_k^2) r^{-1} v_\infty \cos \beta, \quad (2.1.75)$$

$$\psi = v_\infty x (1 - r_k^2/r^2) = (r^2 - r_k^2) r^{-1} v_\infty \sin \beta.$$

Здесь β — полярный угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x , причем $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

Нахождение полей температур $\Theta_i(x, y)$ и $\Theta_e(x, y)$ внутри и вне плазменного цилиндра и радиуса канала разряда r_k сводится к решению уравнений:

$$\Delta \Theta_i + \sigma (\Theta_i) E^2 = 0, \quad 0 \leq r \leq r_k, \quad (2.1.76)$$

$$v_x \partial \Theta_e / \partial x + v_y \partial \Theta_e / \partial y = \kappa \Delta \Theta_e, \quad r_k \leq r, \quad (2.1.77)$$

со следующими граничными условиями

$$d\Theta_i/dr = 0 \text{ при } r = 0, \quad \Theta_e(r_k) = \Theta_i(r_k) = \Theta^*, \quad (2.1.78)$$

$$\Theta_e(r \rightarrow \infty) \rightarrow \Theta_w.$$

Входящие в уравнение (77) составляющие скорости v_x, v_y — известные из (75) функции координат x и y (или радиуса r угла β).

Граничное условие, соответствующее требованию непрерывности потоков теплоты при $r = r_k$, запишем в виде эквивалентного интегрального соотношения: джоулево тепловыделение на единицу длины плазменного цилиндра $\pi r_k^2 \sigma_2 E^2$ равно отведенной с поверхности цилиндра теплоты во внешний поток Q_e :

$$Q_e = r_k \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Theta_e}{\partial r} d\beta = \pi r_k^2 \sigma_2 E^2 \quad (2.1.79)$$

Далее будем считать коэффициент температуропроводности $\kappa = \rho c_p / \lambda$ постоянным. Полученные уравнения допускают обобщения и на обтекание турбулентным потоком. В этом случае решения (75) используют для усредненного поля скоростей, а κ в (77) представляет собой суммарный молекулярный и турбулентный коэффициент температуропроводности.

Хотя поставленная задача и полностью сформулирована, аналитическое ее решение, даже при известном поле скорости (75) (и, следовательно, известных функциях $V_x(x, y), V_y(x, y)$), затруднительно. Далее для построения аналитического решения

используем переход к новой системе координат. Можно показать, что линии тока $\psi(x, y) = \text{const}$ и линии $\varphi(x, y) = \text{const}$ образуют естественную, криволинейную, локально-ортогональную систему координат [10]. Найдем отображение плоскости xy в плоскость $\varphi\psi$ [связь между переменными φ, ψ и x, y или r, β легко устанавливается из соотношений (75)]: отрезки оси x лежат в пределах $-\infty < x \leq -r_k, r_k \leq x < \infty$ и окружность радиуса $r = r_k$ плоскости xy преобразуется в ось $\psi = 0$ ($-\infty < \varphi < \infty$); отрезок оси $x = 0, r_k \leq y < \infty$ переходит в полуось $\varphi = 0, 0 \leq \psi < \infty$, отрезок оси $x = 0, -\infty < y \leq -r_k$ в $\varphi = 0, -\infty < \psi \leq 0$.

Перейдем в уравнении (77) от декартовых координат x, y к переменным φ, ψ . По общим правилам дифференцирования имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + v_y \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} - v_x \frac{\partial \Theta}{\partial \psi}, \\ v_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= (v_x^2 + v_y^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Согласно известным преобразованиям координат, лапласиан в криволинейных ортогональных координатах имеет вид

$$\Delta = J^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (H_\psi / H_\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} (H_\varphi / H_\psi) \frac{\partial}{\partial \psi} \right].$$

Здесь $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)}$ — якобиан перехода от координат x, y к координатам φ, ψ .

Вычисляя якобиан, получаем

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2}.$$

Коэффициенты Ламэ H_φ, H_ψ легко вычисляются и имеют вид:

$$H_\varphi = [(\partial x / \partial \varphi)^2 + (\partial y / \partial \varphi)^2]^{1/2} = (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2}, \quad (2.1.80)$$

$$H_\psi = [(\partial x / \partial \psi)^2 + (\partial y / \partial \psi)^2]^{1/2} = (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2}. \quad (2.1.81)$$

Таким образом, уравнение (77) через переменные φ и ψ может быть записано в виде

$$\frac{\partial \Theta_e}{\partial \psi} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \Theta_e}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_e}{\partial \psi^2} \right). \quad (2.1.82)$$

Введем безразмерные переменные

$$\psi_0 = \psi / \kappa, \varphi_0 = \varphi / \kappa, \Theta_{e0} = (\Theta_e - \Theta_w) / (\Theta^* - \Theta_w).$$

Далее индекс «б» безразмерных переменных опускается. Пос-

кольку задача является симметричной относительно оси x , а следовательно, и ψ , достаточно найти решение (86) только в верхней полуплоскости: $\psi \geq 0$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Таким образом можно перейти от решения уравнения (77) с переменными коэффициентами в области вне круга радиусом r_k к решению уравнения с постоянными коэффициентами в полуплоскости $\psi \geq 0$, $-\infty < \varphi < \infty$:

$$\Delta \theta_e = \frac{\partial \theta_e}{\partial \varphi}. \quad (2.1.83)$$

Граничные условия (78) в переменных φ , ψ выглядят так:

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial \psi} = 0 \quad \text{при} \quad \psi = 0, |\varphi| > \varphi_+ \equiv 2v_{\infty} r_k / \kappa, \quad (2.1.84)$$

$$\theta_e(\psi = 0, \varphi) = 1, \quad -\varphi_+ \leq \varphi \leq \varphi_+. \quad (2.1.85)$$

Здесь φ_+ — неизвестная величина, определяемая из решения задачи.

Преобразуем соотношение (79) к новым переменным. Так как

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial r}(r = r_k) = \frac{\partial \theta_e}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \theta_e}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \beta}{\partial \psi} d\psi, \quad (2.1.86)$$

то, приводя вычисления, приходим вместо (79) к соотношению

$$Q_e / (\theta^* - \theta_w) \equiv 2 \int_0^{\psi_+} \frac{d\theta_e}{\partial \psi} d\psi = \pi r_k^2 \sigma_2 E^2 / (\theta^* - \theta_w). \quad (2.1.87)$$

Решение уравнения (83) с граничными условиями (84), (85) может быть сведено к решению парных интегральных уравнений.

Для построения решения воспользуемся методом Винера—Хопфа [28], преобразовав (83) к уравнению, решение которого строится в приложении. Сначала сделаем в (83) замену

$$\theta_e = \Theta(\varphi, \psi) \exp(\varphi/2). \quad (2.1.88)$$

Тогда (83) преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \psi^2} - \Theta/4 = 0. \quad (2.1.89)$$

Граничные условия (84), (85) теперь предстанут в виде

$$\frac{d\Theta}{d\psi}(\psi = 0, \varphi) = 0, \quad \varphi > |\varphi_+|, \quad (2.1.90)$$

$$\Theta(\psi = 0, \varphi) = \exp(\varphi/2), \quad -\varphi_+ \leq \varphi \leq \varphi_+. \quad (2.1.91)$$

Решение уравнения (89) с граничными условиями (89), (90) может быть построено методом Винера—Хопфа и записано в виде:

$$\theta_e = (1 - \operatorname{erf} \sqrt{(\rho - \varepsilon)/2}) \cdot \exp\left(\frac{\varphi_+ - \varepsilon}{2}\right), \quad -\infty < \varepsilon \leq 2\varphi_+, \quad (2.1.92)$$

$$\Theta_e = \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{(\rho + \varepsilon_c)/2}\right) \exp\left(\frac{\varphi_+ + \varepsilon}{2}\right), \varepsilon \geq 2\varphi_+,$$

где $\varepsilon = \varphi_+ - \varphi$, $\rho = \sqrt{\psi^2 + \varepsilon^2}$, $\varepsilon_c = \varepsilon - 2\varphi_+$.

То, что (92) является решением уравнения Гельмгольца (89) с граничными условиями (90), (91), можно проверить непосредственной подстановкой (92) в (89) — (91).

Используя полученное решение (92), найдем поток теплоты в каждой точке на поверхности разряда:

$$q_r = \frac{\partial \Theta_e}{\partial \psi}(\psi = 0) = e^{\varphi/2} / \sqrt{\varphi^* - \varphi}.$$

Видно, что поток теплоты имеет интегрируемую особенность в лобовой точке обтекаемого плазменного цилиндра. Зная поток теплоты в каждой точке, можно рассчитать полную теплоту, отводимую от разряда к охлаждающему газу:

$$Q_e / (\Theta^* - \Theta_w) = 2 \int_{-\varphi^*}^{\xi^*} \frac{\partial \Theta_e(\psi = 0, \varphi)}{\partial \psi} d\varphi = 2^{3/2} e^{\varphi^*/2} \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{\varphi^*}). \quad (2.1.93)$$

Соотношение (93) дает полный поток теплоты через единичную длину разряда, а множитель 2 появляется вследствие учета потока теплоты в нижнюю полуплоскость $\psi < 0$ в системе координат φ , ψ . Зная суммарную отводимую теплоту (93), из (83) можно получить уравнение для определения радиуса канала разряда:

$$\pi r_\kappa^2 \sigma_2 E^2 = 2^{3/2} \cdot (\Theta^* - \Theta_\infty) (\exp(v_\infty r_\kappa / \kappa)) \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2v_\infty r_\kappa}{\kappa}}\right). \quad (2.1.94)$$

Введем безразмерные комплексы

$$\xi_\kappa = v_\infty r_\kappa / \kappa, \Lambda_\perp^2 = \pi \sigma_e E^2 \kappa^2 / [2^{3/2} v_\infty^2 (\Theta^* - \Theta_w)]$$

и представим уравнение (94) в виде, удобном для отыскания зависимости радиуса канала от параметров задачи:

$$\xi_\kappa^{-2} \cdot e^{\xi_\kappa} \operatorname{erf} \sqrt{2\xi_\kappa} = \Lambda_\perp^2. \quad (2.1.95)$$

В общем случае трансцендентное уравнение (94) следует решать численно или графически, однако в пределе больших и малых значений ξ_κ можно воспользоваться асимптотическими представлениями для функции ошибок $\operatorname{erf} \sqrt{2\xi_\kappa}$:

$$\operatorname{erf} \sqrt{2\xi_\kappa} \rightarrow \begin{cases} (2/\pi) \sqrt{2\xi_\kappa}, & \xi_\kappa \rightarrow 0, \\ 1, & \xi_\kappa \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Используя вид разложения функции $\operatorname{erf} \sqrt{2\xi_\kappa}$ при больших и ма-

лых ξ , найдем асимптотические зависимости ξ_k от параметра Λ_{\perp} (напряженности электрического поля):

$$\Lambda_{\perp}^2 = \begin{cases} 2\sqrt{2\pi} \xi_k^{-3/2}, & \xi_k \rightarrow 0. \\ \xi_k^{-2} \exp \xi_k, & \xi_k \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Таким образом, при малых значениях радиуса проводящего канала его зависимость от напряженности электрического поля дается уравнением

$$r_k = (\kappa/v_{\infty}) \left[8\sqrt{\pi} (\Theta^* - \Theta_w) v_{\infty} / (\sigma_2 \kappa^2) \right]^{2/3} E^{-4/3}, r_k \rightarrow 0. \quad (2.1.96)$$

При больших значениях радиуса его связь с электрическим полем имеет вид

$$r_k = 2 \cdot (\kappa/v_{\infty}) \ln \left(\frac{\kappa E \sqrt{\pi \sigma_2}}{2^{3/4} v_{\infty} \sqrt{\Theta^* - \Theta_w}} \right), r_k \rightarrow \infty. \quad (2.1.97)$$

Зная радиус проводящего канала как функцию от напряженности электрического поля, можно построить ВАХ разряда: $I = \pi \sigma_2 r_k^2 E$. В общем случае для построения ВАХ необходимо пользоваться решениями уравнения (95), однако при больших и малых значениях радиуса канала ветви ВАХ можно построить по уравнениям (96), (95).

Для ветви ВАХ, соответствующей малым радиусам канала, получаем

$$I = \pi \sigma_2 (\kappa/v_{\infty})^2 \left[8\sqrt{\pi} (\Theta^* - \Theta_w) v_{\infty}^2 / (\sigma_2 \kappa^2) \right]^{4/3} E^{-5/3}. \quad (2.1.98)$$

Для больших радиусов ток изменяется по закону

$$I = 4\pi \sigma_2 (\kappa/V_{\infty})^2 E \ln^2 \left(\frac{\kappa E \sqrt{\pi \sigma_2}}{(2^{3/4} V_{\infty} \sqrt{\Theta^* - \Theta_w})} \right) \quad (2.1.99)$$

Зависимость радиуса проводящего канала от напряженности поля и ВАХ разряда, охлаждаемого поперечным потоком газа, приведена на рис. 2.8. Из построенной ВАХ видно, что поперечно-обтекаемый разряд по своим свойствам мало отличается и от продольно-обтекаемого и от разряда, стабилизированного стенками: разряд существует лишь при напряжениях, превосходящих некоторое критическое, зависящее от свойств плазмы (через параметры σ_2 , Θ^*) и свойств охлаждающей среды (через теплопроводность, теплоемкость), ее скорости и температуры. Видно также, что он состоит из падающей и растущей ветвей. При $E > E_c$ (при напряженности, превышающей критическую) могут существовать два типа разряда: с большим и меньшим радиусами токового канала.

Полученные зависимости между параметрами разряда можно

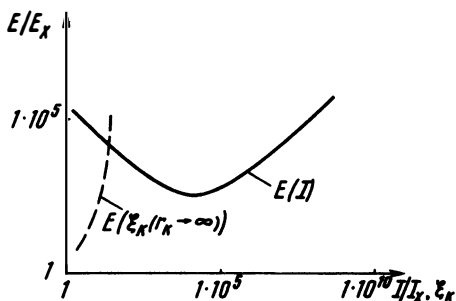


Рис. 2.8. Зависимость напряженности электрического поля в дуге, обтекаемой поперечным потоком охлаждающего газа, от относительного тока (вольт-амперная характеристика разряда) — сплошная линия. Зависимость относительной напряженности от безразмерного радиуса канала — штриховая линия: $I_x = \pi r_k^2 \delta_2 E_x$;

$$E_x = [2^{3/2} v_\infty^2 (\Theta^* - \Theta_w) / (\pi \sigma_2 x^2)]^{1/2};$$

$$\xi_k = r_k v_\infty / x$$

использовать для расчета изогнутых электрических дуг, кругового сечения с большим радиусом кривизны, если считать, что при заданных локальных значениях напряженности электрического поля и скорости набегающего потока все вышеприведенные соотношения сохраняют силу и в каждой точке дуги реализуется режим, соответствующий критической напряженности E_c .

Суммируя результаты, полученные в данном параграфе, можно утверждать, что вид ВАХ определяется характером зависимости проводимости от температуры. Однако количественные характеристики ВАХ задаются условиями, в которых горит разряд (например, наличием стабилизации стенками или различной ориентацией охлаждающего потока для свободногорящей дуги).

Полученные соотношения, устанавливающие связь между током, напряженностью, температурой и радиусом разряда, можно использовать для построения критерияльных соотношений, удобных для обработки экспериментальных результатов, а также при тестировании работы программ при численных расчетах электрических разрядов.

Для различных инженерных расчетов бывает удобно пользоваться коэффициентом теплоотдачи от электрической дуги к охлаждающей среде (или числом Нюсельта), во всех рассмотренных задачах это можно сделать аналогично п. 2.1.3.

§ 2.2. КОНТРАКЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ

Даже стационарные плазменные разряды, горящие в близких условиях, могут отличаться большим разнообразием свойств и форм своего существования. Наблюдаемые формы разряда

могут оставаться стабильными в широком диапазоне изменения внешних управляющих параметров и резко перестраиваться при весьма малом изменении управляющего параметра вблизи какого-то его критического значения. Рассмотренные в предыдущем параграфе задачи наглядно демонстрировали возможность существования различных типов стационарных разрядов. Например, было показано, что из-за неоднозначности ВАХ одному и тому же значению напряжения на разряде могут соответствовать различные распределения температуры и токи (в этом примере напряжение на разряде является внешним управляющим параметром).

В данном параграфе рассмотрим такую важную и для приложений, и для теории проблему, как возможность перехода между несколькими стационарными состояниями при определенном виде воздействия на систему. Конечно, изменение внешнего управляющего параметра и эволюция системы из одного состояния в другое представляет собой нестационарный переходный процесс. Однако в общем случае не будем интересоваться деталями переходного процесса, а остановимся лишь на начальном и конечном стационарных состояниях, свойства которых считаем известными. Проблема перехода связана с ответом на вполне естественный вопрос: «Каким образом природа отбирает единственное состояние из множества возможных при данном внешнем воздействии?». Например, какое из распределений температур и токов реализуется при данном напряжении при неоднозначной ВАХ разряда? Проблема множественности стационарных состояний (неединственность при решении нелинейных задач соответствующих математических моделей) и отбора среди них является достаточно общей для многих задач физики и гидродинамики в частности. Оказывается, что в природе существует механизм, осуществляющий отбор состояний. Таким естественным механизмом является механизм устойчивости тех или иных состояний относительно возмущений, всегда присутствующих в любой системе (например, термодинамические флуктуации).

Для плазмы устойчивость различного рода ее состояний во многих случаях является определяющим фактором для возможности практической реализации этих состояний. Именно исследуя устойчивость, можно определить, какие из состояний и при каких внешних условиях могут быть реализованы. Кроме того, исследование устойчивости иногда позволяет определить те значения внешних параметров, при которых происходит переход из одного стационарного состояния в другие (возникает неединственность решения нелинейной задачи). Пример тому — значение поля E_{c1} и E_{c2} для вольт-амперных характеристик, изображенных на рис. 2.5. Такие характерные значения внешних параметров, при которых в системе возникают новые состояния, в теории устойчивости носят название *бифуркационных параметров*.

2.2.1. Элементарные понятия об устойчивости. Контракция

Дадим качественное определение устойчивости, основанное на поведении случайного возмущения какой-либо величины (например, температуры $\delta T(t)$). Если любые первоначально малые возмущения остаются ограниченными в любой момент времени ($\delta T(t)/\delta T(0) < 1$), то такую систему будем считать *устойчивой*; если $\delta T(t)/\delta T(0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, — *асимптотически устойчивой*. Если же первоначально малое возмущение со временем возрастает ($\delta T(t)/\delta T(0) \rightarrow \infty$), то система является *неустойчивой*. Иногда говорят, что устойчивая система обладает отрицательной обратной связью, неустойчивая — положительной. Следует помнить, что для заключения о неустойчивости системы достаточно¹ показать ее неустойчивость относительно какого-либо типа возмущений, тогда как устойчивость системы относительно определенного вида возмущений вовсе не означает ее устойчивость вообще, так как могут существовать другие неустойчивые возмущения. Следует также помнить, что система, устойчивая относительно малых возмущений, может оказаться неустойчивой относительно больших возмущений. Бывает, что возмущения, приводящие к неустойчивости, должны быть исследованы в рамках системы уравнений, отличной от той, которой подчиняется стационарное состояние. Например, стационарное состояние цилиндрического разряда, стабилизированного стенками, зависит только от радиуса, тогда как неустойчивые возмущения могут зависеть и от других координат.

Возникновение неустойчивостей и переход системы из одного (неустойчивого) стационарного состояния в другое устойчивое стационарное или квазистационарное состояние часто сопровождается сменой симметрии состояния. Например, разряд из цилиндрического переходит в винтовой или же плоский разряд разбивается на шнуры и т. д. Существуют и переходы, в которых тип симметрии не изменяется, а меняется характерный масштаб (иногда такой тип симметрии называют *калибровочной инвариантностью*). Например, плавное неоднородное распределение температуры или концентрации по радиусу сменяется резко неоднородным распределением.

Одним из тесно связанных с устойчивостью и переходом из одного состояния в другое явлением в электрических разрядах является *контракция*. Обычно под контракцией понимается изменение формы разряда при некоторых критических токах, сопровождающееся уменьшением размеров токового канала и возникновением резко неоднородного распределения температуры (концентрации электронов) по сечению канала. Иногда контракция сопровождается образованием нескольких токовых шнуров вместо одного. Явление контракции наблюдается и в плоских, и в кольцевых электрических разрядах и представляется нежела-

тельными для многих технических устройств. Отрицательные свойства контрагированного разряда тесно связаны с его существенной неоднородностью. Отметим, что в некоторых режимах радиус контрагированного разряда может даже возрасти с увеличением тока (такой процесс иногда называют *расконтрагированием разряда*), однако разряд остается существенно неоднородным.

На рис. 2.9, а представлены профили плотности электронов $n_e(r)$ (проводимости $\sigma(r)$) по сечению контрагированного (КР) и неконтрагированного (диффузного — ДР) разрядов. Видно, что для контрагированного состояния характерна существенная неоднородность плотности электронов и распределения проводимости по радиусу. Само явление контракции носит пороговый характер и наступает при критических значениях тока I_c или напряжениях U_c на разряде. Контракция может сопровождаться

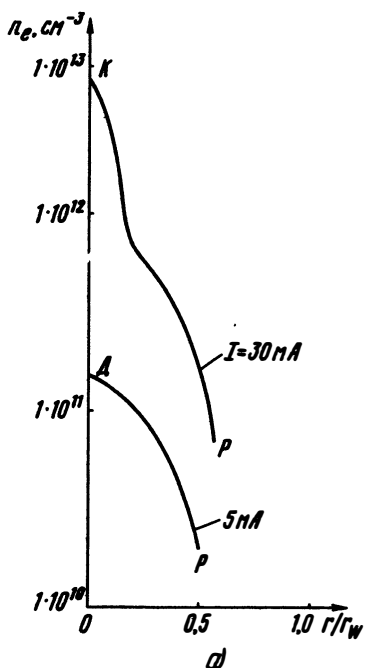


Рис. 2.9, а. Распределение концентрации по радиусу канала тлеющего разряда для диффузного (ДР) и для контрагированного (КР) режимов. Эксперимент выполнен при 20 мм рт. ст., рабочая среда — аргон, радиус трубки — 1,3 см

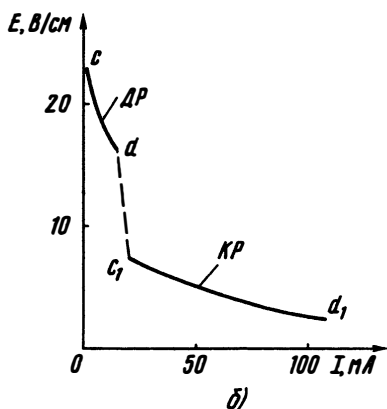


Рис. 2.9, б. Экспериментальная вольт-амперная характеристика тлеющего разряда, соответствующая условиям рис. 2.9, а.

гистерезисными явлениями, как это показано для тлеющего разряда на рис. 2.9, б*.

Существует несколько механизмов контракции — образование одного или нескольких токовых шнуров: неустойчивости в тонких приэлектродных слоях; *пинчевание* — самопроизвольное силовое сжатие разряда под действием радиальной амперовой силы $j_z B_\theta$ при токах, превышающих критический; *тепловая* и *концентрационная контракции*. Именно тепловая и концентрационная контракции наиболее часто проявляются в объемных процессах в термически равновесных и неравновесных разрядах в слабоионизованной плазме, пинчевание характерно для полностью ионизованной плазмы. Здесь рассмотрим подробно только тепловую контракцию, поскольку механизм тепловой контракции является достаточно универсальным для плазм различного состава в термически равновесном и неравновесном положительных столбах разряда.

Механизм концентрационной контракции, хотя и близок к тепловому, существенно зависит от рода и состава плазмы. Явление тепловой контракции связано с нелинейной зависимостью концентрации электронов, а с ней и проводимости от температуры. Проводимость в свою очередь существенно влияет на джоулево тепловыделение, от значения которого зависит локальная температура плазмы. Легко представить себе механизм так называемой *перегревной неустойчивости* [13, 21, 25], приводящей к переходу из неконтрагированного (диффузного) в контрагированное состояние и связанной с растущей зависимостью σ от температуры. При возникновении этой неустойчивости случайное локальное повышение температуры $\delta T(0) > 0$ приводит к локальному росту проводимости (так как в большинстве своем $d\sigma/dT > 0$) и джоулева нагрева $\delta(\sigma E^2)$, что в свою очередь способствует дальнейшему повышению температуры [$\delta T(t) > \delta T(0)$] и возникновению положительной обратной связи.

В литературе иногда считают, что тепловая контракция проявляется только при экспоненциальном росте проводимости от температуры: $\sigma \sim \exp(T)$. Ниже мы покажем, что это не всегда так. Если проводимость в зависимости от температуры возрастет достаточно быстро (быстрее, чем Θ^n , $n > 1$), то уже существует возможность возникновения сильно неоднородных распределений температуры — тепловой контракции.

Развитие перегревной неустойчивости, хотя и объясняет, как переходит разряд из однородного или слабо неоднородного состояния в сильно неоднородное — контрагированное, все же не показывает, почему система может находиться и в однородном и в контрагированном состояниях. Возможность существования

* Рис. 2.9, а, б построен по экспериментальным данным из работы [1] списка дополнительной литературы к гл. II.

однородного и контрагированного состояний тесно связана с различными способами самоорганизации нелинейных открытых систем, каковой и является плазменный разряд.

Концентрационная контракция связана с зависимостью коэффициента ионизации от концентрации и протекает аналогичным образом при возникновении положительной обратной связи между флуктуацией концентрации и источников ионизации (более подробно см. в разделе 2.2.4) и, конечно, зависит от состава плазмы и качественно, и количественно. Дадим описание общих свойств контрагированных разрядов в рамках рассмотренных выше моделей стационарных разрядов.

2.2.2. Устойчивость электрической дуги

На примере электрической дуги покажем, какие из ее состояний являются устойчивыми, а какие — нет. Полученные в п. 2.1.3 соотношения показывают, что ВАХ разряда неоднозначна по напряжению в диапазоне $E_{c1} \leq E \leq E_{c2}$; напряжению E_f соответствуют три тока I_{f1}, I_{f2}, I_{f3} и три различных профиля температуры $\Theta_1(r), \Theta_2(r), \Theta_3(r)$.

Для ответа об устойчивости каждого из состояний следовало бы посмотреть, как развиваются во времени различные случайные возмущения в разряде. Среди возмущений могут быть и такие, которые не изменяют напряжения на разряде и не связаны с внешней электрической цепью, и такие, которые связаны с нею.

Ограничимся лишь вторым случаем, когда возмущения, в которых изменяется напряжение на разряде, должны быть согласованы с внешней электрической цепью. Рассмотрим лишь простейшую ситуацию, когда стационарно горящая электрическая дуга представляет собой нелинейный элемент $U(I)$, включенный в электрическую цепь, изображенную на рис. 2.10. Пусть R — активное сопротивление, включенное последовательно с дугой, ε — э. д. с. цепи, $U(I)$ — падение на дуге при заданном токе I , L — собственная индуктивность всей цепи.

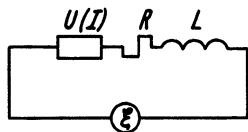


Рис. 2.10. Элементарная схема электрической цепи разряда

Хотя могут существовать и собственные емкости, их мы не будем учитывать.

В стационарном состоянии электрический ток в цепи определяется точками пересечений нагрузочной прямой $\varepsilon - RI$ с ВАХ дуги $U(I)$; т. е. $\varepsilon - RI_0 = U(I_0)$. Исследуем устойчивость стационарного состояния I_0 относительно малого возмущения $\delta I(0) < I_0$ электрического тока. Из-за малости возмущения $\delta I(0)$ при разложении нелинейной функции $U(I_0 + \delta I)$ в ряд Тейлора ограничимся лишь двумя слагаемыми:

$$U(I_0 + \delta I) = U_0(I_0) + (\partial U_0 / \partial I_0) \delta I + \dots$$

Из уравнения электрической цепи, изображенной на рис. 2.10, имеем:

$$L \frac{d(\delta I)}{dt} = \varepsilon - U_0(I_0) - RI_0 - (R_d + R) \delta I,$$

где $R_d = \partial U_0 / \partial I_0$. Поскольку в стационарном состоянии первые три слагаемых правой части в сумме равны нулю, поведение малого возмущения описывается дифференциальным уравнением $\delta I' = - (R_d + R) \delta I / L$, решение которого имеет вид

$$\delta I(t) = \delta I(0) \cdot \exp\left(-\frac{R_d + R}{L} t\right). \quad (2.2.1)$$

В отсутствие внешнего сопротивления поведение первоначального малого возмущения $\delta I(0)$ определяется знаком дифференциального сопротивления R_d ; если $R_d > 0$ (растущая ВАХ), возмущение затухает, если $R_d < 0$ (падающая ВАХ), оно нарастает. Таким образом, в режиме заданного напряжения падающая ветвь ВАХ неустойчива относительно малых возмущений. Однако, как видно из (1), выбирая достаточно большое активное сопротивление, включенное последовательно с дугой, можно обеспечить устойчивую работу и на падающей ветви ВАХ. Условие стабилизации такой неустойчивости можно записать так:

$$R > R_d. \quad (2.2.2)$$

Наличие неустойчивости на падающей ветви ВАХ можно качественно объяснить так: малое увеличение тока относительно исходного стационарного состояния I_0 на падающей ветви ($R_d < 0$) приводит к увеличению тока, протекающего через разряд $I_0 + \delta I > I_0$ и, следовательно, к его более интенсивному нагреву и росту проводимости, что в свою очередь ведет к уменьшению сопротивления разряда и к дальнейшему возрастанию тока ($\delta I(t) > \delta I(0)$). При уменьшении тока $\delta I(0) < 0$ происходит уменьшение суммарного тока ($I_0 + \delta I < I_0$), уменьшение нагрева, рост сопротивления и, следовательно, и дополнительное уменьшение тока: $\delta I(t) < \delta I(0) < 0$ ($|\delta I(t)| > |\delta I(0)|$). Возможность стабилизации на падающей ветви ВАХ последовательно включенным с дугой большим активным сопротивлением объясняется тем, что в этом случае ток в цепи определяется в основном ее активным сопротивлением $I_0 \sim \varepsilon / R$ и система работает в режиме заданного тока, а в режиме заданного напряжения, как видно из рис. 2.5, ВАХ однозначна*.

* Если ВАХ неоднозначна по току, то приведенные рассуждения требуют уточнения.

Таким образом, для рассматриваемых возмущений устойчивость разряда определяется его дифференциальным сопротивлением R_d . Однако будет ли в общем случае разряд устойчив или нет, зависит не только от соотношений между R_d и сопротивлением цепи R , в которой горит разряд, поскольку в разряде могут возникать неустойчивые возмущения, не выходящие во внешнюю цепь и тем самым не меняющие его сопротивления. Воздействовать на них внешней цепью не удастся, т. е. не любые неустойчивости можно стабилизировать внешней цепью.

Что же произойдет с неустойчивым состоянием на падающей ветви ВАХ, если $R_d < 0$, $|R_d| > R$? Ответить на этот вопрос в рамках малых возмущений (линейной теории устойчивости) не представляется возможным. Это теория, как видно из (1), предсказывает неограниченный экспоненциальный рост произвольно малого первоначального возмущения. Как показывают численные исследования устойчивости падающей ветви ВАХ относительно конечных возмущений, в зависимости от их вида система из состояния 2 (см. рис. 2.5) переходит либо в состояние 1, либо в состояние 3.

2.2.3. Тепловая контракция в термически равновесном цилиндрическом разряде

Рассмотрим количественную теорию тепловой контракции в термически равновесном цилиндрическом разряде (*электрической дуге*), связанную с нелинейностью зависимости проводимости от температуры и термическим сопротивлением стенки разрядной камеры. Для практики важно знать условия (ток разряда, напряжение и т. д.), при которых происходит контракция, уметь рассчитать свойства контрагированного разряда. Параметры, определяющие возникновение контракции в дуге и свойства контрагированного разряда, могут быть вычислены аналитически для каждой из моделей проводимости $\sigma(\Theta)$, приведенных в табл. 2.2. Так, токи, определяющие начала контракции, тесно связаны с бифуркационными параметрами ВАХ, о которых говорилось в п. 2.1.3 и 2.2.1. Для более сложных зависимостей $\sigma(\Theta)$ расчет контракции проводится численно.

Аналитические расчеты характеристик контракции проведем для зависимости проводимости от температуры типа модели 3 табл. 2.2. К этой аппроксимации можно прийти двумя путями: либо проводя так называемый процесс *линеаризации экспоненты*, о котором пойдет речь дальше и который имеет существенные ограничения по перепаду температур в разряде, либо аппроксимируя реальную зависимость $\sigma(\Theta)$ выражением вида $\sigma_0 \exp \Theta$. Такая модель справедлива в более широкой области температур в разряде, хотя и не позволяет объяснить все особенности конт-

ракции на падающей ветви ВАХ. Для простоты в этом разделе теплопроводность плазмы будем считать постоянной (это ограничение для качественных выводов несущественно, а количественные можно улучшить, перейдя к переменной Кирхгофа).

