FESTIGKEITSLEHRE FÜR INGENIEURE

VON

H. WINKEL

FESTIGKEITSLEHRE
FÜR INGENIEURE

VON

DIPL.-ING. H. WINKEL†
STUDIENRAT AN DER BEUTHSCHULE

NACH DEM TODE DES VERFASSERS
BEARBEITET UND ERGÄNZT
VON

DR.-ING. K. LACHMANN

MIT 363 TEXTABBILDUNGEN

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1927

ISBN 978-3-662-39211-9 ISBN 978-3-662-40223-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-40223-8

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN 1927
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 1ST EDITION 1927

Vorwort.

Am 11. Januar 1926 starb ganz unerwartet Studienrat Dipl.-Ing. Hans Winkel, ein vornehmer Mensch, ein ausgezeichneter Ingenieur, ein hervorragender Lehrer.

H. Winkel hatte an der Beuth-Schule zu Berlin Festigkeitslehre vorgetragen, und als Frucht dieser Tätigkeit entstand das vorliegende Buch, dessen Eigenart durch die Entstehung gekennzeichnet ist: in erster Linie für Lernende und Lehrende bestimmt, sind die theoretischen Betrachtungen möglichst ausführlich, elementar und leicht verständlich gegeben. Eine große Anzahl von Beispielen sollen den Lernenden mit der praktischen Anwendung der Theorie bekannt machen, die sichere Handhabung der Formeln erleichtern und den Grund zur selbständigen Anwendung der gebrauchten Sätze legen.

Das Buch umfaßt das Gesamtgebiet der Festigkeitslehre. Dementsprechend werden zunächst die verschiedenen Arten der Festigkeit (Zug, Druck, Biegung, Drehung, Schub, Knickung) und die zusammengesetzte Festigkeit behandelt. Es folgt eine ausführliche Berechnung der statisch unbestimmten Systeme und der schwach und stark gekrümmten Stäbe; insbesondere werden Federn, Hohlkörper und Gefäße, Platten und umlaufende Räder und Scheiben untersucht. Der letzte Abschnitt des Buches bringt die Wärmespannungen.

Besonderer Wert wurde auf die ausführliche Angabe der benutzten Literatur gelegt, um dem Leser ein vertieftes Studium einzelner Probleme zu ermöglichen. Einzelne Abschnitte, z. B. die Berechnung der gekröpften Welle und des statisch unbestimmten Freiträgers sowie das Kapitel über Wärmespannungen, sind früheren Arbeiten entnommen, die H. Winkel in der Zeitschrift „Der praktische Maschinen-Konstrukteur" veröffentlicht hat. Ferner sind die Kapitel, welche H. Winkel für das von H. Dubbel herausgegebene Taschenbuch für den Maschinenbau verfaßt hat, für das vorliegende Buch benutzt worden.

Die Bearbeitung und Ergänzung der Handschrift wurde von der Verlagsbuchhandlung dem Unterzeichneten übertragen. Die Umstellung einzelner Teile empfahl sich als zweckmäßig; Ungenauigkeiten wurden beseitigt und einzelne theoretische Ableitungen (z. B. S. 142—145, 195—199) exakter gefaßt.

Die Behandlung der Bohrmaschinen, mit der die Handschrift abbrach, wurde zu Ende geführt. Die von dem Herausgeber neu bearbeiteten Abschnitte sind durch einen Stern (*) im Inhaltsverzeichnis kenntlich gemacht.

Möge das Werk die Hoffnung des verstorbenen Verfassers erfüllen, dem Studierenden ein Führer, dem Ingenieur ein Helfer in der Praxis zu sein.

Besonderer Dank gebührt der Verlagsbuchhandlung für die Sorgfalt, mit der das Buch ausgestattet und die Abbildungen hergestellt wurden.

Berlin, den 1. Juli 1927.

K. Lachmann.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Aufgabe der Festigkeitslehre. Die Festigkeitslehre untersucht das Verhalten eines festen Körpers unter dem Einfluß von Kräften. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich der Körper im Gleichgewicht befindet. Gleichgewicht ist aber vorhanden, wenn der Körper in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung ist. Im allgemeinen werden wir den ruhenden Körper betrachten und die gefundenen Gesetze auf den im gleichförmigen Bewegungszustande befindlichen übertragen (umlaufende Wellen, Schwungräder, Scheiben).

Die an einem Körper angreifenden Kräfte, zu denen auch die Auflagerkräfte gerechnet werden, heißen äußere Kräfte. Sie unterliegen wegen der Forderung des Gleichgewichtes den Gleichgewichtsbedingungen, die für Kräfte in der Ebene lauten:

I. Die algebraische Summe sämtlicher Seitenkräfte nach zwei — meist aufeinander senkrecht stehenden — Richtungen muß gleich Null sein;

II. Die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt bzw. auf eine beliebige Achse, muß gleich Null sein.

Die erste Aufgabe eines Festigkeitsnachweises oder einer Festigkeitsberechnung wird also in der Ermittlung des statischen Gleichgewichtes des zu untersuchenden Bauteiles bestehen. Bei ungleichförmig bewegten Körpern — Anlassen oder Anfahren von Maschinen — gestattet die Anwendung des d'Alembertschen Prinzips die Annahme eines statischen Gleichgewichtszustandes.

Den angreifenden äußeren Kräften leistet der Körper Widerstand; man bezeichnet diese physikalische Eigenschaft der Körper mit Kohäsion und versteht darunter die Zusammenhangskraft der kleinsten Teilchen oder Moleküle. Denkt man sich ein Seil durch zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte angegriffen, so wird es straff oder gespannt. Da jedes Teilchen des Seiles in Mitleidenschaft gezogen wird, befindet sich das ganze Seil im Zustande der Spannung. Die widerstehenden Kräfte des angegriffenen Körpers heißen Spannungen und sind innere Kräfte; sie wirken den äußeren entgegen und halten ihnen das Gleichgewicht. Zu ihrer Ermittlung denkt man sich stets den zu untersuchenden Körper durchgeschnitten oder einen Teil desselben herausgeschnitten, bringt an den Schnittflächen die Spannungen als äußere Kraft an und sieht nunmehr den Körperteil genau so wie zuvor den ganzen Körper als einen Körper an, der unter dem Einfluß aller an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein muß.

Es ist ein Grundsatz der Festigkeitslehre, daß man den herausgeschnitten gedachten Körperteil für sich betrachtet und die Gleichgewichtsbedingungen auf ihn anwendet, nachdem man die Spannungen an den Schnittflächen als äußere Kräfte den gegebenen Kräften hinzugefügt hat.

Die Größe der in den Schnittflächen auftretenden Spannungen zu berechnen, ist die erste Grundaufgabe der Festigkeitslehre. Sie führt zu der Festigkeitsbedingung: die errechneten Spannungen dürfen einen für zulässig erachteten Wert nicht überschreiten. Was als zulässig anzusehen ist, lehrt die Erfahrung.

Unter dem Einfluß von Kräften ändert jeder Körper seine Gestalt. Diese physikalische Eigenschaft der Körper heißt Dehnsamkeit oder Elastizität, wenn die erlittene Gestaltsänderung nach dem Aufhören der Kraftwirkung wieder verschwindet. Im Gegensatz zu dem dehnsamen oder elastischen Körper steht der bildsame oder plastische Körper, bei dem jede Kraftwirkung eine bleibende Gestaltänderung hervorruft. Als Kräfte übertragende Baustoffe scheiden die bildsamen Körper aus. Die zweite Grundaufgabe der Festigkeitslehre besteht darin, die Größe der Formänderung zu berechnen, die ein dehnsamer Körper unter dem Einfluß von Kräften erfährt. Neben die Festigkeitsbedingung tritt die Elastizitätsbedingung, daß die errechnete Formänderung einen für zulässig erachteten Wert nicht überschreitet.

Beide Untersuchungen, die des Spannungs- und des Formänderungszustandes, werden stets nebeneinander hergehen müssen, da wir erst aus der zu erwartenden Formänderung einen Anhalt über die Verteilung der Spannungen in einer Schnittfläche gewinnen können.

Die Grundlage über das Verhalten der Baustoffe unter dem Einfluß von Kräften bildet der Versuch. Insofern wäre die Festigkeitslehre eine reine Erfahrungswissenschaft und bliebe damit vollständig in dem Rahmen der neueren Physik, die ja auch erst dann Fortschritte gezeitigt hat, als man sich entschlossen hatte, durch Messungen den zahlenmäßigen Zusammenhang der die Erscheinung beeinflussenden physikalischen Größen aufzudecken. Aber ebensowenig wie die allgemeine Physik konnte sich die Festigkeitslehre mit dem Versuch allein begnügen. Die bei dem Versuch gemachten Beobachtungen bedurften der Erklärung, die immer nur auf Grund von Annahmen möglich ist. Zum Beispiel konnte die Belastung eines Stabes zahlenmäßig festgestellt werden, die den Bruch herbeiführt, aber damit hatte man noch nicht die Frage beantwortet, welche Umstände den Bruch des Baustoffes bedingen. Hier ist der Punkt, wo die Theorie einsetzt, die somit gleichberechtigt neben den Versuch tritt und gleich diesem die Festigkeitslehre beherrscht. Ihre Hilfsmittel sind Überlegung und Rechnung. So groß auch die Erfolge sein mögen, die die Festigkeitslehre als Wissenschaft der Mathematik verdankt, niemals darf sie den Zusammenhang mit der Erfahrung verlieren, die immer der Prüfstein jeder Theorie bleiben wird. In allen Fällen, wo sie zu Ergebnissen gelangt, die im Widerspruch zu der Erfahrung stehen oder doch zu stehen scheinen, hat der Versuch die Entscheidung, und alle Annahmen, die zur Aufstellung von Gesetzen führen, sind stets sorgfältig auf ihre Zulässigkeit zu prüfen.

I. Grundbegriffe.

1. Längenänderungen und Normalspannungen.

Der einfachste Versuch, Klarheit über das Verhalten eines Baustoffes zu gewinnen, ist der Zugversuch. Wir denken uns einen Rundeisenstab, in dem man im Abstande l [mm] zwei Marken leicht eingeritzt hat, in eine Zerreißmaschine gespannt, deren grundsätzliche Anordnung, Abb. 1 zeigt. Belastet man den Stab, so zeigt eine sorgfältige Messung

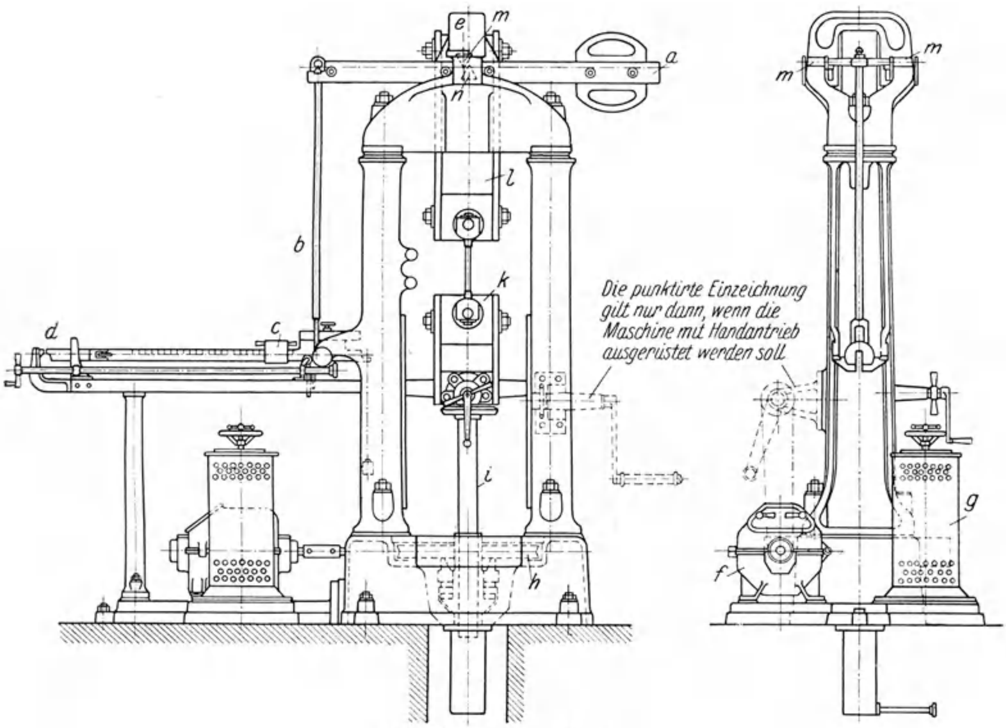


Abb. 1. Zerreißmaschine.

eine Vergrößerung des Abstandes der beiden Marken und eine Verringerung des Durchmessers, die sich zunächst über die ganze Stablänge gleichmäßig verteilt. Um beliebige Messungen an verschiedenen Baustoffen zuverlässig vergleichen zu können, ist man übereingekommen, die auf die ursprüngliche Länge bezogene Verlängerung als Kennzeichen der Formänderungsfähigkeit des Baustoffes anzusehen. Ist l_1 [mm] die Länge des belasteten Stabes, so ist seine Verlängerung

$$\Delta l = l_1 - l \text{ [mm]}$$

und die auf die ursprüngliche Länge bezogene Verlängerung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\text{Verlängerung}}{\text{ursprüngliche Länge}}. \qquad (1)$$

Das Verhältnis ε ist eine unbenannte Zahl und heißt Dehnung oder auch bezogene (spezifische) Dehnung. Aus der Gleichung (1) ergibt sich als Verlängerung eines Stabes von l [mm] Länge

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l \text{ [mm]}. \tag{2}$$

In gleicher Weise legt man die Verringerung des Durchmessers fest und schreibt mit d als ursprünglichem und d_1 als verkleinertem Durchmesser

$$\varepsilon_q = \frac{d - d_1}{d}. \tag{3}$$

Auch ε_q ist eine Verhältniszahl und als solche ohne Benennung; sie heißt Querzusammenziehung und steht mit ε in der Beziehung

$$m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \frac{\text{Dehnung}}{\text{Querzusammenziehung}}. \tag{4}$$

m heißt Poissonsche Zahl und liegt für feste Körper zwischen 3 und 4. Für Metalle setzt C. v. Bach $m = \frac{10}{3}$.

Unter der Einschnürung Ψ versteht man die Verringerung des Querschnittes, bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt; es ist

$$\psi = \frac{\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}}. \tag{5}$$

Es ist üblich, diese Zahl nur für den Bruchquerschnitt anzugeben, und zwar in Hundertteilen des ursprünglichen Querschnittes, so daß

$$\psi = \frac{\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d'^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot 100 \text{ [vH]} \tag{5a}$$

die Einschnürung eines Stabes ist, dessen Durchmesser an der Bruchstelle d' [mm] beträgt. Hat z. B. ein Rundeisenstab von $d = 20$ mm Durchmesser an der Bruchstelle einen Durchmesser $d' = 15$ mm, so ist

$$\psi = \frac{\frac{\pi \cdot 20^2}{4} - \frac{\pi \cdot 15^2}{4}}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} \cdot 100 = \frac{314{,}2 - 137{,}5}{314{,}2} \cdot 100 = 43{,}7\,\%.$$

Um zu erfahren, welche Art der Beanspruchung der gezogene Stab erfährt, schneiden wir ihn senkrecht zur Stabachse durch (Abb. 2) und fügen die an der Schnittstelle auftretenden Spannungen als äußere Kräfte hinzu. Über die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt sagt die Beobachtung nichts; wir nehmen an, die Spannungen mögen sich gleichmäßig verteilen, und halten diese Annahme überall stets für zulässig, wenn die Wirkungslinie der angreifenden Kräfte mit der Stabachse zusammenfällt. Der Anteil der Kraft, der auf die Flächeneinheit des Querschnittes entfällt, heißt bezogene (spezifische) Spannung oder kurz Spannung; sie fällt mit der Richtung der Stabachse zusammen, steht also senkrecht oder normal zum Querschnitt. Spannungen, die normal zum Querschnitt gerichtet sind, heißen **Normal**spannungen und werden mit dem Buchstaben σ bezeichnet; die durch sie hervorgerufenen Formänderungen sind Längenänderungen. Da Spannungen nach Größe und Richtung zu unterscheiden sind, sind sie Vektoren und werden zeichnerisch durch gepfeilte Strecken dargestellt. Trägt man sie senkrecht zur Achse des Querschnittes auf und verbindet ihre Endpunkte, so wird diese Verbindungslinie bei gleichmäßiger Verteilung eine Parallele zur Querschnittachse. Das so entstandene Rechteck heißt Spannungsschaubild oder Spannungsdiagramm (Abb. 2).

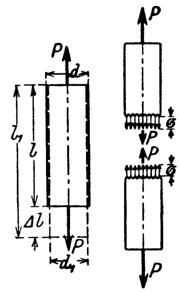


Abb. 2. Geschnittener Stab.

In der Festigkeitslehre ist 1 kg die Einheit der Kraft, 1 cm² die Einheit der Fläche; trägt der Stab mit F cm² eine Last von P kg, so ist seine Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F} \; [\mathrm{kg/cm^2}]. \tag{6}$$

Dem paarweisen Auftreten der äußeren Kräfte P, das die Gleichgewichtsbedingungen erfordern, entspricht das paarweise Auftreten der inneren Kräfte oder Spannungen. Beim nicht geschnittenen Stabe erscheinen die inneren Kräfte nicht, da sie sich wechselseitig aufheben (Abb. 2).

2. Der Zugversuch.

Er wird so durchgeführt, daß man die Belastung stufenweise steigert und die zugehörigen Formänderungen mißt, aus denen ε und σ berechnet werden. Um ein anschauliches Bild über den Zusammenhang dieser beiden Größen zu erhalten, pflegt man ε als Abszisse und σ als Ordinate in einem rechtwinkligen Achsenkreuz aufzutragen (Abb. 3). Die Kurve $\sigma = f(\varepsilon)$ heißt Spannungsdehnungsschaubild oder Spannungsdehnungsdiagramm; sie zeigt zunächst ein langsames Anwachsen der Dehnung bei steigender Belastung, und zwar sind die Dehnungen den Spannungen verhältnisgleich. Die mathematische Form dieses Satzes lautet

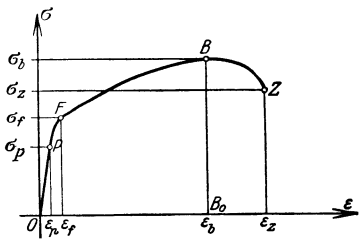


Abb. 3. $\sigma = f(\varepsilon)$.

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma, \tag{7}$$

worin α die unveränderliche Verhältniszahl bedeutet. Diese einfache Beziehung besteht aber nur bis zu einer bestimmten Belastungsgrenze. Wird dieser Grenzwert, den wir Proportionalitätsgrenze nennen, überschritten, so wachsen die Dehnungen rascher als die Spannungen; die Kurve $\sigma = f(\varepsilon)$ zeigt dieses Verhalten des Baustoffes durch eine leichte Krümmung an (Abb. 3), während sie unterhalb der Proportionalitätsgrenze geradlinig verläuft. Die Proportionalitätsgrenze σ_p ist eine Spannung und wird in kg/cm² angegeben. Belastet man den Stab weiter, so tritt eine bedeutende Verlängerung bei geringer Zunahme der Belastung ein; der Stab beginnt zu fließen. Die Spannung σ_f, bei der das Fließen eintritt, heißt Fließ- oder Streckgrenze und wird ebenfalls in kg/cm² angegeben. Hat man einen bearbeiteten Stab mit polierter Oberfläche in die Zerreißmaschine gespannt, so zeigen sich bei Beginn des Fließens feine Linien, die sich unter 90° kreuzen und mit der Stabachse einen Winkel von 45° bilden; sie heißen Fließfiguren (Abb. 4) und lassen deutlich erkennen, daß eine Umlagerung der Moleküle im Innern des Stabes stattgefunden hat. Mit weiter gesteigerter Belastung verschwinden die Fließfiguren, dafür zeigt sich aber bald an einer Stelle des Stabes eine mit bloßem Auge zu erkennende Einschnürung. Der Querschnitt wird sichtbar kleiner, und infolgedessen fällt der Wagehebel der Maschine ab; d. h. der Stab hat seine größte Tragfähigkeit erreicht. Die Spannung, die er in diesem Augenblicke hat, heißt Zugfestigkeit; sie wird auf den ursprünglichen Querschnitt bezogen, und mit K_z bezeichnet. Um einen vorzeitigen Bruch des Stabes zu vermeiden, muß man die Belastung verringern,

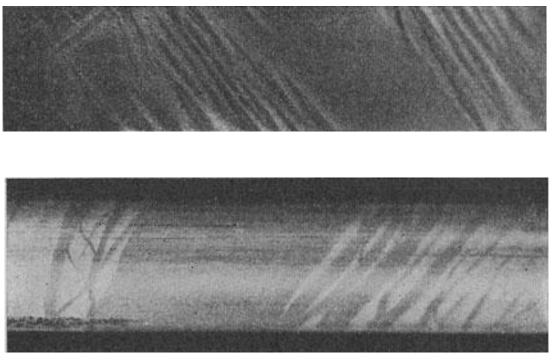


Abb. 4. Fließfiguren.

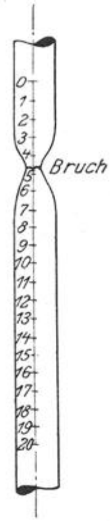


Abb. 5. Einschnürung.

also die Belastungskurbel zurückdrehen. Dabei fällt die Spannungsdehnungskurve von B auf Z. Während dieses Teiles des Versuches ist auch die Verlängerung des Stabes mit bloßem Auge zu erkennen, aber sie beschränkt sich auf die der Einschnürungstelle unmittelbar benachbarten Teile (Abb. 5). Endlich tritt der Bruch ein.

Vom versuchtstechnischen Standpunkt aus ist es zweifellos nicht richtig, sämtliche Spannungen auf den ursprünglichen d. h. nicht verkleinerten Querschnitt zu beziehen. Man könnte dadurch zu der Annahme verleitet werden, daß die tatsächliche Beanspruchung mit der Verringerung der Belastung während der letzten Versuchsperiode fiele. Das ist natürlich nicht der Fall, wie die Umrechnung der Spannung auf den wirklichen, der jeweiligen Belastung entsprechenden Querschnitt zeigt. C. v. Bach, dem wir in erster Linie unsere Kenntnisse vom Verhalten der Baustoffe verdanken, hat für einen von ihm geprüften Stab die Umrechnung durchgeführt (Abb. 6), die ein erhebliches Anwachsen der tatsächlichen Beanspruchung erkennen läßt. Da aber für den entwerfenden Ingenieur der nicht verformte Querschnitt maßgebend ist, so ist es üblich geworden, überall mit ihm zu rechnen, was um so mehr berechtigt erscheint, als der Bauteil niemals in dem Maße belastet werden darf, wie es bei der Durchführung eines Zerreißversuches geschieht.

Die Spannungsdehnungslinie der Abb. 6 ist noch in anderer Richtung lehrreich. Sie zeigt nach dem Erreichen der Fließgrenze ein plötzliches und starkes Abfallen der Spannung. Das heißt, um ein Strecken des Baustoffes aufrecht zu erhalten, muß die Belastung nach dem Erreichen der Streckgrenze verringert werden. Stetigkeit zwischen Dehnungen und Spannungen besteht erst wieder nach der Überwindung der Fließperiode, was sich äußerlich am Stabe durch Verschwinden der Fließfiguren bemerkbar macht. C. v. Bach sagt über diese Erscheinung[1]: „Streckt sich der Stab weiter unter einer Belastung, die erheblich kleiner ist als die, bei der das Strecken begann, so kann eine obere und eine untere Streckgrenze unterschieden werden derart, daß die obere Streckgrenze aufgefaßt wird als diejenige Spannung, bei der das Strecken beginnt, und die untere Streckgrenze als der kleinste Wert der Spannung, auf den die Belastung während des Streckens sinkt, oder als die kleinste Spannung, unter der das Strecken noch vor sich geht.“

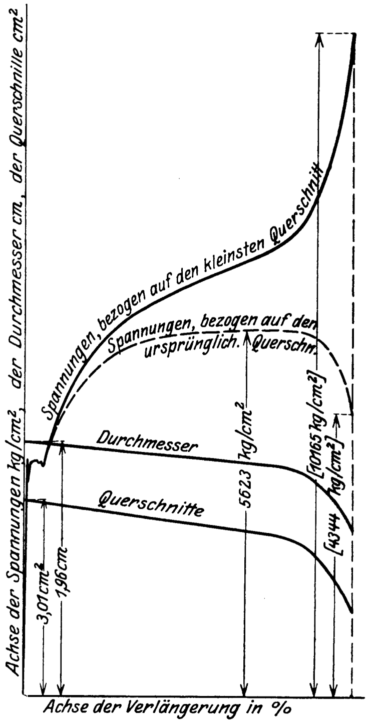


Abb. 6. σ effektiv.

Unsere Kenntnis vom Verhalten des Baustoffes wäre unvollständig, wenn wir nicht auch die Vorgänge bei der Entlastung eines Stabes untersuchten. In diesem Falle hätte jeder Belastungssteigerung, die stufenweise erfolgt, eine Entlastung zu folgen. Dabei zeigt sich, daß bei geringen Belastungen und demzufolge kleinen Spannungen die erlittene Formänderung vollständig verschwindet; der Stab zeigt nach der Entlastung die ursprüngliche Entfernung der beiden Marken. Wir sagen, der Baustoff ist vollkommen dehnsam oder vollkommen elastisch. Steigern wir die Belastung stetig, so erreichen wir einen Punkt, wo die Verlängerung nicht mehr auf Null zurückgeht. Die Spannung, bei der sich eine bleibende Formänderung zeigt, heißt Elastizitätsgrenze; sie wird, wie alle Spannungen, ebenfalls in kg/cm² angegeben. Die wieder verschwindende, auf die Längeneinheit

[1] Bach, C. v.: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl., S. 10.

bezogene Längenänderung heißt **federnde** oder **elastische Dehnung** im Gegensatz zu der **bleibenden Dehnung**, die sich nach dem Überschreiten der Elastizitätsgrenze einstellt. Die Formänderung des zerrissenen Stabes ist bleibend. Als Maß für die Güte des Baustoffes wird die bleibende Dehnung nach dem Bruche in Hundertteilen der ursprünglichen Länge angegeben; man nennt sie **Bruchdehnung** und ermittelt sie im allgemeinen durch Messung der aneinander gelegten Bruchstücke. Mit l' als Entfernung der Marken nach dem Bruche wird

$$\varepsilon = 100 \cdot \frac{l'-l}{l} \, [\%]$$

die Bruchdehnung.

Da einmal selbst sorgfältige Messungen von einander verschiedene Elastizitätsgrenzen bei ein- und demselben Baustoff ergeben, aus dem mehrere Probestäbe angefertigt sind, und zum andern die Ermittlung der Elastizitätsgrenze umständlich und zeitraubend ist, pflegt man als Elastizitätsgrenze diejenige Spannung zu bezeichnen, bei der die bleibende Dehnung 0,02—0,03% beträgt. Auf keinen Fall darf die Elastizitätsgrenze als mit der Proportionalitätsgrenze zusammenfallend angesehen werden.

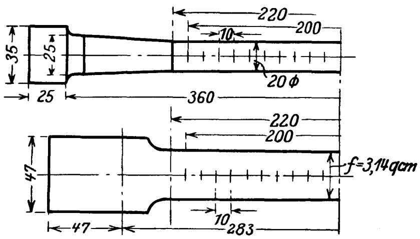


Abb. 7 u. 8. Normalstäbe.

Beim Vergleichen der Versuchsergebnisse hat sich heraus gestellt, daß die Form der Probe stäbe nicht ohne Einfluß auf die Güteziffern der Baustoffe ist. Durch internationale Vereinbarungen wurde der Rundeisenstab von 20 mm Durchmesser und 200 mm Meßlänge (Abb. 7) als Normalstab festgelegt. Für Flacheisen wählte man einen gleichgroßen Querschnitt $f = 3{,}14 \text{ cm}^2$ mit der gleichen Meßlänge (Abb. 8). Wenn der zu prüfende Baustoff die Herstellung von Normalstäben nicht gestattet, sollen Maße innegehalten werden, die in ganz bestimmten Beziehungen zu denen des Normalstabes stehen (Proportionalstäbe). Von diesen Vereinbarungen weicht man heute insofern ab, als für Stäbe aus Rundeisen das fünffache oder das zehnfache des Durchmessers als Meßlänge angenommen werden.

3. Der Druckversuch.

Wegen der zu erwartenden Gefahr des Ausknickens werden nur kurze Stäbe dem Druckversuch unterworfen, bei denen der Schnitt durch die Längsachse ein Quadrat ist. Dabei ist aber zu beachten, daß eine gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt viel weniger wahrscheinlich ist als beim Zerreißversuch, wo diese Annahme infolge der großen Länge des Stabes zum mindesten für den mittleren Teil als zutreffend gelten darf. Noch ungünstiger liegen die Verhältnisse in Rücksicht auf die Formänderung. Es ist unvermeidlich, daß die Grund- und Deckflächen der Probekörper durch die Backen der Prüfmaschine fest gepreßt werden, so daß die sehr beträchtliche Reibung ein seitliches Ausweichen dieser Flächenteilchen verhindert. Die Vergrößerung des Durchmessers eines zylindrischen Probekörpers wird sich deshalb nur im mittleren Querschnitt voll ausbilden können und nach den Enden zu abnehmen; der Zylinder geht in die Tonnenform über. Um diese Nachteile zu vermeiden, hat man die Länge der Druckstäbe vergrößert und beschränkt sich auf die Beobachtung des mittleren Stabteiles. Versuche, die an Probekörpern vorgenommen wurden, deren Höhe gleich dem vier- bis achtfachen Betrage des Durchmessers ist, haben gezeigt, daß Spannungen und Formänderungen in derselben Beziehung stehen wie beim Zerreißversuch. Deshalb darf man die für den Zugstab geltenden Grundbegriffe auch auf den Druckstab zu übertragen; doch gelten diese Beziehungen nur, solange das Geradliniengesetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ Gültigkeit hat.

Ferner lehrten vergleichende Versuche, daß die Druckfestigkeit um so kleiner ist, je größer die Höhe des Probekörpers gewählt wird. A. Föppl schlägt die Bezeichnung Würfelfestigkeit für würfelförmige Körper vor, deren Höhe also gleich der Seitenlänge ist, und unterscheidet sie von der Druckfestigkeit schlechthin, die einen gleichförmigen Spannungszustand bei axialem Kraftangriff zur Voraussetzung hat. Entsprechend dem Auftragen der Zugdehnungen nach der positiven Richtung der x-Achse (Abb. 3) pflegt man die Druckdehnungen und Druckspannungen in entgegengesetzter Richtung einzutragen, so daß die Spannungsdehnungskurve im ersten, für Druck im dritten Quadranten eines rechtwinkligen Achsenkreuzes verläuft (Abb. 9).

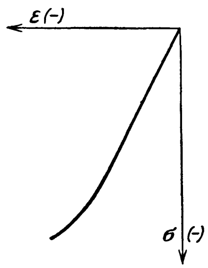


Abb. 9. $\sigma = f(\varepsilon)$ Druck.

4. Beziehungen zwischen Dehnungen und Normalspannungen.

Aus dem Verlaufe des Zugversuches ergab sich das Spannungsdehnungsschaubild der Abb. 3. Den mathematischen Zusammenhang zwischen den Dehnungen ε und den Spannungen σ gibt Gleichung (7) in der Form

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma. \tag{7}$$

Solange die Dehnungen den Spannungen verhältnisgleich sind, ist α ein Festwert oder eine Konstante und die Kurve $\varepsilon = f(\sigma)$ eine Schräge durch den Nullpunkt (Abb. 3). Das durch Gleichung (7) wiedergegebene Gesetz stammt von dem englischen Physiker Hooke, der es, wie Baumann in einem lesenswerten Aufsatz in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (1917, S. 117) nachweist, als Naturgesetz ausgesprochen hat, ohne durch Versuche genügende Unterlagen dafür zu haben. Die späteren Forschungen haben ergeben, daß das Gesetz von Hooke nur für sehr wenige Baustoffe in Frage kommt und auch bei diesen nur innerhalb bestimmter Belastungsgrenzen, die wir auf S. 5 Proportionalitätsgrenze nannten. Zu den Stoffen, die dem Geradliniengesetze folgen, gehören Flußeisen und Stahl, dagegen nicht das

Gußeisen und das Holz. Eingehende Untersuchungen über das Verhalten des Gußeisens hat C. v. Bach angestellt, der sein in den Jahren 1885—1896 gewonnenes Versuchsmaterial W. Schüle zur Verfügung stellte. Die Prüfung ergab, daß das Potenzgesetz

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^n \tag{8}$$

zwar eine gute Übereinstimmung zeigte; doch reichte das Material nicht aus, um die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes zu erweisen. Es erscheint überhaupt nach Bachs Auffassung fraglich, ob das elastische Verhalten aller Materialien durch eine einfache mathematische Funktion zum Ausdruck gebracht werden kann.

Mit Baustoffen, die dem Geradliniengesetz nicht folgen, wird der Zugversuch in gleicher Weise durchgeführt, d. h. aus den Belastungen P werden die Spannungen $\sigma = P : F$ und aus den Verlängerungen Δl die Dehnungen $\varepsilon = \Delta l : l$ berechnet. Zur Bestimmung von α und n logarithmieren wir die Gleichung (8) und erhalten

$$\log \varepsilon = \log \alpha + n \cdot \log \sigma \,. \tag{8a}$$

Setzt man $\log \varepsilon = y$ und $\log \sigma = x$, so stellt die Gleichung (8a) eine gerade Linie dar, wenn man die Logarithmen der Spannungen auf der x-Achse und die Logarithmen der Dehnungen auf die y-Achse aufträgt. Statt die Umrechnung auf Logarithmen durchzuführen, bedient man sich zweckmäßig des im Handel erhältlichen Logarithmenpapiers. Aus der Aufzeichnung entnimmt man $\log \alpha$ als Abschnitt auf der y-Achse und $n = \operatorname{tg} \varphi$ ist der Tangens des Neigungswinkels der Geraden.

Infolge der einfachen Form des Hookeschen oder des Geradliniengesetzes wurde dieses zur Grundlage der gesamten Lehre von der Festigkeit und Formänderung der Körper, trotzdem die Erfahrung gegen seine allgemeine Anwendung spricht. Somit erscheint das Fundament der theoretischen Festigkeitslehre ohne ausreichende Sicherheit, und die Frage ist nicht unberechtigt, ob sich überhaupt strengere Untersuchungen lohnen. Darauf läßt sich entgegnen, daß einmal für den am häufigsten verwendeten Baustoff, das Flußeisen, das Geradliniengesetz innerhalb bestimmter Belastungsgrenzen gilt; zum andern darf nicht übersehen werden, daß theoretische Untersuchungen nicht selten zeigen, in welcher Richtung Versuche anzustellen sind. Gerade die Wechselbeziehungen sind es, die befruchtend auf unsere Wissenschaft wirken.

In Gleichung (7) war α als Proportionalitätsfaktor eingeführt; es wird nunmehr seine physikalische Bedeutung zu entwickeln sein. Setzt man $\sigma = 1$ kg/cm², so folgt aus $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$

$$\varepsilon = \alpha \cdot 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{1}\,[\text{kg/cm}^2];$$

es wird also α zu einer Dehnung für die Spannung $\sigma = 1$ kg/cm². α heißt Dehnungszahl und hat die Benennung cm²/kg. Wir haben unter α die Dehnung zu verstehen, die ein Stab infolge der Spannung 1 kg/cm² erfährt. Will man noch ε durch $\Delta l : l$ ersetzen, so erhält man

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \sigma}$$

und mit $l = 1$ cm und $\sigma = 1$ kg/cm²

$$\alpha = \frac{\Delta l}{1 \cdot 1}.$$

Es ist also α die Verlängerung, die ein Stab von 1 cm Länge durch die Spannung 1 kg/cm² erfährt.

Endlich läßt sich noch σ durch $P:F$ ausdrücken, so daß

$$\alpha = \frac{\Delta l \cdot F}{l \cdot P}$$

wird. Setzt man hierin $l = 1$ cm; $P = 1$ kg; $F = 1$ cm², so wird

$$\alpha = \frac{\Delta l \cdot 1}{1 \cdot 1}$$

zur Verlängerung, die ein Würfel mit der Seitenlänge 1 cm unter dem Einfluß einer Kraft von 1 kg erfährt. Diese Zahl ist bei den meisten Baustoffen natürlich sehr klein und durch unmittelbare Messung überhaupt nicht festzustellen. Sie läßt sich nur aus größeren Belastungen, die meßbare Formänderungen hervorrufen, berechnen, wie wir es auf S. 5 bei der Ermittlung der Dehnungs-Spannungslinie vorausgesetzt haben. Für Flußeisen ist z. B.

$$\alpha = 1 : 2150000\ [\text{cm}^2/\text{kg}] = 0{,}000000465\ [\text{cm}^2/\text{kg}].$$

So anschaulich der Begriff der Dehnungszahl α als Dehnung für 1 kg/cm² Spannung auch ist, so wenig angenehm gestaltet sich das Rechnen mit ihr. Man verwendet deshalb noch heute in der Festigkeitslehre den umgekehrten Wert von α und setzt

$$E = \frac{1}{\alpha}\ [\text{kg/cm}^2].$$

Das Geradliniengesetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ liefert

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot l}{\Delta l};$$

es wird E zu einer Spannung σ, wenn $\Delta\, l = 1$ cm und $\iota = 1$ cm wird. Die Gleichung besagt in Worten, daß E diejenige Spannung ist, unter deren Einfluß der Stab seine Länge verdoppelt. Da aber die meisten Baustoffe lange vorher brechen, so findet E in dem Versuch überhaupt keine Stütze, es kann nur durch Rechnung aus α gewonnen werden. Es wäre ohne Zweifel richtiger, E fallen zu lassen und nur noch mit α zu rechnen. C. v. Bach, der stets dafür eingetreten ist, führt auch seine Rechnungen mit α durch, doch ist die übrige Fachliteratur seinem Beispiele nicht gefolgt. Allzusehr fällt es ja schließlich nicht ins Gewicht, ob mit α oder E gerechnet wird; das Wesentlivhe ist doch, daß die Rechnung zutreffende Ergebnisse liefert. Allerdings ist eins zu beachten, worauf Bach besonders hinweist: wenn versuchstechnisch α die logisch richtige Zahl ist, dann wird α als Mittelwert aus den Einzelmessungen α_1 und α_2

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

und demzufolge

$$\frac{1}{E} = \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{2}, \text{ d. h. } E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}.$$

Es wäre also falsch, E als algebraischen Mittelwert aus den Einzelwerten E_1 und E_2 zu berechnen.

E heißt Dehnmaß oder Elastizitätsmodul und liegt für Flußeisen zwischen 2150000 kg/cm² und 2200000 kg/cm².

5. Winkeländerungen und Schubspannungen.

Ein Quader (Abb. 10) werde in der unteren Grundfläche festgehalten und in der oberen durch eine Kraft P angegriffen, die senkrecht zur Stabachse gerichtet ist. Es sei angenommen, daß sich P über jeden Querschnitt senkrecht zur Stabachse gleichmäßig verteile; die durch P hervorgerufenen Spannungen fallen bei dieser Art des Kraftangriffs in die Ebene des Querschnittes. Um uns ein Bild von diesem Belastungszustande zu machen, denken wir uns das Quader durch geschnitten (Abb. 11) und die untere Faserschicht des oberen Teiles so weit vergrößert, daß wir sie anfassen können. Ziehen wir jetzt mit P, so wird sich der obere abgetrennte Teil gegen den unteren festgehalten gedachten Teil verschieben. Im nicht geschnittenen Stabe sollen nun alle Teilchen des Querschnittes gleichmäßig der Kraft P widerstehen. In gleicher Weise wie bei dem gezogenen Stabe legen wir fest: der Anteil der Kraft P, der auf 1 cm² des Querschnittes entfällt, sei die Schubspannung τ, gemessen in kg/cm². Hat der Querschnitt F cm² Flächeninhalt, so kommt bei gleichmäßiger Verteilung der Spannungen über dem Querschnitt auf 1 cm²

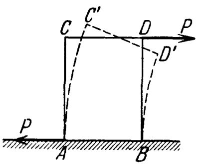


Abb. 10. Schubquader.

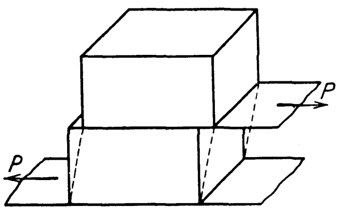


Abb. 11. Schubquader (geschnitten).

$$\tau = \frac{P}{F} \text{ [kg/cm}^2\text{]}. \tag{9}$$

Die Schubspannung τ ist zwar ebenso wie die Normalspannung σ nach Größe und Richtung zu unterscheiden, doch nicht in dem Sinne der Gegensätzlichkeit von Zug und Druck; es fehlt bei ihr der Begriff der Umkehrbarkeit.

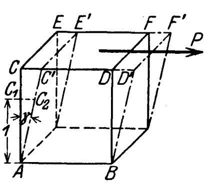


Abb. 12. Schubquader.

Unter dem Einfluß der Kraft P möge das Quader die gestrichelte Form (Abb. 12) annehmen, von der zunächst dahingestellt sein mag, ob sie bei der gedachten Art des Kraftangriffs tatsächlich eintritt. Man kann die Formänderung dadurch kennzeichnen, daß man sagt: die wagerechten Schichten des Stabes verschieben sich gegeneinander und zwar um so mehr, je weiter sie von dem festgehaltenen Einspannungsquerschnitt entfernt sind. Das Quader $ABCDEF$ geht in das schiefe Prisma $ABC'D'E'F'$ über und der vordere rechte Winkel CAB wird zu dem spitzen Winkel $C'AB$. Für den Fall, daß die Verschiebungen verhältnisgleich den Entfernungen von der Grundfläche wachsen, kann die Änderung γ des rechten Winkels als Maß für die Größe der Verschiebung angesehen werden. Solange es sich um kleine Formänderungen handelt, wie es in der gesamten Festigkeitslehre stets vorausgesetzt wird, ist

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{CC'}{CA} = \frac{C_1 C_2}{1},$$

wobei γ im Bogenmaß gemessen werden muß. Man nennt γ die Schiebung und versteht darunter die Strecke, um die sich zwei 1 cm voneinander entfernte Querschnitte unter dem Einfluß der Schubspannung τ gegeneinander verschieben. Entsprechend dem Geradliniengesetz von Hooke für Normalspannungen setzt man auch bei den Schubspannungen die Formänderungen den Spannungen verhältnisgleich und schreibt

$$\gamma = \beta \cdot \tau, \tag{10}$$

wobei β innerhalb eines gewissen Spannungsgebietes als unveränderlich angesehen werden darf. Aus

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau} \; [\mathrm{cm^2/kg}]$$

folgt $\beta = \gamma$, wenn $\tau = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$ wird. Demnach ist β die Größe der Schiebung für die Einheit der Spannung und heißt Schubzahl; ihr umgekehrter Wert $1 : \beta = G$ heißt Gleitmaß oder Gleitmodul und wird in $\mathrm{kg/cm^2}$ gemessen. Man kann auch sagen: unter der Einwirkung einer Schubspannung $\tau = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$ verschieben sich zwei 1 cm voneinander entfernte Querschnitte um die Strecke β cm.

Jetzt wäre nachzuprüfen, ob die angenommene Formänderung auch wirklich eintritt. Die Belastung nach Abb. 10 würde einem dehnsamen Körper die Form $ABC'D'$ (Abb. 10) geben, bei der die Faserschicht AC verlängert, die Faserschicht BD verkürzt ist. Um die geforderte Formänderung zu erhalten, müßte man BD strecken, AC kürzen. Damit also der Stab (Abb. 10) in die gestrichelte Form der Abb. 12 übergeht, müssen Kräfte Q vorhanden sein, die Längenänderungen der senkrechten Faserschichten verhindern. Zu demselben Ergebnis führt die Betrachtung der Abb. 13, die das freigemachte Quader wiedergibt. Die angreifende Kraft P erfordert in der Grundfläche eine gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft P; beide Kräfte P bilden ein Kräftepaar mit dem rechts drehenden Moment $P \cdot c$, dem ein gleichgroßes, links drehendes Kräftepaar entgegenwirken muß, wenn das freigemachte Quader im Gleichgewicht sein soll. Aus

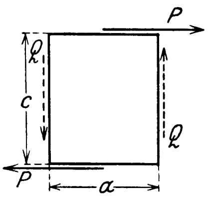


Abb. 13. Schubquader.

$$P \cdot c = Q \cdot a \text{ folgt mit } \tau_1 = \frac{P}{a \cdot b} \text{ und } \tau_2 = \frac{Q}{b \cdot c}$$

$$\tau_1 \cdot a \cdot b \cdot c = \tau_2 \cdot b \cdot c \cdot a \text{ oder } \tau_1 = \tau_2.$$

Das rechnerisch gefundene Ergebnis heißt in Worten: **Schubspannungen treten stets paarweise in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen auf und sind von gleicher Größe.**

Über die Beziehungen zwischen der Dehnungszahl α und der Schubzahl β bzw. dem Dehnmaß E und dem Gleitmaß G siehe S. 53.

6. Formänderungsarbeit.

Eine Kraft von P kg leistet die Arbeit $P \cdot s$ in mkg, wenn sie längs eines Weges s wirkt, der in die Richtung der Kraft fällt. Da sich der Stab unter dem Einfluß der Kraft P verlängert, muß die Kraft P Arbeit leisten. Diese Arbeit heißt **Formänderungsarbeit**. Beim Zugversuch wird die Belastung stetig gesteigert, so daß P veränderlich ist. Die Veränderlichkeit von P spiegelt sich in der Spannung σ wieder, da σ stets auf den ursprünglichen, also unveränderlichen Querschnitt bezogen wird. Längs des unendlich kleinen Weges $d(\Delta l)$ darf σ und damit P als unveränderlich angesehen werden, dann ist die Arbeit

$$dA = P \cdot d(\Delta l) = F \cdot \sigma \cdot d(\Delta l)\,.$$

Erweitert man die rechte Seite mit l, so wird die Arbeit längs des Weges $d(\Delta l)$

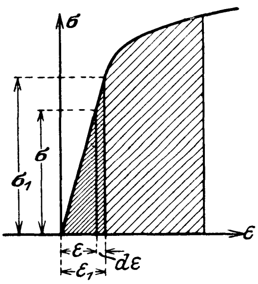


Abb. 14a. Formänderungsarbeit.

$$dA = F \cdot l \cdot \sigma \cdot d\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = F \cdot l \cdot \sigma \cdot d\varepsilon$$

und hiermit

$$A = F \cdot l \cdot \int \sigma \cdot d\varepsilon\,.$$

$\sigma \cdot d\varepsilon$ ist ein Flächenstreifen des Spannungsdehnungsschaubildes (Abb. 14a) mit der Breite $d\varepsilon$ und der Höhe σ, so daß $\int \sigma \cdot d\varepsilon$ dargestellt wird durch den Inhalt der von der ε-Achse und der Spannungsdehnungskurve $\sigma = f(\varepsilon)$ begrenzten Fläche.

Innerhalb der Gültigkeitsgrenze des **Hooke**schen Geradliniengesetzes ist $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$, also $d\varepsilon = \alpha \cdot d\sigma$, folglich

$$A = F \cdot l \int \sigma \cdot d\varepsilon = F \cdot l \cdot \alpha \cdot \int_0^{\sigma_1} \sigma \cdot d\sigma = F \cdot l \cdot \alpha \cdot 1/2 \cdot \sigma_1^2\,.$$

Ersetzt man σ_1 durch $P_1 : F$, so wird

$$A = \frac{\alpha\, l}{F} \cdot \frac{1}{2} P_1^2 = \frac{l}{EF} \cdot \frac{1}{2} P_1^2\,,$$

wenn P_1 die Belastung im Endzustande ist, der innerhalb der Proportionalitätsgrenze liegt. Dieser Belastung P_1 möge die Verlängerung Δl_1 entsprechen, deren Größe sich aus

$$\Delta l_1 = \frac{l}{E} \cdot \sigma_1 = \frac{l}{E} \cdot \frac{P_1}{F}$$

ergibt; damit erhält man für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot \Delta l_1\,.$$

Das Ergebnis läßt sich auch unmittelbar der Abb. 14a entnehmen, wenn man beachtet, daß $\int \sigma \cdot d\varepsilon$ gleich dem Inhalt des Dreiecks aus ε_1 als Abszisse und σ_1 als Ordinate ist:

$$A = F \cdot l \cdot \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 = F \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1}{F} \cdot \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta l_1 .$$

In der Gleichung

$$A = F \cdot l \cdot \int \sigma \cdot d\varepsilon$$

ist $F \cdot l = V$ der Rauminhalt des Stabes von der Länge l; die Arbeit, bezogen auf 1 cm³ des Stabes, heißt Arbeitsvermögen, gemessen in cmkg/cm³ und ist

$$A' = \frac{A}{F \cdot l} = \frac{A}{V} = \int \sigma \cdot d\varepsilon ;$$

sie ist dargestellt durch den Inhalt der von der Spannungsdehnungskurve, ihrer Endordinate und der x-Achse eingeschlossenen Fläche Nach Bach[1]) soll der Inhalt der Fläche nur bis zur Höchstlast genom men werden, da innerhalb dieser Grenze der Einfluß der Maßlänge des Stabes entfällt. Solange der Stab vollkommen elastisch ist, werden die gleichen Werte von Spannung und Dehnung bei der Entlastung durchlaufen, die man bei der Belastung festgestellt hat. Die das Arbeitsvermögen darstellenden Flächen decken sich; d. h. die zur Erzielung der Formänderung aufgewendete Arbeit wird bei der Entlastung wieder zurückgewonnen. Decken sich die zusammengehörigen Werte von Dehnung und Spannung dagegen nicht — und das ist stets der Fall, wenn eine bleibende Formänderung bereits eingetreten ist — dann endet die Spannungsdehnungslinie nicht im Nullpunkt, sondern schneidet auf der ε-Achse einen der bleibenden Dehnung entsprechenden Betrag von ε ab. Der Inhalt der von der vorwärts schreitenden steigenden Kurve und der rückwärts schreitenden fallenden Kurve begrenzten Fläche stellt demnach einen Arbeitsverlust dar. Das Be- und Entlasten eines Stabes läßt sich nun mit dem Magnetisieren und dem Ummagnetisieren eines Eisenstabes vergleichen, deren zeichnerische Darstellung die sogenannte Hysteresisschleife ergibt; ihr Inhalt ist in ähnlicher Weise ein Maß für die Größe der Arbeit, die zum Aufdrücken von bleibendem Magnetismus aufgewendet werden muß, wie in unserem Falle die von der steigenden und fallenden Dehnungsspannungskurve begrenzte Fläche ein Maß für die Arbeit ist, die eine bleibende Dehnung zur Folge hat.

Bei unserm Zugversuch war vorausgesetzt, daß die Last P stetig zunehme. Bringt man sie sofort in voller Größe auf den Stab, so spricht man von plötzlicher Belastung, und es soll dabei unter einem plötzlichen Vorgange ein Vorgang verstanden werden, der eine verschwindend kleine Zeit beansprucht. Infolge der plötzlichen Belastung wird die Spannungsdehnungskurve zunächst fast mit der σ-Achse zusammenfallen und dann parallel zur ε-Achse verlaufen (Abb. 14b); die Formänderung folgt der Spannung erst allmählich und braucht jedenfalls erheblich mehr Zeit als die Erzeugung der Spannung. Die Formänderungsarbeit bei diesem Vorgange ist infolge der fast unveränder-

[1]) Bach: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl., S. 16.

lichen Spannung σ

$$A = \sim F \cdot l \cdot \int \sigma \cdot d\varepsilon = \sim F \cdot l \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 .$$

Ist P_1 die plötzlich aufgebrachte Kraft, so ist $\sigma_1 = P_1 : F$ und

$$A = \sim \varepsilon_1 \cdot l \cdot P_1 = \sim P_1 \cdot \Delta l .$$

Die gleiche Dehnung ε_1 können wir uns durch eine stetig wachsende Belastung mit dem Endwert P_2 hervorgerufen denken. Die Formänderungsarbeit wird in diesem Falle nach Seite 15

$$A' = \frac{1}{2} P_2 \cdot \Delta l .$$

$A = A'$ ergibt

$$P_2 = \sim 2 P_1 \quad \text{oder} \quad \frac{P_2}{F} = \sim 2 \frac{P_1}{F}; \text{ d. h. } \sigma_2 = \sim 2 \sigma_1 .$$

Die gleiche Arbeit, mit der ein und dieselbe Dehnung ε_1 erreicht wird, steigert die Spannung auf fast das Doppelte, wenn die Last plötzlich aufgebracht wird.

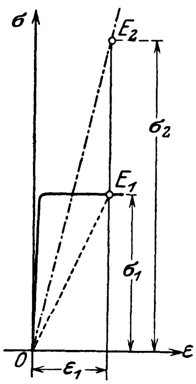


Abb. 14 b. Formänderungsarbeit bei plötzlicher Belastung.

Der Vorgang läßt sich auch unmittelbar an der Spannungsdehnungslinie verfolgen. Die stetig wachsende Kraft P mit dem Endwert P_1 bzw. der Spannung $\sigma_1 = P_1 : F$, leistet eine Arbeit, die durch das Dreieck $O E_1 \varepsilon_1$ (Abb. 14b) dargestellt wird; die plötzlich aufgebrachte Last P_1 leistet bei gleicher Spannung $\sigma_1 = P_1 : F$ die durch das angenäherte Rechteck über ε_1 dargestellte Arbeit. Der Vergleich beider Flächen lehrt, daß die Formänderungsarbeit im zweiten Falle doppelt so groß ist. Verwandelt man das angenäherte Rechteck über ε_1 in das flächengleiche Dreieck $O E_2 \varepsilon_1$, so stellt dieses die Arbeit einer stetig wachsenden Kraft P mit dem Endwert P_2 bzw. der Spannung $\sigma_2 = P_2 : F$ dar. Da das flächengleiche Dreieck eine doppelt so große Höhe hat wie das zugehörige Rechteck über derselben Grundlinie, so ist $\sigma_2 = \sim 2 \sigma_1$.

7. Federnde- oder Nachwirkung.

Beim Zugversuch pflegen die Messungen der Belastung und der Formänderung unmittelbar aufeinander zu folgen; man pflegt also den erreichten Formänderungszustand als endgültig anzusehen. In gleicher Weise verfährt man bei der Entlastung. Die Versuche von Bach haben aber ergeben, daß sich allmählich be- oder entlastete Stäbe dem der Belastung entsprechenden Formänderungszustande mit verschiedener Geschwindigkeit nähern. Die Ausbildung der einem bestimmten Belastungszustande entsprechenden Formänderung beansprucht Zeit, die zuweilen kurz, mitunter auch sehr lang sein kann. Werkzeugstahl erreicht die ihm zukommende Formänderung sofort, während Lederriemen noch nach Jahren Längenänderungen bei gleichbleibender Belastung erfahren. Ähnlich verhält sich Holz, wie auch der Verfasser an zahlreichen Beobachtungen im Festigkeitslaboratorium von Schütte-

Lanz feststellen konnte. Versuchsbauteile von Flugzeugen, die tagelang unter gleichbleibender Belastung stehen blieben, zeigten ständig eine Zunahme der Formänderung, die sich gelegentlich sogar bis zum Bruche steigerte, so daß eine schnell abgebrochene Belastungsprobe häufig genug ein unrichtiges Bild von der Tragfähigkeit des geprüften Stabes ergeben hätte. Man nennt diese Erscheinung der allmählichen Ausbildung der Formänderung federnde oder elastische Nachwirkung, die von der Dehnung zu unterscheiden ist.

8. Schwingungsfestigkeit.

Solange ein Probestab einer einmaligen Prüfung unterworfen wird, wie es z. B. bei der Bestimmung der Zugfestigkeit beim Zerreißversuch der Fall ist, werden Fehlstellen von verschwindend kleiner Ausdehnung keinen Einfluß auf das Ergebnis haben. Wesentlich anders liegen dagegen die Verhältnisse, wenn der Stab beständig belastet und entlastet wird, oder wenn die Art der Belastung dauernd wechselt, also beispielsweise Zug und Druck abwechselnd auftreten. Dann tritt an der Fehlstelle, die in einer kaum sichtbaren Verletzung der Oberfläche bestehen kann, eine bleibende Formänderung auf, die bei genügend oft wiederholten Belastungswechseln zum Bruche führt, obwohl die rechnerisch ermittelte Spannung, auf den ganzen, unverletzten Querschnitt bezogen, weit unter der Festigkeit des Baustoffes liegt. Föppl[1]) nennt den Widerstand eines Baustoffes gegen wiederholte — wechselnde — Belastungen, wie sie der Betrieb jeder Transmissionswelle mit sich bringt, Schwingungsfestigkeit und unterscheidet sie scharf von der Bruchfestigkeit schlechthin. Zu den Fehlstellen, die von beträchtlichem Einflusse auf die Schwingungsfestigkeit sind, gehören auch Risse und andere Oberflächenbeschädigungen, und mancher Bruch eines Maschinenteiles dürfte in der zu geringen Schwingungsfestigkeit seine zutreffende Erklärung finden.

9. Einfluß der Temperatur.

In wie hohem Maße die Temperatur die Festigkeit und Dehnung beeinflußt, zeigt Abb. 15[2]). Der Festigkeitskurve ist die Zugfestigkeit bei der gewöhnlichen Temperatur von $+20\,^0$C zugrundegelegt und diese gleich 100 gesetzt, so daß die Änderung der Festigkeitsverhältnisse in Hundertteilen der Ursprungsfestigkeit ablesbar ist. Zunächst wird ein Ansteigen der Zugfestigkeit K_z bis zu rund 110% festgestellt, was für

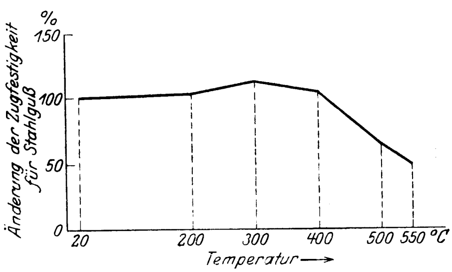


Abb. 15. Einfluß der Temperatur auf die Zugfestigkeit.

[1]) Föppl, A. und O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. B. G. Teubner 1923.
[2]) Siehe Bach: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl., S. 173ff.

die Praxis ohne Bedeutung ist, darauf ein schnelles Sinken, das Beträge ergibt, die z. B. bei Stahlguß kaum die Hälfte der Ursprungsfestigkeit ausmachen. Im umgekehrten Sinne verhält sich die Formänderungsfähigkeit: zunächst Sinken der Dehnung, dann starkes Ansteigen.

10. Arten der Festigkeit.

Bei der Art des Kraftangriffes unterscheidet man Einzelkräfte und Kräftepaare. Durch Einzelkräfte bedingt sind

a) Die Zugfestigkeit K_z in kg/cm²; der Stab wird durch zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte P (Abb. 16) beansprucht, deren Wirkungslinien mit der Stabachse zusammenfallen.

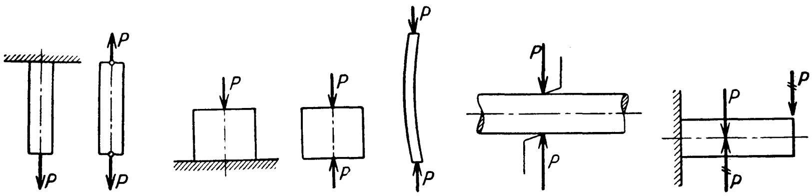


Abb. 16. Abb. 17. Abb. 18. Abb. 19. Abb. 20.

Abb. 16—21. Arten der Festigkeit.

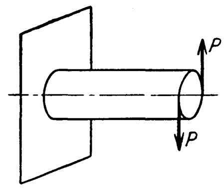


Abb. 21.

b) Die Druckfestigkeit K in kg/cm²; der Stab wird durch zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte P (Abb. 17) beansprucht, deren Wirkungslinien mit der Stabachse zusammenfallen.

c) Die Knickfestigkeit. Ist der gedrückte Stab im Verhältnis zu seinen Querschnittabmessungen sehr lang (Abb. 18), so wird er bei genügend großen Kräften P ausknicken. Nach eingetretener Formänderung trifft die Voraussetzung nicht mehr zu, daß Einzelkräfte, deren Wirkungslinien mit der Stabachse zusammenfallen, den Stab beanspruchen. Jeder gedrückte Stab ist auf Knicksicherheit zu untersuchen.

d) Die Scherfestigkeit K_s in kg/cm²; wirken zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P (Abb. 19) mit derselben Wirkungslinie senkrecht zur Stabachse, so wird der Stab auf Abscheren beansprucht.

Greifen Kräftepaare an einem Stabe an, so ist zu unterscheiden, wie die Stabachse zur Ebene des Kräftepaares liegt.

e) Die Biegungsfestigkeit K_b in kg/cm²; die Stabachse liegt in der Ebene des angreifenden Kräftepaares (Abb. 20).

f) Die Drehfestigkeit K_d in kg/cm²; die Stabachse steht senkrecht auf der Ebene des angreifenden Kräftepaares (Abb. 21).

Die Fälle a, b, c, e ergeben Normalspannungen und Längenänderungen; die Fälle d und f Schubspannungen und Winkeländerungen.

Tritt mehr als eine Art von Beanspruchung auf, so sagt man, der Stab sei auf zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. Knickfestigkeit und Scherfestigkeit gehören streng genommen zur zusammengesetzten Festigkeit.

II. Die zulässige Spannung und die Sicherheit gegen Bruch.

Im allgemeinen liegt allen Festigkeitsrechnungen das Geradliniengesetz von Hooke zugrunde. Infolgedessen dürfen die Baustoffe niemals über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht werden. Da aber eine ganze Reihe wichtiger Baustoffe diesem Gesetz nicht folgen, also auch keine Proportionalitätsgrenze besitzen, so läßt sich eine allgemein gültige Regel für sie nicht aufstellen.

Die Grenze, bis zu der eine gefahrlose Belastung möglich ist, heißt zulässige Spannung, gemessen in kg/cm². Sie ist durch die Art der Belastung bedingt. Im Maschinenbau unterscheiden wir nach dem Vorschlage von Bach drei Belastungsfälle, und zwar sind zu wählen die Zahlen unter I (siehe umstehende Tafel), wenn die Belastung dauernd in unveränderter Größe wirkt — ruhende Belastung; unter II, wenn die Belastung beliebig oft von Null bis zu einem größten Werte stetig wächst und dann wieder auf Null zurückgeht — schwellende Belastung; unter III, wenn die Belastung beliebig oft derart wechselt, daß die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von Null bis zu einem größten (positiven) Wert stetig wachsen, dann bis Null sinken, um in umgekehrter Richtung bis zu einem größten (negativen) Wert zu wachsen und wieder bis Null zu fallen — wechselnde Belastung. Die von Bach aufgestellte Zahlentafel ist keine Vorschrift im Sinne der preußischen Bestimmungen für den Hochbau, sie soll vielmehr dem entwerfenden Ingenieur einen Anhalt geben, welche Zahlenwerte er seinen Festigkeitsrechnungen zugrunde zu legen hat, wenn Güteziffern des zu verwendenden Baustoffes nicht vorliegen. Am sichersten geht er natürlich dann, wenn er sich durch Festigkeitsprüfungen selber die Güteziffern beschafft. Da diese Versuche die Belastungsgrenzen liefern, pflegt man einen Bruchteil der Bruchfestigkeit als zulässige Spannung zu wählen und setzt

$$k = \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot K.$$

$\mathfrak{S}$ heißt Sicherheit gegen Bruch und ist demnach das Verhältnis der Festigkeit zur zulässigen Spannung. Für die Wahl des Sicherheitsgrades ist im allgemeinen üblich:

Flußeisen $\mathfrak{S} = 4$ bis 5
Gußeisen $\mathfrak{S} = 8$
Holz $\mathfrak{S} = 10$,

doch ist dabei auf die jeweils vorliegenden Verhältnisse Rücksicht zu nehmen. Als Richtlinie mag gelten: ist man über den Verlauf des Kräftespieles gut unterrichtet, d. h. läßt sich die Art der Beanspruchung eindeutig erkennen, so wähle man die höheren Zahlen der Tafel; bestehen dagegen Unklarheiten über die Größe der Kräfte und die Art der Beanspruchung, so wähle man die kleineren. Auf jeden Fall ist zu prüfen, ob die Voraussetzungen zutreffen, die man der Berechnung zugrunde gelegt hat. Zum Beispiel nimmt man bei einer Befestigungsschraube an, daß die Kraft in der Schraubenachse angreift und sich

Tafel der zulässigen Spannungen in kg/cm².

Baustoff	Zug k_z von	Zug k_z bis	Druck k von	Druck k bis	Schub k_s von	Schub k_s bis	Biegung k_b von	Biegung k_b bis	Drehung k_d von	Drehung k_d bis	Sicherheit gegen Ausknicken
Schweißeisen: I	—	900	—	900	—	720	—	900	—	360	
,, II	—	600	—	600	—	480	—	600	—	240	5
,, III	—	300	—	—	—	240	—	300	—	120	
Flußeisen: I	900	1200	900	1200	720	960	900	1200	600	840	
,, II	600	800	600	800	480	640	600	800	400	560	5
,, III	300	400	—	—	240	320	300	400	200	280	
Hochbau	—	1200	—	1200	—	1000	—	1200	—	—	
Flußstahl: I	1200	1500	1200	1500	960	1200	1200	1500	900	1200	
,, II	800	1000	800	1000	640	800	800	1000	600	800	5
,, III	400	500	—	—	320	400	400	500	300	400	
Hochbau	—	1400	—	1400	—	—	—	1400	—	—	
Stahlguß: ,, I	600	900	900	1200	480	840	750	1050	480	840	
,, II	400	600	600	900	320	560	500	700	320	560	5
,, III	200	300	—	—	160	280	250	350	160	280	
Hochbau	—	—	—	—	—	—	—	1200	—	—	
Gußeisen: I	—	300	—	900	—	300	—	—	—	—	
,, II	—	200	—	600	—	200	—	—	—	—	6 bis 8
,, III	—	100	—	—	—	100	—	—	—	—	
Hochbau	—	—	500	1000	—	200	—	250	—	—	
Kupferblech, gewalzt: I	—	600	—	—	—	—	—	—	—	—	
,, ,, II	—	300	—	—	—	—	—	—	—	—	
Zinkblech	—	200	—	200	—	—	—	150	—	—	
Hölzer: Kiefer ‖	100*	120	60*	80	10*	15	100*	120	—	—	
,, ⊥	—	—	—	—	60*	70	—	—	—	—	
Buche, Eiche ‖	100*	120	80*	100	15*	20	100*	120	—	—	10
,, ,, ⊥	—	—	—	—	60*	90	—	—	—	—	
Esche	100	120	—	70	—	—	—	—	—	—	
Hartholz	—	200	—	160	⊥	30	—	200	—	—	
Steine: Granit			60*	90	Auflagersteine 10						
Sandstein			30*	50	,, bis kg/cm²						
Kalkstein			30*	40	,, 15						
Mauerwerk: Ziegel			—	7	in Kalkmörtel						
Hartbrandstein . . .			12	15	in Kalkzementmörtel						
Kalksandstein			—	7	in Kalkmörtel						
Kalksandstein			12	15	in Kalkzementmörtel						
Klinker			20	30	in Zementmörtel						
porige Ziegel			3	6							
Schwammstein . . .			—	3							
Bruchstein			—	5	in Kalkmörtel						
Schüttbeton			6	8	für Fundamente						
Stampfbeton			10	15	für Fundamente						
Baugrund			3	4	höhere Beanspruchung ist besonders zu begründen.						

Die mit * bezeichneten Zahlen gelten bei Dauerbelastung.

demnach die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilen. Diese Annahme ist aber nur dann zulässig, wenn alle Gewindegänge gleichmäßig anliegen. Tun sie das nicht, so wird irgendeine Stelle eine Überbeanspruchung erfahren, die in dem Augenblick schädlich wird, wo sie unzulässig hohe Werte erreicht. Das kann aber eintreten, ohne daß der rechnerisch gefundene Mittelwert die zulässige Spannung überschreitet. Solche örtlichen Überbeanspruchungen bringen meist eine bleibende Formänderung hervor, die unter Umständen schädlich sein kann, insofern als dadurch die benachbarten, schwächer beanspruchten Teile mehr zur Kraftübertragung herangezogen werden. Oft veranlassen örtliche Überbeanspruchungen aber auch den Bruch. Das gilt namentlich für Bauteile, die wechselnder Belastung unterworfen sind; für sie wäre die Schwingungsfestigkeit maßgebend, die durch Dauerversuche zu ermitteln wäre.

Im Hochbau gelten die sogenannten „Preußischen Bestimmungen".

III. Zug- und Druckfestigkeit.

1. Unveränderlicher Querschnitt.

Aus dem Begriff der zulässigen Spannung (S. 19) erhält man unmittelbar die Abmessungen eines auf Zug beanspruchten Stabes. Mit P in kg und k_z in kg/cm² wird der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{P}{k_z} \, [\text{cm}^2].$$

Selten jedoch wird dieser Querschnitt ausgeführt werden, da für die Wahl des auszuführenden Querschnittes nicht nur die Festigkeit maßgebend ist. Neben der Herstellung und Bearbeitung sind die handelsüblichen Abmessungen zu berücksichtigen. Wie aber auch der endgültige Querschnitt gewählt werden mag, auf keinen Fall darf er kleiner sein als der erforderliche. Es empfiehlt sich daher, für jede endgültige Festlegung eines Querschnittes die in ihm auftretende Spannung aus

$$\sigma = \frac{P}{F} \, [\text{kg/cm}^2]$$

zu berechnen, und es ist streng darauf zu achten, daß stets $\sigma < k_z$ ist. Der Leser gewöhne sich von vornherein daran, niemals die festgelegte zulässige Spannung zu überschreiten, auch dann nicht, wenn es sich nur um wenige Bruchteile handelt.

Beispiel 1. Eine flußeiserne Rundstange von $l = 3{,}5$ m Länge übertrage $P = 25\,t$. Die Tafel S. 20 gibt für Belastungsfall II, der vorausgesetzt werden mag, $k_z = [600—]800$ kg/cm². Die Festigkeitsbedingung

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqq k_z \text{ ergibt } F = \frac{P}{k_z} = \frac{25000}{800} = 31{,}25 \text{ cm}^2,$$

dazu gehört ein Durchmesser von 6,31 cm, den man natürlich nicht ausführen würde. Man wählt für die Ausführung den nächst höheren Durchmesser nach den Normen, falls solche vorliegen, oder den nächst höheren Durchmesser der handelsüblichen Abmessungen. Das ergäbe in unserm Falle $d = 64$ mm mit $F = 32{,}17$ cm² Querschnitt, so daß die errechnete Spannung

$$\sigma = \frac{25000}{32{,}17} = \sim 780 \text{ kg/cm}^2$$

beträgt. Die Verlängerung, die die Stange unter dem Einfluß der Kraft P erfährt, berechnet sich nach S. 11 zu

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot l = \frac{780 \cdot 3500}{2150000} = \sim 1{,}3 \text{ mm},$$

da die Länge l in mm eingesetzt ist.

Unter Umständen ist es erforderlich, das Eigengewicht der Stange zu berücksichtigen; z. B. wenn die Stange senkrecht hängt und ihre Länge bedeutend ist. Der dem Aufhängepunkt zunächst gelegene Querschnitt erhält eine Zusatzspannung

$$\sigma_G = \frac{G}{F} = \frac{25{,}253 \text{ kg/m} \cdot 3{,}5 \text{ m}}{32{,}17 \text{ cm}^2} = \sim 3 \text{ kg/cm}^2,$$

pie in den meisten praktischen Fällen ohne Bedeutung ist. Bei Ketten, Förderseilen, sehr langen Stangen usw. muß das Eigengewicht berücksichtigt werden.

Handelt es sich beispielsweise um ein Gestänge von 70 m Länge, so würde

$$\sigma_G = \frac{25{,}253 \cdot 70}{32{,}17} = \sim 60 \text{ kg/cm}^2$$

sein und die größte Spannung wäre

$$\sigma_{\max} = \sigma + \sigma_G = 780 + 60 = 840 \text{ kg/cm}^2.$$

Da dieser Wert die festgelegte zulässige Spannung überschreitet, reicht der aus der Nutzlast allein errechnete Querschnitt nicht aus; die Stange müßte stärker sein.

$d = 66$ mm hat $F = 34{,}21$ cm² und wiegt $g = 26{,}86$ kg/m; daraus

$$\sigma_{\max} = \frac{25000}{34{,}21} + \frac{26{,}86 \cdot 70}{34{,}21} = 730 + 55 = 785 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Eigengewicht nimmt mit wachsender Länge zu und kann schließlich einen so großen Wert erreichen, daß der Einspannungsquerschnitt reißt. Die Länge, bei der die Grenze der Tragfähigkeit erreicht wird, heißt **Reißlänge**. Sie wird bei Faserstoffen als Güteziffern angegeben.

Beispiel 2. Wie groß ist die Reißlänge von 1 mm starkem Stahldraht, dessen spez. Gewicht 7,956 ist, wenn $K_z = 6500$ kg/cm² angenommen wird?

Aus $G = F \cdot K_z$ folgt $F \cdot l \cdot \gamma = F \cdot K_z$ oder

$$l = \frac{K_z}{\gamma} = \frac{6500 \text{ kg/cm}^2 \cdot 1000 \text{ g/kg}}{7{,}956 \text{ g/cm}^3 \cdot 100 \text{ cm/m}} = 8150 \text{ m}.$$

Beispiel 3. Mit einer kurzgliedrigen Krankette sollen 5000 kg bei achtfacher Sicherheit gehoben werden. Baustoff: Zähes, weiches Schweißeisen mit $K_z = 3500$ kg/cm². Da die Kette auf Zug und Biegung beansprucht wird, aber die Berechnung nur auf Zug üblich ist, wird die zulässige Spannung niedriger gewählt, als sie dem Baustoff entspricht. C. v. Bach setzt

$k_z = 600$ kg/cm² oder 4fache Sicherheit für wenig angestrengte,
$k_z \leq 500$ „ „ 5fache „ „ häufiger benutzte,
$k_z \leq 300$ „ „ 8fache „ „ Dampfwindeketten.

Der erforderliche Querschnitt wird mit $k_z = 300$ kg/cm²

$$F = \frac{5000}{300} = 16{,}67 \text{ cm}^2$$

und besteht aus 2 Kreisquerschnitten. Aus $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} F = \sim 8{,}4$ cm² ergibt sich $d = 33$ mm.

Bemerkung. Die kurzgliedrige Krankette der deutschen Maschinenfabrik A.-G., Werk Bechem & Keetmann, Duisburg, gibt für $d = 33$ mm eine Bruchlast von 49000 kg an.

Berücksichtigung des Eigengewichtes. Für das Eigengewicht der Kette darf im Mittel angenommen werden

$$g = 1{,}432 \cdot 2 \cdot F = \approx 2{,}25 \cdot d^2 \text{ [kg/m]},$$

wobei d in cm einzusetzen ist. Unsere Kette wiegt demnach $g = 2{,}25 \cdot 3{,}3^2 = \approx 24{,}5$ kg/m, nach Angabe der Firma $g = 24{,}46$ kg. Durch das Eigengewicht vermindert sich bei beträchtlichen Längen die Nutzlast. Angenommen, die Kette soll bis zu 200 m Tiefe fördern, dann würde die größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{P+G}{2 \cdot F} = \frac{5000 + 24{,}5 \cdot 200}{2 \cdot 8{,}55} = \frac{5000 + 4900}{17{,}1} = 585 \text{ kg/cm}^2,$$

das Eigengewicht wäre angenähert gleich der Nutzlast. Die nunmehr erforderliche Kettenstärke ergibt sich aus

$$\sigma_{\max} = \frac{P+G}{2 \cdot F} \leqq k_z \quad \text{oder} \quad \frac{P + 2{,}25 \cdot d^2 \cdot l}{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leqq k_z$$

zu

$$d = \sqrt{\frac{P}{\frac{\pi}{2} \cdot k_z - 2{,}25 \cdot l}};$$

damit sich für d ein reeller Wert ergibt, muß

$$\frac{\pi}{2} k_z \geqq 2{,}25\, l \qquad \text{oder} \qquad l \leqq \frac{\pi}{2 \cdot 2{,}25} \cdot k_z = 0{,}7\, k_z$$

sein. Da die Gleichung für d vier Veränderliche hat, soll sie nomographisch gelöst werden. Bei häufig durchzuführenden Rechnungen empfiehlt sich stets die Anwendung der Nomographie, weil das Nomogramm oder die Rechentafel den Ein-

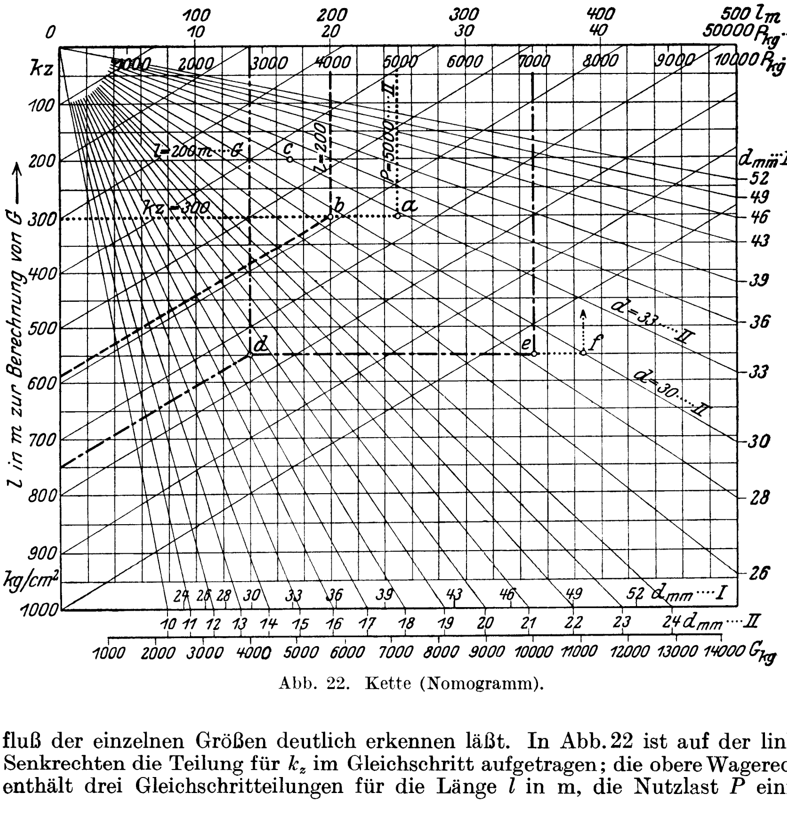


Abb. 22. Kette (Nomogramm).

fluß der einzelnen Größen deutlich erkennen läßt. In Abb. 22 ist auf der linken Senkrechten die Teilung für k_z im Gleichschritt aufgetragen; die obere Wagerechte enthält drei Gleichschritteilungen für die Länge l in m, die Nutzlast P einmal von 0÷50000 kg und zum andern von 0÷10000 kg. Dementsprechend sind auf der unteren Wagerechten zwei Teilungen für die Kettendurchmesser, die obere für den Lastbereich von 0÷50000 kg, die untere, die auf der rechten Senkrechten weitergeführt ist, für den Lastbereich von 0÷10000 kg. Die rechts steigenden Schrägen schneiden auf der oberen wagerechten Längeneinteilung die Länge ab, bei der das Eigengewicht die zulässige Spannung hervorruft. Dem Wert $k_z = 300$ kg/cm² würde z. B. eine Traglänge von $l = 210$ m entsprechen, da die Schräge durch $k_z = 300$ auf der oberen Wagerechten $l = 210$ abschneidet. Den gesuchten Kettendurchmesser d findet man folgendermaßen: Bringe die Wagerechte k_z [$= 300$] mit der Senkrechten durch die Nutzlast P [$= 5000$] zum Schnitt (a), dann liegt a zwischen den Strahlen von O nach $d = 30$ und $d = 33$; der größere Durchmesser ist zu wählen. Hierbei ist das Eigengewicht der Kette nicht berücksichtigt. Um die Spannung zu finden, die eine 200 m lange Kette mit $d = 33$ mm Durchmesser bei $P = 5000$ kg erfährt, verfolge man die Wagerechte durch (a) bis zur Senkrechten durch $l = 200$ (b) und gehe auf der schrägen bis zur k_z-Teilung; die Schräge schneidet in $k_z = 585$ kg/cm². Die untere Wagerechte hat noch eine dritte Teilung, die das Gewicht der Kette abzulesen gestattet für Längen von 0÷1000 m; für 0—100 m müssen die Zahlen durch 10; für 0÷10 m durch 100 dividiert werden. Die Längen werden auf der senkrechten k_z-Teilung abgelesen. Man findet z. B. das Gewicht von 200 m Kette mit $d = 33$ mm Durchmesser, indem man den Strahl von O nach d [$= 33$] mit der Wagerechten durch l [$= 200$] zum Schnitt bringt (c) und den Punkt auf die Gewichtsteilung herunter lotet; man findet $G = 4900$ kg.

Beispiel 4. Eine 140 m lange Kette soll bei $k_z = 750$ kg/cm² eine Nutzlast von 7000 kg betragen. Gehe (Abb. 22) von $k_z = 750$ auf der Schrägen bis zur Senkrechten durch $l = 140$ (d); verfolge die Wagerechte durch d bis zur Senkrechten durch $P = 7000$ (e). Der Punkt e liegt zwischen den Strahlen $d = 28$ und $d = 30$, also ist $d = 30$ mm der gesuchte Durchmesser. Die größte Nutzlast erhält man, wenn man die Wagerechte durch d über d hinaus bis zum Strahle $d = 30$ verlängert (f); die Senkrechte durch f schneidet auf der oberen Wagerechten $P_{\max} = \sim 7700$ kg ab.

Beispiel 5. Ein Dampfzylinder habe $d = 400$ mm Durchmesser bei $p = 10$ kg/cm² Überdruck. Der Durchmesser der Deckelschrauben ist zu bestimmen, wenn die Anzahl $i = 12$ beträgt und die zulässige Spannung $k_z = 480$ kg/cm² nicht überschritten werden soll.

k_z ist sehr niedrig angesetzt, denn die Sicherheit

$$\mathfrak{S} = \frac{K_z}{k_z} \quad \text{ist} \quad = \frac{4000}{480} = \sim 8{,}3\,.$$

Das ist notwendig, weil infolge des scharfen Gewindes plötzliche Querschnittänderungen auftreten und außerdem die Voraussetzung gleichmäßiger Auflage sämtlicher Gewindegänge nur mangelhaft erfüllt ist. Maßgebend ist der Kernquerschnitt F; die ihn beanspruchende Kraft ist

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} \cdot 10 = 1256{,}64 \cdot 10 = \sim 12600 \text{ kg}.$$

Der erforderliche Kernquerschnitt wird aus $P = i \cdot F \cdot k_z$

$$F = \frac{12600}{10 \cdot 480} = 2{,}63 \text{ cm}^2.$$

Die Schraubentafel für Whitworth-Gewinde liefert 7/8″ mit $F = 2{,}72$ cm² Kernquerschnitt, so daß sich eine mittlere Spannung von

$$\sigma = \frac{12600}{12 \cdot 2{,}72} = \sim 390 \text{ kg/cm}^2$$

ergibt.

Beispiel 6. Durch eine einfache Bandbremse (Abb. 23) soll eine Last Q, die am Umfange einer Trommel mit dem Halbmesser r angreift, gehalten werden. Der Querschnitt des Bremsbandes ist zu bestimmen. Der umspannte Bogen sei

$\alpha = {}^3/_2\,\pi$; der Trommelhalbmesser $r = 10$ cm; der Scheibenhalbmesser $R = 25$ cm; die Last $Q = 5000$ kg; die Reibungsziffer des Bremsbandes $\mu = 0{,}18$; die zulässige Spannung $k_z = 1000$ kg/cm². Die Umfangskraft an der Scheibe ist

$$P = Q \cdot \frac{r}{R},$$

die größte Spannkraft im Bremsband

$$S = P \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

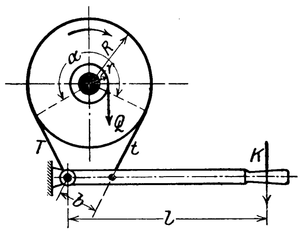


Abb. 23. Bandbremse.

Ist s [cm] die Dicke, b [cm] die Breite des Bandes, so ist

$$b \cdot s = \frac{S}{k_z} = \frac{P}{k_z} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} = \frac{Q}{k_z} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Mit $s_{\max} = 0{,}3 \div 0{,}4$ cm erhält man für $s = 0{,}35$

$$b = \frac{1}{0{,}35} \cdot \frac{5000}{1000} \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} = \sim 10 \text{ cm}.$$

Da $b \leqq 8$ cm sein soll, muß der Scheibendurchmesser R auf

$$R = 25 \cdot \frac{10}{8} = 31{,}5 \text{ cm} = \sim 32 \text{ cm}$$

vergrößert werden. Damit wird die größte Spannung im Bremsband

$$\sigma_{\max} = \frac{5000}{8 \cdot 0{,}35} \cdot \frac{10}{32} \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} = \sim 975 \text{ kg/cm}^2.$$

Berücksichtigung des Anschlusses: Im allgemeinen müssen die eine Kraft übertragenden Stäbe an einen andern Bauteil angeschlossen werden. Da dieser Anschluß meist durch Bolzen, Stiele oder Schrauben erreicht wird, erfahren die Stäbe an den Anschlußstellen Schwächungen, durch die der errechnete Querschnitt vermindert wird. Maßgebend ist der schwächste Querschnitt.

Beispiel 7. Ein Fachwerkstab habe eine Zugkraft $P = 16000$ kg aufzunehmen; er sei durch $d = 20$ mm-Niete angeschlossen. Die zulässige Spannung ist nach S. 20 $k_z = 1200$ kg/cm².

Gewählt werden a) ein Flacheisen mit $s = 12$ mm Dicke; die Nieten seien so angeordnet, daß höchstens zwei in einen Querschnitt fallen, dann beträgt die nutzbare Breite des Flacheisens $(b - 2 \cdot d)$ cm. Die Festigkeitsbedingung liefert

$$(b - 2\,d) \cdot s \cdot k_z \geqq P$$

und daraus

$$(b - 2d) \cdot s = \frac{P}{k_z} = \frac{16000}{1200} = 13{,}3 \text{ cm}^2 \quad \text{oder} \quad b = \frac{13{,}3}{1{,}2} + 2 \cdot 2 = \sim 16 \text{ cm},$$

so daß

$$\sigma_{\max} = \frac{16000}{(16-4) \cdot 1{,}2} = \sim 1100 \text{ kg/cm}^2$$

ist.

b) ein Winkeleisen $80 \cdot 120 \cdot 10$ mit $F = 19{,}1$ cm²; durch die Niete gehen $2 \cdot d \cdot s = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ cm² verloren. Der nutzbare Querschnitt ist also $19{,}1 - 4 = 15{,}1$ cm²; die größte Spannung wird

$$\sigma_{\max} = \frac{16000}{15{,}1} = 1060 \text{ kg/cm}^2.$$

Da nur der eine Schenkel des Winkeleisens angeschlossen werden kann, wird die Voraussetzung des axialen Kraftangriffs zum mindesten in der Nähe der Anschlußstellen nicht erfüllt; die Spannungsermittlung kann deshalb nur angenäherte Gültigkeit haben, und man tut gut, bei der Wahl der zulässigen Spannung nicht bis an die obere Grenze zu gehen. Auf die Spannungsverteilung in den von der Einspannstelle genügend weit entfernten Querschnitten ist der besondere Spannungszustand der Einspannstelle selbst ohne Einfluß; wir dürfen dort gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt voraussetzen.

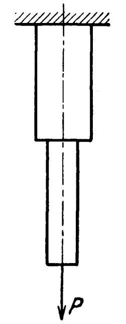


Abb. 24. Abgesetzter Stab.

2. Veränderlicher Querschnitt.

Bei plötzlichen Querschnittänderungen, wie sie z. B. Abb. 24 zeigt, ist die Frage der Spannungsverteilung an der Übergangsstelle nicht geklärt. Durch Versuche ist lediglich festgestellt, daß die Bruchgefahr erhöht wird. Es hat sich deshalb in der Praxis die Regel herausgebildet, scharfe Übergänge durch Ausrundungen zu mildern. Besteht ein Stab aus verschieden dicken Teilen, so ist der schwächste Querschnitt maßgebend, er heißt der **gefährliche Querschnitt**; seine Abmessungen ergeben sich aus der Festigkeitsbedingung

$$P \leqq F \cdot k_z, \text{ bzw. } P \leqq F \cdot k\,.$$

Beispiel 8. Ein kegelförmiger Stab beliebigen Querschnittes werde durch eine unveränderliche Kraft P auf Druck beansprucht. In dem Querschnitt F im Abstande y von der Grundfläche ist die Spannung (Abb. 25)

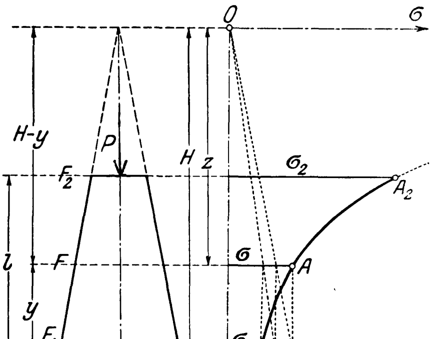


Abb. 25. Kegelförmiger Stab.

$$\sigma = \frac{P}{F}; \text{ in der Grundfläche } \sigma_1 = \frac{P}{F_1}.$$

Aus $F_1 : F = H^2 : (H - y)^2$ folgt

$$F = F_1 \cdot \frac{(H-y)^2}{H^2}; \text{ daraus}$$

$$\sigma = \frac{P}{F_1} \cdot \frac{H^2}{(H - y^2)}$$
$$= \sigma_1 \cdot \frac{H^2}{(H-y)^2} = \sigma_1 \cdot \frac{H^2}{z^2}.$$

$\sigma = f(z)$ ist eine hyperbolische Kurve dritten Grades: $\sigma z^2 = \sigma_1 \cdot H^2$; der Koordinatenanfangspunkt liegt in der Spitze des Ergänzungskegels. Da der schwächste Querschnitt für die Abmessungen maßgebend und durch

$$F_2 = \frac{P}{k}$$

gegeben ist, ebenso F_1 durch die Formgebung des Kegelstumpfes bekannt ist, lassen sich die Punkte O und A_1 aufzeichnen. Die übrigen Punkte der Kurve der Spannungen längs der Stabachse findet man folgendermaßen: gehe von A_1 senkrecht nach oben bis zur Wagerechten durch den beliebigen Querschnitt F; verlängere die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit O bis zur Wagerechten durch A_1, lote diesen Punkt auf die Wagerechte durch F, verbinde den Schnittpunkt mit O und verlängere die Verbindungslinie bis zur Wagerechten durch A_1, dann schneidet die Senkrechte durch diesen Punkt die Wagerechte durch F in dem gesuchten Punkte A.

Beispiel 9. Es ist die Verkürzung des Stabes der Abb. 25 zu bestimmen. Ein Stabteilchen von der Länge dy erfährt die Verkürzung

$$\Delta dy = \alpha \cdot \sigma \cdot dy = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot dy.$$

Die gesamte Verkürzung ist demnach

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma \cdot dy = \frac{1}{E} \cdot F'.$$

$\sigma \cdot dy$ ist ein Flächenstreifen der von der Kurve $\sigma = f(y)$ begrenzten Fläche, $\int \sigma \cdot dy$ also der Flächeninhalt F' der von $\sigma = f(y)$, der z-Achse und σ_1 und σ_2 begrenzten Fläche. Der Maßstab der Zeichnung sei für die Längen 1 mm $= d$ cm; für die Spannungen 1 mm $= b$ kg/cm²; für den Flächeninhalt also 1 mm² $= a \cdot b$ kg/cm. Damit wird

$$\Delta l\,[\mathrm{cm}] = \frac{1}{E\,[\mathrm{kg/cm^2}]} \cdot F'[\mathrm{mm^2}] \cdot \frac{ab\,[\mathrm{kg/cm}]}{1\,\mathrm{mm^2}}.$$

Rechnerisch findet man

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma \cdot dy = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma_1 \frac{H^2}{(H-y)^2} \cdot dy.$$

Setze $H - y = z$; $-dy = dz$ oder $dy = -dz$

$$\Delta l = \frac{\sigma_1}{E} \cdot H^2 \int_H^{H-l} -\frac{dz}{z^2} = \frac{\sigma_1}{E} \cdot H^2 \cdot \frac{1}{z}\Bigg|_H^{H-l} = \frac{\sigma_1}{E} \cdot \frac{H \cdot l}{H-l}.$$

Aus $F_1 : F_2 = H^2 : (H-l)^2$ folgt $H : (H-l) = \sqrt{F_1} : \sqrt{F_2}$, daraus

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \sigma_1 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}.$$

Beispiel 10. Der Stab sei ein Umdrehungskörper mit beliebiger Erzeugender (Abb. 26) und werde durch eine Kraft P belastet. Wir untersuchen den Spannungs- und Formänderungszustand unter der Voraussetzung, daß sich die Spannungen gleichmäßig über die Querschnitte verteilen. Das ist aber nur zulässig, solange die Begrenzungslinien des Umdrehungskörpers gegen die Stabachse schwach geneigt ist.

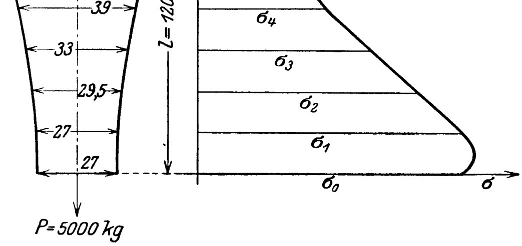


Abb. 26. Umdrehungskörper.

Die Spannung $\sigma = P : F$ ist für verschiedene Querschnitte zu berechnen und senkrecht zur Stabachse aufzutragen. Die Verlängerung ergibt sich zu

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot F',$$

wenn F' der Inhalt der von der Spannungskurve begrenzten Fläche ist. Um für die Ermittlung von F' die Simpsonsche Regel anwenden zu können, muß man die Zahl der Teilflächen durch drei teilbar wählen. Abb. 26 zeigt Schnitte, für die mit den Maßen der Abbildung und $P = 5000$ kg

Schnitt	d cm	F cm²	$\sigma = P:F$	
0	2,7	5,73	873	$\sigma_0 = 873$
1	2,7	5,73	873	$3\,\sigma_1 = 3 \cdot 873 = 2619$
2	2,95	6,83	730	$3\,\sigma_2 = 3 \cdot 730 = 2190$
3	3,3	8,55	585	$2\,\sigma_3 = 2 \cdot 585 = 1170$
4	3,9	11,95	419	$3\,\sigma_4 = 3 \cdot 419 = 1257$
5	4,3	14,52	344	$3\,\sigma_5 = 3 \cdot 344 = 1032$
6	4,3	14,52	344	$2\,\sigma_6 = 2 \cdot 344 = 688$
7	4,0	12,57	398	$3\,\sigma_7 = 3 \cdot 398 = 1194$
8	3,6	10,18	490	$3\,\sigma_8 = 3 \cdot 490 = 1470$
9	3,6	10,18	490	$\sigma_9 = 490$
				12983

wird. Die Simpsonsche Regel liefert als Flächeninhalt

$$F' = \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{9} (\sigma_0 + 3\sigma_1 + 3\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 + 3\sigma_5 + 2\sigma_6 + 3\sigma_7 + 3\sigma_8 + \sigma_9)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{120}{9} \cdot 12983$$

und damit als Verlängerung des Stabes

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot F' = \frac{3 \cdot 120 \cdot 12983}{8 \cdot 9 \cdot 2150000} = 0{,}03 \text{ cm}.$$

3. Die Kraft sei veränderlich.

a) Der Querschnitt sei unveränderlich.

Ein Stab von der Länge l und dem unveränderlichen Querschnitt F stehe unter dem Einfluß des Eigengewichtes. Der Spannungs- und Formänderungszustand ist zu untersuchen (Abb. 27).

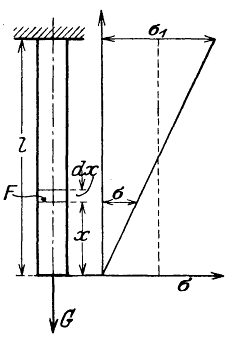


Abb. 27. Eigengewicht.

Ein Querschnitt F im Abstande x vom freien Ende des Stabes erfährt die Spannung

$$\sigma = \frac{G_x}{F},$$

wobei G_x das Gewicht des abgetrennten Teiles bedeutet; dieses ist aber mit γ als spezifischem Gewicht

$$G_x = \int_0^x F \cdot dx \cdot \gamma = F \cdot \gamma x,$$

daraus

$$\sigma = \gamma \cdot x \quad \text{und} \quad \sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{G}{F}.$$

Die Spannung in den Querschnitten wächst geradlinig von $\sigma = 0$ auf $\sigma = \sigma_1$ an der Einspannstelle. Die Verlängerung eines Stabteilchens von der Länge dx ist

$$\Delta dx = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \gamma \cdot x \cdot dx\,,$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{1}{E} \cdot \gamma \cdot x \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \gamma \cdot \frac{l^2}{2}\,.$$

Die Einführung von $G = F \cdot l \cdot \gamma$ liefert

$$\Delta l = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot l}{E \cdot F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E} \cdot \sigma_1 \cdot l\,.$$

Beispiel 11. Ein wagerechter Stab mit unveränderlichem Querschnitt drehe sich um eine senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Spannungs- und Formänderungszustand infolge der Fliehkraft ist zu untersuchen (Abb. 28).

Der Querschnitt F im Abstande x vom freien Ende wird durch die Fliehkraft C_x, des abgetrennten Teiles auf Zug beansprucht; diese ist

$$C_x = \frac{G_x \cdot \left(l - \frac{x}{2}\right) \cdot \omega^2}{g} = \frac{F \cdot x \cdot \gamma \cdot \left(l - \frac{x}{2}\right) \cdot \omega^2}{g}\,.$$

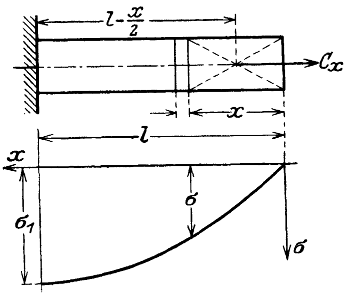


Abb. 28. Fliehkraft.

Damit

$$\sigma = \frac{C_x}{F} = \frac{\gamma}{g} \cdot x \left(l - \frac{x}{2}\right) \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{2 \cdot g} \cdot x\,(2l - x) \cdot \omega^2.$$

$\sigma = f(x)$ ist eine Parabel, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht und deren Scheitel in der Einspannstelle liegt. Hier tritt die größte Spannung auf σ_1, die sich für $x = l$ aus der Gleichung für σ ergibt. Man erhält

$$\sigma_1 = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l^2}{2g} \quad \text{und damit} \quad \sigma = \sigma_1 \cdot \frac{x\,(2l - x)}{l^2}\,.$$

Ein Stabteilchen von der Länge dx erfährt infolge der Spannung σ die Verlängerung

$$\Delta dx = \varepsilon \cdot dx = \frac{\sigma \cdot dx}{E}\,;$$

der ganze Stab verlängert sich demnach um

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma \cdot dx\,,$$

wobei $\int_0^l \sigma dx$ der Inhalt der von der Kurve $\sigma = f(x)$ und den Achsen begrenzten Fläche ist. Dieser ist gleich $^2/_3$ des aus l und σ_1 gebildeten Rechtecks, so daß

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sigma_1 \cdot l = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l^3}{3g \cdot E} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{E} \cdot l$$

wird.

Bei allen drei Gleichungen ist auf die Benennungen zu achten. Damit σ die Benennung kg/cm² erhält, muß gewählt werden:

γ in kg/cm²; l in cm; ω in 1/sek; g in cm/sek².

Sollen die sonst üblichen Dimensionen — γ in kg/dm³; g in m/sek²; l in cm — eingeführt werden, dann lauten die Gleichungen

$$\sigma = \frac{1}{100000} \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot x(2l-x) \cdot \omega^2 = \sigma_1 \cdot \frac{x(2l-x)}{l^2},$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{100000} \cdot \frac{\gamma l^2}{2g} \cdot \omega^2,$$

$$\Delta l = \frac{1}{100000} \cdot \frac{\gamma l^3}{3gE} \cdot \omega^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{E} \cdot \sigma_1 \cdot l.$$

Zahlenbeispiel 11. Der Stab sei 1,25 m lang; der Baustoff Gußeisen mit $\gamma = 7{,}25$ kg/dm³. Welche Umlaufzahl darf er erhalten, wenn k_z 200 kg/cm² nicht überschreiten soll? Wie groß ist seine Verlängerung?

Aus

$$\sigma_1 = \frac{1}{100000} \cdot \frac{\gamma \cdot l^2}{2g} \cdot \omega^z = k_z$$

folgt

$$\omega = \sqrt{100000 \cdot \frac{2\,g\,k_z}{\gamma l^2}} = \sqrt{100000 \cdot \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 200}{7{,}25 \cdot 125^2}} = 59{,}5\ [1/\text{sek}],$$

Dieser Winkelgeschwindigkeit entspricht eine Umlaufzahl

$$n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 59{,}5}{3{,}14} = \sim 570\ [\text{Uml./Min.}].$$

Als Umfangsgeschwindigkeit erhält man

$$v = r \cdot \omega = 1{,}25 \cdot 59{,}5 = \sim 74\ [\text{m/sek}].$$

Da man im Maschinenbau bei Gußeisen nicht über $v = 35$ m/sek hinauszugehen pflegt, muß k_z unter 200 kg/cm² bleiben.

Als Verlängerung ergibt sich bei einem mittleren $E = 800000$ kg/cm²

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{2}{3}\, \sigma \cdot l = \frac{2 \cdot 200 \cdot 125}{800000 \cdot 3} = 0{,}0217 \text{ cm}.$$

Die Berechnung der Verlängerung ist insofern nur angenähert, als das Hookesche Gesetz als gültig angenommen wurde.

Berechnung der Verlängerung auf Grund des Potenzgesetzes.

$$\varepsilon = \frac{1}{1250000} \cdot \sigma^{1,1}.$$

Aus $\Delta\, dx = \varepsilon \cdot dx$ ergibt sich

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon \cdot dx = \frac{1}{1250000} \int_0^l \sigma^{1,1} \cdot dx = \frac{1}{1250000} \int_0^l \left[\sigma_1 \cdot \frac{x(2l-x)}{l^2}\right]^{1,1} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{1250000} \int_0^l \left[\sigma_1 \cdot \frac{2l}{l^2} \cdot x\left(1 - \frac{x}{2l}\right)\right]^{1,1} \cdot dx.$$

Wir setzen $\frac{x}{2l} = z$, also $x = 2lz$ und $dx = 2l\,dz$ und erhalten

$$\Delta l = \frac{1}{1250000} \int_0^{1/2} \left[\sigma_1 \cdot \frac{2l}{l^2} \cdot 2lz(1-z)\right]^{1,1} \cdot 2l \cdot dz.$$

Die Grenzen sind für $x = 0$ $z = 0$ und für $x = l$ $z = {}^1/_2$.

$$\Delta l = \frac{1}{1250000} \cdot (4\sigma_1)^{1,1} \cdot 2l \cdot \int_0^{1/2} z^{1,1} (1 - z)^{1,1} \cdot dz\,,$$

$$\Delta l = \frac{1}{1250000} \cdot 2^{3,2} \cdot \sigma_1{}^{1,1} \cdot l \int_0^{1/2} z^{1,1} \cdot (1 - z)^{1,1} \cdot dz\,.$$

Wir entwickeln $(1 - z)^{1,1}$ nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(1-z)^{1,1} = 1 - 1{,}1 \cdot z + \frac{1{,}1 \cdot 0{,}1}{1 \cdot 2} \cdot z^2 + \frac{1{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^3 + \frac{1{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot z^4 + \cdots$$

$$\begin{aligned} z^{1,1} \cdot (1-z)^{1,1} &= z^{1,1} - 1{,}1 \cdot z^{2,1} + \frac{1{,}1 \cdot 0{,}1}{1 \cdot 2} z^{3,1} + \frac{1{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{4,1} \\ &\quad + \frac{1{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot z^{5,1} + \cdots \\ &= z^{1,1} - 1{,}1 \cdot z^{2,1} + 0{,}055\, z^{3,1} + 0{,}0165\, z^{4,1} + 0{,}00784\, z^{5,1} \\ &\quad + 0{,}004546\, z^{6,1} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} z^{1,1} \cdot (1-z)^{1,1} \cdot dz &= \int_0^{1/2} z^{1,1} \cdot dz - 1{,}1 \int_0^{1/2} z^{2,1}\, dz + 0{,}055 \int_0^{1/2} z^{3,1} \cdot dz + 0{,}0165 \int_0^{1/2} z^{4,1} dz + \cdots \\ &= \frac{1}{2{,}1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2,1} - 1{,}1 \cdot \frac{1}{3{,}1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3,1} + 0{,}055 \cdot \frac{1}{4{,}1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4,1} + \cdots \\ &= 0{,}11108 - 0{,}04139 + 0{,}00078_2 + 0{,}00009_4 + 0{,}00001_9 \\ &\quad + 0{,}00000_5 + \cdots \end{aligned}$$

$$\int_0^{1/2} z^{1,1}(1-z)^{1,1} \cdot dz = 0{,}07059\,, \qquad 2^{3,2} \int_0^{1/2} z^{1,1}(1-z)^{1,1} \cdot dz = 0{,}6487,$$

damit $$\Delta l = \frac{1}{1250000} \cdot 0{,}6487 \cdot \sigma_1{}^{1,1} \cdot l = 0{,}0219 \text{ cm}\,.$$

Der Unterschied gegen den mit einem unveränderlichen E gefundenen Wert ist allerdings gering, doch darf nicht übersehen werden, daß die Zahlentafeln E zwischen 750000 und 1050000 kg/cm² angeben. Allgemeine Gültigkeit hat auch der mit dem Potenzgesetz gefundene Wert nicht, da jede Gußeisensorte ihr besonderes Gesetz hat.

Der frei kreisende Ring. Wir denken uns einen Ring mit rechteckigem Querschnitt, dessen Abmessungen im Vergleich zu dem Durchmesser als gering angesehen werden dürfen. Bei der Drehung des Ringes stehen alle Teile unter dem Einfluß der Fliehkraft, erfahren also Kräfte, die radial nach außen gerichtet sind (Abb. 29). Auf das Ringteilchen von der Breite $R \cdot d\varphi$ wirkt eine Fliehkraft

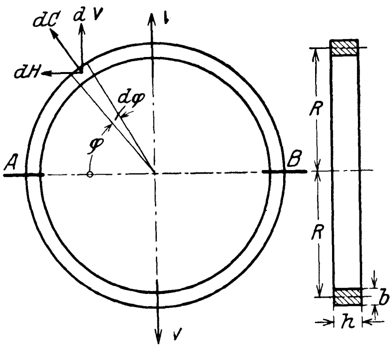


Abb. 29. Ring.

$$dC = dM \cdot R \cdot \omega^2,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des umlaufenden Ringes ist. Mit

$$dM = \frac{dG}{g} = \frac{\gamma}{g} \cdot dV,$$

worin γ das spezifische Gewicht ist, wird

$$dC = \frac{\gamma}{g} \cdot b \cdot h \cdot R \cdot d\varphi \cdot R \cdot \omega^2,$$

die senkrechte Seitenkraft wird

$$dV = dC \cdot \sin\varphi = \frac{\gamma}{g} \cdot bh \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi\,,$$

die Summe aller Seitenkräfte dV über den halben Ring ergeben

$$\begin{aligned} V = \int_0^\pi dV &= \frac{\gamma}{g} \cdot bh \cdot R^2 \cdot \omega^2 \int_0^\pi \sin\varphi \cdot d\varphi\,, \\ &= -\frac{\gamma}{g} \cdot b \cdot h \cdot (R \cdot \omega)^2 \left[\cos\pi - \cos 0\right], \\ &= 2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot bh \cdot (R \cdot \omega)^2 \end{aligned}$$

oder mit $R \cdot \omega = v$, der Umfangsgeschwindigkeit,

$$V = 2 \cdot \frac{\gamma}{g} bh \cdot v^2.$$

Eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft V erhalten wir für die untere Ringhälfte. Beide Kräfte V müssen von dem Querschnitt AB aufgenommen werden, so daß

$$2 \cdot b \cdot h \cdot \sigma = 2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot bh \cdot v^2 \tag{a}$$

wird. Die Festigkeitsbedingung erfordert

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \leqq k_z\,.$$

Die Gleichung ist insofern lehrreich, als sie zeigt, daß die Spannung σ im Schnitt AB nur von dem spezifischen Gewicht γ und der mittleren Umfangsgeschwindigkeit v abhängig ist. Allerdings haben wir in Gleichung (a) gleichmäßig verteilte Spannungen angenommen, was nur angenähert zutrifft. Die Einheiten, in denen die in Frage kommenden Größen zu messen sind, müssen auf kg und cm zurückgeführt werden, also

γ als spezifisches Gewicht des Baustoffes in kg/cm³ (Gußeisen $\gamma = 0{,}0072$ kg/cm³; Stahl $\gamma = 0{,}0078$ kg/cm³);
g als Erdbeschleunigung in cm/sek²; $g = 981$ cm/sek²;
h und b in cm;
R als mittlerer Halbmesser in cm;
v als Umfangsgeschwindigkeit in cm/sek;
$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ als Winkelgeschwindigkeit in 1/sek;
σ und k_z als Zugspannungen in kg/cm².

Die Verlängerung des Bogenteilchens $ds = R \cdot d\varphi$ ist

$$\Delta(ds) = \alpha \cdot \sigma \cdot ds = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot ds\,,$$

die Dehnung in Richtung des Umfanges also

$$\varepsilon = \frac{\Delta(ds)}{ds} = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot v^2.$$

Der ganze Ring erfährt infolge der Fliehkraft eine Verlängerung

$$\Delta(2\pi R) = \varepsilon \cdot 2\pi R = \frac{1}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \cdot 2\pi R;$$

um

$$\Delta R = \frac{1}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \cdot R$$

verlängert sich der Halbmesser R.

Ein radialer Stab von der Länge R, den wir uns als Arm eines Schwungringes denken können, erfährt nach S. 29 die Verlängerung.

$$\Delta R = \frac{1}{3E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \cdot R,$$

das ist aber nur ein Drittel des Betrages, um den sich der Ring aufweitet. Sind Ring und Arm fest miteinander verbunden, so wird der Arm zusätzliche Zugspannungen, der Ring aber Biegungspannungen erfahren. (Näheres unter „Schwungradberechnung", S. 460.)

Häufig wird der Schwungring geteilt, und beide Teile müssen durch Schrauben zusammengehalten werden. Sind n Schrauben mit einem Kernquerschnitt von f cm² vorhanden, so errechnet sich n aus der Festigkeitsbedingung

$$n \cdot f \cdot k_z' \geqq V = 2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot bh \cdot v^2;$$

auf jeden der beiden Stöße entfallen demnach

$$n' = \frac{1}{2} \cdot n \geqq \frac{\gamma \cdot b \cdot h \cdot v^2}{g \cdot f \cdot k_z'}$$

Schrauben, deren Baustoff die zulässige Spannung k_z' hat. Mit

$$\frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \leqq k_z$$

erhält man

$$n' = \frac{bh}{f} \cdot \frac{k_z}{k_z'}.$$

Aus

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2$$

folgt für Gußeisen mit $\gamma = 0{,}0072$ kg/cm³; $g = 981$ cm/sek; $v_{\max} = 35$ m/sek

$$\sigma_{\max} = \frac{0{,}0072}{981} \cdot 3500^2 = \sim 90 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Der Querschnitt sei veränderlich.

1. Ein Stab von der Länge l habe kegelige Form und stehe unter dem Einfluß des Eigengewichtes. Spannungs- und Formänderungszustand sind zu untersuchen (Abb. 30).

Der Querschnitt F im Abstande x von der Endfläche F_2 trägt das Gewicht des Kegelstumpfes von der Höhe x. Mit γ als dem spezifischen Gewicht des Baustoffes wird

$$dG = F \cdot dx \cdot \gamma$$

oder mit

$$F_1 : F = (h + l)^2 : (h + x)^2$$

$$dG = F_1 \cdot \frac{(h+x)^2}{(h+l)^2} \cdot \gamma \cdot dx\,,$$

daher

$$G = \frac{F_1 \cdot \gamma}{(h+l)^2} \int\limits_0^x (h+x)^2 \cdot dx\,.$$

Da die Gleichungen bequemer werden, wenn wir das Achsenkreuz durch die Spitze des Ergänzungskegels legen, schreiben wir

$$h + x = z;\; dx = dz;\; h + l = H$$

und erhalten

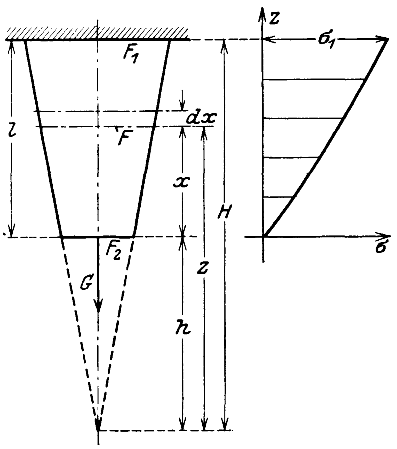


Abb. 30. Kegeliger Stab (Eigengewicht).

$$G = \frac{F_1 \cdot \gamma}{H^2} \int\limits_h^z z^2 \cdot dz = \frac{F_1 \cdot \gamma}{H^2} \cdot \frac{z^3}{3}\Bigg|_h^z\,,$$

$$G = \frac{F_1 \cdot \gamma}{3 \cdot H^2}(z^3 - h^3),$$

und damit

$$\sigma = \frac{G}{F} = \frac{F_1 \cdot \gamma}{3 \cdot F \cdot H^2}(z^3 - h^3),$$

was infolge

$$F : F_1 = z^2 : H^2$$

übergeht in

$$\sigma = \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{z^3 - h^3}{z^2}\,.$$

Für den Einspannquerschnitt F_1 wird $z = H$, folglich

$$\sigma_1 = \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{H^3 - h^3}{H^2}\,.$$

Durch die Division beider Gleichungen erhalten wir das Gesetz über das Anwachsen der Spannung längs der Stabachse

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \frac{H^2}{H^3 - h^3} \cdot \frac{z^3 - h^3}{z^2}$$

$$z = h \text{ ergibt } \sigma = \sigma_2 = 0\,,$$
$$z = H \quad ,, \quad \sigma = \sigma_1;$$

für dazwischen liegende Werte z findet man σ am schnellsten durch Rechnung, indem man setzt

$h = \varphi \cdot l$; $H = h + l = (1 + \varphi) \cdot l$,

$z_0 = \varphi \cdot l$; $z_1 = (\varphi + 0{,}1) \cdot l$; $z_2 = (\varphi + 0{,}2) \cdot l$; $z_3 = (\varphi + 0{,}3) \cdot l$ usw.;

dann wird für zehn gleiche Teile der Stablänge

$$\sigma \quad = 0$$

$$\sigma_{(1)} = \sigma_1 \cdot \frac{(1+\varphi)^2}{(1+\varphi)^3-\varphi^3} \cdot \frac{(\varphi+0{,}1)^3-\varphi^3}{(\varphi+0{,}1)^2} = \sigma_1 \alpha \cdot \alpha_1 ,$$

$$\sigma_{(2)} = \sigma_1 \cdot \frac{(1+\varphi)^2}{(1+\varphi)^3-\varphi^3} \cdot \frac{(\varphi+0{,}2)^2-\varphi^3}{(\varphi+0{,}2)^2} = \sigma_1 \cdot \alpha \cdot \alpha_2 ,$$

$$\sigma_{(3)} = \sigma_1 \cdot \frac{(1+\varphi)^2}{(1+\varphi)^3-\varphi^3} \cdot \frac{(\varphi+0{,}3)^3-\varphi^3}{(\psi+0{,}3)^2} = \sigma_1 \cdot \alpha \cdot \alpha_3 \text{ usw.}$$

z. B. erhält man für $\varphi = 4$ den Festwert $\alpha = 0{,}4098$ und damit

	α_n	$\alpha \cdot \alpha_n$	$\sigma = \alpha \cdot \alpha_n \cdot \sigma_1$
1. $z_1 = (\varphi + 0{,}1) \cdot l$	0,293	0,12	$\sigma_{(1)} = 0{,}12 \cdot \sigma_1$
2. $z_2 = (\varphi + 0{,}2) \cdot l$	0,572	0,234	$\sigma_{(2)} = 0{,}234 \cdot \sigma_1$
3. $z_3 = (\varphi + 0{,}3) \cdot l$	0,839	0,344	$\sigma_{(3)} = 0{,}344 \cdot \sigma_1$
4. $z_4 = (\varphi + 0{,}4) \cdot l$	1,094	0,449	$\sigma_{(4)} = 0{,}449 \cdot \sigma_1$
5. $z_5 = (\varphi + 0{,}5) \cdot l$	1,34	0,55	$\sigma_{(5)} = 0{,}55 \cdot \sigma_1$
6. $z_6 = (\varphi + 0{,}6) \cdot l$	1,576	0,646	$\sigma_{(6)} = 0{,}646 \cdot \sigma_1$
7. $z_7 = (\varphi + 0{,}7) \cdot l$	1,802	0,738	$\sigma_{(7)} = 0{,}738 \cdot \sigma_1$
8. $z_8 = (\varphi + 0{,}8) \cdot l$	2,022	0,829	$\sigma_{(8)} = 0{,}829 \cdot \rho_1$
9. $z_9 = (\varphi + 0{,}9) \cdot l$	2,235	0,916	$\sigma_{(9)} = 0{,}916 \cdot \sigma_1$
10. $z_{10} = (\varphi + 1\ ) \cdot l$	—	—	$\sigma_{(10)} = \sigma_1$

Die Kurve $\sigma = f(z)$ ist eine schwach gekrümmte hyperbolische Kurve dritten Grades (Abb. 30).

Als Verlängerung eines Stabteilchens von der Länge dx erhält man

$$d(\Delta x) = \alpha \cdot \sigma \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot dx ,$$

demnach als Verlängerung des ganzen Stabes

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \int_0^l \sigma \cdot dx .$$

$\sigma \cdot dx$ ist ein Flächenstreifen von der Höhe dx; $\int \sigma \cdot dx$ gleich dem Inhalt der von der Spannungskurve $\sigma = f(z)$ begrenzten Fläche. Hier empfiehlt sich die zeichnerische Lösung der Aufgabe, da man mit genügender Genauigkeit rechnet, wenn man die Kurve maßstäblich auf Millimeterpapier entwirft und den Flächeninhalt auszählt. Ist 1 mm $= a$ cm der Längenmaßstab, 1 mm $= b$ kg/cm^2 der Maßstab der Spannungen, so ist 1 mm$^2 = a$ [cm] $\cdot\, b$ [kg/cm^{-2}] $= a \cdot b$ [kg/cm^{-1}] der Maßstab des Flächeninhaltes. Bei F' mm^2 gezählten Inhalt wird

$$\Delta l\,[\mathrm{cm}] = \frac{1}{E} \cdot F' = \frac{1}{E\,[\mathrm{kg/cm^{-2}}]} \cdot F'\,[\mathrm{mm}^2] \cdot \frac{a \cdot b\,[\mathrm{kg/cm^{-1}}]}{1\,[\mathrm{mm}^2]}$$

die Gesamtverlängerung des Stabes.

2. Ein Stab von der Länge l habe kegelige Form und stehe unter dem Einfluß der Fliehkraft. (Arm eines kreisenden Schwungrades.) Spannungs- und Formänderungszustand sind zu untersuchen (Abb. 31).

Eine Scheibe senkrecht zur Stabachse von der Dicke dx im Abstande x' von der Drehachse erfährt die Fliehkraft

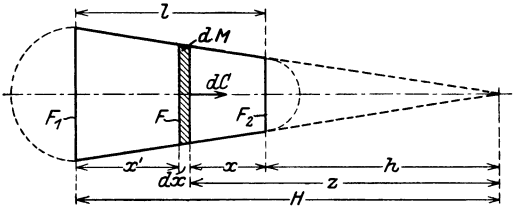


Abb. 31. Kegeliger Stab (Fliehkraft).

$$dC = dM \cdot x' \cdot \omega^2,$$

wenn dM die Masse der Scheibe, ω die Winkelgeschwindigkeit des Armes ist. Mit γ als spezifischem Gewicht wird

$$dM = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx,$$

also

$$dC = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot F \cdot x' \cdot dx,$$
$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot F \cdot (l - x) \cdot dx.$$

Aus

$$F : F_1 = (h + x)^2 : H^2$$

folgt

$$F = F_1 \cdot \frac{(h+x)^2}{H^2},$$

$$C = \int_0^x dC = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \int_0^x (l - x)(h + x)^2 \cdot dx.$$

Die Auflösung der Klammern liefert

$$C = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,\frac{F_1}{H^2} \int_0^x (h^2 l + 2hlx + lx^2 - h^2 x - 2hx^2 - x^3)\,dx,$$
$$= \frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,\frac{F_1}{H^2} \left(h^2 lx + hlx^2 + \tfrac{1}{3} lx^3 - \tfrac{1}{2} h^2 x^2 - \tfrac{2}{3} hx^3 - \tfrac{1}{4} x^4\right)\Big|_0^x,$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,\frac{F_1}{H^2}\left[12h^2 lx - 6hx^2(h - 2l) - 4x^3(2h - l) - 3x^4\right].$$

Als Zugspannung im Querschnitt F erhalten wir $\sigma = C : F$ oder mit

$$F = F_1\,\frac{(h+x)^2}{H^2},$$

$$\sigma = \frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,\frac{12h^2 lx - 6hx^2(h - 2l) - 4x^3(2h - l) - 3x^4}{(h+x)^2}.$$

Damit man ein Bild von dem Anwachsen der Spannung erhält, sei die übliche Verjüngung $4:5$, d. h. $h = 4\,l$; $H = 5\,l$, der weiteren Behandlung zugrunde gelegt. Wir erhalten

$$\sigma = \frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2\,\frac{192\,l^3 x - 48\,l^2 x^2 - 28\,lx^3 - 3x^4}{(4l + x)^2}.$$

Die Einspannstelle erfährt eine Spannung $\sigma = \sigma_1$ für $x = l$

$$\sigma_1 = \frac{113}{300} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l^2.$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \frac{25}{113} \cdot \frac{192 l^3 x - 48 l^2 x^2 - 28 l x^3 - 3 x^4}{l^2 (4l + x)^2}.$$

Wir berechnen σ für 10 Punkte und setzen $x = \varphi \cdot l$

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \frac{25}{113} \cdot \frac{192\varphi - 48\varphi^2 - 28\varphi^3 - 3\varphi^4}{(4+\varphi)^2} = \sigma_1 \cdot \frac{25}{113} \cdot \alpha.$$

$\varphi =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$4+\varphi$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
Nenner $= (4+\varphi)^2$	16,81	17,64	18,49	19,36	20,25
φ^2	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25
φ^3	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125
φ^4	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
$192\,\varphi$	19,2	38,4	57,6	76,8	96,0
$48\,\varphi^2$	0,48	1,92	4,32	7,68	12,00
$28\,\varphi^3$	0,028	0,224	0,756	1,792	3,500
$3\,\varphi^4$	0,0003	0,0048	0,0243	0,0768	0,1875
Zähler	18,69	36,25	52,50	67,25	80,31
α	1,112	2,055	2,839	3,474	3,966
$\sigma : \sigma_1$	0,246	0,455	0,628	0,769	0,877

$\varphi =$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$4+\varphi$	4,6	4,7	4,8	4,9	5
Nenner $= (4+\varphi)^2$	21,16	22,09	23,04	24,01	25
φ^2	0,36	0,49	0,64	0,81	1
φ^3	0,216	0,343	0,512	0,729	1
φ^4	0,1296	0,2401	0,4096	0,6561	1
$192\,\varphi$	115,2	134,4	153,6	172,8	192
$48\,\varphi^2$	17,28	23,52	30,72	38,88	48
$28\,\varphi^3$	6,048	9,604	14,336	20,412	28
$3\,\varphi^4$	0,3888	0,7203	1,2288	1,9683	3
Zähler	91,48	100,56	107,92	111,54	113
α	4,323	4,552	4,684	4,646	4,520
$\sigma : \sigma_1$	0,957	1,007	1,036	1,028	1

Bemerkenswert ist, daß die größte Spannung nicht im Einspannquerschnitt auftritt. Um den Ort der größten Spannung zu finden, setzt man den ersten Differentialquotienten gleich Null:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0.$$

Mit

$$u = 192\,l^3 x - 48\,l^2 x^2 - 28\,l x^3 - 3\,x^4,$$

$$\frac{du}{dx} = 192\,l^3 - 96\,l^2 x - 84\,l x^2 - 12\,x^3,$$

$$v = (4\,l + x)^2,$$

$$\frac{dv}{dx} = 2(4\,l + x)$$

wird

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{768\,l^4 - 576\,l^3 x - 336\,l^2 x^2 - 76\,l x^3 - 6\,x^4}{(4\,l + x)^3} = 0.$$

Daraus
$$3\,x^4 + 38\,l x^3 + 168\,l^2 x^2 + 288\,l^3 x - 384\,l^4 = 0\,,$$
$$3\left(\frac{x}{l}\right)^4 + 38\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 168\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 288\,\frac{x}{l} - 384 = 0\,.$$

Durch Annäherung findet man $\varphi = \frac{x}{l} = 0{,}841$; damit wird
$$\sigma_{\max} = 1{,}047 \cdot \sigma_1\,,$$
$$\sigma_{\max} = 0{,}394\,\frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l^2.$$

Die Verlängerung des Armes ist
$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma \cdot dx\,.$$

Hat man die Kurve $\sigma = f(x)$ maßstäblich auf Millimeterpapier gezeichnet, so ergibt das Auszählen der von der Kurve begrenzten Fläche unmittelbar die Verlängerung. Da aber das Anwachsen der Spannung mathematisch als Funktion gegeben ist, läßt sich Δl durch Integration bestimmen. Allerdings ist die aufgestellte Gleichung etwas unbequem; wir beziehen sie deshalb besser auf ein Achsenkreuz, dessen Nullpunkt in der Spitze des Ergänzungskegels liegt, und setzen
$$l - x = H - z;\; h + x = z;\; dx = dz;\; F : F_1 = z^2 : H^2;$$
dann gehen
$$C = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2}\int_0^x (l - x)\,(h + x)^2 \cdot dx \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{C}{F}$$
über in
$$\sigma = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{1}{z^2}\int_h^z (H - z) \cdot z^2 \cdot dz\,,$$
$$= \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{1}{z^2}\left[\int_h^z H\,z^2\,dz - \int_h^z z^3\,dz\right],$$
$$= \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{\left[{}^1\!/_3 H \cdot z^3 - {}^1\!/_4 z^4\right]_h^z}{z^2}\,,$$
$$= \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{{}^1\!/_3 H(z^3 - h^3) - {}^1\!/_4(z^4 - h^4)}{z^2}\,,$$
$$\sigma = \frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{4H(z^3 - h^3) - 3(z^4 - h^4)}{z^2}\,.$$

Für $z = H$ erhalten wir als Spannung in der Einspannstelle
$$\sigma_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{4H(H^3 - h^3) - 3(H^4 - h^4)}{H^2}$$
und durch Division beider Gleichungen
$$\sigma = \sigma_1 \cdot \frac{4H(z^3 - h^3) - 3(z^4 - h^4)}{4H(H^3 - h^3) - 3(H^4 - h^4)} \cdot \frac{H^2}{z^2}\,.$$

Den Ort der größten Spannung finden wir in diesem allgemeinen Fall aus der Bedingung

$$\frac{d\sigma}{dz} = 0 .$$

Wir setzen

$$u = 4Hz^3 - 4Hh^3 - 3z^4 + 3h^4$$

$$\frac{du}{dz} = 12Hz^2 - 12z^3 ,$$

$$v = z^2 ; \qquad \frac{dv}{dz} = 2z ,$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{z^2 (12Hz^2 - 12z^3) - (4Hz^3 - 4Hh^3 - 3z^4 + 3h^4)\cdot 2z}{z^4} = 0 ;$$

$$3 z^4 - 2 Hz^3 = 4 Hh^3 - 3 h^4 .$$

Diese Bedingungsgleichung ist für den Sonderfall $h = 4 l$; $H = 5 l$ erfüllt, wenn $z = 4{,}84\, l$ ist; das entspricht dem früher gefundenen Wert $x = 0{,}84\, l$.

Die Verlängerung des Stabes ist

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma\cdot dx ,$$

$$= \frac{1}{E}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \int_h^H \frac{4H(z^3 - h^3) - 3(z^4 - h^4)}{z^2}\cdot dz$$

und ergibt nach Auflösung der Klammern

$$\Delta l = \frac{1}{E}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \left[\int 4Hz\,dz - \int 3z^2\,dz - \int \frac{4Hh^3 - 3h^4}{z^2}\cdot dz\right]_h^H ,$$

$$= \frac{1}{E}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \left[2Hz^2 - z^3 + (4Hh^3 - 3h^4)\cdot\frac{1}{z}\right]_h^H ,$$

$$\Delta l = \frac{1}{E}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 \left[2H(H^2 - h^2) - (H^3 - h^3) + (4Hh^3 - 3h^4)\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{h}\right)\right].$$

Für den Sonderfall $h = 4\, l$ und $H = 5\, l$ erhalten wir

$$\Delta l = \frac{1}{E}\, 0{,}283\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\omega^2\cdot l^3 = \frac{1}{E}\cdot 0{,}283\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot v^2\cdot l ;$$

gegen

$$\Delta l = \frac{1}{E}\cdot 0{,}333\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot v^2\cdot l ,$$

das für den Stab mit unveränderlichem Querschnitt gefunden wurde.

4. Der Zugstab gleicher Festigkeit.

Bei sehr langen Stäben fällt die geringe Ausnutzung des Baustoffes auf, wenn neben der Last das Eigengewicht berücksichtigt werden muß. Da bedeutet jedes überflüssige Quadratzentimeter Querschnitt ein Mehr an Belastung, das besser vermieden wird. Aus dieser Überlegung ergibt sich die natürliche Forderung, den Stab so zu formen, daß alle Querschnitte gleiche Spannung erfahren. Stäbe dieser Art heißen

Stäbe gleicher Festigkeit, im Falle der Zugbeanspruchung Stäbe gleicher Zugfestigkeit.

Wir machen die einschränkende Voraussetzung, der Stab sei ein Umdrehungskörper, dann ist mit den Bezeichnungen der Abb. 32 das Gewicht einer Scheibe von der Dicke dy und dem spezifischen Gewicht γ

$$dG = F \cdot \gamma \cdot dy,$$

also das Gewicht des Stabes von der Länge y

$$G = \int dG = \gamma \int_0^y F \cdot dy .$$

Aus der Erklärung der Spannung als $\sigma = (G+P):F$ folgt

$$\sigma = \frac{G+P}{F} = \gamma \cdot \frac{\int_0^y F\,dy}{F} + \frac{P}{F} .$$

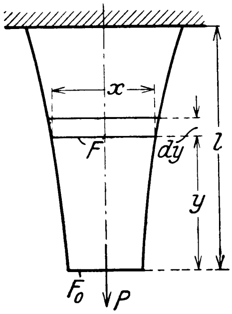


Abb. 32. Zugstab gleicher Festigkeit.

Damit in allen Schnitten F die Spannung σ den zulässigen Wert k_z annimmt, muß die Bedingung

$$\sigma = k_z \quad \text{oder} \quad \gamma \int_0^y F \cdot dy + P = F \cdot k_z$$

erfüllt sein.

Aus $\quad \frac{\gamma}{k_z} \int F \cdot dy + \frac{P}{k_z} = F \quad$ folgt $\quad \frac{\gamma}{k_z} \cdot F \cdot dy = dF,$

$$\frac{\gamma}{k_z} \cdot dy = \frac{dF}{F} .$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{\gamma}{k_z} \cdot y = \ln F + C$$

als Gesetz für das Anwachsen des Querschnittes F längs der Stabachse. Der Integrationsfestwert C ist aus den physikalischen Bedingungen der Aufgabe zu ermitteln, und zwar wird

$$0 = \ln\left(\frac{P}{k_z}\right) + C \qquad \text{oder} \qquad C = -\ln\left(\frac{P}{k_z}\right),$$

weil der Endquerschnitt $F_0 = P : k_z$ ist.

Unsere Gleichung geht über in

$$\frac{\gamma}{k_z} \cdot y = \ln F - \ln\left(\frac{P}{k_z}\right) = \ln \frac{F \cdot k_z}{P}$$

oder

$$F = \frac{P}{k_z} \cdot e^{\frac{\gamma}{k_z} \cdot y} .$$

Die Profillinie des Stabes gleicher Zugfestigkeit ist demnach eine Exponentialkurve, nach der allerdings kaum ein Stab geformt werden dürfte. Man geht vielmehr so vor, daß man einen abgesetzten Stab ausführt, dessen Umgrenzungslinie außerhalb der theoretischen Profillinie verläuft. Wird wirklich gelegentlich die möglichst genaue Innehaltung der theoretischen Begrenzungslinie gefordert, so ersetzt man $P : k_z$ durch F_0 und bildet

$$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{k_z} \cdot y} ;$$

dann ergibt das Logarithmieren

$$\lg\left(\frac{F}{F_0}\right) = \lg e \cdot \frac{\gamma}{k_z} \cdot y .$$

Für Flußeisen ist $\gamma = 0{,}0078$ kg/cm³; k_z angenommen zu 1000 kg/cm²; $\lg e = 0{,}4343$, demnach

$$\lg\left(\frac{F}{F_0}\right) = 3{,}3875 \cdot 10^{-6} \cdot y .$$

Wie wenig die Länge das Verhältnis von Einspannquerschnitt zum Endquerschnitt beeinflusst, zeigt die Durchrechnung für verschiedene Werte l. Z. B. liefert $l = 10$ m $= 1000$ cm

$$\lg\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 3{,}3875 \cdot 10^{-3} = 0{,}0033875 ; \quad \frac{F_1}{F_0} = 1{,}008 .$$

$l = 100$ m $= 10000$ cm liefert

$$\lg\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 3{,}3875 \cdot 10^{-2} = 0{,}033875 ; \quad \frac{F_1}{F_0} = 1{,}081 ,$$

$l = 200$ m $= 20000$ cm liefert

$$\lg\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 3{,}3875 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0{,}067750 ; \quad \frac{F_1}{F_0} = 1{,}168 ,$$

$l = 300$ m $= 30000$ cm liefert

$$\lg\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 3{,}3875 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 0{,}101625 ; \quad \frac{F_1}{F_0} = 1{,}264 ,$$

$l = 1000$ m $= 100000$ cm liefert

$$\lg\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 3{,}3875 \cdot 10^{-1} = 0{,}33875 ; \quad \frac{F_1}{F_0} = 2{,}112 .$$

D. h.: Erst bei einer Länge von 1000 m wird der Einspannquerschnitt F_1 doppelt so groß wie der Endquerschnitt; bei kreisförmigem Querschnitt würden sich also die Durchmesser wie 1 : 1,475 verhalten.

Zahlenbeispiel. Ein 250 m langes Schachtgestänge aus Stahl ($E = 2\,150\,000$ kg/cm²) mit kreisförmigem Querschnitt trage $P = 5000$ kg. Die zulässige Spannung betrage $k_z = 600$ kg/cm²; das Eigengewicht ($\gamma = 7{,}8$ kg/dcm³) soll berücksichtigt werden; die Form soll angenähert einem Stabe gleicher Zugfestigkeit entsprechen. Spannungs- und Formänderungszustand sind zu untersuchen.

a) Der Stab sei nach der theoretischen Exponentialkurve geformt, dann ist

$$F_0 = \frac{P}{k_z} = \frac{5000}{600} = 8{,}33 \text{ cm}^2 ; \; d_0 = 32{,}6 \text{ mm} ; \; F_0 = 8{,}35 \text{ cm}^2 ,$$

$$\lg\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 0{,}4343 \cdot \frac{\gamma}{k_z} \cdot l = \frac{0{,}0078}{600} \cdot 25000 \cdot 0{,}4343 = 0{,}14115 ,$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 1{,}384 ,$$

$$d_0 = 32{,}6 \text{ mm} \quad F_0 = 8{,}35 \text{ cm}^2; \quad F_1 = 1{,}384 \cdot 8{,}35 = 11{,}56 \text{ cm}^2,$$
$$d_1 = 38{,}4 \text{ mm},$$
$$\sigma_0 = \sigma = \sigma_1 = \frac{5000}{8{,}35} = \sim 600 \text{ kg/cm}^2,$$
$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma \cdot dy = \frac{1}{E} \cdot \sigma_0 \cdot l = \frac{600 \cdot 25000}{2150000} = \sim 7 \text{ cm}.$$

b) Der Stab sei fünfmal unterteilt in Teile von je 50 m Länge. Der Querschnitt F_1 im Abstande $l_1 = 50$ m vom Ende des Stabes trägt das Gewicht G_1 und die Last P; die Festigkeitsbedingung erfordert

$$F_1 \cdot k_z = \geqq F_1 \cdot l_1 \cdot \gamma + P;$$

daraus

$$F_1 = \frac{P}{k_z - l_1 \cdot \gamma} = \frac{5000}{600 - 5000 \cdot 0{,}0078} = 8{,}92 \text{ cm}^2;$$

$d_1 = 33{,}7$ mm. Die Verlängerung beträgt infolge G_1 (nach S. 42)

$$\Delta l_g = \frac{1}{2}\frac{1}{E} \cdot \sigma_g \cdot l_1 = \frac{G_1 \cdot l_1}{F_1 \cdot 2E};$$

infolge P

$$\Delta l_p = \sigma \cdot l_1 \cdot \frac{1}{E} = \frac{P \cdot l_1}{E \cdot F_1},$$

demnach

$$\Delta l_1 = \frac{G_1/2 + P}{E \cdot F_1} \cdot l_1,$$
$$G_1 = F_1 \cdot l_1 \cdot \gamma = 8{,}92 \cdot 5000 \cdot 0{,}0078 = 348 \text{ kg},$$
$$\Delta l_1 = \frac{174 + 5000}{2150000 \cdot 8{,}92} \cdot 5000 = 1{,}35 \text{ cm}.$$

Der Querschnitt F_2 im Abstande $l_1 + l_2 = 100$ m vom Ende trägt $(G_1 + P)$ als Einzellast und außerdem G_2. Die Festigkeitsbedingung erfordert

$$F_2 \cdot k_z \geqq F_2 \cdot l_2 \cdot \gamma + G_1 + P;$$

daraus

$$F_2 \geqq \frac{P + G_1}{k_z - l_2 \cdot \gamma} = \frac{5000 + 348}{600 - 0{,}0078 \cdot 5000} = \frac{5348}{561} = 9{,}52 \text{ cm}^2,$$

$d_2 = 34{,}9$ mm mit $F_2 = 9{,}57$ cm². Die Verlängerung des zweiten Stückes ist

$$\Delta l_2 = \frac{{}^1/_2 G_2 + P + G_1}{EF_2} \cdot l_2,$$
$$G_2 = F_2 \cdot l_2 \cdot \gamma = 9{,}52 \cdot 5000 \cdot 0{,}0078 = 372 \text{ kg},$$
$$\Delta l_2 = \frac{186 + 5000 + 348}{2150000 \cdot 9{,}52} \cdot 5000 = 1{,}35 \text{ cm}.$$

In gleicher Weise erhält man

$$F_3 \geqq \frac{P + G_1 + G_2}{k_z - l_3 \cdot \gamma} = \frac{5000 + 348 + 372}{600 - 0{,}0078 \cdot 5000} = \frac{5720}{561} = 10{,}2 \text{ cm}^2,$$
$$d_3 = 36{,}1 \text{ mm}. \quad F_3 = 10{,}24 \text{ cm}^2; \quad G_3 = 10{,}24 \cdot 5000 \cdot 0{,}0078 = 400 \text{ kg},$$
$$\Delta l_3 = \frac{{}^1/_2 G_3 + P + G_1 + G_2}{EF_3} \cdot l = \frac{200 + 5000 + 348 + 372}{2150000 \cdot 10{,}2} \cdot 5000 = 1{,}35 \text{ cm},$$
$$F_3 \geqq \frac{P + G_1 + G_2 + G_3}{k_z - l_4 \cdot \gamma} = \frac{5000 + 348 + 372 + 400}{600 - 0{,}0078 \cdot 5000} = 10{,}909 \text{ cm}^2,$$

$d_4 = 87{,}3$ mm; $F_4 = 10{,}93$ cm^2; $G_4 = 10{,}93 \cdot 5000 \cdot 0{,}0078 = 470$ kg,

$$\Delta l_4 = \frac{{}^1/_2 G_4 + P + G_1 + G_2 + G_3}{E \cdot F_4} \cdot l = \frac{235 + 6120}{2\,150\,000 \cdot 10{,}93} \cdot 5000 + 1{,}35 \text{ cm},$$

$$F_5 \geqq \frac{P + G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{k_z - l_5 \cdot \gamma} = \frac{6590}{561} = 11{,}75 \text{ cm}^2,$$

$d_5 = 38{,}7$ mm; $F_5 = 11{,}76$ cm^2; $G_5 = 11{,}75 \cdot 5000 \cdot 0{,}0078 = 505$ kg,

$$\Delta l_5 = \frac{{}^1/_2 G + P + G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{E F_5} \cdot l = \frac{6843 \cdot 5000}{2150000 \cdot 11{,}75} = 1.35 \text{ cm}.$$

Die gesamte Verlängerung beträgt rd. $5 \cdot 1{,}35 = 6.75$ cm.

5. Wärmespannungen.

Unter dem Einfluß der Wärme dehnen sich die Körper aus. Die Verlängerung, die ein Stab von der Länge 1 bei einer Temperaturerhöhung von 1 ° C erfährt, heißt Längenausdehnungsziffer oder linearer Ausdehnungskoeffizient und wird mit α bezeichnet. Wenn in der Festigkeitslehre mit E und nicht mit α gerechnet wird, so kann α als Bezeichnung des Ausdehnungskoeffizienten beibehalten werden. Für Eisen und Stahl ist $\alpha = 0{,}000012$ bei Temperaturen zwischen 0 und 100 ° C; d. h. ein Stab von 1 m Länge erfährt bei einer Temperaturerhöhung um 1 ° C eine Verlängerung von 0,000012 m. Bei einer Erwärmung von t_1 auf t_2 ° C verlängert sich demnach ein Stab von l m Länge um

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1);$$

seine Dehnung ist

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha (t_2 - t_1).$$

Die durch eine Normalspannung σ hervorgerufene Dehnung war

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma,$$

unter der Voraussetzung, daß sich die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilen.

Werden die Endpunkte eines Stabes festgehalten, so daß er sich bei Erwärmung nicht verlängern kann, so treten in diesem eingespannten Stabe Spannungen auf, die wir W ä r m e s p a n n u n g e n nennen; sie verteilen sich gleichmäßig über den Querschnitt und sind längs der Stabachse unveränderlich, wenn der Stab in allen Teilen gleiche Temperatur und unveränderlichen Querschnitt hat. Ihre Größe erhält man aus der Gleichsetzung beider Dehnungen zu

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1).$$

Beträgt der Temperaturunterschied 1 ° C, so wird die Spannung

$$\sigma_0 = E \cdot \alpha,$$

also z. B. für Stahl $\sigma_0 = \dfrac{12 \cdot 2\,150\,000}{1\,000\,000} = \text{rd. } 26 \dfrac{\text{kg}}{\text{cm}^2 \cdot {}^0\text{C}}$.

Bei Bauten, die im Freien stehen, rechnet man im mittleren Europa mit ± 35 ° C gegen das Jahresmittel von + 10 ° C, für das der spannungslose Zustand angenommen werden darf. Die größte Temperatursteigerung von 35^0 C, die einer Temperatur von $10 + 35 = 45^0$ C entspricht, ruft in einem fest eingespannten Stabe eine Spannung von

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot 35 = \sim 900 \text{ kg/cm}^2$$

hervor. Das sind Beträge, die für sich allein schon den zulässigen Spannungen sehr nahe kommen.

Im Maschinenbau haben wir es meist mit einer ungleichmäßigen Erwärmung zu tun, die natürlich auch Spannungen hervorruft. Wir betrachten einen Körper, der aus zwei getrennten Teilen besteht, also beispielsweise ein von einem Rohr umgebenen Bolzen (Abb. 33); das Rohr sei eingepaßt. Beide Körper mögen aus verschiedenem Baustoff hergestellt sein; das Dehnmaß des Bolzens sei E_1, das des Rohres sei E_2. Im Augenblick des Zusammenbaues sind beide Körper spannungslos. Jetzt wollen wir annehmen, daß das Rohr auf die Temperatur $t_2{}^0$ C erwärmt werde, während der Bolzen die ursprüngliche Temperatur t_1 ^{0} C beibehält. Infolge der festen Kopplung beider Teile wird das Rohr nicht die Länge l_2 annehmen können, die es bei einer Temperatur t_2 haben müßte, denn die Wärmeausdehnung wird durch den Bolzen teilweise gehindert. Andrerseits kann der Bolzen infolge der festen Kopplung seine ursprüngliche Länge l auch nicht beibehalten; er wird um den Betrag Δl_1 verlängert, verkürzt aber die Verlängerung des Rohres um den Betrag Δl_2. Die der Temperatur t_2 entsprechende Länge l_2 des Rohres wird um Δl_2 vermindert — beide Teile haben gleiche Länge. Die gesamte, infolge der Erwärmung mögliche Verlängerung des Rohres ist

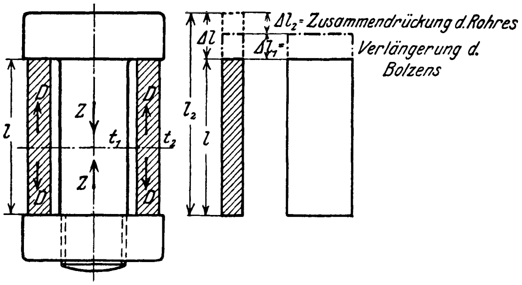


Abb. 33. Bolzen mit Rohr (Wärme).

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1)$$

oder mit den auf die Längeneinheit bezogenen Verlängerungen, d. h. den Dehnungen,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha \cdot (t_2 - t_1) \, .$$

Nach dem Geradliniengesetz von Hooke, dessen Gültigkeit ausdrücklich vorausgesetzt wird, geht diese Gleichung über in

$$\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} = \alpha \cdot (t_2 - t_1) \, .$$

Da zwei Unbekannte, σ_1 und σ_2, vorhanden sind, bedarf es noch einer zweiten Bedingungsgleichung, zu deren Aufstellung wir den Gleichgewichtzustand heranziehen. Denken wir das System senkrecht zur Stabachse durchgeschnitten und die Spannungen als äußere Kräfte angebracht, so muß trotz des Schnittes Gleichgewicht herrschen. Mit F_1 und F_2 als den zugehörigen Querschnitten wird

$$F_1 \cdot \sigma_1 - F_2 \cdot \sigma_2 = 0 .$$

$F_1 \cdot \sigma_1 = Z$ ist Zugkraft im Bolzen, $F_2 \cdot \sigma_2 = D$ ist Druckkraft im Rohr.

$$\sigma_1 = \sigma_2 \cdot \frac{F_2}{F_1}$$

eingesetzt, liefert

$$\sigma_2 \left(\frac{1}{E_1} \cdot \frac{F_2}{F_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \alpha \cdot (t_2 - t_1) ,$$

daraus

$$\sigma_2 = \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot F_1}{E_1 \cdot F_1 + E_2 \cdot F_2} \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) \text{ Druck} ,$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot F_2}{E_1 \cdot F_1 + E_2 \cdot F_2} \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) \text{ Zug} .$$

Für den Sonderfall gleicher Baustoffe erhält man mit $E_1 = E_2 = E$

$$\sigma_1 = + \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) ; \quad \sigma_2 = - \frac{F_1}{F_1 + F_2} \cdot E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) .$$

Wie hohe Beträge Wärmespannungen erreichen können, zeigt die Durchrechnung für den Sonderfall gleicher Querschnitte bei einer Temperaturerhöhung um 100^0 C. Man erhält mit $E = 2150000$ kg/cm² für Flußeisen

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \pm \frac{F}{2F} \cdot E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

$$= \pm \frac{1}{2} \cdot 2150000 \cdot 0{,}000012 \cdot 100 = 1230 \text{ kg/cm}^2 .$$

6. Die Vorspannung.

Häufig kommt es vor, daß man einem Bauteil von vornherein eine Spannung erteilt, ohne daß die im Betriebe auftretenden Kräfte wirken. Die Schrauben am Deckel des Dampfzylinders werden angezogen, bevor der Dampf eintritt; die Schrauben mit denen ein Konsol an der Wand, gehalten wird, werden angezogen, bevor das Konsol die Last aufnimmt, usw. In solchen Fällen sagt man, die Maschinenteile haben eine **Verspannung** erhalten. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß zwei Körper, z. B. die Flansche in Abb. 34, durch die Spannkraft Z der Schraube gegeneinander gepreßt werden, zu der während des Betriebes die aufzunehmende Kraft P tritt. Mit F als Kernquerschnitt der Schraube ist die Vorspannung

$$\sigma_1 = \frac{Z}{F} .$$

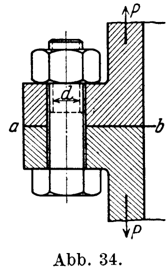


Abb. 34. Vorspannung.

Dieser Spannungszustand entspricht einer Gleichgewichtslage, die sich infolge des Anziehens der Schraube eingestellt hat; mit ihm ist ein Formänderungszustand verbunden; der Schraubenschaft erfährt durch σ_1 eine Verlängerung. Tritt jetzt die Betriebskraft P als neue Kraft hinzu, so kann sie offenbar erst dann eine neue Formänderung hervorrufen, wenn die beiden Flanschen ohne Druck aneinanderliegen; sie löst gewissermaßen die Spannkraft der Schraube ab. Da der gesamte Druck in der Berührungsfläche *a—b* der Flansche gleich der Kraft Z ist, mit der die Schraube angezogen ist, heißt das, erst von dem Augenblick an, wo P größer wird als Z, ist die Gesamtspannung im Schaft größer als die Vorspannung. Das Anwachsen der Gesamtspannung mit wachsendem P zeigt Abb. 35. Aus ihr geht hervor, daß bei der Schraube zwei Belastungsfälle zu unterscheiden sind:

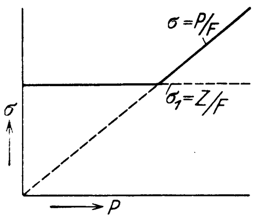


Abb. 35. Vorspannung.

1. $P < Z$; die Gesamtspannung ist gleich der Vorspannung $\sigma_1 = Z : F$;
2. $P < Z$; die Gesamtspannung ist $\sigma = P : F$.

Das trifft jedoch nur dann zu, wenn die Flansche in Abb. 34 starr sind. Streng genommen ist allerdings die Annahme starrer Flansche unzulässig, doch ist sie insofern nicht ganz unberechtigt, als die Formänderung der Flansche gegen die des Schraubenschaftes vernachlässigt werden darf.

Häufig sind im Maschinenbau die zwei durch Schrauben zu verbindenden Teile durch eine Dichtung voneinander getrennt, z. B. Zylinder und Zylinderdeckel. Es ist üblich, für den Dichtungsdruck zu der zulässigen Spannung, die für die Bemessung des Schraubenquerschnittes maßgebend ist, einen Zuschlag von 25% anzunehmen. Dadurch wird erreicht, daß beim Anziehen der Schrauben mit dem Schlüssel die Spannung σ im Kernquerschnitt auf 1,25 kg wachsen darf, während infolge des Betriebsdruckes (vgl. Beispiel 5 S. 24) σ höchstens k_z kg/cm² beträgt. Es liegt dann Fall (1) vor, bei dem die Gesamtspannung gleich der Vorspannung ist, und die Schrauben sind stets gleichmäßig belastet.

IV. Spannung, Formänderung, Bruchgefahr.

1. Der einachsige Spannungszustand, schiefe Schnittrichtung.

Bei der Beschreibung des Zerreißversuches (S. 6) wurde auf die Erscheinung der Fließfiguren (Abb. 4) hingewiesen, die sich als feine Linien unter 45° gegen die Stabachse darstellen. Zweifellos muß dem Auftreten der Fließfiguren eine Umlagerung sehr kleiner Stoffteilchen zugrunde liegen. Nun hat die mikroskopische Untersuchung geschliffener und geätzter Flächen gezeigt, daß die Metalle aus feinen Körnern bestehen, die durchaus nicht von gleicher chemischer Beschaffenheit sind; es ist deshalb auch anzunehmen, daß ihr Verhalten gegen mechanische Einflüsse verschieden sein wird. Wenn Fließfiguren beobachtet werden, so muß eine Verschiebung der Körner in Richtung der Fließlinien stattgefunden haben; ihr Zusammenhang in der beobachteten Richtung ist zum mindesten gelockert, der Körper hat eine dauernde Formänderung erfahren! Da die Richtung der Fließlinien nicht in die Stabachse, d. h. die Wirkungslinie der angreifenden Kräfte, fällt, so sind auch die Zugspannungen nicht die Ursache der Gefügelockerung; vielmehr müssen

Spannungen in der Richtung der Fließlinien vermutet werden, welche die beobachtete Erscheinung hervorrufen. Daraus ergibt sich von selbst die Forderung, diese Spannungen rechnerisch zu verfolgen.

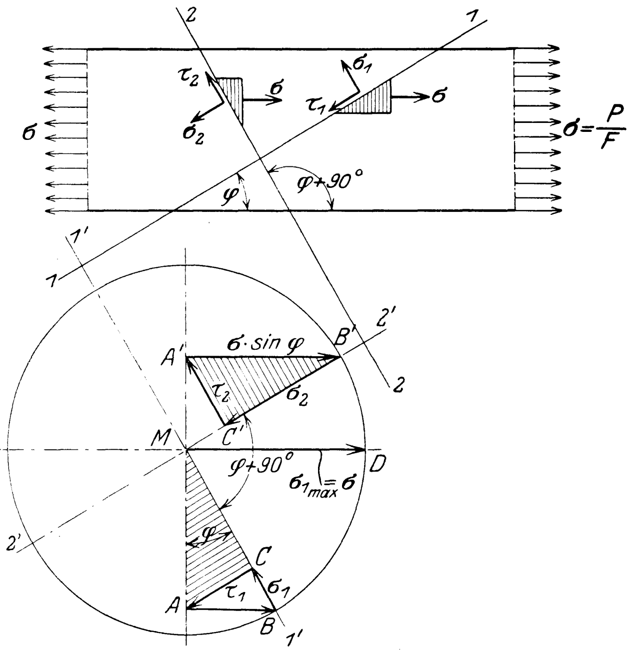


Abb. 36/37. Schiefer Schnitt.

In Abb. 36/37 ist ein Teil eines Flacheisenstabes herausgeschnitten dargestellt, der durch die Zugkräfte P in Richtung seiner Achse belastet ist. Er erfährt die Normalspannung $\sigma = P : F$, wenn F der Querschnitt ist. Die Dehnung des Stabes in der x-Richtung ist

$$\varepsilon_x = \alpha \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \sigma ,$$

die durch σ hervorgerufene Querzusammenziehung in Richtung der y-Achse ist:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{E} \cdot \sigma .$$

Um den Spannungszustand in einem unter dem Winkel φ gegen die Stabachse geneigten Schnitt zu untersuchen, denken wir die in diesem Schnitt auftretenden Spannungen in die Normalspannung σ_1 und die Schubspannung τ_1 zerlegt. Ein herausgeschnittenes Stabteilchen muß unter dem Einfluß der als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen im Gleichgewicht sein. Dieses Stabteilchen erfährt an der senkrechten Begrenzungsfläche die Normalspannung σ, an der wagerechten dagegen überhaupt keine Spannungen. Ist die Hypotenusenfläche f ein Flächenteilchen der schrägen Schnittfläche, so erfordern die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen $\sum H = 0$ und $\sum Y = 0$

$$f \cdot \sin \varphi \cdot \sigma - f \cdot \sigma_1 \cdot \sin \varphi - f \cdot \tau_1 \cdot \cos \varphi = 0$$
$$f \cdot \sigma_1 \cdot \cos \varphi - f \cdot \tau_1 \cdot \sin \varphi = 0,$$

wobei $f \cdot \sin \varphi$ die Kathetenfläche in der y-Richtung und $f \cdot \cos \varphi$ die Kathetenfläche in Richtung x-Achse bedeutet. Die Erweiterung der ersten Gleichung mit $-\frac{\sin \varphi}{f}$, der zweiten mit $\frac{\cos \varphi}{f}$ liefert

$$\sigma_1 \cdot \sin^2 \varphi + \tau_1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \sin^2 \varphi$$
$$\sigma_1 \cdot \cos^2 \varphi - \tau_1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0$$
$$\overline{\sigma_1 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \sigma \cdot \sin^2 \varphi}$$

und daraus mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$\sigma_1 = \sigma\cdot\sin^2\varphi = \frac{\sigma}{2}(1-\cos 2\varphi)\,.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\tau_1\cdot\sin\varphi = \sigma_1\cdot\cos\varphi = \sigma\cdot\sin^2\varphi\cos\varphi\,,$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma}{2}\cdot\sin 2\varphi\,.$$

σ_1 erreicht seinen größten Wert für $\varphi = 90^0$; es wird

$$\sigma_{1\max} = \sigma \text{ und } \tau_1 = 0\,.$$

$\sigma_{1\max}$ heißt Hauptspannung und tritt in einem Schnitt auf, für den die Schubspannung gleich Null wird.

τ_1 erreicht seinen größten Wert für $\varphi = 45^0$; es wird

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \text{ und } \sigma_1 = \frac{\sigma}{2};$$

die größte Schubspannung tritt demnach in einem Schnitt auf, der unter 45^0 gegen die Stabachse geneigt ist, sie ist gleich der halben Normalspannung. Die Gleichung $\tau_{1\max} = 0{,}5\cdot\sigma$ wird aber auch aus $\tau_1 = 0{,}5\cdot\sin 2\varphi$ für $\varphi = (90+45)^0$ erhalten, da für diesen Wert von φ die Funktion $\sin 2\varphi = \sin 270^0$ ebenfalls ihren größten — negativen — Wert -1 erreicht. Allerdings erhält dann auch $\tau_{1\max}$ ein negatives Vorzeichen, das auf entgegengesetzte Richtung deutet. Nun sind zwar die Schubspannungen nach Größe und Richtung zu unterscheiden, aber nicht in dem Sinne von Zug und Druck bei den Normalspannungen, so daß das Vorzeichen für τ_1 ohne Belang ist. Neben den rechtssteigenden Schnitten (Abb. 36) haben wir auch links steigende Schnitte, in denen die Spannungen ihre größten Werte erreichen.

Daß die größten Schubspannungen in Schnitten auftreten, die unter 45^0 gegen die Wagerechte geneigt sind, legt die Vermutung nahe, daß die auf S. 6 besprochene Erscheinung der Fließfiguren dadurch zu erklären ist, daß die Schubspannungen den zulässigen Wert überschreiten.

Nach dieser Auffassung wird man bei allen Stoffen, welche Fließfiguren unter 45^0 erkennen lassen, annehmen müssen, daß die größte Schubspannung eher den zulässigen Wert erreicht als die größte Normalspannung (Hauptspannung). Man wird daher der Festigkeitsrechnung nicht die Hauptspannung, sondern die größte Schubspannung zugrunde legen[1]).

Für die zulässigen Spannungen liefert die Beziehung $\tau_{1\max} = 0{,}5\cdot\sigma$ die Bedingung

$$\tau_{zul} = 0{,}5\cdot\sigma_{zul}\,,$$

die von der üblichen $\tau_{zul} = 0{,}77\cdot\sigma_{zul}$, die später (S. 58) aufgestellt werden soll, allerdings erheblich abweicht, aber die wirklichen Verhältnisse besser trifft.

---

[1]) Föppl, A. und O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. B. G. Teubner 1923.

2. Der Mohrsche Spannungskreis.

Zeichnerisch erhalten wir σ_1 und τ_1, wenn wir die Kraft $\sigma \cdot f \sin \varphi$ in die Seitenkräfte $f \cdot \sigma_1$ und $f \cdot \tau_1$ zerlegen, oder, da der allen dreien gemeinsame Faktor nur eine Maßstabänderung bedeutet, wenn wir $\sigma \cdot \sin \varphi$ in σ_1 und τ_1 so zerlegen, daß sie einen geschlossenen Kräftezug mit stetigem Umfahrungssinn bilden. In Abb. 37 legen wir eine Senkrechte zum Schnitt 1—1 durch den Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Halbmesser $MB = MB' = \sigma$, dann ist $AB = \sigma \cdot \sin \varphi$, das in Richtung 1—1 und senkrecht dazu zerlegt die Normalpannung σ_1 und die Schubspannung τ_1 des schiefen Schnittes ergibt. Für den Schnitt 2—2 unter dem Winkel $\varphi + 90^0$ erhalten wir mit $2'2' \perp 22$ in $A'B'$ die zu zerlegende Kraft $\sigma \cdot \sin \varphi$, deren Zerlegung in $B'C'$ die Normalspannung σ_2 und in $A'C'$ die Schubspannung τ_2 des schiefen Schnittes 2—2 liefert. Aus der Kongruenz der gestrichelten Dreiecke folgt unmittelbar, daß die Schubspannungen τ, die in zwei aufeinander senkrecht stehenden Schnitten auftreten, von gleicher Größe sind. Wir sagen, beide Schubspannungen sind zugeordnet, und halten als Ergebnis fest, daß die zugeordneten Schubspannungen gleich groß sind.

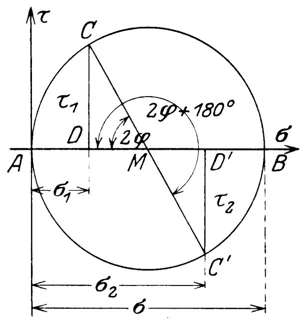


Abb. 38. Mohrscher Kreis.

Abb. 37 zeigt gleichzeitig $\sigma_{max} = \sigma$ für $\varphi = 90^0$.

Eine andere Darstellung, die auf Mohr zurückgeht, ist in Abb. 38 in Anlehnung an die rechnerische Bestimmung von σ_1 und τ_1 gegeben. Der Durchmesser AB eines Kreises ist gleich σ und bildet die wagerechte Achse eines Achsenkreuzes mit dem Anfangspunkt A, dessen senkrechte Achse die Schubspannungen τ trägt. Für den Zentriwinkel 2φ ist $CD = \tau_1 = {}^1/_2 \cdot \sigma \cdot \sin 2\varphi$ und $AD = \sigma_1 = MA - MD = {}^1/_2\,\sigma - {}^1/_2\,\sigma \cdot \cos 2\varphi$. Dem Punkte C für 2φ entspricht der Punkt C' für $2\varphi + 180^0$, so daß in $C'D'$ die Schubspannung τ_2 gemessen wird, die in einem Schnitt unter $\varphi + 90^0$ auftritt und ebenso groß ist wie τ_1 in einem Schnitt unter φ^0. Daß τ_2 unterhalb der wagerechten Achse gemessen wird, läßt den Gegensatz der Richtungen erkennen, der auch in Abb. 37 zum Ausdruck kommt; er ist aber nicht von wesentlicher Bedeutung. Der Kreis mit dem Durchmesser σ heißt Spannungskreis.

3. Der zweiachsige Spannungszustand.

Bisher wurde nur der Fall betrachtet, bei dem ein Stab durch Kräfte angegriffen wird, deren Wirkungslinie mit der Stabachse zusammenfällt. Wir denken uns jetzt den Stab der Abb. 36 in der Richtung y ausgedehnt und ebenfalls durch eine Kraft belastet. Ist die Dicke des Stabes unveränderlich und im Verhältnis der beiden anderen Ausdehnungen gering, so nennen wir den Körper eine Scheibe. Aus der

Scheibe (Abb. 39) schneiden wir ein Teilchen heraus, von dem wir annehmen dürfen, daß sich die Spannungen σ_x und σ_y gleichmäßig auf die zugehörigen Begrenzungsflächen verteilen.

Auf das Körperelement bringen wir die Lasten σ_x und σ_y nacheinander an und untersuchen die entstehende Formänderung einmal

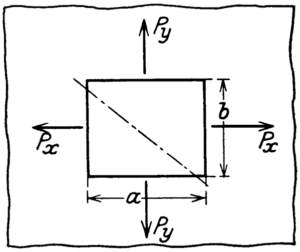


Abb. 39. Zweiachsiger Spannungszustand.

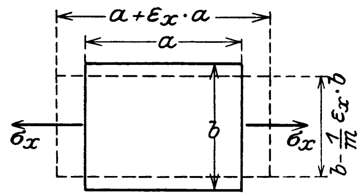


Abb. 40. Zweiachsiger Spannungszustand.

infolge σ_x, zum andern infolge σ_y. Als endgültige Formänderung bilden wir die Summe der Einzelformänderungen. Dieses Verfahren ist unter dem Namen **Überlagerungsgesetz** bekannt und ein wertvolles Hilfsmittel in der Festigkeitslehre. Wir setzen es als gültig voraus mit den gleichen Einschränkungen wie das Hookesche.

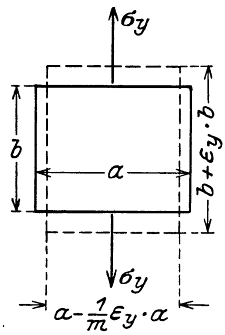


Abb. 41. Zweiachsiger Spannungszustand.

Das herausgeschnittene Teilchen (Abb. 40) ist im Gleichgewicht, wenn wir die Spannungen σ_x als äußere Kräfte anbringen. Unter dem Einfluß dieser Kräfte wächst die Kante a um $\varepsilon_x \cdot a$, wenn ε_x die Dehnung in Richtung x bedeutet. Gleichzeitig schrumpft infolge der Querzusammenziehung die Kante b um den Betrag $\frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x \cdot b$ zusammen (vgl. S. 4). In gleicher Weise ergibt sich die Formänderung der Abb. 41, wenn wir mit ε_y die Dehnung in Richtung y bezeichnen. Als Gesamtdehnung in Richtung x erhalten wir als Summe der Einzeldehnungen

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{1}{m} \cdot \varepsilon_y$$

und in Richtung y

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x .$$

Die Dehnung ε_x wird durch die wirkliche Hauptspannung σ hervorgerufen; da beide Größen durch das Hookesche Gesetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ verknüpft sind, dürfen wir ε_x durch $\alpha \cdot \sigma_x$ ersetzen. Das Gleiche gilt für ε_y Damit gehen unsere Gleichungen über in

$$\varepsilon_1 = \alpha \cdot \sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_y \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \alpha \cdot \sigma_y - \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_x ,$$

und daraus

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \sigma_y \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \sigma_y - \frac{1}{m} \cdot \sigma_x .$$

Während wir auf der rechten Seite wirkliche Spannungen haben, steht auf der linken Seite eine durch α dividierte Dehnung. Diese Dehnung ist wirklich, aber der Quotient $\varepsilon_1 : \alpha$, bzw. $\varepsilon_2 : \alpha$, ist keine wirkliche Spannung, wenn auch diese Auffassung in Anlehnung an das Hookesche Gesetz gerechtfertigt erscheinen möge; $\varepsilon_1 : \alpha$ muß vielmehr aufgefaßt werden als eine gedachte Spannung, die den durch die beiden wirklichen Spannungen σ_x und σ_y hervorgerufenen Formänderungszustand für sich allein hervorrufen könnte. Es ist üblich, diese gedachte Spannung als reduzierte Spannung zu bezeichnen und zu schreiben

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \sigma_y, \quad \text{bzw.} \quad \sigma'_{\text{red}} = \sigma_y - \frac{1}{m} \cdot \sigma_x .$$

Durch die Einführung des Begriffes der reduzierten Spannung können wir uns den zweiachsigen Spannungszustand auf einen einachsigen zurückgeführt denken, bei dem σ_{red}, bzw. σ'_{red} die einzigen auftretenden Spannungen sind.

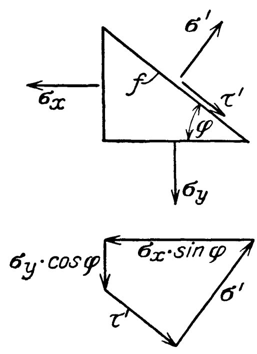


Abb. 42/43. Schiefer Schnitt.

Die Gleichung

$$\varepsilon_1 = \alpha \cdot \sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_y = \alpha \left(\sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \sigma_y\right)$$

zeigt, daß beim zweiachsigen Spannungszustande die einfache Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen nicht mehr besteht.

Der schiefe Schnitt. In gleicher Weise wie beim einachsigen Spannungszustand legen wir jetzt durch die Scheibe der Abb. 39 einen schiefen Schnitt; das keilförmige Scheibenelement ist in Abb. 42 besonders herausgezeichnet. An ihm greifen als äußere Kräfte an: $\sigma' \cdot f$ und $\tau' \cdot f$ in der Hypotenusenfläche f, $\sigma_x \cdot f \cdot \sin\varphi$ in der senkrechten, $\sigma_y \cdot f \cdot \cos\varphi$ in der wagerechten Kathetenfläche, wenn wir die unbekannte Spannung in der schrägen Fläche in die Komponenten σ' und τ' zerlegt denken. Da alle vier Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, müssen sie einen geschlossenen Kräftezug mit stetigem Umfahrungssinn bilden (Abb 43), aus dem wir als Summe der wagerechten Seitenkräfte gleich Null

$$\sigma_x \cdot \sin\varphi - \tau' \cdot \cos\varphi - \sigma' \cdot \sin\varphi = 0$$

und als Summe der senkrechten Seitenkräfte gleich Null

$$\sigma_y \cdot \cos\varphi + \tau' \cdot \sin\varphi - \sigma' \cdot \cos\varphi = 0$$

entnehmen. Da der Flächeninhalt f der Hypotenusenfläche in allen Gliedern vorkommt, bedeutet er in dem Kräftezug nur eine Maßstabänderung, in den Gleichungen einen gemeinsamen Faktor und ist infolgedessen herausgefallen. Durch Erweiterung der ersten Gleichung mit $\sin\varphi$, der zweiten mit $\cos\varphi$ erhält man

$$\sigma_x \sin^2\varphi - \tau' \cos\varphi \sin\varphi - \sigma' \sin^2\varphi = 0 ,$$
$$\sigma_y \cos^2\varphi + \tau' \sin\varphi \cos\varphi - \sigma' \cos^2\varphi = 0 ,$$

$$\sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - \sigma' (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 0 ,$$

$$\sigma' = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_y \cdot \cos^2\varphi$$
$$= \sigma_x \frac{1-\cos 2\varphi}{2} + \sigma_y \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$
$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi .$$

Durch Erweiterung der ersten Gleichung mit $\cos\varphi$, der zweiten mit $-\sin\varphi$ wird

$$\sigma_x \sin\varphi\cos\varphi - \tau'\cos^2\varphi - \sigma'\sin\varphi\cos\varphi = 0 ,$$
$$-\sigma_y \cos\varphi\sin\varphi - \tau'\sin^2\varphi + \sigma'\cos\varphi\sin\varphi = 0 ,$$
$$\sigma_x \sin\varphi\cos\varphi - \sigma_y \sin\varphi\cos\varphi - \tau'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 0 ,$$
$$\tau' = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\varphi - \frac{\sigma_y}{2}\sin 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi .$$

Es ist $\sigma'_{\min}$ und $\sigma'_{\max}$ zu bestimmen. Da $\cos 2\varphi$ für $\varphi = 0$ seinen größten Wert $+1$ erreicht, wird mit $\cos 2\varphi = +1$

$$\sigma'_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_y ; \tag{1}$$

$\tau' = 0$, da $\sin 2\varphi$ für $\varphi = 0^0$ ebenfalls gleich Null wird.

Seinen größten negativen Wert -1 erreicht $\cos 2\varphi$ für $\varphi = 90^0$; demnach wird

$$\sigma'_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_x ; \tag{2}$$

$\tau' = 0$, da $\sin 2\varphi$ für $\varphi = 90^0$ ebenfalls gleich Null wird. $\varphi = 0^0$ ist ein Schnitt in Richtung der x-Achse, für ihn verschwinden die Schubspannungen τ', während die Normalspannung σ' zur Hauptspannung σ_y wird. Auch für den Schnitt unter $\varphi = 90^0$, der mit der y-Achse zusammenfällt, verschwinden die Schubspannungen τ'; die Normalspannung σ' wird zur Hauptspannung σ_x.

Die Schubspannung τ' wird für $\varphi = 45^0$ zum Maximum, für $\varphi = 45^0 + 90^0 = 135^0$ zum Minimum. In beiden Fällen werden die absoluten Werte infolge

$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \text{und} \quad \tau'_{\min} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

gleichgroß. Das negative Vorzeichen betont die Gegensätzlichkeit der Richtungen. Für $\varphi = 45^0$ wird mit $\cos 90^0 = 0$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} ,$$

für $\varphi = 135^0$ wird mit $\cos 270^0 = 0$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} .$$

Die Normalspannungen sind für beide Schnitte gleich groß.

Die Gleichung $\tau'_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ zeigt, daß die größte Schubspannung besonders große Werte annimmt, wenn die Hauptspannungen σ_x und σ_y entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Sind beide Hauptspannungen gleich groß bei entgegengesetztem Vorzeichen, so wird die Normalspannung σ' in Schnitten unter $\varphi = 45^0$ und $\varphi = 135^0$ gleich Null. Diese Schnitte erfahren demnach nur Schubspannungen. In Abb. 44 ist das Körperteilchen eingezeichnet. Denken wir es herausgeschnitten und die Schubspannungen τ' als äußere Kräfte an den Schnittflächen angebracht, so erfordert die Bedingung des Gleichgewichtes, daß die Summe der Drehmomente gleich Null ist. Daraus folgt, daß diese als Kräfte gedachten Spannungen zwei Kräftepaare mit entgegengesetzter Drehrichtung bilden müssen.

4. Beziehung zwischen dem Dehnmaß E und Gleitmaß G.

Der Spannungszustand der Abb. 44 ist hervorgerufen durch zwei gleich große, entgegengesetzte Hauptspannungen σ_x und σ_y, die als

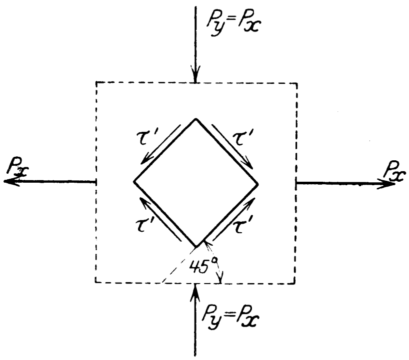


Abb. 44. Gleich große, entgegengesetzte Spannungen.

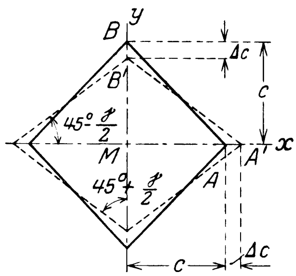


Abb. 45. Verformtes Körperteilchen.

Folge von Zug in Richtung x und Druck in Dichtung y auftreten, d. h. in die Richtung der Diagonalen fallen. Die Formänderung, die das Körperteilchen unter dem Einfluß von τ' erfährt, können wir uns demnach durch die Normalspannungen σ_x und σ_y verursacht denken. Die wagerechte Diagonale wird verlängert, die senkrechte um den gleich großen Betrag verkürzt; die vordem rechten Winkel werden zu spitzen in der Wagerechten, zu stumpfen in der Senkrechten. Wir hatten auf S. 13 die Änderung des rechten Winkels mit γ bezeichnet, so daß die Kantenwinkel des verformten Körperteilchens $(90^0 + \gamma)$ bzw. $(90^0 - \gamma)$ sind; es ist in Abb. 45 in der Ansicht dargestellt. Das gleichschenkligrechtwinklige Dreieck AMB ist zum rechtwinkligen Dreieck $A'MB'$ geworden, dessen Winkel $MA'B$ gleich $\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right)$ ist. Mit den Bezeichnungen der Abbildung ist

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c - \Delta c}{c + \Delta c} = \frac{1 - \frac{\Delta c}{c}}{1 + \frac{\Delta c}{c}} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

Wir dürfen im vorliegenden Falle $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ schreiben, weil gleiche Spannungen und damit gleiche Dehnungen vorausgesetzt sind. Da andrerseits

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} 45^0 - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} 45^0 \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

ist, erhalten wir für den Fall verschwindend kleiner Formänderungen $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \simeq \frac{\gamma}{2}$ und daher

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}.$$

Der Vergleich beider Gleichungen ergibt $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$.

Als Dehnung in Richtung x beim zweiachsigen Spannungszustand hatten wir

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right)$$

gefunden und schreiben jetzt mit $\varepsilon_x = \varepsilon$ und $\sigma_y = -\sigma$,

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left(\sigma_x + \frac{1}{m}\sigma_x\right) = \frac{1}{E}\cdot\frac{m+1}{m}\cdot\sigma_x,$$

woraus

$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_x$$

und

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\cdot\frac{m+1}{m}\cdot\tau'_{\max}$$

folgt. Ersetzen wir noch $\tau'_{\max}$ durch $\gamma \cdot G$ (S. 13) und ε durch $\frac{\gamma}{2}$, so erhalten wir

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{E}\cdot\frac{m+1}{m}\cdot\gamma\cdot G \qquad \text{oder} \qquad G = \frac{m}{2(m+1)}\cdot E.$$

Die **Poissonsche** Zahl m wird von **Bach** für Metalle zu $^{10}/_3$ angegeben; es ist also zahlenmäßig

$$G = 0{,}385 \cdot E.$$

Der Versuch liefert E, aus dem G berechnet wird.

5. Der ebene Spannungszustand.

Schneidet man aus der Scheibe (Abb. 39) ein schiefes Körperteilchen heraus, so treten an den Schnittflächen Normal- und Schubspannungen auf, während in Richtung der z-Achse, d. h. senkrecht zur Zeichenebene, keine Spannungen vorhanden sind. Abb. 46 zeigt das Körperteilchen; in Abb. 47 ist es vergrößert herausgezeichnet. Es muß im Gleichgewicht sein, wenn wir die Spannungen an den Schnittflächen als äußere Kräfte anbringen. Die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen, Summe aller Kräfte in Richtung u und v gleich Null, ist erfüllt. Die dritte Gleichgewichtsbedingung, Summe aller Momente gleich Null, erfordert, wenn wir die Dicke des Körperteilchens mit c bezeichnen und den Mittelpunkt des Rechtecks als Drehpunkt wählen:

$$\tau_{uz} \cdot a \cdot c \cdot b - \tau_{vz} b \cdot c \cdot a = 0 \text{ oder } \tau_{uz} = \tau_{vz} .$$

Die beiden in zwei aufeinander senkrecht stehenden Schnitten auftretenden Schubspannungen sind, wie wir ja bereits wissen, gleich groß; sie sollen deshalb einfach τ genannt werden.

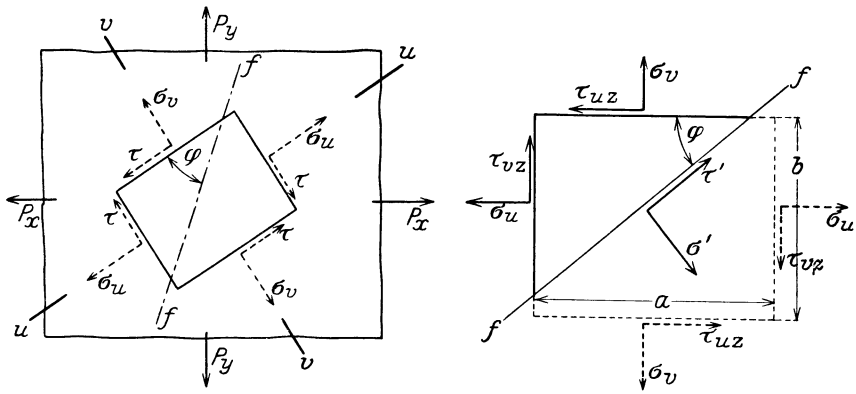


Abb. 46/47. Ebener Spannungszustand.

Nunmehr legen wir den schiefen Schnitt ff, der gegen die uz-Ebene um den Winkel φ geneigt ist. Die an der schiefen Schnittfläche auftretende Spannung denken wir uns wieder in eine Normalspannung σ' und eine Schubspannung τ' zerlegt und bringen an dem abgeschnittenen keilförmigen Körperteilchen sämtliche Spannungen als äußere Kräfte an, die der Forderung des Gleichgewichtes genügen müssen. Den geschlossenen Kräftezug mit stetigem Umfahrungssinn zeigt Abb. 48, in der der allen gemeinsame Faktor f weggelassen ist. Die rechnerische Form der Gleichgewichtsbedingungen verlangt, daß die Summe aller Seitenkräfte in Richtung u und v gleich Null ist, und liefert die beiden Bedingungsgleichungen

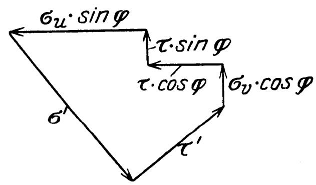


Abb. 48. Ebener Spannungszustand.

$$\sigma' \cdot \sin\varphi + \tau' \cos\varphi - \tau \cos\varphi - \sigma_u \cdot \sin\varphi = 0 ,$$
$$\sigma' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi - \tau \sin\varphi - \sigma_v \cos\varphi = 0 ,$$

durch Erweiterung mit $\sin\varphi$ bzw. $\cos\varphi$ und Addition ergibt sich:

$$\sigma' (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \sigma_u \cdot \sin^2\varphi + \sigma_v \cdot \cos^2\varphi + 2\,\tau \sin\varphi \cos\varphi .$$

Durch Erweiterung mit $\cos\varphi$ bzw. $-\sin\varphi$ und Addition erhält man:

$$\tau' (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \sigma_u \cdot \sin\varphi \cos\varphi - \sigma_v \cdot \sin\varphi \cos\varphi + \tau (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) .$$

Durch Einführung des doppelten Winkels $2\,\varphi$ wird

$$\sigma' = \sigma_u \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \sigma_v \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + \tau \cdot \sin 2\varphi ,$$

$$\tau' = \sigma_u \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2} - \sigma_v \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2} + \tau \cdot \cos 2\varphi ,$$

oder
$$\sigma' = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \frac{\sigma_u - \sigma_v}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi\,,$$
$$\tau' = \frac{\sigma_u - \sigma_v}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau \cdot \cos 2\varphi\,.$$

Wir fragen: Für welchen Winkel φ erreicht die Normalspannung σ' ihren größten Wert, und wie groß ist dieser? Man erhält die Bedingungsgleichung für φ, wenn man den ersten Differentialquotienten $\frac{d\sigma'}{d\varphi}$ gleich Null setzt.
$$\frac{d\sigma'}{d\varphi} = 2 \cdot \frac{\sigma_u - \sigma_v}{2} \cdot \sin 2\varphi + 2\tau \cos 2\varphi = 2\tau' = 0$$
ergibt zunächst, daß die Normalspannung σ' ihren größten Wert annimmt, wenn $\tau' = 0$ wird. Die Bedingungsgleichung für φ lautet
$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma_u - \sigma_u}\,, \text{ folglich } 2\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\tau}{\sigma_u - \sigma_v} + n \cdot \pi\,,$$
$$\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{\sigma_u - \sigma_v} + n \cdot \frac{\pi}{2}\,.$$

Wir erhalten zwei aufeinander senkrecht stehende Schnitte, für die τ' verschwindet; die Hauptspannungen stehen auf ihnen senkrecht.

Aus $\frac{d\sigma'}{d\varphi} = 0$ folgt ferner
$$\frac{1}{2}(\sigma_u - \sigma_v) \cdot \sin 2\varphi + \tau \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi} = 0\,,$$
$$(\sigma_u - \sigma_v)^2 \cdot \sin^2 2\varphi = 4\tau^2 (1 - \sin^2 2\varphi)$$
$$\sin 2\varphi = \mp \frac{2\tau}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}\,,$$
$$\frac{1}{2}(\sigma_u - \sigma_v) \cdot \sqrt{1 - \cos^2 2\varphi} + \tau \cdot \cos 2\varphi = 0$$
$$(\sigma_u - \sigma_v)^2 \cdot (1 - \cos^2 2\varphi) = 4\tau^2 \cdot \cos^2 2\varphi$$
$$\cos 2\varphi = \pm \frac{\sigma_u - \sigma_v}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}\,.$$

Es wäre jetzt zu untersuchen, für welches Vorzeichen von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ die Normalspannung σ' zum Maximum wird. Nach den Regeln der Differentialrechnung liegt ein Maximum vor, wenn der zweite Differentialquotient der Funktion negativ wird. Durch nochmalige Differentiation von $\frac{d\sigma'}{d\varphi}$ nach φ erhalten wir
$$\frac{d^2\sigma'}{d\varphi^2} = 2(\sigma_u - \sigma_v) \cdot \cos 2\varphi - 4\tau \cdot \sin 2\varphi\,,$$
und dieser Wert wird negativ für $\cos 2\varphi = -\frac{\sigma_u - \sigma_v}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}$ und $\sin 2\varphi = +\frac{2\tau}{\sqrt{(\tau_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}$, wodurch $\sigma_{\max}$ bestimmt ist. $\frac{d^2\sigma'}{d|\varphi^2}$ wird positiv für $\cos 2\varphi = +\frac{\sigma_u - \sigma_v}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}$ und $\sin 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^1 + 4\tau^2}}$;

dadurch ist $\sigma'_{\min}$ bestimmt. Demnach erhalten wir

$$\sigma'_{\max} = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} + \frac{(\sigma_u - \sigma_v)^2}{2\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}} + \frac{2\tau^2}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}},$$

$$= \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v) + 4\tau^2},$$

$$\sigma'_{\min} = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \frac{(\sigma_u - \sigma_v)^2}{2\sqrt{(\sigma_u - \sigma_u)^2 + 4\tau^2}} - \frac{2\tau^2}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}},$$

$$= \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}\,.$$

Soll $\tau' = f(\varphi)$ zum Maximum oder Minimum werden, so muß $\frac{d\tau'}{d\varphi} = 0$ sein, d. h.

$$\frac{d\tau'}{d\varphi} = \frac{\sigma_u - \sigma_v}{2} \cdot 2\cos 2\varphi - 2\tau \cdot \sin 2\varphi = 0\,.$$

Daraus $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_u - \sigma_v}{2\tau}$; $\sin 2\varphi = \pm \frac{\sigma_u - \sigma_v}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}$;

$$\cos 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}}\,.$$

Aus $\operatorname{tg} 2\varphi_\sigma = -\frac{2\tau}{\sigma_u - \sigma_v}$ und $\operatorname{tg} 2\varphi_\tau = \frac{\sigma_u - \sigma_v}{2\tau}$ folgt

$$\varphi_\tau = \varphi_\sigma + 45^0,$$

d. h. die beiden Schnittrichtungen, für die σ' und τ' ihre ausgezeichneten Werte erreichen, sind um 45^0 verschieden.

Mit den gefundenen Werten für $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ erhält man

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\tau' = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2},$$

beide Spannungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. $\sigma'_{\max}$ und $\sigma'_{\min}$ sind aber die Hauptspannungen, so daß der ebene Spannungszustand der Abb. 46 als ein zweiachsiger im Sinne der Abb. 39 angesehen werden darf, dessen Spannung in Richtung x

$$\sigma_x = \sigma'_{\max} = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2},$$

in Richtung y

$$\sigma_y = \sigma'_{\min} = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}$$

ist. Für ihn hatten wir S. 51 die reduzierte Spannung σ_{red} errechnet, die für sich allein denselben Formänderungszustand hervorrufen würde, wie er in Wirklichkeit durch das gleichzeitige Auftreten von σ_x und σ_y hervorgerufen wird. Ersetzen wir in

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y \qquad \sigma'_{\text{red}} = \sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_x,$$

σ_x und σ_y durch die Spannungen σ_u, σ_v und τ des ebenen Spannungszustandes, dann erhalten wir in

$$\sigma_{\text{red}} = \left[\frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}\right] - \frac{1}{m}\left[\frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}\right],$$

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}\,,$$

$$\sigma'_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) - \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}$$

gedachte Spannungen, die den ebenen Spannungszustand auf einen einachsigen zurückführen.

6. Die Bruchgefahr.

Die Frage, wodurch der Bruch des Baustoffes hervorgerufen wird, hatten wir beim einachsigen Spannungszustand (S. 46) dahin beantwortet, daß bei Stäben, welche Fließfiguren zeigen, die Schubspannungen vermutlich die Festigkeit eher überschreiten als die Normalspannungen und dadurch den Bruch herbeiführen. Schließen wir aus der Festigkeit gegen Zug bzw. Druck auf die zulässigen Spannungen, indem wir einen Bruchteil der Festigkeit als zulässig erklären (S. 19), so ist es beim einachsigen Spannungszustande offenbar ziemlich gleichgültig, ob wir sagen, die Hauptspannung darf einen bestimmten Betrag z. B. 1200 kg/cm², nicht überschreiten, oder, die Schubspannung darf nicht größer als 600 kg/cm² sein. Für die Sicherheit des Bauteiles läuft beides auf dasselbe hinaus, denn beide Spannungen stehen in dem Verhältnis 1 : 2.

Anders liegen die Verhältnisse beim zweiachsigen Spannungszustande; für ihn hatten wir eine gedachte Spannung σ_{red} errechnet, die in Wirklichkeit eine mit E multiplizierte Dehnung ist. Behandeln wir diese gedachte Spannung ebenso wie eine wirkliche und legen als Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{\text{red}} \leqq \sigma_{\text{zul}}$$

fest, so sagen wir damit aus, daß die größte Dehnung für den Bruch maßgebend sein soll. Diese Auffassung hat zur Zeit viele Anhänger in Deutschland; sie wird dadurch besonders wichtig, daß wir sie auf den ebenen Spannungszustand übertragen und für diesen die Festigkeitsbedingung in der Form

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2} \leqq \sigma_{\text{zul}}$$

anschreiben. Träfe die Annahme, die größte Dehnung sei für den Bruch maßgebend, zu, so müßte sich für den Fall der reinen Schubbeanspruchung, d. h. $\sigma_u = 0$ und $\sigma_v = 0$, eine Beziehung zwischen der zulässigen Schub- und der zulässigen Normalspannung ergeben, die mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt. Nun erhalten wir aber für $\sigma_u = 0$ und $\sigma_v = 0$

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m+1}{m} \cdot \tau\,,$$

und hierin erreicht τ den zulässigen Wert, wenn wir σ_{red} durch σ_{zul} ersetzen. Das liefert aber

$$\tau_{\text{zul}} = \frac{m}{m+1} \cdot \sigma_{\text{zul}} = 0{,}77 \cdot \sigma_{\text{zul}}$$

unter der Voraussetzung $m = {}^{10}/_3$. Diese Zahl stimmt weder mit den neueren Versuchen von Guest, noch mit den älteren deutschen Versuchen überein, so daß die Annahme, die größte Dehnung sei für den Bruch maßgebend, nicht aufrecht zu erhalten ist.

O. Mohr[1]) untersucht den dreiachsigen Spannungszustand mit den Hauptspannungen σ_x, σ_y und σ_z und stellt fest, daß σ_y auf die Bruchgefahr ohne Einfluß ist, wenn σ_x die algebraisch größte, σ_z die algebraisch kleinste Hauptspannung ist. Föppl wendet die Mohrsche Theorie auf den ebenen Spannungszustand an und nimmt für Wellenstahl als bewiesen an, daß die Bruchgefahr von der Differenz $\sigma_x - \sigma_y$ der Hauptspannungen abhängig ist. Diese Differenz ist gleich der Summe der absoluten Werte, wenn σ_y negativ ist, die Hauptspannungen also entgegengesetzte Vorzeichen haben. Aus

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_x - \sigma_y = \sigma'_{\max} - \sigma'_{\min}$$

folgt

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}\,.$$

Diese Gleichung ergibt für den Fall der reinen Schubbeanspruchung $\sigma_u = 0$ und $\sigma_v = 0$

$$\sigma_{\text{red}} = 2\,\tau$$

und damit

$$\sigma_{\text{zul}} = 2\,\tau_{\text{zul}} \quad \text{oder} \quad \tau_{\text{zul}} = 0{,}5 \cdot \sigma_{\text{zul}}\,.$$

Daß dieser Wert mit der Erfahrung sehr viel besser übereinstimmt, ist von O. Mohr in seiner Besprechung der neueren Versuche eingehend nachgewiesen worden.

7. Die Bachsche Gleichung[2]).

Die Gleichung

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}$$

setzt voraus, daß das Material des betrachteten Körpers nach allen Richtungen gleich beschaffen sei. Diese Annahme trifft nicht immer zu, z. B. ist für Schweißeisen die Widerstandsfähigkeit in Ebenen parallel und senkrecht zur Walzrichtung verschieden. In diesem Falle wird auch theoretisch das Verhältnis der Dehnungen, welche durch eine Normalspannung σ und die $\frac{m}{m+1}$ mal so große Schubspannung $\tau = \frac{m}{m+1}\sigma$ hervorgerufen werden, nicht gleich Eins sein, sondern einen Wert besitzen, den wir mit α_0 bezeichnen wollen.

Man kommt zu demselben Ergebnis, wenn man annimmt, daß in allen Richtungen gleichen Spannungen gleiche Dehnungen entsprechen, aber an Stelle der Schubkraft τ den α_0-fachen Wert $\alpha_0\tau$ einführt. Aus $\varepsilon_\sigma : \varepsilon\left(\tau = \frac{\alpha_0 m}{m+1}\sigma\right) = 1$ folgt nämlich nach dem Hookeschen Gesetz $\varepsilon_\sigma : \varepsilon\left(\tau = \frac{m}{m+1}\sigma\right) = \alpha_0$. Folglich können wir die abgeleiteten Formeln benutzen wenn wir überall an Stelle von τ $\alpha_0\tau$ setzen.

---

1) Mohr, O.: Technische Mechanik. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.

2) Bach, C.: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl., S. 465 u. f.

Es ergibt sich so die von Bach herrührende Formel

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}\,.$$

Für den Fall der reinen Schubspannung $\sigma_u = \sigma_v = 0$ wird

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m+1}{m}\alpha_0 \tau\,.$$

Ersetzen wir σ_{red} durch σ_{zul}, so erreicht auch τ seinen zulässigen Wert. Hieraus folgt als Definitionsgleichung für α_0

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\frac{m+1}{m}\tau_{\text{zul}}}\,.$$

Man wird mit der Bachschen Gleichung auch dann rechnen, wenn Normal- und Schubspannungen trotz allseitiger Gleichartigkeit des Materials nicht in dem Verhältnis $(m+1):m$ stehen. Es läßt sich so in einfacher Weise der Widerspruch zwischen Theorie und Versuch beseitigen.

Wählt man

$$m = \frac{10}{3}\,,$$

was dem heutigen Stand der Versuchsergebnisse entspricht, so wird

$$\sigma_{\text{red}} = 0{,}35\,(\sigma_u + \sigma_v) + 0{,}65\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}\,.$$

α_0 läßt sich aus $\alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{1{,}3\cdot\tau_{\text{zul}}}$ mit Hilfe der Tafel S. 20 errechnen.

Es ist für

Schweißeisen:	$\alpha_0 = \frac{900}{1{,}3\cdot 720} = 1{,}0,$	
Flußeisen:	$\alpha_0 = \frac{900}{1{,}2\cdot 720} = 1{,}0,$	
Flußstahl:	$\alpha_0 = \frac{1200}{1{,}3\cdot 960} = 1{,}0,$	
Stahlguß:	$\alpha_0 = \frac{600}{1{,}3\cdot 480} = 1{,}0$	bei Zug,
	$\alpha_0 = \frac{900}{1{,}3\cdot 480} = 1{,}4$	bei Druck
Gußeisen:	$\alpha_0 = \frac{300}{1{,}3\cdot 300} = 0{,}8$	bei Zug
	$\alpha_0 = \frac{900}{1{,}3\cdot 300} = 2{,}3$	bei Druck.

V. Die Biegungsfestigkeit.

1. Allgemeines über Biegung.

Die Erfahrung zeigt, daß sich ein gerader Stab, der nach Abb. 49 belastet ist, durchbiegt. Lassen wir zunächst außer acht, wodurch diese Durchbiegung im strengen Sinne der Mechanik hervorgerufen wird, und beschränken uns auf das, was wir bei einem Versuch sehen. Um die entstehende Formänderung genauer zu beschreiben, bauen wir uns aus einem stark dehnsamen Baustoff einen Probestab nach Abb. 49a und ritzen in die senkrechte Oberfläche zwei gerade Striche *I* und *II* und die Stabachse ein, dann zeigt der belastete Stab das Bild der Abb. 49b. Die Geraden *I* und *II* sind gerade geblieben, die Stabachse ist krumm, und zwar stehen die Geraden auf dieser gekrümmten Achse senkrecht. Die krumme Linie, in die die Stabachse bei Belastung des Trägers übergeht, heißt Biegungslinie oder elastische Linie; elastisch deshalb, weil sie bei Entlastung des Stabes ihre ursprüngliche Lage wieder annimmt. Aus dieser Beobachtung folgt sofort eine wichtige Bedingung für die Grenze der Belastung: sie darf nur so groß sein, daß der Stab bei Entlastung sich wieder streckt, seine Achse also wieder gerade wird. Innerhalb der durch diese Bedingung umrissenen Belastungsgrenzen wird die Durchbiegung im Vergleich zu der Länge des Stabes sehr klein ausfallen. Auf diesen Punkt werden wir bei unseren späteren Untersuchungen ganz besonders achten. Wenn wir weiter beobachten, daß die Geraden *I* und *II* trotz der Biegung gerade bleiben, so werden wir daraus schließen, daß die Querschnitte selbst unverändert geblieben sind; sie bleiben bei der Biegung eben und erscheinen gegen einander gedreht, dabei wird die Faserschicht a—a' kürzer, die Faserschicht b—b' länger. Die entstehenden Formänderungen sind Längenänderungen, folglich müssen die sie hervorrufenden Spannungen Normalspannungen sein. Überlegung und Beobachtung lehren, daß eine Faserschicht c—c' die ursprüngliche Länge beibehält. Man nennt diese Faserschicht, die senkrecht zur Bildebene durch die Stabachse geht, die neutrale Faserschicht, sie schneidet den Querschnitt in der Nullinie n—n. Da a—a' verkürzt wird, erfährt diese Faserschicht Druckspannungen, aus der Verlängerung der Faserschicht b—b' schließen wir auf Zugspannungen. Die neutrale Faserschicht c—c' bleibt spannungslos. Die die Biegung eines Stabes hervorrufenden Spannungen sind demnach dadurch gekennzeichnet, daß Druck- und Zugspannungen in ein- und demselben Querschnitt gleichzeitig auftreten, sie heißen Biegungsspannungen. Maßgebend für die Bemessung des Querschnittes sind die Spannungen; für sie lautet die Festigkeitsbedingung auch im Falle der Biegung: die rechnerische ermittelte Spannung muß unter der zulässigen bleiben.

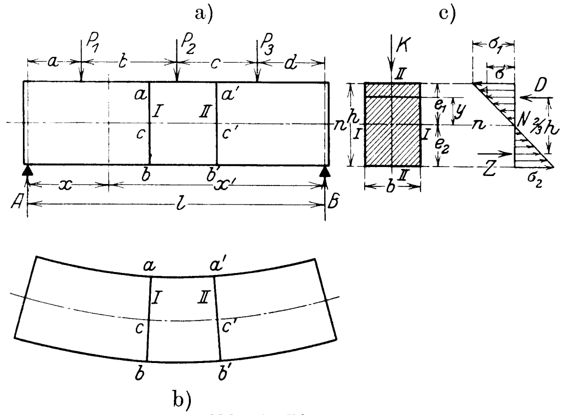


Abb. 49. Biegung.

a) Der Schnitt durch den gebogenen Stab.

Nach dem auf S. 1 angegebenen Grundsatze schneidet man den Stab durch, um ein Bild von der Größe der Biegungsspannungen zu erhalten. Dadurch wird das Gleichgewicht, das vor dem Schnitt bestanden hat, gestört. Jetzt versucht man, den abgetrennten Teil durch Kräfte wieder ins Gleichgewicht zu bringen; gelingt das, dann werden die hinzugefügten Kräfte genau so wirken wie die ungeschnittenen Fasern des Stabes.

b) Querkraft und Biegungsmoment.

In Abb. 50 ist der Stabteil der Länge x abgetrennt. An ihm wirken der Auflagerdruck A, der zuerst ermittelt werden muß, und die Kraft P_1. Beide Kräfte sind im allgemeinen verschieden, es wird also ein Überschuß $(A - P_1)$ vorhanden sein, der nach oben gerichtet ist, wenn $A > P_1$ ist. Gleichgewicht ist aber nur dann vorhanden, wenn die Summe aller Kräfte in senkrechter Richtung gleich Null ist. Damit diese Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist, muß in dem Schnitt zunächst eine Kraft Q_l nach unten angesetzt werden, die dem Überschuß $(A - P_1)$ das Gleichgewicht hält. Diese Forderung liefert die Gleichung

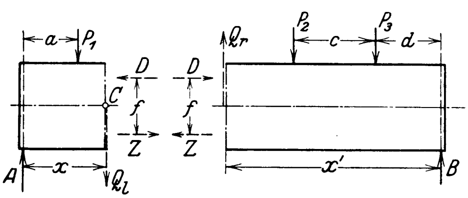


Abb. 50. Querkraft und Biegung.

$$Q_l = A - P_1 .$$

Trotz der hinzugefügten Kraft Q_l ist aber der abgetrennte Stabteil noch nicht in Ruhe, vielmehr wird er sich unter dem Einfluß sämtlicher an ihm angreifenden Kräfte rechts herum drehen. Diese Drehung läßt sich durch zwei gleich große entgegengesetzte Kräfte D und Z verhindern, von denen D im oberen Teile drückt, Z im unteren Teile zieht. Beide bilden ein Kräftepaar, dessen Wirkung durch das Produkt aus Kraft und Abstand der Wirkungslinien gemessen wird. Die Mechanik nennt dieses Produkt das statische Moment des Kräftepaares. Die dritte Gleichgewichtsbedingung fordert, daß die algebraische Summe sämtlicher Momente am abgetrennten Stabteil gleich Null ist. Faßt man C (Abb. 50) als Drehpunkt auf, so erhält man die Gleichung

$$A \cdot x - P_1 (x - a) - D \cdot \frac{f}{2} - Z \frac{f}{2} = 0 ,$$

wobei die entgegengesetzten Drehrichtungen durch entgegengesetzte Vorzeichen unterschieden werden. Da $D = Z$ ist, so wird

$$A x - P_1 (x - a) = D \cdot f = Z \cdot f .$$

Die linke Seite unserer Gleichung ist die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher am abgetrennten Teil angreifenden äußeren Kräfte. Sie heißt das Biegungsmoment im Schnitt x des Trägers. Die Kraft Q_l, die wir im Querschnitt selbst zur Erzielung des Gleichgewichtes hinzufügen müssen, ist gleich der algebraischen Summe sämtlicher am abgetrennten Teil angreifenden äußeren Kräfte.

Bisher haben wir nur den linken abgetrennten Teil betrachtet, jetzt führen wir die gleiche Überlegung am rechten Teile durch. An ihm ergeben die drei Kräfte P_2, P_3 und B einen Überschuß $(P_2 + P_3 — B)$ nach unten, wobei die Summe $P_2 + P_3 > B$ sein soll. Das Gleichgewicht in senkrechter Richtung wird durch eine nach oben gerichtete Kraft Q_r erzielt, die gleich dem Überschuß sein muß. Sie ist genau so groß wie Q_l, weil beim nicht geschnittenen Träger

$$A - P_1 - P_2 - P_3 + B = 0$$

ist und kein Überschuß an Kraft in senkrechter Richtung vorhanden sein kann; sie ist aber von entgegengesetzter Richtung wie Q_l.

Sowohl D links und D rechts als auch Z links und Z rechts können ebenfalls keine Größenunterschiede aufweisen, und die Richtlinien sind entgegengesetzt. Zwischen $D \leftarrow$ und $D \rightarrow D$ kann man sich eine Druckfeder, zwischen $Z \rightarrow$ und $Z \leftarrow$ eine Zugfeder gelegt denken, dann geben beide Federn ein Bild von der Beanspruchung der oberen und unteren Stabhälfte. Von C aus betrachtet, erhält man in gleicher Weise wie vorher

$$B \cdot x' - P_3 (x' - d) - P_2 (x' - d - c) = Z \cdot f = D \cdot f;$$

diesmal stellt die linke Seite der Gleichung ein links drehendes Moment dar. Genau genommen, wirken also im Schnitt zwei gleich große, entgegengesetzt drehende Momente und zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte Q. Die Mittelkraft der links vom Schnitt angreifenden Kräfte $(A — P_1)$, also die Kraft, die von gleicher Größe, aber von entgegengesetzter Richtung ist wie Q_l, heißt Querkraft; sie wird als positiv bezeichnet, wenn sie nach oben gerichtet ist. Die Mittelkraft der rechts vom Schnitt angreifenden Kräfte $(P_2 + P_3 — B)$ heißt natürlich auch die Querkraft, sie ist aber nach unten gerichtet, müßte also nach der eben ausgesprochenen Festsetzung als negativ bezeichnet werden. Da es aber nicht angeht, als Querkraft einen positiven Wert zu erhalten, wenn man die Berechnung von links aus durchführt, und einen negativen, wenn man von rechts aus rechnet, so muß der Festlegung noch hinzugefügt werden, daß die Querkraft bei einer Berechnung von rechts aus als positiv bezeichnet wird, wenn sie nach unten gerichtet ist. Diese Unterscheidung ist notwendig, weil zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte in jedem Schnitte auftreten, wir aber nur kurz von der Querkraft sprechen.

Der gleichen Schwierigkeit begegnen wir, wenn wir über das Vorzeichen des Biegungsmomentes etwas aussagen wollen. Wir wissen, daß zwei gleich große entgegengesetzt drehende Momente auftreten, sprechen aber der Einfachheit halber von dem Biegungsmoment, daß — in unserm Fall — rechts drehend ist, wenn wir den linken Trägerteil, links drehend, wenn wir den rechten Trägerteil betrachten. Da hier der Drehsinn des Momentes zur Unterscheidung nicht mehr ausreicht, betrachten wir die durch beide Momente hervorgerufene Formänderung und legen fest: ein Biegungsmoment ist positiv (+), wenn es die Trägerachse nach unten wölbt, negativ (—), wenn es die Trägerachse nach oben wölbt (Abb. 51). Sehen wir uns in Abb. 50 den linken Stabteil an, so dreht das Moment der äußeren Kräfte rechts um C, am rechten dagegen dreht das Moment der äußeren Kräfte links um C; beide Momente verformen die Stabachse nach Abb. 51 a; das Biegungsmoment ist positiv.

Die beiden Querkräfte Q_l und Q_r suchen die beiden Stabteile gegeneinander zu verschieben; die durch sie hervorgerufenen Spannungen sind Schubspannungen. Die Biegungsmomente drehen die Querschnitte des Stabes gegeneinander; die durch sie hervorgerufenen Spannungen sind Normalspannungen und heißen Biegungsspannungen.

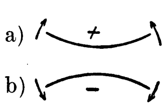


Abb. 51. Vorzeichen des Biegungsmomentes.

Zusammenfassend sagen wir: jeder Querschnitt eines gebogenen Stabes wird beansprucht

1. durch eine Querkraft auf Schub, die gleich der algebraischen Summe sämtlicher links (oder auch rechts) vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte ist,

2. durch ein Biegungsmoment, das gleich der algebraischen Summe der statischen Momente sämtlicher links (oder auch rechts) vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte ist.

Streng genommen, liegt also ein Fall der zusammengesetzten Festigkeit vor, doch vernachlässigt man im allgemeinen die infolge der Querkraft auftretenden Schubspannungen und bemißt den Querschnitt des gebogenen Stabes nach der größten errechneten Biegungsspannung. Über den Sonderfall der reinen Biegung ohne Querkraft siehe S. 99.

c) Momentenlinie und Momentenfläche.

Da das Ergebnis der vorangegangenen Betrachtung die Grundlage für die Berechnung biegungsfester Träger ist, soll der Träger noch einmal, aber von einem andern Gesichtspunkt aus, betrachtet werden. Die Voraussetzung bleibt die gleiche: die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden Kräfte liegen in einer Ebene, die durch die Stabachse geht (Abb. 52), der zu untersuchende Schnitt habe den Abstand x vom Auflager A. Zu den gegebenen Kräften P zeichnen wir den Kräftezug, wählen den Punkt O im Abstande H als Pol und ziehen die Polstrahlen $I \ldots VII$; die Parallelen $I' \ldots VII'$ zwischen den Wirkungslinien der Kräfte P ergeben den Seilzug $I' \ldots VII'$. Die äußersten Seilstrahlen I' und VII', das sind die Parallelen zu den Polstrahlen, die nach dem Anfangs- und Endpunkt des Kräftezuges gehen, bringen wir mit den Auflagersenkrechten zum Schnitt und erhalten durch die Verbindungslinie s dieser Schnittpunkte das geschlossene Seileck $I' \ldots VII'$, s. Eine Parallele zur Schlußlinie s durch den Pol O liefert die Auflagerdrucke A und B. Der Träger ist im Gleichgewicht, denn der Kräftezug sämtlicher Kräfte — P_1, $P_2 \ldots P_6$, A und B — und das Seileck $I' \ldots VII'$, s sind geschlossen.

Als Mittelkraft sämtlicher links vom Schnitt angreifenden Kräfte ergibt sich

$$Q_l = A - \sum_A^x P,$$

ihre Wirkungslinie geht durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen, die in diesem Falle die Parallelen zu den Polstrahlen s und III nach Anfangs- und Endpunkt von Q_l sind; wir bringen die Seilstrahlen III' und s zum Schnitt, dann ist die nach oben gerichtete, in diesem Schnittpunkte angreifende Kraft Q_l die Mittelkraft sämtlicher am linken Trägerteil angreifenden Kräfte.

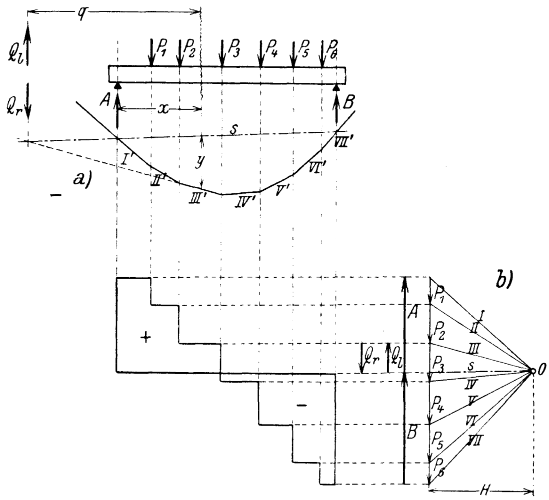


Abb. 52. M- und Q-Fläche.

In gleicher Weise erhalten wir in Q_r die Mittelkraft sämtlicher am rechten Trägerteil angreifenden Kräfte, deren Wirkungslinie ebenfalls durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen III' und s geht, und deren Größe durch die Gleichung

$$Q_r = B - \sum_B^x P$$

gegeben ist; beide Kräfte Q sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.

Statt der Kräfte P, A, B kann man nunmehr den Träger belastet denken durch die beiden Mittelkräfte Q_l und Q_r (Abb. 53), die dieselbe Wirkungslinie, aber entgegengesetzte Richtung haben. Q_l greift am linken, Q_r am rechten Trägerteil an. Unter dem Einfluß dieser beiden Kräfte Q wird der Träger gebogen; zwei gleich große, entgegengesetzt drehende Momente von der Größe

$$M = Q_l \cdot q = Q_r \cdot q$$

treten auf. Der Einfachheit halber denkt man sich den rechten Trägerteil festgehalten und untersucht die Wirkung der Kraft Q_l auf den Schnitt x, oder man denkt sich den linken Trägerteil festgehalten und untersucht die Wirkung der Kraft Q_r auf den Schnitt x. Durch diese gedachte Einspannung ersetzen wir eins der beiden in Wirklichkeit vorhandenen Momente. Infolge der biegendenWirkung heißt das Moment

$$M = Q \quad q$$

das Biegungsmoment im Punkte x des Trägers; es ist gleich dem statischen Moment der Mittelkraft sämtlicher Kräfte links (oder auch rechts) vom betrachteten Punkt. Da nach einem Satze der Mechanik das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist, erhalten wir den im vorigen Abschnitt gefundenen Satz (S. 64).

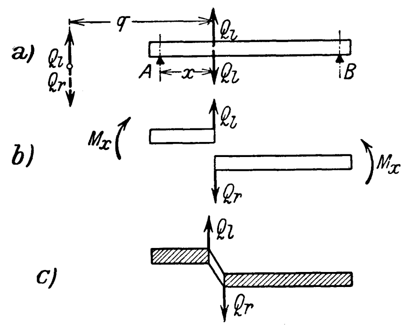


Abb. 53. Biegungsmoment und Querkraft.

Nach dem Entwurf des Seilecks ist das von den Seilstrahlen s und III' begrenzte Dreieck dem von den Polstrahlen s und III begrenzten Dreieck ähnlich. Es besteht demnach die Beziehung

$$y : q = Q : H \quad \text{oder} \quad Q \cdot q = H \cdot y\,.$$

Das heißt: Die Ordinate y des Seilecks ist ein Maß für die Größe des Biegungsmomentes im Punkte x des Trägers. Ist 1 mm $= a$ kg der Kräftemaßstab, 1 mm $= b$ cm der Längenmaßstab unserer Zeichnung, so ist

$$M_x = H \cdot y$$
$$= \left(H\,\text{mm} \cdot \frac{a\,\text{kg}}{1\,\text{mm}}\right) \cdot \left(y\,\text{mm} \cdot \frac{b\,\text{cm}}{1\,\text{mm}}\right) \text{ in cm kg}\,,$$

wobei die Polweite H im Kräftemaßstab, die Ordinate y im Längenmaßstab der Darstellung gemessen werden muß.

Die Seillinie gibt uns Auskunft über den Verlauf der Biegungsmomente längs der Trägerachse, ihre Ordinaten y stellen die durch H dividierten Biegungsmomente dar; die Seilllinie wird zur Momentenlinie, wenn wir ihre Ordinaten y mit der Polweite H multiplizieren; die von ihr begrenzte Fläche heißt Momentenfläche.

Um ein Bild von der Größe der Biegungsmomente zu erhalten, ist der Weg über das Kraft- und Seileck nicht der einzige. Wir können auch die Momente rechnerisch ermitteln und sie unter Annahme eines Momentenmaßstabes von der Form 1 mm $= c$ cmkg als Ordinaten im betrachteten Punkte auftragen. Die so gefundene Momentenlinie unterscheidet sich von der Seillinie lediglich durch den Ordinatenmaßstab.

d) Querkraftlinie und Querkraftfläche.

Wir berechnen die Querkraft für verschiedene Punkte des Trägers und sehen zu, ob sich für Zwischenpunkte ein Gesetz über den Verlauf der Querkraft aufstellen läßt. Sind Einzelkräfte als Belastung gegeben, so werden wir für ihre Angriffspunkte Q errechnen. Aber gerade diese Punkte bieten für die Anschauung Schwierigkeiten. Fassen wir beispielsweise den Punkt A (Abb. 52) ins Auge, so hat er zwei Querkräfte. In verschwindend kleinem Abstande links von A ist die Querkraft gleich Null, denn links von diesem Punkte greifen keine Kräfte an. Unmittelbar rechts vom Punkte A ist die Querkraft gleich A, weil der

Auflagerdruck A die einzige links vom betrachteten Punkt angreifende Kraft ist. Für Punkte zwischen A und dem Angriffspunkt der Kraft P_1 ändert sich an diesem Zustande nichts, es kommt keine Kraft hinzu, die Querkraft bleibt unverändert gleich A. Die sie darstellende Linie ist eine Parallele zur Achse im Abstande A. Bei dem Angriffspunkte 1 der Kraft P_1 sind wieder die beiden Fälle — unmittelbar links von 1 und unmittelbar rechts von 1 — zu unterscheiden. Und zwar ist $Q_1 = A$ die Querkraft unmittelbar links von 1, dagegen $Q_1' = A - P_1$ die Querkraft unmittelbar rechts von 1, denn die Querkraft war nach S. 63 gleich der Summe sämtlicher Kräfte links vom betrachteten Punkt. Im Punkte 1 springt die Querkraft von A auf $A - P_1$. Selbstverständlich ist dieser Sprung schwer verstellbar, aber er besteht auch nur da, wo eine Kraft (P_1) in einem Punkte angreift. Das könnte in der Wirklichkeit nur da auftreten, wo Schneidenlagerung ist oder ein Rad über den Träger rollt. Immerhin wird auch in diesen Fällen eine, wenn auch kleine, Auflagerfläche sein, die den schroffen Übergang von A zu $A - P_1$ mildert. Unter der Voraussetzung einer Angriffsfläche haben wir uns den Verlauf der Querkraft folgendermaßen zu denken. Abb. 54 zeigt die Auflagerfläche ab im Angriffspunkt der Kraft P_1 übertrieben verzerrt und läßt erkennen, daß $Q_a = A$, $Q_b = A - P_1$ ist. Zwischen a und b vermindert sich die Querkraft je nach der Druckverteilung an der Grundfläche des Zwischenträgers. Nehmen wir diese als gleichförmig verteilt an, so vermindert sich Q_a stetig, und die Querkraftlinie zeigt statt des Sprunges in 1 den allmählichen Verlauf $a'b'$. Nachdem wir uns so Klarheit über die Wirklichkeit verschafft haben, kehren wir zu unserer Darstellung in Abb. 52 zurück, an der wir der Einfachheit halber festhalten wollen, obwohl die Wirklichkeit ein anderes Gesicht hat. Zwischen den Punkten 1 und 2 des Trägers tritt keine Änderung ein, die Querkraft bleibt bis unmittelbar links von 2 unverändert gleich $A - P_1$, vermindert sich unmittelbar rechts von 2 um P_2, so daß

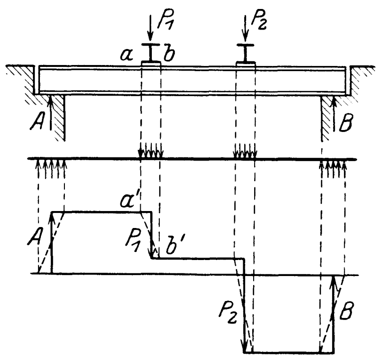


Abb 54. Querkraftfläche.

$$Q_2 = A - P_1, \; Q_2' = A - P_1 - P_2$$

ist; wir haben in 2 wieder den Sprung. Führen wir die Betrachtung abschnittweise durch, tragen die errechneten Querkräfte als Ordinaten in den zugehörigen Punkten auf und ziehen die wagerechten Geraden durch die gefundenen Punkte, so erhalten wir die treppenförmige Linie der Abb. 52, die wir Querkraftlinie nennen; sie besteht aus wagerechten Teilgeraden, ist also keine zusammenhängende Linie. Erst durch das Einzeichnen der senkrechten Verbindungsgeraden erhalten wir eine Linie, die eine Fläche einschließt; es ist dies die sogenannte Querkraftfläche, deren Ordinaten im Kräftemaßstabe zu messen sind. Sie zeigt Teilflächen oberhalb und unterhalb der Achse, die durch entgegengesetzte Vorzeichen zu unterscheiden sind. Bei einwandfreier Zeichnung muß sich

$$Q_B = A - \sum P = B$$

ergeben. Da wir festgelegt haben, die Querkraft sei positiv, wenn sie bei der von A ausgehenden Betrachtung nach oben gerichtet ist, so sind die oberhalb der Achse liegenden Flächen positiv, die unterhalb der Achse liegenden negativ zu zählen.

2. Biegungsspannungen.

a) Voraussetzung.

Die Ebene des angreifenden Kräftepaares schneide den Querschnitt in einer Symmetrieachse.

b) Der rechteckige Querschnitt.

Aus der Abb. 50 konnten wir zwar das Kräftepaar $Z \cdot f$ bzw. $D \cdot f$ finden, das im Gesamtergebnis ein Bild von der Beanspruchung des Querschnittes gibt, aber wie sich Z und D über den Querschnitt verteilen, ist damit noch nicht festgestellt. Wir schließen auf die Verteilung der Spannungen durch die Betrachtung der Dehnungen in Abb. 49 und sagen: Die Dehnungen der einzelnen Fasern nehmen verhältnisgleich der Entfernung von der Nullinie nach dem Rande hin zu; dasselbe tun die Spannungen, wenn wir für den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen das Geradliniengesetz von Hooke zugrunde legen. Mit Hilfe dieser Überlegung, die letzten Endes eine Annahme ist, erhalten wir das Schaubild (Abb. 49c) der Spannungsverteilung eines auf Biegung beanspruchten Querschnittes, es zeigt geradliniges Anwachsen der Spannungen nach dem Rande des Querschnittes. Nennt man die Randspannungen σ_1 und σ_2, die Spannung in der Entfernung y dagegen σ, so wird

$$\sigma = \frac{y}{e_1} \cdot \sigma_1 = \frac{y}{e_2} \cdot \sigma_2 .$$

Da der unserer Betrachtung zugrunde gelegte rechteckige Querschnitt überall gleich breit ist, dürfen wir uns statt der veränderlichen Spannung σ eine gleichmäßig verteilte mittlere Spannung σ_m denken, die im oberen Querschnittsteil drückt, im unteren zieht. Nach der Erklärung des Spannungsbegriffes überträgt jedes cm^2 des Querschnittes σ_m kg, also der obere Teil des Querschnittes

$$D = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot \sigma_m ,$$

der untere

$$Z = \frac{1}{2} h \cdot b \cdot \sigma_m ;$$

die Gleichgewichtsbedingung

$$D \cdot f = A \cdot x - P_1 (x - a) = M$$

geht mit $f = {}^2/_3\, h$ über in

$$\frac{1}{2}\, h \cdot b \cdot \sigma_m \cdot \frac{2}{3}\, h = M\,,$$

wenn wir beachten, daß die Mittelkraft der Einzelspannungen σ im Schwerpunkt des Spannungsdreiecks angreifend gedacht werden muß und die rechte Seite das Biegungsmoment in dem zu untersuchenden Querschnitt darstellt. Da ferner die mittlere Spannung σ_m gleich der halben Randspannung σ_1 ist, erhält man

$$\frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2}\, \sigma_1 \cdot \frac{2}{3}\, h = M \quad \text{oder} \quad \sigma_1 = \frac{6\,M}{b\,h^2}\,.$$

Die Spannung im beliebigen Abstande y von der Nullinie wird

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \frac{y}{e_1} = \frac{6\,M}{b\,h^2 \cdot e_1} \cdot y \quad \text{oder mit} \quad e_1 = \frac{h}{2} \quad \sigma = \frac{12\,M}{b\,h^3} \cdot y\,.$$

Die rechte Seite der für σ_1 und σ gefundenen Werte schreiben wir

$$\frac{6\,M}{b\,h^2} = \frac{M}{\frac{b\,h^2}{6}} \quad \text{und} \quad \frac{12\,M}{b\,h^3} \cdot y = \frac{M}{\frac{b\,h^3}{12}} \cdot y$$

und nennen die rechnerisch gefundenen Ausdrücke

$\frac{b\,h^2}{6} = W$ das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnittes,

$\frac{b\,h^3}{12} = J$ das Trägheitsmoment des rechteckigen Querschnittes.

Beide Größen sind mathematische Ausdrücke, die Eigenschaften eines Querschnittes kennzeichnen; das Widerstandsmoment ist ein Maß für die Größe der Tragfähigkeit des gebogenen Stabes, denn die Randspannung

$$\sigma_1 = \frac{M}{W}$$

ist für die Bemessung des Querschnittes maßgebend, während die Spannung σ im beliebigen Abstande y von der Nullinie vorerst wenigstens ohne Belang ist.

Die Festigkeitsbedingung für den auf Biegung beanspruchten Stab erhält jetzt die Form

$$\sigma_1 = \frac{M}{W} \leqq k_b\,;$$

aus ihr errechnen wir das erforderliche Widerstandsmoment zu

$$W_{\text{erforderlich}} \geqq \frac{M}{k_b}\,.$$

c) Der beliebig begrenzte, aber symmetrische Querschnitt.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung eines rechteckigen Querschnittes fallen und untersuchen den Querschnitt der Abb. 55, den die Ebene des angreifenden Kräftepaares in der Kraftlinie KK schneiden möge, die demnach die Schnittgerade des Querschnittes mit der Momentenebene ist. Für den Stab ist das Geradliniengesetz von Hooke als gültig angenommen, das mit den Bezeichnungen der Abb. 55 die rechnerische Form

$$\sigma = \sigma_0 \cdot y$$

hat. Die Randspannungen sind

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \frac{e_1}{y}\,, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_2 = \sigma \cdot \frac{e_2}{y}\,.$$

Unter σ_0 haben wir die Spannung im Abstande 1 von der Nullinie zu verstehen.

Da wir nur gleichmäßig verteilte Spannungen rechnerisch benutzen können, insofern als der Spannungsbegriff σ diese Art der Spannungsverteilung voraussetzt, so müssen wir versuchen, die vorliegende ver-

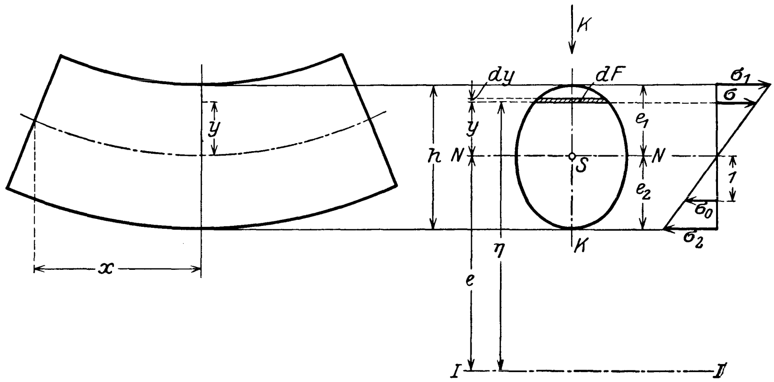


Abb. 55. Biegungsspannungen.

änderliche Spannung σ auf eine gleichmäßig verteilte zurückzuführen. Das ist aber nur möglich, wenn wir einen Flächenstreifen dF von verschwindend kleiner Dicke dy parallel zur Nullinie betrachten; für ihn dürfen wir die Spannung als unveränderlich ansehen. Ist sie im Abstande y von der als bekannt vorausgesetzten Nullinie gleich σ, so überträgt der Flächenstreifen dF eine Kraft $\sigma \cdot dF$ [kg]. Dabei denken wir den Stab durchgeschnitten und die Spannungen als äußere Kräfte angebracht. Aus der 1. Gleichgewichtsbedingung: Summe aller wagerechten Seitenkräfte gleich Null folgt

$$\int \sigma dF = 0 \quad \text{oder mit} \quad \sigma = \sigma_0 \cdot y\,,$$

$$\sigma_0 \cdot \int dF \cdot y = 0\,.$$

Da σ_0 als Spannung im Abstande 1 nicht gleich Null sein kann, so muß

$$\int dF \cdot y = 0$$

sein. Unter dem Integralzeichen steht das Produkt aus Flächenteilchen und Abstand seines Schwerpunktes von der Nullinie. $\int dF \cdot y = 0$ besagt demnach, daß die Summe der Produkte aus Flächenteilchen und Schwerpunktsabstand gleich Null sein soll. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Nullinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht.

Der 2. Gleichgewichtsbedingung wird genügt, wenn wir die durch die Querkraft hervorgerufenen Schubspannungen vernachlässigen.

Die 3. Gleichgewichtsbedingung, Summe der Momente gleich Null, verlangt für N—N als Bezugsachse mit $\sigma \cdot dF$ als Kraft und y als Hebelarm

$$\int \sigma \cdot dF \cdot y = M;$$

mit $\sigma = \sigma_0 \cdot y$ geht die Gleichung über in

$$\sigma_0 \cdot \int dF \cdot y^2 = M\,.$$

Das Integral ist der Grenzwert der Summe des Produktes aus Flächenteilchen und Quadrat des Abstandes von einer Achse; es heißt das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf eine Achse, und ist ein mathematischer Ausdruck für die Eigenschaften dieses Querschnittes in seinem Verhalten gegen Biegungsbeanspruchung. Mit

$$\int dF \cdot y^2 = J$$

nimmt unsere Gleichung die Form an:

$$\sigma_0 \cdot J = M \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{M}{J} \cdot y\,.$$

Für die Randspannung σ_1 und σ_2 ist $y = e_1$ bzw. $y = e_2$, so daß wir für sie erhalten:

$$\sigma_1 = \frac{M}{\frac{J}{e_1}}, \text{ bzw. } \sigma_2 = \frac{M}{\frac{J}{e_2}}\,.$$

Die Nenner erhält man, wenn man das Trägheitsmoment durch den Abstand der äußersten Faser von der Nullinie dividiert; sie heißen die Widerstandsmomente des Querschnittes und werden mit

$$W_1 = \frac{J}{e_1} \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{J}{e_2}$$

bezeichnet. Als Randspannungen ergeben sich

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{M}{W_2}\,.$$

Die Festigkeitsbedingung für den gebogenen geraden Stab lautet demnach

$$\sigma = \frac{M}{W} \leqq k_b\,,$$

wobei k_b die zulässige Biegungsspannung bedeutet.

Das Trägheitsmoment wird wegen des Produktes (Fläche in cm^2 $\times$ Quadrat des Abstandes in cm^2) in cm^4, das Widerstandsmoment in cm^3 gemessen. Die Längenabmessungen des Querschnittes sind in cm einzusetzen.

Der Vergleich mit dem Sonderfall des rechteckigen Querschnittes zeigt

$$J = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad W = \frac{b h^2}{6}\,.$$

Da sich für jede Achse das Trägheitsmoment berechnen läßt, so erhalten wir beliebig viele Trägheitsmomente ein und desselben Querschnittes. Maßgebend ist stets die Achse, auf die das Trägheitsmoment bezogen ist. Von allen Trägheitsmomenten, deren Achsen durch den Schwerpunkt gehen (Schwerachsen), sind zwei ausgezeichnet — das größte und das kleinste; die beiden zu diesen Trägheitsmomenten gehörenden Achsen sind die Hauptachsen des Querschnittes. Darüber wird ausführlicher zu sprechen sein (S. 124); hier soll betont werden, daß die aufgestellten Beziehungen nur dann gelten, wenn die Kraftlinie und Nullinie Hauptachsen des Querschnittes sind. Fällt die Kraftlinie nicht mit einer Hauptachse zusammen, so spricht man von einer unsymmetrischen Belastung (S. 135).

3. Trägheitsmomente ebener Flächen mit Symmetrieachse.

Das Trägheitsmoment ist stets zuerst zu berechnen; aus ihm ergibt sich das Widerstandsmoment durch Division mit dem Abstand der äußersten Faser. Häufig kommt es vor, daß der Trägheitsmoment auf eine andere, zur Schwerachse parallele Gerade bezogen werden muß; liegt sie im Abstande e, so wird (Abb. 55)

$$J_{\mathrm{I}} = \int dF \cdot \eta^2 = \int dF\,(e+y)^2,$$
$$= e^2 \int dF + 2\,e \int dF \cdot y + \int dF \cdot y^2.$$

Nun ist aber $\int dF \cdot y = 0$, weil die Bezugsachse Schwerachse ist; $\int dF \cdot y^2 = J_s$ ist das auf die Schwerachse bezogene Trägheitsmoment; $\int dF = F$ ist der Flächeninhalt des Querschnittes, so daß wir erhalten

$$J_{\mathrm{I}} = J_s + F \cdot e^2.$$

a) Das Rechteck (Abb. 56).

Die Bezugsachse sei die wagerechte Symmetrieachse (x-Achse), dann ist das Flächenteilchen dF so zu legen, daß sämtliche Punkte gleichen Abstand von der Bezugsachse haben. Das ergibt den Flächenstreifen

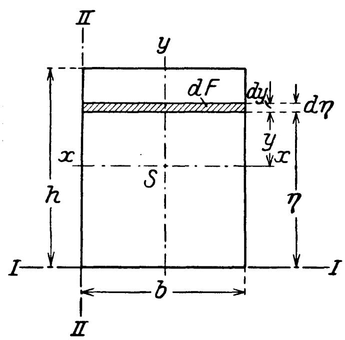


Abb. 56. Rechteck.

$$dF = b \cdot dy\,.$$

Aus

$$J_x = \int dF \cdot y^2\,,$$

folgt

$$J_x = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot dy \cdot y^2 = b \cdot \frac{1}{3}\, y^3 \Big|_{-h/2}^{+h/2}\,,$$

$$J_x = b \cdot \frac{1}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{bh^3}{12}\,.$$

Bezogen auf die Grundlinie ist

$$J_I = \int dF \cdot y^2 = \int_0^h b \cdot dy \cdot y^2\,,$$

$$J_I = \frac{bh^3}{3}\,.$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommen wir mit Hilfe der allgemeinen Beziehung

$$J_I = J_x + F \cdot e^2,$$

wenn wir $F = b \cdot h$ und $e = h/2$ einsetzen; es wird

$$J_I = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}.$$

Soll das Trägheitsmoment für die y-Achse berechnet werden, so ist dF parallel zur y-Achse mit der Breite dx zu wählen. Wir erhalten

$$Jy = \int_{-b/2}^{+b/2} h \cdot dx \cdot x^2 = \frac{hx^3}{3}\Bigg|_{-b/2}^{+b/2} = \frac{hb^3}{12}.$$

In gleicher Weise wird $J_{II} = \frac{hb^3}{3}$.

Für den Sonderfall des Quadrates mit der Seite h ergibt sich

$$J_x = J_y = \frac{h^4}{12};\quad J_I = J_{II} = \frac{h^4}{3}.$$

Als Widerstandsmomente erhalten wir durch Division mit $\frac{h}{2}$ als Abstand der äußersten Faser von der x-Achse

$$W_x = \frac{bh^3}{12} : \frac{b}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

und mit $\frac{b}{2}$ als Abstand der äußersten Faser von der y-Achse

$$W_y = \frac{hb^3}{12} : \frac{b}{2} = \frac{hb^2}{6}.$$

Beim Quadrat wird

$$W_x = W_y = \frac{h^4}{12} : \frac{h}{2} = \frac{h^3}{6}.$$

b) Das Dreieck (Abb. 57).

Wir wählen zunächst die Achse I als Bezugsachse, die y-Achse ist Symmetrieachse, dann ist

$$J_I = \int dF \cdot y'^2.$$

Mit $dF = x \cdot dy'$ und $x : y' = b : h$ wird

$$J_I = \int_0^h \frac{b}{h} \cdot y'^3 \cdot dy' = \frac{bh^3}{4}.$$

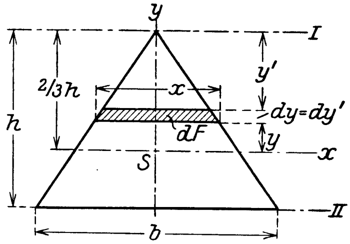


Abb. 57. Dreieck.

Für J_x erhalten wir aus

$$J_x = J_I - F \cdot e^2$$

mit $e = \frac{2}{3}h$

$$J_x = \frac{bh^3}{4} - \frac{1}{2}bh \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

und für J_{II} mit $e = h/3$

$$J_{II} = \frac{bh^3}{36} + \frac{1}{2}\,bh \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}.$$

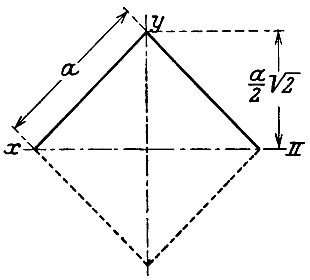


Abb. 58. Quadrat.

Für den Sonderfall des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit den Katheten a, der Hypotenuse $b = a\,\sqrt{2}$ als Grundlinie und der Höhe $h = \frac{a}{2}\,\sqrt{2}$ wird

$$J_{II} = \frac{a\sqrt{2} \cdot (\frac{a}{2}\sqrt{2})^3}{12} = \frac{a^4}{24}.$$

Denken wir uns die Achse II als Symmetrieachse eines auf der Spitze stehenden Quadrates (Abb. 58), so wird das Trägheitsmoment dieses Quadrates

$$J_x = 2 \cdot J_{II} = 2 \cdot \frac{a^4}{24} = \frac{a^4}{12},$$

also genau so groß wie das Trägheitsmoment, welches auf die zur Grundlinie parallele Schwerachse bezogen wird.

c) Das regelmäßige Sechseck (Abb. 59).

Die Zerlegung in 6 gleichseitige Dreiecke liefert

$$J_x = 2\,(2\,J_{II} + J_I) = 4 \cdot \frac{bh^3}{12} + 2 \cdot \frac{bh^3}{4} = \frac{5}{6}\,bh^3,$$

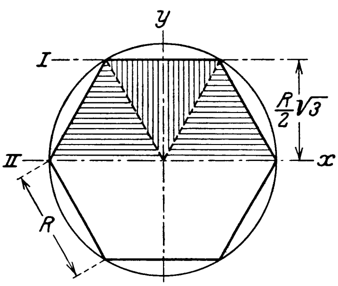


Abb. 59. Sechseck.

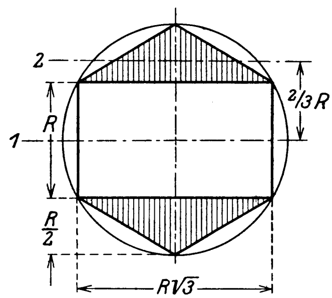


Abb. 60. Sechseck.

wobei J_{II} das auf die Grundlinie, J_I das auf die Spitze bezogene Trägheitsmoment eines Dreiecks bedeutet. Mit

$$J_I = \frac{bh^3}{4} \quad \text{und} \quad J_{II} = \frac{bh^3}{12},$$

$$b = R \quad \text{und} \quad h = \frac{R}{2}\,\sqrt{3}$$

erhalten wir

$$J_x = \frac{5}{6} \cdot R \cdot \left(\frac{R}{2}\,\sqrt{3}\right)^3 = \frac{5\sqrt{3}}{16} \cdot R^4 = 0{,}5413\,R^4.$$

Das auf der Spitze stehende Sechseck (Abb. 60) denken wir uns in ein Rechteck und zwei Dreiecke zerlegt; es wird

$$J_x = J_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot J_{\text{Dreieck}}\,.$$

Für das Rechteck ist die x-Achse Hauptachse, also $J_{\text{Rechteck}} = \frac{R \cdot \sqrt{3} \cdot R^3}{12}$; die Dreiecke haben

$$2 \cdot J_{\text{Dreieck}} = 2 \cdot (J_2 + F \cdot e^2),$$

wobei

$$J_2 = \frac{R\sqrt{3} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3}{36}; \quad F = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}; \quad e = \frac{2}{3} R$$

ist. Eingesetzt erhalten wir

$$J_x = \frac{R^4 \cdot \sqrt{3}}{12} + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot R\sqrt{3} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} R^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{2}{3} R\right)^2\right],$$

$$J_x = \frac{5\sqrt{3}}{16} \cdot R^4 = 0{,}5413 \cdot R^4.$$

Die Trägheitsmomente sind in Beziehung auf beide Achsen gleich groß, aber nicht die Widerstandsmomente, denn für sie erhalten wir (Abb. 59)

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{R}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{5}{16}\sqrt{3} \cdot R^4}{\frac{R}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5}{8} R^3 = 0{,}625\, R^3,$$

$$W_y = \frac{J_y}{R} = 0{,}5413\, R^3.$$

d) Der Kreisquerschnitt. (Abb. 61.)

Für ihn ist

$$J_x = \int_{-r}^{+r} dF \cdot y^2 = 2 \int_0^r dF \cdot y^2\,.$$

Mit $dF = 2x \cdot dy$; $x = r \cdot \cos\varphi$; $y = r \cdot \sin\varphi$; $dy = r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$ wird

$$J_x = 4 \cdot r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi\,.$$

Mit $\quad \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi$

und $\quad d\varphi = \frac{1}{2} \cdot d\,(2\varphi)$ erhält man

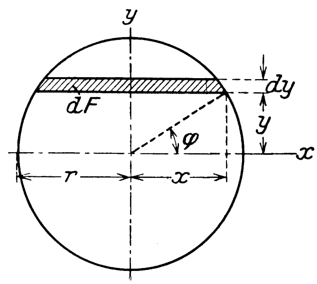


Abb. 61. Kreis.

$$J_x = \frac{d^4}{32} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2(2\varphi) \cdot d\,(2\varphi)\,,$$

wenn man noch r durch $\frac{d}{2}$ ersetzt. Das Integral ist ein Fundamental-

Integral und ergibt zwischen den Grenzen 0 und π

$$\int_0^\pi \sin^2(2\varphi)\cdot d(2\varphi) = \frac{\pi}{2},$$

so daß

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

wird. Da sich an der Berechnung nichts ändert, wenn man einen beliebigen Durchmesser als Bezugsachse wählt, so sind sämtliche Trägheitsmomente, bezogen auf einen Durchmesser, gleich groß.

Als Widerstandsmoment erhält man mit $\frac{d}{2}$ als Abstand der äußersten Faser

$$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Der Kreisring ist die Differenz zweier Kreise, sein Trägheitsmoment, bezogen auf einen Durchmesser als Bezugsachse, ist

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4).$$

Da die äußerste Faser den Abstand $\frac{D}{2}$ von der Bezugsachse hat, wird

$$W = \frac{\pi}{32}\cdot\frac{D^4 - d^4}{D}.$$

e) Zusammengesetzte Querschnitte.

Es sollen nur einige Formen allgemein behandelt werden, die von grundsätzlicher Bedeutung sind. Bei zahlenmäßig gegebenen Aufgaben wird man auf allgemeine Entwicklung verzichten und sofort die Abmessungen des gewählten Querschnittes einsetzen.

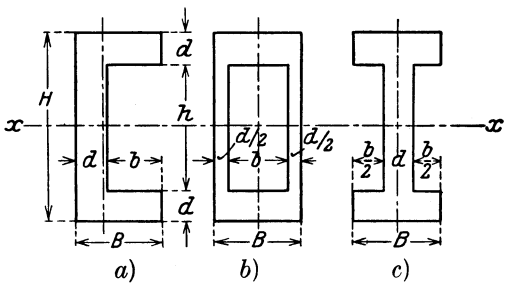


Abb. 62. Zusammengesetzte Querschnitte.

Abb. 62. Alle drei Querschnitte haben in Beziehung auf die x-Achse, die Symmetrieachse ist, gleiche Trägheitsmomente, weil Flächenstreifen gleicher Größe parallel zur x-Achse gleiche Abstände von dieser haben. Daran wird nichts geändert, wenn der Steg (a) und (c) in zwei Stege von halber Dicke (b) aufgelöst wird. Der Querschnitt ist die Differenz zweier Rechtecke, die beide symmetrisch zur x-Achse liegen; wir erhalten also

$$J_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}.$$

Auch die Widerstandsmomente aller drei Querschnitte sind gleich groß, da der Abstand der äußersten Faser bei allen $\frac{H}{2}$ ist; es wird

$$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}.$$

Abb. 63. Die drei Querschnitte sind in Beziehung auf die x-Achse unsymmetrisch, aber die Flächenstreifen gleicher Größe parallel zur x-Achse haben gleiche Abstände von dieser; also sind die Trägheits-

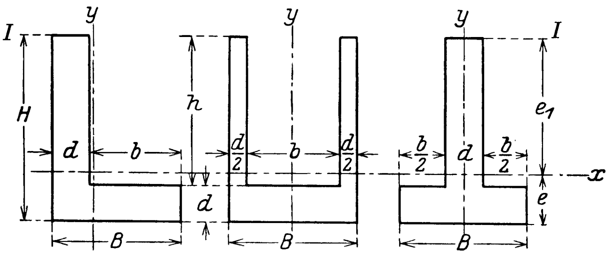


Abb. 63. Zusammengesetzte Querschnitte.

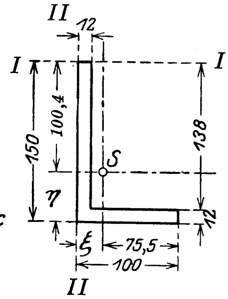


Abb. 64. Winkeleisen.

momente J_x gleich groß. Wir beziehen J zunächst auf die zur x-Achse parallele Achse I und lösen den Querschnitt in die Differenz zweier Rechtecke auf, deren Grundlinie die Bezugsachse I ist.

$$J_{\mathrm{I}} = \frac{BH^3}{3} - \frac{bh^3}{3}.$$

Aus

$$J_{\mathrm{I}} = J_x + F \cdot e_1^2$$

folgt

$$J_x = \frac{BH^3}{3} - \frac{bh^3}{3} - (BH - bh) \cdot e_1^2.$$

Die Ermittlung des Schwerpunktes hat der Berechnung von J voranzugehen. In beiden Abbildungen sind die Grundformen unserer Profileisen enthalten.

Zahlenbeispiele. 1. Das Winkeleisen (Abb. 64). Zugrunde gelegt ist ein ungleichschenkliges Winkeleisen $100 \cdot 150 \cdot 12$, dessen Ausrundungen vernachlässigt werden sollen. Die Lage des Schwerpunktes bestimmt sich zu

$$\eta = \frac{15 \cdot 1{,}2 \cdot 7{,}5 + 8{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6}{15 \cdot 1{,}2 + 8{,}8 \cdot 1{,}2} = 4{,}96 \text{ cm},$$

$$\xi = \frac{13{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 1{,}2 \cdot 5}{13{,}8 \cdot 1{,}2 + 10 \cdot 1{,}2} = 2{,}45 \text{ cm}.$$

In Beziehung auf die Achse I erhalten wir

$$J_I = \frac{10 \cdot 15^3}{3} - \frac{8{,}8 \cdot 12{,}8^3}{3} = 3541 \text{ cm}^4,$$

demnach

$$J_\xi = J_I - F \cdot e^2 = 3541 - 28{,}56 \cdot 10{,}04^2 = 639 \text{ cm}^4;$$

in Beziehung auf die Achse II wird

$$J_{II} = \frac{15 \cdot 10^3}{3} - \frac{13{,}8 \cdot 8{,}8^3}{3} = 1865 \text{ cm}^4,$$

demnach

$$J_\eta = J_{II} - F \cdot e^2 = 1865 - 28{,}56 \cdot 7{,}55^2 = 237 \text{ cm}^4 .$$

Unter Berücksichtigung der Ausrundungen wird

$$J_\xi' = 649 \text{ cm}^4; \quad J_\eta = 232 \text{ cm}^4 .$$

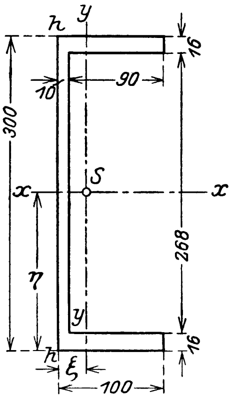


Abb. 65. Winkeleisen.

2. Das U-Eisen (Abb. 65). Zugrunde gelegt ist das Normalprofil Nr. 30, dessen Ausrundungen ebenfalls vernachlässigt werden sollen. Die Lage des Schwerpunktes ist bestimmt durch

$$\xi = \frac{10 \cdot 1{,}6 \cdot 5 \cdot 2 + 26{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}5}{10 \cdot 1{,}6 \cdot 2 + 26{,}8 \cdot 1{,}0} = 2{,}95 \text{cm};$$

$\eta = 15$ cm.

In Beziehung auf die x-Achse wird

$$J_x = \frac{10 \cdot 30^3}{12} - \frac{9 \cdot 26{,}8^3}{12} = 8072 \text{ cm}^4;$$

in Beziehung auf die Achse h

$$J_h = 2 \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^3}{3} + \frac{26{,}8 \cdot 1{,}0^3}{3} = 1076 \text{cm}^4;$$

daher ist

$$J_y = J_h - F \cdot \xi^2$$
$$= 1076 - 5{,}88 \cdot 2{,}95^2 = 564 \text{ cm}^4 .$$

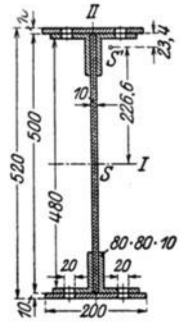


Abb. 66. Doppel-T-Eisen.

3. Doppel-T-Form (zusammengesetzt), Abb. 66

$$J_{\text{Stehblech}} = \frac{1}{12} \cdot 50^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10417 \text{ cm}^4$$

$$J_{\text{Winkel}} = 4 \cdot 87{,}5 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 350 \text{ „}$$

$$+ 4 \cdot 15{,}1 \cdot 22{,}66^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31014 \text{ „}$$

$$J_{\text{Gurtplatte}} = \frac{20}{12}(52^3 - 50^3) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26013 \text{ „}$$

$$J_{\text{voll}} = 67797 \text{ cm}^4$$

Abzug Niete

$$\frac{4}{12}(52^3 - 48^3) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10005 \text{ cm}^4$$

$$J_I = 57789 \text{ cm}^4$$

Widerstandsmoment

$$W_I = \frac{57789}{26} = 2223 \text{ cm}^4 .$$

f) Der beliebig begrenzte Querschnitt.

Verfahren von Mohr (Abb. 67). Zerlegt man den gegebenen Querschnitt im Streifen $\varDelta F$ von sehr geringer Breite $\varDelta y$ parallel zur Bezugsachse x, so wird

$$J_x = \int dF \cdot y^2 = \sim \sum \varDelta F \cdot y^2 .$$

Die Streifen faßt man als Dreiecke, Rechtecke, Trapeze usw. auf und bestimmt ihre Flächeninhalte und Schwerpunkte. Zu den als Kräfte aufgefaßten Flächeninhalten, die in den Schwerpunkten der Streifen angreifen, zieht man parallel zur x-Achse den Kräftezug und entwirft mit der beliebigen Polweite H das Seileck $1 \div 2 \ldots 7 \div 8 \ldots 13$. Mit $F_1, F_2 \ldots F_{13}$ als Flächeninhalten und $y_1, y_2 \ldots y_{13}$ als zugehörigen Schwerpunktabständen wird

$$J_x = \sum \Delta F \cdot y^2 = F_1 \cdot y_1^2 + F_2 \cdot y_2^2 + \ldots + F_{13} \cdot y_{13}^2.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke, O, 1, 2, O und 1, 1′, 2′, 1 ergibt sich

$$F_1 : H = 1'2' : y_1, \text{ also } F_1 \cdot y_1 = H \cdot 1'2'.$$

Der Flächeninhalt des gestrichelten Dreiecks 1, 1′, 2′, 1 ist

$$f_1 = \frac{1}{2} \cdot 1'2' \cdot y_1, \quad \text{folglich} \quad 1'2' \cdot y_1 = 2 \cdot f_1,$$

$$F_1 \cdot y_1^2 = (F_1 \cdot y_1) \cdot y_1 = H \cdot 1'2' \cdot y_1 = 2\,H \cdot f_1.$$

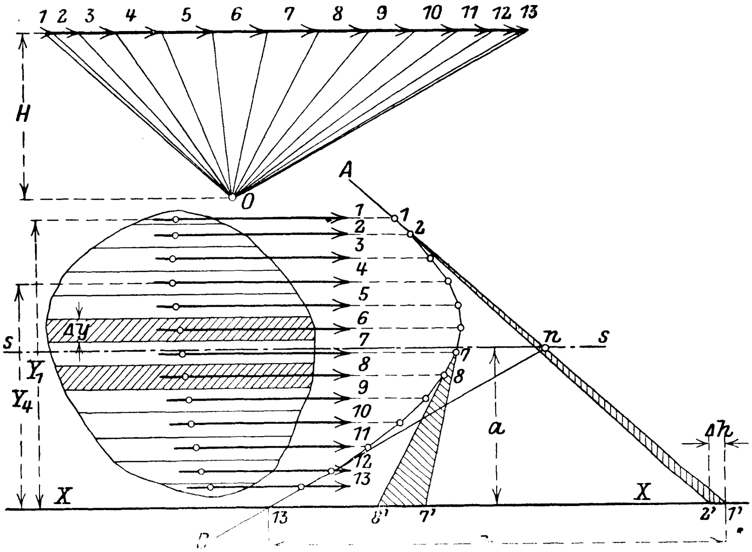


Abb. 67. Verfahren von Mohr.

In gleicher Weise wird z. B.

$$F_7 \cdot y_7^2 = (F_7 \cdot y_7) \cdot y_7 = H \cdot 7'8' \cdot y_7 = 2\,H \cdot f_7,$$

also $J_x = 2\,H \times$ (Summe sämtlicher Dreiecke, die von den Seilstrahlen und der x-Achse gebildet werden):

$$J_x = 2\,H \cdot (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = 2\,H \cdot f,$$

wobei f die Fläche bedeutet, die von der Seillinie, der x-Achse und dem äußersten Strahl 11′ begrenzt wird.

Das auf die Schwerachse bezogene Trägheitsmoment wird

$$J_s = J_x - F \cdot a^2.$$

Wir finden die Lage der Schwerachse, indem wir die äußersten Seilstrahlen 1 und 13 zum Schnitt bringen (n).

Mit $1 \div 13 = F$ im Kräftezuge erhält man aus den ähnlichen Dreiecken O, 1, 13, O und n, 1, 13, n

$$F : H = 1'\,13 : a \text{ oder } F \cdot a = H \cdot 1'\,13$$

und

$$F \cdot a^2 = H \cdot h \cdot a.$$

Aus $\frac{1}{2} \cdot h \cdot a = f'$ folgt $h \cdot a = 2\,f'$, so daß

$$F \cdot a^2 = 2\,H \cdot f'$$

wird.

$$J_s = 2\,H \cdot f - 2\,H \cdot f' = 2\,H \cdot (f - f').$$

$f - f'$ ist gleich dem Inhalt der von dem Seileck $1 - 2 \ldots 13$ und den äußersten Seilstrahlen 1—n und 13—n begrenzten Fläche. Lautet der Längenmaßstab 1 mm $= p$ cm und damit der Flächenmaßstab der Seileckfläche 1 mm$^2 = p^2$ cm^2, der Flächenmaßstab für den Kräftezug 1 mm $= q$ cm^2, so wird

$$J_s = 2 \cdot H\,\text{mm} \cdot \frac{q\,\text{cm}^2}{1\,\text{mm}} \cdot (f - f')\,\text{mm}^2 \cdot \frac{p^2\,\text{cm}^2}{1\,\text{mm}^2}.$$

Z. B. Längenmaßstab 1 mm $= 0{,}5$ cm; 1 mm$^2 = 0{,}25$ cm^2; Flächenmaßstab 1 mm $= 5$ cm^2; $H = 21$ mm; $f - f' = 140$ mm^2,

$$J_s = 2 \cdot 21\,\text{mm} \cdot \frac{5\,\text{cm}^2}{1\,\text{mm}} \cdot 140\,\text{mm} \cdot \frac{0{,}25\,\text{cm}^2}{1\,\text{mm}^2} = 7350\,\text{cm}^4.$$

Verfahren von Nehls (Abb. 68). Es sollen die auf die Schwerachsen x und y bezogenen Trägheitsmomente bestimmt werden. Der Querschnitt ist auf Millimeterpapier gezeichnet; man wählt ein beliebiges Achsenkreuz uv so, daß die Abstände a und b der äußersten Punkte beliebig, aber der Einfachheit halber gleich groß sind. Gewählt ist $a = b = 100$ mm.

Mit $dF = \eta \cdot du$ und $dF = \xi \cdot dv$ wird

$$u_0 = a \cdot \frac{\int \frac{u}{a} \cdot \eta \cdot du}{F} \quad \text{und} \quad v_0 = a \cdot \frac{\int \frac{v}{a} \cdot \xi \cdot dv}{F}.$$

Die äquatorialen Trägheitsmomente, bezogen auf die Achsen u und v sind

$$J_u = \int dF \cdot v^2 \text{ und } J_v = \int dF u^2.$$

Die Erweiterung mit a^2 ergibt

$$J_u = a^2 \cdot \int \frac{v^2}{a^2} \cdot \xi \cdot dv \quad \text{und} \quad J_v = a^2 \cdot \int \frac{u^2}{a^2} \cdot \eta \cdot du.$$

Die Integrale lassen sich durch Flächen darstellen, die von den Kurven

$$z_1 = \frac{v}{a} \cdot \xi \quad \text{und} \quad z_1' = \frac{u}{a} \cdot \eta,$$

$$z_2 = \frac{v^2}{a^2} \cdot \xi \quad \text{und} \quad z_2' = \frac{u^2}{a^2} \cdot \eta$$

begrenzt werden. Es empfiehlt sich, die Werte z zu berechnen und von den Achsen I und II senkrecht nach unten bzw. wagerecht nach

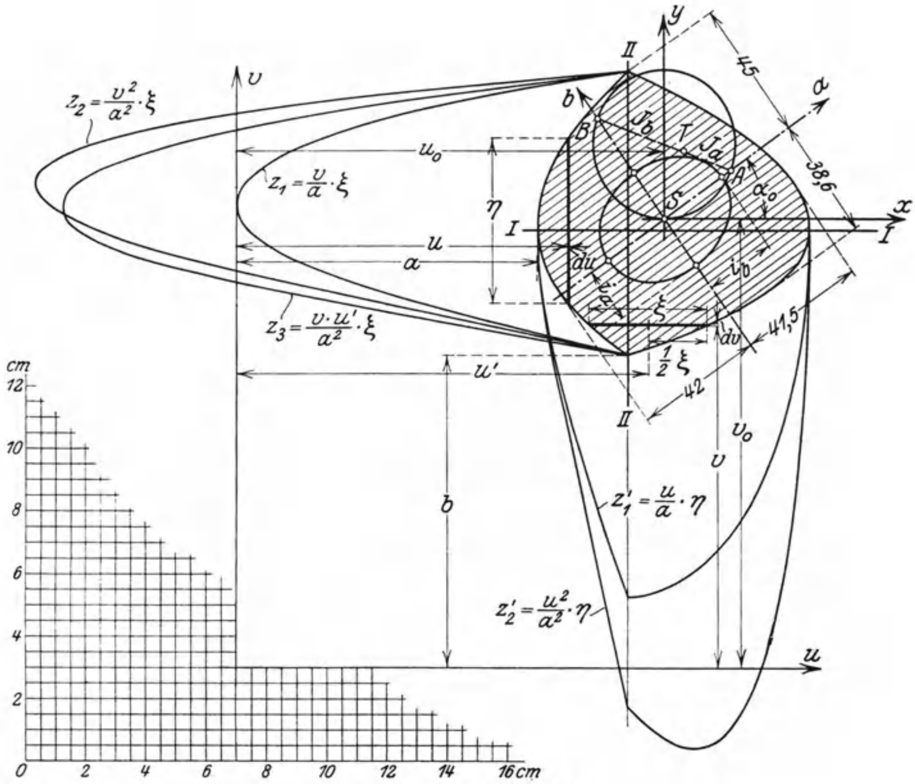


Abb. 68. Verfahren von Nehls.

links abzutragen. Die Achsen I und II sind parallel u und v, sonst aber beliebig. Hat man auf Millimeterpapier gezeichnet, so erhält man die Flächeninhalte genügend genau, indem man die Kurve durch Parallele zur Ordinatenachse unterteilt, und in jedem von zwei aufeinander folgenden Ordinaten und einem Teil der Kurve begrenzten Flächenstreifen eine Parallele zur Abszissenachse so legt, daß die schraffierten Flächen inhaltsgleich sind (Abb. 69). Es ist dann der Inhalt des Rechtecks gleich dem Inhalt des Flächenstreifens und hiernach leicht zu berechnen. In Abb. 68 sind die nachstehenden Werte u und v angenommen worden, es wurden die Größen ξ, η und z ermittelt und hiernach die Inhalte der Flächenstreifen berechnet. Der Flächeninhalt des Querschnittes ist gleich 5400 mm² (s. S. 84)

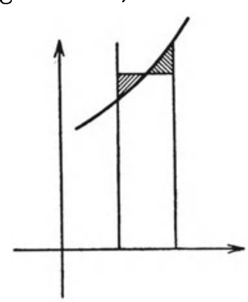
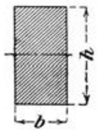
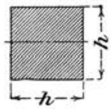
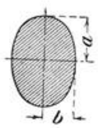
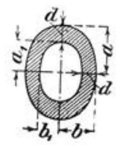
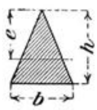
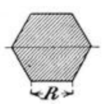
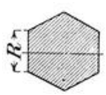
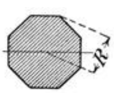
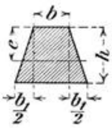
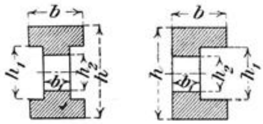
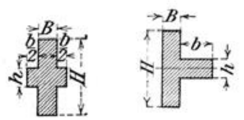
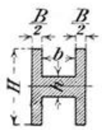
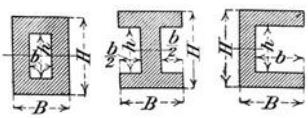
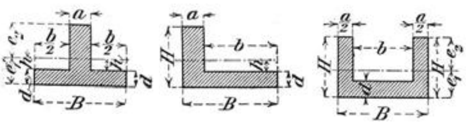
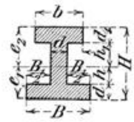
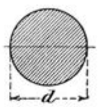
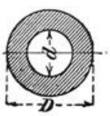


Abb. 69. Inhaltsbestimmung.

Tafel 1. Äquatoriale Trägheitsmomente und Widerstandsmomente üblicher Querschnittsformen.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
1.		$J=\frac{bh^3}{12}.$	$W=\frac{bh^2}{6}.$
2.		$J=\frac{h^4}{12}$	$W=\frac{h^3}{6}.$
3.		$J=\frac{\pi a^3 b}{4}.$	$W=\frac{\pi a^2 b}{4}.$
4.		$J=\frac{\pi}{4}(a^3b-a_1^3b_1)$ $\sim\frac{\pi}{4}a^2(a+3b)\,d.$	$W\sim\frac{\pi}{4}a(a+3b)\,d.$
5.		$J=\frac{bh^3}{36}.$	$W=\frac{bh^2}{24}$, für $e=\frac{2}{3}h.$
6.		$J=\frac{5\sqrt{3}}{16}R^4$ $=0{,}5413\,R^4.$	$W=\frac{5}{8}R^3.$
7.			$W=0{,}5413\,R^3.$
8.		$J=\frac{1+2\sqrt{2}}{6}R^4$ $=0{,}6381\,R^4.$	$W=0{,}6906\,R^3.$

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
9.		$J = \frac{6\,b^2 + 6\,b\,b_1 + b_1^2}{36\,(2\,b + b_1)}\,h^3.$	$W = \frac{6\,b^2 + 6\,b\,b_1 + b_1^2}{12\,(3\,b + 2\,b_1)}\,h$ für $e = \frac{1}{3}\,\frac{3\,b + 2\,b_1}{2\,b + b_1}\,h.$
10.		$J = \frac{b\,(h^3 - h_1^3) + b_1\,(h_1^3 - h_2^3)}{12}.$	$W = \frac{b\,(h^3 - h_1^3) - b_1\,(h_1^3 - h_2^3)}{6}.$
11.	 	$J = \frac{B H^3 + b h^3}{12}.$	$W = \frac{B H^3 + b h^3}{6\,H}.$
12.		$J = \frac{B H^3 - b h^3}{12}.$	$W = \frac{B H^3 - b h^3}{6\,H}.$
13.		$J = \frac{1}{3}\,(B e_1^3 - b h^3 + a e_2^3)$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{a H^2 + b d^2}{a H + b d};$ $e_2 = H - e_1.$	
14.		$J = \frac{1}{3}\,(B e_1^3 - B_1 h^3 + b e_2^3 - b_1 h_1^3)$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{a H^2 + B_1 d^2 + b_1 d_1\,(2\,H - d_1)}{a H + B_1 d + b_1 d_1}.$	
15.		$J = \frac{\pi d^4}{64}.$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \sim 0{,}1\,d^3.$
16.		$J = \frac{\pi}{64}\,(D^4 - d^4).$	$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}.$

u mm	$\frac{u}{a}$	η mm	$z_1' = \eta \cdot \frac{u}{a}$ mm	$z_2' = \eta \cdot \frac{u^2}{a^2}$ mm	F_1' mm²	F_2' mm²
190	1 9	0	0	0		
180	1,8	36,6	65,9	118,5	464	812
160	1,6	63,75	102	163,2	1744	2944
140	1,4	82,2	115,1	161,1	2194	3287
120	1,2	73,5	88,2	105,8	2188	
100	1	0	0	0	1084	4115
					7674	11158

$$u_0 = a \cdot \frac{F_1'}{F} = 100 \cdot \frac{7674}{5400} = 142{,}1 \text{ mm};$$

$$J_v = F_2' \cdot a^2 = 111{,}58 \cdot 10^2 = 11158 \text{ cm}^4.$$

v mm	$\frac{v}{a}$	ξ mm	$z_1 = \xi \cdot \frac{v}{a}$ mm	$z_2 = \xi \cdot \frac{v^2}{a^2}$ mm	F_1 mm²	F_2 mm²
190	1,9	0	0	0		
180	1,8	32,4	58,4	105	310	575
160	1,6	75,6	121	193,5	1905	3214
140	1,4	90	126	176,3	2560	3825
120	1,2	67,5	81	97,2	2150	
100	1	0	0	0	840	3771
					7765	11385

$$v_0 = a \cdot \frac{F_1}{F} = 100 \cdot \frac{7765}{5400} = 143{,}8 \text{ mm},$$

$$J_u = F_2 \cdot a^2 = 113{,}85 \cdot 10^2 = 11385 \text{ cm}^4.$$

Für das Achsenkreuz x, y mit dem Schwerpunkt S als Koordinatenanfangspunkt ergeben sich

$$J_x = J_u - F \cdot v_0^2 = 11385 - 54 \cdot 14{,}38^2 = 219 \text{ cm}^4$$
$$J_y = J_v - F \cdot u_0^2 = 11158 - 54 \cdot 14{,}21^2 = 254 \text{ cm}^4.$$

Tafel 2. Widerstandsmomente in cm³ von Bauhölzern (Handelsware).

Breite in cm	Höhe in cm											
	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
8	85,3	133,3										
10	106,7	166,7	240	326,7								
12		200	288	392	512							
14		281,3	336	457,3	597,3	756	933,3					
16			384	522,7	682,7	864	1067	1291				
18				588	768	972	1200	1452	1728			
20				653,3	853,3	1080	1333	1613	1920	2253		
22					938,6	1188	1467				2875	
24						1296	1600		2304	2704		3600
26							1733		2496	2929	3397	
28								2259				4200
30									2880		3920	

Tafel 3. Kreisförmiger Querschnitt.

J = äquatoriales Trägheitsmoment; W = Widerstandsmoment.

d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332086	13023	101	5108055	101150
2	0,7854	0,7854	52	358908	13804	102	5313378	104184
3	0,976	2,651	53	387323	14616	103	5524830	107278
4	12,57	6,283	54	417393	15459	104	5742532	110433
5	30,68	12,27	55	449180	16334	105	5966604	113650
6	63,62	21,21	56	482750	17241	106	6197171	116928
7	117,9	33,67	57	518166	18181	107	6434357	120268
8	201,1	50,27	58	555497	19155	108	6678287	123672
9	322,1	71,57	59	594810	20163	109	6929087	127139
10	490,9	98,17	**60**	636172	21206	**110**	7186886	130671
11	718,7	130,7	61	679651	22284	111	7451813	134267
12	1018	169,6	62	725332	23398	112	7723997	137929
13	1402	215,7	63	773272	24548	113	8003571	141656
14	1886	269,4	64	823550	25736	114	8290666	145450
15	2485	331,3	65	876240	26961	115	8585417	149312
16	3217	402,1	66	931420	28225	116	8887958	153241
17	4100	482,3	67	989166	29527	117	9198425	157238
18	5153	572,6	68	1049556	30869	118	9516956	165440
19	6397	673,4	69	1112660	32251	119	9843689	165440
20	7854	785,4	**70**	1178588	33674	**120**	10178763	169646
21	9547	909,2	71	1247393	35138	121	10522320	173923
22	11499	1045	72	1319167	36644	122	10874501	178271
23	13737	1194	73	1393995	38192	123	11235450	182690
24	16286	1357	74	1471963	39783	124	11605311	187182
25	19175	1534	74	1553156	41417	125	11984229	191748
26	22432	1726	76	1637662	43096	126	12372350	196387
27	26087	1932	77	1725571	44820	127	12769824	201100
28	30172	2155	78	1816972	46589	128	13176799	205887
29	34719	2394	79	1911967	48404	129	13593424	210751
30	39761	2651	**80**	2010619	50265	**130**	14019852	215690
31	45333	2925	81	2113051	52174	131	14456235	220706
32	51472	3217	82	2219347	54130	132	14902727	225799
33	58214	3528	83	2329605	56135	133	15359483	230970
34	65597	3859	84	2443920	58189	134	15826658	236219
35	73662	4209	85	2562392	60292	135	16204411	241547
36	82448	4580	86	2685120	62445	136	16792899	246954
37	91998	4973	87	2812205	64648	137	17292282	252442
38	102354	5387	88	2943748	66903	138	17802721	258010
39	113561	5824	89	3079853	69210	139	18324378	263660
40	125664	6283	**90**	3220623	71569	**140**	18857416	269392
41	138709	6766	91	3366165	73982	141	19401999	275206
42	152745	7274	92	3516586	76448	142	19958294	281103
43	167820	7806	93	3671992	78968	143	20526466	287083
44	183984	8363	94	3832492	81542	144	21006684	293148
45	201289	8946	95	3998198	84173	145	21699116	299298
46	219787	9556	96	4169220	86859	146	22303933	305533
47	239531	10193	97	4345671	89601	147	22921307	311855
48	260576	10857	98	4527664	92401	148	23551409	318262
49	282979	11550	99	4715315	95259	149	24194414	324757
50	306796	12272	**100**	4908738	98175	**150**	24850496	331340

4. Die einfachen Belastungsfälle.

a) Der Freiträger.

Einzellast am Ende (Abb. 70). Das Freimachen des Trägers erfordert in A einen Auflagerdruck $A = P$ und ein Einspannungsmoment $M_A = P \cdot l$, das von der Einmauerung hergegeben werden muß. Den Verlauf der Querkraftlinien erhält man aus der Untersuchung eines beliebigen Schnittes im Abstande x vom freien Ende; es ist

$$Q_x = P = \text{Constans},$$

d. h. die Querkraftlinie ist eine Parallele zur Achse im Abstande P. Als Biegungsmoment im Punkte x erhalten wir

$$M_x = P \cdot x;$$

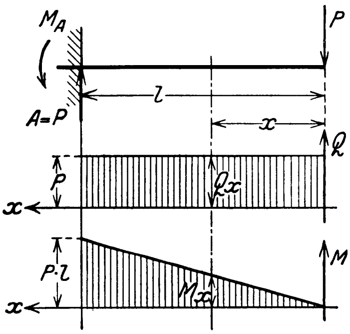


Abb. 70. Freiträger mit Einzellast.

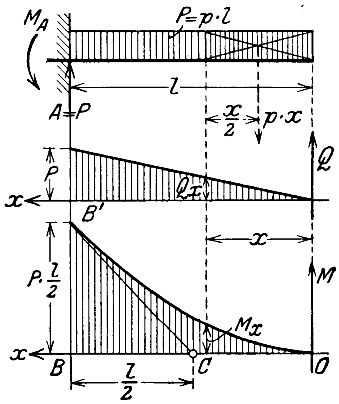


Abb. 71. Freiträger mit gleichförmig verteilter Belastung.

die Momentenlinie ist eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Richtungskonstanten P. Sie ist bestimmt durch

$$M_x = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } M_{\max} = P \cdot l \text{ für } x = l.$$

Als Maßstäbe der Darstellung sind erforderlich

der	Längenmaßstab	1 mm	$= a$ cm,
„	Kräftemaßstab	1 „	$= b$ kg,
„	Momentenmaßstab . . .	1 „	$= c$ cmkg.

Gleichförmig verteilte Last (Abb. 71). Das Freimachen erfordert wieder in A einen Auflagerdruck $A = P$ und ein Einspannungsmoment $M = P \cdot l/2$, da wir uns die Gesamtlast P im Schwerpunkt der die Belastung darstellenden Fläche angreifen denken. Für den Schnitt x ist

$$Q_x = p \cdot x = P \cdot \frac{x}{l},$$

wobei $p = \frac{P}{l}$ die Belastung in kg/cm bedeutet.

Die Querkraftlinie ist eine Schräge durch den Koordinatenanfangspunkt und ist bestimmt durch

$$Q_x = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } Q_x = P \text{ für } x = l.$$

Das Biegungsmoment im Punkte x wird durch die auf der Strecke x liegende Last px hervorgerufen, die wir uns im Schwerpunkte, d. h. in der Entfernung $\frac{x}{2}$ vom Schnitt, angreifen denken; es wird demnach

$$M_x = p x \cdot \frac{x}{2} = P \cdot \frac{x^2}{2l}.$$

Die Momentenlinie ist eine Parabel, deren Scheitel ($x = 0$) am Ende des Trägers liegt. Einen zweiten Punkt der Kurve erhalten wir für $x = l$:

$$M_{\max} = pl \cdot \frac{l}{2} = P \cdot \frac{l}{2}.$$

Die Parabel wird am bequemsten mit Hilfe der Tangente in B' (Abb. 71) aufgezeichnet, die die Achse in C ($BC = l/2$) schneidet. Meist wird es genügen, die Kurve freihändig von O so nach B' zu ziehen, daß sie OC und BC berührt. Das größte Moment tritt an der Einspannstelle auf.

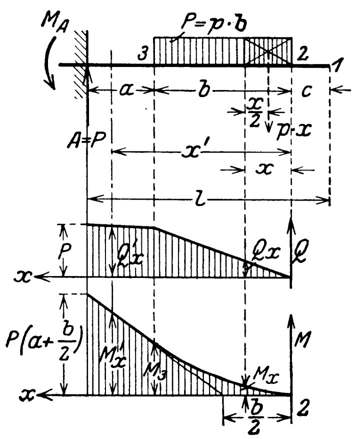


Abb. 72. Freiträger mit Streckenlast.

Streckenlast (Abb. 72). Erstreckt sich die gleichförmig verteilte Last nicht über den ganzen Träger, so nennen wir sie Streckenlast und geben sie in kg/m (kg/cm; t/m; t/cm) an. Das Freimachen erfordert in A einen Auflagerdruck $A = P$ und ein Einspannmoment

$$M = P\,(a + b/2).$$

Für den Schnitt x ist

$$Q_x = p \cdot x = P \cdot \frac{x}{b},$$

da px gleich der Summe sämtlicher rechts vom Schnitt angreifenden Kräfte ist. Zwischen 1 und 2 ist $Q = 0$, da keine Kräfte rechts von 2 angreifen. Demnach

$$Q_2 = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } Q_3 = P \text{ für } x = b;$$

Zwischen 3 und A bleibt Q unverändert, da keine neue Kraft hinzutritt; dieser Teil der Querkraftlinie ist eine Parallele zur Achse im Abstande P. Zwischen 3 und 2 ist die Querkraftlinie eine geneigte Gerade, die die Achse im Koordinatenanfangspunkt schneidet.

Im Teil 1—2 treten keine Biegungsmomente auf. Im Schnitt x ist

$$M_x = p x \cdot \frac{x}{2} = \frac{P \cdot x^2}{2b},$$

die Kurve ist eine Parabel mit dem Scheitel in 2 ($x = 0$) und der Ordinate

$$M_3 = \frac{P \cdot b}{2} \quad \text{für} \quad x = b.$$

Ein Punkt x' zwischen A und 3 erfährt das Biegungsmoment

$$M_x' = p b\left(x' - \frac{b}{2}\right) = P\left(x' - \frac{b}{2}\right);$$

$$x' = b \text{ liefert } M_3 = \frac{P \cdot b}{2};$$

$$x' = a + b \text{ liefert } M_A = P \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right);$$

zwischen 3 und A ist die Momentenlinie eine Schräge, die die Achse in $x' = b/2$ schneidet und somit Tangente im Punkte 3 an die Parabel ist.

Das größte Moment tritt an der Einspannstelle auf.

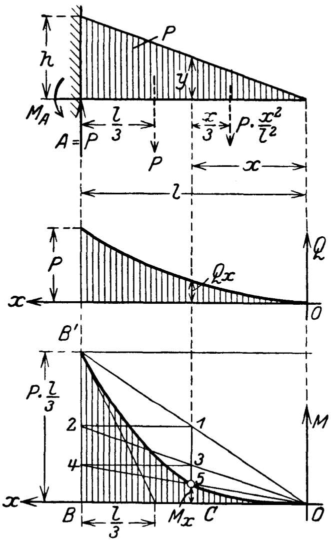


Abb. 73. Freiträger mit dreieckförmiger Last.

Dreieckförmige Last (Abb. 73). Eine stetig wachsende Last P ist durch das Dreieck mit der Grundlinie l und der Höhe h dargestellt und wird im Schwerpunkt dieses Dreiecks angreifend gedacht. Das Freimachen erfordert wie stets beim Freiträger den Auflagerdruck $A = P$ und das Einspannungsmoment $M_A = P \cdot l/3$.

Die Querkraft Q_x im Schnitt x ist gleich der auf der Strecke x liegenden Last. Ist P dargestellt durch den Flächeninhalt des Dreiecks über l, so wird

$$P : Q_x = \frac{1}{2} l \cdot h : \frac{1}{2} x \cdot y\,.$$

Aus $h : y = l : x$ folgt

$$Q_x = P \cdot \frac{x^2}{l^2}\,.$$

Die Querkraftlinie ist eine Parabel mit dem Scheitel in O und der Ordinate $Q_A = P$ in A.

Das Biegungsmoment im Punkte x ist als Moment der Last über x

$$M_x = P \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3};$$

die Momentenlinie ist eine kubische Parabel mit dem Scheitel in O und der Ordinate

$$M_{\max} = P \cdot \frac{l}{3}$$

in A. Einen Punkt der Kurve erhalten wir wie folgt: projiziere den auf OB' liegenden Punkt 1 wagerecht nach links (2), verbinde 2 mit O; der Schnittpunkt 3 mit der Senkrechten durch x wird ebenfalls wagerecht nach links auf BB' projiziert (4), dann bestimmt $O\,4$ auf der Senkrechten durch x den Punkt 5 als Kurvenpunkt.

Das größte Moment tritt an der Einspannstelle auf.

b) Der Träger auf zwei Stützen.

Einzellast in der Mitte (Abb. 74). Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte erfordert wegen der Symmetrie $A = B = P/2$. Im Schnitt x ist

$$Q_x = A = P/2,$$

also die Querkraftlinie eine Parallele zur Achse im Abstande $P/2$; sie ist brauchbar zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l/2$. Unmittelbar links von m ist $Q_m = A = P/2$, unmittelbar rechts von m ist $Q_m = A - P = P/2 - P = -P/2$; die Querkraft springt von $+P/2$ auf $-P/2$, bleibt zwischen m und B unverändert und muß in B wegen

$$Q_B = A - P + B$$

gleich Null sein. Die Querkraftlinie besteht aus zwei getrennten Teilen am und $m'b$, die beide parallel zur Achse laufen (Abb. 74b).

Das Biegungsmoment im Punkte x des Trägers ist

$$M_x = A \cdot x = P/2 \cdot x,$$

die Momentenlinie eine Schräge durch a (Abb. 74c), da für $x = 0$ auch $M_x = 0$ wird. Die Ordinate im Punkte m wird wegen $x = l/2$

$$M_m = P/2 \cdot l/2 = \frac{P \cdot l}{4}.$$

Für einen Schnitt im Abstande x' von B wird

$$M'_x = B \cdot x' = \frac{P}{2} \cdot x'.$$

Die Momentenlinie ist wegen $M_x' = 0$ für $x' = 0$ eine Schräge durch b, die in m die Ordinate

$$M_m = B \cdot l/2 = \frac{Pl}{4}$$

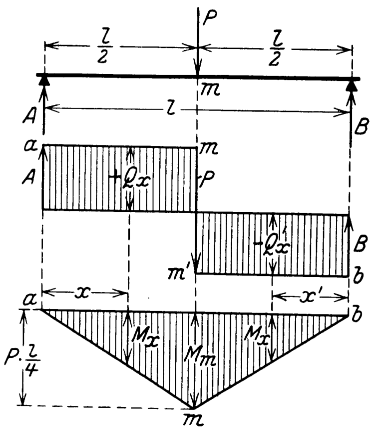


Abb. 74. Zwei Stützen. Einzellast in der Mitte.

hat. Das heißt, die beiden Äste der Momentenlinie schneiden sich senkrecht unter m. Das größte Moment tritt in m auf; es liegt da, wo die Querkraft das Vorzeichen ändert.

Beliebige Einzellast (Abb. 75). Die 3. Gleichgewichtsbedingung, Summe, sämtlicher Momente gleich Null, ergibt für B als Drehpunkt

$$A \cdot l - P \cdot b = 0; \quad \text{daraus} \quad A = P \cdot \frac{b}{l}.$$

Mit A als Drehpunkt erhält man

$$B \cdot l - P \cdot a = 0; \quad \text{daraus} \quad B = P \cdot \frac{a}{l}.$$

Die Querkraft im Schnitt x ist

$$Q_x = A,$$

demnach die Querkraftlinie eine Parallele zur Achse im Abstande A, sie ist brauchbar von $x = 0$ bis $x = a$, da nur für diesen Teil A die einzige links von m angreifende Kraft ist. Ein Schnitt rechts von m liefert

$$Q_x' = -B,$$

also eine Querkraftlinie, die parallel zur Achse im Abstande $-B$ läuft; in m ist der bekannte Sprung von $+A$ auf $-B$ (vgl. S. 67).

Das Biegungsmoment im Punkte x ist

$$M_x = A \cdot x = P \cdot \frac{b}{l} \cdot x,$$

die Momentenlinie eine Schräge durch a (Abb. 75c), die zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ brauchbar ist. Als Moment im Punkte m erhalten wir wegen $x = a$

$$M_m = P \frac{ab}{l}.$$

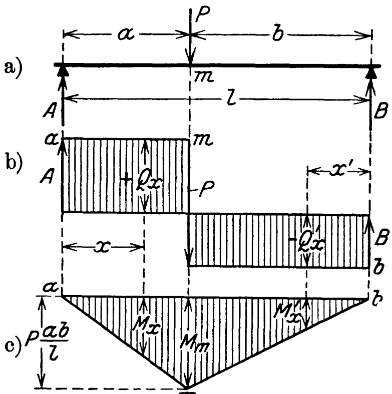


Abb. 75. Zwei Stützen. Beliebige Einzellast.

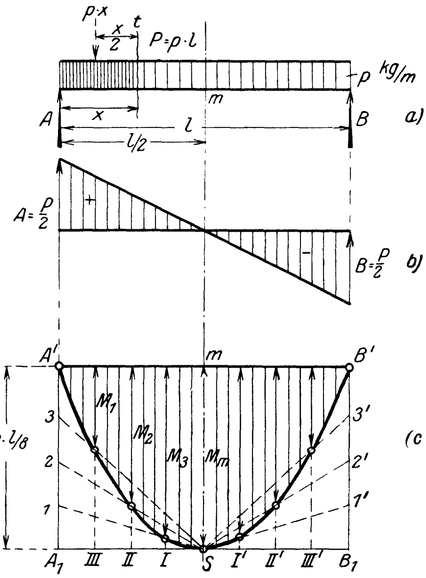


Abb. 76. Zwei Stützen. Gleichförmige Belastung.

Ein Schnitt im Abstande x' von B liefert

$$M_x' = B \cdot x' = P \frac{a}{l} \cdot x',$$

also als Momentenlinie eine Schräge durch b wegen $M_x' = 0$ für $x' = 0$. Für $x' = b$ wird

$$M_m' = P \cdot \frac{ab}{l};$$

die beiden Äste der Momentenlinie schneiden sich senkrecht in m; das größte Moment tritt in m auf, und wir beachten, daß auch hier die Querkraft das Vorzeichen ändert.

Gleichförmig verteilte Last (Abb. 76). Wegen der Symmetrie wird $A = B = \frac{p \cdot l}{2} = \frac{P}{2}$. Die Querkraft Q_x im Punkte x des Trägers ist als Summe sämtlicher Kräfte links vom betrachteten Punkt

$$Q_x = A - px = \frac{P}{2} - p \cdot x,$$

da die Teillast über der Strecke x gleich $p \cdot x$ ist. Die Querkraftlinie ist eine Schräge, von der wir am bequemsten zwei Punkte bestimmen:

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } Q_x = Q_A = \frac{P}{2},$$

$$\text{für } x = l \text{ wird } Q_x = Q_B = -\frac{P}{2}.$$

Tragen wir unter Zugrundelegung eines Kräftemaßstabes senkrecht unter A die Ordinate $+\frac{P}{2}$, senkrecht unter B die Ordinate $-\frac{P}{2}$ auf, so ist die Verbindungslinie die Querkraftlinie des Trägers AB.

Als Biegungsmoment im Punkte x erhalten wir

$$M_x = A \cdot x - p x \cdot \frac{x}{2} = \frac{pl \cdot x}{2} - \frac{p x^2}{2},$$

da die Resultierende der Teillast über der Strecke x im Schwerpunkte des doppelt gestrichelten Rechtecks angreift. Die Gleichung der Momentenlinie stellt eine Parabel dar, deren Scheitel S senkrecht unter m liegt. Die Größe der Scheitelordinate M_m erhalten wir, wenn wir in der Gleichung der Momentenlinie $x = l/2$ einsetzen, zu

$$M_m = \frac{pl^2}{4} - \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{pl^2}{8} = \frac{P \cdot l}{8}.$$

In den Punkten A und B sind die Momente gleich Null, so daß für den Entwurf der Momentenlinie der Scheitel S und die Punkte A' und B' (Abb. 76c) zur Verfügung stehen. Wir teilen SA_1 und A_1A' in dieselbe Anzahl gleicher Teile und ziehen das Strahlenbündel $S\,1$, $S\,2$, $S\,3$, ..., dann schneiden die Senkrechten durch I, II, III ... die zugehörigen Strahlen in Punkten der Kurve. Mit genügender Genauigkeit zeichnen wir die Parabel freihändig mit Hilfe der Tangenten $A_1 B_1$, $A'II$ und $B'II'$.

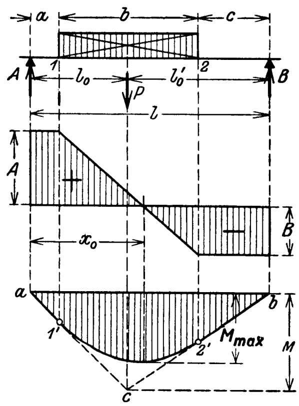


Abb. 77. Zwei Stützen. Streckenlast.

Das größte Moment tritt in der Mitte auf, es ist

$$M_{\max} = M_m = \frac{P \cdot l}{8}.$$

Streckenlast (Abb. 77). Wir denken uns, die Gesamtlast P greife im Schwerpunkt des sie darstellenden Rechtecks an und erhalten aus der 3. Gleichgewichtsbedingung für B als Drehpunkt

$$A \cdot l - P l_0' = 0, \quad \text{mithin} \quad A = P \cdot \frac{l_0'}{l}.$$

In gleicher Weise ergibt sich für A als Drehpunkt

$$B \cdot l - P \cdot l_0 = 0, \quad \text{folglich} \quad B = P \cdot \frac{l_0}{l}.$$

Die Querkraftlinie ist bestimmt durch $Q_A = A$; sie verläuft zwischen A und 1 wagerecht, da nichts an Kräften hinzutritt. $Q_B = -B$ ist die

Querkraft in B; die Querkraftlinie verläuft zwischen B und 2 ebenfalls wagerecht, weil Q unverändert bleibt. Zwischen 1 und 2 ist sie eine Schräge, entsprechend der gleichförmig verteilten Last über b; sie schneidet die x-Achse im Abstande x_0 von A, und wir schließen aus den vorangegangenen Betrachtungen, daß in diesem Punkte das größte Biegungsmoment auftritt.

Wäre P eine Einzelkraft, dann wäre das Moment im Schwerpunkte der gleichförmig verteilten Last

$$M = P \cdot \frac{l_0 \cdot l_0'}{l}$$

und die Momentenfläche durch ca und cb begrenzt. Die gleichförmige Verteilung über b bedingt zwischen 1 und 2 parabolischen Verlauf der Momentenlinie, für die die Geraden $c\,1'$ und $c\,2'$ Tangenten in den Punkten $1'$ und $2'$ sind.

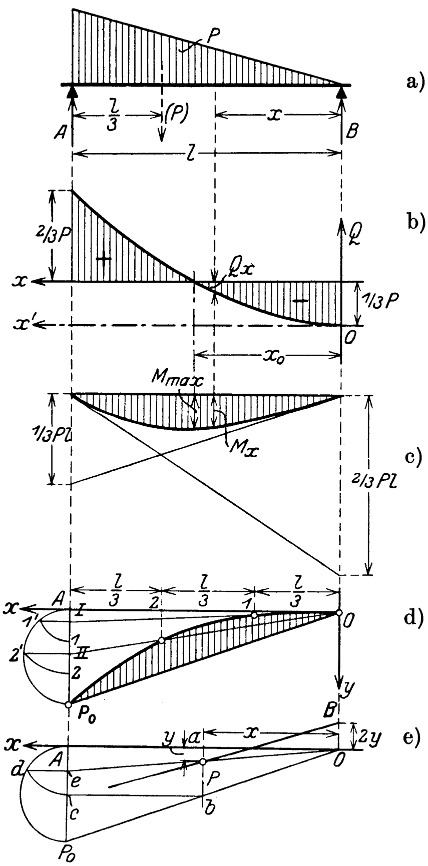


Abb. 78. Zwei Stützen. Dreiecklast.

Ist $p = P : b$ die Belastung der Längeneinheit, so findet man die Lage des größten Biegungsmomentes aus der Bedingung

$$A - p\,(x_0 - a) = 0$$

und $M_{\max}$ selbst zu

$$M_{\max} = A \cdot x_0 - p \cdot \frac{(x_0 - a)^2}{2}\,.$$

Dreieckförmige Last (Abb. 78). Zur Bestimmung der Auflagerdrucke A und B denken wir uns die Gesamtlast P im Schwerpunkte des sie darstellenden Dreiecks angreifen, dann ergibt sich

$$A = {}^2/_3\,P;\; B = {}^1/_3\,P\,.$$

Die Querkraft Q_x im Schnitt x ist

$$Q_x = -B + \frac{Px^2}{l^2} = -\frac{1}{3}P + P\frac{x^2}{l^2}\,,$$

die Querkraftlinie ist eine Parabel mit dem Scheitel O (Abb. 78b), Scheiteltangente ist die x'-Achse. Da für $x = 0$

$$Q_x = Q_B = -B$$

ist, hat O den Abstand $-B = -{}^1/_3 P$ von der x-Achse. Einen zweiten Punkt der Parabel erhalten wir für $x = l$, es wird

$$Q_x = Q_A = -B + P = \frac{2}{3}P;$$

die Querkraftfläche liegt teils oberhalb, teils unterhalb der Achse, deren

Schnittpunkt mit der Querkraftlinie durch die Bedingung

$$Q_x = 0$$

bestimmt ist. Aus

$$Q_x = -\frac{1}{3} P + P \frac{x^2}{l^2} = 0$$

folgt

$$x_0 = \frac{l}{3}\sqrt{3}.$$

Nach den Beobachtungen, die wir bisher gemacht haben, vermuten wir, daß in diesem Punkte das größte Biegungsmoment auftritt.

Das Biegungsmoment im Punkte x wird

$$M_x = B \cdot x - P \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3},$$

$$= \frac{1}{3} P \cdot x - P \frac{x^3}{3l^2},$$

$$M_x = \frac{1}{3} P \cdot l \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Wir wählen diese Form der Gleichung, um M_x als Funktion von $\frac{x}{l}$ auffassen zu können und machen uns dadurch unabhängig von der Länge l des Trägers. Die Gleichung der Momentenlinie ist die Gleichung einer parabolischen Kurve dritten Grades, für die wir zweckmäßig eine Reihe von Punkten berechnen. Da der Klammerausdruck eine unbenannte Zahl ist, berechnen wir ein für allemal seine Größe für zehn Werte $x : l$, indem wir die Stützweite in 10 gleiche Teile teilen, und erhalten

Zahlentafel.

$\frac{x}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{x^3}{l^3}$	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729
$\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171

Mit Hilfe dieser Zahlentafel errechnen wir für die zehn Punkte des Trägers die Biegungsmomente, tragen sie unter Zugrundelegung eines Momentenmaßstabes von der Form 1 mm $= a$ cmkg (mkg oder mt) auf und verbinden die so erhaltenen Punkte freihändig durch eine stetige Kurve.

Natürlich läßt sich die Kurve auch zeichnerisch entwickeln. Wir schreiben

$$M_x = \frac{1}{3} Pl \cdot \frac{x}{l} - \frac{1}{3} Pl \cdot \frac{x^3}{l^3} \quad \text{oder} \quad y = f \cdot \frac{x}{l} - f \cdot \frac{x^3}{l^3},$$

wobei wir der Abkürzung wegen $^1/_3\, Pl = f$ und $M_x = y$ setzen; dann stellt sich y als die Differenz zweier Funktionen dar

$$y = y_1 - y_2,$$

von denen

$$y_1 = f \cdot \frac{x}{l}$$

eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt O ist, die für $x = l$ die Ordinate $AP_0 = f$ hat (Abb. 78d).

$$y_2 = f \cdot \frac{x^3}{l^3}$$

ist eine kubische Parabel, deren Scheitel in O liegt, und die auch durch den Punkt P_0 geht. Die Differenz der Ordinaten gibt y, die von ihnen gebildete Fläche ist durch Strichelung hervorgehoben. Abb. 78c zeigt die Momentenfläche, bei der die Ordinaten der gestrichelten Fläche von einer Wagerechten aus abgetragen sind.

Da die kubische Parabel für das Aufzeichnen von Biegungslinien infolge der Belastung durch Einzelkräfte Bedeutung hat, soll auf sie näher eingegangen werden. Im Achsenkreuz xy der Abb. 78d sei P_0 ein Punkt der kubischen Parabel, deren Scheitel im Koordinatenanfangspunkt O liegt. Errichte über AP_0 einen Halbkreis, dessen Durchmesser in eine beliebige Anzahl gleicher Teile geteilt wird. In dieselbe Anzahl gleicher Teile werde die Abszisse x geteilt. Schlage um A mit den Halbmessern $A\,1$, $A\,2$ ... konzentrische Kreise, die den Halbkreis über AP_0 in den Punkten $1'$, $2'$ ... schneiden; I, II ... sind die Horizontalprojektionen dieser Punkte auf der Senkrechten AP_0. Ziehe das Strahlenbündel OI, OII ..., das die Senkrechten durch 1, 2 ... in Punkten der kubischen Parabel schneidet. Man erhält einen beliebigen Punkt P der Kurve, dessen Abszisse Oa ist, in folgender Weise: ziehe (Abb. 78e) $ab \perp OA$, bc parallel zur x-Achse, schlage den Kreisbogen cd mit Ac als Halbmesser, ziehe de parallel zur x-Achse, dann schneidet Oe die Senkrechte ab im Punkte der gesuchten Kurve.

Tangente an die Kurve im Punkte P wird die Verbindungslinie BP, wenn $OB = 2\,y$ ist.

Aus der Gleichung für das Biegungsmoment

$$M_x = \frac{1}{3} Pl \cdot \frac{x}{l} - \frac{1}{3} Pl \cdot \frac{x^3}{l^3}$$

erhalten wir den Ort des größten Momentes, wenn wir den ersten Differentialquotienten $\frac{dM_x}{dx}$ gleich Null setzen. Die Differentiation liefert

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{3} P - P \cdot \frac{x^2}{l^2} = 0; \quad \text{folglich} \quad x = x_0 = \frac{l}{3}\sqrt{3}\,,$$

d. h. der Ort des größten Biegungsmomentes stimmt mit dem Querkraft-Nullpunkt überein. Durch Vergleich mit Q_x stellen wir fest, daß $\frac{dM_x}{dx}$ gleich Q_x ist. Das entgegengesetzte Vorzeichen erklärt sich aus unserer Vereinbarung, das Vorzeichen der Querkräfte negativ zu wählen, wenn sie bei der Berechnung von B aus nach oben gerichtet sind.

Daß Querkraft-Nullpunkt und Ort des größten Biegungsmomentes übereinstimmen, erhält somit durch die mathematische Nachprüfung seine Bestätigung. Wir dürfen annehmen, daß diese Beziehung allgemeine Gültigkeit hat.

Teilweise dreieckförmige Last (Abb. 79). Aus der Momentengleichung für A als Drehpunkt ergibt sich $B = P \cdot \frac{a}{3l}$, aus $A - P + B = 0$ folgt $A = P - B = P - P\frac{a}{3l}$. Für den Trägerteil b ist die Querkraft

$$Q_x = -B = \text{Constans},$$

also die Querkraftlinie eine Parallele zur x-Achse im Abstande $-B$. Für den belasteten Teil erhalten wir als Querkraft im Punkte x

$$Q_x = -B + P \cdot \frac{x^2}{a^2},$$

die Querkraftlinie ist eine Parabel mit dem Scheitel $x = 0$ und der Ordinate in A für $x = a$

$$Q_A = -B + P = A.$$

Sie wird in gleicher Weise entworfen wie in Abb. 78b. Das Biegungsmoment im Punkte x ist

$$M_x = \frac{P \cdot a}{3} \cdot \frac{b+x}{l} - \frac{P \cdot a}{3} \cdot \frac{x^3}{a^3}.$$

Wir setzen der Einfachheit halber $\frac{P \cdot a}{3} = f$, $M_x = y$ und schreiben

$$y = y_1 - y_2,$$

so daß y die Differenz zweier Funktionen ist, von denen

$$y_1 = f \cdot \frac{b+x}{l}$$

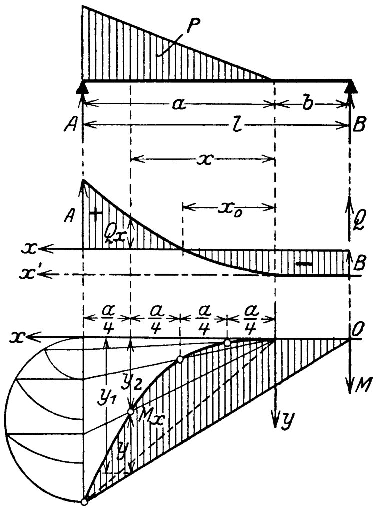


Abb. 79. Zwei Stützen. Teilweise Dreiecklast.

durch eine gerade Linie dargestellt wird, die für $x = -b$ die Ordinate Null, für $x = a$ die Ordinate f hat;

$$y_2 = f \cdot \frac{x^3}{a^3}$$

ist eine kubische Parabel, die nach Abb. 78d entworfen oder mit Hilfe der Zahlentafel auf S. 93 berechnet wird.

Die Lage des größten Biegungsmomentes folgt aus der Bedingung

$$Q_x = -B + P \cdot \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

und zwar wird der Abstand x_0 von der Spitze des Belastungsdreiecks infolge

$$-P\frac{a}{3l} + P \cdot \frac{x_0^2}{a^2} = 0 \qquad x_0 = \frac{a}{3}\sqrt{3 \cdot \frac{a}{l}}.$$

Mit $x = x_0$ erhalten wir als größtes Biegungsmoment

$$M_{\max} = B \cdot (b + x_0) - P \cdot \frac{x_0^3}{3a^2}.$$

c) Der einfach überhängende Träger.

Einzellast (Abb. 80). Solange die Last innerhalb der Stützweite l ruht, entspricht der Belastungsfall der Abb. 75. Befindet sich die Last auf dem Kragarm a, so liefert die 3. Gleichgewichtsbedingung für B als Drehpunkt

$$A \cdot l - P \cdot a = 0 \quad \text{den Auflagerdruck} \quad A = P \cdot \frac{a}{l},$$

der von oben nach unten gerichtet ist. Aus

$$B = A + P \quad \text{folgt} \quad B = P \cdot \frac{a}{l} + P = P \cdot \frac{a+l}{l}.$$

Die Querkraftlinie ist zwischen A und B eine Parallele zur x-Achse im Abstande $-A$, weil $Q = -A$ = Constans ist. Im Punkte B springt die Querkraft um B nach oben, die Querkraftlinie verläuft von $2'$ bis 3 wagerecht im Abstande $+P$ von der x-Achse. Zur Bestimmung der Momentenfläche berechnen wir das Stützmoment

$$M_B = -P \cdot a,$$

es ist negativ, weil es die Stabachse nach oben wölbt. Da $M_A = 0$ und $M_3 = 0$ ist, sind ba und bc die beiden Äste der Momentenlinie.

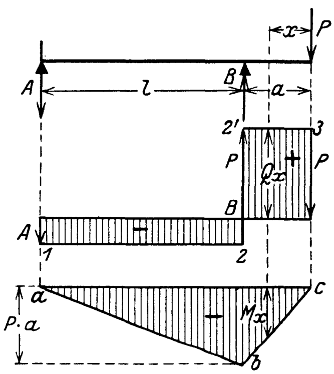


Abb. 80. Überhängender Träger mit Einzellast.

Gleichförmig verteilte Last (Abb. 81). Wir denken sie im Schwerpunkt des sie darstellenden Rechtecks angreifen, der den Abstand $\frac{l+a}{2}$ von A hat. Aus der 3. Gleichgewichtsbedingung für B bzw. A als Drehpunkte folgt

$$A = P \cdot \frac{l-a}{2l}; \quad \text{bzw.} \quad B = P \cdot \frac{l+a}{2l}.$$

Innerhalb der Stützweite ist für den Schnitt x

$$Q_x = A - p \cdot x,$$

wenn wir mit $p = \frac{P}{l+a}$ die Belastung der Längeneinheit bezeichnen. Für $x = 0$ wird $Q_A = A$; wir haben damit einen Punkt der Querkraftlinie, die eine Schräge mit der Neigung $\operatorname{tg} \varphi = p$ ist. Sie wird erhalten, indem wir (Abb. 81 b) von dem Endpunkte a' aus P senkrecht nach unten abtragen und die Wagerechte ac ziehen; dann hat $a'c$ die Neigung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{l+a} = p.$$

Die Querkraftlinie ist brauchbar innerhalb der Stützweite l. Im Punkte B springt Q um B, das Auftragen $bb' = B$ liefert den Punkt b'

des zweiten Zweiges der Querkraftlinie, die geradlinig bis c' fallen muß. Die Schräge $b'c'$ ist wegen

$$Q'_x = p \cdot x'$$

zu $a'c$ parallel. Da die Querkraftlinie zwei Nullpunkte hat bzw. die x-Achse zweimal schneidet, so dürfen wir zwei größte Biegungsmomente erwarten. Aus der Bedingung $Q_x = 0$ erhalten wir

$$A - p \cdot x = 0$$

oder

$$P \frac{l-a}{2l} - P \frac{x}{l+a} = 0;$$

daraus

$$x_0 = \frac{(l+a)(l-a)}{2l} = \frac{l^2 - a^2}{2l}.$$

Der zweite Nullpunkt ist der Stützpunkt B.

Das Biegungsmoment im Punkte x des Trägers ist

$$M_x = Ax - p \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= P \frac{l-a}{2l} \cdot x - P \frac{x^2}{2(l+a)};$$

die Momentenlinie ist eine Parabel (Abb. 81c), deren Schnittpunkte mit der x-Achse aus der Bedingung $M_x = 0$ folgen. Es ergibt sich aus

$$M_x = P \frac{l-a}{2l} \cdot x - P \cdot \frac{x^2}{2(l+a)} = 0:$$

$$x_1 = 0; \; x_2 = \frac{(l+a)(l-a)}{l} = 2x_0.$$

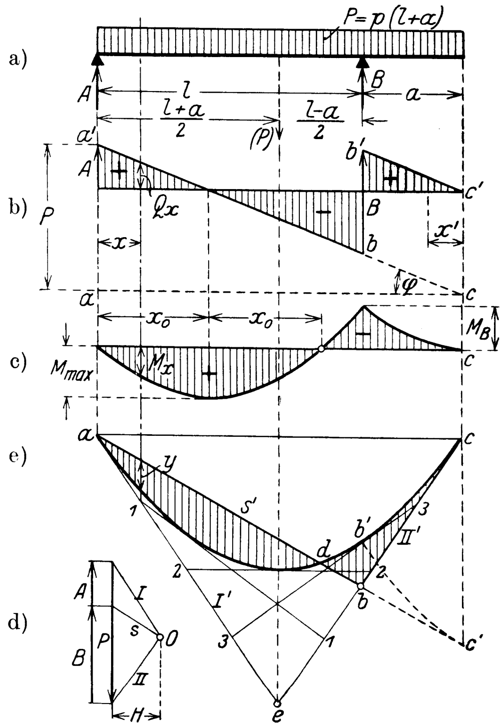


Abb. 81. Überhängender Träger mit gleichförmig verteilter Last.

Die Parabel liegt symmetrisch zu der Senkrechten durch x_0; ihr Scheitel hat für $x = x_0 = \frac{(l+a)(l-a)}{2l}$ die Ordinate

$$M_{\max} = P \cdot \frac{(l+a)(l-a)^2}{8l^2},$$

sie schneidet auf der Stützsenkrechten durch B infolge $x = l$ die Ordinate

$$M_B = P \frac{l-a}{2l} \cdot l - P \frac{l^2}{2(l+a)} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l+a}$$

ab. Das ist natürlich der gleiche Wert, den wir durch die Berechnung von M_B vom Kragarm a aus erhalten, bei dem im Punkte x' das Moment

$$M'_x = -\frac{p x'^2}{2}$$

auftritt. Die Ordinate in B wird wegen $x = a$ und $P = p\,(l + a)$

$$M_B = -\frac{P}{2}\cdot\frac{a^2}{l+a} \quad \text{wie oben}.$$

Der zweite Ast der Momentenlinie ist ebenfalls eine Parabel; ihr Scheitel liegt in c. Die beiden größten Biegungsmomente haben entgegengesetzte Vorzeichen; das absolut größte ist für die Bemessung des Querschnittes maßgebend (Abb. 81c).

Der zeichnerische Entwurf der Momentenlinie ergibt sich aus dem Seileck, das für die gleichförmig verteilte Last eine Parabel ist. Nach den Endpunkten der im Kräftemaßstab dargestellten Gesamtlast ziehen wir aus dem beliebigen Pol O (Abb. 81d) die Polstrahlen I und II und zu diesen durch e auf der Wirkungslinie von P die Parallelen I' und II', die die Endsenkrechten in a und c schneiden und Tangenten an die Parabel sind. Teilt man ea und ec in dieselbe Anzahl gleicher Teile und verbindet die entsprechenden Teilpunkte geradlinig, so erhält man weitere Tangenten, mit deren Hilfe die Kurve freihändig eingetragen werden kann. Die Schnittpunkte a und b der äußersten Seilstrahlen I' und II' mit den Stützsenkrechten bestimmen die Schlußlinie s', zu der s durch O parallel gezogen wird und die Auflagerdrucke A und B auf P abschneidet. Zieht man noch c auf die Schlußlinie s' herunter, so umschließen die Kurve $ab'c'$ und s' die Momentenfläche derart, daß

$$M_x = H \cdot y$$

wird.

Lautet der Längenmaßstab 1 mm $= a$ cm, der Kräftemaßstab 1 mm $= b$ kg, so ist

$$M_x = H\,\text{mm}\cdot\frac{b\,\text{kg}}{1\,\text{mm}}\cdot y\,\text{mm}\cdot\frac{a\,\text{cm}}{1\,\text{mm}} \quad \text{in cmkg}.$$

Die größte positive Ordinate der Seillinie liegt in der Mitte von ad (Abb. 81c und e).

d) Der doppelt überhängende Träger.

Einzellasten (Abb. 82). Die Auflagerdrucke A und B ergeben sich aus der 3. Gleichgewichtsbedingung zu

$$A = \frac{P_1(l+a) - P_2 b}{l} \quad \text{und} \quad B = \frac{P_2(l+b) - P_1 a}{l}.$$

Wir entwerfen die Querkraftfläche, indem wir Q für ausgezeichnete Punkte des Trägers berechnen und als Ordinaten auftragen.

$$Q_1 = -P_1;\ Q_A = -P_1;\ Q'_A = -P_1 + A;\ Q_B = -P_1 + A;$$
$$Q'_B = -P_1 + A + B;\ Q_2 = P_2.$$

Die drei Äste der Querkraftlinie sind Parallelen zur x-Achse. Für dieselben Punkte berechnen wir die Biegungsmomente

$$M_1 = 0;\quad M_A = -P_1\cdot a;\quad M_B = -P_2\cdot b;\quad M_2 = 0.$$

Die Momentenlinie ist in Abb. 82c gezeichnet und hat ein negatives Vorzeichen.

Beachtenswert ist der Sonderfall gleich großer Kräfte P und gleicher Kragarmlängen (Abb. 83). Aus Symmetriegründen folgt

$$A = B = P\,.$$

Die Querkraft ist in allen Punkten zwischen A und B gleich Null, die Querkraftlinie fällt mit der x-Achse zusammen. Die beiden Stützmomente werden gleich groß

$$M_A = M_B = -P \cdot a\,,$$

die Momentenfläche ist ein Trapez. Zwischen A und B haben wir den Fall reiner Biegung, da die Querkraft in allen Schnitten gleich Null ist.

Gleichförmig verteilte Last (Abb. 84). Die Auflagerdrucke ergeben sich zu

$$A = P \cdot \frac{\frac{L}{2} - b}{l}$$

und

$$B = P \cdot \frac{\frac{L}{2} - a}{l}\,.$$

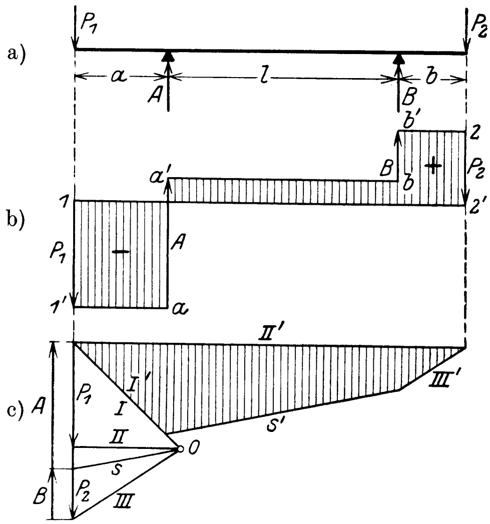


Abb. 82. Doppelt überhängender Träger mit Einzellasten.

Die Querkraft bestimmen wir abschnittweise. Für den linken Kragarm ist

$$Q_x = -p \cdot x \text{ und } Q_A = -p \cdot a\,.$$

Die Querkraftlinie ist eine Schräge durch den Nullpunkt mit der Neigung $\operatorname{tg} \varphi = -p$ oder $\operatorname{tg} \varphi' = p$, sie schneidet die Stützsenkrechte durch A in a. Im Punkte A springt Q um A und folgt zwischen A und B der Gleichung

$$Q'_x = -p x' + A\,,$$

die Querkraftlinie läuft durch a' (Abb. 84b) parallel $1\,a$ und schneidet die Stützsenkrechte durch B in b. Hier springt Q wieder und zwar um B, um längs des Kragarmes b wegen

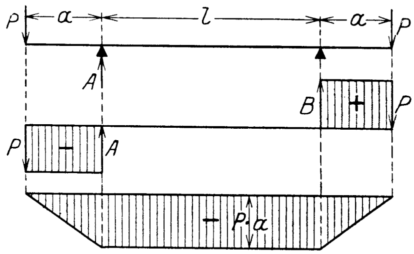


Abb. 83. Doppelt überhängender Träger mit gleich großen Einzellasten und Kragarmen.

$$Q''_x = p x''$$

parallel zu $a'b$ abzunehmen. Die Neigung der drei schrägen Äste der Querkraftlinie ist in Abb. 84b zeichnerisch bestimmt. Da die x-Achse dreimal geschnitten wird, so sind drei größte Biegungsmomente zu erwarten, von denen zwei die Stützmomente sind. Die Lage des größten positiven Momentes folgt aus der Bedingung $Q'_x = 0$ oder

$$0 = -p \cdot x' + A, \quad \text{d. h.} \quad x_0 = \frac{A}{p} = L \cdot \frac{A}{P}.$$

Die Momentenlinien der Kragarme sind Parabeln mit den Scheiteln in 1 und 2 (Abb. 84c) und den Stützmomenten

$$M_A = -\frac{pa^2}{2} \quad \text{und} \quad M_B = -\frac{p \cdot b^2}{2}.$$

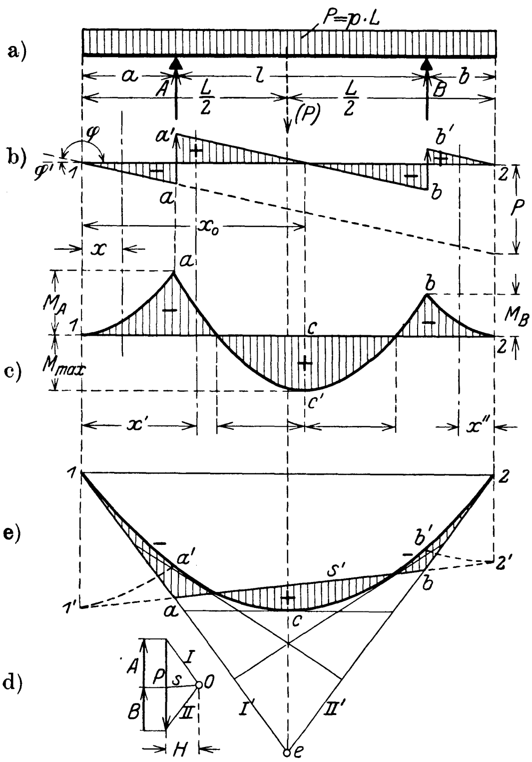


Abb. 84. Doppelt überhängender Träger mit gleichförmig verteilter Last.

Die Ordinate cc' des Astes zwischen A und B erhalten wir aus der Gleichung der Momentenlinie

$$M'_x = A \cdot (x_0 - a) - \frac{p \cdot x_0^2}{2},$$

wenn wir den vorher bestimmten Wert x_0 einsetzen. Eine weitere algebraische Behandlung der Aufgabe erübrigt sich, weil in praktischen Fällen Zahlenwerte gegeben sind. Erwähnt soll noch die zeichnerische Lösung werden. Zu P (Abb. 84d) wählen wir den beliebigen Pol O und ziehen durch den beliebigen Punkt e (Abb. 84e) auf der Wirkungslinie der Mittelkraft P die Parallelen I' und II', die die Endsenkrechten in 1 und 2 schneiden. Zwischen 1 und 2 ist die Seillinie eine Parabel, die wie in Abb. 81 entworfen wird. Bringen wir die Stützsenkrechten mit den äußersten Seilstrahlen zum Schnitt, so ist $ab = s'$ die Schlußlinie des Seilecks. Die zu ihr parallele Gerade s durch den Pol O bestimmt auf P die Auflagerdrucke A und B. Damit wir die Ordinaten der Seillinie von einer Geraden, der Schlußlinie, aus messen können, sind die Punkte 1 und 2 heruntergeholt, so daß die Schlußlinie s' und die Kurve $1'a'cb'2'$ die Momentenfläche begrenzen.

e) Zahlenbeispiele.

1. **Freiträger** (Abb. 70). $P = 1500$ kg; $l = 1{,}6$ m. Baustoff
a) Holz mit $k_b = 100$ kg/cm²

$$M = 1500 \cdot 160 = 240000 \text{ cmkg},$$
$$W_{\text{erf}} = \frac{240000}{100} = 2400 \text{ cm}^3.$$

Die Zahlentafel (S. 84) gibt $26 \cdot 24$ cm mit $W = 2496$ cm³,
$24 \cdot 26$ „ „ $W = 2704$ „

Der breit liegende Balken hat. . . . . $\sigma_{\max} = \dfrac{240000}{2496} = \sim 96$ kg/cm².

Der hochkant liegende Balken hat. . . $\sigma_{\max} = \dfrac{240000}{2704} = \sim 89$ kg/cm².

Da das Eigengewicht eine gleichförmig verteilte Last ist, so wird nach Abb. 71 das Zusatzmoment

$$M_g = \frac{G \cdot l}{2};$$

mit dem spezifischen Gewicht $\gamma = 0{,}7$ kg/dm³ wird

$$M_g = \frac{2{,}4 \cdot 2{,}6 \cdot 16 \cdot 0{,}7 \cdot 160}{2} = \sim 5590 \text{ cmkg}.$$

Für die Ermittlung des Gewichtes sind die Abmessungen in dm, für das Moment die Länge in cm einzusetzen. Die Zusatzspannung erhalten wir zu

$$\sigma_g = \frac{5590}{2496} = \sim 2{,}2 \text{ kg/cm}^2 \text{ bei dem breit liegenden,}$$
$$\sigma_g = \frac{5590}{2704} = \sim 2 \text{ kg/cm}^2 \text{ bei dem hochkant liegenden}$$

Balken. Die Gesamtspannung $96 + 2{,}2 = 98{,}2$ bzw. $89 + 2 = 91$ kg/cm² bleibt in beiden Fällen unter der zulässigen.

b) Stahl mit $k_b = 1200$ kg/cm²; hierbei ist angenommen, daß es sich um einen Bauteil aus dem Hochbau handelt.

$$\text{Erforderlich ist } W = \frac{240400}{1200} = 200 \text{ cm}^3.$$

In den Tafeln der deutschen Normalprofile für Walzeisen finden wir

α) ⌶ $NP\,20$ mit $W_x = 214$ cm³ und $g = 26{,}3$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240000}{214} = \sim 1120 \text{ kg/cm}^2.$$

β) ⊢⊣ $NP\,45$ mit $W_y = 203$ cm³ und $g = 115{,}4$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240000}{203} = \sim 1180 \text{ kg/cm}^2.$$

γ) [$NP\,22$ mit $W_x = 245$ cm³ und $g = 29{,}36$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240000}{245} \sim = 980 \text{ kg/cm}^2.$$

δ) ⊔ Das flach liegende [-Profil reicht nicht aus, denn $J_y = 495$ cm⁴ für $NP\,30$ ergibt mit einem Abstand $x' = 100 - x = 100 - 27 = 73$ mm ein kleinstes Widerstandsmoment

$$W_y = \frac{495}{7{,}3} = 68 \text{ cm}^3 \text{ gegen } W_{\text{erforderlich}} = 200 \text{ cm}^3.$$

ε) Nr. 16 B (breitflanschiger Differdinger) mit $W_x = 285$ cm³ und $g = 38{,}9$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{285} = \sim 840 \text{ kg/cm}^2 .$$

ζ) Nr. 22 (desgl. flach) mit $W_y = 201$ cm³ und $g = 64{,}8$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{201} = 1195 \text{ kg/cm}^2 .$$

η) *NP* 16 mit $W_x = 2 \cdot 116 = 232$ cm³ und $g = 2 \cdot 18{,}84 = 37{,}68$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{232} = 1035 \text{ kg/cm}^2 .$$

ϑ) ○ $d = 130$ mm mit $W = 215{,}7$ cm³ und $g = 104{,}2$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{215{,}7} = 1120 \text{ kg/cm}^2 .$$

ι) *NP* 16 mit $W = 2 \cdot 117 = 234$ cm³ und $g = 2 \cdot 17{,}9 = 35{,}8$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{234} = 1025 \text{ kg/cm}^2 .$$

κ) Eisenbahnschiene der preußischen Staatsbahn, Form 15 mit $W = 216{,}8$ cm³ und $g = 45{,}05$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{216.8} = \sim 1105 \text{ kg/cm}^2 .$$

λ) Zwei Laufschienen Nr. 4 mit $W = 2 \cdot 105{,}1 = 210{,}2$ cm³ und $g = 2 \cdot 57 = 114$ kg/m

$$\sigma_{\max} = \frac{240\,000}{210{,}2} = \sim 1140 \text{ kg/cm}^2 .$$

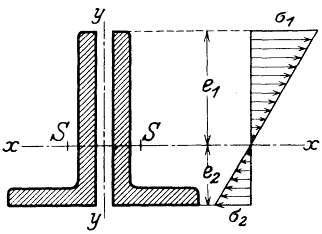


Abb. 85. ⌋⌊-Eisen.

μ) ⌋⌊-Eisen 100 · 200 · 14 mit $J_x = 2 \cdot 1653 = 3306$ cm⁴.

Der Querschnitt ist zwar symmetrisch zur senkrechten, aber nicht zur wagerechten Achse durch den Schwerpunkt (Abb. 85).

Bei angenommener senkrechter Belastung würde die Kraftlinie mit der senkrechten Symmetrieachse $y - y$ zusammenfallen, die Hauptachse des Querschnittes ist. Dann fällt die Nullinie mit der andern Hauptachse $x - x$ zusammen. Das Spannungsschaubild zeigt geradliniges Anwachsen der Spannungen nach den Rändern. Es wird

$$W_1 = \frac{J_x}{12{,}88} = \frac{3306}{12{,}88} = 256 \text{ cm}^3; \qquad \sigma_1 = \frac{240\,000}{256} = 935 \text{ kg/cm}^2;$$

$$W_2 = \frac{J_x}{7{,}12} = \frac{3306}{7{,}12} = 464 \text{ cm}^3; \qquad \sigma_2 = \frac{240\,000}{464} = 520 \text{ kg/cm}^2.$$

Wir unterscheiden stets den erforderlichen von dem ausgeführten Querschnitt und sollen uns von Anfang an daran gewöhnen, für den gewählten, also ausgeführten Querschnitt die größte auftretende Spannung zu berechnen. Es darf niemals dem die Festigkeitsberechnung prüfenden Ingenieur zugemutet werden, die wirkliche Beanspruchung der ausgeführten Konstruktion selber nachzurechnen.

Einmauerung des Freiträgers (Abb. 86). Das zur Erzielung des Gleichgewichtes der äußeren Kräfte (S. 2) erforderliche Einspannmoment muß durch das Gegengewicht der Mauer aufgebracht werden, das wir in der Mitte der Mauer angreifen denken. Bei der Einmauerung mit Hilfe von Grundplatten ist es üblich, den Angriffspunkt des Auflagerdruckes in ein Drittel der Plattenbreite b anzunehmen, dann wird der Hebelarm des Einspannmomentes $e = \frac{d}{2} - \frac{b}{3}$ und

$$M_A = M_{\max} = G\left(\frac{d}{2} - \frac{b}{3}\right).$$

Streng genommen, wird durch das Zurückverlegen des Angriffspunktes A um $^1/_3$ der Plattenbreite auch die freie Länge des Trägers größer, da für das größte Moment nicht mehr der Hebelarm l, sondern $(l + b/3)$ maßgebend ist. Bei Profilen, deren rechnerisch ermittelte größte Spannung die zulässige Spannung nahezu erreicht, sollte unter allen Umständen die gewählte Ausführung sorgfältig nachgeprüft werden.

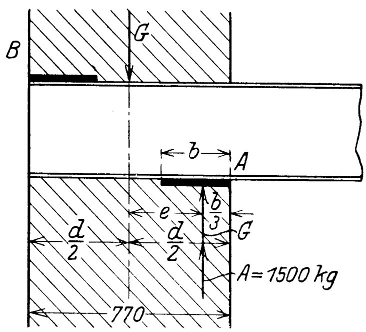


Abb. 86. Einmauerung des Freiträgers.

Angenommen, es stände für den durchgerechneten Freiträger eine dreisteinstarke Mauer mit $d = 77$ cm zur Verfügung. Ist die Plattenbreite 27 cm, so wird das berichtigte Biegungsmoment

$$M' = 1500 \cdot (160 + 9) = 253\,500 \text{ cmkg},$$

der Zuwachs beträgt $1500 \cdot 9 = 13\,500$ cmkg. Unser I-Träger NP 20 (Beispiel α) erfährt demnach eine Zusatzspannung

$$\sigma' = \frac{13500}{214} = 63 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß die größte Spannung auf

$$\sigma_{\max} = 1120 + 63 = 1183 \text{ kg/cm}^2$$

wächst, also noch unter der zulässigen bleibt. Die Größe des Gegengewichtes folgt aus der Bedingung

$$M_A = 253\,500 = G\,(38{,}5 - 9)$$

zu

$$G = \frac{253\,500}{29{,}5} = \sim 8600 \text{ kg}.$$

Für gewöhnliches Mauerwerk in Kalkmörtel mit dem Mischungsverhältnis von 1 Raumteil Kalk und 3 Raumteilen Sand ist die zulässige Druckbeanspruchung $p = 7$ kg/cm². Die Grundplatte bei A erfährt einen Gesamtdruck von

$$G + P = 8600 + 1500 = 10\,100 \text{ kg}$$

und müßte bei angenäherter Berechnung, d. h. gleichmäßige Druckverteilung vorausgesetzt, eine Breite b' erhalten, die der Bedingung

$$b \cdot b' \cdot p = 10\,100$$

genügt. $b' = 54$ cm ergibt

$$p = \frac{10\,100}{b \cdot b'} = \frac{10\,100}{27 \cdot 54} = 6{,}9 \text{ kg/cm}^2.$$

Das **I**-Eisen NP 20 ist 90 mm breit, die Grundplatte von 540 mm Breite würde also an den Seiten 225 mm frei liegen. Da hierbei die Voraussetzung gleichmäßiger Druckverteilung kaum gewährleistet sein dürfte, empfiehlt es sich, zur Einmauerung Hartbrandsteine in Kalkzementmörtel mit $p = 12$ bis $15\ \mathrm{kg/cm^2}$ zu verwenden und die untere Grenze als zulässig anzusehen; wir erhalten als Plattenbreite

$$b' = \frac{10100}{b \cdot p} = \frac{10100}{27 \cdot 12} = 32\ \mathrm{cm},$$

$$p = \frac{10100}{27 \cdot 32} = 11{,}7\ \mathrm{kg/cm^2}.$$

Bei dieser Ausführung steht die Platte nach jeder Seite 115 mm über die Flansche des **I**-Eisens hinaus.

Zur besseren Druckverteilung auf das Mauerwerk wird meist noch eine Deckplatte in B vorgesehen.

2. Eine Welle nach Abb. 75 trage in der Entfernung 0,5 m vom Lager A ein Schwungrad vom Gewicht $P = 5000$ kg. Das größte Biegungsmoment ist bei einer Lagerentfernung von $l = 1{,}2$ m

$$M_{\max} = \frac{5000 \cdot 70 \cdot 50}{120} = \sim 146\,000\ \mathrm{cmkg}.$$

Bei einer zulässigen Biegungspannung von $k_b = 400\ \mathrm{kg/cm^2}$ wird das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{146\,400}{400} = 365\ \mathrm{cm^3}.$$

Nach der Tafel auf S. 85 gehört zu $d = 160$ mm ein Widerstandsmoment $W = 402{,}1\ \mathrm{cm^3}$, so daß wir als größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{146\,000}{402{,}1} = 363\ \mathrm{kg/cm^2}$$

erhalten.

Die zulässige Biegungsspannung ist so niedrig gehalten, weil für die Welle Belastungsfall *III* (S. 20) vorliegt.

3. Ein Raum von 6 m Breite und 12 m Länge soll eine ebene Ziegeldecke ohne Eiseneinlage mit Hohlsteinen erhalten, deren Eigengewicht zu $265\ \mathrm{kg/m^2}$ angesetzt werden darf; als Nutzlast kommen $500\ \mathrm{kg/m^2}$ in Frage, wenn wir eine Fabrikdecke annehmen, die nicht besonders schweren Belastungen ausgesetzt ist. Der Raum soll 5 Fenster erhalten, so daß 5 Felder von je 2,4 m Breite der Berechnung zugrunde zu legen sind. Auf jeden Querträger entfällt somit eine Last von

$$P = 6\ \mathrm{m} \cdot 2{,}4\ \mathrm{m} \cdot (265 + 500)\ \mathrm{kg/m^2} = 11016\ \mathrm{kg},$$

die sich gleichmäßig über den Träger verteilt. Das größte Biegungsmoment wird

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{8} = \frac{11016 \cdot 600}{8} = 826\,200\ \mathrm{cmkg}.$$

Bei einer zulässigen Biegungsspannung von $1200\ \mathrm{kg/cm^2}$ wird das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{826\,200}{1200} = 689\ \mathrm{cm^3},$$

dem ein **I**-Eisen NP 32 mit $W_x = 782\ \mathrm{cm^3}$ und $g = 61{,}07$ kg/m entspricht; es wird

$$\sigma_{\max} = \frac{826\,200}{782} = 1060\ \mathrm{kg/cm^2}.$$

Die zusätzliche Spannung infolge des Eigengewichtes ist

$$\sigma_g = \frac{61{,}07\ \mathrm{kg/m} \cdot 6\ \mathrm{m} \cdot 600\ \mathrm{cm}}{8 \cdot 782} = \sim 35\ \mathrm{kg/cm^2},$$

sie dürfte vernachlässigt werden.

Einfluß der Einmauerung. Die Gesamtbelastung ruft gleich große Auflagerdrucke

$$A = B = \frac{1}{2} G = (11016 + 61,07 \cdot 6) \cdot \frac{1}{2} = 5700 \text{ kg}$$

hervor, die bei einer Trägerbreite von $b = 131$ mm eine Auflagertiefe von

$$b' = \frac{5700}{13,1 \cdot 12} = \sim 37 \text{ cm}$$

erfordern. Wenn es auch besser wäre, eine Grundplatte vorzusehen, so könnte doch diese Ausführung noch hingehen; sie ergibt eine mittlere Pressung von

$$p = \frac{5700}{13,1 \cdot 37} = 11.7 \text{ kg/cm}^2$$

und vergrößert die Stützweite um 37 cm. Das Biegungsmoment in der Mitte des Trägers ist nunmehr

$$M' = A \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{b'}{2}\right) - \frac{G}{2} \cdot \frac{l}{4} = 5700 \cdot 318,5 - 5700 \cdot 150 = 960500 \text{ cmkg},$$

also um $960500 - 826200 = 134300$ cmkg größer, wenn man Auflagerlänge und Eigengewicht berücksichtigt. Für I *NP* 32 erhalten wir jetzt als größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{960500}{782} = 1230 \text{ kg/cm}^2$$

und überschreiten damit die zulässige Biegungsspannung. Allerdings ist der überschießende Betrag sehr klein, 2,5%, doch sollte man grundsätzlich die einmal festgelegte Grenzspannung nie überschreiten. Es müßte hier die nächsthöhere Nummer, *NP* 34, vorgesehen werden mit $W_x = 923$ cm³, für die

$$\sigma_{\max} = \frac{960500}{923} = 1040 \text{ kg/cm}^2$$

wird.

Bei Festigkeitsnachweisen, die der Prüfung durch Behörden unterliegen, darf die zulässige Spannung der Vorschriften auf keinen Fall überschritten werden.

5. Weitere Belastungsfälle.

a) Mehrfache Belastung.

Der Freiträger (Abb. 87). Bei der Berechnung von Trägern mit mehrfacher Last empfiehlt sich stets die Anwendung des Überlagerungsgesetzes, das besagt: wir bringen die Lasten nacheinander auf den Träger und addieren die Wirkungen (Superpositionsgesetz).

In unserm Falle entwerfen wir die Querkraftfläche getrennt nach Einzelkräften und gleichförmig verteilter Last und tragen die Ordinaten beider Querkraftlinien nach oben und unten von der wagerechten Achse aus ab, dann addieren sich beide unmittelbar. Die Querkraftlinie infolge der Einzelkräfte ist die Treppenlinie mit den Ordinaten $Q = P_1$ bzw. $Q' = P_1 + P_2$ (Abb. 87b), die nach oben abgetragen sind. Die gleichförmig verteilte Last gibt eine Schräge mit der Endordinate $Q = P_3$, so daß

$$Q_A = P_1 + P_2 + P_3$$

die größte Querkraft wird.

Auch beim Entwurf der Momentenlinie betrachten wir zunächst die Einzellasten; es ist

$$M_1 = 0; \; M_2 = P_1 \cdot b; \; M_A = P_1 \cdot l + P_2 \cdot a.$$

Die Momentenlinie ist eine gebrochene Linie, die am bequemsten mit Hilfe von $aa' = P_1 \cdot l$ und $a'a'' = P_2 \cdot a$ entworfen wird. Infolge der gleichförmig verteilten Last erhalten wir eine Parabel, deren Ordinaten senkrecht nach unten aufgetragen sind, damit wir unmittelbar addieren können. Das größte Biegungsmoment tritt in der Einspannstelle auf, es ist

$$M_{\max} = P_1 \cdot l + P_2 \cdot a + P_3 \cdot \frac{l}{2}$$

und müßte streng genommen das negative Vorzeichen erhalten, da es die Trägerachse nach oben wölbt.

Der Träger auf zwei Stützen (Abb. 88) trage die Einzellasten P und eine gleichförmig verteilte Last G. Wir bringen die Kräfte P auf

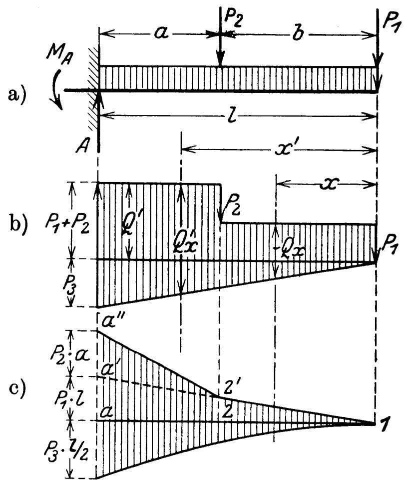


Abb. 87. Freiträger mit mehrfacher Belastung.

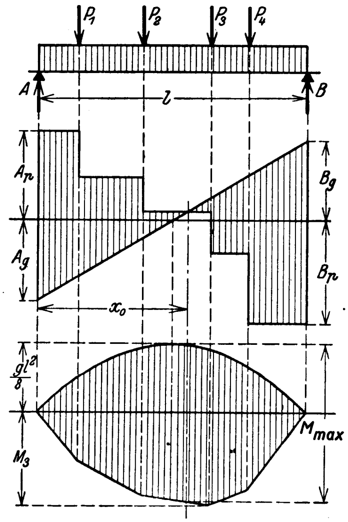


Abb. 88. Der Träger auf zwei Stützen mit mehrfacher Belastung.

den Träger und entwerfen zunächst die Querkraftlinie für diese Einzellasten, nachdem die Auflagerdrucke A und B berechnet sind. Die Querkraftlinie ist eine Treppenlinie, die die x-Achse im Angriffspunkt einer Last schneidet (in unserem Beispiel P_3). Infolge der gleichförmig verteilten Last erhalten wir eine Schräge, deren Ordinaten nach unten abgetragen sind, damit sich beide Querkraftflächen addieren.

Ebenso entwirft man zunächst den gebrochenen Linienzug der Momente infolge der Einzelkräfte, dessen Ordinaten nach unten aufgetragen sind und zeichnet dann die Momentenfläche infolge der gleichförmig verteilten Last nach oben, die durch eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$M = \frac{g l^2}{8}$$

begrenzt ist. Der Querkraft-Nullpunkt gibt den Abstand x_0 von A an, wo das größte Moment auftritt.