Использование аппроксимации $\sigma \sim \exp T$ связано с тем, что в слабоионизованной плазме ($k_B T < Ie$) преобладающими являются столкновения электронов с атомами: $v_{e0} > v_{ei}$. Поэтому в зависимости проводимости от температуры основной вклад дает изменение концентрации электронов, меняющейся по экспоненциальному закону:

$$\sigma \sim n_e \sim \exp \left[-Ie/(2k_B T) \right].$$

Переход от зависимости $\exp \left[-Ie/(k_B T) \right]$ к зависимости $\exp T$ связан с так называемым процессом линеаризации экспоненты. Если перепад температур в плазменном столбе $T(0) - T_w$ мал по сравнению с температурой плазмы на стенке разряда T_w , то можно провести следующее разложение:

$$\exp \left[-Ie/(2k_B T) \right] \cong \exp \left[-Ie/(2k_B T_w) \right] \exp \left[Ie(T - T_w)/(2k_B T_w^2) \right].$$

При этом зависимость проводимости от температуры можно записать в виде

$$\sigma = \sigma_0 \exp \left[(T - T_w) Ie/(2k_B T_w^2) \right]. \quad (2.2.3)$$

Таким образом, задача о распределении температуры в разряде с проводимостью, меняющейся по закону $\exp(\alpha T)$, сводится к решению уравнения энергий (1.32), которое может быть записано в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d\Theta}{d\xi} + 2\Lambda^2 \exp \Theta = 0. \quad (2.2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi &= r/r_w, \quad 2\Lambda^2 = e\sigma_0 I r_w^2 E^2 / (2k_B \lambda T_w^2), \\ \Theta &= Ie(T - T_w) / (2k_B T_w^2). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Граничные условия (1.34) имеют вид

$$\frac{d\Theta}{d\xi} (\xi = 0) = 0, \quad \Theta (\xi = 1) = 0. \quad (2.2.6)$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (4) можно убедиться, что его решением с условием симметрии на оси разряда является соотношение

$$\Theta = 2 \ln \left\{ 2\chi / \left[\Lambda (\xi^2 + \chi^2) \right] \right\}; \quad T(r) = T_w \left(1 + \frac{2k_B T_w \Theta(r)}{Ie} \right). \quad (2.2.7)$$

Неизвестная константа χ , входящая в уравнение (7), определяется из условия (6) при $\xi = 1$:

$$2\chi/[\Lambda(1+\chi^2)] = 1, \chi = (1 \pm \sqrt{1-\Lambda^2})/\Lambda. \quad (2.2.8)$$

Из (7) следует, что в зависимости от параметра Λ — напряженности электрического поля — нелинейное уравнение (4) с граничным условием (6) имеет единственное решение только при одном значении $\Lambda = \Lambda_c (E = E_c)$; при $\Lambda > \Lambda_c$ стационарных решений не существует, а при $0 < \Lambda < \Lambda_c (E < E_c)$ имеются два решения.

Используя (7), легко найти ВАХ разряда из соотношения

$$I = 2\pi E \int_0^{r_w} \sigma(\Theta(r)) r dr = 4I_x/[\Lambda(1+\chi^2)] = 2I_x/\chi.$$

Подставив Λ и χ из (8) и (5), получим

$$E/E_x = (I/I_x)/[1 + (I/2I_x)^2]. \quad (2.2.9)$$

В соотношении (9) для ВАХ использованы следующие характерные значения для напряженности электрического поля E_x и тока I_x :

$$E_x = [4\Lambda T_w^2 k_B / (\sigma_0 r_w^2 I e)]^{1/2}, I_x = \pi r_w^2 \sigma_0 E_x. \quad (2.2.10)$$

Вид вольт-амперной характеристики oab , представленной на рис. 2.11, тесно связан с условиями существования решения (7) (сравните с видом ВАХ на рис. 2.5). Критическое значение

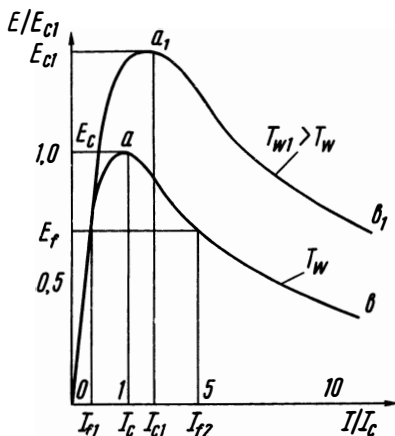


Рис. 2.11. Вольт-амперная характеристика разряда для модельной зависимости проводимости от температуры (2.2.3) для различных значений температуры плазмы на стенке T_{pw}

напряженности электрического поля E_c , выше которой стационарный разряд не существует, находится из (8). При $E > E_c$ решения (7) (стационарная ВАХ разряда) не существует. Из (8) следует, что

$$E_c = E_x. \quad (2.2.11)$$

Видно, что критическое значение электрического поля зависит от температуры стенки T_w , свойств плазмы σ_0 , λ , I и радиуса разрядной камеры r_w .

При $E < E_c$ существуют растущая и падающая ветви ВАХ. На растущей ветви oa значение тока ограничено: $I \leq I_c(E_c) = I_x$ (ток $I_c(E_c)$ определяется критическим значением напряженности). На падающей ветви ab ток может достигать сколь угодно большого значения: $I > I_c$. На основе выводов, полученных в п. 2.2.1, можно заключить, что ветвь ab устойчива, а oa — нет и может быть реализована лишь в режиме заданного тока. Отметим, что так же как и в п. 2.2.1, для построения решения и расчета ВАХ не требуется каких-либо экстремальных принципов, а сама неоднозначность решения есть следствие нелинейности задачи, которая может и вовсе не иметь решений, а может иметь их несколько.

Следует помнить, что линеаризация экспоненты (3) и решение (7) справедливы лишь при небольшом перепаде температур между стенкой и центром разряда: $T(0) - T_w < T_w$. В электрических дугах эти перепады могут оказаться весьма существенными ($T(0) \sim 1 \cdot 10^4$ К, $T_w \sim 300$ К), и необходимо использовать аппроксимации, справедливые в широком диапазоне температур.

Наличие двух ветвей ВАХ для решения (7): растущей с малыми токами и плавным изменением температуры по радиусу дуги и падающей с резко неоднородным профилем температуры и большими токами, — часто используют для объяснения тепловой контракции при экспоненциально возрастающей проводимости $\sigma \sim \exp \Theta$. Считается, что падающая ветвь соответствует контрагированному режиму разряда, а переход с растущей ветви на падающую — режиму контракции. Отметим, что переход в контрагированное состояние происходит здесь без смены симметрии профиля температуры и плотности тока. В пользу вышеназванной трактовки говорит и анализ распределений температуры и тока по сечению канала (сравните распределения температур $\Theta(r, I_{i1}(E_i)/I_c = 0,36)$ и $\Theta(r, I_{i2}(E_i)/I_c = 2,27)$ на рис. 2.6 с распределениями для токов I_{i1} , I_{i2} из рис. 2.11). Более плавное распределение температуры соответствует малому току I_{i1} , а резко неоднородное распределение температуры и тока возникает при больших токах на падающей ветви ab .

Конечно, в решении (7) нельзя явно выделить токовый

канал — ток протекает по всему сечению разрядной камеры, но можно выделить радиус r_k , ограничивающий, например, заданную долю полного тока. Может оказаться, что токовый канал $r_k(I_{i2})$ для большого тока I_{i2} не превосходит токовый канал для меньшего тока I_{i1} ; т. е. $r_k(I_{i2}) < r_k(I_{i1})$. Именно на этом основании ветвь ab и считают ветвью контрагированного разряда.

Только ли экспоненциальный рост тепловыделения с температурой (или экспоненциальное изменение числа частиц от концентрации при концентрационной контракции) приводят к неоднозначности ВАХ разряда и контракции? Рассуждения лишь об экспоненциальном росте источника теплоты от температуры, приводящем к неоднозначности ВАХ и контракции, верны лишь отчасти. Действительно, возникновение контракции тесно связано с неоднозначностью стационарной ВАХ разряда, однако, как демонстрировалось в предыдущем параграфе, неоднозначность ВАХ возникает и при других законах роста проводимости, отличных от экспоненциального. Как было показано, аппроксимация 2б из табл. 2.2 приводила к неоднозначной ВАХ, изображенной на рис. 2.5. В этой модели проводимости при $E_{c1} < E < E_{c2}$ наряду с однородным распределением температуры и плотности тока по сечению канала (профиль $\Theta_1(r)$ на рис. 2.6) возникают неоднородные распределения (профили $\Theta_2(r)$, $\Theta_3(r)$ на рис. 2.6), которые из-за их резкой неоднородности следует отнести к контрагированным состояниям. При этом, как видно из рис. 2.6, неоднородные состояния соответствуют и падающей (согласно п. 2.2.1, неустойчивой) ab , и растущей bc ветвям. Отметим, из рассмотрения решения (7) могло бы сложиться впечатление, что контрагированное состояние соответствует только падающей ветви ВАХ.

Следовательно, на основе анализа решений, полученных в п. 2.1.3 для различных моделей проводимости, можно утверждать, что *контракция в разряде возникает при достаточно быстром росте проводимости*. Более тонкие оценки показывают, что $\sigma(\Theta)$ должна расти быстрее первой степени Θ (конечно, при экспоненциальной зависимости $\exp \Theta$ контракция проявляется более интенсивно, чем при степенном росте проводимости Θ^n). Сам механизм контракции в дугах связан с перегревной неустойчивостью, приводящей при ее развитии к переходу из слабонеоднородного состояния в контрагированное. Переход от неконтрагированного состояния к контрагированному, происходящий при увеличении тока, и обратный процесс при уменьшении тока могут наблюдаться при различных значениях критического тока, т. е. сопровождаться *гистерезисом*. Объяснить появление гистерезиса можно на примере ВАХ, изображенной

на рис. 2.5, когда с изменением нагрузочной кривой происходит переход с ветви oa на ветвь bc и обратно (считается, что ветвь ab как неустойчивая не реализуется). Более подробно возникновение гистерезиса при контракции рассмотрим в п. 2.2.4 и 2.2.5.

Полученные решения позволяют сформулировать *критерии возникновения тепловой контракции в термически равновесных разрядах* (электрических дугах). Необходимым условием, как видим, является более быстрый, чем линейный, рост проводимости в зависимости от Θ : $\sigma \sim \Theta^n$, $n > 1$. Достаточным условием является требование, чтобы электрический ток в разряде превышал критический. Критическое значение тока может быть рассчитано для соответствующей модели проводимости плазмы и соответствующей электрической цепи, в которой находится разряд.

Обсуждавшиеся выше механизмы контракции связаны с объемными процессами в разряде и, в частности, в положительном столбе. Однако в реальных условиях в стационарных разрядах электрическая дуга горит между электродами и общее падение напряжения на дуге складывается из падения в положительном столбе и прикатодных и прианодных падений. Существуют условия, когда контракция в разряде может быть вызвана именно условиями в приэлектродных слоях, а не в объеме разряда. Рассмотрим кратко условия, когда контракция обусловлена процессами в приэлектродном слое.

Чтобы понять причины контракции в приэлектродном слое, необходимо исследовать более детально процессы, протекающие в нем и существенно отличающиеся от процессов в объеме (см. гл. III). Однако простой критерий возникновения контракции в приэлектродном слое можно получить, зная вольт-амперную характеристику слоя $\varphi_c(I)$ в стационарном режиме и пользуясь результатами, полученными в п. 2.2.2. Согласно соотношению (2) разряд становится неустойчивым, если выполнено условие

$$R_{dc} + R_c < 0. \quad (2.2.12)$$

Здесь $R_{dc} = \left(\frac{d\varphi_c}{dI}\right)_0$ — дифференциальное сопротивление приэлектродного слоя, а R_c — активное сопротивление слоя, которое для электрода площадью S и слоя толщиной d можно представить в виде

$$R_c = d/(\sigma S). \quad (2.2.13)$$

Дифференциальное сопротивление определяется видом ВАХ приэлектродного слоя и может быть рассчитано для той или иной модели слоя.

Необходимым условием контракции, как видим, является наличие падающей ветви ВАХ

$$\left(\frac{d\varphi_c}{dI}\right)_0 < 0. \quad (2.2.14)$$

Учитывая, что полный ток в слое связан с плотностью тока соотношением $I = jS$, условие (12) можно записать в другом более удобном для оценок виде*:

$$\sigma \left(\frac{d\varphi_c}{dj}\right)_0 > d \quad (2.2.15)$$

Имеются эксперименты и численные расчеты, которые показывают, что при $j > j_{cr}$ распределенный диффузный разряд переходит в резко неоднородный контрагированный разряд. При этом критический ток зависит от материала катода (если речь идет о неустойчивости в прикатодном слое), его температуры и других характеристик слоя.

Тепловая контракция проявляется и в потоке плазмы, например, на электродах каналов МГД-генераторов и ускорителей плазмы. При этом развитие контракции в приэлектродном слое приводит к переходу из диффузного режима к резко неоднородному распределению тока в слое, однако в ядре потока разряд продолжает оставаться распределенным (диффузным). Существуют различные механизмы, вызывающие развитие контракции в пограничном слое потока плазмы; это и ионизация газа, и нагрев самого электрода, и джоулев разогрев плазмы. Используя подходы, аналогичные приведенным выше, можно рассчитать стационарные ВАХ пограничного слоя и определить условия возникновения контракции. Следует отметить, что в отличие от разрядов в неподвижной плазме при расчете характеристик разряда в турбулентном потоке плазмы следует учитывать турбулентный перенос и в первую очередь турбулентный перенос теплоты.

2.2.4. Контракция в тлеющем разряде

В тлеющих разрядах существует много причин для контракции. Она может вызываться и приэлектродными процессами, и явлениями в объеме. Объемная контракция в свою очередь также может быть вызвана различными механизмами в зависимости от кинетики элементарных процессов, определяющих состав плазмы и перенос частиц и теплоты на стенку. Единый критерий возникновения контракции в тлеющем разряде привести затруд-

* Аналогичный критерий путем более подробного анализа устойчивости прикатодной области разряда получен С. Я. Брониным и В. М. Колобовым (см. [18]).

нительно, однако общим условием для возникновения объемной контракции является нелинейность источников рождения и гибели частиц и объемного тепловыделения. При низких давлениях (при давлениях меньше 10 мм рт. ст.), когда основным механизмом гибели электронов является амбиполярная диффузия, причиной контракции является нелинейность источника ионизации, связанная или с ролью многоступенчатости процессов ионизации, или с неравновесностью функции распределения электронов. При средних и высоких давлениях, когда амбиполярная диффузия становится пренебрежимо малой по сравнению с процессами объемной рекомбинации и устанавливается локальная связь между составом и температурой газа и электронов, существенным становится тепловой механизм контракции, связанный с нелинейностью источников ионизации и тепловыделения.

Более подробно рассмотрим лишь объемную контракцию в стационарном тлеющем разряде, когда нелинейность источника ионизации связана с нагревом газа. Тепловой механизм контракции в тлеющем разряде является более универсальным* и зависит от рода газа лишь количественно. Хотя этот механизм проявляется в виде тех же явлений, что и в дуге (возникновение узких токовых каналов с резко неоднородным распределением концентрации электронов (температуры) по сечению, наличием гистерезиса, существованием критических параметров, определяющих пороги явления, и т. д.), он не может быть объяснен на основе ВАХ стационарного тлеющего разряда, построенной в модели Шотки, и требует более сложного количественного анализа. Действительно, ВАХ тлеющего разряда (см. п. 2.1.1) однозначна, и все приведенные выше рассуждения, связанные с видом неоднозначных стационарных ВАХ, приводящих к контракции, кажутся лишены основания. Из модели Шотки совсем не следует существование наблюдаемых в эксперименте падающих ветвей (ветвь *cd* на рис. 2.9, б).

Для построения количественной модели контракции в тлеющем разряде и расчета свойств контрагированного разряда необходима модификация модели Шотки. Следует помнить, что модель Шотки справедлива, когда амбиполярная диффузия обладает над объемной рекомбинацией. С ростом тока возрастает и число электронов, и в конце концов может наступить режим, в котором преобладающим механизмом потерь электронов станет объемная рекомбинация. В таком режиме концентрация электронов в каждой точке разряда определяется локальным значением отношения коэффициентов ионизации и рекомбинации, см. уравнение баланса числа частиц (2.1.7):

* Универсальность механизма тепловой контракции вовсе не означает, что во всех тлеющих разрядах проявляется именно эта контракция.

$$n_e = v_i/\beta_2 \quad (2.2.16)$$

при $0 \leq r \leq r_k < r_w$.

Соотношение (16) не «работает» возле стенки разрядной трубки, на которой должна обращаться в нуль концентрация электронов $n_e(v_w)$. Концентрация электронов экспоненциально спадает от значения, даваемого соотношением (16), до нуля в узком пристеночном пограничном слое толщины $l_n \sim \sqrt{\beta_2 n_e / D_a} \equiv f(T_a)$, где амбиполярная диффузия снова преобладает над рекомбинацией.

Таким образом, уравнение (16) устанавливает локальную связь между концентрацией электронов и температурой электронов, которая связана с температурой газа T_a . Температура газа может меняться по радиусу гораздо резче, чем изменяется концентрация (как $I_0(r)$ в модели Шотки), поэтому в тот момент, когда внутри объема соотношение (16) начинает выполняться, разряд переходит в новое состояние. Найдем свойства этого нового состояния. Пользуясь соотношением для коэффициента ионизации (1.29), представим концентрацию электронов (16) в виде, удобном для дальнейшего анализа:

$$n_e = v_i/\beta_2 = n_0 \exp[-Ie/(k_B T_e)]. \quad (2.2.17)$$

Здесь $n_0(T_e)$ степенная функция от температуры электронов.

Из уравнения энергии электронов (1.13), считая долю энергии δ_{eff} , передаваемой при столкновении электронов с атомами, постоянной и $T_e \gg T_a$, найдем связь между температурой электронов и температурой тяжелых частиц:

$$T_e = \sqrt{\pi/(12\delta_{\text{eff}})} eET_a/(pk_B Q_{ea}). \quad (2.2.18)$$

В (18) использовано уравнение состояния идеальной слабоионизированной плазмы $p = k_B n_a T_a$, а сечение столкновения электрон—атом Q_{ea} считается постоянным. Исключая посредством (18) температуру электронов из (17), приходим к зависимости концентрации электронов от температуры тяжелых частиц:

$$n_e = n_0 \exp(-T_e/T_a). \quad (2.2.19)$$

Здесь обозначено

$$T_E = IpQ_{ca} \sqrt{12\delta_{\text{eff}}\pi}/E. \quad (2.2.20)$$

Представление концентрации электронов в форме (19) показывает, что небольшие неоднородности в изменении температуры атомов $T_a(r)$ в разряде из-за резкой зависимости $\exp(-T_e/T_a)$ могут приводить к большому изменению концентрации электро-

нов. Аналогично сильные изменения испытывает и проводимость плазмы $\sigma \sim n_e$, а с ней и джоулево тепловыделение.

Найдем теперь решение задачи о распределении температуры атомов по радиусу разряда. Будем считать, что коэффициент теплопроводности атомов постоянен, поскольку в уравнении энергии для атомов (1.14) основной вклад связан с экспоненциальной зависимостью (19). При не слишком больших перепадах между температурой стенки и температурой на оси канала $T(0) - T(r_w) < T(r_w) \equiv T_w$, реализующихся при малых токах в тлеющем разряде, можно провести линеаризацию экспоненты в уравнении (19). После таких преобразований плотность тока можно представить в следующем виде:

$$j = e\mu_e n E \exp\left[\left(\frac{T_a(r) - T_w}{T_w}\right) \frac{T_E}{T_w}\right], \quad (2.2.21)$$

где $n = n_0 \exp(-T_E/T_w)$.

Связь (18) между температурой электронов и атомов по-прежнему остается локальной. Подставляя (21) в источник джоулева нагрева, запишем (1.14) в виде

$$\frac{\lambda_a}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dT_a}{dr} \right) = -\frac{3}{2} \delta_{\text{eff}} k_B (T_e - T_a) n_e v_{ea} = -jE.$$

Если теперь ввести безразмерные переменные

$$\Theta = \frac{T_E (T_a(r) - T_w)}{T_w^2}, \quad (2.2.22)$$

$$2\Lambda_k^2 = T_E e\mu_e n E^2 r_w^2 / (\lambda_a T_w^2), \quad (2.2.23)$$

то уравнение энергии для атомов (1.14) может быть записано в виде, аналогичном уравнению (4) с граничными условиями (6). Воспользовавшись решением (7), выпишем распределение температуры атомов по радиусу слабоконтрагированного тлеющего разряда $\xi = r/r_w$:

$$T_a(r) = T_w + 2 \frac{T_w^2}{T_E} \ln \left[\frac{2\chi}{\Lambda_k (\xi^2 + \chi^2)} \right]. \quad (2.2.24)$$

При этом распределение (24) реализуется, если ток в разряде превышает критический:

$$I > I_{\text{cr}} = 2\pi\lambda_a T_w / E_{\text{cr}}. \quad (2.2.25)$$

Константа χ связана с параметром Λ_k соотношением (8), и решение существует, если $\Lambda_k^2 \leq 1$. Из условия $\Lambda_{\text{cr}}^2 = 1$ находим критическое поле, а следовательно, и критический ток:

$$E_{cr} = \tilde{E} \left\{ \ln \left[e \mu_0 n_0 \tilde{E}^2 r_w^2 / (2 \lambda_0 T_w) \right] \right\}^{-1}, \quad (2.2.26)$$

где $\tilde{E} = I \rho Q_{ea} / (T_w \sqrt{\pi / (2 \delta_{eff})})$.

В отличие от диффузного режима тлеющего разряда — режима Шотки, где ток в разряде не зависит от напряженности электрического поля — в контрагированном тлеющем разряде с ростом тока напряжение на разряде падает. Вольт-амперная характеристика слабоконтрагированного тлеющего разряда может быть представлена в виде

$$I / I_{cr} = E_{cr} / E. \quad (2.2.27)$$

Хотя ток протекает по всему сечению разряда, его распределение не однородно. Если в качестве токового канала выбрать радиус цилиндра, внутри которого протекает половина всего тока, то его можно рассчитать из следующего соотношения:

$$r(0,5) / r_w = \sqrt{I_{cr} / (3I)} \exp \left[\frac{\tilde{E}}{2E_{cr}} \left(1 - \frac{I}{I_{cr}} \right) \right]. \quad (2.2.28)$$

При больших токах в разряде, когда температура во внутренней области (точнее на оси) канала возрастет настолько, что линейаризация экспоненты уже перестает быть оправданной, необходим другой подход. Такой режим будем называть *сильноконтрагированным*. Следуя работе [26], рассмотрим модель, позволяющую рассчитать характеристики сильноконтрагированного тлеющего разряда. Эта модель аналогична каналовой модели электрической дуги, изложенной в п. 2.1.3. Согласно этой модели ток протекает лишь в центральной части канала при $0 \leq r \leq r_k \leq 1$. При этом радиус канала $r = r_k$ является изотермой $T(r_k) = T_k$. Однако в отличие от модели п. 2.1.3 температура на границе токового канала зависит от напряженности электрического поля в разряде (тока) и выбирается из условия изменения показателя экспоненты в выражении (19) не более чем на единицу на длине r_k :

$$\frac{T(0) - T_k}{T(0)} = \frac{T(0)}{T_w} \frac{E}{\tilde{E}}. \quad (2.2.29)$$

Таким образом, в модели сильноконтрагированного тлеющего разряда считается, что

$$j(r) = \begin{cases} e \mu_e n_e (T(0)) E = \text{const}, & 0 \leq r \leq r_k, \\ 0, & r_k < r < r_w. \end{cases}$$

Учтем также, что зависимость коэффициента теплопроводности от температуры может быть представлена в виде $\lambda(T_a) = \lambda_0 (T_a / T_w)^x$, а величины λ_0 и x зависят от рода газа и давления

среды. Используя переменную Кирхгофа, находим по формулам (1.38) и (1.39) распределения температур во внутренней (токопроводящей) и внешней (непроводящей) областях:

$$T_{\pm}(r) = \begin{cases} T_w \cdot \left\{ 1 + \left[\left(\frac{T_k}{T_w} \right)^{(\kappa+1)} - 1 \right] \frac{\ln \xi}{\ln \xi_k} \right\}^{\frac{1}{\kappa+1}}, & \xi_k = \frac{r_k}{r_w} \leq \xi = \frac{r}{r_w} \leq 1, \\ T_w \cdot \left\{ \left(\frac{T_k}{T_w} \right)^{\kappa+1} + [e\mu_e n_e E^2 r_w^2 / (4(\kappa+1)^{-1} \lambda_0 T_w)] (\xi_k^2 - \xi^2) \right\}^{\frac{1}{\kappa+1}}, & \xi_k \geq \xi \geq 0 \end{cases}$$

Из граничных условий (1.40), сводимых к соотношению типа (1.42), находим уравнение, связывающее радиус токопроводящего канала с температурой T_k и напряженностью электрического поля:

$$-[IE(\kappa+1)/(2\lambda_0 T_w)] \cdot \ln \xi_k = \left(\frac{T_k}{T_w} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}}.$$

Используя решения задачи и условие (29), находим температуру на оси разряда $T_a(0)$, температуру T_k на границе токопроводящего канала и радиус контрагированного разряда в зависимости от тока:

$$T_a(0) = T_w [I\tilde{E}/(8\pi\lambda_0 T_w)]^{1/\kappa}, \quad T_k = T_E - T_a(0), \\ \xi_k \equiv r_k/r_w = \exp \left\{ -T_E/[2(\kappa+1)T_a(0)] \right\}.$$

Пользуясь соотношением (1.43), находим ВАХ сильноконтрагированного тлеющего разряда, которая может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{I}{I_x} = \frac{f}{(E/\tilde{E})^{\kappa+2}} \left[\frac{\kappa+2}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{\kappa+2E}}{\sqrt{2}\tilde{E}} f^{-\frac{1}{\kappa+1}} \right) \right]^{\frac{\kappa+2}{2}}, \quad (2.2.30)$$

где

$$I_x = 2\pi e\mu_e n_e \tilde{E} r_w^2, \quad f = \frac{8\lambda_0 T_w}{I_x \tilde{E}} (\kappa+1)^{-\frac{\kappa+2}{2}}.$$

Из (30) следует, что ВАХ сильноконтрагированного тлеющего разряда является падающей, однако в отличие от слабоконтрагированного тлеющего разряда [см. соотношение (27)] происходит более быстрое падение напряжения на разряде с ростом тока, поскольку для различных газов значение показателя κ лежит в диапазоне от 0,5 до 1:

$$I \sim E^{-5/2} \div E^{-3}.$$

Видно, что небольшие изменения тока в канале приводят к экспоненциальному изменению радиуса контрагированного разряда.

Рассмотрим на примере ВАХ, как происходит переход от неконтрагированного тлеющего разряда к контрагированному. На рис. 2.12 ветвь anh соответствует ВАХ тлеющего разряда в модели Шотки ($E_T(I) = \text{const}$, слабое падение на участке nh обусловлено учетом нагрева газа), ветвь cb — падающая ветвь контрагированного разряда. Ветвь anh должна быть ограничена большим током I_h ($I < I_h$): при I_h начинает нарушаться условие преобладания гибели электронов за счет амбиполярной диффузии и в центральной части впервые начинают выполняться соотношения (16).

Для I_h можно получить следующую оценку: $I = \pi r_w^2 v_i \mu_e E_T / \beta_r$. Ветвь cb также не может быть продолжена в области малых токов: $I > I_c$, поскольку соотношение (16) должно выполняться в достаточно большой области $r_k \sim r_w$. На примере построенной ВАХ тлеющего разряда (рис. 2.12) рассмотрим, как по мере увеличения тока в цепи происходит переход от диффузного тлеющего разряда к контрагированному. Будем для простоты считать, что электрическая цепь, нелинейным элементом которой является тлеющий разряд $U(I) = E(I)$, соответствует рис. 2.7, б. Ток, протекающий в разряде, определяется точкой пересечения нагрузочной прямой $e_0 - RI$ с ВАХ тлеющего разряда $E = E(I)$. При малых токах — режимы типа mn_1 — нагрузочная прямая пересекает только ветвь диффузного режима тлеющего разряда $E(I) = E_T = \text{const}$ (точка n_1 на рис. 2.12). Для режима mn_2c

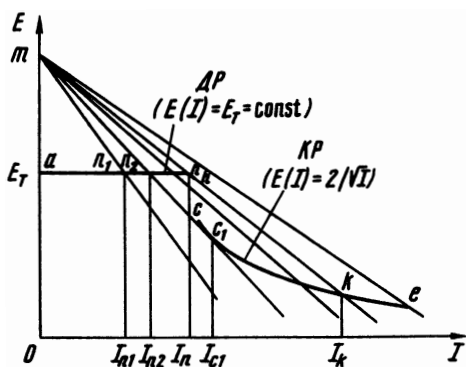


Рис. 2.12. Переход от диффузного (ДР) к контрагированному (КР) режиму при изменении тока в разряде: me , mk , mc , mc_1 , mn_2 , mn_1 — нагрузочные линии

впервые возникают два возможных состояния горения тлеющего разряда: диффузный с током I_{n2} и контрагированный с током I_{c1} . При дальнейшем уменьшении активного сопротивления вплоть до режима mnk разряд может находиться в двух состояниях: диффузном с токами $I_{nj} \leq I_h$ и контрагированном с токами $I_k > I_c$. При последующем уменьшении нагрузочного сопротивления остаются лишь контрагированные режимы тлеющего разряда (типа mb).

Поскольку одновременно, даже там, где это формально возможно, не могут осуществляться и диффузный, и контрагированный режимы горения тлеющего разряда, ток в канале зависит от предыстории процесса. Так, с ростом тока диффузный режим остается вплоть до тока I_n , а затем скачком переходит в контрагированное состояние с током I_k . При уменьшении тока контрагированный разряд сохраняется вплоть до токов I_c и лишь затем переходит в режим диффузионного горения с током I_{n2} . Таким образом, плавное уменьшение активной нагрузки в цепи, где горит разряд, а затем ее плавное увеличение могут приводить к гистерезису, что и наблюдается в эксперименте, результаты которого приведены на рис. 2.9.

Отметим, что даже рассмотренный механизм контракции тлеющего разряда, связанный при больших токах с преобладанием объемных механизмов гибели заряженных частиц по сравнению с амбиполярной диффузией, может в различных газах проявляться по-разному из-за различия в рекомбинации: в инертных газах это двойная рекомбинация; в плазмах, содержащих молекулярные ионы, — диссоциативная рекомбинация; в средах, содержащих электроотрицательные газы (газы, связывающие свободные электроны), — процессы прилипания электронов и т. д. Таким образом, учет конкретных элементарных процессов приводит к тому, что критический ток, определяющий начало возникновения контракции, и зависимость радиуса контрагированного разряда от тока могут отличаться от приведенных выше соотношений, а для получения количественных оценок необходимо выбирать адекватную модель плазмы.

Специфическим образом может проявляться контракция в разрядах с молекулярными газами, у которых поступательные и колебательные температуры отличаются [26]. Однако и здесь основным механизмом, приводящим к контракции, является сильная нелинейность источников частиц и (или) энергии (поступательных или колебательных степеней свобод) в соответствующих балансовых соотношениях.

Здесь мы рассмотрели лишь нелинейность коэффициента ионизации в зависимости от температуры, но, как было отмечено в п. 2.1.2, при повышении степени ионизации плазмы тлеющего

разряда в атомарных газах из-за максвеллизации функции распределения электронов по скоростям начинает сказываться нелинейная зависимость коэффициента ионизации от концентрации электронов $\nu_i(n_e)$. Зависимость ν_i от n_e может приводить к контракции, не связанной с разогревом атомов, или же проявляться на фоне уже развитой тепловой контракции.

Отметим еще один малоисследованный механизм контракции в тлеющем разряде, связанный с перераспределением электрического поля и источника ионизации. Используя связь (2.18) между температурой электронов и электрическим полем E (вернее произведением ET_a), из (1.18) можно получить хорошо известную из эксперимента зависимость:

$$\nu_i \sim \exp\left[-IpQ_{ea}\sqrt{12\delta_{\text{eff}}/\pi}/(ET_a)\right] \sim \exp\left(-\frac{B}{ET_a}\right).$$

Экспоненциальная зависимость коэффициента ионизации от локальной напряженности электрического поля приводит к большой чувствительности источника ионизации к перераспределению электрического поля и к возникновению контракции, связанной в большей мере с перераспределением электрического поля, нежели температуры тяжелых частиц, поскольку в ряде воздействий на тлеющий разряд электрическое поле перераспределяется значительно быстрее (практически мгновенно), чем температура.

Таким образом, как видим, общий простой количественный критерий возникновения контракции в тлеющем разряде для всех газов дать затруднительно. Однако в рамках любой выбранной физической модели разряда этот критерий соответствует переходу из одного режима горения разряда в другой и является бифуркационным параметром для соответствующей разряду математической модели.