Zahlenbeispiel (Abb. 89).

a) Zeichnerische Lösung. Man bringt zunächst die Einzelkräfte P auf den Träger und entwirft mit Hilfe des Kraftecks den Seilzug $I' \ldots V'$ (Abb. 89b); dann schneiden die äußersten Seilstrahlen I' und V' die Auflagersenkrechten in den Punkten der Schlußlinie s'; eine Parallele s zu s' durch den Pol O ergibt die

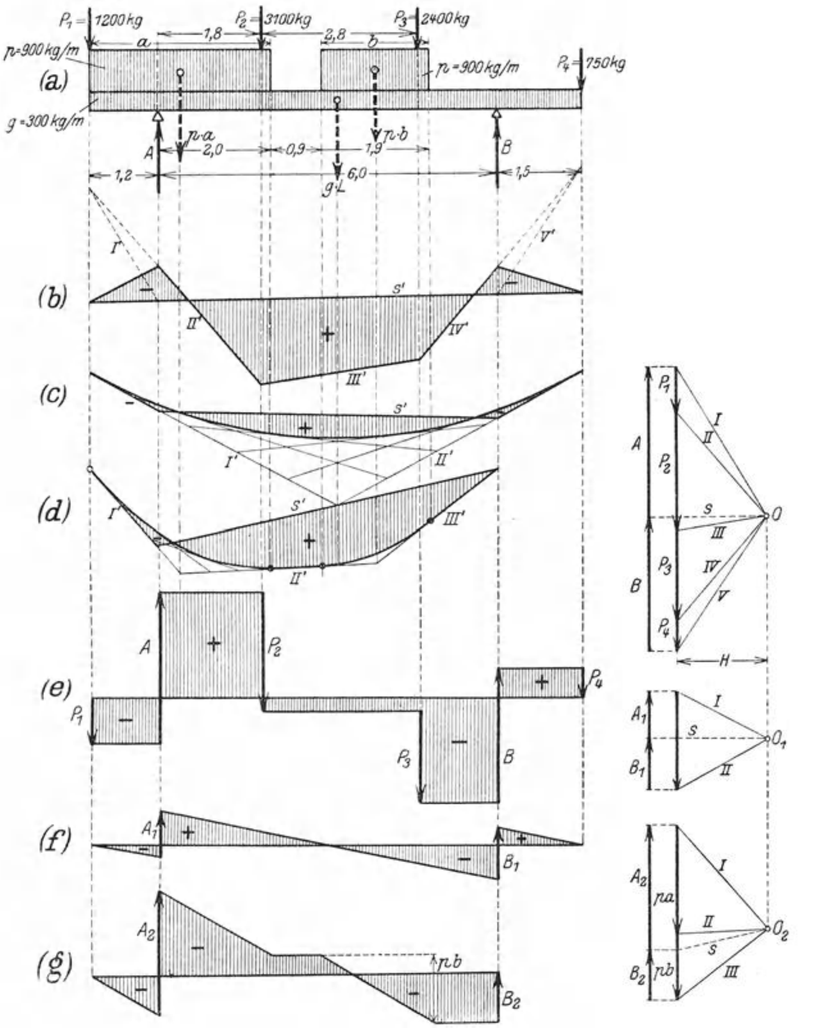


Abb. 89. Der überhängende Träger mit mehrfacher Belastung.

Auflagerdrucke A und B infolge der Kräfte P. In Abb. 89b sind die Schnittpunkte der Seilstrahlen I' und II auf der linken Endsenkrechten und IV' und V' auf der rechten Endsenkrechten auf die Schlußlinie s' heruntergeholt, damit wir die Ordinaten von einer Geraden aus messen können. Die Momentenfläche hat positive und negative Teilflächen. Aus der zu den Einzelkräften P gehörigen Querkraftfläche (Abb. 89e) entnehmen wir drei Querkraft-Nullpunkte bzw. drei Punkte, in denen die Querkraft das Vorzeichen wechselt. Diesen Punkten der Querkraftlinie entsprechen die beiden negativen Stützmomente und das größte positive Moment im Angriffspunkt der Kraft P_2.

Die gleichförmig verteilte Last $G = g \cdot L$, wo bei L die Gesamtlänge des Trägers bedeutet, denkt man sich im Schwerpunkt der Last, d. h. in $\frac{L}{2}$ von den Enden des Trägers entfernt, angreifen. Das Krafteck mit dem Pol O_1 liefert die Seilstrahlen I' und II' (Abb. 89c), deren Schnittpunkte mit den Auflagersenkrechten die Schlußlinie bestimmen, und die Tangenten an die parabolische Momenten-

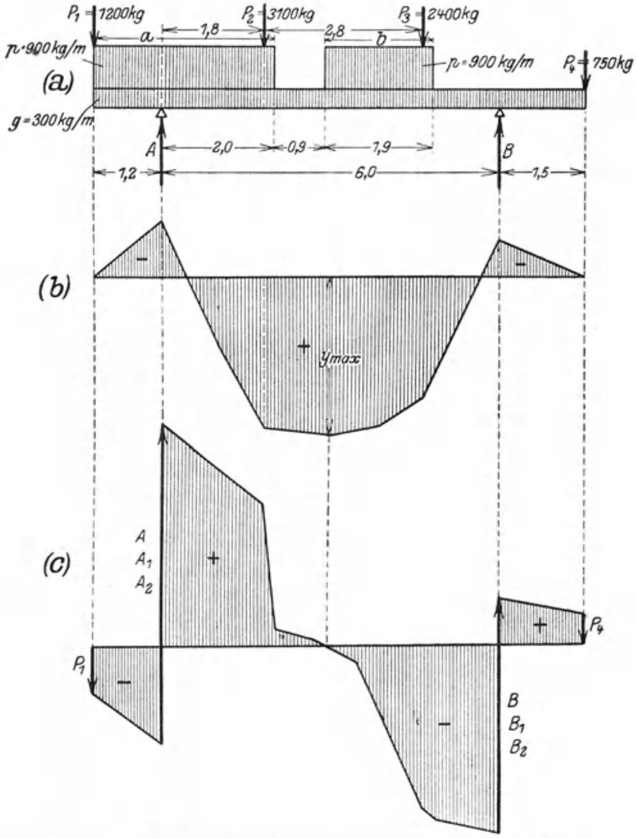


Abb. 90. Der überhängende Träger mit mehrfacher Belastung.

linie in den Endpunkten des Trägers sind. Die Querkraftfläche ist in Abb. 89f dargestellt, die sie begrenzende Querkraftlinie ist eine dreiästige Schräge mit der Neigung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g \cdot L}{L} = g ,$$

die nach Abb. 84b entworfen wird.

Die beiden Streckenlasten $p \cdot a$ und $p \cdot b$ denkt man sich ebenfalls in den Schwerpunkten der sie darstellenden Rechtecke vereinigt und zeichnet mit Hilfe des Kraftecks (Pol O_2) den Seilzug I', II', III'. Die Schnittpunkte der äußersten Seilstrahlen I' und III' mit den Auflagersenkrechten (Abb. 89d) bestimmen die

Schlußlinie s'. Innerhalb der Strecken a und b ist die Momentenlinie eine Parabel, deren Tangenten die Seilstrahlen I' und II' für die Last $p \cdot a$ bzw. II' und III' für die Last $p \cdot b$ sind.

Die Querkraftfläche infolge beider Streckenlasten zeigt Abb. 89g; beim Zeichnen der Querkraftlinien ist darauf zu achten, daß sie für unbelastete Teile des Trägers wagerecht verläuft.

Da alle drei Lastgruppen gleichzeitig auf den Träger wirken, sind die Einzelflächen zu addieren. Abb. 90c gibt die Gesamtquerkraftfläche, deren Nullpunkte die Lage der größten Biegungsmomente bestimmen (gefährliche Querschnitte).

In Abb. 90b ist die Gesamtmomentenfläche dargestellt, bei der die begrenzenden Parabeln sich allerdings wenig von geraden Linien abheben.

Mit den Maßstäben

$$1 \text{ mm} = a \text{ m für die Längen,}$$
$$1 \text{ mm} = b \text{ kg für die Kräfte}$$

wird

$$M_{\max} = H \text{ mm} \cdot \frac{b \text{ kg}}{1 \text{ mm}} \cdot y \text{ mm} \cdot \frac{a \text{ m}}{1 \text{ mm}}.$$

In Abb. 89 ist gewählt

$$\text{Längenmaßstab } 3 \text{ mm} = 0{,}4 \text{ m},$$
$$\text{Kräftemaßstab } 1 \text{ mm} = 200 \text{ kg}.$$

Damit wird

$$M_{\max} = 12 \text{ mm} \cdot \frac{200 \text{ kg}}{1 \text{ mm}} \cdot 20{,}8 \text{ mm} \cdot \frac{0{,}4 \text{ m}}{3 \text{ mm}} = 6670 \text{ mkg}.$$

b) Rechnerische Lösung. Für die Berechnung der Auflagerdrucke denken wir uns die gleichförmig verteilten Lasten in den Schwerpunkten der Rechtecke angreifen, durch die sie in der Zeichnung dargestellt werden. Danach hat $G = g \cdot L = 300 \cdot 8{,}7 = 2610$ kg den Abstand $\frac{1}{2}(1{,}2 + 6 + 1{,}5) - 1{,}5 = 2{,}85$ m;

$P = 900\,(1{,}2 + 2{,}0) = 2880$ kg den Abstand $6 + 1{,}2 - \frac{1}{2}(1{,}2 + 2) = 5{,}6$ m;

$P' = 900 \cdot 1{,}9 = 1710$ kg den Abstand $1{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}9 = 2{,}15$ m von B. Demnach lautet die Momentengleichung sämtlicher Kräfte für B als Drehpunkt

$$1200 \cdot 7{,}2 + 2880 \cdot 5{,}6 + 3100 \cdot 4{,}2 + 2610 \cdot 2{,}85 + 1710 \cdot 2{,}15$$
$$+ 2400 \cdot 1{,}4 - 750 \cdot 1{,}5 - A \cdot 6 = 0; \text{ daraus } A = 8523 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise erhalten wir für A als Drehpunkt

$$750 \cdot 7{,}5 + 2400 \cdot 4{,}6 + 2880 \cdot 0{,}4 + 2610 \cdot 3{,}15 + 3100 \cdot 1{,}8 + 1710 \cdot 3{,}85$$
$$- 1200 \cdot 1{,}2 - B \cdot 6 = 0; \text{ daraus } B = 6127 \text{ kg}.$$

Nunmehr werden die Querkraft-Nullpunkte ermittelt, bzw. die Punkte, wo die Querkraft das Vorzeichen wechselt.

Unmittelbar links von A ist

$$Q_A = -1200 - (900 + 300) \cdot 1{,}2 = -2640 \text{ kg};$$

unmittelbar rechts von A ist

$$Q'_A = -2640 + 8523 = +5883 \text{ kg},$$

also ist A ein gefährlicher Querschnitt.

Zwischen A und B schätzen wir $Q = 0$ im Abstande 2,9 m von A und finden

$$Q = -1200 + 8523 - (900 + 300) \cdot 3{,}2 - 300 \cdot 0{,}9 - 3100 = +113 \text{ kg}.$$

Von da ab vermindert sich Q um $900 + 300 = 1200$ kg/m. Ist x_0 die Strecke die mit 1200 kg/m belastet ist, so wird

$$Q = +113 - 1200 \cdot x_0 = 0; \text{ daraus } x_0 = 0{,}09 \text{ m}.$$

Der zweite gefährliche Querschnitt ist demnach $2{,}9 + 0{,}09 = 2{,}99$ m von A und 3,01 m von B entfernt.

Unmittelbar rechts von B ist

$$Q_B = 750 + 1{,}5 \cdot 300 = + 1200 \text{ kg},$$

unmittelbar links von B ist

$$Q_B' = + 1200 - 6127 = - 4927 \text{ kg},$$

also liegt in B der dritte gefährliche Querschnitt. Es müssen alle drei Momente berechnet werden.

$$M_A = - 1200 \cdot 1{,}2 - (900 + 300) \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 = - 2304 \text{ mkg}.$$

$$M_0 = 6127 \cdot 3{,}01 - 750 \cdot 4{,}51 - 2400 \cdot 1{,}61 - 900 \cdot 1{,}81 \cdot 0{,}905 - 300 \cdot 4{,}51 \cdot 2{,}255 = + 6670 \text{ mkg}.$$

$$M_B = - 750 \cdot 1{,}5 - 300 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}75 = - 1462{,}5 \text{ mkg}.$$

Da für die Querschnittbemessung das zahlenmäßig größte Moment ohne Rücksicht auf das Vorzeichen maßgebend ist, schreiben wir

$$M_{\max} = M_0 = 6670 \text{ mkg} = 667000 \text{ cmkg}.$$

Die zulässige Biegungsspannung $k_b = 1200$ kg/cm² erfordert

$$W = \frac{667000}{1200} = 555 \text{ cm}^3,$$

dem ein I-Eisen NP 29 mit $W_x = 596$ cm³ entspricht, so daß

$$\sigma_{\max} = \frac{667000}{596} = 1120 \text{ kg/cm}^2$$

wird.

b) Beliebig geformte Belastung.

Die Aufgabe erscheint zunächst recht theoretisch, sie gewinnt aber für den Maschinenbau Bedeutung, wenn man den Einfluß des Eigengewichtes von Maschinenteilen untersuchen will, die als Gußkörper von verwickelter Form entworfen sind.

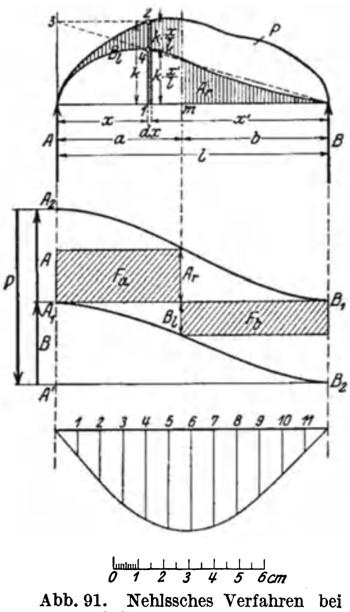


Abb. 91. Nehlssches Verfahren bei beliebiger Belastung.

Mohrsches Verfahren. Zerlegt man die Gesamtlast in schmale Streifen, so kann man das Gewicht dieser Streifen als Einzelkräfte auffassen, die in den Schwerpunkten angreifen. Nach Mohr bildet man aus diesen Einzelkräften den Kräftezug und entwirft das Kraft- und Seileck, dessen Strahlen Tangenten an die Momentenlinie sind.

Da wir dieses Verfahren später häufig bei verwickelten Belastungsflächen anwenden (vgl. S. 176), so sehen wir hier von einem besonderen Beispiel ab.

Nehlssches Verfahren (Abb. 91). Ist dx die Breite eines Streifens, k seine Höhe, dann ist sein Gewicht $k \cdot dx$, das einen Auflagerdruck

$$dA = k \cdot dx \cdot \frac{x}{l}$$

hervorruft. Wir erhalten

$$A = \int_0^l k \cdot \frac{x}{l} \cdot dx \quad \text{und} \quad B = \int_0^l k \cdot \frac{x}{l} \cdot dx.$$

Das Biegungsmoment im Punkte m des Trägers ist

$$M_m = M_r + M_l ,$$

wobei

$$M_r = A_r \cdot a \quad \text{und} \quad M_l = B_l \cdot b$$

ist, wenn wir mit A_r den infolge der Last rechts von m sich in A ergebenden Auflagerdruck, mit B_l den in B durch die Last links von m hervorgerufenen Auflagerdruck bezeichnen. M_r und M_l sind die entsprechenden Momente. Mit

$$A_r = \int_0^b k \cdot \frac{x'}{l} \cdot d\,x' \quad \text{und} \quad B_l = \int_0^a k \cdot \frac{x}{l} \cdot d\,x$$

wird

$$M_m = a \cdot \int_0^b k \cdot \frac{x'}{l} \cdot d\,x' + b \cdot \int_0^a k \cdot \frac{x}{l} \cdot d\,x\,.$$

Die Integrale sind durch Flächen darstellbar, die von Kurven begrenzt werden, deren Gleichungen

$$z' = k \cdot \frac{x'}{l} \quad \text{und} \quad z = k \cdot \frac{x}{l}$$

lauten. Man findet Punkte der Kurven, indem man eine Ordinate der Belastungsfläche, z. B. $1 \div 2 = k$, auf die Senkrechte durch A projiziert und den so erhaltenen Punkt 3 mit B verbindet; dann zerlegt B die Ordinate k in

$$1 \div 4 = k \cdot \frac{x'}{l} = z' \quad \text{und} \quad 2 \div 4 = k \cdot \frac{x}{l} = z\,.$$

Die Punkte 4 liegen auf einer Kurve, die die Gesamtbelastung P in A und B zerlegt. A ist dargestellt durch den der x-Achse zugehörigen Teil der Gesamtfläche; die darüber liegende Restfläche ist gleich B. Die Senkrechte durch m liefert A_r und B_l, von denen A_r durch Integration der z'-Linie von 0 bis b, B_l durch Integration der z-Linie von 0 bis a erhalten wird. Beide Integrale sind durch die gestrichelten Flächen dargestellt, deren Inhalt beim Aufzeichnen auf Millimeterpapier mit genügender Genauigkeit ausgezählt wird. Trägt man jetzt A_r und B_l auf der Senkrechten durch m als Ordinaten auf, so ergeben die Rechtecke

$$A_r \cdot a = F_a \text{ und } B_l \cdot b = F_b$$

die Teilmomente M_r und M_l, so daß wir das Gesamtmoment M_m als Summe beider Flächen erhalten; es ist

$$M_m = F_a + F_b\,.$$

Um alle Momente zu erfassen, empfiehlt es sich, die Integrallinien

$$A = \int k \cdot \frac{x'}{l} \cdot d\,x' \quad \text{und} \quad B = \int k \cdot \frac{x}{l} \cdot d\,x$$

zu entwerfen, deren Ordinaten für eine Reihe von Punkten durch Auszählen bestimmt werden, wie es für den Punkt m oben angegeben ist. Die Linien sind in Abb. 91 eingezeichnet. B_1A_2 hat die Endordinate A senkrecht unter A; A_1B_2 hat die Endordinate B senkrecht unter B.

Der Maßstab der Darstellung ist durch die Bedingung

$$(A'A_1 = B) + (A_1A_2 = A) = P \text{ in t oder kg}$$

gegeben. Nehmen wir beispielsweise an

Längenmaßstab 2 mm = 0,1 m,
Kräftemaßstab 1 mm = 0,1 t,

so liefert Abb. 91 für die elf Punkte des Trägers

$$M_1 = 35\,\text{mm}\cdot\frac{0{,}1\,\text{t}}{1\,\text{mm}}\cdot 9\,\text{mm}\cdot\frac{0{,}1\,\text{m}}{2\,\text{mm}} + 1\,\text{mm}\cdot\frac{0{,}1\,\text{t}}{1\,\text{mm}}\cdot 99\,\text{mm}\cdot\frac{0{,}1\,\text{m}}{2\,\text{mm}} = 2{,}1\,\text{mt}$$

$$M_2 = \frac{0{,}1\,\text{t}}{1\,\text{mm}}\cdot\frac{0{,}1\,\text{m}}{2\,\text{mm}}\,(33{,}5\,\text{mm}\cdot 18\,\text{mm} + 3\,\text{mm}\cdot 90\,\text{mm}) = 4{,}37\,\text{mt} \quad \text{usw.}$$

Als größtes Biegungsmoment ergibt sich unmittelbar neben Punkt sechs

$$M_{\max} = \frac{0{,}1\,\text{t}}{1\,\text{mm}}\cdot\frac{0{,}1\,\text{m}}{2\,\text{mm}}\,(21\,\text{mm}\cdot 5\,\text{mm} + 13\,\text{mm}\cdot 6\,\text{mm}) = 9{,}15\,\text{mt}.$$

c) Wandernde Einzellasten.

Eine Last P wandert über den Träger (Abb. 92). In der Stellung x ist

$$M_x = \frac{P\cdot x\,(l-x)}{l},$$

die Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe M_x. Trägt man M_x senkrecht unter x als Ordinate cc' auf, so liegen die Spitzen c' aller möglichen Momentendreiecke auf einer Parabel, deren Pfeilhöhe $M_{\max}$ ist. Aus

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{P}{l}\,(l - 2x) = 0$$

folgt

$$x = \frac{l}{2},$$

d. h. das größte Moment liegt in der Mitte und ist

$$M_{\max} = \frac{P\cdot l}{4}.$$

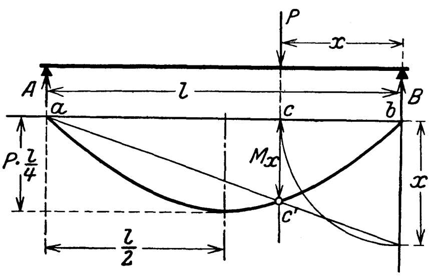


Abb. 92. Wandernde Einzellast.

Die Konstruktion eines Parabelpunktes folgt unmittelbar aus der Gleichung; sie ist aus Abb. 92 zu ersehen.

Zwei gekoppelte Lasten wandern über den Träger (Abb. 93). Wir verfolgen zunächst die Größe des Momentes infolge P_1, wenn P_1 von B aus über den Träger wandert. In der Entfernung x von B ist

$$M_1 = y_1 = P_1\cdot\frac{x\,(l-x)}{l},$$

d. h. der geometrische Ort für die Spitzen der Momentendreiecke ist eine Parabel, deren Pfeilhöhe für $x = \frac{l}{2}$

$$f_1 = P_1 \cdot \frac{l}{4}$$

ist.

In gleicher Weise erhält man als geometrischen Ort für die Spitzen der Momentendreiecke infolge P_2 eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$f_2 = P_2 \cdot \frac{l}{4}.$$

Im Angriffspunkt von P_2 ist

$$M_2 = y_2 = P_2 \frac{(x-a)(l-x+a)}{l}.$$

Aus Abb. 93b ist zu ersehen, daß das größte Moment nur unter P_1 oder P_2 auftreten kann. Im Angriffspunkt von P_1 ist

$$y = y_1 + y_2' \quad \text{oder} \quad M_x = P_1 \frac{x(l-x)}{l} + P_2 \frac{(x-a)(l-x)}{l} \tag{a}$$

Die Lage des Maximalmomentes folgt aus der Bedingung

$$l \cdot \frac{d M_x}{d x} = P_1 l - 2 x P_1 + P_2 l - 2 P_2 x + P_2 a = 0,$$

$$x = \frac{(P_1 + P_2) \cdot l + P_2 \cdot a}{2(P_1 + P_2)} = \frac{l}{2} + \frac{P_2 \cdot a}{2(P_1 + P_2)}.$$

Für den Sonderfall gleich großer Kräfte ergibt sich

$$x = \frac{2Pl + Pa}{4P} = \frac{l}{2} + \frac{a}{4}$$

und damit

$$M_{\max} = P \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} + \frac{a}{4}\right)\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)}{l} + P \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{3}{4}a\right)\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)}{l}$$

$$= \frac{P}{2l}\left(l^2 - al + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{P}{2l}\left(l - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Stellen wir die Gleichung (a) als Kurve dar, so messen wir senkrecht unter der ersten Last das durch beide Kräfte in diesem Punkte hervorgerufene Biegungsmoment. Diese Momentenlinie ist eine Parabel, deren größte Ordinate im Abstande

$$x = \frac{l}{2} + \frac{P_2 \cdot a}{2(P_1 + P_2)}$$

von B auftritt, wenn der Lastenzug von B nach A fährt. Das zweite Glied ist aber die halbe Entfernung der Mittelkraft $R = P_1 + P_2$ vom Angriffspunkt der Last P_1. Nennen wir die ganze Entfernung $2\,e$, so muß die erste Last um e aus der Mitte des Trägers verschoben werden, damit wir den Ort des größten Biegungsmomentes erhalten, der mit dem Scheitel der zu entwerfenden Parabel zusammenfällt. Anders geschrieben lautet die Gleichung (a)

$$M_x = (P_1 + P_2)\,x + P_2 \cdot \frac{a}{l} \cdot x - (P_1 + P_2) \cdot \frac{x^2}{l} - P_2 \cdot a\,,$$

$$\frac{M_x}{P_1 + P_2} = x + \frac{P_2 \cdot a}{P_1 + P_2} \cdot \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l} - \frac{P_2 \cdot a}{P_1 + P_2}$$

$$= x + 2e \cdot \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l} - 2e \qquad \text{(b)}$$

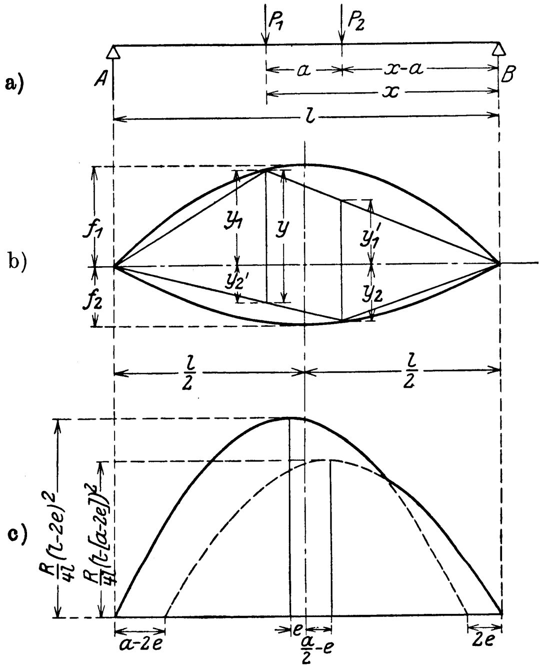


Abb. 93. Zwei wandernde Einzellasten.

Wir erhalten die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse, wenn wir die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null setzen; das ergibt die Bedingungsgleichung

$$x^2 - x(l + 2e) + 2el = 0,$$

daraus

$$x_1 = l;\; x_2 = 2\,e.$$

Für den Sonderfall gleich großer Kräfte wird $x_2 = \frac{a}{2}$.

Ersetzen wir in Gleichung (b) x durch $\frac{l}{2} + e$, so ergibt sich

$$M_{\max} = \frac{P_1 + P_2}{4l} \cdot (l^2 - 4el + 4e^2)\,,$$

$$M_{\max} = \frac{R}{4l}\,(l - 2e)^2. \quad \text{(c)}$$

Da der Scheitel und die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse nunmehr bekannt sind, läßt sich die Kurve einzeichnen. Betrachten wir in gleicher Weise die Momente, die unter dem Angriffspunkt von P_2 auftreten, so ergibt sich eine Parabel, die die x-Achse in B und im Abstande $a - 2\,e$ von A schneidet; ihr Scheitel ist um $\frac{a}{2} - e$ aus der Mitte des Trägers nach rechts verschoben und hat die Pfeilhöhe

$$M_{\max} = \frac{R}{4l}\,[l - (a - 2e)]^2\,.$$

Brauchbar sind die ausgezogenen Äste der Kurven, die den Verlauf der maximalen Momente längs der Trägerachse zeigen.

6. Träger mit veränderlichem Querschnitt.

Da die Biegungsmomente in einiger Entfernung vom gefährlichen Querschnitt schon bedeutende Abweichungen von dem größten Moment zeigen, wird der mit unveränderlichem Querschnitt ausgeführte Träger zum großen Teil überflüssigen Baustoff haben. Um dieser Verschwendung von Baustoff zu begegnen, wird man versuchen, den Träger so zu formen, daß möglichst gleiche Beanspruchung in allen Punkten auftritt.

Die abgesetzte Welle. Die Welle der Abb. 94 trägt in der Entfernung 0,5 m vom linken Auflager ein Schwungrad vom Gewicht $P = 5000$ kg. Die Momentenlinie ist ein Dreieck (abc), dessen Höhe

$$M_{\max} = \frac{5000 \cdot 70 \cdot 50}{120} \approx 145\,500 \text{ cmkg}$$

ist.

Da $M = W \cdot \sigma$ ist, und σ den zulässigen Wert $k_b = 400$ kg/cm² nicht überschreiten soll, so muß die Kurve der Werte $W \cdot k_b$, die die Tragfähigkeit der einzelnen Querschnitte darstellt, stets außerhalb der dreieckförmigen Momentenlinie fallen. Da das Widerstandsmoment für einen gegebenen Durchmesser konstant ist, ergibt sich als Kurve der Tragfähigkeit der treppenförmige Verlauf der Abb. 94. Man erkennt, daß das Biegungsmoment an allen Stellen kleiner als die Tragfähigkeit ist.

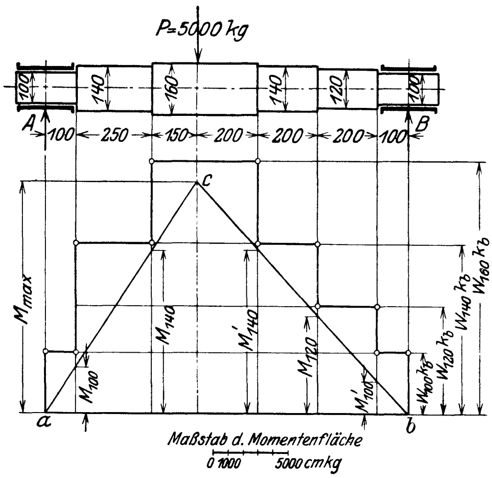


Abb. 94. Abgesetzte Welle.

Die Auflagerdrucke sind

$$A = 5000 \cdot \frac{70}{120} = 2900 \text{ kg} \qquad B = 5000 \cdot \frac{50}{120} = 2100 \text{ kg}\,.$$

Daher wird

$$\begin{aligned}
W_{100} \cdot k_b &= 98{,}17 \cdot 400 = 39\,200 \text{ cmkg} > M_{100} &&= 2900 \cdot 10 = 29\,000 \text{ cmkg}\\
W_{100} \cdot k_b &= 98{,}17 \cdot 400 = 39\,200 \text{ cmkg} > M_{100}' &&= 2100 \cdot 10 = 21\,000 \text{ cmkg}\\
W_{120} \cdot k_b &= 169{,}6 \cdot 400 = 67\,800 \text{ cmkg} > M_{120} &&= 2100 \cdot 30 = 63\,000 \text{ cmkg}\\
W_{140} \cdot k_b &= 269{,}4 \cdot 400 = 107\,600 \text{ cmkg} > M_{140} &&= 2900 \cdot 35 = 101\,500 \text{ cmkg}\\
W_{140} \cdot k_b &= 269{,}4 \cdot 400 = 107\,600 \text{ cmkg} > M_{140}' &&= 2100 \cdot 50 = 105\,000 \text{ cmkg}\\
W_{160} \cdot k_b &= 402{,}1 \cdot 400 = 160\,000 \text{ cmkg} > M_{\max} &&= 2900 \cdot 50 = 145\,500 \text{ cmkg}
\end{aligned}$$

Die in den einzelnen Querschnitten auftretenden maximalen Spannungen sind

$$\begin{aligned}
\sigma_{100} &= M_{100} : W_{100} = 29\,000 : 98{,}17 = 295 \text{ kg/cm}^2\\
\sigma_{100}' &= M_{100}' : W_{100} = 21\,000 : 98{,}17 = 214 \text{ kg/cm}^2\\
\sigma_{120} &= M_{120} : W_{120} = 63\,000 : 169{,}6 = 371 \text{ kg/cm}^2\\
\sigma_{140} &= M_{140} : W_{140} = 101\,500 : 269{,}4 = 377 \text{ kg/cm}^2\\
\sigma_{140}' &= M_{140}' : W_{140} = 105\,000 : 269{,}4 = 390 \text{ kg/cm}^2\\
\sigma_{160} &= M_{\max} : W_{160} = 145\,500 : 402{,}1 = 360 \text{ kg/cm}^2
\end{aligned}$$

Genieteter Blechträger. In ähnlicher Weise läßt sich der genietete Blechträger der Abb. 95 berechnen. Die einzelnen Blechquerschnitte sind in Abb. 96 angegeben.

Freiträger mit stetig wachsendem Querschnitt (Abb. 97). Das Biegungsmoment an der Stelle x ist

$$M_x = P \cdot x,$$

die Spannung σ im Querschnitt x mit den Bezeichnungen der Abb. 97

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P . x \cdot 6}{b \cdot y^2}.$$

Aus $x : l = (y - h_1) : (h_2 - h_1)$ folgt

$$x = \frac{y - h_1}{h_2 - h_1} \cdot l \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{6 P l}{b} \cdot \frac{y - h_1}{y^2 (h_2 - h_1)}.$$

Mit

$$W_A = \frac{b h_2^2}{6} \quad \text{und} \quad M_A = P \cdot l$$

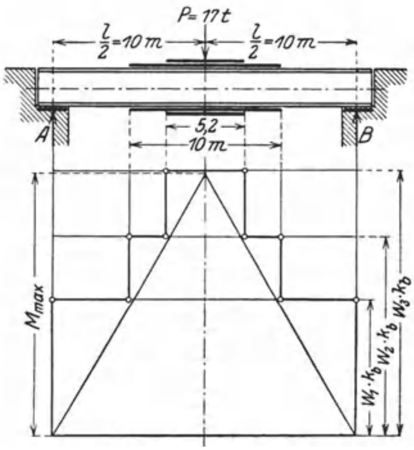


Abb. 95. Genieteter Blechträger.

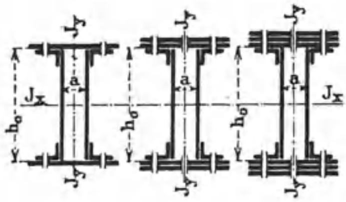


Abb. 96. Querschnitte des Blechträgers Abb. 95.

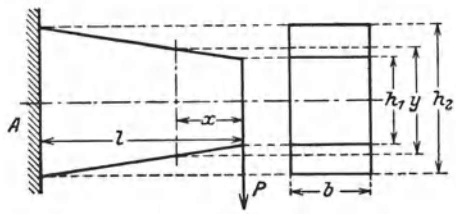


Abb. 97. Freiträger mit stetig wachsendem Querschnitt.

ergibt sich die Spannung σ_2 im Einspannquerschnitt zu $\sigma_2 = \frac{P l 6}{b h_2^2}$; es ist daher

$$\sigma = \frac{P \cdot l \cdot 6}{b \cdot h_2^2} \cdot \frac{h_2^2}{y^2} \cdot \frac{y - h_1}{h_2 - h_1} = \sigma_2 \frac{h_2^2}{y^2} \cdot \frac{y - h_1}{h_2 - h_1}$$

oder

$$\sigma = \sigma_2 \cdot \frac{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}{\frac{h_2}{h_1} - 1} \cdot \left(\frac{h_1}{y} - \frac{h_1^2}{y^2}\right).$$

Um $\sigma_{\max}$ zu finden, setzen wir $\frac{d\left(\frac{h_1}{y} - \frac{h_1^2}{y^2}\right)}{dy} = 0$ und erhalten die Bedingungsgleichung

$$\frac{-h_1}{y^2} + \frac{2 h_1^2}{y^3} = 0 \text{ und daraus } y = 2 h_1.$$

Solange $h_2 < 2\,h_1$, ist der Einspannquerschnitt der gefährliche Querschnitt. Für $h_2 > 2\,h_1$ rückt der gefährliche Querschnitt dorthin, wo seine Höhe doppelt so groß ist wie die des Endquerschnittes, so daß der Ort für $\sigma_{\max}$ leicht zu bestimmen ist. Wir erhalten als größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 \cdot \frac{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}{\frac{h_2}{h_1} - 1} \cdot \frac{1}{4}\,.$$

Setzen wir in

$$\frac{x}{l} = \frac{y - h_1}{h_2 - h_1}$$

den durch die Bedingung für $\sigma_{\max}$ gefundenen Wert $y = 2\,h_1$ ein, so erhalten wir

$$x_0 = \frac{h_1 \cdot l}{h_2 - h_1} = \frac{1}{\frac{h_2}{h_1} - 1} \cdot l\,.$$

Ersetzt man in der Gleichung für σ die Höhe des Querschnittes durch die Entfernung x vom freien Ende, so wird

$$\sigma = \sigma_2 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \cdot \frac{\frac{x}{l}}{\left[\frac{x}{l}\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right) + 1\right]^2}\,,$$

aus der sich für ein gegebenes Verhältnis $h_2 : h_1$ die Spannung σ für 10 Punkte des Trägers unschwer errechnen läßt. Ist z. B. $h_2 : h_1 = 3$, so wird

$$\sigma = \sigma_2 \cdot 9 \cdot \frac{\frac{x}{l}}{\left(\frac{x}{l} \cdot 2 + 1\right)^2} = \alpha \cdot \sigma_2\,.$$

$\frac{x}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$2 \cdot \frac{x}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
$2\frac{x}{l} + 1$	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8
$\left(2\frac{x}{l} + 1\right)^2$	1,44	1,96	2,56	3,24	4	4,84	5,76	6,76	7,84
$9 \cdot \frac{x}{l}$	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
α	0,625	0,919	1,055	1,111	1,125	1,112	1,094	1,064	1,035

Die Kurve $\sigma = f(x)$ ist eine hyperbolische Kurve dritten Grades; ihr Maximun liegt in $x_0 = l/2$. Die größte Spannung $\sigma_{\max}$ übersteigt die Spannung im Einspannquerschnitt um 12,5%.

Kegliger Freiträger mit Kreisquerschnitt (Abb. 98). Das Biegungsmoment im Abstande x vom freien Ende ist

$$M_x = P \cdot x,$$

Das Widerstandsmoment $W_x = \frac{\pi y^3}{32}$, daraus

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P \cdot x \cdot 32}{\pi \cdot y^3}.$$

Aus $F : F_2 = y^2 : d_2^2 = (l_1 + x)^2 : l_2^2$ folgt $x = \frac{l_2}{d_2} \cdot y - l_1$,

$$\sigma = \frac{32}{\pi} \cdot P \cdot \frac{\frac{l_2}{d_2} \cdot y - l_1}{y^3} = \frac{32}{\pi} P \left(\frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{l_1}{y^3} \right).$$

σ wird zu $\sigma_{\max}$ für $\frac{d\sigma}{dy} = 0$, daher wird

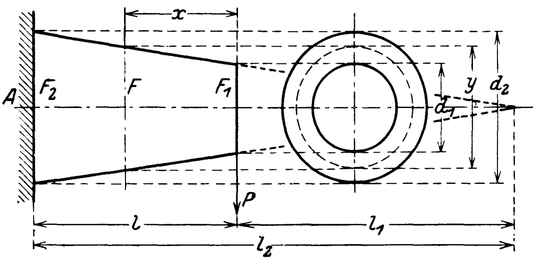


Abb. 98. Kegliger Freiträger mit Kreisquerschnitt.

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{32}{\pi} \cdot P \left(-2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \; \frac{1}{y^3} + 3 \cdot \frac{l_1}{y^4} \right) = 0,$$

$$y = \frac{3}{2} \cdot d_2 \cdot \frac{l_1}{l_2} \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{3}{2} d_1,$$

weil $l_1 : l_2 = d_1 : d_2$ ist. Mit dem für y gefundenen Wert wird

$$\sigma_{\max} = \frac{32}{\pi} P \left[\frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2} d_1\right)^2} - \frac{l_1}{\left(\frac{3}{2} d_1\right)^3} \right] = \frac{128}{27 \cdot \pi} \cdot \frac{P \cdot l_1}{d_1^3}.$$

Um ein Bild über den Verlauf der Spannungen längs der Trägerachse zu erhalten, erweitern wir die Gleichung

$$\sigma = \frac{32}{\pi} P \left(\frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{l_1}{y^3} \right)$$

mit $\frac{l}{d_2^3}$ und schreiben

$$\sigma = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{P \cdot l}{d_2^3} \left(\frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{d_2^3}{y^2} - \frac{l_1 \cdot d_2^3}{y^3} \right) \cdot \frac{1}{l},$$

woraus mit

$$\frac{P \cdot l \cdot 32}{\pi d_2^3} = \sigma_2$$

$$\sigma = \sigma_2 \cdot \left(\frac{l_2}{l} \cdot \frac{d_2^2}{y^2} - \frac{l_1}{l}\,\frac{d_2^3}{y^3}\right)$$

folgt.

Da sich ferner aus $d_1 : d_2 = l_1 : l_2$

$$\frac{l}{l_1} = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \quad \text{und} \quad \frac{l}{l_2} = \frac{d_2 - d_1}{d_2}$$

ergibt, so erhalten wir

$$\sigma = \sigma_2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_2 - d_1} \cdot \frac{d_2^2}{y^2} - \frac{d_1}{d_2 - d_1} \cdot \frac{d_2^3}{y^3}\right).$$

Die Kurve $\sigma = f(y)$ und damit auch $\sigma = f(x)$ ist eine hyperbolische Kurve vierten Grades, als deren Maximalwert sich für $y = \frac{3}{2}\,d_1$

$$\sigma_{\max} = \frac{4}{27} \cdot \sigma_2 \cdot \frac{d_2^3}{d_1^2\,(d_2 - d_1)}$$

ergibt; sie kann, wenn nötig, durch Berechnung einer Reihe von Punkten bestimmt werden.

7. Träger gleicher Biegungsfestigkeit.

Die beste Ausnutzung des Baustoffes wird dann vorliegen, wenn sämtliche Querschnitte gleich große Biegungsspannungen erfahren. Natürlich läßt sich diese Forderung nicht in die Wirklichkeit umsetzen, da in den Momentennullpunkten des Trägers die Spannung Null herrscht, theoretisch also ein Querschnitt Null erforderlich wäre. Aber man kann der gestellten Bedingung überall gleich großer Biegungsspannung durch die Formgebung des Trägers nahe kommen.

a) Der Freiträger (Abb. 99) mit rechteckigem Querschnitt von gleichbleibender Breite b und veränderlicher Höhe y.

Einfluß einer Einzellast am Ende. Das Moment im Punkte x des Trägers $M_x = P \cdot x$ liefert bei einer unveränderlichen Breite b und der veränderlichen Höhe y des Querschnittes die Randspannung

$$\sigma = \frac{P \cdot x \cdot 6}{b \cdot y^2}.$$

Der Grenzwert dieser Spannung ist die zulässige Biegungsspannung k_b; damit ergibt die Bedingung $\sigma =$ Constans die Gleichung der Begrenzungslinie des Trägers

$$k_b = \frac{P \cdot x \cdot 6}{b \cdot y^2} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{6P}{b \cdot k_b} \cdot x.$$

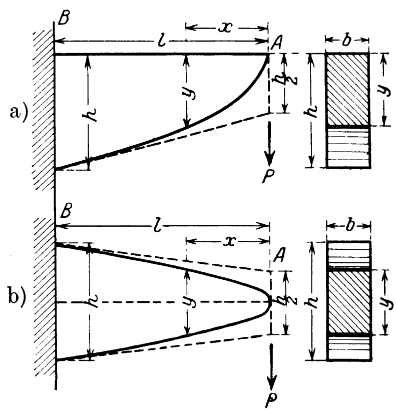


Abb. 99. Freiträger gleicher Biegungsfestigkeit und gleicher Breite.

Das ist die Gleichung einer quadratischen Parabel, deren Entwurf zwei Ausführungsformen gestattet. Abb. 99a zeigt als obere Begrenzungslinie eine Gerade und als untere die Parabel, Abb. 99b zeigt obere und untere Begrenzungslinie als Parabeln. Angenähert formt man den Träger nach den Tangenten, die man im Einspannpunkte an die Parabeln zieht. Durch diese ist die Höhe im Endquerschnitt als die Hälfte der Höhe des Einspannquerschnittes bestimmt.

Gleichmäßig verteilte Last (Abb. 100). Nennt man wieder die unveränderliche Breite des Querschnittes b, die veränderliche Höhe y, so wird infolge $M_x = \frac{p \cdot x^2}{2}$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{p \cdot x^2 \cdot 6}{2 \cdot b \cdot y^2} = \frac{3P}{b \cdot l} \cdot \frac{x^2}{y^2}.$$

Die Forderung $\sigma = k_b$ liefert als Gleichung der Begrenzungslinie

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{3P}{b \cdot l \cdot k_b}};$$

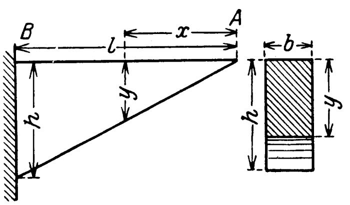


Abb. 100. Freiträger gleicher Biegungsfestigkeit und gleicher Breite.

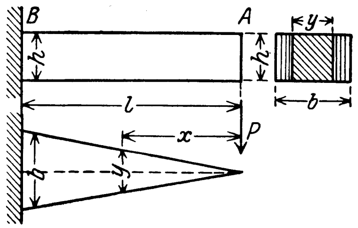


Abb. 101. Freiträger gleicher Biegungsfestigkeit und gleicher Höhe.

die Kurve ist eine gerade Linie, die im Punkte A ($x = 0$) die Ordinate Null, im Punkte B ($x = l$) die Ordinate

$$h = \sqrt{\frac{3Pl}{b \cdot k_b}}$$

hat.

b) Der Freiträger mit rechteckigem Querschnitt von gleichbleibender Höhe h und veränderlicher Breite y.

Einfluß einer Einzellast am Ende (Abb. 101). Das Moment M_x ruft im Punkte x die Spannung

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P \cdot x \cdot 6}{y \cdot h^2}$$

hervor; die Forderung $\sigma = k_q$ liefert als Gleichung der Begrenzungslinie des Trägers

$$y = \frac{6P}{h^2 \cdot k_b} \cdot x;$$

das ist die Gleichung einer geraden Linie mit den Ordinaten $y = 0$ im Punkte $x = 0$ und $b = \frac{6Pl}{h^2 k_b}$ im Punkte $x = l$.

Gleichmäßig verteilte Last (Abb. 102). Infolge des Momentes $M_x = \frac{p x^2}{2}$ im Punkte x des Trägers tritt die Spannung

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{3 p x^2}{y \cdot h^2}$$

auf, die für $\sigma = k_b$ die Gleichung der Begrenzungslinie

$$y = \frac{3 p x^2}{h^2 \cdot k_b} = \frac{3 P x^2}{l h^2 k_b}$$

liefert. Das ist die Gleichung einer Parabel, die sich nach der y-Achse öffnet und nach Abb. 102 entworfen werden kann. Die bestimmenden Endordinaten sind $y = 0$ für $x = 0$ und $b = \frac{3 P l}{h^2 k_b}$ für $x = l$.

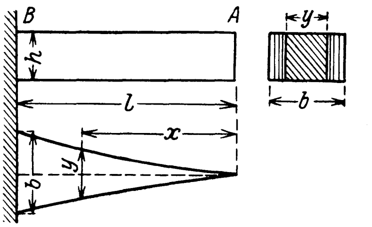


Abb. 102. Freiträger gleicher Biegungsfestigkeit und gleicher Höhe.

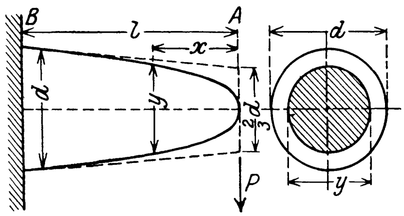


Abb. 103. Freiträger gleicher Biegungsfestigkeit. Kreisquerschnitt.

c) Der Freiträger mit kreisförmigem Querschnitt.

Einfluß einer Einzellast am Ende (Abb. 103). Als Spannung im Punkte x des Trägers ergibt sich

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P \cdot x \cdot 32}{\pi \cdot y^3},$$

aus der mit $\sigma = k_b$ die Gleichung der Begrenzungslinie

$$y^3 = \frac{32 P}{\pi \cdot k_b} \cdot x$$

folgt. Die Kurve ist eine Parabel dritten Grades oder kubische Parabel, deren Endordinate für $x = l$ den Wert

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 P l}{\pi k_b}}$$

hat. Die Tangenten an die Kurve in der Einspannstelle des Trägers schneiden auf der Endsenkrechten die Strecke $\frac{2}{3} d$ ab.

Gleichmäßig verteilte Last (Abb. 104). Sie ruft im Punkte x des Trägers die Spannung

$$\sigma = \frac{p x^2 \cdot 16}{\pi \cdot y^3}$$

hervor, aus der mit $\sigma = k_b$

$$y^3 = \frac{16 p}{\pi \cdot k_b} x^2 = \frac{16 P}{\pi \cdot l \cdot k_b} \cdot x^2$$

folgt. Die Kurve ist eine semikubische Parabel, deren Ordinate an der Einspannstelle den Wert

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 P \cdot l}{\pi k_b}}$$

hat, und deren Tangenten auf der Endsenkrechten die Strecke $\frac{1}{3} d$ abschneiden.

Da beide Kurven häufig als Grundform von Ausführungen gewählt werden, soll ihre Konstruktion entwickelt werden. In Abb. 105 sei $OA = l$; $AB = h = d$.

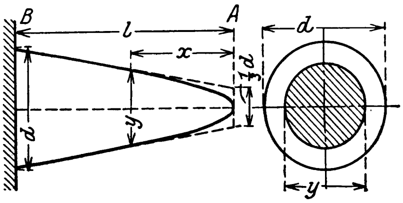


Abb. 104. Freiträger gleicher Biegungsfestigkeit. Kreisquerschnitt.

Die beliebige Wagerechte cc_1 schneidet OB so in c_1, daß

$$x_1 = \frac{y_1}{h} \cdot l$$

ist. Projiziert man c_1 auf die Wagerechte CB und verbindet diesen Punkt 1 mit O, so hat der Schnittpunkt c_2 die Abszisse

$$x_2 = y_2 \cdot \frac{x_1}{h} = \frac{y_2^2}{h^2} \cdot l, \quad \text{weil} \quad y_1 = y_2 \quad \text{ist.}$$

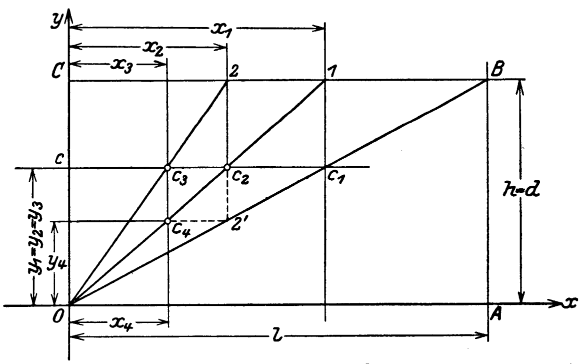


Abb. 105. Konstruktion der quadratischen, kubischen und semikubischen Parabel.

c_2 ist also ein Punkt der quadratischen Parabel; projiziert man c_2 auf BC und verbindet 2 mit O, so schneidet $O2$ die Wagerechte cc_1 in c_3, dessen Abszisse

$$x_3 = y_3 \cdot \frac{x_2}{h} = \frac{y_3^3}{h^3} \, l$$

ist, weil $y_2 = y_3$ ist; also ist c_3 ein Punkt der kubischen Parabel. Die Senkrechte durch c_3 schneidet $O\,1$ in c_4 mit den Koordinaten x_4 und y_4. Aus der Konstruktion folgt unmittelbar

$$y_4 = x_4 \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_3}{x_2} \cdot y_2,$$

da $x_4 = x_3$ ist. Mit $x_3 : x_2 = y_3 : h$ wird wegen $y_2 = y_3$

$$y_4 = \frac{y_2^2}{h} \qquad \text{oder} \qquad y_4 \cdot \frac{l}{h} = \frac{y_2^2}{h} \cdot \frac{l}{h} = x_2 .$$

Wir gelangen demnach auch nach c_4, wenn wir die Senkrechte durch c_2 mit OB zum Schnitt bringen und von $2'$ wagerecht bis $O\,1$ gehen. Daß c_4 ein Punkt der semikubischen Parabel ist, zeigt die Gleichung, der seine Koordinaten x_4 und y_4 genügen. Aus

$$y_4 : x_4 = y_2 : x_2 \text{ und } y_4 : x_4 = h : x_1$$

folgt

$$\frac{y_4^2}{x_4^2} = \frac{y_2 \cdot h}{x_2 \cdot x_1} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{h}{x_2} = \frac{h}{l} \cdot \frac{h}{x_2}$$

und mit $x_2 = y_4 \cdot \frac{l}{h}$ $\frac{y_4^3}{h^3} = \frac{x_4^2}{l^2}$.

d) Der Träger auf zwei Stützen.

Eine Einzellast zwischen den Stützen bewirkt die Auflagerdrucke A und B, die den Träger auf zwei Stützen als zwei Freiträger aufzufassen gestatten, der im Angriffspunkt der Kraft eingespannt ist. Die für den Freiträger abgeleiteten Beziehungen sind demnach sinngemäß auf den von einer Einzelkraft angegriffenen Träger auf zwei Stützen zu übertragen.

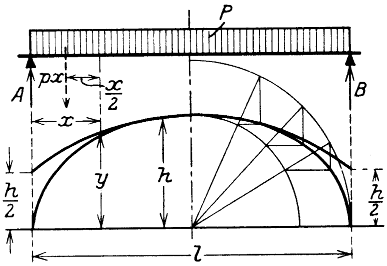


Abb. 106. Träger gleicher Biegungsfestigkeit auf zwei Stützen.

Eine wesentlich andere Gestalt erhält die Begrenzungslinie eines rechteckigen Trägers bei unveränderter Breite b und veränderlicher Höhe y, wenn wir ihn mit gleichförmig verteilter Last belasten (Abb. 106).

Das Biegungsmoment

$$M_x = A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} = \frac{P}{2} \cdot x - \frac{P \cdot x^2}{2l}$$

ruft im Punkte x die Spannung

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{3P}{l} \cdot \frac{lx - x^2}{b \cdot y^2}$$

hervor, für welche die Bedingung $\sigma = k_b$ als Gleichung der Begrenzungslinie

$$y^2 = \frac{3P}{b\,l\,k_b}(lx - x^2)$$

oder

$$\frac{b\,l \cdot k_b}{3P} \cdot y^2 - \frac{l^2}{4} = -\frac{l^2}{4} + lx - x^2$$

ergibt. Zusammengefaßt und geordnet erhalten wir

$$\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Pl}{4bk_b}} = 1\,.$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $\frac{l}{2}$ in Richtung der Stabachse und $h = \sqrt{\frac{3Pl}{4bk_b}}$ senkrecht dazu. Hier pflegt man die Begrenzungskurve angenähert so zu entwerfen, daß die Ordinaten in A und B gleich der Hälfte der Mittelhöhe h werden.

8. Momente zweiter Ordnung für ebene Flächen.

a) Trägheits- und Zentrifugalmomente für rechtwinklige Achsen.

Bezieht man das axiale Trägheitsmoment auf eine Achse u, die mit der x-Achse den Winkel α bildet (Abb. 107), so wird

$$\begin{aligned} J_u &= \int dF \cdot y'^2 = \int dF\,(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\alpha \int dF \cdot y^2 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \int dF \cdot x \cdot y + \sin^2\alpha \int dF\, x^2 \\ &= \cos^2\alpha \cdot J_x - \sin 2\alpha \cdot \int dF \cdot x \cdot y + \sin^2\alpha \cdot J_y . \end{aligned}$$

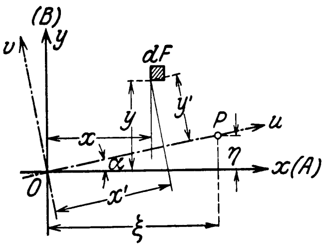


Abb. 107. Trägheits- und Zentrifugalmoment.

Man bezeichnet $\int dF \cdot x \cdot y$ mit J_{xy} und nennt es das Zentrifugalmoment von F, bezogen auf das Achsenkreuz xy. Damit wird

$$J_u = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha .$$

Entsprechend wird

$$J_v = J_x \cdot \sin^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha .$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} J_{uv} &= \int dF \cdot x' \cdot y' = \int dF\,(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \\ &= \int dF \cdot xy \cdot \cos^2\alpha - \int dF \cdot x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ &\qquad + \int dF \cdot y^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \int dF \cdot xy \cdot \sin^2\alpha \\ &= J_{xy} \cdot \cos^2\alpha - J_y \cdot \sin\alpha\cos\alpha + J_x \cdot \sin\alpha\cos\alpha - J_{xy} \cdot \sin^2\alpha , \end{aligned}$$

$$J_{uv} = J_{xy} \cdot \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\,(J_x - J_y) .$$

Für $\alpha = 45^\circ$ erhält man

$$\begin{aligned} J_u &= \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{xy} , \\ J_v &= \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) + J_{xy} , \\ J_{uv} &= \tfrac{1}{2}(J_x - J_y) . \end{aligned}$$

Wird $J_{uv} = 0$, so ergibt sich mit $\alpha = \alpha_0$ aus

$$0 = J_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha_0 \cdot (J_x - J_y) ,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} .$$

Die dem Werte α_0 entsprechenden Achsen u und v heißen **Hauptachsen**, die auf sie bezogenen Trägheitsmomente **Hauptträgheitsmomente**. Ihre Größe bestimmt sich mit

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1 + \cos 2\alpha_0}{2} , \qquad \text{bzw.} \qquad \sin^2\alpha_0 = \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{2}$$

und

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} = \frac{J_y - J_x}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}}$$

zu

$$J_{\min} = J_x\left(\frac{1}{2} + \frac{J_y - J_x}{2\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}}\right) + J_y\left(\frac{1}{2} - \frac{J_y - J_x}{2\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}}\right)$$

$$- J_{xy}\cdot\frac{\dfrac{2J_{xy}}{J_y - J_x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{2J_{xy}}{J_y - J_x}\right)^2}},$$

$$J_{\min} = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

Entsprechend wird

$$J_{\max} = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

Durch Differenzieren von J_u nach α läßt sich nämlich leicht nachweisen, daß die auf die Hauptachsen bezogenen Trägheitsmomente unter allen Trägheitsmomenten, die für denselben Punkt 0 ermittelt werden können, den größten bzw. kleinsten Wert ergeben.

Sind die Hauptachsen I und II eines Querschnittes und die auf sie bezogenen Hauptträgheitsmomente J_I und J_{II} bestimmt, so ist das Trägheitsmoment, bezogen auf eine um den Winkel α gegen I geneigte Achse u, weil $J_{xy} = 0$ ist,

$$J_u = J_I \cdot \cos^2\alpha + J_{II}\cdot\sin^2\alpha.$$

Entsprechend werden

$$J_v = J_I \cdot \sin^2\alpha + J_{II}\cos^2\alpha,$$

$$J_{uv} = \tfrac{1}{2}(J_I - J_{II})\cdot\sin 2\alpha.$$

Das Zentrifugalmoment eines Querschnittes kann größer als Null, d. h. positiv sein; es kann gleich Null und es kann kleiner als Null, d. h. negativ sein. Es sei

$J_{xy} > 0$, also positiv; dann ist zu unterscheiden:

$J_x > J_y$ mit $\alpha_0 < 0$, also negativ, und $J_u > J_v$,

$J_x < J_y$ mit $\alpha_0 > 0$, also positiv, und $J_u < J_v$.

$J_{xy} < 0$, also negativ; dann ist zu unterscheiden

$J_x > J_y$ mit $\alpha_0 > 0$, also positiv, und $J_u > J_v$,

$J_x < J_y$ mit $\alpha_0 < 0$, also negativ, und $J_u < J_v$.

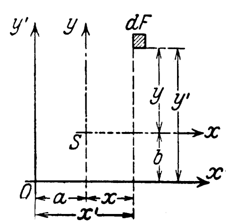


Abb. 108. Zentrifugalmoment.

Ist J_{xy} das Zentrifugalmoment, bezogen auf ein Achsenkreuz durch den Schwerpunkt S (Abb. 108), dann ist das Zentrifugalmoment desselben Querschnittes, bezogen auf ein p a r a l l e l e s Achsenkreuz mit a und b als Koordinaten des neuen Ursprungs

$$J'_{xy} = \int dF\cdot x'\cdot y' = \int dF\,(x + a)\,(y + b)$$

$$= \int dF\cdot x\cdot y + a\int dF\cdot y + b\int dF\,x + ab\cdot\int dF,$$

wobei $\int dF\cdot y$ und $\int dF\cdot x$ als statische Momente, bezogen auf Schwerachsen gleich Null sind; demnach wird

$$J'_{xy} = J_{xy} + F\cdot a\cdot b.$$

b) Das Zentrifugalmoment für schiefe Achsen.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 109 wird das auf die schiefen Achsen A und B bezogene Zentrifugalmoment

$$J_{ab} = \int dF \cdot a \cdot b\,.$$

Mit $a = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha$ und $b = y \cdot \cos\beta - x \cdot \sin\beta$ wird

$$\begin{aligned} J_{ab} &= \int dF\,(y^2 \cos\alpha\cos\beta - xy \cdot \sin\alpha\cos\beta - xy \cdot \cos\alpha\sin\beta + x^2 \cdot \sin\alpha\sin\beta),\\ &= \int dF \cdot y^2 \cos\alpha\cos\beta - \int dF \cdot xy \cdot \sin(\alpha+\beta) + \int dF \cdot x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta\,,\\ &= J_x \cdot \cos\alpha\cos\beta - J_{xy} \cdot \sin(\alpha+\beta) + J_y \cdot \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

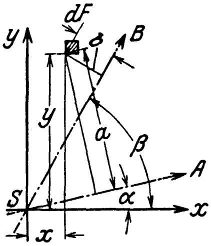


Abb. 109. Zentrifugalmoment für schiefe Achsen.

Sind x und y Hauptachsen, so wird $J_{xy} = 0$; dann ist

$$J_{ab} = J_I \cos\alpha \cdot \cos\beta + J_{II} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta\,.$$

Das Zentrifugalmoment J_{ab} wird gleich Null, wenn

$$J_I \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + J_{II} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0$$

wird; d. h.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{J_I}{J_{II}} = -\frac{F \cdot i_1^2}{F \cdot i_2^2} = -\frac{i_1^2}{i_2^2}\,,$$

wenn $J_I = F \cdot i_1^2$ und $J_{II} = F \cdot i_2^2$ gesetzt werden. Zwei Achsen, für die das Zentrifugalmoment gleich Null wird, heißen zugeordnete oder konjugierte Achsen. Die Hauptachsen sind konjugierte Achsen, die aufeinander senkrecht stehen.

c) Die Trägheitsellipse.

Trägt man auf der u-Achse, die gegen die Hauptachse A (Abb. 107) um den Winkel α geneigt ist, die Strecken

$OP = \varrho = \dfrac{1}{\sqrt{J_u}}$ ab, so wird $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 = \dfrac{1}{J_u}$.

Mit $J_u = J_a \cdot \cos^2\alpha + J_b \cdot \sin^2\alpha$ wird $\xi^2 + \eta^2 = \dfrac{1}{J_a \cdot \cos^2\alpha + J_b \cdot \sin^2\alpha}$

und infolge $\cos\alpha = \dfrac{\xi}{\varrho}$ und $\sin\alpha = \dfrac{\eta}{\varrho}$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{J_a \cdot \dfrac{\xi^2}{\varrho^2} + J_b \cdot \dfrac{\eta^2}{\varrho^2}} \quad \text{oder} \quad J_a \cdot \xi^2 + J_b \cdot \eta^2 = 1\,.$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse, der Trägheitsellipse, bezogen auf das Achsenkreuz AB. Da A und B die Hauptachsen sind, heißt sie Zentralellipse.

Setzt man $J_a = F \cdot i_a^2$; $J_b = F \cdot i_b^2$; $J_v = F \cdot i_v^2$ und zieht im Abstande i_v von der v-Achse (Abb. 110) eine Parallele und wiederholt diese Konstruktion für alle durch O gehenden Achsen, so sind die Parallelen Tangenten an eine Ellipse, die zweite oder Culmannsche Trägheitsellipse. Beide Ellipsen sind ähnlich. Konjugierte Achsen sind konjugierte Halbmesser der Trägheitsellipse.

Beispiele. 1. Das Rechteck. Trägheitsellipse für den Schwerpunkt S. Mit b und h als Seiten des Rechtecks wird

$$J_a = \frac{b\,h^3}{12}; \quad F = b \cdot h; \quad i_a^2 = \frac{J_a}{F} = \frac{h^2}{12}; \quad i_a = 0{,}289 \cdot h;$$

$$J_b = \frac{h\,b^3}{12}; \quad F = b \cdot h; \quad i_b^2 = \frac{J_b}{F} = \frac{b^2}{12}; \quad i_b = 0{,}289 \cdot b.$$

2. Der Kreis. $J_a = \frac{\pi \cdot r^4}{4}; \quad F = \pi \cdot r^2; \quad i_a^2 = \frac{r^2}{4}; \quad i_a = \frac{r}{2}.$

Bei Querschnitten, die mehr als ein System senkrecht aufeinander stehender zugeordneter Achsen haben, wird die Trägheitsellipse ein Kreis. Für Querschnitte dieser Art (Quadrat, regelmäßiges Sechseck, Kreis usw.) sind die Trägheitsmomente für alle Achsen gleich groß.

3. I-Eisen. Querschnitt und Trägheitsmomente sind der Tabelle zu entnehmen. Z. B. wird für NP 34 mit Berücksichtigung der Abb. 110 $F = 86{,}8\ \text{cm}^2$; $J_b = 15695\ \text{cm}^4$; $J_a = 674\ \text{cm}^4$;

$$i_b = \sqrt{\frac{15695}{86{,}8}} = 13{,}4\ \text{cm}; \quad i_a = \sqrt{\frac{674}{86{,}8}} = 2{,}8\ \text{cm};$$

für eine unter $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$ gegen die B-Achse geneigte Achse v wird

$$J_v = F \cdot i_v^2 = 86{,}8 \cdot 8{,}2^2 = \sim 6630\ \text{cm}^4.$$

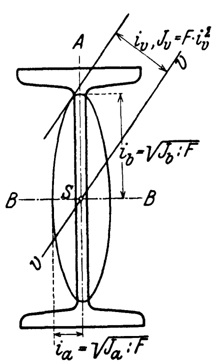


Abb. 110. Culmannsche Trägheitsellipse.

d) Der Trägheitskreis nach Mohr-Land.

Von einem Querschnitt seien gegeben der Schwerpunkt, die Trägheitsmomente J_x und J_y und das Zentrifugalmoment J_{xy} für zwei beliebige aufeinander senkrechte Achsen x und y. Trage auf der y-Achse (Abb. 111) $OD = OC + CD = J_x + J_y$ ab und schlage mit OD als Durchmesser um M einen Kreis, den Trägheitskreis, dann ist $OD = J_p$, dem polaren Trägheitsmoment (vgl. S. 223). O heißt Pol. Errichte auf OD in C eine Senkrechte $CT = J_{xy}$. Da das Zentrifugalmoment größer, gleich oder kleiner als Null werden kann, pflegt man die positiven Zentrifugalmomente nach rechts abzutragen. Der Punkt T heißt Trägheitshauptpunkt. Dann schneidet der Durchmesser durch T den Trägheitskreis in den Punkten A und B, durch welche die Hauptachsen des Querschnittes gehen. Für zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende Achsen u, v erhält man auf EF

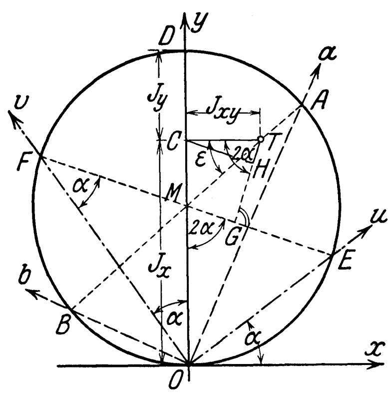


Abb. 111. Trägheitskreis nach Mohr-Land.

durch das Lot TG von T auf EF die Trägheitsmomente $EG = J_u$, $FG = J_v$ und das Zentrifugalmoment $TG = J_{uv}$.

Der Kreis ist die Darstellung der Gleichungen

$$J_u = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha \,,$$
$$J_v = J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha \,.$$

Es ist

$$OD = J_x + J_y; \qquad \tfrac{1}{2} OD = r = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y)\,,$$
$$MC = J_x - r = \tfrac{1}{2}(J_x - J_y)\,,$$
$$EG = EM - MG = r - MG = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - MG\,,$$
$$FG = EM + MG = r + MG = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) + MG\,.$$

In dem Dreieck MCT ist

$$MT = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}\,,$$
$$MG = MT \cdot \sin(2\alpha - \varepsilon) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2} \cdot \sin(2\alpha - \varepsilon)\,,$$

wobei

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{J_x - J_y}{2 J_{xy}}$$

ist. Aus $\sin(2\alpha - \varepsilon) = \sin 2\alpha \cdot \cos \varepsilon - \cos 2\alpha \cdot \sin \varepsilon$ folgt mit

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = \frac{2 J_{xy}}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}}$$

und

$$\sin \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = \frac{J_x - J_y}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}}\,,$$
$$MG = J_{xy} \cdot \sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}(J_x - J_y) \cdot \cos 2\alpha\,.$$

Damit wird

$$EG = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}(J_x - J_y) \cdot \cos 2\alpha$$
$$= J_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + J_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha\,,$$
$$EG = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha\,.$$

Aus $FG = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) + MG$

folgt $FG = J_x \cdot \sin^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha\,.$

Fällt man von C das Lot CH auf TG, so wird

$$TG = GH + HT = MC \cdot \sin 2\alpha + CT \cdot \cos 2\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cdot \cos 2\alpha\,.$$

Die Achsen OA und OB sind Hauptachsen, weil für sie das Zentrifugalmoment J_{xy}, das gleich dem Lote von T auf den Durchmesser AB sein müßte, gleich Null wird. Man erhält

$$TB = J_{\max} \quad \text{und} \quad TA = J_{\min}\,.$$

Zentrifugalmoment für schiefwinklige Achsen. Sind I und II Hauptachsen, so ist das Zentrifugalmoment für zwei schiefe Achsen a und b (nach S. 126)

$$J_{ab} = J_{\mathrm{I}} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + J_{\mathrm{II}} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta .$$

In Abb. 112 seien I und II die bereits gefundenen Hauptachsen; auf II sind abgetragen

$$OT = J_{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad TD = J_{\mathrm{II}} .$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 112 wird

$$TG = MF - ME = MA \cdot \cos(\beta - \alpha) - MT \cdot \sin[(\alpha + \beta) - 90°],$$

da $TE \parallel BA$ ist. Mit

$$MA = MO = \tfrac{1}{2}(J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}})$$

und

$$MT = \tfrac{1}{2}(J_{\mathrm{I}} - J_{\mathrm{II}})$$

wird

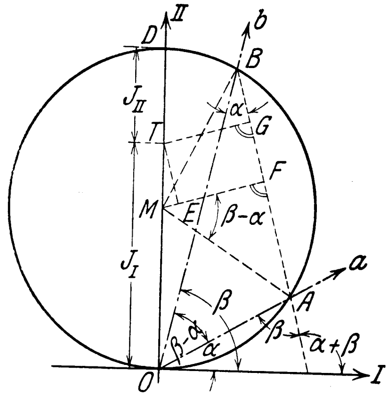


Abb. 112. Zentrifugalmoment für schiefwinklige Achsen.

$$TG = \tfrac{1}{2}(J_{\mathrm{I}} + {}_{\mathrm{II}}) \cdot \cos(\beta - \alpha) + \tfrac{1}{2}(J_{\mathrm{I}} - J_{\mathrm{II}}) \cdot \cos(\alpha + \beta)$$
$$= J_{\mathrm{I}} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + J_{\mathrm{II}} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = J_{ab} .$$

J_{ab} wird gleich Null, wenn AB durch den Hauptträgheitspunkt T geht.

e) Die Bestimmung von Trägheits- und Zentrifugalmomenten ebener Flächen.

Die rechnerische Ermittlung axialer Trägheitsmomente siehe S. 72.

1. Das Rechteck. Das Zentrifugalmoment, bezogen auf das xy-Achsenkreuz (Abb. 113) ist

$$J_{xy} = \int dF \cdot x \cdot y$$

oder mit $dF = dx \cdot dy$

$$J_{xy} = \int_0^b x\,dx \int_0^h y\,dy .$$

Es ist aber

$$\int_0^h y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{h^2}{2},$$

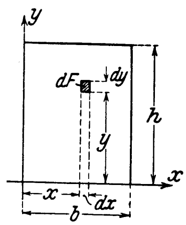


Abb. 113. Rechteck.

demnach

$$J_{xy} = \int_0^b x\,dx \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2}\int_0^b x\,dx .$$

Mit $\displaystyle\int_0^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{b^2}{2}$ wird $\displaystyle J_{xy} = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{b^2 h^2}{4}.$

2. Blechträger mit 1 Stehblech 500 × 10, 4 normalen Winkeleisen 80 × 80 × 10 und 1 Gurtplatte 200 × 10; Nietdurchmesser 20 mm (Abb. 114).

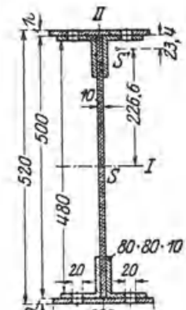


Abb. 114. Blechträger.

$$
\begin{aligned}
J_{\text{Stehblech}} &= \frac{1}{12}\cdot 50^3 &&= \ldots\ldots\ 10417\ \text{cm}^4\\
J_{\text{Winkel}} &= 4\cdot 87{,}5 &&= \ldots\ldots\ 350\ ,,\\
&\quad + 4\cdot 15{,}1\cdot 22{,}66^2 &&= \ldots\ldots\ 31014\ ,,\\
J_{\text{Gurtplatte}} &= \frac{20}{12}(52^3-50^3) &&= \ldots\ldots\ 26013\ ,,\\
&\qquad\qquad J_{\text{voll}} &&= \ldots\ldots\ 67794\ \text{cm}^4\\
\text{Abzug Niete} &= \frac{4}{12}(52^3-48^3) &&= \ldots\ldots\ 10005\ ,,\\
&\qquad\qquad J_{\text{I}} &&= \ldots\ldots\ 57789\ \text{cm}^4\\
\text{Widerstandsmoment } W_{\text{I}} &&&= \frac{57789}{26} = 2223\ \text{cm}^3.
\end{aligned}
$$

Das Zentrifugalmoment für die Achsen I, II ist gleich Null.

3. Scharfkantiges ungleichschenkliges Winkeleisen (Abb. 115). Die Lage der Hauptachsen a und b, sowie die Hauptträgheitsmomente sind

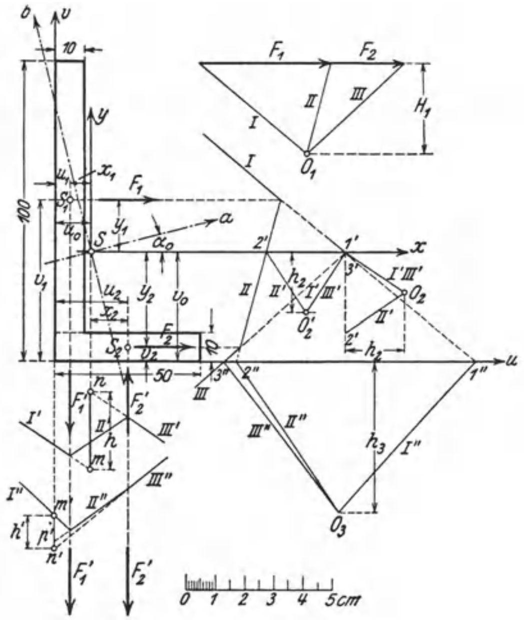


Abb. 115. Scharfkantiges ungleichschenkliges Winkeleisen.

zu bestimmen. Der Neigungswinkel α_0 ergibt sich nach S. 124 aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\,J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Die Hauptträgheitsmomente werden

$$J_{\max} = J_a = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4\,J_{xy}^2},$$

$$J_{\min} = J_b = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4\,J_{xy}^2}.$$

Ist J_{uv} das Zentrifugalmoment, bezogen auf die Achsen u und v, so ist nach S. 125

$$J_{xy} = J_{uv} - F \cdot u_0 \cdot v_0 .$$

Mit $F = 14\ \text{cm}^2$ wird

$$u_0 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 9 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{14} = 1{,}214\ \text{cm},$$

$$v_0 = \frac{5 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 \cdot 5{,}5}{14} = 3{,}714\ \text{cm},$$

$$J_u = \frac{5 \cdot 1^3}{3} + \tfrac{1}{3}(10^3 - 1^3) = 334{,}7\ \text{cm}^4,$$

$$J_x = J_u - F \cdot v_0^2 = 334{,}7 - 14 \cdot 3{,}714^2 = 141{,}6\ \text{cm}^4,$$

$$J_v = \frac{1 \cdot 5^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} = 44{,}7\ \text{cm}^4,$$

$$J_y = J_v - F \cdot u_0^2 = 44{,}7 - 14 \cdot 1{,}214^2 = 24{,}1\ \text{cm}^4,$$

$$J_{uv} = \int dF \cdot u \cdot v = F_1 \cdot u_1 \cdot v_1 + F_2 \cdot u_2 \cdot v_2 = 9 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 5{,}5 + 5 \cdot 1 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5 = 31\ \text{cm}^4,$$

$$J_{xy} = J_{uv} - F \cdot u_0 \cdot v_0 = 31 - 14 \cdot 1{,}214 \cdot 3{,}714 = -32{,}128\ \text{cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2 \cdot 32{,}128}{24{,}1 - 141{,}6} = 0{,}54681; \quad 2\alpha_0 = 28^\circ\, 41'; \quad \alpha_0 = 14^\circ\, 20{,}5',$$

$$J_{\max} = J_a = \tfrac{1}{2}(141{,}6 + 24{,}1) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(141{,}6 - 24{,}1)^2 + 4 \cdot (-32{,}1)^2} = 150\ \text{cm}^4,$$

$$J_{\min} = J_b = \tfrac{1}{2}(141{,}6 + 24{,}1) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(141{,}6 - 24{,}1)^2 + 4 \cdot (-32{,}1)^2} = 16\ \text{cm}^4.$$

4. Beliebig begrenzte ebene Flächen. Verfahren von Nehls. Die axialen Trägheitsmomente sind für den Querschnitt nach Abb. 116 bereits auf S. 84 ermittelt worden.

Das Zentrifugalmoment, bezogen auf das Achsenkreuz u, v ist

$$J_{uv} = \int dF \cdot u' \cdot v = \int \xi \cdot dv \cdot u' \cdot v,$$

$$= ab \cdot \int \xi \cdot \frac{u'}{b} \cdot \frac{v}{a} \cdot dv .$$

Mit $a = b = 100$ mm wird

$$J_{uv} = a^2 \cdot \int \xi \cdot \frac{u}{a} \cdot \frac{u'}{a} \cdot dv = a^2 \cdot \int z_3 \cdot dv = a^2 \cdot F_3 .$$

Die Ordinaten $z_3 = \xi \cdot \frac{v}{a} \cdot \frac{u'}{a}$ werden von 5 zu 5 mm berechnet und von der Achse II wagerecht nach links abgetragen.

ξ mm	u' mm	v mm	$\frac{v}{a}$	$\xi \cdot \frac{v}{a}$ mm	$\frac{u'}{a}$	$z_3 = \xi \cdot \frac{v}{a} \cdot \frac{u'}{a}$ mm	F_3 mm
0	130	190	1,9	0	1,3	0	
32,4	135,4	180	1,8	58,3	1,354	79	402
57,6	139,6	170	1,7	98	1,396	136,9	1095
75,6	142,6	160	1,6	121	1,426	172,2	1565
86,4	144,4	150	1,5	129,6	1,444	187	1818
90	145	140	1,4	126	1,45	182,5	1864
..	..	..	..	..	..	..	..
							10996

$$J_{uv} = a^2 \cdot F_3 = 10^2 \cdot 109{,}96 = 10996\ \text{cm}^4.$$

Für das Achsenkreuz x, y mit dem Schwerpunkt S als Koordinatenanfangspunkt ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_u - F\cdot v_0^2 = 11\,385 - 54\cdot 14{,}38^2 = 219\ \text{cm}^4\,,\\ J_y &= J_v - F\cdot u_0^2 = 11\,158 - 54\cdot 14{,}21^2 = 254\ \text{cm}^4\,,\end{aligned}\right\}\ \text{Seite 84}$$

$$J_{xy} = J_{uv} - F\cdot u_0\cdot v_0 = 10\,996 - 54\cdot 14{,}38\cdot 14{,}21 = 62\ \text{cm}^4\,.$$

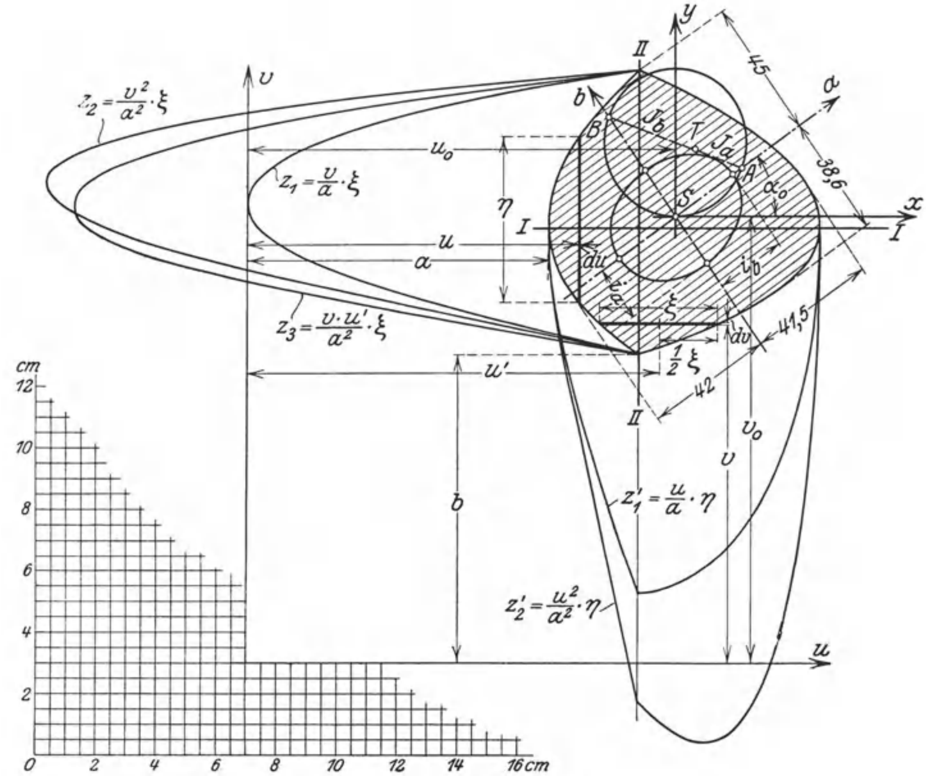


Abb. 68. Verfahren von Nehls.

Die Lage der Hauptachsen ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2\cdot 62}{254-219} = 3{,}54286\,,$$

$$2\alpha_0 = 74^\circ\ 14{,}2'; \quad \alpha_0 = 37^\circ\ 7{,}1'.$$

Die Hauptträgheitsmomente werden:

$$\begin{aligned} J_{\min} = J_a &= J_x\cdot\cos^2\alpha_0 + J_y\cdot\sin^2\alpha_0 - J_{xy}\cdot\sin 2\alpha_0\\ &= 219\cdot 0{,}79739^2 + 254\cdot 0{,}60347^2 - 62\cdot 0{,}96239 = 172\ \text{cm}^4\,,\\ J_{\max} = J_b &= J_x\cdot\sin^2\alpha_0 + J_y\cdot\cos^2\alpha_0 + J_{xy}\cdot\sin 2\alpha_0\\ &= 219\cdot 0{,}60347^2 + 254\cdot 0{,}79739^2 + 62\cdot 0{,}96239 = 301\ \text{cm}^4\,,\\ J_{ab} &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Halbachsen der Culmannschen Trägheitsellipse werden

$$i_a = \sqrt{\frac{J_a}{F}} = \sqrt{\frac{172}{54}} = 1{,}78 \text{ cm}; \quad i_b = \sqrt{\frac{J_b}{F}} = \sqrt{\frac{301}{54}} = 2{,}36 \text{ cm}.$$

Dabei wird $i_a \perp a$-Achse, $i_b \perp b$-Achse aufgetragen.

Der Trägheitskreis nach Mohr-Land ist in Abb. 116 ebenfalls gezeichnet; aus ihm ergeben sich die Lage der Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente zeichnerisch. Der Maßstab lautet 1 mm = 10 cm⁴.

Verfahren von Mohr. Für das auf S. 130 berechnete Winkeleisen (Abb. 115) wollen wir zunächst die axialen Trägheitsmomente zeichnerisch ermitteln (Abb. 117).

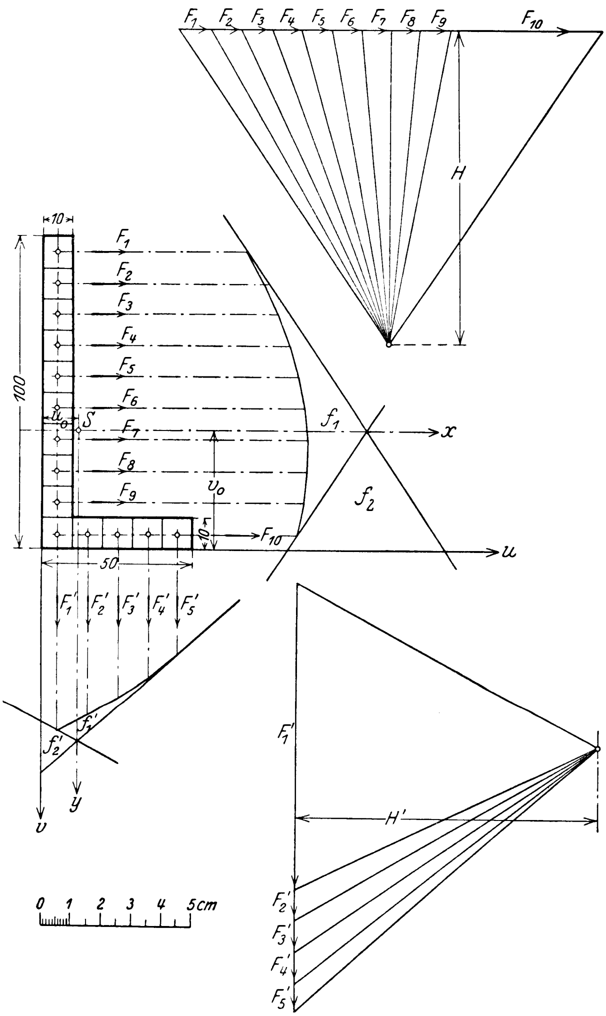


Abb. 117. Verfahren von Mohr.

Wir zerlegen gemäß dem auf S. 78 entwickelten Verfahren den gegebenen Querschnitt in 14 Quadrate, deren Seitenlängen gleich 10 mm sind. Um nun die Trägheitsmomente für die x- und u-Achse zu bestimmen, tragen wir die als Kräfte aufzufassenden Flächeninhalte F_1, F_2, ... F_{10}, die in den Schwerpunkten angreifen, parallel zur x-Achse auf, ziehen den Kräftezug und entwerfen mit der beliebigen Polweite H das Seileck. Verlängert man die beiden äußersten Seilstrahlen, so entstehen die in Abb. 117 angegebenen Flächen f_1 und f_2. Der Längenmaßstab betrug 1 cm = 1 cm, der Flächenmaßstab 1 cm = 1 cm², die Polweite H wurde gleich 10 cm gewählt. Nach Seite 79 ist dann

$$J_x = 2 \cdot H \cdot f_1 = 2 \cdot 10\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}} \cdot 7{,}24\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}^2} = 144{,}8\,\text{cm}^4$$

und

$$J_u = 2 \cdot H \cdot (f_1 + f_2) = 2 \cdot 10\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}} \cdot 17{,}1\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}^2} = 342{,}0\,\text{cm}^4\,.$$

Tragen wir die Inhalte der Flächenstreifen in senkrechter Richtung auf, so wird in ähnlicher Weies mit denselben Maßstäben und derselben Polweite

$$J_y = 2 \cdot H' \cdot f_1' = 2 \cdot 10\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}} \cdot 1{,}21\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}^2} = 24{,}2\,\text{cm}^4$$

und

$$J_v = 2 \cdot H' \cdot (f_1' + f_2') = 2 \cdot 10\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}} \cdot 2{,}21\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}^2} = 44{,}2\,\text{cm}^4\,.$$

Zur Bestimmumg des Zentrifugalmomentes zerlegt man den gegebenen Querschnitt (Abb. 115) in Teilflächen, deren Inhalte und Schwerpunkte bekannt sind, und faßt wieder die Flächeninhalte als Kräfte in den Schwerpunkten der Teilflächen auf. Soll das Zentrifugalmoment J_{xy}, bezogen auf das durch den Gesamtschwerpunkt S gelegte Achsenkreuz x, y bestimmt werden, so zeichnet man den Kräftezug F_1, F_2 parallel zur x-Achse und entwirft mit beliebiger Polweite H_1 das Seileck I, II, III. Die Seilstrahlen treffen die x-Achse in den Punkten $1'$, $2'$, $3'$, von denen $1'$ und $3'$ zusammenfallen, weil die x-Achse Schwerachse ist. Der Linienzug $1'$, $2'$, $3'$ wird jetzt ebenfalls als Kräftezug, aber parallel zur y-Achse, aufgefaßt und zu ihm mit der beliebigen Polweite h_2 zu den Teilflächen F_2' F_2', parallel zur y-Achse, das Seileck I', II', III' entworfen. Ist F_1' senkrecht nach unten angenommen, so muß F_2' senkrecht nach oben gerichtet sein. Statt die Drehung des Linienzuges $1'$, $2'$, $3'$ um 90^0 durchzuführen, kann man auch aus O_2' die Polstrahlen ziehen und die Seilstrahlen I', II', III' senkrecht zu den Polstrahlen $O_2'\,1'$, $O_2'\,2'$, $O_2'\,3'$ entwerfen. Die äußersten Seilstrahlen I' und III' schneiden auf der y-Achse die Strecke $mn = h$ ab. Ist $mn = h$ nach oben gerichtet, liegt also n über m, so ist h negativ und umgekehrt. Mit der so erhaltenen Seileckordinate $-h$ wird

$$J_{xy} = H_1 \cdot h_2 \cdot (-h) = -H_1 \cdot h_2 \cdot h\,.$$

Hierbei werden H_1 im Flächenmaßstab, h_2 und h im Längenmaßstab gemessen. Lauten die Maßstäbe 1 cm = 1 cm für die Längen; 1 cm = 2 cm² für die Flächen, so wird

$$J_{xy} = -3\,\text{cm} \cdot \frac{2\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}} \cdot 2\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{cm}} \cdot 2{,}7\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{cm}} = -32{,}2\,\text{cm}^4.$$

Es ist $\quad J_{xy} = \Sigma \Delta F \cdot x \cdot y = F_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot x_2 \cdot y_2 < 0\,,$

weil x_1 und y_2 negativ sind. Aus

$$\begin{array}{l|l|l} F_1 : H_1 = 1'\,2' : y_1 & F_1 \cdot y_1 = H_1 \cdot 1'\,2' & F_1 \cdot y_1 \cdot x_1 = H_1 \cdot 1'\,2' \cdot x_1 \\ F_2 : H_1 = 2'\,1' : y_2 & F_2 \cdot y_2 = H_1 \cdot 2'\,1' & F_2 \cdot y_2 \cdot x_2 = H_1 \cdot 2'\,1' \cdot x_2 \end{array}$$

und
$$1'\,2' : h_2 = mp : x_1 \quad\Big|\quad 1'\,2' \cdot x_1 = h_2 \cdot mp$$
$$2'\,1' : h_2 = pn : x_2 \quad\Big|\quad 2'\,1' \cdot x_2 = h_2 \cdot pn$$
folgt
$$F_1 \cdot x_1 \cdot y_1 = H_1 \cdot 1'\,2' \cdot x_1 = H_1 \cdot h_2 \cdot mp$$
$$F_2 \cdot x_2 \cdot y_2 = H_1 \cdot 2'\,1' \cdot x_2 = H_1 \cdot h_2 \cdot pn$$
$$J_{xy} = F_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot x_2 \cdot y_2 = H_1 \cdot h_2 \cdot (mp + pn) = H_1 \cdot h_2 \cdot h < 0 \,.$$

Das negative h kommt in der Zeichnung dadurch zum Ausdruck, daß $mn = h$ nach oben gerichtet ist.

Soll das Zentrifugalmoment für das Achsenkreuz u, v berechnet werden, so sind die Schnittpunkte $1''$ $2''$ $3''$ der Seilstrahlen I, II, III mit der u-Achse zu bestimmen und zu dem Linienzuge $1''$ $2''$ $3''$, aber parallel zur v-Achse, mit der beliebigen Polweite h_3 das Seileck I'', II'', III'' zu entwerfen. In diesem Falle sind F_1' und F_2' gleich gerichtet. Die Seilstrahlen I'', II'', III'' stehen senkrecht auf den Polstrahlen $O_3\,1''$, $O_3\,2''$, $O_3\,3''$. Die äußersten Seilstrahlen I'' und III'' schneiden auf der v-Achse $m'\,n' = h'$ ab, dann ist
$$J_{uv} = H_1 \cdot h_2 \cdot h' > 0 \,,$$
da $m'\,n'$ nach unten gerichtet ist. Für das Achsenkreuz u, v wird
$$J_{uv} = \sum \Delta F \cdot u \cdot v = F_1 \cdot u_1 \cdot v_1 + F_2 \cdot u_2 \cdot v_2 > 0 \,,$$
weil u_1, v_1 und u_2, v_2 positiv sind. Aus
$$F_1 : H_1 = 1''\,2'' : v_1 \quad\Big|\quad F_1 \cdot v_1 = H_1 \cdot 1''\,2'' \quad\Big|\quad F_1 \cdot v_1 \cdot u_1 = H_1 \cdot 1''\,2'' \cdot u_1$$
$$F_2 : H_1 = 2''\,3'' : v_2 \quad\Big|\quad F_2 \cdot v_2 = H_1 \cdot 2''\,3'' \quad\Big|\quad F_2 \cdot v_2 \cdot u_2 = H_1 \cdot 2''\,3'' \cdot u_2$$
$$1''\,2'' : h_3 = m'\,p' : u_1 \quad\Big|\quad 1''\,2'' \cdot u_1 = h_3 \cdot m'\,p'$$
$$2''\,3'' : h_3 = p'\,n' : u_2 \quad\Big|\quad 2''\,3'' \cdot u_2 = h_3 \cdot p'\,n'$$
folgt
$$F_1 \cdot u_1 \cdot v_1 = H_1 \cdot 1''\,2'' \cdot u_1 = H_1 \cdot h_3 \cdot m'\,p'$$
$$F_2 \cdot u_2 \cdot v_1 = H_1 \cdot 2''\,3'' \cdot u_2 = H_1 \cdot h_3 \cdot p'\,n'$$
$$J_{uv} = F_1 \cdot u_1 \cdot v_1 + F_2 \cdot u_2 \cdot v_2 = H_1 \cdot h_3 \cdot (m'\,p' + p'\,n')\, H_1 \cdot h_3 \cdot h' > 0 \,.$$

Mit den Abmessungen und Maßstäben der Abb. 115 wird
$$J_{uv} = 3\,\text{cm} \cdot \frac{2\,\text{cm}^2}{1\,\text{cm}} \cdot 5\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{cm}} \cdot 1{,}05\,\text{cm} \cdot \frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{cm}} = 31{,}5\,\text{cm}^4 \,.$$

Die Hauptachsen und die Trägheitsellipse werden in gleicher Weise gefunden wie in Abb. 111.

9. Unsymmetrische Belastung.

Bei unsern bisherigen Untersuchungen hatten wir stets vorausgesetzt, daß die Schnittgerade der Momentebene mit der Querschnittebene auf der Nullinie des Querschnittes senkrecht stehen soll, und hatten ferner festgelegt, daß dann die Kraftlinie mit einer Symmetrieachse des Querschnittes zusammenfallen muß, bzw. daß die Nullinie Symmetrieachse sein muß. Das war bisher Voraussetzung, ohne daß wir einen Nachweis dafür erbracht haben. Das soll jetzt nachgeholt werden (S. 138).

Ausgangspunkt der Untersuchung war die Bernoullische Annahme, daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben. Denken wir uns die Ebenen I und II (Abb. 49) zum Schnitt gebracht, so wird diese Schnittgerade bei beliebig geformtem Querschnitt windschief zur Zeichenebene, aber senkrecht zur Stabachse stehen. Von ihr gleichweit entfernte Faserschichten des Stabes werden in allen Punkten gleich stark gebogen, erfahren also gleich große Dehnungen. Die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt, werden wir weiter sagen, daß alle Faserschichten, die gleichen Abstand von der Schnittgeraden der Ebenen I und II haben, auch gleich große Spannungen erfahren. Die Nullinie des Querschnittes ist eine Parallele zur Schnittgeraden der Ebenen I und II. Im Sonderfall des rechteckigen Querschnittes sehen wir ohne weiteres, daß diese Schnittgerade auf der Zeichenebene senkrecht steht.

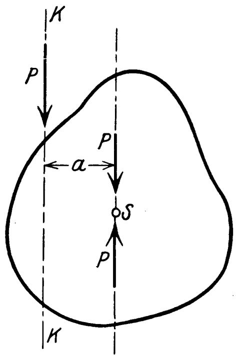


Abb. 118. Die Kraftlinie geht nicht durch den Schwerpunkt.

An der Überlegung, daß die Nullinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen muß, wird nichts geändert, wenn wir einen beliebig geformten Querschnitt voraussetzen und damit eine windschiefe Schnittgerade der zum Schnitt gebrachten Querschnittebenen erhalten, denn auch in diesem Falle muß die Summe aller Zugspannungen gleich der Summe aller Druckspannungen sein.

Wie auch immer die Kraftlinie KK (Abb. 118) den Querschnitt schneidet, stets sind wir in der Lage, die Ebene des biegenden Momentes so zu legen, daß sie durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht. Denken wir den zu untersuchenden Schnitt durch die Wirkungslinie einer angreifenden Last P (Abb. 118) gelegt, so fügen wir zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P im Schwerpunkt S hinzu, deren Wirkungslinie parallel zu KK verläuft. Wir erhalten die Einzelkraft P im Punkte S und ein in Abb. 118 linksdrehendes Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot a$, das eine Drehung des Stabes verursacht. Diesen Fall scheiden wir aus, da nur Biegung untersucht werden soll, bei der die Kraftlinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen muß. Diese von uns geforderte Bedingung ist nicht immer in der Wirklichkeit erfüllt; bei einem hochstehenden [-Eisen beispielsweise kann die Last den Querschnitt in einer Geraden schneiden, die durch die Mittellinie des Steges, also nicht durch den Schwerpunkt geht. Dann geben unsere Gleichungen auch nur ein angenähertes Bild von der Beanspruchung.

Wir machen also die Voraussetzung, daß die Kraftlinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht. Es wäre jetzt die Aufgabe zu lösen, zu einer gegebenen Kraftlinie die Nullinie zu suchen. Abb. 119 möge den Zusammenhang oder die Zuordnung von Kraft- und Nulllinie erläutern. Die Nullinie ist wagerecht gelegt, sie läuft parallel zu der Geraden, in der sich zwei benachbarte Querschnitte schneiden, und die Spannungen σ sind den Entfernungen y von der Nullinie verhältnisgleich. Die Kraftlinie KK schneide die Nullinie unter dem Winkel α. Eine Belastung dieser Art nennen wir unsymmetrische Belastung. Sie ist beispielsweise bei einer Dachpfette vorhanden, die über schräg ansteigenden Bindern liegt (Abb. 120).

Die Drehung des Querschnittes um die Nullinie wird durch das Biegungsmoment der äußeren Kräfte hervorgerufen. Würde sich der Querschnitt gleichzeitig um die Kraftlinie drehen, so könnte er nicht mehr eben bleiben. Damit keine Drehung um die Kraftlinie KK erfolgt, muß die Summe der statischen Momente der als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen σ, bezogen auf KK, gleich Null sein. Das Flächenteilchen dF (Abb. 119) überträgt $\sigma \cdot dF$ [kg], die am Hebelarm u an-

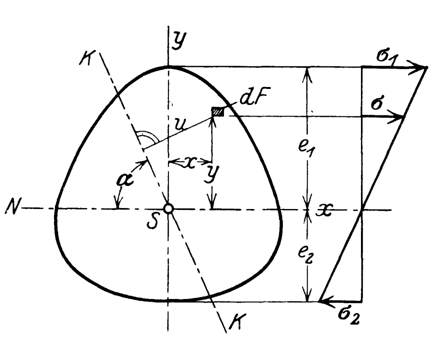


Abb. 119. Unsymmetrische Belastung.

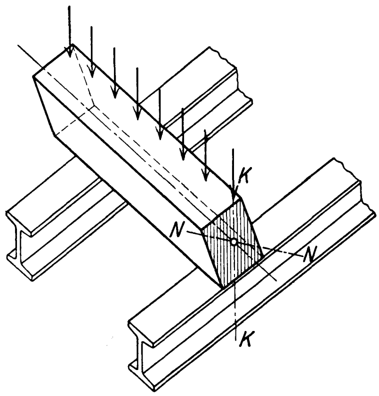


Abb. 120. Dachpfette.

greifen; das statische Moment dieser Teilkraft, mit der das Flächenteilchen an der Kraftübertragung teilnimmt, ist $\sigma \cdot dF \cdot u$ [cmkg]. Die Bedingung $\Sigma M = 0$ liefert

$$\int \sigma \cdot dF \cdot u = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma_0 \cdot \int dF \cdot u \cdot y = 0\,,$$

wenn wir σ durch $\sigma_0 \cdot y$ ersetzen. Da σ_0 als Spannung in der Entfernung „Eins" von der Nullinie nicht gleich Null sein kann, folgt als Bedingung für den Zusammenhang zwischen Kraft- und Nullinie

$$\int dF \cdot u \cdot y = 0\,.$$

Es ist also das Zentrifugalmoment, bezogen auf die Kraftlinie und Nullinie als Achsen, gleich Null. Daraus folgt, daß Kraftlinie und Nullinie konjugierte Achsen sind (S. 126). Sollen daher beide Achsen aufeinander senkrecht stehen, so muß die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammenfallen; die Nullinie ist dann die andere Hauptachse. Ist insbesondere die y-Achse Symmetrieachse, wie in Abb. 119, so entspricht dem rechts von der y-Achse liegenden Flächenteilchen dF ein symmetrisch liegendes dF links von der y-Achse. Da beide Teilchen die gleiche Spannung σ erfahren, ist

$$\int \sigma \cdot dF \cdot x = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma_0 \cdot \int dF \cdot x \cdot y = 0 \,.$$

Das bedeutet, daß jede Symmetrielinie Hauptachse ist, woraus der im Anfang des Abschnittes behauptete Satz folgt.

Die Ebene des Kräftepaares schneide die Querschnittebene in der Geraden KSK (Abb. 121); sie schließe mit der Hauptachse I den Winkel β ein. Die Nullinie NS bilde mit derselben Achse den Winkel α. Bezeichnet man entsprechend den Hauptachsen I und II die Hauptträgheitsmomente mit J_{I} und J_{II}, so wird nach S. 126

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{II}}} \quad \text{und daraus} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \cdot \frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{II}}} \,.$$

Damit ist die Lage der Nullinie bestimmt, wenn die Hauptachsen des Querschnittes bekannt sind. Ist $\beta < 90^\circ$, wie in Abb. 121, so wird α negativ und ist im Sinne des Uhrzeigers abzutragen. Der Winkel, den die Nullinie mit der Kraftlinie bildet, wird $\delta = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

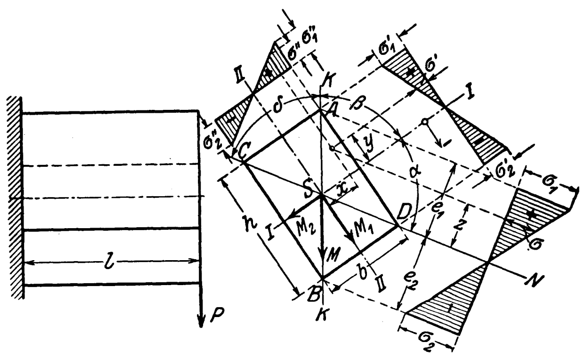


Abb. 121. Unsymmetrische Belastung.

Zerlegt man das angreifende Moment M in M_1 in Richtung II und M_2 in Richtung I, so ist

$$M_1 = M \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad M_2 = M \cdot \cos\beta \,.$$

Für den bliebigen Punkt x, y des Querschnittes werden

$$\sigma' = \frac{M_1}{J_{\mathrm{I}}} \cdot y, \text{ wenn } M_1 \text{ allein wirkt,}$$

$$\sigma'' = \frac{M_2}{J_{\mathrm{II}}} \cdot x, \text{ wenn } M_2 \text{ allein wirkt;}$$

beide Einzelspannungen addieren sich, wenn M wirkt, so daß

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_1}{J_{\mathrm{I}}} \cdot y + \frac{M_2}{J_{\mathrm{II}}} \cdot x = M\left(\frac{\sin\beta}{J_{\mathrm{I}}} \cdot y + \frac{\cos\beta}{J_{\mathrm{II}}} \cdot x\right)$$

ist. Setzt man für $\operatorname{tg}\beta$ den absoluten Wert $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{II}}}$ ein und beachtet, daß

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{J_{\mathrm{I}} \cdot \cos\alpha}{\sqrt{J_{\mathrm{II}}^2 \cdot \sin^2\alpha + J_{\mathrm{I}}^2 \cdot \cos^2\alpha}} \,,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{J_{\mathrm{II}} \sin\alpha}{\sqrt{J_{\mathrm{II}}^2 \cdot \sin^2\alpha + J_{\mathrm{I}}^2 \cdot \cos^2\alpha}}$$

werden, so ergibt sich für

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M}{\sqrt{J_{II}^2 \cdot \sin^2\alpha + J_I^2 \cos^2\alpha}} (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha)\,.$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist ebenfalls ein Trägheitsmoment und wird nach R. Land mit J' bezeichnet; es ist darstellbar als Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheden $J_I \cdot \cos\alpha$ und $J_{II} \cdot \sin\alpha$. Damit wird

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M}{J'} (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha)\,.$$

σ läßt sich darstellen als Ordinate in einem Spannungsschaubild mit der Nullinie als Achse (Abb. 121) im Abstande z, denn es ist $z = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$. Aus

$\delta = 180^0 - (\alpha + \beta)$ folgt $\sin\delta = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

und mit

$$\cos\beta = \frac{J_{II} \sin\alpha}{\sqrt{J_{II}^2 \cdot \sin^2\alpha + J_I^2 \cdot \cos^2\alpha}}\,; \text{ bzw. } \sin\beta = \frac{J_I \cdot \cos\alpha}{\sqrt{J_{II}^2 \cdot \sin^2\alpha + J_I^2 \cdot \cos^2\alpha}}\,:$$

$$\sin\delta = \frac{J_I \cdot \cos^2\alpha + J_{II} \cdot \sin^2\alpha}{\sqrt{J_{II}^2 \cdot \sin^2\alpha + J_I^2 \cdot \cos^2\alpha}} = \frac{J_n}{J'}\,,$$

da nach S. 125 $J_n = J_I \cos^2\alpha + J_{II} \cdot \sin^2\alpha$ das auf die Nullinie bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes ist. Demnach ist

$$\sigma = \frac{M}{\dfrac{J_n}{\sin\delta}} \cdot z = \frac{M}{J'} \cdot z\,.$$

$\sigma_{\max}$ tritt in den Punkten auf, die am weitesten von der Nullinie entfernt sind. Mit $z_{\max} = e_1$, bzw. e_2 ergeben sich die Randspannungen

$$\sigma_1 = \frac{M}{J'} \cdot e_1 \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{M}{J'} \cdot e_2\,. \text{ (Abb. 119 und 121.)}$$

Beispiel. Ein Freiträger von der Länge l und rechteckigem Querschnitt (Abb. 121) mit der Einzellast P am freien Ende sei wagerecht so eingespannt, daß die Kraftlinie mit der senkrechten Diagonale zusammenfällt. Die Zerlegung von $M = P \cdot l$ nach den Richtungen der Hauptachsen I und II liefert

$$M_1 = M \cdot \sin\beta = P \cdot l \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad M_2 = M \cdot \cos\beta = P \cdot l \cdot \cos\beta\,.$$

Mit $\sin\beta = \frac{h}{d}$ und $\cos\beta = \frac{b}{d}$ werden

$$\sigma_1' = \frac{M_1}{J_1} \cdot \frac{h}{2} = \frac{P \cdot l \cdot \frac{h}{d}}{\frac{b h^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6 P l}{b h \cdot d} = \frac{6 P l}{F \cdot d}\,,$$

$$\sigma_1'' = \frac{M_2}{J_{II}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{P l \cdot \frac{b}{d}}{\frac{h b^3}{12}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6 P l}{b h \cdot d} = \frac{6 P l}{F \cdot d}\,,$$

$$\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_1'' = \frac{12 P l}{F \cdot d}\,.$$

Die größten Spannungen treten in den Punkten A und B auf, während C und D spannungslos bleiben; CD ist Nullinie. Aus

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{II}}}$$

ergibt sich

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{b h^3}{h b^3} = -\frac{b}{h}\cdot\frac{b h^3}{h b^3} = -\frac{h}{b}\,.$$

α ist negativ und wird von I aus im Sinne des Uhrzeigers aufgetragen; die Nullinie ist die zweite Diagonale des Rechtecks. Aus

$J_n = J_{\mathrm{I}}\cdot\cos^2\alpha + J_{\mathrm{II}}\cdot\sin^2\alpha$ folgt mit $\cos\alpha = \frac{b}{d}$ und $\sin\alpha = \frac{h}{d}$

$$J_n = \frac{b h^3}{12}\cdot\frac{b^2}{d^2} + \frac{h b^3}{12}\cdot\frac{h^2}{d^2} = \frac{b^3 h^3}{6\cdot d^2}\,.$$

Aus

$$\sin\delta = 2\cdot\sin\frac{\delta}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2} = 2\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{h}{d} \quad \text{folgt} \quad J' = \frac{J_n}{\sin\delta} = \frac{b^2 h^2}{12}\,.$$

Mit

$$e_1 = e_2 = \frac{d}{2}\cdot\sin\delta = \frac{b h}{d}$$

wird

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P\cdot l}{J'}\cdot e = \frac{Pl\cdot 12\cdot bh}{b^2\cdot h^2\cdot d} = \frac{12\,Pl}{bh\cdot d} = \frac{12\,Pl}{F\cdot d}\,.$$

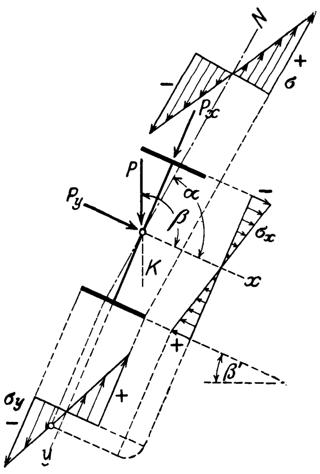


Abb. 122. I-Eisen.

Zahlenbeispiele: 1. Ein 2 m langer Träger auf zwei Stützen trage in der Mitte eine Einzellast $P = 1000$ kg und sei gegen die Wagerechte um $23^0\,50'$ geneigt; das größte Biegungsmoment wird

$$M = \frac{P\cdot l}{4} = \frac{1000\cdot 200}{4} = 50000 \text{ cmkg}.$$

Bei gerader Belastung wäre für $k_b = 1200$ kg/cm² ein I-Eisen NP 12 mit $W_x = 54{,}7$ cm³ ausreichend; für die schiefe Belastung schätzen wir auf I-Eisen NP 20 mit $J_x = 2142$ cm⁴, $W_x = 214$ cm³; $J_y = 117$ cm⁴; $W_y = 26$ cm³. Die Zerlegung von M nach den Richtungen der Hauptachsen liefert (Abb. 122):

$$M_x = M\cdot\cos 23^0\,50' = 50000\cdot 0{,}915 = 45750 \text{ cmkg},$$

$$M_y = M\cdot\sin 23^0\,50' = 50000\cdot 0{,}404 = 20200 \text{ cmkg},$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{45750}{214} + \frac{20200}{26} = 214 + 785 = \sim 1000 \text{ kg/cm}^2\,.$$

Die Lage der Nullinine ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{J_x}{J_y}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{2142}{117}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}(90^0 + 23^0\,50')} = -\frac{2142}{117}\cdot\frac{1}{-2{,}264} = \sim 8\,.$$

2. Darf ein wagerechtes hochkant stehendes Winkeleisen 65/130/12 benutzt werden? Die Tafeln liefern (Abb. 123) für den Schwerpunkt $a = 1{,}53$ cm,

$b = 4{,}75$ cm. Die Trägheitsmomente, bezogen auf die Hauptachsen, $J_x = 395\ \mathrm{cm}^4$, $J_y = 41{,}3\ \mathrm{cm}^4$; als Steigung der x-Achse gegen die Wagerechte $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}255$, also $\varphi = 14^0\,20'$. Die Abstände der äußersten Fasern werden $x_0 = 1{,}53 \cdot \cos\varphi + 4{,}75 \sin\varphi = 2{,}68$ cm und $y_0 = 8{,}25 \cdot \cos\varphi + 1{,}2 \cdot \sin\varphi = 8{,}3$ cm.

Damit erhält man $W_x = 395 : 8{,}3 = 47{,}6\ \mathrm{cm}^3$; $W_y = 41{,}3 : 2{,}68 = 15{,}4\ \mathrm{cm}^3$. Die Zerlegung von $M = 50000$ cmkg nach den Richtungen der Hauptachsen liefert

$$M_y = M \cdot \sin\varphi = 50000 \cdot 0{,}248 = 12400 \text{ cmkg},$$
$$M_x = M \cdot \cos\varphi = 50000 \cdot 0{,}969 = 48450 \text{ cmkg}.$$

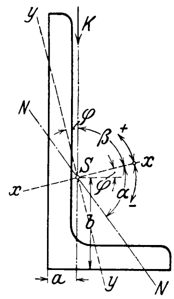


Abb. 123. Winkeleisen.

Angenähert wird

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{48450}{47{,}6} + \frac{12400}{15{,}4} = 1020 + 805 = 1825 \text{ kg/cm}^2 .$$

Die Lage der Nullinie ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{395}{41{,}3} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(90^0 - 14^0\,20')} = -\frac{395}{41{,}3} \cdot \frac{1}{3{,}914} = \sim 2{,}44 .$$

Das Winkeleisen darf nicht benutzt werden.

VI. Formänderung durch Biegung.

Auf S. 61 hatten wir die durch biegende Kräftepaare hervorgerufene Formänderung als Drehung zweier Querschnitte gegeneinander gekennzeichnet. Querschnitt I erscheint gegen den Querschnitt A (Abb. 124) um den Winkel φ gedreht. Drehachsen sind die zur Zeichenebene Senkrechten in A und C, das sind aber die Nullinie der Querschnitte. Wir setzen jetzt voraus, daß die Momentenebene den Quer-

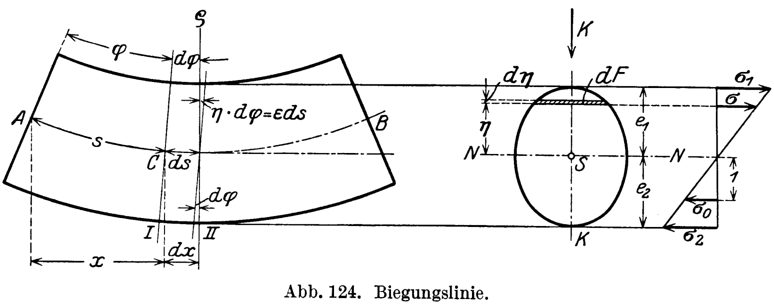


Abb. 124. Biegungslinie.

schnitt in einer Kraftlinie K — K schneidet, die Symmetrieachse des Querschnittes ist, dann stehen Kraftlinie und Nullinie aufeinander senkrecht. Wie sich die Verhältnisse ändern, wenn Kraftlinie und Nulllinie nicht aufeinander senkrecht stehen, ist bereits eingehend untersucht worden (S. 135). Hier soll ausdrücklich $KK \perp NN$ betont werden, daraus folgt, daß alle nachstehend abgeleiteten Beziehungen nur da angewendet werden dürfen, wo die Kraftlinie oder die Nullinie Symmetrieachse des Querschnittes ist.

1. Grundgleichungen.

Wir betrachten zwei unendlich benachbarte Querschnitte im Abstande ds (Abb. 124). Die Verlängerung, die eine Faser von der Länge ds im Abstande η von der Nullinie erfährt, ist gleich $\varepsilon \cdot ds$. Bezeichnet man den Winkel, den die Querschnitte I und II nach der Formänderung miteinander bilden, mit $d\varphi$, so ist andrerseits

$$\varepsilon \cdot ds = \eta \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{\varepsilon \cdot ds}{\eta}.$$

Wir ersetzen die Dehnung ε nach dem Geradliniengesetz von Hooke durch die Spannung $\alpha \cdot \sigma$ und schreiben

$$d\varphi = \frac{\alpha \cdot \sigma \cdot ds}{\eta} \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{\sigma \cdot ds}{E \cdot \eta}.$$

Da ferner die Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot \eta$$

ist, so folgt

$$d\varphi = \frac{M\,ds}{E \cdot J} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{1}{E}\int \frac{M}{J}\,ds. \tag{1}$$

Um die Gleichung der Biegungslinie anschreiben zu können, müssen wir erst vereinbaren, was wir unter den Koordinaten eines Punktes der Biegungslinie verstehen.

In Abb. 125 ist die Biegungslinie der Abb. 124 herausgezeichnet; das Achsenkreuz legen wir so durch den Punkt A, daß die x-Achse nach

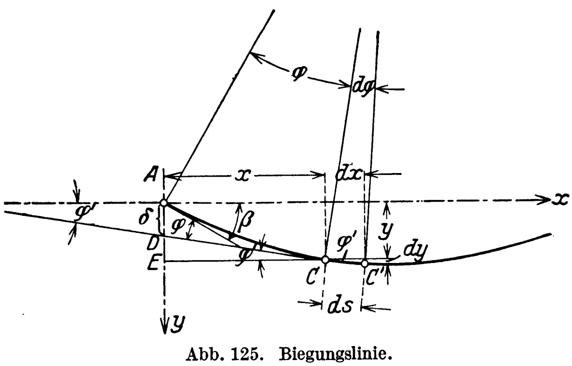


Abb. 125. Biegungslinie.

rechts, die y-Achse nach unten zeigt. Dann hat der Punkt C die Koordinaten x und y, wobei y unmittelbar die Senkung des Punktes C gegen A bedeutet. Die Tangente im Punkte C bilde mit der x-Achse den Winkel φ', mit der Tangente im Punkte A — wie oben — den Winkel φ. Die Tangenten drehen sich nämlich um denselben Winkel φ wie die Normalen in Abb. 124.

Nun sei $AD = \delta$ die Strecke senkrecht unter A, die von der Tangente im Punkte C abgeschnitten wird. Fällt man von C aus die Senkrechte CE auf die y-Achse, so wird

$$\delta = AD = AE - ED = y - x \cdot \operatorname{tg} \varphi'.$$

Durch Differentiation nach x ergibt sich

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{x}{\cos^2\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{dx} - \operatorname{tg}\varphi'.$$

Nun ist aber

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi',$$

mithin

$$\frac{d\delta}{dx} = -\frac{x}{\cos^2\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{dx}.$$

Ferner ist

$$\varphi + \varphi' = \beta, \quad \text{also} \quad \varphi' = \beta - \varphi \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi'}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx},$$

mithin

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{x}{\cos^2\varphi'} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{und daher} \quad d\delta = \frac{x}{\cos^2(\beta-\varphi)} d\varphi.$$

Setzt man nun für $d\varphi$ gemäß (1) den Wert

$$d\varphi = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}$$

ein, so wird

$$d\delta = \frac{x}{\cos^2(\beta-\varphi)} \cdot \frac{M}{E \cdot J} \cdot ds$$

und

$$\delta = \frac{1}{E}\int \frac{M}{J} \cdot \frac{x}{\cos^2(\beta-\varphi)} ds. \tag{2}$$

Denken wir uns in Abb. 124 die Geraden I und II zum Schnitt gebracht, so ist dieser Schnittpunkt der Krümmungsmittelpunkt. Die Abbildung zeigt

$$\varrho \cdot d\varphi = ds \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Daher ergibt sich gemäß (1)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{E \cdot J}.$$

Der reziproke Wert des Krümmungsradius wird als Krümmung der Kurve mit dem Buchstaben k bezeichnet. Man kann daher die Biegungsgleichung auch in folgender Form schreiben:

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E \cdot J}. \tag{I}$$

Aus

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{dy}{dx} \qquad \varphi' = \beta - \varphi$$

folgt

$$\varphi' = \beta - \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Die Differentiation nach x liefert

$$\frac{d(\beta-\varphi)}{dx}=-\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Aus Abb. 125 folgt

$$\cos\varphi'=\frac{dx}{ds} \text{ und } \operatorname{tg}\varphi'=\frac{dy}{dx}.$$

Es ist also

$$\frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi'}=\cos^2\varphi'.$$

Folglich wird

$$\cos\varphi'=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{dx}{ds}.$$

und daher

$$k=\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \tag{3}$$

eine Formel, die aus der Differentialrechnung bekannt ist. Setzt man nun für $\frac{1}{\varrho}$ seinen Wert $\frac{M}{E\cdot J}$ ein, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\varrho}=-\frac{M}{E\cdot J}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}. \tag{4}$$

In der Technik betrachten wir nun Stäbe, die sehr schwach gekrümmt sind. Man kann daher an Stelle von ds dx, an Stelle von $\beta-\varphi$ angenähert Null setzen und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigen. Unter diesen Annahmen ergeben sich aus (1), (2) und (4) die Gleichungen:

$$\varphi=\frac{1}{E}\int_0^x\frac{M}{J}\cdot dx;\quad \frac{d\varphi}{dx}=\frac{M}{EJ}, \tag{II}$$

$$\delta=\frac{1}{E}\int_0^x\frac{M}{J}\cdot x\,dx \tag{III}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{E\cdot J}. \tag{IV}$$

Man muß sich aber stets vor Augen halten, daß diese Gleichungen nur dann gelten, wenn die Durchbiegungen hinreichend klein sind.

Die abgeleiteten Gleichungen gelten ferner nur unter der Voraussetzung, daß die Kraftlinie oder Nullinie Symmetrieachse ist; ferner sind sie nur auf Baustoffe anzuwenden, die dem Geradliniengesetz von Hooke folgen. Sie haben aber für beliebig geformte Querschnitte Gültigkeit.

2. Träger mit gleichbleibendem Querschnitt.

Die Gleichungen (II) und (III) lassen eine zeichnerische Deutung der Integrale zu, welche die Ermittlung der Formänderung auch ohne

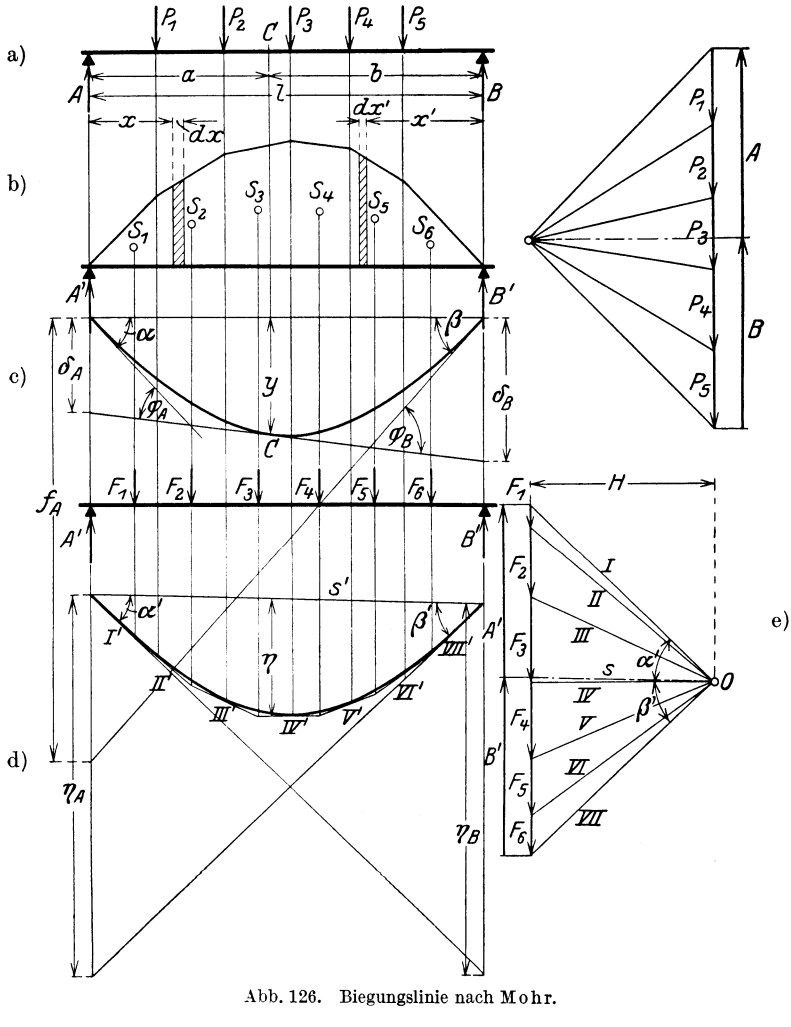


Abb. 126. Biegungslinie nach Mohr.

Anwendung der Integralrechnung ermöglicht. Wir betrachten zunächst den Fall des Trägers mit gleichbleibendem Querschnitt, für den also

$J = \text{Constans}$ ist. Damit erhalten wir

$$\varphi = \frac{1}{EJ}\int_0^x M \cdot dx \quad \text{und} \quad \delta = \frac{1}{EJ}\int_0^x M \cdot x\,dx .$$

In Abb. 126 ist ein von den Lasten P angegriffener Träger auf zwei Stützen dargestellt, dessen Momentenfläche gezeichnet ist. Denken wir die Biegungslinie entworfen, mit der Ordinate y im Punkte C, so schneidet die Tangente in C auf der Stützsenkrechten durch A den Wert

$$\delta_A = \frac{1}{EJ}\int_0^a M \cdot x \cdot dx, \quad \text{entsprechend} \quad \varphi_A = \frac{1}{EJ}\int_0^a M \cdot dx$$

ab, auf der Stützsenkrechten durch B dagegen

$$\delta_B = \frac{1}{EJ}\int_0^b M\,x' \cdot dx' \quad \text{entsprechend} \quad \varphi_B = \frac{1}{EJ}\int_0^b M \cdot dx'$$

ab. $M \cdot dx$ ist ein Flächenstreifen der Momentenfläche von der Breite dx und der Höhe M. Das von $x = 0$ bis $x = a$ zu erstreckende Integral stellt also den Inhalt der über a liegenden Momentenfläche dar. Der Winkel φ_A, den die Tangente in C mit der Tangente in A bildet, ist also gleich dem $(1 : EJ)$-fachen Inhalt der zwischen C und A liegenden Momentenfläche. $M \cdot x \cdot dx$ ist das statische Moment des Flächenstreifens, bezogen auf A; das von $x = 0$ bis $x = a$ zu erstreckende Integral stellt demnach die Summe der statischen Momente der Flächenteilchen dar, die aber gleich dem statischen Moment der ganzen Fläche ist. Wir erhalten demnach den $(E \cdot J)$-fachen Wert der Strecke δ_A, die von der Tangente in C auf der Stützsenkrechten in A abgeschnitten wird, wenn wir das statische Moment des Teiles der Momentenfläche bilden, der zwischen den Punkten A und C liegt.

In gleicher Weise ist der Winkel φ_B bestimmt als $(1 : EJ)$-facher Wert des Teiles der Momentenfläche, der zwischen B und C liegt, während δ_B als das von der Tangente in C auf der Stützsenkrechten in B abgeschnittene Stück gleich den $(1 : EJ)$-fachen Wert des statischen Momentes dieses Teiles der Momentenfläche ist, wobei das statische Moment auf B zu beziehen ist.

Aus den Abschnitten δ_A und δ_B erhalten wir die Senkung y des Punktes C mittelbar zu

$$y = \frac{b}{l} \cdot \delta_A + \frac{a}{l} \cdot \delta_B .$$

Da das statische Moment einer Fläche das Produkt aus Flächeninhalt und Schwerpunktsabstand ist, läßt sich die Senkung eines Punktes leicht berechnen, wenn die Lage des Schwerpunktes bekannt ist.

a) Zeichnerische Ermittlung der Biegungslinie nach Mohr.

Mit

$$\delta_A = \frac{1}{EJ}\int_0^a M \cdot x \cdot dx \quad \text{und} \quad \delta_B = \frac{1}{EJ}\int_0^b M \cdot x' \cdot dx'$$

wird

$$y = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{b}{l}\int_0^a M x \cdot dx + \frac{a}{l}\int_0^b M \cdot x' \cdot dx'\right\},$$

$$y = \frac{1}{EJ}\left\{b \cdot \int_0^a M \cdot \frac{x}{l} \cdot dx + a\int_0^b M \cdot \frac{x'}{l} \cdot dx'\right\}.$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist nur scheinbar unbequem; wir waren ihm bereits begegnet bei der Ermittlung des Biegungsmomentes eines beliebig belasteten Trägers (S. 111). Damals hatten wir als Biegungsmoment

$$M = b \cdot \int_0^a k \cdot \frac{x}{l} \cdot dx + a \cdot \int_0^b k \cdot \frac{x'}{l} \cdot dx'$$

gefunden, wenn wir mit k die Belastungshöhe bezeichnen.

Der Vergleich der Gleichungen für y und M lehrt, daß die (EJ)-fache Senkung eines Punktes gleich dem Biegungsmoment in demselben Punkte eines Trägers ist, den wir mit der Momentenfläche belastet denken. Der Gang zur Auffindung der Biegungslinie wäre demnach folgender: zu dem gegebenen Träger AB (Abb. 126a) zeichnen wir die Momentenfläche und fassen diese Momentenfläche als Belastungsfläche des Trägers $A'B'$ auf (Abb. 126b). Zu diesem zweiten Träger $A'B'$ entwerfen wir jet t die Momentenfläche, dann sind die Ordinaten dieser zweiten Momentenlinie ein Maß für die Durchbiegung des ersten Trägers. Wir erhalten aus ihnen die Durchbiegungen selbst, wenn wir die Ordinaten der zweiten Momentenlinie mit $(1 : EJ)$ multiplizieren, und haben damit den Entwurf einer Biegungslinie auf den Entwurf einer Momentenlinie zurückgeführt, die wir nach S. 64 als Seillinie zeichnen. (Mohrscher Satz.) Dabei zerlegen wir die Momentenfläche in bequeme Teilflächen $F_1, F_2 \ldots F_6$, deren Inhalte wir in den Schwerpunkten $S_1, S_2 \ldots S_6$ als Kräfte auftragen, zu denen das Krafteck (Abb. 126e) und das Seileck $I' \ldots VII'$ (Abb. 126d) entworfen werden. Mit H als Polweite wird

$$E \cdot J \cdot y = H \cdot \eta \quad \text{oder} \quad y = \frac{H}{EJ} \cdot \eta .$$

Die Maßstäbe sind etwas verwickelt: da F der Inhalt der Momentenfläche ist, erhält es die Benennung cm · cmkg = cm²kg; wir haben also die Maßstäbe

der Länge	1 mm = a cm,
der Kräfte	1 mm = b kg,
der Momente	1 mm = c cmkg,
der Momentenfläche. . .	1 mm = d cm²kg.

Vollständig angeschrieben wird

$$y = \frac{H\,\text{mm} \cdot \dfrac{d\,\text{cm}^2\text{kg}}{1\,\text{cm}} \cdot \eta\,\text{mm} \cdot \dfrac{a\,\text{cm}}{1\,\text{mm}}}{E\,\dfrac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot J\,\text{cm}^4} \text{ in cm.}$$

Der Neigungswinkel β, den die Tangente im Punkte B an die Biegungslinie mit der Wagerechten AB bildet, ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_A}{l} \quad \text{oder angenähert} \quad \beta = \frac{f_A}{l}.$$

Mit

$$f_A = \frac{1}{EJ}\cdot H \cdot \eta_A \quad \text{und} \quad \eta_A : l = B' : H$$

erhalten wir

$$\beta = \frac{1}{EJ}\cdot B' \quad \text{und ebenso} \quad \alpha = \frac{1}{EJ}\cdot A',$$

d. h. die (EJ)-fachen Werte der Neigungswinkel α und β sind gleich den Auflagerdrucken A' und B' des mit der Momentenfläche belasteten Trägers $A'B'$.

Fassen wir noch einmal zusammen: wir haben den wirklichen Träger AB und belasten ihn mit den gegebenen Kräften P; für ihn entwerfen wir die Momentenfläche, die wir dann weiter als Belastungsfläche eines gedachten Trägers $A'B'$ auffassen und zeichnen dazu wieder eine Momentenfläche, dann sind die Ordinaten dieser zweiten Momentenlinie gleich den (EJ)-fachen Senkungen der Punkte des wirklichen Trägers; die Auflagerdrucke des gedachten Trägers sind gleich den (EJ)-fachen Neigungen der Biegungslinie in den Stützpunkten des wirklichen Trägers. Wir nennen die Momentenfläche des gedachten Trägers $A'B'$ die zweite Momentenfläche des wirklichen Trägers AB.

Solange die Momentenfläche des gegebenen Trägers einfach ist, wird man durch Rechnung schneller die zweite Momentenfläche bestimmen als durch Zeichnung.

Nachdem der Entwurf der Biegungslinie auf den Entwurf einer Momentenlinie zurückgeführt ist, wird auch das Nehlssche Verfahren (S. 110) anwendbar, das gegebenen Falles bequemer ist als das Verfahren nach Mohr.

b) Der Freiträger.

Der Freiträger mit Einzellast (Abb. 127).

Senkung des Endpunktes. Die Grundgleichungen (II) und (III) liefern sofort β als $(1:EJ)$-fachen Inhalt der Momentenfläche

$$\beta = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{2}l\cdot Pl = \frac{Pl^2}{2EJ},$$

f als $(1:EJ)$-faches statisches Moment der Momentenfläche, bezogen auf m

$$f = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{2}l\cdot Pl\cdot\frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Gleichung der Biegungslinie. Grundgleichung (III) bestimmt die Senkung y' des beliebigen Punktes m' als das $(1:EJ)$-fache statische Moment der zwischen a und m' liegenden Momentenfläche, bezogen auf m'. Der fragliche Teil der Momentenfläche ist ein Trapez, das wir als Differenz zweier Dreiecke auffassen, demnach ist

$$y' = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{1}{2}l\cdot Pl\cdot\left(\frac{2}{3}l - x\right) + \frac{1}{2}x\cdot Px\cdot\frac{1}{3}x\right\},$$

$$y' = \frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ}\cdot\frac{x}{l} + \frac{Pl^3}{6EJ}\cdot\frac{x^3}{l^3}.$$

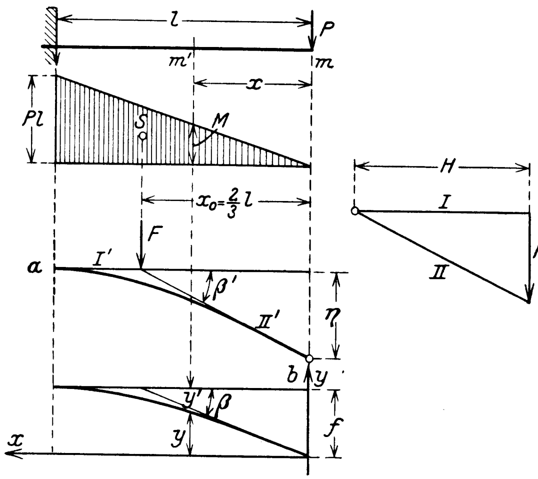


Abb. 127. Freiträger mit Einzellast.

Mit $y = f - y'$ erhalten wir als Gleichung der Biegungslinie in Beziehung auf das Achsenkreuz xy

$$y = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Als Differentialgleichung der Biegungslinie ergibt sich für das Achsenkreuz xy

$$EJ\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -Px.$$

Wir integireren und erhalten

$$EJ\cdot\frac{dy}{dx} = -P\int_0^x x\,dx = -\frac{Px^2}{2} + C_1.$$

Der Integrationsfestwert muß aus der Bedingung bestimmt werden, daß die Tangente im Einspannpunkte A wagerecht verläuft, d. h. $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ sein soll; daher ist

$$0 = -\frac{Pl^2}{2} + C_1 \quad \text{oder} \quad C_1 = \frac{P\cdot l^2}{2},$$

mithin

$$EJ\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + \frac{Pl^2}{2}.$$

Diese Gleichung liefert für $x = 0$ die Neigung $\beta = \frac{Pl^2}{2EJ}$; integrieren wir nochmals, so wird

$$EJ \cdot dy = \left(-\frac{Px^2}{2} + \frac{Pl^2}{2}\right) \cdot dx\,,$$

$$EJ \cdot y = -\frac{P}{2}\int_0^x x^2\,dx + \frac{Pl^2}{2}\int_0^x dx\,,$$

$$EJ \cdot y = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Pl^2 x}{2} + C_2\,.$$

Auch C_2 muß den physikalischen Bedingungen der Aufgabe genügen. Es ist $y = 0$ für $x = 0$; daraus folgt $C_2 = 0$. Wir erhalten als Gleichung der Biegungslinie

$$y = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Um auch die Anwendung des Mohrschen Verfahrens zu zeigen, fassen wir den Inhalt der Momentenfläche

$$F = \frac{Pl^2}{2}$$

als Kraft auf, die im Schwerpunkt S des Momentendreiecks angreift, zeichnen das Krafteck mit dem beliebigen Pol O und den Polstrahlen I und II. Wählt man I wagerecht, so erhält man ein Bild der Biegungslinie, das auch der Anschauung genügt. Die Seilstrahlen I' und II' bestimmen senkrecht unter m die Seileckordinate η; es wird

$$f = \frac{1}{EJ}\cdot H \cdot \eta\,.$$

Von der Biegungslinie sind die beiden Punkte a und b und die zugehörigen Tangenten I' und II' bekannt, so daß sich die Kurve leicht freihändig einzeichnen läßt. Aus der Gleichung entnehmen wir, daß die Biegungslinie eine kubische Parabel ist, die im Scheitel a die stärkste Krümmung

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} = \frac{P \cdot l}{EJ}$$

hat und entsprechend dem kleiner werdenden M immer flacher verläuft.

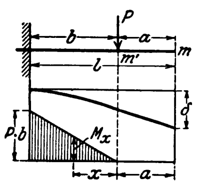


Abb. 128. Die Einzellast greift nicht am Ende an.

Die Einzellast greift nicht am Ende an (Abb. 128). Nach der Grundgleichung (III) ist mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\delta = \frac{1}{EJ}\int_0^b M_x\,(a + x)\cdot dx = \frac{1}{EJ}\int_0^b Px\,(a + x)\,dx\,,$$

$$\delta = \frac{P}{EJ}\left(\frac{ab^2}{2} + \frac{b^3}{3}\right) = \frac{Pab^2}{2EJ} + \frac{Pb^3}{3EJ}\,.$$

Das zweite Glied ist die Senkung des Punktes m', das erste Glied ist gleich $a \cdot \beta$, wenn wir mit β den Neigungswinkel der Tangente in m'

bezeichnen. Die Strecke $m'm$ der Biegungslinie bleibt gerade. Unmittelbar ergibt sich $EJ \cdot \delta$ als statisches Moment der Momentenfläche, bezogen auf m, zu

$$\delta = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} b \cdot Pb \cdot \left(a + \frac{2}{3} b\right) = \frac{Pab^2}{2EJ} + \frac{Pb^3}{3EJ}.$$

Der Freiträger mit mehreren Einzellasten (Abb. 129). Wir bringen die Lasten nacheinander auf den Träger und addieren die Einzelwirkungen. Es ist $\delta_m = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, wobei

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} a \cdot P_1 a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{P_1 a^3}{3EJ},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} b \cdot P_2 b \cdot \left(b' + \frac{2}{3} b\right) = \frac{P_2 b^2 b'}{2EJ} + \frac{P_2 b^3}{3EJ},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot P_3 c \cdot \left(c' + \frac{2}{3} c\right) = \frac{P_3 c^2 \cdot c'}{2EJ} + \frac{P_3 c^3}{3EJ}.$$

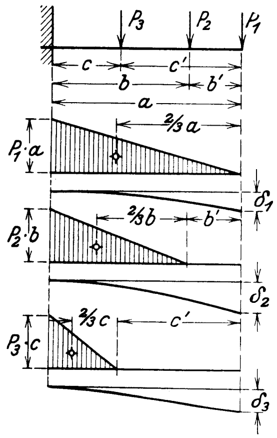


Abb. 129. Freiträger mit mehreren Einzellasten.

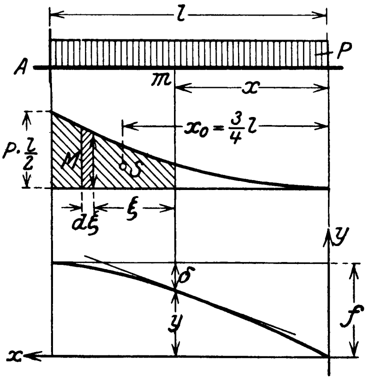


Abb. 130. Freiträger mit gleichförmig verteilter Last.

Der Freiträger mit gleichförmig verteilter Last (Abb. 130). Die Momentenfläche ist von einer Parabel begrenzt, deren Ordinate in der Einspannstelle $M_{\max} = P \cdot \frac{l}{2}$ ist. Demnach ist

$$f = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} l \cdot P \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4} l = \frac{Pl^3}{8EJ}.$$

Die Gleichung der Biegungslinie erhalten wir durch zweimalige Integration der Differentialgleichung

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = -\frac{P}{l} \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$EJ \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(-\frac{P}{l} \cdot \frac{x^2}{2}\right) \cdot dx,$$

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = \int \left(-\frac{Px^2}{2l}\right) \cdot dx = -\frac{Px^3}{6l} + C_1.$$

Da $\frac{dy}{dx}$ für $x = l$ gleich Null wird, ergibt sich $C_1 = \frac{Pl^2}{6}$

$$EJ \cdot dy = \left(-\frac{Px^3}{6l} + \frac{Pl^2}{6}\right) dx\,,$$

$$EJ \cdot y = \int -\frac{Px^3}{6l}\, dx + \int \frac{Pl^2}{6}\, dx\,,$$

$$EJ \cdot y = -\frac{Px^4}{24\,l} + \frac{Pl^2 x}{6} + C_2\,.$$

Aus $y = 0$ für $x = 0$ folgt $C_2 = 0$ und damit

$$y = \frac{Pl^3}{6EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Als Neigungswinkel der Endtangente erhalten wir aus

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = +\frac{Pl^2}{6} - \frac{Px^3}{6l}\,,$$

für $x = 0$

$$EJ \cdot \beta = \frac{Pl^2}{6} \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{Pl^2}{6EJ}\,.$$

Zieht man Grundgleichung (*III*) zur Berechnung heran, so wird die Entwicklung wesentlich unbequemer; sie soll hier durchgeführt werden, um die Aufstellung der Grundgleichung für einen beliebigen Punkt x des Trägers zu zeigen (Abb. 130). Da δ das von der Tangente in A auf der Senkrechten durch m abgeschnittene Stück bedeutet, so ist

$$EJ \cdot \delta = \int_{\xi = 0}^{\xi = l - x} M \cdot \xi \cdot d\xi\,.$$

$M = p\,\frac{(x+\xi)^2}{2}$ liefert

$$EJ \cdot \delta = \frac{p}{2} \int_0^{l-x} (x+\xi)^2 \cdot \xi \cdot d\xi = \frac{p}{2}\left[\frac{x^2\xi^2}{2} + \frac{2x\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4}\right]_0^{l-x},$$

$$= \frac{p}{24}\,(l-x)^2\,(x^2 + 2lx + 3l^2)\,,$$

$$= \frac{p \cdot l}{24 \cdot l}\,(3\,l^4 - 4\,l^3 x + x^4)\,,$$

$$\delta = \frac{P\,l^3}{8EJ} - \frac{Pl^3}{6EJ} \cdot \frac{x}{l} + \frac{P\,l^3}{24EJ} \cdot \frac{x^4}{l^4}\,.$$

Aus $y = f - \delta$ folgt

$$y = \frac{Pl^3}{6EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Die Gleichung zeigt die Biegungslinie als parabolische Kurve 4. Grades, deren Ordinaten man am schnellsten durch Rechnung findet, wenn man den Klammerausdruck für zehn Punkte, d. h. $\frac{x}{l} = 0{,}1 \;\ldots\; 0{,}9$, ein für alle Male bercehnet (vgl. die Tabelle auf S. 92).

Freiträger mit dreieckförmiger Last (Abb. 131). Nach Grundgleichung (II) ist

$$\beta = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_x \cdot dx\,, \quad \text{daher mit} \quad M_x = \frac{Px^3}{3l^2}$$

$$\beta = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{P}{3l^2}\int_0^l x^3\cdot dx = \frac{Pl^2}{12\cdot EJ}\,.$$

Nach Grundgleichung (III) ist

$$f = \frac{1}{EJ}\int_0 M_x\cdot x\cdot dx = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{P}{3l^2}\int_0^l x^4\cdot dx\,,$$

$$f = \frac{P\cdot l^3}{15\cdot EJ}\,.$$

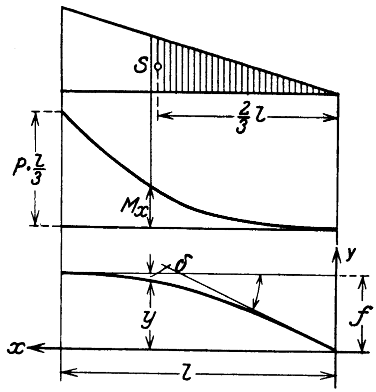


Abb. 131. Freiträger mit dreieckförmiger Last.

Die Differentialgleichung der Biegungslinie lautet für das gezeichnete Achsenkreuz

$$EJ\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = -\frac{Px^3}{3l^2}\,,$$

$$EJ\cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{Px^3}{3l^2}\cdot dx\,,$$

$$EJ\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{3l^2}\int x^3\cdot dx = -\frac{Px^4}{12l^2} + C_1\,.$$

Als Neigung der Kurve wird $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$, demnach

$$0 = -\frac{Pl^2}{12} + C_1; \quad \text{d. h.} \quad C_1 = \frac{Pl^2}{12}\,,$$

$$EJ\cdot dy = -\frac{Px^4}{12l^2}\cdot dx + \frac{Pl^2}{12}\cdot dx\,,$$

$$EJ\cdot y = -\frac{Px^5}{60l^2} + \frac{Pl^2\cdot x}{12} + C_2\,.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, wird $C_2 = 0$. Als Gleichung der Biegungslinie erhalten wir

$$y = \frac{Pl^3}{12EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{l^5}\right);$$

Die Kurve ist eine parabolische Kurve 5. Grades, deren Scheitel im Einspannpunkte des Trägers liegt. Der gefährliche Querschnitt liegt ebenfalls dort, er wird durch

$$M_{\max} = \frac{Pl}{3}$$

beansprucht.

c) Der Träger auf zwei Stützen.

Der Träger auf zwei Stützen mit Einzellast (Abb. 132). Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $M_{\max} = P\cdot\frac{ab}{l}$, das wir in zwei Dreiecke mit dem Flächeninhalt F_z, bzw. F_z' zerlegt denken, deren Schwerpunktabstände z_0 und z_0' sein mögen. Dann ist

$$f = \frac{b}{l} \cdot \delta_A + \frac{a}{l} \cdot \delta_B,$$

$$EJ \cdot f = \frac{b}{l} \cdot F_z \cdot z_0 + \frac{a}{l} \cdot F_z' \cdot z_0' = \frac{b}{l} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{Pab}{l} \cdot \frac{2}{3} a + \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{Pab}{l} \cdot \frac{2}{3} b,$$

$$f = \frac{1}{EJ}\left(P \cdot \frac{a^3 b^2}{3 l^2} + P \cdot \frac{a^2 b^3}{3 l^2}\right) = \frac{P a^2 b^2}{3 EJ \cdot l}.$$

Für den Sonderfall $a = b = l/2$ wird $f = \dfrac{P l^3}{48 EJ}$.

Die Gleichung der Biegungslinie entwickeln wir aus der Differentialgleichung (Abb. 133)

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = -M_x.$$

Da $M_x = A \cdot x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = a$ gilt, erhalten wir nur einen Ast der Biegungslinie. Für ihn legen wir das Achsenkreuz in A und zählen x nach rechts, y nach unten. Dem zweiten Ast der Biegungslinie geben wir das Achsenkreuz in B und zählen x_1 nach links, y_1 nach unten.

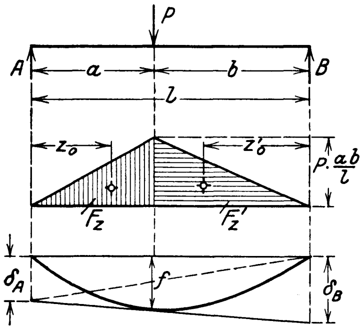


Abb. 132. Träger auf zwei Stützen mit Einzellast.

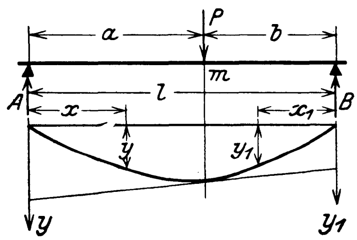


Abb. 133. Träger auf zwei Stützen mit Einzellast.

Linker Ast:

$$EJ \cdot d\frac{dy}{dx} = -A \cdot x \cdot dx = -\frac{P \cdot b}{l} \cdot x \cdot dx,$$

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$EJ \cdot dy = -\frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot dx + C_1 \cdot dx,$$

$$EJ \cdot y = -\frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Rechter Ast:

$$EJ \cdot d\frac{dy_1}{dx_1} = -B \cdot x_1 \cdot dx_1 = -\frac{Pa}{l} \cdot x_1 \cdot dx_1,$$

$$EJ \cdot \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{Pa}{l} \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1',$$

$$EJ \cdot dy_1 = -\frac{Pa}{l} \cdot \frac{x_1^2}{2} \cdot dx_1 + C_1' \cdot dx_1,$$

$$EJ \cdot y_1 = -\frac{Pa}{l} \cdot \frac{x_1^3}{6} + C_1' \cdot x_1 + C_2'.$$

Die Integrationsfestwerte C sind aus den physikalischen Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen. Über $\frac{dy}{dx}$, bzw. $\frac{dy_1}{dx_1}$ können wir nur aussagen, daß senkrecht unter P beide Äste eine gemeinsame Tangente haben; daraus folgt unter Berücksichtigung der gegenseitigen Lage der beiden Achsenkreuze

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy_1}{dx_1}$$

für den Punkt m. Daher ist

$$-\frac{Pa^2b}{2l} + C_1 = \frac{Pab^2}{2l} - C_1', \tag{a}$$

wenn wir $x = a$ und $x_1 = b$ in die Gleichungen für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy_1}{dx_1}$ einsetzen. Eine zweite Bedingungsgleichung liefert die Tatsache, daß $y = 0$ für $x = 0$ und $y_1 = 0$ für $x_1 = 0$ ist; die Senkung in den Auflagern ist gleich Null. Damit wird $C_2 = 0$, bzw. $C_2' = 0$. Zum Dritten muß sich die Senkung des Punktes m gleich groß ergeben, wenn wir y von links aus oder von rechts aus berechnen. Wir erhalten

$$\text{für} \quad x = a \ \ldots \ EJ \cdot y = -\frac{Pb}{l} \cdot \frac{a^3}{6} + C_1 \cdot a,$$

$$\text{für} \quad x_1 = b \ \ldots \ EJ \cdot y = -\frac{Pa}{l} \cdot \frac{b^3}{6} + C_1' \cdot b.$$

Die Gleichsetzung beider Werte liefert

$$-\frac{Pa^3b}{6l} + C_1 \cdot a = -\frac{Pab^3}{6l} + C_1' \cdot b. \tag{b}$$

Gleichung (a) mit b erweitert, ergibt

$$-\frac{Pa^2b^2}{2l} + C_1 \cdot b = \frac{Pab^3}{2l} - C_1' \cdot b.$$

Die Addition beider Gleichungen liefert als Bedingungsgleichung für C_1

$$-\frac{Pab}{6l}(3ab + a^2) + C_1(a + b) = \frac{Pab}{6l}(3b^2 - b^2),$$

$$C_1(a + b) = \frac{Pab}{6l}(2b^2 + 3ab + a^2)$$

$$C_1 = \frac{Pab}{6l} \cdot (a + 2b).$$

Damit erhalten wir als Gleichung für die Neigung des linken Astes der Biegungslinie

$$EJ\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{Pb}{2\cdot l}\cdot x^2+\frac{Pab}{6l}(a+2b)$$

und als Gleichung der zugehörigen Biegungslinie

$$EJ\cdot y=-\frac{Pb}{6l}\cdot x^3+\frac{Pa^2b}{6l}\cdot x+2\cdot\frac{Pab^2}{6l}\cdot x\,,$$

$$y=\frac{1}{EJ}\frac{Pa^2b^2}{6l}\left(2\cdot\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x^3}{a^2b}\right).$$

Setzen wir C_1 in (a) ein, so wird

$$C_1'=\frac{Pab}{6l}(2a+b)$$

und damit für den rechten Ast der Biegungslinie

$$EJ\cdot\frac{dy_1}{dx}=-\frac{Pa}{2l}\cdot x_1^2+\frac{Pab}{6l}(2a+b)\,,$$

$$EJ\cdot y_1=-\frac{Pa}{l}\cdot\frac{x_1^3}{6}+\frac{Pab}{6l}(2a+b)\cdot x_1,$$

$$y_1=\frac{1}{EJ}\frac{Pa^2b^2}{6l}\left(2\cdot\frac{x_1}{b}+\frac{x_1}{a}-\frac{x_1^3}{ab^2}\right).$$

Die Senkung des Lastangriffspunktes m wird mit $x=a$ bzw. $x_1=b$:

$$f=\frac{Pa^2b^2}{3EJ\cdot l}.$$

Mit der Senkung des Punktes m ist aber noch nicht die größte Durchbiegung des Trägers gefunden. Um ihre Lage zu bestimmen, setzen wir

$$\frac{6l\cdot EJ}{Pa^2b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3x^2}{a^2b}=0$$

und erhalten $$x=a\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{a}}\,,$$

wenn $a>b$ ist.

Ebenso folgt aus $\frac{dy_1}{dx_1}=0$

$$x=b\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}}\,,$$

wenn $b>a$ ist.

Aufzeichnen der Biegungslinie. Wir entwerfen die Biegungslinie des Trägers AB für die Einheit der Last (1 kg) und beachten, daß eine Last von P kg eine P-mal so große Durchbiegung hervorruft. Aus der Gleichung der Biegungslinie für $P=1$ kg erhält man für den linken Ast

$$y = \frac{a^2 b^2}{6 E J \cdot l}\left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2 b}\right),$$

$$= \frac{a^2 b^2}{3 E J \cdot l}\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{2b} - \frac{x^3}{2a^2 b}\right) = \frac{a^2 b^2}{3 E J \cdot l}\cdot \eta_l,$$

und entsprechend für den rechten Ast

$$y_1 = \frac{a^2 b^2}{3 E J \cdot l}\left(\frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{2a} - \frac{x_1^3}{2ab^2}\right) = \frac{a^2 b^2}{3 E J \cdot l}\cdot \eta_r.$$

Die beiden Zweige der Biegungslinie sind mit ausreichender Sicherheit zu zeichnen, wenn von jedem 10 Punkte bestimmt sind. Setzt man

$$\frac{a}{b} = \varphi, \quad \text{also} \quad b = \frac{a}{\varphi},$$

so wird

$$\eta_l = \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{\varphi}{2} - \frac{x^3}{a^3}\cdot\frac{\varphi}{2},$$

$$= \left(1 + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{x}{a} - \frac{\varphi}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^3.$$

Mit $\frac{x}{a} = 0{,}1 \ldots 0{,}2 \ldots 0{,}3 \ldots$ usw. erhält man

$$\eta_1 = 0{,}1\left(1 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2}\cdot 0{,}001 = 0{,}1 + 0{,}0495\,\varphi,$$

$$\eta_2 = 0{,}2\left(1 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2}\cdot 0{,}008 = 0{,}2 + 0{,}096\,\varphi,$$

$$\eta_3 = 0{,}3\left(1 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2}\cdot 0{,}027 = 0{,}3 + 0{,}1365\,\varphi \text{ usw.}$$

$\eta = f(\varphi)$ gibt eine gerade Linie; $\eta_1 \ldots \eta_2 \ldots \eta_3 \ldots$ eine Schar von geraden Linien, die, einmal entworfen, das unmittelbare Aufzeichnen der Biegungslinie jedes beliebigen Trägers für $P = 1$ t gestatten.

Für den rechten Zweig folgt mit

$$\frac{b}{a} = \varphi', \quad \text{also} \quad a = \frac{b}{\varphi'},$$

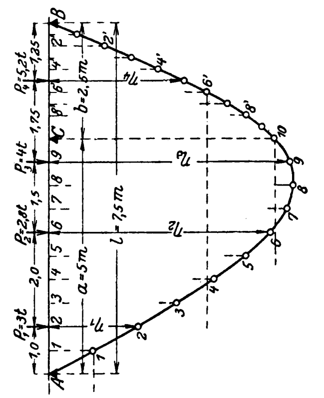
$$\eta_r = \frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{b}\frac{\varphi'}{2} - \frac{x_1^3}{b^3}\cdot\frac{\varphi'}{2},$$

$$= \left(1 + \frac{\varphi'}{2}\right)\frac{x_1}{b} - \frac{\varphi'}{2}\left(\frac{x_1}{b}\right)^3.$$

Hat man die Geradenschar für η_l entworfen, so kann man die Werte η_r ablesen, wenn man φ durch φ' und $\frac{x}{a}$ durch $\frac{x_1}{b}$ ersetzt.

Die Gerade für $x : a = 1$ ist eine Wagerechte im Abstande 1 von der x-Achse. Macht man diesen Abstand 100 mm lang (Abb. 134), so erhält man eine handliche Bildgröße. Damit φ in den am häufigsten vorkommenden Grenzen von 0 bis 2 genau festgelegt werden kann, ist in Abb. 134 der Maßstab für diesen Bereich für φ vergrößert; sämtliche Kurven erhalten dadurch in $\varphi = 2$ einen Knick.

Beispiel. (Abb. 134). Gegeben sei ein Träger ABC mit $a = 5$ m, $b = 2{,}5$ m; $l = 7{,}5$ m. Gesucht ist die Biegungslinie des Trägers AB für eine Last von 1 kg, die im Punkte C angreift. Man legt die Tafel mit der Geradenschar so auf das Zeichenblatt, daß die wagerechte Achse mit der Trägerachse zusammenfällt, und teilt AC und CB in je zehn gleiche Teile. Für den linken Teil der Biegungslinie errechnet man $a : b = 5 : 2{,}5 = 2$ und zieht in der Tafel eine Senkrechte durch $\varphi = 2$, die die Geradenschar in den Punkten 1 ... 2 ... 3 ... usw. schneidet. Diese Schnittpunkte ergeben die Ordinaten des linken Zweiges die Biegungslinie, sie werden wagerecht auf die Senkrechten durch die zehn Teilpunkte 1 ... 2 ... 3 ... auf AC übertragen und freihändig durch eine stetige Kurve verbunden. Für den rechten Teil der Biegungslinie ist $\varphi' = b : a = 2{,}5 : 5 = 0{,}5$; die Ordinaten sind durch



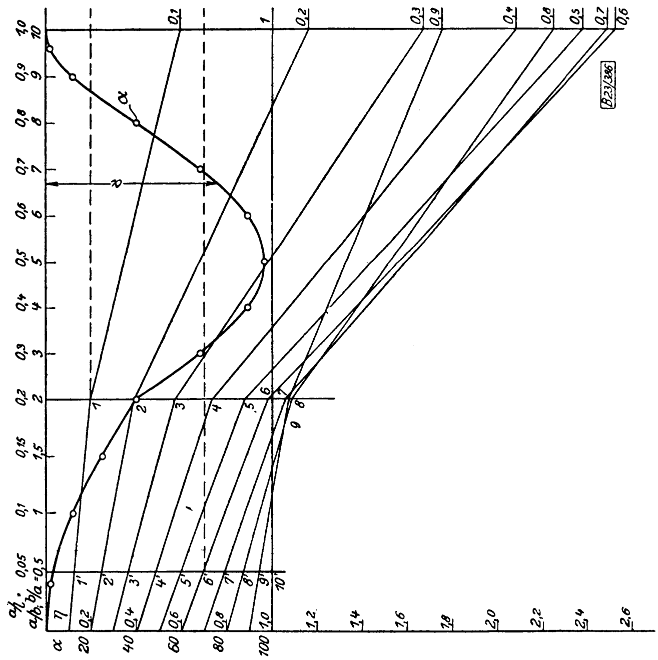


Abb. 134. Biegungslinie nach Maxwell.

die Schnittpunkte 1' ... 2' ... 3' ... der Senkrechten durch $\varphi' = 0{,}5$ mit der Geradenschar bestimmt und werden in gleicher Weise wagerecht auf die Senkrechten durch die Teilpunkte 1' ... 2' ... 3' ... auf CB übertragen.

Die Gegenseitigkeit der Formänderung (Abb. 135). Eine Kraft P im Punkte n des Trägers AB senke den Punkt m um den Betrag δ_m, der sich aus der Gleichung des rechten Astes der Biegungslinie für $x_1 = b$ zu

$$\delta_m = \frac{P a'^2 b'^2}{6 E J \cdot l}\left(2 \cdot \frac{b}{b'} + \frac{b}{a'} - \frac{b^3}{b'^2 a'}\right)$$

berechnet. Eine Kraft P im Punkte m desselben Trägers AB senke den Punkt n um den Betrag δ_n, der sich aus der Gleichung des linken Astes der Biegungslinie für $x = a'$ zu

$$\delta_n = \frac{P a^2 b^2}{6 E J \cdot l}\left(2 \cdot \frac{a'}{a} + \frac{a'}{b} - \frac{a'^3}{a^2 b}\right)$$

ergibt. Auflösung und Zusammenfassung der Glieder liefert

$$\delta_m = \frac{P a' b}{6 E J \cdot l} \cdot (2 a' b' + b'^2 - b^2)\,,$$

$$\delta_n = \frac{P a' b}{6 E J \cdot l} \cdot (2 a b + a^2 - a'^2)\,.$$

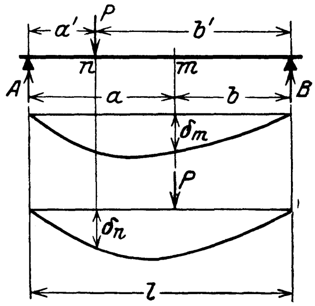


Abb. 135. Gegenseitigkeit der Formänderung.

Fügen wir in den Klammern die quadratische Ergänzung der beiden ersten Glieder hinzu, so erhalten wir

$$\delta_m = \frac{P a' b}{6 E J \cdot l} \cdot (a'^2 + 2 a' b' + b'^2 - b^2 - a'^2)\,,$$

$$\delta_n = \frac{P a' b}{6 E J \cdot l} \cdot (a^2 + 2 a b + b^2 - b^2 - a'^2)\,,$$

die mit

$$a'^2 + 2\,a' b' + b'^2 = (a' + b')^2 = l^2\,,$$
$$a^2 + 2\,a b + b^2 = (a + b)^2 = l^2$$

in

$$\delta_m = \frac{P a' b}{6 E J \cdot l} \cdot (l^2 - b^2 - a'^2)\,,$$

$$\delta_n = \frac{P a' b}{6 E J \cdot l} \cdot (l^2 - b^2 - a'^2)$$

übergehen; beide Werte stimmen überein. Der hier für den Sonderfall der senkrechten Verschiebung abgeleitete Satz gilt aber allgemein und ist unter dem Namen Maxwellscher Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderung bekannt. Er besagt, daß eine Last P im Abstande x vom Auflager A einen Punkt m eines Trägers um den gleichen Betrag senkt, wie die in m angreifende Kraft P den Punkt x senkt. Statt also die Last P in dem beliebigen Punkte x angreifen zu lassen, belastet man den bestimmten Punkt m mit dieser Last und ermittelt die Senkung des Punktes x. Diese ist aber Ordinate der Biegungslinie eines Trägers AB, der im Punkte m mit P belastet ist.

Träger auf zwei Stützen mit beliebig vielen Einzellasten. Nach dem Maxwellschen Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderung ist die Senkung eines Punktes m infolge einer Last P im Punkte n

$$\delta_n = P \cdot y\,,$$

wenn y Ordinate der Biegungslinie im Punkte n eines Trägers AB ist, der im Punkte m mit $P = 1$ kg belastet ist. Wirken beliebig viele Lasten $P_1 \ldots P_2 \ldots$ usw. auf den Träger, so wird die Senkung des Punktes m nach dem Überlagerungsgesetz

$$\delta_m = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \ldots\,,$$

wobei $y_1 \ldots y_2 \ldots y_3 \ldots$ die Ordinaten der Biegungslinie sind, die sich ergibt, wenn man den Träger im Punkte m mit $P = 1$ kg belastet. Ersetzt man diese Ordinaten durch die Werte η, so erhält man als Senkung des Punktes m infolge der Lasten P

$$\delta_m = \frac{a^2 b^2}{3\,E J \cdot l} \cdot (P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 + \ldots),$$

oder wenn wir die Lasten in t einsetzen,

$$\delta_m = \frac{a^2 b^2 \cdot 1000}{3\,E J \cdot l^4}\, l^3\, (P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 + \ldots).$$

Der Faktor $\frac{a^2 b^2 \cdot 1000}{3\,E \cdot l^4}$ läßt sich ein für alle Male berechnen; wir setzen für Stahl (Walzeisen) $E = 2150000$ kg/cm² und schreiben

$$\alpha = \frac{a^2 b^2 \cdot 1000}{3\,E l^4} = \frac{a^2 (l-a)^2 \cdot 1000}{3 \cdot 2150000 \cdot l^4},$$

$$= \frac{100^3}{3 \cdot 2150} \cdot \left(\frac{a^2}{l^2} - 2\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right),$$

dann messen wir δ in cm. Will man δ in mm erhalten, so wird

$$\alpha = \frac{10 \cdot 100^3}{3 \cdot 2150} \left[\left(\frac{a}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{l}\right)^3 + \left(\frac{a}{l}\right)^4\right].$$

Es ist also α eine Funktion von $(a:l)$, die wir in die Abb. 134 leicht eintragen können. Die Kurve ist eingezeichnet und gehört zu der oberen wagerechten Zahlenreihe. In unserm Beispiel ist $a = 5$ m; $l = 7{,}5$ m; also $a:l = 0{,}667$; die Kurve liefert für diese Abszisse die Ordinate $\alpha = 76{,}5$. Als Senkung des Punktes m erhält man

$$\delta_m = \alpha \cdot \frac{l^3}{J} \cdot \sum P \cdot \eta,$$

Zu den eingezeichneten Lasten P gehört

$$M_{\max} = M_3 = 1565000 \text{ cmkg},$$

das mit $k_b = 1200$ kg/cm² ein I NP 40 mit $J = 29213$ cm⁴ erfordert. Der Punkt C dieses Trägers senkt sich um

$$\delta_c = 76{,}5 \cdot \frac{7{,}5^3}{29213} (3 \cdot 0{,}39 + 2{,}8 \cdot 0{,}99 + 4 \cdot 1{,}07 + 5{,}2 \cdot 0{,}6) = 12{,}5 \text{ mm}.$$

Wie wir die Biegungslinie des Trägers auf zwei Stützen zur Berechnung des statisch unbestimmten Trägers auf drei Stützen benutzen, wird später gezeigt (S. 315).