Для тлеющего разряда в атомарных газах условия возникновения тепловой контракции могут быть получены на основании выведенных выше соотношений. Во-первых, для выполнения (16) необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство: $n_e r_w^2 > > D_a/\beta_2$, которое можно представить в виде

$$I > I_h = \pi D_a \mu_e E_T / \beta_2.$$

Здесь E_T — напряженность электрического поля в тлеющем разряде. Во-вторых, ток должен превышать значение, определяющее начало включения в действие нелинейной зависимости проводимости и соответствующее началу падающей ветви ВАХ, определяемой уравнением (30). Таким образом, контракция в тлеющем разряде рассматриваемого типа может наступать, если выполнено неравенство

$$I > \max(I_c, I_h).$$

2.2.5. Контракция (расслоение) плоского разряда

Явление контракции достаточно универсально и определяется лишь свойствами самой системы, оно качественно слабо зависит от конкретной геометрии области, в которой горит разряд. Рассмотрим, как происходит контракция в плоском разряде, когда характерный размер области плазмы в одном направлении существенно отличается от размеров в другом.

Пусть плоский термически равновесный электрический разряд горит между двумя электродами, плоскости которых параллельны плоскости xOz и находятся на расстоянии $2b$ друг от друга (рис. 2.13) (анализ контракции в таких условиях был проведен в работе [27]). Плоский разряд можно рассматривать как предел разряда, горящего между двумя кольцевыми электродами достаточно большого радиуса.

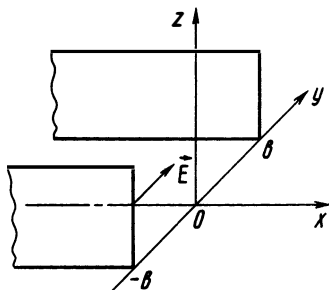


Рис. 2.13. Схема плоского электрического разряда

Будем считать, что продольный размер канала — размер вдоль оси x — значительно превосходит поперечный вдоль оси y , а также что в направлении оси z свойства не изменяются. Уравнение энергии в плоской геометрии для неподвижной плазмы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} + \sigma(T) E^2 = 0. \quad (2.2.31)$$

Пусть электроды поддерживаются при постоянной температуре T_w , а граничные условия для плазмы сводятся к теплообмену на границе $y = \pm b$, $-\lambda \partial T / \partial y = \alpha_w (T - T_w)$. В такой геометрии температура разряда изменяется вдоль и поперек канала различным образом при смене режимов работы: поперечное распределение во всех режимах изменяется лишь количественно, а продольное может меняться и качественно. Из-за различия в характере зависимости температуры $T(x, y)$ от продольной x и поперечной y (по отношению к току) координат будем характеризовать плазму разряда некоторой усредненной по координате y температурой $\bar{T}(x)$, зависящей от x . В уравнении (31) перейдем к переменной Кирхгофа. Домножим (31) на dy , проинтегрируем в пределах от 0 до b (разряд считается симметричным относительно плоскости xOz) и преобразуем последовательно каждое из слагаемых в (31):

$$b^{-1} \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy = \frac{\partial^2}{\partial x^2} b^{-1} \int_0^b \theta(x, y) \cdot dy = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2},$$

$$b^{-1} \int_0^b \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dy = (\lambda/b) \frac{\partial T(b)}{\partial y} - (\lambda/b) \frac{\partial T(0)}{\partial y} = b^{-1} \frac{\partial \theta(b)}{\partial y}.$$

В последнем соотношении учтены условие симметрии при $x = 0$, т. е. $\partial T/\partial x = 0$, $y = 0$, и теплообмен на границе:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y}(y=b) = -\alpha(\bar{\Theta} - \Theta_w), \quad (2.2.32)$$

где $\alpha = \alpha_w b \partial \bar{T} / \partial \bar{\Theta}$ — коэффициент теплоотдачи для переменной Кирхгофа.

Усреднение джоулева тепловыделения позволяет представить его в виде

$$b^{-1} \int_0^b \sigma(T(x, y)) E^2 dy = \sigma(\bar{\Theta}) E^2. \quad (2.2.33)$$

Учитывая (32) и (33), вместо (31) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для усредненной температуры:

$$\frac{d^2 \bar{\Theta}}{dx^2} = \alpha(\bar{\Theta} - \Theta_w) - \sigma(\bar{\Theta}) E^2 \equiv -\frac{\partial v}{\partial \bar{\Theta}}. \quad (2.2.34)$$

Здесь в уравнение (34) введена неизвестная функция $v(\bar{\Theta})$. Видно, что, введя функцию $v(\bar{\Theta})$, можно трактовать (34) как уравнение Ньютона для частицы с единичной массой и «координатой» $\bar{\Theta}$, роль времени играет x . Функция $v(\bar{\Theta})$ в такой интерпретации является аналогом потенциальной энергии, а $\alpha(\bar{\Theta} - \Theta_w) - \sigma E^2$ соответствует потенциальной силе $-\partial v / \partial \bar{\Theta}$, действующей на частицу.

Использование аналогии с механикой позволяет сразу же упростить получение решения уравнения (34). Действительно, при движении частицы в потенциальном поле ее полная «энергия» — «кинетическая» $(1/2)(d\bar{\Theta}/dx)^2$ и «потенциальная» $v(\bar{\Theta})$ — должна сохраняться, т. е. имеет место

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\Theta}}{dx} \right)^2 + v(\bar{\Theta}) = \varepsilon_0 = \text{const}, \quad (2.2.35)$$

$$\text{или } \frac{d\bar{\Theta}}{dx} = \sqrt{(\varepsilon_0 - v(\bar{\Theta}))/2}.$$

Полное решение уравнения (34) с учетом (35) можно записать в виде

$$x + c = \int [(\varepsilon_0 - v)/2]^{-1/2} d\bar{\Theta}. \quad (2.2.36)$$

Простое аналитическое выражение из (36) можно получить лишь в очень частных случаях. Однако можно провести качественные исследования соотношений (35) и (36). Из самого опре-

деления потенциала $v(\bar{\theta})$ следует, что его экстремумы соответствуют нулям функции

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{\theta}} \equiv \sigma(\bar{\theta}) E^2 - \alpha(\bar{\theta} - \theta_w) = 0. \quad (2.2.37)$$

При использовании аналогии с движением частиц это эквивалентно обращению в нуль потенциальной силы: $-\partial v/\partial \bar{\theta}$. Если воспользоваться графиком зависимости $v(\bar{\theta})$ (рис. 2.14, а), решение уравнения (37) легко найти графически. Точки $\bar{\theta}_i$ находятся на пересечении графика функции $\sigma(\bar{\theta})E^2$ с прямой $\alpha(\bar{\theta} - \theta_w)$. На рис. 2.14, а изображено поведение функции $\sigma(\bar{\theta})E^2$ в зависимости от напряженности электрического поля и качественный вид изменения «потенциальной» энергии $v(\bar{\theta})$ при данном значении напряженности электрического поля. Из рисунка виден

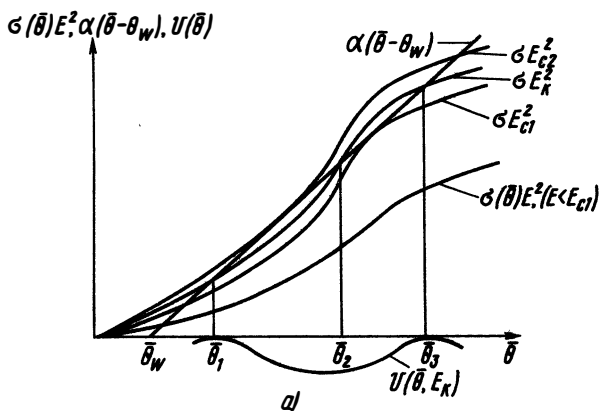


Рис. 2.14, а. Качественный график зависимости правой части и различных ее составляющих уравнения (2.2.37) от температуры (переменной Кирхгофа)

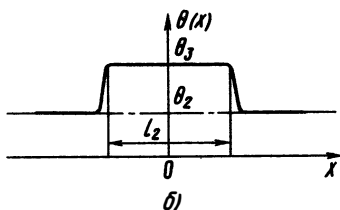


Рис. 2.14, б. Распределение температуры по длине канала

различный характер поведения нулей функции $dv/d\bar{\Theta}$. Напомним, что в механике в отсутствие силы частица движется с постоянной скоростью. В нашей задаче условие $dv/d\bar{\Theta} = 0$ соответствует однородному, не зависящему от координаты x распределению температуры по длине канала $\bar{\Theta}_j = \text{const}$.

Из рис. 2.14, *a* следует: при $E < E_{c1}$ существует лишь одно значение однородной температуры $\bar{\Theta}_1$, близкое к температуре стенки $\bar{\Theta}_1 \sim \Theta_w$, а при $E > E_{c2}$ — однородное распределение с температурой $\bar{\Theta}_3$. В диапазоне изменений электрического поля $E_{c1} < E < E_{c2}$ могут существовать три однородных распределения $\bar{\Theta}_1 < \bar{\Theta}_2 < \bar{\Theta}_3$. При критических (бифуркационных) значениях поля E_c — два однородных распределения: при $E = E_{c1}$ $\bar{\Theta}_2$ и $\bar{\Theta}_3$ совпадают, при $E = E_{c2}$ совпадают $\bar{\Theta}_1$ и $\bar{\Theta}_2$. Как же понимать физическую ситуацию, когда при заданном E (заданной разности потенциалов между электронами) существует три однородных состояния $\bar{\Theta}_1 < \bar{\Theta}_2 < \bar{\Theta}_3$? Очевидно, в каждой точке одновременно «присутствовать» три различных температуры не могут. Тривиальный ответ состоит в том, что в зависимости от условий реализуется только одно из состояний. Однако возможна и такая картина, когда в части канала находится слой с высокой температурой $\bar{\Theta}_1$, окруженный областями низкой температуры $\bar{\Theta}_1$. Эти области отделяются друг от друга переходной зоной, в которой температура непрерывно изменяется от $\bar{\Theta}_1$ до $\bar{\Theta}_3$ и толщина которой мала по сравнению с характерным размером канала. Возникающие в слоистом разряде переходные зоны аналогичны пограничным слоям в гидродинамике, но образуются не на стенке, а внутри канала, отделяя один слой от другого. В таком слоистом разряде в области с более высокой температурой $\bar{\Theta}_3 > \bar{\Theta}_1$ и большая плотность тока $j_3 = \sigma(\bar{\Theta}_3) E > j_1$, так как проводимость плазмы — монотонно возрастающая функция температуры. Для бесконечно протяженного в направлении оси x канала распределения температуры и плотности тока представлены на рис. 2.14, *б* (центр канала совмещен с центром горячего слоя).

На рис. 2.15 изображена ВАХ такого разряда, которая состоит из ветвей *oa*, *ab*, *bc*, соответствующих однородным состояниям в разряде, и ветви *de* контрагированного слоистого разряда.

Рассмотрим, как происходит образование слоистого разряда — контракция. При $E < E_{c1}$ существует лишь однородное состояние с низкой температурой $\bar{\Theta}_1$ и плотностью тока $j = \sigma(\bar{\Theta}_1) E$. Так как с ростом E возрастает $\bar{\Theta}_1(E)$ (см.

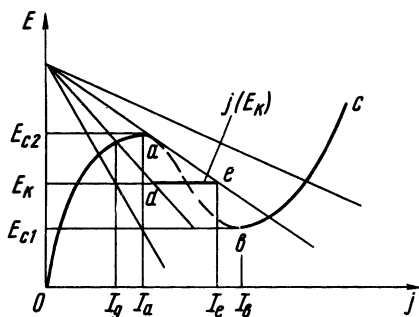


Рис 2.15. Вольт-амперная характеристика разряда

рис. 2.14, а), то растут проводимость и плотность тока, а следовательно, и полный ток: $I_1 = \sigma(\bar{\Theta}_1) El$ (l — размер канала вдоль оси x). Однородному состоянию $\bar{\Theta}_1(E)$ соответствует ветвь oa ВАХ. При $E_{c1} < E < E_{c2}$ может быть три однородных состояния $\bar{\Theta}_1(E) < \bar{\Theta}_2(E) < \bar{\Theta}_3(E)$, которым соответствуют три плотности тока: $j_1 = \sigma(\bar{\Theta}_1) E < j_2 = \sigma(\bar{\Theta}_2) E < j_3 = \sigma(\bar{\Theta}_3) E$. Току I_2 соответствует ветвь ab , току I_3 — ветвь bc . Ветвь ab является падающей с отрицательным дифференциальным сопротивлением ($dE/dI < 0$) и, как показано в п. 2.2.2, в общем случае она неустойчива. Ветви oa , bc — устойчивы. При больших E существует только однородное состояние с высокой температурой и проводимостью.

Как же ведет себя однородный разряд на неустойчивой падающей ветви ab ? Можно показать, что он переходит из неустойчивого однородного в устойчивый неоднородный (разряд контрагируется), состоящий из горячего слоя длиной l_r с однородной (за исключением тонкой переходной области) температурой $\bar{\Theta}_3$ и током $I_r = \sigma(\bar{\Theta}_3) El_r$ и холодного слоя, окружающего этот горячий, с температурой $\bar{\Theta}_1$ и током $I_x = \sigma(\bar{\Theta}_1) E(l - l_r)$. Образование слоистого неоднородного разряда из неустойчивого однородного происходит вследствие развития процесса тепловой контракции. ВАХ контрагированного разряда определяется уравнением

$$I(E) = \sigma(\bar{\Theta}_1(E))(l - l_r) E + \sigma(\bar{\Theta}_3(E)) El_r, \quad (2.2.38)$$

и соответствует прямой de , изображенной на рис. 2.14, б, на которой $E_k = \text{const}$, постоянны $\bar{\Theta}_1$, $\bar{\Theta}_3$, $\sigma(\bar{\Theta}_1)$, $\sigma(\bar{\Theta}_3)$ и, следовательно, ток изменяется лишь за счет изменения ширины горячего слоя l_r (уменьшения доли холодного слоя $l - l_r$).

Поле в контрагированном разряде E_k можно определить из следующего соображения. Поскольку в однородном состоянии $d\bar{\theta}/dx = 0$, $\theta(x) = \bar{\theta}_1 = \text{const}$, $\theta(x) = \bar{\theta}_3 = \text{const}$, согласно (35) можно считать $\varepsilon_0 = v(\theta_1) = 0$, так как уровень отсчета потенциала можно выбрать произвольно. Взяв теперь соотношение (35) при $\bar{\theta}_3$, где $d\bar{\theta}/dx = 0$, а $\varepsilon_0 \equiv 0$ по условию выбора, имеем:

$$v(\bar{\theta}_3, E_k) = \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_3} [\sigma(\bar{\theta}) E_k^2 - \alpha(\bar{\theta} - \theta_w)] d\bar{\theta} = \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} [\sigma E_k^2 - \alpha(\bar{\theta} - \theta_w)] d\bar{\theta} + \int_{\bar{\theta}_2}^{\bar{\theta}_3} [\sigma E_k^2 - \alpha(\bar{\theta} - \theta_w)] d\bar{\theta} = 0. \quad (2.2.39)$$

Равенство (39) возможно, если подынтегральное выражение знакопеременно. Из рис. 2.14, а видно, что в области $\bar{\theta}_1 < \bar{\theta} < \bar{\theta}_2$ подынтегральное выражение в (39) отрицательно, а в области $\bar{\theta}_2 < \bar{\theta} < \bar{\theta}_3$ — положительно, равенство $v(\bar{\theta}_3, E_k) = 0$ возможно лишь при вполне определенном значении электрического поля E_k (напряжения), которое и есть поле контрагированного неоднородного разряда.

Из вида ВАХ следует, что при изменении нагрузочной кривой может возникнуть переход из однородного неконтрагированного разряда в неоднородный контрагированный. При этом плавное увеличение и затем уменьшение тока сопровождаются гистерезисом. Действительно, увеличивая ток монотонно от нуля, движемся по растущей ветви ВАХ oa однородного состояния. Однако небольшое превышение предельного тока $I_a \equiv I_{c1}$ приводит к переходу на ветвь de , соответствующую контрагированному неоднородному разряду, ток в котором I_k может существенно превышать ток в однородном разряде $I_{c1} \gg I_a$. Дальнейшее увеличение тока соответствует режиму контрагированного состояния. Если теперь уменьшать ток, то движение по контрагированной ветви происходит вплоть до тока $I_d = I_{c2}$, а затем небольшое изменение нагрузочной характеристики приводит к переходу на ветвь однородного разряда oa ($I_{a1}/I_a < 1$).

Если продолжать двигаться по контрагированной ветви ВАХ вплоть до тока I_e , будем наблюдать увеличение ширины (радиуса) горячего l_r слоя вплоть до перехода в область однородного высокопроводящего разряда (ветвь bc , ток $I_{b1} > I_e$). Этот процесс — увеличения области однородности — можно рассматривать как процесс расконтрагирования разряда. Можно представить себе распределение, состоящее из нескольких горячих

слоев, разделенных холодными. Такой разряд соответствовал бы режиму с несколькими шнурами и в общем случае был бы неустойчивым, так как шнуры с параллельными токами стремились бы стянуться в один.

§ 2.3. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РАЗРЯДЫ (КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ)

Стационарные электрические разряды часто сопровождаются множеством нестационарных явлений: регулярных колебаний, флуктуацией и т. п. Рассмотрим лишь некоторые квазистационарные разряды, которые содержат или периодические колебания (периодические по пространству или бегущие волны), или образования, движущиеся относительно стационарного фона с постоянной скоростью. В разрядах последнего типа профиль некоторой величины, например концентрации электронов, хотя и перемещается, но остается подобным себе. Такие квазистационарные структуры в движущейся системе координат являются стационарными.

В гидродинамике такие явления хорошо известны. К ним относятся волны горения и детонации, ударные волны, уединенные волны на поверхности жидкости и т. д. Многие свойства квазистационарных явлений в разряде аналогичны гидродинамическим явлениям, но есть и ряд специфических, не имеющих аналога.

В данном параграфе остановимся на простейших квазистационарных явлениях в электрических разрядах: *стратах в газовом разряде, токовой конвекции в разряде низкого давления в магнитном поле, винтовой форме электрической дуги во внешнем или собственном магнитном поле*. Перечисленные выше структуры далеко не исчерпывают перечень нестационарных процессов в электрических разрядах, а скорее демонстрируют некоторые общие закономерности. Многие из отмеченных закономерностей имеют общефизическую природу и проявляются в областях, далеких от электрического разряда, в химической кинетике, биологии, астрофизике и т. д. Как правило, возникновение квазистационарных структур тесно связано с различного рода неустойчивостями стационарных состояний. Плазменные системы являются открытыми системами, они обмениваются с окружающей средой массой, импульсом и энергией (иногда только одной из отмеченных величин). Основные неустойчивости в низкотемпературной плазме [25] можно связать с флуктуациями источников частиц, импульса или энергии.

Одной из форм проявления неустойчивости, которые возникают в неравновесной плазме, является расслоение первоначально однородного плазменного столба на слои с разной концентрацией, температурой и напряженностью электрического поля. Это явление получило название *стратификация плазмы*, а сами

слои с различными свойствами называются стратами. Страты могут быть *стационарными* и *движущимися*. Другим типом неоднородностей, который возникает вследствие неустойчивости в стационарных цилиндрических разрядах, являются *винтовые структуры*. В п. 2.3.2, 2.3.3 кратко рассматривается появление винтовых структур, связанных с возникновением и развитием токовой конвекции.

В гидродинамике хорошо известна неустойчивость, связанная с неоднородностью плотности среды в поле сил тяжести — *неустойчивость Рэля—Тэйлора*: например, неустойчивость тяжелой жидкости над легкой или конвективная неустойчивость слоя, подогреваемого снизу, когда более нагретая легкая жидкость стремится всплыть, а холодная — опуститься.

В плазме кроме неустойчивости Рэля—Тэйлора может возникать своеобразная конвекция, не связанная с силой тяжести ρg , а вызванная воздействием на проводящую среду силы Ампера $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E} \times \mathbf{B} = e\mu_e n_e \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Здесь роль переменной плотности играет переменная проводимость среды $\sigma(r) = e\mu_e n_e(r)$. Возникающие при этом движения плазмы получили название *токовой конвекции*. Токовая конвекция может возникать как во внешних, так и в собственных магнитных полях и по-разному проявляться в зависимости от свойств плазмы и того неоднородного фона, на котором она развивается.

В плазме газового разряда конвекция развивается из-за неоднородности концентрации электронов, возникающей из-за баланса между объемной ионизацией и гибелью за счет амбиполярной диффузии на стенку. В электрических дугах конвекция обусловлена неоднородностью температуры $T(r)$ и, конечно, проводимости $\sigma(r)$, возникающей из-за баланса между объемным джоулевым тепловыделением и выносом теплоты на стенку за счет теплопроводности.

В электрических дугах развитие токовой конвекции приводит к тому, что первоначально цилиндрическая поверхность, отделяющая хорошо проводящую плазму от холодного, непроводящего газа, превращается в винтовую поверхность. Следует отметить, что винтовые формы разряда, связанные с развитием конвекции, возникают и в высокотемпературной плазме, где проводимость среды можно считать бесконечной и столб плазмы отделен от вакуума границей раздела плазма—вакуум, положение которой регулируется самой плазмой. Однако сила Ампера $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}$, перераспределяясь, может приводить к тому, что разряд из цилиндрической формы переходит в винтовую, которая является в определенном диапазоне параметров устойчивой. Здесь в развитии и поддержании винтовой формы основную роль играет баланс сил гидродинамического давления и магнитного давления (амперовой силы). Однако эту форму разряда мы не рассматриваем (см., например, [13]). Винтовые

формы разрядов как в высокотемпературной, так и низкотемпературной плазме широко наблюдаются в экспериментах. Отметим, что винтовые структуры возникают в плазме твердого тока в полупроводниках.

2.3.1. Страты в положительном столбе

В тлеющем разряде однородность вдоль тока, как предполагалось в п. 2.1.2, сохраняется не всегда; в некоторых режимах разряд самопроизвольно разбивается на слои (стационарные или перемещающиеся) поперек тока. Эти слои, в которых периодически изменяется концентрация электронов, температура плазмы и электрическое поле, получили название страт. Страты наблюдаются в плазмах различных газов — атомарных, молекулярных, электроотрицательных — и в широком диапазоне параметров разряда: тока I , давления p и радиуса трубки r_w . Рассмотрим лишь самые элементарные механизмы, приводящие к образованию и перемещению страт по положительному столбу газового разряда. Более подробно теория страт описана в книгах [15, 21, 22], на рис. 2.16 представлено распределение флуктуаций концентрации и электрического поля в стратах малой амплитуды.

В качестве наиболее элементарного механизма рассмотрим положительный столб, распределение концентрации и температуры электронов в котором определяются уравнениями (1.9), (1.12). Температура электронов по радиусу, согласно п. 2.1.2, считается однородной, а концентрация в модели Шотки изменяется по закону, даваемому соотношением (1.20). Рассмотрим теперь область вблизи оси разряда, где все величины можно считать однородными по радиусу и равными их значениям на оси разряда: $n_e = n_e(0) = \text{const}$. Найдем, как ведут себя малые отклонения от однородных величин: δT_e , δn_e , δE , и при этом будем считать, что отклонения могут изменяться только вдоль оси разряда и зависеть от времени. В уравнении баланса числа электронов (1.2.15) учтем лишь наиболее существенные нелинейности, связанные с сильной зависимостью коэффициента

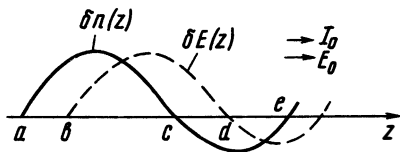


Рис 2.16 Качественное распределение флуктуаций концентрации электронов (δn) и электрического поля (δE) по длине страты в тлеющем разряде

ионизации от температуры. Проводя линеаризацию уравнения (1.7), получим

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} = n_e \cdot v_{it} \cdot \delta T_e, \quad (2.3.1)$$

где $v_{it} = \partial v_i(T_e)/\partial T_e$.

Неоднородность концентрации электронов должна приводить к диффузионному переносу зарядов (пренебрегаем термодиффузией и считаем, что ионы покоятся):

$$\delta j = \delta j_z = e D_e \frac{\partial \delta n_e}{\partial z} + \mu_e e n_e \delta E.$$

Однако из условия сохранения полного заряда

$$\operatorname{div}(\delta j) = \frac{\partial}{\partial z}(\delta j) = 0, \delta j = e D_e \frac{\partial \delta n_e}{\partial z} + e \mu_e n_e \delta E = 0, \quad (2.3.2)$$

следует, что возникновение неоднородности концентрации электронов приводит к возникновению электрического поля, направленного на ликвидацию возникшего тока:

$$\delta E = - (D_e / (n_e \mu_e)) \frac{\partial \delta n_e}{\partial z} = - \frac{k_B T_e}{e n_e} \frac{\partial \delta n_e}{\partial z}. \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим теперь баланс энергии для возмущений. Возмущение джоулева нагрева можно выразить через возмущения концентрации электронов и электрического поля:

$$\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) = \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_0 + \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{j} = - \frac{j_0 k_B T_e}{e n_e} \frac{\partial \delta n_e}{\partial z}. \quad (2.3.4)$$

Если в уравнении энергии электронов (1.2.20) учитывать лишь перенос теплоты за счет теплопроводности ($q_T = -\lambda_e \partial \delta T_e / \partial z$), то после линеаризации оно выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \lambda_e \frac{\partial \delta T_e}{\partial z} - \delta E \cdot j_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_e \frac{\partial \delta T_e}{\partial z} - \frac{j_0 k_B T_e}{e n_e} \delta n_e \right) = 0. \quad (2.3.5)$$

Уравнение (5) можно один раз проинтегрировать. Если константу интегрирования положить равной нулю, то приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta T_e = [j_0 k_B T_e / (e \lambda_e n_e)] \delta n_e. \quad (2.3.6)$$

Эволюция малых отклонений температуры и концентрации электронов определяется системой уравнений (1), (6). Дифференцируя уравнение (1) по z и исключая производную $\partial \cdot \delta T_e / \partial z$ из соотношения (6), можно получить одно уравнение для δn_e :

$$\frac{\partial^2 \cdot \delta n_e}{\partial z \partial t} = [v_i j_0 / (e \lambda_e T_e)] \delta n_e \quad (2.3.7)$$

Среди различных решений уравнения (7) остановимся только на решении типа бегущей волны:

$$\delta n_e/n_e = f(\xi = z - vt), v > 0.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial t} = v \frac{\partial}{\partial \xi}$, для искомой функции из (7) получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = -K^2 f, \quad (2.3.8)$$

где

$$K = v_i I j_0 / (e v \lambda_e T_e) = \text{const}. \quad (2.3.9)$$

Решение уравнения (9) представляет собой волну с постоянной амплитудой

$$f = A \cos(K\xi + \varphi_0). \quad (2.3.10)$$

Здесь A — амплитуда волны, а φ_0 — фаза, определяемая начальными условиями задачи. Поскольку принято $v > 0$, то решение (10) соответствует волне, бегущей от анода к катоду газоразрядной трубки.

Физическую природу движения страт можно понять из рис. 2.14. Предположим, что возникло случайное возмущение концентрации электронов, такое, что $\delta n_e > 0$ в области ac и $\delta n_e < 0$ в области ce . Из-за сохранения полного тока $\delta j_t = 0$ возникает электрическое поле $\delta E_z \sim \delta \delta n_e / \delta z$. Это поле в области bd , где $\delta \delta n_e / \delta z < 0$ положительно. Здесь, очевидно, происходит усиление внешнего электрического поля $E = E_0 + \delta E_z > E_0$, а в области ds , где $\delta \delta n_e / \delta t > 0$, значение δE_z — отрицательно и происходит ослабление внешнего электрического поля.

Усиление электрического поля сопровождается усилением джоулева тепловыделения в области ds , а ослабление внешнего поля — ослаблением джоулева тепловыделения. Усиление джоулева тепловыделения ведет к росту температуры — усилению ионизации и перемещению максимума возмущения концентрации (точки b) к катоду.

Скорость движения страт v можно оценить, исходя из следующего соображения: если концентрация электронов, согласно (10), изменяется периодическим образом, то по длине трубки укладывается целое число длин волн, т. е. $l_\tau = l n$. Поскольку волновое число K связано с длиной волны и скоростью движения страт соотношением

$$K^2 \equiv (2\pi/l)^2 = 4\pi^2 n^2 / l_\tau^2 = e E_0 I v_i / [(k_B T_e)^2 v],$$

где n — целое число, находим скорость движения страт:

$$v = e E_0 I l_\tau^2 v_i / [4\pi^2 (n k_B T_e)^2]. \quad (2.3.11)$$

Конечно, представленные здесь соображения не описывают стационарных страт ($v = 0$), образующихся в коротких трубках, страт, в которых существенную роль играют метастабильно возбужденные атомы, и страт в электроотрицательных газах, но они показывают, что причиной возникновения страт являются нелинейные процессы, связанные с рождением частиц, появлением собственных электрических полей, перераспределением джоулевого нагрева и возникновением положительной обратной связи. Подчеркнем еще раз, что образование страт тесно связано с неустойчивостью тлеющего разряда. Страты могут возникать и в плоских разрядах. Специфический вид страт возникает в плазме инертных газов с присадкой паров щелочных металлов в магнитном поле — так называемые «магнитные страты» (см. [21] и [6] из дополнительной литературы к гл. II).

2.3.2. Конвекция в термически неравновесном разряде в продольном магнитном поле

Рассмотрим, как возникает конвекция в цилиндрическом тлеющем разряде ($T_e > T_a$) в продольном внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 . Считается, что \mathbf{B}_0 коллинеарно току, текущему вдоль оси и разряда. Поскольку при такой ориентации электрического тока j_0 и магнитного поля B_0 амперова сила $\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0$ равна нулю, характеристики такого разряда не должны сильно отличаться от характеристики тлеющего разряда без магнитного поля. Для простоты рассмотрим ситуацию, когда положительный столб описывается в модели Шотки (2.1.2). Единственное, в чем может проявляться воздействие магнитного поля такой ориентации, так это в изменении коэффициента электронной диффузии в направлении, перпендикулярном магнитному полю — диффузии по радиусу разряда. Как известно, магнитное поле снижает коэффициент диффузии, в магнитном поле он может быть представлен в виде $D_e(B) = D_e(0)/(1 + \Omega^2)$, где $D_e(0)$ — коэффициент электронной диффузии в отсутствие магнитного поля, Ω — параметр Холла. Если поместить газоразрядную трубку в соленоид и изменять магнитное поле, поддерживая электрический ток постоянным, то можно обнаружить немонотонное изменение напряжения на разряде.

На рис. 2.17, a^* , представлена зависимость от магнитного поля B напряжения $U(B)$ на разрядной трубке при наличии магнитного поля, отнесенного к напряжению $U(0)$ на разряде в отсутствие магнитного поля. Видно, что при небольших значениях магнитного поля напряжение на разряде падает

* Рис 2.17, a построен по экспериментальным данным работы [10] из списка дополнительной литературы к гл. II.

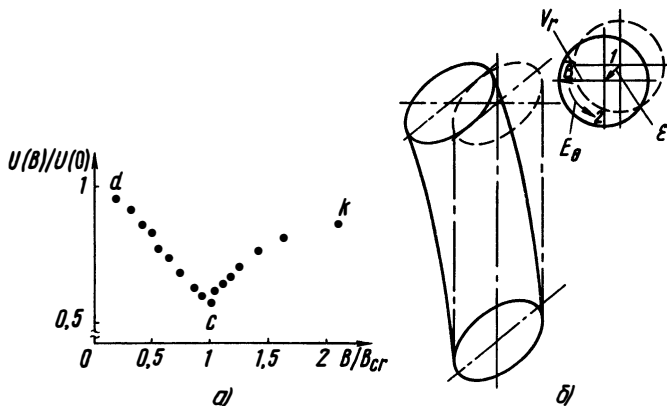


Рис 2.17, а Зависимость $U(B)/U(0)$ — напряжения горения разряда, от продольного магнитного поля: $U(0)$ — напряжение горения в отсутствии магнитного поля, B_{cr} — критическое значение магнитного поля, соответствующего развитию неустойчивости

Рис 2.17, б. Качественная картина возникновения конвекции в тлеющем разряде в продольном магнитном поле

(ветвь dc), а затем начинает возрастать (ветвь ck).

Падение напряжения на разряде с ростом B при $B < B_{cr}$ объясняется уменьшением с ростом магнитного поля коэффициента диффузии электронов D_e и, следовательно, уменьшением гибели заряженных частиц $D_e(B) n_e/r^2$, т. е. падением сопротивления разряда R , так как ток постоянен ($I = \text{const}$).

Это явление — увеличение напряжения горения тлеющего разряда с ростом продольного магнитного поля — тесно связано с так называемой *неустойчивостью Кадомцева—Недоспасова* и возникновением токовой конвекции в разряде. Качественно возникновение конвекции можно себе представить следующим образом. Пусть в разряде, первоначально имеющем цилиндрическую симметрию, произошло случайное смещение плазмы от положения равновесия, указанное на рис. 2.17, б стрелкой 1. Самопроизвольные случайные смещения в разряде возникают всегда, но одни из них (устойчивые) затухают, а другие (неустойчивые) могут нарастать. Из-за того что высокопроводящий столб плазмы окружен холодной (практически не ионизованной) средой, электрический ток из проводящей области в непроводящую протекать не может. На границе раздела сред происходит накопление электрических зарядов и возникает электрическое поле E_θ , направленное по стрелке 2. Наличие такого поля обеспечивает отсутствие азимутального тока, втекающего в непроводящую область.

Таким образом, случайное смещение плазмы от положения

равновесия способствует возникновению азимутального электрического поля. Азимутальное электрическое поле при наличии осевого магнитного поля B_z вызывает радиальный дрейф плазмы со скоростью $v_r = E_\theta B_z$, усиливающий первоначальное смещение. Конечно, существуют и явления, тормозящие усиление смещения (например, вязкость), однако если магнитное поле превосходит некоторое критическое значение B_{cr} , развивается конвекция. Само это явление получило название неустойчивости Кадомцева—Недоспасова, или токово-конвективной неустойчивости тлеющего разряда.

Радиальный дрейф плазмы при $B > B_{cr}$ ведет к увеличению потока заряженных частиц на стенку, где они гибнут. Усиление гибели электронов за счет конвекции на стенку приводит к увеличению сопротивления положительного столба и росту напряжения на разряде.

Возникновение радиального дрейфа приводит к возникновению радиального тока $j_r \sim n_e v_r$ и, следовательно, амперовой силы $j_r B_z$ в азимутальном направлении. Азимутальная сила приводит плазму в движение. Аналогичное движение возникает и в осевом направлении, поэтому в общем случае распределение концентрации электронов в тлеющем разряде определяется уравнением

$$n_e = n_0 J_0(2,405r/r_w) \exp [i(m\theta - kz + \omega t)]. \quad (2.3.12)$$

Здесь J_0 — функция Бесселя, m — целое число.

Поверхности постоянного уровня электронов представляют собой винтовые поверхности с числом заходов винта m и шагом $\lambda = 2\pi/k$, которые вращаются вокруг оси симметрии (в данном случае вокруг оси z) с угловой скоростью ω . Квазистационарная токовая конвекция, возникающая при развитии неустойчивости Кадомцева—Недоспасова в первоначально цилиндрическом разряде, демонстрирует, как меняется симметрия структуры.

Первоначальный цилиндрический разряд, если считать его бесконечно протяженным в направлении оси z , обладал симметрией относительно вращения на произвольный угол относительно оси z и произвольного сдвига в направлении z . Возникшая винтовая структура разряда (12) обладает симметрией относительно поворота на дискретный угол $2\pi/m$ и относительно сдвига в направлении z на шаг винта $\lambda = 2\pi/K$. Как видим, развитие неустойчивости привело к тому, что в первоначально квазианизотропной среде возникла структура с определенной дискретной симметрией. Спрашивается: как природа отбирает шаг винта λ из множества возможных? Этот отбор также тесно связан и с видом начального возмущения на исходном стационарном фоне, и с устойчивостью уже самих винтовых структур.

Как отмечалось выше, токовая конвекция возникает не только в плазме твердого газового разряда, но и в плазме твердого тела, где имеются аналогичные условия. В полупроводниках винтовые структуры, образующиеся на линейной стадии развития неустойчивости Кадомцева—Недоспасова, удается наблюдать визуально [13, 21].

2.3.3. Токовая конвекция в термически равновесных разрядах во внешнем и собственном магнитных полях

Экспериментально было обнаружено, что при больших токах цилиндрическая дуга, стабилизированная охлаждаемыми стенками, самопроизвольно теряет устойчивость и переходит из цилиндрической формы в винтовую (рис. 2.18). Переход от цилиндрического разряда к винтовому наблюдается и при увеличении внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси разряда. Винтовую форму принимают и свободногорящие дуги, если магнитное поле превышает некоторое критическое значение.

Винтовая форма электрической дуги есть результат проявления токовой конвекции в собственном и (или) внешнем магнитном полях. Во внешнем магнитном поле и небольших электрических токах в дуге, когда собственным магнитным полем можно пренебречь по сравнению со внешним, наличие внешнего поля, параллельного току, не приводит к возникновению амперовой силы. Однако стоит разряду случайно изогнуться (магнитное поле, созданное внешним источником, своей ориентации при этом не изменяет), как появится составляющая тока, ориентированная перпендикулярно магнитному полю (рис. 2.18). Причем в разных точках изогнутой дуги составляющая тока, перпендикулярная магнитному полю, имеет разную ориентацию. Появление токов, перпендикулярных магнитному полю, приведет

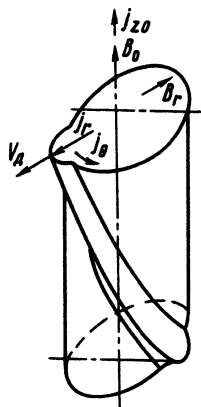


Рис. 2.18. Качественная картина возникновения конвекции в электрической дуге в продольном магнитном поле

к возникновению амперовой силы, скручивающей разряд. Поскольку изгиб может происходить не только в плоскости рисунка, а в пространстве, в общем случае возникает винтовое возмущение. Возникновение амперовой силы приводит к движению среды — возникновению токовой конвекции. Конвекция изменяет перенос теплоты. Меняется и вся структура разряда: искажается симметричный профиль температур, линия электрического тока приобретает винтовую форму.

В собственном магнитном поле амперова сила $j_{z0}B_{00}$ хоть и отлична от нуля, но всегда направлена по радиусу к центру разряда и приводит лишь к увеличению давления в центре разряда, не нарушая его симметричность. Однако из-за изгиба разряда, аналогичного изображенному на рис. 2.18, возникают составляющая тока j_r и составляющая магнитного поля B_r , которые, взаимодействуя с исходным магнитным полем B_{00} и током j_{z0} , создают амперовы силы, действующие в осевом $\sigma_z = j_r B_{00}$ и азимутальном $G_0 = B_r j_{z0}$ направлениях. Под действием амперовых сил начинается движение плазмы — возникает конвекция. Конвекция в свою очередь приводит к асимметрии в переносе теплоты и к образованию винтовой формы дуги. При винтовой форме дуги напряжение возрастает (при том же полном токе) из-за того, что увеличивается эффективная длина дуги — винтовая линия, соединяющая анод и катод, больше прямой, соединяющей электроды. Отличие от токовой конвекции в плазме тлеющего разряда связано с тем, что конвекция в тлеющем разряде проявляется на фоне переноса частиц, а в дуге на фоне переноса теплоты наряду с кондуктивным возникает и конвективный перенос.

Если в начальный момент граница разряда $T(r_k = T^*, r = r_k)$ имела цилиндрическую форму, то при развитии конвекции изотерма $T(r, \theta, z, t) = T^*$ принимает форму винтовой поверхности. В простейшем случае вблизи критического значения магнитного поля $B \sim B_{cr}$ эта изотермическая поверхность имеет вид бегущей волны ионизации:

$$r = r_{k0} + \varepsilon \exp [i(m\theta + kz - \omega t)]. \quad (2.3.13)$$

На основе качественных оценок найдем условие, при котором в электрической дуге во внешнем магнитном поле возникает токовая конвекция, т. е. найдем значение критического магнитного поля B_{cr1} . Рассмотрим эволюцию случайного возмущения границы проводящей зоны — области, где производная проводимости по радиусу максимальна: $(\partial\sigma/\partial r)_m = (\partial\sigma/\partial T_0)(\partial T_0/\partial r)_m$, $T_0(r)$ — стационарный профиль температуры. Пусть, как показано на рис. 2.18, возникло случайное смещение T поверхности

$(\partial\sigma/\partial r)_m$ от своего стационарного значения со скоростью v_r . Возникновение конвективного движения v_r приводит к возникновению конвективного переноса теплоты $q_k \sim \rho c_p v_r \partial T_0 / \partial r$, а конвективный перенос теплоты возмущает температуру в рассматриваемой области на $\delta T \sim v(r^2/\kappa) \cdot \partial T_0 / \partial r$ (здесь κ — коэффициент температуропроводности). Поскольку высокопроводящая область столба дуги окружена слабопроводящей (практически непроводящей) зоной, на границе зоны проводимости образуются поверхностные электрические заряды. Возникновение зарядов порождает такие электрические поля δE , при которых электрические токи должны обратиться в нуль:

$$\delta j_z = \sigma_0 \delta E_z + [\partial \delta_0 / \partial T_0] \delta T \cdot E_0 = 0. \quad (2.3.14)$$

Таким образом, возмущение температуры связано с возмущением электрического поля. Поверхностный заряд создает возмущение и азимутального электрического поля $\delta E_\theta \sim \delta E_z$, следовательно, возникает азимутальный электрический ток $\delta j_\theta = \sigma_0 \cdot \delta E_\theta \sim \sim -(\partial \sigma_0 / \partial T_0) \delta T \cdot E_0$. Поскольку для термически равновесной плазмы $\partial \sigma_0 / \partial T_0 > 0$, а $\delta T < 0$ (так как происходит охлаждение за счет конвективного уноса теплоты), азимутальный ток направлен против часовой стрелки (за плоскость чертежа на рис. 2.3, а). Возникновение такого азимутального тока приводит к амперовой силе $\delta j_\theta \cdot B_0$, разгоняющей поток плазмы и усиливающей первоначальное смещение. Движение потока со скоростью v_r приводит к возникновению тормозящей за счет трения силы $\eta \Delta v_r \sim \eta v_r / r^2$.

Оценим ускорение потока под действием возникших сил:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\eta v_r}{r^2} + \delta j_\theta B_0 = -\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} \frac{E_0 B_0 r^2}{\kappa} + \frac{\eta}{r^2} \right) v_r.$$

Учитывая падение температуры по радиусу $\partial T_0 / \partial r < 0$, введем

комплекс $\sigma_r = (r/\sigma_0) \frac{\partial \sigma_0}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial r}$ и получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = (\eta/r^2 \rho) \{ [(\sigma_r \sigma_0 E_0 B_0 r^3 / (\kappa \eta))] - 1 \} v_r, \quad (2.3.15)$$

Когда первое слагаемое в правой части уравнения (15) превысит единицу, случайное возмущение скорости будет усиливаться. Таким образом, критическое значение магнитного поля находим из условия

$$B_{cr2} = \kappa \eta / (\sigma_r \sigma_0 r^3 E_0). \quad (2.3.16)$$

Если ввести ток в разряде $I = \pi r_k^2 E_0 \sigma_0$, то критическое зна-

чение поля можно представить и в другом эквивалентном виде:

$$B_{cr2} = \chi_B \pi k \eta / (\sigma_r r_k J). \quad (2.3.17)$$

Соотношения (16), (17) дают правильную функциональную связь с определяющими параметрами, но для получения его точного количественного значения требуется достаточно тонкий анализ исследования устойчивости. Поэтому в уравнении (17) введем безразмерный коэффициент χ_B , который можно уточнить из эксперимента, или из числовых расчетов.

Более детальный анализ условий возникновения токовой конвекции проведен в работах [21, 29], где показано, что неустойчивыми при одинаковых направлениях \mathbf{B}_0 и \mathbf{j}_0 являются правовинтовые возмущения. Критическое магнитное поле определяется из условия перехода от затухания к росту возмущений. Критерий возникновения токово-конвективной неустойчивости аналогичен соотношению (17). Там же найдено значение коэффициента $\chi_B = 1545$. В данном случае видим, что оценки по порядку величины могут сильно отличаться от строгих вычислений.

Обсудим теперь некоторые принципиальные отличия токовой конвекции от конвекции в поле сил тяжести. Если сопоставить эти два явления, то апериодически неустойчивые правовинтовые возмущения токовой конвекции $B > B_{cr2} (E_0 \parallel \mathbf{B}_0)$ соответствуют возмущениям в слое тяжелой жидкости, находящимся над легкой, а левовинтовые — возмущениям в слое легкой жидкости, находящейся под тяжелой. Известно, что в первом случае по границе, отделяющей легкую (верхнюю) жидкость от тяжелой (нижней), могут распространяться внутренние волны. Что же является аналогом внутренних волн токовой конвекции? Можно показать, что таким аналогом как раз и являются левовинтовые возмущения границы высокопроводящей электрической дуги (типа 13), возникающие, если $B > B_{cr2}$ или $I > I_{cr2}$.

Однако в токовой конвекции, развивающейся в электрической дуге, есть и принципиальное отличие от классической неустойчивости слоев переменной плотности в поле сил тяжести. В классическом случае существует либо одна ситуация (например, тяжелая жидкость сверху и апериодическая неустойчивость), либо другая (легкая жидкость сверху и слабозатухающие внутренние волны). В столбе плазмы случайным образом могут возникать одновременно и лево-, и правовинтовые малые возмущения. Пока эти возмущения малы (в теории — линейное приближение), они не взаимодействуют друг с другом. Их развитие зависит от соотношения критических полей B_{cr1}, B_{cr2} .

Во многих случаях возникает ситуация, когда $B_{cr1} < B_{cr2}$. Если $B < B_{cr1} < B_{cr2}$, то и лево-, и правовинтовые малые возму-

щения затухают. При $B_{cr1} < B < B_{cr2}$ правовинтовые (большие и малые) возмущения затухают, затухают и малые левовинтовые, но левовинтовые возмущения с амплитудой, превосходящей некоторую критическую, становятся незатухающими и их стационарная амплитуда тем больше, чем больше магнитное поле $\delta B = B - B_{cr1} > 0$. При возрастании магнитного поля $B > B_{cr2} > B_{cr1}$ периодические левовинтовые возмущения конечных значений могут начинать взаимодействовать с аperiodически нарастающими правовинтовыми возмущениями. Если бы такого взаимодействия не было, рост аperiodических возмущений ничем бы не ограничивался. Так, при конвекции в поле сил тяжести возмущения тяжелой жидкости над легкой аperiodически нарастают во времени, пока слои жидкости не поменяются местами и не возникнет состояние устойчивого равновесия. В электрической дуге именно наличие обоих типов возмущений и нелинейное взаимодействие периодических колебаний конечной амплитуды и аperiodических возмущений приводят к установлению квазистационарной винтовой формы разряда. Для B_{cr1} можно получить следующую формулу:

$$B_{cr1} = B_{cr2} \chi \rho (\kappa - \eta/\rho)^2 / (\kappa \eta),$$

где χ — числовой коэффициент.

Г л а в а III. ПРИЭЛЕКТРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

И пройдут любые тени
при огне,
Странных очерки видений
на стене.
А Блок

Как было показано в гл. II, в области положительного столба электрической дуги или тлеющего разряда плазма электронейтральна и прохождение тока обеспечивается электрическим полем. В положительном столбе существует равновесие между образованием и гибелью зарядов и подводом и отводом энергии. Вследствие установившихся условий плотность заряженных частиц и их температура практически не меняются (или меняются, но очень медленно) вдоль положительного столба, и главной причиной прохождения тока оказывается, как и в обычном проводнике, разность потенциалов.

В приэлектродных слоях условия перераспределения заряда и теплоты совсем иные. Здесь еще не успевает установиться локальное термодинамическое равновесие, электронейтральность оказывается нарушенной — и плотность, и температура компонент плазмы могут существенно изменяться в зависимости от

расстояния от электрода. Особенностью приэлектродной области является то, что она должна обеспечить переход электрического тока из плазмы в твердое тело. Дальше речь пойдет только о твердых электродах, хотя помимо специально изготовленных жидких электродов на поверхности твердого электрода (катода и анода) вследствие разогрева могут образоваться жидкие катодные и анодные пятна. Процессы в этих пятнах играют важную роль и в поддержании тока в разряде, и при переходе от тлеющего разряда к дуговому: например, плотность тока в катодном пятне может достигать $1 \cdot 10^{11}$ А/м² и существенно превышать плотность тока с других частей электрода. Поэтому механизм переноса заряда через границу раздела твердое тело—плазма отличается от переноса зарядов в объеме плазмы и требует специального изучения.

Часто у электродов можно выделить области с различными преобладающими эффектами. Так, электронейтральность нарушается в слое толщиной порядка радиуса Дебая. Этот слой объемного электрического заряда вблизи электрода получил название *ленгмюровского*. Локальное термодинамическое равновесие между температурой и составом плазмы устанавливается на расстоянии порядка длин свободного пробега частиц. Такой приэлектродный слой получил название *кнудсеновского*. Поэтому для нахождения тонкой структуры приэлектродного слоя необходимо привлекать кинетическую теорию. Во многих плазменных задачах имеет место следующее соотношение между толщинами ленгмюровского l_L (дебаевского r_D) и кнудсеновского l_K слоев, а также расстоянием l_s между электродами: $l_L \sim r_D < l_K \ll l_s$.

В данной главе рассматриваются механизмы эмиссии электронов из твердого тела (§ 3.1), наиболее характерные процессы в приэлектронных областях стационарных электрических разрядов (§ 3.2) и структуры кнудсеновских слоев (§ 3.3, 3.4).

§ 3.1. МЕХАНИЗМЫ ЭМИССИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Теория электронной и ионной эмиссии составляет большой раздел физики твердого тела [15, 17, 30—35]. В данном параграфе рассмотрим лишь процессы, связанные с выходом электронов из металла в плазму, ограничиваясь основными механизмами: *термоэлектронной эмиссией*, *автоэлектронной* (включая совместное действие термоавтоэлектронной эмиссии) и *вторичной эмиссией*. В общем случае для расчета эмиссии необходимо решать самосогласованную задачу: находить токи эмиссии, определяемые температурой электрода и электрическим полем на его поверхности, зависящими в свою очередь от токов, протекающих через электрод. В простейшем случае при исследовании механизмов эмиссии температура электрода и электрическое поле на его поверхности считаются заданными.

Известно, что электроны в металле можно разделить на *локализованные* и *свободные*. Рассмотрим самую простую модель свободных электронов в твердом теле, представляя последнее как прямоугольную потенциальную яму шириной $l = V^{1/3}$ (V — объем тела), в которой находится электрон. Понятие «свободные» в отношении к электронам означает, что они могут занимать любой энергетический уровень, начиная от наименьшего ϵ_{\min} вплоть до самого высокого ϵ_F , называемого *уровнем Ферми*. Может показаться, на первый взгляд, непоследовательным представление об электронах, находящихся в потенциальной яме, где, как известно, энергетические уровни дискретны, и предположение о непрерываемом заполнении всех уровней. Это противоречие легко снимается, если оценить разность между двумя соседними уровнями $\delta\epsilon$. Для твердого тела реальных размеров (скажем, 1 см) получим $\delta\epsilon = h^2/(8m_e l^2) \sim 1 \cdot 10^{-15}$ эВ = $= 1 \cdot 10^{-34}$ Дж, что составляет пренебрежимо малую величину по сравнению с энергией Ферми: $\epsilon_F \sim 1 \div 3$ эВ.

Более строгая теория твердого тела базируется на представлении о так называемой *зонной структуре*, когда области непрерывного энергетического спектра отделены друг от друга энергетическими щелями (*запрещенными зонами*). При этом свободным электронам в металле соответствует частично заполненная зона, называемая *зоной проводимости*. Известно, что свободные электроны в твердом теле представляют собой вырожденный (квантовый) идеальный газ, частицы которого подчиняются статистике Ферми—Дирака. Вероятность обнаружить частицу с данной энергией ϵ определяется соотношением

$$f(\epsilon, T) = 1 / \{ [\exp(\epsilon - \mu_e) / (k_B T)] - 1 \}. \quad (3.1.1a)$$

Поскольку имеется связь между энергией свободных электронов и их волновым числом \mathbf{k} (импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$): $\epsilon = \hbar^2 k^2 / (2m_e)$, исходя из (1a), можно записать распределение по волновым числам (импульсам):

$$f(k) = \left\{ \left[\exp\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} - \mu_e\right) / (k_B T) \right] - 1 \right\}^{-1} \quad (3.1.1b)$$

Здесь μ_e — *химический потенциал* электронов в твердом теле. Зная плотность состояний (число частиц, приходящихся на интервал энергии [31])

$$g(\epsilon) = 4\pi (2m_e/h^2)^{3/2} \sqrt{\epsilon}, \quad (3.1.2)$$

можно определить химический потенциал и условия нормировки функции распределения на число электронов в единичном объеме:

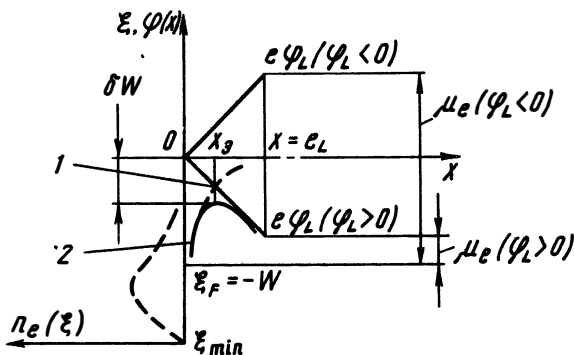


Рис. 3.1. Распределение электрического потенциала на границе раздела твердое тело—плазма (вакуум). Сплошной линией показаны: 1 — треугольный потенциальный барьер без учета сил изображения, 2 — потенциальный барьер с учетом сил изображения. Штриховой линией показано распределение электронов по энергиям $n_e(\epsilon)$ в твердом теле

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon = n_e.$$

Напомним, что для типичных металлов (W, Fe, Ni и др.) концентрация электронов составляет величину порядка $1 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, для полуметаллов (Bi, As) — $1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Для полупроводников (Ge, Si и др.) концентрация электронов может изменяться в зависимости от температуры в пределах от $1 \cdot 10^{10}$ до $1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

При нулевой температуре ($T = 0$) функция распределения (1a) превращается в ступенчатую функцию:

$$f(\epsilon, T = 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_F \equiv \mu_e(0), \\ 0, & \epsilon > \epsilon_F. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Используя (3) для химического потенциала при $T = 0$, получаем

$$\mu_e(0) \equiv \epsilon_F = h^2 [3n_e / (8\pi)]^{2/3} (2m_e)^{-1}.$$

При $T \neq 0$ имеет место следующая зависимость химического потенциала от температуры:

$$\mu_e(T) \cong \epsilon_F \left[1 - \frac{(\pi k_B T / \epsilon_F)^2}{12} \right]. \quad (3.1.4)$$

Обычно, когда для электронов, находящихся в твердом теле, используют модель потенциальной ямы, за нулевой энергетический уровень принимают энергию электронов, вышедших из твердого тела (рис. 3.1). В результате каких процессов электроны могут выйти из твердого тела? Для нагретых электродов основ-

ным механизмом, обеспечивающим выход электронов из металла, является термоэлектронная эмиссия. При наличии внешнего электрического поля электроны даже из холодного металла могут выходить в окружающую среду за счет автоэлектронной эмиссии. При совместном действии обоих факторов процесс называют *автотермоэмиссионным*. Электроны из металла могут выходить и за счет получения энергии от падающих на электроды частиц. Эти частицы — ионы, внешние электроны, фотоны, атомы, — обладая достаточной энергией и передавая ее электрону, позволяют ему выйти из потенциальной ямы. Такую эмиссию называют вторичной.

3.1.1. Термоэлектронная эмиссия

Для того чтобы электрон с наименьшей энергией мог выйти из металла в окружающую среду — подняться на нулевой уровень согласно схеме рис. 3.1, он должен иметь кинетическую энергию порядка глубины потенциальной ямы ϵ_{\min} . При термоэлектронной эмиссии необходимую дополнительную энергию $\delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_{\min}$ электрон может получить при столкновении с другими электронами. Из распределения электронов по энергиям (рис. 3.1) видно, что электронов с энергией, превышающих энергию Ферми, мало, а для выхода электронов, находящихся в потенциальной яме на энергетических уровнях ниже уровня Ферми, нужны большие значения энергии, поэтому при термоэлектронной эмиссии в основном уходят электроны с уровня Ферми. Работу, которую необходимо затратить для перевода электрона из потенциальной ямы в среду вне твердого тела, называют *работой выхода*. Работа выхода равна разности между глубиной потенциальной ямы ϵ_{\min} и энергией Ферми: $W = \epsilon_{\min} - \epsilon_F$. Так как при $T = 0$ ϵ_F совпадает со значением химического потенциала электронов в металле, то при отсчете энергии от нулевого уровня, соответствующего электронам вне твердого тела, для $T > 0$ имеется следующая связь между химическим потенциалом и работой выхода:

$$\mu(T) = -W. \quad (3.1.5)$$

Пользуясь распределением Ферми—Дирака (16), легко подсчитать ток эмиссии (поток электронов q_n в направлении оси x , которую считаем перпендикулярной поверхности электрода):

$$j_x = -eq_n = -[2e/(8\pi^3)] \iiint \frac{\hbar k_x}{m_e} \left[1 + \exp \frac{W + \hbar^2 k_x^2 / (2m_e)}{k_B T} \right]^{-1} dk_x dk_y dk_z. \quad (3.1.6)$$

Однако выражение для тока термоэлектронной эмиссии можно получить и другим путем. Вне металла электроны невырождены и подчиняются статистике Больцмана с вероятностью нахождения в данном энергетическом состоянии:

$$f_B(\varepsilon) = \exp\left(\frac{\mu_e - \varepsilon}{k_B T_e}\right). \quad (3.1.7)$$

Здесь

$$\mu_e = k_B T_e \ln \left\{ n_e h^3 / \left[2 (2\pi m_e k_B T_e)^{3/2} \right] \right\} \quad (3.1.8)$$

— химический потенциал электронов вне металла, T_e — их температура.

Для системы «электроны проводимости металла и свободные электроны вне металла», находящейся в локальном термодинамическом равновесии, должны выполняться условия:

$$T_e = T, \mu_e = \mu. \quad (3.1.9)$$

Подставляя (5) и (8) в уравнение (9), получим для плотности электронов вне металла следующее соотношение:

$$n_e = 2 (2\pi m_e k_B T / h^2)^{3/2} \exp[-W / (k_B T)]. \quad (3.1.10)$$

В термодинамическом равновесии потоки отсутствуют, поэтому поток q_n термоэлектронной эмиссии электронов из твердого тела в точности должен быть равен потоку q_- электронов из плазмы в твердое тело.

Поток электронов из плазмы q_- легко найти, помня, что вблизи поверхности твердого тела они имеют максвелловское распределение по скоростям и поэтому $q_- = n_e(0) v_{ec} / 4$, где $v_{ec} = [8k_B T_e / (\pi m_e)]^{1/2}$. Таким образом, ток термоэлектронной эмиссии

$$j_s^{\uparrow} = e q_n = e n_e(0) v_{ec} / 4 = (e/2) (2\pi m_e k_B T / n^2)^{3/2} \times \\ \times \left(\exp(-W / k_B T) \sqrt{8k_B T / \pi m_e} \right) \equiv A_0 T^2 \exp[-W / (k_B T)]. \quad (3.1.11)$$

Константа A_0 , входящая в (11), не зависит от температуры:

$$A_0 = 4\pi m_e e k_B^2 / h^3, A_0 = 120,4 \text{ A} / (\text{см}^2 \cdot \text{K}) = \\ = 1,204 \cdot 10^4 \text{ A} / (\text{м}^2 \cdot \text{K}). \quad (3.1.12)$$

Соотношение (11) в литературе называют формулой Ричардсона—Дэшмена (Richardson—Dashmen). В общем случае следует учесть, что часть электронов, подходящих к поверхности, может отражаться от нее коэффициентом отражения r и проходить с коэффициентом прохождения $d = 1 - r$.

Коэффициент отражения зависит от энергии электрона, угла между направлением его скорости и нормалью к поверхности.

Используя усредненный по всем энергиям коэффициент отражения d_c , ток термоэлектронной эмиссии следует рассчитывать по соотношению

$$j_{\tau}^{\tau} = AT^2 \exp \left[-W/(k_B T) \right], \quad (3.1.13)$$

в котором константа $A = A_0 d_c$ учитывает отражение электронов от барьера.

Приведем значения работы выхода (В) для различных металлов:

Cs	1,81	Ta	4,12
Na	2,35	Al	4,25
Ba	2,49	Mo	4,30
U	3,30	Fe	4,31
Zr	3,90	Ga	4,4
Ti	3,95	Ni	4,41
Nb	3,99	W	4,54
V	4,12	Re	5,00

Аналогично тому, как подсчитывается поток частиц из твердого тела в окружающую среду (6), можно подсчитать поток энергии, переносимой электронами:

$$q_{\tau} = \frac{2\hbar}{8\pi^3 m_e} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} k_x (W + \varepsilon(k)) \left[1 + \exp\left(\frac{W + \hbar^2 k^2 / (2m_e)}{k_B T} \right) \right]^{-1} \times \\ \times (1 - r) dk_x. \quad (3.1.14)$$

Интегрирования в соотношении (14) приводят к следующему выражению для потока теплоты из электрода в плазму:

$$q_{\tau}(0) = -(j_{\tau}^{\tau}/e) (2k_B T + W). \quad (3.1.15)$$

Из (15) следует, что поток теплоты, уносимый электронами из твердого тела (знак минус в формуле), складывается из потенциальной энергии (работы выхода) W и кинетической $2k_B T$. Отметим, что во многих случаях поток теплоты, переносимый электронами эмиссии (15), может во много раз превышать потери теплоты за счет излучения с электрода: $q_{\tau} \sim T_{\tau}^4$.

3.1.2. Автоэлектронная эмиссия

Другим механизмом, обеспечивающим выход электронов из электрода, является «вытягивание» электронов из металла электрическим полем — автоэлектронная эмиссия. Автоэлектронная эмиссия может происходить и при нулевой температуре электрода, поэтому ее иногда называют *холодной*. Рассмотрим сначала случай, когда электрод находится при нулевой температуре.

При приложении внешнего электрического поля, направленного по нормали к поверхности металла, появляется треугольный

потенциальный барьер на границе раздела твердое тело—плазма (вакуум), изображенный на рис. 3.1.

Штриховой линией изображена потенциальная энергия электрона вне металла $\epsilon = 0$ в отсутствие электрического поля.

Наличие постоянного внешнего поля и созданного им треугольного потенциального барьера (линия 1 на рис. 3.1) облегчает выход электронов из металла. Действительно, из квантовой механики известно, что электроны с энергией, меньшей энергии потенциального барьера, имеют отличную от нуля вероятность прохождения через этот барьер. В общем случае кроме появления треугольного потенциального барьера при наличии внешнего поля следует учесть еще и изменение потенциального барьера $e^2/(4x)$, связанное с ролью сил зеркального изображения, возникающих вследствие электростатической индукции при удалении вышедшего электрона от поверхности металла (x — расстояние от поверхности металла). Поэтому суммарная потенциальная энергия электрона вне твердого тела (на рис. 3.1 она изображена сплошной линией 2) складывается из энергии взаимодействия с наведенными зарядами и энергии во внешнем поле E :

$$-e\varphi = -[e^2/(4\epsilon_0 x)] - eEx. \quad (3.1.16)$$

Соотношение (16) позволяет легко оценить снижение потенциального барьера δW в точке его экстремума (при $x = x_0$), где $d\varphi/dx = 0$ и $x_0 = [e/(4\epsilon_0 E)]^{1/2}$:

$$\delta W = -\sqrt{e^3 E/\epsilon_0}. \quad (3.1.17)$$

Коэффициент прохождения $d(\epsilon, E) = 1 - r$ электронов с энергией ϵ через потенциальный барьер зависит от формы барьера (от напряженности поля E). Коэффициент прохождения можно рассчитать из решения квантовомеханической задачи о прохождении частицы через потенциальный барьер [31]. Так, в том случае, когда длина волны электрона значительно меньше характерной ширины потенциального барьера, можно, используя квазиклассическое приближение для волновой функции электрона, получить следующее выражение для коэффициента прохождения:

$$d(\epsilon, E) = C \exp\left(-2 \int_{x_1}^{x_2} k_x(x) dx\right). \quad (3.1.18)$$

Здесь

$$k_x = \{2m_e [\epsilon + eE_x + e^2/(4\epsilon_0 x^2)]/\hbar^2\}^{1/2}, \quad (3.1.19)$$

x_1, x_2 — значения координаты x , при которых импульс электрона

(волновое число $k_x = p_x/\hbar$) обращается в нуль: $k_x(x_j) = 0$, $j = 1, 2$; $C \sim 1$. Таким образом может быть найдена зависимость коэффициента прохождения d от энергии электрона и внешнего электрического поля. Зная зависимость коэффициента прохождения $d(\varepsilon)$ от энергии и пользуясь функцией распределения (1б), получим из соотношения для потока (6) ток электронной эмиссии:

$$j_s = 2e \left[\hbar / (8m_e \pi^3) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_y dk_z \cdot \int_0^{\infty} [1 + \exp \{ W + \hbar^2 k^2 / (2m_e) \} / (k_B T)]^{-1} d(\varepsilon, E) dk_x. \quad (3.1.20)$$

При вычислении интеграла (20) следует помнить, что $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = 0$ соответствует минимальному значению энергии свободных электронов.

Соотношение (20) справедливо и при нулевой температуре, когда функция распределения свободных электронов в металле, согласно (1в), становится ступенчатой. В этом случае интегрирование в (20) по переменным k_y и k_z от $k_j = 0$ до максимального значения k_F приводит по каждой переменной к множителю $k_F^2/4$.