Gleichförmig verteilte Last (Abb. 136). Wegen der Symmetrie ist $A = B = \frac{P}{2}$, die Momentenlinie eine Parabel mit der Scheitelhöhe $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$ deren senkrechte Achse in der Mitte des Trägers liegt. Grundgleichung (II) liefert den maximalen Winkel

$$\beta = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} M \cdot dx = \frac{1}{EJ} \cdot F,$$

wenn wir mit F den halben Inhalt der Momentenfläche bezeichnen; es wird

$$\beta = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{8} = \frac{Pl^2}{24EJ}.$$

Grundgleichung (III) ergibt $f = \delta_A = \delta_B = \frac{1}{EJ} \cdot \int\limits_0^{l/2} M \cdot x \cdot dx$

$$f = \frac{1}{EJ} \cdot F \cdot x_0 = \frac{Pl^2}{24\,EJ} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Die Gleichung der Biegungslinie erhalten wir durch zweimalige Integration aus

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = -\frac{P}{2}\,x + \frac{Px^2}{2l}.$$

Es ist

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{P}{2l} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Da $\frac{dy}{dx}$ für $x = \frac{l}{2}$ gleich Null wird, ergibt sich als Bedingungsgleichung für den Festwert C_1

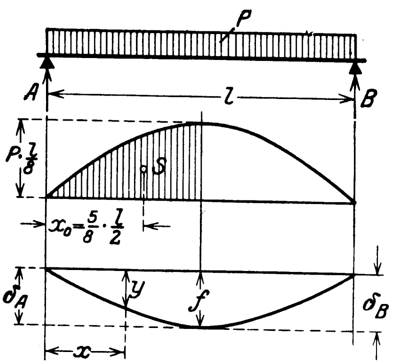


Abb. 136. Gleichförmig verteilte Last.

$$0 = -\frac{Pl^2}{16} + \frac{Pl^2}{48} + C_1; \quad \text{daraus} \quad C_1 = \frac{Pl^2}{24}.$$

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{4} \cdot x^2 + \frac{P}{6l} \cdot x^3 + \frac{1}{24} Pl^2,$$

$$EJ \cdot y = -\frac{P}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{P}{6l} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{Pl^2}{24} \cdot x + C_2.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, wird $C_2 = 0$. Die Gleichung der Biegungslinie lautet also

$$y = \frac{Pl^3}{24\,EJ}\left(\frac{x}{l} - 2 \cdot \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

und stellt eine parabolische Kurve 4. Grades dar, deren Scheitel in der Entfernung $\frac{l}{2}$ von A liegt; die Scheitelhöhe ist mit $x = \frac{l}{2}$

$$y_{\max} = f = \frac{Pl^3}{24\,EJ} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5 \cdot Pl^3}{384 \cdot EJ}.$$

Dreieckförmige Lasten.

(Abb. 137.) Mit den Bezeichnungen der Abbildung lautet die Differentialgleichung der Biegungslinie

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = -\frac{P}{3}\,x + \frac{Px^3}{3l^2},$$

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{P}{3l^2} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1,$$

$$EJ \cdot y = -\frac{P}{6} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{P}{12l^2} \cdot \frac{x^5}{5} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Zur Bestimmung der Festwerte C_1 und C_2 stehen die physikalischen Bedingungen der Aufgabe zur Verfügung

$$1.\ y=0 \quad \text{für} \quad x=0 \quad \text{und} \quad 2.\ y=0 \quad \text{für} \quad x=l,$$

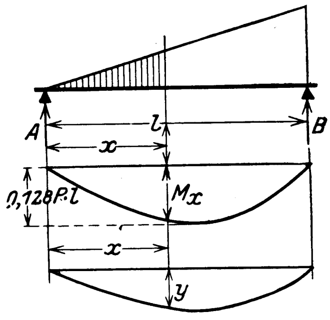


Abb. 137. Dreieckförmige Last.

von denen die erste $C_2=0$ liefert, die zweite

$$0=-\frac{Pl^3}{18}+\frac{Pl^3}{60}+C_1\cdot l;$$

daher ist

$$C_1=\frac{7}{180}P\cdot l^2.$$

Damit geht die Gleichung der Biegungslinien über in

$$EJ\cdot y=-\frac{P}{18}\cdot x^3+\frac{P}{60l^2}\cdot x^5+\frac{7}{180}Pl^2x,$$

$$y=\frac{Pl^3}{180EJ}\left(7\cdot\frac{x}{l}-10\cdot\frac{x^3}{l^3}+3\cdot\frac{x^5}{l^5}\right).$$

Die Kurve ist eine parabolische Kurve 5. Grades. Wir erhalten den Ort der größten Durchbiegung aus $\frac{dy}{dx}=0$:

$$\frac{180EJ}{P\cdot l^3}\cdot\frac{dy}{dx}=7\cdot\frac{1}{l}-30\cdot\frac{x^2}{l^3}+15\cdot\frac{x^4}{l^5}=0,$$

$$7l^4-30l^2x^2+15\cdot x^4=0$$

$$7l^4-30l^2(x^2)+15\cdot(x^2)^2=0$$

$$(x^2)^2-2l^2(x^2)+\frac{7}{15}l^4=0,$$

$$x^2=l^2\pm\sqrt{l^4-\frac{7}{15}\cdot l^4}=l^2\left(1\pm\frac{1}{15}\sqrt{120}\right).$$

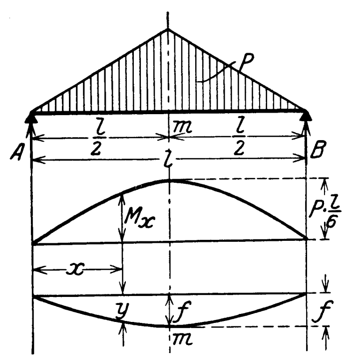


Abb. 138. Dreieckförmige Last.

Da x kleiner als l sein muß, erhalten wir als Ort der größten Durchbiegung $x=0{,}5193\cdot l$; setzen wir diesen Wert in die Gleichung der Begrenzungslinie ein, so wird

$$y_{\max}=0{,}01304\cdot\frac{Pl^3}{EJ}.$$

(Abb. 138.) Wegen der Symmetrie ist $A=B=\frac{P}{2}$. Als Moment im Punkte x ergibt sich

$$M_x=A\cdot x-\frac{P}{2}\cdot\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}\cdot\frac{x}{3}=Px\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Das größte Moment tritt in der Mitte auf und ist

$$M_{\max}=\frac{Pl}{6}.$$

Aus der Differentialgleichung der Biegungslinie

$$E J \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = - M_x = - \frac{P x}{2} + \frac{2}{3} P \cdot \frac{x^3}{l^2}$$

erhalten wir

$$E J \cdot \frac{d y}{d x} = - \frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{l^2} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 .$$

Da wegen der Symmetrie die Tangente im Punkte m der Biegungslinie wagerecht verläuft, wird $\frac{d y}{d x} = 0$ für $x = \frac{l}{2}$; die Bedingungsgleichung für C_1 lautet demnach

$$0 = - \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{P}{l^2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4 + C_1 , \quad \text{daraus } C_1 = \frac{5}{96} P l^2 .$$

$$E J \cdot \frac{d y}{d x} = - \frac{P}{4} \cdot x^2 + \frac{P}{6} \cdot \frac{x^4}{l^2} + \frac{5}{96} P l^2 ,$$

$$E J \cdot y = - \frac{P}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} \frac{P}{l^2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{5}{96} P l^2 \cdot x + C_2 .$$

Der Festwert C_2 ergibt sich aus der Bedingung $y = 0$ für $x = 0$ zu $C_2 = 0$; damit geht die Gleichung der Biegungslinie über in

$$y = \frac{P l^3}{12 E J} \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{x^5}{l^5} \right) .$$

Die größte Durchbiegung erfährt die Mitte des Trägers mit

$$y_{\max} = f = \frac{P l^3}{60 E J} .$$

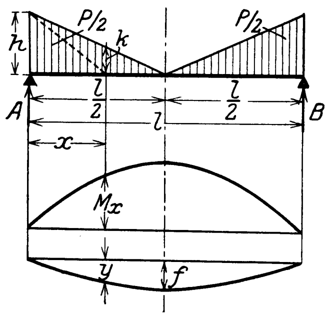


Abb. 139. Dreieckförmige Last.

(Abb. 139.) Auch hier wird wegen der Symmetrie $A = B = \frac{P}{2}$. Ist h die Belastungshöhe im Punkte A des Trägers, k die Belastungshöhe im Punkte x, so folgt aus

$$\frac{P}{2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad k : h = \left(\frac{l}{2} - x\right) : \frac{l}{2} ,$$

$$k = \frac{4 P}{l^2} \left(\frac{l}{2} - x\right) .$$

Damit wird

$$M_x = \frac{P}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot h \cdot x \cdot \frac{2}{3} x - \frac{1}{2} k \cdot x \cdot \frac{1}{3} x$$

$$= \frac{P}{2} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{l} x^2 - \frac{2}{3} \frac{P}{l^2} \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot x^2 ,$$

$$M_x = P x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{l^2} \right) .$$

Für $x = \frac{l}{2}$ erhalten wir $M_{\max} = \frac{P l}{12}$.

Die Differentialgleichung der Biegungslinie ergibt sich aus

$$E J \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = -M_x = -\frac{P}{2} \cdot x + \frac{P}{l} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \frac{P}{l^2} \cdot x^3 ,$$

$$E J \cdot \frac{d y}{d x} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{P}{l} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{P}{l^2} \frac{x^4}{4} + C_1 .$$

Aus der Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = \frac{l}{2}$ bestimmen wir den Integrationsfestwert zu

$$C_1 = \frac{P l^2}{16} - \frac{P l^2}{24} + \frac{P l^2}{96} = \frac{P l^2}{32} ,$$

$$E J \cdot \frac{d y}{d x} = -\frac{P}{4} \cdot x^2 + \frac{P}{3l} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \frac{P}{l^2} \cdot x^4 + \frac{P l^2}{32} ,$$

$$E J \cdot y = -\frac{P}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{P}{3l} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{P}{l^2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{P l^2}{32} x + C_2 .$$

C_2 wird gleich Null, weil $y = 0$ für $x = 0$ ist; damit wird

$$y = \frac{P l^3}{12 E J} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^5}{l^5} \right) .$$

Für die Mitte des Trägers erhalten wir als größte Durchbiegung mit $x = \frac{l}{2}$

$$y_{\max} = f = \frac{3}{320} \cdot \frac{P l^3}{E J} .$$

d) Der überhängende Träger.

Der beiderseits gleichmäßig überhängende Träger mit gleich großen Einzellasten (Abb. 140). Die Momentenfläche ist ein Trapez mit der Höhe

$$M_{\max} = P \cdot a ,$$

das negativ ist, weil sich der verformte Träger nach oben wölbt. Die Biegungslinie besteht aus drei Zweigen, deren Tangenten in den Auflagern zusammenfallen.

Für den mittleren Teil zwischen A und B heißt die Differentialgleichung der Biegungslinie

$$E J \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = -M_x = -P a .$$

Die einmalige Integration liefert

$$E J \cdot \frac{d y}{d x} = -P a x + C_1 .$$

Aus der Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = \frac{l}{2}$ folgt $C_1 = \frac{P a l}{2}$

$$E J \cdot \frac{d y}{d x} = -P a x + \frac{1}{2} P a l .$$

Die Tangente im Punkte A hat die Neigung $\varphi_A = \frac{P a l}{2 E J}$, die Tangente im Punkte B hat die Neigung $\varphi_B = -\frac{P a l}{2 E J}$. Die nochmalige Integration liefert $$E J \cdot y = -P a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{P a l}{2} \cdot x + C_2 .$$

Der Festwert C_2 wird gleich Null, da $y = 0$ für $x = 0$ ist.

Die Gleichung der Biegungslinie lautet daher:

$$y = \frac{P a l^2}{2 E J}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Die Biegungslinie ist eine Parabel, deren Scheitel in der Mitte des Trägers liegt, und deren Pfeilhöhe für $x = \frac{l}{2}$

$$y_{\max} = f_1 = \frac{P a l^2}{8 E J}$$

ist. Das Ergebnis steht im scheinbaren Widerspruch zu der andern Betrachtung, die von der Krümmung ausgeht. Nach S. 143 ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E J}, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{E J}{M} = \frac{E J}{P \cdot a}.$$

Da M unveränderlich ist, wird ϱ ebenfalls unveränderlich, d. h. die Biegungslinie ist ein Kreis mit dem Halbmesser ϱ. Die Pfeilhöhe des Kreisbogens wird

$$f_1 = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

während die erste Lösung mit $\frac{P a}{E J} = \frac{1}{\varrho}$

$$f_1 = \frac{l^2}{8 \cdot \varrho}$$

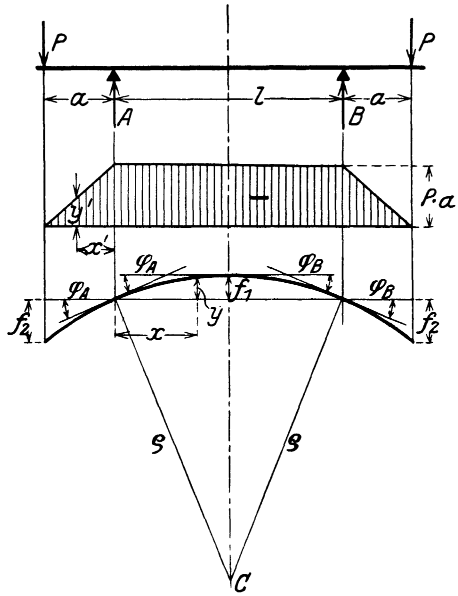


Abb. 140. Der überhängende Träger mit Einzellasten.

ergibt. Der Unterschied ist belanglos, denn setzen wir beide Werte gleich, so müßte sein:

$$\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l^2}{8 \varrho},$$

$$\varrho - \frac{l^2}{8 \varrho} = \sqrt{\varrho^2 - \frac{l^2}{4}} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 - \frac{l^2}{4} + \frac{l^4}{64 \varrho^2} = \varrho^2 - \frac{l^2}{4};$$

die Abweichung beträgt $\frac{l^4}{64 \varrho^2}$, was bei dem sehr großen Krümmungshalbmesser tatsächlich keine Rolle spielt. Immerhin bestätigt die Untersuchung zahlenmäßig, daß unsere Gleichungen der Biegungslinien nur Annäherungen sind.

Für die beiden äußeren Äste der Biegungslinie erhalten wir die Differentialgleichung

$$E J \cdot \frac{d^2 y'}{d x'^2} = -M_x = -P(a - x')$$

und durch Integration

$$EJ\cdot\frac{dy'}{dx'}=-Pax'+\frac{Px'^2}{2}+C_1.$$

Der Bestimmung des Festwertes legen wir die Bedingung zugrunde, daß $\frac{dy'}{dx'}=-\varphi_A$ für $x'=0$ wird und erhalten mit $\varphi_A=\frac{Pal}{2EJ}$

$$EJ\cdot\frac{dy'}{dx'}=-Pax'+\frac{Px'^2}{2}-\frac{Pal}{2}$$

und daraus durch nochmalige Integration

$$EJ\cdot y'=-Pa\cdot\frac{x'^2}{2}+\frac{P}{2}\cdot\frac{x'^3}{3}-\frac{Pal}{2}x'+C_2.$$

Der Festwert C_2 ist gleich Null, weil $y'=0$ für $x'=0$ wird. Die Gleichung der Biegungslinie lautet

$$y'=\frac{Pal^2}{2EJ}\left(-\frac{x'}{l}-\frac{x'^2}{l^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x'^3}{al^2}\right)$$

oder

$$-y'=\frac{Pal^2}{2EJ}\left(\frac{x'}{l}+\frac{x'^2}{l^2}-\frac{1}{3}\frac{x'^3}{al^2}\right).$$

Das Minuszeichen besagt, daß y' bei dem gewählten Achsenkreuz unterhalb der x-Achse liegt. Die größte Senkung erfahren die Endpunkte des Trägers, sie senken sich um

$$f_2=\frac{P}{EJ}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2l}{2}\right).$$

Zahlenbeispiel. $l=4$ m; $a=1$ m; $P=2{,}15$ t; $k_b=900$ kg/cm²; $M_{\max}=P\cdot a=2{,}15$ mt $=215000$ cmkg; erforderlich

$$W=\frac{2150000}{900}=240\ \text{cm}^3.$$

Ausgeführt I-Eisen NP 21 mit $W=244$ cm³; $J=2563$ cm⁴. Als Krümmungshalbmesser ergibt sich

$$\varrho=\frac{E\cdot J}{M}=\frac{2150000\cdot 2563}{215000}=25630\ \text{cm}.$$

Die Pfeilhöhe des Kreisbogens wird für $\frac{l}{2}=200$ cm

$$f_1=\varrho-\sqrt{\varrho^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=25630-\sqrt{25630^2-200^2}=0{,}7803\ \text{cm}.$$

Die Pfeilhöhe der Parabel wird

$$f_1=\frac{Pal^2}{8\cdot EJ}=\frac{2150\cdot 100\cdot 400\cdot 400}{8\cdot 2150000\cdot 2563}=\frac{16000}{20504}=0{,}7803\ \text{cm}.$$

Der beiderseits gleichmäßig überhängende Träger mit gleichförmig verteilter Last (Abb. 141). Wegen der Symmetrie wird $A=B=P$. Die Momentenlinie besteht aus drei Ästen, die teils oberhalb, teils unterhalb der Achse vorlaufen.

Kragarme: Im Punkte x_1 erfährt der Stab das Moment

$$M_1=-\frac{P}{l}\cdot\frac{x_1^2}{2};$$

es ist negativ, weil sich die verformte Stabachse nach oben wölbt. Die Kurve ist eine Parabel mit dem Scheitel in a, bzw. b und der Ordinate

$$M_{1\,\max} = -\frac{P \cdot a^2}{2l}$$

im Punkte A und B (Abb. 141).

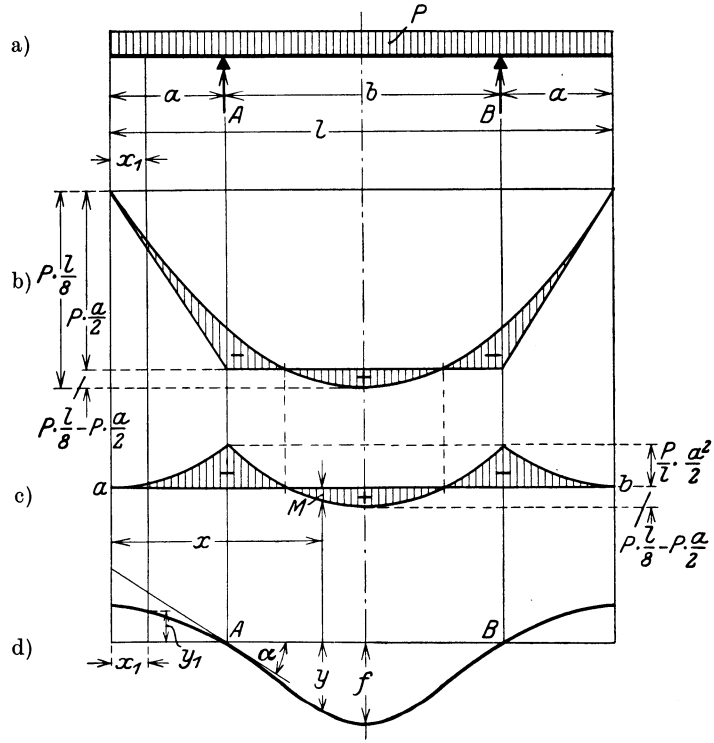


Abb. 141. Der überhängende Träger mit gleichförmig verteilter Last.

Mittelträger. Ein Punkt im Abstande x vom linken Ende des Trägers erfährt das Biegungsmoment

$$M_x = A \cdot (x - a) - \frac{P}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{P}{2}\, x - \frac{Pa}{2} - \frac{P}{2\,l} \cdot x^2\,,$$

$$M_x = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{x}{l}\right).$$

Das größte positive Moment liegt in der Mitte und hat den Wert

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{2a}{l}\right).$$

Die Momenten-Nullpunkte erhält man als Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse aus der Bedingung

$$M_x = 0; \quad \text{d. h. } 1. \quad 1 - \frac{a}{x} - \frac{x}{l} = 0; \quad 2. \quad x = 0\,.$$

Die erste Bedingung liefert die quadratische Gleichung

$$x^2 - lx + al = 0,$$

aus der

$$x = \frac{l}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{a}{l}}\right)$$

folgt. Soll x reell werden, muß

$$1 \geqq 4\frac{a}{l} \text{ sein oder } l \geqq 4a, \text{ bzw. } b \geqq 2a.$$

Für kleinere Spannweiten als $b = 2a$ gibt es nur negative Momente. Im Sonderfall $b = 2a$ berührt die Momentenlinie die Achse in der Stabmitte; der Träger hat drei Momenten-Nullpunkte (Abb. 142).

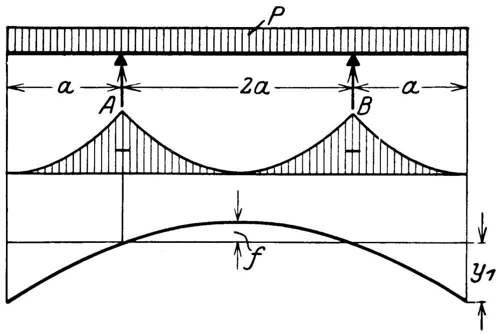


Abb. 142. Der überhängende Träger mit gleichförmig verteilter Belastung.

Die Forderung, daß positive und negative Momente gleich groß sein sollen, führt zu der Bedingung

$$\frac{Pa^2}{2l} = \frac{Pl}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{2a}{l}\right) = \frac{Pl}{8} - \frac{Pa}{2},$$

die für die Länge a der Kragarme

$$a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}207 \cdot l \quad \text{oder} \quad l = 4{,}828\,a$$

ergibt.

Die Entwicklung der Momentenfläche als Differenz der positiven M-Fläche mit der Pfeilhöhe $\frac{Pl}{8}$ und der negativen Tragefläche mit $M = \frac{Pa}{2}$ zeigt Abb. 141 b; bei dieser Entwicklung denken wir uns an den freien Enden des Trägers zwei Stützen und den Träger mit P und $A = B = \frac{P}{2}$ lastet.

Die Biegungslinie. Wir legen das in Abb. 141 d angedeutete Achsenkreuz zugrunde und schreiben für einen Punkt x zwischen den Stützen die Differentialgleichung

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = \frac{Px}{2}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{a}{x}\right)$$

an, die durch einmalige Integration übergeht in

$$E J \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Pa}{2} \cdot x - \frac{P}{4} x^2 + \frac{P}{6l} x^3 + C_1 .$$

Für die Bestimmung des Integrationsfestwertes C_1 halten wir fest, daß die Neigungswinkel der Tangenten in A und B Supplementwinkel sind, und schreiben

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} \text{ für } \quad x = a \quad \text{ gleich } \quad - E J \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{ für } \quad x = l - a .$$

Das ergibt die Bedingungsgleichung für C_1

$$\frac{P}{2} \cdot a^2 - \frac{P}{4} \cdot a^2 + \frac{P}{6l} \cdot a^3 + C_1 = - \left[\frac{Pa}{2} (l - a) - \frac{P}{4} (l - a)^2 + \frac{P}{6l} (l - a)^3 + C_1 \right]$$

oder

$$\frac{P}{2} \cdot \left(6a^2 - 3a^2 + 2\frac{a^3}{l} \right) + 12 C_1 = \frac{P}{2} (a - l) \left(6a - 3l + 3a + 2l - 4a + 2\frac{a^2}{l} \right)$$

$$12 C_1 = \frac{P}{2} (l^2 - 6al) , \quad \text{daraus} \quad C_1 = \frac{Pl^2}{24} - \frac{Pal}{4} .$$

Demnach liefert die einmalige Integration

$$E J \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Pa}{2} x - \frac{P}{4} x^2 + \frac{P}{6l} x^3 + \frac{Pl^2}{24} - \frac{Pal}{4} ,$$

woraus sich als Neigung der Biegungslinie im Punkte A, also für $x = a$,

$$E J \cdot \frac{dy}{dx} = E J \cdot \alpha = \frac{Pa^2}{4} + \frac{Pa^3}{6l} + \frac{Pl^2}{24} - \frac{Pal}{4}$$

ergibt. Nochmalige Integration liefert

$$E J \cdot y = \frac{Pa}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{P}{6l} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{Pl^2}{24} \cdot x - \frac{Pal}{4} \cdot x + C_2 .$$

Der Festwert C_2 folgt aus der Bedingung $y = 0$ für $x = a$ zu

$$C_2 = - \frac{Pl^2 a}{24} + \frac{Pla^2}{4} - \frac{Pa^3}{6} - \frac{Pa^4}{24l} ,$$

und wir erhalten als Gleichung der Biegungslinie zwischen A und B

$$y = \frac{Pl^3}{24EJ} \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} + 6\frac{ax^2}{l^3} - 6\frac{ax}{l^2} - \frac{a}{l} + 6\frac{a^2}{l^2} - 4\frac{a^3}{l^3} - \frac{a^4}{l^4} \right) .$$

Die größte Durchbiegung erfährt die Mitte $\left(\text{d. h. } x = \frac{l}{2} \right)$ mit

$$f = \frac{Pl^3}{24EJ} \left(\frac{5}{16} - \frac{5}{2} \cdot \frac{a}{l} + 6 \cdot \frac{a^2}{l^2} - 4 \cdot \frac{a^3}{l^3} - \frac{a^4}{l^4} \right) .$$

Die Biegungslinie ist eine parabolische Kurve 4. Grades, die zwei Wendepunkte hat, deren analytische Bedingung, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, da erfüllt ist, wo $M_x = 0$ ist. Den Momentennullpunkten entsprechen Wendepunkte der Biegungslinie.

In einem Punkte des Kragarmes herrscht das Biegungsmoment

$$M_x = -\frac{P}{l} \cdot \frac{x_1^2}{2};$$

es ist notwendig, das Vorzeichen zu beachten, da gleichzeitig positive und negative Momente am Träger auftreten. Die Differentialgleichung der Biegungslinie lautet demnach

$$E J \cdot \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = -M_x = \frac{P}{l} \cdot \frac{x_1^2}{2}$$

und ergibt nach einmaliger Integration

$$E J \cdot \frac{d y_1}{d x_1} = \frac{P}{2 l} \cdot \frac{x_1^3}{3} + C_1.$$

Zur Bestimmung des Integrationsfestwertes C_1 denken wir daran, daß der linke Zweig und der mittlere Teil der Biegungslinie in A eine gemeinsame Tangente haben. Rechnerisch ausgedrückt heißt das: für $x_1 = a$ muß $\frac{d y_1}{d x_1} = \alpha$ sein. Wir schreiben

$$\frac{P a^3}{6 l} + C_1 = \frac{P a^2}{4} + \frac{P a^3}{6 l} + \frac{P l^2}{24} - \frac{P a l}{4},$$

$$C_1 = \frac{P a^2}{4} + \frac{P l^2}{24} - \frac{P a l}{4};$$

es wird

$$E J \cdot \frac{d y_1}{d x_1} = \frac{P x_1^3}{6 l} + \frac{P a^2}{4} + \frac{P l^2}{24} - \frac{P a l}{4},$$

daher

$$E J \cdot y_1 = \frac{P}{6 l} \cdot \frac{x_1^4}{4} + \frac{P a^2}{4} \cdot x_1 + \frac{P l^2}{24} \cdot x_1 - \frac{P a l}{4} \cdot x_1 + C_2.$$

Aus der Bedingung $y_1 = 0$ für $x_1 = a$ erhalten wir

$$C_2 = \frac{P a^2 l}{4} - \frac{P a^4}{24 l} - \frac{P a^3}{4} - \frac{P a l^2}{24}$$

und damit als Gleichung der Biegungslinie

$$y_1 = \frac{P l^3}{24 E J} \left(\frac{x_1^4}{l^4} + 6 \frac{a^2}{l^2} \cdot \frac{x_1}{l} + \frac{x_1}{l} - 6 \frac{a}{l} \cdot \frac{x_1}{l} + 6 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} - 6 \frac{a^3}{l^3} - \frac{a}{l} \right).$$

Die Ordinate im Endpunkte des Trägers ($x_1 = 0$) kann größer, gleich oder kleiner als Null sein und ist bestimmt durch die Länge a des Kragarmes. Wir errechnen zunächst das Verhältnis ($a : l$) für den Fall $y_1 = 0$ für $x_1 = 0$.

Es ist

$$0 = 6 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} - 6 \frac{a^3}{l^3} - \frac{a}{l},$$

$$z = \left(\frac{a}{l}\right)^3 + 6 \left(\frac{a}{l}\right)^2 - 6 \left(\frac{a}{l}\right) + 1 = 0.$$

Durch Annäherung finden wir

$\frac{a}{l}$	0,2	0,21	0,22	0,214
z	0,048	0,014	—0,019	0,00058

und erhalten als Bedingung für $y_1 = 0$

$$\frac{a}{l} = \approx 0{,}214 \quad \text{oder} \quad l = 4{,}666 \cdot a = \approx \frac{14}{3} a .$$

Aus $\frac{d y_1}{d x_1} = 0$ folgt als Ort der größten Durchbiegung

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{12 a l^2 - 2 l^3 - 12 a^2 l},$$

das für $l = \frac{14}{3} a$ den Wert

$$x_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{12 a \left(\frac{14}{3} a\right)^2 - 2 \left(\frac{14}{3} a\right)^3 - 12 a^2 \cdot \frac{14}{3} a} = 0{,}64 a$$

annimmt. Mit $l = \frac{14}{3} a$ und $x_1 = \approx \frac{2}{3} a$ wird

$$y_{1\,\max} = \approx \frac{1}{240} \cdot \frac{P a^3}{E J},$$

während die Durchbiegung in der Mitte für $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$ und $\frac{a}{l} = \frac{3}{14}$

$$f = \approx \frac{11{,}5}{240} \cdot \frac{P a^3}{E J}$$

beträgt.

Die Senkung f des Mittelpunktes wird gleich Null, wenn

$$\frac{5}{16} - \frac{5}{2}\left(\frac{a}{l}\right) + 6 \left(\frac{a}{l}\right)^2 - 4 \left(\frac{a}{l}\right)^3 - \left(\frac{a}{l}\right)^4 = 0$$

ist. Durch Annäherung finden wir $(a : l) = 0{,}2386$ oder $l = \approx 4{,}2\, a$ und als senkrechte Verschiebung der Trägerenden mit $\frac{a}{l} = \frac{1}{4{,}2}$ und $x_1 = 0$

$$y_1 = \frac{P \cdot (4{,}2\, a)^3}{24 \cdot E J} \left(6 \cdot \frac{1}{4{,}2^2} - \frac{1}{4{,}2^4} - 6 \cdot \frac{1}{4{,}2^3} - \frac{1}{4{,}2}\right) = \frac{6{,}6}{120} \cdot \frac{P a^3}{E J}$$

nach unten.

Beispiele: 1. $l = 4\, a$ (Abb. 142). Die Durchbiegung in der Mitte ist

$$f_1 = \frac{P \cdot (4 a)^3}{24 \cdot E J} \left(\frac{5}{16} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4^2} - 4 \cdot \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4}\right) = - \frac{P a^3}{96 \cdot E J},$$

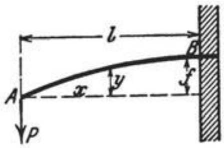
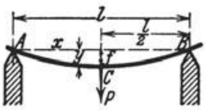
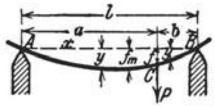
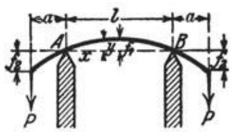
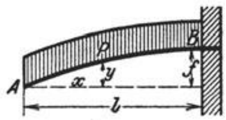
die Senkung der Trägerenden

$$y_1 = \frac{P l^3}{24\, E J} \left(6 \cdot \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} - 6 \cdot \frac{a^3}{l^3} - \frac{a}{l}\right)$$

$$= \frac{P \cdot (4 a)^3}{24\, E J} \left(6 \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^4} - 6 \cdot \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4}\right) = + \frac{7}{96} \cdot \frac{P a^3}{E J}.$$

e) Tafel für Träger mit gleich-

In nachstehender Zusammenstellung bedeuten:
l die freie Länge in cm.
f die Durchbiegung in cm im Angriffspunkt der Last P.
P die äußeren Kräfte in kg. h die Trägerhöhe in cm.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrucke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
1.		$B = P.$ $M = P x.$ $M_{\max} = Pl.$	$P = \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{P l}{k_b}.$
2.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{P x}{2}.$ $M_{\max} = \frac{P l}{4}.$	$P = \frac{4 \cdot k_b W}{l}.$ $W = \frac{P l}{4 k_b}.$
3.		$A = \frac{P b}{l}$; $B = \frac{P a}{l}.$ Für AC: $M = \frac{P b x}{l}$; für BC: $M = \frac{P a x_1}{l}.$ $M_{\max} = \frac{P a b}{l}.$	$P = k_b W \frac{l}{a b}.$ $W = \frac{P a b}{l k_b}.$
4.	 Dieselben Formeln gelten, wenn AB die Lastpunkte und die Enden des Trägers gestützt sind.	$A = B = P.$ Für AB: $M = Pa =$ konst.	$P = \frac{k_b W}{a}.$ $W = \frac{Pa}{k_b}.$
5.		$B = P.$ $M = \frac{P x^2}{2 l}.$ $M_{\max} = \frac{Pl}{2}.$	$P = 2 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{P l}{2 k}.$

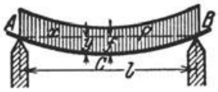
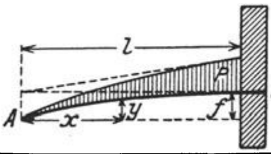
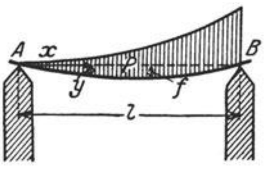
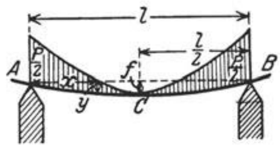
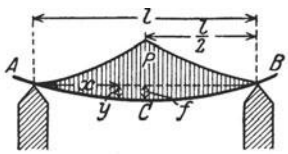
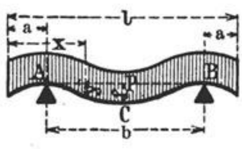
[1]) Mit f ist die Durchbiegung im Angriffspunkt der Einzellast P, mit $f_{\max}$ stimmt. — Die durch k_b ausgedrückten Werte von f gelten nur für homogene

bleibendem Querschnitt.

k_b die zulässige Biegungsspannung in kg/cm².
J das Trägheitsmoment des Querschnittes in cm⁴.
W das Widerstandsmoment des Querschnittes in cm³.
x und y die Koordinaten eines Punktes der Biegungslinie.

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f[1])	Bemerkungen
$y = \frac{P\,l^3}{2\,E\,J}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{l^3}\right).$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P\,l^3}{2\,E\,J}\left(\frac{1}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\operatorname{tg}\beta\,(x=0) = \frac{P\,l^2}{2\,E\,J} = \frac{3\,f}{2\,l}.$	$f = \frac{P}{E\,J}\,\frac{l^3}{3}$ $= \frac{2}{3}\,\frac{k_b}{E}\,\frac{l^2}{h}.$	Freiträger Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P\,l^3}{16\,E\,J}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\,\frac{x^3}{l^3}\right).$	$f = \frac{P}{E\,J}\,\frac{l^3}{48}.$ $= \frac{1}{6}\,\frac{k_b}{E}\,\frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{E\,J}\,\frac{a^2\,b^2}{6\,l}\left(2\,\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2\,b}\right).$ $y_1 = \frac{P}{E\,J}\,\frac{a^2\,b^2}{6\,l}\left(2\,\frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{a} - \frac{x_1^3}{b^2\,a}\right).$	$f = \frac{P}{E\,J}\,\frac{l^3}{3}\,\frac{a^2}{l^2}\,\frac{b^2}{l^2}:$ $f_{\max}$ für $x = a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3\,a}},$ wenn $a > b$; $x_1 = b\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\,a}{3\,b}},$ wenn $a < b$.	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt bei C.
Zwischen A und B: $y = \frac{P}{E\,J}\,\frac{a\,l^2}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$ Die elastische Linie zwischen A und B ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser $\varrho = \frac{E\,J}{P\,a}.$	f_1 in der Mitte der Stützweite: $f_1 = \frac{P}{E\,J}\,\frac{l^3}{8}\,\frac{a}{l}$ $= \frac{l^2}{8\varrho} = \frac{1}{4}\,\frac{k_b}{E}\,\frac{l^2}{h}.$ $f_2 = \frac{P}{E\,J}\,\frac{a^2}{3}\left(a + \frac{3\,l}{2}\right).$	Frei aufliegender Träger mit Kragstücken. Gefährlicher Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.
$y = \frac{P}{E\,J}\,\frac{l^3}{6}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{l^4}\right).$	$f = \frac{P}{E\,J}\,\frac{l^3}{8}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{k_b}{E}\,\frac{l^2}{h}.$	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.

die größte Durchbiegung bezeichnet worden, falls f nicht damit überein-
Balkenquerschnitte mit wagerechter Symmetrieachse.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegungsmoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
6.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$.	$P = 8\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{8 k_b}$.
7.		$B = P$. $M = \frac{P}{3}\,\frac{x^3}{l^2}$. $M_{\max} = \frac{Pl}{3}$.	$P = 3\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{3 k_b}$.
8.		$A = \frac{1}{3}\,P$; $B = \frac{2}{3}\,P$. $M = \frac{P}{3}\,x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$. $M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\,Pl$ $= 0{,}128\,Pl$.	$P = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\frac{k_b W}{l}$ $= 7{,}794\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{7{,}794\,k_b}$.
9.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2}\right)$. $M_{\max} = \frac{Pl}{12}$.	$P = 12\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{12 k_b}$.
10.		$A = B = \frac{P}{2}$. $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{l^2}\right)$. $M_{\max} = \frac{Pl}{6}$.	$P = 6\,\frac{k_b W}{l}$. $W = \frac{Pl}{6 k_b}$.
11.		$A = B = \frac{P}{2}$. Für AB: $M_x = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{x}{l}\right)$. Für $x \leq c$: $M_x = -\frac{Px^2}{2l}$. $M_A = M_B = -\frac{Pa^2}{2l}$. Größtes positives Biegungsmoment $M_C = \frac{Pl}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{2a}{l}\right)$ für $l \geqq 4\,a$. Die absoluten Größtwerte M_A und M_C werden gleich für $a = 0{,}207\,l$.	Hängen von dem Verhältnis $\frac{a}{l}$ ab.

[1]) Da die Werte von $M_{\max}$ und f für den Fall 8 mit den entsprechenden Werten für den „Dreiecklasten“ und „Trapezlasten“ (parallele Seiten des Lastfeldes winkelrecht zur Auflagerdrücke hingegen weichen bis um $^1/_6$ der Gesamtlast von den nach Fall 6 ermittelten

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f	Bemerkungen
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right).$ $\operatorname{tg}\tau_{(x=0)} = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{24} = 3{,}2\frac{f}{l}.$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{5\,l^3}{384}$ $= \frac{5}{24}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right).$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{15}$ $= \frac{2}{5}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{180}\left(7\frac{x}{l} - 10\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^5}{l^5}\right).$	Größte Durchbiegung für $x = l\sqrt{1-\sqrt{8/15}}$ $= 0{,}5193\,l$: $f_{\max} = \frac{P\,l^3}{EJ}\frac{2+5\sqrt{8/15}}{225}$ $\cdot\sqrt{1-\sqrt{8/15}}$ $= 0{,}01304\frac{P\,l^3}{EJ}$ [1]).	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt für $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,l\sqrt{3}$ $= 0{,}5774\,l.$
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{3}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right.$ $\left. - \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right).$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{3\,l^3}{320}$ $= \frac{9}{40}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{5}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right).$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60}$ $= \frac{1}{5}\frac{k_b}{E}\frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
Zwischen A und B: $y = \frac{P\,l^3}{24\,EJ}\left[\frac{x}{l} - \frac{2\,x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} + 6\frac{a\,x^2}{l^3}\right.$ $\left. - 6\frac{a\,x}{l^2} - \frac{a}{l} + 6\frac{a^2}{l^2} - 4\frac{a^3}{l^3} - \frac{a^4}{l^4}\right].$	$f = \frac{P\,l^3}{24\,EJ}$ $\left[\frac{5}{16} - \frac{5}{2}\frac{a}{l} + 6\frac{a^2}{l^2}\right.$ $\left. - 4\frac{a^3}{l^3} - \frac{a^4}{l^4}\right].$ f wird Null, wenn $l \approx 4{,}2\,a.$	Gefährlicher Querschnitt bei A, B oder C.

Fall 6 fast genau übereinstimmen, so können bei Ermittlung von $M_{\max}$ und f derartige Trägerrichtung) für gewöhnliche Fälle als gleichmäßig verteilte Lasten angesehen werden. Die Werten ab.

2. $l = 5a$. (Abb. 141.) Die Durchbiegung in der Mitte ist

$$f = \frac{P(5a)^3}{24EJ}\left(\frac{5}{16} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5} + 6\cdot\frac{1}{5^2} - 4\cdot\frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4}\right) = \frac{11{,}8}{120}\cdot\frac{Pa^3}{EJ},$$

die Senkung der Trägerenden

$$y_1 = \frac{P(5a)^3}{24EJ}\left(6\cdot\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^4} - 6\cdot\frac{1}{5^3} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{6}{120}\cdot\frac{Pa^3}{EJ}.$$

3. Träger mit veränderlichem Querschnitt.

a) Das Verfahren von Mohr.

Das Mohrsche Verfahren zur Lösung der Grundgleichungen (II) und (III) auf S. 146 läßt sich auch auf ungleichmäßige Querschnitte anwenden. In diesem Falle ist J eine Veränderliche und darf nicht vor das Integral gezogen werden. Die Grundgleichungen behalten ihre ursprüngliche Form:

$$\text{(II)}\quad \varphi = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{M}{J}\cdot dx \quad \text{und} \quad \text{(III)}\quad \delta = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{M}{J}\cdot x\cdot dx.$$

In Anlehnung an das Verfahren auf S. 147 schreiben wir für Träger mit veränderlichem Querschnitt

$$y = \frac{1}{E}\left\{b\cdot\int_0^a \frac{M}{J}\cdot\frac{x}{l}\cdot dx + a\cdot\int_0^b \frac{M}{J}\cdot\frac{x'}{l}\cdot dx'\right\}$$

und finden durch Vergleich mit dem Biegungsmoment eines beliebig belasteten Trägers (S. 111)

$$M = b\cdot\int_0^a k\cdot\frac{x}{l}\cdot dx + a\cdot\int_0^b k\cdot\frac{x'}{l}\cdot dx',$$

daß die E-fache Senkung eines Punktes gleich dem Biegungsmoment eines Trägers ist, den wir mit der $(M:J)$-Fläche des gegebenen Trägers belastet denken. Es ist $k = M:J$ die Belastungshöhe des gedachten Trägers. Wir berechnen die Ordinaten $(M:J)$ Punkt für Punkt und verbinden ihre Endpunkte durch eine Kurve. Die entstandene Fläche, deren Ordinaten die durch J dividierten Biegungsmomente sind, fassen wir nunmehr als Belastungsfläche eines Trägers auf und entwerfen die dazu gehörende Momentenlinie. Dann gibt diese zweite Momentenlinie ein Bild der Biegungslinie des gegebenen Trägers.

b) Beziehungen zwischen der Biegungslinie und der Seilkurve lotrechter Kräfte. Differentialgleichung der Seilkurve[1]).

Zu der stetigen Last k in kg/m ist in Abb. 143 die Seilkurve in folgender Weise gezeichnet; die Belastungsfläche wird in schmale Streifen von der Breite Δx parallel zur Richtung der Kräfte zerlegt,

[1]) Mohr, Otto: Technische Mechanik. Berlin 1914: Mittler & Sohn.

dann bestimmt das Flächenelement $k \cdot \Delta x$ die Belastung der kleinen Strecke Δx, die als Einzelkraft im Schwerpunkte des Flächenteilchens aufgefaßt werden kann. Zu diesen Einzelkräften zieht man mit Hilfe des Kraftecks (Abb. 143) ein Seileck, das in die Seilkurve übergeht, wenn Δx verschwindend klein wird. In diesem Falle wird $k \cdot dx$ die Belastung der unendlich kleinen Strecke dx, die sich als Horizontalprojektion des zugehörigen Kurvenelementes darstellt. Für die in B angreifende Kraft $k \cdot dx$ sind $BA \parallel S_a$ und $BC \parallel S_c$ Seileckseiten, die in Abb. 143a stark vergrößert aufgetragen sind. Zieht man $AD \parallel BC$, so folgt aus der Ähnlichkeit der gestrichelten Dreiecke

$$\frac{d^2 y}{dx} = \frac{k \cdot dx}{H},$$

wobei H die Polweite und $d^2 y$ den Zuwachs von dy bedeuten. Daraus folgt die Differentialgleichung der Seilkurve

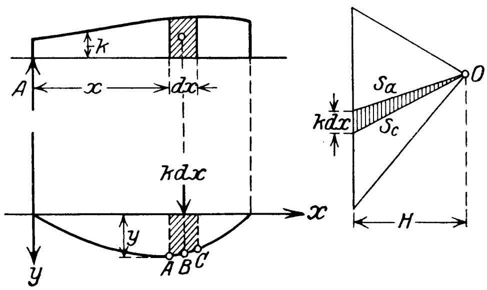


Abb. 143. Biegungslinie nach Mohr.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k}{H}.$$

k heißt Belastungshöhe und ist veränderlich. Für den Sonderfall $k =$ konst. erhält man die Gleichung der Seilkurve durch Integration; es wird

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{k}{H} \cdot dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \int \frac{k}{H} \cdot dx = \frac{k}{H} \cdot x + C_1,$$

$$dy = \frac{k}{H} \cdot x \cdot dx + C_1 \cdot dx, \qquad y = \frac{k}{H} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2;$$

wobei C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind, die sich aus den besonderen Bedingungen der jeweiligen Aufgabe ergeben. Die Gleichung $y = f(x)$ zeigt, daß die Seilkurve für $k =$ konst. eine Parabel ist, die symmetrisch zu einer der y-Achse parallelen Geraden liegt.

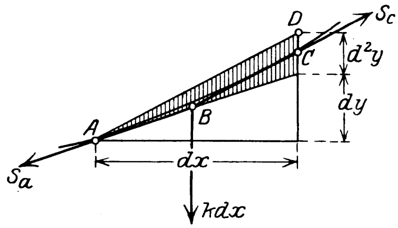


Abb. 143a. Element der Seilkurve.

Aus der Übereinstimmung der beiden Differentialgleichungen geht hervor, daß die elastische Linie als eine Seilkurve angesehen werden kann, wenn man $k = M_x : J_x$ und $H = E$ setzt (Mohrscher Satz).

In Abb. 144 sei der Träger AB mit einer $\frac{M}{J}$-Fläche belastet; die infolge der Belastungsfläche, deren Gesamtinhalt $\int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx$ ist, auftretenden Stützdrucke seien A und B, dann ist das in der Entfernung x auftretende Biegungsmoment des Trägers AB

$$m = H \cdot y,$$

wenn man zu der Belastung $\int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx$ die Seilkurve mit der Polweite H entwirft. Mit $H = E$ wird

$$m = E \cdot y \quad \text{oder} \quad y = \frac{m}{E} = \alpha \cdot m\,.$$

Demnach ist die Ordinate y der Seilkurve gleich dem mit α multiplizierten Biegungsmoment im Punkte x eines Trägers, der mit der $\frac{M}{J}$-Fläche belastet ist. Die Seilkurve der Lasten $\frac{M_x}{J_x}$ ist aber die elastische Linie des Trägers, zu dem die Belastungsfläche AB als Momentenfläche gehört, wenn die Ordinaten der Momentenfläche durch die zugehörigen Trägheitsmomente dividiert werden. Man bezeichnet deshalb auch die elastische Linie als zweite Momentenlinie.

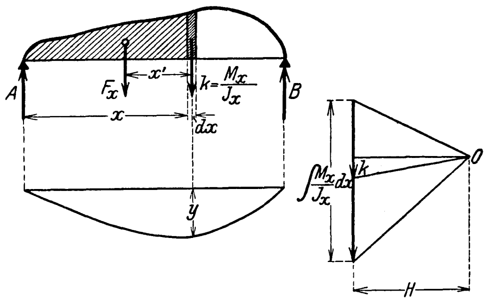


Abb. 144. Biegungslinie und Seileck.

Wird so die elastische Linie auf eine Momentenlinie zurückgeführt, so läßt sich auch die Gleichung der Biegungslinie in einfacher Weise aufstellen; für den Träger der Abb. 144 ist

$$m = A \cdot x - F_x \cdot x',$$

wobei F_x den Inhalt der links vom betrachteten Punkt liegenden Belastungsfläche, x' die Entfernung ihres Schwerpunktes bedeuten. Die mit α multiplizierten Werte m ergeben die Ordinaten der Biegungslinie.

Da das maximale Moment da auftritt, wo die Querkraft gleich Null wird, so folgt die Lage der maximalen Durchbiegung aus der Bedingung:

$$Q_x = A - \int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx = 0\,.$$

Aus der Gleichung $m = E \cdot y = A \cdot x - F_x \cdot x'$ erhält man durch Differentiation die E-fache Neigung der elastischen Linie zu:

$$E \cdot \frac{dy}{dx} = A - \int \frac{d(F_x \cdot x')}{d_x} = E \cdot \operatorname{tg} \varphi = E \cdot \varphi\,,$$

was zulässig ist, solange es sich um kleine Durchbiegungen handelt. Das Glied $\frac{d(F_x \cdot x')}{dx}$ ist eine Funktion von x, die x als Faktor enthält, da sowohl die Fläche F_x als auch x' für $x = 0$ verschwinden; demnach erhält man als Neigung im Auflager A

$$E \cdot \varphi = A\,.$$

Es stellt sich also die E-fache Neigung eines Trägers im Auflager dar als Auflagerreaktion eines gedachten Trägers, den man mit der $\frac{M}{J}$-Fläche des wirklichen Trägers belastet.

Hat der Träger unveränderlichen Querschnitt, so wird nach S. 146 die M-Fläche als Belastungsfläche aufgefaßt und zu dieser Belastung die Momentenlinie entworfen, die nach Mohr als Seillinie gezeichnet wird.

Beispiel 1: Ein Balken mit gleichbleibendem Querschnitt sei durch eine Kraft in der Mitte belastet (Abb. 145a).

Die Auflagerreaktionen sind $$A = B = \frac{P}{2}.$$

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $M = \frac{P \cdot l}{4}$.

Die $E \cdot J$-fache Durchbiegung ist das statische Moment für einen gedachten Träger $A'\,B'$, der mit der wirklichen Momentenfläche belastet ist (Abb. 145b). Es wird

$$E\,J \cdot y = m_x = A' \cdot x - F_x \cdot \frac{x}{3}.$$

Wegen der Symmetrie der Belastungsfläche ist

$$A' = B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{Pl^2}{16},$$

$$F_x = \frac{Pl^3}{16} \cdot \frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

$$E\,J \cdot y = \frac{Pl^2}{16}\left(x - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{l^2}\right),$$

$$= \frac{Pl^3}{16}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$y = \frac{Pl^3}{16\,E\,J}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right),$$

die Gleichung der Biegungslinie; für

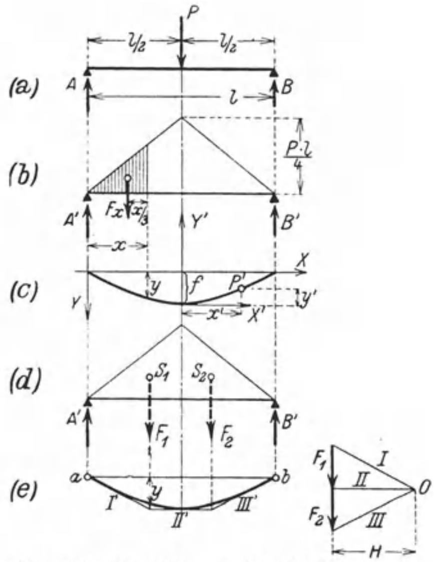


Abb. 145. Zwei Stützen. Einzellast in der Mitte.

$$x = \frac{l}{2} \text{ wird } y_{\max} = f = \frac{Pl^3}{48\,E\,J} \text{ (Abb. 145c).}$$

Zur zeichnerischen Ermittlung der Biegungslinie wird die Belastungsfläche des Trägers $A'B'$ in Teile zerlegt, deren Schwerpunktslagen bekannt sind (in Abb. 145d in zwei Dreiecke), und die Flächeninhalte $F_1 = F_2 = \frac{Pl^2}{16}$ werden als Kräfte aufgefaßt, die in den Schwerpunkten der Einzelflächen angreifen. Der Längenmaßstab sei 1 cm $= a$ cm; der Kräftemaßstab 1 cm $= b$ cm²kg, da F die Benennung cm²kg hat. Zu dem Kräftezuge F_1, F_2 zieht man aus dem beliebig gewählten Pol O die Polstrahlen I, II, III, und durch die Wirkungslinien von F_1 und F_2 die Seilstrahlen I', II', III', die Tangenten an die elastische Linie sind; senkrecht unter A' und B' liegen die Punkte a und b der Schlußlinie. Da, wo die Teilflächen F_1 und F_2 zusammenstoßen, ergibt sich ein gemeinsamer Seilstrahl, der für die Kurvenäste gemeinsame Tangente ist; von der Biegungslinie sind demnach die Punkte a und b, sowie der Schnittpunkt des Seilstrahles II' mit der Wirkungslinie von P und die drei durch diese Punkte gehenden Tangenten bekannt. In den meisten Fällen genügen diese Feststellungen, um die Kurve selbst freihändig einzutragen. Im vorliegenden Falle sind die beiden Zweige der Biegungslinie wegen der dreieckförmigen Belastungsfläche kubische Parabeln. Die Durchbiegung δ im Punkte x ist

$$\delta = \frac{1}{E\,J} \cdot H \cdot y \quad \text{oder} \quad \delta\,\text{cm} = \frac{1}{E\,J}\left(H\,\text{cm} \cdot b\,\frac{\text{cm}^2\,\text{kg}}{\text{cm}}\right)\left(y\,\text{cm} \cdot a\,\frac{\text{cm}}{\text{cm}}\right).$$

Die Neigung des Trägers in den Auflagerpunkten bestimmt sich zu

$$E\cdot\varphi = A' = \frac{P l^3}{16\cdot J}\,.$$

Beispiel 2. Die Welle der Abb. 94 trägt in der Entfernung 0,5 m vom Lager A ein Schwungrad vom Gewicht $P = 5000$ kg; die größte Durchbiegung infolge dieser Last ist zu bestimmen.

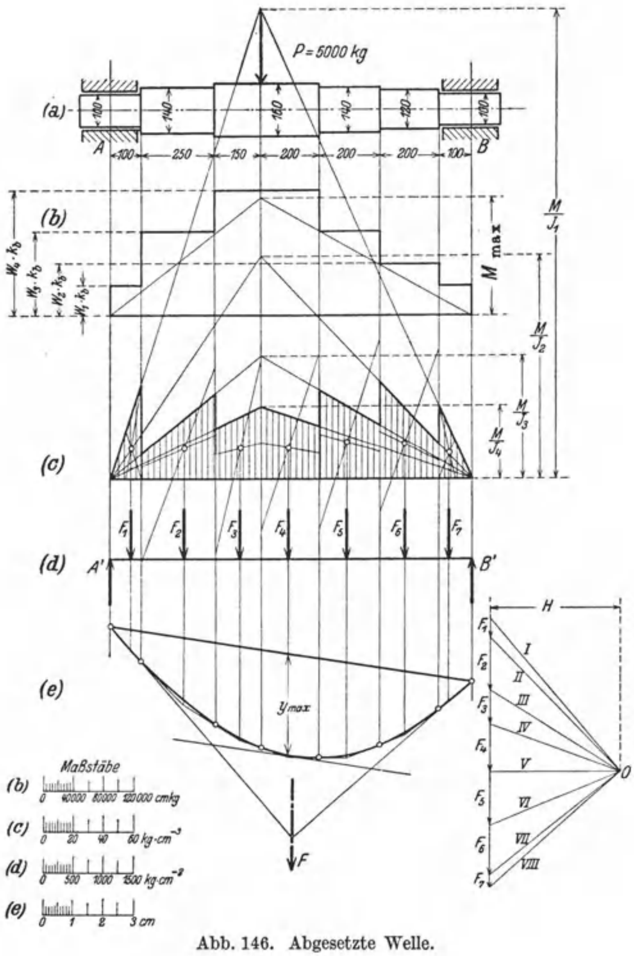


Abb. 146. Abgesetzte Welle.

In Abb. 94 ist bereits die Momentenlinie und die Kurve der Tragfähigkeit des Trägers ermittelt worden (vgl. Abb. 146b).

Abb. 146c gibt die $\frac{M}{J}$-Fläche des wirklichen Trägers AB; ihre Ordinaten im Angriffspunkt der Last P haben folgende Werte:

$$\begin{aligned}
J_{100} &= 490{,}9 \text{ cm}^4; & M:J_1 &= 145500:490{,}9 = 296 \text{ kgcm}^{-3}\\
J_{120} &= 1018 \quad ,, ; & M:J_2 &= 145500:1018 = 143 \quad ,,\\
J_{140} &= 1886 \quad ,, ; & M:J_3 &= 145500:1886 = 77{,}2 \quad ,,\\
J_{160} &= 3217 \quad ,, ; & M:J_4 &= 145500:3217 = 45{,}3 \quad ,,
\end{aligned}$$

Die $\frac{M}{J}$-Fläche ist in sieben Teilflächen F zerlegt worden, deren Inhalt leicht bestimmt werden kann.

Es ist

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 29{,}8 \cdot 2 \qquad = 298 \text{ kgcm}^{-2}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 25\,(26{,}8 + 7{,}8) \cdot 2 \quad = 865 \quad ,,$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 15\,(16{,}3 + 22{,}6) \cdot 2 \quad = 583{,}5 \quad ,,$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot 20\,(22{,}6 + 16{,}1) \cdot 2 = 794 \quad ,,$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \cdot 20\,(26{,}8 + 16) \cdot 2 \quad = 856 \quad ,,$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot 20\,(30{,}1 + 10) \cdot 2 \quad = 802 \quad ,,$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 21{,}8 \cdot 2 \qquad = 218 \quad ,,$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = 4416{,}5 \text{ kgcm}^{-2}$$

Die Schwerpunkte dieser Teilflächen sind in Abb. 146c zeichnerisch bestimmt. $F_1 \ldots F_7$ werden als Kräfte aufgefaßt, die den gedachten Träger $A'B'$ (Abb. 146d) angreifen; die zugehörige Seillinie ist in Abb. 146e entworfen. Die Seilstrahlen schneiden die Senkrechten durch die Punkte der Querschnittsänderungen in Punkten der Biegungslinie; die zur Schlußlinie parallele Tangente bestimmt $y_{\max}$. Die äußersten Seilstrahlen schneiden sich in einem Punkte, der senkrecht unter dem Schwerpunkt der $M:J$-Fläche liegt. Die größte Durchbiegung ist

$$f_{\max} = \frac{1}{E} \cdot H \cdot y_{\max} = \frac{1}{2\,200\,000} \left(4{,}4 \text{ cm} \cdot 500 \, \frac{\text{kgcm}^{-2}}{\text{cm}}\right) \left(3{,}4 \text{ cm} \cdot 10 \, \frac{\text{cm}}{\text{cm}}\right)$$

$$= \frac{2200 \text{ kgcm}^{-2} \cdot 34 \text{ cm}}{2\,200\,000 \text{ kgcm}^{-2}} = 0{,}034 \text{ cm}\,,$$

wobei 1 cm = 500 kgcm^{-2} der Kräftemaßstab und 1 cm = 10 cm der Längenmaßstab ist.

Bemerkung: In Abb. 146 sind die Maßstäbe der Verkleinerung wegen eingetragen.

Beispiel 3. Festigkeit und Formänderung einer Drehbankspindel. (Vgl. Nickel: Theoretische Fragen im Werkzeugmaschinenbau; Werkstatt-Technik, S. 21. Januar 1911.) Untersucht wird die Spindel einer schweren Bandagen- und Räderdrehbank mit 700 mm Spitzenhöhe der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Richard Hartmann, Chemnitz. Die Abmessungen sind der Abb. 147 zu entnehmen; die Gewichte sind

der Spindel	G_s =	400 kg
des Zahnkranzes. . .	G_z =	350 ,,
der Planscheibe . . .	G_p =	950 ,,
des Werkstückes. . .	G_w =	400 ,,
	ΣG =	2100 kg.

Für den senkrecht nach unten gerichteten Auflagerdruck A infolge der ständigen Belastung durch die Gewichte G erhält man mit B als Momentendrehpunkt

$$A \cdot 108 + 400 \cdot 23 - 350 \cdot 26 - 950 \cdot 38 - 400 \cdot 55 = 0;$$

daraus $A = 540$ kg.

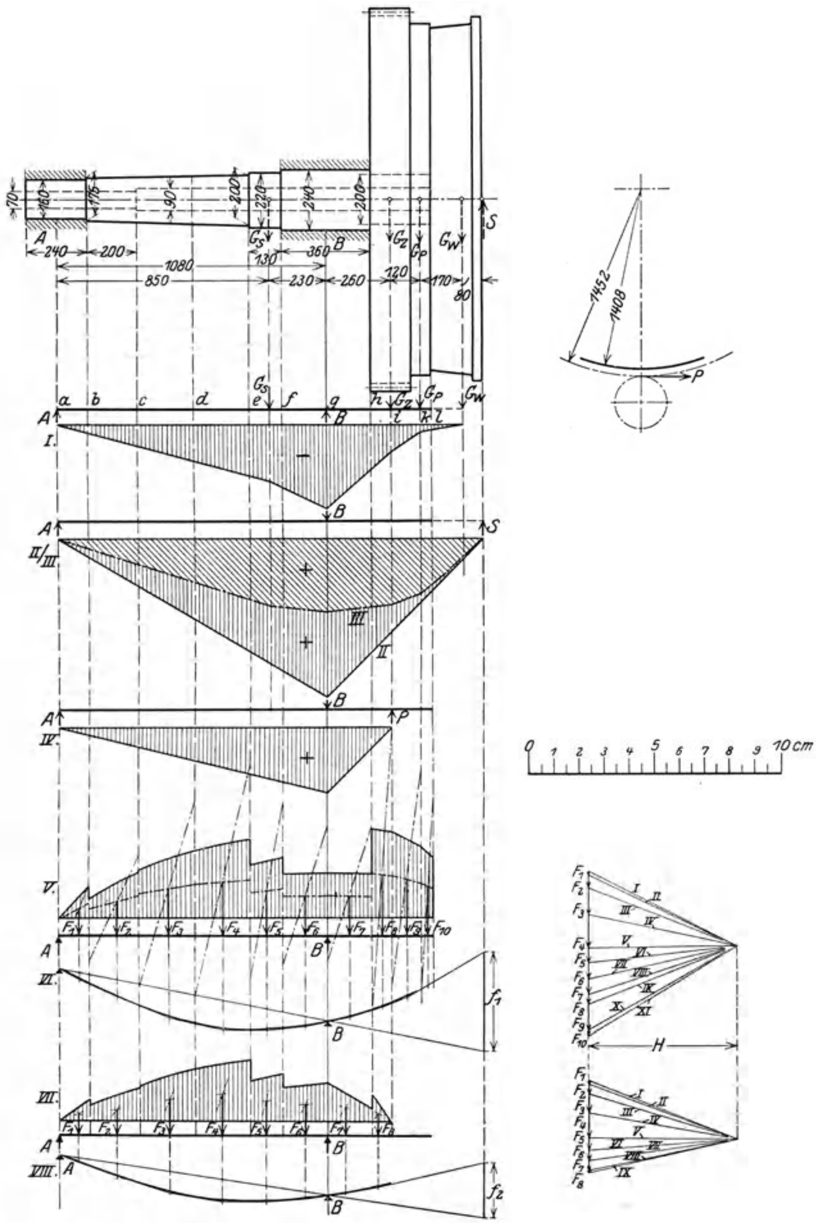


Abb. 147. Drehbankspindel.

Für den senkrecht nach oben gerichteten Auflagerdruck B erhält man mit A als Momentendrehpunkt

$$B \cdot 108 - 400 \cdot 85 - 350 \cdot 134 - 950 \cdot 146 - 400 \cdot 163 = 0;$$
$$\text{daraus } B = 2640 \text{ kg}.$$

Das größte Moment liegt über der Stütze B und ist

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -A \cdot 108 - 400 \cdot 23 \\ &= -540 \cdot 108 - 400 \cdot 23 = -67200 \text{ cmkg}. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen ist negativ, weil die angreifenden Kräfte den Stab nach oben wölben (vgl. S. 64; Abb. 51).

Der Querschnitt im Punkte B ist kreisringförmig mit 240 mm Außen- und und 90 mm Innendurchmesser; sein Trägheitsmoment ist

$$\begin{aligned} J_{24} &= 16286 \text{ cm}^4 \\ J_9 &= \underline{322 \text{ ,,}} \\ J &= 15964 \text{ cm} ; \end{aligned}$$

das zugehörige Widerstandsmoment ist

$$W = \frac{J}{r_a} = \frac{15964}{12} = 1330 \text{ cm}^3.$$

Als größte Biegespannung erhalten wir

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{67200}{1330} = 51 \text{ kg/cm}^2.$$

Der schwächste Querschnitt liegt im kegligen Teil der Spindel, wo die Bohrung von 70 auf 90 mm wechselt. Dieser Punkt ist 320 mm vom Auflager entfernt und erfährt infolgedessen ein Biegungsmoment

$$M' = A \cdot 32 = -540 \cdot 32 = -17280 \text{ cmkg}.$$

Der Außendurchmesser des Kegels ist

$$d' = 175 + 25 \cdot \frac{200}{650} = 182{,}7 \text{ mm} .$$

Das Trägheitsmoment eines Kreises mit 18,27 cm Durchmesser wird durch geradliniges Einschalten der Zahlentafel auf S. 85 entnommen; es ist

$$\begin{aligned} J_{18,27} &= 5153 + 244 \cdot \frac{27}{100} = 5219 \text{ cm}^4 \\ J_9 &= \phantom{5153 + 244 \cdot \frac{27}{100}} = \underline{322 \text{ ,,}} \\ & \phantom{= 5153 + 244 \cdot \frac{27}{100}} J = 4897 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$W = \frac{J}{r_a} = \frac{4897 \cdot 2}{18{,}27} = 537 \text{ cm}^3.$$

Die Biegespannung wird

$$\sigma' = \frac{17280}{537} = 33 \text{ kg/cm}^2.$$

Arbeitet die Maschine, so treten zu den ständigen Belastungen der Zahndruck am Zahnkranz und der Stahldruck am Werkzeug, von denen der Stahldruck senkrecht nach oben wirkend angenommen werden darf. Die Richtung des Zahndruckes hängt davon ab, wo der Zahnkranz angetrieben wird. Liegen Zahnkranzachse und Triebachse in einer wagerechten Ebene durch die Spindelachse, so ändern die beiden nahezu gleich großen, aber entgegengesetzten Kräfte wenig an dem Spannungszustande der Spindel. Ungünstiger wird die Belastung, wenn die Triebachse in einer senkrechten Ebene durch die Spindelachse liegt (vgl. Abb. 147); dann greift der Zahndruck P am Teilkreisdurchmesser an und ist wagerecht gerichtet. Die Spindel ist also auf senkrechte und wagerechte Kräfte zu untersuchen.

Senkrechte Belastung. Zu der ständigen Last (I in Abb. 147) tritt der Stahldruck S, dessen Größe zu 2000 kg angenommen werden soll. Das von ihm im Punkte B hervorgerufene Moment ist

$$M_{BS} = +2000 \cdot 63 = +126000 \text{ cmkg}.$$

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe M_{BS} im Punkte B. Bringen wir von dieser M-Fläche (II in Abb. 147) die Fläche I in Abzug, so erhalten wir die Gesamtmomentenfläche infolge der senkrechten Kräfte, die durch links steigende Strichelung (*II/III* in Abb. 147) hervorgehoben ist, mit $M'_B = 126000 - 67200 = 58800$ cmk.

Wagerechte Belastung. Der Zahndruck

$$P = S \cdot \frac{1408}{1452} = 1950 \text{ kg}$$

liefert eine Einzelkraft P in der wagerechten Ebene durch die Spindelachse und ein Kräftepaar mit dem Moment

$$M_d = 1950 \cdot \frac{145{,}2}{2} = \approx 142000 \text{ cmkg},$$

das Drehung hervorruft. Die wagerechte Einzelkraft P liefert ein Biegungsmoment im Punkte B

$$M''_B = 1950 \cdot 26 = 50700 \text{ cmkg}.$$

Die beiden Momente M'_B und M''_B treten in zwei aufeinander senkrechten Ebenen auf. Da der kreisförmige Querschnitt ein für alle Achsen gleiches Widerstandsmoment hat, bilden wir das Gesamtmoment als geometrische Summe der Einzelmomente zu

$$M_B = \sqrt{58800^2 + 50700^2} = 77700 \text{ cmkg},$$

dem eine größte Biegungsspannung

$$\sigma_{\max} = \frac{77700}{1330} = 59 \text{ kg/cm}^2$$

entspricht. Alle Spannungen bleiben weit unter den zulässigen, denn die Abmessungen sind mit Rücksicht auf die auftretenden Formänderungen so groß gehalten, damit die Senkung des freien Spindelendes praktisch gleich Null ist.

Die Formänderung ist in Abb. 147 *VI* und *VIII* nach dem Mohrschen Verfahren entwickelt und beträgt in senkrechter Richtung

$$y_1 = \frac{1}{E} \cdot H \cdot f_1 = \frac{6 \text{ cm} \cdot \frac{100 \text{ kgcm}^{-2}}{1 \text{ cm}} \cdot 4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}}{2150000 \text{ kgcm}^{-2}} = 0{,}011 \text{ cm},$$

in wagerechter Richtung

$$y_2 = \frac{1}{E} \cdot H \cdot f_2 = \frac{6 \text{ cm} \cdot \frac{100 \text{ kgcm}^{-2}}{1 \text{ cm}} \cdot 2{,}2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}}{2150000 \text{ kgcm}^{-2}} = 0{,}006 \text{ cm}.$$

Wegen der notwendigen Verkleinerung ist der Maßstab mitgezeichnet.

Zu der Beanspruchung auf Biegung tritt noch die durch das Drehmoment. Die Nachprüfung auf zusammmengesetzte Festigkeit siehe S. 285.

c) Das Verfahren von Nehls.

In gleicher Weise, wie auf S. 110 die Momentenfläche eines beliebig belasteten Trägers entworfen wurde, läßt sich das Nehlssche Verfahren zum Aufzeichnen von Biegungslinien verwenden, wenn wir die $(M : J)$-Fläche des gegebenen Trägers als Belastungsfläche eines gedachten Trägers auffassen und zu dieser Belastungsfläche die Momentenfläche zeichnen. Die Belastungshöhe ist

$$k = \frac{M}{J}$$

und die Senkung eines Punktes a

$$\delta = \frac{1}{E}\left\{a \cdot \int_0^b k \cdot \frac{x'}{l} \cdot dx' + b \cdot \int_0^a k \cdot \frac{x}{l} \cdot dx\right\}.$$

In Anlehnung an Abb. 91 behandeln wir die $(M:J)$-Fläche des gegebenen Trägers wie die Belastungsfläche mit der veränderlichen Höhe k auf S. 110.

Wechselt der Querschnitt sprungweise, so entsteht bei einer Belastung durch Einzelkräfte für $k = \frac{M}{J}$ die gezackte Linie der Abb. 146. Das Nehlssche Verfahren würde hierbei abgesetzte gekrümmte Kurven ergeben, da für

$$z = k \cdot \frac{x}{l}, \quad \text{bzw.} \quad z' = k \cdot \frac{x'}{l} \quad \text{infolge} \quad k = C \cdot x,$$

$$z = C \cdot k \cdot \frac{x^2}{l}, \quad \text{bzw.} \quad z' = C \cdot k \cdot \frac{x'^2}{l}$$

wird, wir also Parabeln erhalten, wo das Mohrsche Verfahren Schrägen zeigt. Wechselt jedoch der Querschnitt stetig, so ergibt das Nehlssche Verfahren stetige Kurven und ist dann dem Mohrschen Verfahren vorzuziehen, weil es mit einfacheren Maßstäben arbeitet und die etwas umständliche Ermittlung von Flächenstreifen und ihren Schwerpunkten vermeidet.

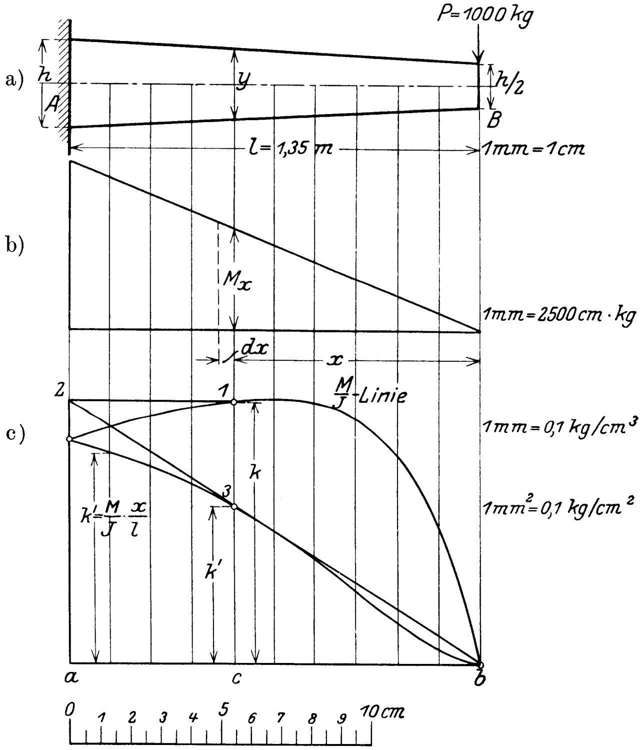


Abb. 148. Verfahren von Nehls.

Zahlenbeispiel (Abb. 148). Der Freiträger AB bestehe aus Holz und trage eine Einzellast P am freien Ende. Der Querschnitt sei rechteckig und wachse bei unveränderter Breite stetig, so daß die Höhe an der Einspannstelle doppelt so groß ist wie am freien Ende. Die Senkung des Punktes B ist zu bestimmen. Nach S. 119 ist der Träger angenähert ein Träger gleicher Festigkeit, dessen gefährlicher Querschnitt in A liegt. Das größte Biegungsmoment ist

$$M_{\max} = M_A = P \cdot l = 1000 \cdot 135 = 135000 \text{ cmkg}.$$

Mit $k_b = 100 \text{ kg/cm}^2$ für Holz wird, wenn wir, wie ausdrücklich betont sei, das Geradliniengesetz von Hooke zugrunde legen, das erforderliche Widerstands-

moment
$$W = \frac{135000}{100} = 1350 \text{ cm}^3 .$$

Der gewählte Querschnitt $10 \cdot 28$ cm hat $W = \frac{10 \cdot 28^2}{6} = 1307 \text{ cm}^3$ und $J = \frac{10 \cdot 28^3}{12} = 18293 \text{ cm}^4$.

Abb. 148b zeigt die Momentenfläche. Die Ermittlung der $(M : J)$-Fläche ge schieht am besten rechnerisch in Form einer Zahlentafel. Die Senkung des Punktes B ist nach der Gleichung auf S. 176
$$\delta_B = \frac{1}{E} \cdot l \cdot \int_0^l \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx .$$

Wir setzen
$$\frac{M_x}{J_x} = k \quad \text{und} \quad \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{x}{l} = k' ,$$

dann ist
$$\delta_B = \frac{1}{E} \cdot l \cdot \int_0^l k' \cdot dx .$$

$k' = k \cdot \frac{x}{l}$ ist in einfacher Weise zeichnerisch bestimmbar. In Abb. 148c ist $c\,1 = k = (M_x : J_x)$. Projiziert man 1 auf die Senkrechte $a\,2$ und verbindet 2 mit b, so schneidet $b\,2$ die Senkrechte $c\,1$ in dem gesuchten Punkte 3 der k'-Linie. Bequemer ist es, die Ordinaten k' zu berechnen und der Zahlentafel einzugliedern.

$\frac{x}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
M_x cmkg	13500	27000	40500	54000	67500	81000	94500	108000	121500	135000
y cm	15,4	16,8	18,2	19,6	21	22,4	23,8	25,2	26,6	28
$10\,y^3$	36523	47416	60286	75295	92610	112394	134813	160030	188211	219520
$J_x = \frac{10\,y^3}{12}$	3043,6	3951,3	5023,8	6274,6	7717,5	9366,2	11235,6	13335,8	15684,2	18293,3
$k = (M_x : J_x)$	4,43	6,84	8,07	8,6	8,75	8,64	8,4	8,12	7,74	7,38
$k' = k \cdot (x : l)$	0,443	1,368	2,42	3,44	4,375	5,184	5,88	6,496	6,897	7,38

Die Maßstäbe der Zeichnung sind:

Längen. . . . . 1 mm = 1 cm
Momente . . . . 1 mm = 2500 cmkg
$k = M : J$ . . . . 1 mm = 0,1 kgcm^{-3}
$k' = k \cdot \frac{x}{l}$ . . . . 1 mm = 0,1 kgcm^{-3}.

Flächeninhalt: 1 mm (Länge) · 1 mm $(M : J)$ oder
1 mm^2 = 1 cm · 0,1 kgcm^{-3} = 0,1 kgcm^{-2}.

$k' \cdot dx$ ist ein Flächenstreifen von der Breite dx und der Höhe k'; also
$$F = \int_0^l k' \cdot dx = \text{Flächeninhalt der von der } k'\text{-Linie begrenzten Fläche.}$$

Demnach
$$\delta_B = \frac{1}{E} \cdot l \cdot F .$$

Wird auf Millimeterpapier gezeichnet, so genügt das Auszählen von F. Abb. 148c liefert $F = 5670\ \text{mm}^2$. Damit wird

$$\delta_B = \frac{135\ \text{cm} \cdot 5670\ \text{mm}^2 \cdot \dfrac{0{,}1\ \text{kgcm}^{-2}}{1\ \text{mm}^2}}{100\,000\ \text{kgcm}^{-2}} = 0{,}72\ \text{cm}\,.$$

Sind wir im vorliegenden Falle M_x und J_x als Funktionen von x bekannt, so läßt sich die Aufgabe auch rechnerisch unschwer durchführen. Wir schreiben

$$M_x = P \cdot x = P \cdot l \cdot \left(\frac{x}{l}\right) \quad \text{und} \quad J_x = \frac{b \cdot y^3}{12},$$

wobei aus

$$h : l = y : (l + x) \qquad y = h\left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

folgt, so daß sich ergibt:

$$k = \frac{M_x}{J_x} = \frac{P l \cdot \left(\frac{x}{l}\right)}{\frac{b h^3}{12}\left(1 + \frac{x}{l}\right)^3} \quad \text{und} \quad \delta_B = \frac{1}{E} \cdot l \cdot \int\limits_0^l k \cdot \frac{x}{l} \cdot dx,$$

$$\delta_B = \frac{1}{E} \cdot \frac{P l^3 \cdot 12}{b h^3} \int\limits_0^1 \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^2 \cdot d\left(\frac{x}{l}\right)}{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^3}\,.$$

Wir setzen $1 + \frac{x}{l} = \varphi$; also $d\left(\frac{x}{l}\right) = d\varphi$; $\frac{x}{l} = \varphi - 1$ und erhalten

$$\int\limits_0^1 \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^2 \cdot d\left(\frac{x}{l}\right)}{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^3} = \int\limits_1^2 \frac{(\varphi - 1)^2 \cdot d\varphi}{\varphi^3} = \int\limits_1^2 \frac{d\varphi}{\varphi} - 2\int\limits_1^2 \frac{d\varphi}{\varphi^2} + \int\limits_1^2 \frac{d\varphi}{\varphi^3}\,.$$

Die Grenzen sind $\varphi = 1$ und $\varphi = 2$, da für $(x : l) = \varphi - 1 = 0$ die untere Grenze $\varphi = 1$ und für $(x : l) = \varphi - 1 = 1$ die obere Grenze $\varphi = 2$ wird. Die Auflösung der Integrale gibt

$$\int\limits_0^1 \frac{\left(\frac{x}{l}\right)^2 \cdot d\left(\frac{x}{l}\right)}{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^3} = \left[\ln\varphi - 2\left(-\frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)\right]_1^2$$

$$= \ln\frac{2}{1} + 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = 0{,}0681\,,$$

demnach

$$\delta = 0{,}0681\,\frac{P l^3}{E J} = 0{,}0681 \cdot \frac{1000 \cdot 135^3}{100000 \cdot \dfrac{10 \cdot 14^3}{12}} = 0{,}73\ \text{cm}\,.$$

d) Die Biegungslinie als Integrallinie.

Es sei $y_1 = f(x)$ gegeben und in Abb. 149 als Kurve dargestellt. Ein Flächenstreifen von der Breite dx und der Höhe y_1 hat den Flächeninhalt

$$dF_1 = y_1 \cdot dx; \text{ also ist } F_1 = \int\limits_0^x y_1 \cdot dx$$

der Flächeninhalt der von der Kurve und der x-Achse begrenzten Fläche, welche zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$ liegt; er ist in Abb. 149a durch schräge Strichelung hervorgehoben. Nennen wir diesen Flächeninhalt y_2^*, so ist

$$y_2^* = \int_0^x y_1 \cdot dx$$

wieder eine Funktion von x, die in Abb. 149b als Kurve gestrichelt eingezeichnet ist. Die Ordinaten dieser Kurve stellen den Flächeninhalt der über x liegenden, von $y_1 = f_1(x)$ begrenzten Fläche dar. Mit der Darstellung einer Fläche (F) als Strecke (y_2) wird ein neuer Maßstab nötig, was bei praktischen Anwendungen zu beachten ist, wo y_1 ja meist eine physikalische Größe ist. Weil die Ordinaten y_2 Integrale sind, nennt man $y_2 = f_2(x)$ eine I n t e g r a l l i n i e zu $y_1 = f_1(x)$. Das allgemeine Integral enthält noch den Integrationsfestwert C_1, so daß die allgemeine Gleichung der Integrallinie vollständig geschrieben

$$y_2 = \int_0^x y_1 \cdot dx + C_1 = y_2^* + C_1$$

lautet. Der Flächeninhalt der Kurve y_1 zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$ läßt sich dann als Differenz der begrenzenden Ordinaten von y_2 darstellen (Abb. 149b). Die Einbeziehung des Festwertes C_1 bedeutet eine Parallelverschiebung der Kurve y_2^* um den Betrag C_1; an dem Charakter der Kurve wird dadurch nichts geändert.

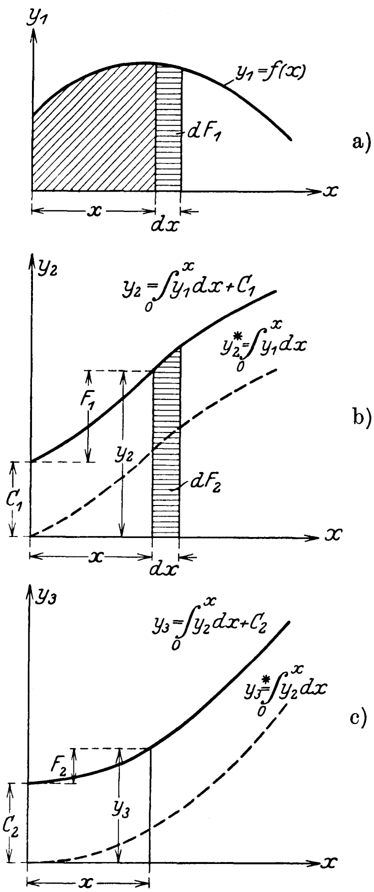


Abb. 149. Integrallinien.

Schon bei dem Nehlsschen Verfahren wurde darauf hingewiesen, daß die Ermittlung eines Flächeninhaltes mit genügender Genauigkeit durch Auszählen erfolgen kann, wenn die Kurve $y_1 = f(x)$ auf Millimeterpapier gezeichnet ist.

Der Gedankengang, der zu y_2 als $\int y_1 \cdot dx$ aus $y_1 = f(x)$ geführt hat, läßt sich natürlich auf $y_2 = f(x)$ ebenfalls anwenden, denn $y_2 \cdot dx$ ist wieder ein Flächenstreifen (Abb. 149b), also

$$F_2 = \int_0^x y_2 \cdot dx = y_3^*$$

der Flächeninhalt des über x liegenden Teiles der von der Kurve $y_2 = f_2(x)$

begrenzten Fläche, den wir in einem neuen Achsenkranz (Abb. 149c) als Ordinate y_3 der Kurve

$$y_3 = \int_0^x y_2 \cdot dx + C_2 = y_3^* + C_2$$

auftragen. Auch hier hat der Integrationsfestwert lediglich eine Verschiebung der Kurve y_3^* zur Folge. Diese Entwicklung läßt sich beliebig weit fortsetzen.

Rückwärts betrachtet, entsteht y_2 durch Differentiation aus y_3, d. h. $y_2 = f_2(x)$ ist die Differentiallinie zu $y_3 = f_3(x)$. Und ebenso ist $y_1 = f_1(x)$ die Differentiallinie zu $y_2 = f_2(x)$.

Die soeben rein mathematisch erläuterten Zusammenhänge finden wir aber bei der Beziehung zwischen der Biegungslinie und der Belastung eines Trägers wieder. Wir gehen von einem Träger aus, dessen stetige Belastung q in kg/cm betragen möge (Abb. 150a). Dann ist die Querkraft Q_x im Punkte x des Trägers

$$Q_x = \int_0^x q \cdot dx + C_1,$$

wobei sich $C_1 = 0$ aus der Bedingung $Q = 0$ für $x = 0$ ergibt. Die Übereinstimmung der Gleichung der Querkraftlinie mit der Gleichung

$$y_2 = \int_0^x y_1 \cdot dx + C_1$$

zeigt, daß die Querkraftlinie die Integrallinie zur Belastungslinie ist. Wir bestimmen (durch Auszählen beim Zeichnen auf Millimeterpapier) den Flächeninhalt des über x ruhenden Teiles der Belastung und tragen mit Hilfe eines neuen Maßstabes Q_x als Ordinate im Achsenkreuz Abb. 150b auf. Lautet der Längenmaßstab 1 mm $= a$ cm, der Be-

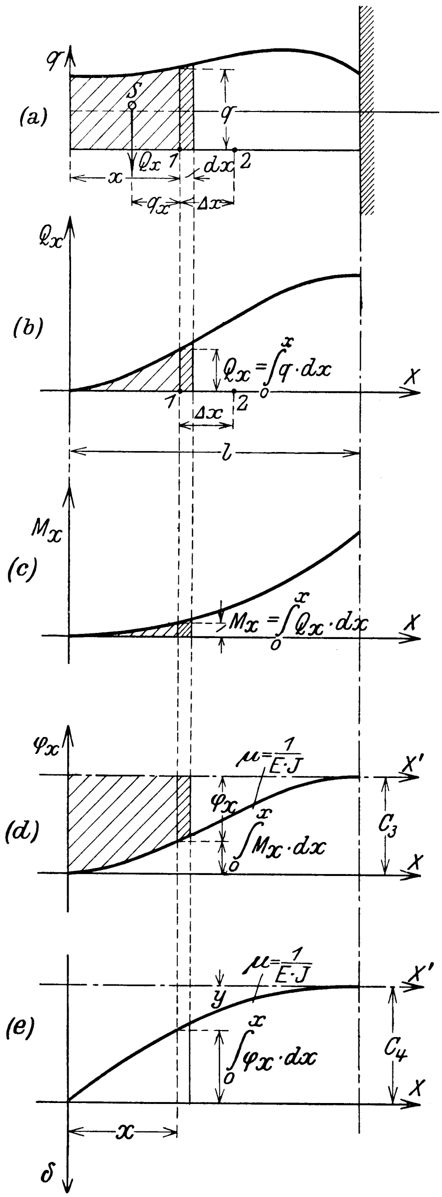


Abb. 150. Die Biegungslinie als Integrallinie.

lastungsmaßstab 1 mm $= b$ kg/cm, so erhalten wir als Maßstab der Querkraftlinie

$$1 \text{ mm} \equiv 1 \text{ mm}^2 = a \cdot [\text{cm}] \cdot b\,[\text{kg/cm}] = a \cdot b\,[\text{kg}].$$

Nach der Erklärung der Querkraft (S. 64) ist Q_x gleich der Summe sämtlicher links vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte. Wir denken sie im Schwerpunkt S der zugehörigen Belastungsfläche als Einzelkraft angreifen, die im Punkte x das Biegungsmoment

$$M_x = Q_x \cdot q_x$$

hervorruft. Der Punkt 2, welcher um $\Delta\, x$ von 1 entfernt ist, erfährt das Biegungsmoment

$$M'_x = Q'_x \cdot q'_x,$$

wenn wir mit Q'_x die Summe sämtlicher Kräfte links von 2 bezeichnen, deren Hebelarm q'_x ist. Nach dem Grundsatze, daß das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkraft ist, wird

$$M'_x = Q_x\,(q_x + \Delta\, x) + \Delta Q \cdot \varepsilon\, \Delta\, x,$$

wobei $\Delta\, Q$ den Zuwachs von Q zwischen 1 und 2 bezeichnet und ε zwischen 0 und 1 liegt.

Der Zuwachs von M_x zwischen den Punkten 1 und 2 wird daher

$$\begin{aligned} \Delta\, M_x &= M_x{}' - M_x = (Q_x \cdot q_x + Q_x \cdot \Delta\, x + \Delta Q \cdot \varepsilon \cdot \Delta\, x) - Q_x \cdot q_x \\ &= Q_x \cdot \Delta\, x + \Delta\, Q \cdot \varepsilon \cdot \Delta\, x \end{aligned}$$

Division durch $\Delta\, x$ ergibt

$$\frac{\Delta\, M x}{\Delta\, x} = Q_x + \varepsilon\, \Delta\, x.$$

Läßt man nun $\Delta\, x$ kleiner und kleiner werden, d. h. den Punkt 2 auf den Punkt 1 rücken, so wird auch das zweite Glied der rechten Seite kleiner und kleiner und es ergibt sich in der Grenze $\frac{d M_x}{d x} = Q_x$ oder durch Integration

$$M_x = \int_0^x Q_x\, d x + C_2\,.$$

Der Festwert C_2 bestimmt sich aus $M_x = 0$ für $x = 0$ zu $C_2 = 0$, also ist

$$M_x = \int_0^x Q_x \cdot d x,$$

d. h. die Momentenlinie ist die Integrallinie der Querkraftlinie und die zweite Integrallinie zur Belastungslinie; ihre Ordinate im Punkte x ist gleich dem Flächeninhalt des über x liegenden Teiles der Querkraftfläche. Beim Aufzeichnen wird ein neuer Maßstab nötig. Da die Querkraftlinie den Maßstab 1 mm $= a \cdot b$ kg hat, wird der Maßstab der Momentenlinie

$$1 \text{ mm} \equiv 1 \text{ mm}^2 = a \cdot b\,[\text{kg}] \cdot a\,[\text{cm}] = a^2 \cdot b\,[\text{cmkg}].$$

Bequemer ist es natürlich, den Maßstab der Querkraftfläche in der Form $1\text{ mm} = c$ kg anzuschreiben, dann stellt 1 mm^2 der Querkraftfläche a [cm] $\cdot\, c$ [kg] gleich $a \cdot c$ [cmkg] dar, und der Maßstab der Momentenlinie lautet $1\text{ mm} = a \cdot c$ [cmkg].

Die Differentialgleichung der Biegungslinie

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M_x}{E J_x}$$

liefert nach einmaliger Integration

$$\varphi_x = \frac{d y}{d x} = -\frac{1}{E} \cdot \int_0^x \frac{M_x}{J_x} \cdot d x + C_3 ,$$

oder für den Sonderfall des unveränderlichen Querschnittes

$$\varphi_x = \frac{d y}{d x} = -\frac{1}{E J} \int_0^x M_x \cdot d x + C_3 .$$

Der Festwert C_3 ergibt sich aus den besonderen Bedingungen der Aufgabe; für den vorliegenden Fall des Freiträgers ist z. B. $\varphi_x = 0$ für $x = l$. Die Kurve der Neigungswinkel der Biegungslinie stellt sich, abgesehen vom Maßstabe, als Integrallinie der $(M : J)$-Linie dar, im Sonderfall $J =$ Constans als Integrallinie zur Momentenlinie. Um die Neigung im Punkte x des Trägers zu bestimmen, messen wir den Inhalt des über x liegenden Teiles der $(M : J)$-Fläche, bzw. der M-Fläche und tragen den so gefundenen Wert als Ordinate der neuen Linie (Abb. 149 d) auf, die noch durch E bzw. $E \cdot J$ zu dividieren ist. Man pflegt den Faktor, mit dem die Ordinaten einer Kurve zu multiplizieren sind, an die Kurve zu schreiben; er heißt Verwandlungsziffer oder Multiplikator und wird mit μ bezeichnet.

Durch nochmalige Integration erhalten wir die Gleichung der Biegungslinie

$$y = \int_0^x \varphi_x \cdot d x + C_4$$

und sehen in $y = f(x)$ die Integrallinie zur Kurve der Neigungswinkel, bzw. die zweite Integrallinie zur $(M : J)$-Linie oder M-Linie, falls der Querschnitt unveränderlich ist. Den Faktor $1 : E$, bzw. $1 : E J$ lassen wir zweckmäßig aus der eigentlichen Rechnung heraus und schreiben μ an die Kurve. Dann ist als Ordinate im Punkte x der Flächeninhalt des über x liegenden Teiles der φ-Linie aufzutragen, wobei

$$\varphi_x = \int \frac{M_x}{J_x} \cdot d x + C_3 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_x = \int M_x \cdot d x + C_3$$

ist. Sie wird wieder durch Auszählen ermittelt. Der Maßstab der M-Linie lautet

Längen $1\text{ mm} = a$ cm, für die Ordinaten $1\text{ mm} = c$ cmkg, also für die φ-Linie bei $J =$ Constans:

Längen $1\text{ mm} = a$ cm, Ordinaten $1\text{ mm} \equiv 1\text{ mm}^2 = a \cdot c$ kgcm², oder $1\text{ mm} = d$ kgcm².

Als Maßstäbe der Biegungslinie erhalten wir bei J = Constans für die Längen 1 mm = a cm; für die Ordinaten 1 mm ≡ 1 mm² = $a \cdot d$ kgcm³.

Bei veränderlichem Querschnitt muß aus der M-Linie durch Division mit J erst die $(M : J)$-Linie entwickelt werden, deren Maßstab in der Form 1 mm = c' kgcm⁻³ angeschrieben wird. Dann erhält die φ-Linie den Maßstab 1 mm ≡ 1 mm² = $a \cdot c'$ kgcm⁻² und die Biegungslinie bei gleichem Abszissenmaßstab 1 mm = a cm den Ordinatenmaßstab 1 mm ≡ 1 mm² = $a^2 \cdot c'$ kgcm⁻¹.

4. Die Formänderungsarbeit der Biegung.

Wir betrachten einen vollkommen dehnsamen Stab, setzen also voraus, daß der verformte Stab nach Aufhören der Kraftwirkung in seine ursprüngliche Lage wieder zurückgeht; er entspannt sich. Dieses Entspannen ist nur möglich, wenn in dem verformten Stabe ein Arbeitsvermögen aufgespeichert ist, das bei der Entlastung frei wird. Diese **aufgespeicherte Arbeit** ist gleich der Arbeit, die die Biegungsspannungen leisten, wenn sie zwei benachbarte Querschnitte um ihre Nullinien gegeneinander drehen. Dabei fassen wir die Spannungen als äußere Kräfte auf, die in den Querschnitten angreifen. Denken wir uns in Abb. 124 den Querschnitt I festgehalten, so dreht das Kräfte paar der Spannungen den Querschnitt II um den Winkel $d\varphi$, doch ist dabei zu beachten, daß das Moment des Kräftepaares während des Biegungsvorganges von Null auf seinen Endwert M wächst, der Mittelwert also gleich dem halben Endwert ist.

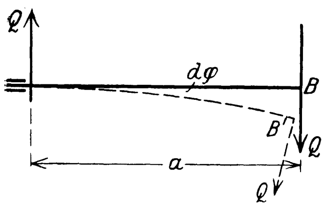


Abb. 151. Arbeit eines Kräftepaares.

Das Kräftepaar Q (Abb. 151) mit dem Moment $M = Q \cdot a$ bewirke eine Drehung um den Winkel $d\varphi$, dann legt der Angriffspunkt B den Weg $BB' = a \cdot d\varphi$ zurück. Die von den Kräften Q bei der Drehung geleistete Arbeit ist

$$dA = Q\,(a \cdot d\varphi) = M \cdot d\varphi\,,$$

sie stellt sich dar als Produkt aus Moment und Drehwinkel. Diese für starre Körper und äußere Kräfte geltende Beziehung übertragen wir auf das Stabteilchen von der Breite ds (Abb. 124), das wir als starr auffassen und von den als äußere Kräfte angebrachten Spannungen σ angegriffen denken. Berücksichtigen wir dabei, daß das biegende Moment von Null auf den Endwert M wächst, so ist die zur Drehung der beiden Querschnitte um den Winkel $d\varphi$ erforderliche Arbeit

$$dA = \frac{1}{2}\,M \cdot d\varphi = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot EJ}\,,$$

da $d\varphi = \dfrac{M\,ds}{EJ}$ ist. (Gleichung (1), S. 142.)

Zur Formänderung des ganzen Stabes von der Länge l muß demnach eine Arbeit

$$A = \int_0^l \frac{M^2 ds}{2EJ} = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2 \cdot ds$$

aufgewendet werden. Wir ziehen EJ vor das Integralzeichen und bringen damit zum Ausdruck, daß der Stab unveränderlichen Querschnitt haben soll. Setzen wir voraus, daß J veränderlich ist, so schreiben wir

$$A = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{M^2}{J}\cdot ds$$

und haben damit die Arbeit bestimmt, die zur Verformung eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt notwendig ist. Diese Gleichung wird aber nur angenähert richtig sein, denn Querschnittsänderungen durchbrechen die Forderung der Stetigkeit, und ob bei plötzlichen Querschnittsänderungen die Bernoullische Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte erfüllt ist, bleibt zum mindesten zweifelhaft.

Zweifellos muß die in dem Stabe aufgespeicherte Arbeit

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 ds}{EJ}$$

von den äußeren Kräften bei der Verformung geleistet worden sein. Wir wollen diese Arbeit näher untersuchen. Abb. 152 stellt einen Stab dar, der im Punkte m die Last P_m trägt; unter dem Einfluß dieser Kraft senke sich m um $\delta_{m,\,m}$. Die von der Kraft P_m geleistete Arbeit ist, da P von Null auf seinen Endwert allmählich wächst,

$$A_f = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,\,m}. \quad \text{(Abb. 152b.)}$$

Da die arbeitleistende Kraft eine Formänderung hervorruft, heißt die Arbeit $A_f = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,\,m}$ **Formänderungsarbeit**. Nun wollen wir annehmen, daß nach erfolgter Verformung infolge P_m eine zweite Kraft P_n im Punkte n des Stabes hinzutritt. Dabei senkt sich der Punkt m weiter um den Betrag $\delta_{m,\,n}$. Die in Richtung dieses Weges wirkende Kraft P_m muß bei der neuen Formänderung den vollen Weg $\delta_{m,\,n}$ zurücklegen, obwohl sie nicht die Ursache des von ihr zurückgelegten Weges ist. Die unter diesen Umständen geleistete Arbeit heißt **Verschiebungsarbeit** und ist

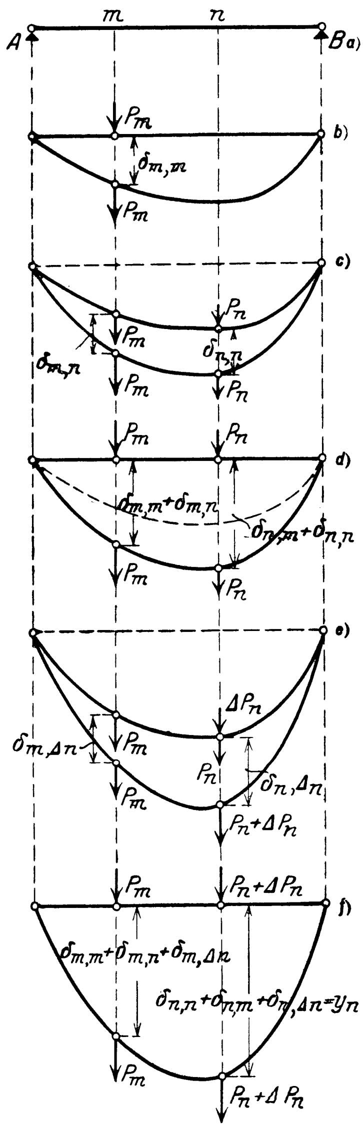


Abb. 152. Gegenseitigkeit der Formänderung.

$$A_v = P_m \cdot \delta_{m,\,n}.$$

Wir verwenden Doppelzeiger und vereinbaren, daß zuerst der Ort der Formänderung (m) und dann der Ort der Ursache (n) geschrieben wird. $\delta_{m,n}$ bedeutet darnach die Verschiebung des Punktes m infolge der in n angreifenden Kraft. Die gesamte von P_m geleistete Arbeit ist, wenn wir das Überlagerungsgesetz als gültig ansehen, gleich der Summe der Einzelarbeiten, also

$$A_m = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,m} + P_n \cdot \delta_{m,n},$$

während P_n die Arbeit

$$A_n = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{n,n}$$

leistet, wobei $\delta_{n,n}$ die Verschiebung des Punktes n infolge der Kraft P_n bedeutet. Zur Verformung des Stabes AB wird insgesamt aufgewendet

$$A = A_m + A_n = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,m} + P_m \cdot \delta_{m,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,n}. \quad \text{(Abb. 152c.)}$$

Zu dem gleichen Betrag an Arbeit müssen wir aber kommen, wenn wir gleichzeitigen Angriff beider Kräfte P annehmen. Dann setzen sich die Verschiebungen der Punkte m und n zusammen aus

$$y_m = \delta_{m,m} + \delta_{m,n} \quad \text{und} \quad y_n = \delta_{n,n} + \delta_{n,m}.$$

Hierbei ist $\delta_{n,m}$ die Verschiebung des Punktes n infolge P_m. Da bei dieser Art der Belastung beide Kräfte P von Null auf ihre Endwerte P_m und P_n allmählich anwachsen, ist

$$A' = \frac{1}{2} P_m \cdot y_m + \frac{1}{2} P_n \cdot y_n,$$

$$A' = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,m} + \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,m}. \quad \text{(Abb. 152d.)}$$

Aus $A = A'$ folgt

$$\frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,m} + P_m \cdot \delta_{m,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,n} = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,m} + \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,m}$$

oder

$$P_m \cdot \delta_{m,n} = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_{m,n} + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_{n,m}.$$

Sind beide Kräfte gleich groß, so muß sein:

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{2} \delta_{m,n} + \frac{1}{2} \delta_{n,m}.$$

Das ist aber nur möglich, wenn

$$\delta_{n,m} = \delta_{m,n}$$

ist. Damit ist der von Maxwell aufgestellte Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderung allgemein bewiesen, da die durchgeführte Betrachtung auch auf alle anderen Fälle übertragen werden kann, wo die Gültigkeit des Überlagerungsgesetzes vorausgesetzt werden darf; nur der Einfachheit halber haben wir die Untersuchung hier für zwei Kräfte durchgeführt.

Der Maxwellsche Satz ist bereits auf einem ganz anderen Wege abgeleitet worden. (S. 158.)

Wir wollen jetzt annehmen, die Kraft P_n werde um einen Betrag $\varDelta P_n$ vergrößert. Dann wird die hierdurch hervorgerufene Vergrößerung von A

$$\varDelta A = P_m \cdot \delta_{m,\,\varDelta n} + P_n \cdot \delta_{n,\,\varDelta n} + \frac{1}{2} \varDelta P_n \cdot \delta_{n,\,\varDelta n},$$

wenn wir die infolge von $\varDelta P_n$ allein in den Punkten m und n hervorgerufenen Senkungen mit $\delta_{m,\,\varDelta n}$ und $\delta_{n,\,\varDelta n}$ bezeichnen (Abb. 152e).

Nun können wir uns auch wieder alle Kräfte gleichzeitig auf den Träger gebracht denken (Abb. 152f).

Es wird dann

$$A + \varDelta A = \frac{1}{2} P_m (\delta_{m,\,m} + \delta_{m,\,n} + \delta_{m,\,\varDelta n})$$
$$+ \frac{1}{2} P_n (\delta_{n,\,n} + \delta_{n,\,m} + \delta_{n,\,\varDelta n}) + \frac{1}{2} \varDelta P_n \cdot y_n .$$

Gemäß Abb. 152d ist aber

$$A = \frac{1}{2} P_m (\delta_{m,\,m} + \delta_{m,\,n}) + \frac{1}{2} P_n (\delta_{n,\,m} + \delta_{n,\,n}),$$

Zieht man A von $A + \varDelta A$ ab, so wird

$$\varDelta A = \frac{1}{2} P_m \delta_{m,\,\varDelta n} + \frac{1}{2} P_n \delta_{n,\,\varDelta n} + \frac{1}{2} \varDelta P_n \cdot y_n .$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke für $\varDelta A$ gleich, so wird

$$P_m \delta_{m,\,\varDelta n} + P_n \delta_{n,\,\varDelta n} = \varDelta P_n \cdot y_n - \varDelta P_n \cdot \delta_{n,\,\varDelta n}$$

und daher

$$\varDelta A = \varDelta P_n \cdot y_n - \frac{1}{2} \varDelta P_n \cdot \delta_{n,\,\varDelta n},$$

$$\frac{\varDelta A}{\varDelta P_n} = y_n - \frac{1}{2} \delta_{n,\,\varDelta n} .$$

Läßt man nun $\varDelta P_n$ kleiner und kleiner werden, so wird auch $\delta_{n,\,\varDelta n}$ kleiner und kleiner, und es ergibt sich daher, wenn man zur Grenze übergeht

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = y_n .$$

Die runden Differentialzeichen besagen, daß bei der Ableitung nur P_n als veränderlich betrachtet werden soll. (Partielle Differentiation.)

Wenn also an einer Stelle n eine Kraft P_n angreift und man die Formänderungsarbeit A als Funktion von P_n kennt, so ist die Verschiebung y_n gleich der partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit nach P_n. Dieser Satz wurde zuerst von Betti aufgestellt.

Aus diesem Satz folgt sofort ein weiterer, der für die Berechnung von statisch unbestimmten Systemen (S. 379) verwandt werden kann.

Wirkt die unbekannte Kraft P an einem starren Auflager, so ist die Ver schiebung $y = 0$, mithin

$$\frac{\partial A}{\partial P} = 0 .$$

Das bedeutet, daß die Kraft P einen solchen Wert besitzen muß, daß sie die Formänderungsarbeit zu einem Minimum macht. (Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.)

Auf S. 192 hatten wir für die in einem gebogenen Stabe aufgespeicherte Arbeit den Ausdruck

$$A = \int \frac{M^2\, ds}{2\, E J}$$

gefunden, wobei das Biegungsmoment M von den Kräften P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ hervorgerufen wird. Von diesen beliebigen Kräften P soll P_n an dem Orte n der gesuchten Formänderung y_n angreifen.

Um dies hervorzuheben, schreiben wir

$$\frac{1}{2\, E J} \cdot M^2 = f\,(P, P_n)$$

und wollen damit zum Ausdruck bringen, daß die Kräfte P und eine Kraft P_n an dem Stabe angreifen. Dann ist

$$A = \int f(P, P_n) \cdot ds .$$

Aus der Lehre der Differentiation unbestimmter Integrale ist bekannt, daß

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \int \frac{\partial f\,(P, P_n)}{\partial P_n} \cdot ds$$

ist. Die runden Differentialzeichen besagen wieder, daß die Größen P bei der Differentiation als Unveränderliche anzusehen sind. Führen wir die Differentiation durch, so erhalten wir mit

$$\frac{\partial \left(\frac{M^2}{2\, E J}\right)}{\partial P_n} = \frac{M}{E J} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n},$$

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \int \frac{M}{E J} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds .$$

Nach dem Satze von Betti ist aber die linke Seite der Gleichung gleich der gesuchten Formänderung y_n, so daß wir die durch ein Biegungsmoment hervorgerufene Verschiebung eines Punktes n auch in der Form

$$y_n = \int \frac{M}{E J} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds$$

anschreiben können, wobei P_n im Punkte der gesuchten Formänderung angreift.

Wirkt in dem Punkte n, dessen Verschiebung bestimmt werden soll, keine Einzelkraft, so ist sie zunächst als gedachte Kraft P_n dort einzuführen und nach erfolgter Differentiation P_n gleich Null zu setzen. Die Integralgleichung für y_n ist unter dem Namen Satz des Castigliano bekannt und findet bei der Ermittlung von Formänderungen, namentlich bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme, Anwendung (siehe S. 391).

Wirkt in dem zu untersuchenden Querschnitt außer dem Biegungsmoment eine im Schwerpunkt des Querschnittes angreifende Einzelkraft N, deren Wirkungslinie mit der Stabachse zusammenfällt bzw. auf der Ebene des Querschnittes senkrecht steht, so ist die in dem verformten Stabe aufgespeicherte Arbeit, bezogen auf das Längenelement ds

$$dA = \frac{N}{2}\Delta_N ,$$

wenn man mit Δ_N die infolge der Kraft N auftretende Verlängerung von ds bezeichnet. Für den Fall, daß das Hookesche Gesetz Gültigkeit hat, ist aber

$$\Delta_N = \frac{\sigma}{E}\cdot ds = \frac{N}{EF}ds ,$$

wenn man mit F den Querschnitt des Stabes bezeichnet.

Folglich wird

$$dA = \frac{N^2}{2EF}ds$$

und die gesamte Arbeit, welche in dem betrachteten Stabteil aufgespeichert ist,

$$A = \int \frac{N^2}{2EF}ds.$$

Die Längskraft N sei nun durch die belastenden Kräfte P_1, P_2, P_3 usw. hervorgerufen. Von diesen Kräften soll wieder P_n am Orte der gesuchten Formänderung wirken. Setzen wir, um dies anzudeuten,

$$\frac{N^2}{2EF} = f(P, P_n),$$

so wird

$$A = \int f(P, P_n)\,ds$$

und daher

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \int \frac{\partial f(P, P_n)}{\partial P_n}\,ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial f(P, P_n)}{\partial P_n} = \frac{\partial\left(\frac{N^2}{2EF}\right)}{\partial P_n} = \frac{N}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial P_n},$$

folglich wird

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \int \frac{N}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial P_n}\cdot ds.$$

Nach dem Satze von Betti ist die linke Seite der Gleichung gleich der gesuchten Formänderung y_n, so daß die durch eine Längskraft N hervorgerufene Verschiebung in der Form

$$y_n = \int \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial P_n}\,ds$$

angeschrieben werden kann, wobei P_n im Punkte der gesuchten Formänderung angreift.

In dem zu untersuchenden Querschnitt wirke noch eine Querkraft Q. Bezeichnet man mit Δ_Q die auf das Längenelement ds bezogene Verschiebung der Endquerschnitte, so ist die Formänderungsarbeit

$$dA = \frac{Q}{2} \cdot \Delta_Q .$$

Nun ist aber die Schiebung

$$\gamma = \frac{\tau}{kG} = \frac{Q}{GkF} = \frac{\Delta_Q}{ds},$$

wobei k die Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt zum Ausdruck bringen soll.

Daher wird

$$\Delta_Q = \frac{Q}{GkF} ds \quad \text{und} \quad dA = \frac{Q^2}{2GkF} ds,$$

mithin die in dem betrachteten Stabteil aufgespeicherte Arbeit

$$A = \int \frac{Q^2}{2GkF} ds .$$

Sondern wir auch hier die am Orte der gesuchten Formänderung wirkende Kraft P_n ab und schreiben

$$\frac{Q^2}{2GkF} = f(P, P_n),$$

so liefert die Differentiation nach P_n

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \int \frac{\partial f(P, P_n)}{\partial P_n} \cdot ds = \int \frac{Q}{GkF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P_n} \cdot ds .$$

Allgemeine Arbeitsgleichung. Die Formänderung des Punktes n eines Trägers infolge der wirklichen Belastung, durch die die Längskraft N, die Querkraft Q und das Biegungsmoment M hervorgerufen werden, ist

$$y_n = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_n} ds + \int \frac{Q}{G \cdot kF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds,$$

wenn am Orte der gesuchten Formänderung die Kraft P_n angreift.

Drehung zweier Querschnitte gegeneinander. Wird durch ein Kräftepaar, dessen Moment gleich M ist, eine Drehung um den kleinen Winkel φ bewirkt, so ist die hierzu nötige Arbeit

$$A = M\varphi ,$$

wie auf Seite 192 abgeleitet.

Es mögen die Kräftepaare mit den Momenten M_1, M_2, M_3, ... an dem zu untersuchenden Stabe angreifen und die kleinen Drehungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ hervorrufen; außerdem wirke in dem betrachteten Punkte m das Drehmoment M_m, welches die kleine Drehung φ_m bewirkt.

Dann ist die gesamte Formänderungsarbeit

$$A = M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 + M_3 \varphi_3 + \cdots + M_m \varphi_m ,$$

und hieraus ergibt sich durch teilweise Integration nach M_m

$$\frac{\partial A}{\partial M_m} = \varphi_m .$$

Die in einem gebogenen Stabe aufgespeicherte Arbeit ist nach S. 193

$$A = \int \frac{M^2}{2\,E\,J}\,d\,s\,.$$

Um anzudeuten, daß das Moment M_m am Orte der gesuchten Formänderung wirkt, setzen wir

$$\frac{M^2}{2\,E\,J} = f\,(M, M_m)$$

und erhalten so

$$A = \int f\,(M, M_m)\,d\,s\,.$$

Integrieren wir teilweise nach M_m, so wird

$$\frac{\partial A}{\partial M_m} = \int \frac{\partial f\,(M, M_m)}{\partial M_m}\,d\,s\,.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial\left(\frac{M^2}{2\,E\,J}\right)}{\partial M_m} = \frac{M}{E\,J}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_m},$$

folglich

$$\frac{\partial A}{\partial M_m} = \int \frac{M}{E\,J}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_m}\,d\,s\,.$$

Die Gleichsetzung beider Werte der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit ergibt

$$\varphi_m = \int \frac{M}{E\,J}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_m}\cdot d\,s\,.$$

Wirkt an dem Punkte, dessen Drehung gesucht ist, kein Moment, so ist M_m zunächst als gedachtes Moment einzuführen und nach erfolgter Differentiation wieder gleich Null zu setzen.

Tritt zu den gegebenen Momenten eine Längskraft N, die im Schwerpunkt des Querschnittes angreifend gedacht ist, so erhalten wir den Winkel φ_m, um den sich die im Punkte m an die Stabachse gelegte Tangente bei der Formänderung des Stabes dreht, zu

$$\varphi_m = \int \frac{M}{E\,J}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_m}\cdot d\,s + \int \frac{N}{E\,F}\cdot\frac{\partial N}{\partial M_m}\cdot d\,s\,,$$

da das zweite Integral die Ableitung der durch N allein hervorgerufenen Formänderungsarbeit nach M_m darstellt.

Ist am Orte der gesuchten Formänderung die Änderung des Winkels φ_m gleich Null, so wird

$$\frac{\partial A}{\partial M_m} = 0\,.$$

Es macht also auch ein Einspannmoment die Formänderungsarbeit zu einem Minimum, ein Satz, der zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme benutzt wird.

Angenähert kann in allen Formeln für $d\,s$ wieder $d\,x$ gesetzt werden (vgl. Seite 144).

Anwendungen.

1. Der Freiträger mit Einzellast (Abb. 153). Die Senkung des Lastangriffspunktes ist

$$f = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P} \cdot dx .$$

Die am Orte der gesuchten Formänderung (Endpunkt des Trägers) angreifende Kraft P_n ist hier gleich P, das Moment im Punkte x ist

$$M_x = P \cdot x ,$$

demnach

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = x .$$

Damit wird

$$f = \frac{1}{EJ}\int_0^l P x \cdot x \cdot dx = \frac{P x^3}{3EJ}\Bigg|_0^l = \frac{P l^3}{3EJ} .$$

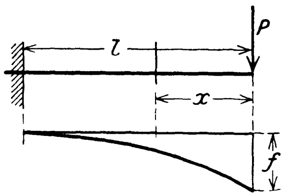


Abb. 153. Freiträger mit Einzellast.

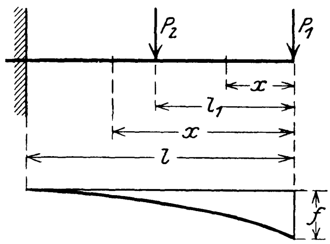


Abb. 154. Freiträger mit Einzellasten.

2. Der Freiträger mit mehreren Einzellasten (Abb. 154). Bei Anwendung der Castiglianoschen Gleichung darf sich die Integration jeweils nur so weit erstrecken, wie Stetigkeit vorliegt. Demzufolge ist der Träger schrittweise zu berechnen; wir zerlegen ihn in zwei Teile und erhalten

1. Teil von $x = 0$ bis $x = l_1$

$$M_x = P_1 \cdot x ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial P_1} = x ,$$

$$f_1 = \frac{1}{EJ}\int_0^{l_1} M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_1} \cdot dx = \frac{1}{EJ}\int_0^{l_1} P_1 x \cdot x \cdot dx = \frac{P_1 l_1^3}{3EJ} .$$

2. Teil von $x = l_1$ bis $x = l$

$$M_x = P_1 x + P_2 (x - l_1) ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial P_1} = x .$$

Es ist die teilweise Ableitung nach P_1 zu bilden, weil P_1 die am Orte der gesuchten Formänderung angreifende Kraft ist. Es wird

$$f_2=\frac{1}{EJ}\int\limits_{l_1}^{l} M_x\cdot\frac{\partial M_x}{\partial P_1}\cdot dx=\frac{1}{EJ}\int\limits_{l_1}^{l}(P_1x+P_2x-P_2l_1)\cdot x\cdot dx$$

$$=\frac{1}{EJ}\left[\frac{P_1x^3}{3}+\frac{P_2x^3}{3}-\frac{P_2\cdot l_1\cdot x^2}{2}\right]_{l_1}^{l}$$

$$=\frac{1}{EJ}\left[\frac{P_1l^3}{3}-\frac{P_1l_1^3}{3}+\frac{P_2l^3}{3}-\frac{P_2l_1^3}{3}-\frac{P_2l_1l^2}{2}+\frac{P_2l_1^3}{2}\right].$$

Die gesamte Verschiebung des Endpunktes ergibt sich als Summe der Einzelverschiebungen zu

$$f=f_1+f_2=\frac{P_1l^3}{3EJ}+\frac{P_2l^3}{3EJ}+\frac{P_2l_1^3}{6EJ}-\frac{P_2l_1l^2}{2EJ}.$$

Sind beliebig viele Lasten auf dem Träger, so ergibt sich als senkrechte Verschiebung des Endpunktes

$$f=\int\limits_{0}^{l_1}\frac{M_{\mathrm{I}}}{EJ}\cdot x\cdot dx+\int\limits_{l_1}^{l_2}\frac{M_{\mathrm{II}}}{EJ}\cdot x\cdot dx+\int\limits_{l_2}^{l_3}\frac{M_{\mathrm{III}}}{EJ}x\cdot dx+\cdots,$$

denn für jeden Abschnitt ist

$$M_x=P_1\cdot x+M_{(P_2,\,P_3\ldots)},\quad\text{also}\quad\frac{\partial M_x}{\partial P_1}=x+0=x.$$

Für die Ausrechnung empfiehlt es sich, die für f gefundene Gleichung bequemer zu schreiben; es ist

$$f=\frac{P_1l^3}{3EJ}\left[1+\frac{P_2}{P_1}+\frac{P_2}{2P_1}\cdot\left(\frac{l_1}{l}\right)^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{P_2}{P_1}\cdot\frac{l_1}{l}\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist eine unbenannte Zahl, die sich mit dem Rechenschieber schnell berechnen läßt.

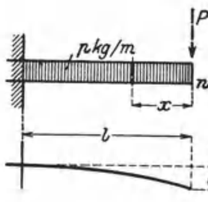


Abb. 155. Freiträger mit gleichmäßig verteilter Last.

3. Der Freiträger mit gleichmäßig verteilter Last (Abb. 155). Diesmal greift in dem Punkte n, dessen Verschiebung bestimmt werden soll, keine Einzellast an; sie ist also zunächst als gedachte Kraft P in n einzuführen, dann erhalten wir

$$M_x=P\cdot x+\frac{p}{2}\cdot x^2,\quad\text{also}\quad\frac{\partial M_x}{\partial P}=x.$$

Jetzt, nach ausgeführter Differentiation, setzen wir $P=0$ und schreiben

$$\delta=\frac{1}{EJ}\int\limits_{0}^{l}\frac{p}{2}\,x^2\cdot x\cdot dx=\frac{p\,l^4}{8EJ}.$$

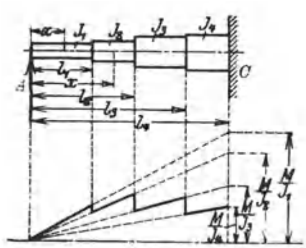


Abb. 156. Abgesetzte Welle.

4. Die abgesetzte Welle (Abb. 156). Infolge der Unstetigkeit, die durch die Querschnittsänderungen bedingt ist, zerlegen wir den Stab in vier Teile. Die Welle ist als zweifach gelagerter Träger gedacht, den wir in der Mitte C festgehalten und durch den Auflagerdruck A angegriffen denken. Gesucht ist die senkrechte Verschiebung des Punktes A infolge der Kraft A. Der Satz des **Costigliano** besagt

$$\delta_A = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial A} \cdot dx\,.$$

Da für jeden Punkt des Stabes $M_x = A \cdot x$ ist, wird $\frac{\partial M_x}{\partial A} = x$, so daß wir erhalten

$$\delta_A = \frac{1}{E}\int_0^{l_1} \frac{M_{\mathrm{I}}}{E \cdot J_1} \cdot x \cdot dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{M_{\mathrm{II}}}{E J_2}\, x \cdot dx + \int_{l_2}^{l_3} \frac{M_{\mathrm{III}}}{E J_3}\, x \cdot dx + \int_{l_3}^{l_4} \frac{M_{\mathrm{IV}}}{E J_4}\, x \cdot dx\,.$$

Wir berechnen die Integrale einzeln und schreiben

$$M_{\mathrm{I}} = A \cdot x; \quad \text{also} \quad \delta_{\mathrm{I}} = \frac{1}{E J_1}\int_0^{l_1} A \cdot x^2 \cdot dx = \frac{A \cdot l_1^3}{3 E J_1}\,,$$

$$M_{\mathrm{II}} = A \cdot x; \quad \delta_{\mathrm{II}} = \frac{1}{E J_2}\int_{l_1}^{l_2} A \cdot x^2 \cdot dx = \frac{A\,(l_2^3 - l_1^3)}{3 E J_2}\,,$$

$$M_{\mathrm{III}} = A \cdot x; \quad \delta_{\mathrm{III}} = \frac{1}{E J_3}\int_{l_2}^{l_3} A \cdot x^2 \cdot dx = \frac{A\,(l_3^3 - l_2^3)}{3 E J_3}\,,$$

$$M_{\mathrm{IV}} = A \cdot x; \quad \delta_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{E J_4}\int_{l_3}^{l_4} A \cdot x^2 \cdot dx = \frac{A\,(l_4^3 - l_3^3)}{3 E J_4}\,.$$

Als Gesamtverschiebung des Punktes A ergibt sich

$$\delta = \frac{A}{3 E}\left(\frac{l_1^3}{J_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{J_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{J_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{J_4}\right),$$

oder, wenn man das größte Trägheitsmoment J_4 und die Gesamtlänge l_4 vor die Klammer zieht,

$$\delta = \frac{A \cdot l_4^3}{3 E J_4}\left(\frac{J_4}{J_1} \cdot \frac{l_1^3}{l_4^3} + \frac{J_4}{J_2} \cdot \frac{l_2^3 - l_1^3}{l_4^3} + \frac{J_4}{J_3} \cdot \frac{l_3^3 - l_2^3}{l_4^3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{l_4^3}\right).$$

Die Ausdrücke in der Klammer sind unbenannte Zahlen und lassen sich mit dem Rechenschieber bequem berechnen, wenn man die dritten Potenzen der Zahlentafel entnimmt. Jedenfalls dürfte die Rechnung schneller zum Ziele führen als das zeichnerische Verfahren nach **Mohr** (S. 176). In gleicher Weise berechnen wir δ_B infolge des Auflagedruckes B und finden aus δ_A und δ_B die Senkung des Lastangriffspunktes P nach S. 146.

5. Die gekröpfte Welle (Abb. 157). Gegeben sei die zweifach gelagerte, mit einer Kröpfung versehene Welle nach Abb. 157. Die Trägheitsmomente der Querschnitte des linken Teiles seien J_1, J_2, J_3; die Kurbelkraft P wirke in der Mitte der Kröpfung. Wir denken uns die Welle in der Mitte des Kurbelzapfens eingespannt und berechnen die senkrechte Verschiebung der Auflagerpunkte. Hier handelt es sich nicht mehr um einen Träger mit gerader Achse, doch gestattet die Anwendung des Castiglianoschen Satzes die Ermittlung der Formänderung, wenn wir die Welle abschnittweise untersuchen und die Gesamtverschiebung des Punktes A als Summe der Einzelverschiebungen bestimmen. Da die Stetigkeit in den steifen Ecken unterbrochen ist, zerlegen wir die linke Seite der Welle in drei Teile; dann ist

$$\delta_A = \delta_{\mathrm{I}} + \delta_{\mathrm{II}} + \delta_{\mathrm{III}}$$

$$= \int_0^{l_1} \frac{M_{\mathrm{I}}}{EJ_1} \cdot \frac{\partial M_{\mathrm{I}}}{\partial A} \cdot dx + \int_0^{l_2} \frac{M_{\mathrm{II}}}{EJ_2} \cdot \frac{\partial M_{\mathrm{II}}}{\partial A} \cdot dx + \int_0^{l_3} \frac{M_{\mathrm{III}}}{EJ_3} \cdot \frac{\partial M_{\mathrm{III}}}{\partial A} \cdot dx.$$

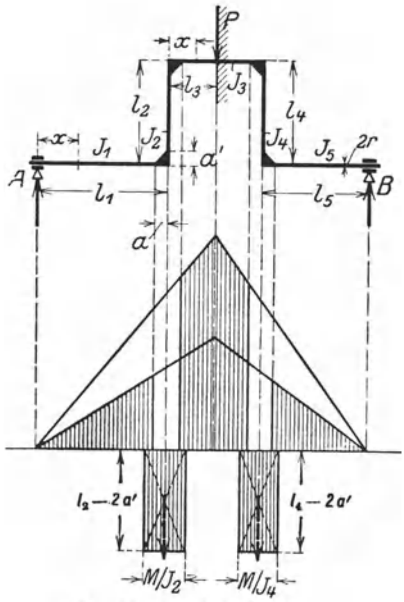


Abb. 157. Gekröpfte Welle.

Mit

$$M_{\mathrm{I}} = A \cdot x \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_{\mathrm{I}}}{\partial A} = x\,,$$

$$M_{\mathrm{II}} = A \cdot l_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_{\mathrm{II}}}{\partial A} = l_1\,,$$

$$M_{\mathrm{III}} = A\,(l_1 + x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_{\mathrm{III}}}{\partial A} = l_1 + x$$

geht unsere Gleichung für δ_A über in

$$\delta_A = \int_0^{l_1} \frac{M_{\mathrm{I}}}{EJ_1} \cdot x \cdot dx + \int_0^{l_2} \frac{M_{\mathrm{II}}}{EJ_2} \cdot l_1 \cdot dx + \int_0^{l_3} \frac{M_{\mathrm{III}}}{EJ_3} (l_1 + x) \cdot dx\,.$$

Hierin ist die Summe des ersten und letzten Integrals die senkrechte Verschiebung des Punktes A, die er infolge A erfahren würde, wenn die Welle ohne Kurbelarm glatt durchginge. Das zweite Integral gibt den Einfluß der Wange wieder. In ähnlicher Weise wie bei der Lösung der Grundgleichung (III) (S. 146) fassen wir $\int_0^{l_2} \frac{M_{\mathrm{II}}}{EJ_2} \cdot l_1 \cdot dx$ als das statische Moment einer $\frac{M}{J}$-Fläche auf, hierin ist $M_{\mathrm{II}} = A \cdot l_1$ unveränderlich. Der Flächenstreifen $\frac{M_{\mathrm{II}}}{J_2} \cdot dx$ hat bei der Breite dx die Höhe $(M_{\mathrm{II}} : J_2)$, die ebenfalls unveränderlich ist, wenn die Wange gleichbleibenden Querschnitt hat. $\frac{M_{\mathrm{II}}}{J_2}\, dx \cdot l_1$ kann als statisches Moment des Flächenstreifens, bezogen auf den Punkt A, aufgefaßt werden, $\int_0^{l_2} \frac{M_{\mathrm{II}}}{J_2}\, dx \cdot l_1$ ist demnach das statische Moment einer $(M : J)$-Fläche längs der Wangenachse, deren sämtliche Teile den unveränderlichen

Schwerpunktsabstand l_1 von A haben. Wir denken uns diese $(M:J)$-Fläche so gezeichnet, daß die Wangenachse Symmetrieachse der $(M:J)$-Fläche ist, die für den Fall $J_2 =$ Konstans ein Rechteck mit der Grundlinie l_2 und der Höhe $(M_{\mathrm{II}}:J_2)$ ist. Damit haben wir die Möglichkeit gewonnen, den Einfluß der Kröpfung dem zeichnerischen Verfahren nach Mohr einzugliedern, indem wir der $(M:J)$-Fläche des geraden Stabes in den Endpunkten der Kröpfung die $(M:J)$-Fläche längs der Wangenachse als Einzelkraft bei der Bildung des Kräftezuges hinzufügen.

Das erste Integral der Gleichung für δ_A ist die senkrechte Verschiebung des Punktes A unter dem Einfluß der Kraft A, wenn wir den Stab von der Länge l_1 im Kurbelarm eingespannt denken. Hat dieser Teil der Welle veränderlichen Querschnitt, so ist δ_{I} nach Beispiel 4 (S. 201) zu berechnen.

Die Steifigkeit der Ecken wird in der Weise berücksichtigt, daß man das Trägheitsmoment des Querschnittes für den steifen Teil des Trägers unendlich groß annimmt; dann wird der Bruch $(M:J)$ gleich Null, und die $(M:J)$-Fläche verringert sich bei Anwendung des zeichnerischen Verfahrens nach Mohr um diese Beträge, so daß nur die gestrichelte Fläche (Abb. 157) als Belastungsfläche in Frage kommt, während der Einfluß der Kurbelarme durch Rechtecke mit der Grundlinie $(l_2 - 2a')$ und der Höhe $(M:J_2)$ eingesetzt wird, deren Inhalte als Einzelkräfte in den Kröpfungspunkten angebracht werden. Wie weit die Ecken als steif anzusehen sind, hat E. Meyer[1]) durch Versuche ermittelt und gefunden, daß sich mit $a = \frac{b}{3}$ und $a' = \frac{r}{4}$ (Abb. 157) befriedigende Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ergibt ($b =$ Armbreite).

Rechnerische Lösung der Gleichung für δ_A.

Teil I:

$$\delta_{\mathrm{I}} = \int \frac{M_{\mathrm{I}}}{E J_1} \cdot \frac{\partial M_{\mathrm{I}}}{\partial A} \cdot dx; \quad M_{\mathrm{I}} = A \cdot x; \quad \frac{\partial M_{\mathrm{I}}}{\partial A} = x;$$

$$\delta_{\mathrm{I}} = \frac{1}{E J_1} \int_0^{l_1} A \cdot x^2 \cdot dx = \frac{A \cdot l_1^3}{3 E J_1}.$$

Teil II:

$$\delta_{\mathrm{II}} = \int \frac{M_{\mathrm{II}}}{E J_{\mathrm{II}}} \cdot \frac{\partial M_{\mathrm{II}}}{\partial A} \cdot dx; \quad M_{\mathrm{II}} = A \cdot l_1; \quad \frac{\partial M_{\mathrm{II}}}{\partial A} = l_1;$$

$$\delta_{\mathrm{II}} = \frac{1}{E J_2} \int_0^{l_2} A \cdot l_1^2 \cdot dx = \frac{A \cdot l_1^2 \cdot l_2}{E J_2}.$$

Teil III:

$$\delta_{\mathrm{III}} = \int \frac{M_{\mathrm{III}}}{E J_3} \cdot \frac{\partial M_{\mathrm{III}}}{\partial A} \cdot dx; \quad M_{\mathrm{III}} = A(l_1 + x); \quad \frac{\partial M_{\mathrm{III}}}{\partial A} = l_1 + x;$$

$$\delta_{\mathrm{III}} = \frac{1}{E J_3} \int_0^{l_3} A(l_1 + x)^2 \cdot dx = \frac{A \cdot l_1^2 \cdot l_3}{E J_3} + \frac{A \cdot l_1 \cdot l_3^2}{E J_3} + \frac{A \cdot l_3^3}{3 E J_3}.$$

[1]) Meyer, E.: Z. V. d. I. 1909, S. 295.

Demnach

$$\delta_A = \frac{A\cdot l_1^3}{3\,E\,J_1} + \frac{A\cdot l_1^2\cdot l_2}{E\,J_2} + \frac{A\cdot l_1^2\cdot l_3}{E\,J_3} + \frac{A\cdot l_1\cdot l_3^2}{E\,J_3} + \frac{A\cdot l_3^3}{3\,E\,J_3}\,.$$

Dafür schreibt man für die Ausrechnung mit dem Rechenschieber bequemer

$$\delta_A = \frac{A}{3\,E\,J_3}\left(\frac{J_3}{J_1}\cdot l_1^3 + 3\,l_1^2\,l_3 + 3\,l_1\,l_3^2 + l_3^3\right) + \frac{A\cdot l_1^2 l_2}{E\,J_2}$$

und fügt $l_1^3 - l_1^3$ hinzu, dann ergibt sich

$$\delta_A = \frac{A}{3\,E\,J_3}\left[\frac{J_3}{J_1}\cdot l_1^3 - l_1^3 + (l_1^3 + 3\,l_1^2\,l_3 + 3\,l_1\,l_3^2 + l_3^3)\right] + \frac{A\,l_1^2 l_2}{E\,J_2}$$

$$= \frac{A}{3\,E\,J_3}\left[l_1^3\,\frac{J_3 - J_1}{J_1} + (l_1 + l_3)^3\right] + \frac{A\,l_1^2 l_2}{E\,J_2}\,,$$

$$\delta_A = \frac{A\cdot(l_1+l_3)^3}{3\,E\,J_3}\left[1 + \left(\frac{l_1}{l_1+l_3}\right)^2\cdot\frac{J_3 - J_1}{J_1}\right] + \frac{A\,l_1^2 l_2}{E\,J_2}\,.$$

Bei der rechnerischen Behandlung der Ecksteifigkeit erstrecken sich die Integrale über die um a bzw. a' verminderten Stabachsen, also

$$\delta_{\mathrm{I}} = \frac{1}{E\,J_1}\int_0^{l_1 - a} A\cdot x^2\cdot d\,x = \frac{A\,(l_1 - a)^3}{3\,E\,J_1}\,,$$

$$\delta_{\mathrm{II}} = \frac{1}{E\,J_2}\int_{a'}^{l_2 - a'} A\cdot l_1^2\cdot d\,x = \frac{A\cdot l_1^2\,(l_2 - 2a')}{E\,J_2}\,,$$

$$\delta_{\mathrm{III}} = \frac{1}{E\,J_3}\int_a^{l_3} A\,(l_1 + x)^2\cdot d\,x = \frac{A\cdot l_1^2\,(l_3 - a)}{E\,J_3} + \frac{A\cdot l_1\,(l_3^2 - a^2)}{E\,J_3} + \frac{A\,(l_3^3 - a^3)}{3\,E\,J_3}\,.$$

6. Im Anschluß an Beispiel 3 soll der Neigungswinkel β der im Trägerendpunkte an die Biegungslinie gelegten Tangente bestimmt werden (Abb. 158).

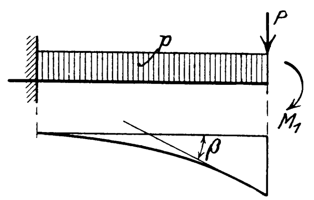


Abb. 158. Neigung im Trägerendpunkt.

Da die Normalkraft N gleich Null ist, lautet die Castiglianosche Gleichung

$$\beta = \int_0^l \frac{M}{E\,J}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_1}\cdot d\,x\,.$$

Das Biegungsmoment im Punkte x des Trägers ist

$$M = -\,P\,x - \frac{p\,x^2}{2} - M_1\,,\quad \text{also}\quad \frac{\partial M}{\partial M_1} = -1\,,$$

demnach

$$\beta = \int_0^l \frac{1}{E\,J}\left(-\,P\,x - \frac{p\,x^2}{2} - M_1\right)\cdot(-1)\cdot d\,x$$

$$= \frac{1}{E\,J}\int_0^l \left(P\,x + \frac{p\,x^2}{2} + M_1\right)\cdot d\,x$$

$$=\frac{1}{EJ}\left\{P\int_0^l x\,dx+\frac{p}{2}\int_0^l x^2\,dx+M_1\int_0^l dx\right\},$$

$$\beta=\frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{2}+\frac{pl^3}{6}+M_1\cdot l\right).$$

7. Die Kraft P sei senkrecht nach oben gerichtet, dann ist

$$M=Px-\frac{px^2}{2}-M_1;\ \text{also}\ \frac{\partial M}{\partial M_1}=-1,$$

demnach

$$\beta=\int_0^l\frac{1}{EJ}\left(Px-\frac{px^2}{2}-M_1\right)\cdot(-1)\cdot dx$$

$$=\frac{1}{EJ}\left\{-P\int_0^l x\,dx+\frac{p}{2}\int_0^l x^2\,dx+M_1\int_0^l dx\right\},$$

$$\beta=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{Pl^2}{2}+\frac{pl^3}{6}+M_1\cdot l\right).$$

8. Der Träger sei nur durch die Einzelkraft P und die gleichmäßig verteilte Last $p\cdot l$ belastet. In diesem Falle greift an dem Orte der gesuchten Formänderung kein Moment an, es ist also zunächst einzuführen und M in der Form

$$M=-Px-\frac{px^2}{2}-M_1$$

anzuschreiben. Die teilweise Differentiation nach M_1 liefert

$$\frac{\partial M}{\partial M_1}=-1.$$

Jetzt ist $M_1=0$ zu setzen, dann wird

$$\beta=\int_0^l\frac{M}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_1}\cdot dx=\int_0^l\frac{1}{EJ}\left(-Px-\frac{px^2}{2}\right)\cdot(-1)\cdot dx$$

$$=\frac{1}{EJ}\left\{P\int_0^l x\,dx+\frac{p}{2}\int_0^l x^2\,dx\right\},$$

$$\beta=\frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{2}+\frac{pl^3}{6}\right).$$

5. Die allgemeinen Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen.

Bevor wir zu der Lehre der Drehungsfestigkeit übergehen, wird es notwendig sein, die allgemeinen Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen zu untersuchen, weil die Voraussetzung, daß die Querschnitte trotz erlittener Formänderung eben bleiben, bei den auf Verdrehen beanspruchten Körpern im allgemeinen nicht mehr zutrifft.

Das bei unseren bisherigen Untersuchungen geübte Verfahren, aus dem Körper ein unendlich kleines Körperteilchen herauszuschneiden und an den Schnittflächen die Spannungen als äußere Kräfte anzubringen, soll wieder Anwendung finden. Abb. 159 zeigt dieses Parallelepiped in körperlicher Darstellung. Es liegt nahe, der rechnerischen Behandlung der Aufgabe ein räumliches rechtwinkliges Achsenkreuz zugrunde zu legen, dessen Anfangspunkt mit einer Ecke des unendlich kleinen Quaders zusammenfällt, und dessen Achsenrichtungen den Seiten des Quaders entsprechen. Als unendlich klein müssen wir das Körperteilchen auffassen, damit wir es als starr ansehen dürfen und somit in die Lage kommen, die Sätze der Mechanik über das Gleichgewicht starrer Körper anwenden zu können. Gleichzeitig ist damit eine Vernachlässigung des Eigengewichtes verbunden, da die infolge des Eigengewichtes des unendlich kleinen Quaders auftretenden Spannungen bedeutungslos sind. Allerdings dürfen Massenkräfte, wie beispielsweise die Fliehkraft des Körperteilchens, nicht vernachlässigt werden, doch wollen wir zunächst von diesem Fall absehen und uns darauf beschränken, den durch äußere Lasten hervorgerufenen Spannungszustand zu untersuchen.

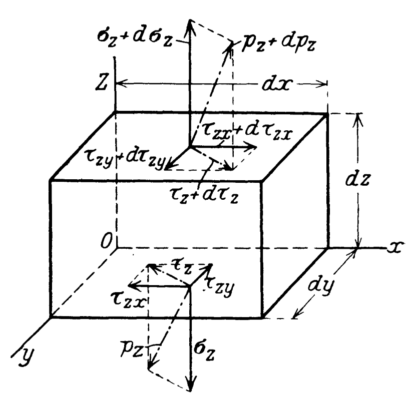


Abb. 159. Quader. Spannungen in den wagerechten Begrenzungsflächen.

In jeder der sechs Begrenzungsflächen des Quaders treten beliebig gerichtete Spannungen p auf, die in Abb. 159 nur für die wagerechten Begrenzungsflächen xy gezeichnet sind, um das Bild nicht zu überladen. Der Zeiger z bei p_z zeigt an, daß die Spannung p_z in der Fläche $dx \cdot dy$ angreift. In gleicher Weise sind p_x und p_y in den beiden anderen Ebenen zu denken, die durch den Anfangspunkt O gehen. Infolge der unendlich kleinen Ausdehnung der Begrenzungsflächen dürfen wir die Spannungen als gleichmäßig verteilt ansehen und ihre Mittelkraft im Mittelpunkt der Fläche angreifend annehmen. Die Spannung p_z zerlegen wir in die Seitenspannung σ_z senkrecht zur xy-Ebene und in die Seitenspannung τ_z, die in die xy-Ebene fällt. Es ist also σ_z Normalspannung und τ_z Schubspannung. Diese Zerlegung genügt aber noch nicht, da τ_z beliebige Richtung haben kann. Zur rechnerischen Behandlung der Aufgabe wird es nötig, τ_z weiter nach den Richtungen x und y zu zerlegen, wodurch wir die Seitenspannungen τ_{zx} und τ_{zy} erhalten. Durch diese Überlegung wird die Notwendigkeit der Doppelzeichen erwiesen, von denen der zweite die Richtung angibt, nach der τ_z zerlegt ist.

Damit hätten wir die Spannungsverhältnisse in der unteren wagerechten Begrenzungsfläche klargelegt und erinnern daran, daß Spannungen eingetragen sind, d. h. Kräfte, die auf 1 cm² der Begrenzungsflächen entfallen. Da die untere Begrenzungsfläche $dx \cdot dy$ [cm²] mißt,

nimmt sie in Richtung z mit $\sigma_z \cdot dx \cdot dy$ [kg],
„ y „ $\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy$ [kg],
„ x „ $\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy$ [kg]

an der Kraftübertragung teil, und diese Kräfte fassen wir als äußere Kräfte auf, die wir anbringen müssen, um trotz des Herausschneidens wieder Gleichgewicht zu haben.

Wir betrachten jetzt die obere wagerechte Begrenzungsfläche, die von der unteren den Abstand dz hat. Auch in dieser Fläche grenzen zwei Körperteile aneinander; die Spannungen werden durch die Trennungsfläche übertragen. Da aber die Spannung im Abstande dz von der xy-Ebene nicht der Spannung in der xy-Ebene selbst entsprechen wird, müssen wir hier die beliebig gerichtete Spannung $p_z + dp_z$ annehmen. Sie ist um das Differential dp_z größer, weil es sich um zwei unendlich benachbarte Schnitte handelt. Haben wir ferner p_z nach außen gerichtet angenommen, so muß auch $p_z + dp_z$ nach außen gerichtet sein. Die Zerlegung in die Normalspannung $\sigma_z + d\sigma_z$ und die Schubspannung $\tau_z + d\tau_z$ erfolgt in gleicher Weise wie bei der unteren Begrenzungsfläche. Ebenso zerlegen wir $\tau_z + d\tau_z$ weiter in die Seitenspannungen $\tau_{zy} + d\tau_{zy}$ und $\tau_{zx} + d\tau_{zx}$.

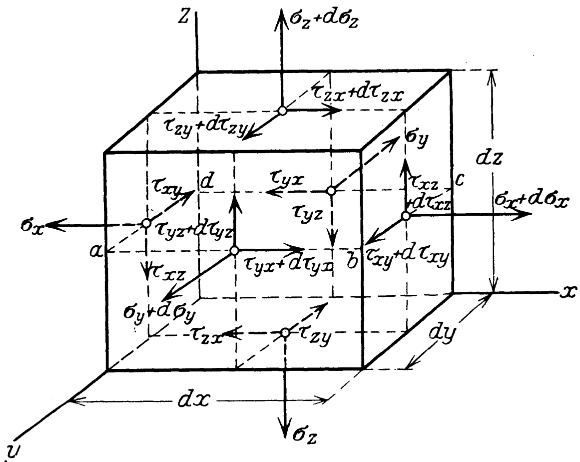


Abb. 160. Quader mit 18 Spannungskomponenten

Was wir für die beiden wagerechten Flächen durchgeführt haben, wiederholen wir für die vier senkrechten Begrenzungsflächen unseres Quaders und erhalten Abb. 160, wenn wir je Fläche die drei Seitenspannungen eintragen. Insgesamt erhalten wir 18 Spannungskomponenten, deren Gleichgewicht zu untersuchen ist.

Die Änderung $d\sigma_z$, die die Seitenspannung σ_z bei einem Schritt dz in Richtung der z-Achse erfährt, ist gleich

$$dz \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z};$$

durch die partielle Ableitung wird zum Ausdruck gebracht, daß das Anwachsen der Spannung σ_z nur in Richtung der z-Achse berücksichtigt wird (Seite 195). In gleicher Weise wachsen

$$\tau_{zy} \text{ um } dz \cdot \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \text{ und } \tau_{zx} \text{ um } dz \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}.$$

Auch hier haben wir wieder die **Spannungen** eingetragen, d. h. Kräfte, die auf 1 cm² der Schnittfläche entfallen. Da die Schnittfläche selber $dx \cdot dy$ [cm²] mißt, nimmt sie

in Richtung z mit $\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy$ [kg],

„ „ y „ $\left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy$ [kg],

„ „ x „ $\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy$ [kg]

an der Kraftübertragung teil.

In gleicher Weise erhalten wir als Kräfte, mit denen die durch O gehende Begrenzungsfläche $dy \cdot dz$ an der Kraftübertragung teilnimmt:

$$\sigma_x \cdot dy \cdot dz\,;\ \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \quad \text{und} \quad \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz .$$

An der ihr parallelen Begrenzungsfläche im Abstande dx greifen an

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz; \qquad \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz$$

und

$$\left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz .$$

Die durch O gehende Begrenzungsfläche $dx \cdot dz$ überträgt die Kräfte

$$\sigma_y \cdot dx \cdot dz\,;\ \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \quad \text{und} \quad \tau_{yz} \cdot dx \cdot dz .$$

Die zu ihr parallele Begrenzungsfläche $dx \cdot dz$ im Abstande dy von der xz-Ebene überträgt die Kräfte

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz; \qquad \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz$$

und

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz .$$

Da sich diese 18 Kräfte im Gleichgewicht befinden sollen, müssen die 6 Gleichbedingungen erfüllt sein. Diese fordern: Summe sämtlicher Kräfte in jeder der drei Achsenrichtungen gleich Null, und Summe der Momente sämtlicher Kräfte, bezogen auf drei zueinander senkrechte Achsen als Bezugsachsen, gleich Null.

In Abb. 161 ist das Quader mit den **Kräften** gezeichnet, die in Richtung der z-Achse angreifen; da ihre Summe gleich Null sein soll, erhalten wir die Bedingung

$$\left[\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy - \sigma_z \cdot dx \cdot dy\right] + \left[\left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz - \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz\right]$$
$$+ \left[\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz - \tau_{yz} \cdot dx \cdot dz\right] = 0 .$$

Nach Auflösung der runden Klammern heben sich

$$\sigma_z \cdot dx \cdot dy\,;\ \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz \quad \text{und} \quad \tau_{yz} \cdot dx \cdot dz$$

heraus. Die übrig bleibenden Glieder ergeben

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz = 0$$

oder durch Division mit $dx \cdot dy \cdot dz$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 .$$

In gleicher Weise behandeln wir sämtliche Kräfte in Richtung der x-Achse und der y-Achse und erhalten folgende 3 Gleichungen

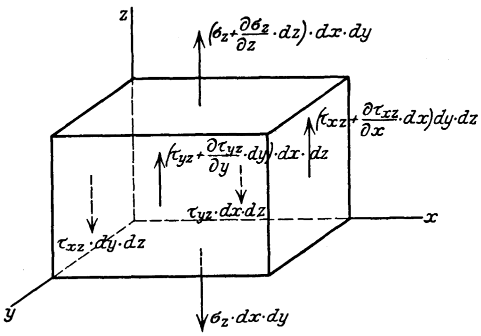


Abb. 161. Kräfte in Richtung der z-Achse.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Zu den untersuchten 18 Flächenkräften können noch Massenkräfte treten, zu denen beispielsweise die Fliehkraft gehört. Denken wir das Körperteilchen der Abb. 160 um eine beliebige Achse umlaufend, so wird die Fliehkraft senkrecht zu dieser Drehachse gerichtet sein, die mit keiner der drei Achsen des räumlichen Achsenkranzes zusammenfallen soll. Wir zerlegen die auf die Raumeinheit bezogene Fliehkraft und ebenso natürlich jede andere auf die Raumeinheit bezogene Massenkraft nach den drei Achsen x, y und z und nennen die Seitenkräfte nach diesen Richtungen X, Y und Z.

Zu den in Abb. 160 gezeichneten Spannungen würden hinzutreten

in Richtung der x-Achse die Spannung X,
" " " y- " " " Y,
" " " z- " " " Z.

Die an den entsprechenden Flächen des Körperteilchens angreifenden Kräfte sind demnach

in Richtung der x-Achse die Kraft $X \cdot dx \cdot dy \cdot dz$,
" " " y- " " " $Y \cdot dx \cdot dy \cdot dz$,
" " " z- " " " $Z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$.

Zu unseren 6 Kräften je Achse tritt je eine dieser zusätzlichen Kräfte, die wir den Gleichgewichtsbedingungen einfügen. Dabei erhalten die Grundgleichungen folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Damit eine Drehung des Körperteilchens (Abb. 160) verhindert wird, muß die Summe der Drehmomente aller Kräfte in bezug auf jede der drei Achsen, welche man parallel den Richtungen des Achsenkreuzes durch den Schwerpunkt des Quaders legen kann, gleich Null sein. Legen wir die Schwerachse parallel der z-Richtung, so sehen wir in dem Schnitt $a\,b\,c\,d$ als drehende Kräftepaare τ_{xy} und $\tau_{xy} + d\tau_{xy}$ mit den Hebelarmen $\frac{dx}{2}$, τ_{yx} und $\tau_{yx} + d\tau_{yx}$ mit den Hebelarmen $\frac{dy}{2}$, von denen τ_{xy} rechts drehend, τ_{yx} links drehend ist. Die den genannten Schubspannungen entsprechenden Flächenkräfte sind

$$\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \quad \text{und} \quad (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) \cdot dy \cdot dz\,,$$
$$\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \quad \text{und} \quad (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) \cdot dx \cdot dz.$$

Da weiter keine Kräfte vorhanden sind, die das Körperteilchen um die Parallele zur z-Achse zu drehen versuchen, erhalten wir als Bedingungsgleichung für den Schnittpunkt der Diagonalen $a\,c$ und $b\,d$ als Drehpunkt:

$$\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot dx + d\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot dy - d\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

und daraus
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,,$$
wenn wir die unendlich kleinen Größen vierter Ordnung gegenüber denjenigen dritter Ordnung vernachlässigen und durch $dx \cdot dy \cdot dz$ dividieren.

Diese beiden Schubspannungen treten in zwei aufeinander senkrechten Ebenen (yz-Ebenen und xz-Ebene) auf und heißen deshalb zugeordnet. Unsere Bedingungsgleichung liefert als Ergebnis den Satz, daß die einander zugeordneten Schubspannungen gleich sind. Wir waren diesem Satze bereits in einfacheren Fällen begegnet (vgl. S. 14).

In gleicher Weise läßt sich der Nachweis für die übrigen Achsen führen, so daß wir unsern Satz in der Form anschreiben

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}\,; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \ldots$$

Die Grundgleichungen (A) bzw. (B) auf Seite 210 enthalten 9 Unbekannte, die mit Berücksichtigung vorstehender Gleichungen auf 6 zurückgeführt werden. Damit ist aber die gestellte Aufgabe noch nicht gelöst, da wir aus 3 Gleichungen nicht 6 Unbekannte eindeutig errechnen können. Wenn trotzdem in den vorhergehenden Untersuchungen der Spannungszustand eines Körpers bestimmt werden konnte, so war das nur unter Zuhilfenahme von Annahmen möglich. Allerdings mußte dabei gefordert werden, daß die Annahmen der Erfahrung nicht widersprechen. Eine allgemeine Untersuchung darf sich natürlich nicht auf Annahmen stützen; ihre Aufgabe ist es, unabhängig davon den Spannungs- und Formänderungszustand eindeutig zu beschreiben. Als Hilfsmittel bietet sich das Geradliniengesetz von Hooke dar, das den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen angibt. Wenn wir dieses Gesetz bei den weiteren Untersuchungen benützen, so soll ausdrücklich gesagt werden, daß die Ergebnisse der Untersuchung nur da zutreffen, wo das Hookesche Gesetz gilt. Sind die Formänderungen bekannt, die ein Körperteilchen erfährt, so läßt sich daraus auf die Spannungen schließen.

Als Grundlage unserer Untersuchungen wählen wir wieder ein räumliches Achsenkreuz und legen den Punkt, dessen Verschiebung bestimmt werden soll, durch die Koordinaten x, y und z fest; die Verschiebungen selbst seien den Achsrichtungen entsprechend ξ, η, ζ. Die übliche Voraussetzung, daß die Verschiebungen im Verhältnis zu den Abmessungen des Körpers und damit auch zu den Koordinaten

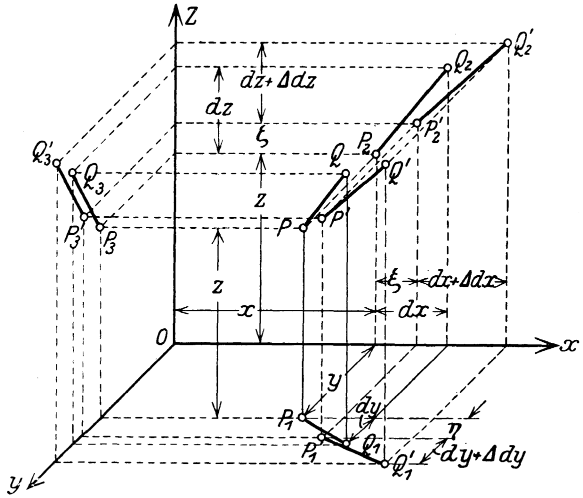


Abb. 162. Verschiebung.

x, y, z sehr klein sein sollen, machen wir auch hier. Abb. 162 zeigt zwei unendlich benachbarte Punkte P und Q, deren Entfernung ds sein möge. Die Koordinaten sind $P\ (x, y, z)$. $Q\ (x + dx;\ y + dy;\ z + dz)$. Infolge der Belastung des Körpers kommt P nach P', die Koordinaten x, y und z gehen über in $(x + \xi)$, $(y + \eta)$ und $(z + \zeta)$. Aber auch der Punkt Q ändert seine Lage; die Entfernung ds wird zu $ds + \Delta ds$, wobei Δds die Verlängerung bedeutet, die ds unter dem Einfluß der Belastung erfährt. Die Projektionen dieser Verlängerung auf die Achsen sind entsprechend Δdx, Δdy und Δdz, so daß wir als Koordinaten des verschobenen Punktes Q' die Größen $(x + dx + \xi + \Delta dx)$; $(y + dy + \eta + \Delta dy)$ und $(z + dz + \zeta + \Delta dz)$ erhalten.

In Abb. 163 ist der Grundriß unseres verschwindend kleinen Quaders dargestellt, dessen Punkt P_1 die ursprünglichen Koordinaten x, y hat. Durch die Belastung legt er den unbekannten Weg $P_1 P_1'$ zurück. Die Projektion dieses Weges auf die x-Achse ist ξ, die auf die y-Achse η, so daß P_1' die Koordinaten $(x + \xi)$ und $(y + \eta)$ hat. Mit P_1 ändert auch der unendlich benachbarte Punkt R_1

seine Lage. Er legt den Weg $R_1\,R_1'$ zurück, dessen Projektion auf die x-Achse aus der Verschiebung ξ und ihrem unendlich kleinen Zuwachs besteht. Dieser Zuwachs ist aber nur ein Zuwachs in Richtung der x-Achse, wobei y und z als unveränderlich anzusehen sind; er ist ein partielles Differential und gleich $\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot dx$. In Wirklichkeit hängt ξ noch von y und z ab. Der Punkt S_1 in Abb. 163 gelangt nicht nach S, sondern nach S_1', wobei $S S_1' = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot dy$ ist. Die vollständige Beschreibung der Formänderung müßte die Formänderung angeben, welche die Diagonale PQ (Abb. 162) unseres Quaders erfährt. Sie

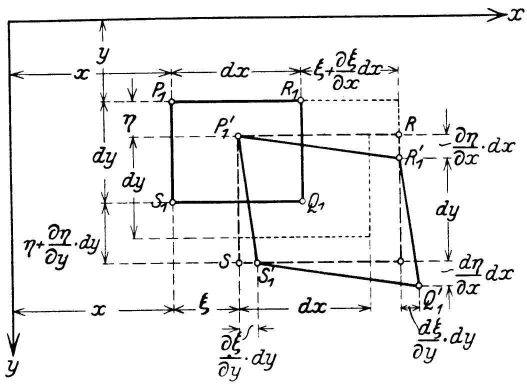


Abb. 163. Grundriß zu Abb. 162.

wird angegeben durch die totalen Differentiale $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$, die sich als Summe der partiellen Differentiale zu

$$\varDelta\, dx = d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot dz\,,$$

$$\varDelta\, dy = d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cdot dz\,,$$

$$\varDelta\, dz = d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot dz$$

ergeben (Abb. 163)[1]).

Bezeichnet man die Dehnungen im Punkte P nach den Richtungen der Koordinatenachsen mit ε_x, ε_y und ε_z, so wird

$$\varepsilon_x = \frac{P_1' R}{P_1 R_1} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ und in gleicher Weise } \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ und } \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\,. \qquad \text{(C)}$$

Infolge der Belastung wird das Rechteck $P_1\,S_1\,Q_1\,R_1$ zum Parallelogramm $P_1'\,S_1'\,Q_1'\,R_1'$; der vorher rechte Winkel in P_1 wird zum spitzen Winkel in P_1'. Die Winkeländerung ist gleich

$$\gamma_{xy} = S\,P_1'\,S_1' + R\,P_1'\,R_1'$$

[1]) In der Abbildung sind die durch ζ hervorgerufenen Verschiebungen nicht gezeichnet.

oder, wenn wir

$$\operatorname{tg} S\,P_1'S_1' = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot dy^{1)}}{dy} = S\,P_1'S_1',$$

$$\operatorname{tg} R\,P_1'R_1' = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot dx^{1)}}{dx} = R\,P_1'R_1'$$

setzen:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{D}$$

In gleicher Weise läßt sich ableiten

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{und} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Bei unendlich kleinen Winkeländerungen weicht der Inhalt des verformten Quaders von dem eines Quaders mit den Seiten $(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot dx)$, $(dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot dy)$ und $(dz + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cdot dz)$ nicht ab, so daß für den Rauminhalt des verformten Quaders geschrieben werden darf

$$\begin{aligned}
dV + \Delta\, dV &= \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot dx\right)\cdot\left(dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot dy\right)\cdot\left(dz + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cdot dz\right)\\
&= (dx + \varepsilon_x\cdot dx)\cdot(dy + \varepsilon_y\cdot dy)\cdot(dz + \varepsilon_z\cdot dz)\\
&= dx\,(1 + \varepsilon_x)\cdot dy\,(1 + \varepsilon_y)\cdot dz\,(1 + \varepsilon_z)\\
&\approx dx\cdot dy\cdot dz + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\cdot dx\,dy\,dz;\\
\Delta\, dV &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\cdot dV;\\
\frac{\Delta\, dV}{dV} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e.
\end{aligned}$$

Wir nennen e die **kubische Ausdehnung** und erhalten mit den vorher gefundenen Werten für die Dehnungen

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{E}$$

Die durch die Gleichungen (C) (D) und (E) bestimmten Dehnungen ε und Schiebungen γ sind nunmehr durch die die Formänderungen hervorrufenden Spannungen auszudrücken. Wir bedienen uns dabei des Hookeschen Geradliniengesetzes für Normalspannungen (S. 5) und für Schubspannungen (S. 13), von denen wir das zweite sofort auf Gleichung (D) anwenden. Aus

$$\gamma_{xy} = \beta\cdot\tau_{xy} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{xy}$$

---

[1]) Hierbei sind $\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot dy$ gegen dy und $\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot dx$ gegen dx vernachlässigt.

folgt

$$\left.\begin{array}{c} \tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ \text{und in gleicher Weise für die beiden anderen Seitenspannungen} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right). \end{array}\right\} \quad (F)$$

Für den zweiachsigen Spannungszustand wurden die Beziehungen zwischen Dehnungen und Spannungen bereits auf S. 51 aufgestellt. Im vorliegenden Falle tritt zu den dort vorausgesetzten Spannungen σ_x und σ_y eine dritte Seitenspannung σ_z in Richtung der z-Achse. Durch sie wird senkrecht zur z-Achse in Richtung der x- und y-Achse eine Querdehnung

$$\varepsilon_q = -\frac{1}{m} \cdot \varepsilon_z$$

hervorgerufen, so daß als Gesamtdehnungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_y - \frac{1}{m}\varepsilon_z \quad \text{in Richtung } x, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_y - \frac{1}{m}\varepsilon_z - \frac{1}{m}\varepsilon_x \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad y, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_z - \frac{1}{m}\varepsilon_x - \frac{1}{m}\varepsilon_y \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad z \end{aligned}$$

erhalten werden. Nach dem Hookeschen Gesetz schreiben wir $\varepsilon_x = \alpha \cdot \sigma_x$; $\varepsilon_y = \alpha \cdot \sigma_y$ und $\varepsilon_z = \alpha \cdot \sigma_z$, wobei σ die wirklich auftretenden Spannungen sind. Damit gehen unsere Gleichungen für die Gesamtdehnungen über in

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha \cdot \sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_y - \frac{1}{m}\alpha \cdot \sigma_z, \\ \varepsilon_2 &= \alpha \cdot \sigma_y - \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_z - \frac{1}{m}\alpha \cdot \sigma_x, \\ \varepsilon_3 &= \alpha \cdot \sigma_z - \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_x - \frac{1}{m}\alpha \cdot \sigma_y. \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang zwischen den Dehnungen ε_x, ε_y und ε_z der Gleichungen (C) wiederherzustellen, die Gesamtdehnungen bedeuteten, ersetzen wir ε_1, ε_2 und ε_3 durch ε_x, ε_y und ε_z und schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_x}{\alpha} &= \sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z), \\ \frac{\varepsilon_y}{\alpha} &= \sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_z), \\ \frac{\varepsilon_z}{\alpha} &= \sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}$$

Hierbei sind die linken Seiten der Gleichungen gedachte Spannungen, durch die wir uns die Formänderungen ε_x, ε_y und ε_z hervorgerufen denken können, wenn statt der drei Seitenspannungen σ_x, σ_y und σ_z nur eine einzige wirkt. Die Addition der drei Gleichungen liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)&=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z-\frac{2}{m}\sigma_x-\frac{2}{m}\sigma_y-\frac{2}{m}\sigma_z\,,\\&=\frac{m-2}{m}\sigma_x+\frac{m-2}{m}\sigma_y+\frac{m-2}{m}\cdot\sigma_z\,,\\&=\frac{m-2}{m}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\end{aligned}$$

und daraus

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{m}{m-2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{m}{m-2}\cdot e\,.$$

Fügen wir in der Gleichung

$$\frac{\varepsilon_x}{\alpha}=\sigma_x-\frac{1}{m}\sigma_y-\frac{1}{m}\sigma_z$$

auf jeder Seite $-\frac{1}{m}\sigma_x$ hinzu, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_x}{\alpha}-\frac{1}{m}\sigma_x&=\sigma_x-\frac{1}{m}\sigma_y-\frac{1}{m}\sigma_z-\frac{1}{m}\sigma_x\,,\\\frac{\varepsilon_x}{\alpha}&=\left(\sigma_x+\frac{1}{m}\sigma_x\right)-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\,,\\\frac{\varepsilon_x}{\alpha}&=\frac{m+1}{m}\sigma_x-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\,,\\\frac{\varepsilon_x}{\alpha}&=\frac{m+1}{m}\sigma_x-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{m-2}\cdot e\,,\\\frac{m+1}{m}\sigma_x&=\frac{\varepsilon_x}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{m-2}\cdot e=\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right),\\\sigma_x&=\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right).\end{aligned}$$

Nun hatten wir aber auf S. 54 als Beziehung zwischen α und β gefunden

$$\beta=\frac{2(m+1)}{m}\cdot\alpha\,.$$

Führen wir diesen Wert in unsere letzte Gleichung ein, so geht sie über in

$$\sigma_x=\frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right)\quad\text{oder}\quad\sigma_x=2\,G\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right).$$

In gleicher Weise werden die Seitenspannungen σ_y und σ_z bestimmt, die wir mit $\varepsilon_x=\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\varepsilon_y=\frac{\partial\eta}{\partial y}$ und $\varepsilon_z=\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ in der Form anschreiben

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\,G\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{e}{m-2}\right)\\\sigma_z&=2\,G\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{e}{m-2}\right)\\\sigma_y&=2\,G\cdot\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{e}{m-2}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(G)$$

Mit diesen Gleichungen (G) haben wir die unbekannten Seitenspannungen σ_x, σ_y und σ_z durch die Verschiebungen ξ, η und ζ ausgedrückt. Da die Gleichgewichtsbedingungen bereits die Gleichungen (A) lieferten, dürfen wir unsere Aufgabe, den Spannungs- und Formänderungszustand zu beschreiben, als gelöst ansehen und haben nur noch nötig, die 6 Gleichungen dadurch auf 3 zurückzuführen, daß wir die Gleichungen (F) und (G) in die Gleichungen (A) oder (B) einsetzen.

Aus $\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right)$ folgt $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 2G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x}\right)$.

„ $\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ „ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \cdot \partial y}\right)$.

„ $\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$ „ $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial z}\right)$.