При интегрировании по k_x от нуля до максимального значения $k_{xm} = eE/W$ заменим переменный коэффициент прохождения некоторым постоянным его значением, взятым при энергии Ферми, где ширина потенциального барьера составляет $x_F = W/(eE)$, т. е. $d(k) \cong \exp \left[-2W \sqrt{2m_e W} / (e\hbar E) \right] \equiv d_c = \text{const}$. Максимальное значение волнового числа k_{xm} определяется по длине волны де Бройля, когда энергия, набираемая электроном во внешнем электрическом поле, порядка работы выхода: $W = eE/k_{xm}$. Таким образом, из (20) находим ток:

$$j_s^{(E)} = 2e\hbar d_c k_F^2 k_E^2 / (64\pi^3 m_e).$$

Учитывая равенство $\hbar^2 k_F^2 / (2m_e) = W$, получаем

$$j_s^{(E)} = A_E (E^2/W) \exp(-BW^{3/2}/E), \quad (3.1.21)$$

где

$$A_E = e^3 / (16\hbar\pi^3), \quad B = \sqrt{8m_e} / (e\hbar).$$

Если работу выхода в формуле (21) выразить в электрон-вольтах, то константа A_E имеет следующее числовое значение:

$$A_E = 1,50 \cdot 10^{-6} \text{ эВ} \cdot \text{А/В}^2. \quad (3.1.22)$$

Более детальные вычисления, учитывающие снижение потен-

циального барьера, приводят к следующему соотношению для тока автоэлектронной (холодной) эмиссии:

$$j_s^E = A_E (E^2/W) \exp[-BW^{3/2}\Theta(\delta W/W)/E]. \quad (3.1.23)$$

Функция $\Theta\left(\frac{\delta W}{W} = \frac{\sqrt{e^3 E/\epsilon_0}}{W}\right)$ затабулирована в работе [31].

При ее расчете можно использовать следующее приближенное соотношение:

$$\Theta \cong 0,55 - 1,03 \cdot (\delta W/W)^2.$$

Формулу (23) в литературе иногда называют *формулой Фаулера—Нордгейма* (Fowler—Nordheim), а Θ — функцией Нордгейма.

3.1.3. Автотермоэлектронная эмиссия

Поскольку термо- и автоэлектронная эмиссии представляют собой предельные случаи, при температурах, отличных от нуля, и при наличии вытягивающего электрического поля на поверхности электродов проявляется их совместное воздействие.

В общем случае для оценки условий преобладания того или иного из механизмов эмиссии можно ввести характерную температуру T_n (назовем ее *температурой инверсии*), определяемую по энергии, набираемой электроном во внешнем электрическом поле на длине волны де Бройля λ_{DB} :

$$k_B T_n = eE\lambda_{DB} \equiv eEh/\sqrt{2Wm_e}.$$

Определенная таким образом температура инверсии пропорциональна электрическому полю: при $T < T_n$ электрическое поле следует считать сильным и эмиссионный ток определяется в основном автоэлектронной эмиссией. При $T > T_n$, наоборот, перенос тока обусловлен термоэмиссионным механизмом. При $T \sim T_n$ оба механизма дают соизмеримый вклад в эмиссию электронов, и ток следует считать автотермоэмиссионным.

Для нахождения автотермоэмиссионного тока следует учесть при $T \neq 0$ существование электронов на энергетических уровнях, превышающих уровень Ферми, и воспользоваться уравнением (6) при $T \neq 0$. В простейшем случае для расчета автотермоэлектронной эмиссии можно пользоваться соотношением

$$j_s^{(ET)} = eq_n(0) = j_s^{(E)} \left(\pi T/T_n \sin\left(\frac{\pi T}{T_n}\right) \right), \quad (3.1.24)$$

$$\text{где } T_n = eEh/(k_B \sqrt{2Wm_e}), \quad (3.1.25)$$

$j_3^{(E)}$ — плотность тока автоэлектронной эмиссии, рассчитываемая по формуле (23). Аналогично соотношению (15) можно считать поток теплоты при автотермоэлектронной эмиссии:

$$q_3^{(ET)} = j_3^{(ET)} (\pi k_B T/e) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi T}{2T_n} \right). \quad (3.1.26)$$

Из уравнения (26) следует, что в зависимости от того, превышает температура электрода температуру инверсии или нет, поверхность электрода при эмиссии электронов может либо охлаждаться (при $T > T_n$), либо нагреваться (при $T < T_n$). При температуре инверсии поток теплоты равен нулю.

Нагрев электрода при эмиссии электронов, когда его температура меньше температуры инверсии, связан с тем, что в сильном электрическом поле выходят в основном электроны с энергией ниже энергии Ферми $\varepsilon < \varepsilon_F$ (см. рис. 3.1). Оставшиеся горячие электроны с $\varepsilon > \varepsilon_F$ опускаются на освободившиеся низколежащие уровни и, отдавая свою энергию, нагревают решетку (ионы). Более подробное изложение процессов эмиссии содержится в работах [31, 32].

3.1.4. Вторичная эмиссия с холодного катода (элементарные представления)

Наряду с механизмами эмиссии, рассмотренными в предыдущих разделах, в тлеющем разряде с холодными электродами и низким напряжением могут играть роль и другие процессы, приводящие к образованию заряженных частиц. Сюда в первую очередь относится механизм вторичной эмиссии [17; 18]. Так, ускоренный в прикатодном слое ион, ударяясь о поверхность электрода, может выбить из нее электрон. Такой процесс возможен, если энергия иона превосходит работу выхода электрона из металла. Вероятность такого элементарного процесса зависит от рода газа, материала катода и его состояния. Обычно интенсивность рассматриваемого процесса характеризуется коэффициентом вторичной ионно-электронной эмиссии $\gamma \sim 1 \cdot 10^{-3} — 1 \cdot 10^{-1}$, представляющем собой отношение потока выбитых электронов, усредненных по энергиям к потоку падающих ионов (или отношение электронного тока к ионному).

Электроны могут быть выбиты из металла при столкновении с поверхностью возбужденных нейтральных атомов. Очевидно, что такие нейтральные атомы, обладающие большой энергией, могут выбивать электроны (даже при максвелловском распределении атомов по скоростям всегда существует, хотя и небольшая, доля высокоэнергетичных атомов). При столкновении частиц с поверхностью может происходить и выбивание нейтральных атомов — так называемый процесс *распыления поверхности*.

Высвобождение заряженных частиц из металла может происходить не только при соударениях энергичных частиц с поверхностью, но и при воздействии на поверхность излучения, если падающие на поверхность частицы обладают энергией, превосходящей работу выхода.

Следует иметь в виду, что и быстрые электроны, ударяясь об анод, могут выбивать вторичные электроны — интенсивность такого процесса характеризуется коэффициентом вторичной электронной эмиссии. Кроме процессов, связанных с микро-неоднородностями, о которых специально говорится в п. 3.2.3, на эмиссию оказывают большое воздействие диэлектрические и полупроводниковые пленки, находящиеся на поверхности [35]. Такие пленки в результате эмиссии электронов с катода, бомбардировки и осаждения ионов могут заряжаться и создавать локальные электрические поля. Эти локальные электрические поля могут приводить к возникновению эмиссионных токов порядка $1 \cdot 10^{13} \div 1 \cdot 10^{17}$ А/м² даже в отсутствие внешнего электрического поля.

§ 3.2. ПРИЭЛЕКТРОДНЫЕ СЛОИ В РАЗРЯДЕ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

Особенности приэлектродных процессов в разряде низкого давления связаны с низкой плотностью заряженных частиц и протеканием не слишком больших токов. Однако падения напряжения в катодном и анодном приэлектродном слоях могут значительно превышать падения напряжения в положительном столбе. Это связано с тем, что в приэлектродных областях существует объемный заряд, из-за которого электрическое поле изменяется от больших значений на катоде до малых в области положительного столба. Поскольку коэффициент ионизации сильно зависит от напряженности электрического поля, именно в этой области и происходят основные процессы ионизации, тогда как в области положительного столба процессы ионизации лишь компенсируют потери электронов за счет амбиполярной диффузии. Сначала в п. 3.2.1 мы рассмотрим бесстолкновительный слой, когда поток частиц в слое не изменяется, затем в п. 3.2.2 исследуем слой с учетом простейшей ионизации и, наконец, дадим представления о нестационарных процессах эмиссии в импульсных разрядах из плазменного облака, образующегося при взрыве микроострия.

3.2.1. Бесстолкновительный плоский слой объемного заряда (вакуумный диод)

Рассмотрим простейшую задачу о переносе электрического тока и распределении электрического потенциала в плоском слое. Если размеры слоя много меньше длины свободного пробега

самых медленных зарядов-ионов, то плазму можно считать бесстолкновительной. Такая постановка соответствует системе, состоящей из двух электродов, разделенных вакуумным зазором размера l_3 , например вакуумному диоду или плоскому бесстолкновительному слою на катоде. В такой системе электроны и ионы движутся в потенциальном электрическом поле, создаваемом объемным зарядом самих же частиц. В стационарном состоянии электрическое поле в зазоре потенциальное ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) и оно может быть найдено из уравнения Пуассона. Если размеры электродов значительно превосходят толщину слоя объемного заряда — расстояние между электродами, то все переменные концентрации электронов n_e , ионов n_i , их скорости v_e , v_i и электрический потенциал φ зависят только от расстояния по нормали к электроду. Далее будем считать, что ось x совпадает с нормалью к электроду и начало ее находится на катоде. Поскольку столкновения отсутствуют, число частиц в слое не изменяется.

В одномерной постановке полная плотность электрического тока j , состоящего из тока электронов j_e и ионов j_i , сохраняется:

$$\frac{dj_x}{dx} = 0, j \equiv j_x = j_e + j_i = \text{const}. \quad (3.2.1)$$

Плотности токов связаны с концентрацией и скоростями зарядов соотношениями:

$$j_e = -en_e v_e(x); j_i = en_i v_i(x). \quad (3.2.2)$$

При бесстолкновительном движении заряженных частиц их полная энергия, состоящая из кинетической и потенциальной, сохраняется:

$$\frac{m_e v_e^2}{2} - e\varphi(x) = C_e \equiv \text{const}, \frac{m_i v_i^2}{2} + e\varphi(x) = C_i \equiv \text{const} \quad (3.2.3)$$

Будем считать, что катод, находящийся в точке $x = 0$, поддерживается при нулевом потенциале:

$$\varphi(0) = 0. \quad (3.2.4)$$

Электрический потенциал на границе слоя при $x = l_3$ обозначим φ_3 , причем $\varphi(l_3) \equiv \varphi_3$. Примем дальше, что поток заряженных частиц является моноэнергетическим и все электроны, вышедшие из катода, обладают нулевой энергией (см. п. 3.1.1). Аналогично будем считать, что все моноэнергетические ионы, появляющиеся при $x = l_3$, находятся при нулевой энергии.

Из соотношений (3) для электронов на катоде и ионов при $x = l_3$ находим: $C_e = 0$, $C_i = e\varphi_3$. Следовательно, для скоростей заряженных частиц справедливы следующие представления:

$$v_e = [2e\varphi/(m_e)]^{1/2}; v_i = [2e(\varphi_3 - \varphi)/m_e]^{1/2}. \quad (3.2.5)$$

Определив скорость электронов и плотности тока из (3) и (5), плотность объемного заряда ρ_e можно преобразовать к виду:

$$\rho_e \equiv e(n_e - n_i) = j_i [m_i/2e(\varphi_s - \varphi(x))]^{1/2} - j_e [m_e/(2e\varphi(x))]^{1/2}.$$

Введем далее долю электронного тока ζ_e :

$$\zeta_e = j_e/j, \quad j_i = (1 - \zeta_e)j.$$

Уравнение Пуассона для электрического потенциала запишем в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -(\rho_e/\epsilon_0) = (j_e/\epsilon_0) \left[\zeta_e \sqrt{\frac{m_e}{2e\varphi}} - (1 - \zeta_e) \sqrt{\frac{m_i}{2e(\varphi_s - \varphi)}} \right]. \quad (3.2.6)$$

Уравнение (6) должно решаться с граничным условием (4) и может быть решено аналогично уравнению (2.2.3а). Уравнение (6) допускает первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + v(\varphi) \equiv (E^2/2) + v(\varphi) = C = \text{const}, \quad (3.2.7)$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{j}{\epsilon_0} \left[\zeta_e \sqrt{\frac{m_e}{2e\varphi}} - (1 - \zeta_e) \sqrt{\frac{m_i}{2e(\varphi_s - \varphi)}} \right].$$

Если считать, что $\zeta = \text{const}$, то $v(\varphi)$ легко находится интегрированием:

$$v(\varphi) = \frac{-2j}{\epsilon_0} \left[\zeta_e \sqrt{\frac{m_e\varphi}{2e}} + (1 - \zeta_e) \sqrt{\frac{m_i(\varphi_s - \varphi)}{2e}} \right].$$

Далее рассмотрим еще более простой случай, когда ионы отсутствуют, ток переносится только электронами (т. е. $\xi_e = 1$), а электрическое поле на катоде равно нулю:

$$E(0) \equiv E_k = -\frac{d\varphi(0)}{dx} = 0. \quad (3.2.8)$$

В этом случае константа C тождественно равна нулю и

$$\frac{d\varphi}{dx} = (j/\epsilon_0)^{1/2} [m_e\varphi/(2e)]^{1/4}.$$

Решая последнее уравнение методом разделения переменных, получаем распределение электрического потенциала:

$$\varphi^{3/4} = (3/2) [j\epsilon_0^{-1} \sqrt{m_0/(2e)}]^{1/2} x + C_1.$$

Используя граничное условие (4), находим, что $C_1 = 0$.

Полученное соотношение позволяет связать ток в бесстолбно-

вительном слое объемного заряда с напряжением φ_3 на нем, т. е. найти вольт-амперную характеристику слоя:

$$j = [4\epsilon_0/(9l_3^2)] \varphi_3^{3/2} \sqrt{2e/m_e}. \quad (3.2.9)$$

Соотношение (9) в литературе называют *законом «трех вторых» Ленгмюра* (иногда *уравнением Тонкса—Ленгмюра*).

В этом простом примере легко проследить роль объемного заряда. Пользуясь решением (9), можно построить распределение объемного заряда $\rho_e(x) = -en_e = j\sqrt{m_e/[2e\varphi(x)]}$ в зазоре. Видно, что плотность объемного заряда у катода стремится к бесконечности: $\rho_e \sim x^{-2/3}$. Таким образом, весь ток, протекающий в зазоре, определяется только объемным зарядом и не зависит от тока эмиссии.

Пользуясь соотношением для тока термоэлектронной эмиссии, можно показать, что при умеренных напряжениях на вакуумном диоде ($1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^3$ В) и на расстоянии порядка $1 \cdot 10^{-1}$ см ток термоэлектронной эмиссии в диапазоне температур $1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^3$ К во много раз превышает ток вакуумного диода. При подаче напряжения на диод в зазор за счет термоэлектронной эмиссии поступают электроны, образуя отрицательный объемный заряд, который искажает линейное распределение потенциала, существующее в его отсутствие. При этом объемный заряд начинает препятствовать выходу электронов из эмиттера до тех пор, пока не наступит стационарное распределение, соответствующее закону «трех вторых». Если бы объемный заряд продолжал накапливаться у катода, то поле $E(0) \equiv E_k$ изменило бы знак — поле превратилось бы в запирающее ($E > 0$), эмиссия бы уменьшилась, а ток поддерживался за счет накопленных зарядов, т. е. распределение с $E = 0$ и закон Ленгмюра следует рассматривать как предельный случай.

Подчеркнем, что в вакуумном диоде сила пропускаемого тока не зависит от свойств эмиттера (тока эмиссии) и определяется лишь напряжением и расстоянием между электродами. Закон «трех вторых» (9) при равном нулю электрическом поле на катоде является частным случаем. Данная задача допускает обобщение на ситуацию, когда моноэнергетические электроны эмиттируются с ненулевой скоростью. При наличии максвелловского распределения электронов эмиссии по скоростям качественные выводы закона Ленгмюра сохраняются, однако при наличии неравновесного распределения по скоростям (неравновесность может быть вызвана различными причинами — и в самом электроде, и на его границе) вольт-амперная характеристика вакуумного диода может отличаться от закона «трех вторых» (например, ВАХ может стать неоднозначной и т. д.).

Соотношение (7) позволяет рассмотреть и другую задачу,

когда поле на катоде отлично от нуля и определяется в процессе решения задачи, а ток переносится и электронами, и ионами ($\xi \neq 1$). В такой постановке константа C в уравнении (7) находится из условий на аноде, где поле полагается равным нулю: $E(l_3) = -d\varphi/dx = 0$. Получаем

$$C = - [j/(2\varepsilon_0)] [m_e \varphi_3 / (2e)]^{1/2}.$$

В таком случае электрическое поле на катоде определяется из (7) следующим соотношением:

$$E_x^2 = (j_0/\varepsilon_0)(1-\zeta_e) \left(1 - \frac{\zeta_e \sqrt{m_e/m_i}}{1-\zeta_e}\right) \sqrt{\frac{m_i \varphi_x}{2e}}. \quad (3.2.10)$$

Здесь $\varphi_k = \varphi_3 - \varphi(0)$ — прикатодное падение потенциала. Соотношение (10) в литературе называют *формулой Маккоуна* (MacKeown).

Аналогичным образом могут быть получены соотношения, связывающие ток и напряжения в цилиндрическом и сферическом слоях, однако принципиальные выводы о роли объемного заряда в вакуумном зазоре сохраняют свою силу.

Поток теплоты, приносимой ионами на катод, может быть рассчитан исходя из простейшей картины явления нейтрализации ионов на катоде. Ион, подходя к электроду, забирает из него электрон и превращается в нейтральный атом, передавая электроду часть своей кинетической и потенциальной энергий. Если не учитывать процессы, связанные с возбужденными ионами и атомами, то для потока теплоты от ионов имеем:

$$q_{it} = j(1-\zeta_e)(\beta\varphi_k + I - W_{eff}).$$

Здесь β — коэффициент аккомодации ионов, он учитывает долю кинетической энергии ионов, передаваемую электроду, и зависит от энергии и рода ионов, от свойств поверхности катода, ζ_e — доля электронного тока, φ_k — катодное падение потенциала, W_{eff} — эффективная работа выхода электронов, учитывающая снижение потенциального барьера при наличии внешнего электрического поля: $W_{eff} = W - (e^3 E / \varepsilon_0)^{1/2}$.

Поскольку в «вакуумных» разрядах процессы переноса развиваются в парах материала электрода, важно правильно определять скорость испарения. Скорость испарения материала электрода в вакуум может быть рассчитана по формуле Ленгмюра:

$$\dot{m} = p_n(T_3) \sqrt{m_i / (2k_B T_3)}.$$

Здесь $p_n(T_3)$ — давление насыщенного пара материала элект-

рода при температуре электрода T_3 . Поскольку $p_n(T_3)$ существенно зависит и от давления окружающей среды, то при атмосферном давлении интенсивность испарения на три порядка меньше, чем при испарении в вакуум.

3.2.2. Катодный и анодный слои тлеющего разряда

Рассмотрим простейшие процессы на электродах в тлеющем разряде. В стационарном тлеющем разряде, состоящем из положительного столба, прикатодной и прианодной областей, не происходит накопления заряда и суммарный ток сохраняется постоянным во всех областях, однако роль носителей тока — электронов и ионов — в различных областях меняется.

Катодный слой. Если в области положительного столба, где перенос заряда в осевом направлении во много раз превышает радиальную амбиполярную диффузию ($2\pi l D_a n_e \ll \pi r_w^2 n_{a1} e E$), ток переносится электронами из-за малой подвижности ионов, то в области вблизи холодного катода ионный ток является преобладающим. Электрический ток j_e здесь связан со вторичной эмиссией (выбивание из катода электронов ионами) и составляет небольшую долю от ионного: $\zeta_e = j_e(0)/j_i \ll 1$. Очевидно, что приэлектродная область содержит и бесстолкновительный слой объемного заряда, и область интенсивной ионизации под действием электрического поля, порожденного объемным зарядом. Длина переходной области (от бесстолкновительного слоя, где $j_e \ll j_i$, до положительного столба, где $j_e \gg j_i$) соответствует нескольким длинам свободного пробега.

Рассмотрим более детально пристеночный слой, который включает в себя бесстолкновительный слой объемного заряда и столкновительный слой ионизации. В дальнейшем рассмотрении эти подобласти не выделяются. В процессе решения задачи необходимо найти вольт-амперную характеристику катодного слоя $\varphi_k(j_k)$ и определить протяженность всей прикатодной области. Ее протяженность l_k можно определить из условия полного падения прикатодного потенциала φ_k на этой длине и обращения в нуль электрического поля при $x = l_k$:

$$\varphi(l_k) = \varphi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x = l_k) = 0$$

Последнее условие соответствует пренебрежению электрическим полем E_c в положительном столбе по сравнению с полем E_k в приэлектродном слое. Более точно это условие можно записать в виде: $E_k \ll E_c$. Конечно, при решении задачи условие (11) должно достигаться асимптотически при $x \rightarrow \infty$. Считается, что на самой поверхности катода при $x = 0$ электроны рождаются

за счет вторичной эмиссии и электронный ток связан с ионным соотношением

$$j_{e+}(0) = \gamma j_i(0), \quad (3.2.12)$$

где γ — коэффициент вторичной эмиссии, зависящей от материала катода и свойств газа.

В общем случае задача должна решаться аналогично § 3.3 в рамках кинетической теории. В простейшем случае вместо кинетического уравнения (B1) можно воспользоваться его первым моментом, эквивалентным уравнению баланса числа частиц [см. (1.1.14)]. В прикатодной области потерями заряженных частиц на стенку можно пренебречь и учесть лишь изменение тока (концентрации) в направлении, перпендикулярном поверхности катода. Пренебрежем также диффузионной составляющей по сравнению с конвективной (это оправдано, так как в прикатодной области существуют сильные электрические поля):

$$D_e \frac{dn_e}{dx} < n_e \mu_e E_x \sim j_e/e; \quad D_i \frac{dn_i}{dx} < n_i \mu_i E_x \sim j_i/e. \quad (3.2.13)$$

Таким образом, из уравнения баланса числа электронов и ионов имеем:

$$\frac{dj_e}{dx} = \alpha j_e; \quad \frac{dj_i}{dx} = \alpha j_i. \quad (3.2.14)$$

Здесь α — коэффициент ионизации, связанный с частотой ионизации ν_i соотношением

$$\nu_i = \alpha \mu_e E. \quad (3.2.15)$$

Кроме того, в одномерном рассмотрении должно выполняться условие сохранения полного тока (1):

$$j_e + j_i \equiv j = \text{const.}$$

Из (14) определим изменение плотности электронного тока по катодной области:

$$j_e = C_e \exp \left[\int_0^x \alpha(E(x')) dx' \right]. \quad (3.2.16)$$

Подставив (16) в граничное условие (12) и используя условие

$$j_e(x \rightarrow \infty) \rightarrow j = \text{const}, \quad (3.2.17)$$

найдем константу C_e :

$$j_e(0) = \gamma j_i(0) = \gamma(j - j_e(0)); \quad C_e = j(1 + \gamma^{-1})^{-1}, \quad j_i(0) = j(1 + \gamma)^{-1}. \quad (3.2.18)$$

Следовательно, в прикатодной области имеет место условие

$$\int_0^{\infty} \alpha(x') dx' = \ln(1 + \gamma^{-1}). \quad (3.2.19)$$

Соотношение (19) показывает, что для осуществления стационарности по длине прикатодного слоя число рождающихся электронов должно быть пропорционально $\ln(1 + \gamma^{-1})$.

В частном случае зависимость $\alpha(x)$ в (16) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\alpha(x) = \alpha(E_k) = \text{const}; x \leq l_k, \alpha(x) = 0, x > l_k. \quad (3.2.20)$$

Здесь E_k — поле на катоде. Для представления $\alpha(E)$ воспользуемся хорошо известной в теории газового разряда связью

$$\alpha(E) = A\rho \exp(-B\rho/E). \quad (3.2.21)$$

Значения констант A, B , входящих в (21), приведены, например, в [6]. Используя уравнения (20) и (21), из (19) получим

$$\alpha(E_k) l_k = A\rho l_k (\exp - B\rho/E_k) = \ln(1 + \gamma^{-1}). \quad (3.2.22)$$

Из соотношения (22) легко найти зависимость прикатодного падения $\varphi_k = E_k l_k$ от произведения ρl_k :

$$\varphi_k \equiv E_k l_k = \frac{B(\rho l_k)}{[\ln(\rho l_k) + \ln\{A/[\ln(1 + \gamma^{-1})]\}]} \quad (3.2.23)$$

Прикатодное падение φ_k в зависимости от комплекса ρl_k приведено на рис. 3.2. Из соотношения (23) непосредственно следует, что при больших значениях комплекса ρl_k прикатодное падение возрастает как $\varphi_k \sim \rho l_k / \ln(\rho l_k)$, прикатодное значение также стремится к бесконечности, когда $\rho l_k \rightarrow (\rho l_k)_a = A / \ln(1 +$

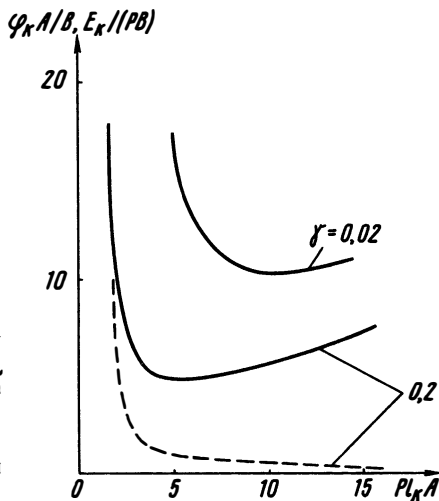


Рис. 3.2. Зависимость прикатодного падения напряжения $\varphi_k (A/B)$ (сплошные линии) и электрического поля на катоде $E_k/(pB)$ (штриховая линия) от произведения $\rho l_k A$ при различных значениях коэффициента вторичной эмиссии γ

$+\gamma^{-1}$), и имеет минимум при $(pl_{\kappa}) = e(pl_{\kappa})_a$, равный $\varphi_{\kappa n} = = Ve(pl_{\kappa})_a$. Здесь e — основание натурального логарифма.

Однако непосредственно уравнениями (22) и (23) для определения электрического поля на катоде E_{κ} или прикатодного падения φ_{κ} воспользоваться невозможно (за исключением случая, соответствующего $\varphi_{\kappa n}$), так как неизвестна длина области прикатодного слоя l_{κ} . Для нахождения этой длины и ее связи с полем E_{κ} необходимо использовать решение уравнения Пуассона.

По-прежнему ограничимся геометрией, соответствующей рис. 3.3, и учтем, что в прикатодной области: $0 \leq x \leq l_{\kappa}$, $E(x) < 0$.

Концентрации электронов и ионов, входящие в уравнение (19), можно выразить через электрический ток и дрейфовую скорость частиц v_d :

$$en_e = j_e/v_{ed}, en_i = j_i/v_{id}. \quad (3.2.24)$$

Поскольку существенное изменение электронейтральности ρ_e происходит в пределах области ионизации, которая не меньше длины свободного пробега частиц, дрейфовую скорость можно выразить через действующее электрическое поле:

$$v_{ed}(x) = \mu_e E(x), v_{id} = \mu_i E, \quad (3.2.25)$$

где $\mu_e \sim 1/(m_e \mu_i) \sim 1/m_i$ — подвижности электронов и ионов соответственно [см. (1.2.24)].

Воспользовавшись соотношениями (24) и (25), представим объемную плотность зарядов в виде

$$\rho_e = (j_i/\mu_i E) [1 - \mu_i j_e/(\mu_e j_i)].$$

В катодном слое $j_e < j$, $\mu_e/\mu_i \sim m_i/m_e \gg 1$ и слагаемым $\mu_i j_e/\mu_e j_i$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Из соотношений (12), (15) ионный ток j_i на катоде связан с полным током j зависимостью $j_i = j(1 + \gamma)^{-1}$. Таким образом, плотность зарядов может быть выражена через ток и электрическое поле:

$$\rho_e = j/[\mu_i E(1 + \gamma)]. \quad (3.2.26)$$

Подставив ρ_e в уравнение Пуассона (6), получаем возможность найти распределение электрического поля в катодной области:

$$dE/dx = -j/[\epsilon_0 \mu_i E(1 + \gamma)].$$

Решение полученного уравнения с граничным условием $E(0) = E_{\kappa}$ имеет вид

$$E(x) = \{E_{\kappa}^2 - 2j_x/[\epsilon_0 \mu_i (1 + \gamma)]\}^{1/2}. \quad (3.2.27)$$

Теперь длина катодной области l_k может быть найдена из условия

$$E(l_k) = E_n,$$

где E_n — поле в плазме.

Для l_k получаем следующее уравнение:

$$l_k = \varepsilon_0 \mu_i (1 + \gamma) (E_k^2 - E_n^2) / (2j). \quad (3.2.28)$$

Значение катодного падения в тлеющем разряде, соответствующее минимуму зависимости φ_k от pl_k , называют *нормальным катодным падением* (будем обозначать его φ_{kn} , а соответствующий нормальному катодному падению ток — j_n). Эксперименты в тлеющем разряде показывают, что закон нормального падения катодного потенциала реализуется достаточно часто, а сам тлеющий разряд, работающий в таком режиме, получил название *нормального тлеющего разряда*.

Из уравнений (23), (28) можно найти параметры тлеющего разряда в режиме нормального падения катодного потенциала, добавив к ним условие экстремальности $\partial\varphi_k/\partial(l_k p) = 0$:

$$(pl_k)_n = (e/A) \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right), E_k = Bp. \quad (3.2.29)$$

Таким образом, для нормального катодного падения потенциала и соответствующего ему тока имеем:

$$\varphi_{kn} = (eB/A) \ln(\gamma/(1+\gamma)), \quad (3.2.30)$$

$$j_n = \varepsilon_0 \mu_i AB^2 p^3 (1+\gamma) / [e \ln(1+\gamma^{-1})]. \quad (3.2.31)$$

Здесь везде e — основание натуральных логарифмов.

Другое соотношение для расчета характеристик катодного слоя можно получить, если воспользоваться для ионного тока уравнением, аналогичным (16) с константой, определяемой из

$$(18): j_i(x) = [j/(\gamma+1)] \exp\left[\int_0^\infty \alpha(E(x')) dx'\right].$$

При использовании аппроксимации (20) плотность объемных зарядов имеет вид: $\rho_e = (j/\varepsilon_0(1+\gamma)\mu_i E) \exp[-\alpha(E_k)x]$. Подставив ρ_e в уравнение Пуассона (6), запишем его решение:

$$E^2(x) = \{j/[\varepsilon_0(1+\gamma)\mu_i\alpha(E_k)]\} e^{-\alpha(E_k)x} + E_n^2.$$

Из этого решения видно, что электрическое поле, экспоненциально убывая по мере удаления от катода, стремится к плазменному полю E_n . Пренебрежем далее плазменным полем по сравнению с полем на катоде ($E_n \ll E_k$) при $x = 0$. Тогда

$$E_{\kappa} \equiv E(0) = \{j / [\varepsilon_0 (1 + \gamma) \mu_i \alpha (E_{\kappa})]\}^{1/2} \quad (3.2.32)$$

и $E(x) = E_{\kappa} \exp[-\alpha(E_{\kappa})x/2]$.

Зная распределение электрического поля в катодном слое, найдем падение потенциала в слое и тем самым ВАХ катодного слоя:

$$\varphi_{\kappa} = \int_0^{\infty} E(x) dx = E_{\kappa} \alpha^{-1}(E_{\kappa}). \quad (3.2.33)$$

Действительно, как следует из (32), ток связан с полем на катоде соотношением

$$j_0 = \varepsilon_0 \mu_i \alpha(E_{\kappa}) (1 + \gamma) / E_{\kappa}^2.$$

Задавая E_{κ} как параметр, можно построить зависимость $\varphi_{\kappa}(j)$, которая похожа на неоднозначную зависимость, представленную на рис. 3.2. Можно снова считать, что реализуются напряжение и ток, соответствующие экстремуму зависимости $\varphi_{\kappa}(j)$ — аналог закона нормального падения. Видно, что в рассматриваемой модели характерный размер катодного слоя порядка $l_{\kappa} \sim \sim 1 / [\alpha(E_{\kappa})]$, т. е. порядка длины области эффективной ионизации.

Анодный слой. При исследовании структуры анодного слоя следует помнить, что анод не эмиттирует ионы, а они рождаются в прианодном слое за счет ионизации атомов электронами.

Анодный слой согласует плотность тока в положительном столбе с плотностью тока на аноде $j_a = I/S$ (где I — полный ток в разряде, S — площадь анода). В зависимости от соотношений между этими плотностями тока вблизи поверхности анода могут образовываться объемные заряды разного знака, и соответственно потенциал слоя или возрастает относительно плазменного (положительное анодное падение потенциала), или падает (отрицательное анодное падение потенциала). В случае, когда $j_a > j \sim j_e$, возникает отрицательный объемный заряд и положительное анодное падение оказывается такого порядка $\delta\varphi_a > 0$, что электроны в этом слое набирают энергию, достаточную для ионизации $\delta\varphi_a \sim I$ нейтральных атомов, и снижают тем самым значения объемного заряда. Когда плотность тока j_e плазмы превышает плотность анодного тока, образуется избыточный заряд положительного знака и анод приобретает отрицательный потенциал относительно плазмы, приводящий к торможению избыточного количества электронов. При этом доля ионного тока невелика.

Согласно Ленгмюру, для оценки прианодного падения потенциала можно использовать соотношение

$$\delta\varphi_a = (k_B T_e / e) \ln (j_e / j_0). \quad (3.2.34)$$

Таким образом, отрицательно заряженный анод окружен оболочкой из положительных ионов, а положительно заряженный — оболочкой из электронов. Существенную роль в этих процессах, как видно, могут играть *ионизация газа и образование ионов*. Ионизация газа сопровождается свечением. При положительном падении потенциала свечение может становиться неравномерным — возникает так называемое темное *прианодное пространство*, обладающее повышенными плотностью анодного тока и температурой электронов.