Das Einsetzen in (B) liefert

$$2G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \cdot \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial z}\right) + X = 0;$$

wir dividieren die Gleichung durch G, multiplizieren aus und zerlegen das erste Glied

$$2\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \text{ in } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

dann ist

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{2}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{X}{G} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{2}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial \xi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial \zeta}{\partial z}}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{2}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

Mit

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e$$

erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{2}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

Das Zusammenfassen des vierten und fünften Gliedes ergibt die Grundgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

In gleicher Weise erhalten wir für die beiden andern Achsrichtungen

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0.$$

Nachdem wir jetzt die Grundgleichungen aufgestellt haben, die partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, wird es sich empfehlen, alle Gleichungen zusammen anzuschreiben, da wir bei verwickelten Spannungs- und Formänderungszuständen stets auf sie zurückgreifen werden.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0\\
&\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\\
&\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0\\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \tag{C}$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{D}$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{E}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{F}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right)\\
\sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right)\\
\sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{G}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{H}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{X}{G}=0\\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{Y}{G}=0\\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{Z}{G}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (J)$$

Mit der Aufstellung dieser Gleichungen ist die gestellte Aufgabe, den Spannungs- und Formänderungszustand in einem beliebigen Punkte eines Stabes zu bestimmen, vollständig gelöst, doch läßt sich die Lösung dieser Gleichungen in sehr vielen Fällen nicht durchführen, und da, wo sie zum Ziele führt, ist der Weg reichlich verwickelt, so daß er von dem Ingenieur im allgemeinen nicht begangen wird. Er wird eher versuchen, durch passende Annahmen die gestellte Aufgabe zu vereinfachen, wie wir es auch in den bisherigen Untersuchungen getan haben. Daß z. B. die Biegungsspannungen den Abständen von der Nullinie verhältnisgleich sind, war eine Annahme, deren Richtigkeit auf Grund der allgemeinen Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen nachzuweisen wäre. Das ist von de Saint-Venant geschehen. Und darin liegt der Vorteil der strengen Theorie, wie man zu sagen pflegt, daß sie die Grundlagen unserer Lehre von der Festigkeit und Formänderung prüft und die Zulässigkeit von vereinfachenden Annahmen sicher stellt. So hielt beispielsweise die Naviersche Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte bei der Verdrehung dieser Prüfung nicht stand, wie auf S. 235 gezeigt wird. Das war auch der Grund, weshalb die allgemeinen Beziehungen aufgestellt wurden.

VII. Die Drehungsfestigkeit.

Die Lehre von der Drehfestigkeit wurde lange Zeit von der Voraussetzung beherrscht, daß die Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben. In Wirklichkeit trifft diese Voraussetzung nur bei dem kreisförmigen Querschnitt zu, während ihre Übertragung auf andere Querschnittsformen Ergebnisse lieferte, die mit der Erfahrung im Widerspruche standen.

Wie wenig die Voraussetzung vom Ebenbleiben der Querschnitte bei der Verdrehung erfüllt ist, zeigt Abb. 164, die Bach, Elastizität und Festigkeit[1]), entnommen ist. Der Probestab ist ein zylindrischer Stab mit elliptischem Querschnitt, als Baustoff ist Hartblei gewählt, das die Formänderung auch nach dem Herausnehmen auf der Prüfmaschine behält. Auf der Oberfläche des Stabes sind vor der Prüfung Mantellinien in Richtung der Stabachse und Umrißlinien senkrecht zur Stabachse eingeritzt worden, die ein Netz von Quadraten auf der Oberfläche ergeben. Nach erfolgter Verdrehung zeigt sich, daß die

[1]) Bach-Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl. Berlin: Julius Springer.

Mantellinien schraubenförmig verlaufen und die zu ihnen senkrechten Umrißlinien S-förmige Gestalt annehmen; aus den Quadraten sind Rhomben geworden, die auch deutlich die aufgetretene Formänderung als Winkeländerung erkennen lassen. Die S-förmige Gestalt der Umrißlinien zeigt, daß sich die ursprünglich ebenen Querschnitte gewölbt haben. Der Einwand, daß es sich bei dem angezogenen Versuch um eine bleibende Formänderung handelt, die mit einem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze verbunden ist, wird durch zahlreiche Versuche widerlegt, die Bach, Bauschinger und Föppl angestellt haben, und die stets zu dem gleichen Ergebnis führten, daß alle Querschnitte, die stark genug von der Kreisform abweichen, schon vor dem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze eine deutlich erkennbare Krümmung erfahren.

Abb. 164. Verdrehung eines Stabes mit elliptischem Querschnitt.

Abb. 165. Verdrehung eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt.

Im Gegensatz dazu steht die Formänderung eines Zylinders mit kreisförmigem Querschnitt, dessen verformter Zustand in Abb. 165 wiedergegeben ist, die ebenfalls Bach, Elastizität und Festigkeit, entnommen ist. Aus ihr ist zu entnehmen, daß die Quadrate des unbelasteten Stabes in überall gleiche Rhomben übergehen und die Umrißlinien eben bleiben. Sie zeigt ferner, daß sich je zwei aufeinander folgende Querschnitte immer um den gleichen Betrag gegeneinander verdrehten.

Da dieser Versuch das Ebenbleiben kreisförmiger Querschnitte bestätigt, wollen wir die auf diese Tatsache gestützte Lehre von der Drehungsfestigkeit zunächst behandeln. Sie ist von Navier in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts aufgestellt und liefert für die Berechnung von Wellen Ergebnisse, die mit der Erfahrung übereinstimmen.

1. Der kreisförmige Querschnitt.

Die Art des Kraftangriffs geht aus Abb. 166 hervor: zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Drehmomente verdrehen den zwischen den beiden Scheiben liegenden zylindrischen Stab. Wir betrachten den Stabteil zwischen den Querschnitten I und II und denken uns I eingespannt, während das Drehmoment M_d am freien Ende angreift (Abb. 167). Infolge des Drehmomentes werden in den Querschnitten des festgehaltenen Stabes Spannungen hervorgerufen, die in die Ebenen der Querschnitte fallen und auf der Stabachse senkrecht stehen. Wir hatten sie auf S. 12 als Schubspannungen bezeichnet.

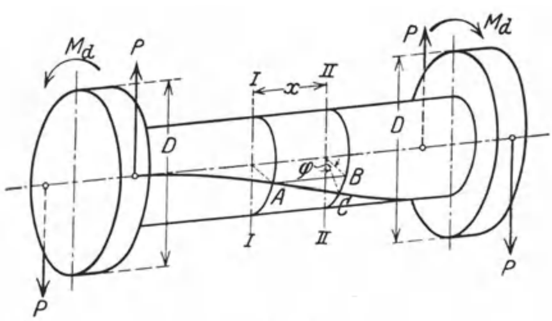


Abb. 166. Verdrehung.

a) Randspannungen.

Wollen wir den Spannungszustand des Stabes beschreiben, so müssen wir über die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt Klarheit haben. Aus der Beobachtung, daß die Punkte, die am weitesten vom Mittelpunkt entfernt sind, die größten Verschiebungen erfahren, schließen wir, daß die Verschiebungen den Entfernungen vom Mittelpunkt verhältnisgleich sind. Der Mittelpunkt selbst behält seine Lage trotz der Formänderung, die der Stab erfährt, bei. Übertragen wir diese einfache Aussage über das Anwachsen der Verschiebungen auf die sie hervorrufenden Spannungen, so erhalten wir ein Geradliniengesetz für das Anwachsen der Schubspannungen τ, wie wir es in ähnlicher Weise für die Biegungsspannungen σ gefunden haben (S. 61). Mit den Bezeichnungen der Abb. 167 geben wir dieser Aussage die mathematische Form einer Gleichung und schreiben

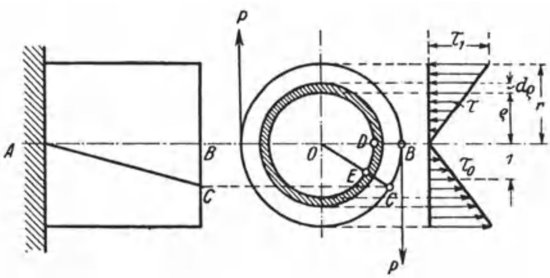


Abb. 167. Schubspannungen.

$$\tau : \tau_0 = \varrho : 1 .$$

Wie bei der Biegung haben wir es hier mit einer veränderlichen Spannung zu tun, die sich nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Wie die Biegungsspannung σ ist auch die Schubspannung τ nach Größe und Richtung zu unterscheiden, aber nicht in dem Sinne der Gegensätzlichkeit oder Umkehrung der Spannungen σ, die teils Druck-, teils Zugspannungen waren. Die Schubspannungen τ sind tangential gerichtet und zeigen deshalb an zwei gegenüberliegenden Punkten entgegengesetzte Richtpfeile. In Beziehung auf die Formänderung sind sie gleichsinnig; beide Punkte werden in derselben Drehrichtung verschoben.

Das Querschnittsteilchen, für das wir gleich große Schubspannungen τ annehmen dürfen, ist ein Kreisring von der verschwindend kleinen Breite $d\varrho$. Nach der Erklärung des Spannungsbegriffes verstehen wir unter τ diejenige Kraft in Kilogramm, die auf 1 cm² des Querschnittes entfällt. Hat der Ring von der Breite $d\varrho$ einen Flächeninhalt dF [cm²], so überträgt er $\tau \cdot dF$ [kg]. Damit das Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften gewahrt bleibt, muß $\Sigma M = 0$ sein. Für den Punkt O als Momentendrehpunkt ist das statische Moment der von dem Ring übertragenen Teilkraft $dM = \tau \cdot dF \cdot \varrho$; die Summe der statischen Momente aller Teilkräfte ist $\int \tau \cdot dF \cdot \varrho$ und muß gleich dem Moment M_d der äußeren Kräfte sein, so daß wir als Bedingungsgleichung erhalten

$$\int \tau \cdot dF \cdot \varrho = M_d,$$

die mit $\tau = \varrho \cdot \tau_0$ übergeht in

$$\tau_0 \cdot \int dF \cdot \varrho^2 = M_d.$$

$\int dF \cdot \varrho^2$ entspricht im Aufbau dem Trägheitsmoment $J = \int dF \cdot y^2$ auf S. 71. Der Unterschied zwischen beiden Ausdrücken besteht darin, daß ϱ die Entfernung des Flächenteilchens von einem Punkte, y die Entfernung des Flächenteilchens von einer Achse bedeutet. Wir nennen das auf einen Punkt bezogene Trägheitsmoment das polare Trägheitsmoment des Querschnittes und bezeichnen es zum Unterschied gegen das auf eine Achse bezogene mit J_p. Damit wird

$$\tau_0 \cdot J_p = M_d \quad \text{oder} \quad \tau \cdot \frac{J_p}{\varrho} = M_d.$$

Als Randspannung erhalten wir für $\varrho = r$

$$\tau_1 \cdot \frac{J_p}{r} = M_d.$$

Da $(J_p : r)$ gleich dem polaren Trägheitsmoment, dividiert durch die Entfernung der äußersten Faser ist, nennen wir $(J_p : r)$ das polare Widerstandsmoment des Querschnittes und bezeichnen es mit W_p, so daß sich die einfache Beziehung

$$\tau_1 = \frac{M_d}{W_p}, \qquad W_p = \frac{J_p}{r}$$

ergibt, die zu der Festigkeitsbedingung

$$\tau_1 = \frac{M_d}{W_p} \leqq k_d$$

führt, wenn k_d die zulässige Drehungsfestigkeit in kg/cm² bedeutet. Die Einheiten für das polare Trägheitsmoment und das polare Widerstandsmoment sind die gleichen wie bei dem axialen Trägheits- und Widerstandsmoment; wir messen also J_p in cm⁴ und W_p in cm³.

Aus der Festigkeitsbedingung errechnen wir das erforderliche polare Widerstandsmoment des kreisförmigen Querschnittes zu

$$W_p \geqq \frac{M_d}{k_d}.$$

b) Polares und axiales Trägheitsmoment.

Zwischen beiden Arten von Trägheitsmomenten besteht eine einfache Beziehung, die sich aus Abb. 168 unmittelbar ergibt. Nach der Begriffsfestsetzung ist

$$J_p = \int dF \cdot \varrho^2,$$

wofür wir mit $\varrho^2 = x^2 + y^2$ schreiben

$$J_p = \int dF\,(x^2 + y^2) = \int dF \cdot x^2 + \int dF \cdot y^2.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist als Grenzwert der Summe der Produkte aus Flächenteilchen und Quadrat der Entfernung von der y-Achse gleich dem axialen Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die y-Achse, während das zweite Glied gleich dem axialen Trägheitsmoment, bezogen auf die x-Achse, ist. Demnach erhalten wir das polare Trägheitsmoment als Summe der axialen Trägheitsmomente; es ist

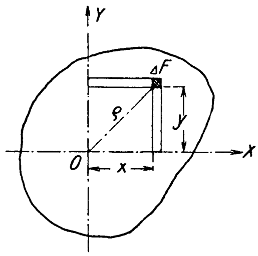


Abb. 168. Polares und axiales Trägheitsmoment.

$$J_p = J_x + J_y.$$

Da für den Kreisquerschnitt jeder Durchmesser Symmetrieachse ist, sind sämtliche axialen Trägheitsmomente gleich groß, daraus folgt

$$J_p = 2 \cdot J \text{ und in gleicher Weise } W_p = 2 \cdot W.$$

Statt J der Tafel auf S. 85 zu entnehmen, wollen wir J_p unmittelbar berechnen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 167 ist

$$dF = 2\pi\varrho \cdot d\varrho, \text{ also } J_p = \int_0^r 2\pi\varrho^3 \cdot d\varrho = 2\pi \cdot \frac{\varrho^4}{4}\Bigg|_0^r,$$

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} \text{ oder } J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Als Widerstandsmoment ergibt sich durch Division mit dem Abstand r der äußersten Faser

$$W_p = \frac{2\,J_p}{d} \text{ oder } W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Das axiale Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnittes wird wegen $J_p = 2\,J$

$$J = \tfrac{1}{2} \cdot J_p = \frac{\pi d^4}{64}; \text{ ebenso } W = \tfrac{1}{2}\,W_p = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Die Tafel der axialen Trägheitsmomente bleibt auch für das Aufsuchen polarer Trägheits- und Widerstandsmomente brauchbar, denn wir finden aus dem errechneten erforderlichen Widerstandsmoment

$$W_p \geqq \frac{M_d}{k_d}$$

den zugehörigen Durchmesser, wenn wir mit $\frac{1}{2} W_p$ in die Tafel gehen.

Das Rechteck mit den Seiten b und h hat

$$J_x = \frac{b\,h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h\,b^3}{12}; \quad J_p = J_x + J_y = \frac{h}{12}(b^3 + bh^2).$$

Setzen wir $h:b = n$, so wird

$$J_p = \frac{b\,(nb)^3}{12} + \frac{(nb)\cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{12}(n^3 + n).$$

Je größer n ist, desto größer wird auch das polare Trägheitsmoment des Rechtecks. Damit müßte auch der Widerstand gegen Verdrehen mit wachsendem n zunehmen, wenn wir das für den Kreisquerschnitt gefundene Ergebnis verallgemeinern wollten. Die Erfahrung lehrt aber, daß ein Stab mit schmalem, rechteckigem Querschnitt sehr wenig Widerstand gegen Verdrehen zeigt, wovon man sich sofort durch Verdrehung einer Reißschiene überzeugen kann.

c) Die Drehmomentenfläche.

Für die Abmessungen eines Stabes ist das größte Drehmoment maßgebend. Wir werden am besten einen Überblick über die Beanspruchung erhalten, wenn wir die Drehmomente in gleicher Weise längs der Stabachse als Ordinaten auftragen, wie wir es bei der Biegungsmomentenfläche getan haben.

Im allgemeinen gibt der Maschinenbauer nicht das Drehmoment unmittelbar an; er sagt, eine Welle überträgt N PS bei n Umläufen in der Minute. Ist P die Umfangskraft an einer Scheibe mit dem Halbmesser r, dann ist die übertragene Leistung in PS

$$N = \frac{P\cdot v}{75} \text{ oder mit } v = \frac{\pi r\cdot n}{30},$$

$$N = \frac{P\cdot r\cdot \pi\cdot n}{30\cdot 75} = \frac{M_d\cdot \pi\cdot n}{30\cdot 75};$$

daraus

$$M_d = \frac{30\cdot 75}{\pi}\cdot\frac{N}{n} = 716{,}2\cdot\frac{N}{n} \text{ in mkg}$$

oder

$$M_d = 71620\cdot\frac{N}{n} \text{ in cmkg}.$$

d) Das Prinzip von de Saint-Venant.

In einer Scheibe *1* (Abb. 169) werden $N = 7$ PS hineingeleitet und 7 PS von der Scheibe *2* abgenommen bei $n = 125$ Uml./min.

Die Welle ist von A bis *1* spannungslos, da nur Drehungsspannungen berücksichtigt werden sollen. Im Punkte *1* wird das volle Drehmoment

$$M_1 = 71620\cdot\frac{N}{n} = 71620\cdot\frac{7}{125} = \approx 4000 \text{ cmkg}$$

durch die Nabe in die Welle geleitet. Obwohl die Überleitung längs der der ganzen Nabe vor sich geht, nehmen wir an, daß M_1 im Punkte *1* von Null auf M_1 wächst. Wir begegnen hier der gleichen Schwierigkeit wie bei dem Entwurf der Querkraftflächen (S. 67), deren sprunghaftes Anwachsen schlecht vorstellbar war. Hier kommt noch hinzu, daß die Scheiben aufgekeilt werden und neben der Schwächung des Querschnittes örtliche Beanspruchungen auftreten, deren sichere Beurteilung zum mindesten sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich ist. Aber nicht um die Ermittlung des Spannungszustandes im Bereich der Nabe handelt es sich, sondern um die Beantwortung der Frage, wie weit durch die Art der Befestigung der Spannungszustand des freien Stabes beeinflußt wird. Letzten Endes haben wir es bei allen Belastungen mit ähnlichen Erscheinungen zu tun wie hier mit der aufgekeilten Scheibe Da ist es nun ein Hauptgrundsatz der Festigkeitslehre geworden, alle Berechnungen ohne Rücksicht auf die örtlichen Verhältnisse der Belastung durchzuführen. De Saint-Vernant hat um die Mitte des vorigen Jahrhunderts diese Annahme gemacht und als Grundsatz ausgesprochen. A. und O. Föppl geben in ihren „Grundzügen der Festigkeitslehre“[1]) diesem Satze folgende Form:

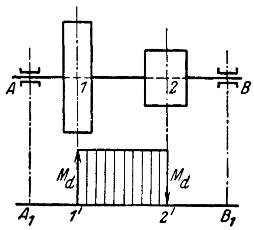


Abb. 169. Vorgelegewelle.

Wird an einem weithin ausgedehnten Körper innerhalb eines eng begrenzten Bezirkes eine Gruppe von äußeren Kräften angebracht, die allen Gleichgewichtsbedingungen zwischen Kräften an einem starren Körper genügt, so wird dadurch nur innerhalb des Bezirkes selbst, sowie in seiner unmittelbar angrenzenden Nachbarschaft ein merklicher Drang und Zwang (Spannung- und Formänderung) hervorgerufen, während alle weiter davon abliegenden Teile des Körpers nahezu drang- und zwangfrei bleiben.

Das „Prinzip von de Saint-Venant“ ermöglicht uns, die Belastung der Welle (Abb. 169) in einem Punkte anzunehmen. Da zwischen *1* und *2* keine Änderung des Zustandes eintritt, bleibt M_1 unveränderlich und muß im Punkte *2* gleich M_1 sein. Von *2* bis *B* ist die Welle wieder von Drehungspannungen frei.

e) Die zulässige Drehungspannung.

Es ist in Deutschland üblich, mit Rücksicht auf die unvermeidbaren Biegungsspannungen k_d sehr niedrig anzusetzen. Für Triebwerkwellen wird $k_d = 120$ kg/cm² gewählt. Mit diesem Wert erhalten wir als Durchmesser der Triebwerkwelle mit

$$W_p \geqq \frac{M_d}{k_d} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi d^3}{16} \geqq 71620 \cdot \frac{N}{120 \cdot n},$$

$$d \geqq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{71620}{120} \cdot \frac{N}{n}} = \approx 14{,}5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

[1]) Föppl, A. und O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. B. G. Teubner 1923.

Die Formänderung infolge der Verdrehung ist durch die Angabe des Winkels gekennzeichnet, um den sich zwei Querschnitte gegeneinander verdrehen. Der Endquerschnitt B (Abb. 167) verdreht sich gegen den Einspannquerschnitt A um den Winkel BOC, der im Bogen- oder Gradmaß gemessen wird. Nach der Begriffsfestsetzung der **Schiebung** (S. 13) war γ die Strecke, um die sich zwei Querschnitte im Abstande 1 gegeneinander verschieben; zwei l cm von einander entfernte Querschnitte verschieben sich um

$$\lambda = l \cdot \gamma; \quad \text{mit} \quad \gamma = \beta \cdot \tau \quad \text{wird} \quad \lambda = l \cdot \beta \cdot \tau.$$

Bei verschwindend kleinen Formänderungen ist aber λ gleich dem Bogen BC. Bezeichnet man den Verdrehungswinkel BOC mit φ, so ist

$$\widehat{BC} = \lambda = \varphi \cdot r.$$

Die Gleichsetzung beider Werte λ ergibt

$$\varphi = \frac{l}{r} \cdot \beta \cdot \tau \quad \text{oder mit} \quad \tau = \frac{M_d}{J_p} \cdot r,$$

$$\varphi = \frac{M_d \cdot l \cdot \beta}{J_p} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot l}{J_p}$$

im Bogenmaß gemessen,

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_d \cdot l \cdot \beta}{J_p} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot l}{J_p}$$

im Gradmaß gemessen.

Da bei beliebigen Entfernungen der betrachteten Querschnitte keine Vergleichsmöglichkeit besteht, ist man übereingekommen, den Verdrehungswinkel als Maß für die Größe der Formänderung anzusehen, um den sich zwei Querschnitte im Abstande $l = 1$ cm gegeneinander verschieben.

Wir bezeichnen ihn mit ϑ und erhalten

$$\vartheta = \frac{1}{G} \frac{M_d}{J_p}$$

im Bogenmaß gemessen,

$$\vartheta = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_d}{G J_p}$$

im Gradmaß gemessen.

Bei Triebwerkwellen pflegt man den Verdrehungswinkel nicht auf die Länge 1 cm, sondern auf die Länge $l = 100$ cm zu beziehen; wir bezeichnen diesen Winkel mit φ_0. Es ist dann

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{1}{G} \frac{M_d \cdot 100}{J_p} \quad \text{in } {}^\circ/\text{m}.$$

Für **Triebwerkwellen** soll im deutschen Maschinenbau $\varphi_0 \leqq \frac{1}{4}\,{}^\circ/\text{m}$ sein. Diese Forderung liefert mit

$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ und $G = 800\,000$ kg/cm² (Wellenstahl)

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{800\,000} \cdot \frac{M_d \cdot 100 \cdot 32}{\pi \cdot d^4} \leqq \frac{1}{4},$$

$$d = 0{,}734 \cdot \sqrt[4]{M_d} = \approx 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

wobei d in cm einzusetzen ist. Auf Grund der letzten Gleichung ist die nachstehende Tafel berechnet worden.

Triebwerkwellen d mm.

N in PS	Minutliche Umlaufzahl n														
	40	60	80	100	120	140	160	180	200	225	250	275	300	350	400
1	50	45	45	40	40	35	35	35	35	35	35	30	30	30	30
2	60	55	50	50	45	45	40	40	40	40	40	35	35	35	35
3	65	60	55	50	50	50	45	45	45	45	45	40	40	40	40
4	70	65	60	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45	40	40
5	75	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45
6	75	70	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	50	45	45
7	80	75	70	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50	45
8	85	75	70	65	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50
9	85	75	70	70	65	65	60	60	60	55	55	55	50	50	50
10	85	80	75	70	65	65	60	60	60	55	55	55	55	50	50
11	90	80	75	70	70	65	65	60	60	60	55	55	55	55	50
12	90	85	75	75	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55	50
13	95	85	80	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55
14	95	85	80	75	75	70	70	65	65	60	60	60	60	55	55
15	95	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55
16	100	90	85	80	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60	55
17	100	90	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55
18	100	90	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60
19	100	90	85	80	80	75	75	70	70	65	65	65	65	60	60
20	105	95	85	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60
25	110	100	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65	60
30	115	105	95	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65
35	120	105	100	95	90	85	85	80	80	80	75	75	75	70	70
40	120	110	105	100	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70	70
45	125	115	105	100	95	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70
50	130	115	110	105	100	95	90	90	85	85	85	80	80	75	75
55	130	120	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	80	75
60	135	120	115	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	75
65	140	125	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80	80
70	140	125	120	110	105	105	100	95	95	90	90	90	85	85	80
75	145	130	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80
80	145	130	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85	85
85	145	135	125	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85
90	150	135	125	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85
95	150	135	130	120	115	110	110	105	100	100	95	95	90	90	85
100	155	140	130	120	115	115	110	105	105	100	100	95	95	90	85

Zahlenbeispiele. 1. Die Vorgelegewelle (Abb. 169) erfährt als größtes Drehmoment

$$M_{d_{\max}} = M_1 = \approx 4000 \text{ cmkg}.$$

$k_d = 120 \text{ kg/cm}^2$ erfordert

$$W_p \geq \frac{4000}{120} = 33{,}3 \text{ cm}^3.$$

In die Tafel auf S. 85 gehen wir mit $W = \frac{1}{2} W_p = \approx 17\ \mathrm{cm}^3$ und finden als nächsthöheren Wert

$$d = 60\ \mathrm{mm}\ \text{mit}\ W_p = 2 \cdot 21{,}21 = 42{,}4\ \mathrm{cm}^3\,.$$

Für diesen Querschnitt wird $\tau_{\max} = \frac{4000}{42{,}4} = \approx 94\ \mathrm{kg/cm}^2$. Bei der endgültigen Entscheidung über den zu wählenden Durchmesser sind die *DJ*-Normen maßgebend.

Als verhältnismäßigen Verdrehungswinkel erhalten wir

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{800000} \cdot \frac{4000 \cdot 100}{2 \cdot 63{,}62} = 0{,}23\ ^\circ/\mathrm{m}\,.$$

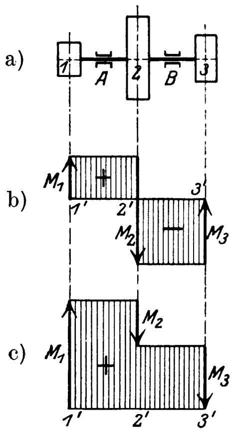


Abb. 170. Triebwerkwelle.

2. Die Triebwerkwelle (Abb. 170). Im Punkte *2* werden $N_2 = 100$ PS bei $n = 175$ Uml/min hineingeleitet und im Punkte *1* $N_1 = 40$ PS, im Punkte *3* $N_3 = 60$ PS entnommen.

Die Welle überträgt zwischen *1* und *2* ein Drehmoment

$$M_1 = 71620 \cdot \frac{N_1}{n} = 71620 \cdot \frac{40}{175} = 16400\ \mathrm{cmkg}\,,$$

das wir mit Hilfe eines Momentenmaßstabes von einer Wagerechten aus abtragen. Nehmen wir an, daß dieses Moment linksdrehend sei, so dreht

$$M_2 = 71620 \cdot \frac{N_2}{n} = 71620 \cdot \frac{100}{175} = 41000\ \mathrm{cmkg}$$

rechts herum, also entgegengesetzt. Da wir das linksdrehende Moment M_1 nach oben abgetragen haben, müssen wir das rechtsdrehende Moment M_2 nach unten abtragen. Unmittelbar links von *2* ist $M_d = M_1$, unmittelbar rechts von *2* ist $M_d = M_1 - M_2$. Diese Differenz ist negativ, weil $M_2 > M_1$ ist. Da zwischen *2* und *3* kein weiteres Moment hinzutritt, bleibt die Drehmomentlinie parallel zur Wagerechten. Ihre Ordinate in *3* muß gleich

$$M_3 = 71620 \cdot \frac{N_3}{n} = 71620 \cdot \frac{60}{175} = 24600\ \mathrm{cmkg}$$

sein, die wieder nach oben abzutragen ist, weil M_3 ebenso wie M_1 linksdrehend ist.

Dem Aufbau nach entspricht die Drehmomentfläche der Querkraftfläche eines Trägers auf zwei Stützen, der eine Einzellast trägt (Abb. 74). Ebenso wie sich diese Einzellast auf die Stützen verteilt, wird im vorliegenden Falle das Drehmoment M_2 von den Scheiben *1* und *3* aufgenommen.

Der M_d-Fläche (Abb. 170b) entnehmen wir als größtes, der Querschnittsbemessung zugrunde zu legendes Moment

$$M_{d_{\max}} = M_3 = 24600\ \mathrm{cmkg}\,,$$

das mit $k_d = 120\ \mathrm{kg/cm}^2$ ein erforderliches Widerstandsmoment

$$W_p = \frac{24600}{120} = 205\ \mathrm{cm}^3$$

liefert, dem laut Zahlentafel auf S. 85 ein Durchmesser $d = 105$ mm entspricht bei $W_p = 2 \cdot 113{,}65 = 227{,}3\ \mathrm{cm}^3$, so daß

$$\tau_{\max} = \frac{24600}{227{,}3} = 108\ \mathrm{kg/cm}^2$$

wird.

Als verhältnismäßigen Verdrehungswinkel erhalten wir

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot 100}{J_p} = \frac{180^\circ \cdot 24600 \cdot 100}{\pi \cdot 800000 \cdot 2 \cdot 596{,}7} = \approx 0{,}15\ ^\circ/\mathrm{m}\,.$$

Ungünstiger werden die Verhältnisse, wenn wir die Gesamtleistung von 100 PS in die Scheibe *1* hineinleiten und 40 PS, bzw. 60 PS den Scheiben *2* und *3* entnehmen. Mit den gleichen Werten $M_1 = 41000$ cmkg; $M_2 = 16400$ cmkg; $M_3 = 24600$ cmkg erhalten wir die Drehmomentenfläche der Abb. 170c, die $M_1 = 41000$ cmkg als größtes Drehmoment zeigt. Aus

$$M_d = W_p \cdot k_d \text{ folgt } W_p \geq \frac{M_d}{k_d} = \frac{41000}{120} = 342 \text{ cm}^3$$

als erforderliches polares Widerstandsmoment, zu dem als abgerundeter Durchmesser $d = 125$ mm gehört mit $W_p = 2 \cdot W = 2 \cdot 191{,}7 = 383{,}4$ cm³ und $J_p = 2 \cdot J = 2 \cdot 1198 = 2396$ cm⁴. Die Randspannung wird

$$\tau_{\max} = \frac{M_d}{W_p} = \frac{41000}{383{,}4} = 108 \text{ kg/cm}^2,$$

der verhältnismäßige Verdrehungswinkel

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot 100}{J_p} = \frac{180^\circ \cdot 41000 \cdot 100}{\pi \cdot 800000 \cdot 2396} = \approx 0{,}12\ ^\circ/\mathrm{m}\,.$$

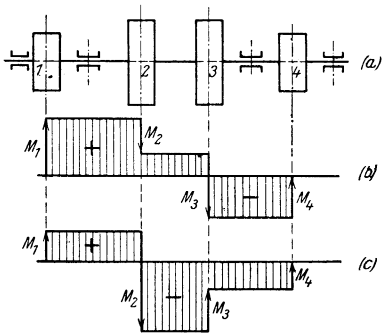


Abb. 171. Triebwerkwelle.

3. Abb. 171 zeigt eine Triebwerkwelle mit vier Scheiben; in die Scheiben *1* und *4* werden die Leistungen N_1 und N_4 PS eingeleitet, die Leistungen N_2 und N_3 in *2* und *3* entnommen. Die Drehmomentenfläche ergibt das Bild Abb. 171b. Wird in Scheibe *2* die ganze Leistung eingeleitet und in den Scheiben *1, 3, 4* abgenommen, so ergibt sich das Bild 171c. Das größte Drehmoment ist gleich der größten Ordinate der M_d-Fläche; in Abb. 171b wird $M_{d_{\max}} = M_1$; in Abb. 171c wird $M_{d_{\max}} = M_2 - M_1 = M_3 + M_4$.

f) Zeichnerische Bestimmung der Verdrehungswinkel.

Wir betrachten zwei Querschnitte im Abstande dx von einander (Abb. 172) und denken uns die M_d-Linien bereits entworfen. Dann sehen wir die Querschnitte *I* und *II* um den Winkel φ, die Querschnitte *II* und *III* um den Winkel $d\varphi$ gegeneinander verschoben. Aus

$$\overline{C_1 C_2} = \widehat{C_1 C_2} \quad \text{folgt} \quad \gamma \cdot dx = r \cdot d\varphi\,,$$

also

$$d\varphi = \frac{\gamma \cdot dx}{r} = \frac{\beta \cdot \tau \cdot dx}{r} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d}{W_p} \cdot \frac{dx}{r}\,.$$

Mit

$$W_p \cdot r = J_p \quad \text{und} \quad \varphi = \int_0^x d\varphi$$

geht unsere Gleichung über in

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \cdot \int_0^x M_d \cdot dx$$

im Bogenmaß und

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G \cdot J_p} \int_0^x M_d \cdot dx$$

im Gradmaß.

Hierin ist $M_d \cdot dx$ ein Flächenstreifen der Momentenfläche, also $\int_0^x M_d \cdot dx$ gleich dem Inhalt der zwischen den fraglichen Querschnitten I und II liegenden Drehmomentenfläche. Überträgt man M_d wagerecht auf eine Senkrechte ss (Abb. 172) und wählt einen Punkt O als Pol mit der Polweite H, so erhält man in den Abschnitten η, die von einer Parallelen II' zu dem Polstrahl II und von der Wagerechten I' abgeschnitten werden, ein Maß für die Größe der Verdrehung. Die Ähnlichkeit der Dreiecke O 12 und A 1′2′ zeigt

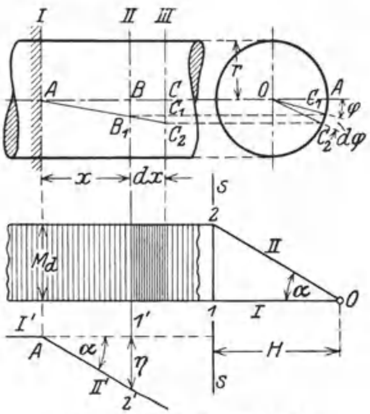


Abb. 172. Verdrehungswinkel.

$$\eta : x = M_d : H \quad \text{oder} \quad M_d \cdot x = H \cdot \eta .$$

Der Verdrehungswinkel φ der Querschnitte I und II ist

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \cdot H \cdot \eta$$

im Bogenmaß,

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G \cdot J_p} \cdot H \cdot \eta$$

im Gradmaß.

Die Maßstäbe der zeichnerischen Darstellung sind Längen 1 mm = a cm; Momente 1 mm = b cmkg; damit

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \cdot H \,\text{mm} \cdot \frac{b\,\text{cmkg}}{1\,\text{mm}} \cdot \eta\,\text{mm} \cdot \frac{a\,\text{cm}}{1\,\text{mm}} .$$

Als Maß für den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel erhalten wir die Neigung des Strahles II', denn aus

$$\varphi_0 = \frac{100\,\varphi}{x} \quad \text{folgt} \quad \varphi_0 = \frac{100\,H}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\eta}{x} ,$$

und $\eta : x$ ist gleich $\operatorname{tg} \alpha$ (Abb. 172).

g) Angenäherte Berechnung bei veränderlichem Querschnitt.

Hat der Stab veränderlichen, aber kreisförmigen Querschnitt (Abb. 173), so treten innerhalb eines allerdings eben bleibenden Querschnittes Verzerrungen auf, derart, daß jeder Radius eine Krümmung erfährt, weil konzentrische Kreise im Abstande ϱ verschieden große Verdrehungswinkel haben. In erster Annäherung läßt sich die Verdrehung einer Welle mit veränderlichem Querschnitt unter der Annahme bestimmen, daß alle Kreise ϱ denselben Verdrehungswinkel haben. Mit den Bezeichnungen der Abb. 173 wird dann

$$d\lambda = \gamma \cdot dx = y \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{\gamma}{y} \cdot dx = \frac{\beta \cdot \tau}{y} \cdot dx\,.$$

Ist M_x das Drehmoment im Punkte x; J_x das zugehörige polare Trägheitsmoment; W_x das dem J_x entsprechende polare Widerstandsmoment, so wird mit

$$\tau = \frac{M_x}{W_x}; \quad \beta = \frac{1}{G} \quad \text{und} \quad W_x \cdot y = J_x$$

$$\varphi = \frac{1}{G} \int\limits_0^x \frac{M_x}{J_x} \cdot dx$$

im Bogenmaß oder

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \int\limits_0^x \frac{M_x}{J_x}\, dx$$

im Gradmaß.

$M_x : J_x = k$ ist die Ordinate einer $(M:J)$-Fläche, die man erhält, wenn man die Ordinaten M_x der Drehmomentenfläche in Zentimeterkilogramm durch die zugehörigen polaren Trägheitsmomente dividiert. Das Integral ist gleich dem Inhalt dieser $(M:J)$-Fläche; die Kurve $\varphi = f(x)$ ist Integrallinie zu der $(M:J)$-Linie. Mit H als Polweite, η als Ordinate der Seillinien im Punkte x wird

$$\varphi = \frac{1}{G} \cdot H \cdot \eta$$

im Bogenmaß.

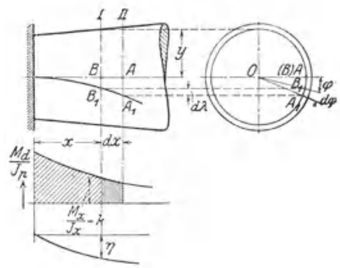


Abb. 173. Veränderlicher Querschnitt.

Die Maßstäbe lauten: Längen 1 mm $= a$ cm; Momente 1 mm $= b$ cmkg; $(M:J)$-Fläche 1 mm $= c\,\text{kgcm}^{-3}$; demnach

$$\varphi = \frac{1}{G} \cdot H\,\text{mm} \cdot \frac{c\,\text{kg cm}^{-3}}{1\,\text{mm}} \cdot \eta\,\text{mm} \cdot \frac{a\,\text{cm}}{1\,\text{mm}}$$

im Bogenmaß.

Zahlenbeispiel. Die Verdrehung der Welle (Abb. 174) ist angenähert zu bestimmen bei einer zulässigen Drehungsspannung $k_d = 135\,\text{kg/cm}^2$. Die Einzelmomente werden

$$M_1 = 71\,620 \cdot \frac{N_1}{n} = 71\,620 \cdot \frac{55}{130} = 30\,300\,\text{cmkg},$$

$$M_2 = 71\,620 \cdot \frac{N_2}{n} = 71\,620 \cdot \frac{95}{130} = 52\,300\,\text{cmkg},$$

$$M_3 = 71\,620 \cdot \frac{N_3}{n} = 71\,620 \cdot \frac{40}{130} = 22\,000\,\text{cmkg}.$$

Die Drehmomentenfläche zeigt $M_1 = 30\,300$ cmkg als größtes Drehmoment, das ein polares Widerstandsmoment

$$W_p \geqq \frac{M_d}{k_d} = \frac{30\,300}{135} = 224 \text{ cm}^3$$

erfordert. Zu $W = \frac{1}{2} W_p = 112 \text{ cm}^3$ gehört nach der Tafel auf S. 85 $d = 105$ mm mit $W_p = 2 \cdot 113{,}7 = 227{,}4 \text{ cm}^3$. Als größte Randspannungen erhalten wir

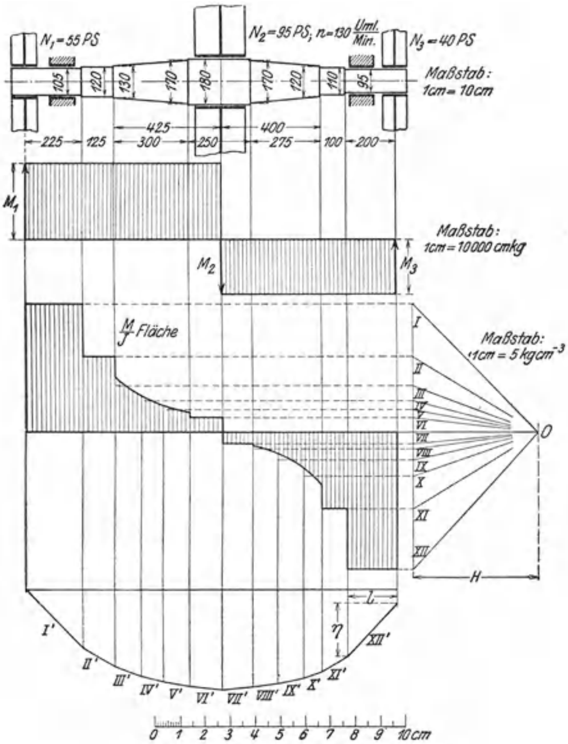


Abb. 174. Verdrehung einer Welle.

im linken Auflager

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_1} = \frac{30\,300}{227{,}4} = 133 \text{ kg/cm}^2,$$

im rechten Auflager

$$\tau_3 = \frac{M_3}{W_3} = \frac{22\,000}{2 \cdot 84{,}2} = 131 \text{ kg/cm}^2.$$

Die $(M : J)$-Linie ist punktweise berechnet; innerhalb des kegligen Teiles ist sie eine hyperbolische Kurve 5. Grades entsprechend der Gleichung

$$k = \frac{M}{J_p} = \frac{M \cdot 32}{\pi \cdot d^4},$$

in der M für den fraglichen Teil unveränderlich ist. Es genügt für das Aufzeichnen der Linie, einige Zwischenpunkte zu bestimmen. Den von der krummen $(M : J)$-Linie begrenzten Teil der $(M : J)$-Fläche zerlegen wir in Streifen, die wir nach Augenmaß in inhaltgleiche Rechtecke verwandeln, deren Höhen auf die Senkrechte übertragen werden. Zu den rechnerisch ermittelten Ordinaten der $(M : J)$-Fläche entwerfen wir mit der Polweite H das Kraft- und Seileck und entnehmen der Zeichnung als steilsten Seilstrahl den Strahl XII', der die größte verhältnismäßige Verdrehung

$$\varphi_0 = \frac{100}{20} \cdot \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{1}{800\,000} \cdot 50 \text{ mm} \cdot \frac{0{,}5 \text{ kgcm}^{-3}}{1 \text{ mm}} \cdot 21{,}5 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ mm}} = 0{,}192\,°/\text{m}$$

ergibt. Auch jede andere Verdrehung zweier Querschnitte ist durch die Kurve $\eta = f(x)$ mitbestimmt. Z. B. verdreht sich Scheibe *1* gegen Scheibe *2* um

$$\varphi_{1,2} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{1}{800\,000} \cdot 50 \text{ mm} \cdot \frac{0{,}5 \text{ kgcm}^{-3}}{1 \text{ mm}} \cdot 40 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ mm}} = 0{,}072\,°/\text{m}.$$

Beträchtliche Werte erreicht der Verdrehungswinkel bei den Spindeln der Bohrmaschine. Nach Messungen von Prof. Schlesinger[1])

[1]) Schlesinger, G.: Bohrmaschinen. Werkst. Techn. 1923, 15. Juli, H. 14.

hatte die Spindel der Type 21 IV E der Ludwig Loewe-A.-G. mit Bohrkegel Morse 5 bei 9 PS Kraftbedarf und 50 mm Bohrerdurchmesser einen Verdrehungswinkel von 1^0. Die Spindel der Type HTS von Blau & Co. mit Bohrkegel Morse 4 bei 6 PS und 50 mm Bohrerdurchmesser zeigte sogar $1^0\,50'$ Verdrehung. Infolge des durch den Schnittwiderstand auftretenden Drehmomentes werden auch die Spiralbohrer selbst verdreht; da ihr Querschnitt durch die Nuten stark geschwächt ist, federn sie im Betriebe auf.

2. Der beliebig geformte Querschnitt.

Nachdem die Haltlosigkeit der alten Navierschen Annahme vom Ebenbleiben beliebig geformter Querschnitte nachgewiesen war, fand in neuerer Zeit die strenge Theorie von de Saint-Venant allgemeine Aufnahme, für die in Deutschland namentlich A. Föppl eingetreten ist. Hand in Hand mit dem Ausbau der Theorie gingen die Versuche, die Bauschinger, Föppl, Bach u. a. angestellt haben. Das reiche Versuchsmaterial von Bach ist in seinem grundlegenden Werke: „Elastizität und Festigkeit“ veröffentlicht[1]) und sollte von jedem Ingenieur, der Festigkeitsfragen zu beantworten hat, eingehend studiert werden.

In der Lehre von der Verdrehung folgen wir dem Altmeister der theoretischen Festigkeitslehre, August Föppl, der als Nachfolger von Bauschinger den Lehrstuhl für Mechanik an der Technischen Hochschule München inne hatte.

Betrachtet wird ein Stab, an dessen Enden zwei gleichgroße, entgegengesetzte Kräftepaare angreifen, wie es Abb. 166 zeigt. Entsprechend dem Falle der reinen Biegung (S. 99) haben wir es hier mit einer reinen Verdrehung zu tun, da wegen der Ausgeglichenheit der Belastung die Auflagerdrucke gleich Null werden (abgesehen vom Eigengewicht, das nicht berücksichtigt werden soll), so daß keine Biegung in den Stab kommt. Wir schneiden in I den Stab durch und bringen die Spannungen im Schnitt als äußere Kräfte an, deren Moment gleich dem des angreifenden Kräftepaares sein muß. Dem links drehenden Moment $P \cdot D$ des linken abgetrennten Teiles müssen die als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen des linken Querschnittes I widerstehen; dem rechts drehenden Moment $P \cdot D$ des rechten abgetrennten Teiles P müssen die als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen des rechten Querschnittes I widerstehen; im Schnitt werden demnach nur Schubspannungen übertragen, und gleich weit von der Mittelebene entfernt liegende Querschnitte erfahren gleiche Spannungen. An den Stellen, wo die Scheiben aufgekeilt sind, liegen die Verhältnisse anders. Einmal kann das Drehmoment der äußeren Kräfte nicht plötzlich in die Welle geleitet werden, sodann treten durch die Befestigung der Scheiben zusätzliche Spannungen auf, die sich der sicheren Beurteilung entziehen. Auf alle Fälle dürfen wir aber mit de Saint-Venant an-

[1]) Bach-Baumann: Elastizität und Festigkeit. 9. Aufl. Berlin: Julius Springer 1923.

nehmen (S. 224), daß in einiger Entfernung von den Scheiben der oben angenommene Zustand gleicher Beanspruchung in allen Schnitten des zwischen den Scheiben liegenden Hauptteiles der Welle gewährleistet ist. Streng genommen gelten die Ergebnisse der Untersuchung nur für diesen Teil des Stabes.

a) Die Hauptgleichung der strengen Theorie der Verdrehung.

Unser räumliches Achsenkreuz denken wir von der linken Scheibe genügend weit entfernt und legen die x-Achse in die Stabachse (Abb. 175). Die Versuche zeigen, daß der Anfangsquerschnitt zwar keine Drehung gegen das Achsenkreuz erfährt, wohl aber eine Krümmung. Ein Punkt $P(y, z)$ dieses Anfangsquerschnittes verschiebt sich um den Betrag ξ in Richtung der x-Achse, tritt also aus dem nicht

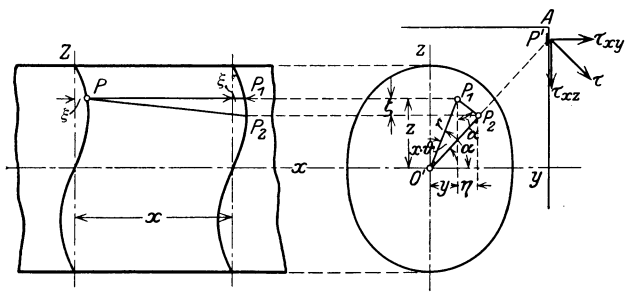


Abb. 175. Verwundener Querschnitt.

verformten Querschnitt heraus. Die Krümmungsfläche ist durch die Gleichung

$$\xi = f(y, z) \tag{a}$$

bestimmt. Um den gleichen Betrag verschiebt sich ein gleich liegender Punkt P_1 eines zweiten Querschnittes im Abstande x vom Anfangsquerschnitt (Abb. 175). Infolge der Verdrehung des zweiten gegen den ersten Querschnitt gelangt P_1 in der Lage P_2. Man pflegt den auf die Längeneinheit (1 cm) bezogenen Verdrehungswinkel mit ϑ zu bezeichnen, dann ist Querschnitt II gegen Querschnitt I um $x \cdot \vartheta$ verdreht. Der Punkt P_1 beschreibt den Kreisbogen $P_1 P_2$, dessen Zentriwinkel $x \cdot \vartheta$ ist; seine Länge ist $r \cdot x \cdot \vartheta$, die wir als verschwindend klein gegen r anzunehmen haben. Die Seitenverschiebungen in Richtung der y- und z-Achse sind

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \quad P_1 P_2 \cdot \sin\alpha = + r \cdot x \cdot \vartheta \cdot \sin\alpha = + \vartheta \cdot x \cdot z \\ \zeta &= - P_1 P_2 \cdot \cos\alpha = - r \cdot x \cdot \vartheta \cdot \cos\alpha = - \vartheta \cdot x \cdot y \end{aligned}\right\}, \tag{b}$$

wenn wir beachten, daß sich das Achsenkreuz II gegen I nicht dreht und deshalb $r \cdot \sin\alpha = z$ und $r \cdot \cos\alpha = y$ ist. Sind ξ (Gleichung a) und ϑ (Gleichung b) bekannt, so ist die Formänderung, die der Stab bei der Verdrehung erfährt, vollständig beschrieben und die Angabe der Spannungen durch die Beziehung $\beta = \gamma \cdot \tau$ möglich.

Die Bewegung, die der Punkt P_1 ausführt, ist eine Schiebung; die Bewegungsrichtung steht senkrecht auf dem Halbmesser r. Demzufolge wird auch die Schubspannung τ senkrecht zum Halbmesser r gerichtet sein. Das trifft zu, solange nur die Gleichungen (b) maßgebend sind, d. h. wegen $\xi = 0$ die Querschnitte eben bleiben. Wohin wir kommen, wenn wir willkürlich $\xi = 0$ setzen, zeigt die Betrachtung des Punktes P', den wir als Punkt einer rechteckförmigen Umrißlinie des Querschnittes annehmen wollen. Angenommen, τ stünde senkrecht auf $O'P'$, dann können wir es in τ_{xy} parallel zur y-Achse und τ_{xz} parallel zur z-Achse zerlegen. Ein Körperteilchen, das wir so herausgeschnitten denken, daß eine Begrenzungsfläche mit der Staboberfläche zusammenfällt, kann aber in dieser Begrenzungsfläche keine Spannungen übertragen, weil kein angrenzendes Körperteilchen vorhanden ist. Es muß also τ_{xy} und damit nach Gleichung (F) S. 218 auch τ_{yx} gleich Null sein. Folglich kann τ nicht auf dem Durchmesser senkrecht stehen, und daher kann der rechteckförmige Querschnitt nicht eben bleiben. Übrig bleibt lediglich τ_{xz} als einzige Spannung, die am Rande des Querschnitts auftritt und tangential gerichtet ist. Die sich aus diesem Gedankengang ergebende Bedingung für die Randspannungen lautet: Am Querschnittsumfang sind die Schubspannungen tangential gerichtet. Aus diesem Grundsatz folgt unmittelbar, daß im Eckpunkt A (Abb. 175) keine Schubspannungen auftreten können.

Da unsere Gleichung (a) ξ in Abhängigkeit von y und z zeigt, ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{und mit} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon_x \quad \text{auch} \quad \varepsilon_x = 0\,.$$

Aus der Gleichung (b) folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \text{weil } \eta \text{ lediglich von } x \text{ und } z \text{ abhängig ist,}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad \text{,,} \quad \zeta \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad x \quad \text{,,} \quad y \quad \text{,,} \quad \text{,,}\,;$$

infolge $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \varepsilon_y$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varepsilon_z$ werden auch ε_y und ε_z gleich Null. Sind aber die Dehnungen gleich Null, so sind nach dem Geradliniengesetz von Hooke auch die Spannungen gleich Null, d. h.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0\,.$$

Mit anderen Worten: Normalspannungen können in dem Stabe nicht auftreten.

Ersetzen wir in Gleichung (D) auf S. 218

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} \text{ durch } + x \cdot \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} \text{ durch } - x \cdot \vartheta\,,$$

so wird

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = + x \cdot \vartheta - x \cdot \vartheta = 0\,;$$

infolge $\gamma = \beta \cdot \tau$ wird auch $\tau_{yz} = 0$.

Die erste Gleichung (F) auf S. 218

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

liefert mit

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial(+x \cdot z \cdot \vartheta)}{\partial x} = +z \cdot \vartheta$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + z \cdot \vartheta\right). \tag{c}$$

Die zweite Gleichung (F) auf S. 218

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

liefert mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial(-x \cdot y \cdot \vartheta)}{\partial x} = -y \cdot \vartheta$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - y \cdot \vartheta\right). \tag{d}$$

Setzen wir in die erste unserer Gleichungen (A) auf S. 218

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$\sigma_x = 0$, so erhalten wir

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$

Aus

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + z \cdot \vartheta\right)$$

folgt durch partielle Differentiation nach y

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

und aus

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - y \cdot \vartheta\right)$$

folgt durch partielle Differentiation nach z

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = G \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0. \tag{e}$$

Diese Gleichung bezeichnet A. Föppl als Hauptgleichung der strengen Theorie der Verdrehung.

Sie ist die Differentialgleichung der krummen Fläche, in die der ebene Querschnitt bei der Verdrehung übergeht, und hat unendlich viele Lösungen. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die allgemeine

Lösung den besonderen Grenzbedingungen anzupassen. Als Randbedingung haben wir S. 235 die Bedingung aufgestellt, daß die Schubspannungen an der Oberfläche des Stabes tangential verlaufen müssen. Ist

$$z = f(y)$$

die Gleichung der Umrißlinie des Querschnittes, so besagt unsere Bedingung, daß τ in die Richtung der Tangente an die Kurve $z = f(y)$ fallen muß. Durch die Seitenspannungen τ_{xy} und τ_{xz} ist die Richtung von τ bestimmt, andrerseits durch $\frac{dz}{dy}$ die Richtung der Tangente, so daß wir erhalten

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy}$$

oder mit Benutzung der Gleichungen für τ_{xz} und τ_{xy} auf S. 236

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - y \cdot \vartheta}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + z \cdot \vartheta} = \frac{dz}{dy}. \tag{f}$$

Damit haben wir eine Bedingungsgleichung, der ξ an allen Punkten der Umrißlinie des Querschnittes zu genügen hat.

Wir benutzen unsere Gleichungen zunächst dazu, um nachzuweisen, daß kreisförmige Querschnitte eben bleiben. Danach müßte ξ von y und z nur in der ersten Potenz abhängig sein:

$$\xi = f(y, z) = a_1 \cdot y + a_2 \cdot z.$$

Die Differentiation nach y liefert

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = a_1 \text{ und } \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0;$$

die Differentiation nach z liefert

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = a_2 \text{ und } \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0,$$

also ist die Differentialgleichung (e) erfüllt. Ferner muß ξ der Gleichung (f) genügen, wenn die Mantelfläche frei von äußeren Kräften ist. Setzen wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = a_2 \text{ und } \frac{\partial \xi}{\partial y} = a_1$$

in Gleichung (f) ein, so erhalten wir

$$\frac{a_2 - y \cdot \vartheta}{a_1 + z \cdot \vartheta} = \frac{dz}{dy} \text{ oder } a_2 \cdot dy - \vartheta \cdot y \cdot dy = a_1 \cdot dz + \vartheta z \cdot dz,$$

die durch Integration

$$a_2 y - \frac{\vartheta}{2} \cdot y^2 = a_1 z + \frac{\vartheta}{2} z^2 + C$$

ergibt. Geordnet erhalten wir

$$y^2 - 2 \cdot \frac{a_2}{\vartheta} \cdot y + z^2 + 2 \cdot \frac{a_1}{\vartheta} z = -C$$

oder

$$y^2 - 2 \cdot \frac{a_2}{\vartheta} \cdot y + \left(\frac{a_2}{\vartheta}\right)^2 + z^2 + 2 \cdot \frac{a_1}{\vartheta} \cdot z + \left(\frac{a_1}{\vartheta}\right)^2 = -C + \left(\frac{a_2}{\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{\vartheta}\right)^2$$

$$\left(y - \frac{a_2}{\vartheta}\right)^2 + \left(z + \frac{a_1}{\vartheta}\right)^2 = C'.$$

Das ist aber die Gleichung eines Kreises. Damit ist der Beweis erbracht, daß alle Punkte eines kreisförmigen Querschnittes auch nach der Verdrehung Punkte einer Ebene sind.

Der elliptische Querschnitt. Da unsere Gleichung (e) beliebig viele Lösungen hat, erhält man ebenso viele mögliche Spannungszustände. Damit ein möglicher Spannungszustand zum wirklichen wird, müssen die Randbedingungen der Gleichung (f) erfüllt sein. Es ist sehr viel einfacher, irgend eine Lösung der Gleichung (e) anzunehmen und daraus die Gleichung der Umrißlinie zu ermitteln, als umgekehrt den Umriß so festzulegen, daß Gleichung (f) befriedigt wird.

Die einfachste Form der Lösung von (e) ist

$$\xi = \frac{y \cdot z}{c}.$$

Durch Differentiation nach y erhalten wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{z}{c} \text{ und } \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0;$$

durch Differentiation nach z erhalten wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{y}{c} \text{ und } \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0,$$

so daß Gleichung (e) tatsächlich erfüllt ist. Das Einsetzen der partiellen Differentialquotienten in Gleichung (f) liefert

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - \vartheta \cdot y}{\frac{\partial \xi}{y} + \vartheta \cdot z} = \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{y}{c} - \vartheta y}{\frac{z}{c} + \vartheta z}$$

oder

$$\frac{1}{c} \cdot y\, dy - \vartheta \cdot y\, dy = \frac{1}{c} \cdot z\, dz + \vartheta \cdot z \cdot dz,$$

woraus durch Integration

$$\frac{y^2}{2c} - \frac{y^2 \cdot \vartheta}{2} = \frac{z^2}{2c} + \frac{z^2 \cdot \vartheta}{2} + C$$

oder

$$y^2\left(\vartheta - \frac{1}{c}\right) + z^2\left(\vartheta + \frac{1}{c}\right) = C'$$

folgt. Das ist aber die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse. Wählen wir demnach einen elliptisch geformten Querschnitt, so können wir durch den Ansatz

$$\xi = \frac{y \cdot z}{c}$$

die Gestalt der krummen Fläche, in die die ebenen Querschnitte bei der Verdrehung übergehen, ermitteln und sind in der Lage, auch den Spannungszustand zu beschreiben. Als Schubspannungskomponenten erhalten wir mit

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{z}{c} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{y}{c}$$

nach Gleichung (c) und (d)

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \vartheta \cdot z\right) = G \cdot z\left(\frac{1}{c} + \vartheta\right) \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \vartheta \cdot y\right) = G \cdot y\left(\frac{1}{c} - \vartheta\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die Gleichungen zeigen eine lineare Abhängigkeit der Seitenspannungen von z und y.

Wir wenden unsere Ergebnisse auf den elliptischen Querschnitt der Abb. 176 an, dessen Umrißlinie der Gleichung

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

gehorcht. Im Punkte P (y, z) hat die Tangente die Steigung

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{z},$$

es ist also, weil die Randspannung τ tangential gerichtet ist,

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = +\frac{dz}{dy} = -\frac{b^2 y}{a^2 z}. \qquad (2)$$

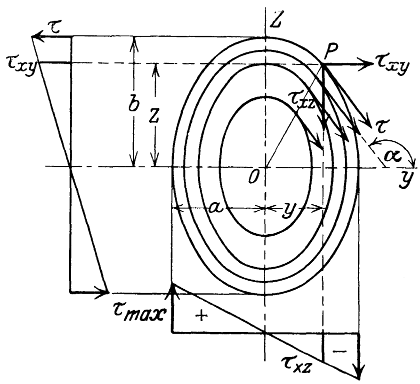


Abb. 176. Elliptischer Querschnitt.

Weil nun τ_{xy} und τ_{xz} linear von z und y abhängen, so muß

$$\tau_{xy} = k \cdot a^2 z \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = -k \cdot b^2 \cdot y$$

sein, worin k ein unveränderlicher Faktor ist. Zur Bestimmung des Festwertes k denken wir daran, daß das statische Moment der als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen gleich dem angreifenden Drehmoment M sein muß. Ein Flächenteilchen dF [cm^2] überträgt $\tau \cdot dF$ [kg], mit dem Hebelarm z der Seitenspannung τ_{xy} und dem Hebelarm y der Seitenspannung τ_{xy}. Wir erhalten für den Mittelpunkt O als Momentendrehpunkt

$$\begin{aligned} dM &= \tau_{xy} \cdot dF \cdot z - \tau_{xz} \cdot dF \cdot y, \\ &= ka^2 z \cdot dF \cdot z + kb^2 y \cdot dF \cdot y \end{aligned}$$

und durch Integration, die sich über den ganzen Querschnitt erstrecken muß,

$$M = ka^2 \int dF \cdot z^2 + kb^2 \int dF \cdot y^2.$$

Die Integrale sind aber die axialen Trägheitsmomente des elliptischen Querschnitts und nach S. 82

$$\int dF \cdot y^2 = \frac{\pi}{4} b a^3 \quad \text{und} \quad \int dF \cdot z^2 = \frac{\pi}{4} a b^3,$$

demnach ist

$$M = k a^2 \cdot \frac{\pi}{4} b^3 a + k b^2 \cdot \frac{\pi}{4} b a^3,$$

$$M = \frac{\pi}{2} k a^3 b^3; \quad \text{daraus} \quad k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3}.$$

Die Randspannung τ erhalten wir aus

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

zu

$$\tau = k \cdot \sqrt{a^4 z^2 + b^4 y^2}.$$

Die Ellipsengleichung liefert

$$a^2 z^2 = a^2 b^2 - b^2 y^2, \quad \text{also} \quad a^4 z^2 = a^4 b^2 - a^2 b^2 y^2.$$

Demnach ist

$$\tau = k \cdot \sqrt{a^4 b^2 - a^2 b^2 y^2 + b^4 y^2}$$

oder

$$\tau = k \cdot b \sqrt{a^4 + y^2 (b^2 - a^2)}.$$

Der absolut größte Wert von τ wird da auftreten, wo y^2 seinen größten Wert erreicht, d. h. für $y = \pm a$; die größte Schubspannung herrscht an den Endpunkten der kleinen Achse und ist

$$\tau_{\max} = k \cdot a b^2 \quad \text{oder} \quad \tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}.$$

An den Enden der großen Achse ($y = 0$) herrscht die Schubspannung

$$\tau = k a^2 b = \frac{2M}{\pi a b^2}.$$

Zur vollständigen Beschreibung des Spannungs- und Formänderungszustandes fehlen noch der Verdrehungswinkel ϑ und der Festwert c, die beide aus den Gleichungen (1) erhalten werden, von denen die erste für $z = b$ in den Wert τ, die zweite für $y = -a$ in den Wert $\tau_{\max}$ übergeht (Abb. 176). Wir erhalten

$$\text{aus} \quad \tau_{xy} = G \cdot z \cdot \left(\frac{1}{c} + \vartheta\right) \quad \text{für} \quad z = b \ldots \frac{2M}{\pi a b^2} = G \cdot b \cdot \left(\frac{1}{c} + \vartheta\right),$$

$$\text{aus} \quad \tau_{xz} = G \cdot y \cdot \left(\frac{1}{c} - \vartheta\right) \quad \text{,,} \quad y = -a \ldots -\frac{2M}{\pi a^2 b} = G \cdot a \left(\frac{1}{c} - \vartheta\right).$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M}{\pi a b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 \cdot b^2}.$$

Die Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$\vartheta = \frac{1}{G} \cdot \frac{M}{\pi a b} \cdot \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}.$$

Als Gleichung der krummen Fläche, in die ein ebener Querschnitt bei der Verdrehung übergeht, erhalten wir

$$\xi = \frac{y \cdot z}{c} \quad \text{oder} \quad \xi = \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G} \cdot y z\,.$$

$c\,\xi = y \cdot z$ ist die Gleichung eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides.

In der Gleichung für den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \frac{1}{G} \cdot \frac{M\,(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \tag{3}$$

ersetzt man häufig b durch $n \cdot a$, so daß n das Verhältnis der Achsen der Ellipse ist; dann wird

$$\vartheta = \frac{M\,(n^2 + 1)}{G \cdot \pi \cdot a^4 \cdot n^3}\,. \tag{3a}$$

Für den kreisförmigen Querschnitt hatten wir als verhältnismäßigen Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \frac{M}{G \cdot J_p} = \frac{M}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}}$$

erhalten (vgl. S. 226). Es liegt nahe, das für den elliptischen Querschnitt gefundene Ergebnis damit zu vergleichen. Wir sehen dabei, daß das polare Trägheitsmoment J_p durch

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = J_d$$

ersetzt ist. A. Föppl nennt diesen einem Trägheitsmoment ähnlichen Ausdruck den Drillungswiderstand des Querschnittes und schreibt allgemein

$$\vartheta = \frac{M}{G \cdot J_d}\,. \tag{4}$$

Das polare Trägheitsmoment des elliptischen Querschnittes ist als Summe der axialen Trägheitsmomente

$$J_p = \frac{\pi a^3 b}{4} + \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{\pi a b}{4}\,(a^2 + b^2)\,.$$

Als Verhältnis des Drillungswiderstandes zum polaren Trägheitsmoment erhalten wir

$$\varphi = \frac{J_d}{J_p} = \frac{\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}{\frac{\pi a b}{4}\,(a^2 + b^2)} = \frac{4 a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{4 n^2}{(n^2 + 1)^2}\,, \tag{5}$$

für $n = 1$ wird $\varphi = 1$; der Drillungswiderstand des kreisförmigen Querschnittes ist gleich dem polaren Trägheitsmoment. Mit wachsendem n nimmt φ sehr stark ab

$n =$	1	1,5	2	2,5	3
$\varphi =$	1	0,85	0,64	0,48	0,36

und zeigt, daß eine Berechnung mit Hilfe des polaren Trägheitsmomentes zu erheblichen Abweichungen führt.

b) Die Schublinie.

Die Drehungsspannungen. Für die äußere Umrißlinie haben wir als Randbedingung die Forderung aufgestellt, daß die Richtung der Schubspannung in die Tangente an die Umrißlinie fällt. Wir denken uns jetzt im Querschnitt eine Schar von Kurven gezeichnet, die derselben Bedingung unterworfen sind; d. h. die Tangenten in jedem Punkte dieser Kurven sollen mit der Richtung der resultierenden Schubspannungen zusammenfallen. Wir können auch sagen, daß diese Kurven, die Schublinien oder Spannungslinien genannt werden, überall in der Richtung der Schubspannung τ fortschreiten. Die Gleichung der Schublinien aufstellen heißt, die Richtung von τ als Funktion der Querschnittskoordinaten y und z ermitteln.

Wir übernehmen von S. 236

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + z \cdot \vartheta\right), \tag{c}$$

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - y \cdot \vartheta\right). \tag{d}$$

Die Differentiation von (c) nach z liefert

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G \cdot \vartheta .$$

Die Differentiation von (d) nach y liefert

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = - G \cdot \vartheta .$$

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2\, G \vartheta , \tag{g}$$

die für jeden Punkt des Querschnittes gilt. Damit τ in die Richtung der Tangente an die Schublinie fällt, muß

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\dfrac{\partial F(y, z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(y, z)}{\partial z}} = \frac{dz}{dy}$$

sein, wenn wir als Gleichung der Schublinien

$$F(y, z) = K \tag{h}$$

ansetzen (Abb. 176). Da es sich um eine Schar von Kurven handelt, muß die Gleichung der Schublinien einen willkürlichen Parameter K enthalten. Wir erhalten bestimmte Schublinien, wenn wir für K feste Werte einsetzen.

Unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy}$$

ist, ergibt sich[1])

$$\tau_{xy} = +\frac{\partial F(y,z)}{\partial z} \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}; \tag{i}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial y^2}.$$

Setzen wir beide Werte in (g) ein, so wird

$$\frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial y^2} = 2\,G\vartheta. \tag{k}$$

Dies ist die allgemeine Differentialgleichung der Schublinien.

Für einen gegebenen vollen Querschnitt muß Gleichung (h) die Differentialgleichung (k) erfüllen, für $K = K_a$ mit der äußeren Begrenzungslinie zusammenfallen und für alle Werte innerhalb des Querschnittes eine stetige Funktion sein.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (k) gibt C. Weber im erwähnten Forschungsheft; sie lautet

$$F(y,z) = 2\,G\vartheta\left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}\right) + g_1(z + iy) + g_2(z - iy) = K \tag{l}$$

und wird vom Verfasser auf die verschiedenen Sonderfälle angewendet.

Elliptischer Querschnitt. Setzt man

$$g_1(z + iy) + g_2(z - iy) = -A\,(z^2 - y^2),$$

so erhält man

$$F(y,z) = 2\,G\vartheta\left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}\right) - A\,(z^2 - y^2) = K$$

als Gleichung der Schublinienschar, die mit

$$A = \frac{G\vartheta}{2}\cdot\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

in

$$G\vartheta\left(\frac{n^2}{n^2+1}\cdot y^2 + \frac{1}{n^2+1}\cdot z^2\right) = K \tag{6}$$

übergeht, wenn a und $b = n \cdot a$ die halben Achsen des Querschnittumrisses sind. Mit $y = a$ und $z = 0$ folgt daraus

$$G\vartheta \cdot a^2 \cdot \frac{n^2}{n^2+1} = K_a$$

für die äußere Ellipse. Die Schublinien sind ähnliche Ellipsen, die sich mit $K_1 = \frac{1}{4}K_a$; $K_2 = \frac{1}{2}K_a$; $K_3 = \frac{3}{4}K_a$ usw. in den Querschnitt eintragen lassen (Abb. 176). Die Spannungen sind

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = -G\vartheta\cdot 2\,\frac{n^2}{n^2+1}\cdot y \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial F(y,z)}{\partial z} = G\vartheta\cdot 2\,\frac{1}{n^2+1}\cdot z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1]) Weber, C.: Die Lehre der Drehfestigkeit. Forsch.-Arb. d. V. d. I., Berlin 1921, H. 249, S. 11.

Für $y = \pm a$ und $z = 0$ wird

$$\tau_{xz} = \tau_{xz_{\max}} = \pm G\vartheta a \cdot \frac{2n^2}{n^2+1};$$

für $y = 0$ und $z = \pm na$ wird

$$\tau_{xy} = \tau_{xy_{\max}} = \pm G\vartheta a \cdot \frac{2n}{n^2+1} = \frac{1}{n} \cdot \tau_{xz_{\max}}.$$

F in Gleichung (7) nennt Föppl[1]) eine Spannungsfunktion, weil sich die beiden Teilspannungen τ_{xz} und τ_{xy} durch eine einzige Funktion F der Querschnittskoordinaten ausdrücken lassen.

Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn die Summe der zweiten partiellen Differentialquotienten der Gleichung des Querschnittsumrisses einen Festwert ergibt, wie es z. B. beim elliptischen Querschnitt der Fall ist. Mit a und b als Halbachsen ist

$$f(y,z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \cdot 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{a^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{b^2} \cdot 2z \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{b^2},$$

demnach

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = \frac{2(b^2+a^2)}{a^2 b^2}.$$

Da auch für die Spannungsfunktion F als Summe der zweiten Differentialquotienten ein Festwert gefordert ist, Gleichung (k), so setzen wir

$$F = \frac{2G\vartheta a^2 b^2}{2(b^2+a^2)} \cdot f(y,z),$$

$$F = G\vartheta \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right).$$

Daß dieser Ansatz der Gleichung (k) genügt, zeigt die Differentiation

$$\frac{\partial F}{\partial y} = G\vartheta \cdot \frac{1}{a^2+b^2} \cdot 2b^2 y \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{G\vartheta \cdot 2b^2}{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = G\vartheta \cdot \frac{1}{a^2+b^2} \cdot 2a^2 z \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{G\vartheta \cdot 2a^2}{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2G\vartheta \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) = 2G\vartheta.$$

Ersetzen wir noch b durch $n \cdot a$, so wird

$$F = G\vartheta \cdot \frac{1}{a^2+n^2a^2} (n^2a^2y^2 + a^2z^2 - a^2n^2a^2),$$

$$F = G\vartheta \left(\frac{n^2}{n^2+1} \cdot y^2 + \frac{z^2}{n^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} \cdot a^2\right),$$

$$F = G\vartheta \left(\frac{n^2}{n^2+1} \cdot y^2 + \frac{z^2}{n^2+1}\right) - G\vartheta \cdot \frac{n^2}{n^2+1} \cdot a^2$$

und $F = K'$ stellt die Gleichung der Schublinien dar (vgl. Formel 6).

[1]) Föppl, A. und O.: Drang und Zwang. Bd. II. R. Oldenbourg.

Die Gleichungen (7) liefern als Seitenspannungen im Punkte yz des Querschnittes

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F(y,z)}{\partial z} = 2\,G\vartheta\,\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot z\,,$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = -2\,G\vartheta\,\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot y\,,$$

die in Beziehung auf den Mittelpunkt des Querschnittes das Teilmoment

$$dM = 2\,G\vartheta\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot z^2 + \frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot y^2\right)df$$

haben, so daß wir für den gesamten Querschnitt

$$M = 2\,G\vartheta\,\frac{1}{a^2+b^2}\int(a^2 z^2 + b^2 y^2)\cdot df$$

erhalten. Die Zerlegung in Einzelintegrale ergibt

$$M = 2\,G\vartheta\,\frac{1}{a^2+b^2}\left\{a^2\int df\,z^2 + b^2\int df\,y^2\right\},$$

wobei $\int df z^2 = J_y$ und $\int df\,y^2 = J_z$ die auf die Achsen bezogenen Trägheitsmomente des elliptischen Querschnittes bedeuten. Mit

$$J_y = \frac{\pi a b^3}{4} \quad \text{und} \quad J_z = \frac{\pi b a^3}{4}\,,$$

geht unsere Momentengleichung über in

$$M = G\vartheta\cdot\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}\,,$$

aus der sich der verhältnismäßige Verdrehungswinkel zu

$$\vartheta = \frac{a^2+b^2}{\pi\cdot a^3 b^3}\cdot\frac{M}{G}$$

ergibt (vgl. S. 241).

Der gleichseitig-dreieckige Querschnitt. Da die Summe der zweiten Differentialquotienten der Gleichung des Querschnittsumrisses ebenso wie beim elliptischen Querschnitt auf einen Festwert führt, so läßt sich die Spannungsfunktion und damit die strenge Lösung der Aufgabe sofort angeben. Die Bezeichnungen der Abb. 177 ergeben als Gleichungen der Umrißseiten

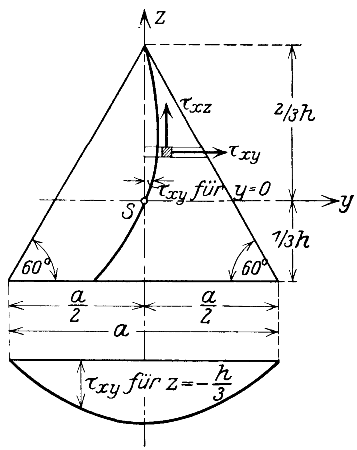


Abb. 177. Gleichseitig-dreieckiger Querschnitt.

$$z - \frac{2}{3}h - \frac{2h}{a}y = 0; \qquad z - \frac{2}{3}h + \frac{2h}{a}y = 0; \quad z + \frac{h}{3} = 0\,,$$

die durch Ausmultiplizieren in

$$f(y,z) = z^3 - h z^2 - 3\,y^2 z - h\,y^2 + \frac{4}{27}h^3 = 0$$

übergehen, wenn infolge $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$$a = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$$

eingesetzt wird. Der Gleichung $f(y, z)$ muß jeder Punkt des Umrisses genügen; ihre Differentiation liefert

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = -6zy - 2hy \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial y^2} = -6z - 2h\,,$$

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} = 3z^2 - 2hz - 3y^2 \text{ und } \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} = +6z - 2h\,,$$

so daß

$$\frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} = -4h$$

wird.

Damit die Spannungsfunktion F der Gleichung (k) genügt, setzen wir

$$F = \frac{-2G\vartheta}{4h} \cdot f(y,z) = -\frac{2G\vartheta}{4h}\left(z^3 - hz^2 - 3y^2z - hy^2 + \frac{4}{27}h^3\right),$$

die bei der Differentiation wie vorgeschrieben

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2G\vartheta$$

ergibt. Als Gleichung der Schublinie, die mit dem Umriß zusammenfällt, erhalten wir

$$\frac{G\vartheta}{2h}(hy^2 + 3y^2z + hz^2 - z^3) - \frac{G\vartheta}{2h} \cdot \frac{4}{27}h^3 = 0\,,$$

so daß

$$K_a = \frac{2}{27} G\vartheta h^2$$

ist, wenn wir der Gleichung der Schublinienschar die Form

$$\frac{G\vartheta}{2h}(hy^2 + 3y^2z + hz^2 - z^3) = K$$

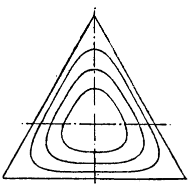


Abb. 178. Schublinien.

geben. Abb. 178 zeigt die Schublinien für $K = \frac{1}{4}K_a$; $\frac{1}{2}K_a$; $\frac{3}{4}K_a$ und K_a[1]).

Aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung erhält C. Weber die Gleichung der Schublinienschar, indem er

$$g_1(z + iy) + g_2(z - iy) = \frac{G\vartheta}{2h}(-z^3 + 3y^2z)$$

setzt, so daß

$$2G\vartheta\left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}\right) + \frac{G\vartheta}{2h}(-z^3 + 3y^2z) = K$$

wird.

[1]) Aus C. Weber: Die Lehre der Drehungsfestigkeit.

Die Seitenspannungen ergeben sich nach Gleichung (i) zu

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F\,(y,z)}{\partial z} = \frac{G\vartheta}{2\,h}\,(3\,y^2 - 3\,z^2 + 2\,hz)\,,$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial F\,(y,z)}{\partial y} = -\frac{G\vartheta}{h}\,(3\,yz + hy)\,.$$

Die absolut größte Schubspannung tritt in der Mitte der Umrißseiten auf;

$$\text{für } y = 0 \text{ wird } \tau_{xz} = 0\,,$$

$$\text{für } y = 0 \text{ wird } \tau_{xy} = \frac{G\vartheta}{2\,h}\,(2\,hz - 3\,z^2)\,.$$

$\tau_{xy} = f\,(z)$ ist in Abb. 177 dargestellt, die Kurve, eine Parabel, geht durch die Spitze des Dreiecks und durch den Schwerpunkt; der Abschnitt in Höhe der Grundlinie ist infolge $z = -\frac{1}{3}\,h$,

$$\tau_{xy_{\min}} = \tau_{\min} = -\frac{G\vartheta h}{2}\,.$$

Für den Verlauf der Schubspannungen längs der Grundlinie erhalten wir infolge $z = -\frac{1}{3}\,h$

$$\tau_{xy} = \frac{G\vartheta}{2\,h}\,(3\,y^2 - h^2) \text{ und } \tau_{xz} = 0\,.$$

Die Kurve $\tau_{xy} = f\,(y)$ ist ebenfalls eine Parabel, deren Scheitel in die z-Achse fällt. Mit $y = 0$ ergibt sich

$$\tau_{xy_{\min}} = \tau_{\min} = -\frac{G\vartheta h}{2}\,,$$

und mit $y = \frac{a}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$$\tau_{xy} = 0\,.$$

Der verhältnismäßige Verdrehungswinkel. Die übliche Bedingung, daß die als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen dem angreifenden Drehmoment das Gleichgewicht halten müssen, liefert als Moment der von dem Flächenteilchen df übertragenen Kraft (Abb. 177)

$$df\,(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y) = \frac{G\vartheta}{2\,h}\,(3\,y^2 z - 3\,z^3 + 2\,hz^2 + 6\,y^2\,z + 2\,hy^2) \cdot df\,.$$

Dann überträgt der zur y-Achse parallele Streifen von der Breite y und der Höhe dz

$$dM = \frac{G\vartheta}{2h} \cdot dz \int (3\,y^2 z - 3\,z^3 + 2\,hz^2 + 6\,y^2 z + 2\,hy^2)\,dy\,.$$

Wegen der Symmetrie zur z-Achse integrieren wir zweimal von $y = 0$ bis $y = -\frac{a}{6\,h}\,(3\,z - 2\,h)$ und erhalten

$$\begin{aligned} dM &= 2 \cdot \frac{G\vartheta}{2\,h}\,dz \left\{ (9\,z + 2\,h) \int y^2\,dy - z^2\,(3\,z - 2\,h) \int dy \right\} \\ &= \frac{G\vartheta}{h} \cdot dz \left\{ (9\,z + 2\,h) \cdot \frac{y^3}{3} - z^2\,(3\,z - 2\,h) \cdot y \right\} \\ &= \frac{G\vartheta}{h} \cdot dz \Big\{ -(9\,z + 2\,h) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^3} \left(\frac{a}{h}\right)^3 (3\,z - 2\,h)^3 \\ &\qquad - z^2\,(3\,z - 2\,h) \left[-\frac{a}{6\,h}\,(3z - 2h) \right] \Big\}\,. \end{aligned}$$

Ersetzen wir noch h durch $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, so wird $\frac{a}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{a}{h}\right)^3 = \frac{a}{h} \cdot \frac{4}{3}$, so daß sich ausgerechnet und zusammengefaßt ergibt

$$dM = G\vartheta \cdot \frac{a}{h} \cdot dz \left(\frac{z^4}{h} - \frac{10}{9} z^3 + \frac{2}{9} z^2 h + \frac{8}{243} h^3\right).$$

Als gesamtes von dem ganzen Querschnitt übertragenes Moment erhalten wir

$$dM = G\vartheta \cdot \frac{a}{h} \int dz \left(\frac{z^4}{h} - \frac{10}{9} z^3 + \frac{2}{9} h z^2 + \frac{8}{243} h^3\right)$$

mit $z = -\frac{h}{3}$ als untere und $z = \frac{2}{3} h$ als obere Grenze. Nach Durchführung der Integration ist

$$M = G\vartheta \cdot \frac{a}{h} \left(\frac{1}{5h} z^5 - \frac{10}{36} z^4 + \frac{2h}{27} z^3 + \frac{8h^3}{243} z\right)$$

und nach Einsetzung der Grenzen

$$M = \frac{G\vartheta a h^3}{30};$$

daraus

$$\vartheta = \frac{30 M}{G \cdot a h^3} \text{ oder } \vartheta = \frac{80 M}{G a^4 \sqrt{3}}.$$

In ähnlicher Weise wie bei dem elliptischen Querschnitt auf S. 241 schreiben wir auch hier

$$\vartheta = \frac{M}{G \cdot J_d}$$

und erhalten als Drillungswiderstand des gleichseitig-dreieckigen Querschnittes

$$J_d = \frac{a^4}{80} \sqrt{3} = \frac{a^4}{46{,}188}.$$

Der rechteckige Querschnitt. Für diesen im Maschinenbau häufig vorkommenden Querschnitt läßt sich keine geschlossene Lösung angeben. Der die vorstehend behandelten Querschnitte einer verhältnismäßig einfachen Lösung zuführende Fall, daß die Summe der beiden zweiten Differentialquotienten der Gleichung des Querschnittsumrisses auf einen Festwert führt, liegt beim rechteckigen Querschnitt nicht vor.

Föppl[1]) löst die Aufgabe, indem er eine Spannungsfunktion F ansetzt, die den statischen Bedingungen der Aufgabe genügt. Zu diesem Zweck muß die sonst beliebige Spannungsfunktion für alle Punkte des Umfanges den gleichen Wert, z. B. Null, annehmen und einen allen Gliedern gemeinsamen Faktor enthalten, der so zu bestimmen ist, daß die im Querschnitt übertragenen Spannungen dem angreifenden Drehmoment der äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten. Als Spannungsfunktion F, die für den ganzen Umfang des rechteckigen Querschnittes zu Null wird, setzt Föppl

$$F(y, z) = c\,(a^2 - y^2)\,(b^2 - z^2),$$

[1]) Föppl, A. und O.: Drang und Zwang, Bd. II, S. 76.

worin a und b die halben Rechteckseiten bedeuten. Die Differentiation nach Gleichung (i) liefert die Seitenspannungen

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F(y,z)}{\partial z} = -2\,c\,(a^2 - y^2)\cdot z$$
$$\tau_{xz} = -\frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = 2\,c\,(b^2 - z^2)\cdot y\,,$$

aus denen sich nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad \text{oder} \quad \tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$$

ergibt.

Nun ist die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit bei reiner Schubbeanspruchung nach S. 198 mit $k = 1$

$$\mathfrak{A} = \frac{Q^2}{2\,G F^2} = \frac{\tau^2}{2\,G} = \frac{1}{2\,G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)$$

oder

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,G}\left[\left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}\right)^2\right].$$

Demnach entfällt auf die Längeneinheit des Stabes die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2\,G}\int \tau^2\,df = \frac{1}{2\,G}\int\left[\left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right)^2\right]df.$$

Die dritte Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ liefert

$$M = \int(\tau_{xy}\cdot z - \tau_{xz}\cdot y)\cdot df = -\int\left(z\cdot\frac{\partial F(y,z)}{\partial z} + y\,\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right)df\,,$$

in die wir die bereits ermittelten Differentialquotienten einsetzen; es wird dann

$$M = 2\,c\int[(a^2 - y^2)\,z^2 + (b^2 - z^2)\,y^2]\,df$$
$$= 2\,c\,[a^2\int df\cdot z^2 - \int y^2 z^2\,df + b^2\int df\,y^2 - \int z^2 y^2\,df\,.$$

Es ist

$$\int df\,z^2 = J_y = \frac{4}{3}\,a\,b^3 \text{ und } \int df\,y^2 = J_z = \frac{4}{3}\,a^3 b\,;$$

ferner

$$\int y^2 z^2\,df = \int_{-a}^{+a} y^2\,dy\int_{-b}^{+b} z^2\cdot dz = 4\int_0^a y^2\,dy\int_0^b z^2\,dz$$
$$= 4\int_0^a y^2\,dy\cdot\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^b = 4\int_0^a y^2\,dy\cdot\frac{b^3}{3}$$
$$= \frac{4}{3}\,b^3\int_0^a y^2\,dy = \frac{4}{3}\,b^3\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{9}\,a^3 b^3\,.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$M = 2\,c\left[\frac{4}{3}\,a^3 b^3 + \frac{4}{3}\,a^3 b^3 - 2\cdot\frac{4}{9}\,a^3 b^3\right] = \frac{32}{9}\,c\,a^3 b^3$$

und daraus
$$c = \frac{9\,M}{32\,a^3 b^3}\,.$$

Mit
$$A = \frac{1}{2\,G}\int\left[\left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right)^2\right] df$$

wird nach dem Einsetzen der Differentialquotienten
$$A = \frac{4\,c^2}{2\,G}\int[(b^2 - z^2)^2\,y^2 + (a^2 - y^2)^2\,z^2]\cdot df$$
$$= \frac{2\,c^2}{G}\Big\{b^4\int y^2\,df - 2\,b^2\int y^2\,z^2\,df + \int y^2 z^4\,df$$
$$+\, a^4\int z^2\,df - 2\,a^2\int y^2\,z^2\,df + \int y^4\,z^2\,df\Big\}\,.$$

Die einzelnen Integrale sind
$$\int df\,y^2 = J_z = \frac{4}{3}\,a^3 b\,,$$
$$\int df\,z^2 = J_y = \frac{4}{3}\,a b^3\,,$$
$$\int y^2\,z^2\,df = \frac{4}{9}\,a^3 b^3\,,$$
$$\int y^2\,z^4\,df = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} y^2 z^4\,dy\,dz = \frac{4}{15}\,a^3 b^5\,,$$
$$\int y^4\,z^2\,df = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} y^4 z^2\,dy\,dz = \frac{4}{15}\,a^5 b^3\,.$$

Eingesetzt ergibt sich
$$A = \frac{2\,c^2}{G}\left[\frac{4}{3}\,a^3 b^5 - 2\,(a^2 + b^2)\cdot\frac{4}{9}\,a^3 b^3 + \frac{4}{3}\,a^5 b^3 + \frac{4}{15}\,a^3 b^5 + \frac{4}{15}\,a^5 b^3\right]$$
$$A = \frac{64\,c^2}{45\,G}\,a^3 b^3\,(a^2 + b^2)$$

oder mit $c = \frac{9\,M}{32\,a^3 b^3}$
$$A = \frac{9}{80}\cdot\frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}\cdot\frac{M^2}{G}\,.$$

Als Seitenspannungen erhalten wir
$$\tau_{xy} = \frac{\partial F(y,z)}{\partial z} = -\,2\,c\,(a^2 - y^2)\,z = -\,\frac{9}{16}\cdot\frac{M}{a^3 b^3}\,(a^2 - y^2)\,z\,.$$
$$\tau_{xz} = -\,\frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = 2\,c\,(b^2 - z^2)\,y = \frac{9}{16}\cdot\frac{M}{a^3 b^3}\,(b^2 - z^2)\,y\,.$$

Um ein Bild von der Verteilung der Spannungen über den Querschnitt zu erhalten, setzen wir $z = 0$; damit wird $\tau_{xy} = 0$ und

$$\tau_{xz} = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b} \cdot y\,.$$

Die Spannungen wachsen längs der y-Achse geradlinig und erreichen ihren größten Wert für $y = +a$ mit

$$\tau_{\max} = +\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^2 b}\,.$$

In gleicher Weise wird längs der z-Achse infolge $y = 0$

$$\tau_{xz} = 0 \text{ und } \tau_{xy} = -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a b^3} \cdot z\,.$$

Auch hier zeigt sich geradliniges Anwachsen der Spannungen vom Mittelpunkt aus; der größte Wert ergibt sich für $z = -b$ zu

$$\tau_{\max} = +\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a b^2}\,.$$

Beide Maximalwerte treten in den Mitten der Seiten auf. Längs der Umrißseiten gehorchen die Spannungen für die Senkrechten infolge $y = \pm a$ dem Gesetz

$$\tau_{xy} = 0 \text{ und } \tau_{xz} = \pm\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^2 b^3}(b^2 - z^2)$$

und längs der Wagerechten infolge $z = \pm b$

$$\tau_{xz} = 0 \text{ und } \tau_{xy} = \pm\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^2}(a^2 - y^2)\,.$$

Die den Verlauf der Spannungen zeigenden Kurven sind Parabeln, die ihre Scheitel und damit ihre größten Ordinaten in den Mitten der Seiten haben; sie sind in Abb. 179 dargestellt.

Für den Sonderfall des **Quadrates** erhalten wir mit a als Seite des Quadrates

$$\tau_{\max} = +4{,}5 \cdot \frac{M}{a^3}\,.$$

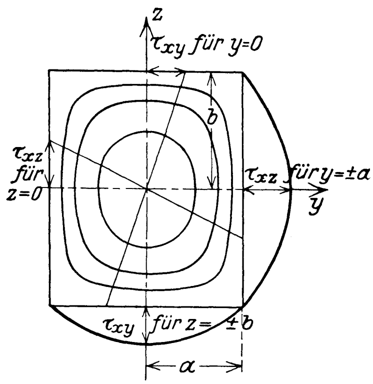


Abb. 179. Spannungen nach Föppl.

Der verhältnismäßige Verdrehungswinkel. Beobachtet man das stetige Anwachsen des Drehmomentes von Null auf M, so ist die auf die Längeneinheit bezogene Verdrehungsarbeit

$$A = \frac{1}{2} M \cdot \vartheta\,,$$

die mit dem vorher gefundenen Werte

$$A = \frac{9}{80} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M^2}{G}$$

übergeht in

$$\vartheta = \frac{9}{40} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G} = 0{,}225 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G}.$$

Bezeichnet man die ganzen Seiten des Rechtecks mit b und h, so hat man an Stelle von a $\frac{b}{2}$, an Stelle von b $\frac{h}{2}$ zu setzen. Es wird dann für $h > b$

$$\tau_{\max} = \frac{9}{16} \frac{M}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{9}{2} \frac{M}{b^2 h}$$

und

$$\vartheta = \frac{9}{40} \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^3 \left(\frac{h}{2}\right)^3} \frac{M}{G} = 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M}{G}.$$

Bach setzt[1])

$$\vartheta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M}{G}.$$

Nach den Versuchen von Bretschneider (1909) ist für

$h:b = 1:1$	$\psi_0 = 3{,}58$
$h:b = 2:1$	$\psi_0 = 3{,}53$
$h:b = 4:1$	$\psi_0 = 3{,}40$
$h:b = 6:1$	$\psi_0 = 3{,}29$

Die vorstehend abgeleiteten Gleichungen sind nur als Näherungslösungen anzusprechen, da der gewählte Ansatz sehr willkürlich ist und dem tatsächlichen Verhalten des verdrehten Stabes nicht vollkommen gerecht wird. Föppl verfolgt den eingeschlagenen Weg, indem er den Ansatz erweitert und gelangt zu Gleichungen, die den wirklichen Verhältnissen bedeutend näher kommen, doch muß es dem Leser überlassen bleiben, am angegebenen Orte selber nachzulesen. Hier sollte nur gezeigt werden, wie man überhaupt die gestellte Aufgabe anzufassen hat, um zu brauchbaren Ergebnissen zu gelangen.

C. Weber[2]) untersucht den Spannungs- und Formänderungszustand des Stabes mit rechteckigem Querschnitt mit Hilfe der allgemeinen Differentialgleichung der Schublinien (k), für die er auch keine geschlossene Lösung angeben kann, da sich für g_1 und g_2 keine ganzen algebraischen Funktionen in endlicher Zahl finden, die den besonderen Bedingungen des rechteckigen Querschnittes genügen. Auch hier gestaltet sich die Lösung so verwickelt, daß sie über den Rahmen unserer Untersuchung hinausgeht, doch sollen die Ergebnisse angeschrieben werden, um einen Vergleich der strengeren Lösung mit der einfachen Näherungslösung zu ermöglichen. Weber findet, wenn b und h die Seiten des Rechteckes bedeuten und $h = n \cdot b$ gesetzt wird, bei

[1]) Bach, C.: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl. 1920, S. 397.

[2]) Die Lehre von der Drehungsfestigkeit. Forschungsheft 249 des V. d. I.

1. $1 < n < 4$

$$M = \sim \frac{1}{3}\left(n - 0{,}630 + \frac{0{,}052}{n^4}\right) b^4 G \vartheta,$$

$$\tau_{\max} = \left(1 - \frac{0{,}65}{1+n^3}\right) b G \vartheta,$$

$$\tau_{\max} = \frac{1 - \frac{0{,}65}{1+n^3}}{\frac{1}{3}\left(n - 0{,}630 + \frac{0{,}052}{n^4}\right)} \cdot \frac{M}{b^3},$$

$$\vartheta = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(n - 0{,}630 + \frac{0{,}052}{n^4}\right)} \cdot \frac{M}{b^4 \cdot G};$$

2. $n > 4$

$$M = \sim \frac{1}{3}(n - 0{,}630)\, b^4 G \vartheta,$$

$\tau_{\max} = \sim b G \vartheta$ in der Mitte der langen Seiten,

$\tau = 0{,}7425\, b G \vartheta$ in der Mitte der kurzen Seiten,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\frac{1}{3}(n - 0{,}630)} \cdot \frac{M}{b^3},$$

$$\vartheta = \frac{1}{\frac{1}{3}(n - 0{,}630)} \cdot \frac{M}{b^4 \cdot G};$$

3. $n = 1$ (Quadrat)

$$M = 0{,}1404\, b^4 G \vartheta, \qquad \tau_{\max} = 4{,}809 \frac{M}{b^3},$$

$$\tau_{\max} = 0{,}6753\, b G \vartheta, \qquad \vartheta = 7{,}123 \frac{M}{b^4 \cdot G}.$$

Die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt zeigt die Abb. 180, die erkennen läßt, daß die Spannungen nicht geradlinig nach außen wachsen.

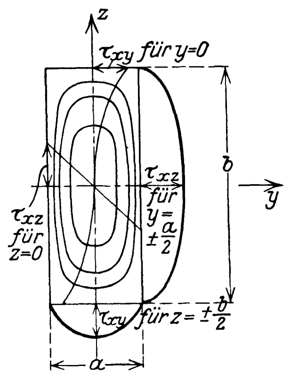


Abb. 180. Spannungen nach Weber.

Zum Vergleich der Näherungsformeln mit den Weberschen Gleichungen schreiben wir die Gleichungen von Föppl so an, daß b und $h = n \cdot b$ die Seiten des rechteckigen Querschnittes sind, und erhalten

$$\tau_{\max} = \frac{9}{2 \cdot n} \cdot \frac{M}{b^3}$$

und

$$\vartheta = 3{,}6 \cdot \frac{1 + n^2}{n^3} \cdot \frac{M}{b^4 G}.$$

Nach den Versuchen von Bretschneider wird

$$\vartheta = \psi_0 \frac{1 + n^2}{n^3} \frac{M}{b^4 G}.$$

Näherungsgleichung	nach C. Weber	nach Bretschneider
$n=1$:	$n=1$:	
$\tau_{\max}=4{,}5\cdot\frac{M}{b^3}$,	$\tau_{\max}=4{,}81\cdot\frac{M}{b^3}$,	
$\vartheta=7{,}2\cdot\frac{M}{b^4G}$;	$\vartheta=7{,}123\cdot\frac{M}{b^4G}$;	$\vartheta=7{,}16\cdot\frac{M}{b^4G}$,
$n=2$:	$n=2$:	
$\tau_{\max}=2{,}25\cdot\frac{M}{b^3}$,	$\tau_{\max}=2{,}035\cdot\frac{M}{b^3}$,	
$\vartheta=2{,}25\cdot\frac{M}{b^4G}$;	$\vartheta=2{,}18\cdot\frac{M}{b^4G}$;	$\vartheta=2{,}21\,\frac{M}{b^4G}$,
$n=3$:	$n=3$:	
$\tau_{\max}=1{,}5\cdot\frac{M}{b^3}$,	$\tau_{\max}=1{,}226\cdot\frac{M}{b^3}$,	
$\vartheta=1{,}333\cdot\frac{M}{b^4G}$;	$\vartheta=1{,}258\cdot\frac{M}{b^4G}$;	
$n=4$:	$n=4$:	
$\tau_{\max}=1{,}125\cdot\frac{M}{b^3}$,	$\tau_{\max}=0{,}881\cdot\frac{M}{b^3}$,	
$\vartheta=0{,}956\cdot\frac{M}{b^4G}$	$\vartheta=0{,}889\cdot\frac{M}{b^4G}$	$\vartheta=0{,}903\,\frac{M}{b^4G}$

3. Die Lösung der Verdrehungsaufgabe durch den Versuch nach Prandtl.

Die vorstehenden Entwicklungen haben gezeigt, daß die strenge rechnerische Lösung der Verdrehungsaufgabe nicht nur mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist, sondern namentlich an Anschaulichkeit zu wünschen übrig läßt. Diesen Mangel behebt das sogenannte Gleichnis von Prandtl.

Wir denken uns ein Hohlgefäß aus dünnem Blech, in dessen eine Wand eine Öffnung geschnitten ist, die dem zu untersuchenden Querschnitt entspricht. Über diese Öffnung spannen wir eine Seifenhaut in ähnlicher Weise, wie man Seifenblasen herstellt. Erhält die Luft im Innern des Gefäßes einen geringen Überdruck, z. B. durch Erwärmen, so wird sich die Haut ausbauchen und einen Hügel bilden, der sich über der wagerechten Ebene der Öffnung erhebt. Von den Ordinaten des Hügels läßt sich nachweisen, daß sie den Werten der Spannungsfunktion F verhältnisgleich sind unter der Voraussetzung, daß diese Ordinaten im Verhältnis zu den Abmessungen des Hügels klein sind.

In Abb. 181 ist $df = dy \cdot dz$ ein Flächenteilchen der Seifenhaut im Grundriß. Da die in einer Flüssigkeitshaut übertragenen Spannungen längs eines Schnittes unveränderlich sind, so überträgt die Kante dz eine Kraft $k = s \cdot dz$, wenn s diese Unveränderliche bedeutet; die im Abstande dy liegende Kante überträgt $k + dk$ in entgegengesetzter

Richtung. Die Seitenkräfte in Richtung der x-Achse sind

$$k \cdot \operatorname{tg} \varphi = s \cdot dz \cdot \frac{d\xi}{\partial y} \quad \text{und} \quad (k + dk) \cdot \operatorname{tg} \varphi = s \cdot dz \frac{\partial \xi}{\partial y} + s \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \cdot dy\,.$$

Die Differenz beider Seitenkräfte gibt den der x-Achse entgegengesetzt gerichteten Druck

$$s \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \cdot dy\,.$$

In gleicher Weise ergeben die längs der Kanten dy angreifenden Spannungen den ebenfalls nach unten gerichteten Druck

$$s \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \cdot dz\,.$$

Die erste Gleichgewichtsbedingung verlangt, daß die Summe sämtlicher Kräfte in Richtung der x-Achse gleich Null ist. Mit p als Luftüberdruck auf die Flächeneinheit wird

$$s \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy + s \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \cdot dz - p \cdot dy \cdot dz = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{p}{s}\,.$$

Diese Gleichung entspricht im Aufbau der Differentialgleichung der Spannungsfunktion (k), wenn wir

$$2 G \vartheta = \mu \cdot \frac{p}{s}\,,$$

also

$$F = \mu \cdot \xi$$

setzen, wobei μ einen Maßstabfaktor bedeutet.

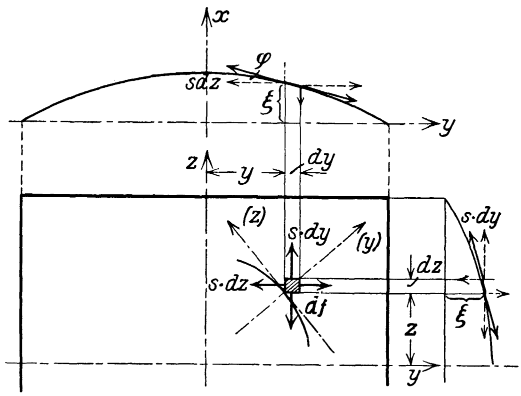


Abb. 181. Seifenhaut nach Prandtl.

Da bei der Seifenhaut ξ am Rande zu Null wird, also für alle Randpunkte den gleichen Wert annimmt, so stimmen beide Größen F und ξ vollständig überein, es stellen demnach die Ordinaten ξ in jedem Punkte des Querschnittes die Spannungsfunktion F dar. Man nennt deshalb den Seifenhauthügel auch Spannungshügel. Projizieren wir die Linien gleicher Höhe auf die yx-Ebene, so erhalten wir die Schublinien des Querschnittes. In Abb. 181 ist die Schublinie durch den Punkt yz angedeutet und das Achsenkreuz yz so gelegt, daß die z-Achse Tangente und die y-Achse Normale an die Schublinie ist, dann ist

$$\mu \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

das Gefälle des Spannungshügels im Punkte yz. Andrerseits war nach Gleichung (i)

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}\,;$$

wir entnehmen aus dieser Übereinstimmung, daß **die Schubspannung in einem Punkte eines Querschnittes dargestellt ist durch das Gefälle des Spannungshügels in diesem Punkte.**

Zur Berechnung des verhältnismäßigen Verdrehungswinkels ϑ bedienten wir uns der dritten Gleichgewichtsbedingung, die besagt, daß das Moment der äußeren Kräfte gleich dem Moment der als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen sein muß. Demnach ist

$$M = \int (z\tau_{xy} - y \cdot \tau_{xz})\, df = -\int \left(z \cdot \frac{\partial F\,(y,z)}{\partial z} + y\,\frac{\partial F\,(y,z)}{\partial y} \right) df\,.$$

Mit $df = dy \cdot dz$ erhalten wir

$$M = -\int\!\!\int \left(y\,\frac{\partial F}{\partial y} + z\,\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot dy \cdot dz\,.$$

Nun ist aber

$$\int y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = yF - \int F \cdot dy = -\int F \cdot dy\,,$$

da bei der Integration nach y das Produkt yF zu Null wird, weil F am Querschnittumriß gleich Null wird. Ebenso ist

$$\int z \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz = zF - \int F \cdot dz = -\int F \cdot dz\,,$$

demnach

$$M = 2 \cdot \int\!\!\int F\, dy\, dz\,.$$

Das Doppelintegral stellt einen Körper dar, der dadurch entsteht, daß wir die Spannungsfunktion F als Ordinate über der yz-Ebene auftragen. Ersetzen wir noch F durch $\mu \cdot \xi$, so wird

$$M = 2\,\mu \int\!\!\int \xi\, dy\, dz = 2\,\mu \cdot V\,;$$

hierbei ist das Doppelintegral gleich dem Rauminhalt des Spannungshügels. Auf S. 241 hatten wir der Gleichung für den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel die Form

$$\vartheta = \frac{M}{J_d \cdot G}\,,$$

wobei J_d als Drillungswiderstand bezeichnet wurde. Andrerseits hatte sich bei der Gegenüberstellung (S. 255)

$$2\,G\vartheta = \mu \cdot \frac{p}{s}$$

ergeben; dann liefert die Gleichsetzung beider Werte ϑ

$$J_d = 4 \cdot \frac{s}{p} \cdot V\,;$$

d. h. der Rauminhalt des Spannungshügels ist dem Drillungswiderstande verhältnisgleich.

Über die Benützung dieser Beziehung zur Bestimmung des Drillungswiderstandes durch den Versuch sagt Föppl in Drang und Zwang, Band II, S. 91: „Praktisch wird man dabei so vorgehen, daß man in derselben Gefäßwand zwei verschiedene Öffnungen anbringt, die man mit Seifenhäuten überspannt und von denen die eine kreisförmig ist, während die andere die Gestalt des Querschnittes hat, für den J_d ermittelt werden soll. Dann verhalten sich die beiden Drillungswiderstände zueinander wie die Inhalte der beiden Spannungshügel. Hat man diese ausgemessen, so folgt aus dem Vergleich der gesuchte Drillungswiderstand, da der des kreisförmigen Querschnitts als polares Trägheitsmoment von vornherein bekannt ist."

In dem Forschungsheft Nr. 249 des VdI untersucht C. Weber auch den Einfluß von Rillen und Einkerbungen beim kreisförmigen Querschnitt und stellt fest, daß eine kleine halbkreisförmige Rille im tiefsten Punkte der Rille eine örtliche Erhöhung der Spannung auf den doppelten Betrag der Spannung im rillenfreien Querschnitt erfährt, während eine scharfe Kerbe die örtliche Spannungserhöhung bis zu dem Werte $\tau = \infty$ steigern kann.

Für weitergehende Studien sei dem Leser das genannte Heft neben den Büchern von Föppl und Bach empfohlen.

VIII. Die Schub- oder Scherfestigkeit.

1. Annahme gleichmäßiger Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt.

Kurze, dicke Stäbe, die nach Art der Abb. 182 und 183 belastet sind, erfahren Schubspannungen und Biegungsspannungen; ihre Berechnung gehörte streng genommen unter den Abschnitt der zusammengesetzten Beanspruchung. Wenn die angreifenden Biegungsmomente sehr klein sind, pflegt man die Biegungsspannungen zu vernachlässigen und berechnet Stäbe dieser Art auf Abscheren. Grob wie die Annahme ist auch die Durchführung der Berechnung: wir setzen eine gleichförmige Verteilung der Spannungen voraus, obwohl wir wissen, daß diese Annahme der Wirklichkeit nicht entspricht[1]), und schreiben

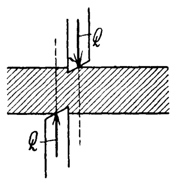


Abb. 182. Abscheren.

$$\tau = \frac{P}{F},$$

wobei P in kg die abscherende Kraft, F in cm^2 der Querschnitt des Stabes und τ in kg/cm^2 die Schubspannung bedeutet. Damit ist auch die Festigkeitsbedingung gegeben

$$\tau = \frac{P}{F} \leqq k_s. \tag{a}$$

Entscheidend für die Brauchbarkeit dieser einfachen Gleichung ist die Wahl der zulässigen Scherspannungs k_s. Offenbar führt die Festigkeitsbedingung (a) zu brauchbaren Ergebnissen, wenn die Scherfestigkeit K_s auf Grund von Versuchen ermittelt ist, die unter gleichen

[1]) Siehe Abschnitt 2.

Vorbedingungen ausgeführt sind, wie es die Abb. 182, 183 zeigen. Gewöhnlich setzt man

$$k_s = 0{,}75\ k_z \text{ bis } 0{,}8\ k_z, \text{ entsprechend } K_s = 0{,}75\ K_z \text{ bis } 0{,}8\ K_z,$$

doch haben die nach Abb. 183 von Bach ausgeführten Versuche ergeben, daß die Scherfestigkeit wesentlich höher liegt. Da nach dem Verfahren der Abb. 182 und 183 weniger die Widerstandsfähigkeit gegen Schub bestimmt wird als die Kraft, die zum Zerschneiden des Stabes aufgewendet werden muß, so spricht man besonders in diesen Fällen von Scherfestigkeit.

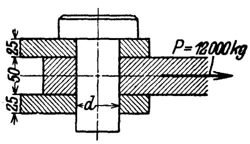


Abb. 183. Abscheren.

Zusammenfassend werden wir sagen dürfen: kurze dicke Stäbe wie Niete und Bolzen werden auf Grund der Festigkeitsbedingung (a) berechnet, wenn durch Versuche die Scherfestigkeit unter gleichen Voraussetzungen ermittelt worden ist. Längere Bolzen sind stets auf Biegung nachzurechnen. Als Anhalt für die Wahl der zulässigen Scherspannung mag nachstehende Zahlentafel dienen.

Scherfestigkeit $K_s = \mu \cdot K_z$.

Eisensorte	μ von	bis	im Mittel
Gußeisen	1,02	1,17	1,10
Schweißeisen in Stäben senkrecht zur Faserrichtung	0,78	0,82	0,80
Schweißeisen in Blechen	0,84 quer	0,87 längs	—
Flußeisen in Stäben senkrecht zur Faserrichtung	0,84	0,87	—

Für den Hochbau setzen die amtlichen Bestimmungen die zulässigen Spannungen fest.

Im wesentlichen beschränkt sich die Anwendung der Festigkeitsbedingung (a) auf die Berechnung von Nietverbindungen. Einen ungefähren Anhalt bietet sie auch bei der Berechnung von Schnitten und Stanzen, doch ist es nicht zulässig, auf Grund der „Scherarbeit" auf den Kraftbedarf von Maschinen zu schließen. Für Rechnungen dieser Art muß auf Versuche verwiesen werden, die zu diesem Zweck angestellt worden sind[1]).

Nietverbindungen. Wir unterscheiden Nietverbindungen im Maschinenbau von den Nietverbindungen des Hochbaues, die man dadurch kennzeichnen kann, daß man sagt, Niete im Maschinenbau müssen fest und dicht sein (Dampfkessel), Niete im Hochbau müssen fest sein. Der Ausführung nach bezeichnet man die Nietverbindungen als ein- und mehrschnittig, je nach der Zahl der Querschnitte, die bei einer Zerstörung abgetrennt werden. Abb. 184 zeigt eine einschnittige, Abb. 185 eine zweischnittige Vernietung. Im ersten Falle bewirkt das unvermeidbare Biegungsmoment eine Formänderung nach Abb. 186.

[1]) Vgl. Fischer: Werkzeugmaschinen. Berlin: Julius Springer.

Die Berechnung gestaltet sich nach der Festigkeitsbedingung (a) recht einfach. Sind n Niete von d cm Durchmesser bei einer einschnittigen Verbindung mit P kg als zu übertragender Kraft vorhanden, so muß sein

$$n \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s \geqq P.$$

Bei einer zweischnittigen Verbindung heißt die Festigkeitsbedingung

$$2\,n \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s \geqq P.$$

Neben der Gefahr des Abscherens besteht für den Niet noch die Gefahr, daß die Pressung am Umfang des Nietschaftes zu groß wird; bei sehr großer Pressung kann das Blech aufreißen. Über die Druckverteilung am Schaft läßt sich nichts Sicheres aussagen, doch dürfen wir zweifellos keine gleichmäßige Verteilung erwarten. Aus dieser Zwangslage befreien wir uns ähnlich so, wie wir es beim Abscheren getan haben: wir rechnen mit einer **mittleren Pressung**, dem sogenannten **Lochleibungsdruck**, den wir bei s cm Blechstärke zu

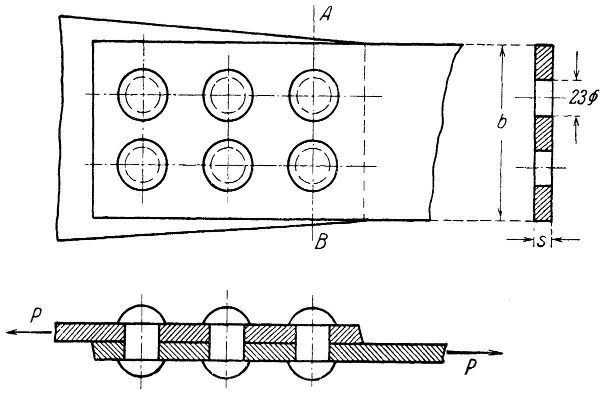


Abb. 184. Einschnittige Vernietung.

$$p = n \cdot \frac{P}{d\,s}$$

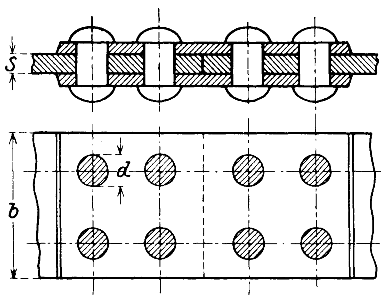


Abb. 185. Zweischnittige Vernietung.

ansetzen; d. h. wir denken uns die halbkreisförmige gedrückte Schaftfläche auf eine Ebene durch die Nietachse projiziert und verteilen die zu übertragende Kraft über diese projizierte Fläche gleichmäßig. Als Festigkeitsbedingung ist

$$p = n \cdot \frac{P}{d \cdot s} \leqq 2\,k_s$$

üblich.

Auf die verschiedenen Ausführungsarten von Nietverbindungen kann hier nicht näher eingegangen werden, die, soweit sie den Maschinenbau betreffen, in den Lehrbüchern über **Maschinenteile**, soweit sie den Hochbau betreffen, in den Lehrbüchern über **Eisenkonstruktionen** ausführlich behandelt werden. Das Grundsätzliche der Berechnung mögen folgende Zahlenbeispiele zeigen.

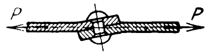


Abb. 186. Formänderung.

Zahlenbeispiele. a) Einschnittige Verbindung nach Abb. 184. Die zu übertragende Kraft sei $P = 24$ t; die zulässige Scherspannung nach S. 20 $k_s = 1000$ kg/cm²; der zulässige Lochleibungsdruck $p = 2000$ kg/cm².

Den Nietdurchmesser nehmen wir unter Beachtung der DJ-Normen zu $d = 23$ mm mit $F = 4{,}15$ cm² Querschnitt an, dann werden erforderlich

$$n = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s} = \frac{24000}{4{,}15 \cdot 1000} = 6$$

Niete. Bei einer Blechstärke von $s = 10$ mm wird der Lochleibungsdruck

$$p = \frac{P}{n \cdot s \cdot d} = \frac{24000}{6 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}3} = 1750 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Zweischnittige Verbindung nach Abb. 185. Der Nietdurchmesser betrage 20 mm mit $F = 3{,}14$ cm² Querschnitt, dann werden erforderlich

$$n = \frac{P}{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s} = \frac{24000}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1000} = 4$$

Niete, die bei einer Blechstärke s = 10 mm einen Lochleibungsdruck

$$p = \frac{P}{n \cdot s \cdot d} = \frac{24000}{4 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}0} = 3000 \text{ kg/cm}^2$$

erfahren. Wir sehen, daß der Lochleibungsdruck zu groß ist, und müßten daraufhin entweder

$$n = \frac{P}{s \cdot d \cdot 2 k_s} = \frac{24000}{1{,}0 \cdot 2{,}0 \cdot 2000} = 6$$

Niete anordnen oder den Durchmesser d größer wählen. Auch eine Erhöhung der Blechstärke drückt den Lochleibungsdruck herunter.

c) Bolzenverbindung nach Abb. 183. Die zu übertragende Kraft sei $P = 12000$ kg; $k_s = 0{,}8 \cdot k_z = 0{,}8 \cdot 1200 = 960$ kg/cm². Da die Nietverbindung zweischnittig ist, wird der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{2 k_s} = \frac{12000}{2 \cdot 960} = 6{,}25 \text{ cm}^2;$$

dem entspricht $d = \approx 30$ mm.

Hier empfiehlt sich das Nachrechnen der Biegungsspannungen. Fassen wir den Bolzen als zweifach gelagerten Stab mit Einzellast auf, so wird nach S. 89 das größte Biegungsmoment

$$M = \frac{P \cdot l}{4}.$$

Bei der Annahme gleichmäßig verteilter Last wird

$$M = \frac{P \cdot l}{8}.$$

Da beide Fälle die Wirklichkeit einschließen, pflegt man mit

$$M = \frac{P \cdot l}{6}$$

zu rechnen und erhält demnach im vorliegenden Fall

$$M = \frac{12000 \cdot 7{,}5}{6} = 15000 \text{ cmkg},$$

das bei $k_b = 1200$ kg/cm² ein Widerstandsmoment

$$W = \frac{15000}{1200} = 12{,}5 \text{ cm}^3$$

erfordert, dem laut Zahlentafel S. 85 ein Durchmesser von $\approx$ 50 mm entspricht. Der lediglich auf Abscheren berechnete Bolzen würde zu schwach sein.

d) Mit einer Winkelschere sollen Walzeisen bis 120 $\times$ 120 $\times$ 15 mm geschnitten werden. Der Stempeldruck ist angenähert zu bestimmen.

Da der Querschnitt $F = 33{,}9$ cm² beträgt, so folgt aus

$$P = F \cdot K_s \qquad P = 33{,}9 \cdot 4500 = 153000 \text{ kg},$$

wenn wir die Scherfestigkeit zu $K_s = 4500$ kg/cm² annehmen.

e) In ein Flußeisenblech sollen zylindrische Löcher von 20 mm Durchmesser gestanzt werden. Es ist die größte Blechstärke zu berechnen unter der Annahme, daß die Druckfestigkeit des Stahlstempels $K = 12000$ kg/cm² und die Scherfestigkeit des Bleches $K_s = 4000$ kg/cm² beträgt.

Angenähert ist

$$P = \pi \cdot d \cdot s \cdot K_s,$$

woraus mit $P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot K$ als größte Blechstärke

$$s = \frac{K \cdot d}{4 \cdot K_s} = \frac{12000 \cdot 2}{4 \cdot 4000} = 1{,}5 \text{ cm}$$

folgt.

2. Schubspannungen bei gleichzeitig auftretender Biegung.

Wie bereits betont, tritt neben der Schubkraft stets ein biegendes Moment auf. Davon ausgehend wollen wir versuchen, einen Anhalt über die wirkliche Verteilung der Schubspannungen zu gewinnen.

Da die Schubspannungen von Flächenelement zu Flächenelement des Querschnittes veränderlich sein werden, läßt sich zunächst nur aussagen, daß die Summe der Produkte aus Spannung und Flächenteilchen eine Mittelkraft ergeben muß, die gleich der angreifenden Querkraft Q, aber von entgegengesetzter Richtung sein muß. Aus unseren Ausführungen über die Schubspannungen (S. 235) übernehmen wir die Bedingung, daß die Schubspannungen tangential zur Umrißlinie des Querschnittes gerichtet sind. Setzt man einen beliebig geformten Querschnitt voraus (Abb. 187) mit der Einschränkung, daß die Wirkungslinie der Querkraft Q Symmetrieachse des Querschnittes sein möge, dann erfahren die Punkte A und A' der Faserschicht $A\,A'$ in der Entfernung z von der Schwerachse yy Schubspannungen, die sich in einem Punkte C auf der Wirkungslinie von Q schneiden. Nach unsern Vereinbarungen (S. 207) ist τ_x die tangential gerichtete Schubspannung, ihre Seitenspannungen sind $\tau_{xy} = \tau_x \cdot \sin\varphi$ und $\tau_{xz} = \tau_x \cdot \cos\varphi$, während τ_x selbst

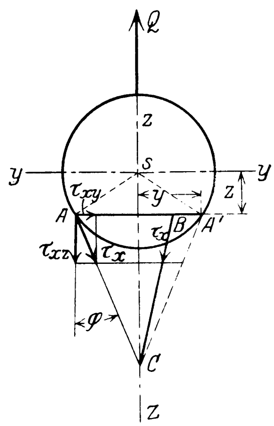


Abb. 187. Schubspannungen.

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2}$$

ist. Ein beliebiger Punkt B der Faserschicht $A\,A'$ erfährt Schubspannungen, von denen wir annehmen wollen, daß sie ebenfalls nach dem Punkte C der z-Achse gerichtet sein mögen. Diese Annahme ist allerdings nicht sicher begründet, aber sie ist wahrscheinlich und die einfachste, die sich darbietet. Zerlegen wir die Schubspannung in B ebenfalls nach den Achsenrichtungen y und z, so sollen weiter die Teilspannungen τ_{xz} für jeden Punkt der Faserschicht AA' gleich groß sein. Diese Annahme ist weit bedenklicher als die erste, vereinfacht aber die Betrachtungen sehr. Nach unserer Grundgleichung (S. 211) ist nun

$$\tau_{xz} = \tau_{zx},$$

d. h. die Schubspannungen treten paarweise in zwei zu einander senkrechten Ebenen auf und sind von gleicher Größe. Betrachten wir τ_{zx}, das in die Richtung der Stabachse fällt, so läßt sich die gestellte Aufgabe auf eine Aufgabe der Biegungsfestigkeit zurückzuführen.

Würde der Stab der Abb. 188 oberhalb der Faserschicht ab festgehalten, so würden die infolge des Momentes $Q \cdot x$ auftretenden Spannungen in Richtung der Stabachse den unteren Stabteil gegen den oberen zu verschieben suchen. Auf der rechten Seite ac des unendlich schmalen Stabteilchens $abcd$ wirken die Spannungen σ_r, auf der linken Seite bd die Spannungen σ_l, die wir wie üblich als äußere Kräfte auffassen. In Beziehung auf die Flächen ac und bd haben sie Mittelkräfte von der Größe

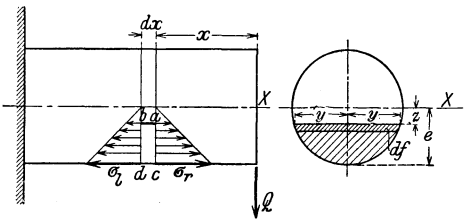


Abb. 188. Schubspannungen.

$$N_r = \int \sigma_r \cdot df \quad \text{und} \quad N_l = \int \sigma_l \cdot df,$$

wenn wir mit σ die Normalspannungen im Abstande z von der Schwerachse bezeichnen. Nach der Grundgleichung S. 142, ist aber

$$\sigma_r = \frac{M_x}{J} \cdot z \quad \text{und} \quad \sigma_l = \frac{M_x'}{J} \cdot z,$$

wobei M_x das Biegungsmoment im Punkte x, M_x' das Biegungsmoment im Punkte $(x + dx)$ bedeutet. Die Differenz der beiden Normalkräfte N ist aber die Kraft, die die Faserschicht ab gegen den festgehalten gedachten oberen Stabteil zu verschieben sucht; es wird

$$N = N_l - N_r = \int_z^e \frac{M_x'}{J} \cdot z \cdot df - \int_z^e \frac{M_x}{J} \cdot z \cdot df = \left(\frac{M_x'}{J} - \frac{M_x}{J}\right) \cdot \int_z^e z \cdot df.$$

Das Integral ist als Summe der Produkte aus Flächenteilchen und Abstand von einer Achse gleich dem statischen Moment des gestrichelten Querschnittsteiles, bezogen auf die Schwerachse yy. Bezeichnet man diesen Wert mit S, so wird

$$N = \frac{S}{J}(M_x' - M_x),$$

was mit

$$M_x' - M_x = Q \cdot dx$$

übergeht in
$$N = \frac{Q \cdot dx \cdot S}{J}.$$

Die über die Faserschicht ab gleichförmig verteilte Schubspannung τ_{xz} wird dann
$$\tau_{xz} = \frac{N}{2y \cdot dx} = \frac{Q \cdot S}{J \cdot 2y}.$$

Aus $\tau_{xz} = \tau_x \cdot \cos\varphi$ folgt für die Randspannung
$$\tau_x = \frac{Q \cdot S}{J \cdot 2y \cos\varphi}.$$

Hierin ist J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, bezogen auf die zur Wirkungslinie von Q senkrecht stehende Schwerachse yy; S das statische Moment des gestrichelten Querschnittsteiles, bezogen auf dieselbe Achse yy.

Wird in dieser Gleichung $z = e$, so wird $S = \int_z^e z\,df = 0$; d. h. die Schubspannung in den äußersten Fasern — von der Achse yy gerechnet — ist gleich Null.

a) Der rechteckige Querschnitt.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 189 wird
$$J = \frac{b h^3}{12},$$
$$S = \int_z^{h/2} df \cdot z = \int_z^{h/2} b \cdot z \cdot dz = b \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_z^{h/2}$$
$$S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right].$$

Demnach erhalten wir für die Schubspannung in der Entfernung z von der Achse
$$\tau_{xz} = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b} = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]}{\frac{b h^3}{12} \cdot b}$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right].$$

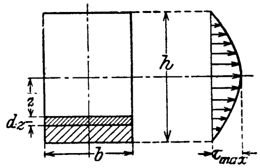


Abb. 189. Rechteck.

Das ist die Gleichung einer Parabel mit der Pfeilhöhe
$$\tau_{xz_{\max}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}.$$

Die größte Schubspannung tritt in der neutralen Faserschicht auf und ist 50% größer als bei der Annahme gleichförmiger Verteilung.

b) Der Kreisquerschnitt.

Nach Abb. 190 ist
$$J = \frac{\pi}{4} r^4; \qquad S = \int 2 yz\,dz.$$

Mit $y = r \cdot \cos\varphi$ und $z = r \cdot \sin\varphi$ wird

$$S = 2\,r^3 \int\limits_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = -\frac{2}{3}\,r^3 \cos^3\varphi \,\Big|_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\,r^3 \cos^3\varphi\,.$$

Damit wird

$$\tau_x = \frac{Q \cdot \frac{2}{3}\,r^3 \cos^3\varphi}{\frac{\pi}{4} \cdot r^4 \cdot 2\,r\,\cos\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} \cdot \cos\varphi\,,$$

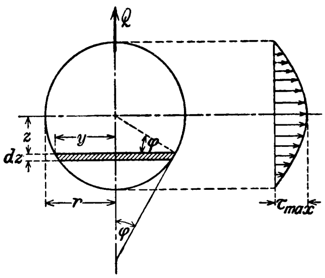


Abb. 190. Kreis.

$$\tau_x = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\,.$$

Für $z = 0$ erhält man

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}\,.$$

Das Schaubild der Spannungsverteilung zeigt als Begrenzungslinie eine Ellipse. Die maximale Spannung ist um $33^1/_3\,\%$ größer als bei gleichmäßiger Verteilung.

Für den Kreisring ist bei verhältnismäßig geringer Wandstärke

$$\tau_{\max} = 2 \cdot \frac{Q}{F}\,.$$

Sämtliche Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Schubzahl unveränderlich ist, und daß der Querschnitt keine plötzlichen Übergänge hat. So liefern die Gleichungen z. B. für den Steg eines I-Eisens zutreffende Werte, doch dürfen sie nicht auf die Flanschen angewendet werden, da die Forderung tangentialer Schubspannungen am Umfange für die Innenseiten der Flanschen τ_{xz} gleich Null ergeben würde.

Beispiele. 1. Der Stoß eines vollwandigen Trägers (Abb. 191) hat eine Querkraft $Q = 15000$ kg aufzunehmen; $\tau_{\max}$ ist zu bestimmen.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{15000}{2 \cdot 1{,}3 \cdot 24} = \approx 362 \text{ kg/cm}^2\,.$$

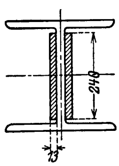


Abb. 191. Stoß.

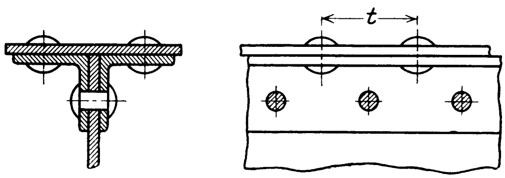


Abb. 192. Gurtniete.

2. Bei dem genieteten Vollwandträger (Abb. 192) müssen die Gurtniete, die durch das Stahlblech gehen, die Schubspannungen übertragen. Der Fall liegt ähnlich wie in Abb. 188, nur tritt an die Stelle von dx jetzt der endliche Abstand t. Unsere Gleichung

$$N = \frac{Q \cdot dx \cdot S}{J} \quad \text{geht über in} \quad N = \frac{Q \cdot t \cdot S}{J}\,,$$

wobei S das statische Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittsteiles, bezogen auf die Nullinie des ganzen Querschnittes, bedeutet.

3. Formänderung infolge der Schubspannungen.

Nach dem Geradliniengesetz für Schubspannungen gehört zu der Spannung τ_{xz} die Winkeländerung

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}\,.$$

Im allgemeinen Falle der Biegung, bei der Moment- und Querkraft in einem Querrschnitt auftreten, erfahren die Randfasern die größten Biegungsspannungen, die neutrale Faserschicht dagegen die größten Schubspannungen. Wir betrachten den Trägerteil AB von der Länge dx (Abb. 193), dessen rechteckig angenommener Querschnitt die nebenstehenden Spannungsschaubilder aufweist. Die in der neutralen Faser AB herrschende Schubspannung $\tau_{\max}$ ändert den rechten Winkel, den die Stabachse mit dem Querschnitt im spannungslosen Zustande bildet, um den Betrag

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{bh\cdot G}\,.$$

Die Verschiebung, die der Punkt B gegen den Punkt A erfährt, ist

$$BB' = \gamma_{\max}\cdot dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q\cdot dx}{bh\cdot G}\,,$$

während sich ein Punkt J im Abstande z von der Nullinie um

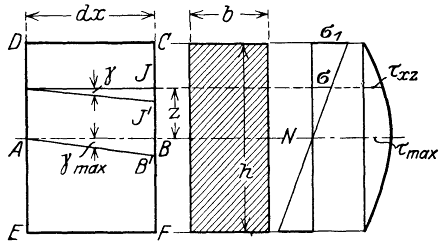


Abb. 193. Formänderung infolge der Schubspannungen.

$$JJ' = \gamma\cdot dx = \frac{\tau_{xz}}{G}\cdot dx$$

verschiebt. Durch Division beider Verschiebungen erhält man

$$JJ' = BB'\cdot\frac{\tau_{xz}}{\tau_{\max}}\,.$$

In den äußersten Fasern CD und EF sind die Schubspannungen gleich Null; sie erfahren also keine Winkeländerungen, d. h. die Punkte C und F verschieben sich nicht. Soll das tatsächlich der Fall sein, so müßte BC eine Verlängerung, BF dagegen eine Verkürzung erfahren, ohne daß Spannungen auftreten, die diese Längenänderungen hervorrufen. Hält man fest, daß BC und BF ihre ursprüngliche Länge behalten, so kommt man zu der Überzeugung, daß sich die Querschnitte S-förmig krümmen müssen. Die bei der Biegung gemachte Voraussetzung vom Ebenbleiben der Querschnitte wird hinfällig, wenn wir den Einfluß der durch die Querkraft hervorgerufenen Schubspannungen berücksichtigen.

Wir betrachten den einfachen Fall des Trägers auf zwei Stützen, der durch eine Einzellast P in der Mitte belastet ist; die Querkraftfläche ist in Abb. 194 dargestellt und zeigt eine positive und eine gleich große negative Teilfläche. Infolge der durch die Querkräfte hervorgerufenen Schubspannungen erfährt die im unbelasteten Zustande gerade Stabachse eine Formänderung, die in Abb. 194 wiedergegeben ist; sie stellt sich dar als eine gebrochene Linie, deren beide Äste den Winkel $2\gamma'$ mit einander bilden. Es handelt sich jetzt darum, den Winkel γ' zu bestimmen, der von $\gamma_{\max}$ (Abb. 193) verschieden sein wird. Fest steht, daß zwei Querschnitte im Abstande dx durch die Querkraft Q gegeneinander verschoben werden. Die bei dieser Verschiebung von Q geleistete Arbeit ist

$$dA = \frac{1}{2} Q \cdot \gamma' dx,$$

wenn wir allmähliches Anwachsen der Last voraussetzen. Andrerseits ist die von den Schubspannungen τ geleistete Arbeit

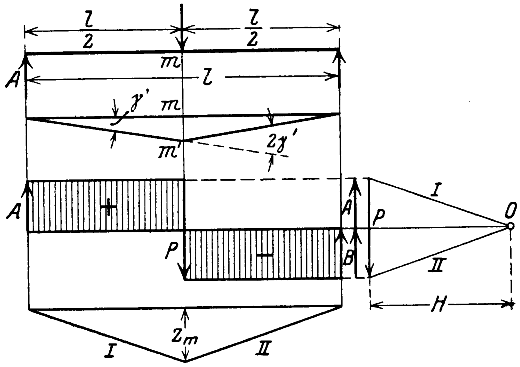


Abb. 194. Verschiebung.

$$dA = dx \cdot \int \frac{\tau^2}{2G} \cdot dF.$$

Die Gleichsetzung beider Arbeiten liefert

$$\gamma' = \frac{1}{QG} \int \tau^2 \cdot dF.$$

Damit wird die zusätzliche Senkung des Punktes m

$$mm' = \frac{l}{2} \cdot \gamma'$$

$$= \frac{l}{2QG} \cdot \int \tau^2 \cdot dF,$$

wenn wir τ für τ_{xz} setzen.

Für den rechteckigen Querschnitt hatten wir S. 263 als Gesetz, nach dem sich die Schubspannungen über den Querschnitt verteilen,

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$$

gefunden, das mit $dF = b \cdot dz$

$$\int \tau^2 \cdot dF = 2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh}\right)^2 \int_0^{h/2} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]^2 \cdot b \cdot dz$$

ergibt. Die Zerlegung liefert

$$\int \tau^2 \cdot dF = \frac{9}{2} \cdot \frac{Q^2}{b^2 h^2} \left\{\int b\,dz - 2\int \frac{4z^2}{h^2} b\,dz + \int \frac{16z^4}{h^4} b\,dz\right\}_{z=\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{Q^2}{b^2 h^2} \left\{bz - 8\frac{b}{h^2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{16\,b}{h^4} \cdot \frac{z^5}{5}\right\}_{z=0}$$

$$\int \tau^2 \cdot dF = 1{,}2 \cdot \frac{Q^2}{bh},$$

so daß wir mit $Q = \frac{P}{2}$ als zusätzliche Senkung des Punktes m

$$mm' = 0{,}3\frac{P \cdot l}{bh \cdot G} = 0{,}3\frac{P \cdot l}{F \cdot G}$$

erhalten. Da mm' mit der ersten Potenz von l wächst, während die Durchbiegung von der dritten Potenz abhängig ist, dürfen die von den Schubspannungen herrührenden Senkungen bei langen Stäben vernachlässigt werden. Bei kurzen, dicken Stäben empfiehlt sich eine Nachrechnung. (Siehe S. 288.)

4. Das Aufzeichnen der elastischen Linie.

Nach dem Vorschlage von R. Land setzen wir

$$\frac{Q^2}{\int \tau^2 \cdot dF} = F'$$

und schreiben damit

$$\gamma' = \frac{Q}{F' \cdot G}.$$

Die Verschiebung zweier Querschnitte im Abstande dx wird dann

$$d\delta_q = \gamma' \cdot dx = \frac{Q \cdot dx}{F' \cdot G}.$$

Der Zeiger q der Senkung δ soll andeuten, daß diese Senkung durch die Querkraft hervorgerufen wird. Dann verschieben sich zwei Querschnitte im Abstande x um den Betrag

$$\delta_q = \int_0 \frac{Q \cdot dx}{F' \cdot G} = \frac{1}{F' \cdot G} \int_0^x Q \cdot dx .$$

Aus dieser Gleichung entnehmen wir die zeichnerische Darstellung der elastischen Linie als Seillinie zu der Querkraftfläche als Belastungsfläche, wie wir sie in ähnlicher Weise bei der Kurve der Verdrehungen (Abb. 172) bereits gezeichnet haben. Mit H als Polweite wird (Abb. 194)

$$mm' = \delta_{mq} = \frac{1}{F' \cdot G} \cdot H \cdot z_m .$$

Die Maßstäbe lauten für H . . . . 1 mm $= a$ kg,
für z . . . . 1 mm $= b$ cm.

Das sind aber die Längen- und Kräftemaßstäbe der Zeichnung, so daß sich die zeichnerische Berechnung der zusätzlichen Senkungen besonders einfach gestaltet.

Bezeichnet man die durch eine gleichmäßig verteilte Spannung τ erzeugte Winkeländerung mit γ_m, so wird

$$\gamma_m = \frac{Q}{F \cdot G} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma'}{\gamma_m} = \frac{F}{F'} = \varkappa .$$

$\varkappa$ heißt Schubverteilungszahl und ist mit $F' = \dfrac{Q^2}{\int \tau^2 dF}$

$$\varkappa = \frac{F}{Q^2} \int \tau^2 dF ;$$

sie ist eine Verhältniszahl, die größer als 1 ist, und muß für jeden Querschnitt besonders berechnet werden. Für den rechteckigen Querschnitt ist $\varkappa = 1,2$, was wir unmittelbar aus

$$\int \tau^2 dF = 1{,}2 \cdot \frac{Q^2}{b \cdot h} = 1{,}2 \cdot \frac{Q^2}{F}$$

erhalten.

Bei genieteten vollwandigen Blechträgern mit 9 mm Stehblechstärke, vier Gurtwinkeln und je zwei Gurtplatten von 220 · 9 mm Querschnitt hat v. Tetmajer[1]) in Abhängigkeit von der Trägerhöhe h folgende Zahlen gefunden

$h =$	40	50	60	70	cm
$\varkappa =$	2,96	2,71	2,49	2,35	

Eine zeichnerische Darstellung der Verteilungszahl $\varkappa$ hat Ritter[2]) angegeben.

IX. Die Knickfestigkeit.

Die Erfahrung lehrt, daß die Spitze eines nach Abb. 195 belasteten Stabes ausweicht und daß sich trotz der deutlich sichtbaren Formänderung eine neue Gleichgewichtslage einstellt. Eine Steigerung der Last ist aber nur bis zu einem bestimmten Betrage möglich; wird dieser Grenzwert um ein weniges überschritten, so knickt der Stab zusammen, die Spitze senkt sich bis auf den Boden. Wiederholte Versuche haben gezeigt, daß dieser Grenzwert bei gleichen Stäben stets gleich bleibt. Man nennt die Kraft P, bei der das Knicken erfolgt, die Knicklast und bezeichnet sie mit P_k.

Einen Bruchteil der Knicklast wählt man als zulässige Belastung und setzt

$$P = \frac{P_k}{\mathfrak{S}},$$

wobei $\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken bedeutet.

1. Die Eulerschen Knickgleichungen.

In Abb. 195 sei l die Länge des Stabes in cm, J das kleinste axiale Trägheitsmoment des Stabes in cm^4, E das Dehnmaß des Baustoffes in kg/cm^2, P die Belastung des freien Endes in kg, dann lautet die Gleichung der elastischen Linie des gebogenen Stabes (vgl. S. 144)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EJ} \cdot M = \frac{1}{EJ} \cdot P(f - y).$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung geht mit

$$f - y = -z; \quad y = f + z; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

über in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{P}{EJ}(-z) = -\frac{z}{a^2},$$

[1]) v. Tetmajer: Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 3. Aufl. 1905.

[2]) Ritter: Anwendungen der graphischen Statik. 1888.

wenn wir
$$\frac{P}{EJ} = \frac{1}{a^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{1}{a}$$
setzen.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist
$$z = A \cdot \sin\frac{x}{a} + B \cdot \cos\frac{x}{a} = y - f\,.$$
Die Festwerte A und B erhalten wir aus der Bedingung
$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad y = 0 \quad \text{für} \quad x = 0\,.$$
Aus
$$\frac{dy}{dx} = A \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos\frac{x}{a} - B \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin\frac{x}{a}$$
ergibt sich mit $x = 0$
$$A = 0,$$
und aus
$$y - f = A \cdot \sin\frac{x}{a} + B \cdot \cos\frac{x}{a} = 0 \ \text{ für } \ x = 0$$
folgt
$$B = -f\,.$$
Damit erhalten wir als Gleichung der elastischen Linie
$$y = f - f \cdot \cos\frac{x}{a} = f\left(1 - \cos\frac{x}{a}\right).$$
Nun muß aber für $x = l$ $y = f$ sein. Setzt man diese Werte ein, so wird
$$f = f\left(1 - \cos\frac{l}{a}\right) \quad \text{oder} \quad \cos\frac{l}{a} = 0\,.$$
Daher ist
$$\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2} + n\pi\,,$$
wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Für $n = 0$ ist
$$\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2}\,, \quad \frac{l^2}{a^2} = \frac{\pi^2}{4} = \frac{P l^2}{EJ}\,,$$

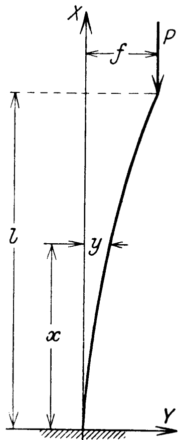


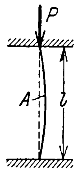
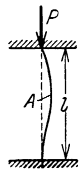
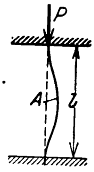
Abb. 195. Knickfestigkeit.

folglich die Knicklast
$$P = P_k = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}\,.$$
In ähnlicher Weise kann die Knicklast für die in der Tafel (S. 270) angegebenen Belastungsfälle 2, 3 und 4 ermittelt werden.

In die Gleichungen von Euler hat man für J das kleinste Trägheitsmoment des Stabes einzusetzen, weil der Stab nach der Richtung des geringsten Widerstandes ausknicken wird.

Für die weiteren Umformungen würden sich entsprechend den verschiedenen Belastungsfällen stets vier verschiedene Formeln ergeben. Um das zu vermeiden, ist man übereingekommen, die Knickformel allgemein

Tafel.

	Ein Stabende eingespannt, das andere frei beweglich	Grundfall: Freie in der Achse geführte Stabenden	Ein Stabende eingespannt, das andere frei in der Achse geführt	Eingespannte, in der Achse geführte Stabenden
Darstellung des Belastungsfalles	1.  Abb. 196.	2.  Abb. 197.	3.  Abb. 198.	4.  Abb. 199.
Knicklast $P_k =$	$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{4 \cdot l^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot E J}{l^2}$	$\frac{2\pi^2 \cdot E J}{l^2}$	$\frac{4\pi^2 \cdot E J}{l^2}$

$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{l_0^2}$$

zu schreiben, und nennt l_0 die ideelle Knicklänge.

Vergleich mit den Formeln der Tafel ergibt, daß für

Fall 1	$l_0 = 2\,l$
Fall 2	$l_0 = l$
Fall 3	$l_0 = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,l$
Fall 4	$l_0 = 0{,}5\,l$

ist.

Im folgenden bedeutet, falls nichts anderes bemerkt ist, l stets die ideelle Knicklänge l_0.

Aus

$$P = \frac{P_k}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi^2 \cdot E J}{\mathfrak{S} \cdot l^2} \quad \text{ergibt sich} \quad J_{\min} = \frac{\mathfrak{S}}{\pi^2 \cdot E} \cdot P \cdot l^2$$

als kleinstes axiales Trägheitsmoment des Querschnittes. Setzt man die Last in t, die Länge in m ein, d. h. ist $P = (P_1 \cdot 1000)$ kg; $l = (l_1 \cdot 100)$ cm, so wird

$$J_{\min} = \frac{\mathfrak{S} \cdot 1000 \cdot 100^2}{\pi^2 \cdot E}\, P_1 \cdot l_1^2 .$$

In nachstehender Tafel sind die auf Grund vorstehender Gleichung berechneten kleinsten Trägheitsmomente bei den zurzeit üblichen Sicherheitsgraden angegeben, und zwar bezeichnet

P die zulässige Belastung in kg (gegebene Last);
P_1 die zulässige Belastung in t (gegebene Last);
l_1 die ideelle Knicklänge in m;
b die kleinere Seite des rechteckigen Querschnittes in m;
d den Durchmesser des kreisförmigen Querschnittes in m;
$\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken.

Tafel.

Bezeichnungen	Gußeisen	Schweiß-eisen	Fluß-eisen	Fluß-stahl	Holz
Druckfestigkeit K in kg/cm²	7500	3750	4400	6250	280
Zulässige Druckspannung in kg/cm²	500	1080	1200	1400	60
Elastizitätsmaß E in kg/cm	1000000	2000000	2150000	2200000	100000
Sicherheitsgrad $\mathfrak{S}$	8[1])	5	5[2])	5	10
$J_{\min}$	$\frac{P l_1^2}{125} = 8 \cdot P_1 \cdot l_1^2$	$\frac{P l_1^2}{400} = 2{,}5 \cdot P_1 \cdot l_1^2$	$\frac{P l_1^2}{430} = 2{,}33\, P_1 l_1^2$	$\frac{P l_1^2}{445} = 2{,}24\, P_1 l_1^2$	$\frac{P l_1^2}{10} = 100\, P_1 l_1^2$

Für gedrückte Fachwerkstäbe bei Hochbauten sind die preußischen Bestimmungen maßgebend. Liegen keine Vorschriften vor, so pflegt man auf die Art der Einspannung in der Weise Rücksicht zu nehmen, daß man nach v. Tetmajer und v. Emperger die Knicklänge l_0 als Bruchteil der Gesamtlänge l in die Rechnung einführt und setzt

$$l_0 = \alpha l\,,$$

wobei zu wählen ist

$\alpha = 0{,}95$ bei mäßiger Einspannung des einen und freier Führung des anderen Endes;
$\alpha = 0{,}9$ bei mäßiger Einspannung beider Enden ;
$\alpha = 0{,}85$ bei guter Einspannung des einen und mäßiger Einspannung des andern Endes;
$\alpha = 0{,}8$ bei guter Einspannung beider Enden;
$\alpha = 0{,}7$ bei gedrückten Fachwerkstäben, die durch Niete angeschlossen sind.

2. Gültigkeitsgrenze der Eulerschen Gleichungen.

Neuere Versuche haben ergeben, daß die Versuchsergebnisse bei langen, dünnen Stäben mit der Theorie gut übereinstimmen, bei kurzen, dicken Stäben dagegen Abweichungen zeigen, die eine Berechnung nach Euler nicht angezeigt erscheinen lassen. Um den Vergleich der Länge l in cm mit dem Trägheitsmoment J in cm⁴ zu ermöglichen, bildet man

$$\frac{l}{i} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{F}}}$$

und nennt diesen Wert das Schlankheitsverhältnis. Die nachstehende Tafel gibt die Grenzwerte $(l:i)$ an, für die die Eulerschen Gleichungen Gültigkeit haben.

[1]) Bei zentraler Belastung.
[2]) Druckglieder für Fachwerkstäbe erfordern lt. Ministerialerlaß vom 31. Januar 1910 $\mathfrak{S} = 4$.

Tafel.

Nr.	Baustoff	Untere Proportionalitätsgrenze in kg/cm² σ_p	Dehnungsmaß in kg/cm² E	Gültigkeitsgrenze $\frac{l}{i} \geqq$
1	Holz.	150	100000	80
2	Graues Gußeisen	$\sim$ 2000	1000000	70
3	Schweißeisen	1500	2000000	115
4	Flußeisen	2000	2150000	102
5	Flußstahl	2400	2200000	95
6	Beton bei höchstens 50 kg/cm² Spannung	$\sim$ 100	200000	140

3. Die Versuche von v. Tetmajer.

Bezeichnet man die Knickspannung mit

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F},$$

so wird, wenn $\frac{l}{i}$ kleiner als der Grenzwert der vorstehenden Zahlentafel ist, für

$$\text{Flußeisen} \quad \sigma_k = 3100 - 11{,}4 \cdot \frac{l}{i}.$$

$$\text{Gußeisen} \quad \sigma_k = 7760 - 120 \cdot \frac{l}{i} + 0{,}53 \left(\frac{l}{i}\right)^2,$$

$$\text{Schweißeisen} \quad \sigma_k = 3030 - 12{,}9 \cdot \frac{l}{i},$$

$$\text{Flußstahl} \quad \sigma_k = 3350 - 6{,}2 \cdot \frac{l}{i},$$

$$\text{Holz} \quad \sigma_k = 293 - 1{,}94 \cdot \frac{l}{i}.$$

Die Tetmajerschen Formeln eignen sich zur Nachprüfung der Knicksicherheit eines gedrückten Stabes, dessen Abmessungen bekannt sind; eine unmittelbare Ermittlung des erforderlichen Querschnittes ermöglichen sie nicht. Der Sicherheitsgrad gegen Knicken ist

$$\mathfrak{S} = \frac{\sigma_k}{\sigma} = \frac{\sigma_k \cdot F}{P},$$

wenn $\sigma = P : F$ die Druckspannung ist.

4. Die Formeln von Ostenfeld und Natalis.

Ostenfeld setzt für schmiedbares Eisen als zulässige Knickspannung

$$\sigma_k = \sigma_f \left(1 - \frac{x^2}{30000}\right),$$

wobei $x = \frac{l}{i}$; σ_f die Fließgrenze gleich 2800 kg/cm² und $\frac{1}{30000}$ eine Konstante bedeuten, die sich aus den Versuchen Tetmajers ergibt.

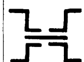
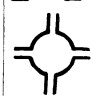
Soll der Querschnitt des Stabes ermittelt werden, so empfiehlt sich die Form

$$F = F_0 + \frac{\beta \cdot l^2}{30000},$$

wenn $F_0 = \frac{P}{k}$ gleich dem erforderlichen Querschnitt infolge der Druckbelastung ist und $\beta = \frac{F^2}{J_{\min}}$ einen Wert bedeutet, der nur von der Form des Querschnittes abhängig ist; die Formel gilt für $F < 2\,F_0$; für $F > 2\,F_0$ ist die Eulersche Gleichung zu benutzen.

Zur vorläufigen Bestimmung des Querschnittes dient nachstehende Tabelle für die Größe β; sind F und $J_{\min}$ gefunden, so ist die Rechnung mit dem genauen Wert β zu wiederholen.

Tabelle für die Werte β.

Nr.	Volle Querschnitte		Nr.	Zusammengesetzte Querschnitte		
	Form	Größe von β		Form		Größe von β
1	Ein Quadrat ■	12,0	12		4 Winkel mit etwa 1 cm Zwischenraum	4,0
2	„ Rechteck $h > b$	$12\frac{h}{b}$				
3	„ Kreis ●	4π	13		2 U-Eisen mit etwa 1 cm Zwischenraum	6,0
4	„ Kreisring ϱ ○: $\delta = 0{,}20\,\varrho$	2,50				
5	$\delta = 0{,}15\,\varrho$	1,87				
6	$\delta = 0{,}10\,\varrho$	1,25	14		$J_x = J_y$	1,2
7	$\delta = 0{,}05\,\varrho$	0,63				
8	„ ⊏-Eisen	7,0	15		4 Z-Eisen mit einem Flacheisen	2,2
9	„ I-Eisen	10,0				
	$b : h$	1:1 | 2:3 | 2:1	16		Quadrant-Eisensäulen ohne Zwischenlage	1,8
10	Ein L-Eisen	6,0 | 7,0 | 11,0				
11	„ ⊥-Eisen	5,0 | — | 7,5				

Natalis setzt

$$\sigma_k = \sigma_f \frac{1 + \mu x^2}{1 + \mu x^2 + \mu^2 x^4}$$

$$\text{mit } \mu = \frac{\sigma_f}{\pi^2 E}.$$

Beispiele. 1. Eine Säule von $l = 4$ m Gesamtlänge ist durch eine Kraft $P = 10000$ kg axial belastet. Gesucht sind die Abmessungen des Querschnittes.

a) Baustoff: Holz mit $\mathfrak{S} = 10$ und $k = 60$ kg/cm². Das erforderliche kleinste Trägheitsmoment ist

$$J_{\min} = 100 \cdot P_1 \cdot l^2 = 100 \cdot 10 \cdot 4^2 = 16000 \text{ cm}^2.$$

1. Ein unbearbeiteter Baumstamm von $d = 25$ cm Durchmesser hat $J = 19175$ cm⁴ und darf bei Behelfsbauten benutzt werden. Da bei $\mathfrak{S} = 10$ nur $J = 16000$ cm⁴ nötig ist, so hat der Stamm eine Knicksicherheit nach Euler

$$\mathfrak{S} = 10 \cdot \frac{19175}{16000} = \approx 12.$$

Die in dem Stabe auftretende Druckspannung ist

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{10000}{491} = \approx 21 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Schlankheitsverhältnis wird mit

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{19175}{491}} = 6{,}25 \text{ cm},$$

$$\frac{l}{i} = \frac{400}{6{,}25} = 64 \quad \text{und das ist} \quad < 80\,;$$

d. h. die Anwendung der Eulerschen Gleichung ist unzulässig. Nach v. Tetmajer ist

$$\sigma_k = 293 - 1{,}94 \cdot \frac{l}{i} = 293 - 1{,}94 \cdot 64 = 169 \text{ kg/cm}^2,$$

also wird

$$\mathfrak{S} = \frac{169 \cdot 491}{10000} = \approx 8$$

sein. Da $\mathfrak{S} = 10$ verlangt ist, müßte $d = 30$ cm mit $J = 39761$ cm^4 und $F = 707$ cm^2 gewählt werden; dem entspricht

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{39761}{707}} = 7{,}5 \text{ cm}, \quad \text{also} \quad \frac{l}{i} = \frac{400}{7{,}5} = 53{,}3,$$

$$\sigma_k = 293 - 1{,}94 \cdot 53{,}3 = 189 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \frac{189 \cdot 707}{10000} = 13{,}4.$$

2. Es soll geprüft werden, ob ein vorhandener Balken von $24 \cdot 26$ cm benutzt werden darf. Das kleinste Trägheitsmoment dieses rechteckigen Querschnittes ist

$$J_{\min} = \frac{26 \cdot 24^3}{12} = 29952 \text{ cm}^4.$$

Die Sicherheit gegen Knicken nach Euler ist

$$\mathfrak{S} = 10 \cdot \frac{29952}{16000} = 18{,}7.$$

Mit

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{29952}{24 \cdot 26}} = 6{,}95 \text{ cm} \quad \text{wird} \quad \frac{l}{i} = \frac{400}{6{,}95} = 57{,}6.$$

Auch hier versagt die Eulersche Gleichung; nach v. Tetmajer hat der Balken

$$\sigma_\kappa = 293 - 1{,}94 \cdot 57{,}6 = 181 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{bei} \quad \mathfrak{S} = \frac{181 \cdot 24 \cdot 26}{10000} = 11{,}3.$$

3. Es sind zwei Balken $18 \cdot 18$ cm vorhanden. Jeder Balken muß für die halbe Last knicksicher sein, das erfordert

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10 \cdot 4^2 = 8000 \text{ cm}^4.$$

Vorhanden ist

$$J = \frac{18 \cdot 18^3}{12} = 8748 \text{ cm}^4, \quad \text{mithin} \quad \mathfrak{S} = 10 \cdot \frac{8748}{8000} = 11.$$

Mit

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{8748}{18 \cdot 18}} = 5{,}2 \text{ cm} \quad \text{wird} \quad \frac{l}{i} = \frac{400}{5{,}2} = 77 < 80.$$

Nach v. Tetmajer haben die Balken

$$\sigma_k = 293 - 1{,}94 \cdot 77 = 143{,}6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{bei} \quad \mathfrak{S} = \frac{143{,}6 \cdot 18 \cdot 18}{5000} = 9{,}3;$$

da $\mathfrak{S} = 10$ verlangt wird, dürfen sie nicht benutzt werden.

b) Baustoff: Flußeisen mit $\mathfrak{S} = 5$. Erforderlich ist

$$J_{\min} = 2{,}33 \cdot 10 \cdot 4^2 = 373 \text{ cm}^4 .$$

1. H-Eisen NP 29 mit $J_{\min} = J_y = 406 \text{ cm}^4$; $\mathfrak{S} = 5 \cdot \frac{406}{373} = 5{,}5$.

2. H-Eisen (Differdinger) 14 B mit $J_{\min} = J_y = 438 \text{ cm}^4$; $\mathfrak{S} = 5 \cdot \frac{438}{373} = 5{,}9$.

3. L-Eisen $150 \cdot 150 \cdot 16$ mit $J_y = 391 \text{ cm}^4$; $\mathfrak{S} = 5 \cdot \frac{391}{373} = 5{,}2$.

4. [-Eisen NP 28 mit $J_y = 399 \text{ cm}^4$; $\mathfrak{S} = 5 \cdot \frac{399}{373} = 5{,}3$.

5. Volles Rohr aus Quadranteisen Nr. 5 mit $J_{\min} = 576 \text{ cm}^4$ und $\mathfrak{S} = 5 \cdot \frac{576}{373} = 7{,}7$.

6.][-Eisen NP 10 (Abb. 200). Die **U**-Eisen werden so weit auseinander gerückt, daß die Trägheitsmomente, bezogen auf die wagerechte und senkrechte Hauptachse, gleich groß sind. Dann ist

$$J_I = 2 \cdot J_x = J_{II} ,$$

wobei J_x das der Tabelle zu entnehmende Trägheitsmoment bedeutet. Man findet demnach die Profilnummer, indem man in der Spalte J_x der Tabelle die Zahl sucht, die gegen

$$\frac{1}{2} \cdot J_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 373 = 187 \text{ cm}^4$$

die nächsthöhere ist. Das ist 206; sie gehört zu NP 10. Beide **U**-Eisen haben ein Gesamtträgheitsmoment von

$$J_I = J_{II} = 2 \cdot 206 = 412 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = 5 \cdot \frac{412}{373} = 5{,}5 .$$

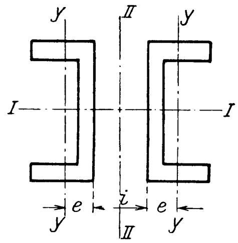


Abb. 200.][-Eisen.

Wie weit die **U**-Eisen auseinanderzusetzen sind, damit die Trägheitsmomente, bezogen auf die Hauptachsen, gleich groß sind, ist in manchen Tabellen angegeben. Durch Rechnung findet man den Abstand i auf folgende Weise:

$$J_{II} = J_I = 2 \cdot J_x \quad \text{oder} \quad 2\left[J_y + F\left(\frac{i}{2} + e\right)^2\right] = 2 \cdot J_x ,$$

$$F\left(\frac{i}{2} + e\right)^2 = J_x - J_y , \quad \text{daraus} \quad \left(\frac{i}{2} + e\right)^2 = \frac{J_x - J_y}{F} ,$$

$$\frac{i}{2} + e = \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}} \quad \text{oder} \quad \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}} - e .$$

Mit den Abmessungen der Profilnummer 10 wird

$$\frac{i}{2} = \sqrt{\frac{206 - 29{,}3}{13{,}5}} - 1{,}55 = 2{,}07 \text{ cm} ; \quad \text{also} \quad i = 2 \cdot 20{,}7 = 41{,}4 \text{ mm} .$$

Wollte man beide **U**-Eisen ohne Querverbindungen einfach nebeneinander stellen, so müßte jedes für die halbe Last knicksicher sein, müßte also

$$J_y \geqq \frac{1}{2} J_{\min} \quad \text{oder} \quad J_y \geqq 187 \text{ cm}^4$$

haben. Das erforderte aber zwei **U**-Eisen NP 22 mit $J_y = 197 \text{ cm}^4$. Sorgt man dafür, daß beide **U**-Eisen in bestimmten Abständen durch Winkeleisen oder Bandeisen verbunden werden, wie es Abb. 201 für zwei **U**-Eisen NP 26 zeigt, so genügen zwei **U**-Eisen NP 10. Die freie Länge a darf nicht größer sein, als dem $J_y = 29{,}3 \text{ cm}^4$ für NP 10 entspricht; sie berechnet sich aus

$$J_y = \frac{1}{2} \cdot 2{,}33 \cdot P_1 \cdot a^2 \text{ zu } a = \sqrt{\frac{J_y}{\frac{1}{2} \cdot 2{,}33 \cdot P_1}} = \sqrt{\frac{29{,}3}{2{,}33 \cdot 5}} = 1{,}58 \text{ m} .$$

Es müßten demnach mindestens zwei Querverbindungen vorgesehen werden. Auf alle Fälle tut man gut, für reichliche Verbindungen Sorge zu tragen, da sich ein genieteter Träger niemals so verhalten wird wie ein Stab, der aus einem Stück besteht.

7. Es soll ein ringförmiger Querschnitt verwendet werden. Gewählt werde $D = 100$ mm; $d = 70$ mm; Wandstärke $s = 15$ mm.

$$J = J_{100} - J_{70} = 490{,}9 - 117{,}9 = 373 \text{ cm}^4.$$

Die Sicherheit ist $\mathfrak{S} = 5$, da das erforderliche und das vorhandene Trägheitsmoment gleich groß sind.

8. Eine Säule von 4 m Gesamtlänge ist durch eine in der Achse angreifende Kraft $P = 30000$ kg belastet. Sie soll aus zwei **U**-Eisen hergestellt werden, die außer den Kopf- und Fußverbindungen noch drei Querverbindungen erhalten. Gefordert wird eine $\mathfrak{S} = 4$fache Sicherheit gegen Ausknicken.

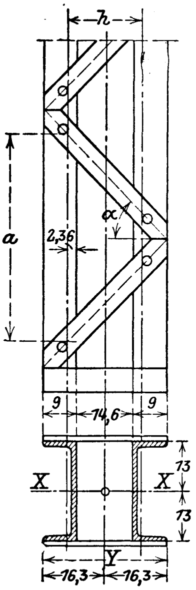


Abb. 201. ⊐⊏-Eisen.

Um einen ungefähren Anhalt für die Abmessungen zu haben, ermittelt man den erforderlichen Querschnitt aus der zulässigen Druckspannung (z. B. $k = 900$ kg/cm²) und erhält

$$F_{\text{erf}} = \frac{30\,000}{900} = 33{,}3 \text{ cm}^2 .$$

Gewählt ⊐⊏-Eisen NP 14 mit $F = 2 \cdot 20{,}4 = 40{,}8$ cm². Die **U**-Eisen werden so angeordnet, daß $J_y = J_x$ wird; der lichte Abstand beträgt 68,1 mm.

Es wird

$$J = 2 \cdot J_x = 2 \cdot 605 = 1210 \text{ cm}^4 ,$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1210}{40{,}8}} = 5{,}44 \text{ cm} .$$

Die Knicklänge ist zu $l_0 = 0{,}9 \cdot l = 360$ cm gewählt (vgl. Tabelle für α S. 271), daher wird

$$x = \frac{l_0}{i} = \frac{360}{5{,}44} = 66{,}2 .$$

Die Gültigkeitsgrenze für die Eulerschen Gleichungen liegt bei $x \geqq 102$ (vgl. Tafel S. 272). Nach der Tetmajerschen Formel S. 272 wird die Knickspannung für Flußeisen

$$\sigma_k = 3100 - 11{,}4 \cdot x = 3100 - 11{,}4 \cdot 66{,}2 = \sim 2345 \text{ kg/cm}^2 ,$$

$$\mathfrak{S} = \frac{\sigma_k}{\sigma} = \frac{\sigma_k \cdot F}{P} = \frac{2345 \cdot 40{,}8}{30\,000} = 3{,}2 .$$

Da der Querschnitt die geforderte Knicksicherheit nicht hat, werden gewählt ⊐⊏-Eisen NP 18 mit $F = 2 \cdot 28{,}0 = 56{,}0$ cm²; $J = 2\,J_x = 2 \cdot 1354 = 2708$ cm⁴ bei einem lichten Abstand der beiden **U**-Eisen von 94,7 mm.

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2708}{56}} = 6{,}97 \text{ cm},$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{360}{6{,}97} = \sim 52 ,$$

$$\sigma_k = 3100 - 11{,}4 \cdot 52 = 2508 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\mathfrak{S} = \frac{2508 \cdot 56}{30\,000} = 4{,}68 .$$

Die Knicksicherheit nach Euler Belastungsfall 1 wäre

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi^2 \cdot E J}{P \cdot l^2} = \frac{9{,}87 \cdot 2\,150\,000 \cdot 2708}{30\,000 \cdot 360 \cdot 360} = 14{,}8\,!$$

Damit ist die Brauchbarkeit des gewählten Querschnittes erwiesen; es muß noch nachgeprüft werden, ob jedes einzelne **U**-Eisen für seine freie Länge zwischen den Querverbindungen ausreichende Knicksicherheit besitzt.

Der Anteil jedes **U**-Eisens beträgt $P = \frac{1}{2}30000 = 15000$ kg. Die Knicklänge ist bei drei Querverbindungen

$$l = \frac{1}{4} \cdot 400 = 100 \text{ cm}.$$

Für den gewählten Querschnitt ist

$$F = 28 \text{ cm}^2; \quad J_{\min} = 114 \text{ cm}^4$$
$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{114}{28}} = 2{,}02 \text{ cm},$$
$$x = \frac{l}{i} = \frac{100}{2{,}02} = 49{,}5\,,$$
$$\sigma_k = 3100 - 11{,}4 \cdot 49{,}5 = \sim 2536 \text{ kg/cm}^2,$$
$$\mathfrak{S} = \frac{2536 \cdot 28}{15\,000} = 4{,}74\,.$$

Nach Euler würde sich ergeben

$$\mathfrak{S} = \frac{9{,}87 \cdot 2\,150\,000 \cdot 114}{15\,000 \cdot 100 \cdot 100} = \sim 16\,!$$

X. Zusammengesetzte Festigkeit.

1. Zug und Biegung.

An einem Stabe, der an dem oberen Ende fest eingespannt ist, wirke die Kraft P im Abstande p von der Stabachse (Abb. 202) so, daß die Wirkungslinie der Kraft P durch eine Hauptachse des Querschnittes geht. Werden in A zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P mit der Stabachse als Wirkungslinie hinzugefügt, so erhält man eine Einzelkraft P in Richtung der Stabachse und ein Kräftepaar mit dem Moment $M = P \cdot p$, dessen Ebene durch die Stabachse geht. Die Einzelkraft P ruft eine Zugspannung σ_z hervor, die gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist; ihre Größe ist

$$\sigma_z = \frac{P}{F}\,.$$

Das Kräftepaar beansprucht den Stab auf Biegung und zwar erfährt die Faser im Abstande e von der y-Achse die Randspannung

$$\sigma_b = \frac{M}{J} \cdot e = \frac{P \cdot p}{J} \cdot e\,,$$

wobei das Trägheitsmoment auf die zu CS senkrechte y-Achse zu beziehen ist. Nach dem Überlagerungsgesetz erhalten wir als Gesamtspannung

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{J} \cdot e \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \frac{P}{F} - \frac{P \cdot p}{J} \cdot e\,.$$

Das Spannungsschaubild (Abb. 202d) zeigt deutlich, daß sich die Nulllinie des Querschnittes verschoben hat.

Für den Fall, daß $\frac{P}{F} > \frac{P \cdot p}{J} \cdot e$ ist, treten in dem Querschnitt nur Zugspannungen auf.

Die Abmessungen des Querschnittes folgen aus der Festigkeitsbedingung

$$\frac{P}{F} + \frac{Pp}{J} \cdot e \leqq k_z .$$

Unterscheidet sich die zulässige Biegungsspannung erheblich von der zulässigen Zugspannung, wie es z. B. bei Gußeisen der Fall ist, so erhält mit

$$\beta_0 = \frac{k_b}{k_z} = \frac{\text{zulässige Biegungsspannung}}{\text{zulässige Zugspannung}}$$

die Festigkeitsbedingung die Form

$$\beta_0 \cdot \frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{J} \cdot e \leqq k_b$$

oder

$$\frac{P}{F} + \frac{1}{\beta_0} \cdot \frac{P \cdot p}{J} \cdot e \leqq k_z .$$

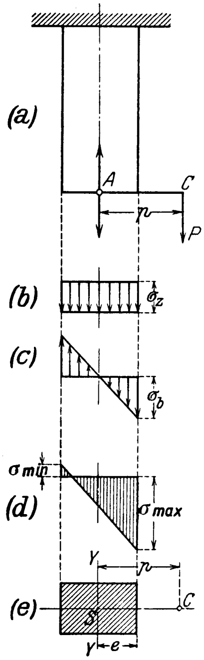


Abb. 202. Zug und Biegung.

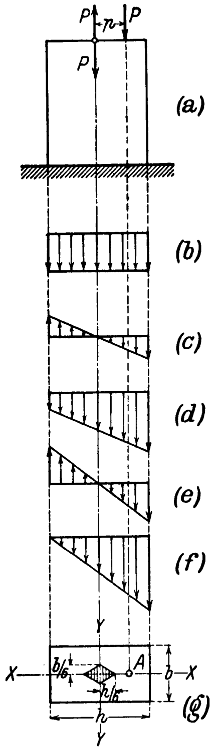


Abb. 203. Druck und Biegung.

2. Druck und Biegung.

Wesentlich wichtiger als die Beanspruchung auf Zug und Biegung ist der in Abb. 203 dargestellte Fall des außerachsigen Druckes. In gleicher Weise wie vorher erhalten wir eine Einzelkraft P in Richtung der Stabachse und ein Kräftepaar mit dem biegenden Moment $P \cdot p$, so daß sich als Gesamtspannung

$$\sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot p}{J} \cdot e$$

ergibt. Die Bedingung, daß die größte Druckspannung einen zulässigen Wert nicht überschreiten darf, führt zu der Festigkeitsbedingung

$$-\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{J} \cdot e \leqq k .$$

Je nach der Größe des Hebelarmes p, den Föppl „Fehlhebel“ nennt, wird die linke Randspannung positiv, Null oder negativ sein. Ist sie gleich oder kleiner als Null, so erfährt der Querschnitt nur Druckspannungen. Für Baustoffe, die so gut wie gar keine Zugspannungen aufnehmen können, ist die Frage wichtig, wie groß der Fehlhebel p sein darf, damit nur Druckspannungen auftreten. Aus der Bedingung $\sigma = 0$ folgt

$$-\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{J} \cdot e = 0 \quad \text{oder} \quad p \leqq \frac{J}{F \cdot e} \cdot$$

Beim rechteckigen Querschnitt ist

$$J = J_y = \frac{bh^3}{12}; \quad e = \frac{h}{2}; \quad F = b \cdot h;$$

damit wird

$$p = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h}{6}.$$

Wandert der Angriffspunkt A auf der Hauptachse yy, so erhält man entsprechend

$$p = \frac{b}{6}.$$

Dadurch sind vier Punkte auf den Hauptachsen des Querschnittes festgelegt, über die hinaus der Angriffspunkt nicht wandern darf, wenn an der gegenüberliegenden Umrißkante eine Druckspannung oder im Grenzfalle die Spannung Null auftreten soll.

Der allgemeinere Fall liegt vor, wenn der Angriffspunkt nicht auf den Hauptachsen liegt, sondern die Koordinaten p und q (Abb. 204) hat. Fügen wir wieder zwei große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P in der Stabachse hinzu, so erhalten wir eine den Stab auf Druck beanspruchende Einzelkraft P, deren Wirkungslinie mit der Stabachse zusammenfällt, und ein Kräftepaar, dessen Hebelarm die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten p und q ist. Die Stabachse liegt zwar in der Ebene dieses Kräftepaares, aber der Querschnitt steht schief zur Momentenebene. Nach S. 138 denken wir das biegende Moment in die beiden Seitenmomente $P \cdot p$ und $P \cdot q$ zerlegt, deren Ebenen durch die Hauptachsen des Querschnittes hindurchgehen. Die Addition der Teilspannungen ergibt für den rechteckigen Querschnitt die Randspannung

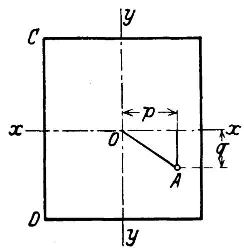


Abb. 204. Druck und Biegung.

$$\sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot p}{J_y} \cdot \frac{b}{2} \pm \frac{P \cdot q}{J_x} \cdot \frac{h}{2}$$
$$= -\frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot p}{W_y} \pm \frac{P \cdot q}{W_x}$$

und zwar wird die Spannung im Punkte C (Abb. 204)

$$\sigma_C = -\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{W_y} + \frac{P \cdot q}{W_x},$$

die Spannung im Punkte D

$$\sigma_D = -\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{W_y} - \frac{P \cdot q}{W_x}.$$

Die Bedingung $\sigma_C = 0$ liefert mit $F = b \cdot h$; $W_y = \frac{hb^2}{6}$ und $\frac{bh^2}{6}$

$$0 = -\frac{P}{b \cdot h} + \frac{P \cdot p \cdot 6}{hb^2} + \frac{P \cdot q \cdot 6}{bh^2} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{b} + \frac{q}{h} = \frac{1}{6}.$$

Das ist aber die Gleichung einer Geraden, die auf den Achsen $\frac{h}{6}$ und $\frac{b}{6}$ abschneidet. Da sich die Betrachtung auch für die übrigen Quadranten des Querschnittes in gleicher Weise durchführen läßt, erhalten wir einen geradlinig begrenzten Raum des Querschnittes, der die Eigenschaft hat, daß der Querschnitt nur Druckspannungen erfährt, wenn der Angriffspunkt der Kraft P innerhalb dieses Raumes liegt. Dieser durch Strichelung hervorgehobene Teil des Querschnittes (Abb. 203) heißt der Kern. Wandert der Angriffspunkt von P auf der Begrenzungslinie des Kernes, der sogenannten Kerngrenze, so ergeben sich Randspannungen bis zum Werte Null, ohne daß sie das Vorzeichen wechseln. Der Abstand r in Zentimeter eines Punktes der Kerngrenze vom Schwerpunkt heißt die Kernweite oder Widerstandshalbmesser.

In Abb. 205 seien $I—I$ und $II—II$ die Hauptachsen des Querschnittes; J_I und J_{II} die Hauptträgheitsmomente. Wandert der Angriffspunkt der Kraft P auf der Kraftlinie SK, die unter dem Winkel α gegen die Achse $I—I$ geneigt sein möge, dann ist die Richtung der Nullinie durch die Beziehung

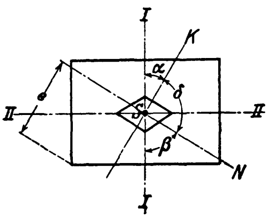


Abb. 205. Schiefe Achsen.

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_I}{J_{II}}$$

bestimmt (vgl. S. 138). Mit $\delta = 180^0 - (\alpha+\beta)$ wird dann die Kernweite

$$r = \frac{J'}{e\cdot F} = \frac{J_n}{e\cdot F\cdot\sin\delta},$$

weil für die äußerste Faser die Druckspannung $\frac{P}{F}$ gleich der Biegungsspannung $\frac{M}{J'}\cdot e = \frac{Pr}{J'}\cdot e$ sein muß. (Siehe S. 139.)

Das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die Nullinie SN, ist

$$J_n = J_I\cos^2\beta + J_{II}\sin^2\beta\,.$$

Kern und geringste Kernweite $r_{\min}$ einiger Querschnitte.

1. Das Quadrat (Abb. 206)

$$r_a = r_b = \frac{h}{6}\,;\quad r_{\min} = \frac{h}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}1179\,h\,.$$

2. Das Rechteck (Abb. 207)

$$r_a = \frac{b}{6};\quad r_b = \frac{h}{6}\,;\quad r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2+h^2}}\,.$$

3. Der Kreis (Abb. 208)

$$r_{\min} = \frac{1}{8}\,d = \text{unveränderlich}\,.$$

4. Der Kreisring (Abb. 209)

$$r_{\min} = \frac{D}{8}\left[1+\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \text{unveränderlich.}$$

Da die Berechnung von Randspannungen mit Hilfe des Kernes im Maschinenbau selten vorkommt, soll auf die Theorie des Kernes nicht weiter eingegangen werden.

Bei Stäben, deren Länge im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes groß ist, wird der Hebelarm p der außerachsig angreifenden Kraft P von um so größerem Einfluß sein, je größer die Auslenkung der freien Spitze ist, da hierdurch der Hebelarm vergrößert

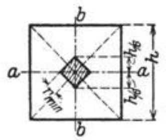


Abb. 206. Quadrat.

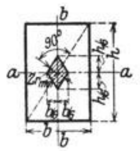


Abb. 207. Rechteck.

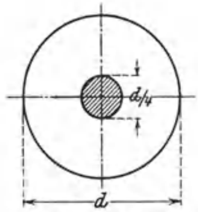


Abb. 208. Kreis.

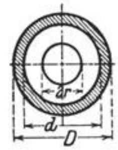


Abb. 209. Kreisring.

wird. Das Moment $P \cdot p$ wächst um den Betrag $P \cdot \delta$, wobei δ die größte Auslenkung im Angriffspunkt der Kraft P ist.

Aus

$$y = f\left(1 - \cos\frac{x}{a}\right) \quad \text{(Seite 269)}$$

folgt mit

$$f = \delta + p$$

$$y = (\delta + p)\left(1 - \cos\frac{x}{a}\right)$$

Für $x = l$ geht aber y in δ über, so daß sich als größte Auslenkung

$$\delta = (\delta + p)\left(1 - \cos\frac{l}{a}\right) = p\,\frac{1 - \cos\frac{l}{a}}{\cos\frac{l}{a}} = p\left(\frac{1}{\cos\frac{l}{a}} - 1\right)^{1)}$$

ergibt. Hieraus folgt

$$\delta + p = \frac{p}{\cos\frac{l}{a}}\,.$$

Setzen wir für $\frac{1}{a}$ den Wert $\sqrt{\frac{P}{EJ}}$ (S. 269), so wird das größte Biegungsmoment

$$M_{\max} = P\,(p + \delta) = \frac{P \cdot p}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

[1]) Aus dieser Gleichung wird in vielen Büchern (z. B. auch in Bach: Elastizität und Festigkeit) die Knicklast dadurch abgeleitet, daß man sagt, δ wird ∞ für $\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2}$. In Wahrheit gilt aber die gewonnene Formel nur für kleine Durchbiegungen und genauere Untersuchungen zeigen, daß δ für $P = P_k$ endlich bleibt. Es muß also bei Anwendung obiger Formeln $\frac{l}{a}$ klein gegenüber $\frac{\pi}{2}$ sein.

und die Randspannung nach S. 278

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot p}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{E\,J}}\right)} \cdot \frac{e}{J}$$

J ist das Trägheitsmoment, bezogen auf die zur Kraftlinie senkrecht stehende Hauptachse des Querschnittes, während e wie stets den Abstand der äußersten Faser bedeutet.

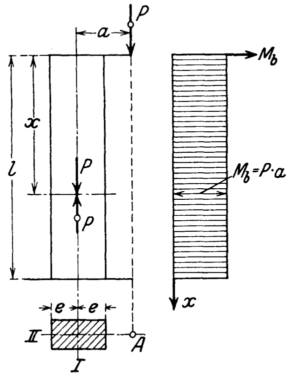


Abb. 210. Säule.

Beispiele. 1. Eine Säule (Abb. 210) trage bei $a = 35$ cm eine Last von $P = 10000$ kg und habe einen Querschnitt nach Abb. 201. Das Biegungsmoment ist längs der Stabachse unverändert

$$M_b = P \cdot a = 10\,000 \cdot 35 = 350\,000 \text{ cmkg}.$$

Der Querschnitt (Abl. 201) hat

$$J_y = 2\ (317 + 48{,}3 \cdot 9{,}66^2) = 9648 \text{ cm}^4;$$

$$W_y = \frac{9648}{16{,}3} = 590 \text{ cm}^3.$$

Eine überschlägliche Berechnung nach der einfachen Formel

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} - \frac{Pa}{J} \cdot e = -\frac{P}{F} - \frac{M_b}{W}$$

liefert

$$\sigma_{\max} = -\frac{10\,000}{2 \cdot 48{,}3} - \frac{350\,000}{590} = -700 \text{ kg/cm}^2;$$

die strengere Rechnung ergibt

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} \cdot \frac{e}{J} = -\frac{P}{F} - \frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} \cdot \frac{M_b}{W},$$

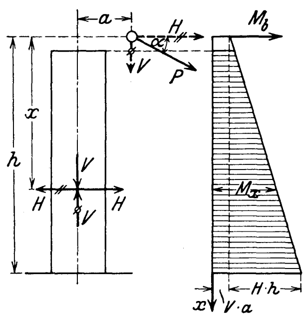


Abb. 211. Konsol.

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = \cos\left(400\sqrt{\frac{10\,000}{2\,150\,000 \cdot 9648}}\right)$$

$$= \cos 0{,}2772,$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{10\,000}{2 \cdot 48{,}3} - \frac{350\,000}{0{,}962 \cdot 590} = -725 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Unterschied ist sehr gering, so daß im allgemeinen die angenäherte Berechnung genügen wird, vor allen Dingen dann, wenn wir mit der zulässigen Spannung unter dem oberen Grenzwert bleiben.

2. Das Konsol (Abb. 211) trage ein Vorgelegewellenlager; der Riemenzug sei $P = 250$ kg und gegen die Wagerechte unter dem Winkel $\alpha = 30^0$ geneigt.

Die Zerlegung von P nach der wagerechten und senkrechten Richtung liefert

$$H = P \cdot \cos\alpha = 250 \cdot 0{,}866 = 217 \text{ kg}; \quad V = P \cdot \sin\alpha = 250 \cdot 0{,}5 = 125 \text{ kg}.$$

Im Querschnitt x von der Wellenmitte erhält man durch Hinzufügen zweier gleich großer, entgegengesetzter Kräfte V eine Einzelkraft V in Richtung der Stabachse, die die Säule auf Druck beansprucht, und ein Kräftepaar V mit dem unveränderlichen Moment $M_1 = V \cdot a$. Die beiden hinzugefügten Kräfte H liefern eine Einzelkraft H senkrecht zur Stabachse, die den Querschnitt auf Schub beansprucht und im allgemeinen vernachlässigt werden darf, und ein Kräftepaar H mit dem Biegungsmoment $H \cdot x$, das für $x = h$ seinen größten Wert $M_2 = H \cdot h$ annimmt. Der gefährliche Querschnitt liegt in der Einspannstelle, für ihn wird angenähert

$$\sigma_{\max} = -\frac{V}{F} - \frac{M_1 + M_2}{W},$$

$$M_1 = V \cdot a = 125 \cdot 35 = 4375 \text{ cmkg}; \quad M_2 = H \cdot h = 217 \cdot 415 = 90\,000 \text{ cmkg}.$$

Das Moment der wagerechten Seitenkraft ist bei weitem das größte. Da es nach unten hin zunimmt, läßt man häufig die beiden U-Eisen nach unten zu auseinandergehen und kommt dadurch mit kleineren Profilen aus. Beim Entwurf des Querschnittes schätzt man aus M_2 auf das erforderliche Widerstandsmoment für $k_b = 1000 \text{ kg/cm}^2$, wenn $k = 1200 \text{ kg/cm}^2$ die zulässige Druckspannung ist. In unserem Beispiel wird angenähert

$$W_{\text{erf}} = \frac{90\,000}{1000} = 90 \text{ cm}^3.$$

Gewählt werden zwei **U**-Eisen NP 10, deren Abstand in der Einspannstelle $i = 70$ mm sein möge, dann wird mit den Bezeichnungen der Abb. 200

$$J_{II} = 2\left\{J_y + F\left(\frac{i}{2} + e\right)^2\right\} = 2\{29{,}3 + 13{,}5 \cdot 5{,}05^2\} = 747 \text{ cm}^4,$$

$$W_{II} = \frac{747}{8{,}5} = \approx 88 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{125}{2 \cdot 13{,}5} - \frac{90\,000 + 4375}{88} = -1080 \text{ kg/cm}^2.$$

3. Auf den Stoßstahl (Abb. 212) wirken die Schnittkraft P senkrecht nach oben und die Normalkraft S wagerecht, d. h. senkrecht zur Stabachse. Da P nicht in die Stabachse fällt, entsteht neben der Einzelkraft P, deren Wirkungslinie mit der Stabachse zusammenfällt, noch ein Kräftepaar mit dem Moment $M = P \cdot e$, das den Stab biegt. S ruft ein Biegungsmoment in entgegengesetztem Sinne von der Größe $S \cdot l$ hervor und ergibt außerdem im Einspannquerschnitt $a - a$ eine Querkraft S, die wir nicht berücksichtigen. Die Gesamtbeanspruchung im Querschnitt $a - a$ wird mit $S = P$

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} \pm \frac{S(l-e)}{W} \quad \text{oder} \quad \sigma_{\max} = -\frac{P}{F} \pm \frac{S\,l}{W},$$

wenn wir e gegen l vernachlässigen.

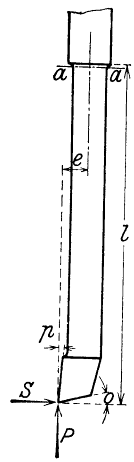


Abb. 212. Stoßstahl.

Angenommen, die Schneide sei 30 mm breit, der Vorschub betrage 0,3 mm, der Schnittwiderstand 175 kg/mm², dann erhält man

$$P = S = 0{,}3 \cdot 30 \cdot 175 = 1575 \text{ kg}.$$

Ferner sei $l = 400$ mm; $F_a = 95 \cdot 22 \text{ mm}^2$, dann wird

$$F_a = 9{,}5 \cdot 2{,}2 = 20{,}9 \text{ cm}^2; \quad W = \frac{2{,}2 \cdot 9{,}5^2}{6} = 33{,}1 \text{ cm}^3;$$

$$J = \frac{2{,}2 \cdot 9{,}5^3}{12} = 157{,}2 \text{ cm}^4.$$

Damit erhält man

$$\sigma_{\max} = -\frac{1575}{20{,}9} - \frac{1575 \cdot 40}{33{,}1} = -1975 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Rechnung zeigt, daß die Spannung sehr hohe Beträge erreicht; ihr entspricht eine ebenso hohe Durchbiegung, die sich angenähert zu

$$f = \approx \frac{S\,l^3}{3\,E\,J} = \frac{1575 \cdot 40^3}{3 \cdot 2\,150\,000 \cdot 157{,}2} = \approx 0{,}3 \text{ cm} = 3 \text{ mm}$$

ergibt. Infolge der großen Durchbiegung federn lange und frei liegende Stähle.

3. Normal- und Schubspannungen.

Dieser Belastungsfall ist durch das gleichzeitige Auftreten von Normal- und Schubspannungen gekennzeichnet und in seiner allgemeinen Form auf S. 54 behandelt. Wir errechneten die reduzierte Spannung

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}$$

als gedachte Spannung, die für sich allein wirkend dieselbe Formänderung hervorrufen würde, wie sie in Wirklichkeit durch das gleichzeitige Auftreten von Normal- und Schubspannungen hervorgerufen wird. Setzen wir als Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{\text{red}} \leqq \sigma_{\text{zul}}$$

an, so bringen wir damit zum Ausdruck, daß wir die größte Dehnung als für den Bruch maßgebend ansehen, während O. Mohr die Differenz der Hauptspannungen für die Ursache der Zerstörung hält und als Festigkeitsbedingung ansetzt

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2} \leqq \sigma_{\text{zul}}\,.$$

Die erheblichen Unterschiede zwischen der Theorie und dem Versuch gleicht Bach durch das Anstrengungsverhältnis

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\frac{m+1}{m}\cdot\tau_{\text{zul}}}$$

aus (S. 60), das zu der Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_u + \sigma_v) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4(\alpha_0\cdot\tau)^2} \leqq \sigma_{\text{zul}}$$

führt. Alle drei Gleichungen werden heute noch benutzt, doch hat sich in der neuesten Zeit die Mohrsche Auffassung von der Bruchgefahr durchgesetzt, so daß wir in erster Linie nach Mohr rechnen werden. Daneben soll auch die Bachsche Gleichung Anwendung finden, zumal der deutsche Maschinenbau sich ihrer gern bedient.

Im vorliegenden Fall vereinfachen sich beide Gleichungen insofern, als nur eine Normalspannung, die Biegungsspannung, auftritt. Setzen wir ferner die Poissonsche Zahl $m = 10/3$ ein, so erhalten wir

$$\sigma_{\text{Bach}} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\cdot\tau)^2} \leqq \sigma_{\text{zul}}\,,$$

$$\sigma_{\text{Mohr}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqq \sigma_{\text{zul}}\,,$$

von denen die letzte besonders einfach ist.

a) Zug (Druck) und Drehung.

Die durch die gegebene Kraft P hervorgerufene Normalspannung ist $\sigma = P : F$, die durch das Drehmoment M_d hervorgerufene Schubspannung τ ist nach Abschnitt VII für den jeweils vorliegenden Querschnitt zu berechnen. Beide sind zu einer reduzierten Spannung zusammenzusetzen, wobei darauf zu achten ist, daß σ und τ diejenigen zugehörigen Werte sind, für die die Gesamtanstrengung am größten wird.

b) Biegung und Drehung.

Sehr häufig ist der Fall, daß die von Biegungs- und Drehmomenten gleichzeitig angegriffenen Stäbe kreisförmigen Querschnitt haben. Da hierbei

$$\sigma = \frac{M_b}{W} \text{ und } \tau = \frac{M_d}{W_p} = \frac{M_d}{2W}$$

ist, so vereinfachen sich unsere Gleichungen erheblich. Es ist

$$\sigma_{\text{Bach}} = 0{,}35 \frac{M_b}{W} + 0{,}65 \sqrt{\left(\frac{M_b}{W}\right)^2 + 4\left(\alpha_0 \cdot \frac{M_d}{2W}\right)^2}$$

$$= \frac{M_b}{W}\left[0{,}35 + 0{,}65 \cdot \sqrt{1 + \left(\alpha_0 \cdot \frac{M_d}{M_b}\right)^2}\right].$$

Der Klammerausdruck ist eine unbenannte Zahl, die lediglich von dem Quotienten $\alpha_0 \cdot \frac{M_d}{M_b}$ abhängig ist und sich als Kurve darstellen läßt (Abb. 213). Mit

$$\xi \cdot M_b = M_i$$

erhält man

$$\sigma_{\text{Bach}} = \frac{M_i}{W}$$

und damit eine Form, die der einfachen Biegungsgleichung entspricht. Man nennt M_i das ideelle Biegungsmoment.

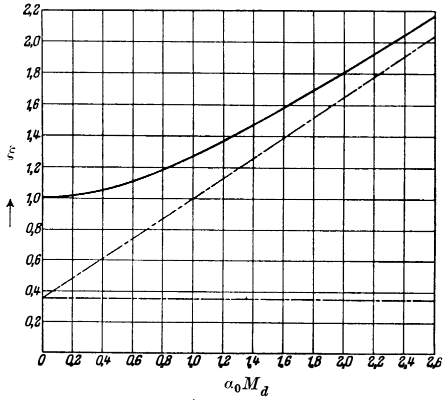


Abb. 213. ξ-Linie.

Die Mohrsche Gleichung geht für den kreisförmigen Querschnitt über in

$$\sigma_{\text{Mohr}} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_d}{2W}\right)^2} = \frac{1}{W}\sqrt{M_b^2 + M_d^2};$$

auch hier können wir den Zähler als ideelles Biegungsmoment

$$M_i = \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

ansehen. In beiden Fällen lautet die Festigkeitsbedingung: die errechnete Spannung muß kleiner sein als die zulässige.

Beispiel. 1. Vorgelegewelle (Abb. 169). Der Riemenzug der Scheibe *1* sei wagerecht, der der Scheibe *2* unter 45° gerichtet; die Riemengeschwindigkeit $v = 6$ m/sek, die Umdrehungszahl pro Minute $n = 125$, die Leistung $N = 7$ PS. Aus

$$v = \frac{\pi d_1 n}{60} \quad \text{folgt} \quad d_1 = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{60 \cdot 6}{\pi \cdot 125} = 0{,}915 \text{ m}.$$

Wir wählen $d_1 = 900$ mm; $r_1 = 450$ mm und ermitteln die Umfangskraft U_1 aus

$$M_d = U_1 \cdot r_1 = 71620 \cdot \frac{N}{n} = 71\,620 \cdot \frac{7}{125} = \sim 4000 \text{ cmkg}$$

zu $U_1 = \sim 90$ kg. Für die Wellenbelastung wird $P_1 = 3\,U_1 = 270$ kg. In gleicher Weise erhält man bei $d_2 = 500$ mm

$$M_d = U_2 \cdot r_2 = 4000 \text{ cmkg}; \quad \text{also} \quad U_2 = 160 \text{ kg}; \quad P_2 = 480 \text{ kg}.$$

Die wagerechte Seitenkraft wird $H_2 = P_2 \cdot \cos 45^0 = 480 \cdot 0{,}707 = \sim 340$ kg, die senkrechte Seitenkraft wird $V_2 = P_2 \cdot \sin 45^0 = 480 \cdot 0{,}707 = \sim 400$ kg, wenn man das Scheibengwicht mit rd. 60 kg einsetzt.

Demnach ist die Welle belastet:
in wagerechter Richtung mit $H_1 = P_1 = 270$ kg und $H_2 = 340$ kg,
in senkrechter Richtung mit $V_1 = G_1 = 75$ kg und $V_2 = 400$ kg.

Diese Belastungen ergeben:

in wagerechter Richtung $A_H = 307$ kg; $B_H = 303$ kg,
$M_1 = 307 \cdot 25 = 7675$ cmkg, mit $A \div 1 = 250$ mm,
$M_2 = 303 \cdot 30 = 9090$ cmkg, mit $2 \div B = 300$ mm;

in senkrechter Richtung $A = 182$ kg; $B_r = 294$ kg,
$M_1' = 182 \cdot 25 = 4550$ cmkg,
$M_2' = 294 \cdot 30 = 8820$ cmkg.

Das größte resultierende Moment tritt im Punkte *2* auf und wird

$$M_b = \sqrt{M_2^2 + M_2'^2} = \sqrt{9090^2 + 8820^2} = \sim 12\,700 \text{ cmkg},$$

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{7}{125} = \approx 4000 \text{ cmkg}.$$

Das ideelle Biegungsmoment wird

$$M_{\text{Bach}} = 0{,}35\,M_b + 0{,}65\,\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \cdot M_d)^2} = 0{,}35 \cdot 12\,700 + 0{,}65 \cdot \sqrt{12\,700^2 + (1{,}1 \cdot 4000)^2}$$
$$= 13\,200 \text{ cmkg}$$

mit

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{1{,}3 \cdot \tau_{\text{zul}}} = \frac{400}{1{,}3 \cdot 280} = 1{,}1,$$

$$M_{\text{Mohr}} = \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = \sqrt{12700^2 + 4000^2} = 13\,320 \text{ cmkg}.$$

Den ungünstigsten Wert der reduzierten Spannung liefert M_{Mohr}; $d = 60$ mm hat $W = 21{,}21$ cm³; damit ergibt sich

$$\sigma_{\text{Mohr}} = \frac{M_{\text{Mohr}}}{W} = \frac{13\,320}{21{,}21} = \approx 630 \text{ kg/cm}^2,$$

ein Wert, der die zulässige Grenze nach Bach überschreitet.

2. Schraubenspindel einer Spindelpresse. Die Kraft sei $Q = 10\,000$ kg; die Reibungsziffer $\mu = 0{,}1$; der innere Schraubendurchmesser $d_1 = 55$ mm; der äußere $d_2 = 65$ mm; der mittlere $d = 60$ mm; die Steigung betrage $h = 20$ mm. Aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi d} = \frac{20}{60 \cdot \pi} = 0{,}11$$

erhält man den Steigungswinkel . . . . $\alpha = 6^0\,20'$
der Reibungsziffer $\mu = 0{,}1 = \operatorname{tg} \varrho$ entspricht . $\varrho = 5^0\,45'$

$\alpha + \varrho = 12^0\ 5'$

Das aufzuwendende Drehmoment beträgt

$$M_d = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = 10\,000 \cdot 3 \cdot 0{,}214 = 6420 \text{ cmkg}.$$

Für $d_2 = 55$ mm ist $W = 16{,}334$ cm³; also $W_p = 2 \cdot W = 32{,}67$ cm³; daraus

$$\tau = \frac{M_d}{W_p} = \frac{6420}{32{,}67} = 197 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Normalspannung wird als gleichmäßig verteilte Druckspannung

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{10000}{23{,}76} = 420 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit $\sigma_{zul} = k = 600 \text{ kg/cm}^2$ und $\tau_{zul} = k_d = 400 \text{ kg/cm}^2$ wird

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{1{,}3 \cdot \tau_{zul}} = \frac{600}{1{,}3 \cdot 400} = 1{,}15\,,$$

so daß

$$\sigma_{Bach} = 0{,}35 \cdot 420 + 0{,}65 \sqrt{420^2 + (1{,}15 \cdot 197)^2} = \approx 550 \text{ kg/cm}^2 \text{ ist;}$$

nach Mohr erhalten wir

$$\sigma_{Mohr} = \sqrt{420^2 + 4 \cdot 197^2} = \approx 576 \text{ kg/cm}^2.$$

3. Festigkeitsnachweis einer Drehbankspindel (vgl. S. 181). Sämtliche an der Spindel angreifenden Kräfte rufen im Angriffspunkte von G_z ein Biegungsmoment

$$M_b = 2000 \cdot 37 - 400 \cdot 29 - 950 \cdot 12 = \approx 51\,000 \text{ cmkg}$$

hervor, zu dem ein Drehmoment

$$M_d = 1950 \cdot \frac{145{,}2}{2} = \approx 142\,000 \text{ cmkg}$$

tritt. Als ideelles Biegungsmoment nach Mohr ergibt sich

$$M_{Mohr} = \sqrt{51\,000^2 + 142\,000^2} = \approx 151\,000 \text{ cmkg}\,.$$

Der Querschnitt ist kreisringförmig mit 220 mm Außen- und 90 mm Innendurchmesser

$$\begin{array}{rl} J_{22} = & 11\,499 \text{ cm}^4 \\ J_9 = & 322 \text{ cm}^4 \\ \hline J = & 11\,177 \text{ cm}^4\,; \end{array} \qquad W = \frac{11\,177}{11} = 1016 \text{ cm}^3;$$

demnach

$$\sigma_{Mohr} = \frac{151\,000}{1016} = \approx 150 \text{ kg/cm}^2.$$

Auch die strengere Berechnung führt auf rechnerisch ermittelte Spannungen, die weit unter der zulässigen bleiben.

4. Die Kurbel. Eine Handkurbel nach Abb. 214 werde von zwei Mann bedient, die dauernd eine Umfangskraft von je 15 kg aufwenden. Somit wird $P = 30$ kg; $r = 35$ cm; $a = 20$ cm, so daß sich ergeben

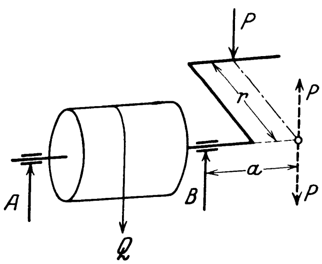


Abb. 214. Kurbel.

$$M_b = P \cdot a = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cmkg};$$
$$M_d = P \cdot r = 30 \cdot 35 = 1050 \text{ cmkg}.$$

Mit

$$k_b = 400 \text{ kg/cm}^2; \quad k_d = 280 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{wird} \quad \alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \cdot k_d} = \frac{400}{1{,}3 \cdot 280} = 1{,}1;$$

als ideelles Biegungsmoment nach Bach erhalten wir

$$M_i = 0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \cdot M_d)^2} = 1060 \text{ cmkg},$$

während nach Mohr

$$M_i = \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = 1210 \text{ cmkg}$$

wird. Aus

$$M_i = W \cdot k_b$$

folgt

$$W_{\text{erf}} = \frac{1210}{400} = 3 \text{ cm}^3 \text{ mit } d = 35 \text{ mm};$$

damit

$$\sigma_{\text{Bach}} = \frac{1060}{4{,}2} = 250 \text{ kg/cm}^2; \qquad \sigma_{\text{Mohr}} = \frac{1210}{4{,}2} = 290 \text{ kg/cm}^2.$$

c) Schub und Biegung.

Bei der Biegungsfestigkeit (Abschnitt V) hatten wir die Querkräfte, bei der Schubfestigkeit (Abschnitt VIII) die Biegungsmomente unberücksichtigt gelassen. In Wahrheit treten in beiden Fällen Schub und Biegung gleichzeitig auf. Die Zulässigkeit der begangenen Vernachlässigungen wollen wir an einem einfachen Beispiel nachweisen.

Wir betrachten den Träger auf zwei Stützen, der durch eine Einzelkraft P in der Mitte belastet ist. Die Spannweite sei l, der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten b und h. Die größten Spannungen werden im Angriffspunkt der Last auftreten. Das Biegungsmoment ist $M = \frac{Pl}{4}$, die Querkraft $Q = \frac{P}{2}$. Mithin wird die Normalspannung im Abstande z von der neutralen Faser (Abb. 189)

$$\sigma = \frac{M}{J} z = \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{3Pl}{bh^3} z, \tag{a}$$

die Schubkraft nach Seite 263

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{P}{bh} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]. \tag{b}$$

Die größte Biegungsspannung wird mit $z = \frac{h}{2}$

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3Pl}{2bh^2}, \tag{c}$$

die größte Schubspannung mit $z = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{P}{bh}. \tag{d}$$

Aus (a), (b) und (c) folgt

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \frac{z}{\left(\frac{h}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \tau = \sigma_{\max} \cdot \frac{h}{2l} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right].$$

Setzt man diese Werte in die Bachsche Gleichung ein, wobei $\alpha_0 = 1$ angenommen wird, so wird

$$\sigma_{\text{Bach}} = \sigma_{\max} \left[0{,}35x + 0{,}65 \sqrt{x^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 [1 - x^2]^2}\right]. \tag{e}$$

Hierin ist

$$x = \frac{2z}{h}$$

eine unbenannte Zahl, die entsprechend $z = 0$ und $z = \frac{h}{2}$ zwischen 0 und 1 liegt.

$$\text{Für } z = 0 \text{ ist } x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_{\text{Bach}}}{\sigma_{\max}} = 0{,}65 \cdot \frac{h}{l}\,;$$

$$\text{für } z = \frac{h}{2} \text{ ist } x = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_{\text{Bach}}}{\sigma_{\max}} = 1\,.$$

Wir dürfen die Schubspannungen vernachlässigen, d. h. zur Errechnung der Spannungen die Gleichung (c) benutzen, wenn σ_{Bach} nur wenig größer als $\sigma_{\max}$ ist.

Damit dies für $x = 1$ der Fall wird, setzen wir

$$0{,}65 \cdot \frac{h}{l} \approx 1\,,$$

woraus

$$\frac{h}{l} = 1{,}5$$

folgt. Mit diesem Wert ist die nachfolgende Tabelle berechnet worden.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{z}{h}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$\frac{\sigma_{\text{Bach}}}{\sigma_{\max}}$	1,002	1,015	1,013	0,999	0,975	0,946	0,919	0,907	0,928

$\sigma_{\max}$ wird also nur um $\sim 1{,}5\%$ überschritten, so daß wir für $\frac{h}{l} = 1{,}5$ die Schubspannungen vernachlässigen können.

Falls nun $\frac{h}{l}$ kleiner als 1,5 oder $\frac{l}{h}$ größer als $\frac{3}{2}$ wird, so wird nach Gleichung (e) für dieselben Werte x $\frac{\sigma_{\text{ach}}}{\sigma_{\max}}$ kleiner als der Wert der Tabelle. Hiernach ergibt sich der Satz:

Ist $l > \frac{3}{2} h$, so kann man bei Berechnung der Spannungen die Schubkräfte vernachlässigen.

Wann kann man nun die Biegungsmomente vernachlässigen, d. h. die Spannungen nach Gleichung (d) berechnen? Aus (a), (b) und (e) folgt

$$\sigma = \tau_{\max} \cdot \frac{l z}{h^2} = \tau_{\max} \cdot \frac{l x}{2\,h}$$

$$\tau = \tau_{\max} \cdot (1 - x^2)\,,$$

wobei wieder $x = \frac{2z}{h}$ gesetzt wird.

Mit diesen Werten erhält man nach Bach mit $\alpha_0 = 1$

$$\sigma_{\text{Bach}} = \tau_{\max} \left[0{,}35 \cdot \frac{l x}{2\,h} + 0{,}65 \sqrt{\left(\frac{l x}{2\,h}\right)^2 + 4\,(1 - x^2)^2} \right]. \tag{f}$$

Für $x = 0$ wird $\sigma_{\mathrm{Bach}} = 1{,}3\,\tau_{\max}$. Da wegen $\alpha_0 = 1$ auch $k_b = 1{,}3\,k_s$ ist, so darf man die Biegungsspannungen vernachlässigen, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer nur wenig größer als 1,3 ist.

Da nun

$$\sigma_{\max} : 1{,}3\,\tau_{\max} = \frac{3\,P\,l}{2\,b\,h^2} : \frac{1{,}3 \cdot 3\,P}{4\,b\,h} = \frac{2\,l}{1{,}3\,h}$$

für $\frac{h}{l} = 1{,}5$ angenähert gleich Eins, also $\sigma_{\max} \approx 1{,}3\,\tau_{\max}$ ist, so folgt aus der letzten Zeile der Tabelle, daß für $\frac{h}{l} = 1{,}5$ der Wert $\tau_{\max}$ nur um 1,5% überschritten wird. Für $\frac{h}{l} = 1{,}5$ kann man also die Biegungsspannungen vernachlässigen. Aus Gleichung (f) folgt, daß der Wert $\frac{\sigma_{\mathrm{Bach}}}{\tau_{\max}}$ mit $\frac{l}{h}$ kleiner wird. Hieraus ergibt sich der Satz:

Ist $l < \frac{3}{2}\,h$, so kann man bei Berechnung der Spannungen die Biegungsmomente vernachlässigen.

Was wir von den Spannungen nachgewiesen haben, gilt auch von den Durchbiegungen. Bei verhältnismäßig kurzen Stäben kann man die Biegungsmomente, bei verhältnismäßig langen Stäben die Querkräfte unberücksichtigt lassen.

Die Senkung des Angriffspunktes der Last ist

$$f = f_b + f_q\,,$$

wobei f_b die Senkung infolge der Biegungsmomente, f_q die Senkung infolge der Querkräfte bedeuten soll.

Nach Seite 154 ist

$$f_b = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{48\,E \cdot \frac{1}{12}\,b\,h^3} = \frac{P\,l^3}{4\,E\,b\,h^3}\,;$$

nach Seite 266

$$f_q = \frac{0{,}3\,P\,l}{F\,G} = \frac{0{,}3\,P\,l}{b\,h \cdot G}\,.$$

Wird nach Seite 54 $G = \frac{m}{2\,(m+1)}\,E$ gesetzt, so wird mit $m = \frac{10}{3}$ $G = \frac{5}{13}\,E$, mithin

$$f_q = \frac{0{,}3\,P\,l \cdot 13}{b\,h \cdot 5\,E} = \frac{0{,}78\,P\,l}{E\,b\,h}$$

und

$$f_q : f_b = \frac{0{,}78\,P\,l}{E\,b\,h} \cdot \frac{4\,E\,b\,h^3}{P\,l^3} = \frac{3{,}12}{\left(\frac{l}{h}\right)^2}\,.$$

Für

$l =$	h	$2\,h$	$4\,h$	$8\,h$	$16\,h$
wird dieser Wert gleich	3,12	0,78	0,195	0,049	0,012.

Ist also $l > 16\,h$, so wird der Fehler, den man bei Vernachlässigung der Querkräfte begeht, kleiner als 1,2%. Umgekehrt kann man für verhältnismäßig kurze Stäbe f_b gegen f_q vernachlässigen, wie aus

$$f_b : f_q = \frac{\left(\frac{l}{h}\right)^2}{3{,}12}$$

folgt.

XI. Die gekröpfte Welle.

1. Die Festigkeit der gekröpften Welle.

Als Beispiel für den Gang der Berechnung werde eine zweifach gelagerte Welle zugrunde gelegt, auf deren außen liegendem Stumpf der

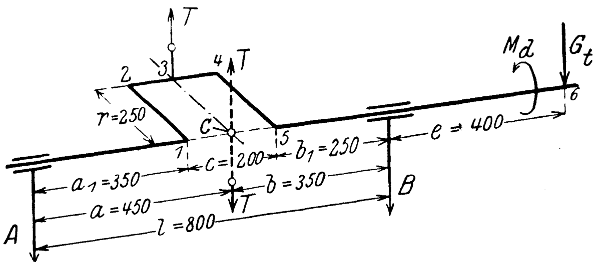


Abb. 215. Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene.

Anker einer Dynamomaschine sitzen möge (Abb. 215). Die Antriebsmaschine sei eine liegende Einzylindermaschine. Die Pleuelstange sei sehr lang, so daß die Kolbenkraft K in jeder Stellung wagerecht angreift, die in eine tangentiale Umfangs- oder Drehkraft T und eine radiale Seitenkraft R zerlegt wird (Abb. 216). Aus den Konstruktionsangaben für die Dampfmaschine bzw. aus der Drehkraftkurve, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, entnehmen wir

$$T = T_{\max}$$

als für die Berechnung maßgebend. Entsprechend der ungünstigsten Kurbelstellung zerlegen wir alle übrigen an der Welle angreifenden Kräfte in Richtung der Kröpfungsebene und senkrecht dazu und führen die Berechnung für beide Fälle durch. Die sich ergebenden Spannungen werden nach dem Überlagerungsgesetz addiert.

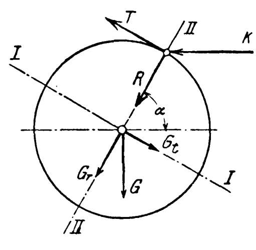


Abb. 216. Zerlegung der Kräfte nach zwei Ebenen.

Die gekröpfte Welle fällt insofern aus dem Rahmen der üblichen Träger, als es sich bei ihr um Kräfte handelt, die nicht in einer Ebene liegen. Wir betrachten zunächst die

a) Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene.

Die Belastung ist aus der perspektivischen Darstellung der Abb. 215 ersichtlich. Um das Gleichgewicht der äußeren Kräfte zu ermitteln, fügen wir im Schnittpunkt C der Wellenachse mit der Kröpfungsachse zwei entgegengesetzte Kräfte T hinzu, von denen die gekreuzten Kräfte T ein Kräftepaar bilden, dessen Ebene durch die Achse $3 \div C$ der Kröpfung geht und auf der Wellenachse $A \div B$ senkrecht steht; sein Moment ist

$$T \cdot r = M_d .$$

Die in C bleibende Einzelkraft T ruft die Auflagerdrucke

$$A_1 = T \cdot \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad B_1 = T \cdot \frac{a}{l}$$

hervor. Infolge der Seitenkraft G_t erhalten wir

$$A_2 = G_t \cdot \frac{e}{l} \quad \text{und} \quad B_2 = -G_t \cdot \frac{l+e}{l} .$$

Als Summe der Einzeldrucke wird

$$A = A_1 + A_2; \; B = B_1 + B_2.$$

Auch die Einflüsse von T und G_t untersuchen wir gesondert, und zwar zunächst den Einfluß der Drehkraft T.

Teil $A \div 1$. Das Hinzufügen zweier entgegengesetzter Kräfte A_1 liefert im Schnitt x eine Querkraft $Q_x = A_1$ und ein Biegungsmoment $M_b = A_1 \cdot x$, das im Punkte 1 seinen größten Wert $M_1 = A \cdot a_1$ erreicht; die durch die Querkraft hervorgerufenen Schubspannungen werden vernachlässigt.

Teil $1 \div 2$. Wir legen einen Schnitt im Abstande x von 1 (Abb. 217) und sehen, daß das Hinzufügen zweier entgegengesetzter Kräfte A_1 im Schnitt eine Einzelkraft A_1 und ein Kräftepaar ergibt, auf dessen Ebene die Stabachse $1 \div 2$ windschief steht. Klarer wird die Art des Kraftangriffes, wenn wir noch zwei entgegengesetzte Kräfte A_1 in 1 hinzufügen, dann bilden die Kräfte A_1 mit dem Hebelarm a_1 ein Kräftepaar, auf dessen Ebene die Stabachse $1 \div 2$ senkrecht steht; das Moment ist ein Drehmoment $M_d = A_1 \cdot a_1 =$ unveränderlich. Die beiden Kräfte mit dem Hebelarm x bilden ein Kräftepaar, in dessen Ebene die Stabachse $1 \div 2$ liegt; das Moment ist ein Biegungsmoment $M_b = A_1 \cdot x$, das für $x = 0$ den Wert $M_1 = 0$; für $x = r$ den Wert $M_2 = A_1 \cdot r$ annimmt. Längs der Stabachse $1 \div 2$ ist die Drehmomentenfläche ein Rechteck, die Biegungsmomentenfläche ein Dreieck. Da das Kräftepaar $A_1 \cdot x$ die Achse des Stabes $1 \div 2$ nach oben wölbt, erhält die Biegungsmomentenfläche ein negatives Vorzeichen:

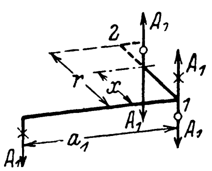


Abb. 217. Teil $1 \div 2$.

$$M_b = -A_1 \cdot x .$$

Außerdem wirkt noch die Querkraft A_1 im betrachteten Schnitt. Zu beachten ist, daß das Biegungsmoment $M_1 = A_1 \cdot a_1$ des Stabes $A_1 \div 1$ im Punkte 1 zum Drehmoment des Stabes $1 \div 2$ wird, weil die Stabachse gewissermaßen um 90^0 umbiegt.

Teil 2÷3. Zu der Ebene des Kräftepaares, das durch das Hinzufügen zweier entgegengesetzt gerichteter Kräfte A_1 im Punkte 3 entsteht, steht die Achse 2÷3 windschief (Abb. 218). Es ist deshalb nötig, dieses Kräftepaar durch zwei zu ersetzen, von denen das eine senkrecht zur Stabachse 2—3 ist, während die Ebene des andern durch die Stabachse hindurchgeht. Das wird erreicht, wenn wir zwei entgegengesetzte Kräfte A_1 im Punkte 2′ hinzufügen. Das Moment der gekreuzten Kräfte A_1 ist ein Drehmoment von der Größe

$$M_d = A_1 \cdot r = \text{unveränderlich},$$

das Moment der angekreisten Kräfte A_1 ist ein Biegungsmoment, das im Punkte 2 die Größe

$$M_2 = -A_1 \cdot a_1,$$

im Punkte 3 die Größe

$$M_3 = -A_1 \cdot (a_1 + c/2) = -A_1 \cdot a$$

hat. Die Biegungsmomentenfläche des Stabteiles 2÷3 schließt sich an die des Stabteiles A÷1 unmittelbar an, als ob die Wange 1÷2 nicht

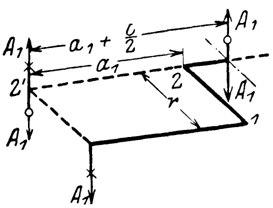


Abb. 218. Teil 2÷3.

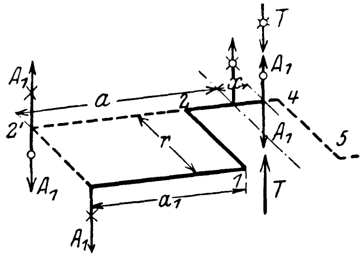


Abb. 219. Teil 3÷4.

vorhanden wäre. Außer den beiden Momenten wirkt noch die Querkraft $Q = A$ im Querschnitt.

Teil 3÷4. Da die im Punkte A angreifende Kraft A_1 in Beziehung auf den Schnitt x (Abb. 219) wieder ein Kräftepaar ergibt, zu dessen Ebene die Stabachse 3÷4 windschief steht, so fügen wir von vornherein zwei entgegengesetzte Kräfte A_1 im Punkte 2′ hinzu. Das Hinzutreten der Kraft T erfordert, daß wir im Schnitt x zwei entgegengesetzte Kräfte A_1 und zwei entgegengesetzte Kräfte T hinzufügen. Die gekreuzten Kräfte A_1 bilden ein Kräftepaar mit dem Drehmoment

$$M_d = A_1 \cdot r = \text{unveränderlich};$$

die in der durch die Stabachse 3÷4 gehenden Ebene wirkenden Kräfte A_1 und T haben ein Biegungsmoment

$$M_b = -A_1 \cdot (a + x) + T \cdot x,$$

das dem Biegungsmoment im Punkte x des geraden Trägers A÷1÷5÷B entspricht, dessen Biegungsmomentenfläche sich nunmehr bis B ($M_B = 0$) aufzeichnen läßt. Im Schnitt x des Zapfens 2÷4 bleibt noch als Querkraft

$$Q_x = A_1 - T.$$

Teil $4 \div 5$. Fügen wir (Abb. 220) im Schnitt x der Wange zwei entgegengesetzte Kräfte A_1 und zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte T hinzu, so steht die Stabachse $4 \div 5$ zu den Ebenen beider Kräftepaare windschief. Dadurch wird das Hinzufügen zweier entgegengesetzter Kräfte T in 4 und zweier entgegengesetzter Kräfte A_1 in 5 erforderlich.

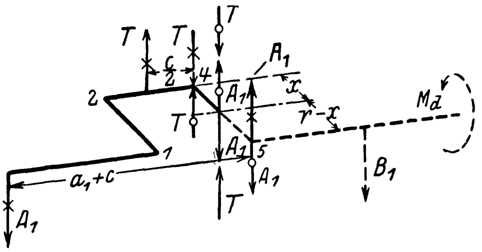


Abb. 220. Teil $4 \div 5$.

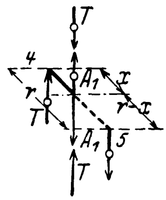


Abb. 221. Teil $4 \div 5$.

Wir sehen in der senkrechten Ebene durch den Stab $A \div 1 \div 5 \div B$ das Kräftepaar der gekreuzten Kräfte A_1 mit dem Moment $A_1\,(a_1 + c)$ und in der senkrechten Ebene durch den Zapfen $2 \div 4$ das Kräftepaar der gekreuzten Kräfte T mit dem Moment $T \cdot c/2$. Da die Stabachse $4 \div 5$ zu den Ebenen beider Kräftepaare senkrecht steht, erhalten wir als Drehmoment

$$M_d = A_1(a_1 + c) - T \cdot c/2 = B_1 \cdot b_1 .$$

Unter der Belastung der übrigen an ihm angreifenden Kräfte ist der Stab $4 \div 5$ in Abb. 221 gesondert gezeichnet. Wir sehen als Einzelkraft in dem Querschnitt die Querkraft

$$Q = A_1 - T$$

und außerdem zwei Kräftepaare: das der Kräfte T mit dem biegenden Moment $M_1 = T \cdot x$ und das der Kräfte A_1 mit dem biegenden Moment $M_2 = A_1(r - x)$, die beide das ausgezogene Stabende x nach unten wölben, also positiv zu nehmen sind; demnach ist

$$M_b = T \cdot x + A_1(r - x) .$$

Die Biegungsmomentenfläche ist ein Trapez mit den Ordinaten

$$M_4 = A_1 r \text{ für } x = 0 \text{ und } M_5 = T \cdot r \text{ für } x = r ;$$

sie erhält das Vorzeichen $+$ im Gegensatz zu der M_b-Fläche der linken Wange $1 \div 2$.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir natürlich, wenn wir die Wange $4 \div 5$ von rechts aus betrachten. Der in Frage kommende Stabteil ist in Abb. 220 gestrichelt gezeichnet; an ihm greifen an: das, von B nach A gesehen, rechtsdrehende Moment M_d und der nach unten gerichtete Auflagerdruck B_1. Da der Stab $4 \div 5$ in die Ebene des Drehmomentes M_d fällt bzw. zu ihr parallel läuft, ruft M_d im Stabe $4 \div 5$ Biegung hervor; die Wölbung der Stabachse geht nach unten. Zwei entgegengesetzte Kräfte B_1 bringen wir im Schnitt und in 5 an und sehen $4 \div 5$ durch die gekreuzten Kräfte B_1 mit dem Moment $B_1 \cdot b_1$ auf Drehung und durch die angekreisten Kräfte B_1 mit dem Moment

$B_1(r - x)$ auf Biegung beansprucht, so daß wir als Gesamtbiegungsmoment im Schnitt x des Stabes $4 \div 5$ (Abb. 222)

$$M_b = M_d - B_1(r - x)$$

erhalten. Daß beide Werte M_b übereinstimmen, zeigt die Einsetzung

$$M_d = T \cdot r \quad \text{und} \quad B_1 = T - A_1,$$

mit der die Gleichung für M_b übergeht in

$$M_b = T \cdot r - (T - A_1)(r - x) = T \cdot x + A_1 - (r\,x).$$

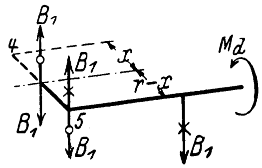


Abb. 222. Teil $4 \div 5 \div 6$.

Teil $5 \div 6$. Die Biegungsbeanspruchung dieses Stabteiles ist durch die Vervollständigung der M_b-Fläche gegeben. Da außerdem das ganze Drehmoment M_d durch $B \div 5$ geleitet wird, so ist zwischen den Punkten 5 und 6

$$M_d = T \cdot r = \text{unveränderlich.}$$

Dazu tritt in einem Schnitt zwischen 5 und B die Querkraft $Q = -B_1$, die wie üblich vernachlässigt wird.

Durch die senkrecht nach unten gerichtete Seitenkraft G_t werden die Auflagerdrucke A_2 und B_2 hervorgerufen. Die Biegungsmomentenfläche des Stabes AB ist ein Dreieck mit der Ordinate $M_B = -G_t \cdot e$ (Abb. 223). Da sie ebenfalls das negative Vorzeichen erhält, weil die Wölbung der Stabachse nach oben geht, addieren sich die Ordinaten beider M_b-Flächen. Die Stabteile $A \div 1$ und $5 \div 6$ werden durch G_t gebogen, so daß nur noch die Kröpfung zu untersuchen ist.

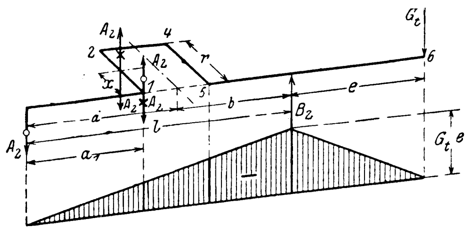


Abb. 223. Seitenkraft G_t.

Teil $1 \div 2$. Im Schnitt x (Abb. 223) fügen wir zwei entgegengesetzte Kräfte A_2 hinzu, die wieder ein Kräftepaar ergeben, zu dessen Ebene die Stabachse $1 \div 2$ windschief steht. Um den Fall zu erreichen, daß die Stabachse entweder senkrecht zur Ebene des Kräftepaares steht oder in ihr liegt, fügen wir noch zwei entgegengesetzte Kräfte A_2 im Punkte 1 hinzu, dann biegt das Kräftepaar der gekreuzten Kräfte A_2 den Stab mit dem Moment

$$M_b = -A_2 \cdot x,$$

während das Kräftepaar der angekreisten Kräfte A_2 den Stab $1 \div 2$ mit dem Moment

$$M_d = A_2 \cdot a_1 = \text{unveränderlich}$$

verdreht. Die M_b-Fläche ist ein Dreieck mit den Ordinaten

$$M_b = 0 \text{ im Punkte 1 für } x = 0,$$

$$M_b = -A_2 \cdot r \text{ im Punkte 2 für } x = r;$$

ihr Vorzeichen ist —, weil sich die Stabachse $1 \div 2$ nach oben wölbt. Die im Schnitt x übrig bleibende Einzelkraft A_2 ist Querkraft.

Teil $2 \div 4$. Wir betrachten den ganzen Zapfen, da außer A_2 keine weitere Kraft angreift (Abb. 224). Das Hinzufügen zweier entgegengesetzter Kräfte A_2 in $1'$ und im Schnitt x zeigt 1. Drehung durch

$$M_d = A_2 \cdot r = \text{unveränderlich},$$

2. Biegung durch

$$M_b = -A_2 \cdot (a_1 + x).$$

Die M_b-Fläche ist bereits in Abb. 223 gezeichnet. Die im Schnitt x übrig bleibende Einzelkraft A_2 ist Querkraft.

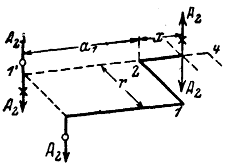


Abb. 224. Teil $2 \div 4$.

Teil $4 \div 5$. Da das Hinzufügen zweier entgegengesetzter Kräfte A_2 im Schnitt x (Abb. 225) ein Kräftepaar ergibt, zu dessen Ebene die Stabachse $4 \div 5$ windschief steht, so fügen wir noch im Punkte 5 zwei entgegengesetzte Kräfte A_2 hinzu, von denen das angekreiste Kräftepaar A_2 das Drehmoment

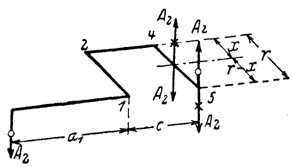


Abb. 225. Teil $4 \div 5$.

$$M_d = A_2 \cdot (a_1 + c) = \text{unveränderlich}$$

hervorruft. Die beiden gekreuzten Kräfte A_2 bilden ein Kräftepaar mit dem biegenden Moment

$$M_b = A_2 \cdot (r - x),$$

das für $x = 0$ den Wert $M_b = A_2 \cdot r$ und für $x = r$ den Wert $M_b = 0$ hat. Die M_b-Fläche ist ein Dreieck mit der Ordinate $A_2 \cdot r$ im Punkte 4

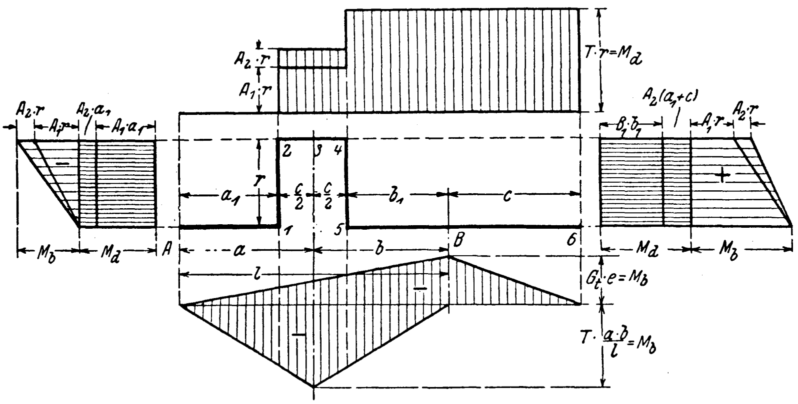


Abb. 226. Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene.

und dem Vorzeichen $+$, da sich der Stab nach unten wölbt. Außerdem wirkt wieder die Querkraft A_2 im betrachteten Querschnitt. Der

Teil $5 \div 6$ wird gebogen; die M_b-Fläche ist in Abb. 223 gezeichnet.

Die Abb. 226 zeigt die Welle unter dem Einfluß der Drehkraft T und der Seitenkraft G_t in Richtung T.

Man findet die Beanspruchung eines Punktes der wagerechten Teile durch Addition der zugehörigen Ordinaten, also auf Biegung, indem man die Ordinaten der M_b-Flächen unterhalb der Welle addiert, auf Drehung, indem man die Ordinaten der M_d-Flächen oberhalb der Welle addiert. Die Beanspruchung der linken Wange $1 \div 2$ ist durch die M-Flächen links, die Beanspruchung der rechten Wange durch die M-Flächen rechts bestimmt.

b) Kräfte in der Kröpfungsebene.

Wie aus Abb. 216 hervorgeht, fallen die radiale Seitenkraft R der Stangenkraft K und die Seitenkraft $G_r = G \cdot \sin\alpha$ des Ankergewichtes G in die Zeichenebene der Abb. 227, so daß jetzt sämtliche Kräfte in einer Ebene angreifen. Dadurch gestaltet sich die Untersuchung erheblich einfacher. Infolge R erhalten wir als Lagerdrucke

$$A_1 = R \cdot \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad B_1 = R \cdot \frac{a}{l};$$

infolge G_r wird

$$A_2 = -G_r \cdot \frac{e}{l} \quad \text{und} \quad B_2 = G_r \cdot \frac{l+e}{l}.$$

Die Addition ergibt die Gesamtauflagerdrucke $A = A_1 + A_2$ und $B = B_1 + B_2$. Als Momentenfläche erhalten wir infolge R ein Dreieck mit der Ordinate

$$M_3 = R \cdot \frac{ab}{l}$$

und infolge G_r ebenfalls ein Dreieck mit der negativen Ordinate

$$M_B = -G_r \cdot e.$$

Die Gesamtfläche ist sofort bekannt, wenn wir beide Einzelflächen nach derselben Richtung abtragen (Abb. 227). Durch die resultierende M_b Fläche ist die Beanspruchung der wagerechten Teile der Welle klargelegt.

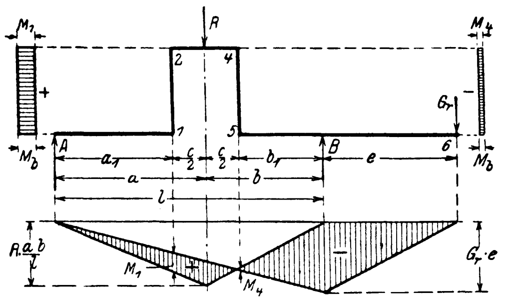


Abb. 227. Kräfte in der Kröpfungsebene.

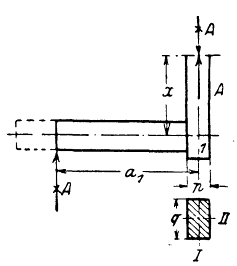


Abb. 228. Linke Wange.

Für einen Punkt x der linken Wange $1 \div 2$, die in Abb. 228 gesondert gezeichnet ist, finden wir durch Hinzufügen zweier entgegengesetzter Kräfte A in der Stabachse $1 \div 2$ eine Einzelkraft A, die in dem Querschnitt Druck hervorruft, und ein Biegungsmoment

$$M_b = A \cdot a_1 = M_1 = \text{unveränderlich}.$$

In gleicher Weise findet man für die rechte Wange $4 \div 5$ eine Einzelkraft $(R - A)$, die im Querschnitt Druck hervorruft und ein Biegungsmoment

$$M_b = A\,(a_1 + c) - R \cdot \frac{c}{2} = M_4 = \text{unveränderlich},$$

das positiv oder negativ sein kann. Unter Umständen kann der Momenten-Nullpunkt der resultierenden M_b-Fläche gerade in die Wange fallen.

Die Momentenflächen der Wangen sind Rechtecke; sie sind in Abb. 227 links und rechts von der Welle gezeichnet.

Um einen Überblick über die Gesamtbeanspruchung der Welle zu erhalten, ist darauf zu achten, daß die Biegungsmomente infolge T und G_t (Richtung I in Abb. 216) und infolge R und G_r (Richtung II in Abb. 216) in zwei aufeinander senkrechten Ebenen auftreten, und daß deshalb für die Gesamtbeanspruchung ihre geometrische Summe

$$M = \sqrt{M_{\mathrm{I}}^2 + M_{\mathrm{II}}^2}$$

maßgebend ist.

Welche Spannungen die Querschnitte erfahren, läßt sich bequemer an einem Zahlenbeispiel feststellen.

Zahlenbeispiel. Gegeben sei die Schubstangenkraft $K = 3000$ kg; das Ankergewicht sei $G = 1200$ kg; als ungünstigste Stellung sei $\operatorname{tg}\alpha = \approx 1{,}333$; $\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\alpha = 0{,}6$ angenommen. Damit erhalten wir die Seitenkräfte

$$T = K \cdot \sin\alpha = 3000 \cdot 0{,}8 = 2400 \text{ kg}; \qquad R = K \cdot \cos\alpha = 3000 \cdot 0{,}6 = 1800 \text{ kg};$$

$$G_t = G \cdot \cos\alpha = 1200 \cdot 0{,}6 = \approx 700 \text{ kg}; \quad G_r = G \cdot \sin\alpha = 1200 \cdot 0{,}8 = \approx 1000 \text{ kg}.$$

a) Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene (Abb. 215).

$$A_1 = \frac{2400 \cdot 35}{80} = 1050 \text{ kg}; \qquad B_1 = \frac{2400 \cdot 45}{80} = 1350 \text{ kg};$$

$$A_2 = \frac{700 \cdot 40}{80} = 350 \text{ kg}; \qquad B_2 = -\frac{700 \cdot 120}{80} = -1050 \text{ kg};$$

$$A = A_1 + A_2 = 1400 \text{ kg}; \quad B = B_1 + B_2 = 300 \text{ kg}.$$

$$M_d = T \cdot r = 2400 \cdot 25 = 60000 \text{ cmkg}.$$

Die M_b-Fläche infolge T ist ein Dreieck mit der Ordinate

$$M_3 = -\frac{2400 \cdot 35 \cdot 45}{80} = -47250 \text{ cmkg};$$

aus ihr entnehmen wir für die Wangen die Drehmomente

links: $M_d = A_1 \cdot a_1 = 1050 \cdot 35 = 36750$ cmkg;
rechts: $M_d = B_1 \cdot b_1 = 1350 \cdot 25 = 33750$ cmkg.

Die Biegungsmomente der Wangen sind

links: $M_1 = 0$; $M_2 = -A_1 \cdot r = -1050 \cdot 25 = -26250$ cmkg;
rechts: $M_4 = +A_1 \cdot r = 1050 \cdot 25 = 26250$ cmkg;
$M_5 = T \cdot r = 2400 \cdot 25 = 60000$ cmkg.

Die M_d-Fläche infolge T ist bestimmt

für den Zapfen durch $M_d = A_1 \cdot r = 1050 \cdot 25 = 26250$ cmkg,
für den Teil $5 \div 6$ durch $M_d = T \cdot r = 2400 \cdot 25 = 60000$ cmkg.

Die M_b-Fläche infolge G_t ist ein Dreieck mit der Ordinate

$$M_B = -G_t \cdot e = -700 \cdot 40 = -28000 \text{ cmkg}.$$

Aus ihr entnehmen wir für die Wangen die Drehmomente

links: $M_d = A_2 \cdot a_1 = 350 \cdot 35 = 12250$ cmkg;

rechts: $M_d = A_2 (a_1 + c) = 350 \cdot 55 = 19250$ cmkg.

Die Biegungsmomente der Wangen sind

links: $M_1 = 0$; $M_2 = -A_2 \cdot r = -350 \cdot 25 = -8750$ cmkg;

rechts: $M_4 = A_2 \cdot r = 350 \cdot 25 = 8750$ cmkg; $M_5 = 0$.

Damit ist das Aufzeichnen der M-Flächen (Abb. 226) möglich.

b) Kräfte in der Kröpfungsebene (Abb. 227).

$$A_1 = \frac{1800 \cdot 35}{80} = \approx 788 \text{ kg}; \qquad B_1 = \frac{1800 \cdot 45}{80} = 1012 \text{ kg};$$

$$A_2 = -\frac{1000 \cdot 40}{80} = -500 \text{ kg}; \qquad B_2 = \frac{1000 \cdot 12}{80} = 1500 \text{ kg}.$$

$$A = A_1 + A_2 = 288 \text{ kg}; \qquad B = B_1 + B_2 = 2512 \text{ kg}.$$

Die M_b-Fläche ist bestimmt durch

$$M_3 = +\frac{1800 \cdot 35 \cdot 45}{80} = +35460 \text{ cmkg};$$

$$M_B = -1000 \cdot 40 = -40000 \text{ cmkg}.$$

Aus ihr entnehmen wir für die Wangen die Biegungsmomente

links: $M_b = A \cdot a_1 = 288 \cdot 35 = 10080$ cmkg;

rechts: $M_b = A (a_1 + c) - R \cdot c/2 = 288 \cdot 55 - 1800 \cdot 10 = -2160$ cmkg.

Damit wird das Aufzeichnen der Abb. 227 möglich.

Die Spannungsermittlung. Der Stabteil $A \div 1$ hat im Punkte 1 das größte Biegungsmoment

infolge der Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene

$$M_{\mathrm{I}} = (A_1 + A_2)\, a_1 = (1050 + 350) \cdot 35 = 49000 \text{ cmkg},$$

infolge der Kräfte in der Kröpfungsebene

$$M_{\mathrm{II}} = (A_1 + A_2) \cdot a_1 = (788 - 500) \cdot 35 = 10080 \text{ cmkg};$$

demnach

$$M = \sqrt{49000^2 + 10080^2} = \approx 50000 \text{ cmkg}.$$

Bei einer zulässigen Biegungsspannung $k_b = 500$ kg/cm² wird das erforderliche Widerstandsmoment des kreisförmigen Querschnittes

$$W_{\text{erf}} = \frac{50000}{500} = 100 \text{ cm}^3,$$

dem ein Durchmesser $d_1 = 105$ mm mit $W = 113{,}7$ cm³ entspricht. Die größte Biegungsspannung wird

$$\sigma_1 = \frac{50000}{113{,}7} = 440 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Zapfen $2 \div 3 \div 4$ ist auf Biegung beansprucht

durch Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene mit

$$M_{\mathrm{I}} = (A_1 + A_2) \cdot a = (1050 + 350) \cdot 45 = 63000 \text{ cmkg},$$

durch Kräfte in der Kröpfungsebene mit

$$M_{\mathrm{II}} = (A_1 + A_2) \cdot a = (788 - 500) \cdot 45 = 12960 \text{ cmkg};$$

demnach

$$M_b = \sqrt{63000^2 + 12960^2} = \approx 64400 \text{ cmkg};$$

die Verdrehung wird hervorgerufen durch

$$M_d = (A_1 + A_2) \cdot r = (1050 + 350) \cdot 25 = 35000 \text{ cmkg};$$

damit erhalten wir als ideelles Biegungsmoment nach Mohr

$$M_i = \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = \sqrt{64400^2 + 35000^2} = 73300 \text{ cmkg}.$$

Als erforderliches Widerstandsmoment erhalten wir

$$W_{\text{erf}} = \frac{73300}{500} = 146{,}6 \text{ cm}^3,$$

dem ein Durchmesser $d_3 = 115$ mm mit $W = 149{,}3$ cm³ entspricht. Die größte reduzierte Spannung wird

$$\sigma_{\text{Mohr}} = \frac{73300}{149{,}3} = 490 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Berechnung nach der Bachschen Gleichung stütze sich auf eine zulässige Drehspannung $k_d = 350$ kg/cm²; dann ist das Anstrengungsverhältnis mit $m = 10/3$

$$\alpha_0 = \frac{500}{1{,}3 \cdot 350} = 1{,}1;$$

demnach

$$\xi = 0{,}35 + 0{,}65 \sqrt{1 + \left(1{,}1 \cdot \frac{M_d}{M_b}\right)^2} = 1{,}107,$$

$$M_i = \xi \cdot M_b = 1{,}107 \cdot 64400 = 71300 \text{ cmkg},$$

$$\sigma_{\text{Bach}} = \frac{71300}{149{,}3} = 480 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Stabteil $5 \div B \div 6$. Als gefährliche Querschnitte kommen in Frage die Punkte 5 und B. Die Biegungsmomente in 5 sind infolge der Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene

$$M_{\text{I}} = B_1 \cdot b_1 + A_2 \cdot (a_1 + c) = 1350 \cdot 25 + 350\,(35 + 20) = 53000 \text{ cmkg};$$

infolge der Kräfte in der Kröpfungsebene

$$M_{\text{II}} = B_1 \cdot b_1 - A_2 \cdot (a_1 + c) = 1012 \cdot 25 - 500\,(35 + 20) = -2200 \text{ cmkg};$$

damit

$$M_b = \sqrt{53000^2 + 2200^2} = 53200 \text{ cmkg}.$$

Das Drehungsmoment ist

$$M_d = T \cdot r = 2400 \cdot 75 = 60000 \text{ cmkg},$$

folglich das ideelle Biegungsmoment nach Mohr

$$M_i = \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = \sqrt{53200^2 + 60000^2} = 80200 \text{ cmkg},$$

$$W_{\text{erf}} = \frac{80200}{500} = 160{,}4 \text{ cm}^3.$$

Dem entspricht $d_s = 120$ mm mit

$$W = 169{,}6 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{Mohr}} = \frac{80200}{169{,}6} = 475 \text{ kg/cm}^2.$$

Im Punkte B ist das Biegungsmoment

$$M_B = \sqrt{(G_t \cdot e)^2 + (G_r \cdot e)^2} = \sqrt{(G \cdot \cos\alpha \cdot e)^2 + (G \sin\alpha \cdot e)^2} = G \cdot e$$
$$= 1200 \cdot 40 = 48000 \text{ cmkg},$$

also kleiner als im Punkte 5. Nach **Bach** wird mit

$$\alpha_0 = 1{,}1 \quad \text{und} \quad \frac{M_d}{M_b} = \frac{60\,000}{53\,200} = 1{,}13\,,$$

$$\xi = 0{,}35 + 0{,}65\sqrt{1 + (1{,}1 \cdot 1{,}13)^2} = 1{,}387\,,$$

$$M_i = \xi \cdot M_b = 1{,}387 \cdot 53\,200 = 74\,000 \text{ cmkg}\,,$$

$$\sigma_{\text{Bach}} = \frac{74\,000}{169{,}6} = 440 \text{ kg/cm}^2.$$

Die linke Wange 1÷2 erfährt Druck, Biegung und Drehung, wenn wir von der Querkraft absehen, doch ist darauf zu achten, daß die beiden Biegungsmomente M_{I} und M_{II} in zwei aufeinander senkrechten Ebenen auftreten. Für die Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene ist der rechteckige Querschnitt (Abb. 228) hochkant, für die Kräfte in der Kröpfungsebene flach in die Rechnung einzuführen. Es wird

$$\sigma_1 = \frac{M_{\mathrm{I}}}{W_{\mathrm{I}}} = \frac{(A_1 + A_2)\cdot r}{\frac{p\cdot q^2}{6}}\,;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{\mathrm{II}}}{W_{\mathrm{II}}} = \frac{A \cdot a_1}{\frac{q\,p^2}{6}}\,.$$

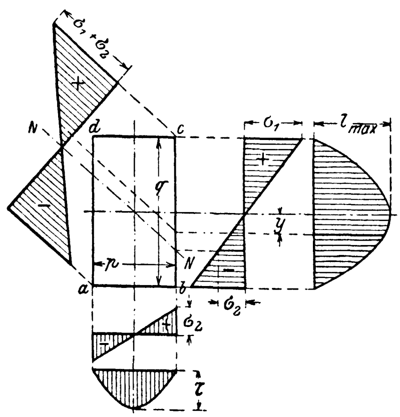


Abb. 229. Querschnitt der linken Wange.

Wir wählen einen rechteckigen Querschnitt 75 · 130 mm (Abb. 229) mit

$$W_{\mathrm{I}} = \frac{7{,}5 \cdot 13^2}{6} = 211{,}3 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad W_{\mathrm{II}} = \frac{13 \cdot 7{,}5^2}{6} = 121{,}9 \text{ cm}^3$$

und erhalten damit

$$\sigma_1 = \frac{35\,000}{211{,}3} = 166 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{10\,080}{121{,}9} = 82{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Die beiden Spannungsschaubilder sind in Abb. 229 dargestellt. Der Eckpunkt b erfährt die negative Spannung σ_1 und die positive Spannung σ_2. Gehen wir die Kante b÷e aufwärts, so nimmt σ_1 bei gleichbleibendem σ_2 zu. Der Nullpunkt N wird demnach dort erreicht, wo σ_2 und σ_1 ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gleich groß sind. Da die Nullinie durch den Schwerpunkt gehen muß, ist ihre Lage nunmehr bestimmt. Das Schaubild der Gesamtbiegungsspannungen wird mit

$$\sigma_a = -(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{und} \quad \sigma_c = +(\sigma_1 + \sigma_2)$$

erhalten.

Streng genommen ist noch die Druckspannung

$$\sigma_3 = \frac{288}{7{,}5 \cdot 13} = \approx 3 \text{ kg/cm}^2$$

zu berücksichtigen, durch die der Nullpunkt des Spannungsschaubildes um ein geringes nach der Seite der positiven Spannungen hin verschoben wird.

Außer diesen Normalspannungen treten noch infolge

$$M_d = (A_1 + A_2) \cdot a_1 = 49000 \text{ cmkg}$$

Schubspannungen auf, die in der Mitte der langen Seiten ad und bc

$$\tau_{\max} = \frac{M_d}{0{,}2222 \cdot p^2 q} = \frac{49\,000}{0{,}2222 \cdot 7{,}5^2 \cdot 13} = 302 \text{ kg/cm}^2$$

betragen, wenn wir die übliche Näherungsgleichung zugrunde legen. Die Verteilung der Spannungen längs der Seiten ad und bc erfolge angenähert nach einer Parabel. Die Schaubilder der gesamten Normalspannungen und der Schubspannungen lassen erkennen, daß die größten Normalspannungen und die größten Schubspannungen an verschiedenen Punkten der Umrißlinien auftreten. Nach Mohr erhalten wir als Gesamtspannung

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,,$$

die sich natürlich als Funktion von y (Abb. 229) angeben läßt. Sie wird vom 4. Grade und ergibt durch Differentiation den Ort der größten und kleinsten Gesamtspannung σ_M. In unserm Beispiel erscheint diese Rechnung nicht nötig, da die Normalspannung in der Nähe der größten Schubspannung angenähert gleich σ_2 zu setzen ist. Wir schreiben deshalb

$$\sigma_{M_{\max}} = \sqrt{\sigma_2^2 + (2\tau_{\max})^2} = \sqrt{82{,}5^2 + (2\cdot 302)^2} = 611 \text{ kg/cm}^2\,.$$

Nachzuprüfen wäre noch die Mitte der schmalen Seite, wo die größte Schubspannung τ mit einer erheblichen Normalspannung σ zusammentrifft. Angenähert setzen wir

$$\tau = \tau_{\max}\cdot\frac{p}{q} = 302\cdot\frac{75}{130} = 168 \text{ kg/cm}^2\,,$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 = 166 + 3 = 169 \text{ kg/cm}^2\,,$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{169^2 + 4\cdot 168^2} = 376 \text{ kg/cm}^2.$$

Da die rechte Wange stärker beansprucht wird, wählen wir einen Querschnitt 90 · 130 mm mit

$$W_{\mathrm{I}} = \frac{9\cdot 13^2}{6} = 253{,}5 \text{ cm}^3; \qquad W_{\mathrm{II}} = \frac{13\cdot 9^2}{6} = 175{,}5 \text{ cm}^3\,,$$

demnach bei $M_d = 53000$ cmkg; $M_{\mathrm{I}} = 60000$ cmkg; $M_{\mathrm{II}} = 2200$ cmkg

$$\sigma_1 = \frac{60000}{253{,}5} = 237 \text{ kg/cm}^2; \qquad \sigma_2 = \frac{2200}{175{,}5} = 12{,}5 \text{ kg/cm}^2\,,$$

$$\tau_{\max} = \frac{53000}{0{,}2222\cdot 9^2\cdot 13} = 226 \text{ kg/cm}^2.$$

Angenähert erhalten wir nach Mohr als größte Gesamtspannung im Mittelpunkt der langen Seiten

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_2^2 + (2\,\tau_{\max})^2} = \approx 2\,\tau_{\max} = 452 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Die Formänderung der gekröpften Welle.

Auf S. 202 wurde die Formänderung der gekröpften Welle nach dem Verfahren von Castigliano untersucht, doch beschränkte sich diese Untersuchung auf Kräfte, die in der Ebene der Kröpfung angreifen. Da die gekröpfte Welle ein sehr wichtiger Maschinenteil ist, soll noch ein zweiter Weg gezeigt werden, der von der allgemeinen Gleichung der Formänderung infolge Biegung ausgeht (vgl. S. 176). Genau so wie bei dem Festigkeitsnachweis unterscheiden wir Kräfte senkrecht zur Ebene der Kröpfung und Kräfte in der Ebene der Kröpfung.

Wären die Wangen nicht vorhanden, so würde sich die Welle wie ein Träger mit gerader Achse verhalten und ihre Formänderung wäre nach S. 176 rechnerisch bzw. nach S. 178 zeichnerisch zu ermitteln. Durch die Wangen wird die Welle biegsamer, wir wollen die zusätzliche Formänderung bestimmen, die durch die Wangen hervorgerufen wird. Bei dieser Untersuchung nehmen wir alle übrigen Wellenteile als starr an und verfolgen die Verschiebung des Punktes A, wenn wir die Welle in Zapfenmitte eingespannt denken.

a) Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene.

Aus der Beanspruchung der Wange $1 \div 2$ (Abb. 230) entnehmen wir eine senkrechte Verschiebung des Punktes 1 nach oben infolge der Biegung und eine Drehung des Wellenendes $A \div 1$, die eine senkrechte Verschiebung des Punktes A zur Folge hat. Die mit der Verdrehung der Wange verbundene wagerechte Verschiebung des Punktes A darf wegen der notwendigen Kleinheit des Verdrehungswinkels vernachlässigt werden. Bezeichnen wir mit δ_t die senkrechte Verschiebung des Punktes 1, mit δ_{vt} die senkrechte Verschiebung des Punktes A und mit φ_t den Verdrehungswinkel der Wange $1 \div 2$, so ist

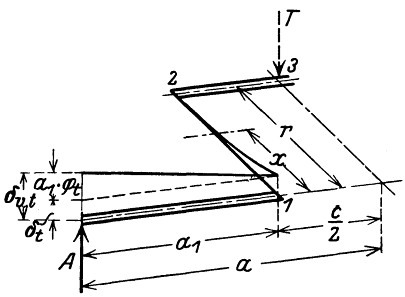


Abb. 230. Durchbiegungen senkrecht zur Ebene der Kröpfung.

$$\delta_{vt} = \delta_t + a_1 \cdot \varphi_t.$$

Die dem Biegungsmoment

$$M_b = A \cdot x$$

entsprechende Verschiebung δ_t ist

$$\delta_t = \frac{1}{E} \int_0^r \frac{M_b \cdot x \cdot dx}{J_2} = \frac{A}{E} \int_0^r \frac{x^2}{J_2} dx,$$

die für den Fall eines gleichbleibenden Querschnittes die Form

$$\delta_t = \frac{A}{E J_2} \int_0^r x^2 dx = \frac{A \cdot r^3}{3 E J_2}$$

annimmt, wobei J_2 das auf die Schwerachse des hochkant gestellten rechteckigen Querschnittes bezogene Trägheitsmoment bedeutet.

Der verhältnismäßige Verdrehungswinkel ϑ der Wange $1 \div 2$ ist

$$\vartheta = \frac{M_d}{G \cdot J_d},$$

wobei J_d den Drillingswiderstand des Querschnittes bedeutet, der beim kreisförmigen Querschnitt mit dem polaren Trägheitsmoment zusammenfällt. Für den rechteckigen Querschnitt mit den Seiten b und h war nach S. 252

$$J_d = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}.$$

Setzen wir noch $h = n \cdot b$, so wird der Drillingswiderstand des rechteckigen Querschnittes

$$J_d = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{n^3}{1 + n^2} \cdot b^4 = \xi \cdot b^4.$$

Bei r cm Länge der Wange ist

$$\varphi_t = r \cdot \vartheta = \frac{M_d \cdot r}{G \cdot J_d}$$

und somit die senkrechte Verschiebung des Punktes A

$$a_1 \cdot \varphi_t = \frac{M_d \cdot r \cdot a_1}{G \cdot J_d},$$

wenn wir δ_t vernachlässigen.

Erweitern wir mit E, so erhalten wir

$$a_1 \cdot \varphi_t = \frac{1}{E} \cdot \frac{M_d \cdot r \cdot a_1}{J_d} \cdot \frac{E}{G}.$$

Die Durchbiegung eines Punktes ist aber nach Mohr gleich dem $(1:E)$-fachen Wert des statischen Momentes der $(M:J)$-Fläche. Da infolge der Formänderung der Wange die elastische Linie der Welle im Punkte 1 einen Knick erhält, so müssen wir uns die $(M:J)$-Fläche als Einzelkraft im Punkte 1 denken, wobei der Hebelarm des Momentes gleich a_1 ist. Die in den Schnittpunkten der Wangenachse mit der Wellenachse der Belastungsfläche nach Mohr hinzuzufügende Einzelkraft ist daher gleich

$$\frac{E}{G} \cdot \frac{M_d \cdot r}{J_d}.$$

Wieweit δ_t zu berücksichtigen ist, läßt sich allgemein nicht sagen, doch ist zu beachten, daß die Biegungsmomentenflächen der Wangen entgegengesetzte Vorzeichen haben (Abb. 226).

b) Kräfte in der Kröpfungsebene.

Das Biegungsmoment im Punkte 1 der Welle ist (Abb. 231)

$$M_1 = A \cdot a_1,$$

es ist längs der Wangenachse 1÷2 unveränderlich, so daß der Stabteil 1÷2 als Träger aufgefaßt werden darf, der durch ein gleichbleibendes Biegungsmoment beansprucht ist. Die wagerechte Verschiebung des Punktes 1 ist

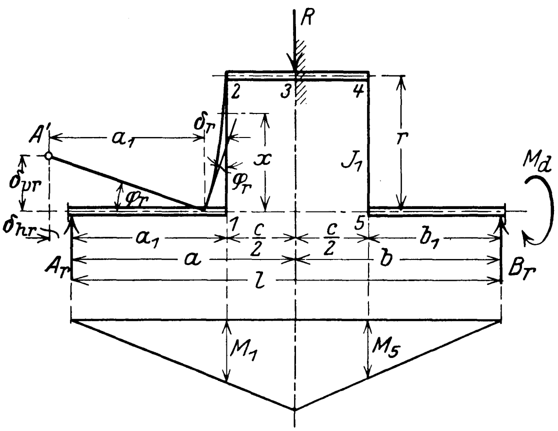


Abb. 231. Durchbiegungen in der Ebene der Kröpfung.

$$\delta_r = \frac{1}{E} \int_0^r \frac{M_1 \cdot x \cdot dx}{J_1};$$

der Winkel, den die Tangente an die Biegungslinie im Punkte 1 mit der Stabachse bzw. der Tangente im Punkte 2 bildet, ist

$$\varphi_r = \frac{1}{E} \int_0^r \frac{M_1}{J_1} \cdot dx;$$

die senkrechte Verschiebung des Punktes 1 wird vernachlässigt. Da das als starr aufgefaßte Wellenstück $A \div 1$ keine Formänderung erfährt, wird die senkrechte Verschiebung des Punktes A

$$\delta_{vr} = a_1 \cdot \varphi_r = \frac{1}{E} \int_0^r \frac{M_1 \cdot a_1 \cdot dx}{J_1};$$

die wagerechte Verschiebung ist

$$\delta_{hr} = \delta_r = \frac{1}{E} \int_0^r \frac{M_1 \cdot x \cdot dx}{J_1}.$$

Kehrt sich die Richtung der Kraft R um, so wird δ_r und damit δ_{hr} entgegengesetzt; die Punkte 1 und 5 nähern sich. Nun wechselt aber R bei jedem Umlauf die Richtung, so daß der Punkt A dauernd um die Lagermitte schwingt; die Gesamtverschiebung ist gleich der Summe der Einzelverschiebungen. Ob diese wagerechten Wege der Punkte A und 1 vernachlässigt werden dürfen, läßt sich allgemein nicht sagen; auf alle Fälle setzen sie Spiel in Richtung der Lagerachse voraus. Ist dieses Spiel nicht vorhanden, so wird die Welle zum statisch unbestimmten Träger, der einen wagerechten Schub erfährt (vgl. S. 379).

Nehmen wir den wohl meistens vorliegenden Fall gleichbleibenden Wangenquerschnittes an, so geht unsere Gleichung für δ_{vr} mit $J_1 =$ unveränderlich über in

$$\delta_{vr} = \frac{1}{EJ_1} \int_0^r M_1 \cdot a_1 \cdot dx.$$

Unter dem Integralzeichen ist $M_1 \cdot dx$ ein Flächenstreifen der Momentenfläche des Stabes $1 \div 2$; $M_1 \cdot dx \cdot a_1$ ist das statische Moment dieses Flächenstreifens, bezogen auf A, d. h. den Punkt, dessen Senkung bestimmt werden soll. Das Integral ist als Summe der statischen Momente der Flächenteile gleich dem statischen Moment der ganzen Momentenfläche. Dabei denken wir uns die Momentenfläche des Stabes $1 \div 2$ so gezeichnet, daß die Stabachse $1 \div 2$ Symmetrieachse dieser Fläche ist.

In den Fällen wo der Wangenquerschnitt veränderlich ist, bilden wir entsprechend dem Mohrschen Verfahren auf S. 176 die $(M:J)$-Fläche, die wir ebenfalls mit der Stabachse als Symmetrieachse gezeichnet denken. Diese Art der Vorstellung ist nötig, damit der Schwerpunkt jedes Flächenteilchens und damit der ganzen M- bzw. $(M:J)$-Fläche den Abstand a_1 von A hat (Abb. 232).

Die Gleichung für δ_{vr} ermöglicht die Anwendung des Mohrschen Verfahrens auch für die in der Ebene der Kröpfung wirkenden Kräfte. Ist die $(M:J)$-Fläche für die gerade Welle gezeichnet, so berücksichtigt man den Einfluß der Wangen, indem man der Belastungsfläche mit den Ordinaten $(M:J)$ in den Punkten der Wangenachsen Einzelkräfte hinzufügt, deren Größe aus

$$\delta_{vr} = \frac{1}{E}\int_0^r \frac{M_1 \cdot a_1 \cdot dx}{J_1} \quad \text{zu} \quad \int_0^r \frac{M_1 \cdot dx}{J_1} = \frac{M_1 \cdot r}{J_1}$$

berechnet wird[1]).

In gleicher Weise wie die senkrechte Verschiebung δ_{vr} läßt sich auch die wagerechte Verschiebung δ_{hr} nach dem Mohrschen Verfahren

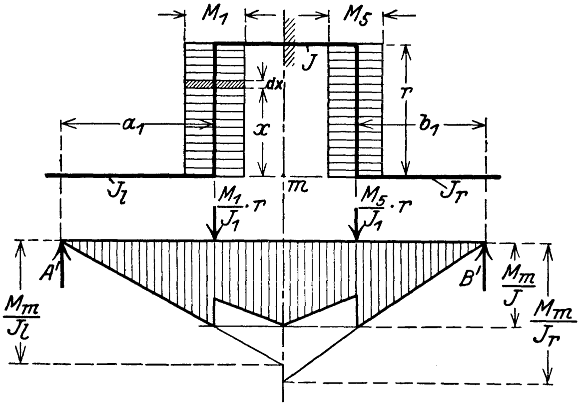


Abb. 232. ($M : J$)-Fläche.

zeichnerisch bestimmen, da sich ja der Stab $1 \div 2$ in dieser Beziehung nicht anders verhält wie ein in 2 eingespannter Freiträger.

XII. Die statisch unbestimmten Träger.

Unter statisch bestimmten Trägern hatten wir Träger verstanden, zu deren Berechnung die drei Gleichgewichtbedingungen ausreichen; alle übrigen Träger nannten wir statisch unbestimmt. Geben wir einem Träger auf zwei Stützen noch eine Mittelstütze, so läßt sich der Auflagerdruck auf diese Stütze nicht mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen ermitteln; zu den drei Unbekannten, der senkrechten und wagerechten Seitenkraft im festen Auflager und dem senkrechten Auflagerdruck im beweglichen Lager, tritt eine vierte Unbekannte, der Auflagerdruck auf die Mittelstütze. Den vier Unbekannten stehen drei Bedingungsgleichungen gegenüber. Da eine überzählige Unbekannte vorhanden ist, heißt der Träger einfach statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Größen kommen neben Lagerdrucken auch Momente (Einspannungsmomente) und Spannkräfte in überzähligen Stäben ebener Fachwerke in Frage. Jede statisch nicht bestimmbare Größe verlangt die Aufstellung einer Bedingungsgleichung.

[1]) Zu demselben Ergebnis kommt man mit Hilfe der Gleichungen der Formänderungsarbeit (S. 203).

1. Der dreifach gelagerte Träger. (Abb. 233.)

Durch das Entfernen der Mittelstütze C wird der statisch bestimmte Träger $A_1 B_1$ erhalten, der statisch bestimmtes Hauptsystem heißt. Selbstverständlich führt auch das Entfernen einer Außenstütze zu einem statisch bestimmten Träger, der in diesem Falle ein überhängender Träger sein würde. Da $A_1 B_1$ in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, nennen wir ihn einen gedachten Träger und belasten ihn mit den wirklichen Lasten P des gegebenenen Trägers ACB. Unter dem Einfluß dieser Last senkt sich der Punkt C; seine senkrechte Verschiebung sei δ_{CP}. Von den beiden Zeigern bezeichnet der erste den Punkt, der zweite die Ursache der Verschiebung; δ_{CP} ist demnach die Verschiebung des Punktes C infolge der Kräfte P. Nunmehr belasten wir den gedachten Träger $A_2 B_2$, d. h. das statisch bestimmte Hauptsystem im Punkte C mit dem unbekannten Auflagerdruck C. Infolge dieser Belastung senkt sich der Punkt C um den Betrag δ_{CC}. Da durch das gleichzeitige Auftreten der Lasten P und des Auflagerdruckes C der Punkt C überhaupt nicht verschoben wird, vielmehr seine ursprüngliche Lage behält, erhalten wir als Bedingungsgleichung

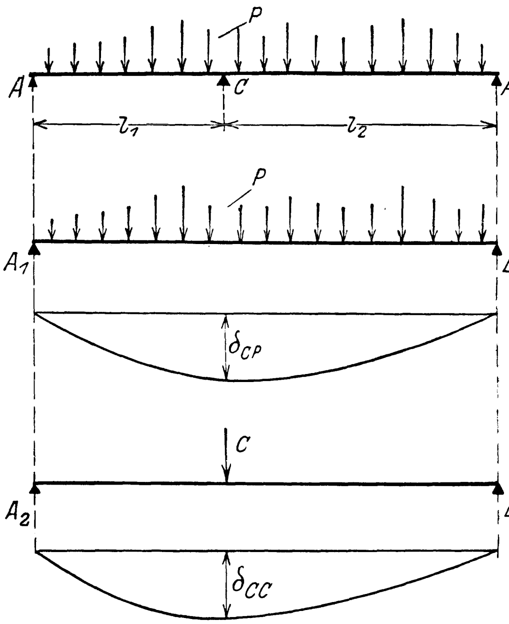


Abb. 233. Dreifach gelagerter Träger.

$$\delta_{CP} - \delta_{CC} = 0.$$

Die Glieder dieser Gleichung stellen elastische Verschiebungen dar, deshalb nennen wir Gleichungen dieser Art **Elastizitätsgleichungen.** Unserer allgemeinen Forderung auf S. 306 können wir jetzt die Form geben: jede statisch nicht bestimmbare Größe erfordert die Aufstellung einer Elastizitätsgleichung.

Die Verschiebungen δ_{CP} und δ_{CC} ermitteln wir nach den auf S. 176 angegebenen Verfahren, und zwar werden wir bei gleichbleibendem Querschnitt die Rechnung, bei veränderlichem Querschnitt die Zeichnung bevorzugen. Entscheidet man sich für die Anwendung des zeichnerischen Verfahrens, so ist zu beachten, daß sich die Biegungslinie des mit der Unbekannten C belasteten Trägers $A_2 B_2$ nicht ohne weiteres entwerfen läßt. Wir belasten deshalb den Träger $A_2 B_2$ mit $C = 1$ t oder 10, ja 100 t, je nach der Größe der überhaupt vorkommenden Lasten, und entwerfen für diesen Belastungszustand die Biegungslinie, deren Ordinate im Punkte C die Größe $\delta_{C(C=1)}$ haben möge. Da eine Kraft von C t eine Cmal so große Verschiebung des Punktes C hervorruft wie eine Kraft von 1 t, so lautet die Elastizitätsgleichung

$$\delta_{CP} - C \cdot \delta_{C\,(C=1)} = 0;$$

daraus ergibt sich die statisch nicht bestimmbare Größe C zu

$$C = \frac{\delta_{CP}}{\delta_{C\,(C=1)}}.$$

Ist eine Last von 10 t als Belastungseinheit gewählt, so wird

$$C = 10 \cdot \frac{\delta_{CP}}{\delta_{C\,(C=10)}}.$$

Da es sich hierbei um das Verhältnis zweier Durchbiegungen handelt, ist die Wahl der Polweite bei der Anwendung des Mohrschen Verfahrens beliebig, nur muß sie für beide Biegungslinien gleich groß sein. Mit der Ermittlung der statisch nicht bestimmbaren Größen ist der gegebene Träger statisch bestimmt worden und als solcher zu berechnen, indem zu den gegebenen Lasten noch die nunmehr ermittelten statisch nicht bestimmbaren Größen treten.

Im allgemeinen sind Elastizitätsgleichungen undurchsichtig. Um ein anschauliches Bild zu erhalten, müßte aus der Gleichung sofort zu ersehen sein, der wievielte Teil der Gesamtlast in die statisch nicht bestimmbare Größe eingeht. Wir schreiben deshalb unsere Elastizitätsgleichung, wenn die Belastung eine Einzelkraft ist, in der Form

$$C = \frac{P \cdot \delta_{C\,(P=1)}}{\delta_{C\,(C=1)}} \quad \text{oder} \quad \frac{C}{P} = \frac{\delta_{C\,(P=1)}}{\delta_{C\,(C=1)}}.$$

Hierbei ist darauf zu achten, daß $\delta_{C\,(C=1)}$ nicht etwa gleich $\delta_{C\,(P=1)}$ gesetzt wird; das wäre nur dann möglich, wenn P eine Einzelkraft im Punkte C wäre. So aber haben wir unter $\delta_{C\,(P=1)}$ die Verschiebung eines Punktes C unter dem Einfluß einer der gegebenen Last P entsprechenden Last $P = 1$ zu verstehen.

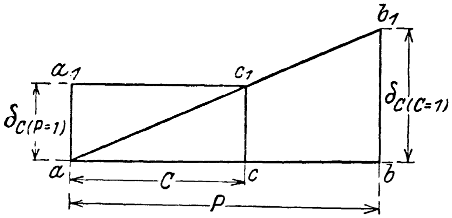


Abb. 234. Zeichnerische Bestimmung von C.

Aus der umgeformten Elastizitätsgleichung folgt eine einfache zeichnerische Bestimmung des Anteiles der Gesamtlast P, der auf die statisch nicht bestimmbare Größe C entfällt (Abb. 234). Errichte über der Wagerechten $ab = P$ die Lote $aa_1 = \delta_{C\,(P=1)}$, $bb_1 = \delta_{C\,(C=1)}$; verbinde a mit b_1, ziehe a_1c_1 wagerecht und lote c_1 auf ab herunter, dann ist

$$ac = C,$$

wie sich unmittelbar aus

$$ac : ab = cc_1 : bb_1 ,$$
$$C : P = \delta_{C\,(P=1)} : \delta_{C\,(C=1)}$$

ergibt.

Einfluß einer Senkung der Mittelstütze. Die Mittelstütze C habe ein Spiel Δ, das auch eine Senkung bedeuten kann, die nach dem Aufstellen beobachtet ist. In diesem Falle lautet unsere Elastizitätsgleichung

$$\delta_{CP} - \delta_{CC} = \Delta$$

oder $\quad \delta_{CP} - C \cdot \delta_{C\,(C=1)} = \Delta .$

Erweitern wir mit P, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{C}{P} = \frac{\delta_{CP} - \Delta}{P \cdot \delta_{C\,(C=1)}} ,$$

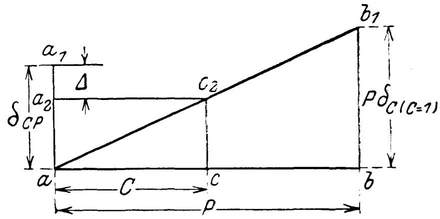


Abb. 235. Senkung der Mittelstütze.

deren zeichnerische Darstellung in Abb. 235 wiedergegeben ist. Die Abb. 235 unterscheidet sich von der Abb. 234 dadurch, daß von $aa_1 = \delta_{CP}$ der Betrag $a_1 a_2 = \Delta$ in Abzug gebracht ist; demzufolge wird die Wagerechte durch a_2 gezogen, die unter c_2 den Punkt c auf $ab = P$ bestimmt; es ist

$$ac = C .$$

Die zeichnerische Bestimmung von C ist insofern anschaulich, als sie den Einfluß einer vorhandenen Senkung der Mittelstütze deutlich erkennen läßt.

a) Der dreifach gelagerte Träger mit gleichen Öffnungen und gleichmäßig verteilter Last (Abb. 236).

Mit den Bezeichnungen der Abb. 236 ist $A_1 B_1$ das statisch bestimmte Hauptsystem, das mit der Last P belastet wird; infolge dieser Last senkt sich der Punkt C um den Betrag (vgl. S. 161)

$$\delta_{CP} = \frac{5 \cdot P \cdot (2\,l)^3}{384 \cdot EJ} .$$

Die unbekannte Einzellast C in der Mitte des Trägers $A_2 B_2$ ruft eine Verschiebung (vgl. S. 154)

$$\delta_{CC} = \frac{C \cdot (2\,l)^3}{48 \cdot EJ}$$

hervor. Die Gleichsetzung beider Verschiebungen liefert

$$C = \frac{5}{8} P .$$

Die zeichnerische Ermittlung des Stützdruckes C zeigt Abb. 237 die sich unmittelbar aus Abb. 234 ergibt. Es ist

$$a \cdot a_1 = \delta_{C\,(P=1)} = \frac{5\,(2\,l)^3}{384 \cdot EJ} = \frac{5}{8} \cdot \frac{(2\,l)^3}{48\,EJ} ,$$
$$b\,b_1 = \delta_{C\,(C=1)} = \frac{(2\,l)^3}{48\,EJ} ,$$

demnach
$$ac = C = \frac{5}{8} P .$$

Damit ist die statische Unbestimmtheit behoben und demzufolge der statisch bestimmte Träger (Abb. 236) zu berechnen, der zweck-

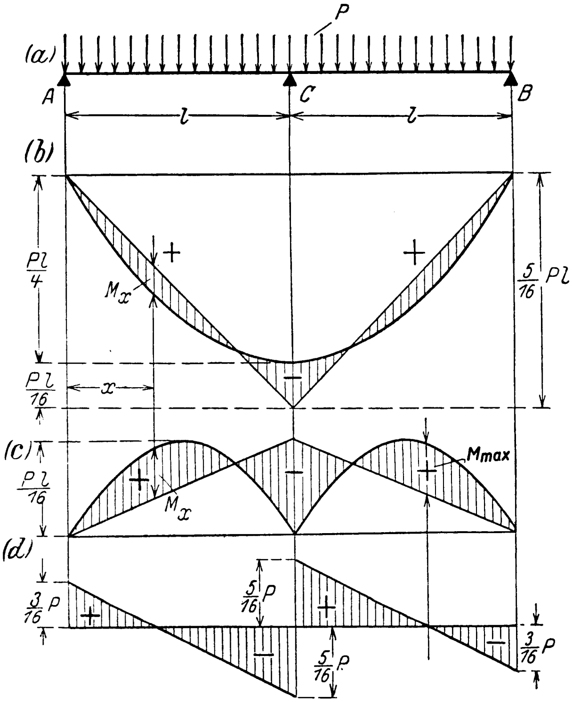


Abb. 236. Dreifach gelagerter Träger mit gleichen Öffnungen und gleichmäßig verteilter Last.

mäßig nach dem Überlagerungsgesetz behandelt wird. Wegen der Symmetrie wird
$$A = B = \frac{P}{2} - \frac{5}{16} P = \frac{3}{16} P .$$

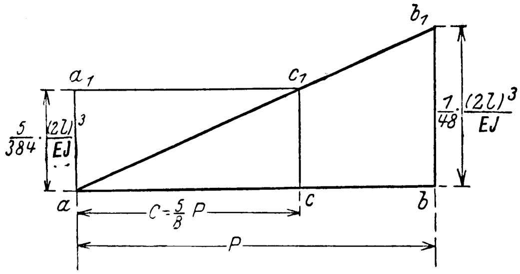


Abb. 237. Zeichnerische Ermittlung des Stützdruckes.

Infolge der gleichmäßig verteilten Last P erhalten wir als Momentenlinie eine Parabel mit der Pfeilhöhe
$$M_1 = \frac{P(2l)}{8} = \frac{Pl}{4};$$
infolge der nach oben gerichteten Einzellast $C = {}^5/_8\, P$ erhalten wir als Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe
$$M_2 = -\frac{C \cdot (2l)}{4} = -\frac{5}{16} Pl .$$

Die Gesamtmomentenfläche ergibt sich unmittelbar, wenn wir beide M-Flächen nach derselben Richtung auftragen. Die durch Strichelung hervorgehobene Fläche (Abb. 236b) ist die Biegungsmomentenfläche des dreifach gelagerten Trägers und zeigt positive und negative Teilflächen. Der Querschnittsbemessung ist das absolut größte Moment zugrunde zu legen. Als Stützmoment ergibt sich (Abb. 236b)

$$M_C = \frac{P\,l}{4} - \frac{5\,P\,l}{16} = -\frac{P\,l}{16}.$$

Ein beliebiger Punkt im Abstande x vom Auflager A erfährt das Biegungsmoment

$$M_x = A \cdot x - \frac{P}{2\,l} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{3}{16}\,P\,x - \frac{P\,x^2}{4\,l}.$$

Wir finden den Ort des größten positiven Momentes, wenn wir den ersten Differentialquotienten $\frac{d\,M_x}{d\,x}$ gleich Null setzen.

Aus

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{3}{16}\,P - \frac{P\,x}{2\,l} = 0 \quad \text{folgt} \quad x = \frac{3}{8}\,l.$$

Setzen wir diesen Wert für x in die Gleichung für M_x ein, so erhalten wir

$$M_{\max} = \frac{3}{16}\,P \cdot \frac{3}{8}\,l - \frac{P}{4\,l} \cdot \left(\frac{3}{8}\,l\right)^2 = \frac{9}{256}\,P\,l.$$

Die Rechnung ergibt das negative Stützmoment als absolut größtes Moment.

Die nach dem Überlagerungsgesetz entworfene Momentenfläche der Abb. 236b liefert verhältnismäßig kleine Ordinaten. Besser ist folgender Weg: wir entwerfen die Momentenflächen der Träger $A\,C$ und $C\,B$, die wir als Träger auf zwei Stützen auffassen, und bringen von dieser Fläche die Stützmomentenfläche in Abzug, d. h. diejenige Fläche, welche wir erhalten, wenn wir die Endpunkte der Momente in A, B und C durch gerade Linien verbinden (Abb. 236c), wobei $M_A = M_B = 0$ ist, da ja der Träger in C in Wirklichkeit nicht durchgeschnitten ist, sondern das Stützmoment übertragen muß. Die Momentenflächen der Einzelträger sollen M_0-Momentenflächen genannt werden. Für $A\,C$ und $C\,B$ sind die M_0-Linien Parabeln mit der Pfeilhöhe

$$M_0 = \frac{P\,l}{16};$$

die Stützmomentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe

$$M_C = -\frac{P\,l}{16}$$

im Punkte C. Zeichnet man wieder beide Flächen nach derselben Richtung auf, so ergibt sich die Gesamtmomentenfläche von selber; sie ist in Abb. 236c durch Strichelung hervorgehoben. Die Übereinstimmung beider Entwürfe der M-Fläche zeigt die Berechnung des Momentes M_x aus Abb. 236c; es ist

$$M_x = M_{0\,x} + \frac{x}{l} \cdot M_C = A_0 \cdot x - \frac{P}{2\,l} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x}{l} \cdot \frac{P\,l}{16}$$

oder mit

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} = \frac{P}{4}$$

$$M_x = \frac{P}{4} \cdot x - \frac{P}{4l} x^2 - \frac{P}{16} x = \frac{3}{16} P x - \frac{P}{4l} \cdot x^2 .$$

Der Vollständigkeit halber werde auch noch die Querkraftfläche berechnet. Es ist

$$Q_A = A = \frac{3}{16} P ;$$

$$Q_x = A - \frac{P}{2l} \cdot x = \frac{3}{16} P - \frac{P}{2l} \cdot x ;$$

die Querkraftlinie ist eine Schräge, die die Stützensenkrechte durch A in

$$Q_x = Q_A = \frac{3}{16} P ,$$

die Stützsenkrechte durch C in

$$Q_x = Q_C = \frac{3}{16} P - \frac{P}{2l} \cdot l = -\frac{5}{16} P$$

schneidet. Unmittelbar rechts von C ist

$$Q'_C = -\frac{5}{16} P + C = -\frac{5}{16} P + \frac{5}{8} P = +\frac{5}{16} P ;$$

innerhalb der zweiten Öffnung nimmt die Querkraft in gleicher Weise ab wie in der ersten Öffnung, so daß die Querkraftlinie die Stützsenkrechte durch B in

$$Q_B = -B = -\frac{3}{16} P$$

schneidet (Abb. 236d).

b) Der dreifach gelagerte Träger mit verschiedenen Öffnungen und gleichmäßig verteilter Last (Abb. 238).

Wir wählen wieder den Träger auf zwei Stützen als statisch bestimmtes Hauptsystem $A_1 B_1$, das wir mit der wirklichen Last P belasten; dann senkt sich der Punkt C um den Betrag δ_{CP}, den wir aus der Gleichung der Biegungslinie für den gleichmäßig belasteten Träger auf zwei Stützen bestimmen. Nach S. 161 wird mit $x = l_1$

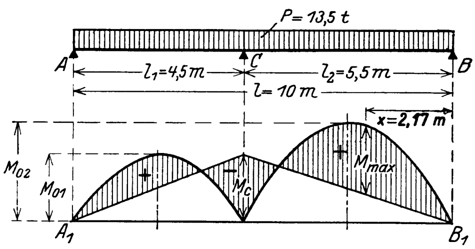


Abb. 238. Verschiedene Öffnungen und gleichmäßig verteilte Last.

$$\delta_{CP} = \frac{P l^3}{24 E J} \left(\frac{l_1}{l} - 2 \frac{l_1^3}{l^3} + \frac{l_1^4}{l^4} \right) .$$

Infolge der Einzellast C senkt sich der Punkt C des Trägers $A_2 B_2$ um den Betrag (vgl. S. 156)

$$\delta_{CC} = \frac{C}{3 E J} \cdot \frac{l_1^2 \, l_2^2}{l} .$$

Die Gleichsetzung beider Verschiebungen liefert

$$C = \frac{1}{8} P \cdot \frac{l^4}{l_1^2 \cdot l_2^2} \left(\frac{l_1}{l} - 2 \frac{l_1^3}{l^3} + \frac{l_1^4}{l^4} \right),$$

das für den Sonderfall gleicher Öffnungen mit $l_1 = l_2 = l/2$ übergeht in

$$C = \frac{1}{8} P \frac{l^4}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2} \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{8} P .$$

Für die zeichnerische Bestimmung des Stützdruckes C ist Abb. 234 ohne weiteres zu benutzen, wenn wir

$$a a_1 = \delta_{C\,(P=1)} = \frac{l^3}{24 EJ} \left(\frac{l_1}{l} - 2 \cdot \frac{l_1^3}{l^3} + \frac{l_1^4}{l^4} \right),$$

$$b b_1 = \delta_{C\,(C=1)} = \frac{l_1^2 l_2^2}{3 EJ \cdot l}$$

machen, dann bestimmt c den Stützdruck C.

Vorteile gegen die Rechnung bietet die Zeichnung erst dann, wenn eine beobachtete oder vorgesehene Senkung Δ der Mittelstütze zu berücksichtigen ist (Abb. 235).

Zahlenbeispiel (Abb. 238). Es sei $l_1 = 4{,}5$ m; $l_2 = 5{,}5$ m; $P = 13{,}5$ t; dann wird

$$C = \frac{1}{8} \cdot P \cdot \frac{10^4}{4{,}5^2 \cdot 5{,}5^2} (0{,}45 - 2 \cdot 0{,}45^3 + 0{,}45^4) = 0{,}630\, P = 8{,}50 \text{ t} .$$

Infolge der Belastung $P = 13{,}5$ t und $C = 8{,}50$ t erfährt der Träger AB die Auflagerdrucke

$$A = \frac{13{,}5 \cdot 5 - 8{,}50 \cdot 5{,}5}{10} = 2{,}07 \text{ t} \quad \text{und} \quad B = \frac{13{,}5 \cdot 5 - 8{,}50 \cdot 4{,}5}{10} = 2{,}93 \text{ t} .$$

Daraus errechnen wir das Stützmoment zu

$$M_C = A \cdot l_1 - \frac{P}{l} \cdot \frac{l_1^2}{2} = 2{,}07 \cdot 4{,}5 - \frac{13{,}5}{10} \cdot \frac{4{,}5^2}{2} = -4{,}35 \text{ mt} .$$

Die M_0-Momentenfläche der ersten Öffnung hat die Pfeilhöhe

$$M_{01} = \frac{P \cdot l_1}{l} \cdot \frac{l_1}{8} = \frac{13{,}5 \cdot 4{,}5}{10} \cdot \frac{4{,}5}{8} = 3{,}417 \text{ mt} ,$$

die der zweiten Öffnung hat die Pfeilhöhe

$$M_{02} = \frac{P \cdot l_2}{l} \cdot \frac{l_2}{8} = \frac{13{,}5 \cdot 5{,}5}{10} \cdot \frac{5{,}5}{8} = 5{,}105 \text{ mt} .$$

Damit ist der Verlauf der Momentenlinie über den ganzen Träger bestimmt (Abb. 238). Zu prüfen wäre noch, ob das größte positive Moment der zweiten Öffnung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen größer ist als das Stützmoment. Der Querkraft-Nullpunkt der zweiten Öffnung folgt aus der Bedingung

$$Q_x = -B + \frac{P}{l} \cdot x = 0 \quad \text{zu} \quad x = l \cdot \frac{B}{P} = 10 \cdot \frac{2{,}93}{13{,}5} = 2{,}17 \text{ m} .$$

Das Moment in diesem Punkte ist

$$M_x = B \cdot x - \frac{P}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = 2{,}93 \cdot 2{,}17 - \frac{13{,}5}{10} \cdot \frac{2{,}17^2}{2} = 3{,}18 \text{ mt} .$$

Das Stützmoment ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen größer.

c) Der dreifach gelagerte Träger mit verschiedenen Öffnungen und Einzellasten (Abb. 239).

Als statisch bestimmtes Hauptsystem wählen wir den zweifach gestützten Träger $A'B'$, dessen Punkt C sich unter dem Einfluß des unbekannten Auflagerdruckes C um den Betrag

$$\delta_{CC} = \frac{C \cdot l_1^2 l_2^2}{3 \cdot EJ \cdot l}$$

verschiebt. Zur Bestimmung von δ_{CP} benutzen wir das Überlagerungsgesetz und schreiben

$$\delta_{CP} = \delta_1 + \delta_2 \,,$$

wobei δ_1 und δ_2 Ordinaten der Biegungslinie für die Träger $A'\,B'$ bzw. $A''\,B''$ sind. Die Gleichung der elastischen Linie für Abb. 239a lautet nach S. 156

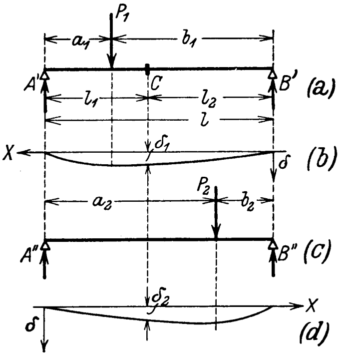


Abb. 239. Verschiedene Öffnungen und Einzellasten.

$$\delta = \frac{P_1}{EJ} \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{6l} \left(2\frac{x}{b_1} + \frac{x}{a_1} - \frac{x^3}{b_1^2 \cdot a_1}\right)$$

für das in Abb. 239b gezeichnete Achsenkreuz; für $x = l_2$ wird

$$\delta_1 = \frac{P_1}{EJ} \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{6 \cdot l} \left(2 \cdot \frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 \cdot b_1^2}\right).$$

Entsprechend ergibt sich für das Achsenkreuz der Abb. 239d

$$\delta_2 = \frac{P_2}{EJ} \cdot \frac{a_2^2 b_2^2}{6l} \left(2\frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2}\right),$$

dann liefert $\delta_{CC} = \delta_{CP}$

$$\frac{1}{3} C \cdot \frac{l_1^2 \cdot l_2^2}{l} = \frac{1}{6} P_1 \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{l} \left(2 \cdot \frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 b_1^2}\right) + \frac{1}{6} P_2 \cdot \frac{a_2^2 b_2^2}{l} \left(2\frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2}\right)$$

und daraus

$$C = \frac{1}{2} \cdot \left[P_1 \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{l_1^2 l_2^2} \left(2\frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 b_1^2}\right) + P_2 \frac{a_2^2 b_2^2}{l_1^2 l_2^2} \left(2\frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2}\right)\right].$$

Da die Ausdrücke in den runden Klammern unbenannte Zahlen sind, sollen sie gleich α_1 bzw. α_2 gesetzt werden, so daß

$$C = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \cdot P_1 \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{l_1^2 l_2^2} + \alpha_2 \cdot P_2 \cdot \frac{a_2^2 b_2^2}{l_1^2 l_2^2}\right).$$

Für den Sonderfall symmetrischer Belastung, d. h. $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$; $a_1 = b_2 = \frac{l}{4}$ und $P_1 = P_2 = P$ wird

$$\alpha_1 = 2\,\frac{\frac{l}{2}}{\frac{3}{4}l} + \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}} - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{\frac{l}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}l\right)^2} = \frac{22}{9} = \alpha_2 \,,$$

so daß sich

$$C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{22}{9} \cdot P \cdot \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4} l\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{11}{8} P$$

ergibt.

Für diesen Sonderfall erhalten wir als Pfeilhöhe der M_0-Fläche der ersten Öffnung

$$M_{01} = \frac{P \cdot l}{8} = M_{02};$$

das Stützmoment wird, da wegen der Symmetrie

$$A = B = \frac{1}{2}\left(2 P - \frac{11}{8} P\right) = \frac{5}{16} P$$

ist,

$$M_C = A \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{4} = \frac{5}{32} Pl - \frac{1}{4} Pl = -\frac{3}{32} Pl.$$

Damit ist der Verlauf der Momentenlinie gegeben.

d) Der dreifach gelagerte Träger mit verschiedenen Öffnungen und beliebig vielen Einzellasten. — Einflußlinie für den Stützdruck (Abb. 240).

Nach dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen (S. 158) ist mit den Bezeichnungen der Abb. 152

$$\delta_{Cx} = \delta_{xC},$$

d. h. eine Last P im Punkte x senkt den Punkt C um den gleichen Betrag wie eine Last P im Punkte C den Punkt x senkt. Statt also die Last P in dem beliebigen Punkte x angreifen zu lassen, belastet man den bestimmten Punkt C mit der gleichen Last P und ermittelt die Senkung des Punktes x. Diese ist aber Ordinate der Biegungslinie eines Trägers AB, der im Punkte C mit P belastet ist. Ruft eine Last von 1 t eine Senkung y des Punktes x hervor, dann ist die Senkung

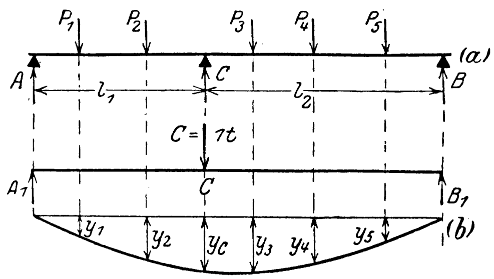


Abb. 240. Biegungslinie für $C = 1$ t.

$$\delta = P \cdot y,$$

wobei y Ordinate der Biegungslinie im Punkte x eines Trägers AB ist, der im Punkte C mit einer Last von 1 t belastet ist. Sind beliebig viele Lasten auf dem Träger, so ist nach dem Überlagerungsgesetz

$$\delta_{CP} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \ldots$$

Es sind $y_1, y_2, y_3 \ldots$ die Ordinaten der Biegungslinie, die wir für eine Last von 1t im Punkte C des Trägers entwerfen (Abb. 240). Es ergibt sich aus

$$C = \frac{\delta_{CP}}{\delta_{C\,(C=1)}} \quad \text{mit} \quad \delta_{C\,(C=1)} = \frac{1 \cdot l_1^2 l_2^2}{3\,EJ\,(l_1 + l_2)}$$

$$C = \frac{3\,EJ\,(l_1 + l_2)}{l_1^2 \cdot l_2^2}\,(P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \ldots).$$

Die Biegungslinie für den Belastungszustand 1 t im Punkte C des Trägers AB ist auf S. 157 entwickelt und in Abb. 134 nomographisch dargestellt; hierbei wurde

$$\frac{3\,EJ\,(l_1 + l_2)}{l_1^2 l_2^2}\,y = \eta$$

gesetzt; mit diesem Wert geht unsere Gleichung für C über in

$$C = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 + \ldots,$$

so daß man mit Hilfe der Abb. 134 den Stützdruck leicht berechnen kann. $\eta = f(x)$ heißt die Einflußlinie des Stützdruckes; sie gestattet, den Stützdruck C unmittelbar unter dem Angriffspunkt x einer Last von 1 t zu messen. Da $\frac{l_1^2 l_2^2}{3\,EJ\,(l_1 + l_2)} = \delta_{C\,(C=1)} = y_C$ ist, so wird $\eta = y : y_C$, d. h. die Biegungslinie der Abb. 240 kann als Einflußlinie aufgefaßt werden, wenn wir einen solchen Maßstab wählen, daß $y_C = 1$ wird. Das Hauptanwendungsgebiet der Einflußlinien ist die Untersuchung von Trägern unter dem Einfluß beweglicher Lasten, doch zeigt das angeführte Beispiel, daß ihre Anwendung auch bei ständigen Lasten von Vorteil sein kann.

Es soll auf den Träger auf drei Stützen nicht weiter eingegangen werden, da er sich als Sonderfall eines durchlaufenden Trägers mit beliebig vielen Stützen unter Umständen einfacher berechnen läßt.

2. Der durchlaufende Träger auf beliebig vielen Stützen bei gleichbleibendem Querschnitt.

a) Die Dreimomentengleichung.

Zu dem durchlaufenden Träger auf 5 Stützen, der gleichmäßig belastet sein mag, entwerfen wir die Momentenfläche, indem wir von den positiven M_0-Flächen die Stützmomentenfläche in Abzug bringen, die man erhält, wenn man die Endpunkte der Stützmomente durch gerade Linien verbindet (Abb. 241). Dann besteht die Gesamtmomentenfläche aus positiven und negativen Teilen. Den Momenten-Nullpunkten entsprechen Wendepunkte der Biegungslinie, was sich aus der Differentialgleichung der Biegungslinie

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{EJ} \cdot M = 0; \qquad \text{d. h.} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = 0$$

unmittelbar ergibt.

Den Teil zwischen zwei aufeinander folgenden Stützpunkten $r-1$ und r können wir belastet denken 1. mit der gleichmäßig verteilten Last p t/m und 2. mit den Stützmomenten M_{r-1} und M_r, und zwar wölbt p die Stabachse nach unten, die Stützmomente dagegen wölben die Stabachse nach oben. Um die Formänderung des Trägerteiles $r-1$, r zu bestimmen, belasten wir den gedachten Träger $A_1 B_1$ (Abb. 242) mit der Momentenfläche des wirklichen Trägers $r-1$, r (vgl. S. 148), dann ist

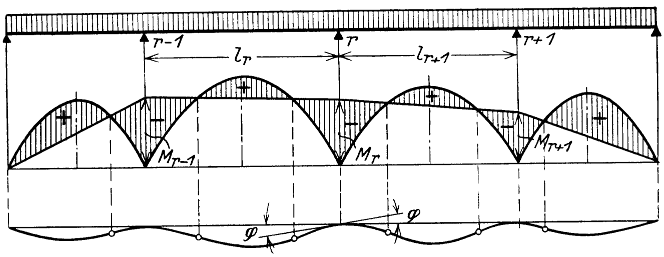


Abb. 241. Träger auf beliebig vielen Stützen.

die Neigung der Biegungslinie in den Punkten $r-1$ und r durch die Auflagerdrucke A_1 und B_1 des Trägers $A_1 B_1$ bestimmt.

Wie Abb. 241 erkennen läßt, haben die Biegungslinien für die r-te und $(r+1)$-te Öffnung im Punkte r eine gemeinsame Tangente, wobei zu beachten ist, daß die Tangente der r-ten Öffnung nach unten, die der $(r+1)$-ten Öffnung nach oben ausschlägt. Diese Eigenschaft liefert die Gleichung

$$\varphi = -\varphi', \tag{1}$$

die mit Berücksichtigung der Abb. 242b und d durch

$$EJ \cdot B_1 = -EJ \cdot B_2 \tag{2}$$

ersetzt werden darf. Für den Auflagerdruck B_1 des mit der M-Fläche belasteten Trägers $A_1 B_1$ erhalten wir für A_1 als Drehpunkt

$$B_1 \cdot l_r = \frac{1}{2} l_r \cdot M_{r-1} \cdot \frac{1}{3} l_r + \frac{1}{2} l_r \cdot M_r \cdot \frac{2}{3} l_r + L_r;$$

hierbei ist L_r das statische Moment der M_0-Momentenfläche der r-ten Öffnung, bezogen auf die linke Stützsenkrechte. Die Stützmomente

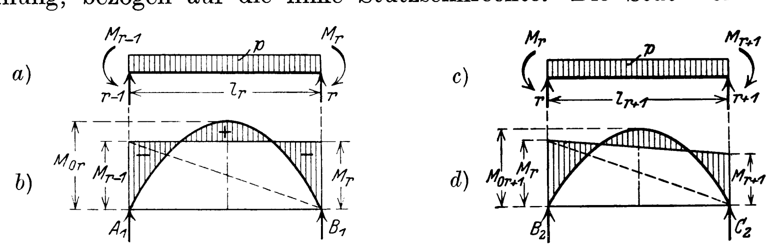


Abb. 242. Momentenflächen.

sind positiv angenommen, weil beide Möglichkeiten vorhanden sind. Ergibt die Rechnung ein negatives Vorzeichen, so ist damit zum Ausdruck gebracht, daß das Stützmoment in Wirklichkeit negativ ist.

In gleicher Weise erhalten wir nach Abb. 242d mit C_2 als Drehpunkt

$$B_2 \cdot l_{r+1} = \frac{1}{2} l_{r+1} \cdot M_r \cdot \frac{2}{3} l_{r+1} + \frac{1}{2} l_{r+1} \cdot M_{r+1} \cdot \frac{1}{3} l_{r+1} + R_{r+1}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{R}_{r+1}$ das statische Moment der M_0-Momentenfläche der $(r+1)$-ten Öffnung, bezogen auf die rechte Stützmomentenfläche. Als Stützdrucke ergeben sich

$$B_1 = \frac{1}{6} M_{r-1} \cdot l_r + \frac{1}{3} M_r \cdot l_r + \frac{\mathfrak{L}_r}{l_r},$$

$$B_2 = \frac{1}{3} M_r \cdot l_{r+1} + \frac{1}{6} M_{r+1} \cdot l_{r+1} + \frac{\mathfrak{R}_{r+1}}{l_{r+1}}.$$

Setzen wir beide Werte in Gleichung (2) ein und multiplizieren die ganze Gleichung mit 6, so erhalten wir

$$M_{r-1} \cdot l_r + 2\, M_r \cdot (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} \cdot l_{r+1} = -6 \left(\frac{\mathfrak{L}_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{r+1}}{l_{r+1}} \right). \tag{3}$$

Diese Gleichung führt den Namen „Dreimomentengleichung" oder auch Clapeyronsche Gleichung nach dem französischen Ingenieur Clapeyron, der 1857 eine Berechnung des durchlaufenden Trägers veröffentlichte, nachdem vor ihm — 1855 — Bertot bereits die Berechnung durchgeführt hatte. Die allgemeine Lösung der Aufgabe unter Berücksichtigung der möglichen Stützensenkungen stammt von O. Mohr.

b) Die Festpunkte des durchlaufenden Trägers gleichen Querschnittes.

Der auf n Stützen ruhende Träger der Abb. 243 sei in der 4. Öffnung belastet, die dadurch in den Stützen 3 und 4 hervorgerufenen Stütz-

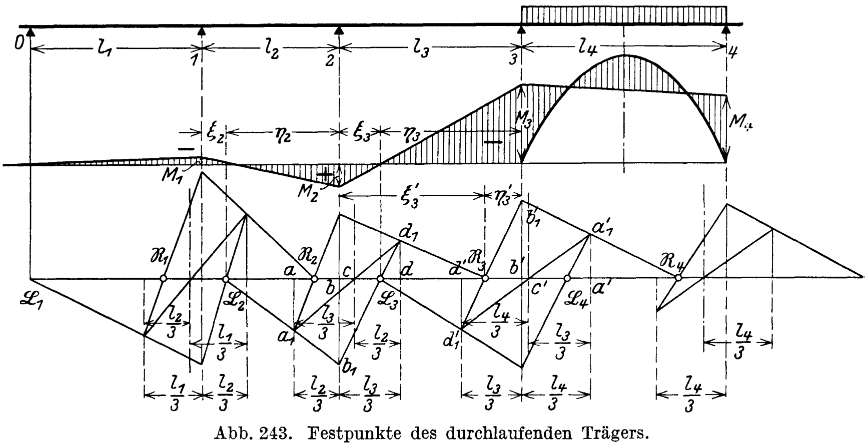


Abb. 243. Festpunkte des durchlaufenden Trägers.

momente seien M_3 und M_4. Aus der Dreimomentengleichung für die 3 ersten Stützen

$$M_0 l_1 + 2\, M_1 (l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = 0$$

folgt mit $M_0 = 0$

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{l_2}{2\,(l_1 + l_2)} = -\frac{\xi_2}{\eta_2},$$

d. h. das Verhältnis der Stützmomente M_1 und M_2 ist unveränderlich, die Stützmomentenlinie geht durch einen festen Punkt $\mathfrak{L}_2$, der Festpunkt des durchlaufenden Trägers genannt wird. Für die zweite und dritte Öffnung lautet die Dreimomentengleichung

$$M_1 \cdot l_2 + 2\,M_2(l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = 0\,.$$

Aus ihr erhält man

$$\frac{M_1}{M_2} \cdot l_2 + 2\,(l_2 + l_3) + \frac{M_3}{M_2} \cdot l_3 = 0$$

oder

$$-\frac{M_3}{M_2} = -\frac{\xi_2}{\eta_2} \cdot \frac{l_2}{l_3} + 2 \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_3}\,.$$

Setzt man

$$\frac{M_2}{M_3} = -\frac{\xi_3}{\eta_3}\,,$$

so wird

$$\frac{\eta_3}{\xi_3} - 2 = -\frac{l_2}{l_3}\left(\frac{\xi_2}{\eta_2} - 2\right),$$

$$\frac{\eta_3 - 2\,\xi_3}{\xi_3} = \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{2\,\eta_2 - \xi_2}{\eta_2}\,,$$

$$\frac{\eta_3 + \xi_3 - 3\,\xi_3}{\xi_3} = \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{3\,\eta_2 - (\xi_2 + \eta_2)}{\eta_2}\,.$$

Mit

$$\xi_2 + \eta_2 = l_2 \quad \text{und} \quad \xi_3 + \eta_3 = l_3 \qquad \text{(Abb. 243)}$$

geht die Gleichung über in

$$\frac{l_3 - 3\,\xi_3}{\xi_3} = \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{3\,\eta_2 - l_2}{\eta_2}\,.$$

Dividieren wir noch durch 3, so erhalten wir

$$\frac{\frac{l_3}{3} - \xi_3}{\xi_3} = \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\eta_2 - \frac{l_2}{3}}{\eta_2}\,.$$

Daraus ergibt sich eine einfache zeichnerische Bestimmung der Festpunkte. $\mathfrak{L}_2$ sei der linke Festpunkt der zweiten Öffnung. Wir teilen die Stützweiten l_2 und l_3 in je drei gleiche Teile und machen vom Punkte a aus (Abb. 243)

$$ac = \frac{l_3}{3} \quad \text{und} \quad cd = \frac{l_2}{3}\,;$$

die Senkrechte durch c heißt verschränkte Stützsenkrechte. Ein beliebiger Strahl aus L_2 schneide die Drittelsenkrechte in a_1, die Stützsenkrechte in b_1; verbinde a_1 mit c, der Schnittpunkt von $a_1 c$ mit der Drittelsenkrechten der nächsten Öffnung sei d_1, dann schneidet $b_1 d_1$ die Wagerechte in dem linken Festpunkt $\mathfrak{L}_3$ der nächsten Öffnung. Die Zeichnung gibt

$$\frac{d\,d_1}{b\,b_1} = \frac{\frac{l_3}{3} - \xi_3}{\xi_3} \quad \text{und} \quad \frac{a\,a_1}{b\,b_1} = \frac{\eta_2 - \frac{l_2}{3}}{\eta_2}\,;$$

da außerdem

$$\frac{d\,d_1}{a\,a_1} = \frac{l_2}{l_3}$$

ist, so wird

$$\frac{d\,d_1}{b\,b_1} = \frac{d\,d_1}{a\,a_1} \cdot \frac{a\,a_1}{b\,b_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\frac{l_3}{3} - \xi_3}{\xi_3} = \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{\eta_2 - \frac{l_2}{3}}{\eta_2}.$$

Der linke Festpunkt der ersten Öffnung fällt mit der ersten Stütze zusammen, so daß wir $\mathfrak{L}_2$ in gleicher Weise wie $\mathfrak{L}_3$ erhalten, wenn wir von der ersten Stütze ausgehen. Durchlaufen wir den Träger von rechts nach links, so erhalten wir die rechten Festpunkte $\mathfrak{R}$ (Abb. 243). Zur rechnerischen Ermittlung der Festpunkte erhalten wir aus

$$\frac{M_1}{M_2} \cdot l_2 + 2\,(l_2 + l_3) + \frac{M_3}{M_2} \cdot l_3 = 0$$

und

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{l_2}{2\,(l_1 + l_2)} = -\frac{\eta_2}{\eta_2}$$

$$-\frac{\xi_2}{\eta_2} \cdot l_2 + 2\,(l_2 + l_3) = \frac{\eta_3}{\xi_3} \cdot l_3$$

oder

$$\frac{\xi_3}{\eta_3} = \frac{l_3}{2\,(l_2 + l_3) - \frac{\xi_2}{\eta_2} \cdot l_2}.$$

Allgemein erhalten wir in der $(r+1)$-ten Öffnung für die linken Festpunkte $\mathfrak{L}$

$$\frac{\xi_{r+1}}{\eta_{r+1}} = \frac{l_{r+1}}{2\,(l_r + l_{r+1}) - \frac{\xi_r}{\eta_r} \cdot l_r}$$

und für die rechten Festpunkte $\mathfrak{R}$ in gleicher Weise

$$\frac{\eta_r'}{\xi_r'} = \frac{l_r}{2\,(l_{r+1} + l_r) - \frac{\eta_{r+1}'}{\xi_{r+1}'} \cdot l_{r+1}}.$$

c) Bestimmung der Stützmomentenfläche eines belasteten Trägerfeldes.

In Abb. 244 sind drei aufeinander folgende Öffnungen eines durchlaufenden Trägers dargestellt, von denen die r-te Öffnung belastet sein soll; ihre M_0-Momentenfläche ist gezeichnet, von der die Stützmomentenfläche $B\,B_1\,C_1\,C$ in Abzug gebracht ist. Für die Stützen A, B, C lautet die Dreimomentengleichung

$$M_{r-2} \cdot l_{r-1} + 2\,M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) + M_r \cdot l_r = -6 \cdot \frac{R_r}{l_r}.$$

Jetzt denken wir uns das $r$te Feld BC unbelastet und das $(r+1)$-te Feld CD so belastet, daß die Stützmomentenlinie $B_1\,A_1$ der $(r-1)$-ten Öffnung $A\,B$ denselben Verlauf hat wie im ersten Falle. Da die Stützmomentenlinie der unbelasteten Öffnungen durch die Festpunkte $\mathfrak{L}$ gehen muß, hat sie den in Abb. 244b dargestellten Verlauf, der nur für die Öffnung BC für uns von Bedeutung ist. Das durch die Belastung der $(r+1)$-ten Öffnung CD hervorgerufene Stützmoment $C_1\,C_2$ muß so groß sein, daß $C_2\mathfrak{L}_r$ auf der Stützsenkrechten durch B das Moment

$$BB_1 = M_{r-1}$$

abschneidet. Wir erhalten C_1C_2 aus der Dreimomentengleichung für die Öffnungen A_1B_1 und B_1C_1

$$M_{r-2} \cdot l_{r-1} + 2\,M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) - C_1C_2 \cdot l_r = 0\,.$$

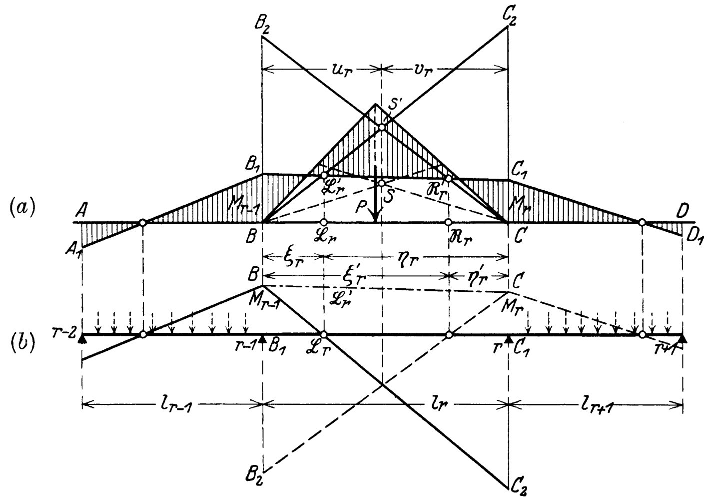


Abb. 244. Stützmomentenfläche eines belasteten Trägerfeldes.

Das letzte Glied erhält ein negatives Vorzeichen, weil C_1C_2 ein negatives Stützmoment ist. Die Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$l_r \cdot (M_r + C_1C_2) = -6 \cdot \frac{R_r}{l_r}\,,$$

$$M_r + C_1C_2 = -6 \cdot \frac{R_r}{l_r^2}\,.$$

Machen wir $CC_1 = M_r$ (Abb. 244b), so wird

$$CC_2 = M_r + C_1C_2 = -6\,\frac{R_r}{l_r^2}\,.$$

Die Verbindungsgerade BC schneidet die Senkrechte durch $\mathfrak{L}_r$ in einem Punkte $\mathfrak{L}'_r$, der der Stützmomentenfläche angehört.

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion zur Ermittlung des Punktes $\mathfrak{L}'_r$ in Abb. 244a. Wir tragen C_1C_2 so auf der Stützsenkrechten durch C an, daß

$$CC_2 = -6\,\frac{R_r}{l_r^2}$$

wird. Die Verbindungsgerade C_2B schneidet die Senkrechte durch den Festpunkt $\mathfrak{L}_r$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{L}'_r$ der Stützmomentenlinie B_1C_1.

In gleicher Weise denken wir uns die $(r-1)$-te Öffnung AB so belastet, daß die Stützmomentenlinie C_1D_1 der $(r+1)$-ten Öffnung CD

unverändert bleibt und erhalten

$$B B_2 = M_{r-1} + B_1 B_2 = -6 \cdot \frac{L_r}{l_r^2}.$$

Die Konstruktion der Stützmomentenlinie $B_1 C_1$ erfolgt in der Weise, daß wir die Strecken $B B_2$ und $C C_2$ berechnen und im Momentenmaßstab auftragen, dann schneidet $B C_2$ die Senkrechte durch $\mathfrak{L}_r$ in einem Punkte $\mathfrak{L}'_r$ der Stützmomentenlinie; einen zweiten Punkt $\mathfrak{R}'_r$ erhalten wir als Schnittpunkt der Geraden $B_2 C$ mit der Senkrechten durch den rechten Festpunkt $\mathfrak{R}_r$.

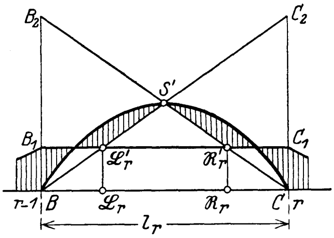


Abb. 245. Gleichmäßige Belastung.

Ist die r-te Öffnung mit p_r kg/m gleichmäßig belastet, so ist

$$B B_2 = -6 \cdot \frac{\frac{2}{3} l_r \cdot \frac{p_r l_r^2}{8} \cdot \frac{1}{2} l_r}{l_r^2} = -\frac{p_r l_r^2}{4} = C C_2;$$

die Geraden $B C_2$ und $C B_2$ (Abb. 245) schneiden sich im Scheitel S' der Parabel.

d) Der Träger auf drei Stützen.

Gleichmäßige Belastung (Abb. 238). Die M_0-Momentenfläche der linken Öffnung ist von einer Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{p \cdot l_1^2}{8}$ begrenzt; ihr statisches Moment, bezogen auf die linke Stützsenkrechte, ist

$$L_1 = \frac{2}{3} \cdot l_1 \cdot \frac{p \cdot l_1^2}{8} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{p \cdot l_1^4}{24}.$$

Die M_0-Momentenfläche der rechten Öffnung hat $\frac{p \cdot l_2^2}{8}$ als Pfeilhöhe; ihr statisches Moment, bezogen auf die rechte Stützsenkrechte ist

$$R_2 = \frac{2}{3} \cdot l_2 \cdot \frac{p \cdot l_2^2}{8} \cdot \frac{l_2}{2} = \frac{p \cdot l_2^4}{24}.$$

Mit diesen Werten geht die Dreimomentengleichung über in

$$2 \cdot M_C \cdot (l_1 + l_2) = -\frac{p}{4} (l_1^3 + l_2^3),$$

wenn man beachtet, daß die Momente in den Außenstützpunkten gleich Null sind. Als Biegungsmoment der Mittelstütze ergibt sich

$$M_C = -\frac{p}{8} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1 + l_2}.$$

Für den Sonderfall gleicher Öffnungen wird $l_1 = l_2 = l$ und

$$M_C = -\frac{p}{8} \cdot \frac{2 l^3}{2 l} = -\frac{P l}{16}.$$

Ist p_1 in kg/m die Streckenlast der ersten Öffnung, p_2 in kg/m die der zweiten Öffnung, so erhalten wir als Stützmoment über der Mittelstütze

$$M_C = -\frac{1}{8} \cdot \frac{p_1 \cdot l_1^3 + p_2 \cdot l^3}{l_1 + l_2}. \tag{4}$$

Andrerseits ist

$$M_C = A \cdot l_1 - \frac{p_1 \cdot l_1^2}{2} \qquad \text{oder} \qquad A = \frac{M_C}{l_1} + \frac{p_1 \cdot l_1}{2},$$

$$M_C = B \cdot l_2 - \frac{p_2 \cdot l_2^2}{2} \qquad \text{oder} \qquad B = \frac{M_C}{l_2} + \frac{p_2 \cdot l_2}{2}.$$

Da $\frac{p_1 \cdot l_1}{2}$ der Auflagerdruck eines Trägers auf zwei Stützen ist, der die gleichmäßig verteilte Last p_1 kg/m trägt, schreiben wir

$$\frac{p_1 \cdot l_1}{2} = A_0 \quad \text{und} \quad \frac{p_2 \cdot l_2}{2} = B_0$$

und demgemäß

$$A = A_0 + \frac{M_C}{l_1} \quad \text{bzw.} \quad B = B_0 + \frac{M_C}{l_2}.$$

Aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$ folgt

$$C = P - A - B.$$

Es sei nur die rechte Öffnung belastet (Abb. 246). Die M_0-Momentenfläche der rechten Öffnung hat die Pfeilhöhe $\frac{p_2 \cdot l_2^2}{8}$; ihr statisches Moment, bezogen auf die rechte Stützsenkrechte ist

$$R_2 = \frac{p_2 \cdot l_2^4}{24}.$$

Das statische Moment der M_0-Momentenfläche der linken Öffnung ist gleich Null, ebenso die Momente in A und B. Folglich wird

$$2 \cdot M_C \cdot (l_1 + l_2) = -\frac{p_2 \cdot l_2^3}{4}$$

oder

$$M_C = -\frac{p_2}{8} \cdot \frac{l_2^3}{l_1 + l_2}.$$

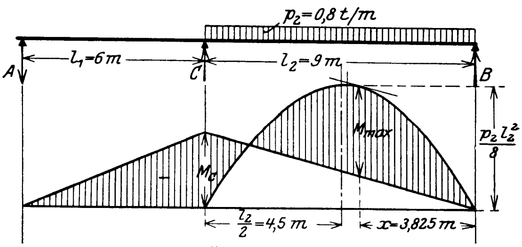


Abb. 246. Die rechte Öffnung ist gleichmäßig belastet.

Die Bestimmung des größten Biegungsmomentes soll an einem Zahlenbeispiel erläutert werden.

Zahlenbeispiel (Abb. 246). Es sei $l_1 = 6$ m; $l_2 = 9$ m; $p_2 = 0,8$ t/m; also

$$M_C = -\frac{0,8}{8} \cdot \frac{9^3}{6+9} = -4,86 \text{ mt},$$

$$M_{02} = \frac{p_2 l_2^2}{8} = \frac{0,8 \cdot 9^2}{8} = 8,1 \text{ mt}.$$

Aus

$$M_C = A \cdot l_1 \quad \text{folgt} \quad A = \frac{M_C}{l_1} = -\frac{4,86}{6} = -0,81 \text{ t},$$

$$M_C = B \cdot l_2 - \frac{p_2 \cdot l_2^2}{2} \quad \text{folgt} \quad B = \frac{p_2 \cdot l_2}{2} + \frac{M_C}{l_2} = \frac{0,8 \cdot 9}{2} - \frac{4,86}{9} = 3,06 \text{ t}.$$

Damit wird

$$C = P - A - B = 0,8 \cdot 9 + 0,81 - 3,06 = 4,95 \text{ t}.$$

Das Biegungsmoment im Punkte x der rechten Öffnung ist

$$M_x = B \cdot x - \frac{p_2 \cdot x^2}{2} = 3{,}06\,x - 0{,}4\,x^2\,.$$

Die Differentiation nach x liefert

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = 3{,}06 - 2 \cdot 0{,}4\,x\,,$$

und die Bedingung $\frac{d\,M_x}{d\,x} = 0$ ergibt $x = \frac{3{,}06}{2 \cdot 0{,}4} = 3{,}825$ m. Als größtes positives Moment folgt

$$M_{\max} = B \cdot 3{,}825 - \frac{p_2 \cdot 3{,}825^2}{2} = 3{,}06 \cdot 3{,}825 - 0{,}4 \cdot 3{,}825^2 = 5{,}85 \text{ mt}\,,$$

das als absolut größtes Moment für die Querschnittsbemessung maßgebend ist.

Der Träger sei mit Einzelkräften belastet (Abb. 247). Die M_0-Momentenfläche der linken Öffnung ist ein Dreieck mit der Höhe $P_1 \cdot \frac{a_1 b_1}{l_1}$;

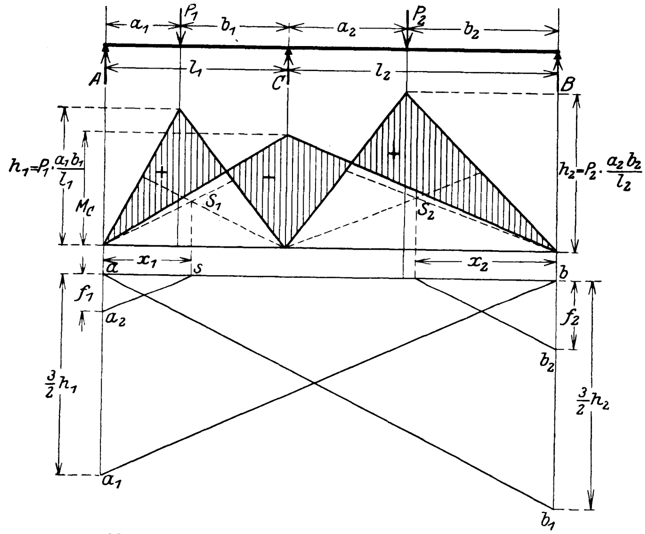


Abb. 247. Der Träger ist mit Einzelkräften belastet.

ihr statisches Moment, bezogen auf die linke Stützsenkrechte ist

$$L_1 = \frac{1}{2}\,a_1 \cdot \frac{P_1 a_1 b_1}{l_1} \cdot \frac{2}{3}\,a_1 + \frac{1}{2}\,b_1 \cdot \frac{P_1 a_1 b_1}{l_1} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{3}\,b_1\right),$$

$$6\,L_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l_1}\,(2\,a_1^2 + 3\,a_1\,b_1 + b_1^2)\,,$$

$$6\,L_1 = \frac{P_1 \cdot a_1 b_1}{l_1}\,(a_1 + b_1)\,(2\,a_1 + b_1)\,.$$

Ersetzen wir noch b_1 durch $l_1 - a_1$, so geht die Gleichung über in

$$6\,L_1 = P_1 \cdot a_1\,(l_1 - a_1)\,(l_1 + a_1) = P_1 \cdot a_1\,(l_1^2 - a_1^2)\,;$$

demnach wird

$$\frac{6\,L_1}{l_1} = P_1 \cdot a_1 \cdot \frac{l_1^2 - a_1^2}{l_1}\,.$$

Würde eine zweite Kraft P_1' hinzutreten, die im Abstande a_1' von A aus angreift, so würde in gleicher Weise

$$\frac{6\,L_1}{l_1} = P_1' a_1' \cdot \frac{l_1^2 - (a_1')^2}{l_1}$$

sein. Bei einer beliebigen Anzahl von Einzelkräften P_1 über der linken Öffnung wird

$$\frac{6\,L_1}{l_1} = \sum P_1 \cdot a_1 \cdot \frac{l_1^2 - a_1^2}{l_1}\,.$$

In gleicher Weise erhalten wir als statisches Moment der M_0-Momentenfläche der rechten Öffnung, bezogen auf die rechte Stützsenkrechte,

$$R_2 = \frac{1}{2}\, b_2 \cdot \frac{P_2 a_2 b_2}{l_2} \cdot \frac{2}{3}\, b_2 + \frac{1}{2}\, a_2 \cdot \frac{P_2 a_2 b_2}{l_2}\left(b_2 + \frac{1}{3}\, a_2\right),$$

das bei beliebig vielen Kräften P_2 im Abstande b_2

$$6\,\frac{R_2}{l_2} = \sum P_2 \cdot b_2 \cdot \frac{l_2^2 - b_2^2}{l_2}$$

ergibt; die Dreimomentengleichung lautet mit $M_A = 0$ und $M_B = 0$

$$2\,M_C\,(l_1 + l_2) = -\left\{\sum P_1 \cdot a_1 \cdot \frac{l_1^2 - a_1^2}{l_1} + \sum P_2 \cdot b_2 \cdot \frac{l_2^2 - b_2^2}{l_2}\right\}$$

und ergibt

$$M_C = -\frac{\sum P_1 a_1 \cdot \frac{l_1^2 - a_1^2}{l_1} + \sum P_2 b_2 \cdot \frac{l_2^2 - b_2^2}{l_2}}{2\,(l_1 + l_2)}\,. \tag{5}$$

Zahlenbeispiel (Abb. 248). Infolge der gleichmäßig verteilten Last wird

$$M_{Cp} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{p_1 l_3^1 + p_2 \cdot l_2^3}{l_1 + l_2} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{0{,}8 \cdot 6^3 + 1{,}2 \cdot 9^3}{6 + 9} = -\,8{,}73\,\text{mt}\,.$$

Die Einzellasten ergeben

$$M_{CP} = -\frac{5 \cdot 2{,}4\,\frac{6^2 - 2{,}4^2}{6} + 7 \cdot 3{,}9 \cdot \frac{6^2 - 3{,}9^2}{6} + 6 \cdot 5{,}8 \cdot \frac{9^2 - 5{,}8^2}{9} + 8 \cdot 3{,}7 \cdot \frac{9^2 - 3{,}7^2}{9}}{2\,(6 + 9)}\,,$$

$M_{CP} = -\,18{,}653\,\text{mt}\,.$

Das gesamte Stützmoment wird

$$M_C = M_{Cp} + M_{CP} = -\,8{,}73 - 18{,}653 = -\,27{,}383\,\text{mt}\,.$$

Aus

$$M_C = A \cdot l_1 - \frac{p_1 \cdot l_1^2}{2} - P_1 \cdot 3{,}6 - P_2 \cdot 2{,}1 \quad \text{folgt} \quad A = 3{,}28\,\text{t}\,.$$

Aus

$$M_C = B \cdot l_2 - \frac{p_2 \cdot l_2^2}{2} - P_3 \cdot 3{,}2 - P_4 \cdot 5{,}3 \quad \text{folgt} \quad B = 9{,}20\,\text{t}\,.$$

Aus

$$\Sigma P - A - B - C = 0 \quad \text{folgt} \quad C = 41{,}6 - 12{,}48 = 29{,}12\,\text{t}\,.$$

Um den Ort des größten positiven Moments der rechten Öffnung zu finden, untersuchen wir die Querkraft rechts und links vom Angriffspunkt von P_4; es ist

$$Q_4 = B - p_2 \cdot b_4 = 9{,}20 - 1{,}2 \cdot 3{,}7 = +\,4{,}76\,\text{t}\,,$$
$$Q_4' = B - p_2 \cdot b_4 - P_4 = 9{,}20 - 1{,}2 \cdot 3{,}7 - 8 = -\,3{,}24\,\text{t}\;;$$

da die Querkraft in diesem Punkte das Vorzeichen wechselt, ist M_4 das größte positive Moment.

$$M_{\max} = M_4 = B \cdot b_4 - \frac{p_2 \cdot b_4^2}{2} = 9{,}20 \cdot 3{,}7 - \frac{1{,}2 \cdot 3{,}7^2}{2} = 25{,}83 \text{ mt};$$

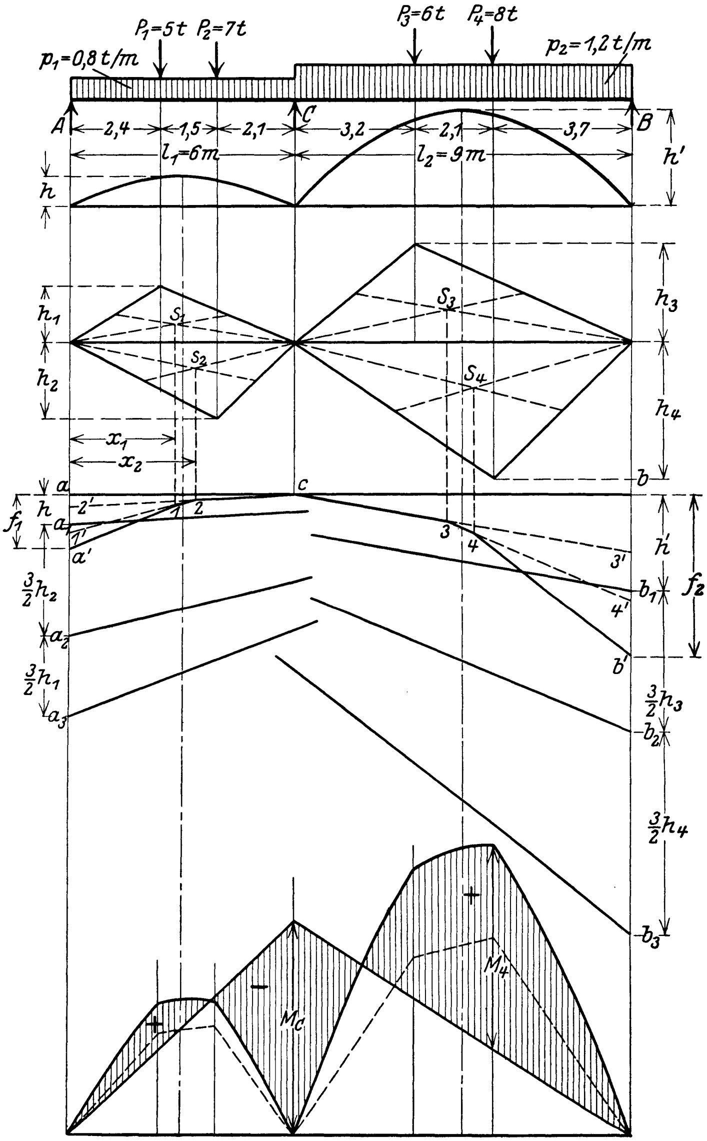


Abb. 248. Mehrfache Belastung.

es ist kleiner als der Absolutwert des Stützmomentes, welcher demnach für die Bemessung des Querschnittes maßgebend ist.

Die Momente in den Hauptpunkten des Trägers sind

$$M_A = 0;\ M_1 = A \cdot a_1 - \frac{p_1 \cdot a_1^2}{2} = 3{,}28 \cdot 2{,}4 - \frac{0{,}8 \cdot 2{,}4^2}{2} = 5{,}568 \text{ mt},$$

$$M_2 = A \cdot a_2 - P_1 \cdot 1{,}5 - \frac{p_1 \cdot a_2^2}{2} = 3{,}28 \cdot 3{,}9 - 5 \cdot 1{,}5 - \frac{0{,}8 \cdot 3{,}9^2}{2} = -0792 \text{ mt},$$

$$M_C = -27{,}383 \text{ mt},$$

$$M_3 = B \cdot b_3 - P_4 \cdot 2{,}1 - \frac{p_2 \cdot b_3^2}{2} = 9{,}20 \cdot 5{,}8 - 8 \cdot 2{,}1 - \frac{1{,}2 \cdot 5{,}8^2}{2} = 16{,}376 \text{ mt},$$

$$M_4 = +25{,}83 \text{ mt};\ M_B = 0.$$

Zeichnerische Ermittlung des Stützmomentes. Aus dem Dreimomentensatz ergibt sich das Stützmoment zu

$$M_C = -\frac{6\left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{R_2}{l_2}\right)}{2(l_1 + l_2)} = -\left[\frac{3 L_1}{l_1 (l_1 + l_2)} + \frac{3 R_2}{l_2 (l_1 + l_2)}\right].$$

Wir nehmen das Beispiel der Abb. 247 und haben

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot h_1 \cdot x_1 \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot h_2 \cdot x_2,$$

wobei x_1 der Abstand des Schwerpunktes S_1 der linken M_0-Momentenfläche von A, x_2 der Abstand des Schwerpunktes S_2 der rechten M_0-Momentenfläche von B ist. Damit wird

$$3 \cdot \frac{L_1}{l_1} = \frac{3}{2} \cdot h_1 \cdot x_1 \quad \text{und} \quad 3 \cdot \frac{R_2}{l_2} = \frac{3}{2} h_2 \cdot x_2,$$

also

$$M_C = -\left[\frac{\frac{3}{2} h_1 \cdot x_1}{l_1 + l_2} + \frac{\frac{3}{2} h_2 \cdot x_2}{l_1 + l_2}\right].$$

Die Gleichung läßt eine einfache zeichnerische Lösung zu. Wir tragen auf der Stützsenkrechten durch A (Abb. 247) $\frac{3}{2} h_1$ ab und verbinden den Endpunkt a_1 mit b, dann schneidet eine Parallele zu $a_1 b$ durch s auf $a a_1$ die Strecke

$$a a_2 = f_1 = \frac{\frac{3}{2} h_1 \cdot x_1}{l_1 + l_2}$$

ab. In gleicher Weise wird

$$b b_2 = f_2 = \frac{\frac{3}{2} h_2 \cdot x_2}{l_1 + l_2},$$

beide Strecken im Maßstabe der M_0-Momentflächen gemessen. Aus ihnen ergibt sich

$$M_C = -(f_1 + f_2).$$

Ist der Träger gleichmäßig belastet (Abb. 249), so haben die M_0-Momentenflächen die Pfeilhöhen

$$h_1 = \frac{p_1 \cdot l_1^2}{8} \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{p_2 \cdot l_2^2}{8};$$

ihre statischen Momente für die Stützsenkrechten sind

$$L_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot h_1 \cdot \frac{l_1}{2}, \quad \text{bzw.} \quad R_2 = \frac{2}{3} l_2 \cdot h_2 \cdot \frac{l_2}{2}.$$

Aus ihnen bestimmt sich M_C zu

$$M_C = -\frac{6\left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{R_2}{l_2}\right)}{2(l_1 + l_2)} = -\left(\frac{h_1 \cdot l_1}{l_1 + l_2} + \frac{h_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2}\right).$$

Die zeichnerische Ermittlung des Stützmomentes ist in Abb. 249 gegeben: wir tragen auf der Stützsenkrechten durch A die Strecke $a a_1 = h_1$

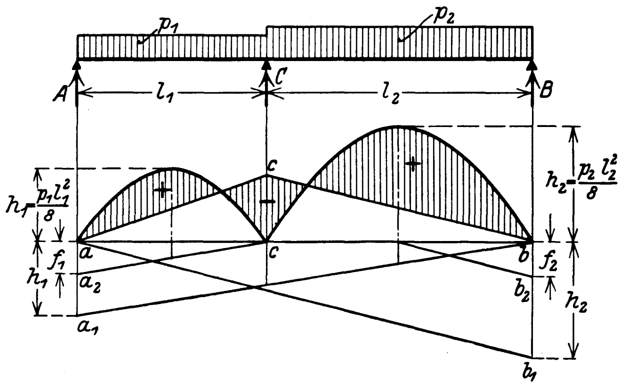


Abb. 249. Ermittlung des Stützmomentes.

ab, verbinden a_1 mit b und ziehen zu $a_1 b$ durch c eine Parallele, die

$$a a_2 = f_1 = \frac{h_1 \cdot l_1}{l_1 + l_2}$$

auf $a a_1$ abschneidet. In gleicher Weise wird

$$b b_2 = f_2 = \frac{h_2 \cdot l_2}{l_1 + l_2}$$

gefunden. Aus f_1 und f_2 ergibt sich

$$M_C = -(f_1 + f_2)$$

im Maßstabe der M_0-Momentenfläche gemessen.

Zahlenbeispiel (Abb. 248). Die M_0-Flächen infolge der beiden Einzellasten einer Öffnung zerlegen wir in je zwei Dreiecke mit den Höhen

$$h_1 = \frac{P_1 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6}{6} = \frac{5 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6}{6} = 7{,}2 \text{ mt}; \qquad h_2 = \frac{P_2 \cdot 3{,}9 \cdot 2{,}1}{6} = \frac{7 \cdot 3{,}9 \cdot 2{,}1}{6} = 9{,}56 \text{ mt};$$

$$h_3 = \frac{P_3 \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}8}{9} = \frac{6 \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}8}{9} = 12{,}37 \text{ mt}; \quad h_4 = \frac{P_4 \cdot 5{,}3 \cdot 3{,}7}{9} = \frac{8 \cdot 5{,}3 \cdot 3{,}7}{9} = 17{,}43 \text{ mt}.$$

Die M_0-Flächen infolge der gleichmäßig verteilten Last haben die Pfeilhöhen

$$h = \frac{p_1 \cdot l_1^2}{8} = \frac{0{,}8 \cdot 6^2}{8} = 3{,}6 \text{ mt} \quad \text{und} \quad h' = \frac{p_2 \cdot l_2^2}{8} = \frac{1{,}2 \cdot 9^2}{8} = 12{,}15 \text{ mt}.$$

Die M_0-Momentflächen sind mit dem Maßstab 2 mm = 1 mt getrennt gezeichnet; ihre Schwerpunkte sind zeichnerisch als Schnittpunkte der Mittellinien bestimmt.

Auf der Stützsenkrechten durch A werden aufgetragen

$$aa_1 = h = 3{,}6\,\text{mt}; \qquad a_1a_2 = \frac{3}{2}h_2 = \frac{3}{2}\cdot 9{,}56 = 14{,}34\,\text{mt}$$

und

$$a_2a_3 = \frac{3}{2}\cdot h_1 = \frac{3}{2}\cdot 7{,}2 = 10{,}8\,\text{mt};$$

auf der Stützsenkrechten durch B werden aufgetragen

$$bb_1 = h' = 12{,}15\,\text{mt}; \qquad b_1b_2 = \frac{3}{2}\cdot h_3 = \frac{3}{2}\cdot 12{,}37 = 18{,}56\,\text{mt}$$

und

$$b_2b_3 = \frac{3}{2}\cdot h_4 = \frac{3}{2}\cdot 17{,}43 = 26{,}15\,\text{mt}.$$

Zu der Geraden ba_1 ziehen wir durch c die Parallele $c\,2$ bis zur Senkrechten durch den Schwerpunkt S_2, sie schneidet auf der Stützsenkrechten durch A die Größe

$$a\,2' = \frac{h\cdot l_1}{l_1+l_2}$$

ab. Durch 2 ziehen wir zu a_2b eine Parallele 2 1 bis zur Senkrechten durch den Schwerpunkt S_1, sie schneidet auf der Stützsenkrechten durch A die Größe

$$2'1' = \frac{3}{2}\cdot\frac{h_2x_2}{l_1+l_2}$$

ab. Durch 1 ziehen wir zu a_3b eine Parallele $a'\,1$ bis zur Stützsenkrechten, auf der sie die Größe

$$1'a' = \frac{3}{2}\cdot\frac{h_1\cdot x_1}{l_1+l_2}$$

abschneidet. Es ist dann

$$f_1 = aa'.$$

Der Linienzug $c\,2\,1\,a'$ kann als Seileck mit b als Pol aufgefaßt werden. In gleicher Weise ist

$$f_2 = \frac{h'\cdot l_2}{l_1+l_2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{h_3\cdot x_3}{l_1+l_2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{h_4\cdot x_4}{l_1+l_2}$$

für die rechte Öffnung entwickelt, wobei der Linienzug $c\,3\,4\,b'$ als Seileck mit a als Pol aufgefaßt werden kann. Die Zeichnung ergibt

$$M_C = -(f_1+f_2) = -(13{,}5+41{,}3)\,\text{mm}\cdot\frac{1\,\text{mt}}{2\,\text{mm}} = -27{,}4\,\text{mt}.$$

Die Gesamtmomentenfläche ist durch Addition der Einzelordinaten gefunden.

Die Einflußlinie für das Stützmoment (Abb. 250). Nach der Erklärung der Einflußlinie (S. 316) brauchen wir nur den Einfluß einer Last von 1 t auf das Stützmoment M_C zu untersuchen. Hat diese Last von 1 t den Abstand x von der linken Stütze, so ruft sie ein Moment

$$M_C = -\frac{1\cdot x\,(l_1^2 - x^2)}{2\,l_1\,(l_1+l_2)} = \eta$$

hervor. Wir erhalten diese Gleichung aus der allgemeinen Gleichung (5) für $P_1 = 1$ t; $a_1 = x$; $P_2 = 0$; $b_2 = 0$. Anders geschrieben lautet unsere Gleichung

$$\eta = \frac{-l_1^2}{2\,(l_1+l_2)}\left(\frac{x}{l_1} - \frac{x^3}{l_1^3}\right) = \frac{-l_1^2}{2\,(l_1+l_2)}\cdot y\,.$$

y läßt sich ein für alle Male berechnen, wenn wir z. B. der Reihe nach $\frac{x}{l_1} = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3\ \ldots$ einsetzen; wir erhalten damit 10 Punkte der

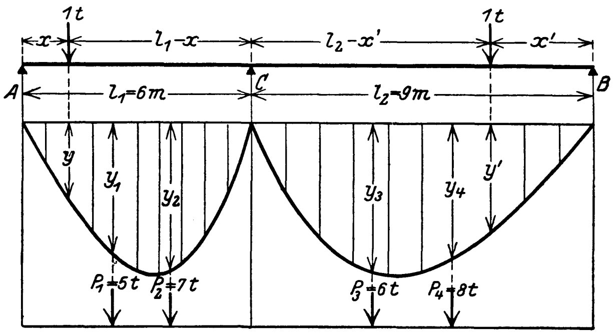


Abb. 250. Einflußlinie für das Stützmoment.