3.2.3. Понятие о процессе взрывной эмиссии

Исследования физики импульсных разрядов при очень низких давлениях ($1 \cdot 10^{-9} - 1 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.) обнаружили целый ряд особенностей в развитии автоэлектронной эмиссии в таких разрядах по сравнению с рассмотренной в § 3.1 эмиссией с идеально гладких электродов в однородном электрическом поле. Основные особенности разрядов, о которых идет речь, связаны с разрушением материала катода и выносом его в межэлектродный промежуток при характерных напряженностях электрического поля $E \sim 1 \cdot 10^6$ В/см.

Понятно, что идеальный вакуум в зазоре между двумя электродами мог бы выдержать бесконечно большое напряжение без протекания электрического тока — из-за отсутствия носителей заряда. Однако, как показывает эксперимент, даже при давлениях $1 \cdot 10^{-9}$ мм рт. ст. напряжение пробоя остается конечным, не изменяясь в широком диапазоне давлений. Так, для водорода «пробивное» напряжение составляет 20 кВ для межэлектродного зазора 0,5 мм и остается постоянным при изменении давления от $1 \cdot 10^{-2}$ до $1 \cdot 10^{-9}$ мм рт. ст. Протекание электрического тока при столь низких давлениях и высоких напряжениях связано с разрушением материала электрода и ионизацией его эмиттированными электронами и ионами. Именно ионизованное вещество материала катода и обеспечивает протекание тока в вакуумном зазоре; конечно, при разрушении материала вакуум ухудшается.

В реальных условиях поверхность электрода никогда не бывает идеально гладкой, на ней всегда существуют микровыступы, играющие важную роль в процессе инициирования разряда. Наличие микровыступов приводит к локальному усилению электрического поля на выступе. Протекание электрического тока через выступ приводит к его интенсивному разогреву из-за джоулева тепловыделения. Разогрев микровыступа может приводить к его расплавлению и даже испарению вещества. При

быстром энергоотводе острие может разрушиться также из-за термоупругих напряжений. Во всех случаях (испарение, частичное или полное разрушение) происходит поступление нейтральных частиц в окружающую электродную среду. Далее нейтральные микро- и макрочастицы могут ионизоваться потоками образовавшихся при автоэлектронной эмиссии электронов. Процесс интенсивной ионизации материала разрушений микроострий приводит к образованию возле катода плотного плазменного облака, расширяющегося со скоростью порядка $1 \cdot 10^4$ м/с. Из-за нарушения электронейтральности может образовываться сильное электрическое поле, вытягивающее электроны из плотной плазмы. Электроны начинают поступать в межэлектродный зазор не из твердого тела, а из плазмы, т. е. образуется своеобразный плазменный катод. Такой процесс автоэлектронной эмиссии, происходящий в импульсных системах, получил название *взрывной эмиссии* [32].

Согласно закону Ленгмюра для вакуумных зазоров [см. (2.1)], ток I пропорционален множителю $\varphi^{3/2}$, поэтому неудивительно, что во всех процессах взрывной эмиссии сохраняется аналогичный закон подобия, связывающий ток в зазоре I с напряжением на электродах φ_3 , расстоянием l_3 между ними и скоростью расширения плазменного катодного облака v_k :

$$I\varphi_3^{-3/2} = f(v_k t / l_3). \quad (3.2.35)$$

Скорость разлета катодного облака, согласно экспериментам, зависит лишь от рода материала электрода и не зависит от расстояния между электродами: $v_k = (1,1 \div 2,7) \cdot 10^4$ м/с ($1,1 \times 10^4$ м/с для бериллия, $2,7 \cdot 10^4$ м/с для вольфрама).

Обобщение экспериментальных данных приводит к следующим соотношениям для токов взрывной эмиссии:

а) ток единичного острейного катода

$$I_k = 3,7 \cdot 10^5 \varphi_3^{3/2} v_k t / (l_3 - v_k t); \quad (3.2.36)$$

б) ток с единичного плоского облака на поверхности катода при $v_k t \ll l_3$

$$I_{n1} = 4,47 \cdot 10^5 \varphi_3^{3/2} (v_k t / l_3)^2; \quad (3.2.37)$$

в) ток с N катодных облаков:

$$I_\Sigma = N I_{n1}. \quad (3.2.38)$$

В формулах (36), (37) t — время от начала приложения напряжения к электродам, ток выражен в амперах.

Использование взрывной эмиссии позволяет получить электрические разряды с большой плотностью тока — порядка $1 \cdot 10^8 \div 1 \cdot 10^9$ А/см², имитируемой всей поверхностью катода.

§ 3.3. ПРИЭЛЕКТРОДНЫЙ СЛОЙ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА

Как было показано в п. 2.1.1, при наличии термодинамического равновесия, когда заряженные частицы распределены по Больцману в самосогласованном потенциальном электрическом поле, размер области объемного заряда определяется радиусом Дебая: $r_D = [\epsilon_0 k_B T / (en)]^{1/2}$. Однако вблизи электрода, где термодинамическое и ионизационное равновесия могут быть нарушены, размеры области существования объемного заряда могут отличаться от соотношений, характерных для равновесного дебаевского радиуса. Область объемного заряда вблизи поверхности электрода часто называют *ленгмюровским слоем*.

В данном разделе рассмотрим связь между параметрами в приэлектродном слое объемного заряда, не вдаваясь в детальную структуру слоя: сначала при наличии термодинамического равновесия, а затем в его отсутствие. Более подробно об этих явлениях изложено в работах [33; 34].

3.3.1. Термодинамически равновесный ленгмюровский слой

Почему же на границе раздела двух проводящих сред возникает ленгмюровский слой заряженных частиц? Необходимость появления такого слоя вытекает из условия термодинамического равновесия свободных зарядов. Если плотность свободных зарядов в двух средах различна (в металле и плазме это именно так: плотность электронов в металле порядка $1 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2}$, в плазме $1 \cdot 10^{16} \div 1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$), происходит их переход через место контакта одной среды с другой, а равновесие же устанавливается лишь тогда, когда на границе возникает заряженный слой и соответствующая разность потенциалов. В термодинамически равновесной плазме заряд экранируется на расстоянии порядка радиуса Дебая r_D (для характерных плазменных задач $r_D \sim 1 \cdot 10^{-5} \div 1 \cdot 10^{-2} \text{ см}$), поэтому и ширина ленгмюровского слоя l_L такого же порядка.

Размер ленгмюровского слоя обычно оказывается значительно меньше всех остальных характерных размеров: длины свободного пробега, расстояния между электродами и т. д. Его собственная структура часто несущественна для остальной задачи, они необходимы лишь для определения свойств плазмы (плотности, температуры) за слоем и падения напряжения на слое. Параметры ленгмюровского слоя легко считать, когда плазма находится в состоянии термодинамического равновесия с электродом (его температуру обозначим T_s) и потоки в слое отсутствуют. Следует учесть, что потенциал плазмы может отличаться

от потенциала поверхности электрода, который принимается, равным нулю. Для плазмы в слое концентрации электронов n_e и ионов n_i можно считать одинаковыми. Такое приближение для ленгмюровского слоя на первый взгляд кажется неоправданным, так как именно нарушение электронейтральности $\delta n = n_i - n_e \neq 0$ приводит к возникновению скачка потенциала в этом слое. Однако отношение $\delta n/n_e$ является малым ($\delta n/n_e \ll 1$) и для расчета параметров термодинамически равновесного ленгмюровского слоя в первом приближении можно считать, что $n_e = n_i$.

Напомним, что химический потенциал электронов в металле, когда уровень энергии электронов вне металла принят за нулевой, равен работе выхода, см. (1.5), (1.9). В состоянии термодинамического равновесия химические потенциалы электронов в металле и плазме должны быть равны. С учетом скачка потенциала в ленгмюровском слое суммарный химический потенциал электронов можно представить в виде $\mu_\Sigma = \mu_e - e\varphi_L$, где φ_L — потенциал плазмы, отсчитываемый от его значения на поверхности электрода. Для химического потенциала можно воспользоваться термодинамическим соотношением (1.8). Таким образом, в равновесном ленгмюровском слое в отличие от (1.9) должно выполняться условие

$$-W = \mu = \mu_\Sigma = \mu_e - e\varphi_L, \quad e\varphi_L = \mu_e + W. \quad (3.3.1)$$

Кроме того, существует химическое равновесие между электронами, ионами и атомами плазмы:

$$\mu_e + \mu_i = \mu_a. \quad (3.3.2)$$

Известно, что равенство (2) приводит к уравнению Саха́:

$$n_e = (2n_a z_{bi}/z_{ba})^{1/2} (2\pi m_e k_B T_3/h^2)^{3/4} \exp(-Ie/(2k_B T_3)).$$

Таким образом, зная температуру электрода T_3 , концентрацию атомов в ленгмюровском слое n_a и работу выхода W , из уравнения Саха́ и соотношения (1) можно рассчитать концентрацию n_e и скачок потенциала φ_L в ленгмюровском слое. Обратим внимание на то, что в данном случае, в отличие от п. 1.2.1, хотя и используется уравнение Саха́ для определения концентрации электронов через температуры электрода T_3 и плазмы T ($T_3 = T$) и концентрацию атомов n_a , ионизационное равновесие устанавливается не в результате объемных процессов, а вследствие взаимодействия электронов, выходящих из металла, с адсорбируемыми на стенках разрядной плазмы атомами и ионами. Поэтому концентрация электронов $n_e(T_3, n_a)$, определяемая из уравнения Саха́, — это локальная концентрация электронов

в непосредственной близости от электрода. Концентрацию электронов и скачок потенциала в ленгмюровском слое можно выразить и через потоки эмиссии электронов $q_{\text{э}e}$ и ионов $q_{\text{э}i}$ или через токи эмиссии: $j_{\text{we}} = -eq_{\text{э}e}$, $j_{\text{wi}} = eq_{\text{э}i}$.

Учтем теперь, что работа выхода при наличии скачка потенциала в ленгмюровском слое на $e\varphi_L$ меньше (см. рис. 3.1). Поэтому, приравнивая поток в плазму на границе ленгмюровского слоя $q_{e+}(x=l_L) = q_{\text{э}e} \exp e\varphi_L/(k_B T)$ потоку из плазмы электронов $q_{e-} = (n_e/4) [8k_B T/(\pi m_e)]^{1/2}$, где они распределены по Максвеллу, получаем

$$q_{\text{э}e} = (n_e/4) [8k_B T/(\pi m_e)]^{1/2} \exp [-e\varphi_L/(k_B T)]. \quad (3.3.3)$$

Аналогичным образом можно приравнять на границе ленгмюровского слоя с плазмой потоки ионов $q_{i+} = q_{i-}$ и получить

$$q_{\text{э}i} = (n_e/4) [8k_B T/(\pi m_i)]^{1/2} = q_{\text{э}i}(0) \exp [-e\varphi_L/(k_B T)]. \quad (3.3.4)$$

Из соотношений (3) и (4) можно выразить концентрацию электронов (соответственно и ионов $n_e = n_i$) и потенциал на границе ленгмюровского слоя через потоки электронов $q_{\text{э}e}$ и ионов $q_{\text{э}i}$ со стенки в плазму:

$$n_e = 4 [4m_e m_i q_{\text{э}i} q_{\text{э}e} / (8k_B T_{\text{э}})]^{1/2}, \quad (3.3.5)$$

$$e\varphi_L/(k_B T_{\text{э}}) = 0,5 \cdot \ln \left\{ (q_{\text{э}i}/q_{\text{э}e}) (m_i/m_e)^{1/2} \right\} \equiv 0,5 \ln \omega_k. \quad (3.3.6)$$

Соотношения (3.3.5) и (3.3.6), строго говоря, справедливы лишь для системы с термодинамическим или в лучшем случае с локально термодинамическим равновесием и могут применяться для горячих катодов. Комплекс $\omega_k = q_{\text{э}i} \sqrt{m_i} / (q_{\text{э}e} \sqrt{m_e})$ носит название *параметра перекомпенсации*. При $\omega_k > 1$ и $\varphi_L > 0$ плазма находится под более высоким потенциалом, чем электрод (рис. 3.1), и скачок электрического потенциала задерживает ионы, эмиттируемые катодом, и электроны, идущие из плазмы на катод. Режим работы катода при $\omega_k > 1$ называют *перекомпенсированным*. При этом в ленгмюровском слое плазмы содержится избыточный положительный заряд, вытолкнутый на границу плазмы и создающий приэлектродный слой, мешающий входу в плазму ионов и выходу из нее электронов на стенку.

При $\omega_k < 1$ имеем $\varphi_L < 0$ и плазма находится под потенциалом более низким, чем электрод (см. рис. 3.1). В этом случае ленгмюровский слой задерживает электроны эмиссии с поверхности катода и препятствует уходу ионов из плазмы на стенку. Такой режим работы катода называют *недокомпенсированным*.

Иногда перекомпенсированный режим называют *ионным*, а недокомпенсированный — *электронным*. При любом режиме ($\omega_k > 1$, $\omega_k < 1$) плазма за слоем квазинейтральна, а весь избыточный заряд ρ_e сосредоточен в ленгмюровском слое; *при $\varphi_L > 0$ слой заряжен положительно, при $\varphi_L < 0$ — отрицательно*. Уравнения (3), (4) в термодинамическом пределе не зависят от работы выхода катода. Это связано с тем, что изменение работы выхода и тем самым изменение эмиссионных токов $q_{эв}$, $q_{эи}$ приводят лишь к уменьшению или увеличению потенциального барьера $W + e\varphi_L$, который автоматически устанавливается таким, что «лишняя» электронная или ионная эмиссия кончается и плотность плазмы сохраняется на уровне, определяемом только температурой и давлением возле электрода.

3.3.2. Приэлектродные слои в отсутствие термодинамического равновесия

В отсутствие термодинамического равновесия в плазме существует электрическое поле и протекают направленные электрические токи. Если падение напряжения возле электрода очень велико по сравнению с температурой (например, в катодном слое тлеющего разряда), то расстояние, на которое проникает электрическое поле в приэлектродном пространстве, может существенно превышать радиус Дебая. В этом случае расстояние проникновения электрического поля в плазму определяется не столько плотностью и температурой, как в термодинамическом равновесном случае, сколько кинетической энергией электронов, ускоренных прикатодной разностью потенциалов. Все это приводит к тому, что около катода может возникнуть сильно неравновесное состояние с высокой напряженностью электрического поля. Высокая напряженность электрического поля в свою очередь обеспечивает высокую автоэлектронную эмиссию из холодного катода. В дуговом разряде и в разряде с накальным катодом определяющую роль играет термоэлектронная эмиссия и катодное падение становится малым. В последнем случае область нарушения квазинейтральности возле катода — порядка радиуса Дебая. За пределами этой области — в положительном столбе — поле в плазме существует лишь постольку, поскольку оно поддерживает текущий через плазму электрический ток. Так как в рассматриваемых системах длина свободного пробега электронов, ионов и атомов значительно меньше расстояния между электродами, то в большей части межэлектродного расстояния устанавливаются токи, определяемые законом Ома (см. соотношения в § 1.1 и § 1.2).

Несмотря на малые размеры ленгмюровского слоя, в нем

может падать достаточно большое напряжение, во многих случаях превосходящее падение напряжения в других слоях. К ленгмюровскому слою примыкает кнудсеновский слой толщиной порядка длины свободного пробега l_c , в котором происходит релаксация неравновесной функции распределения электронов и ионов до их квазиравновесных значений в межэлектродном расстоянии. Обычно толщина ленгмюровского слоя значительно меньше кнудсеновского $l_L < l_K \sim l_c$. Даже когда интересуются только параметрами в ленгмюровском слое — концентрацией частиц и скачками потенциала, в термодинамически неравновесном случае необходимо привлечь к рассмотрению и процессы в кнудсеновском слое, отделяющем ленгмюровский от положительного столба. Это связано с тем, что именно в этом слое происходит установление диффузионного потока, определяющего термодинамическую неравновесность всего приэлектродного слоя.

Для нахождения характеристик ленгмюровского слоя подсчитаем баланс потоков электронов и ионов на границе между электродом и приэлектродной плазмой (при $x = 0$) и на границе между приэлектродным слоем и положительным столбом (при $x = l_3$). В отличие от термодинамически равновесного случая в стационарном неравновесном состоянии поток не равен нулю: $q_{e+}(0) = q_{ze} - q_{e-}(0) \neq 0$. Ленгмюровский слой можно рассматривать как бесконечно тонкую поверхность, отделяющую электрод в точке $x = 0$ от приэлектродного слоя плазмы (в таком подходе толщина приэлектродного слоя определяется размерами кнудсеновского слоя). Считается также, что весь приэлектродный скачок потенциала происходит в ленгмюровском слое, а в кнудсеновском — падение отсутствует: $\varphi(l_K) = \varphi_L, l_3 = l_K$.

Разность потоков эмиссии q_{ze} из электрода и потока $q_{e-}(0)$ из приэлектродной плазмы на электрод в точке $x = 0$ зависит от того, в каком режиме работает электрод: недокомпенсированном ($\varphi_L < 0$) или перекомпенсированном ($\varphi_L > 0$). Считается, что внутри кнудсеновского слоя поток не изменяется, а на границе кнудсеновского слоя с плазмой он равен потоку из плазмы в приэлектродный слой: $q_{e+}(l_K) = q_{e+}(0)$, $q_{e+}(l_K) = q_{n-}$ (рис. 3.3).

В недокомпенсированном режиме из-за скачка потенциала в ленгмюровском слое как бы увеличивается работа выхода на $e\varphi_L$, и поток в слой составляет

$$q_{e+} = q_{ze} \exp [e\varphi_L / (k_B T)].$$

Для нахождения потока частиц и приэлектродной плазмы на электрод необходимо знать неравновесную функцию распределения (напомним, что в равновесном случае имело место $q_{e-}(0) = n_e v_{ec} / 4$). Для недокомпенсированного режима неравновесность

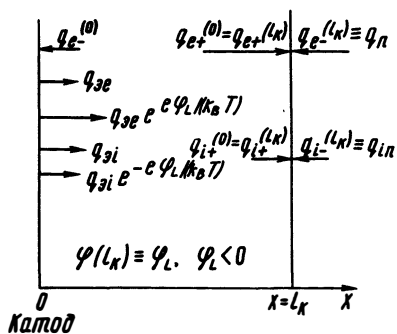


Рис 3.3. Схема направлений потоков на катоде и на границе кнудсеновского слоя

мала и неравновесная функция распределения электронов по скоростям легко находится. В перекомпенсированном режиме поток эмиссии не меняется ($q_{e+} = q_{ze}$), однако электроны плазмы отделены от эмиттера потенциальным барьером, и даже в том случае, когда температура электронов совпадала бы с температурой электрода, только часть их $n_e \exp \times [-e\phi_L / (k_B T)]$ доходила бы до электрода, создавая поток в отрицательном направлении:

$$q_{e-}(0) = -(n_e v_{ec} / 4) \exp \left[-e\phi_L / (k_B T_e) \right],$$

где n_e — концентрация электронов в плазме.

Однако при более строгом анализе следует учитывать, что в перекомпенсированном режиме потенциальный барьер мешает эффективному выравниванию температур. Выделение джоулевой теплоты приводит к разогреву электронного газа, и его температура превышает температуру электрода: $T_e > T_s$. При этом задача о нахождении неравновесной функции распределения электронов и вычислении потока частиц из приэлектродной плазмы на электрод усложняется.

Недокомпенсированный режим. Рассмотрим теперь более подробно эмиттирующий электрод — катод в отсутствие термодинамического равновесия в недокомпенсированном режиме. Как уже отмечалось, температура электронов не обязательно равна температуре электрода, однако при низкой степени ионизации нейтральная компонента всегда находится при температуре электрода. Это связано с тем, что при малой степени поверхностной ионизации поток падающих на стенку атомов практически равен обратному потоку ($q_{a-} = q_{a+}$), что должно приводить к установлению термодинамического равновесия: $T_a = T_s$. Вследствие малой разности масс между ионами и атомами устанавливается эффективный обмен энергиями при столкновении $\delta_{\text{eff}} \sim 1$, и температуры тяжелых частиц выравниваются: $T_i = T_a = T_s$.

Температура T_e электронов, масса которых значительно меньше массы атомов и ионов, может заметно отличаться от температуры тяжелых частиц. Однако в недокомпенсированном режиме, когда плазма находится под более низким, чем поверхность катода, потенциалом ($\phi_L < 0$), электроны свободно выходят

из плазмы на электрод и их температура около катода совпадает с температурой электрода $T_e = T_3$. Неравновесность в недокомпенсированном режиме при $T_e = T_3$ связана с наличием диффузионного потока, поэтому функцию распределения электронов можно представить в виде суммы равновесного распределения $f_{e0}(v)$ и возмущения f_1 , пропорционального потоку частиц q_n :

$$f = f_0(v) + f_1 = f_0 \left(1 + \frac{m_e}{n_e k_B T} q_n \cdot v \right), \quad (3.3.7)$$

где

$$f_0 = n_e \left[\frac{m_e}{2k_B T_3 \pi} \right]^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_3} \right), \quad q_{en} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

Подставляя (7) в соотношение для потока электронов в ленгмюровский слой — в отрицательном направлении оси x , получим

$$q_{e-} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^0 v_x f(v) dv_x = -\frac{n_e v_{ec}}{4} + \frac{q_n}{2}. \quad (3.3.8)$$

Для полного потока электронов, входящих в приэлектродный слой со стороны электрода, получаем выражение

$$q_{e+} = (q_n/2) - (n_e v_{ec}/4) + q_{se} \exp \left(\frac{e\varphi_L}{k_B T} \right). \quad (3.3.9)$$

Со стороны плазмы в приэлектродный (кнудсеновский) слой входит поток $q_- (I_K) = q_n$. Поскольку в приэлектродном, стационарном слое нет накопления или поглощения частиц, эти потоки должны быть равны: $q_{e+} = q_n$. Проводя несложные преобразования, получим

$$q_{e+} = b_e \{ \exp [e\varphi_L / (k_B T)] - n_e v_{ec} / 4 \}, \quad (3.3.10)$$

где $b_e = 2$. Появление в формуле (10) множителя b_e связано с учетом влияния диффузионного потока на распределение частиц, входящих из плазмы на электрод.

Ионы, входящие из плазмы в слой, в недокомпенсированном режиме задерживаются, поскольку $E > 0$. Через этот барьер проходят только ионы со скоростями $v_i > v_\phi$, где $v_\phi = (2e\varphi_L / m_i)^{1/2}$. Используя для функции распределения ионов соотношения типа (7), (8), (9), находим поток ионов [33]:

$$q_{i+} = b_i \{ q_{si} - (n_i v_{ic} / 4) \exp [e\varphi_L / (k_B T)] \}. \quad (3.3.11)$$

Коэффициент b_i учитывает неравновесность распределения ионов и должен быть рассчитан по функции распределения ионов

[типа распределения (7)]. Согласно [34] для коэффициента b_i можно получить следующую формулу:

$$b_i = 2 \left\{ 1 + \operatorname{erf} [e|\varphi_L|/(k_B T_s)]^{1/2} - 2 [2|\varphi_L|e/(\pi k_B T_s)]^{1/2} \exp \frac{e\varphi_L}{k_B T_s} \right\}^{-1}. \quad (3.3.12)$$

Из (12) следует, что коэффициент b_i с ростом $|\varphi_L|$ монотонно убывает от значения $b_i = 2$ при $e|\varphi_L|/(k_B T_s) \ll 1$ до значения $b_i = 1$ при $e|\varphi_L|/(k_B T_s) \gg 1$. Поскольку в диффузионном режиме

$$\frac{q_n}{(n_e v_{ec})} = \frac{D_e}{n_e v_{ec}} \frac{dn_e}{dx} \sim \frac{l_c}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \ll 1$$

(l_c — длина свободного пробега), имеет место неравенство $q_n \equiv q_{ne} \ll n_e v_{ec}/4$ и, следовательно, уравнение (10) можно использовать в более упрощенном виде, совпадающем с выражением, полученным в случае термодинамического равновесия:

$$q_{\pm e} = (n_e v_{ec}/4) \exp [e\varphi_L/(k_B T)]. \quad (3.3.13)$$

Однако в уравнении для ионов (11), несмотря на то, что $n_e v_{ec}/4 > q_n$, из-за множителя $\exp \left[\frac{e\varphi_L}{(k_B T)} \right]$ последнее слагаемое в правой части соотношения (11) может быть одного порядка с q_{ni} , если $e/\varphi_L/(k_B T_s) \gg 1$. В таких ситуациях $b_i \sim 1$ и поток для ионов в недокомпенсированном режиме может быть представлен в виде

$$q_{i+}(l_K) = q_{\pm i} - (n_e v_{ic}/4) \exp [e\varphi_L/(k_B T_e)]. \quad (3.3.14)$$

Из соотношений (13) и (14) можно найти концентрации заряженных частиц на электроде $n_e(0)$ (в точке $x=0$ на рис. 3.2) и скачок потенциала φ_L в ленгмюровском слое, который здесь принят нулевой толщины:

$$n_e = 4 [q_{\pm e} (q_{\pm i} - q_{i+}(l_K)) / (v_{ec} v_{ec})]^{1/2}, \quad (3.3.15)$$

$$e\varphi_L/(k_B T_s) = 0,5 \ln \left(\frac{q_{\pm i} - q_{i+}(l_K)}{q_{\pm e} \sqrt{m_e/m_i}} \right) \quad (3.3.16)$$

Уравнения (9) и (10) переходят в соотношения, полученные в термодинамически равновесном случае, при $q_{in}(l_K) \ll q_{\pm i}$, когда $q_{ni}(l_K) = 0$.

Перекомпенсированный режим. Остановимся теперь более подробно на катоде, работающем в перекомпенсированном режиме, когда потенциал плазмы выше потенциала электрода ($\varphi_L > 0$). В таком режиме, как отмечалось выше, из-за джоулева нагрева температура электронов превышает температуру электрода ($T_e > T_s$) и даже при наличии равновесного максвелловс-

кого распределения поток частиц из плазмы на электрод определяется температурой T_e , а суммарный поток, представляющий разность потоков эмиттированных электронов и потока на электрод, должен составлять

$$q_{e+} = q_{\text{э}e} - (n_e v_{ec} (T_e) / 4) \exp [- e\varphi_L / (k_B T_e)]. \quad (3.3.17)$$

Напомним, что множитель $\exp [- e\varphi_L / (k_B T_e)]$ учитывает изменение концентрации частиц в ленгмюровском слое, так как только часть электронов плазмы может преодолеть потенциальный барьер.

При более строгом рассмотрении в соотношении (17) надо внести поправки. На самом деле в отличие от недокомпенсированного режима отклонение от соотношения (10) связано не только с термической неравновесностью электронов $T_e(0) > T_3$, но и с тем, что количество электронов $n_e(l_K) \neq n_e(0)$, входящих в плазму со стороны электрода, убывает с ростом энергии быстрее, чем при термическом равновесии. Все это приводит как бы к отрицательному источнику электронов на границе, и вследствие этого не только входящие $q_-(0)$, но и выходящие $q_+(0)$ из электрода потоки отличаются от термодинамически равновесного случая $T_e(0) = T_3$. Поэтому в более общем случае вместо соотношения (17) следует использовать

$$q_{e+}(l_K) = b_{e1} q_{\text{э}e} - (b_{e2} n_e v_{ec} / 4) \exp [- e\varphi_L / (k_B T_e)]. \quad (3.3.18)$$

При этом коэффициенты b_{e1} , b_{e2} должны быть вычислены из кинетической теории с учетом неравновесности функции распределения, связанной с медленностью установления термодинамического равновесия между электронами эмиссии, ускоренными в ленгмюровском слое до энергий $e\varphi_L$, и тепловыми электронами плазмы, обусловленной малоэффективностью кулоновских соударений при больших энергиях. Решение этой задачи приведено в [33] в зависимости от параметра

$$g(T) = 4 \{ e\varphi_L l_{ea} / [l_{ee}(T_e) k_B T_e] \}^{1/2}, \quad (3.3.19)$$

характеризующего эффективность кулоновских столкновений по сравнению со столкновениями электрон—атом.

Длина свободного пробега при столкновении электронов с электронами определяется формулой $l_{ee} = k_B^2 T^2 / (2\pi n_e e^2 \lambda_K)$, где λ_K — кулоновский логарифм, см. (1.2.39). Длина свободного пробега при столкновении электрон—атом составляет $l_{ea} = (n Q_{ea})^{-1}$. Находим значения коэффициентов b_{e1} , b_{e2} : при $g \ll 1$ имеет место

$$b_{e1} \sim g(T_3), b_{e2} \sim g(T_e(0)), \quad (3.3.20)$$

при $g \gg 1$

$$b_{e1} \sim b_{e2} \sim 1. \quad (3.3.21)$$

Температура ионов в перекомпенсированном режиме $\varphi_L > 0$ совпадает с температурой электрода $T_i = T_3$, и граничное условие для них имеет вид

$$q_{i+}(l_L) = b_i \left[q_{3i} \left(\exp \frac{-e\varphi_i}{k_B T_3} \right) - \frac{n_e v_{ic}(T_3)}{4} \right]. \quad (3.3.22)$$

Условие (22) может быть упрощено, если $n_e v_{ic} > q_n$, и представлено в виде, совпадающем с термодинамически равновесным:

$$q_{3i} \exp \left[-e\varphi_L / (k_B T_3) \right] = n_e v_{ic}(T_3) / 4. \quad (3.3.23)$$

Таким образом, уравнения (17) или (18) и (22) или (23) связывают потоки и концентрации частиц со скачком потенциала в ленгмюровском слое.

Однако в граничные условия (17) и (18) входит еще одна неизвестная величина — температура возле электрода $T_e(0)$. Эту температуру определим из уравнения баланса энергии. Примем, что электроны, входящие в слой из электрода, распределены по Максвеллу с температурой T_3 , а электроны, выходящие из слоя Ленгмюра в сторону электрода, имеют распределение Максвелла с температурой $T_e(0)$. Вычислим поток энергии через контрольную поверхность, расположенную за ленгмюровским слоем непосредственно у электрода (см. рис. 3.3). Полный ток энергии складывается из потока потенциальной и кинетической энергий. Поскольку потенциал катода равен нулю, поток потенциальной энергии электронов, идущих из электрода в плазму, равен нулю ($-e\varphi(0)q_{en} = 0$) и состоит лишь из потока кинетической энергии. Таким образом, поток кинетической энергии электронов эмиссии

$$q_{\tau+} = 2k_B T_3 q_{3e}.$$

Поток энергии из слоя плазмы в электрод q_{τ} состоит только из кинетической энергии электронов плазмы с температурой $T_e(0)$:

$$q_{\tau-} = 2k_B T_e(0) n_e (v_{ec}/4) \exp \left\{ -e\varphi_L / [k_B T_e(0)] \right\}. \quad (3.3.24)$$

Правую часть соотношения (24) можно выразить через поток эмиссии и диффузионный поток из плазмы, пользуясь уравнением (17):

$$q_{\tau-} = 2k_B T_e(0) (q_{3e} - q_{e+}(l_K)). \quad (3.3.25)$$

Таким образом, суммарная энергия, вносимая в приэлектродный слой из катода, составляет

$$q_{\tau}(0) \equiv q_{\tau+} - q_{\tau-} = 2k_B T_e(0) q_{e+}(l_K) - 2k_B (T_e(0) - T_3) q_{3e}. \quad (3.3.26)$$

Считая, что в кнудсеновском слое поток теплоты остается неизменным, $q_{\tau}(0)$ на границе со слоем плазмы должен быть равен потоку энергии из плазмы в приэлектродный слой. Поток теплоты из плазмы в приэлектродный слой, согласно (1.2.29), состоит из потока теплоты за счет теплопроводности и конвективного переноса энергии (кинетической $2k_B T_3$ и потенциальной $e\varphi$) электрическим током:

$$q_{\tau n} = -\lambda \frac{dT_e}{dx} + q_{e+}(l_K) (2k_B T_e - e\varphi).$$

Таким образом, на границе приэлектродного слоя выполняется соотношение

$$2k_B T_3 q_{3e} - 2k_B T_e(0) (q_{3e} - q_{e+}(l_K)) = -\lambda \frac{dT_e}{dx} + q_{e+}(l_K) (2k_B T_e - e\varphi_L) \quad (3.3.27)$$

Здесь учтено, что скачок потенциала $\delta\varphi$ равен перепаду в ленгмюровском слое.

Из (28) можно выразить температуру электрона на границе приэлектродного слоя $T_e(l_K)$ (фактически это температура электронов на электроде) через поток теплоты из плазмы за счет теплопроводности $\lambda dT_e/dx$, поток частиц из плазмы $q_{e+}(l_K)$ и поток эмиссии электронов q_{3e} :

$$T_e(0) = T_3 + e\varphi_L [q_{e+}(l_K)/(2q_{3e})] + \frac{\lambda_e}{2q_{3e}} \frac{dT_e}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (3.3.28)$$

Уравнение (28) представляет собой граничное условие для температуры электронов на катоде и имеет вид граничного условия третьего рода для уравнения теплопроводности электронов.