Einflußlinie, was in den meisten Fällen genügen dürfte. Für die rechte Öffnung wird entsprechend

$$\eta' = \frac{-l_2^2}{2(l_1+l_2)} \cdot \left(\frac{x'}{l_2} - \frac{x'^3}{l_2^3}\right) = \frac{-l_3^2}{2(l_1+l_2)} \cdot y'\,.$$

Auch dieser Zweig der Einflußlinie wird für 10 Punkte ebenfalls mit Hilfe der nachstehenden Zahlentafel entworfen.

$\frac{x}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0

Abb. 250 zeigt die Einflußlinie für das Stützmoment des Trägers der Abb. 248. Mit den damals gegebenen Einzellasten wird

$$M_{CP} = -\frac{l_1^2}{2(l_1+l_2)}\left(P_1 y_1 + P_2 y_2\right) - \frac{l_2^2}{2(l_1+l_2)}\left(P_3 y_3 + P_4 y_4\right),$$

$$= -1{,}2\,(5 \cdot 0{,}336 + 7 \cdot 0{,}375) - 2{,}7\,(6 \cdot 0{,}377 + 8 \cdot 0{,}342) = -18{,}65\,\text{mt}.$$

Der Träger sei durch eine Streckenlast belastet (Abb. 251). Die M_0-Momentenfläche ist nach S. 91 die Differenz zweier Flächen. Die im Schwerpunkt vereinigt gedachte Streckenlast P ruft ein Moment

$$M = \frac{P\left(c + \frac{b}{2}\right)}{l_1}(a+x) = A\,(a+x)$$

hervor; für $x = \frac{b}{2}$ wird

$$M_{\max} = \frac{P\left(c+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{2}\right)}{l_1} = \frac{P a' b'}{l_1}.$$

Infolge der gleichmäßigen Verteilung wird die Spitze des Momentendreiecks parabolisch abgerundet; es ist

$$M_x = A\,(a + x) - p \cdot \frac{x^2}{2}$$

Der Betrag, um den die Dreieckoordinate vermindert wird, ist

$$\Delta M = \frac{p x^2}{2},$$

den wir von einer Wagerechten aus abgetragen denken (Abb. 251 c). Die in Abzug zu bringende Fläche wird von zwei symmetrischen Parabeln begrenzt, deren gemeinsame Mittelordinate

$$\Delta M_m = \frac{p b^2}{8}$$

ist; ihr Inhalt ist

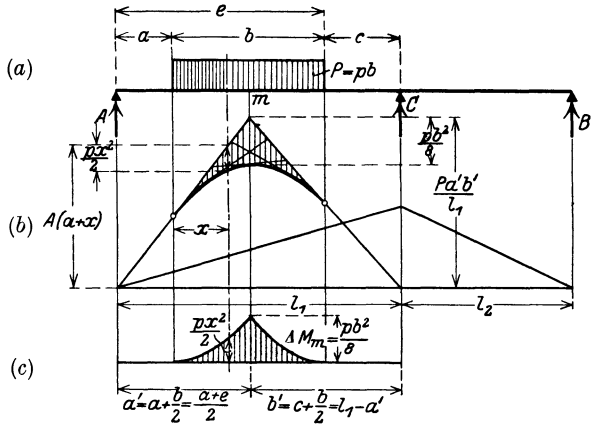


Abb. 251. Streckenlast.

$$F = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{pb^2}{8} = \frac{pb^3}{24};$$

ihr Schwerpunktsabstand von A ist $a' = a + \frac{b}{2}$. Damit erhalten wir als statisches Moment der M_0-Momentenfläche, bezogen auf die linke Stützsenkrechte,

$$L_1 = \frac{1}{2} a' \cdot \frac{Pa'b'}{l_1} \cdot \frac{2}{3} a' + \frac{1}{2} b' \cdot \frac{Pa'b'}{l_1}\left(a' + \frac{1}{3} b'\right) - \frac{pb^3}{24} \cdot a',$$

$$L_1 = \frac{pb \cdot a'}{6}\left[2\frac{a'^2 b'}{l_1} + 3\frac{b'^2}{l_1}\left(a' + \frac{1}{3} b'\right) - \frac{b^2}{4}\right],$$

$$L_1 = \frac{pba'}{6}\left(\frac{2a'^2 b' + 3a'b'^2 + b'^3}{l_1} - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$= \frac{pb'a}{6}\left[\frac{2a'b'(a' + b') + b'^2(a' + b')}{l_1} - \frac{b^2}{4}\right]$$

$$= \frac{pba'}{6}\left(2a'b' + b'^2 - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$= \frac{pba'}{6}\left[a'b' + b'(a' + b') - \frac{b^2}{4}\right]$$

$$= \frac{bpa'}{6}\left(l \cdot b' + a'b' - \frac{b^2}{4}\right).$$

Ersetzen wir b' durch $l_1 - a'$, a' durch $\frac{a+e}{2}$ und b durch $e - a$, so geht die Gleichung über in

$$L_1 = \frac{p\,(e^2 - a^2)\,(2\,l_1^2 - a^2 - e^2)}{24}.$$

Die Dreimomentengleichung lautet dann

$$2\,M_C\,(l_1+l_2) = -6\cdot\frac{L_1}{l_1} = -\frac{p\,(e^2-a^2)\,(2\,l_1^2-a^2-e^2)}{4\cdot l_1},$$

und daraus ergibt sich

$$M_C = -\frac{p\cdot(e^2-a^2)\,\,(2\,l_1^2-a^2-e^2)}{8\,l_1\cdot(l_1+l_2)}. \tag{6}$$

Der Träger sei durch gleichmäßig verteilte Lasten, Einzelkräfte und Streckenlasten belastet (Abb. 252). Nach dem Überlagerungsgesetz addieren wir die Einzelwirkungen und erhalten als Momentengleichung mit

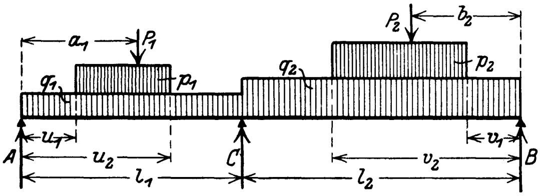


Abb. 252. Gleichmäßig verteilte Lasten, Einzelkräfte und Streckenlasten.

$$M_A = 0$$

nud $\quad M_B = 0$

$$2\,M_C\,(l_1+l_2) = -\left\{\frac{q_1\cdot l_1^3}{4}+\frac{q_2\cdot l_2^3}{4}+\frac{P_1\cdot a_1}{l_1}\,(l_1^2-a_1^2)+\frac{P_2\cdot b_2}{l_2}\,(l_2^2-b_2^2)\right.$$
$$\left.+\frac{p_1\,(u_2^2-u_1^2)\,(2\,l_1^2-u_2^2-u_1^2)}{4\,l_1}+\frac{p_2\,(v_2^2-v_1^2)\,(2\,l_2^2-v_2^2-v_1^2)}{4\,l_2}\right\}.$$

Diese Gleichung ergibt M_C sofort und führt schneller zum Ziel als das zeichnerische Verfahren.

e) Der durchlaufende Träger auf 4 Stützen.

Gleiche Öffnungen mit gleichmäßig verteilter Last (Abb. 253). Sämtliche drei M_0-Momentenflächen werden von Parabeln mit der Pfeilhöhe

$$M_0 = \frac{p l^2}{8} = 0{,}125\,p\,l^2$$

begrenzt. Die Dreimomentengleichung lautet für die beiden ersten Öffnungen

$$M_A\cdot l + 2\,M_B\cdot 2\,l + M_C\cdot l = -6\left\{\frac{L}{l}+\frac{R}{l}\right\};$$

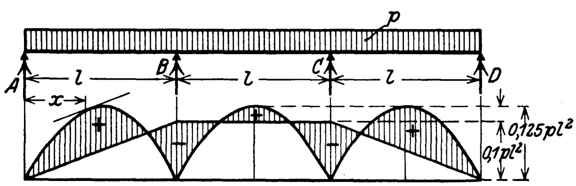


Abb. 253. Träger auf 4 Stützen. Gleichmäßig verteilte Last.

hierin ist $M_A = 0$; $M_B = M_C$ wegen der Symmetrie und

$$L = R = \frac{2}{3}\,l\cdot\frac{pl^2}{8}\cdot\frac{l}{2} = \frac{p\,l^4}{24},$$

$$5\,M_B = -\frac{pl^2}{2}, \quad \text{also} \quad M_B = -\frac{pl^2}{10} = -0{,}1\cdot p l^2.$$

Aus

$$M_B = A \cdot l - \frac{pl^2}{2}$$

folgt

$$A = \frac{pl}{2} + \frac{M_B}{l} = \frac{pl}{2} = \frac{pl}{10} - 0{,}4\,pl = D\,.$$

Aus

$$M_C = A \cdot 2\,l + B \cdot l - 2\,pl^2 = M_B$$

folgt

$$B = 2\,pl - 2\,A + \frac{M_B}{l} = 2\,pl - 0{,}8\,pl - 0{,}1\,pl = 1{,}1\,pl = C\,.$$

Das größte positive Moment tritt in den Außenöffnungen auf; es ist

$$M_x = A \cdot x - \frac{px^2}{2} = 0{,}4\,plx - 0{,}5\,px^2\,.$$

Aus

$$\frac{dM_x}{dx} = 0{,}4pl - px = 0$$

folgt

$$x = 0{,}4\,l;$$

demnach

$$M_{\max} = 0{,}4pl \cdot 0{,}4l - 0{,}5 \cdot p \cdot (0{,}4l)^2 = 0{,}08\,pl^2.$$

Das größte positive Moment in Trägermitte ist

$$M_{m_{\max}} = \frac{pl^2}{8} - 0{,}1\,pl^2 = 0{,}025\,pl^2.$$

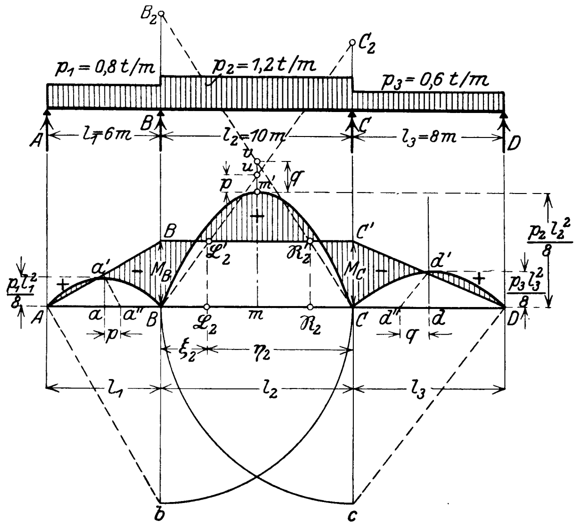


Abb. 254. Ungleiche Öffnungen mit gleichmäßig verteilten Lasten.

Ungleiche Öffnungen mit verschiedener gleichmäßig verteilter Last. Mit den Bezeichnungen der Abb. 254 lauten die Dreimomentengleichungen, wenn wir $M_A = M_D = 0$ setzen,

$$2\,M_B\,(l_1+l_2)+M_C\cdot l_2=-6\left\{\frac{L_1}{l_1}+\frac{R_2}{l_2}\right\},$$

$$M_B\cdot l_2+2\,M_C\cdot(l_2+l_3)=-6\left\{\frac{L_2}{l_2}+\frac{R_3}{l_3}\right\}.$$

Wir erweitern die erste Gleichung mit $2\,(l_2+l_3)$, die zweite mit $(-l_2)$ und addieren; dann wird

$$M_B\,[4\,(l_1+l_2)\,(l_2+l_3)-l_2^2]=-6\left\{2\,(l_2+l_3)\left(\frac{L_1}{l_1}+\frac{R_2}{l_2}\right)-l_2\left(\frac{L_2}{l_2}+\frac{R_3}{l_3}\right)\right\};$$

hierin ist

$$L_1=\frac{2}{3}\,l_1\cdot\frac{p_1\,l_1^2}{8}\cdot\frac{l_1}{2},\quad\text{also}\quad\frac{L_1}{l_1}=\frac{p_1\,l_1^3}{24},$$

$$L_2=\frac{2}{3}\,l_2\cdot\frac{p_2\,l_2^2}{8}\cdot\frac{l_2}{2},\quad\text{also}\quad\frac{L_2}{l_2}=\frac{p_2\,l_2^3}{24},$$

$$R_2=\frac{2}{3}\,l_2\cdot\frac{p_2\,l_2^2}{8}\cdot\frac{l_2}{2},\quad\text{also}\quad\frac{R_2}{l_2}=\frac{p_2\,l_2^3}{24},$$

$$R_3=\frac{2}{3}\,l_3\cdot\frac{p_3\,l_3^2}{8}\cdot\frac{l_3}{2},\quad\text{also}\quad\frac{R_3}{l_3}=\frac{p_3\cdot l_3^3}{24}.$$

Erweitern wir die erste Gleichung mit $(-l_2)$, die zweite mit $2\,(l_1+l_2)$ und addieren, so erhalten wir

$$M_C\,[4\,(l_1+l_2)\,(l_2+l_3)-l_2^2]=-6\left\{2\,(l_1+l_2)\left(\frac{L_2}{l_2}+\frac{R_3}{l_3}\right)-l_2\left(\frac{L_1}{l_1}+\frac{R_2}{l_2}\right)\right\}.$$

Zahlenbeispiel (Abb. 254). Es sei $l_1=6$ m, $p_1=0{,}8$ t/m; $l_2=10$ m, $p_2=1{,}2$ t/m; $l_3=8$ m, $p_3=0{,}6$ t/m; demnach

$$\frac{L_1}{l_1}=\frac{p_1\,l_1^3}{24}=\frac{0{,}8\cdot 6^3}{24}=7{,}2\ \text{tm}^3,$$

$$\frac{L_2}{l_2}=\frac{p_2\cdot l_2^3}{24}=\frac{1{,}2\cdot 10^3}{24}=50\ \text{tm}^3=\frac{R_2}{l_2},$$

$$\frac{R_3}{l_3}=\frac{p_3\,l_3^3}{24}=\frac{0{,}6\cdot 8^3}{24}=12{,}8\ \text{tm}^3.$$

Damit gehen unsere Gleichungen über in

$$M_B\,[4\,(6+10)\,(10+8)-10^2]=-6\,\{2\,(10+8)\,(7{,}2+50)-10\,(50+12{,}8)\}$$
$$M_B=-8{,}16\ \text{mt},$$
$$M_C\,[4\,(6+10)\,(10+8)-10^2]=-6\{2\,(6+10)\,(50+12{,}8)-10\,(7{,}2+50)\}$$
$$M_C=-8{,}20\ \text{mt}.$$

$$M_B=A\cdot l_1-\frac{p_1\cdot l_1^2}{2}\quad\text{ergibt}\quad A=\frac{p_1\,l_1}{2}+\frac{M_B}{l_1}=\frac{0{,}8\cdot 6}{2}-\frac{8{,}16}{6}=1{,}04\ \text{t}.$$

$$M_C=A\,(l_1+l_2)+B\cdot l_2-p_1\,l_1\left(l_2+\frac{l_1}{2}\right)-\frac{p_2\,l_2^2}{2}$$

ergibt

$$B=\frac{p_1\,l_1\left(l_2+\frac{l_1}{2}\right)}{l_2}+\frac{p_2\,l_2}{2}-\frac{A\cdot(l_1+l_2)}{l_2}+\frac{M_C}{l_2}$$

$$=\frac{0{,}8\cdot 6\left(10+\frac{6}{2}\right)}{10}+\frac{1{,}2\cdot 10}{2}-\frac{1{,}04\,(6+10)}{10}-\frac{8{,}2}{10}=9{,}72\ \text{t}.$$

$$M_C = D \cdot l_3 - \frac{p_3 \cdot l_3^2}{2} \quad \text{ergibt} \quad D = \frac{p_3 l_3}{2} + \frac{M_C}{l_3} = \frac{0{,}6 \cdot 8}{2} - \frac{8{,}2}{8} = 1{,}38 \text{ t}.$$

$$M_B = D\,(l_2 + l_3) + C \cdot l_2 - p_3 \cdot l_3 \left(l_2 + \frac{l_3}{2}\right) - \frac{p_2 \cdot l_2^2}{2}$$

ergibt

$$C = \frac{p_3 l_3 \left(l_2 + \frac{l_3}{2}\right)}{l_2} + \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{D \cdot (l_2 + l_3)}{l_2} + \frac{M_B}{l_2}$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 8 \left(10 + \frac{8}{2}\right)}{10} + \frac{1{,}2 \cdot 10}{2} - \frac{1{,}38\,(10 + 8)}{10} - \frac{8{,}16}{10} = 9{,}43 \text{ t}.$$

Die Momentenfläche ist in Abb. 254 mit den Pfeilhöhen

$$\frac{p_1 l_1^2}{8} = \frac{0{,}8 \cdot 6^2}{8} = 3{,}6 \text{ mt},$$

$$\frac{p_2 l_2^2}{8} = \frac{1{,}2 \cdot 10^2}{8} = 15 \text{ mt},$$

$$\frac{p_3 l_3^2}{8} = \frac{0{,}6 \cdot 8^2}{8} = 4{,}8 \text{ mt}$$

gezeichnet; sie zeigt, daß das Stützmoment M_C das größte Biegungsmoment des Trägers ist.

Die Aufgabe läßt eine einfache zeichnerische Lösung mit Hilfe der Festpunkte zu. Die Dreimomentengleichung liefert für die ersten beiden Öffnungen mit $M_A = 0$

$$2\,M_B\,(l_1 + l_2) + M_C \cdot l_2 = -6 \left\{\frac{L_1}{l_1} + \frac{R_2}{l_2}\right\},$$

$$2\,M_B \frac{l_1 + l_2}{l_2} + M_C = -\frac{6}{l_2} \left\{\frac{L_1}{l_1} + \frac{R_2}{l_2}\right\}.$$

Die Lage des linken Festpunktes $\mathfrak{L}_2$ (Abb. 254) ist aber durch

$$\frac{\xi_2}{\eta_2} = \frac{l_2}{2\,(l_1 + l_2)}$$

bestimmt; wir schreiben deshalb unsere Gleichung

$$M_B \cdot \frac{\eta_2}{\xi_2} + M_C = -\frac{6}{l_2} \left\{\frac{L_1}{l_1} + \frac{R_2}{l_2}\right\}.$$

Verbinden wir den Schnittpunkt $\mathfrak{L}_2'$ der Stützmomentenlinie mit der Senkrechten durch den Festpunkt $\mathfrak{L}_2$ mit B, so schneidet diese Gerade auf der Stützsenkrechten durch C die Größe

$$C C_2 = M_C + M_B \cdot \frac{\eta_2}{\xi_2}$$

ab; auf der Mittelsenkrechten wird demnach der halbe Betrag

$$m u = \frac{1}{2}\, C C_2 = \frac{1}{2} \left(M_C + M_B \cdot \frac{\eta_2}{\xi_2}\right)$$

abgeschnitten; er ist

$$mu = -\frac{3}{l_2}\left\{\frac{L_1}{l_1} + \frac{R_2}{l_2}\right\},$$

$$= -\frac{3}{l_2}\left\{\frac{p_1 l_1^3}{24} + \frac{p_2 l_2^3}{24}\right\},$$

$$= -\left\{\frac{p_1 l_1^2}{8} \cdot \frac{l_1}{l_2} + \frac{p_2 l_2^2}{8}\right\}.$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 254 ist

$$mu = mm' + m'u = mm' + p,$$

wobei mm' die Pfeilhöhe $\frac{p_2 l_2^2}{8}$ der M_0-Parabel der zweiten Öffnung ist. Die Größe p ist die im Verhältnis $\frac{l_1}{l_2}$ geteilte Pfeilhöhe der linken M_0-Parabel; wir erhalten sie auf $A\,B$, wenn wir durch a' zu $A\,b$ eine Parallele ziehen; dabei ist $Bb = l_2$.

In gleicher Weise wird

$$mv = -\frac{3}{l_2}\left\{\frac{L_2}{l_2} + \frac{R_3}{l_3}\right\},$$

$$= -\frac{3}{l_2}\left\{\frac{p_2 l_2^3}{24} + \frac{p_3 l_3^3}{24}\right\},$$

$$= -\left\{\frac{p_2 l_2^2}{8} + \frac{p_3 l_2^2}{8} \cdot \frac{l_3}{l_2}\right\},$$

$$mv = mm' + q,$$

dessen zeichnerische Bestimmung Abb. 254 erkennen läßt.

Bei gleichen Außenöffnungen und gleicher Belastung für den laufenden Meter fallen die Punkte u und v zusammen.

Ist nur die mittlere Öffnung belastet, so fallen u, v und m' zusammen, da

$$\frac{p_1 l_1^2}{8} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{p_3 l_3^2}{8} = 0$$

wird.

Gleiche Öffnungen mit gleichen Einzellasten in der Mitte der Öffnungen (Abb. 255). Die M_0-Momentenflächen sind gleichschenklige Dreiecke mit den Höhen

$$M_0 = \frac{Pl}{4};$$

ihre statischen Momente, bezogen auf die Stützsenkrechten, sind

$$L = \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{16} = R.$$

Die Dreimomentengleichungen lauten mit $M_A = 0$ und $M_D = 0$

$$2\,M_B \cdot 2\,l + M_C \cdot l = -6 \cdot 2 \cdot \frac{Pl^2}{16},$$

$$M_B \cdot l + 2\,M_C \cdot 2\,l = -6 \cdot 2 \cdot \frac{Pl^2}{16}$$

oder

$$4M_B + M_C = -\frac{3}{4}Pl,$$

$$M_B + 4M_C = -\frac{3}{4}Pl,$$

daraus

$$M_B = M_C = -\frac{3}{20}Pl.$$

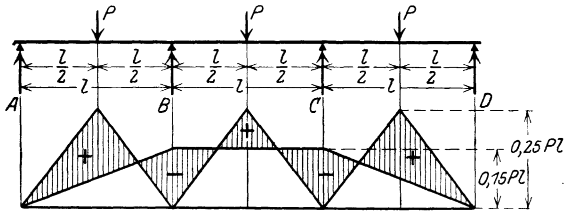


Abb. 255. Gleiche Einzellasten in der Mitte.

Aus $\quad M_B = A\cdot l - P\cdot\frac{l}{2} \quad$ folgt $\quad A = \frac{P}{2} + \frac{M_B}{l} = \frac{7}{20}P = D.$

Wegen der Symmetrie ist

$$B = C = \frac{23}{20}P.$$

Der Verlauf der Momentenlinie ist in Abb. 255 wiedergegeben.

Die Einflußlinie für die Stützmomente. Wir belasten das Mittelfeld mit einer Last von 1 t im Abstande x von der linken, x' von der rechten

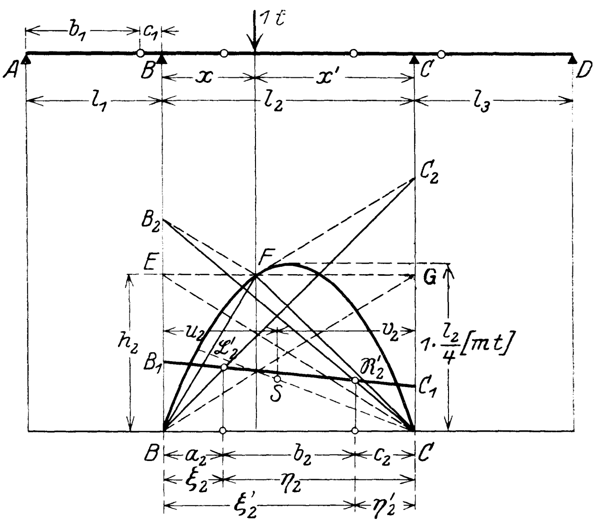


Abb. 256. Einflußlinie für die Stützmomente.

Stütze (Abb. 256), dann ist die M_0-Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe

$$h_2 = \frac{x\cdot x'}{l_2} = \frac{x\,(l_2 - x)}{l_2}.$$

Nach S. 322 ist auf der linken Stützsenkrechten durch B die Größe

$$BB_2 = -6 \cdot \frac{L_2}{l_2^2},$$

auf der rechten Stützsenkrechten durch C die Größe

$$CC_2 = -6 \cdot \frac{R_2}{l_2^2}$$

abzutragen. Mit u_2 und v_2 als Schwerpunktsabstände der M_0-Fläche BCF wird

$$L_2 = \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot h_2 \cdot u_2 \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot h_2 \cdot v_2$$

und damit

$$BB_2 = -3 \cdot \frac{h_2 \cdot u_2}{l_2}, \quad \text{bzw.} \quad CC_2 = -3 \cdot \frac{h_2 \cdot v_2}{l_2}.$$

Durch Rechnung ergeben sich die Schwerpunktsabstände

$$u_2 = \frac{l_2 + x}{3} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{2l_2 - x}{3},$$

so daß wir unsere Gleichungen auch in der Form

$$BB_2 = -\frac{h_2(l_2 + x)}{l_2} = -h_2 - \frac{h_2}{l_2} \cdot x,$$

$$CC_2 = -\frac{h_2(2l_2 - x)}{l_2} = -\frac{h_2(l_2 + l_2 - x)}{l_2} = -h_2 - \frac{h_2}{l_2}(l_2 - x)$$

schreiben können. Beide Werte lassen sich in einfacher Weise zeichnerisch bestimmen. Ziehe EFG (Abb. 256) durch die Spitze F des M_0-Momentendreiecks wagerecht, ferner

$$FB_2 \parallel CE \quad \text{und} \quad FC_2 \parallel BG,$$

dann ist

$$BB_2 = BE + EB_2 = -h_2 - \frac{h_2}{l_2} \cdot x,$$

$$CC_2 = CG + GC_2 = -h_2 - \frac{h_2}{l_2} \cdot (l_2 - x).$$

Die Punkte $\mathfrak{L}_2'$ und $\mathfrak{R}_2'$ der Stützmomentenlinie sind durch die Geraden BC_2 und CB_2 nach Abb. 244 bestimmt. Die Gerade $\mathfrak{L}_2'\mathfrak{R}_2'$ schneidet auf den Stützsenkrechten die Stützmomente

$$M_B = BB_1 \quad \text{und} \quad M_C = CC_1$$

ab. Einen Punkt der Einflußlinie für M_B finden wir, wenn wir senkrecht unter dem Angriffspunkt der Last von 1 t, d. h. im Abstande x von B, die Strecke BB_1 abtragen; CC_1 senkrecht unter der Last abgetragen, liefert einen Punkt der Einflußlinie für M_C. Sollen genügend viel Punkte der Einflußlinien durch Zeichnung gefunden werden, so denken wir daran, daß die Punkte F auf einer Parabel

$$h = \frac{x(l_2 - x)}{l_2}$$

liegen, deren Pfeilhöhe für $x = \frac{l_2}{2}$

$$h_m = \frac{l_2}{4}$$

wird.

Rechnerisch finden wir

$$BB_2 = BB_1 + B_1B_2 = M_B + M_C \cdot \frac{\xi_2'}{\eta_2'} = -\frac{h_2(l_2+x)}{l_2},$$

$$CC_2 = CC_1 + C_1C_2 = M_C + M_B \cdot \frac{\eta_2}{\xi_2} = -\frac{h_2(2l_2-x)}{l_2}.$$

Führen wir statt ξ und η nach Abb. 256 die Strecken a_2, b_2 und c_2 ein, so erhalten wir

$$M_B + M_C \cdot \frac{a_2+b_2}{c_2} = -\frac{x \cdot x'}{l_2} \cdot \frac{l_2+x}{l_2},$$

$$M_B \cdot \frac{b_2+c_2}{a_2} + M_C = -\frac{x \cdot x'}{l_2} \cdot \frac{2l_2-x}{l_2}.$$

Setzt man

$$M_C = -\frac{xx'(2l_2-x)}{l_2^2} - M_B \cdot \frac{b_2+c_2}{a_2}$$

aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so folgt

$$M_B - \frac{xx'(2l_2-x)}{l_2^2} \cdot \frac{a_2+b_2}{c_2} - M_B \cdot \frac{b_2+c_2}{a_2} \cdot \frac{a_2+b_2}{c_2} = -\frac{xx'}{l_2} \cdot \frac{l_2+x}{l_2},$$

$$-M_B \cdot \frac{a_2c_2-(b_2+c_2)(a_2+b_2)}{a_2c_2} = \frac{xx'}{l_2} \cdot \frac{c_2l_2+c_2x-(2l_2-x)(a_2+b_2)}{c_2l_2},$$

$$-M_B \cdot \frac{a_2c_2-a_2b_2-a_2c_2-b_2^2-b_2c_2}{a_2c_2} = \frac{xx'}{l_2} \cdot \frac{c_2l_2+x(c_2+a_2+b_2)-2a_2l_2-2b_2l_2}{c_2l_2}.$$

Da $a_2 + b_2 + c_2 = l_2$ ist, wird

$$M_B \cdot \frac{b_2l_2}{a_2} = \frac{xx'}{l_2}(c_2 + x - 2a_2 - 2b_2)$$

$$= \frac{xx'}{l_2}(3c_2 + x - 2a_2 - 2b_2 - 2c_2),$$

$$M_B = \frac{xx' \cdot a_2}{l_2^2 \cdot b_2}[3c_2 + x - 2(a_2 + b_2 + c_2)],$$

$$M_B = -\frac{xx' \cdot a_2}{l_2^2 \cdot b_2}(2l_2 - 3c_2 - x)$$

oder mit $l_2 - x = x'$

$$M_B = -\frac{x \cdot x' \cdot a_2}{l_2^2 \cdot b_2}(l_2 - 3c_2 + x').$$

Da das Stützmoment M_B durch eine Last von 1 t hervorgerufen wird, wollen wir es y_B nennen und schreiben

$$y_B = -2 \cdot \frac{xx'}{l_2} \cdot \frac{a_2}{l_2} \cdot \frac{l_2 - 3c_2 + x'}{2 \cdot b_2}.$$

Der Ausdruck $2 \cdot \frac{x x'}{l_2} \cdot \frac{a_2}{l_2}$ ist eine Parabelordiante mit der Pfeilhöhe $\frac{a_2}{2}$, da für $x = x' = \frac{l_2}{2}$,

$$2 \cdot \frac{x \cdot x'}{l_2} \cdot \frac{a_2}{l_2} = \frac{a_2}{2}$$

ist. Beim Aufzeichnen der Parabel darf nicht vergessen werden, daß $\frac{x \cdot x'}{l_2}$ das Moment ist, das die Kraft von 1 t im Punkte x des Trägers BC hervorruft. Es ist also auch

$$2 \cdot \frac{x x'}{l_2} \cdot \frac{a_2}{l_2}$$

ein Moment, gemessen in mt, wenn die Längen in m, die Kraft „Eins" in t eingesetzt werden. Insofern sind wir nicht gezwungen, die meist sehr kleine Strecke $\frac{a_2}{2}$ aufzutragen, sondern dürfen jeden beliebigen Momentenmaßstab zur Darstellung der Mittelordinate

$$1 \cdot \frac{a_2}{2}, \text{ gemessen in mt},$$

wählen. Dann werden auch die sich ergebenden Stützmomente, d. h. die Ordinaten der Einflußlinie, in demselben Maßstabe gemessen. Wir entwerfen diese Parabel (Abb. 257), die durch die Punkte B, G und C geht. Ferner machen wir $CD = l_2 - 3\,c_2$ und $DE = 2\,b_2$. Auf die Senkrechte durch E projizieren wir die Parabelordinate HF, so daß

$$EJ = FH = 2 \cdot \frac{x \cdot x'}{l_2} \cdot \frac{a_2}{l_2}$$

ist, dann schneidet die Gerade DJ auf der Senkrechten durch F die Strecke

$$FP = \frac{EJ}{ED} \cdot DF = 2 \cdot \frac{x x'}{l_2} \cdot \frac{a_2}{l_2} \cdot \frac{l_2 - 3\,c_2 + x'}{2\,b_2} = -\,y_B$$

ab. In Abb. 257 ist FP mit y_B bezeichnet, da die Stützmomente stets das negative Vorzeichen haben. Der zu H symmetrische Punkt K der

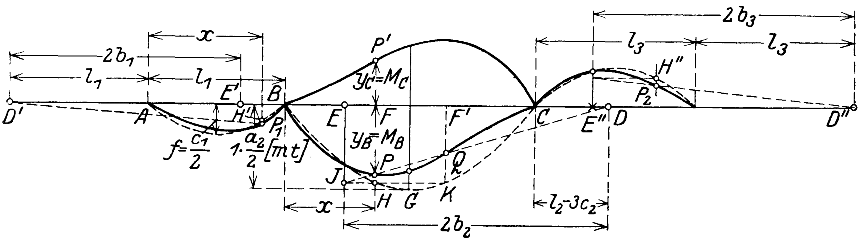


Abb. 257. Einflußlinien für die Stützmomente.

Parabel liefert auf DJ einen zweiten Punkt Q der Einflußlinie für das Stützmoment M_B.

Will man die Ordinaten der Einflußlinie punktweise berechnen, so empfiehlt sich die Umformung der Gleichung für y_B, die wir mit

$x' = l_2 - x$ schreiben

$$y_B = -l_2 \cdot \frac{a_2}{b_2}\left(\frac{x}{l_2} - \frac{x^2}{l_2^2}\right) \cdot \left(2 - \frac{x}{l_2} - 3\frac{c_2}{l_2}\right).$$

Hierin ist y_B eine Funktion von $(x : l)$, die wir für 10 Punkte ein für alle Male zahlenmäßig ausrechnen bis auf die Unveränderlichen, die nach dem jeweils vorliegenden Fall einzusetzen sind. Die aufzustellende Zahlentafel hat folgende Form, wobei der Index „2“ stets fortgelassen wurde:

Zahlentafel.

$\frac{x}{l} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$2 - \frac{x}{l} =$	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$\frac{x^2}{l^2} =$	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81
$\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} =$	0,09	0,16	0,21	0,24	0,25	0,24	0,21	0,16	0,09
$\frac{x^3}{l^3} =$	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729
$\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} =$	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171

$$y_1 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}09\left(1{,}9 - 3\frac{c}{l}\right). \qquad y_2 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}16\left(1{,}8 - 3\frac{c}{l}\right)$$

$$y_3 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}21\left(1{,}7 - 3\frac{c}{l}\right) \qquad y_4 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}24\left(1{,}6 - 3\frac{c}{l}\right)$$

$$y_5 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}25\left(1{,}5 - 3\frac{c}{l}\right) \qquad y_6 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}24\left(1{,}4 - 3\frac{c}{l}\right)$$

$$y_7 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}21\left(1{,}3 - 3\frac{c}{l}\right) \qquad y_8 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}16\left(1{,}2 - 3\frac{c}{l}\right)$$

$$y_9 = -\frac{a\,l}{b} \cdot 0{,}09\left(1{,}1 - 3\frac{c}{l}\right).$$

Aus den beiden Gleichungen für M_B und M_C folgt in ähnlicher Weise

$$M_C = -\frac{x \cdot x' c_2}{l_2^2 \cdot b_2}(l_2 - 3a + x).$$

Bezeichnen wir das Stützmoment M_C, da es durch eine Last von 1 t hervorgerufen wird, mit y_C, so wird

$$y_C = -l_2 \frac{c_2}{b_2}\left(\frac{x'}{l_2} - \frac{x'^2}{l_2^2}\right)\left(2 - \frac{x'}{l_2} - 3\frac{a_2}{l_2}\right).$$

Hiernach kann die Einflußlinie für das Stützmoment M_C der zweiten Öffnung mit Hilfe der vorstehenden Zahlentafel berechnet werden, wenn man x durch x' und a_2 durch c_2 ersetzt; man kann auch Punkte der Einflußlinie in ähnlicher Weise wie für M_B finden.

Die Äste der Einflußlinien in den Außenöffnungen erhalten wir durch Belastung einer Außenöffnung mit einer Last von 1 t. Mit den Bezeichnungen der Abb. 257 lautet die Dreimomentengleichung für die ersten drei Stützen unter der Berücksichtigung, daß $M_A = 0$ und $R_2 = 0$ ist

$$2\,M_B\,(l_1 + l_2) + M_C \cdot l_2 = -6 \cdot \frac{L_1}{l_1}\,;$$

für die drei Stützen B, C, D wird mit $M_D = 0$

$$M_B \cdot l_2 + M_C \cdot 2 \cdot (l_2 + l_3) = 0\,.$$

Wir schreiben beide Gleichungen in der Form

$$M_B \cdot \frac{2\,(l_1 + l_2)}{l_2} + M_C = -\frac{6}{l_2} \cdot \frac{L_1}{l_1}\,,$$

$$M_B \cdot \frac{l_2}{2\,(l_2 + l_3)} + M_C = 0$$

und erhalten durch Subtraktion

$$M_B \cdot \left[\frac{2\,(l_1 + l_2)}{l_2} - \frac{l_2}{2\,(l_2 + l_3)}\right] = -\frac{6}{l_2} \cdot \frac{L_1}{l_1}\,.$$

Die M_0-Momentenfläche der ersten Öffnung ist ein Dreieck mit der Höhe

$$h_1 = \frac{x \cdot x'}{l_2} = \frac{x\,(l_1 - x)}{l_1}$$

und dem Schwerpunktsabstand $u_1 = \frac{l_1 + x}{3}$; damit geht unsere Gleichung für M_B über in

$$M_B \cdot \left[\frac{2\,(l_1 + l_2)}{l_2} - \frac{l_2}{2\,(l_2 + l_3)}\right] = -\frac{x\,(l_1 - x)\,(l_1 + x)}{l_1 \cdot l_2}\,.$$

Nach S. 320 teilt der Festpunkt $\mathfrak{R}_1$ die erste Öffnung l_1 in dem Verhältnis

$$\frac{\eta_1'}{\xi_1'} = \frac{l_1}{2\,(l_1 + l_2) - \frac{\eta_2'}{\xi_2'} \cdot l_2}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{2\,(l_1 + l_2)}{l_2} - \frac{\eta_2'}{\xi_2'} = \frac{l_1}{l_2}\,\frac{\xi_1'}{\eta_1'}\,.$$

Mit $\frac{\eta_2'}{\xi_2'} = \frac{l_2}{2\,(l_2 + l_3)}$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{2\,(l_1 + l_2)}{l_2} - \frac{l_2}{2\,(l_2 + l_3)} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\xi_1'}{\eta_1'}$$

und wir erhalten

$$M_B \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\xi_1'}{\eta_1'} = -\frac{x\,(l_1 - x)\,(l_1 + x)}{l_1 \cdot l_2}\,.$$

Bezeichnen wir wie vorher die Teile, in die die Festpunkte eine Öffnung zerlegen, mit a, b und c und beachten, daß der linke Festpunkt $\mathfrak{L}_1$ der ersten Öffnung mit dem Stützpunkt A zusammenfällt, so wird

$$M_B = y_1 = -\frac{c_1}{l_1^2 \cdot b_1} \cdot x\,(l_1 - x)\,(l_1 + x)\,;$$

y führen wir wieder ein, weil es sich um die Ordinate der Einflußlinie handelt. Um die zeichnerische Bestimmung dieser Strecke durchsichtiger zu gestalten, schreiben wir

$$y_1 = -\left[2 \cdot \frac{x\,(l_1 - x) \cdot c_1}{l_1 \cdot l_1}\right] \cdot \frac{l_1 + x}{2\,b_1},$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer eine Parabelordinate darstellt, deren Pfeilhöhe sich für $x = \frac{l_1}{2}$ zu

$$f = 2 \cdot \frac{\frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot c_1}{l_1^2} = \frac{c_1}{2}$$

ergibt. Für den Maßstab der Darstellung dieses Momentes gilt das Gleiche wie für die Parabel der Mittelöffnung. Selbstverständlich müssen beide Parabelordinaten gleichen Maßstab erhalten (Abb. 257). In

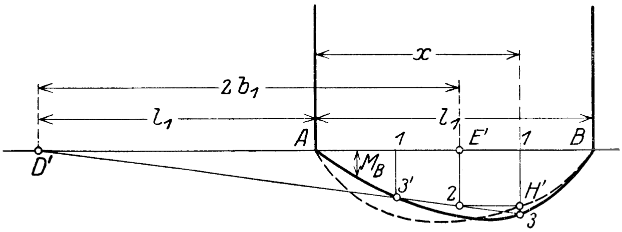


Abb. 257a. Einflußlinie der linken Außenöffnung.

Abb. 257 a ist diese Parabel vergrößert herausgezeichnet. Wir machen $AD' = l_1$ und tragen $D'E' = 2\,b_1$ von D' aus ab. Den beliebigen Parabelpunkt H' mit der Abszisse x projizieren wir auf die Senkrechte durch E' und verbinden diesen Punkt 2 mit D', dann schneidet D' 2 die Senkrechte durch 1 in dem Punkte 3 der Einflußlinie und gleichzeitig die Senkrechte durch die Abszisse 1 des symmetrischen Parabelpunktes in einem zweiten Punkte 3′ der Einflußlinie für das Stützmomen t $\boldsymbol{M_B}$.

Rechnerisch finden wir die Ordinaten von 10 Punkten der Einflußlinie, wenn wir die Gleichung in der Form

$$y_1 = -\frac{c_1}{b_1} \cdot l_1 \cdot \left(\frac{x}{l_1} - \frac{x^3}{l_1^3}\right)$$

schreiben und den Klammerausdruck für $\frac{x}{l} = 0{,}1 \ldots 0{,}2 \ldots$ ein für alle Male ausrechnen; die Zahlenwerte sind der Tafel auf S. 341 eingefügt. In ähnlicher Weise läßt sich die Einflußlinie für das Stützmoment $\boldsymbol{M_C}$ der dritten Öffnung berechnen bzw. konstruieren, so daß die in Abb. 257 wiedergegebenen Kurven ermittelt werden können.

Um die Ordinaten des Astes der M_B-Linie in der dritten Öffnung zu bestimmen, denken wir uns in Abb. 258 die M_C-Linie der dritten Öffnung gezeichnet, dann ruft eine Last von 1 t das Stützmoment $1 \div 2$ hervor. Da die M-Linie der unbelasteten Felder durch die Festpunkte $\mathfrak{L}$ gehen muß, projizieren wir 2 auf die Stützsenkrechte durch C und ziehen den Linienzug $3 \div \mathfrak{L}_2 \div 4 \div \mathfrak{L}_1$. Es ist demnach $\overrightarrow{44'}$ das durch 1 t der rechten

Außenöffnung in B auftretende Stützmoment, das wir jetzt als Ordinate der Einflußlinie für M_B senkrecht unter dem Lastangriffspunkt abtragen;

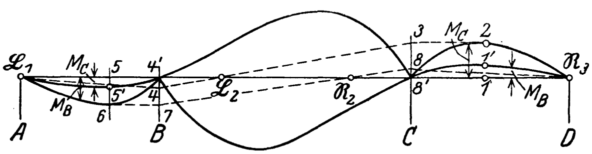


Abb. 258. Einflußlinien für die Gesamtlänge des Trägers.

durch $\overline{11'} = \overline{44'}$ ist $1'$ als Punkt der M_B-Linie bestimmt.

In gleicher Weise ist $\overline{56}$ gleich dem Stützmoment M_B, das durch 1 t im Punkt 5 der ersten Öffnung hervorgerufen wird. Die Projektion von 6 auf die Stützsenkrechte durch B liefert in Verbindung mit dem Linienzug $7 \div \mathfrak{R}_2 \div 8 \div \mathfrak{R}_3$ das Stützmoment $M_C = \overline{88'}$; d. h. $\overline{55'} = \overline{88'}$ ergibt den Punkt $5'$ der Einflußlinie für das Stützmoment M_C. Damit sind beide Einflußlinien für die Gesamtlänge des Trägers bekannt (Abb. 258).

f) Der durchlaufende Träger auf n-Stützen.

Einzellasten. Als Beispiel sei der durchlaufende Träger der Abb. 259 gegeben, dessen M_0-Momentenflächen nach dem Überlagerungsgesetz entworfen werden, indem wir die Lasten nacheinander auf dem Träger bringen. Es ergeben sich Dreiecke mit den Höhen:

$$\text{1. Öffnung} \quad h_1 = 300 \cdot \frac{0{,}45 \cdot 1{,}35}{1{,}80} = 101{,}25 \text{ mkg};$$

$$h_1' = 700 \cdot \frac{0{,}68 \cdot 1{,}12}{1{,}80} = 296 \text{ mkg};$$

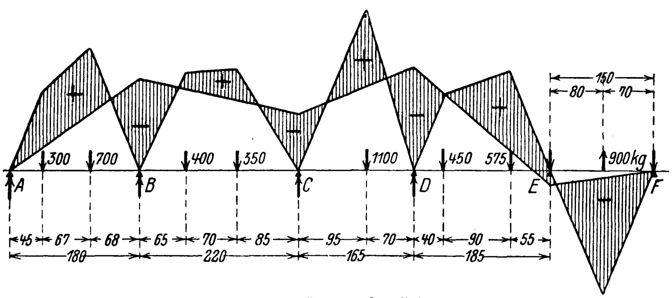


Abb. 259. Träger auf n-Stützen.

$$\text{2. Öffnung} \quad h_2 = 400 \cdot \frac{0{,}65 \cdot 1{,}55}{2{,}20} = 183 \text{ mkg};$$

$$h_2' = 350 \cdot \frac{0{,}85 \cdot 1{,}35}{2{,}20} = 182{,}5 \text{ mkg};$$

$$\text{3. Öffnung} \quad h_3 = 1100 \cdot \frac{0{,}95 \cdot 0{,}70}{1{,}65} = 444 \text{ mkg};$$

$$\text{4. Öffnung} \quad h_4 = 450 \cdot \frac{0{,}40 \cdot 1{,}45}{1{,}85} = 141 \text{ mkg};$$

$$h_4' = 575 \cdot \frac{0{,}55 \cdot 1{,}30}{1{,}85} = 222 \text{ mkg};$$

$$\text{5. Öffnung} \quad h_5 = -900 \cdot \frac{0{,}70 \cdot 0{,}80}{1{,}50} = -336 \text{ mkg}.$$

Beachtet man, daß $M_A = 0$ und $M_F = 0$ ist, so lauten die Dreimomentengleichungen (Seite 318).

$$8\,M_B + 2{,}2\,M_C = -\left\{300\cdot 0{,}45\cdot\frac{1{,}8^2-0{,}45^2}{1{,}8} + 700\cdot 1{,}12\cdot\frac{1{,}8^2-1{,}12^2}{1{,}8}\right.$$
$$\left. + 400\cdot 1{,}55\cdot\frac{2{,}2^2-1{,}55^2}{2{,}2} + 350\cdot 0{,}85\cdot\frac{2{,}2^2-0{,}85^2}{2{,}2}\right\} = -2337\,,$$

$$2{,}2\,M_B + 7{,}7\,M_C + 1{,}65\,M_D = -\left\{400\cdot 0{,}65\cdot\frac{2{,}2^2-0{,}65^2}{2{,}2}\right.$$
$$\left. + 350\cdot 1{,}35\cdot\frac{2{,}2^2-1{,}35^2}{2{,}2} + 1100\cdot 0{,}7\cdot\frac{1{,}65^2-0{,}7^2}{1{,}65}\right\} = -2212\,,$$

$$1{,}65\,M_C + 7\,M_D + 1{,}85\,M_E = -\left\{1100\cdot 0{,}95\cdot\frac{1{,}65^2-0{,}95^2}{1{,}65}\right.$$
$$\left. + 450\cdot 1{,}45\cdot\frac{1{,}85^2-1{,}45^2}{1{,}85} + 575\cdot 0{,}55\cdot\frac{1{,}85^2-0{,}55^2}{1{,}85}\right\} = -2152\,,$$

$$1{,}85\,M_D + 6{,}7\,M_E = -\left\{450\cdot 0{,}4\cdot\frac{1{,}85^2-0{,}4^2}{1{,}85} + 575\cdot 1{,}3\cdot\frac{1{,}85^2-1{,}3^2}{1{,}85}\right.$$
$$\left. - 900\cdot 0{,}7\cdot\frac{1{,}5^2-0{,}7^2}{1{,}5}\right\} = -278\,.$$

Daraus ergeben sich die Stützmomente

$$M_A = 0;\quad M_B = -250\text{ mkg};\quad M_C = -154\text{ mkg};\quad M_D = -280\text{ mkg};$$
$$M_E = +36\text{ mkg};\quad M_F = 0\,.$$

Die Gesamtmomentenfläche ist in Abb. 259 dargestellt; sie zeigt als absolut größtes Moment

$$M = -330\text{ mkg}$$

im Angriffspunkt der Kraft -900 kg.

Aus den Stützmomenten finden wir die Auflagerdrucke; es ist

$$M_B = A\cdot 1{,}80 - 300\cdot 1{,}35 - 700\cdot 0{,}68 = -250$$
$$\text{daraus}\quad A = 350\text{ kg}\,,$$

$$M_C = A\cdot 4{,}0 + B\cdot 2{,}2 - 300\cdot 3{,}55 - 700\cdot 2{,}88 - 400\cdot 1{,}55 - 350\cdot 0{,}85 = -154$$
$$\text{daraus}\quad B = 1111\text{ kg}\,,$$

$$M_D = A\cdot 5{,}65 + B\cdot 3{,}85 + C\cdot 1{,}65 - 300\cdot 5{,}2 - 700\cdot 4{,}53 - 400\cdot 3{,}2$$
$$- 350\cdot 2{,}5 - 1100\cdot 0{,}70 = -280$$
$$\text{daraus}\quad C = 680\text{ kg}\,,$$

$$M_E = F\cdot 1{,}5 + 900\cdot 0{,}8 = +36$$
$$\text{daraus}\quad F = -456\text{ kg}\,,$$

$$M_D = F\cdot 3{,}35 + E\cdot 1{,}85 + 900\cdot 2{,}65 - 575\cdot 1{,}30 - 450\cdot 0{,}40 = -280$$
$$\text{daraus}\quad E = -114\text{ kg}\,,$$

$$M_C = F\cdot 5 + 900\cdot 4{,}3 + E\cdot 3{,}5 - 575\cdot 2{,}95 - 450\cdot 2{,}05 + D\cdot 1{,}65$$
$$- 1100\cdot 0{,}95 = -154$$
$$\text{daraus}\quad D = 1403\text{ kg}\,.$$

Die Stützdrucke in den rechten Außenstützen E und F sind nach unten gerichtet.

Gleiche Öffnungen mit durchlaufend gleichmäßig verteilter Last. Für diesen Sonderfall haben alle M_0-Momentenflächen gleiche Pfeilhöhen

$$f = \frac{pl^2}{8}$$

ihre statischen Momente, bezogen auf die Stützsenkrechten sind gleich groß; es ist

$$R = L = \frac{2}{3}\,l \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^4}{24}\,.$$

Mit diesen Werten nimmt die Dreimomentengleichung die Form

$$M_{r-1} \cdot l_r + 2\,M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} \cdot l_{r+1} = -\frac{pl^3}{2}$$

an. Folgende Zahlentafel zeigt Stützmomente und Auflagerdrucke für Träger mit n Stützen, die in gleicher Weise berechnet sind wie S. 332 für den Träger auf vier Stützen. Wegen der Symmetrie sind die Angaben nur bis zur Mitte gemacht.

	Anzahl der Stützen							Einheiten
	3	4	5	6	7	8	9	
A	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	pl
B	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	1,1340	pl
C			0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	pl
D					1,0192	1,0070	1,0103	pl
E							0,9948	pl
M_B	0,1250	0,100	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	pl^2
M_C			0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	pl^2
M_D					0,0865	0,0845	0,0850	pl^2
M_E							0,0825	pl^2
$M_{1_{max}}$	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	pl^2
$M_{2_{max}}$		0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	pl^2
$M_{3_{max}}$				0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	pl^2
$M_{4_{max}}$						0,0405	0,0412	pl^2

Hierin bedeuten $M_{1_{max}}$ usw. die größten Momente in den einzelnen Feldern.

3. Der Freiträger mit Außenstütze.

Der Träger sei beliebig belastet, habe aber gleichbleibenden Querschnitt (Abb. 260). Die Einspannung denken wir uns in ein Auflager B mit dem Einspannmoment M_B aufgelöst und entwerfen die M-Fläche als Summe zweier Flächen: der positiven M-Fläche des Trägers auf zwei Stützen $A_1\,B_1$ und der negativen mit der Endordinate M_B (Abb. 260c). Die Elastizitätsbedingung für diesen einfach statisch unbestimmten Träger kann aus der Forderung wagerechter Einspannung in B gefolgert werden; wir schreiben mit φ_B als Neigungswinkel der Biegungslinie in B

$$\varphi_B = 0\,.$$

Nach S. 148 erhalten wir den $E \cdot J$-fachen Neigungswinkel als Auflagerdruck B_2 eines Trägers $A_2\,B_2$, den wir mit der Momentenfläche des wirklichen Trägers AB belasten. Für A_2 als Drehpunkt lautet die 3. Gleichgewichtsbedingung

$$B_2 \cdot l = L + \frac{1}{2} M_B \cdot l \cdot \frac{2}{3} l,$$

die mit der Forderung

$$B_2 = EJ \cdot \varphi_B = 0$$

übergeht in

$$M_B = -3 \cdot \frac{L}{l_2},$$

wobei L das statische Moment der M_0-Momentenfläche, bezogen auf die linke Stützsenkrechte durch A ist.

Diese Gleichung kann auch als verkürzte Dreimomentengleichung aufgefaßt werden, in der wir $M_A = 0$; $M_C = 0$; $l_1 = l$; $l_2 = 0$; $R_2 = 0$ setzen, dann ist

$$2 M_B \cdot l = -6 \cdot \frac{L}{l_2} \quad \text{oder} \quad M_B = -3 \cdot \frac{L}{l_2}.$$

Aus der weiteren Bedingung

$$M_B = A \cdot l - M'_B \quad \text{folgt} \quad A = \frac{M'_B}{l} + \frac{M_B}{l},$$

wobei wir unter M'_B das Biegungsmoment in der Einspannstelle des Freiträgers ohne Stütze verstehen wollen.

Einen zweiten Weg zur Lösung der Aufgabe haben wir, wenn wir als statisch bestimmtes Hauptsystem den Freiträger ohne Stütze wählen. Infolge der wirklichen Last P senkt sich der Punkt A um den Betrag δ_{AP}. Denken wir uns jetzt den Träger mit dem unbekannten Auflagerdruck A belastet, so hebt sich der Punkt A um den Betrag δ_{AA}. Da sich A infolge der Stütze in A nicht verschiebt, erhalten wir als Elastizitätsbedingung

$$\delta_{AP} - \delta_{AA} = 0,$$

aus der sich die statisch nicht bestimmbare Größe A ergibt.

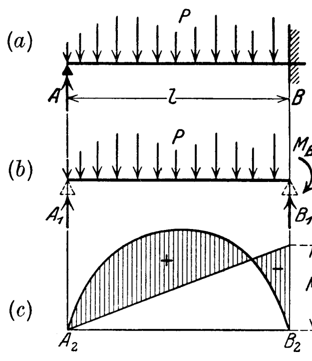


Abb. 260. Freiträger mit Außenstütze.

Besonders einfach gestaltet sich die Lösung auf diesem Wege, wenn der Belastungsfall des statisch bestimmten Freiträgers ein Normalfall ist, dessen Durchbiegungen aus der Zusammenstellung S. 172 bis 175 entnommen werden können.

Der Träger sei gleichmäßig belastet (Abb. 261). Die Tafel auf S. 173 liefert

$$\delta_{AP} = \frac{Pl^3}{8EJ} \quad \text{und} \quad \delta_{AA} = \frac{Al^3}{3EJ};$$

die Gleichsetzung beider Werte ergibt

$$A = \frac{3}{8} P.$$

Damit erhalten wir als Einspannungsmoment

$$M_B = A\cdot l - P\cdot\frac{l}{2} = \frac{3}{8}Pl - \frac{1}{2}Pl = -\frac{Pl}{8}.$$

Die Pfeilhöhe der M_0-Momentenfläche ist von gleicher Größe, so daß sich die Gesamtmomentenfläche als Differenz beider Flächen leicht entwerfen läßt.

Der Vollständigkeit halber sei auch der erste Weg gezeigt. Die M_0-Momentenfläche ist von einer Parabel mit der Pfeilhöhe

$$M_0 = \frac{p\,l^2}{8} = \frac{Pl}{8}$$

begrenzt; ihr statisches Moment, bezogen auf die Stützsenkrechte durch A ist

$$L = \frac{2}{3}l\cdot\frac{p\,l^2}{8}\cdot\frac{l}{2}, \quad \text{mithin} \quad \frac{L}{l^2} = \frac{p\,l^2}{24}$$

und damit

$$M_B = -3\cdot\frac{L}{l^2} = -\frac{p\,l^2}{8} = -\frac{Pl}{8}.$$

Die Tragfähigkeit dieses Trägers ist nicht größer als die eines gleich-

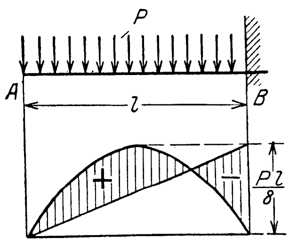


Abb. 261. Gleichmäßige Belastung.

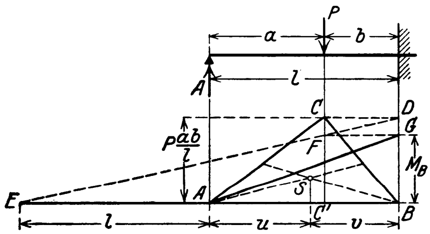


Abb. 262. Einzellast.

mäßig belasteten Trägers auf zwei Stützen, dessen Mittelmoment ebenso groß wird. Der Auflagerdruck in A folgt aus

$$A = \frac{M_B'}{l} + \frac{M_B}{l} \quad \text{zu} \quad A = \frac{Pl}{2} - \frac{Pl}{8} = \frac{3}{8}P; \quad \text{also} \quad B = \frac{5}{8}P.$$

Der Träger sei mit einer Einzellast belastet (Abb. 262). Da dieser Belastungsfall in der Zusammenstellung auf S. 172 nicht enthalten ist, wählen wir den Träger auf zwei Stützen als statisch bestimmtes Hauptsystem und berechnen das statisch nicht bestimmbare Einspannmoment unmittelbar aus

$$M_B = -3\cdot\frac{L}{l^2}.$$

Die M_0-Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe

$$M_0 = \frac{Pab}{l};$$

ihr statisches Moment, bezogen auf die Stützsenkrechte durch A, ist

$$L = \frac{1}{2}l\cdot\frac{Pab}{l}\cdot u = \frac{1}{2}Pabu,$$

wenn u der Schwerpunktsabstand von A ist. Mit $u = \frac{l+a}{3}$ ergibt sich

$$M_B = -3 \cdot \frac{P a b}{2 \cdot l^2} \cdot \frac{l+a}{3} = -\frac{P a b (l+a)}{2 \cdot l^2}.$$

Die Gleichung läßt eine sehr einfache zeichnerische Bestimmung des Einspannmomentes zu. Ziehe durch die Spitze C des M_0-Momentendreiecks eine Wagerechte bis D. Mache $EA = AB = l$, dann schneidet die Verbindungslinie ED auf der Senkrechten durch C die Größe

$$C'F = \frac{P a b}{l} \cdot \frac{l+a}{2\,l} = -M_B$$

ab. Zieht man FG parallel AB, so wird $BG = -M_B$.

Sind beliebig viele Lasten auf dem Träger, so schreiben wir unsere Gleichung mit $b = l - a$

$$M_B = -\sum \frac{P \cdot a (l^2 - a^2)}{2\,l^2}.$$

Für drei Lasten mit den Entfernungen a_1, a_2, a_3 von A ist z. B.

$$M_B = -\left\{\frac{P_1 a_1 (l^2 - a_1^2)}{2 l^2} + \frac{P_2 a_2 (l^2 - a_2^2)}{2 l^2} + \frac{P_3 a_3 (l^2 - a_3^2)}{2 l^2}\right\}.$$

4. Der Freiträger mit Außenstütze und Kragarm.

Die beliebige Last des Trägers (Abb. 263) zerlegen wir in zwei Teile, in P_1 zwischen A und B und P_2 für den Kragarm; das von P_2 hervorgerufene Stützmoment sei M_A. Dann fassen wir den gedachten Träger $A_1 B_1$ als einen Träger auf zwei Stützen auf, der mit P_1 und den Stützmomenten M_A und M_B belastet ist, und entwerfen die M_0-Momentenfläche infolge P_1, von der die Stützmomentenfläche in Abzug zu bringen ist. Aus der Einspannung in B folgern wir als Elastizitätsbedingung

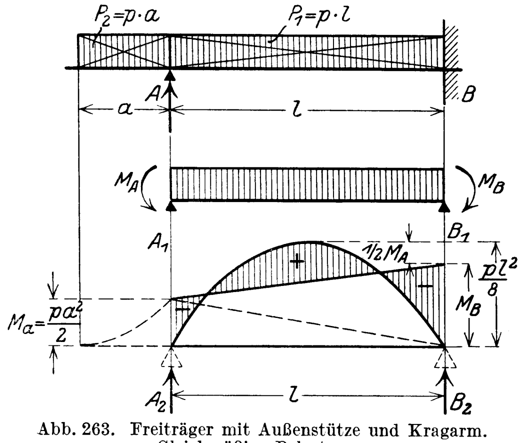


Abb. 263. Freiträger mit Außenstütze und Kragarm. Gleichmäßige Belastung.

$$\varphi_B = 0$$

und berechnen $EJ \cdot \varphi_B$ als Auflagerdruck B_2 eines Trägers, der mit der M-Fläche des Trägers AB belastet ist. Die 3. Gleichgewichtsbedingung liefert für A_2 als Drehpunkt

$$B_2 \cdot l = L + \frac{1}{2} l \cdot M_A \cdot \frac{l}{3} + \frac{1}{2} l \cdot M_B \cdot \frac{2}{3} l = 0;$$

daraus

$$M_B = -\left\{3 \cdot \frac{L}{l^2} + \frac{1}{2} M_A\right\}.$$

Hierbei ist L wie stets das statische Moment der M_0-Momentenfläche bezogen auf die linke Stützsenkrechte durch A.

Ein zweiter Weg ist durch die Anwendung der allgemeinen Elastizitätsgleichung

$$\delta_{AP} - \delta_{AA} = 0$$

gegeben, bei der der eingespannte Freiträger als statisch bestimmtes Hauptsystem angenommen ist.

Der Träger sei gleichmäßig belastet (Abb. 263). Die M_0-Momentenfläche ist eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$M_0 = \frac{pl^2}{8},$$

das Stützmoment in A

$$M_A = -\frac{pa^2}{2}$$

ist die Parabelordinate in A für den Kragarm. Das statische Moment der parabolisch begrenzten M_0-Momentenfläche, bezogen auf die Stützsenkrechte durch A, ist

$$L = \frac{2}{3}\, l \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2}, \quad \text{also} \quad 3 \cdot \frac{L}{l^2} = \frac{pl^2}{8};$$

damit wird

$$M_B = -\left\{3\,\frac{L}{l^2} + \frac{1}{2}\,M_A\right\} = -\left\{\frac{pl^2}{8} - \frac{pa^2}{4}\right\}.$$

Aus

$$M_B = A \cdot l - P \cdot \frac{l+a}{2} \quad \text{folgt} \quad A = P \cdot \frac{l+a}{2l} + \frac{M_B}{l},$$

das mit $P = p\,(l + a)$ übergeht in

$$A = \frac{\mathrm{p}}{8\,l}\,(3\,l^2 + 8\,al + 6\,a^2).$$

Die zeichnerische Bestimmung des Einspannmomentes M_B ist aus der Abb. 263 zu ersehen.

Wesentlich umständlicher ist der Weg über die allgemeine Elastizitätsbedingung

$$\delta_{AP} - \delta_{AA} = 0.$$

Wir ermitteln δ_{AP} aus der Gleichung der Biegungslinie (S. 173), indem wir $x = a$ setzen, und erhalten

$$\delta_{AP} = \frac{P\,(l+a)^3}{8EJ} - \frac{P\,(l+a)^3}{6EJ}\left[\frac{a}{l+a} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{(l+a)^4}\right].$$

Mit

$$\delta_{AA} = \frac{A\,l^3}{3\,EJ}$$

folgt bei Gleichsetzung beider Verschiebungen

$$A = 3\,P \cdot \frac{(l+a)^3}{l^3}\left\{\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\left[\frac{a}{l+a} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{(l+a)^4}\right]\right\},$$

$$= \frac{P(l+a)^2}{8\,l^3}\left[3\,(a+l) - 4\,a + \frac{a^4}{(l+a)^3}\right],$$

$$= \frac{P}{8\,l^3(l+a)}\left[(3\,l - a)\,(l+a)^3 + a^4\right].$$

die mit $P = p\,(l + a)$ übergeht in

$$A = \frac{p}{8\,l}(3\,l^2 + 8\,la + 6\,a^2).$$

Damit ist die statische Unbestimmtheit behoben, und wir erhalten

$$M_B = A \cdot l - \frac{p\,(l+a)^2}{2} = -\frac{p}{8}\,(l^2 - 2\,a^2)\,.$$

Der Träger sei mit Einzellasten belastet (Abb. 264). Wir entwerfen die M_0-Momentenfläche des Trägers AB und bringen die Stützmomentenfläche infolge M_A in Abzug. Dazu tritt die M-Fläche infolge des Einspannmomentes M_B. Da sich an dem statischen Moment der M_0-Momentenfläche, bezogen auf die Stützsenkrechte durch A gegen den Fall ohne Kragarm nichts geändert hat, so schreiben wir sofort die Gleichung

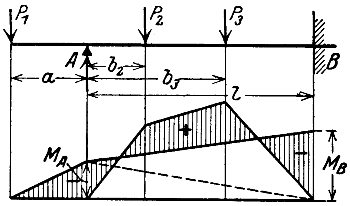


Abb. 264. Einzellasten.

$$M_B = -\left\{3 \cdot \frac{L}{l^2} + \frac{1}{2}\,M_A\right\} = -\left\{\sum \frac{P\,b\,(l^2 - b^2)}{2\,l^2} + \frac{1}{2}\,M_A\right\},$$

die für den gezeichneten Fall die Form

$$M_B = -\left\{\frac{P_2 \cdot b_2\,(l^2 - b_2^2)}{2\,l^2} + \frac{P_3\,b_3\,(l^2 - b_3^2)}{2\,l^2} - \frac{1}{2}\,P_1 \cdot a\right\}$$

annimmt.

5. Der zweifach eingespannte Träger.

Der Träger ist zweifach statisch unbestimmt (Abb. 265). Wir nehmen die beiden Einspannmomente M_A und M_B als statisch nicht bestimmbare Größen an, setzen also den zweifach gelagerten Träger $A_1\,B_1$ als statisch bestimmtes Hauptsystem voraus. Die Momentenfläche setzt sich aus der M_0-Fläche dieses zweifach gestützten Trägers und der Einspannmomentenfläche $A_1\,A_1'\,B_1'\,B_1$ zusammen. Als Elastizitätsbedingung benutzen wir die Forderung des wagerechten Verlaufes der Biegungslinie in den Einspannstellen A und B; d. h.

$$\varphi_A = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_B = 0,$$

und berechnen die EJ-fachen Neigungswinkel der Biegungslinie als Auflagerdrucke des mit der M-Fläche des wirklichen Trägers belasteten Trägers $A_1\,B_1$. Die 3. Gleichgewichtsbedingung liefert für A_1 als Drehpunkt

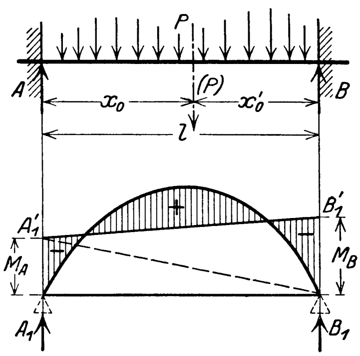


Abb. 265. Zweifach eingespannter Träger.

$$B_1 \cdot l = L + \frac{1}{2}\,l \cdot M_A \cdot \frac{1}{3}\,l + \frac{1}{2}\,l\,M_B \cdot \frac{2}{3}\,l = 0\,,$$

$$M_A + 2\,M_B = -6 \cdot \frac{L}{l^2}$$

und für B_1 als Drehpunkt

$$A_1 \cdot l = R + \frac{1}{2} l \cdot M_A \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} l M_B \cdot \frac{1}{3} l = 0,$$

$$2 M_A + M_B = -6 \frac{R}{l^2},$$

wobei wieder L das statische Moment der M_0-Momentenfläche, bezogen auf die linke Stützsenkrechte, R das statische Moment der M_0-Fläche, bezogen auf die rechte Stützsenkrechte, bedeutet. Aus beiden Gleichungen erhalten wir

$$M_A = 2\left(\frac{L}{l^2} - 2\frac{R}{l^2}\right) \quad \text{und} \quad M_B = 2\left(\frac{R}{l^2} - 2\frac{L}{l^2}\right).$$

Ist P die Mittelkraft der Belastung mit den Abständen x_0 und x_0' (Abb. 265), so folgt aus $M_B = A \cdot l - P \cdot x_0' + M_A$

$$A = P\frac{x_0'}{l} - \frac{M_A - M_B}{l} = A_0 - \frac{M_A - M_B}{l}.$$

Ebenso folgt aus $M_A = Bl - P \cdot x_0 + M_B$

$$B = P \cdot \frac{x_0}{l} - \frac{M_B - M_A}{l} = B_0 - \frac{M_B - M_A}{l}.$$

Hierin sind A_0 und B_0 die Auflagerdrucke, die durch die Last in den Stützen des zweifach gelagerten Trägers hervorgerufen werden.

Auch in dem vorliegenden Falle läßt sich die Dreimomentengleichung unmittelbar aufschreiben, wenn wir die Spannweite der anschließend gedachten Öffnungen gleich Null setzen. Es wird

$$2 M_A \cdot l + M_B \cdot l = -6 \frac{R}{l} \qquad M_A \cdot l + 2 M_B \cdot l = -6 \frac{L}{l},$$

woraus sich die vorher abgeleiteten Gleichungen sofort ergeben.

Der Träger sei gleichmäßig belastet (Abb. 266). Die M_0-Momentenfläche ist von einer Parabel mit der Pfeilhöhe

$$M_0 = \frac{Pl}{8}$$

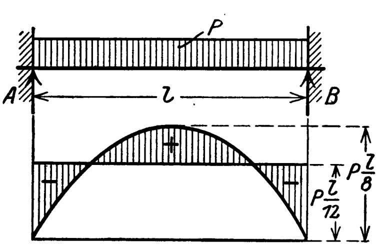


Abb. 266. Gleichmäßige Belastung.

begrenzt, deren statische Momente L und R gleich groß sind. Demnach wird

$$M_A = M_B = -2 \cdot \frac{R}{l^2}$$

$$= -2 \cdot \frac{\frac{2}{3} l \cdot \frac{Pl}{8} \cdot \frac{l}{2}}{l^2} = -\frac{Pl}{12}.$$

Wegen der Symmetrie werden die Auflagerdrucke gleich groß, d.h.

$$A = B = \frac{P}{2}.$$

Der Träger sei mit einer Einzelkraft belastet (Abb. 267). Die M_0-Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe

$$M_0 = \frac{Pab}{l}$$

und den Schwerpunktsabständen

$$x_0 = \frac{l+a}{3} \quad \text{und} \quad x_0' = \frac{2\,l-a}{3} \quad \text{von } A \text{ und } B;$$

die statischen Momente bezogen auf die Stützsenkrechten, sind

$$L = \frac{l}{2} \cdot \frac{P\,a\,b}{l} \cdot \frac{l+a}{3} \quad \text{und} \quad R = \frac{l}{2} \cdot \frac{P\,a\,b}{l} \cdot \frac{2\,l-a}{3}.$$

Ersetzen wir in der ersten Gleichung b durch $l-a$, in der zweiten a durch $l-b$ und $2\,l-a$ durch $l+b$, so erhalten wir

$$M_A = 2\left(\frac{L}{l^2} - 2\,\frac{R}{l^2}\right) = \frac{P\,a\,(l^2-a^2)}{3\,l^2} - 2 \cdot \frac{P\,b\,(l^2-b^2)}{3\,l^2} = -\frac{P\,a\,b^2}{l^2},$$

$$M_B = 2\left(\frac{R}{l^2} - 2\,\frac{L}{l^2}\right) = \frac{P\,b\,(l^2-b^2)}{3\,l^2} - 2 \cdot \frac{P\,a\,(l^2-a^2)}{3\,l^2} = -\frac{P\,a^2\,b}{l^2}.$$

Bei mehreren Einzellasten P_1, P_2, P_3 ... mit den Abständen a_1, a_2, a_3 ... von A und den Abständen b_1, b_2, b_3 ... von B sind die Einspannmomente

$$M_A = -\left\{\frac{P_1\,a_1\,b_1^2}{l^2} + \frac{P_2\,a_2\,b_2^2}{l^2} + \cdots\right\},$$

$$M_B = -\left\{\frac{P_1\,a_1^2\,b_1}{l^2} + \frac{P_2\,a_2^2\,b_2}{l^2} + \cdots\right\}.$$

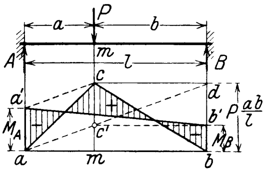


Abb. 267. Einzellast.

Greift nur eine Last P in der Mitte des Trägers an, so gehen unsere Gleichungen über in

$$M_A = M_B = -\frac{P\,l}{8} = -\frac{1}{2}\,M_0.$$

Die Auflagerdrucke werden

$$A = A_0 - \frac{M_A - M_B}{l} = \frac{P\,b}{l} - \frac{\dfrac{-P\,a\,b^2}{l^2} + \dfrac{P\,a^2\,b}{l^2}}{l} = \frac{P\,b^2\,(3\,a+b)}{l^3},$$

$$B = B_0 - \frac{M_B - M_A}{l} = \frac{P\,a}{l} - \frac{\dfrac{-P\,a^2\,b}{l^2} + \dfrac{P\,a\,b^2}{l^2}}{l} = \frac{P\,a^2\,(a+3\,b)}{l^3}.$$

Für den Sonderfall einer Einzellast P in der Mitte wird

$$A = B = \frac{P}{2}.$$

Die Gleichungen für die Einspannmomente lassen eine einfache zeichnerische Bestimmung von M_A und M_B zu, da sich

$$M_A : M_B = b : a$$

verhält. Ziehe cd wagerecht (Abb. 267) und verbinde d mit a, dann ist

$$cc' = M_A \quad \text{und} \quad mc' = M_B.$$

Zieht man demnach $c'b'$ wagerecht und $ca' \parallel c'a$, so erhält man die Stützmomente auf den Stützsenkrechten.

6. Der Träger auf elastisch senkbaren Stützen.

Der eingespannte Freiträger (Abb. 268) sei beliebig belastet. Als statisch bestimmtes Hauptsystem wird der Freiträger AB gewählt, dessen Endpunkt A sich unter der Last P um den Betrag δ_{AP} verschiebt. Die Spannkraft A verlängert die Stange um Δh, so daß sich der Punkt A um diesen Betrag endgültig nach unten senkt. Ist δ_{AA} die Verschiebung des Punktes A infolge der Kraft A, so lautet unsere allgemeine Elastizitätsgleichung nunmehr

$$\delta_{AP} - \delta_{AA} = \Delta h .$$

Da die Gleichung in dieser Form nicht durchsichtig ist, soll sie nach folgenden Gesichtspunkten umgeformt werden (vgl. S. 308):

Es sei $\delta_{A(P=1)}$ die Senkung des Punktes A, die er infolge einer Last von 1 t erfährt, die aber der gegebenen verhältnismäßig gleich sein soll. Ist z. B. P eine Einzellast, dann ist $\delta_{A(P=1)}$ die Verschiebung, die der Punkt A infolge einer Einzelkraft von 1 t erfährt; ist P dagegen eine gleichförmig verteilte Last, dann ist $\delta_{A(P=1)}$ die Verschiebung, die der Punkt A infolge einer gleichmäßig verteilten Last von 1 t erfährt. Die Senkung, die der Punkt A durch die gegebene Last P erfährt, ist dann

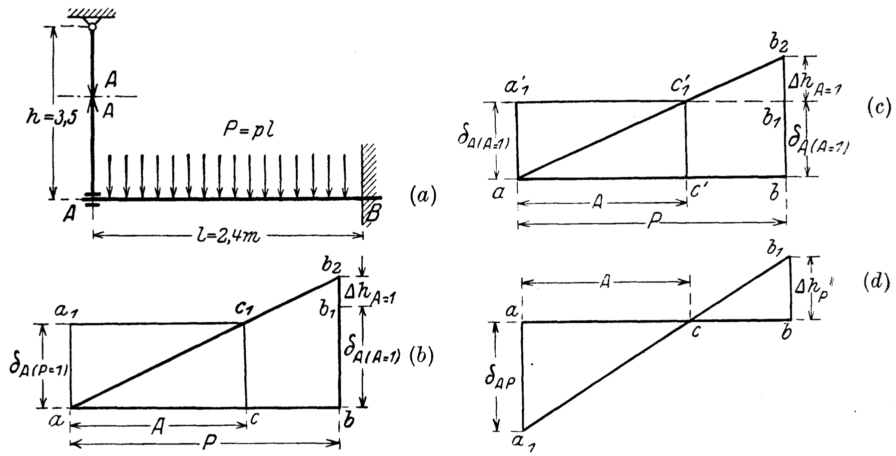


Abb. 268. Eingespannter Freiträger mit elastisch senkbarer Stütze.

$$\delta_{AP} = P \cdot \delta_{A(P=1)} .$$

Ferner sei $\delta_{A(A=1)}$ die Verschiebung des Punktes A, die durch eine Einzelkraft von 1 t hervorgerufen wird; demnach verschieben A t den Punkt A um

$$\delta_{AA} = A \cdot \delta_{A(A=1)} .$$

Endlich sei $\Delta h_{A=1}$ die Verlängerung der Stange h infolge einer Last von 1 t; also ist die Verlängerung der Stange h infolge einer Last von A t

$$\Delta h = A \cdot \Delta h_{A=1} .$$

Mit diesen Werten geht unsere Gleichung über in

$$P \cdot \delta_{A\,(P=1)} - A \cdot \delta_{A\,(A=1)} = A \cdot \Delta h_{A=1}$$

und daraus

$$A = P \cdot \frac{\delta_{A\,(P=1)}}{\delta_{A\,(A=1)} + \Delta h_{A=1}}\,.$$

Die zeichnerische Bestimmung von A zeigt Abb. 268 b. Mache die Strecke

$$ab = P, \quad aa_1 = \delta_{A(P=1)}; \quad bb_1 = \delta_{A(A=1)}; \quad b_1 b_2 = \Delta h_{A=1}$$

und verbinde a mit b_2. Gehe von a_1 wagerecht bis zur Schrägen ab_2 und lote den Schnittpunkt c_1 auf ab herunter, dann schneidet der Fußpunkt c den Betrag

$$ac = A$$

auf der Wagerechten $ab = P$ ab.

Für den Sonderfall, daß P eine Einzellast im Punkte A ist, wird

$$\delta_{A\,(P=1)} = \delta_{A\,(A=1)}\,.$$

Um den Anteil der Last P zu bestimmen, der für diesen Fall auf die Stange entfällt, ziehe man $b_1 c_1'$ (Abb. 268c) wagerecht und lote den Schnittpunkt c_1' herunter, dann ist

$$ac' = A\,.$$

Statt dessen kann man auch die Verschiebungen nach entgegengesetzten Richtungen auftragen und sie mit P multiplizieren, dann wird

$$aa_1 = P \cdot \delta_{A\,(P=1)} = \delta_{AP}\,,$$

d. h. gleich der Verschiebung, die eine Einzellast P im Punkte A hervorrufen würde, und

$$bb_1 = P \cdot \Delta h_{A=1} = \Delta h_P\,,$$

d. h. gleich der Verlängerung, die die Stange infolge der Einzellast P erfahren würde (Abb. 268d). Die Schräge $a_1 b_1$ schneidet dann $ac = A$ unmittelbar auf $ab = P$ ab.

Da die Gleichung für A elastische Formänderungen enthält, sind die Abmessungen zunächst anzunehmen. Darauf wird A aus der Elastizitätsgleichung bestimmt. Nunmehr müssen die Spannungen in den Querschnitten des angenommenen Stabes nachgerechnet werden. Ergeben sich hierbei höhere Werte als die zulässigen, so sind die Abmessungen des Stabes zu verändern und die Rechnung mit den geänderten Größen zu wiederholen. Dieses Verfahren ist unbequem, aber das einzige, das zum Ziele führt.

Zahlenbeispiel. Ein Holzbalken von 2,4 m Länge sei mit $p = 0{,}6$ t/m belastet; die 3,5 m lange Aufhängestange sei aus Stahl; als zulässige Spannungen seien gewählt

Holz:	$k_b = 100$ kg/cm²;	$E_1 = 100000$ kg/cm²,
Stahl:	$k_b = 900$ kg/cm²;	$E_2 = 2150000$ kg/cm².

Wir schreiben die allgemeine Elastizitätsgleichung in der Form

$$A = P \cdot \frac{\frac{l^3}{8 E_1 J_1}}{\frac{l^3}{3 E_1 J_1} + \frac{h}{E_2 F_2}} = \frac{P}{\frac{8}{3} + \frac{h \cdot 8 \cdot E_1 J_1}{E_2 F_2 \cdot l^3}} = \frac{P}{\frac{8}{3}\left(1 + \frac{3 E_1 J_1 \cdot h}{E_2 F_2 \cdot l^3}\right)};$$

hierin ist

$$\delta_{A(P=1)} = \frac{l^3}{8 E_1 J_1}; \quad \delta_{A(A=1)} = \frac{l^3}{3 E_1 J_1}; \quad \Delta h_{A=1} = \frac{h}{E_2 F_2}.$$

Im allgemeinen wird das zweite Glied der Klammer im Vergleich zur 1 sehr klein sein; wir erweitern deshalb den Bruch mit

$$1 - \frac{3 E_1 J_1 \cdot h}{E_2 F_2 \cdot l^3}$$

und setzen angenähert den Nenner

$$\left(1 + \frac{3 E_1 J_1 \cdot h}{E_2 F_2 \cdot l^3}\right)\left(1 - \frac{3 E_1 J_1 \cdot h}{E_2 F_2 \cdot l^3}\right) \approx 1.$$

Damit wird

$$A = \frac{3}{8} P \left(1 - \frac{3 E_1 J_1 \cdot h}{E_2 F_2 \cdot l^3}\right).$$

Die Gleichung läßt deutlich die Abnahme von A im Vergleich zu einer starren Stütze erkennen. Für unser Zahlenbeispiel erhalten wir

$$A = \frac{3}{8} P \left(1 - \frac{3 \cdot 100\,000 \cdot 4096 \cdot 350}{2\,150\,000 \cdot 0{,}64 \cdot 13\,820\,000}\right).$$

Dabei sind als Konstruktionsmaße angenommen:

Balken: $12 \cdot 16$ cm mit $W_1 = 512\ \text{cm}^3$ und $J_1 = 4096\ \text{cm}^4$;
Stange: $d = 9$ mm mit $F_2 = 0{,}64\ \text{cm}^2$;

demnach

$$A = \frac{3}{8} P \cdot 0{,}976 = \frac{3 \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}4}{8} \cdot 0{,}976 = 0{,}53\ \text{t}.$$

Das Ergebnis weicht so wenig von dem eines Trägers mit starrer Stütze ab, daß man den ersten Entwurf ruhig als Balken mit starrer Stütze durchrechnen darf. Als Einspannmoment erhält man

$$M_B = A \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0{,}53 \cdot 2{,}4 - 0{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot \frac{2{,}4}{2} = -0{,}456\ \text{mt};$$

die größte Biegungsspannung wird

$$\sigma_{\max} = \frac{45\,600}{512} = \approx 90\ \text{kg/cm}^2.$$

In der Stange wird die größte Zugspannung

$$\sigma_{\max} = \frac{530}{0{,}64} = 830\ \text{kg/cm}^2.$$

Beide Stäbe seien aus S t a h l. Für den ersten Entwurf rechnen wir mit einer starren Stütze und erhalten nach S. 347

$$A = \frac{3}{8} P, \text{ folglich } M_B = \frac{3}{8} P l - P \cdot \frac{l}{2} = -P \cdot \frac{l}{8} = -0{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot \frac{2{,}4}{8} = -0{,}432\ \text{mt}.$$

Das erforderliche Widerstandsmoment bei $k_b = 900\ \text{kg/cm}^2$ ist

$$W_{\text{erf}} = \frac{43\,200}{900} = 48\ \text{cm}^3,$$

dem ein I-Eisen NP 12 mit $W_x = 54{,}7\ \mathrm{cm}^3$ und $J_x = 328\ \mathrm{cm}^4$ entspricht. Der Durchmesser der Stange folgt aus

$$F_{\text{erf}} = \frac{A}{k_z} = \frac{3 \cdot P}{8 \cdot k_z} = \frac{3 \cdot 0{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot 1000}{8 \cdot 900} = 0{,}6\ \mathrm{cm}^2 \quad \text{zu} \quad d = 9\ \mathrm{mm}.$$

Infolge gleicher Dehnmaße E vereinfacht sich die strenge Gleichung für A; es wird

$$A = \frac{3}{8} P \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 J_1 \cdot h}{F_2 \cdot l^3}},$$

$$= \frac{3}{8} P \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot 328 \cdot 350}{0{,}64 \cdot 13824000}} = \frac{3}{8} P \cdot \frac{1}{1 + 0{,}039} = \frac{3}{8} P \cdot 0{,}962\,.$$

Die angenäherte Berechnung ergibt den wenig abweichenden Wert

$$A = \frac{3}{8} P \left(1 - \frac{3 \cdot 328 \cdot 260}{0{,}64 \cdot 13824000}\right) = \frac{3}{8} P \cdot 0{,}961\,.$$

Der Vorentwurf darf als endgültiger angesehen werden.

Der Träger auf drei Stützen mit elastisch senkbarer Mittelstütze (Abb. 269). Die Grundgleichung ist die gleiche wie Seite 309:

$$\delta_{CP} - \delta_{CC} = \Delta h_C\,.$$

Wir setzen wieder

$$\delta_{CP} = P \cdot \delta_{C(P=1)};$$
$$\delta_{CC} = C \cdot \delta_{C(C=1)};$$
$$\Delta h_C = C \cdot \Delta h_{C=1},$$

wobei $\delta_{C(P=1)}$ die Verschiebung des Punktes C bedeutet, die er unter dem Einfluß einer Kraft von 1 t erfährt, die der gegebenen Last P verhältnisgleich ist. Dann ist

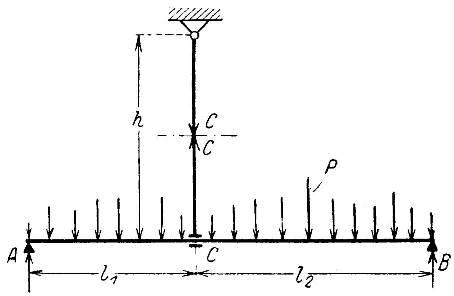


Abb. 269. Träger auf drei Stützen mit elastisch senkbarer Mittelstütze.

$$P \cdot \delta_{C(P=1)} = C \cdot [\Delta h_{C=1} + \delta_{C(C=1)}]\,,$$

$$C = P \cdot \frac{\delta_{C(P=1)}}{\delta_{C(C=1)} + \Delta h_{C=1}}\,.$$

Damit ist die zeichnerische Bestimmung von C nach Abb. 270a gegeben, die aus der Beziehung

$$ac : ab = cc_1 : bb_2$$
$$C : P = \delta_{C(P=1)} : [\delta_{C(C=1)} + \Delta h_{C=1}]$$

folgt.

Sonderfälle: 1. P sei eine Einzelkraft im Punkte C; dann wird

$$\delta_{C(P=1)} = \delta_{C(C=1)}\,;$$

die zeichnerische Bestimmung von C vereinfacht sich insofern, als wir jetzt

$$\delta_{C(P=1)} \text{ und } \Delta h_{C=1} \quad \text{oder} \quad P \cdot \delta_{C(P=1)} \text{ und } P \cdot \Delta h_{C=1}$$

nach entgegengesetzten Richtungen auftragen können (Abb. 270b). Es sind aber

$$P \cdot \delta_{C(P=1)} = \delta_{CP} \quad \text{und} \quad P \cdot \varDelta h_{C=1} = \varDelta h_P$$

die Formänderungen, die Balken und Zugstange erleiden würden, wenn jedes die ganze gegebene Last P tragen müßte. Für diesen Sonderfall hat Baumann die zeichnerische Lösung in der Z. V. d. I. 1913, S. 1911 gegeben.

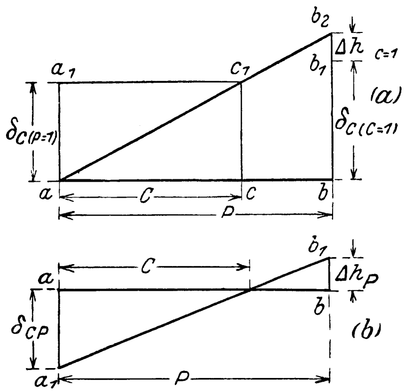


Abb. 270. Bestimmung von C.

2. P sei eine gleichmäßig verteilte Last bei gleichen Öffnungen (Abb. 271). Um einen Anhaltspunkt für die Bemessung der Querschnitte zu haben, nehmen wir zunächst eine starre Mittelstütze an, die nach S. 311 ein Stützmoment

$$M_C = -\frac{1}{16} Pl = -\frac{1}{16} \cdot 6 \cdot 4 = -1{,}5\,\text{mt}$$

hervorruft, das bei $k_b = 1200\,\text{kg/cm}^2$ ein Widerstandsmoment

$$W \geqq \frac{150\,000}{1200} = 125\,\text{cm}^3$$

erfordert, dem ein I-Eisen NP 21 mit $W_x = 138\,\text{cm}^2$ und $J_1 = J_x = 2563\,\text{cm}^4$ entspricht. Auf die Zugstange entfällt eine Spannkraft

$$C = \frac{5}{8} P = \frac{5}{8} \cdot 6000 = 3750\,\text{kg}\,,$$

die einen Querschnitt

$$F_2 \geqq \frac{3750}{1200} = 3{,}12\,\text{cm}^2$$

erfordert, dem ein Durchmesser $d = 20$ mm bei $F_2 = 3{,}14\,\text{cm}^2$ entspricht.

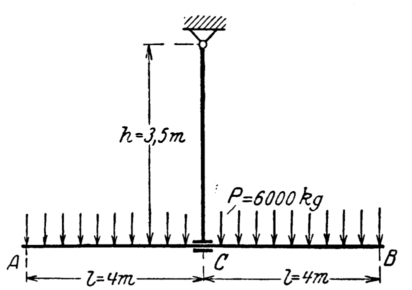


Abb. 271. Gleichmäßig verteilte Last bei gleichen Öffnungen.

Die strenge Rechnung ergibt für

$$C = P \cdot \frac{\delta_{C(P=1)}}{\delta_{C(C=1)} + \varDelta h_{C=1}}$$

mit

$$\delta_{C(P=1)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(2l)^3}{EJ_1}\,,$$

$$\delta_{C(C=1)} = \frac{1}{48} \cdot \frac{(2l)^3}{EJ_1}\,,$$

$$\varDelta h_{C=1} = \frac{h}{EF_2}\,.$$

$$C = P \cdot \frac{\frac{5}{48} \cdot \frac{l^3}{EJ_1}}{\frac{l^3}{6EJ_1} + \frac{h}{EF_2}} = \frac{5}{8} P \cdot \frac{1}{1 + \frac{6\,h\,J_1}{F_2\,l^3}},$$

$$C = \frac{5}{8} P \cdot \frac{1}{1 + \frac{6 \cdot 350 \cdot 2563}{3{,}14 \cdot 400^3}} = \frac{5}{8} \cdot P \cdot \frac{1}{1 + 0{,}0268} = 0{,}974 \cdot \frac{5}{8} P,$$

$$C = 0{,}974 \cdot \frac{5}{8} \cdot 6000 = 3650\,\text{kg}.$$

Der Einfluß des zweiten Nennergliedes ist wieder so gering, daß wir unbedenklich

$$C = \approx \frac{5}{8} P \cdot \left(1 - \frac{6hJ_1}{F_2 l^3}\right) = 0{,}973 \cdot \frac{5}{8} P$$

hätten setzen können.

Als endgültiges Stützmoment erhalten wir

$$M_C = -\frac{Pl}{4} + A \cdot l = \frac{Pl}{4} - C \cdot \frac{l}{2},$$

$$M_C = \frac{Pl}{4} - \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} P \cdot \frac{1}{1 + \frac{6\,h\,J_1}{F_2\,l^3}} = \frac{Pl}{16}\left[4 - \frac{5}{1 + \frac{6\,h\,J_1}{F_2\,l^3}}\right]$$

$$\approx \frac{Pl}{16}\left[4 - 5\left(1 - \frac{6\,h\,J_1}{F_2\,l^3}\right)\right] = -\frac{Pl}{16}\left(1 - 30\,\frac{hJ_1}{F_2\,l^3}\right),$$

$$M_C = -\frac{Pl}{16}(1 - 5 \cdot 0{,}0268) = -0{,}866 \cdot \frac{Pl}{16}.$$

Wir sehen, daß die Größe des Stützmomentes um rund 13% abnimmt; es ist zahlenmäßig

$$M_C = -0{,}866\,\frac{6000 \cdot 400}{16} = -130000\,\text{cmkg},$$

dem ein I-Eisen NP 20 mit $W_x = 117\,\text{cm}^3$ und $J_1 = J_x = 2142\,\text{cm}^4$ entsprechen würde; die Zugstange kann bleiben.

Mit diesem neuen Profil ist die Rechnung zu wiederholen. Wir benutzen die bereits umgeformte Gleichung

$$C = \frac{5}{8} P \cdot \frac{1}{1 + \frac{6hJ_1}{F_2 l^3}} = \approx \frac{5}{8} P \cdot \left(1 - \frac{6\,h\,J_1}{F_2\,l^3}\right)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot 6000\left(1 - \frac{6 \cdot 350 \cdot 2142}{3{,}14 \cdot 64000000}\right) = 0{,}978 \cdot \frac{5}{8} \cdot 6000 = 3670\,\text{kg}.$$

$$M_C = -\frac{Pl}{16}(1 - 5 \cdot 0{,}0224) = -0{,}888 \cdot \frac{Pl}{16}$$

$$= -0{,}888 \cdot \frac{6000 \cdot 400}{16} = -133200\,\text{cmkg}.$$

Das Stützmoment ist größer als beim ersten Entwurf, das Profil reicht aber aus, da die größte Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{133200}{117} = 1140\,\text{kg/cm}^2$$

wird.

Die günstigste Ausnutzung dieses Trägers wird dann vorhanden sein, wenn das negative Stützmoment gleich dem größten positiven Moment zwischen den Stützen ist. Da das Stützmoment durch eine Senkung der Mittelstütze verringert wird, muß die Senkung ermittelt werden, bei der beide Momente gleich groß sind. Die allgemeine Elastizitätsgleichung

$$\delta_{CP} - \delta_{C(C=1)} \cdot C = \varDelta$$

liefert

$$C = \frac{\delta_{CP}}{\delta_{C(C=1)}} - \frac{\varDelta}{\delta_{C(C=1)}} = \frac{5}{8} P - \frac{\varDelta}{\delta_{C(C=1)}} .$$

Der einfacheren Schreibweise sei $\delta_{C(C=1)} = \delta$ gesetzt, dann ist

$$A = \frac{1}{2}(P - C) = \frac{3}{16} P + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta}$$

und damit

$$M_C = A \cdot l - \frac{Pl}{4} = -\frac{Pl}{16} + \frac{l}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta} .$$

Andrerseits ist M im Abstande x von A

$$M = A \cdot x - \frac{P}{2l} \cdot \frac{x^2}{2} = \left(\frac{3}{16} P + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta}\right) x - \frac{P}{4l} \cdot x^2.$$

Um den Ort des größten Biegungsmomentes zu finden, setzen wir den ersten Differentialquotienten gleich Null, d. h.

$$\frac{dM}{dx} = \frac{3}{16} P + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta} - \frac{P}{2l} \cdot x = 0 ;$$

es ist also

$$x = \frac{3}{8} l + \frac{l}{P} \cdot \frac{\varDelta}{\delta} .$$

Als maximales Biegungsmoment ergibt sich für diesen Wert von x

$$M_{\max} = \left(\frac{3}{16} P + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta}\right) \cdot \left(\frac{3}{8} l + \frac{\varDelta}{\delta} \cdot \frac{l}{P}\right) - \frac{P}{4l}\left(\frac{3}{8} l + \frac{\varDelta}{\delta} \cdot \frac{l}{P}\right)^2 .$$

Die Bedingung

$$-M_C = M_{\max}$$

liefert

$$\frac{Pl}{16} - \frac{l}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta} = \left(\frac{3}{16} P + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varDelta}{\delta}\right)\left(\frac{3}{8} l + \frac{\varDelta}{\delta} \cdot \frac{l}{P}\right) - \frac{P}{4l}\left(\frac{3}{8} l + \frac{\varDelta}{\delta} \cdot \frac{l}{P}\right)^2$$

oder nach dem Auflösen der Klammern

$$\frac{l}{4P} \cdot \left(\frac{\varDelta}{\delta}\right)^2 + \frac{\varDelta}{\delta}\left(\frac{3}{16} l + \frac{8}{16} l\right) + \frac{Pl}{256}(18 - 9 - 16) = 0,$$

$$\left(\frac{\varDelta}{\delta}\right)^2 + \frac{11}{4} P \cdot \frac{\varDelta}{\delta} - \frac{7}{64} P^2 = 0 ,$$

$$\frac{\varDelta}{\delta} = -\frac{11}{8} P \pm \frac{P}{8} \cdot \sqrt{121 + 7} = 0{,}0392\, P ,$$

also

$$\varDelta = 0{,}0392\, P \cdot \delta .$$

Nun war aber

$$\delta = \delta_{C(C=1)} = \frac{(2\,l)^3}{48 EJ} \quad \text{und} \quad P = p \cdot 2\,l\,,$$

demnach wird

$$\Delta = 0{,}0392 \cdot \frac{p\,2\,l \cdot l^3}{6\,EJ} = 0{,}0131\,\frac{p\,l^4}{EJ}\,.$$

Als Stützmoment erhalten wir

$$M_C = -\frac{Pl}{16} + \frac{l}{2} \cdot \frac{\Delta}{\delta} = -\frac{Pl}{16} + \frac{l}{2} \cdot 0{,}0392\,P = -0{,}0429\,Pl\,.$$

Die Auflagerdrucke der Außenstützen werden

$$A = B = \frac{3}{16}P - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta}{\delta} = 0{,}2071\,P.$$

3. Die elastisch senkbare Mittelstütze sei ein Unterzug. Die Anordnung entspreche der Abb. 272. Bezeichnet man mit δ'_{CC} die Senkung des Punktes C des Unterzuges A_2B_2 infolge des Stützdruckes C, so lautet die allgemeine Elastizitätsgleichung mit den üblichen Bezeichnungen:

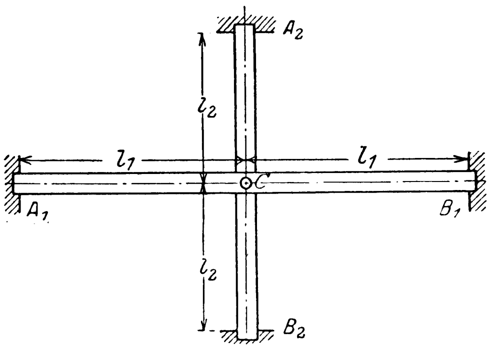


Abb. 272. Unterzug.

$$\delta_{CP} - \delta_{CC} = \delta'_{CC}\,,$$

die mit $\delta_{CP} = P \cdot \delta_{C(P=1)}$; $\delta_{CC} = C \cdot \delta_{C(C=1)}$ und $\delta'_{CC} = C \cdot \delta'_{C(C=1)}$ in

$$P \cdot \delta_{C(P=1)} = C\left[\delta_{C(C=1)} + \delta'_{C(C=1)}\right]$$

übergeht. Daraus erhält man

$$C = P \cdot \frac{\delta_{C(P=1)}}{\delta_{C(C=1)} - \delta'_{C(C=1)}}\,.$$

Die zeichnerische Darstellung des Anteiles der Last P, der auf den Unterzug entfällt, entspricht der Abbild. 270a, nur ist die Verlängerung der Zugstange durch die Senkung $\delta'_{C(C=1)}$ zu ersetzen (Abb. 273).

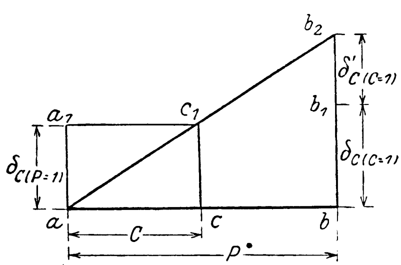


Abb. 273. Bestimmung von C.

Infolge einer gleichmäßig verteilten Last P ist

$$\delta_{C(P=1)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(2l_1)^3}{E_1J_1}\,, \qquad \delta_{C(C=1)} = \frac{1}{48} \cdot \frac{(2l_1)^3}{E_1J_1}\,, \qquad \delta'_{C(C=1)} = \frac{1}{48} \cdot \frac{(2l_2)^3}{E_2J_2}$$

Damit wird

$$C = \frac{5}{8}P \cdot \frac{\dfrac{l_1^3}{E_1J_1}}{\dfrac{l_1^3}{E_1J_1} + \dfrac{l_2^3}{E_2J_2}} = \frac{5}{8}P \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^3 \cdot \dfrac{E_1J_1}{E_2J_2}}\,.$$

Für den Sonderfall gleicher Baustoffe, gleicher Längen und gleicher Quer schnitte wird

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} P.$$

Ist P eine Einzellast im Punkte C, so ist

$$\delta_{C(C=1)} = \delta_{C(P=1)} = \frac{1}{48} \cdot \frac{(2l_1)^3}{E_1 J_1}$$

und damit

$$C = P \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \cdot \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}},$$

das für den Sonderfall gleicher Längen, gleicher Querschnitte und gleicher Baustoffe zu

$$C = \frac{1}{2} P$$

wird.

7. Die dreifach gelagerte Welle.

Die dreifach gelagerte Welle ist ein Träger auf drei Stützen und kann daher nach dem auf Seite 307 entwickelten Verfahren behandelt werden.

Abb. 274 gibt ein Beispiel, wobei der Durchmesser der Welle unveränderlich ist. In diesem Falle empfiehlt es sich, den Auflagerdruck C des mittleren Lagers rechnerisch zu ermitteln. Da die Bezeichnungen mit Abb. 239 übereinstimmen, kann man die auf Seite 314 gewonnene Beziehung benutzen und erhält:

$$\begin{aligned} C = {} & \frac{1}{2}\left[P_1 \frac{a_1^2 b_1^2}{l_1^2 l_2^2}\left(2\frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 b_1^2}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[P_1' \frac{a_1'^2 b_1'^2}{l_1^2 l_2^2}\left(2\frac{l_2}{b_1'} + \frac{l_2}{a_1'} - \frac{l_2^3}{a_1' b_1'^2}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[P_2 \frac{a_2^2 b_2^2}{l_1^2 l_2^2}\left(2\frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Mit den Werten der Abb. 274a wird

$$\begin{aligned} C = {} & \frac{1}{2}\left[\,345{,}44\,(0{,}8718 + 1{,}3600 - 0{,}2584)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[1835{,}7\;(1{,}0968 + 0{,}8293 - 0{,}2494)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[8233{,}4\;(1{,}6046 + 4{,}0588 - 2{,}6128)\right] \\ = {} & 14\,474 \text{ kg}. \end{aligned} \tag{1}$$

Zur Berechnung der Auflagerdrucke A und B benutzen wir die statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$\sum V = 0$ liefert

$$A + B + C = P_1 + P_1' + P_2 = 1600 + 500 + 21\,200 = 23\,300, \tag{2}$$

$\sum M = 0$ für C als Drehpunkt

$$A \cdot 138 - 500 \cdot 88 - 1600 \cdot 56 + 21200 \cdot 34 - B \cdot 68 = 0$$

oder

$$68\,B - 138\,A = 587200$$

$$B - 2{,}0294\,A = 8635{,}4. \qquad (3)$$

Aus $A + B + C = 23300$ folgt mit dem gefundenen Werte C

$$B + A = 23300 - 14474 = 8826. \qquad (4)$$

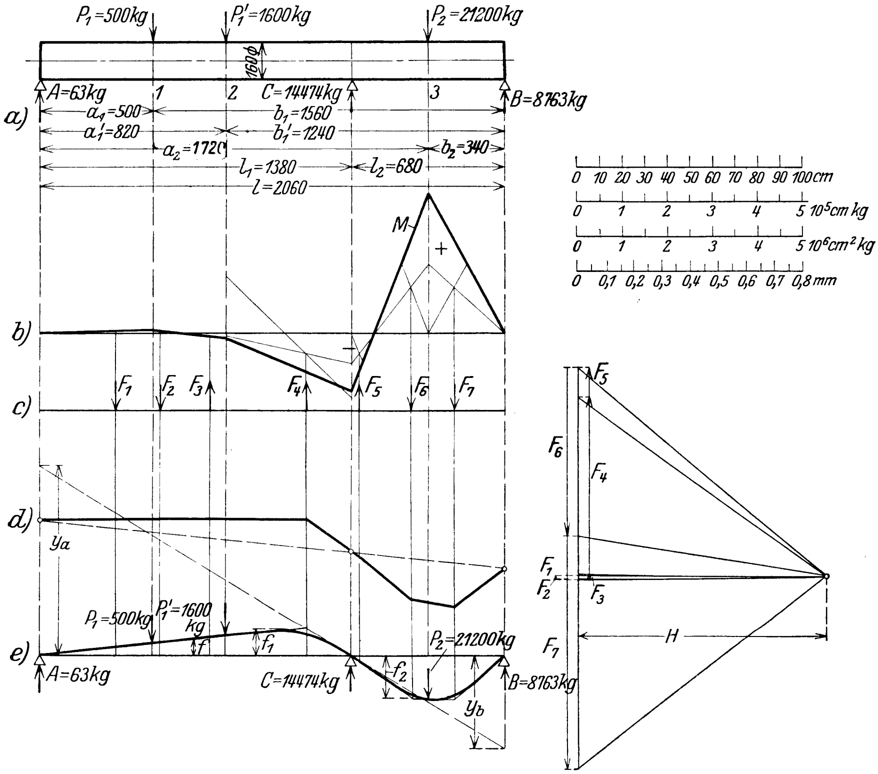


Abb. 274. Dreifach gelagerte Welle.

Zieht man (3) von (4) ab, so wird

$$3{,}0294\,A = 190{,}6 \quad \text{oder} \quad A = 63 \text{ kg}, \qquad (5)$$

und daher

$$B = 8826 - A = 8826 - 63 = 8763 \text{ kg}. \qquad (6)$$

Da die Auflagerdrucke berechnet sind, läßt sich nunmehr die Momentenfläche des Trägers zeichnen (Abb. 274b).

Es ist

$$M_1 = 63 \cdot 50 = 3150 \text{ cmkg};$$

$$M_2 = 63 \cdot 82 - 500 \cdot 32 = -10834 \text{ cmkg};$$

$$M_C = 8763 \cdot 68 - 34 \cdot 21200 = -124916 \text{ cmkg};$$

$$M_3 = 8763 \cdot 34 = 297942 \text{ cmkg}.$$

Der gewählte Maßstab ist in der Abbildung angegeben. In der Originalzeichnung entsprechen 2 cm 100000 cmkg.

Um die elastische Linie des Trägers zu ermitteln, wird nach dem Verfahren von Mohr die Momentenfläche als Belastungsfläche aufgefaßt. Die Teilflächen sind Dreiecke und Trapeze und haben folgenden Inhalt:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{50}{2}\cdot 3150 &&= + \quad 78\,750 \text{ cm}^2\text{kg}\\
F_2 &= \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3150 &&= + \quad 14175 \quad ,,\\
F_3 &= -\frac{1}{2}\cdot 23\cdot 10834 &&= - \quad 124600 \quad ,,\\
F_4 &= -\frac{1}{2}(10834 + 124916)\,56 &&= -3821\,000 \quad ,,\\
F_5 &= -\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 124916 &&= - \quad 624600 \quad ,,\\
F_6 &= \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 297\,942 &&= \quad 3\,575000 \quad ,,\\
F_7 &= \frac{1}{2}\cdot 34\cdot 297942 &&= \quad 5\,065\,000 \quad ,, \quad .
\end{aligned}
$$

Die Wirkungslinien der Kräfte F greifen im Schwerpunkt der Flächen an (Abb. 274b und 274c). Als Maßstab wurde 2 cm $= 10^6$ cm²kg gewählt.

Mit $H = 11$ cm wurde das Seileck gezeichnet (Abb. 274d) und die Schlußlinie wagerecht gelegt (Abb. 274e).

Bezeichnet man mit $z$cm die Ordinaten der Kurve e, so wird die Durchbiegung

$$
f\text{cm} = \frac{1}{E\cdot J}\cdot H\cdot z = \frac{1}{2100000\cdot 3277}\left(\frac{11\text{ cm}\cdot 10^6\text{ cm}^2\text{kg}}{2\text{cm}}\right)\cdot\left(\frac{z\text{cm}\cdot 10\text{ cm}}{\text{cm}}\right)
$$
$$
= 0{,}008\, z_{\text{cm}},
$$

da der Längenmaßstab 1 cm $=$ 10 cm beträgt.

Dementsprechend wurde der letzte Maßstab der Abb. 274 entworfen, welcher die Durchbiegungen f in mm angibt.

Zwischen den Auflagern A und B ergibt sich als größte Durchbiegung

$$f_1 = 0{,}093 \text{ mm}.$$

Die größte Durchbiegung zwischen B und C beträgt

$$f_2 = 0{,}152 \text{ mm}.$$

Es soll noch gezeigt werden, in wie anschaulicher Weise Ensslin[1]) die Auflagerdrucke ermittelt.

Er geht von den folgenden einfachen Belastungsfällen aus:

---

[1]) Ensslin, Max, Dr.Ing.: Mehrmals gelagerte Kurbelwellen. S.15ff. Stuttgart: Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung. A. Kröner 1902.

1. Ein Träger der Länge l wird durch eine Einzelkraft P am Ende belastet. Nach Seite 148 ist die größte Durchbiegung $f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}$, die Neigung der elastischen Linie im Angriffspunkt von P

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{2}$$

(Abb. 275a).

2. Der Träger habe die Länge $l + l_1$ und sei wieder in der Entfernung l vom Auflager durch eine Einzelkraft P belastet. Aus der Abb. 275b kann man die größte Durchbiegung ablesen. Es ist

$$f' = f + l_1 \operatorname{tg}\beta$$
$$= \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} + \frac{P}{EJ}\frac{l^2 l_1}{2} = \frac{Pl^2}{EJ}\left(\frac{l}{3} + \frac{l_1}{2}\right).$$

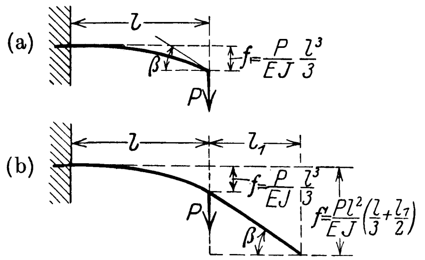


Abb. 275. Freiträger mit Einzellast.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man die Auflagerdrucke folgendermaßen ermitteln.

Man denkt sich (Abb. 274e) die Welle im mittleren Lager C eingespannt und berechnet die Durchbiegungen y_a und y_b der Einspannungstangente.

Die Durchbiegung y_a wird durch die Kräfte $P_1 = 500$ kg, $P_1' = 1600$ kg und durch A hervorgerufen.

Es ist

$$y_P = \frac{500 \cdot 88^2}{EJ}\left(\frac{88}{3} + \frac{50}{2}\right),$$

weil $l = 88$, $l_1 = 50$, $P = 500$ ist;

$$y_{P'} = \frac{1600 \cdot 56^2}{EJ}\left(\frac{56}{3} + \frac{82}{2}\right)$$

mit $P = 1600$, $l = 56$ und $l_1 = 82$; ferner

$$y_A = \frac{A}{EJ} \cdot \frac{138^3}{3}.$$

Wir wollen nun den Durchbiegungen stets ein solches Vorzeichen geben, daß y_a und y_b positiv werden. Es ist dann

$$y_a = y_P + y_{P'} - y_A = \frac{500 \cdot 88^2}{EJ}\left(\frac{88}{3} + \frac{50}{2}\right) + \frac{1600 \cdot 56^2}{EJ}\left(\frac{56}{3} + \frac{82}{2}\right) - \frac{A}{EJ} \cdot \frac{138^3}{3}.$$

Die Durchbiegung y_b der Einspannungstangente wird durch die Kräfte $P_2 = 21\,200$ kg und durch B hervorgerufen.

Es ist

$$y_P = \frac{21\,200 \cdot 34^2}{EJ}\left(\frac{34}{3} + \frac{34}{2}\right)$$

mit $P = 21\,200$, $l = 34$, $l_1 = 34$; ferner

$$y_B = \frac{B}{EJ}\frac{68^3}{3}.$$

Folglich ist

$$y_b = y_B - y_P = \frac{B}{EJ}\frac{68^3}{3} - \frac{21200 \cdot 34^2}{E \cdot J}\left(\frac{34}{3} + \frac{34}{2}\right).$$

Nun verhält sich aber

$$y_a : y_b = 138 : 68,$$

mithin ist

$$68\, y_a = 138\, y_b.$$

Setzt man die für y_a und y_b gefundenen Werte ein, so wird nach Multiplikation mit EJ

$$68 \cdot 500 \cdot 88^2\left(\frac{88}{3} + \frac{50}{2}\right) + 68 \cdot 1600 \cdot 56^2\left(\frac{56}{3} + \frac{82}{2}\right) - \frac{68 \cdot 138^3}{3} A$$

$$= \frac{138 \cdot 68^3}{3} B - 138 \cdot 21200 \cdot 34^2\left(\frac{34}{3} + \frac{34}{2}\right).$$

Führt man die Rechnung durch und dividiert durch $\frac{138 \cdot 68^3}{3}$, so wird

$$B + 4{,}1185\, A = 9021{,}7.$$

Nach (3) ist

$$B - 2{,}0294\, A = 8635{,}4.$$

Durch Subtraktion folgt

$$6{,}1479\, A = 386{,}3$$

oder

$$A = \frac{386{,}3}{6{,}1479} = 63 \text{ kg}.$$

Nach (3) und (2) wird

$$B = 2{,}0294 \cdot 63 + 8635{,}4 = 8763 \text{ kg},$$

$$C = 23300 - 63 - 8763 = 14474 \text{ kg}$$

in Übereinstimmung mit den auf S. 362 und 363 gefundenen Werten.

Die betrachtete Welle soll jetzt veränderlichen Querschnitt haben (Abb. 276)[1]).

Hier empfiehlt es sich, die Auflagerdrucke zeichnerisch zu ermitteln. Wie vorher denkt man sich zunächst das mittlere Lager C entfernt und die Welle mit den Kräften P belastet. Es wird dann die Biegungslinie nach dem Verfahren von Mohr ermittelt. Die Senkung des Punktes C infolge der Lasten P sei δ_P.

Nunmehr bringt man die Last C' auf den Träger (Abb. 276f) und entwirft in gleicher Weise die Biegungslinie. Die Durchbiegung des Punktes C infolge C' sei $\delta_{C'}$. Der wirkliche Auflagerdruck C ruft dann, allein wirkend, die Durchbiegung $\frac{C}{C'}\delta_C$ hervor.

Da nun die Kraft C die durch die Kräfte P hervorgerufenen Durchbiegung δ_P aufheben muß, so ergibt sich

$$\delta_P = \frac{C}{C'}\delta_{C'} \quad \text{oder} \quad C = C' \cdot \frac{\delta_P}{\delta_{C'}}.$$

[1]) Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau. 1. Bd. S. 669. Berlin: Julius Springer 1924.

Man hat dann die Ordinaten der durch C' hervorgerufenen Biegungslinie im Verhältnis $\frac{C}{C'}$ zu reduzieren und zu den Ordinaten der durch P

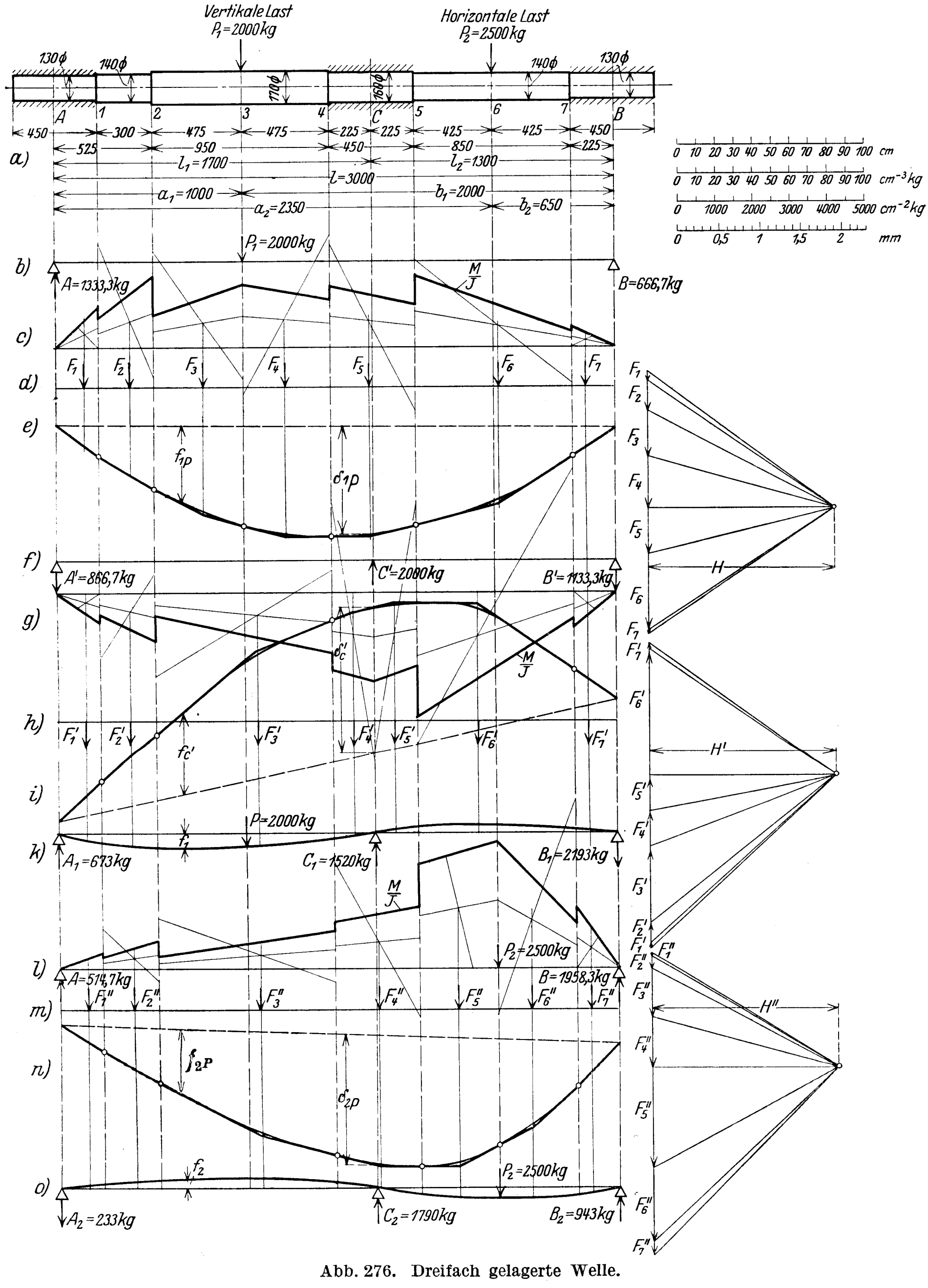


Abb. 276. Dreifach gelagerte Welle.

hervorgerufenen Biegungslinie zu addieren. Man erhält so die gesuchte elastische Linie der zu untersuchenden Welle.

In Abb. 276 wirkt die Kraft P_1 vertikal, die Kraft P_2 horizontal. Man denkt sich zunächst nur die Kraft P_1 wirkend und berechnet die vertikale Durchbiegung f_1 der Welle.

Nach Entfernen des mittleren Lagers ergibt sich der in Abb. 276b gezeichnete Belastungsfall. Die Auflagerdrucke sind

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1}{l} = \frac{2000 \cdot 200}{300} = 1\,333{,}3\ \text{kg},$$

$$B = \frac{P_1 \cdot a_1}{l} = \frac{2000 \cdot 100}{300} = \quad 666{,}7\ \text{kg}.$$

Abb. 276c gibt die $\frac{M}{J}$-Fläche des Trägers. Die Werte sind der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen.

Stelle	Durchmesser in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	13	1402	$1333{,}3 \cdot 22{,}5 = 300000$	21,35
1 2	14	1886	300000 $1333{,}3 \cdot 52{,}5 = 70000$	15,90 37,1
2 3 4	17	4100	70000 $1333{,}3 \cdot 100 = 133333$ $666{,}7 \cdot 152{,}5 = 101700$	17,05 32,5 24,8
4 C 5	16	3217	101700 $666{,}7 \cdot 130 = 86800$ $666{,}7 \cdot 107{,}5 = 71800$	31,6 26,7 22,3
5 6 7	14	1886	71800 $666{,}7 \cdot 65 = 42600$ $666{,}7 \cdot 22{,}5 = 14750$	38,0 22,6 7,82
7	13	1402	14750	10,51

Als Maßstab wurde 1 cm = 10 kg/cm³ gewählt.

Die $\frac{M}{J}$-Fläche setzt sich aus sieben Teilflächen zusammen, deren Schwerpunkte ermittelt wurden.

Es ist
$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5 \cdot 21{,}35 \qquad = 252{,}5\ \text{kg/cm}^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (15{,}90 + 37{,}05) = 795 \quad ,,$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 47{,}5 \cdot (17{,}05 + 32{,}50) = 1177 \quad ,,$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot 47{,}5\ (32{,}5 + 24{,}8) \qquad = 1360 \quad ,,$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot (31{,}6 + 22{,}3) \qquad = 1212 \quad ,,$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot 85\ (38{,}0 + 7{,}82) \qquad = 1945 \quad ,,$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5 \cdot 10{,}51 \qquad = 118{,}5 \quad ,, \ .$$

Mit diesen Flächen wurde der Träger belastet (Abb. 276d) und mit $H = 10$ cm das zugehörige Seileck entworfen (Abb. 276e). Als Maßstab wurde 1 cm = 500 kg/cm² gewählt.

Beträgt die Ordinate der Seilkurve z cm, so ist die wirkliche Durchbiegung

$$f = \frac{1}{E} \cdot H \cdot z = \frac{1}{2\,200\,000} \left(10 \text{ cm} \cdot \frac{500 \text{ cm}^{-2}\text{kg}}{\text{cm}}\right) \cdot \left(z\text{cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{\text{cm}}\right) = 0{,}0227\, z_{\text{cm}},$$

da der Längenmaßstab 1 cm = 10 cm gewählt wurde.

Hiernach wurde der Maßstab gezeichnet, in dem die Durchbiegungen f_{1P} der Abb. 276e zu messen sind. Die Durchbiegung im Punkte C ist

$$\delta_{1P} = 1{,}293 \text{ mm}.$$

Es wurde jetzt die Last $C' = 2000$ kg auf den Träger gebracht (Abb. 276f). Die Auflagerdrucke sind

$$A' = 2000 \cdot \frac{130}{300} = 866{,}7 \text{ kg}, \quad B' = 2000 \cdot \frac{170}{300} = 1133{,}3 \text{ kg}.$$

Die Werte $\frac{M}{J}$ sind der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen.

Stelle	Durchmesser in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	13	1402	866,7 · 22,5 = 19500	13,88
1	14	1886	19500	10,33
2			866,7 · 52,5 = 45500	24,10
2	17	4100	45500	11,1
3			866,7 · 100 = 86667	21,1
4			866,7 · 147,5 = 128000	31,2
4	16	3217	128000	39,8
C			1133,3 · 130 = 147200	45,9
5			1133,3 · 107,5 = 121800	37,9
5	14	1886	121800	64,5
6			1133,3 · 65 = 73600	39,0
7			1133,3 · 22,5 = 25500	13,52
7	13	1402	25500	18,15

Mit dem gewählten Maßstab kann hiernach die Abb. 276g gezeichnet werden.

Die Inhalte der Belastungsflächen sind:

$$F_1' = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5 \cdot 13{,}88 = 156 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_2' = \frac{1}{2} \cdot 30\,(10{,}33 + 24{,}10) = 517{,}5 \quad ,,$$

$$F_3' = \frac{1}{2} \cdot 95\,(11{,}1 + 31{,}2) = 2000 \quad ,,$$

$$F_4' = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5\,(39{,}8 + 45{,}9) = 965 \quad ,,$$

$$F_5' = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5\,(45{,}9 + 37{,}9) = 945 \quad ,,$$

$$F_6' = \frac{1}{2} \cdot 85\,(64{,}5 + 13{,}52) = 3320 \quad ,,$$

$$F_7' = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5 \cdot 18{,}15 = 208{,}5 \quad ,,$$

Die Belastung ist in Abb. 276h angegeben, die elastische Linie in Abb. 276i gezeichnet. Die Durchbiegung im Punkte C ist

$$\delta_{C'} = 1{,}70\,\mathrm{mm}\,.$$

Folglich beträgt der wahre Auflagerdruck

$$C_1 = C' \cdot \frac{\delta_{1P}}{\delta_{C'}} = 2000 \cdot \frac{1{,}293}{1{,}70} = 1520\,\mathrm{kg}.$$

Die Ordinaten $f_{C'}$ sind mit $\frac{1{,}293}{1{,}70} = 0{,}760$ zu multiplizieren und zu den Werten f_{1P} hinzuzufügen. Es entsteht so die Abb. 276k, worin f_1 die wahre vertikale Durchbiegung der Welle bedeutet.

Es wird nunmehr die Kraft P_2 auf den Träger gebracht und die horizontale Durchbiegung der Welle untersucht (Abb. 276 l).

Die Auflagerdrucke sind

$$A = 2500 \cdot \frac{65}{300} = 514{,}7\,\mathrm{kg}; \qquad B = 2500 \cdot \frac{235}{300} = 1958{,}3\,\mathrm{kg}\,.$$

Die nachstehende Tabelle gibt die aufzutragenden Werte $\frac{M}{J}$ an (Abb. 276 l).

Stelle	Durchmesser in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	13	1402	541,7 · 22,5 = 12200	8,69
1 2	14	1886	12200 541,7 · 52,5 = 28400	6,47 15,05
2 3 4	17	4100	28400 541,7 · 100 = 54170 541,7 · 147,5 = 80000	6,94 13,22 19,48
4 C 5	16	3217	80000 541,7 · 170 = 92000 541,7 · 192,5 = 104200	24,85 28,7 32,45
5 6 7	14	1886	104200 541,7 · 235 = 127000 1958,3 · 22,5 = 44000	55,3 67,3 23,4
7	13	1402	44000	31,4

Die als Kräfte aufzufassenden Flächen sind

$$F_1'' = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5 \cdot 8{,}69 = 98\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$F_2'' = \frac{1}{2} \cdot 30\,(6{,}47 + 15{,}05) = 323 \quad ,,$$

$$F_3'' = \frac{1}{2} \cdot 95\,(6{,}94 + 19{,}48) = 1255 \quad ,,$$

$$F_4'' = \frac{1}{2} \cdot 45\,(24{,}85 + 32{,}45) = 1290 \quad ,,$$

$$F_5'' = \frac{1}{2} \cdot 42{,}5\,(55{,}3 + 67{,}3) = 2610 \quad ,,$$

$$F_6'' = \frac{1}{2} \cdot 42{,}5\,(67{,}3 + 23{,}4) = 1925 \quad ,,$$

$$F_7'' = \frac{1}{2} \cdot 22{,}5 \cdot 31{,}4 = 354 \quad ,, \,.$$

Die Belastung ist in Abb. 276 m wiedergegeben, die Durchbiegung in Abb. 276 n gezeichnet. Der Punkt C hat die Durchbiegung

$$\delta_{2P} = 1{,}52\,\text{mm}.$$

Denkt man sich wieder dieselbe Kraft C' in C angreifend wie bei Untersuchung der vertikalen Durchbiegung der Welle, so wird

$$C_2 = \frac{C' \cdot \delta_{2P}}{\delta_{C'}} = 2000 \cdot \frac{1{,}52}{1{,}70} = 1790\,\text{kg}.$$

Die Ordinaten $f_{C'}$ sind mit $\frac{1{,}52}{1{,}70} = 0{,}895$ zu multiplizieren und zu den Werten f_{CP} zu addieren. Es ergibt sich so die Abb. 276 o, in der f_2 die horizontale Durchbiegung der Welle bedeutet.

Die resultierende Durchbiegung der Welle ist

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

Die Auflagerdrucke in vertikaler und horizontaler Richtung sind in den Abb. 276 k und 276 o angegeben.

8. Die dreifach gelagerte und einfach gekröpfte Welle.

Nach den Betrachtungen Seite 302 bis 306 kann man die gekröpfte Welle wie einen durchgehenden Träger behandeln, falls man nur in den Mittellinien der Wangen beim Aufzeichnen der $\frac{M}{J}$-Linien Flächenkräfte hinzufügt, deren Größe in der Kröpfungsebene

$$F = \int_0^r \frac{M_b \cdot dx}{J} = \frac{M_b \cdot r}{J}$$

ist. Für die Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene haben diese Zusatzflächen die Größe

$$F = \frac{E}{G} \cdot \frac{M_d \cdot r}{J_d}.$$

Daher bereitet die Behandlung der dreifach gelagerten, gekröpften Welle keine neue Schwierigkeiten. Man entfernt — wie unter 7. — ein Lager, zeichnet die elastische Linie und bringt dann in der Mittellinie des entfernten Lagers eine Einzelkraft an, welche die durch die belastenden Kräfte hervorgerufene Durchbiegung aufhebt.

Wir betrachten als Beispiel den auf den Seiten 291 bis 302 behandelten Fall, mit der einzigen Änderung, daß wir in der Entfernung $e = 40$ cm rechts vom Angriffspunkt des Gewichtes G ein drittes Lager C anbringen (Abb. 277 und 278). Mit Ausnahme dieser Abweichung stimmen die Abmessungen, Bezeichnungen und Belastungen mit den Abb. 215 und 227 vollkommen überein.

a) Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene.

Der Belastungsfall ist in Abb. 277 a wiedergegeben. Der Längenmaßstab der Originalzeichnung ist 1 cm = 5 cm.

Das rechte Lager C wird entfernt.

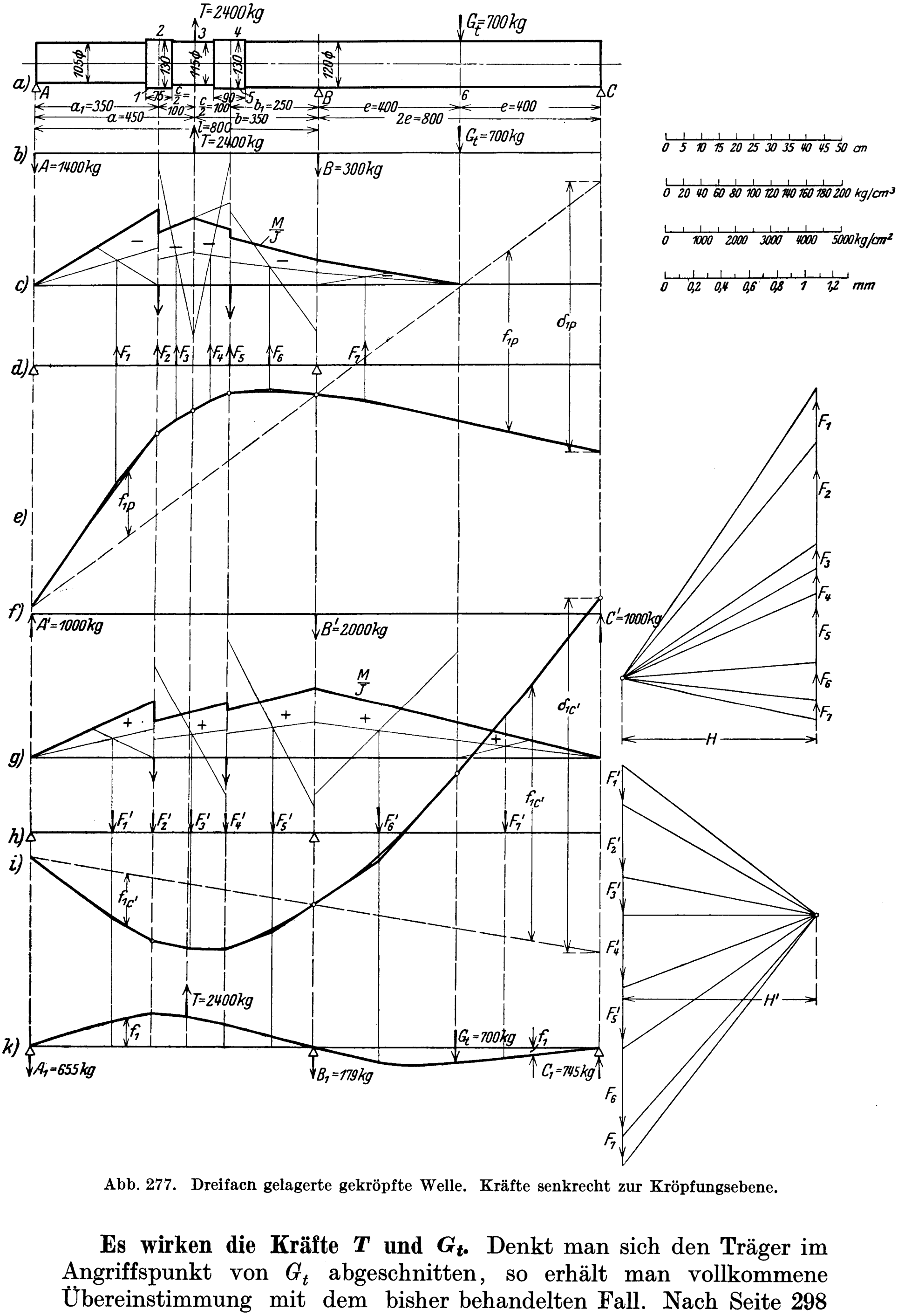


Abb. 277. Dreifach gelagerte gekröpfte Welle. Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene.

Es wirken die Kräfte *T* und G_t. Denkt man sich den Träger im Angriffspunkt von G_t abgeschnitten, so erhält man vollkommene Übereinstimmung mit dem bisher behandelten Fall. Nach Seite 298 sind daher die Auflagerdrucke

$$A = 1400 \text{ kg}; \quad B = 300 \text{ kg}.$$

Der Belastungsfall ist in Abb. 277b skizziert. Die Werte $\frac{M}{J}$ ergeben sich aus der folgenden Zusammenstellung.

Stelle	Durchm. in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	10,5	596,7	$-1400 \cdot 35 = -49000$	$-82{,}2$
2	11,5	858,9	-49000	$-57{,}2$
3			$-1400 \cdot 45 = -63000$	$-73{,}5$
4			$-1400 \cdot 55 + 2400 \cdot 10 = -53000$	$-61{,}7$
5	12	1018	-53000	$-52{,}7$
B			$-700 \cdot 40 = -28000$	$-27{,}8$
6			0	0

Als Maßstab der $\frac{M}{J}$-Fläche wurde 1 cm = 20 kg/cm³ gewählt (Abb. 277c).

Diese Fläche kann in fünf Teilflächen zerlegt werden, deren Schwerpunkte leicht zu ermitteln sind.

Es ist

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 82{,}2 = 1438 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (57{,}2 + 73{,}5) = 653{,}5 \text{ ,,}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (73{,}5 + 61{,}7) = 676 \text{ ,,}$$

$$F_6 = \frac{1}{2} \cdot 25\,(52{,}7 + 27{,}8) = 1006 \text{ ,,}$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 27{,}8 = 556 \text{ ,,} .$$

Wir wollen jetzt die Zusatzflächen berechnen. Die linke Wange hat einen rechteckigen Querschnitt; die Breite ist $b = 7{,}5$ cm und die Höhe $h = 13$ cm. Mit

$$n = \frac{h}{b} = \frac{13}{7{,}5} = 1{,}735$$

wird nach Seite 303

$$\xi = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{n^3}{1 + n^2} = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{5{,}223}{4{,}01} = 0{,}361\,,$$

$$J_d = \xi\, b^4 = 0{,}361 \cdot 7{,}5^4.$$

Mithin wird die Zusatzfläche für die linke Wange

$$F_2 = \frac{E}{G} \cdot \frac{M_d \cdot r}{J_d} = \frac{2200000}{850000} \cdot \frac{49000 \cdot 25}{0{,}361 \cdot 7{,}5^4} = 2775{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Ebenso wird die Zusatzfläche F_5 der rechten Wange ermittelt, die einen rechteckigen Querschnitt $b = 9$ cm, $h = 13$ cm hat.

Es ist
$$n = \frac{h}{b} = \frac{13}{9} = 1{,}445\,,$$
$$\xi = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{n^3}{1+n^2} = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{3{,}017}{3{,}089} = 0{,}271\,,$$
$$J_d = \xi \cdot b^4 = 0{,}271 \cdot 9^4,$$
mithin
$$F_5 = \frac{E}{G} \frac{M_d \cdot r}{J_d} = \frac{2\,200\,000}{850\,000} \cdot \frac{53\,000 \cdot 25}{0{,}271 \cdot 9^4} = 1929 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Träger wird nun mit den Flächen $F_1 \ldots F_7$ belastet (Abb. 277d) und das zugehörige Seileck gezeichnet (Abb. 277e). Als Maßstab wurde 1 cm = 500 kg/cm², als Polweite $H = 11$ cm gewählt.

Sämtliche Maßstäbe wurden auch für den übrigen Teil der Zeichnung beibehalten.

Beträgt die Ordinate des Seilecks z cm, so wird die wirkliche Durchbiegung
$$f = \frac{1}{E} \cdot H \cdot z = \frac{1}{2\,200\,000}\left(11 \text{ cm} \cdot \frac{500 \text{ kgcm}^{-2}}{\text{cm}}\right) \cdot \left(z\text{cm} \cdot \frac{5 \text{ cm}}{\text{cm}}\right) = 0{,}0125\, z_{\text{cm}}\,.$$

Dementsprechend wurde der Maßstab entworfen, in welchem die Durchbiegung f_{1P} der Abb. 277e zu messen sind.

Die Durchbiegung im Angriffspunkt von G_t beträgt 0,9 mm.

Das Gewicht G wird durch den Anker einer Dynamomaschine hervorgerufen. Da der Luftspalt zwischen dem festen und beweglichen Teil einer Dynamomaschine 1 bis 3 mm beträgt, läßt man eine Durchbiegung von 0,1 bis 0,3 mm zu. Man erkennt, daß, falls das Lager C fehlen würde, dieser zulässige Wert allein durch die Kräfte, welche senkrecht zur Kröpfungsebene wirken, bei weitem überschritten wird. Folglich muß bei dem gewählten Beispiel unbedingt das dritte Lager hinzugefügt werden.

Die Durchbiegung im Punkte C beträgt
$$\delta_{1_P} = 1{,}83 \text{ mm}.$$

Wir belasten jetzt den Träger mit $C' = 1000$ kg.

Da das mittlere Lager die gleiche Entfernung vom rechten und linken Lager hat, sind die Auflagerdrucke
$$A' = 1000 \text{ kg}, \quad B' = 2000 \text{ kg}.$$

Der Belastungsfall ist in Abb. 277f wiedergegeben.

Die Werte $\frac{M}{J}$ werden wieder in einer Tabelle zusammengestellt.

Stelle	Durchm. in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	10,5	596,7	1000 · 35 = 35000	58,8
2	11,5	858,5	35000	40,7
3			1000 · 45 = 45000	52,4
4			1000 · 55 = 55000	64,1
5	12	1018	55000	54,1
B			1000 · 80 = 80000	78,7
6			1000 · 120 — 2000 · 40 = 40000	39,4

Die $\frac{M}{J}$-Fläche ist in Abb. 277g wiedergegeben. Sie kann in fünf Teil flächen zerlegt werden.

Es ist

$$F_1' = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 58{,}8 \qquad = 1030 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_3' = \frac{1}{2} \cdot 20\,(40{,}7 + 64{,}1) = 1048 \quad ,,$$

$$F_5' = \frac{1}{2} \cdot 25\,(54{,}1 + 78{,}7) = 1660 \quad ,,$$

$$F_6' = \frac{1}{2} \cdot 40\,(78{,}7 + 39{,}4) = 2362 \quad ,,$$

$$F_7' = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 39{,}4 \qquad = 788 \quad ,, \; .$$

Die Zusatzflächen sind wieder gleich $\frac{E}{G} \frac{M_d \cdot r}{J_d}$. Da sich gegenüber dem früheren Belastungsfall nur Md ändert, so ist

$$F_2' = 2775{,}5 \cdot \frac{35000}{49000} = 1982 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_4' = 1929 \cdot \frac{55000}{53000} = 2002 \quad ,, \; .$$

Der Belastungsfall ist in Abb. 277h wiedergegeben und das Seileck in Abb. 277i gezeichnet worden. Die Ordinaten des Seilecks sind ein Maß für die durch C' hervorgerufene Durchbiegung $f_{1_{C'}}$. Für den Punkt C wird

$$\delta_{1_{C'}} = 2{,}46 \text{ mm}.$$

Demnach ist der wahre Auflagerdruck

$$C_1 = \frac{C' \cdot \delta_{1_P}}{\delta_{1_{C'}}} = \frac{1000 \cdot 183}{2{,}46} = 745 \text{ kg},$$

und die Ordinaten $f_{1_{C'}}$ sind im Verhältnis $1{,}83 : 2{,}46 = 0{,}745$ zu verkleinern. Vereinigt man sie dann mit den Ordinaten $f_{1\,P}$, so gibt Abb. 277k die Durchbiegung f_1 der Welle, welche durch die Kräfte senkrecht zur Kröpfungsebene hervorgerufen wird.

b) Kräfte in der Kröpfungsebene.

Der Belastungsfall ist in Abb. 278a wiedergegeben. Der Längenmaßstab ist 1 cm = 5 cm.

Wir entfernen wieder das rechte Lager *C*.

Es wirken die Kräfte *R* und G_r. Da auch hier Übereinstimmung mit dem früher behandelten Fall der Welle auf zwei Lagern besteht, sind die Auflagerdrucke nach Seite 299

$$A = 288 \text{ kg} \quad \text{und} \quad B = 2512 \text{ kg}$$

(Abb. 278b).

Die Werte $\frac{M}{J}$ können der folgenden Zusammenstellung entnommen werden.

Stelle	Durchm. in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	10,5	596,7	$288 \cdot 35 = 10090$	16,9
2	11,5	858,5	10090	11,75
3			$288 \cdot 45 = 12960$	15,1
4			$288 \cdot 55 - 1800 \cdot 10 = -2160$	$-2{,}52$
5	12	1018	-2160	$-2{,}12$
B			$-40 \cdot 1000 = -40000$	$-39{,}3$
6			0	0

Hiernach kann die $\frac{M}{J}$-Fläche entworfen werden (Abb. 278c). Als Maßstab wurde 1 cm = 10 kg/cm³ gewählt.

Die $\frac{M}{J}$-Fläche kann in sechs Teilflächen zerlegt werden, deren Schwerlinien leicht zu bestimmen sind. Die Inhalte der Flächen sind:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 16{,}9 = 296 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (11{,}75 + 15{,}1) = 134{,}25 \text{ ,,}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}5 \cdot 15{,}1 = 64{,}2 \text{ ,,}$$

$$F_5 = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}52 = -1{,}9 \text{ ,,}$$

$$F_7 = -\frac{1}{2} \cdot 25\,(2{,}12 + 39{,}3) = -517{,}5 \text{ ,,}$$

$$F_8 = -\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 39{,}3 = -786 \text{ ,,} .$$

Die Zusatzflächen sind

$$F_2 = \frac{M_b \cdot r}{J} = \frac{10090 \cdot 25}{\frac{1}{12} \cdot 13 \cdot 7{,}5^3} = 552 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$F_6 = \frac{M_b \cdot r}{J} = -\frac{2160 \cdot 25}{\frac{1}{12} \cdot 13 \cdot 9^3} = -68{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

Als Maßstab wurde 1 cm = 100 kg/cm² gewählt. Der Belastungsfall ist in Abb. 278d wiedergegeben, das Seileck mit $H = 11$ cm in Abb. 278e gezeichnet.

Beträgt die Ordinate der Seilkurve z cm, so ist die wirkliche Durchbiegung

$$f = \frac{1}{E} \cdot H \cdot z = \frac{1}{2200000} \left(11 \text{ cm} \cdot \frac{100 \text{ kgcm}^{-2}}{\text{cm}}\right) \cdot \left(z \text{ cm} \cdot \frac{5 \text{ cm}}{\text{cm}}\right) = 0{,}0025\, z_{\text{cm}}.$$

Demgemäß wurde der Maßstab entworfen, in dem die Durchbiegungen zu messen sind. Die Durchbiegung am Ende des Trägers ist

$$\delta_{2_P} = 0{,}265 \text{ mm}.$$

Es wird jetzt der Träger mit $C' = 200$ kg belastet.

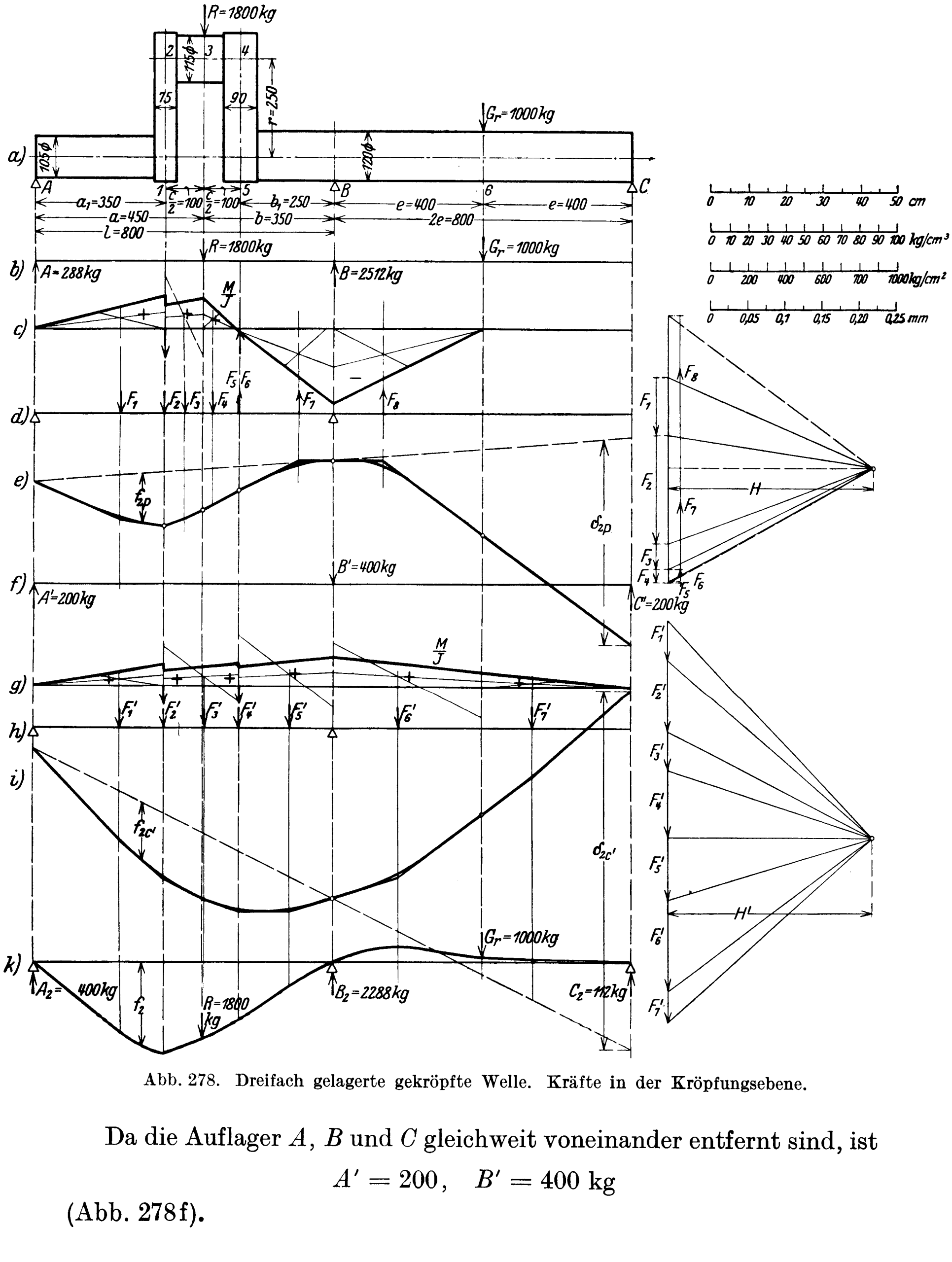


Abb. 278. Dreifach gelagerte gekröpfte Welle. Kräfte in der Kröpfungsebene.

Da die Auflager A, B und C gleichweit voneinander entfernt sind, ist

$$A' = 200, \quad B' = 400 \text{ kg}$$

(Abb. 278f).

Die Werte $\frac{M}{J}$ wurden wieder tabellarisch zusammengestellt.

Stelle	Durchm. in cm	J_{cm^4}	M_{cmkg}	$\frac{M}{J}$ kg/cm³
1	10,5	596,7	$200 \cdot 35 = 7000$	11,72
2	11,5	858,5	7000	8,17
3			$200 \cdot 45 = 9000$	10,45
4			$200 \cdot 55 = 11000$	12,83
5	11,5	1018	11000	10,83
B			$200 \cdot 80 = 16000$	15,72
6			$200 \cdot 40 = 8000$	7,86

Die Belastungsfläche zerfällt in fünf Teilflächen. Die Inhalte sind:

$$F_1' = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 11{,}72 = 205 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_3' = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (8{,}17 + 12{,}83) = 210 \quad ,,$$

$$F_5' = \frac{1}{2} \cdot 25\,(10{,}83 + 15{,}72) = 332 \quad ,,$$

$$F_6' = \frac{1}{2} \cdot 40\,(15{,}72 + 7{,}86) = 472 \quad ,,$$

$$F_7' = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 7{,}86 = 157 \quad ,,$$

Die Zusatzflächen ergeben sich durch Vergleich mit den unter a) ermittelten Werten:

$$F_2' = \frac{M_b \cdot r}{J} = \frac{7000}{10090} \cdot 552 = 384 \text{ kg/cm}^2,$$

$$F_4' = \frac{M_b \cdot r}{J} = -\frac{11000}{2160} \cdot 68{,}4 = 348 \text{ kg/cm}^2.$$

Die unter a) benutzten Maßstäbe und der Polabstand H wurden beibehalten.

Abb. 278h gibt den Belastungsfall; in Abb. 278i ist das zugehörige Seileck entworfen.

Die Durchbiegung am Ende des Trägers ist

$$\delta_{2_{C'}} = 0{,}472 \text{ mm}.$$

Folglich ist der wahre Auflagerdruck

$$C_2 = \frac{C' \cdot \delta_{2_P}}{\delta_{2_{C'}}} = 200 \cdot \frac{0{,}265}{0{,}472} = 112 \text{ kg}$$

und die Ordinaten $f_{2_{C'}}$ sind im Verhältnis $0{,}265 : 0{,}472 = 0{,}56$ zu verkleinern. Vereinigt man sie dann mit den Ordinaten $f_{2_{P'}}$, so gibt Abb. 278k die Durchbiegungen f_2 der Welle, welche durch die Kräfte in der Kröpfungsebene hervorgerufen werden.

Die resultierende Durchbiegung der Welle ist

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\,.$$

Die größte Durchbiegung tritt an der Stelle 1 auf. Es ist

$$f_{\max} = \sqrt{0{,}24^2 + 0{,}12^2} = 0{,}27 \text{ mm}\,,$$

so daß der zulässige Wert (S. 374) nicht überschritten wird.

XIII. Stäbe, deren Einzelteile gerade sind und schwach gekrümmte Stäbe.

Unsere bisherigen Betrachtungen erstreckten sich auf Stäbe mit gerader Achse; auch die gekröpfte Welle, deren Berechnung auf Seite 291 durchgeführt wurde, konnte in Einzelteile zerlegt werden, deren Achsen gerade waren. In gleicher Weise behandeln wir den Portalträger, der aus drei Stäben besteht, die durch steife Ecken miteinander verbunden sind. (Abb. 279.)

Ferner wollen wir Stäbe betrachten, deren Mittellinie im spannungslosen Zustand gekrümmt ist. Wir machen die Annahme, daß die Krümmungshalbmesser weit größer sind als die in die Biegungsebene fallenden Querschnittsabmessungen. Solche schwach gekrümmten Stäbe können nämlich in gleicher Weise behandlet werden wie ein ursprünglich gerader Stab. Als Beispiel diene der Bogenträger mit zwei Gelenken (Abb. 284).

1. Der Portalträger mit zwei Gelenken.

Die statisch nicht bestimmbare Größe ist die wagerechte Seitenkraft H, die auch Horizontalschub genannt wird. Als statisch bestimmtes Hauptsystem erhält man einen Portalträger mit einem festen Gelenk D und einem beweglichen Gelenk C (Abb. 279b). Mit R als Mittelkraft sämtlicher auf den Riegel AB wirkenden Kräfte wird

$$A' = R \cdot \frac{b}{l}$$

und

$$B' = R \cdot \frac{a}{l}\,.$$

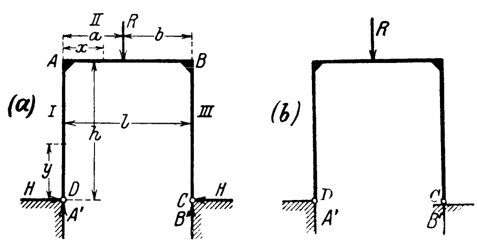


Abb. 279. Portalträger mit zwei Gelenken.

Da C in Wirklichkeit ein fester Punkt ist, muß seine wagerechte Verschiebung δ_h gleich Null sein. Die allgemeine Arbeitsgleichung (S. 198) liefert

$$\delta_h = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} \cdot ds + \int \frac{Q}{G \cdot kF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial H} \cdot ds + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} \cdot ds\,,$$

da am Orte der gesuchten Formänderung die Horizontalkraft H wirkt.

Unter Vernachlässigung der Querkraft Q erhält man für den Teil I des Trägers, wenn F_1 der Inhalt, J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittes ist

$$M_I = H \cdot y; \quad \frac{\partial M_I}{\partial H} = y; \quad N_I = A' = R \cdot \frac{b}{l}; \quad \frac{\partial N_I}{\partial H} = 0; \quad ds = dy .$$

$$\delta_I = \int \frac{M_I}{E\,J_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial H} \cdot ds = \int_0^h \frac{H \cdot y}{E J_1} \cdot y \cdot dy = \frac{H \cdot h^3}{3 E J_1} .$$

Für den Teil II des Stabes ist

$$M_{II} = M_0 - H \cdot h; \quad ds = dx ,$$

wenn man unter M_0 das Moment für den einfachen Balken AB versteht, ferner

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H} = -h; \quad N_{II} = H; \quad \frac{\partial N_{II}}{\partial H} = 1;$$

damit

$$\delta_{II} = \int \frac{N_{II}}{E F_2} \cdot \frac{\partial N_{II}}{\partial H} \cdot ds + \int \frac{M_{II}}{E J_2} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial H} \cdot ds ,$$

$$= \int_0^l \frac{H}{E F_2} \cdot 1 \cdot dx + \int_0^l \frac{M_0 - H \cdot h}{E J_2} \cdot (-h) \cdot dx ,$$

$$= \frac{H \cdot l}{E F_2} + \frac{H \cdot h^2 \cdot l}{E J_2} - \frac{h}{E J_2} \int_0^l M_0 \cdot dx ,$$

wenn wieder die Querkraft vernachlässigt wird.

Setzt man bei Stabteil III die gleichen Abmessungen voraus, wie bei Teil I, was ja wohl im allgemeinen statthaft sein dürfte, so wird $\delta_{III} = \delta_I$. Insgesamt ergibt sich die wagerechte Verschiebung δ_h als Summe der Einzelverschiebungen zu

$$\delta_h = 2\,\delta_I + \delta_{II} = 2 \cdot \frac{H \cdot h^3}{3 E J_1} + \frac{H \cdot l}{E \cdot F_2} + \frac{H \cdot h^2 \cdot l}{E\,J_2} - \frac{h}{E\,J_2} \int_0^l M_0 \cdot dx .$$

Aus der Elastizitätsbedingung

$$\delta_h = 0$$

folgt

$$H = \frac{\int_0^l M_0 \cdot dx}{h \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F_2 \cdot h^2}\right)} .$$

Hierin bedeutet $\int_0^l M_0 \cdot dx$ den Inhalt der dem einfachen Balken entsprechenden Momentenfläche.

Wirkt beispielsweise nur die Einzelkraft R auf den Balken, so ist die M_0-Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe

$$M_{\max} = \frac{R \cdot a b}{l}$$

und dem Flächeninhalt

$$\int\limits_0 M_0 \cdot d x = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{R \cdot a b}{l} = \frac{1}{2} R a b .$$

Für diesen Fall wird die statisch nicht bestimmbare wagerechte Seitenkraft

$$H = \frac{R a b}{2 h l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F_2 \cdot h^2}\right)} .$$

Belasten beliebig viele Einzelkräfte P den Träger, deren Wirkungslinien die Abstände a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 ... haben, so wird

$$H = \frac{\Sigma P a b}{2 h l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F_2 \cdot h^2}\right)} ;$$

hierin ist

$$\Sigma P a b = P_1 a_1 b_1 + P_2 a_2 b_2 + P_3 a_3 b_3 + \cdots .$$

Eine gleichmäßig verteilte Last von p kg/m erzeugt eine M_0-Fläche, die durch eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$M = \frac{p l^2}{8}$$

begrenzt wird; ihr Inhalt wird

$$\int\limits_0^l M_0 \cdot d x = \frac{2}{3} l \cdot \frac{p l^2}{8} = \frac{p l^3}{12} ,$$

der wagerechte Seitenschub

$$H = \frac{p l^3}{12 h l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F_2 h^2}\right)} .$$

Treten Einzelkräfte und gleichmäßig verteilte Last gleichzeitig auf, so addieren sich beide Größen H zu

$$H = \frac{6 \cdot \Sigma P a b + p l^3}{12 h l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F_2 \cdot h^2}\right)} .$$

Durch die Berechnung des statisch nicht bestimmbaren Seitenschubes H ist der Träger statisch bestimmt geworden. Die Gesamtmomentenfläche des Trägers $A B$ ergibt sich durch Addition der M_0-Momentenfläche und der durch H hervorgerufenen Momentenfläche (Abb. 280).

Zu der gegebenen senkrechten Belastung möge eine **seitliche Belastung** durch Wind hinzukommen, die wir zu w kg/m als gleichmäßig verteilt annehmen (Abb. 281); der Einfluß der Querkräfte werde wieder vernachlässigt.

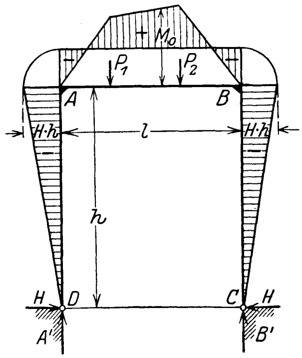


Abb. 280. Momentenfläche.

Zerlegt man die Auflagedrucke in wagerechte und senkrechte Komponenten, so ergeben die drei Gleichgewichtsbedingungen:

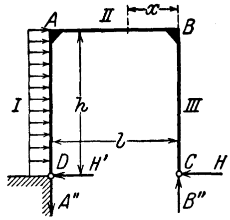


Abb. 281. Windbelastung.

1. $\sum H = 0$: $H + H' = wh$ oder $H' = wh - H$,
2. $\sum V = 0$: $A'' = B''$,
3. $\sum M = 0$: (Als Drehpunkt wählen wir Punkt D)

$$B'' \cdot l = wh \cdot \frac{h}{2} = \frac{wh^2}{2}, \quad \text{also} \quad B'' = \frac{wh^2}{2l} = A''.$$

Teil I. Mit $s = y$ wird

$$M_I = H'y - \frac{1}{2} w \cdot y^2 = wh \cdot y - H \cdot y - \frac{1}{2} wy^2; \quad \text{daher} \frac{\partial M_I}{\partial H} = -y,$$

$$N_I = A'' = \frac{wh^2}{2l}; \quad \frac{\partial N_I}{\partial H} = 0;$$

$$\delta_I = \int \frac{M_I}{EJ_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial H} \cdot ds = \frac{1}{EJ_1} \int_0^h \left(wh \cdot y - Hy - \frac{1}{2} wy^2\right)\left(-y\right) \cdot dy$$

$$= \frac{1}{EJ_1} \left[-wh \cdot \frac{y^3}{3} + H \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{8} w \cdot y^4\right]_0^h;$$

$$\delta_I = \frac{1}{EJ_1} \left(\frac{Hh^3}{3} - \frac{5}{24} wh^4\right).$$

Teil II.

$$M_{II} = B''x - H \cdot h; \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial H} = -h; \quad s = x;$$

$$N_{II} = -H; \quad \frac{\partial N_{II}}{\partial H} = -1;$$

$$\delta_{II} = \frac{1}{EJ_2} \int_0^l (B''x - H \cdot h)(-h)\, dx + \frac{1}{EF_2} \int (-H)(-1) \cdot dx;$$

$$\delta_{II} = \frac{1}{EJ_2} \left[-\frac{wh^3}{2l} \cdot \frac{x^2}{2} + H \cdot h^2 \cdot x\right]_0^l + \left[\frac{1}{EF_2} \cdot H \cdot x\right]_0^l$$

$$= \frac{1}{EJ_2} \left(-\frac{wh^3 \cdot l}{4} + H \cdot h^2 \cdot l\right) + \frac{1}{EF_2} \cdot H \cdot l.$$

Teil III.

$$M_{III} = -H \cdot y; \quad \frac{\partial M_{III}}{\partial H} = -y; \quad s = y;$$

$$N_{III} = -B'' = -\frac{w h^2}{2 l}; \quad \frac{\partial N_{III}}{\partial H} = 0;$$

$$\delta_{III} = \frac{1}{E J_1} \int_0^h (-H y)(-y)\, dy = \frac{1}{E J_1} \cdot \frac{H h^3}{3}.$$

Als Summe der Einzelverschiebungen ergibt sich

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} + \delta_{III},$$

und die Elastizitätsbedingung $\delta = 0$ liefert

$$\frac{1}{E J_1}\left(\frac{H h^3}{3} - \frac{5}{24} w h^4\right) + \frac{1}{E J_2}\left(H h^2 l - \frac{w h^3 l}{4}\right) + \frac{1}{E J_1} \cdot \frac{H h^3}{3} + \frac{1}{E F_2} \cdot H l = 0,$$

$$\frac{H}{E J_1}\left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3}\right) + \frac{H}{E J_2} \cdot h^2 l + \frac{1}{E F_2} H l = \frac{1}{E J_2} \cdot \frac{w h^3 l}{4} + \frac{1}{E J_1} \cdot \frac{5}{24} w h^4.$$

Unter Vernachlässigung von $\frac{1}{E F_2} H l$ wird

$$H \cdot h^2 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}\right) = \frac{w h^3 l}{4}\left(1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}\right);$$

daraus

$$H = \frac{w h}{4} \cdot \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}},$$

$$H' = w h - H = \frac{w h}{4}\left(4 - \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}\right).$$

Nach der Behebung der statischen Unbestimmtheit durch die Ermittlung von H gestaltet sich der weitere Verlauf der Rechnung folgendermaßen (Abb. 282):

Rechter Pfosten:

$$M = -H \cdot y.$$

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit den Ordinaten

$$M_C = 0 \quad \text{und} \quad M_B = -H \cdot h = -\frac{w h^2}{4} \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}.$$

Oberer Riegel:

$$M = B'' x - H h.$$

Die Momentenlinie ist eine Schräge mit den Ordinaten

$$M_B = -H \cdot h = -\frac{w\,h^2}{4} \cdot \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}},$$

$$M_A = B''\,l - H\,h = \frac{wh^2}{2} - \frac{wh^2}{4} \cdot \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}.$$

Das Eckmoment M_A ist positiv.

Linker Pfosten:

$$M = H'y - \frac{w\,y^2}{2}.$$

Die Momentenlinie ist eine Parabel, deren Scheitel S mit der Pfeilhöhe

$$\frac{H'^2}{2\,w} \quad \text{um} \quad \frac{H'}{w} \quad \text{von } D$$

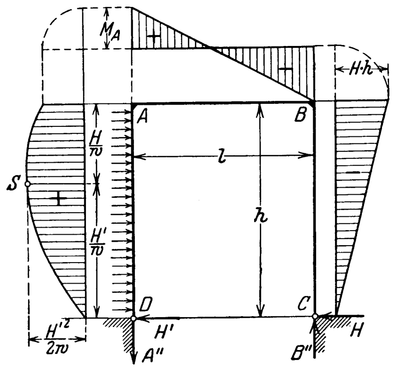


Abb. 282. Windbelastung. Momentenfläche.

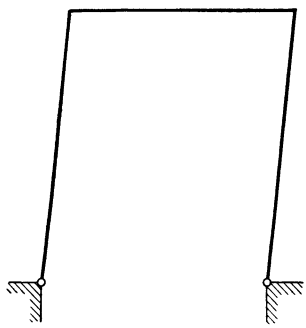


Abb. 283. Formänderung.

entfernt liegt; die Ordinate in D ist gleich Null.

Die infolge der seitlichen Belastung auftretende Formänderung ist in Abb. 283 angedeutet; dem Momenten-Nullpunkt entspricht ein Wendepunkt der Biegungslinie.

Ist $\qquad J_2 = J_1 = J; \quad h = l,$

so wird

$$H = \frac{wl}{4} \cdot \frac{1 + \frac{5}{6}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{11}{40} w\,l = \frac{11}{40} W,$$

$$H' = W - H = \frac{29}{40} W; \qquad A'' = B'' = \frac{W}{2},$$

$$M_B = -H \cdot l = -\frac{11}{40} W \cdot l; \quad M_A = \frac{1}{2} W\,l - \frac{11}{40} W\,l = \frac{9}{40} W\,l,$$

worin W die gesamte Windkraft bedeutet.

Der Momenten-Nullpunkt teilt den Riegel im Verhältnis 9 : 11.