В случае, когда можно пренебречь разогревом электронов ($(T_e(0) - T_3)/T_3 \ll 1$), что справедливо при малых перекомпенсациях, из уравнений (17) и (23) следуют соотношения для концентрации электронов на границе с электродом и приэлектродного падения потенциала:

$$n_e(0) = 4 [q_{3i} (q_{3e} - q_{e+}(l_K)) / (v_{ec} v_{ic})]^{1/2}, \quad (3.3.29)$$

$$e\varphi_L / (k_B T_3) = 0,5 \ln [q_{3i} / (q_{3e} - q_{e+}(l_K)) \sqrt{m_e / m_i}]. \quad (3.3.30)$$

Соотношения (29), (30) при $q_{e+}(l_K) < q_{en}(0)$ переходят в соотношения, полученные в термодинамически равновесном случае, когда $q_{e+}(l_K) = 0$.

3.3.3. Слой на неэмиттирующем электроде

Что представляет собой *неэмиттирующий электрод*? Неэмиттирующими следует считать электроды, у которых эмиссионные потоки малы по сравнению с направленными диффузионными потоками из плазмы:

$$q_{эе} \ll q_{ен}(l_K), q_{эи} < q_{ин}(l_K).$$

К неэмиттирующим электродам можно относить аноды, находящиеся при низких температурах и, следовательно, при малых токах эмиссии. Однако при сильных нагревах анода токи эмиссии могут оказаться одного порядка с диффузионными, анод следует рассматривать как эмиттирующий электрод. В свою очередь, даже катод, работающий, например, в дуговом режиме, можно для ионов считать неэмиттирующим электродом, поскольку в этом случае поток диффузии из плазмы значительно превосходит поток эмиссии ионов с катода. Поток энергии, переносимый на анод электронами, зависит от того, превышает потенциал плазмы φ_n потенциал анода φ_a или нет.

Рассмотрим неэмиттирующий электрод (анод), потенциал которого ниже потенциала плазмы: $\delta\varphi_a = \varphi_n - \varphi_a > 0$. Граничные условия для такого неэмиттирующего электрода можно получить из уравнений (18), (22), если пренебрегать в них токами эмиссии, и, учитывая, что диффузионный ток втекает в электрод, заменить знак минус на плюс в уравнениях (18), (22):

$$q_{e-} = b_e (n_e v_{ec}/4) \exp[-e\delta\varphi_a/(k_B T_e)], \quad (3.3.31)$$

$$q_{i-} = b_i (n_e v_{ic}/4). \quad (3.3.32)$$

Здесь n_e , T_e — концентрация электронов и их температура в плазме около анода. Коэффициенты b_i , b_e должны вычисляться из кинетической теории, они могут отличаться от аналогичных коэффициентов у эмиттирующего электрода из-за анизотропии углового распределения ионов и электронов у электрода, поскольку отсутствуют выходящие из электрода частицы. В [33] для коэффициента b_i получены следующие соотношения:

$$b_i = \begin{cases} 2,5 (T_e/T_i)^{1/2}, & T_e \gg T_i, \\ (2\pi)^{1/2}, & T_e \ll T_i. \end{cases} \quad (3.3.33)$$

Коэффициент b_e , входящий в соотношение для потока электронов, зависит от параметра $\eta = e\delta\varphi_a/(k_B T_e)$, характеризующего прианодное падение потенциала, и изменяется в пределах

$$14/6 \geq b_e > 1. \quad (3.3.34)$$

При $\eta = 0$ имеем $b_e = 14/6$. При $\eta \gg 1$ можно пользоваться следующим уравнением:

$$b_e(\eta) = 1 - \eta^{-1} - [2/(3\eta^2)] + [13/(4\eta^3)].$$

Поток энергии, вносимый из плазмы на анод, когда потенциал плазмы выше потенциала анода и электроны имеют максвелловское распределение, подсчитывается по выражению

$$q_{te} = q_{e-} (2k_B T_e - e\varphi_a). \quad (3.3.35)$$

Если потенциал плазмы ниже потенциала анода ($\delta\varphi_a < 0$), то потоки на электроды, согласно соотношениям (31), (32), могут быть представлены в виде

$$q_{e-} = b_e n_e v_{ec}(T_e)/4, \quad (3.3.36)$$

$$q_{i-} = b_i n_e (v_{ic}(T_a)/4) \exp [e\delta\varphi_a/(k_B T_a)]. \quad (3.3.37)$$

Здесь T_a — температура анода, а коэффициенты b_e , b_i определяются из соотношений (33), (34), в которых T_i надо заменить на T_a .

При вычислении потока энергии, выносимого в этом режиме электронами из плазмы на анод, необходимо учесть, что электроны до ускорения в ленгмюровском слое имели максвелловское распределение с температурой T_e . Окончательно имеем

$$q_{te} = q_{e-} (2k_B T_e - e\varphi_n). \quad (3.3.38)$$

В отличие от (35) в (38) входит потенциал плазмы φ_n , а не анода. Это отличие связано с тем, что на границе с электродом при ускоряющем потенциальном барьере $\delta\varphi_a < 0$ электроны уже распределены не по Максвеллу (отсутствуют частицы с малыми скоростями), а фигурирующий в (38) потенциал плазмы как раз и учитывает нарушение максвелловского равновесия в ленгмюровском слое.

§ 3.4. СТРУКТУРА СТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ПРИЭЛЕКТРОДНОГО СЛОЯ

Обычно из-за особенностей процессов на границе раздела твердое тело—плазма функция распределения эмиттированных электронов отличается от распределения электронов по скоростям в электронейтральной плазме. Релаксация эмиттированных электронов к равновесному состоянию происходит на нескольких длинах свободного пробега. Слой, в котором происходит релаксация, называют *релаксационным* или *кнудсеновским*. Рассмотрим несколько более подробно структуру такого слоя и характер

установления ионизационного равновесия в нем. Исследования структуры кнудсеновского слоя, т. е. характер изменения функции распределения, позволяют определить кинетические коэффициенты b_i , b_{e1} , b_{e2} , которые нужны для расчета потоков в слое (см. § 3.3). Структура слоя зависит от того, в каком режиме — компенсированном или перекомпенсированном — работает электрод. Как уже было показано, именно в перекомпенсированном режиме функция распределения может быть существенно неравновесной.

3.4.1. Релаксационный (кнудсеновский) приэлектродный слой в перекомпенсированном режиме

Рассмотрим процессы, происходящие в столкновительном слое характерной длины l_K , значительно превышающем размеры ленгмюровского слоя ($l_K > l_L$) и составляющем несколько длин свободного пробега. В этом слое устанавливается равновесие между электронами, эмиттированными из электрода, и электронами плазмы. Поскольку все события развиваются на расстояниях нескольких длин свободного пробега, для расчета характеристик слоя необходимо кинетическое решение задачи. При низкой степени ионизации ионы рассеиваются главным образом на атомах, а поток атомов на электрод практически совпадает с отраженным от электрода потоком. Таким образом, нейтральная компонента находится в термодинамическом равновесии с электродом и покоится в лабораторной системе координат. Температуру атомов в слое толщиной $l_K \sim l_{ea} \sim l_{ai}$ можно считать постоянной, а сами атомы распределенными по Максвеллу с температурой электрода $T_a \sim T_{эо}$.

Под влиянием соударений с атомами функция распределения ионов также должна релаксировать к равновесному распределению с температурой $T_i = T_a = T_s$, но в таком режиме ионы поглощаются стенкой и это вносит возмущение в их функцию распределения: отсутствует поток ионов q_{i-} . Вид функций распределения ионов в кнудсеновском слое можно определить из стационарного кинетического уравнения, которое запишем в виде [32]

$$v \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{eE}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v} = \frac{n f_0 - f_i}{\tau_{ia}}. \quad (3.4.1)$$

Здесь

$$f_0 = [m_i / (2\pi k_B T_s)]^{3/2} e^{-m_i v^2 / (2k_B T_s)}, \quad n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, x) dv, \quad (3.4.2)$$

v — проекция скорости ионов на ось x , которая считается перпендикулярной поверхности электрода, а начало координат $x = 0$

совпадает с этой поверхностью, τ_{ia} — время релаксации функции распределения ионов на атомах за счет перезарядки. Интеграл столкновения в уравнении (1) записан в так называемом *релаксационном приближении* и τ_{ia} считается не зависящим от скорости v . Поскольку ленгмюровский слой полагается бесконечно тонкой поверхностью, отделяющей электрод от плазмы кнудсеновского слоя при $x = 0$, во всей области принимается электро-нейтральность: $n_e = n_i = n$.

На поверхности электрода при $x = 0$, как уже было сказано, ионы поглощаются, и для уравнения (1) имеет место следующее граничное условие:

$$f_i(v, 0) = 0, v > 0. \quad (3.4.3)$$

Поскольку электроны отделены от электрода большим потенциальным барьером, возникающим в ленгмюровском слое, в кнудсеновском квазинейтральном слое успевает установиться равновесное распределение электронов. При таком равновесном состоянии сила, действующая на электроны со стороны электрического поля, уравнивается градиентом электронного давления:

$$-en_e E - \nabla p_e = 0, en_e \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_B T \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

Так как слои считаются изотермическими, а плазма — идеальным газом, то для электрического поля имеем следующую связь с градиентом концентрации электронов, а следовательно, и ионов:

$$E = - \frac{k_B T_e}{en} \frac{\partial n_e}{\partial x}. \quad (3.4.4)$$

Подставляя (4) в (1), приходим к нелинейному уравнению для функции распределения ионов. Нелинейность этого уравнения обусловлена тем, что и концентрация электронов, и электрическое поле зависят от функции распределения согласно соотношениям (2), (4).

Часто в приближенных решениях, когда f_i не сильно отличается от равновесной f_0 , нелинейный член $E \frac{\partial f_i}{\partial v}$ уравнения (1) преобразуют, подставляя в него вместо функции f_i равновесную f_0 :

$$E \frac{\partial f_i}{\partial v} = E \frac{\partial f_0}{\partial v} = -Em_i v f_0 / (k_B T_i).$$

В этом случае уравнение (1) может быть записано в виде

$$\tau_{ia} v \frac{\partial f_i}{\partial x} + f_i = n f_0 - \frac{T_e v \tau_{ia}}{T_i} \frac{\partial n_e}{\partial x}. \quad (3.4.5)$$

Подчеркнем еще раз, что уравнение (1) и его решение справедливы, если f_i не сильно отличается от максвелловской. Решение даже упрощенного интегрального уравнения в общем случае может быть найдено только численно. Аналитическое решение

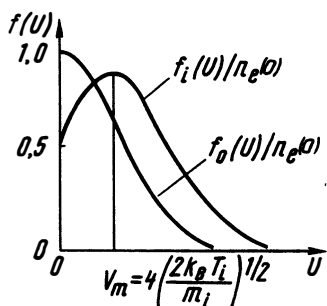


Рис. 3.4. Равновесная f_0 и неравновесная f_i функции распределения ионов по скоростям $u = v [m_i / (2k_B T_i)]^{1/2}$

уравнения (5) для частного случая приведено в [33]. Вид функции распределения ионов $f_i(U) / [n_e(0)]$, полученной в работе [33], в зависимости от безразмерной скорости ионов в отрицательном направлении оси x , т. е. $U = -v_{ix} / (2k_B T_s / m_i)^{1/2}$, приведен на рис. 3.4. Здесь же для сравнения приведено и максвелловское распределение частиц по скоростям. Из рисунка видно, что в отличие от распределения Максвелла максимум в функции распределения выходящих из плазмы ионов ($v_{ix} < 0$), являющейся решением уравнения (5), сдвинут на $V_m = 4 \times$

$\times (2k_B T_s / m_i)^{1/2}$ по сравнению с началом

координат. Это связано с тем, что в режиме перекомпенсации электрическое поле в ленгмюровском слое направлено против оси x и ускоряет ионы, движущиеся к электроду.

Пользуясь полученным решением, можно определить такие важные для расчета потоков характеристики, как коэффициент b_i , входящий в уравнения (3.31), (3.37): $q_{in} = b_i n_e(0) v_{ic} / 4$. Для распределения, приведенного на рис. 3.4, $b_i = \sqrt{2\pi}$. Расчет средней энергии ионов, приходящейся на одну степень свободы для движения вдоль оси x , дает

$$\langle m_i v^2 / 2 \rangle = (1,016 / \sqrt{2}) k_B T_s = 0,72 k_B T_s. \quad (3.4.6)$$

Выражение вида $\langle \varphi \rangle$ означает усреднение функции $\varphi(v)$ по функции распределения ионов:

$$\langle \varphi \rangle = \int \varphi(v) f_i(v) dv.$$

Аналогичным образом подсчитывается поток энергии ионов в направлении оси x . Известно, что при распределении Максвелла средняя энергия, переносимая частицей в потоке, в направлении переноса равна $2k_B T_i$ (при этом две другие проекции дают по $k_B T_i$ каждая). Для средней энергии, выносимой полем в неравновесном случае, согласно [33], имеем большее значение: $1,27 k_B T_i$. Таким образом, кинетическая энергия, переносимая

потоком ионов (с учетом двух других степеней свободы), составляет

$$q_{\tau i} = 2,27k_B T_i q_{in}. \quad (3.4.7)$$

Полученное решение кинетического уравнения (5) в кнудсеновском слое позволяет найти и изменение в нем плотности плазмы, которое в простейшем виде можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$n(x) \cong \frac{\sqrt{2n_e(0)}}{1 + T_e/T_i} \left(1 + \frac{\sqrt{2}T_e}{T_i} + \frac{x}{\tau_{ia}} \sqrt{\frac{m_i}{2k_B T_i}} \right). \quad (3.4.8)$$

Используя (8), из (4) находим электрическое поле в слое:

$$E(x) \cong -\frac{k_B T_e}{e\tau_{ia}} \sqrt{\frac{m_i}{2k_B T_i}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}T_e}{T_i} + \frac{x}{\tau_{ia}} \sqrt{\frac{m_i}{2k_B T_i}} \right)^{-1}. \quad (3.4.9)$$

Полное изменение электрического потенциала в кнудсеновском слое ограничено (на первой длине свободного пробега оно порядка $0,6k_B T_e$) и значительно меньше падения потенциала в ленгмюровском слое, где электронейтральность нарушена. Однако, как это видно из (9), на расстояние первой длины свободного пробега в плазму проникают еще довольно значительные электрические поля. Отметим, что при нарушении термодинамического равновесия длина проникновения электрического поля в плазму, как это следует из решения (9), может отличаться от дебаевской. Более точные числовые решения кинетического уравнения (5) приводят к соотношениям типа приведенных выше. Так, для b_i имеем

$$b_i = \begin{cases} \sqrt{2\pi} T_e \leq T_i & , \\ \sqrt{2\pi T_e/T_i}, T_e > T_i. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

3.4.2. Структура релаксационного слоя вблизи неэмиттирующего электрода

Рассмотрим более подробно столкновительный слой вблизи неэмиттирующего электрода. Как уже отмечалось, это могут быть либо анод, либо стенки разрядной камеры.

Пусть плазма находится под положительным потенциалом относительно электрода $\varphi_i > 0$. Если скачок потенциала в ленгмюровском слое превышает $k_B T_e$, то основная масса электронов плазмы отражается от потенциального барьера по границе и не имеет непосредственного контакта с электродом. Вследствие этого подавляющая часть электронов в приэлектродном слое

имеет максвелловское распределение — это тепловые электроны. Однако всегда существуют быстрые электроны со скоростями, превышающими $v_0 = (2e\phi_L/m_e)^{1/2}$, которые могут выходить на электрод. Хотя их плотность n_0 и мала по сравнению с плотностью всей плазмы ($n_0 < n_e$), необходимо иметь в виду, что в приэлектродном слое возле неэмиттирующего электрода весь ток на электрод обусловлен именно этими быстрыми электронами: $j_{e-} = -eq_{e-} = -en_0v_\phi$ (v_ϕ — некоторая характерная скорость, зависящая от значения барьера ϕ_L).

При отсутствии эмиссии с электрода ($q_{e+} \equiv q_{se} = 0$) на границе с ним из-за ухода быстрых электронов ($q_{e-} \neq 0$) для электронов, которые релаксируют лишь на длинах свободного пробега l_{ea} , возникает сильное отклонение от изотропного распределения по углам. В общем случае полная релаксация функции распределения быстрых электронов f_0 происходит в два этапа. Первый состоит в хаотизации — установлении почти изотропного распределения, главным образом, вследствие соударения электронов с нейтральными атомами. Этот процесс происходит по длине свободного пробега l_{ea} . На втором этапе устанавливается равновесие в распределении электронов по энергиям. Релаксация по энергиям может происходить только вследствие кулоновских взаимодействий между электронами, поскольку при соударении с атомами и ионами электроны теряют лишь малую долю энергии, пропорциональную отношению масс $2m_e/m_a$. Это обстоятельство часто упрощает решение задачи о релаксации, так как на первом этапе энергия быстрых электронов не меняется, а устанавливается лишь изотропное распределение по углам, а на втором происходит установление равновесного распределения изотропной функции распределения. Такой двухэтапный подход к релаксации основан на том, что кулоновская длина свободного пробега быстрых электронов растет с энергией $l_{ee} \sim \epsilon^2$ и для быстрых электронов существенно превышает длину пробега на атомах: $l_{ee} > l_{ea}$.

Будем по-прежнему считать ось x перпендикулярной поверхности электрода, находящейся при $x = 0$. Кинетическое уравнение для электронов с учетом интегралов столкновений их с атомами I_{ea} и между собой I_{ee} имеет вид

$$v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} - \frac{eE}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial v_x} = I_{ea} + I_{ee} \quad (3.4.11)$$

Интеграл столкновений электронов с атомами запишем в релаксационном приближении аналогично интегралу столкновений в уравнении (1):

$$I_{ea} = (nf_0 - f_e) \tau_{ea}^{-1} = v l_{ea}^{-1} (nf_0 - f_e), \quad (3.4.12)$$

где

$$f_0 = (2\pi k_B T_e / m_e)^{-3/2} \exp[-m_e v^2 / (2k_B T_e)].$$

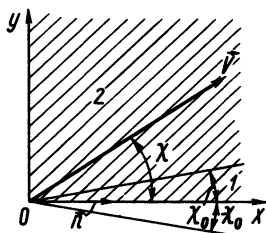
Функция распределения зависит от продольной v_x и поперечной $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ скоростей и расстояния от электрода по нормали x . При этом $v_x > 0$ соответствует электронам, движущимся от электрода в плазму, а $v_x < 0$ — электронам из плазмы на электрод. Однако бывает удобнее выбрать другие переменные: полную кинетическую энергию $\varepsilon = m_e (v_x^2 + v_\perp^2) / 2$ и $\mu = \cos \chi$ — косинус угла между направлением скорости и осью x . При этом значения $0 < \mu \leq 1$ ($0 \leq \chi < \pi/2$) соответствуют электронам, движущимся от электрода в плазму, а значения $0 > \mu \geq -1$ ($\pi/2 < \chi \leq \pi$) — электронам, движущимся из плазмы на электрод (рис. 3.5). При этом концентрация электронов в точке x определяется по функции $f_e(\mu, \varepsilon, x)$ интегрированием:

$$n(x) = \int_0^\infty d\varepsilon \int_{-1}^1 d\mu f_e(\mu, \varepsilon, x). \quad (3.4.13)$$

Интеграл кулоновских столкновений электронов между собой I_{ee} записывается в приближении Фоккера—Планка [36, 37].

При решении кинетического уравнения (11) на первом этапе в слое $l \sim l_{ea}$ учтем, что отношение интегралов столкновений электрон—электрон и электрон—атом порядка $I_{ee}/I_{ea} \sim l_{ea}/l_{ee} < 1$; оно мало в силу сказанного выше, поэтому последним слагаемым в правой части (11) пренебрежем. Кроме того, как показано в предыдущем параграфе, падение потенциала в слое $l \sim l_{ea} \sim l_{ia}$ не превышает $k_B T_e$, а быстрые электроны имеют энергии $\varepsilon \sim e\varphi_L \sim \sim k_B T_e$, поэтому в релаксационном слое можно пренебречь вторым слагаемым в (1) по сравнению с первым членом: $(eE/m_e) \times \times \partial f_e / \partial v < v \partial f_e / \partial x$, т. е. в слое $l_{ea} \sim l$ учитывается только рассеяние электронов на неподвижных сферически-симметричных центрах. Таким образом, уравнение (11) с учетом вышесказан-

Рис. 3.5. Схема направлений скорости в приэлектродном слое: 1 — конус эмиттируемых электродом электронов ($\chi_0 = \arccos \sqrt{e|\varphi_L|/\varepsilon}$) 2 — конус отраженных электронов



ного и того, что $v_x = v \cos \chi = v\mu$ (где $0 \leq \chi \leq \pi$, $-1 \leq \mu \leq 1$), имеет вид

$$(\cos \chi) \frac{\partial f_e}{\partial x} = (nf_0 - f_e) l_{ea}^{-1}. \quad (3.4.14)$$

Далее, представим функцию f_e в виде произведения двух функций, одна из которых $f(\epsilon)$ зависит только от энергии и не изменяется в слое толщиной l_{ea} , а вторая — $g(\mu, x)$ зависит от угла χ (параметра $\mu = \cos \chi$) и расстояния x :

$$f_e = f(\epsilon) g(\mu, x). \quad (3.4.15)$$

Умножая (14) на $d\epsilon$, интегрируя по ϵ и учитывая, что $\int f_0(\epsilon) d\epsilon = 1$, получим из (14) уравнения для функции g :

$$\mu \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{g}{l_{ea}} = \frac{1}{2l_{ea}} \int_{-1}^1 g(\mu) d\mu. \quad (3.4.16)$$

Функция $g(\mu, x)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-1}^1 g(\mu, x) d\mu = 1. \quad (3.4.17)$$

Исходя из картины явления на электроде, сформулируем граничное условие для уравнения (16). Все электроны плазмы разобьем по энергиям на две группы: быстрые с $\epsilon \geq \epsilon_0$ и медленные с $\epsilon < \epsilon_0$. Все медленные электроны отражаются потенциальным барьером. При зеркальном отражении знак составляющей скорости по оси x меняется на противоположный: $-v_x \rightarrow v_x$. Следовательно, на границе для отраженных электродов должно выполняться следующее соотношение:

$$g(-\mu, 0) = g(\mu, 0).$$

Однако не все быстрые электроны преодолевают барьер экранированного слоя. Следует помнить, что полная энергия электрона складывается из кинетических энергий движений вдоль оси x и в поперечном к ней направлении (в плоскости электрода):

$$\epsilon = \frac{m_e}{2} (v_x^2 + v_{\perp}^2).$$

Для преодоления барьера важна лишь составляющая $m_e v_x^2 / 2$, т. е. проходят электроны при данной энергии ϵ через потенциальный барьер или нет — это зависит от угла χ или переменной $\mu = \cos \chi$. (При этом следует помнить, что для электронов, движущихся из плазмы на электрод, $v_x < 0$ и $\mu < 0$, для отраженных — $v_x > 0$ и $\mu > 0$.)

Таким образом, если $\varepsilon_0 = e|\varphi_L|$ есть высота потенциального барьера, то быстрые электроны с составляющими скорости $0 > \mu > \mu_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}$ зеркально отражаются от барьера (область 2 на рис. 3.5). Электроны, эмиттируемые электродом, должны ускоряться в ленгмюровском слое и входить в плазму внутри конуса $1 \geq \mu \geq \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} = \mu_0$. Если эмиссия отсутствует, то функция распределения в этом конусе (область 1 на рис. 3.5) должна обращаться в нуль. Таким образом, имеет место следующее граничное условие для частиц, входящих в плазму с электрода:

$$g(\mu_0) = \begin{cases} 0, & 1 \geq \mu \geq \mu_0, \\ g(-\mu, 0), & \mu_0 \geq \mu \geq 0. \end{cases} \quad (3.4.18)$$

Задача (16) может быть сведена к решению так называемого сингулярного интегрального уравнения [28], решение которого приведено в [33] и имеет вид

$$g(\mu, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1 - \mu_0}{1 + \mu_0^2} \mu. \quad (3.4.19)$$

Зная решение (19), можно рассчитать поток электронов с энергией ε из плазмы на электрод, записав его в виде $q_-(\varepsilon) = n\bar{\mu}\sqrt{2\varepsilon/m_e}$, где

$$\bar{\mu} = \int_{-1}^1 g(\mu) \mu \, d\mu. \quad (3.4.20)$$

Вычисляя $\bar{\mu}$ по формуле (20), находим выражение для потока:

$$q_-(\varepsilon) = (7 - 4\mu_0 - 4\mu_0^3 + \mu_0^4) \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_e}} \frac{n_e}{12(1 + \mu_0^2)}. \quad (3.4.21)$$

Для окончательного соотношения, учитывающего вклад электронов всех энергий в поток быстрых частиц на стенку, необходимо найти распределение электронов по энергиям $f(\varepsilon)$ и усреднить (21) по всем энергиям.

Как уже отмечалось, именно кулоновское рассеяние приводит к установлению равновесия между тепловыми и быстрыми электронами. Если плотность плазмы мала, то кулоновские столкновения электронов между собой не в состоянии эффективно подпитать группу быстрых электронов за счет тепловых. В этом случае плотность быстрых частиц не связана с плотностью плазмы формулой Больцмана. Если же плотность плазмы достаточно велика, то устанавливается термодинамическое равновесие между быстрыми и тепловыми электронами. Это происходит, если выполнено следующее условие:

$$[k_B T_e l_{ee} / (e |\varphi_L| l_{ea})]^{1/2} < 1. \quad (3.4.22)$$

Несмотря на то что в приэлектродном слое $l_{ee} > l_{ea}$, неравенство (22) может выполняться, так как потенциал ленгмюровского слоя превышает тепловую энергию электронов $e |\varphi_L| > k_B T_e$.

Таким образом, возможны условия, когда кулоновское рассеяние достаточно слабо и при исследовании углового распределения его можно не учитывать, однако оно достаточно велико, чтобы распределение быстрых электронов по энергиям можно было считать равновесным. Для равновесного случая, интегрируя $q_-(\varepsilon)$ по энергиям, получим

$$q_- = b_e (n_e(0) v_{ec} / 4) \exp[-e\varphi_L / (k_B T_e)]. \quad (3.3.23)$$

Зависимость коэффициента b_e от $e\varphi_L / (k_B T_e)$ приведена на рис. 3.6, а, причем $b_e = 14/6$ при $\varphi_L = 0$. Полученное решение позволяет получить и распределение плотности быстрых электронов в слое угловой релаксации:

$$n_\varepsilon(\varepsilon, x) = 3q_-(\varepsilon) (x + x_e) \sqrt{m_e / (2\varepsilon)} l_{ea}^{-1}. \quad (3.3.24)$$

Значения параметра x_e в зависимости от отношения $\mu_0 = \left(\frac{e |\varphi_L|}{\varepsilon}\right)^{1/2}$ приведены на рис. 3.6, б, при $\mu_0 = 0$ они составляют $x_e = 0,71 l_{ea}$.

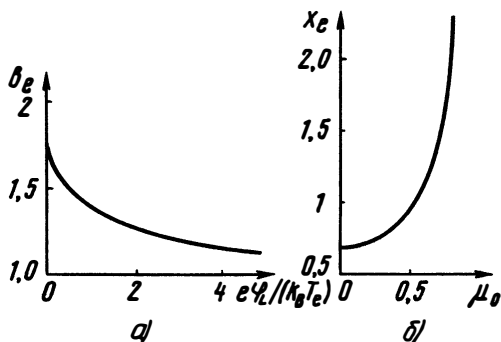


Рис. 3.6, а. Зависимость коэффициента b_e , учитывающего неравновесность приэлектродного слоя, от безразмерного скачка потенциала в ленгмюровском слое $e\varphi_L / (k_B T_e)$

Рис. 3.6, б. Зависимость параметра x_e от $\mu_0 = \left(\frac{e |\varphi_L|}{\varepsilon}\right)^{1/2}$

3.4.3. Структура приэлектродного слоя неравновесной ионизации

Одной из важных проблем приэлектродного слоя является расчет *неравновесной ионизации* в нем. В отличие от равновесной термической ионизации случай неравновесной определяется не только плотностью и температурой плазмы, но также и характером поведения неравновесной функции распределения электронов при высоких энергиях. Действительно, предположим, что температура электронов плазмы совпадает с температурой электродов $T_e = T_э$, тогда можно считать, что входящие из электрода в плазму со скоростью $(2e\epsilon/m_e)^{1/2}$ электроны распределены по Максвеллу со сдвигом энергии от нуля на значение ускорения в лэнгмюровском слое. Поскольку число электронов, имеющих энергию в интервале $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$, равняется $A_1 \{ \exp [- \epsilon / (k_B T_e)] \} \times \sqrt{\epsilon} d\epsilon$, коэффициент пропорциональности A_1 можно выразить через поток частиц в слое:

$$q_{эе} = \int_{\epsilon_0}^{\infty} A_1 (2e\epsilon/m_e)^{1/2} e^{-\epsilon/(k_B T_e)} \sqrt{\epsilon} d\epsilon = A \int_{\epsilon_0}^{\infty} e^{-\epsilon/(k_B T_e)} \epsilon d\epsilon, \quad (3.4.25)$$

где $A = A_1 (2e/m_e)^{1/2}$.

Из (3.4.25) находим

$$A = [q_{эе} / (T_e \epsilon_0)] \exp [- \epsilon_0 / (k_B T_e)]. \quad (3.4.26)$$

Если ϵ_1 — энергия первого возбужденного уровня, то число электронов с N -энергией, большей ϵ_1 ($\epsilon_1 > \epsilon_0$) ~ 1 эВ, входящих в цилиндр единичного сечения с основанием на поверхности электрода за единичное время, можно представить как

$$dN/dt = q_{эе} (\epsilon_1/\epsilon_0) \exp [- (\epsilon_1 - \epsilon_0) / (k_B T_e)]. \quad (3.4.27)$$

Поскольку на больших расстояниях от электрода устанавливается термодинамическое равновесие, весь поток быстрых электронов, выходящих из электрода, поглощается.

Релаксация возмущения происходит как вследствие кулоновских взаимодействий между электронами, так и при неупругих столкновениях с атомами, но поскольку возбужденных атомов мало, достаточно учитывать лишь столкновения с атомами в основном состоянии. Ввиду того что разность энергий между первым и вторым возбужденными уровнями обычно составляет несколько $k_B T_e$, можно ограничиться учетом лишь первого уровня — возбуждение более высоких уровней влияет лишь на релаксацию относительно малого числа электронов в области высоких энергий. Такой подход позволяет из всех неупругих

соударений учитывать лишь соударения с резонансным переходом в первое возбужденное состояние. Учтем также, что кулоновская релаксация происходит на тепловых электронах плазмы за время порядка

$$\tau_K = [\varepsilon_0 / (k_B T_e)] l_{ee} [8 k_B T_e / (m_e \pi)]^{1/2}. \quad (3.4.28)$$

Множитель $\frac{\varepsilon_0}{(k_B T_e)} > 1$ в соотношении (28) учитывает меньшую эффективность кулоновского рассеяния на быстрых частицах.

Если N — число электронов в объеме цилиндра, в который входят быстрые электроны, определяется соотношением (27), то их уменьшение происходит при кулоновских и неупругих соударениях: \dot{N}_K , \dot{N}_{01} . Изменение числа быстрых частиц за счет этих соударений можно записать в виде: $\dot{N}_K = N / \tau_K$, $\dot{N}_{01} = N / \tau_{01}$. Здесь $\tau_{01} = l_{01} / v_{ec}$ — среднее время жизни быстрой частицы вследствие неупругих соударений, $l_{01} = n_a \bar{Q}_{01}$ — длина свободного пробега при этих соударениях, а \bar{Q}_{01} — усредненное сечение неупругого рассеяния.

В стационарном состоянии имеет место баланс рождения и гибели частиц:

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N}_K + \dot{N}_{01} = q_{ze} (\varepsilon_1 / \varepsilon_0) \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k_B T_e}\right) = \frac{N}{\tau_K} + \frac{N}{\tau_{01}}. \quad (3.4.29)$$

Из соотношения (29) находим число частиц в единичном цилиндре

$$N = q_{ze} \frac{\varepsilon_1 \tau_K \tau_{01}}{\varepsilon_0 (\tau_K + \tau_{01})} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k_B T_e}\right) \quad (3.4.30)$$

и полное число резонансных переходов за единичное время, вызываемых быстрыми электронами, эмиттируемыми катодом:

$$\dot{N}_{01} = q_{ze} \frac{\varepsilon_1 \tau_K}{\varepsilon_0 (\tau_K + \tau_{01})} \exp\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{k_B T_e}\right) \quad (3.4.31)$$

Из соотношения (31) видно, что скорость возбуждения атомов неравновесными электронами пропорциональна потоку быстрых электронов и множителю $\exp\left[-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{(k_B T_e)}\right]$, который учитывает разность энергии возбуждения ε_1 и пучка ε_0 . В равновесном случае здесь фигурировал бы множитель $\exp(-\varepsilon_1 / (k_B T_e))$.

Характерный размер области, на котором происходит релаксация возмущений, можно оценить точнее. Быстрый электрон, попав в плазму, начинает диффундировать в ней, одновременно теряя энергию в результате кулоновских столкновений. Релаксация возмущения происходит на расстоянии порядка $l_{ee} \varepsilon_0 / (k_B T_e)$.

Поскольку это расстояние, как правило, значительно больше длины свободного пробега электронов на атомах l_{ea} , электрон в процессе релаксации многократно меняет направление движения, описывая траекторию, аналогичную броуновской частице. Известно, что в этом случае частица, проходя путь $l_{ee}\varepsilon_0/(k_B T_e)$, удаляется от исходной точки на расстояние

$$l_p = [\varepsilon_0 l_{ee} l_{ea} / (3k_B T_e)]^{1/2}. \quad (3.4.32)$$

Если бы все возбужденные атомы ионизовались, то число резонансных переходов в единицу времени \dot{N}_{01} было бы равно числу ионов, образующихся за единичное время на единичной площади катода, т. е. плотности ионного тока, возникающего вследствие неравновесной ионизации. Однако в действительности ионизация возбужденного атома может быть затруднена, и скорость ионизации оказывается меньше значения N_{01} . При этом неравновесные возбуждения приводят прежде всего к увеличению заселенности нижних уровней и плотности излучения, так как значительная часть возбуждений заканчивается высвечиванием или электронным девозбуждением, а не ионизацией. Тем не менее, изменение заселенности нижних уровней быстрыми электронами приводит к увеличению скорости ионизации. Более точный учет неравновесной ионизации требует учета отличия температуры электронов от температуры катода и нахождения функции распределения электронов из кинетического уравнения (11).

Как уже отмечалось, интенсивные соударения электронов с атомами приводят к изотропизации функции распределения электронов, но не приводят к изменению их энергий. Энергетическая релаксация определяется главным образом кулоновским взаимодействием быстрых электронов с тепловыми электронами плазмы. Неравновесную функцию распределения электронов f_e представим в виде

$$f_e(\mu, v, x) = n_e(x) f_0(v) [1 + \Psi(v, x) + \mu \Psi_1(v, x)], \quad (3.4.33)$$

где $\mu = \cos \chi$ (см. рис. 3.5), f_0 — распределение Максвелла, нормированное на температуру T_e тепловых электронов плазмы. Считается, что функция Ψ_1 , учитывающая угловую анизотропию распределения, удовлетворяет условию: $\Psi_1 \ll 1 + \Psi$.

Функция Ψ в области больших энергий, где $f_0(v)$ экспоненциально мала, может превосходить единицу, однако даже при $\Psi \gg 1$ возмущения функции распределения почти не вносят вклад в плотность и энергию плазмы, которые определяются максвелловской частью. Таким образом, при $\Psi \gg 1$ плотность неравновесных быстрых электронов n_e хотя и мала по сравнению

с плотностью тепловых, но велика по сравнению с плотностью быстрых электронов в состоянии термического равновесия:

$$n_6(T_e)/n_6(T_a) > 1, \text{ но } n_6(T_e)/n_e(T_e) \ll 1.$$

Кулоновские взаимодействия быстрых электронов с тепловыми электронами плазмы, как отмечалось в п. 3.4.3, учитываются в кинетическом уравнении (11) в приближении Фоккера—Планка. В этом представлении интеграл столкновения электронов с электронами для функции (33) может быть записан в виде

$$I_{ee} = \frac{n_e v}{\eta l_{ee}} \frac{\partial}{\partial \eta} f_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad (3.4.34)$$

где $\eta = m_e v^2 / (2k_B T_e)$.

На длине релаксации l_p макроскопические характеристики — плотность и температуру электронов, потенциал плазмы — можно считать, как отмечалось выше, постоянными. Интеграл столкновений электронов с атомами представим в виде, аналогичном уравнению (12):

$$I_{ea} = (v/l_{ea}) \left(0,5 \int_{-1}^1 f_e(v, \mu') d\mu' - f_e(v, \mu) \right). \quad (3.4.35)$$

Таким образом, кинетическое уравнение для неравновесной функции распределения электронов может быть записано в виде

$$\mu f_0 n_e \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) = \frac{n_e}{\eta l_{ee}} \frac{\partial}{\partial \eta} f_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + l_{ea}^{-1} \left(0,5 \int_{-1}^1 f_e(v, \mu') d\mu' - f_e(v, \mu) \right) \quad (3.4.36)$$

Уравнение (36) содержит две неизвестные функции Ψ и Ψ_1 , однако они не являются независимыми, и связь между ними можно установить. Для этого уравнение (36) домножим на $d\mu$ и проинтегрируем от -1 до $+1$. В результате получим

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = (\eta l_{ee})^{-1} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right). \quad (3.4.37)$$

Домножая (36) на $d\eta$ и интегрируя его по пространству скоростей, получим

$$\Psi_1 = -l_{ea} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.4.38)$$

Таким образом, уравнение (36) эквивалентно системе двух уравнений (37), (38), которую можно свести к одному. Подставляя (38) в (37), приходим к уравнению относительно одной неизвестной функции

$$\frac{\eta l_{ee} l_{ea}}{3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0. \quad (3.4.39)$$

В области энергий, близких к энергии скачка потенциала, $\varepsilon \sim \varepsilon_0 - e|\varphi_L| \leq \varepsilon_1$ и $\eta = \eta_0 = \varepsilon_0/(k_B T_e)$. Вводя безразмерную координату

$$\xi = x/l_p, \quad (3.4.40)$$

из (39) приходим к безразмерному уравнению для функции Ψ :

$$L\Psi \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0. \quad (3.4.41)$$

Если учесть неупругие столкновения, ведущие к возбуждению атомов, то вместо (41) следует использовать уравнение

$$L\Psi = k[\Psi - (N_1 - 1)], \quad (3.4.42)$$

где $k = l_{ea}\varepsilon_0/(l_{01}k_B T_e)$, $N_1 = n_{av}/n_B$, n_{av} — неравновесная концентрация атомов в возбужденном состоянии, n_B — равновесная (больцмановская) концентрация атомов в возбужденном состоянии.

Рассмотрим теперь граничные условия для уравнений (41), (42). В силу малой плотности группы быстрых электронов по сравнению с плотностью плазмы $n_e/n_e \ll 1$ полагаем для всех $\xi > 0$:

$$\lim \Psi(\eta, \varepsilon) = 0, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (3.4.43)$$

При больших энергиях потребуем ограниченности производной функции Ψ :

$$\lim \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = \infty. \quad (3.4.44)$$

Поскольку на больших расстояниях x от электрода (в выбранных переменных при $\xi \rightarrow \infty$) функция распределения стремится к равновесной $\Psi_1 = 0$, согласно (38), должно иметь место:

$$\lim \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty. \quad (3.4.45)$$

Если кинетическая энергия электрона $\varepsilon = m_e v^2/2$ на границе с катодом меньше энергии катодного падения $\varepsilon_0 = e|\varphi_L|$, то электрон плазмы, движущейся к катоду, отражается от потенциального барьера в ленгмюровском слое и поэтому должны выполняться следующие условия симметрии:

$$f(v, \mu, 0) = f(v, -\mu, 0). \quad (3.4.46)$$

Используя представление функции распределения (33), находим

$$f(v, \mu) - f(v, -\mu) = 2\mu\Psi_1(v, 0) = 0.$$

Заменяя из (38) Ψ_1 через $\partial\Psi/\partial\xi$, имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} (\xi = 0) = 0, \eta < \eta_0. \quad (3.4.47)$$

При $\eta > \eta_0$ после ускорения электронов на катодном падении их функция распределения имеет вид

$$f_+ = q_{ze} \frac{m_e^2}{2\pi (k_B T_k)^2} e^{-\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{k_B T_k}} S(\mu - \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon}) \quad (3.4.48)$$

Здесь T_k — температура катода, а $S(x)$ — функция единичного скачка:

$$S(x) = 1, x > 0, S(x) = 0, x < 0.$$

Поток частиц с энергией ε , выходящий из катода в плазму, можно получить, умножая (48) на $v_x = v \cos \chi \equiv v\mu$ и интегрируя по μ (интегрирование по азимуту дает 2π). Таким образом, для потока частиц в плазму имеем

$$q_+(\varepsilon) = q_{ze} v \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon} \left(\frac{m_e}{k_B T_k} \right)^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{k_B T_k}\right). \quad (3.4.49)$$

Для потока из плазмы на электрод используем (33) и учтем, что из плазмы на электрод выходят только те частицы, у которых $|\mu| > (\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}$. Умножив (33) на μv и интегрируя по μ от -1 до $+1$, получим

$$q_-(\varepsilon) = -2\pi v n_e f_0 \left\{ 0,5(1 + \Psi) \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) + \frac{l_{ea}}{3} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{3/2}\right] \right\} \quad (3.4.50)$$

Суммарный же поток на достаточном расстоянии от электрода составит:

$$q_n(\varepsilon) = -\frac{4\pi n_e v}{3} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.4.51)$$

Приравнявая (51) разности потоков в положительном и отрицательном направлениях $q_+ - q_-$, получим граничное условие для Ψ на электроде при $\eta > \eta_0$:

$$\Psi - \frac{2l_{ea}}{3} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{3/2}\right] \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{q_{ze} \left(\frac{m_e}{k_B T_k}\right)^2}{2\pi f_0 n_e} e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{k_B T_k}} - 1 \quad (3.4.52)$$

Таким образом, на электроде при $\xi = 0$ имеет место следующее граничное условие:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \eta < \eta_0; \Psi - g \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -1 + B\theta^2 \exp[(1 - \Theta)(\eta - \eta_0)], \eta > \eta_0, \quad (3.4.53)$$

где $B = 4 [q_{\text{эе}} / (n_e(0)v_{\text{ес}})] \exp \eta_0$, $\Theta = T_e / T_k = 4\eta_0 l_{\text{еа}} / (3l_p)$, а l_p — определяется соотношением (32).

В общем случае сформулированная задача может быть решена только численно. Однако в частном случае, когда сечение неупругого рассеяния мало ($k = \varepsilon_0 l_{\text{ее}} / (k_B T_e l_{\text{еа}}) \ll 1$), т. е. когда можно ограничиться только упругими столкновениями, удается найти аналитическое решение уравнения (41). В переменных ξ , $\varepsilon = \eta - \eta_0$ и $u = \Psi \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ задача (41) сводится к построению решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} - \frac{u}{4} = 0, \quad (3.4.54)$$

с граничными условиями:

$$u(\varepsilon, \xi) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow \pm \infty; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow 0, \quad (3.4.55)$$

при $\xi = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, & \varepsilon < 0, \\ u - \frac{\partial u}{\partial \xi} = \left[B\Theta^2 \exp\left(\frac{1-\Theta}{2}\varepsilon\right) \right] - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right), & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Уравнение (54)* аналогично уравнению (2.1.89), рассмотренному в п. 2.1.6, оно может быть эффективно решено методом Винера—Хопфа (см. [28] и [4] из списка литературы к гл. III). Найдя неравновесную функцию распределения, можно подсчитать полное число неравновесных возбуждений на единицу площади электрода во всем приэлектродном слое:

$$\dot{N}_{01} = \int_0^\infty \frac{dN(x)}{dt} dx = l_p \int_0^\infty \frac{dN}{dt}(\xi) d\xi. \quad (3.4.56)$$

Можно показать (см. [33]), что для расчета интегральной скорости неравновесных возбуждений (56) достаточно знать фурье-преобразование функции $u(\varepsilon, 0)$ на электроде. В некоторых случаях это фурье-преобразование можно определить прямо из граничных условий (53).

Наиболее простое соотношение получается, если все эмитированные катодом электроны выходят с одной и той же скоростью, т. е. когда мы имеем пучок монохроматических электронов с энергией ε_0 . В этом случае граничное условие для функции u при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -4q_{\text{эе}} [\delta(\varepsilon_0) / (v_{\text{ес}} n_e)] \exp \eta_0,$$

и для N_{e1} получается простое соотношение

$$N_{e1} = q_{\text{эе}} [\varepsilon_0 l_{\text{ее}} / (l_{01} k_B T_e)] \exp[-\varepsilon_1 / (k_B T_e)]. \quad (3.4.57)$$

Этот результат практически совпадает с элементарным соотношением (31), если $l_{01} \gg \varepsilon_0 l_{ee} / (k_B T_e)$. В случае использования более общих граничных условий (53) и после подстановки полученного решения в (56) для уравнения (54) получается следующее представление полного числа неравновесных возбуждений:

$$\dot{N}_{01} = q_{ze} \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{k_B T_e}\right) K_1(\Theta_3, \varepsilon_1, \varepsilon_0 l_{ee} / (l_{ea} k_B T_e)) - (n_e(0) v_{ee} / 4) \left[\exp(-\varepsilon_1 / k_B T_e) K_2(\Theta_3, \varepsilon_1, \varepsilon_0 l_{ee} / (l_{ea} k_B T_e)) \right] \right] \quad (3.4.58)$$

Входящие в (58) коэффициенты $K_1 K_2$ имеют вид:

$$K_1 = \left[\varepsilon_0 l_{ee} / (l_{ea} k_B T_e) \right] \left[\Theta_3 - \exp\left(\frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)(\Theta_3 - 1)}{k_B T_e}\right) / [\Theta_3(\Theta_3 - 1)] \right], \quad (3.4.59)$$

$$K_2 = \left(3 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k_B T_e} \right) \left[\varepsilon_0 l_{ee} / (l_{ea} k_B T_e) \right] - K_1; \quad \Theta_3 = T_e / T_s.$$

В неравновесном скачке ($\gamma \ll 1$) соотношение (58) отличается от соотношения (31) вторым слагаемым, зависящим от хаотического потока, которое всегда отрицательно и не зависит от плотности потока эмиттированных электронов q_{ze} . Это отличие источника неравновесных возбуждений связано с различием температур электронов и электрода и учитывает охлаждение электронов около электрода, поскольку электроны эмиссии имеют меньшую температуру $T_e < T_s$. При равенстве температур электронов и электрода $\Theta_3 = 1$, и можно пользоваться уравнениями:

$$K_1 = \left(3 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k_B T_e} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 l_{ee}}{\varepsilon_0 l_{ea}} \right), \quad K_2 = 0, \quad (3.4.60)$$

$$\dot{N}_{01} = q_{ze} \left(3 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k_B T_e} \right) (\varepsilon_0 l_{ea} / k_B T_e l_{01}) \exp\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{k_B T_e}\right).$$

Соотношение (60) отличается от аналогичного соотношения для монохроматического пучка электронов (57) последним множителем, учитывающим тепловой разброс частиц. Приведенные выражения показывают, что неравновесная ионизация оказывается существенной, если ток эмиссии $j_s = eq_{ze}$ превышает некоторое критическое значение, определяемое из соотношения (58).

В случае большого сечения неупругого рассеяния [$\varepsilon_0 / (k_B T_e) > > 1$], а имеющего пороговый характер $Q_{01} = \alpha_{01}(\eta - \eta_1)$, и когда $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / (k_B T_e) > 1$, также можно найти решения уравнения (42) с граничным условием (53) и рассчитать скорость неравновесной ионизации:

$$\dot{N}_{01} = q_{ze} \left[2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k_B T_e}} + 1 + \sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{k_B T_e}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}} \right] \exp\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{k_B T_e}\right). \quad (3.4.61)$$

В соотношении (61) не входит сечение неупругого рассеяния, так как при $k > 1$ скорость возбуждения определяется более медленным процессом — диффузией электронов, обусловленной кулоновским взаимодействием электронов.

Полученные решения позволяют рассчитать более точно значения коэффициентов, входящих в соотношения для потока частиц с электрода в плазму (см. п. 3.3.2, 3.3.3):

$$q_{e+} = b_{e1} q_{3e} - b_{e2} (n_e v_{ec}/4) \exp[-\varepsilon_0/(k_B T_e)], \quad (3.4.62)$$

где

$$b_{e1} = 1 - [2/(\pi g)] [\theta_3 (\theta_3 - 1)]^{-1/2} \ln(\theta_3 + \sqrt{\theta_3 - 1});$$

$$b_{e2} = 1 - 2/(\pi g), \quad g = 4\varepsilon_0 l_{ea}/(3l_p k_B T_e).$$

При произвольном соотношении между сечениями неупругого и кулоновского рассеяния можно пользоваться соотношением типа (58), но с другими значениями коэффициентов рассеяния. Функции K_1, K_2 в этом случае можно представить в виде:

$$K_1(\Theta, \varepsilon_1, k) = \{\Theta^2 k (0,5 + \sqrt{k + 0,25})^{-3} \times$$

$$\times [\Theta(\Theta(\Theta-1)-k)^{-1} + (1-\Theta)^{-1}(1-\exp(\varepsilon_1-\varepsilon_0)(\Theta-1)/(k_B T_e))]\} -$$

$$- k [\Theta(\Theta-1)-k]^{-1} \exp\left[\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)(\Theta-1)}{k_B T_e}\right], \quad (3.4.63)$$

$$K_2 = K_1(1, \varepsilon_1, k) - K_1(\Theta, \varepsilon, k), \quad (3.4.64)$$

где $K_1(1, \varepsilon, k)$ получается из (63) заменой $\Theta = 1$.

Зная неравновесную функцию распределения электронов, можно подсчитать число возбуждений в единичном объеме за единичное время:

$$\frac{dn_e}{dt} = n_0 n_e v_{ec} \int_{\eta_1}^{\infty} \Psi(\eta, \xi) Q_{01}(\eta) \eta e^{-\eta} d\eta \quad (3.4.65)$$

Расчет скорости неравновесного возбуждения уровня $6p$ цезия в зависимости от расстояния от электрода по вышеприведенной формуле и найденному решению представлен на рис. 3.7.

Отметим, что приведенные результаты определяют верхний предел влияния неупругих соударений, поскольку в них не учитывается обратный процесс — девозбуждение. Соотношение (65) показывает, что скорость неравновесного возбуждения в зависимости от параметров задачи — плотности тока эмиссии j_3 , степени неравновесности T_e/T_3 , отношения $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ — изменяется немонотонно по длине слоя релаксации. Это связано с механизмом возникновения неравновесной ионизации. Она возникает вследствие того, что электроны, образующие ток, ускоряются

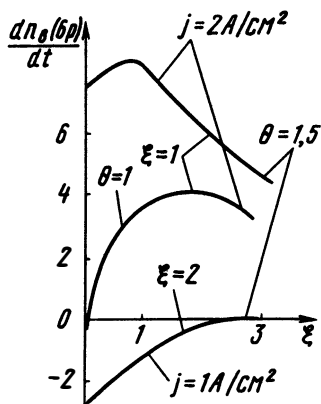


Рис. 3.7. Зависимость скорости неравновесного возбуждения уровня $6p$ цезия dn_e/dt от безразмерного расстояния ξ от электрода для различных значений параметров задачи: плотности электрического тока j , отношения температуры электронов к температуре катода $\theta = T_e/T_k$ и энергии ϵ

на катодном падении и возмущают функции распределения в области высоких энергий.

Если электрод холоднее, чем плазма, то основная доля положительных возмущений вносится при энергии ϵ порядка энергии катодного падения в интервале $\epsilon_0 = e|\varphi_L| < \epsilon < \epsilon_0 + k_B T_e < \epsilon_1$. Вследствие этого непосредственно вблизи электрода влияние возмущений незначительно. Более того, скорость возбуждения может даже замедлиться из-за низкой температуры электрода ($dn_e/dt < 0$, см. рис. 3.7), однако вносимые током возмущения не могут быть локализованы в той области энергии, где они первоначально возникли. Кулоновские взаимодействия быстрых электронов с тепловыми вызывают диффузию возмущений в пространстве энергий и приводят к расширению области их локализации. В результате возмущения, возникшие ниже порога возбуждений на некотором расстоянии от электрода, «переползают» в область энергии выше порога $\epsilon > \epsilon_1$. Эта диф-

фузия и является причиной возникновения максимума скорости возбуждения с удалением от электрода.

Может возникнуть вопрос, каким образом взаимодействие быстрых электронов с тепловыми приводит к увеличению их энергий? Ответ таков: «нагревается» экспоненциально малая доля электронов, хотя большая часть их и теряет энергию при взаимодействии с плазмой. Однако статистический характер взаимодействия неизбежно приводит к тому, что определенная доля быстрых электронов в течение некоторого времени накапливает энергию.

Для расчета скорости ионизации в релаксационном слое необходимо совместно решать уравнения для функции распределения свободных электронов (42) или (41) совместно с уравнением кинетики связанных электронов, позволяющих определить заселенность возбужденных уровней n_0, n_1, n_2 при заданной концентрации атомов n_a и свободных электронов n_e . Поскольку кинетика заселения уровней может быть тесно связана с излучением, в общем случае необходимо также решать интегральное уравнение переноса излучения. Для всех этих задач необходимо

знать зависимости сечений соответствующих процессов от энергии (4.5). В большинстве случаев поставленная задача может быть решена только численно.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. М., 1971.
2. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме/В кн.: Вопросы теории плазмы, Под ред. М. А. Леонтовича. М., 1961. Т. 1. С. 273.
3. Де Грот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., 1964.
4. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М., 1982.
5. Химия плазмы/Под ред. Б. М. Смирнова. М., 1987. Вып. 1—4.
6. Смирнов Б. М. Физика слабоионизованной плазмы. М., 1978.
7. Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М. Явления переноса в слабоионизованной плазме. М., 1975.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.
9. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регистер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., 1970.
10. Chew G., Goldberger M., Low F. The Boltzmann equation and the onefluid hydromagnetic equation in the absence of particle collision//Proc. Roy. Soc., 1956, A236, N1204, pp. 112—118 Русск. пер. в кн.: Проблемы современной физики. М., 1957. Вып. 7. С. 139—145
11. Волков Т. Ф. Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы/В кн.: Вопросы теории плазмы; Под ред. М. А. Леонтовича. М., 1964. Т. 4. С. 3—19.
12. Александров И. Л., Напартович А. П., Старостин А. Н. Уравнение переноса электронов в неравновесной слабоионизованной плазме в электрическом и магнитном полях//Физика плазмы. 1982. Т. 9, Вып. 5. С. 1061—1075.
13. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., 1976.
14. Монин А. С., Яглом А. М. Статическая гидромеханика. М., 1965. Т. 1; 1967. Т. 2.
15. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов. М., 1980. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М., 1987.
16. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма/Пер. с нем.; Под ред. В. А. Фабриканта. М., 1961.
17. Грановский В. А. Электрический ток в газе (установившийся ток)/Под ред. Л. А. Сены и В. Е. Голанта. М., 1971.
18. Велихов Е. П., Ковалев А. С., Рахимов А. Т. Физические явления в газоразрядной плазме. М., 1987.
19. Месяц Г. А., Проскуровский Д. И. Импульсный разряд в вакууме. Новосибирск, 1984.
20. Александров А. Ф., Рухадзе А. А. Физика сильноточных электроразрядных источников света. М., 1976.
21. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. М., 1979.
22. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. М., 1983.
23. Ватажин А. Б. Развитие тепловых полей в электрической дуге, зажигающейся на точечном электроде в сносящем потоке газа//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 2. С. 91—99
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986.
25. Руткевич И. М., Синкевич О. А. Волны и неустойчивости в низкотемпературной плазме/В кн.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М., 1981. Т. 14. С. 127—204.
26. Елецкий А. В., Рахимов А. Т. Неустойчивости в плазме газового разряда/

- В кн.: Химия плазмы; Под ред. Б. М. Смирнова. М., 1977. Т. 4. С. 123—167
27. Дыхне А. М. Теория одномерной контракции дуг/В кн.: Некоторые вопросы исследования газоразрядной плазмы. Л., 1970. С. 84—94.
28. Морс Ф. М., Фешбах И. Г. Методы теоретической физики/Пер. с англ., Под ред. С. П. Аллилуева, Н. С. Кошлякова, А. Д. Мышкиса и А. Г. Свешникова М., 1958. Т. 1; 1960. Т. 2.
29. Синкевич О. А. Нелинейная теория винтовой неустойчивости электрической дуги во внешнем магнитном поле//ДАН СССР Т 279, Вып 4. С. 852—857.
30. Приэлектродные процессы в дуговых разрядах/Жуков М. Ф. и др. Новосибирск, 1982
31. Бродский А. М., Гуревич Ю. Я. Теория электронной эмиссии из металлов. М., 1973
32. Королев Ю. Д., Месяц Г. А. Автоэмиссионные и взрывные процессы в газовом разряде. Новосибирск, 1982.
33. Стаханов И. П., Черковец В. Е. Физика термоэмиссионного преобразователя. М., 1985.
34. Стаханов И. П. и др. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии/Под ред. И. П. Стаханова. М., 1973.
35. Сливков И. Н. Процессы при высоком напряжении в вакууме. М., 1986
36. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М., 1978.
37. Климантович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов М., 1980.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков М., 1979
2. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., 1961.
3. Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М., 1963. Т. 1—15
4. Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров С. А. Основы физики плазмы М., 1977.
5. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. М., 1982
6. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М., 1977.
7. Иванов А. А., Соболева Т. К. Неравновесная плазмохимия. М., 1978.
8. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы/Пер. с англ.; Под ред. А. М. Дыхне. М., 1979.
9. Соболев В. Д. Физические основы электронной техники. М., 1979.
10. Теория термической электродуговой плазмы/Под ред. М. Ф. Жукова и А. С. Коротеева. Новосибирск, 1987. Т. 1—2.
11. Фридрихов С. А., Мовнин С. М. Физические основы электронной техники. М., 1982.
12. Чен Ф. Введение в физику плазмы/Пер. с англ.; Под ред. М., 1987

К гл. I

1. Артемов В. И., Синкевич О. А. Численное моделирование взаимодействия электрической дуги с потоком газа//Теплофизика высоких температур. 1986 Т 24; Модель турбулентности. № 1 С 95—104; Дуга в длинном цилиндрическом канале. № 2 С. 288—294.
2. Веденов А. А. Задачник по физике плазмы. М., 1981.
3. Компаниец В. З., Освянников А. А., Полак Л. С. Химические реакции в турбулентных потоках газа и плазмы М., 1979.
4. Очерки физики и химии плазмы М., 1971.
5. Сатон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики/

Пер. с англ.; Под ред. *Е. И. Янговского* М., 1968

6 *Фортов В. С., Якубов И. Т.* Физика неидеальной плазмы Черноголовка, 1984.

К гл. II

1. *Баранов В. Ю., Ульянов К. Н.* Контракция положительного столба// Журнал технической физики. 1969. Т. 29 Вып. 2 С 249—268.

2. *Батенин В. М., Чиннов В. Ф.* Резонансное излучение и энергетический баланс неравновесной аргон-калиевой плазмы/В кн.: Некоторые вопросы исследования газоразрядной плазмы и создания сильных магнитных полей. Л., 1970 С. 74—83.

3. *Дмитриев А. С., Синкевич О. А.* К вопросу об эффективной проводимости неоднородной плазмы (нелинейные ионизационные волны)//Теплофизика высоких температур 1977. Т. 15. № 3. С 486—495

4. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. М., 1970 Т. 1; 1977. Т. 2.

5. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы. М., 1975.

6. *Синкевич О. А.* Ионизационные волны конечной амплитуды в частично ионизированной плазме//Теплофизика высоких температур. 1975. Т. 13. № 1. С. 53—60.

7. *Чернетский А. В.* Введение в физику плазмы. М., 1969.

8. *Ховатсон А. М.* Введение в теорию газового разряда/Пер. с англ., Под ред. *И. И. Иванчика*. М., 1980.

9. *Цендин Л. Д.* Распределение электронов по энергии в слабоионизированной плазме с током и поперечной неоднородностью//ЖЭТФ, 1974. Т. 66. Вып. 3. С. 1638—1650.

10. *Hoh F. C., Lenert B.*, Diffusion processes in plasma column in a longitudinal magnetic field/Physics of fluids 1960. V. 3. № 4, P. 600—607

К гл. III

1. *Бакшт Ф. Г., Игитханов Ю. Л.* Об энергетической релаксации электродного катодного пучка в слабо ионизированной плазме//Журнал технической физики. 1967. Т. 37. Вып. 7. Ч. I. С. 1277—1285; Ч. II. С. 1298—1308.

2. Вакуумные дуги Теория и приложения/Под ред. *Дж. Лафферти*: Пер с англ./Под ред. *В. И. Раховского*. М., 1982.

3. *Стаханов И. П.* Неравновесная ионизация в низковольтном дуговом разряде//Журнал технической физики. 1967. Т. 37. Вып. 7. Ч. I С. 1277—1285, Ч. II. С. 1286—1292

4. *Стаханов И. П., Черковец В. Е.* Влияние температуры катода на скорость неравновесной ионизации//ibid. 1970. Т. 40. Вып. 2. С 1298—1308.

5. *Храпак А. Г., Якубов И. Т.* Электроны в плотных газах и плазме М., 1981.

6. *Черковец В. Е.* О кинетическом коэффициенте отражения//Журнал технической физики 1971. Т. 41. Вып. 11. С 2577—2581

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Основные гидродинамические модели плазмы	10
§ 1.1. Одножидкостная гидродинамика плазмы	11
1.1.1. Основные уравнения гидродинамики столкновительной плазмы	12
1.1.2. Гидродинамика идеально проводящей плазмы	19
1.1.3. Гидродинамика бесстолкновительной анизотропной плазмы	20
§ 1.2. Двухжидкостная гидродинамика плазмы	23
1.2.1. Возникновение горячих электронов. Ионизационное равновесие в многокомпонентной плазме	23
1.2.2. Гидродинамика плазмы с горячими электронами и холодными тяжелыми частицами	28
1.2.3. Гидродинамика полностью ионизованной двухкомпонентной плазмы	36
§ 1.3. Многожидкостная гидродинамика плазмы и процессы на границах	41
1.3.1. Плазма с неравновесными внутренними степенями свободы	41
1.3.2. О ламинарных и турбулентных плазменных течениях	42
1.3.3. Система уравнений турбулентных течений сильностолкновительной плазмы	45
1.3.4. Граничные условия для плазменных задач	47
Глава II. Положительный столб. Процессы в объеме	49
§ 2.1. Установившийся положительный столб электрического разряда	49
2.1.1. Образование положительного столба разряда. Амбиполярная диффузия	50
2.1.2. Разряд в термически неравновесной плазме (тлеющий разряд)	53
2.1.3. Термически равновесный электрический разряд, стабилизированный стенками (электрическая дуга)	63
2.1.4. Излучающие термически равновесные разряды	76
2.1.5. Разряд в продольном потоке охлаждающего газа	81
2.1.6. Разряд в поперечном потоке охлаждающего газа	85
§ 2.2. Контракция электрических разрядов	91
2.2.1. Элементарные понятия об устойчивости. Контракция	93
2.2.2. Устойчивость электрической дуги	96
2.2.3. Тепловая контракция в термически равновесном цилиндрическом разряде	98
2.2.4. Контракция в тлеющем разряде	104
2.2.5. Контракция (расслоение) плоского разряда	113
§ 2.3. Квазистационарные разряды (качественный анализ)	119
2.3.1. Страты в положительном столбе	121
2.3.2. Конвекция в термически неравновесном разряде в продольном магнитном поле	124
2.3.3. Токовая конвекция в термически равновесных разрядах во внешнем и собственном магнитных полях	127

Глава III. Приэлектродные явления	131
§ 3.1. Механизмы эмиссии электрического тока	132
3.1.1. Термоэлектронная эмиссия	135
3.1.2. Автоэлектронная эмиссия	137
3.1.3. Автотермоэлектронная эмиссия	140
3.1.4. Вторичная эмиссия с холодного катода (элементарные представления)	141
§ 3.2. Приэлектродные слои в разряде низкого давления	142
3.2.1. Бесстолкновительный плоский слой объемного заряда (вакуумный диод)	142
3.2.2. Катодный и анодный слои глеющего разряда	147
3.2.3. Понятие о процессе взрывной эмиссии	153
§ 3.3. Приэлектродный слой объемного заряда	155
3.3.1. Термодинамически равновесный ленгмюровский слой	155
3.3.2. Приэлектродные слои в отсутствие термодинамического равновесия	158
3.3.3. Слой на неэмиттирующем электроде	166
§ 3.4. Структура столкновительного приэлектродного слоя	167
3.4.1. Релаксационный (кнудсеновский) приэлектродный слой в перекомпенсированном режиме	168
3.4.2. Структура релаксационного слоя вблизи неэмиттирующего электрода	171
3.4.3. Структура приэлектродного слоя неравновесной ионизации	177
Цитированная литература	187
Дополнительная литература	188

Учебное издание

**Синкевич Олег Арсеньевич,
Стаханов Игорь Павлович**

**ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
(стационарные процессы
в частично ионизованном газе)**

Зав. редакцией учебно-методической литературы по физике и математике
Е. С. Гридасова. Редактор С. А. Крылов. Оформление художника
В. В. Гарбузова. Художественный редактор В. И. Пономаренко.
Технический редактор И. В. Резникова. Корректор Р. К. Косинова.

ИБ № 9006

Изд. № ФМ-970. Сдано в набор 10.10.90. Подп. в печать 06.08.91.
Формат 60 × 88¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Объем 11,76 усл. печ. л., 12,01 усл. кр.-отт., 11,25 уч.-изд. л. Тираж 5000 экз.
Цена 80 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Текстовые диапозитивы изготовлены на фотонаборном оборудовании издательства
с применением ЭВМ.

Отпечатано в Московской типографии № 8, Госкомпечати СССР, 101898,
Москва, Центр, Хохловский пер., 7. Тип. зак. 1429.