2. Der Bogenträger mit zwei Gelenken.

Da beide Auflager (Abb. 284) feste Punkte sind, ist der Träger einfach statisch unbestimmt. Als statisch bestimmtes Hauptsystem wählen wir den Träger auf zwei Stützen und als statisch nicht bestimmbare Größe den wagerechten Seitenschub H. Unter Vernachlässigung der Querkraft Q und der Längskraft N ist die wagerechte Verschiebung des Punktes B nach Castigliano (vgl. S. 198)

$$\delta_h = \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} \cdot ds.$$

Hierbei ist ds das verschwindend kleine Bogenteilchen. Das Moment im Punkte x, y des Trägers ist

$$M = M_0 - H \cdot y; \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -y,$$

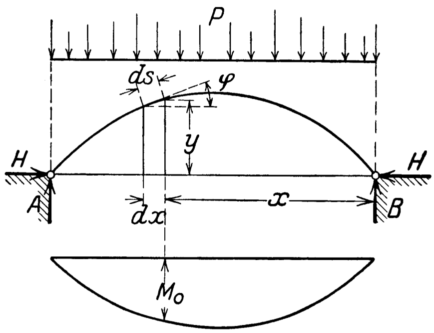


Abb. 284. Bogenträger mit zwei Gelenken.

wenn wir unter M_0 das im Punkt x, y des statisch bestimmten Hauptsystems durch die gegebene Belastung hervorgerufene Biegungsmoment verstehen. Die Elastizitätsbedingung

$$\delta_h = 0$$

liefert die Gleichung

$$\delta_h = \frac{1}{E}\int (M_0 - H \cdot y)(-y) \cdot \frac{ds}{J} = -\frac{1}{E}\int M_0 \cdot y \cdot \frac{ds}{J} + \frac{1}{E}\int H y^2 \frac{ds}{J} = 0,$$

wobei wir den Elastizitätsmodul als konstant annehmen; hieraus folgt

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot \frac{ds}{J}}{\int y^2 \cdot \frac{ds}{J}} = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot \frac{dx}{J\cos\varphi}}{\int y^2 \cdot \frac{dx}{J\cos\varphi}}. \tag{1}$$

Es ist nämlich

$$ds = \frac{dx}{\cos\varphi},$$

wobei φ der Neigungswinkel der Tangente im Punkte (x, y) ist.

Man kann bei flachen Bögen $\cos\varphi \approx 1$ annehmen und daher nach obiger Formel das Bogenteilchen ds durch dx ersetzen, was um so eher geschehen kann, als auch der Nenner ds enthält. In diesem Falle schreiben wir

$$H = \frac{\int M_0 y \frac{ds}{J}}{\int y^2 \frac{ds}{J}} \approx \frac{\int M_0 \cdot y \frac{dx}{J}}{\int y^2 \cdot \frac{dx}{J}}. \tag{2}$$

Ist das Trägheitsmoment J konstant, so wird

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y\, dx}{\int y^2 \cdot dx}. \tag{3}$$

Sollen auch die Längskräfte N berücksichtigt werden, so lautet die Castiglianosche Gleichung

$$\delta_h = \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} \cdot ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} \cdot ds = \delta_h' + \delta_h'' ,$$

wobei

$$\delta_h'' = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} \cdot ds$$

mit $N = H$ und $\frac{\partial N}{\partial H} = 1$ übergeht in

$$\delta_h'' = \int \frac{H}{EF} \cdot ds .$$

Aus

$$E\,\delta_h = -\int M_0 \cdot y \cdot \frac{ds}{J} + \int H y^2 \cdot \frac{ds}{J} + \int H \cdot \frac{ds}{F} = 0$$

erhalten wir

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot \frac{ds}{J}}{\int y^2 \cdot \frac{ds}{J} + \int \frac{ds}{F}} = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot \frac{dx}{J \cos\varphi}}{\int y^2 \frac{dx}{J \cos\varphi} + \int \frac{dx}{F \cos\varphi}} . \tag{4}$$

Sind neben E auch F und J als konstant anzusehen, so folgt

$$H = \frac{\int M_0 y \cdot ds}{\int (y^2 + i^2) ds} = \frac{\int M_0 \, y \frac{dx}{\cos\varphi}}{\int (y^2 + i^2) \frac{dx}{\cos\varphi}} . \tag{5}$$

Hierin ist $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ der Trägheitsradius des Querschnittes (siehe Seite 126). Solange der Trägheitsradius klein gegenüber den Ordinaten y ist, kann man die einfachere Formel (1) verwenden. Ersetzt man wieder die Bogenlänge s durch die Abszisse x, so ergibt sich als Näherungsformel:

$$H \approx \frac{\int M_0 y \cdot \frac{dx}{J}}{\int y^2 \cdot \frac{dx}{J} + \int \frac{dx}{F}} \tag{6}$$

und für den Fall, daß F und J konstant sind

$$H \approx \frac{\int M_0 \, y \, dx}{\int (y^2 + i^2) \, dx} . \tag{7}$$

Beispiel. Der Bogen sei parabolisch gekrümmt. Dieser Fall ist insofern von Wichtigkeit, als man jeden flachen Bogen angenähert als Parabel ansehen kann. Mit f als Pfeilhöhe befolgt y das Gesetz

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) .$$

Einzellast. Der Träger sei mit einer Einzellast P im Abstande a von A, bzw. b von B belastet. Wir benutzen unter Vernachlässigung der Längskraft die Näherungsgleichung (3) und schreiben

$$H = \frac{\int M_0\, y\, dx}{\int y^2\, dx}\,.$$

Beide Integrale erstrecken sich über die ganze Spannweite, doch wird die Stetigkeit der M_0-Linie im Lastangriffspunkt unterbrochen, da die M_0-Fläche ein Dreieck mit der Höhe

$$M = \frac{P\,a\,b}{l}$$

ist (Abb. 285). Wir zerlegen den Zähler in zwei Integrale, die wir von $x = 0$ bis $x = a$ und von $x' = 0$ bis $x' = b$ erstrecken:

$$\int_0^l M_0 y\, dx = \int_0^a A\, x \cdot y\, dx + \int_0^b B \cdot x' \cdot y \cdot dx'\,;$$

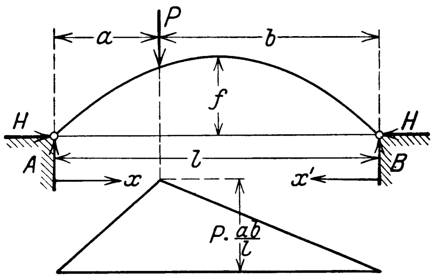


Abb. 285. Einzellast.

hierin ist

$$A = P \cdot \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad B = P \cdot \frac{a}{l}\,.$$

Es ist

$$\int_0^a A\, x\, y\, dx = \int_0^a \frac{P\,b}{l} \cdot x\, \frac{4\,f}{l^2}\, x\,(l - x) \cdot dx = \frac{4\,P\,b\,f}{l^3} \left\{ \int_0^a l\, x^2\, dx - \int_0^a x^3\, dx \right\},$$

$$\int_0^a A\, x\, y\, dx = \frac{4\,P\,b\,f}{l^3} \left(l \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \right).$$

Ebenso wird

$$\int_0^b B\, x'\, y\, dx' = \int_0^b \frac{P\,a}{l} \cdot x' \cdot \frac{4\,f}{l^2} \cdot x'\,(l - x') \cdot dx'$$

$$= \frac{4\,P\,a\,f}{l^3} \left\{ \int_0^b l\, x'^2\, dx' - \int_0^b x'^3\, dx' \right\},$$

$$\int_0^b B\, x'\, y\, dx' = \frac{4\,P\,a\,f}{l^3} \left(l \cdot \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \right).$$

Durch Addition ergibt sich

$$\int_0^l M\, y\, dx = \frac{4\,P\,f}{l^3} \left[b\,a^3 \left(\frac{l}{3} - \frac{a}{4} \right) + a\,b^3 \left(\frac{l}{3} - \frac{b}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{P\,a\,b\,f}{3\,l^3} \left[4\,l\,(a^2 + b^2) - 3\,(a^3 + b^3) \right].$$

Ferner ist

$$\int_0^l y^2 dx = \int_0^l \left[\frac{4f}{l^2} x (l-x)\right]^2 dx = \frac{16 f^2}{l^4} \int_0^l x^2 (l-x)^2 dx$$

$$= \frac{16 f^2}{l^4} \int_0^l (x^2 l^2 - 2 x^3 l + x^4)\, dx$$

$$= \frac{16 f^2}{l^4} \left[\frac{x^3}{3} \cdot l^2 - \frac{x^4}{4} \cdot 2l + \frac{x^5}{5}\right]_0^l$$

$$= \frac{8}{15} f^2 l .$$

Setzen wir die errechneten Integrale in (3) ein, so erhalten wir

$$H = \frac{P a b f}{3 l^3} \cdot \frac{15}{8 f^2 l} [4 l (a^2 + b^2) - 3 (a^3 + b^3)] ,$$

das mit $l = a + b$ den wagerechten Seitenschub

$$H = \frac{5}{8} \cdot \frac{P a b}{l^3 f} \cdot (a^2 + 3 a b + b^2)$$

ergibt.

Aus dieser Gleichung erhalten wir die Einflußlinie für H, wenn wir $P = 1$; $a = x$ und $b = l - x$ setzen. Es wird

$$\eta = \frac{5}{8} \cdot \frac{x (l-x)}{l^3 f} [x^2 + 3x (l-x) + (l-x)^2],$$

$$\eta = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{l^3 f} (l^3 x - 2 l x^3 + x^4) = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{f} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) .$$

Das Aufzeichnen der H-Linie wird durch die Zahlentafel

$$z = \frac{x}{l} - 2 \cdot \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}$$

erleichtert, die für $\frac{x}{l} = 0{,}1$ bis $\frac{x}{l} = 0{,}5$ berechnet ist, da die H-Linie zur Mitte symmetrisch ist.

Zahlentafel.

$\frac{x}{l}$ =	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000
$\frac{x^3}{l^3}$ =	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250
$2 \cdot \frac{x^3}{l^3}$ =	0,0020	0,0160	0,0540	0,1280	0,2500
$\frac{x^4}{l^4}$ =	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
z =	0,0981	0,1856	0,2541	0,2976	0,3125

Der Träger sei gleichmäßig belastet. In Abb. 286 ist die Einflußlinie $\eta = f(x)$ gezeichnet; ein Lastteilchen $p\,dx$ ruft einen wagerechten Seitenschub

$$dH = p \cdot dx \cdot \eta$$

hervor; demnach ist

$$H = \int_0^l p \cdot \eta \cdot dx$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{p}{l^3 f} \int_0^l (l^3 x - 2\, l\, x^3 + x^4)\, dx$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{p}{l^3 f} \left[l^3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2\, l \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^l ,$$

$$H = \frac{p\, l^2}{8 f} = 0{,}125\, P \cdot \frac{l}{f} .$$

Die Einzellast P greift in der Mitte an. Mit Hilfe der Zahlentafel erhalten wir unmittelbar

$$H = P \cdot \eta_m = \frac{5}{8} \cdot \frac{P\, l}{f} \cdot 0{,}3125 = 0{,}195\, P \cdot \frac{l}{f} .$$

Zu dem gleichen Wert gelangen wir natürlich, wenn wir in der Gleichung der Einflußlinie x durch $l/2$ ersetzen; es wird

$$H = \frac{25}{128} \cdot \frac{P\, l}{f} = 0{,}195\, P \cdot \frac{l}{f} \cdot$$

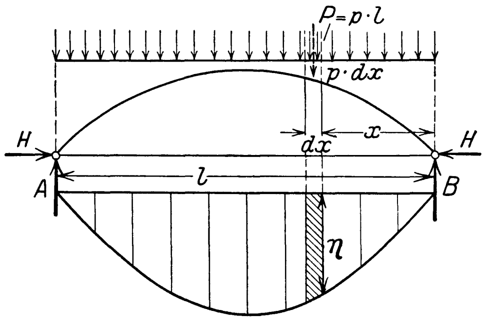


Abb. 286. Gleichmäßige Belastung.

Die Einflußlinie für H weicht so wenig von einer quadratischen Parabel ab, daß man sie gewöhnlich durch eine solche ersetzt, die über der Spannweite l den gleichen Flächeninhalt hat. Die Pfeilhöhe η_m^* dieser Ersatzparabel folgt aus der Bedingung gleicher Flächeninhalte

$$\frac{2}{3}\, \eta_m^* \cdot l = \int_0^l \eta\, dx = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{f l^3} \int_0^l (l^3 x - 2\, l x^3 + x^4)\, dx ,$$

$$\frac{2}{3}\, \eta_m^* \cdot l = \frac{5}{8}\, \frac{1}{f l^3} \left[l^3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 l \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x_5}{5} \right]_0^l = \frac{l^2}{8 f} \quad \text{oder} \quad \eta_m^* = \frac{3}{16} \cdot \frac{l}{f} .$$

Mit diesem Wert erhalten wir als Gleichung der Ersatzeinflußlinie für H

$$\eta^* = \frac{4 \eta_m^*}{l^2} \cdot x\, (l - x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x (l - x)}{f \cdot l} .$$

Aus ihr entnehmen wir den wagerechten Seitenschub H^*, den eine Last P in der Entfernung a von A bzw. b von B hervorruft, zu

$$H^* = P \cdot \eta^* = \frac{3}{4} \cdot \frac{P a b}{l \cdot f} ,$$

der für eine Last P in der Mitte mit $a = b = \frac{l}{f}$ in

$$H^* = \frac{3}{16} \cdot \frac{P\,l}{f} = 0{,}188 \cdot P\,\frac{l}{f}$$

übergeht und nur wenig von dem strengen Werte

$$H = 0{,}195 \cdot P\,\frac{l}{f}$$

abweicht.

Sind Normalkräfte zu berücksichtigen, so ist H mit

$$v = \frac{\int\limits_0^l y^2\,dx}{\int\limits_0^l (y^2 + i^2)\,dx}$$

zu multiplizieren. Für den Sonderfall des Parabelbogens wird wegen

$$\int\limits_0^l y^2\,dx = \frac{8}{15} f^2\,l$$

der Beiwert

$$v = \frac{\frac{8}{15} f^2\,l}{\frac{8}{15} f^2\,l + i^2\,l} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{i^2}{f^2}} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{J}{f^2 F}}.$$

3. Der geschlossene Rahmen.

Der rechteckige Rahmen der Abb. 287 mit steifen Ecken sei durch die beiden gleich großen Kräfte P angegriffen. Statisch nicht bestimmbar sind die Eckmomente M. Wir schneiden nach Abb. 288 durch den Rahmen; dann erfordert das Gleichgewicht des abgetrennten Teiles das Hinzufügen der Einzelkräfte $P/2$ und des längs sämtlicher vier Stäbe gleichbleibenden Biegungsmomentes M. Wegen der Symmetrie der Gesamtanordnung genügt die Untersuchung eines Viertelrahmens, den wir in die beiden Teile I und II zerlegen.

Teil I:

$$M_x = M; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M} = 1;$$

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{1}{E J_1} \int\limits_0^{h/2} M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M} \cdot dx = \frac{1}{E J_1} \int\limits_0^{h/2} M \cdot dx = \frac{M \cdot h}{2 E J_1}.$$

Teil II:

$$M_x = M - \frac{P}{2} \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M} = 1;$$

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{1}{E J_2} \int\limits_0^{l/2} M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M} \cdot dx = \frac{1}{E J_2} \int\limits_0^{l/2} \left(M - \frac{P}{2} x\right) dx;$$

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{M\,l}{2 E J_2} - \frac{P l^2}{16 E J_2}.$$

Nach dem Satze von Castigliano macht die statisch nicht bestimmbare Größe M die Formänderungsarbeit zu einem Minimum, so daß wir unter Vernachlässigung der Längskaft bzw. Querkraft $P/2$ die Bedingungsgleichung

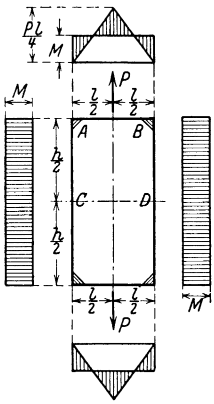


Abb. 287. Geschlossener Rahmen.

$$0 = \frac{M \cdot h}{2EJ_1} + \frac{M}{2EJ_2} - \frac{Pl^2}{16EJ_2}$$

erhalten, aus der sich

$$M = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{l} \cdot \frac{J_2}{J_1}}$$

ergibt.

Für den Sonderfall eines quadratischen Rahmens mit gleichen Querschnitten wird wegen $h = l$ und $J_2 = J_1$

$$M = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{2}.$$

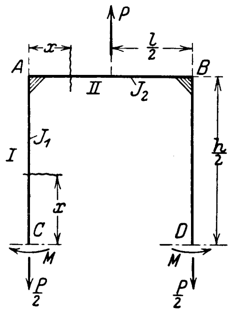


Abb. 288. Geschlossener Rahmen.

Die Gesamtmomentenflächen der vier Stäbe sind in Abb. 287 dargestellt; die größte Beanspruchung tritt in der Mitte des Stabes AB auf, der das Biegungsmoment

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{l} \cdot \frac{J_2}{J_1}}$$

aufnehmen muß.

4. Festigkeitsberechnung von Bohrmaschinen[1]).

Berechnung von Säulenständern mit rundem Rohrquerschnitt. Die in der Praxis gebräuchlichen Arten von Säulenbohrmaschinenständern sind in den Abb. 289—293 wiedergegeben, die den statischen Aufbau kennzeichnen. Es ist

Abb. 289 das statisch bestimmte System mit einer Säule oder Doppelsäule (Auslegermaschinen);

Abb. 290 das dreifach statisch unbestimmte System des dreiseitigen, fest eingespannten Rahmens;

Abb. 291 das neunfach statisch unbestimmte System des dreiteiligen, fest eingespannnten Stockwerkrahmens;

Abb. 292 das sechsfach statisch unbestimmte System des dreiteiligen, fest eingespannten Rahmens;

Abb. 293 das zwölffach statisch unbestimmte System einer nach Abb. 291 und 292 gebildeten Vereinigung.

Die Belastung des Gestelles setzt sich zusammen aus

1. dem senkrechten Vorschubdruck, der außerhalb der Säulenachse angreift,

2. der Umfangskraft, die sich aus dem Drehmoment am Bohrerumfang ergibt,

[1]) Vgl. G. Schlesinger: Bohrmaschinen. Werkstatts-Technik 1923, 15. Juli.

3. dem im oberen Räderkasten auftretenden Zahndruck oder Riemenzug an der Stufenscheibe,

von denen die beiden letzten für die Querschnittbemessung des Ständers gegenüber dem Einfluß des senkrechten Bohrdruckes ohne Bedeutung sind.

Der Gang der Rechnung soll an einem Beispiel nach Abb. 290 gezeigt werden. Es ist in Abb. 294 gezeichnet und hat folgende Abmessungen:

$a = 43$ cm	$J_1 = 2265$ cm^4	$W_1 = 266$ cm^3
$b = 49{,}5$,,	$J_2 = 1250$,,	$W_2 = 192$,,
$g = 28$,,	$J_3 = 1975$,,	$W_3 = 255$,,
$h = 140$,,	$J_4 = 1660$,,	$W_4 = 220$,,
$k = 112$,,	$J_5 = 144$,,	$W_5 = 41$,,

Die Kraft P ist gleich 1340 kg.

Wir schneiden durch den oberen Riegel und ersetzen die in dem Schnitt auftretenden Spannungen durch äußere Kräfte bzw. Momente. Hinzugefügt werden: Die Querkraft X_a, die Längskraft X_c und das Moment X_b. Nach dem

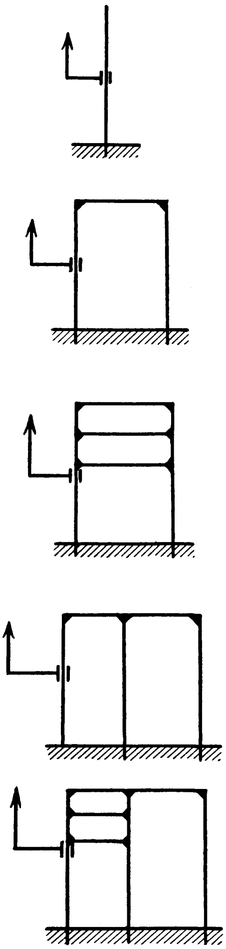


Abb. 289 bis 293. Säulenbohrmaschinenständer.

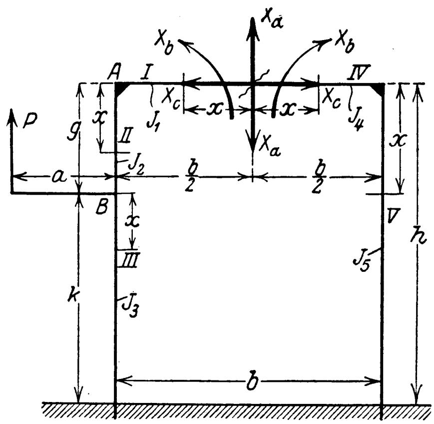


Abb. 294. Kraftverteilung am Ständer der Firma L. Burkhhardt G. Weber.

Satze von Castigliano (S. 197) machen die statisch nicht bestimmbaren Größen X_a, X_b, X_c die Formänderungsarbeit zu einem Minimum.

Stabteil I:

$$M_I = X_b + X_a \cdot x; \qquad \frac{\partial M_I}{d X_a} = x ,$$

$$\int \frac{M_I}{E J_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial X_a} \cdot dx = \frac{1}{E J_1} \int\limits_0^{b/2} (X_b + X_a \cdot x)\, x \cdot dx .$$

Stabteil II:

$$M_{II} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x; \qquad \frac{\partial M_{II}}{\partial X_a} = \frac{b}{2},$$

$$\int \frac{M_{II}}{EJ_2} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial X_a} \cdot dx = \frac{1}{EJ_2} \int_0^g \left(X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x\right) \cdot \frac{b}{2} \cdot dx\,.$$

Stabteil III:

$$M_{III} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c\,(g+x) - P \cdot a; \qquad \frac{\partial M_{III}}{\partial X_a} = \frac{b}{2},$$

$$\int \frac{M_{III}}{EJ_3} \cdot \frac{\partial M_{III}}{\partial X_a} \cdot dx = \frac{1}{EJ_3} \int_0^k \left[X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c\,(g+x) - Pa\right] \cdot \frac{b}{2} \cdot dx.$$

Stabteil IV:

$$M_{IV} = X_b - X_a \cdot x; \qquad \frac{\partial M_{IV}}{\partial X_a} = -x\,,$$

$$\int \frac{M_{IV}}{EJ_4} \cdot \frac{\partial M_{IV}}{\partial X_a} \cdot dx = \frac{1}{EJ_4} \int_0^{b/2} (X_b - X_a \cdot x)\,(-x)\, dx\,.$$

Stabteil V:

$$M_V = X_b - X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x; \qquad \frac{\partial M_V}{\partial X_a} = -\frac{b}{2},$$

$$\int \frac{M_V}{EJ_5} \cdot \frac{\partial M_V}{\partial X_a} \cdot dx = \frac{1}{EJ_5} \int_0^h \left(X_b - X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x\right)\left(-\frac{b}{2}\right) \cdot dx\,.$$

Die Summe der Integrale ergibt die Verschiebung des Schnittpunktes, die gleich Null sein muß. Die durchgeführte Integration liefert bei einer Multiplikation mit EF_1 die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & X_b \cdot \frac{b^2}{8} + X_a \cdot \frac{b^3}{24} + \frac{J_1}{J_2} X_b \cdot \frac{b}{2}\, g + \frac{J_1}{J_2} X_a \cdot \frac{b^2}{4}\, g \\ & + \frac{J_1}{J_2} X_c \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{g^2}{2} + \frac{J_1}{J_3} \cdot X_b \cdot \frac{b}{2}\, k + \frac{J_1}{J_3} X_a \cdot \frac{b^2}{4}\, k + \frac{J_1}{J_3} X_c \cdot \frac{b}{2}\, gk \\ & + \frac{J_1}{J_3} X_c \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{k^2}{2} - \frac{J_1}{J_3} \cdot Pa\, \frac{b}{2}\, k - \frac{J_1}{J_4} X_b\, \frac{b^2}{8} + \frac{J_1}{J_4} X_a\, \frac{b^3}{24} \\ & - \frac{J_1}{J_5} X_b \cdot \frac{b}{2}\, h + \frac{J_1}{J_5} X_a \cdot \frac{b^2}{4}\, h - \frac{J_1}{J_5} \cdot X_c\, \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{2}\,. \end{aligned}$$

Mit den oben angegebenen Zahlenwerten vereinfacht sich die Gleichung zu

$$148\, X_a - 0{,}22\, X_b - 355\, X_c - 19200 = 0. \tag{a}$$

Bei der Aufstellung der Arbeitsgleichung haben wir die durch die Quer- und Längskraft geleistete Formänderungsarbeit gegen die Arbeit der Momente vernachlässigt, was auch im folgenden stets geschehen soll.

Eine zweite Gleichung erhalten wir aus der Bedingung

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_b} \cdot dx = 0 .$$

Stabteil I:

$$M_I = X_b + X_a \cdot x ; \quad \frac{\partial M_I}{\partial X_b} = 1 ,$$

$$\int \frac{M_I}{EJ_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial X_b} \cdot dx = \frac{1}{EJ_1} \int_0^{b/2} (X_b + X_a \cdot x)\, dx .$$

Stabteil II:

$$M_{II} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x ; \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial X_b} = 1 ;$$

$$\int \frac{M_{II}}{EJ_2} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial X_b} \cdot dx = \frac{1}{EJ_2} \int_0^{g} \left(X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x \right) \cdot dx .$$

Stabteil III:

$$M_{III} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c (g + x) - Pa ; \quad \frac{\partial M_{III}}{\partial X_b} = 1 ;$$

$$\int \frac{M_{III}}{EJ_3} \cdot \frac{\partial M_{III}}{\partial X_b} \cdot dx = \frac{1}{EJ_3} \int_0^{k} \left[X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c (g + x) - P \cdot a \right] \cdot dx .$$

Stabteil IV:

$$M_{IV} = X_b - X_a \cdot x ; \quad \frac{\partial M_{IV}}{\partial X_b} = 1 ,$$

$$\int \frac{M_{IV}}{EJ_4} \cdot \frac{\partial M_{IV}}{\partial X_b} \cdot dx = \frac{1}{EJ_4} \int_0^{b/2} (X_b - X_a\, x) \cdot dx .$$

Stabteil V:

$$M_V = X_b - X_a \frac{b}{2} + X_c x ; \quad \frac{\partial M_V}{\partial X_b} = 1 ,$$

$$\int \frac{M_V}{EJ_5} \cdot \frac{\partial M_V}{\partial X_b} \cdot dx = \frac{1}{EJ_5} \int_0^{h} \left(X_b - X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x \right) \cdot dx .$$

Die Bedingungsgleichung $\frac{\partial A}{\partial X_b} = 0$ liefert

$$\begin{aligned} 0 = {} & X_b \cdot \frac{b}{2} + X_a \cdot \frac{b^2}{8} + \frac{J_1}{J_2} X_b \cdot g + \frac{J_1}{J_2} X_a \cdot \frac{b}{2} g + \frac{J_1}{J_2} X_c \cdot \frac{g^2}{2} + \frac{J_1}{J_3} X_b \cdot k \\ & + \frac{J_1}{J_3} X_a \cdot \frac{b}{2} \cdot k + \frac{J_1}{J_3} X_c\, g\, k + \frac{J_1}{J_3} X_c \cdot \frac{k^2}{2} - \frac{J_1}{J_3} P a k + \frac{J_1}{J_4} X_b \frac{b}{2} \\ & - \frac{J_1}{J_4} X_a \frac{b^2}{8} + \frac{J_1}{J_5} X_b h - \frac{J_1}{J_5} X_a \frac{b}{2} h + \frac{J_1}{J_5} X_c \frac{h^2}{2} , \end{aligned}$$

die mit den gegebenen Zahlenwerten

$$5{,}3\, X_a - 0{,}25\, X_b - 17\, X_c + 777 = 0 \tag{b}$$

ergibt.

Die dritte Gleichung erhalten wir aus der Bedingung

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot dx = 0 \,.$$

Stabteil I:

$$M_I = X_b + X_a \cdot x; \quad \frac{\partial M_I}{\partial X_c} = 0 \,.$$

Der Anteil des Stabteiles I fällt heraus.

Stabteil II:

$$M_{II} = X_b + X_a \frac{b}{2} + X_c x; \qquad \frac{\partial M_{II}}{\partial X_c} = x \,,$$

$$\int \frac{M_{II}}{EJ_2} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial X_c} \cdot dx = \frac{1}{EJ_2} \int_0^g \left(X_b + X_a \frac{b}{2} + X_c x \right) x \, dx \,.$$

Stabteil III:

$$M_{III} = X_b + X_a \frac{b}{2} + X_c (g + x) - Pa; \qquad \frac{\partial M_{III}}{\partial X_c} = g + x \,,$$

$$\int \frac{M_{III}}{EJ_3} \cdot \frac{\partial M_{III}}{\partial X_c} \cdot dx = \frac{1}{EJ_3} \int_0^k \left[X_b + X_a \frac{b}{2} + X_c (g + x) - Pa \right] (g + x) \, dx \,.$$

Stabteil IV:

$$M_{IV} = X_b - X_a \cdot x; \qquad \frac{\partial M_{IV}}{\partial X_c} = 0 \,.$$

Der Anteil des Stabteiles IV fällt ebenfalls heraus.

Stabteil V:

$$M_V = X_b - X_a \frac{b}{2} + X_c x; \qquad \frac{\partial M_V}{\partial X_c} = x \,,$$

$$\int \frac{M_V}{EJ_5} \cdot \frac{\partial M_V}{\partial X_c} dx = \frac{1}{EJ_5} \int_0^h \left(X_b - X_a \frac{b}{2} + X_c x \right) x \, dx \,.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit EJ_3 und Addition nach dem Auflösen der Integrale:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{J_3}{J_2} X_b \cdot \frac{g^2}{2} + \frac{J_3}{J_2} X_a \frac{b}{2} \cdot \frac{g^2}{2} + \frac{J_3}{J_2} X_c \frac{g^3}{3} + X_b g k + X_b \frac{k^2}{2} \\ & + X_a \frac{b}{2} g k + X_a \frac{b}{2} \cdot \frac{k^2}{2} + X_c g^2 k + X_c g k^2 + X_c \cdot \frac{k^3}{3} \\ & - Pa \left(g k + \frac{k^2}{2} \right) + \frac{J_3}{J_5} X_b \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{J_3}{J_5} X_a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{J_3}{J_5} X_c \frac{h^3}{3} \,. \end{aligned}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$31\, X_a - 1{,}44\, X_b - 135\, X_c + 5420 = 0. \tag{c}$$

Die drei Gleichungen (a), (b), (c) sind Gleichungen 1. Grades mit drei Unbekannten, deren Auflösung zu dem Ergebnis

$$X_a = 207 \text{ kg},$$
$$X_b = 5500 \text{ cmkg},$$
$$X_c = 29 \text{ kg}$$

führt.

Die Momentenfläche wird ebenfalls abschnittsweise entwickelt.

Stabteil I: $M_I = X_b + X_a \cdot x,$

1. $x = 0$: $M_x = X_b = 5500$ cmkg,

2. $x = \frac{b}{2}$: $M_A = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} = 5500 + 207 \cdot 24{,}75 = 10623$ cmkg.

Stabteil IV:

$$M_{IV} = X_b - X_a \cdot x,$$

1. $x = 0$: $M_x = X_b = 5500$ cmkg,

2- $x = \frac{b}{2}$: $M_{IV_{\min}} = X_b - X_a \cdot \frac{b}{2} = 5500 - 207 \cdot 24{,}75 = 377$ cmkg.

Hiermit ist die Momentenfläche für den Querriegel als Trapez mit den Ordinaten

$$M_A = 10623 \text{ cmkg} \quad \text{und} \quad M_{IV_{\min}]} = 377 \text{ cmkg}$$

festgelegt.

Stabteil II:

$$M_{II} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot x,$$

1. $x = 0$: $M_A = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} = 10623$ cmkg,

2. $x = g$: $M_{B_{II}} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c \cdot g$

$$= 10623 + 29 \cdot 28 = 11435 \text{ cmkg}.$$

Stabteil III:

$$M_{III} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c\,(g + x) - Pa,$$

1. $x = 0$: $M_{B_{III}} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c g - Pa$

$$= M_{B_{II}} - Pa = 11435 - 1340 \cdot 43$$
$$= -46185 \text{ cmkg}.$$

2. $x = k$: $M_{III_{\max}} = X_b + X_a \cdot \frac{b}{2} + X_c\,(g + k) - Pa$

$$= M_{B_{III}} + X_c \cdot k = -46185 + 29 \cdot 112$$
$$= -42937 \text{ cmkg}.$$

Durch die Ordinaten

$$M_A' = 10623 \text{ cmkg}; \quad M_{B_{II}} = 11435 \text{ cmkg}; \quad M_{B_{III}} = -46185 \text{ cmkg};$$
$$M_{III_{\max}} = -42937 \text{ cmkg}$$

ist die Momentenfläche für die linke Hauptsäule festgelegt.

Stabteil V:

$$M_V = X_b - X_a \frac{b}{2} + X_c x .$$

1. $x = 0$: $\quad M_{V_{\min}} = X_b - X_a \frac{b}{2} = M_{IV_{\min}} = 377 \text{ cmkg} .$

2. $x = h$: $\quad M_{V_{\max}} = X_b - X_a \frac{b}{2} + X_c h = M_{V_{\min}} + 29 \cdot 140$
$$= 377 + 4060 = 4437 \text{ cmkg} .$$

Die Momentenfläche der rechten Versteifungssäule ist also ein Trapez mit den Ordinaten

$$M_{V_{\min}} = 377 \text{ cmkg} \quad \text{und} \quad M_{V_{\max}} = 4437 \text{ cmkg} .$$

Die Momentenflächen des Säulenständers sind in Abb. 295 dargestellt.

Wir wenden uns zur Bestimmung der größten Spannungen, wobei wir das Vorzeichen der Momente unberücksichtigt lassen.

Wir ermitteln zunächst die Beanspruchung des Querriegels.

Stabteil I:

$$M_{\max} = 10623 \text{ cmkg};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_I} = \frac{10623}{266} = 40 \text{ kg/cm}^2 .$$

Stabteil IV:

$$M_{\max} = 5500 \text{ cmkg};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{IV}} = \frac{5500}{220} = 25 \text{ kg/cm}^2 .$$

Wir untersuchen jetzt die Hauptsäule.

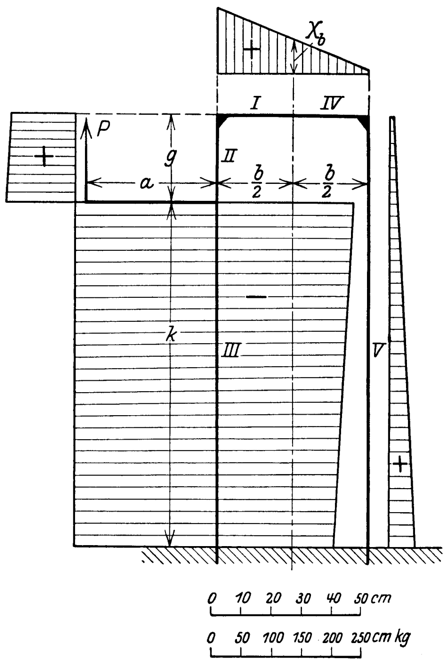


Abb. 295. Momentenflächen.

Stabteil II:

$$M_{\max} = 11435 \text{ cmkg}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{II}} = \frac{11435}{192} = 60 \text{ kg/cm}^2 .$$

Stabteil III:

$$M_{\max} = 46185 \text{ cmkg}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{III}} = \frac{46185}{255} = 181 \text{ kg/cm}^2.$$

Für die Versteifungssäule ist

$$M_{\max} = 4437 \text{ cmkg}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_V} = \frac{4437}{41} = 108 \text{ kg/cm}^2.$$

XIV. Stark gekrümmte Stäbe.

1. Der Spannungszustand.

Wir nennen einen Stab stark gekrümmt, wenn seine Querschnittsabmessungen im Vergleich zu dem Krümmungshalbmesser groß sind. In Abb. 296 ist ein Teil des Stabes dargestellt, dessen Querschnitte I und II den Zentriwinkel $d\varphi$ einschließen mögen. Eine Faserschicht im Abstande η von der Schwerachse hat die Länge

$$dl = (r + \eta)\, d\varphi;$$

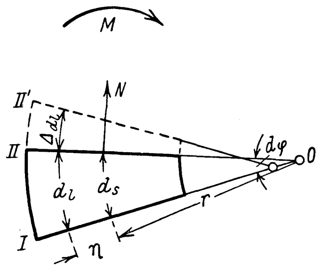


Abb. 296. Stark gekrümmter Stab.

sie erfährt durch die Längskraft N und das Biegungsmoment M — Schubkräfte werden vernachlässigt — eine Verlängerung

$$\Delta\, dl = \varepsilon \cdot dl,$$

also eine Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta dl}{dl} = \frac{\Delta\,(r+\eta) d\varphi}{(r+\eta) \cdot d\varphi}.$$

Wir lösen die Klammer des Zählers auf und schreiben

$$\varepsilon = \frac{\Delta (r\, d\varphi)}{(r+\eta)\, d\varphi} + \frac{\Delta\,(\eta\, d\varphi)}{(r+\eta)\, d\varphi}.$$

Erweitern wir mit r, so wird

$$\varepsilon = \frac{r \cdot \Delta\,(r d\varphi)}{(r+\eta) \cdot r d\varphi} + \frac{r \cdot \Delta\,(\eta d\varphi)}{(r+\eta) \cdot r d\varphi}$$

$$= \frac{r}{r+\eta} \cdot \frac{\Delta\,(r d\varphi)}{r d\varphi} + \frac{\eta}{r+\eta} \cdot \frac{\Delta\, d\varphi}{r d\varphi} \cdot r,$$

oder mit $r \cdot d\varphi = ds$

$$\varepsilon = \frac{r}{r+\eta} \cdot \frac{\Delta\, ds}{ds} + \frac{\eta}{r+\eta} \cdot \frac{\Delta\, d\varphi}{ds} \cdot r.$$

In dieser Gleichung können die Ausdrücke $\frac{\Delta\, ds}{ds}$ und $\frac{\Delta\, d\varphi}{ds}$ durch bekannte Größen ersetzt werden. Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung ist

$$N = \int \sigma\, dF;$$

nach der dritten Gleichgewichtsbedingung ist

$$M = \int \sigma\, dF \cdot \eta,$$

wenn wir wie üblich die Spannungen als äußere Kräfte in der Schnittfläche des abgetrennten Stabteiles annehmen. Mit dem Hookeschen Geradliniengesetz

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma = \frac{\sigma}{E}$$

wird

$$N = E \int \varepsilon \, dF \quad \text{und} \quad M = E \int \varepsilon \eta \, dF .$$

Ersetzen wir in beiden Gleichungen ε durch den vorher gefundenen Wert, so erhalten wir zwei Gleichungen

$$\frac{N}{E} = \int \frac{r}{r+\eta} dF \cdot \frac{\Delta\, d s}{d s} + \int \frac{\eta}{r+\eta} dF \cdot r \cdot \frac{\Delta\, d\varphi}{d s}$$

$$\frac{M}{E} = \int \frac{\eta}{r+\eta} dF \cdot r \cdot \frac{\Delta\, d s}{d s} + \int \frac{\eta^2}{r+\eta} dF \cdot r \frac{\Delta\, d\varphi}{d s} ,$$

aus denen nach den Regeln der Algebra die Unbekannten

$$\frac{\Delta\, d s}{d s} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\, d\varphi}{d s}$$

berechnet werden können. Ziehen wir zunächst die Festwerte vor die Integrale, so wird

$$\frac{N}{E} = \frac{\Delta\, d s}{d s} \int \frac{r}{r+\eta} dF + \frac{\Delta\, d\varphi}{d s} \cdot r \int \frac{\eta}{r+\eta} \cdot dF ,$$

$$\frac{M}{E} = \frac{\Delta\, d s}{d s} \cdot r \int \frac{\eta}{r+\eta} dF + \frac{\Delta\, d\varphi}{d s} \cdot r \int \frac{\eta^2}{r+\eta} \cdot dF .$$

Aus

$$r : (r+\eta) = 1 - \frac{\eta}{r+\eta} \quad \text{und} \quad \eta^2 : (\eta + r) = \eta - r \cdot \frac{\eta}{r+\eta}$$

folgt

$$\int \frac{r}{r+\eta} dF = \int dF - \int \frac{\eta}{r+\eta} dF ,$$

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta} dF = \int \eta \, dF - r \int \frac{\eta}{r+\eta} \cdot dF.$$

Hierin ist $\int dF = F$ und $\int \eta \, dF = 0$, weil ηdF das statische Moment eines Querschnittsteilchens, bezogen auf die Schwerachse, ist. Das Integral $\int \frac{\eta}{r+\eta} d F$ stellt eine Fläche dar, deren Streifen im Verhältnis $\eta : (r + \eta)$ verkürzt sind; wir setzen

$$\int \frac{\eta}{r+\eta} \cdot dF = F' = - \varkappa \cdot F \text{ [1]}$$

und erhalten

$$\int \frac{r}{r+\eta} dF = F - F' , \quad \int \frac{\eta^2}{r+\eta} dF = - rF'.$$

Mit diesen Werten wird

$$\frac{N}{E} = \frac{\Delta\, d s}{d s} \cdot F - \frac{\Delta\, d s}{d s} \cdot F' + \frac{\Delta\, d\varphi}{d s} \cdot F' r$$

[1]) Das Minus-Zeichen wird eingeführt, weil F' stets negativ ist.

oder, wenn wir mit r erweitern,

$$r \cdot \frac{N}{E} = \frac{\Delta\, ds}{ds} \cdot F r - \frac{\Delta\, ds}{ds} \cdot F' r + \frac{\Delta\, d\varphi}{ds} \cdot F' r^2.$$

Ferner ist

$$\frac{M}{E} = \frac{\Delta\, ds}{ds} \cdot F' r - \frac{\Delta\, d\varphi}{ds} \cdot F' r^2.$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$r \cdot \frac{N}{E} + \frac{M}{E} = \frac{\Delta\, ds}{ds} \cdot F r \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \frac{M}{EFr}.$$

Setzen wir diesen Wert in die zweite Gleichung ein, so wird

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} \cdot F' r^2 = \frac{N}{EF} \cdot F' r + \frac{M}{EFr} \cdot F' r - \frac{M}{E},$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{N}{EFr} + \frac{M}{EFr^2} - \frac{M}{EF' r^2}.$$

Mit den gefundenen Werten $\frac{\Delta\, ds}{ds}$ und $\frac{\Delta\, d\varphi}{ds}$ folgt aus der Gleichung für ε

$$E \cdot \varepsilon = \sigma = \frac{r}{r+\eta}\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{Fr}\right) + \frac{\eta \cdot r}{r+\eta}\left(\frac{N}{Fr} + \frac{M}{Fr^2} - \frac{M}{F' r^2}\right),$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} - \frac{\eta}{r+\eta} \cdot \frac{M}{F' r},$$

oder, wenn wir den Beiwert $\varkappa$ einführen,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{\eta}{r+\eta} \cdot \frac{M}{\varkappa F r}.$$

Die Spannungskurve $\sigma = f(\eta)$ ist eine Hyperbel, die wegen der beiden ersten unveränderlichen Glieder im allgemeinen n i c h t durch den Nullpunkt geht; d. h. die Nullinie ist nicht Schwerlinie. Die Kurve ist in Abb. 297 gezeichnet; sie verläuft asymptotisch zu dem Achsenkreuz σ y, dessen Anfangspunkt B die Entfernung $\frac{M}{\varkappa F r}$ von AA' hat. Die beiden ersten Glieder der Gleichung stellen als Funktion von y eine Parallele zur y-Achse dar, die den Abstand

$$e = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr}$$

von der Geraden AA' hat. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Hyperbel ergibt die Lage der Nullinie des Querschnittes und damit das Schaubild der Spannungsverteilung, das in Abb. 297 durch Strichelung hervorgehoben ist.

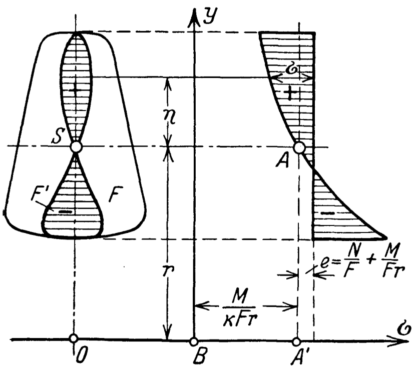


Abb. 297. Spannungen.

Haben die äußersten Fasern die Abstände e_1 und e_2 von der Schwerachse, so erhalten wir als Randspannungen

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{F\,r} + \frac{e_1}{r+e_1} \cdot \frac{M}{\varkappa F\,r},$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{M}{F\,r} - \frac{e_2}{r-e_2} \cdot \frac{M}{\varkappa F\,r}.$$

Die neutrale Faser geht nur dann durch den Schwerpunkt, wenn für $\eta = 0$ auch $\sigma = 0$ ist. Hieraus folgt $\frac{N}{F} + \frac{M}{F\,r} = 0$ oder $M = -N\,r$. Dieser Belastungsfall entsteht z. B. dann, wenn im Krümmungsmittelpunkt eine Kraft N wirkt, die den Krümmungsradius zu vergrößern sucht.

2. Die Ermittlung der Hilfsfläche $F' = \int \frac{\eta}{r+\eta}\,dF = -\varkappa F$.

a) Zeichnerische Ermittlung nach M. Tolle[1]).

Da η zu beiden Seiten der Schwerachse verschiedene Vorzeichen hat, läßt sich F' in zwei Einzelflächen F_1 und F_2 zerlegen, von denen F_1 den Werten $\eta > 0$ und F_2 den Werten $\eta < 0$ entspricht. Die Begrenzungslinie der Flächen F_1 und F_2 findet man zeichnerisch folgendermaßen:

Ziehe den Strahl OA (Abb. 298) und dazu durch den Schwerpunkt S eine Parallele, die auf der Wagerechten durch A den gesuchten Punkt B abschneidet. Derselbe Strahl OA liefert gleichzeitig den Punkt B_1 der Fläche F_2. Die Differenz der Flächen F_1 und F_2 ergibt die Fläche F', da

$$F_2 - F_1 = F'$$

ist.

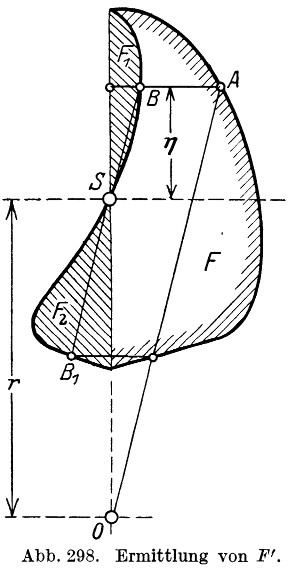


Abb. 298. Ermittlung von F'.

Bei symmetrischen Figuren, die eigentlich nur in Frage kommen, genügt es, mit der halben Fläche zu arbeiten, wie in Abb. 298 angedeutet. Will man größere Genauigkeit erzielen, so kann man von vornherein die ganze Breite der Fläche von einer Senkrechten aus nach einer Seite abtragen und das beschriebene Verfahren anwenden.

Liegt der Punkt O von der Schwerachse ziemlich weit entfernt, so wird F' sehr klein. In diesem Falle wird

$$-\varkappa F\,r = \int \frac{\eta\,r}{r+\eta}\,dF,$$

das mit

$$\frac{r}{r+\eta} = 1 - \frac{\eta}{r+\eta}$$

$$-\varkappa F\,r = \int \eta\,dF - \int \frac{\eta^2\,dF}{r+\eta} = -\int \frac{\eta^2\,dF}{r+\eta}$$

[1]) Tolle, M.: Die Reglung der Kraftmaschinen. Berlin: Julius Springer.

ergibt. Damit erhält man

$$-\varkappa F r^2 = -\int \frac{\eta^2\, dF}{\frac{r+\eta}{r}} = -\int \frac{\eta^2\, dF}{1+\frac{\eta}{r}} = -J',$$

das für

$$r \gg \eta$$

und damit

$$1 + \frac{\eta}{r} \approx 1$$

in

$$\varkappa F r^2 \approx \int dF\, \eta^2 = J_s$$

übergeht. J_s ist das auf die Schwerachse bezogene Trägheitsmoment. Das Gesetz der Spannungsverteilung lautet dann

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{\eta}{r+\eta} \cdot \frac{Mr}{J_s}$$
$$= \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{1}{1+\frac{\eta}{r}} \cdot \frac{M\eta}{J_s},$$

woraus mit $\dfrac{1}{1+\frac{\eta}{r}} \approx 1$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot \eta}{J_s} + \frac{M}{Fr}$$

folgt.

Bei sehr großem r fällt das letzte Glied nicht mehr ins Gewicht, so daß angenähert gesetzt werden darf:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot \eta}{J_s},$$

wie wir S. 278 für den geraden Stab gefunden haben, der durch eine Längskraft und ein Moment beansprucht wird.

b) Rechnerische Ermittlung.

Der rechteckige Querschnitt der Breite *b* und der Höhe *h*.

Es ist

$$F' = \int \frac{\eta\, dF}{r+\eta} \quad \text{und} \quad dF = b\, d\eta,$$

mithin

$$F' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b\,\eta\, d\eta}{r+\eta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b\eta + br - br}{r+\eta}\, d\eta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[b - \frac{b\,r}{r+\eta}\right] d\eta$$

$$= \Big[b\,\eta - br \cdot ln\,(r+\eta)\Big]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = bh - br \cdot ln \frac{r+\frac{h}{2}}{r-\frac{h}{2}},$$

daher

$$\varkappa = -\frac{F'}{F} = \frac{r}{h}\, ln \frac{r+\frac{h}{2}}{r+\frac{h}{2}} - 1.$$

Setzt man den Abstand der äußersten Faser

$$\frac{h}{2} = e,$$

so folgt

$$\varkappa = \frac{r}{2e} \ln \frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}} - 1.$$

Für $r > e$ ist

$$\ln \frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}} = 2\left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^5 + \cdots\right],$$

daher

$$\varkappa = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \cdots$$

Die nachstehende Tabelle gibt $\varkappa$ für verschiedene Werte $\frac{e}{r}$.

$\frac{e}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\varkappa$	0,003354	0,01366	0,0317	0,0591	0,0986	0,1552	0,2390	0,3733	0,6358	0,9282

Der kreisförmige und elliptische Querschnitt. Zwecks Entwicklung in eine unendliche Reihe setzen wir

$$F' = \int \frac{\eta\, dF}{r+\eta} = \int \frac{\eta}{r}\left[\frac{1}{1+\frac{\eta}{r}}\right] dF = \int \frac{\eta}{r}\left[1 - \frac{\eta}{r} + \left(\frac{\eta}{r}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{r}\right)^3 + \left(\frac{\eta}{r}\right)^4 \cdots\right] dF$$

$$= \frac{1}{r}\int \eta\, dF - \frac{1}{r^2}\int \eta^2\, dF + \frac{1}{r^3}\int \eta^3\, dF - + \cdots .$$

Da $\int \eta\, dF = 0$ und $\int \eta^2\, dF = J_s$ ist, so wird

$$-F' = \frac{J_s}{r^2} - \frac{1}{r^3}\int \eta^3 dF + \frac{1}{r^4}\int \eta^4 dF - \frac{1}{r^5}\int \eta^5\, dF + \frac{1}{r^6}\int \eta^6 dF - + \cdots .$$

Beim kreisförmigen Querschnitt, dessen Halbmesser gleich e gesetzt werde, fallen beim Einsetzen der Grenzen $-e$ und $+e$ die Integrale mit den ungeraden Potenzen von η fort. Es ist also

$$-F' = \frac{J_s}{r^2} + \frac{1}{r^4}\int \eta^4\, dF + \frac{1}{r^6}\int \eta^6 dF + \cdots$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 61 wird

$$x = e \cdot \cos\varphi;\ \eta = e \cdot \sin\varphi;\quad d\eta = e \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi;$$

$$dF = 2x \cdot d\eta = 2\, e^2 \cos^2\varphi\, d\varphi;$$

$$\int_{-e}^{+e} \eta^4\, dF = 4\, e^6 \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \cos^2\varphi\, d\,\varphi = \frac{\pi}{8} e^6;$$

$$\int_{-e}^{+e} \eta^6\, dF = 4\, e^8 \int_0^{\pi/2} \sin^6\varphi \cos^2\varphi\, d\,\varphi = \frac{5}{64}\pi\, e^8.$$

Mit $J_s = \frac{1}{4} \pi e^4$ erhalten wir

$$-F' = \pi e^2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{e}{r}\right)^2 + \pi e^2 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{e}{r}\right)^4 + \pi e^2 \cdot \frac{5}{64} \left(\frac{e}{r}\right)^6 + \cdots,$$

$$\varkappa = -\frac{F'}{F} = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{e}{r}\right)^6 + \cdots.$$

Die Gleichung für $\varkappa$ gilt auch für den elliptischen Querschnitt, wobei e die Halbachse ist, die in die Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt fällt. Die Werte $\varkappa$ sind der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

$\frac{e}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\varkappa$	0,0025126	0,010205	0,0236	0,0436	0,0718	0,1111	0,1668	0,2500	0,3929	0,5241

Der trapezförmige Querschnitt (Abb. 299). Die Gleichung für die Hilfsfläche lautet

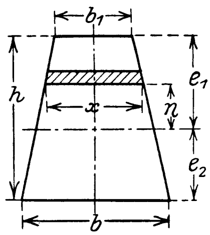


Abb. 299. Trapez-Querschnitt.

$$F' = \int \frac{\eta}{r + \eta} \cdot dF.$$

Wir setzen

$$r + \eta = z; \quad \eta = z - r.$$

Dann wird

$$F' = \int \frac{z - r}{z} \cdot dF = \int dF - r \int \frac{dF}{z}$$

oder

$$F' = F - r \int \frac{dF}{z}.$$

Mit

$$dF = x \cdot d\eta = \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 - \eta)\right] \cdot d\eta \quad \text{und} \quad \eta = z - r, \quad \text{also} \quad d\eta = dz$$

wird

$$F' = F - r \int \frac{dz}{z} \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r) - \frac{b - b_1}{h} \cdot z\right]$$

$$= F - r \int \frac{dz}{z} \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r)\right] + \frac{b - b_1}{h} r \int dz$$

$$= F - r \cdot ln z \cdot \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r)\right] + \frac{b - b_1}{h} \cdot r \cdot z \Big|_{r - e_2}^{r + e_1}$$

$$= F - r \cdot \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r)\right] \cdot ln \frac{r + e_1}{r - e_2} + \frac{b - b_1}{h} \cdot r (e_1 + e_2)$$

$$= F - r \left\{\left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r)\right] \cdot ln \frac{r + e_1}{r - e_2} - (b - b_1)\right\},$$

$$\frac{F'}{F} = 1 - \frac{r}{F} \left\{\left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 + r)\right] \cdot ln \frac{r + e_1}{r - e_2} - (b - b_1)\right\},$$

$$\varkappa = -\frac{F'}{F} = -1 + \frac{2r}{(b + b_1) \cdot h} \left\{\left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (r + e_1)\right] \cdot ln \frac{r + e_1}{r - e_2} - (b - b_1)\right\}.$$

Für das gleichschenklige Dreieck der Grundlinie *b* und der Höhe *h* ist

$$b_1 = 0\,, \quad e_1 = \frac{2}{3}h, \quad e_2 = \frac{1}{3}h\,.$$

Folglich wird

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{bh}\left\{\frac{b}{h}\left(r + \frac{2}{3}h\right) ln \frac{r + \frac{2}{3}h}{r - \frac{h}{3}} - b\right\},$$

$$= -1 + \frac{2r}{h}\left\{\left(\frac{r}{h} + \frac{2}{3}\right) ln \frac{r + \frac{2}{3}h}{r - \frac{h}{3}} - 1\right\}.$$

3. Die Formänderung.

a) Der Krümmungshalbmesser.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \frac{M}{EFr}, \tag{1}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{N}{EFr} + \frac{M}{EFr^2} - \frac{M}{EF'r^2} \tag{2}$$

erhalten wir die Änderung der Bogenmittellinie zu

$$\Delta s = \int \Delta\, ds = \int \frac{N}{EF} ds + \int \frac{M}{EFr} ds$$

und die Drehung zweier Querschnitte gegeneinander zu

$$\Delta\, \varphi = \int \Delta\, d\, \varphi = \int \frac{N}{EFr} ds + \int \frac{M}{EFr^2} ds - \int \frac{M}{EF'r^2} ds\,.$$

Die Änderung des Krümmungshalbmessers ist durch

$$ds + \Delta\, ds = r'\,(d\varphi + \Delta\, d\varphi)$$

bestimmt, die mit $ds = r \cdot d\varphi$ in

$$r d\varphi \cdot \left(1 + \frac{\Delta\, ds}{ds}\right) = r'\, d\,\varphi \left(1 + \frac{\Delta\, d\varphi}{d\,\varphi}\right)$$

übergeht; r' ist die Größe des Krümmungshalbmessers nach der Formänderung. Die Winkeländerung erhalten wir aus Gleichung (2) mit $ds = r d\varphi$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{r d\varphi} = \frac{N}{EFr} + \frac{M}{EFr^2} - \frac{M}{EF'r^2},$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} = \frac{N}{EF} + \frac{M}{EFr} - \frac{M}{EF'r}\,. \tag{3}$$

Aus

$$r\left(1 + \frac{\Delta\, ds}{ds}\right) = r'\left(1 + \frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi}\right)$$

folgt

$$\frac{r}{r'} = 1 + \frac{\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta\, ds}{ds}}{1 + \frac{\Delta\, ds}{ds}}. \tag{4}$$

Der Zähler ist als Differenz der Gleichungen (3) und (1)

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta\, ds}{ds} = -\frac{M}{E\,F'\,r},$$

der Nenner wird mit Hilfe der Gleichung (1) umgeformt; man erhält

$$\frac{r}{r'} = 1 - \frac{\frac{M}{E\,F'\,r}}{1 + \frac{N}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r}},$$

oder

$$\frac{r}{r'} - 1 = -\frac{M}{E\,F'\,r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{N}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r}}.$$

Die Division durch r liefert

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = -\frac{M}{E\,F'\,r^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{N}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r}}, \tag{5}$$

wofür wir nach Seite 402 mit

$$F'\,r^2 = -\varkappa F\,r^2 = -J'$$

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E\,J'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{N}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r}}$$

schreiben können.

Angenähert ist

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E\,J_s}, \tag{5a}$$

wenn bei großem r und kleinen Querschnittsabmessungen, d. h. für schwach gekrümmte Stäbe (Seite 379)

$$\frac{\eta}{r} \text{ und } \frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{N}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r}$$

sehr klein sind.

In diesem Falle folgt aus (2)

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = -\frac{M}{E\,F'\,r^2}.$$

Nach den vorstehenden Formeln ist $F'\,r^2$ angenähert gleich $-J_s$. Folglich wird

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{M}{E\,J_s}, \tag{6}$$

die Winkeländerung läßt sich also durch dieselbe Formel wie bei dem geraden Stab ausdrücken (Seite 142).

b) Formänderung der Mittellinie.

Der Stab $APCB$ der Abb. 300 sei in A senkrecht eingespannt und durch äußere Kräfte belastet, z. B. durch eine in B angreifende Kraft. Hierdurch ändert sich die Mittellinie und damit auch die Größe der Koordinaten x_c und y_c des Punktes C.

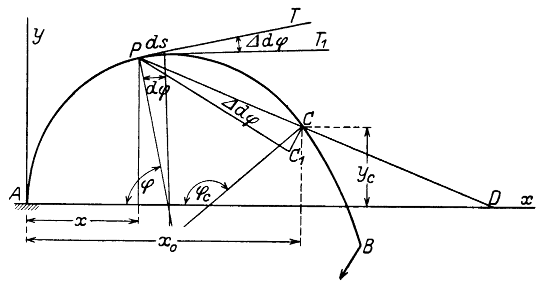


Abb. 300. Formänderung der Mittellinie.

Zwei Querschnitte im Abstand ds drehen sich um den Winkel $\Delta d\varphi$. Der Punkt C wandert auf dem Kreisbogen $\widehat{CC_1} = PC \cdot \Delta d\varphi$ nach C_1. Die hierdurch hervorgerufenen Koordinatenänderungen des Punktes C gegenüber dem eingespannt gedachten Punkt P mit den Koordinaten x und y sind

$$d\,(\delta_{h'}) = -\widehat{CC_1}\sin CDA = -(y - y_c)\,\Delta d\varphi = (y_c - y)\,\Delta d\varphi,$$

$$d\,(\delta_{v'}) = -\widehat{CC_1}\cos CDA = -(x_c - x)\,\Delta d\varphi = (x - x_c)\,\Delta d\varphi.$$

Außerdem wächst ds in Richtung der Tangente um εds, so daß der Punkt C die zusätzlichen Verschiebungen

$$d\,(\delta_{h''}) = \varepsilon ds \sin\varphi = \varepsilon dx \quad \text{und} \quad d\,(\delta_{v''}) = \varepsilon ds \sin\varphi = \varepsilon dy$$

erfährt.

Die durch die Änderung der Richtung und Länge von ds hervorgerufene Änderung der Koordinaten von C beträgt daher

$$d\,(\delta h) = (y_c - y)\,\Delta d\varphi + \varepsilon dx,$$

$$d\,(\delta v) = (x - x_c)\,\Delta d\varphi + \varepsilon dy.$$

Für den ganzen Bogen zwischen A und C wird

$$\left.\begin{aligned} \delta h_c &= \int_0^{\varphi_c} (y_c - y)\cdot\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\cdot d\varphi + \int_0^{x_c}\frac{\Delta ds}{ds}\,dx \\ \delta v_c &= \int_0^{\varphi_c} (x - x_c)\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\cdot d\varphi + \int_0^{y_c}\frac{\Delta ds}{ds}\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Hierin sind $\frac{\Delta ds}{ds}$ und $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ durch die Gleichungen (1) und (3) bestimmt.

Für Stäbe mit verhältnismäßig großem Krümmungshalbmesser vernachlässigen wir in (3) $\frac{N}{EF} + \frac{M}{EFr}$ gegen $-\frac{M}{EF'r}$ und nehmen an, daß die Querabmessungen des Stabes so klein gegenüber r sind, daß wir $-F'r^2$ durch J_s ersetzen können. Es wird dann

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} \approx -\frac{M r}{E F' r^2} \approx \frac{M r}{E J_s}\,.$$

Vernachlässigen wir in (1) $\frac{M}{E F r}$ gegen $\frac{N}{E F}$, so wird

$$\frac{\Delta\, d s}{d s} \approx \frac{N}{E F}\,.$$

Durch Einsetzen dieser Werte folgt angenähert

$$\left.\begin{aligned} \delta h_c &= \int_0^{\varphi_c} (y_c - y)\,\frac{M r}{E J_s}\, d\varphi + \int_0^{x_c} \frac{N}{E F}\, dx \\ \delta v_c &= \int_0^{\varphi_c} (x - x_c)\,\frac{M r}{E J_s}\, d\varphi + \int_0^{y_c} \frac{N}{E F}\, dy \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Bei hinreichend großem r tritt der durch die zweiten Integrale der Gleichungen (7a) gemessene Anteil der Formänderungsarbeit gegenüber dem der ersten Integrale zurück, so daß sich in weiterer Annäherung

$$\left.\begin{aligned} \delta h_c &= \int_0^{\varphi_c} (y_c - y)\,\frac{M r}{E J_s}\, d\varphi \\ \delta v_c &= \int_0^{\varphi_c} (x - x_c)\,\frac{M r}{E J_s}\, d\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7b}$$

ergibt.

4. Angenäherte Berechnung eines Kolbenringes.

Man pflegt Kolbenringe auf einen um Δr größeren Halbmesser abzudrehen. Wenn der eingelegte Ring überall satt anliegen soll, muß sich der Halbmesser auf r vermindern. Gleichung (5a) lautet dann

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} = \frac{M}{E J_s} = \frac{M}{E J}\,,$$

$$\frac{\Delta r}{r^2 + r \cdot \Delta r} = \frac{M}{E J}\,.$$

Da Δr sehr klein ist, darf $r \cdot \Delta r$ gegen r^2 vernachlässigt werden; wir erhalten

$$\frac{\Delta r}{r^2} = \frac{M}{E J}\,.$$

Für den rechteckigen Querschnitt des Ringes von der Breite b und der Dicke h ist

$$J = \frac{b h^3}{12}\,, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta r}{r^2} = \frac{1}{E} \cdot \frac{12\, M}{b h^3}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$h = \sqrt[3]{\frac{12\, M}{E \cdot b} \cdot \frac{r^2}{\Delta r}}\,.$$

Es sei p in kg/cm² die Belastung des Ringes (Abb. 301); auf ein Bogenelement $ds = r \cdot d\varphi$ entfällt eine Kraft

$$dP = p b r d\varphi,$$

ihr Moment, bezogen auf den Punkt A ist

$$dM = p b r d\varphi \cdot r \cdot \sin\varphi,$$

demnach das auf den Kreisbogen entfallende Moment

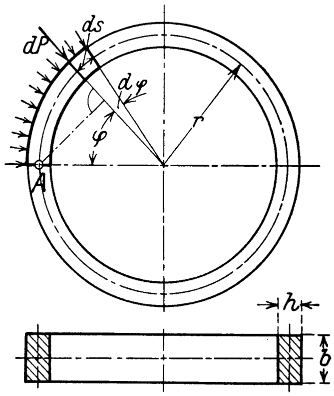


Abb. 301. Kolbenring.

$$M = \int_0^{\varphi} p b r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi,$$

$$= p b r^2 \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\varphi} = p b r^2 \big[(-\cos\varphi) - (-\cos 0)\big],$$

$$M = p b r^2 (1 - \cos\varphi) = 2 p b r^2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für h ein, so ergibt sich

$$h = \sqrt[3]{\frac{24 p r^2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}}{E} \cdot \frac{r^2}{\Delta r}} = r \cdot \sqrt[3]{\frac{24 p r}{E \cdot \Delta r}} \cdot \sqrt[3]{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Da die erste Wurzel ein Festwert ist, bleibt h lediglich von φ abhängig. Wegen

$$\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)_{\max} = 1 \quad \text{für} \quad \frac{\varphi}{2} = 90^\circ \quad \text{oder} \quad \varphi = 180^\circ$$

erhält der Ring dem Schlitz gegenüber die größte Dicke.

Zu der Frage der Berechnung eines Kolbenringes vgl. A. Föppl: Vorlesungen. Bd. 3; Reinhardt: Z. V. d. I. 1901, S. 232; Pollert: Z. V. d. I. 1924, S. 253.

5. Berechnung eines Lasthakens.

Die Kraft Q (Abb. 302) gibt für den horizontalen Querschnitt BOC das größte Moment

$$M = -Q\,(a + e_2)$$

(M sucht den Krümmungsradius zu vergrößern, wirkt also entgegen der in Abb. 296 eingetragenen Drehrichtung) und die größte Normalkraft

$$N = Q.$$

Wir vernachlässigen die zur Schonung der Seile erforderlichen Abrundungen und nehmen an, der Haken habe trapezförmigen Querschnitt.

Als Krümmungsmittelpunkt der Mittellinie im Punkt O wird A gewählt, so daß

$$r = a + e_2$$

ist.

Mit diesen Werten wird nach Seite 401 die größte Druckspannung im Punkte C

$$\sigma_C = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} + \frac{e_1}{r+e_1} \cdot \frac{M}{\varkappa F r} = \frac{Q}{F} - \frac{Q\,(a+e_2)}{F \cdot (a+e_2)} - \frac{e_1}{a+e_1+e_2} \cdot \frac{Q\,(a+e_2)}{\varkappa F (a+e_2)}$$

$$= - \frac{Q}{\varkappa F} \cdot \frac{e_1}{a+e_1+e_2}.$$

Die größte Zugspannung im Punkte B wird

$$\sigma_B = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} - \frac{e_2}{r-e_2} \cdot \frac{M}{\varkappa F r} = \frac{Q}{F} - \frac{Q\,(a+e_2)}{F\,(a+e_2)} + \frac{e_2}{a} \cdot \frac{Q\,(a+e_2)}{\varkappa F\,(a+e_2)} = \frac{Q}{\varkappa F} \cdot \frac{e_2}{a}.$$

Hierin ist

$$F = \frac{b+b_1}{2} h; \quad e_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2\,b+b_1}{b+b_1}; \quad e_2 = \frac{h}{3}\,\frac{b+2\,b_1}{b+b_1}$$

und nach Seite 404

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(r+e_1) \right] ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1) \right\}.$$

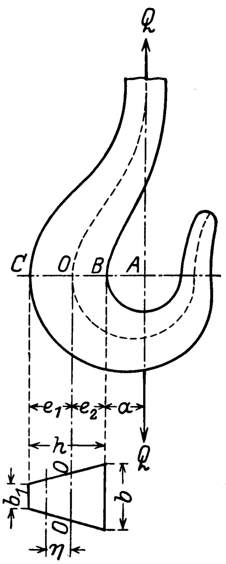


Abb. 302. Lasthaken.

Als zulässige Spannungen können bei Siemens-Martinsstahl

$$k = k_z = 800 \text{ bis } 1200 \text{ kg/cm}^2$$

gewählt werden.

Würde man den Haken als einen geraden, einseitig belasteten Stab behandeln, so wird mit

$$J_x = \frac{b^2 + 4\,b\,b_1 + b_1^2}{36\,(b+b_1)} h^3$$

$$\sigma_{B'} = \frac{Q}{F} + \frac{Q\,(a+e_2)}{J_x} \cdot e_2,$$

$$\sigma_{C'} = \frac{Q}{F} - \frac{Q\,(a+e_2)}{J_x} \cdot e_1.$$

Wir wollen untersuchen, welchen Fehler man begeht, wenn man die Näherungswerte $\sigma_{B'}$, $\sigma_{C'}$ an Stelle der wahren Werte σ_B, σ_C errechnet.

Zu diesem Zwecke wählen wir

$$h = 2\,a, \quad b = 3\,b_1.$$

Es wird dann

$$e_1 = \frac{2\,a}{3} \cdot \frac{6\,b_1 + b_1}{3\,b_1 + b_1} = \frac{7}{6}\,a; \qquad e_2 = \frac{2\,a}{3} \cdot \frac{3\,b_1 + 2\,b_1}{3\,b_1 + b_1} = \frac{5}{6}\,a$$

$$r = a + e_2 = \frac{11}{6}\,a,$$

mithin

$$\varkappa = -1 + \frac{\frac{11}{3}\,a}{4\,b_1 \cdot 2\,a} \left\{ \left[b_1 + \frac{2\,b_1}{2a} 3a \right] ln \frac{3\,a}{a} - 2\,b_1 \right] \right\},$$

$$= -1 + \frac{11}{24}(4\,ln\,3 - 2) = 0{,}0974, \quad \frac{1}{\varkappa} = 10{,}27.$$

Folglich ist

$$\sigma_C = -\frac{Q}{F} \cdot 10{,}27 \cdot \frac{\frac{7}{6}a}{3a} = -3{,}99\frac{Q}{F},$$

$$\sigma_B = +\frac{Q}{F} \cdot 10{,}27 \cdot \frac{\frac{5}{6}a}{a} = 8{,}56\frac{Q}{F}.$$

Die Näherungswerte sind mit

$$J_x = \frac{9\,b_1^2 + 12\,b_1^2 + b_1^2}{36 \cdot 4\,b_1} \cdot 8a^3 = \frac{11}{9}\,b_1\,a^3 \quad \text{und} \quad F = \frac{4\,b_1}{2} \cdot 2\,a = 4\,b_1\,a$$

$$J_x = \frac{\frac{11}{9}\,b_1 a^3}{4\,b_1 a}\,F = \frac{11}{36}\,a^2 F,$$

$$\sigma_{B'} = \frac{Q}{F} + \frac{Q \cdot \frac{11}{6}a}{\frac{11}{36}a^2 F} \cdot \frac{5}{6}a = \frac{Q}{F}(1+5) = 6\frac{Q}{F},$$

$$\sigma_{C'} = \frac{Q}{F} - \frac{Q \cdot \frac{11}{6}a}{\frac{11}{36}a^2 F} \cdot \frac{M}{6}a = \frac{Q}{F}(1-7) = -6\frac{Q}{F}.$$

Die Werte $\frac{\sigma F}{Q}$ sind in Abb. 303 aufgetragen. Die wahren Werte gibt die hyperbolische Kurve EOA. Zu bemerken ist, daß, weil

$$\frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} = 0$$

ist, die neutrale Faser durch den Schwerpunkt geht. (Siehe Seite 401.)

Wird der Haken als Stab mit gerader Achse betrachtet, so ergibt sich für $\frac{\sigma F}{Q}$ die Gerade GDA. Aus der Abbildung erkennt man, daß die maßgebende Spannung im Punkte B um

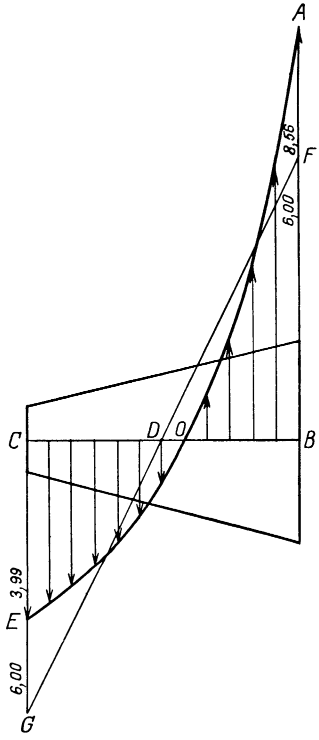


Abb. 303. Spannungen.

$$\frac{8{,}56 - 6}{6} \cdot 100 = 30\%$$

zu klein ausfällt.

Beispiel. Die größten Spannungen im Haken der Abb. 304 sind zu ermitteln. Die Last beträgt $Q = 100$ t. Der Querschnitt I—I ist in Abb. 305 wiedergegeben.

Wie die Abbildung erkennen läßt, wird der Querschnitt von zwei Kreisbogen vom Radius 36 cm und den Höhen $s_1 = 11{,}5$ cm bzw. $s_3 = 30$ cm begrenzt. Dementsprechend zerfällt die Fläche F in zwei Kreisabschnitte F_1 und F_3 und den dazwischen liegenden trapezförmigen Querschnitt F_2. Die Flächen F_1 und F_3 wurden zeichnerisch mit Hilfe des Planimeters ermittelt. Es ist

$$F_1 = 3{,}55 \text{ cm}^2, \quad F_3 = 66{,}08 \text{ cm}^2.$$

F_2 wurde nach Abgreifen der Entfernung $h = 32{,}2$ cm der parallelen Seiten berechnet. Es ist

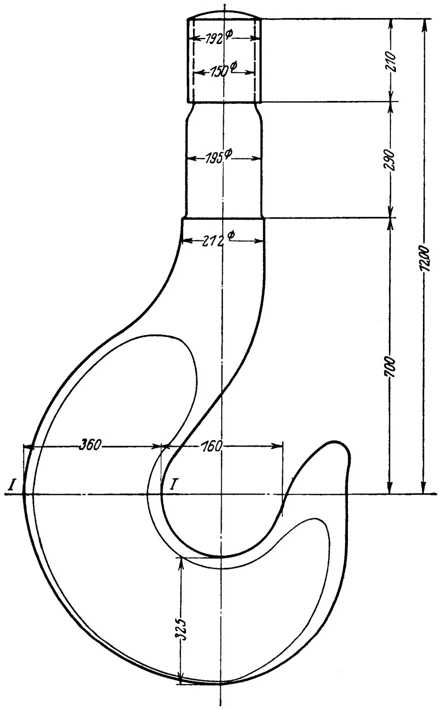


Abb. 304. Lasthaken.

$$F_2 = \frac{32{,}2}{2}(11{,}5 + 30) = 669 \text{ cm}^2,$$

folglich die gesamte Fläche

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 738{,}7 \text{ cm}^2.$$

Die Ermittlung der **Schwerpunkte** der Flächen F_1 und F_2 geschieht am besten rechnerisch.

Die Entfernung des Schwerpunktes eines Kreisabschnittes vom Krümmungsmittelpunkt ist gleich $\frac{1}{12}\frac{s^3}{F}$. Für die Fläche F_1 ist $s = 11{,}5$ cm, $F_1 = 3{,}55$ cm², folglich

$$a_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{11{,}5^3}{3{,}55} = 35{,}69 \text{ cm}.$$

Für F_3 ist

$$\frac{1}{12}\frac{s^3}{F} = \frac{1}{12} \cdot \frac{30^3}{66{,}08} = 34{,}04 \text{ cm},$$

folglich die Entfernung des Schwerpunktes vom Scheitel des Kreisabschnittes

$$a_3 = 36 - 34{,}04 = 1{,}96 \text{ cm}.$$

Auch der Schwerpunkt der Trapezfläche F_2 wird rechnerisch ermittelt. Die Entfernung des Schwerpunktes von der Trennungslinie der Querschnitte F_2 und F_3 ist

$$\frac{32{,}2}{3}\,\frac{30 + 2 \cdot 11{,}5}{30 + 11{,}5} = 13{,}7 \text{ cm};$$

folglich die Entfernung vom Scheitel von F_3

$$a_2 = 13{,}7 + 3{,}3 = 17{,}0 \text{ cm},$$

wobei der Wert 3,3 der Zeichnung entnommen wurde.

Hiernach kann der Schwerpunktabstand e_2 aus der Beziehung

$$F \cdot e_2 = F_1 \cdot a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3$$

ermittelt werden. Setzt man die gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$e_2 = 15{,}7 \text{ cm} \quad \text{und daher} \quad e_1 = 36 - e_2 = 20{,}3 \text{ cm}.$$

Es wurde jetzt das **Trägheitsmoment** der Fläche nach dem Verfahren von **Nehls** ermittelt. Die Breite der Fläche wurde im Verhältnis $\left(\frac{\eta}{e_1}\right)^2$ bzw. $\left(\frac{\eta}{e_2}\right)^2$ reduziert und dieser Wert von der Symmetrieachse senkrecht aufgetragen. Da der Querschnitt symmetrisch ist, wurde die Konstruktion nur für den halben Querschnitt durchgeführt. Es entstanden so zwei Flächen, deren Inhalt mit f_1 und f_2 bezeichnet wurde. Es ist dann

$$J_x = 2\,f_1 e_1^2 + 2\,f_2 e_2^2 = 91{,}6 \cdot 20{,}3^2 + 119{,}4 \cdot 15{,}7^2 = 67\,180 \text{ cm}^4.$$

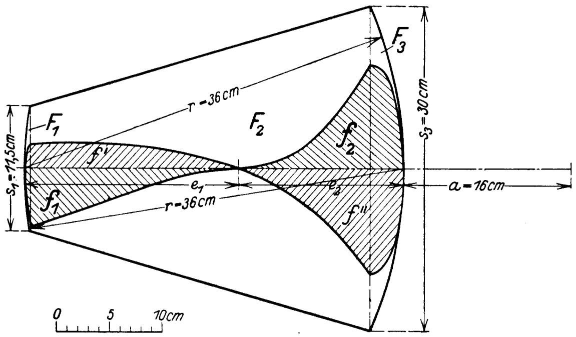


Abb. 305. Querschnitt *I—I*.

Schließlich wurde noch nach dem Verfahren von Tolle (Seite 401) der Wert $\varkappa$ ermittelt; es wurde auch hier nur der halbe Querschnitt berücksichtigt.

Es ist
$$\varkappa = 2 \cdot \frac{f'' - f'}{F} = 2 \cdot \frac{72{,}18 - 35{,}50}{738{,}7} = 0{,}100\,.$$

Wir können jetzt zur Berechnung der Spannungen übergehen. Nach unseren Formeln ist die größte Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{Q}{\varkappa F} \cdot \frac{e_2}{a} = \frac{10\,000}{0{,}100 \cdot 738{,}7} \, \frac{15{,}7}{16} = 1325 \text{ kg/cm}^2,$$

also sehr hoch; die größte Druckspannung hingegen

$$\sigma = -\frac{Q}{\varkappa F} \cdot \frac{e_1}{a + e_1 + e_2} = -\frac{10\,000}{0{,}100 \cdot 738{,}7} \cdot \frac{20{,}3}{52} = -530 \text{ kg/cm}^2\,.$$

Würde man den Stab als geraden, einseitig belasteten Stab betrachten, so wäre

$$\sigma_z' = \frac{Q}{F} + \frac{Q\,(a + e_2)}{J_x} \cdot e_2 = \frac{10\,000}{738{,}7} + \frac{10\,000 \cdot 31{,}7}{67\,180} \cdot 15{,}7$$
$$= 135 + 745 = 880 \text{ kg/cm}^2,$$
$$\sigma' = \frac{Q}{F} - \frac{Q\,(a + e_2)}{J_x} \cdot e_1 = \frac{10\,000}{738{,}7} - \frac{10\,000 \cdot 31{,}7}{67\,180} \cdot 20{,}3$$
$$= 135 - 960 = -825 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Unterschied der maßgebenden Spannungen beträgt in unserem Falle

$$\frac{1325 - 880}{880} \cdot 100 = 50\,\%\,.$$

Daß der Unterschied der Spannungen hier bedeutend größer ausfällt als bei dem allgemein durchgeführten Beispiel, ergibt sich daraus, daß $e_2 : a = 15{,}7 : 16 = 0{,}97$ gegen den früher ermittelten Wert $e_2 : a = 5 : 6 = 0{,}83$ um 17% größer ist.

XV. Die Festigkeit der Federn.

1. Die Blattfeder.

Unter einer Blattfeder versteht man einen Stab aus gut federndem Stahl, dessen Querschnitt ein Rechteck und dessen Dicke im Vergleich zur Länge gering ist. Man kann sie wie einen Freiträger behandeln (Seite 86) und unterscheidet Federn mit gleichbleibendem Querschnitt oder Rechteckfedern und Federn mit dreieckförmig verjüngtem Querschnitt oder Dreieckfedern.

a) Die Rechteckfeder (Abb. 306).

Das größte Biegungsmoment ist $M = P \cdot l$, das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6} b h^2$. Mithin ist die größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{\frac{1}{6} b h^2} = \frac{6 P l}{b h^2} .$$

Die Festigkeitsbedingung $\sigma_{\max} \leqq k_b$ liefert

$$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$$

als Tragfähigkeit der Feder.

Die Senkung des Angriffspunktes von P, der sogenannte Federhub, ist nach Seite 148

$$f = \frac{P l^3}{3 E J}; \quad \text{mit} \quad J = \frac{b h^3}{12} \quad \text{ist} \quad f = \frac{4 l^3}{b h^3} \cdot \frac{P}{E} .$$

Setzt man für P den oben gefundenen Wert ein, so wird

$$f = \frac{2 l^2 k_b}{3 h E} .$$

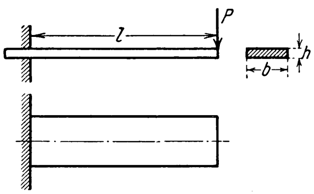


Abb. 306. Rechteckfeder.

Von besonderer Wichtigkeit ist bei Federn die Berechnung der Federungsarbeit, d. h. derjenigen Arbeit, welche die Feder bei der Formänderung aufnehmen kann. Beachtet man, daß die Last proportional der Durchbiegung wächst, so erhält man für die aufgespeicherte Federungsarbeit

$$A = \frac{1}{2} P \cdot f = \frac{1}{2} \cdot \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l} \cdot \frac{2 l^2 k_b}{3 h E} = \frac{1}{18} \cdot b h l \cdot \frac{k_b^2}{E} .$$

Nun ist aber bhl gleich dem Volumen V der Feder, daher

$$A = \eta_A \cdot \frac{k_b^2}{E} \cdot V \quad \text{mit} \quad \eta_A = \frac{1}{18} .$$

Man erkennt, daß die Federungsarbeit nur von dem Volumen der Feder abhängt und nicht davon, wie sich dieses Volumen aus den drei Faktoren b, h und l zusammensetzt. Dieses Ergebnis werden wir auch in allen übrigen Fällen bestätigt finden.

Beispiel. Eine Blattfeder mit unveränderlichem Querschnitt soll bei $l = 6$ cm Länge einen Druck von $\sim 2{,}5$ kg ausüben; der Federhub betrage $f = 5$ mm. Es empfiehlt sich, aus der Bedingung $f = 0{,}5$ cm das erforderliche Trägheitsmoment zu berechnen.

Aus $f = \frac{P l^2}{3 E J}$ ergibt sich

$$J = \frac{P l^3}{3 E f} = \frac{2{,}5 \cdot 6^3}{3 \cdot 2\,200\,000 \cdot 0{,}5} \approx \frac{1}{6100}\ \text{cm}^4.$$

1. Wählt man einen rechteckigen Querschnitt $20 \cdot 1$ mm mit

$$J = \frac{b h^3}{12} = \frac{2 \cdot 1^3}{12 \cdot 1000} = \frac{1}{6000}\ \text{cm}^4 \quad \text{und} \quad W = \frac{2 J}{h} = \frac{2}{6000 \cdot 0{,}1} = \frac{1}{300}\ \text{cm}^3,$$

so wird die größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 2{,}5 \cdot 6 \cdot 300 = 4500\ \text{kg/cm}^2.$$

Diese Spannung darf bei bestem Federstahl mit $K_z = 18000$ kg/cm² für zulässig erachtet werden, da die Sicherheit $\mathfrak{S} = 18000 : 4500 = 4$ beträgt.

Die Federkraft beträgt

$$P = \frac{3 E J f}{l^3} = \frac{3 \cdot 2200000 \cdot 0{,}5}{6^3 \cdot 6000} = 2{,}54\ \text{kg}.$$

2. Wählt man einen rechteckigen Querschnitt $40 \cdot 0{,}8$ mm mit

$$J = \frac{b h^3}{12} = \frac{4 \cdot 0{,}8^3}{12 \cdot 1000} = \frac{1}{5860}\ \text{cm}^4 \quad \text{und} \quad W = \frac{2 J}{h} = \frac{2}{5860 \cdot 0{,}08} = \frac{1}{234{,}4}\ \text{cm}^3,$$

so wird die größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 2{,}5 \cdot 6 \cdot 234{,}4 \approx 3500\ \text{kg/cm}^2.$$

Die Federkraft ist

$$P = \frac{3 E J f}{l^3} = \frac{3 \cdot 2200000 \cdot 0{,}5}{6^3 \cdot 5860} = 2{,}6\ \text{kg}.$$

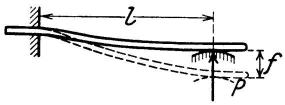


Abb. 307. Rechteckfeder.

Selten wird man der Feder die Form der Abb. 306 geben; in den meisten Fällen erhält sie im ungespannten Zustand gekrümmte Gestalt (Abb. 307) und wird bei der Belastung gestreckt. Dann sind unsere Ergebnisse nur angenähert richtig.

b) Die Dreieckfeder (Abb. 308).

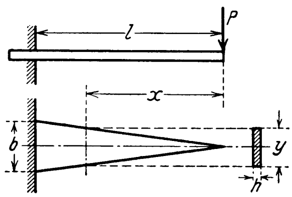


Abb. 308. Dreieckfeder.

Wie bei der Rechteckfeder wird das größte Biegungsmoment $M = P \cdot l$ und das Widerstandsmoment an der Einspannstelle $W = \frac{1}{6} b h^2$. Es ist daher die größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{P l}{\frac{1}{6} b h^2} = \frac{6 P l}{b h^2}$$

und mit $\sigma_{\max} \leqq k_b$

$$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}.$$

Die Tragfähigkeit ist also ebenso groß wie bei der Rechteckfeder.

Der Federhub muß aber ersichtlich größer werden. Um ihn zu berechnen, beachte man, daß sich nach dem Satz von Mohr (Seite 176) die Durchbiegung f als das $\frac{1}{E}$-fache statische Moment der $(M:J)$-Fläche, bezogen auf das freie Ende der Feder darstellen läßt.

Nun ist aber das Biegungsmoment M in der Entfernung x vom Angriffspunkt der Kraft P gleich $P \cdot x$, das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{12} y \cdot h^3$. Aus der Abb. 307 folgt

$$y : b = x : l \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{l} \cdot x .$$

Es wird also $J = \frac{1}{12} \cdot \frac{b}{l} x h^3$ und daher

$$\frac{M}{J} = \frac{P \cdot x}{\frac{1}{12} \cdot \frac{b}{l} x h^3} = \frac{12\, P l}{b h^3} .$$

Die $\frac{M}{J}$-Fläche der Dreiecksfeder ist also ein Rechteck der Breite l und der Höhe $\frac{12\, P l}{b h^3}$. Da der Schwerpunkt eines Rechtecks im Schnittpunkt der Diagonalen liegt, so wird das statische Moment, bezogen auf das freie Ende des Trägers

$$\frac{12\, P l}{b h^3} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{6\, P l^3}{b h^3}$$

und daher

$$f = \frac{1}{E} \cdot \frac{6\, P l^3}{b h^3} = \frac{6 l^3}{b h^3} \frac{P}{E} = \frac{P l^3}{2\, E J_{\max}},$$

da

$$J_{\max} = \frac{b h^3}{12}$$

ist.

Setzt man für P den Wert $\frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$ ein, so wird

$$f = \frac{6 l^3}{b h^3} \cdot \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l} \cdot \frac{1}{E} = \frac{l^2}{h} \cdot \frac{k_b}{E} .$$

Die Durchbiegung ist also um die Hälfte größer als bei der Rechteckfeder.

Es handelt sich hier um einen Träger gleicher Biegungsfestigkeit (Seite 120). Aus der Beziehung für den Krümmungsradius ϱ (Seite 143)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E J}$$

folgt:

$$\varrho = \frac{E J}{M} = \frac{E \cdot \frac{1}{12} \frac{b}{l} x h^3}{P \cdot x} = \frac{b h^3}{12\, l} \cdot \frac{E}{P} .$$

Der Krümmungsradius ist also konstant und daher die elastische Linie ein Kreisbogen. Die Federungsarbeit A ist wieder gleich dem halben Produkt aus P und f. Setzt man für P und f die gefundenen

Werte ein, so wird

$$A = \frac{1}{2} P f = \frac{1}{2} \cdot \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l} \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \frac{k_b}{E} = \frac{b h l}{12} \cdot \frac{k_b^2}{E}.$$

In der Formel

$$A = \eta_A \cdot \frac{k_b^2}{E} V$$

ist daher

$$\eta_A = \frac{1}{12}.$$

Beispiel. Wie im vorigen Beispiel soll eine Blattfeder der Länge $l = 6$ cm eine Kraft von $\sim 2{,}5$ kg ausüben; der Federhub betrage wieder $f = 5$ mm. Es soll jetzt aber eine Dreieckfeder verwandt werden.

Aus

$$f = \frac{P l^3}{2 E J_{\max}}$$

folgt

$$J_{\max} = \frac{P l^3}{2 E f} \approx \frac{1}{4070} \text{ cm}^4.$$

1. Rechteckiger Querschnitt $30 \cdot 1$ mm an der Einspannstelle.

$$J_{\max} = \frac{b h^3}{12} = \frac{1}{4000} \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad W = \frac{2 J_{\max}}{h} = \frac{2}{4000 \cdot 0{,}1} = \frac{1}{200} \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 2{,}5 \cdot 6 \cdot 200 = 3000 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Federkraft beträgt

$$P = \frac{2 E J_{\max} f}{l^3} = \frac{2 \cdot 2\,200\,000 \cdot 0{,}5}{6^3 \cdot 4000} = 2{,}54 \text{ kg}$$

wie bei der Rechteckfeder.

Die Einspannbreite wird also um 50% größer als bei der Rechteckfeder, die größte Spannung um 50% kleiner.

Dasselbe Ergebnis folgt auch, wenn man

2. einen rechteckigen Querschnitt $60 \cdot 0{,}8$ mm wählt. Es wird

$$J_{\max} = \frac{b h^3}{12} = \frac{1}{3910} \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad W = \frac{2 J_{\max}}{h} = \frac{1}{156{,}3} \text{ cm}^3,$$

mithin

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = 2{,}5 \cdot 6 \cdot 156{,}3 \approx 2300 \text{ kg/cm}^2.$$

c) Die geschichtete Dreieckfeder.

Legt man mehrere Blattfedern aufeinander, so entsteht ein Blattfederwerk. Ein gutes Blattfederwerk soll möglichst einen Körper gleichen Widerstandes gegen Biegung bilden und bei der Biegung nicht klaffen, d. h. die einzelnen Blätter dürfen sich bei der Formänderung nicht voneinander entfernen. Da die Dreieckfeder ein Körper gleicher Biegungsfestigkeit und ihre elastische Linie ein Kreisbogen ist (siehe Abschnitt b), so entspricht das aus ihr gebildete Blattfederwerk beiden Bedingungen. Es wird folgendermaßen erhalten: Man zerlegt (Abb. 309 I) die Feder in eine gerade Anzahl $2n$ gleich breiter Streifen der Breite $\frac{b}{2}$, so daß die Breite der Feder an einer Einspannstelle $n \cdot b$ ist. In der

Abbildung ist $2n = 8$ gewählt. Denkt man sich die einzelnen Streifen so zusammengesetzt, wie in Abb. 309 II angegeben, so erhält man die geschichtete Dreieckfeder, wobei die Blattbreite b und n die Anzahl der Lagen ist. Sie hat dieselbe Tragfähigkeit wie die Dreieckfeder der Breite nb, es ist also

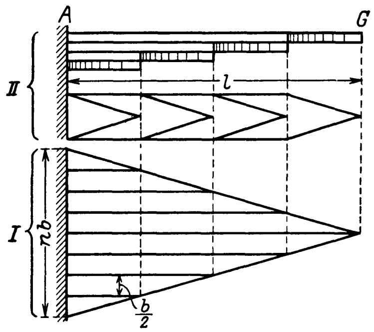


Abb. 309. Blattfederwerk.

$$P = n\frac{bh^2}{6}\frac{k_b}{l}$$

oder

$$n = \frac{6Pl}{bh^2k_b}.$$

In der Regel werden zwei Federwerke durch den Federbund vereinigt (Abb. 310); sie erhalten hierbei im unbelasteten Zustand eine kreisförmige Krümmung der Pfeilhöhe p_0. Durch die am Federbund angreifende Belastung $2P$ verringert sich der Pfeil p_0 auf p. Die Durchbiegung des Federwerkes ist dann

$$f = p_0 - p.$$

Tragfeder eines Eisenbahnwagens. Wegen der großen Durchbiegung wird das beschriebene Federwerk zur Minderung der Stöße zwischen Achse und Wagenkasten angebracht (Abb. 310).

Die am Federbund angreifende Kraft $2P$ ergibt in dem geneigten Gehänge je eine Zugkraft $P : \cos\alpha$, die in eine senkrechte Komponente P und eine wagerechte Komponente $P\,\mathrm{tg}\,\alpha$ zerlegt werden kann. Durch diese Kräfte wird ein Biegungsmoment

$$M = P(l + p\,\mathrm{tg}\,\alpha)$$

im Federbund hervorgerufen.

Da das Widerstandsmoment an dieser Stelle $n \cdot \frac{bh^2}{6}$ ist, so folgt aus der Festigkeitsbedingung

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{P(l + p\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{n\frac{bh^2}{6}} \leqq k_b$$

die Tragkraft $2P$ der Feder:

$$2P = 2n \cdot \frac{bh^2}{6}\frac{k_b}{l + p\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

In der Abb. 310 wurde $n = 8$ gewählt. Für p darf angenähert p_0 gesetzt werden. Die oberste Federlage hat außerdem noch die Zugkraft $P\,\mathrm{tg}\,\alpha$ und die Querkraft P aufzunehmen.

Die Durchbiegung der Dreieckfeder war

$$f = \frac{l^2}{h}\frac{k_b}{E}.$$

Setzt man hierin für k_b den Wert

$$\frac{P(l+p\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{n\frac{b\,h^2}{6}}$$

ein, so wird angenähert

$$f=\frac{6\,l^2}{n\,b\,h^3}\,\frac{P(l+p\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{E}=p_0-p\,.$$

Für gehärtete Eisenbahnfedern kann nach Bach $k_b = 6000$ bis 6500 kg/cm² gewählt werden, wenn man die durch die Federschwingungen während der Fahrt hervorgerufene Mehrbelastung nicht berücksichtigt.

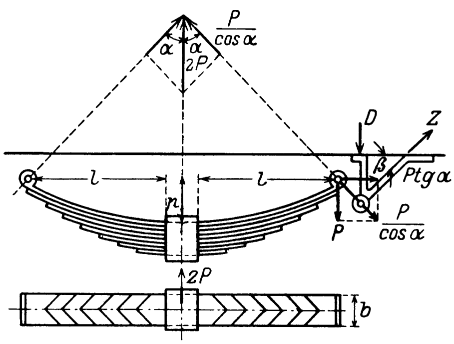


Abb. 310. Tragfeder eines Eisenbahnwagens.

Beispiel. Bei einer als geschichtete Dreieckfeder konstruierten Eisenbahnwagenfeder sei die Pfeilhöhe $p_0 = 95$ mm, die Breite $b = 6\,h$, worin die Höhe $h = 15$ mm beträgt; ferner sei die Länge $l = 75$ cm, die Belastung

$$2\,P = 6500 \text{ kg}$$

und der Winkel $\alpha = 45°$. Wie groß muß die Anzahl n der Blätter sein, wenn die zulässige Normalspannung im oberen Blatt $k_b = 6000$ kg/cm² beträgt?

Nach unserer Formel ist

$$n=\frac{P(l+p_0\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{\frac{b\,h^2}{6}\cdot k_b}=\frac{3250\,(75+9{,}5\cdot 1)}{1{,}5^3\cdot 6000}\approx 14 \text{ Blätter},$$

weil $b = 6\,h$ ist.

2. Die gewundene Biegungsfeder.

a) Die ebene Spiralfeder (Schneckenfeder)[1].

Bei der ebenen Spiralfeder erfolgt die Belastung durch ein in der Federachse A angreifendes Kräftepaar, mit dem die Federspindel gedreht und nach dem Aufziehen festgehalten wird.

Hierbei kann das äußere Federende B entweder frei drehbar befestigt sein, wie in Abb. 311 angedeutet ist, oder fest eingespannt sein. Die Berechnung soll für beide Fälle durchgeführt werden, wobei die Feder wie ein in zwei Punkten gelagerter Bogenträger (Seite 385) behandelt wird.

Das äußere Federende ist frei drehbar gelagert. Die Auflagerkraft in B läßt sich in eine tangential gerichtete Komponente P und in eine radial gerichtete Komponente H zerlegen, welche letztere in der Abbildung nicht eingezeichnet ist. Die Größe von P folgt aus der

---

[1] Föppl, Aug.: Vorlesungen über Technische Mechanik. Bd. 3, S. 222. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1922.

für den Punkt A angeschriebenen Momentengleichung

$$M = P \cdot p;$$

hierbei ist M das Moment, welches das innere Federende belastet.

Die Komponente H fällt in die Verbindungslinie der Auflager A und B; ihre Größe beträgt nach Seite 385

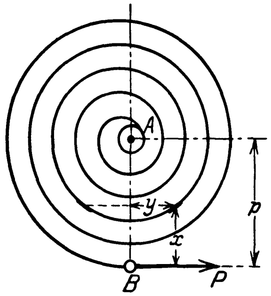


Abb. 311. Die ebene Spiralfeder.

$$H = \frac{\int M_0\, y\, d\, s}{\int y^2 d\, s}.$$

Hierbei ist M_0 das im Punkte (x, y) angreifende Moment, welches sich ohne Berücksichtigung des Horizontalschubes H ergibt. In unserem Falle ist $M_0 = P \cdot x$, also

$$H = \frac{P \int x\, y\, d\, s}{\int y^2 d\, s}.$$

Man kann nun leicht nachweisen, daß H angenähert gleich Null sein muß; die genaue Berechnung von H würde sich sehr schwierig gestalten.

Zu diesem Zwecke betrachtet man je zwei Bogenelemente, die auf derselben Windung zu verschiedenen Seiten von $A\,B$ liegen und denselben Abstand x haben. Ist die Feder nicht zu stark gewunden, was wir voraussetzen wollen, so haben die y-Koordinaten der Bogenelemente gleiche Größe, aber entgegengesetztes Vorzeichen. Hieraus folgt, daß das Integral $\int x y d s$ angenähert gleich Null oder doch jedenfalls sehr klein gegen $\int y^2 d\, x$ ist. Man kann daher H vernachlässigen. Das Bogenelement ist also nur durch das Biegungsmoment

$$M_0 = M = P \cdot x$$

belastet.

Wir wollen jetzt die Winkeländerung ω des Angriffspunktes von P berechnen (Abb. 312).

Nach Seite 406 ist die Winkeländerung des Bogenelementes

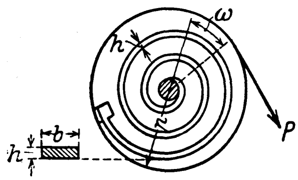


Abb. 312. Die ebene Spiralfeder.

$$\varDelta\, d\, \varphi = \frac{M\, d\, s}{E \cdot J} = \frac{P\, x\, d\, s}{E\, J},$$

daher

$$\omega = \int \frac{P\, x\, d\, s}{E\, J} = \frac{P}{E\, J} \int x\, d\, s.$$

Das Integral hat eine einfache Bedeutung, es ist das statische Moment der Mittellinie, bezogen auf die Wirkungslinie von P. Hierfür können wir auch das Produkt aus der Länge l der Feder und dem Abstande des Schwerpunktes setzen. Offenbar fällt der Schwerpunkt ziemlich genau mit der Mitte der Federachse zusammen. Es ist also

$$\int x d s = l \cdot p$$

und daher die gesamte Winkeländerung

$$\omega = \frac{P\, p}{E\, J}\, l.$$

Die Durchbiegung der Feder ist

$$f = p \cdot \omega = \frac{P p^2}{E J} l .$$

Auch hier ist die Berechnung der Federungsarbeit von besonderer Wichtigkeit. Biegungsfedern dienen dazu, mechanische Arbeit beim Aufziehen der Feder aufzuspeichern und beim Entspannen der Feder wieder abzugeben. Da die Kraft P proportional der Durchbiegung von Null auf den Höchstwert P wächst, wird

$$A = \frac{P}{2} \cdot f = \frac{P^2 p^2}{2 E J} l .$$

Um die Leistung der Feder möglichst auszunutzen, muß die größte Spannung gleich der zulässigen Spannung k_b sein. Nun tritt aber das größte Biegungsmoment an der dem Angriffspunkt von P gegenüberliegenden Stelle der äußersten Windung auf, und ist daher gleich $2\,P p$. Es muß daher

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_{\max}}{J} e = \frac{2 P p e}{J} = k_b$$

oder

$$P p = \frac{J}{2 e} \cdot k_b$$

sein, worin e der Abstand der äußersten Faser von der neutralen Faser ist. Setzt man diesen Ausdruck in die für die Federungsarbeit abgeleitete Formel ein, so wird

$$A = \frac{J l}{8 e^2 E} k_b^2 .$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h (Abb. 312) wird $J = \frac{1}{12} b h^3$ und $e = \frac{h}{2}$, also

$$A = \frac{b h l}{24 E} k_b^2 .$$

Auch hier hängt die Federungsarbeit nur vom Volumen $V = b \cdot h \cdot l$ der Feder ab.

Setzt man, wie bei den Blattfedern

$$A = \eta_A \cdot \frac{k_b^2}{E} V ,$$

so wird

$$\eta_A = \frac{1}{24} .$$

Aus der Beziehung

$$P = \frac{J}{2 e p} \cdot k_b = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{2 \cdot \frac{h}{2} \cdot p} \cdot k_b = \frac{b h^2}{12\, p} \cdot k_b$$

kann die Kraft P berechnet werden, mit der die Feder belastet werden darf.

Die Durchbiegung f der Feder wird

$$f = \frac{2A}{P} = \frac{2 \cdot b h l}{24 E} k_b^2 \cdot \frac{12 p}{b h^2 \cdot k_b} = \frac{p\, l}{h} \frac{k_b}{E}.$$

Das äußere Federende ist fest eingespannt. In diesem Falle ist der Bogenträger zweifach statisch unbestimmt. Zur statisch unbestimmten Auflagerkomponente H tritt noch das Einspannmoment M_0. Das Moment, mit dem die Feder in der Federmitte belastet wird, werde mit M_l bezeichnet und der Drehsinn von M_l als positiv angenommen (Abb. 313).

Im Bogenelement ds tritt ein Biegungsmoment

$$M = M_0 - Qx - Hy$$

auf, wobei sich M_0 als negativer Wert ergeben wird. Schreibt man die Momentengleichung für die Federachse an, so wird:

$$M_0 - Qp + M_l = 0;$$

es ist also

$$Q = \frac{M_l + M_0}{p}$$

und daher

$$M = M_0 - \frac{M_l + M_0}{p} x - Hy.$$

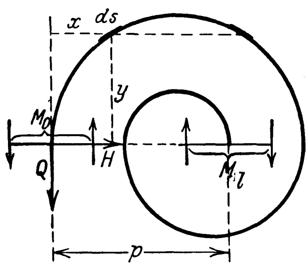


Abb. 313. Die ebene Spiralfeder.

Die statisch unbestimmten Größen M_0 und H bestimmen wir nach dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.

Nach Seite 199 muß

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = 0$$

sein.

Nun ist aber

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = +1 - \frac{1}{p} x,$$

folglich wird

$$\int \left[M_0 - \frac{M_l + M_0}{p} x - Hy\right] \left[1 - \frac{1}{p} x\right] ds = 0,$$

oder, wenn man die Klammern auflöst,

$$\int M_0\, ds - \int \frac{M_l + 2 M_0}{p} x\, ds - \int H y\, ds + \int \frac{H}{p} x y\, ds + \int \frac{M_l + M_0}{p^2} x^2 ds = 0.$$

Für genügend viele Windungen kann genau genug

$$\int ds = l; \quad \int x\, ds = l p; \quad \int y\, ds = 0; \quad \int x y\, ds = 0$$

gesetzt werden. (Seite 420.)

Folglich wird

$$M_0 \cdot l - (M_l + 2 M_0)\, l + \int \frac{M_l + M_0}{p^2} x^2 ds = 0$$

oder
$$(M_l + M_0)\left(lp^2 - \int_0^l x^2\,ds\right) = 0\,.$$

Wir wollen nun nachweisen, daß das Integral
$$\int_0^l x^2\,ds$$
stets größer als $l\,p^2$ ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir (Abb. 313) ein zweites Element ds, welches denselben Abstand y hat und auf derselben Windung liegt, wie das zuerst betrachtete Längenelement ds; es hat angenähert die Koordinaten $2\,p - x$ und y: Da man auf dieselbe Art und Weise einem jeden beliebigen Element ein zweites zuordnen kann, so wird
$$\int_0^l x^2\,ds = \int_0^{\frac{l}{2}} \left[x^2 + (2\,p - x)^2\right] ds\,.$$
Nun ist aber $x + (2\,p - x) = 2\,p$, woraus durch Quadrieren
$$x^2 + (2\,p - x)^2 + 2\,x\,(2\,p - x) = 4\,p^2$$
folgt. Nach dem Höhensatz ist aber $y^2 = x\,(2\,r - x)$, also wird
$$x^2 + (2\,p - x)^2 = 4\,p^2 - 2\,y^2.$$
Da nun $|\,y\,| < p$, also $2\,y^2 < 2\,p^2$ ist — mit Ausnahme von $x = p$, wo $2\,y^2 = 2\,p^2$ ist — so wird
$$x^2 + (2\,p - x)^2 > 2\,p^2$$
und mithin
$$\int_0^l x^2\,ds = \int_0^{\frac{l}{2}} \left[x^2 + (2p - x)^2\right] ds > \int_0^{\frac{l}{2}} 2p^2\,ds = 2p^2 \int_0^{\frac{l}{2}} ds = 2p^2 \cdot \frac{l}{2} = p^2 l.$$
Es ist also das Integral stets größer als $p^2 l$.

Mithin muß, damit die Gleichung
$$(M_l + M_0)\left(lp^2 - \int_0^l x^2 ds\right) = 0$$
erfüllt wird,
$$M_0 = -M_l$$
sein und
$$Q = \frac{M_l + M_0}{p} = 0\,.$$

Man kann ferner nachweisen, daß auch H gleich Null wird. Nach dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit ist nämlich
$$\int \frac{M}{E\,J} \cdot \frac{\partial\,M}{\partial\,H}\,ds = 0\,.$$

Mit $\dfrac{\partial\,M}{\partial\,H} = -y$ wird daher
$$-\int \frac{M}{E\,J}\,y\,ds = 0\,.$$

Läßt man den konstanten Faktor $-\frac{1}{EJ}$ fort und beachtet, daß

$$M = -M_l - Hy$$

ist, so wird

$$\int M_l y\, ds + \int H y^2 ds = 0.$$

Das erste Integral verschwindet, weil $\int y ds = 0$ ist. Folglich muß auch das zweite Integral, welches gleich $H \int y^2 ds$ ist, zu Null werden. Da nun $\int y^2 ds$ stets von Null verschieden ist, so muß

$$H = 0$$

sein.

Mit $Q = 0$, $H = 0$ und $M_0 = -M_l$ wird das Biegungsmoment im Punkte (x, y)

$$M = -M_l.$$

Jedes Bogenelement wird daher mit dem Biegungsmoment beansprucht, welches an der Spindel angreift.

Nach Seite 406 ist die Winkeländerung des Bogenlementes

$$\Delta\, d\varphi = \frac{M\, ds}{EJ},$$

also die gesamte Winkeländerung

$$\omega = \int \frac{M\, ds}{EJ} = \frac{M}{EJ} \int ds = \frac{M l}{EJ}$$

und die Durchbiegung f der Feder

$$f = p\,\omega = \frac{M l p}{EJ}.$$

Ist das die Feder beanspruchende Moment

$$M = Pp$$

(Abb. 312), so wird

$$f = \frac{P l p^2}{EJ}.$$

Setzt man die zulässige Beanspruchung gleich k_b, so ist

$$M = Pp = \frac{J}{e} \cdot k_b.$$

Für den rechteckigen Querschnitt mit den Seiten l und h wird

$$\frac{J}{e} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^2,$$

mithin

$$Pp = \frac{1}{6} b h^2 k_b$$

oder

$$P = \frac{b h^2}{6p} \cdot k_b;$$

die zulässige Kraft P ist also doppelt so groß wie auf Seite 421.

Ferner ist $$f = \frac{P l p^2}{E J} = \frac{b h^2}{6 p} \cdot k_b \cdot \frac{l p^2}{E} \cdot \frac{12}{b h^3} = \frac{2 p l}{h} \cdot \frac{k_b}{E}.$$

Auch die Durchbiegung f ist das Doppelte des auf Seite 422 gefundenen Wertes. Folglich muß die Federungsarbeit $A = \frac{P f}{2}$ viermal so groß sein, d. h. es ist

$$\eta_A = 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6},$$

was man auch leicht durch Einsetzen bestätigen kann.

b) Die Schraubenfeder.

Wir nehmen an, die Steigung der Schraubenfeder sei gering; dann kann man angenähert die unter a) gefundenen Formeln anwenden.

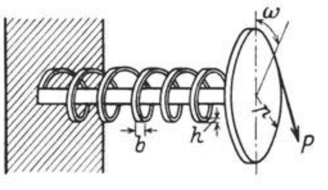


Abb. 314. Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitt.

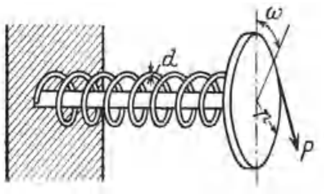


Abb. 315. Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitt.

Die Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 314). Ist nur das eine Federende als fest eingespannt zu betrachten, so wird

$$P = \frac{b h^2}{12 p} k_b; \qquad \eta_A = \frac{1}{24}; \qquad f = p\,\omega = \frac{P p^2}{E J} l = \frac{p l}{h} \frac{k_b}{E};$$

sind beide Federenden eingespannt, so wird

$$P = \frac{b h^2}{6 p} k_b; \qquad \eta_A = \frac{1}{6}; \qquad f = p\,\omega = \frac{P p^2}{E J} l = \frac{2 p l}{h} \frac{k_b}{E}.$$

Die Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitt (Abb. 315). Ist der Durchmesser der Feder gleich d, so wird das Trägheitsmoment

$$J = \frac{\pi}{64} d^4,$$

das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{e} = \frac{\frac{\pi}{64} d^4}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{32} d^3.$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß ein Federende gelenkig gelagert ist.

Es ist

$$P = \frac{J}{2 e} \cdot \frac{k_b}{p} = \frac{\pi}{64} d^3 \cdot \frac{k_b}{p}; \qquad f = p\,\omega = \frac{P p^2}{E J} l = \frac{\frac{\pi}{64} d^3 \cdot \frac{k_b}{p} \cdot p^2}{E \cdot \frac{\pi}{64} d^4} \cdot l = \frac{p l}{d} \cdot \frac{k_b}{E}.$$

Die Federungsarbeit A wird

$$A = \frac{P \cdot f}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{64} d^3 \cdot \frac{k_b}{p} \cdot \frac{p\,l}{d} \cdot \frac{k_b}{E} = \frac{1}{32} \cdot \frac{k_b^2}{E} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot l.$$

Da $V = \frac{\pi}{4} d^2 l$ ist, so wird

$$\eta_A = \frac{1}{32}.$$

Es sollen nun beide Federenden fest eingespannt sein.

Nach den unter a) entwickelten Formeln wird

$$P = \frac{J}{e} \cdot \frac{k_b}{p} = \frac{\pi}{32} d^3 \cdot \frac{k_b}{p}; \qquad f = p\,\omega = \frac{P\,p^2}{E\,J}\, l = \frac{2\,p\,l}{d} \cdot \frac{k_b}{E}.$$

Auch bei der kreisförmigen Feder erreichen P und f den doppelten Wert. Folglich wird

$$\eta_A = 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}.$$

3. Die gewundene Drehungsfeder.

Auch hier wäre eine genaue Berechnung dieser Feder sehr umständlich; man pflegt daher vereinfachende Annahmen zu machen, um zu einfachen Ergebnissen zu gelangen. Insbesondere wird die Ganghöhe der Feder vernachlässigt.

Man kommt dann auf das folgende Problem.

Die Mittellinie $ABCDE$ eines gewundenen Stabes (Abb. 316) bestehe aus dem Kreisbogen $ABCD$ (vom Halbmesser r und vom Zentriwinkel ω) und aus der Geraden DE; E sei Mittelpunkt des Kreisbogens. In A sei der Stab eingespannt und in E durch eine Kraft P belastet, welche senkrecht zur Zeichenebene wirkt; der Stabteil DE werde als starr angenommen.

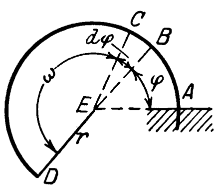


Abb. 316. Die gewundene Drehungsfeder.

Man nimmt auf DE einen beliebigen Punkt B an; der Winkel BEA sei gleich φ. Der Punkt C habe von B den Abstand $r \cdot d\varphi = ds$.

Infolge des Einflusses des drehenden Momentes

$$M_d = P r$$

wird sich der Punkt C gegenüber dem Punkte B verdrehen. Der verhältnismäßige Verdrehungswinkel ist für den kreisförmigen Querschnitt

$$\vartheta = \frac{1}{G} \frac{M_d}{J_p} = \frac{32}{\pi d^4} \cdot \frac{P r}{G}$$

(Seite 226); für den rechteckigen Querschnitt

$$\vartheta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G} = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \cdot \frac{P r}{G}$$

nach Seite 252. Die gesamte Verdrehung wird daher

$$\vartheta \cdot ds = \vartheta r \cdot d\varphi.$$

Der Angriffspunkt E der Kraft P bewegt sich um

$$\vartheta \cdot ds \cdot r = \vartheta r^2 d\varphi$$

in Richtung der Kraft (Abb. 317). Hieraus folgt die Strecke f, um die sich der Punkt E infolge der Verdrehung sämtlicher Querschnitte des Bogens $ABCD$ verschiebt:

$$f = \int_0^\omega \vartheta\, r^2\, d\varphi\,.$$

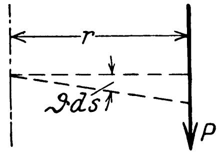


Abb. 317. Verschiebung des Angriffspunktes von P.

Für den kreisförmigen Querschnitt wird

$$f = \int_0^\omega \frac{32}{\pi d^4}\cdot\frac{P r}{G}\, r^2\, d\varphi = \frac{32}{\pi d^4}\cdot\frac{P r^3}{G}\,\omega;$$

für den rechteckigen Querschnitt

$$f = \int_0^\omega \psi_0\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\,\frac{P r}{G}\cdot r^2\, d\varphi = \psi_0\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\,\frac{P r^3}{G}\,\omega\,.$$

a) Die zylindrische Schraubenfeder.

Die gewonnenen Resultate kann man auf diese Federn übertragen, wenn man

$$\omega = 2\pi i$$

setzt, wobei i die Anzahl der Windungen der Feder bedeutet.

Die zylindrische Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitt (Abb. 318). Nach Seite 223 ist

$$M_d = P r = W_p\cdot k_d = \frac{\pi}{16}\, d^3\, k_d\,,$$

mithin wird die zulässige Belastung

$$P = \frac{\pi d^3}{16}\,\frac{k_d}{r}\,.$$

Setzt man diesen Wert in

$$f = \frac{32}{\pi d^4}\cdot\frac{P r^3}{G}\cdot 2\pi i = \frac{64\, i r^3}{d^4}\cdot\frac{P}{G}$$

ein, so wird

$$f = \frac{64\, i r^3}{d^4}\cdot\frac{\pi d^3}{16}\,\frac{k_d}{r}\cdot\frac{1}{G} = \frac{4\pi i r^2}{d}\,\frac{k_d}{G}\,.$$

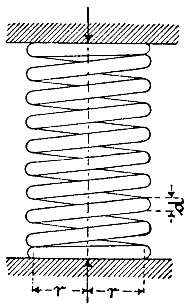


Abb. 318. Zylindrische Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitt.

Die Formänderungsarbeit, welche durch die von Null auf P wachsende Belastung bei Zurücklegung des Weges f geleistet wird, ist

$$A = \frac{1}{2} P\cdot f = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d^3}{16}\,\frac{k_d}{r}\cdot\frac{4\pi i r^2}{d}\,\frac{k_d}{G} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\, d^2\cdot 2\pi r i\cdot\frac{k_d^2}{G}\,.$$

Gibt man — entsprechend der für die Biegungsfedern benutzten Beziehung — A die Form

$$A = \eta_A\cdot\frac{k_d^2}{G}\cdot V,$$

so wird, weil das Volumen der Feder angenähert

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2\pi r i$$

ist,

$$\eta_A = \frac{1}{4}.$$

Beispiel 1. Eine zylindrische Schraubenfeder habe $2r = 45$ mm Durchmesser bei einer Drahtstärke $d = 1{,}5$ mm und $i = 12$ Windungen. Welche Beanspruchung und Verlängerung erfährt sie infolge einer Last $P \approx 1$ kg?

Es ist

$$\tau = \frac{Pr}{2 \cdot W} = \frac{1 \cdot 2{,}25}{2 \cdot 0{,}000\,331} \approx 3400 \text{ kg/cm}^2.$$

Da man bei gut gehärteten Federn $k_d = 3000$ kg/cm² zuläßt, so wäre die Höchstbelastung der Feder $P = 0{,}9$ kg, ihre Verlängerung würde

$$f = \frac{64\, i r^3}{d^4} \cdot \frac{P}{G} = \frac{64 \cdot 12 \cdot 2{,}25^3 \cdot 0{,}9}{0{,}15^4 \cdot 800\,000} = 19{,}5 \text{ cm}$$

betragen.

Der Federhub ist so groß, daß die Feder unmöglich ist, trotzdem die zulässige Spannung nicht überschritten wird. Es empfiehlt sich daher, von der Durchbiegung auszugehen und z. B. $f = 15$ mm anzunehmen. Es wird

$$P = \frac{f d^4 G}{64\, i r^3} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}15^4 \cdot 800\,000}{64 \cdot 12 \cdot 2{,}25^3} \approx 0{,}07 \text{ kg},$$

daher

$$\tau = \frac{Pr}{2 \cdot W} = \frac{0{,}07 \cdot 2{,}25}{2 \cdot 0{,}000\,331} = 240 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 2. Es ist eine Ventilfeder zu berechnen, die bei geschlossenem Ventil einen Druck von $P = 3$ kg ausübt; der Hub betrage 5 mm. Gegeben sei $r = 40$ mm als mittlerer Halbmesser der Feder; $k_d = 3000$ kg/cm².

Der Druck von $P = 3$ kg wird durch eine Vorspannung der Feder erreicht, der eine Verlängerung von f cm entsprechen würde. Dem Druck P' bei geöffnetem Ventil entspricht dann eine Verlängerung $f' = (f + 0{,}5)$ cm. Die Differenz $P' - P$ soll bei einer gut gewählten Feder möglichst gering sein. Angenommen werden die zulässige Schubspannung k_d und die Windungszahl i.

a) $k_d = 3000$ kg/cm²; $i = 8$; $G = 800\,000$ kg/cm².

Aus $P \cdot r = W_p \cdot k_d$ folgt $W_p = \dfrac{P \cdot r}{k_d} = \dfrac{3 \cdot 4}{3000} = 0{,}004$ cm³.

Daraus $d = 0{,}28$ cm mit $W_p = 2 \cdot 0{,}002155$ cm³.

Aus $f = \dfrac{64 \cdot r^3 \cdot P}{d^4 \cdot G} \cdot i = \dfrac{64 \cdot 4^3 \cdot 3 \cdot 100^4}{28^4 \cdot 800\,000} \cdot i = 2{,}5\, i$ folgt als Verlängerung für 1 Windung $f_0 = 2{,}5$ cm/Windung bei einem mittleren Federdurchmesser von $2r = 80$ mm. Für $i = 8$ erhält man $f = 2{,}5 \cdot 8 = 20$ cm; also $f' = 20{,}5$ cm.

Demnach $P' = P \cdot \dfrac{f'}{f} = 3 \cdot \dfrac{20{,}5}{20} = 3{,}08$ kg.

Bei $i = 4$ Windungen wird $f = 4 \cdot 2{,}5 = 10$ cm; also $f' = 10{,}5$ cm, folglich

$$P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{10{,}5}{10} = 3{,}15 \text{ kg}.$$

Die größte Schubspannung ist $\tau = \dfrac{P \cdot r}{W_p} = \dfrac{3 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}002155} \approx 2800$ kg/cm².

b) Erscheint die Verlängerung für 1 Windung zu groß, so muß der Durchmesser d vergrößert werden. Wir nehmen $d = 0{,}35$ cm an und erhalten

$$f_0 = \frac{64 \cdot r^3 \cdot P}{d^4 \cdot G} \cdot 1 = \frac{64 \cdot 4^3 \cdot 3 \cdot 100^4}{354 \cdot 800\,000} = 1{,}025 \text{ cm/Windung.}$$

Bei $i = 8$ Windungen erhält man $f = 8 \cdot f_0 = 8 \cdot 1{,}025 = 8{,}2$ cm; also $f' = 8{,}7$ cm, folglich $P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{8{,}7}{8{,}2} = 3{,}18$ kg.

Bei $i = 6$ Windungen erhält man $f = 6 \cdot f_0 = 6 \cdot 1{,}025 = 6{,}15$ cm; also $f' = 6{,}65$ cm, folglich $P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{6{,}65}{6{,}15} = 3{,}25$ kg.

Die größte Schubspannung wird $\tau = \frac{P \cdot r}{W_p} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}00421} \approx 1500 \text{ kg/cm}^2$.

Die zylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 319). Nach Seite 252 ist

$$M_d = P \cdot r = \frac{2}{9}\, b^2 h k_d;$$

hierbei ist b die kleinere Seite des Rechtecks, gleichgültig, ob b oder h in die Richtung der Federachse fällt.

Es ist also die zulässige Belastung

$$P = \frac{2}{9}\, \frac{b^2 h}{r}\, k_d .$$

Nach Seite 427 ist mit $\omega = 2\pi i$

$$f = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P r^3}{G} \cdot 2\pi i .$$

Setzt man für P den gefundenen Wert ein, so wird

$$f = \frac{4}{9}\, \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \pi i r^2 \cdot \frac{k_d}{G} .$$

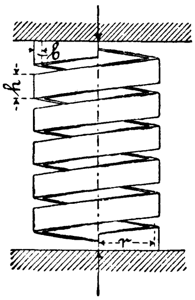


Abb. 319. Zylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitt.

Die Formänderungsarbeit A ist daher

$$A = \frac{1}{2} P \cdot f = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d \cdot \frac{4}{9} \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \pi i r^2 \cdot \frac{k_d}{G} = \frac{2}{81} \psi_0 \cdot \frac{b^2 + h^2}{h^2}\, V \frac{k_d^2}{G},$$

wobei

$$V = b h \cdot 2\pi r i$$

das Volumen der Feder ist. Mithin ist

$$\eta_A = \frac{2}{81} \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{h^2} .$$

Für ψ_0 kann nach Versuchen von Bach

$$\psi_0 = 4{,}175 - 0{,}15 \frac{h}{b}$$

gesetzt werden. Die Abweichung von dem auf Seite 252 gegebenen Werte ψ_0, der für gerade Stäbe gilt, erklärt sich durch die Krümmung der Feder und dadurch, daß die abgeleiteten Gleichungen nur angenähert richtig sind.

b) Die Kegelfeder.

Auch auf diese Federn werden die auf Seite 426 abgeleiteten Ergebnisse angewandt.

Setzt man (Abb. 320) den veränderlichen Radius gleich ϱ, so entspricht dem Winkel $\varphi = 0$ der Radius r_2, dem Winkel $\varphi = 2\pi i$ der

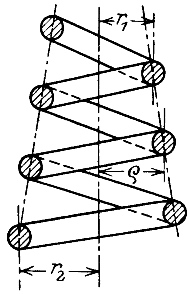


Abb. 320. Kegelfeder.

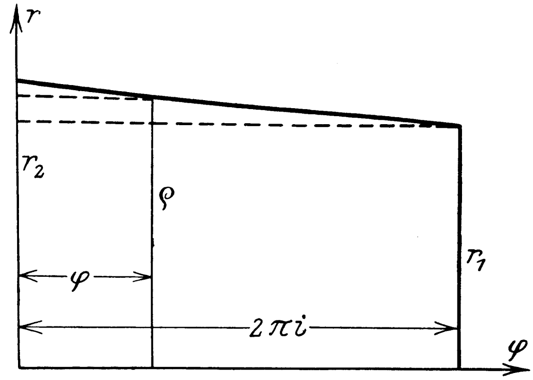


Abb. 321. Bestimmung von ϱ.

Radius r_1; dem Winkel φ der Radius ϱ (Abb. 321). Es ist also

$$\frac{r_2 - \varrho}{\varphi} = \frac{r_2 - r_1}{2\pi i}; \quad r_2 - \varrho = \frac{r_2 - r_1}{2\pi i}\varphi,$$

mithin

$$\varrho = r_2 - \frac{r_2 - r_1}{2\pi i}\varphi.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{r_2 - r_1}{2\pi i}; \quad d\varrho = -\frac{r_2 - r_1}{2\pi i}d\varphi; \quad d\varphi = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1}d\varrho.$$

Nach Seite 427 ist

$$f = \int_0^\omega \vartheta\varrho^2 d\varphi.$$

Folglich wird

$$f = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1}\int_{r_2}^{r_1} \vartheta\varrho^2 d\varrho,$$

wenn man für $d\varphi$ den gefundenen Wert einsetzt. Die Grenzen, zwischen denen das Integral zu nehmen ist, sind $\varrho = r_2$ und $\varrho = r_1$; das drehende Moment ist

$$M_d = P \cdot \varrho.$$

Die Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 322). Mit

$$\vartheta = \frac{32}{\pi d^4}\frac{M_d}{G} = \frac{32 P}{G\pi d^4}\varrho$$

wird

$$f = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} \cdot \frac{32\,P}{G\pi d^4}\int\limits_{r_2}^{r_1} \varrho^3\, d\,\varrho = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} \cdot \frac{32\,P}{G\pi d^4}\left(\frac{r_1^4 - r_2^4}{4}\right)$$

$$= \frac{16\,i\,P}{G(r_2 - r_1)\,d^4}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{16\,i\,P}{G(r_2 - r_1)\,d^4}(r_2^2 + r_1^2)\,(r_2 - r_1)\,(r_2 + r_1)$$

$$= \frac{16\,i\,P}{G\,d^4}(r_1 + r_2)\,(r_1^2 + r_2^2)\,.$$

Ist $r_1 = 0$, $r_2 = r$ (Abb. 323), so wird

$$f = \frac{16\,i\,P}{G d^4}\, r^3.$$

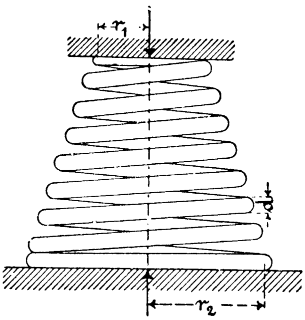


Abb. 322. Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitt.

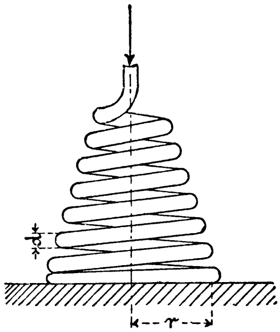


Abb 323. Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitt.

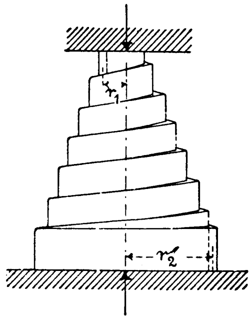


Abb. 324. Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitt.

Das größte Drehmoment ist $P r_2$ bzw. $P r$. Folglich kann die zulässige Belastung aus

$$P\,r_2 = \frac{\pi}{16} d^3 \cdot k_d \quad \text{(Abb. 322)}$$

bzw.

$$P\,r = \frac{\pi}{16} d^3 \cdot k_d \quad \text{(Abb. 323)}$$

bestimmt werden. η_A ist gleich $\frac{1}{8}$.

Die Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitt (Abb. 324). Mit

$$\vartheta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\frac{M_d}{G} = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{G}\varrho$$

wird

$$f = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} \cdot \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{G}\int\limits_{r_2}^{r_1} \varrho^3\, d\,\varrho$$

$$= -\frac{2\pi i}{r_2 - r_2}\,\psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{G}\frac{r_1^4 - r_2^4}{4}$$

$$= \frac{2\pi i}{r_2 - r_1}\,\psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{4G}(r_2 - r_1)\,(r_2 + r_1)\,(r_2^2 + r_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}\,\psi_0\,\pi\,i \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\frac{P}{G}(r_1 + r_2)\,(r_1^2 + r_2^2)\,.$$

Die zulässige Belastung ergibt sich aus dem maximalen Drehmoment:

$$P \cdot r_2 = \frac{2}{9} b^2 h \cdot k_d .$$

Ist $r_2 = r$ und $r_1 = 0$ (Abb. 325), so wird

$$f = \frac{1}{2} \psi_0 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G} r^3$$

und

$$P r = \frac{2}{9} b^2 h k_d .$$

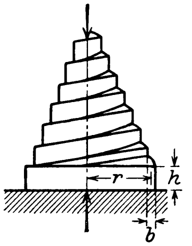


Abb. 325. Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitt.

Zu bemerken ist, daß für i in allen Formeln nur diejenigen Windungen zu verstehen sind, welche wirklich an der Formänderung teilnehmen.

Beispiel. Bei einer Feder nach Abb. 324 wurden folgende Werte gemessen:

$$2 r_1 = 8{,}26\,\text{cm}, \quad 2 r_2 = 16{,}85\,\text{cm}, \quad b = 0{,}90\,\text{cm}, \quad h = 11{,}66\,\text{cm}.$$

Bei einer Belastung von 2500 kg betrug die Durchbiegung $f = 3{,}82$ cm, die Anzahl der Windungen 4,75. Da jedoch die oberste und unterste Windung eben abgeschliffen waren, muß mit $i = 2{,}75$ gerechnet werden[1]).

Aus der Gleichung für f folgt, wenn man die gegebenen Werte einsetzt:

$$f = 3{,}82 = \frac{1}{2} \psi_0 \pi\, 2{,}75 \cdot \frac{0{,}9^2 + 11{,}66^2}{0{,}9^3 \cdot 11{,}66^3} \frac{2500}{840000} (4{,}13 + 8{,}425)(4{,}13^2 + 8{,}425^2)$$

$$= 1{,}682\, \psi_0 .$$

Es ist daher

$$\psi_0 = \frac{3{,}82}{1{,}682} = 2{,}27 .$$

Nach unserer Formel (Seite 429) würde

$$\psi_0 = 4{,}175 - 0{,}15 \cdot \frac{11{,}66}{0{,}9} = 4{,}175 - 1{,}943 = 2{,}23$$

sein. Man sieht hieraus, daß die gegebene Formel brauchbare Werte liefert.

Die größte Spannung ist

$$\tau_{\max} = \frac{P r_2}{\frac{2}{9} b^2 h} = \frac{2500 \cdot 8{,}425}{\frac{2}{9} 0{,}9^2 \cdot 11{,}66} \approx 10000\,\text{kg/cm}^2 .$$

Zulässig ist für Rechtecksfeder $k_d = 11000$ kg/cm².

Ausführliche Tabellen über Federn findet man in den bekannten Taschenbüchern.

XVI. Hohlkörper und Gefäße.

1. Berechnung eines Rohres.

In Abb. 326 ist ein Rohr dargestellt, dessen Stirnseiten keinen Einfluß auf die Wandungen des Rohres ausüben mögen.

Es sei

r_i der innere Halbmesser des Rohres,
r_a der äußere Halbmesser des Rohres,
p_i die Pressung der das Rohr erfüllenden Flüssigkeit,
p_a die Pressung der das Rohr umgebenden Flüssigkeit.

---

[1]) Bach: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl., S. 579.

Das Rohr wird so auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, daß die x-Achse mit der Rohr-Achse zusammenfällt. Wir bebetrachten einen Punkt P der x-z-Ebene, der den Abstand z von der Rohr-Achse hat. An dem Körperelement (Abb. 327), das wir uns durch

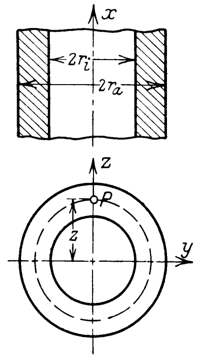


Abb. 326. Rohr.

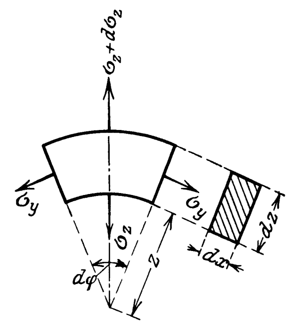


Abb. 327. Spannungen am Körperelement.

Zylinderflächen vom Radius z und $z + dz$ aus dem Rohr herausgeschnitten denken, wirken folgende Spannungen:

σ_y in Richtung des Umfanges, tangential,

σ_z in Richtung des Radius, radial,

und daher folgende Kräfte:

$\sigma_z \cdot z d\varphi \cdot dx$ radial einwärts,

$(\sigma_z + d\sigma_z)(z + dz)\, d\varphi dx$ radial auswärts,

$\sigma_y \cdot dz \cdot dx$ senkrecht zu den Flächen $dzdx$.

Die Gleichgewichtsbedingungen erfordern, daß die Summe der Kräfte in senkrechter Richtung gleich Null sei. Da σ_y den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ mit der z-Achse bildet, so wird

$$\sigma_z \cdot z\, d\varphi \cdot dx - (\sigma_z + d\sigma_z)(z + dz)\, d\varphi\, dx + 2 \cdot \sigma_y \cdot dz\, dx \sin\frac{d\varphi}{2} = 0\,.$$

Unter Beachtung, daß $2 \sin\frac{d\varphi}{2} \sim d\varphi$ ist, ergibt sich nach Division mit $dzd\varphi dx$, wenn man die unendlich kleine Größe $d\sigma_z$ vernachlässigt:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} z - \sigma_z + \sigma_y = 0$$

oder

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}(\sigma_y - \sigma_z)\,. \tag{1}$$

Eine zweite Beziehung zwischen σ_y und σ_z liefert die Betrachtung der Formänderung. Aus Symmetriegründen kann sich jeder Punkt nur radial, nicht tangential verschieben. Nennen wir diese Verschiebung ξ, so wird die tangentiale Dehnung im Punkte P

$$\varepsilon_y = \frac{2\pi(z+\xi) - 2\pi z}{2\pi z} = \frac{\xi}{z}\,, \tag{2}$$

weil der Abstand z in $z+\xi$ übergeht. Da der Abstand $z+dz$ in $z+dz+\xi+d\xi$ übergeht, wird die radiale Länge des Elementes nach der Formänderung $[z+dz+\xi+d\xi]-[z+\xi]=dz+d\xi$, mithin die radiale Dehnung

$$\varepsilon_z=\frac{[dz+d\xi]-dz}{dz}=\frac{d\xi}{dz}. \tag{3}$$

Wir haben einen zweidimensionalen Spannungszustand; folglich ist nach Seite 50

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_y&=\frac{\sigma_y}{E}-\frac{\sigma_z}{mE}\\ \varepsilon_z&=\frac{\sigma_z}{E}-\frac{\sigma_y}{mE}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Lösen wir diese Gleichungen nach σ_y und σ_z auf, so wird

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y&=E\cdot\frac{m^2}{m^2-1}\left(\varepsilon_y+\frac{1}{m}\varepsilon_z\right)=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}(m\varepsilon_y+\varepsilon_z)\\ \sigma_z&=E\frac{m^2}{m^2-1}\left(\varepsilon_z+\frac{1}{m}\varepsilon_y\right)=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}(m\varepsilon_z+\varepsilon_y)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

da nach Seite 54

$$\frac{m}{m+1}E=\frac{2}{\beta}$$

ist.

Setzen wir für ε_y und ε_z gemäß (2) und (3) $\frac{\xi}{z}$ und $\frac{d\xi}{dz}$, so wird

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y&=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(m\frac{\xi}{z}+\frac{d\xi}{dz}\right)\\ \sigma_z&=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(m\frac{d\xi}{dz}+\frac{\xi}{z}\right)\\ \sigma_y-\sigma_z&=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(m\frac{\xi}{z}+\frac{d\xi}{dz}-m\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z}\right)=\frac{2}{\beta}\left(\frac{\xi}{z}-\frac{d\xi}{dz}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun ist aber

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{z}\right)}{dz}=\frac{z\left(\frac{d\xi}{dz}\right)-\xi\cdot 1}{z^2}=\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}, \tag{7}$$

folglich nach (6):

$$\frac{d\sigma_z}{dz}=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(m\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}\right). \tag{8}$$

Setzt man (6) und (8) in (1) ein, so wird, wenn man den gemeinsamen Faktor $\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}$ fortläßt:

$$\begin{aligned}m\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}&=\frac{1}{z}\left(m\frac{\xi}{z}+\frac{d\xi}{dz}\right)-\frac{1}{z}\left(m\frac{d\xi}{dz}+\frac{\xi}{z}\right)\\ &=m\frac{\xi}{z^2}+\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{m}{z}\cdot\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$m\frac{d^2\xi}{dz^2} = m\frac{\xi}{z^2} - \frac{m}{z}\frac{d\xi}{dz}$$

oder

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz} - \frac{\xi}{z^2} = 0, \tag{9}$$

und daher nach (7)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{\xi}{z}\right) = 0.$$

Die Integration liefert

$$\frac{d\xi}{dz} + \frac{\xi}{z} = c_1,$$

wobei c_1 die Integrationskonstante ist. Da

$$\frac{d(\xi\cdot z)}{dz} = z\frac{d\xi}{dz} + \xi$$

ist, können wir der letzten Gleichung auch die Form

$$\frac{d(\xi\cdot z)}{dz} = c_1\cdot z$$

geben.

Integrieren wir nochmals, so wird

$$\xi\cdot z = \frac{1}{2}c_1 z^2 + c_2, \tag{9a}$$

wobei c_2 eine zweite Integrationskonstante darstellt. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{z} &= \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2} \\ \frac{d\xi}{dz} &= c_1 - \frac{\xi}{z} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Setzt man diese Werte in (6) ein, so wird schließlich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) + \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right] \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen, daß

$$\left.\begin{aligned} &\text{für} \quad z = r_i \quad \sigma_z = -p_i \\ &\;\;,, \quad\; z = r_a \quad \sigma_z = -p_a \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

sein muß.

Wir betrachten die beiden Fälle a) und b).

a) Rohr unter innerem Druck p_i.

Da $p_a = 0$ ist, so wird

$$\text{für} \quad z = r_i \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1)\right] = -p_i,$$

$$,, \quad z = r_a \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_a^2}(m-1)\right] = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$c_2 = \frac{m+1}{m-1} \cdot r_a^2 \cdot \frac{c_1}{2}.$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so wird

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{c_1}{2} \left[(m+1) - \frac{m+1}{m-1} \frac{m-1}{r_i^2} \cdot r_a^2\right] = -p_i$$

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{c_1}{2} \cdot \frac{m+1}{r^2} (r_i^2 - r_a^2) = -p_i$$

und daher

$$c_1 = \frac{m-1}{m+1} \beta \cdot \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$c_2 = \frac{m+1}{m-1} \cdot r_a^2 \cdot \frac{c_1}{2} = \frac{\beta}{2} \cdot p_i \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Nach (11) ist daher

$$\sigma_y = \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m-1}{m+1} \beta \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{m-1}{z^2} \cdot \frac{\beta}{2} \cdot p_i \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p_i}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \\ \text{und ebenso}\qquad & \\ \sigma_z &= \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{p_i}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Gemäß (4) sind daher die reduzierten Spannungen:

$$E \cdot \varepsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_z = \frac{m-1}{m} \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_i}{z^2} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$E \cdot \varepsilon_z = \sigma_z - \frac{1}{m} \sigma_y = \frac{m-1}{m} \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m} \frac{p_i}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Mit

$$m = \frac{10}{3}$$

wird

$$\left.\begin{aligned} E\,\varepsilon_y &= \frac{p_i}{r_a^2 - r_i^2}\left(1{,}3 \frac{r_a^2}{z^2} r_i^2 + 0{,}7\, r_i^2\right), \\ -E\,\varepsilon_z &= \frac{p_i}{r_a^2 - r_i^2}\left(1{,}3 \frac{r_a^2}{z^2} r_i^2 - 0{,}7\, r_i^2\right). \end{aligned}\right. \qquad (14)$$

Die Zugspannung $E\,\varepsilon_y$ ist stets größer als die Druckspannung $-E\,\varepsilon_z$ und erreicht ihren größten Wert für $z = r_i$, d. h. an der Innenfläche des Rohres. Soll die größte reduzierte Spannung den Wert k_z nicht überschreiten, so muß

$$\frac{p_i}{r_a^2 - r_i^2} (1{,}3\, r_a^2 + 0{,}7\, r_i^2) \leqq k_z$$

sein. Hieraus folgt

$$r_a^2 (1{,}3\, p_i - k_z, \leqq r_i^2 (-k_z - 0{,}7\, p_i),$$

$$r_a^2 (k_z - 1{,}3\, p_i) \geqq r_i^2 (k_z + 0{,}7\, p_i)$$

und daher

$$r_a \geqq r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}7\,p_i}{k_z - 1{,}3\,p_i}}\,. \tag{15}$$

Da für $1{,}3\,p_i = k_z$, $r_a = \infty$ wird, so sind nur solche Verhältnisse möglich, für welche

$$p_i < \frac{k_z}{1{,}3}$$

ist.

Für im Verhältnis zum Halbmesser geringe Wandstärke

$$s = r_a - r_i$$

kann angenähert gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Rohrquerschnitt angenommen werden.

Hat das Rohr die Länge l, so wirkt auf das Flächenteilchen $r_i\,d\varphi \cdot l$ die Kraft

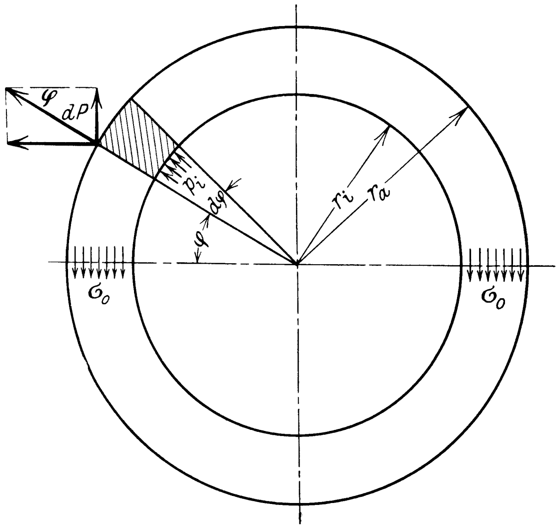


Abb. 328. Rohr unter innerem Überdruck.

$$dP = p_i\,r_i\,d\varphi \cdot l \text{ (Abb. 328).}$$

Wir wollen das Gleichgewicht der oberen Rohrhälfte betrachten. Die senkrechte Komponente von dP ist $dP \sin\varphi$. Folglich wird auf die untere Rohrhälfte eine Kraft

$$R = \int_0^\pi dP \sin\varphi = \int_0^\pi p_i r_i\,d\varphi \cdot l \sin\varphi = p_i r_i l \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = p_i r_i l \Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi$$
$$= 2 p_i r_i l$$

ausgeübt. Diese Kraft ruft in dem Rohr eine Spannung σ_0 hervor. Soll diese kleiner als die zulässige Spannung k_z sein, so ist

$$R \leqq 2\,k_z \cdot s \cdot l$$

oder

$$2\,p_i r_i l \leqq 2\,k_z \cdot s \cdot l$$

oder

$$s = r_a - r_i \geqq \frac{p_i\,r_i}{k_z}\,. \tag{15a}$$

Diese Gleichung liefert bei $s = 0{,}2\,r_i \sim 15\%$, bei $s = 0{,}3\,r_i \sim 20\%$ zu kleine Wandstärken.

Als verbesserte Näherungsformel wird

$$s = \frac{p_i}{k_z} \cdot \frac{r_a + r_i}{2} \tag{15b}$$

benutzt[1]). Diese Formel liefert bei $s = 0{,}2\, r_i \sim 6\%$, bei $s = 0{,}3\, r_i \sim 8\%$ zu kleine Werte s.

b) Rohr unter äußerem Druck p_a.

Ist Einbeulen oder Einknicken der Wandung nicht zu befürchten, so wird mit $p_i = 0$ nach (11) und (12)

$$\text{für } z = r_i \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1) \right] = 0,$$

$$\text{,,} \quad z = r_a \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_a^2}(m-1) \right] = -p_a .$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$c_2 = \frac{m+1}{m-1} \cdot r_i^2 \cdot \frac{c_1}{2} .$$

Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung ein, so wird

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{c_1}{2} \left[(m+1) - \frac{m+1}{m-1} r_i^2 \cdot \frac{m-1}{r_a^2} \right] = -p_a ,$$

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{c_1}{2} \cdot \frac{m+1}{r_a^2} (r_a^2 - r_i^2) = -p_a ,$$

$$c_1 = -\frac{m-1}{m+1} \beta \cdot \frac{p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

und daher

$$c_2 = \frac{m+1}{m-1} r_i^2 \cdot \frac{c_1}{2} = -\frac{\beta}{2} \cdot p_a \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} .$$

Nach (11) ist

$$\sigma_y = -\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m-1}{m+1} \beta \cdot \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{m-1}{z^2} \cdot \frac{\beta}{2} p_a \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{p_a}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \\ \sigma_z &= -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p_a}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Gemäß (4) sind daher die reduzierten Spannungen

$$E \cdot \varepsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_z = -\frac{m-1}{m} \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m} \frac{p_a}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$E \cdot \varepsilon_z = \sigma_z - \frac{1}{m} \sigma_y = -\frac{m-1}{m} \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m} \frac{p_a}{z^2} \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} .$$

Mit

$$m = \frac{10}{3}$$

wird

[1]) Föppl, A. und O.: Grundzüge der Festigkeitslehre. S. 254. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1923.

$$\left.\begin{aligned} -E\,\varepsilon_y &= \frac{p_a}{r_a^2 - r_i^2}\left(1{,}3\,\frac{r_a^2}{z^2}\,r_i^2 + 0{,}7\,r_a^2\right) \\ E\,\varepsilon_z &= \frac{p_a}{r_a^2 - r_i^2}\left(1{,}3\,\frac{r_a^2}{z^2}\,r_i^2 - 0{,}7\,r_a^2\right). \end{aligned}\right\} \qquad (16\,\mathrm{a})$$

Die größte Druckspannung folgt aus der ersten Gleichung für $z = r_i$. Es ist also

$$\frac{p_a}{r_a^2 - r_i^2}\,(1{,}3\,r_a^2 + 0{,}7\,r_a^2) = 2\,p_a\,\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \leqq k\,.$$

Die größte Zugspannung folgt aus der zweiten Gleichung, ebenfalls für $z = r_i$:

$$\frac{p_a}{r_a^2 - r_i^2}\,(1{,}3\,r_a^2 - 0{,}7\,r_a^2) = 0{,}6\,p_a\,\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \leqq k_z\,.$$

Da die Druckspannung größer ist, so wird

$$\begin{aligned} 2\,p_a\,r_a^2 &\leqq k\,r_a^2 - k\,r_i^2\,, \\ r_a^2\,(2\,p_a - k) &\leqq -k\,r_i^2\,, \\ r_a^2\,(k - 2\,p_a) &\geqq k\,r_i^2\,, \\ r_a &\geqq r_i\sqrt{\frac{k}{k - 2\,p_a}}\,. \end{aligned} \qquad (17)$$

Es muß also $p_a < \frac{k}{2}$ sein.

Für verhältnismäßig geringe Wandstärken

$$s = r_a - r_i$$

findet man unter denselben Voraussetzungen, die zur Beziehung (15a) führte

$$s = r_a - r_i \geqq \frac{p_a\,r_a}{k}\,. \qquad (17\,\mathrm{a})$$

Die Gleichung liefert bei $s = 0{,}2\,r_i \sim 7\%$, bei $s = 0{,}3\,r_i \sim 12\%$ zu kleine Wandstärken.

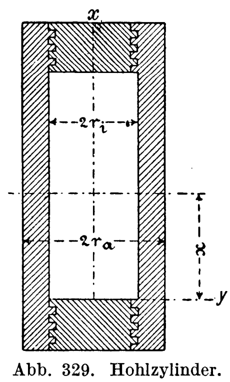


Abb. 329. Hohlzylinder.

2. Berechnung eines Hohlzylinders.

Die Bezeichnungen der Abb. 329 sind dieselben wie bei Abb. 326, auch die Lage des Achsenkreuzes stimmt überein, wobei die y—z-Ebene mit der unteren den Hohlraum begrenzenden Stirnebene des Zylinders zusammenfällt.

Der Punkt P des Zylinders, den wir betrachten, hat von der y—z-Ebene den Abstand x und von der Zylinderachse den Abstand z. Die Verhältnisse liegen hier genau so wie bei dem unter 1. behandelten Rohr, nur kommen hier wegen des Bodendruckes Spannungen in Richtung der x-Achse hinzu. Wir haben es hier mit einem dreiachsigen Spannungszustand zu tun. Nun gilt der Satz, daß, falls Kräfte im Raume im Gleichgewicht sind, auch die in und parallel einer beliebigen Ebene wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein müssen. Betrachten wir die in der y—z-Ebene wirkenden Kräfte, so sind sie dieselben wie bei dem unter 1 behandelten Rohr (Abb. 327).

Folglich gilt auch hier die Beziehung (1)

$$\frac{d\,\sigma_z}{d_z} = \frac{1}{z}\,(\sigma_y - \sigma_z)\,. \tag{18}$$

Ebenso stimmen die Ausdrücke für die radiale und tangentiale Dehnung mit den Formeln (2) und (3) überein; es ist

$$\varepsilon_y = \frac{\xi}{z} \quad \text{und} \quad \varepsilon_z = \frac{d\,\xi}{d\,z}\,. \tag{19}$$

Nach Seite 216 können wir die Spannungen σ_x, σ_y und σ_z mit Hilfe der Dehnungen ε_x, ε_y und σ_z ausdrücken. Es ist mit

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e\,, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Setzt man die Werte (19) in (20) und (21) ein, so wird mit

$$e = \varepsilon_x + \frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\varepsilon_x + \frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta}\left(\frac{d\,\xi}{d\,z} + \frac{\varepsilon_x + \frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}}{m-2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt durch Multiplikation mit $\frac{\beta}{2}\,(m-2)$

$$\sigma_x \cdot \frac{\beta}{2}\,(m-2) = \varepsilon_x\,(m-2) + \varepsilon_x + \frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}\,,$$

$$\sigma_x \cdot \frac{\beta}{2}\,(m-2) = \varepsilon_x\,(m-1) + \frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}\,,$$

$$\varepsilon_x\,(m-1) = \sigma_x \cdot \frac{\beta}{2}\,(m-2) - \frac{\xi}{z} - \frac{d\,\xi}{d\,z}\,,$$

$$\varepsilon_x = \frac{m-2}{2\,(m-1)}\,\beta\,\sigma_x - \frac{\frac{\xi}{z} + \frac{d\,\xi}{d\,z}}{m-1}\,.$$

Dieser Wert wird in die beiden letzten Gleichungen (22) eingesetzt.

Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left(m\,\frac{\xi}{z}+\frac{d\,\xi}{d\,z}\right)+\frac{\sigma_x}{m-1}\\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left(\frac{\xi}{z}+m\,\frac{d\,\xi}{d\,z}\right)+\frac{\sigma_x}{m-1}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Nimmt man an, daß die Axialkraft $\pi r_i^2 p_i - \pi r_a^2 p_a$ sich gleichmäßig über den Querschnitt $\pi r_a^2 - \pi r_i^2$ verteilt, so wird

$$\sigma_x = \frac{\pi r_i^2 p_i - \pi r_a^2 p_a}{\pi r_a^2 - \pi r_i^2} = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\,, \tag{24}$$

also unveränderlich.

Der Ausdruck (23) für σ_z unterscheidet sich nur um den konstanten Wert $\frac{\sigma_x}{m-1}$ von der zweiten Formel (6). Folglich wird entsprechend (8,

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(m\,\frac{d^2\xi}{d\,z^2}+\frac{1}{z}\,\frac{d\xi}{d\,z}-\frac{\xi}{z^2}\right). \tag{25}$$

Aus den Gleichungen (23) folgt durch Subtraktion

$$\sigma_y-\sigma_z = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(m\,\frac{\xi}{z}+\frac{d\xi}{d\,z}-\frac{\xi}{z}-m\,\frac{d\xi}{dz}\right)=\frac{2}{\beta}\left(\frac{\xi}{z}-\frac{d\xi}{dz}\right). \tag{26}$$

Aus der Übereinstimmung der Gleichungen (18), (25) und (26) mit (1), (8) und (6) ergibt sich, daß wir auf die unter 1. abgeleitete Differentialgleichung (9) kommen müssen. Entsprechend der dort durchgeführten Ableitung wird daher

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{z} &= \frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{z^2}\\ \frac{d\xi}{d\,z} &= \frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{z^2}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

d. h. die radiale Verschiebung ist ebenso groß wie bei dem Rohr. Setzt man (27) in (23) ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1)+\frac{c_2}{z^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_x}{m-1}\\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1)-\frac{c_2}{z^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_x}{m-1}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die Formeln (28) gehen in die Werte (11) über, wenn man σ_x vernachlässigt.

Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich wieder aus den Bedingungen, daß

$$\left.\begin{aligned}&\text{für } z = r_i \quad \sigma_z = -p_i\\ &\;\;,,\;\;\; z = r_a \quad \sigma_z = -p_a\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

sein muß.

a) Hohlzylinder unter innerem Druck p_i.

Es ist $p_a = 0$. Folglich ergibt sich aus (28) und (29)

$$\text{für } z=r_i \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1)-\frac{c_2}{r_i^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_x}{m-1} = -p_i\,,$$

$$,, \quad z=r_a \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1)-\frac{c_2}{r_a^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_x}{m-1} = 0\,.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so wird

$$\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left[c_2\,(m-1)\left(\frac{1}{r_i^2}-\frac{1}{r_a^2}\right)\right]=p_i\,,$$

$$\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot c_2\,(m-1)\,\frac{r_a^2-r_i^2}{r_a^2\,r_i^2}=p_i$$

und daher

$$c_2=\frac{p_i}{2}\,\beta\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\frac{c_1}{2}\,(m+1)-\frac{c_2}{r_a^2}\,(m-1)+\frac{\beta}{2}\,\sigma_x=0\,.$$

Es ist also

$$\frac{c_1}{2}\,(m+1)=\frac{c_2}{r_a^2}\,(m-1)-\frac{\beta}{2}\,\sigma_x$$

$$=\frac{m-1}{r_a^2}\cdot\frac{p_i}{2}\,\beta\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{\beta}{2}\,\sigma_x$$

$$=\frac{(m-1)\,\beta}{2}\left[\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{\sigma_x}{m-1}\right]$$

$$c_1=\frac{m-1}{m+1}\,\beta\left[\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{\sigma_x}{m-1}\right].$$

Die gefundenen Ausdrücke für c_1 und c_2 werden in (28) eingesetzt:

$$\sigma_y=\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left[\frac{m-1}{2}\cdot\beta\left\{\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{\sigma_x}{m-1}\right\}+\frac{m-1}{z^2}\,\frac{p_i}{2}\,\beta\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\right]+\frac{\sigma_x}{m-1}$$

$$=\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{\sigma_x}{m-1}+\frac{p_i}{z^2}\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}+\frac{\sigma_x}{m-1}\,,$$

$$\sigma_y=\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}+\frac{p_i}{z^2}\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,. \tag{30}$$

Da sich σ_y und σ_z in den Formeln (28) nur durch das Vorzeichen von z^2 unterscheiden, so wird

$$\sigma_z=\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}-\frac{p_i}{z^2}\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,. \tag{31}$$

Die reduzierten Spannungen lassen sich aus den Gleichungen (Seite 215)

$$\left.\begin{aligned} E\,\varepsilon_x&=\sigma_x-\frac{1}{m}\,(\sigma_y+\sigma_z)\\ E\,\varepsilon_y&=\sigma_y-\frac{1}{m}\,(\sigma_z+\sigma_x)\\ E\,\varepsilon_z&=\sigma_z-\frac{1}{m}\,(\sigma_x+\sigma_y)\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

bestimmen, wobei gemäß (24) mit $p_a=0$

$$\sigma_x=\frac{p_i\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2} \tag{33}$$

ist.

Setzt man (30), (31) und (33) in (32) ein, so wird mit $m = \frac{10}{3}$

$$E\,\varepsilon_x = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_i}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$= \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2 p_i}{r_a^2 - r_i^2} = 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i\,,$$

$$E\,\varepsilon_y = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p_i}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_i}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$= \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2 p_i}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_i}{z^2}$$

$$= 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i + 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_i}{z^2}\,,$$

$$E\,\varepsilon_z = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{p_i}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_i}{z^2}\frac{r_a^2 r^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$= \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2 p_i}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_i}{z^2}$$

$$= 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i - 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_i}{z^2}\,.$$

Die reduzierte Spannung $E\,\varepsilon_x$ ist bedeutend kleiner als die reduzierten Spannungen $E\,\varepsilon_y$ und $E\,\varepsilon_z$, so daß sie nicht weiter untersucht werden braucht.

Die größte Zugspannung folgt aus $E\varepsilon_y$ für $z = r_i$; die größte Druckbeanspruchung aus $E\,\varepsilon_z$ ebenfalls für $z = r_i$; es ist

$$(E\,\varepsilon_y)_{\max} = 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i + 1{,}3\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i = \frac{1{,}3\,r_a^2 + 0{,}4\,r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i\,,$$

$$(-E\,\varepsilon_z)_{\max} = -0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i + 1{,}3\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i = \frac{1{,}3\,r_a^2 - 0{,}4\,r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i\,.$$

Da die Zugspannung die größere ist, muß sie kleiner als die zulässige Spannung k_z sein.

Es ist also

$$\frac{1{,}3\,r_a^2 + 0{,}4\,r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i \leqq k_z\,,$$

$$r_a^2(1{,}3\,p_i - k_z) \leqq r_i^2(-0{,}4\,p_i - k_z)\,,$$

$$r_a^2(k_z - 1{,}3\,p_i) \geqq r_i^2(k_z + 0{,}4\,p_i)\,,$$

$$r_a \geqq r_i\sqrt{\frac{k_z + 0{,}4\,p_i}{k_z - 1{,}3\,p_i}}\,. \qquad (34)$$

Für verhältnismäßig kleine Wandstärken

$$s = r_a - r_i$$

kann unter Vernachlässigung der Axialkraft nach (15a) angenähert

$$s = r_a - r_i \geqq \frac{p_i r_i}{k_z} \qquad (34\,a)$$

gesetzt werden. Diese Formel liefert

$$\text{bei } s = 0{,}2\, r_i \sim 3\%, \quad \text{bei } s = 0{,}3\, r_i \sim 11\%$$

zu kleine Wandstärken.

Beispiele. 1. Eine hydraulische Presse soll bei 300 mm Stempeldurchmesser und 330 mm Zylinderweite eine Kraft von 200 t erzeugen; wie stark muß die Wandung bei $k_z = 600$ kg/cm² ausgeführt werden?

Es ist die Wasserspannung

$$p_i = \frac{200\,000}{\frac{\pi}{4} \cdot 30^2} = \frac{200\,000}{707} = 283 \text{ kg/cm}^2 .$$

Da $r_i = 16{,}5$ ist, so wird

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}4\, p_i}{k_z - 1{,}3\, p_i}} = 16{,}5 \cdot \sqrt{\frac{600 + 0{,}4 \cdot 283}{600 - 1{,}3 \cdot 283}} = 16{,}5 \sqrt{\frac{713{,}2}{232{,}1}} = 290 \text{ mm},$$

$$s = 290 - 165 = 125 \text{ mm},$$

(34a) würde den zu geringen Wert

$$s = \frac{283 \cdot 16{,}5}{600} = 78 \text{ mm}$$

ergeben.

2. Eine Druckpresse für 30 at soll einer vorübergehenden Belastung von 45 t unterworfen werden; die maximale Beanspruchung ist zu ermitteln. Die Durchmesser sind: $2\, r_i = 130$ mm; $2\, r_a = 210$ mm; $s = 40$ mm.

Es ist

$$2\, r_i = 13 \text{ cm}, \quad \text{folglich} \quad p_i = \frac{45000}{\frac{\pi}{4} \cdot 13^2} = \frac{45000}{132{,}7} = 339,$$

mithin

$$\sigma_{\max} = \frac{1{,}3\, r_a^2 + 0{,}4 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\, p_i = \frac{1{,}3 \cdot 10{,}5^2 + 0{,}4 \cdot 6{,}5^2}{10{,}5^2 - 6{,}5^2} \cdot 339 = \frac{143.3 + 16{,}9}{110{,}25 - 42{,}25} \cdot 339$$

$$= \frac{160{,}2}{68} \cdot 339 = 800 \text{ kg/cm}^2 .$$

Zahlentafeln zur Berechnung der Rohrabmessungen und Spannungen findet man z. B. in dem Taschenbuch der Hütte, 25. Auflage, Band 1, S. 675 oder in einer Arbeit von Winkel: Zur Berechnung von Gefäßen unter innerem Druck in Dinglers polytechnischem Journal, Band 329, Heft 11, vom 14. März 1914, S. 167.

Eine Rechentafel ist in Abb. 330 wiedergegeben. Der äußere Zylinderdurchmesser wird folgendermaßen gefunden: man geht durch p_i auf der obersten Linie senkrecht herunter bis zum Kreise mit k_z (Punkt A), von dort auf dem Strahl durch den Anfangspunkt bis zum Kreise mit dem Halbmesser r_a (Punkt B). Dann schneidet die Wagerechte durch B auf der linken Senkrechten r_i heraus und bestimmt damit den Rohrquerschnitt.

Einen Überblick über den Verlauf der Spannungen erhält man, wenn man die axiale Spannung (33)

$$\sigma_x = \frac{p_i\, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{F_i \cdot p_i}{F_a - F_i} = \frac{P}{F} = \sigma_0 \tag{35}$$

(F_i lichter Querschnitt, F Materialquerschnitt des Zylinders, P die in Richtung der Achse wirkende Kraft) in die für $E\,\varepsilon_x$, $E\,\varepsilon_z$ und $E\,\varepsilon_z$ gewonnenen Ausdrücke einführt.

Es wird

$$\sigma_1 = E\,\varepsilon_x = 0{,}4 \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,p_i = 0{,}4\,\sigma_0\,, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = E\,\varepsilon_y &= 0{,}4 \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,p_i + 1{,}3\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,\frac{p_i}{z^2}\,, \\ &= 0{,}4 \cdot \sigma_0 + 1{,}3\,\sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2}\,, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = E\,\varepsilon_z &= 0{,}4 \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - 1{,}3\,\frac{r_a^2\,r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,\frac{p_i}{z^2}\,, \\ &= 0{,}4 \cdot \sigma_0 - 1{,}3\,\sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2}\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Stellt man nun σ als Funktion der Entfernung z von der Achse dar (vgl. Abb. 326), so sind σ_2 und σ_3 hyperbolische Kurven dritten Grades.

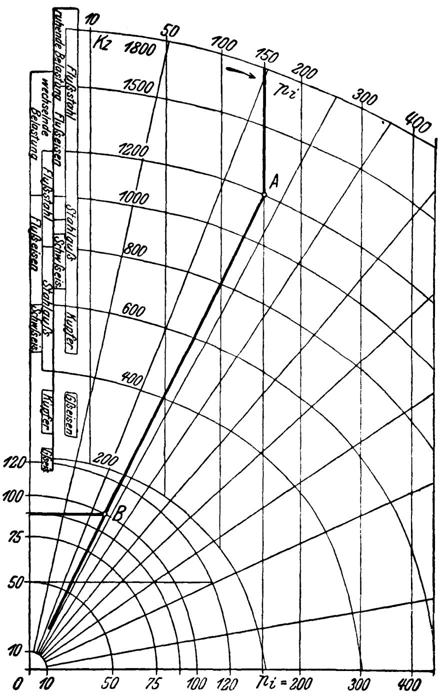


Abb. 330. Berechnung eines Hohlzylinders auf inneren Überdruck.

Die Kurve $y = C_2 x^{-2}$ kann mit Hilfe der gleichseitigen Hyperbel $y = C_1 x^{-1}$, welche die Achsen als Asymptoten hat, konstruiert werden.

Es sei (Abb. 331) $P_0\,(x_0\,, y_0)$ ein Punkt, der beiden Kurven gemeinsam ist. Dann folgt aus $y_0 = C_1 x_0^{-1}$ und $y_0 = C_2 x^{-2}$

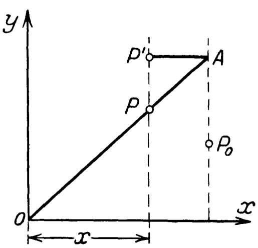


Abb. 331. Konstruktion hyperbolischer Kurven.

$$y = \frac{y_0\,x_0}{x} \text{ als Gleichung der Hyperbel}$$

und

$$y = \frac{y_0\,x_0^2}{x^2} \text{ als Gleichung der gesuchten Kurve.}$$

Man hat also die Ordinaten der gleichseitigen Hyperbel im Verhältnis $\frac{x_0}{x}$ zu verkleinern. Das ergibt die folgende Konstruktion, falls P ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel ist: man ziehe den Strahl OP aus dem Koordinatenanfangspunkt bis zur Senkrechten durch P_0; dann schneidet die Wagerechte durch diesen Punkt A die Senkrechte durch x in einem Punkt P' der gesuchten Kurve.

Um die Konstruktion verwenden zu können, beziehe man die Gleichungen (37) und (38) auf eine um $0{,}4\,\sigma_0$ verschobene z'-Achse (Abb. 332). Dann ist

$$\sigma_2 - 0{,}4\,\sigma_0 = \sigma_2' = 1{,}3\,\sigma_0\,r_a^2\,z^{-2},$$
$$\sigma_3 - 0{,}4\,\sigma_0 = -\sigma_3' = -1{,}3\,\sigma_0\,r_a^2\,z^{-2}.$$

σ_3 zählt von der z-Achse nach oben als positiv, σ_3' von der z'-Achse nach unten positiv.

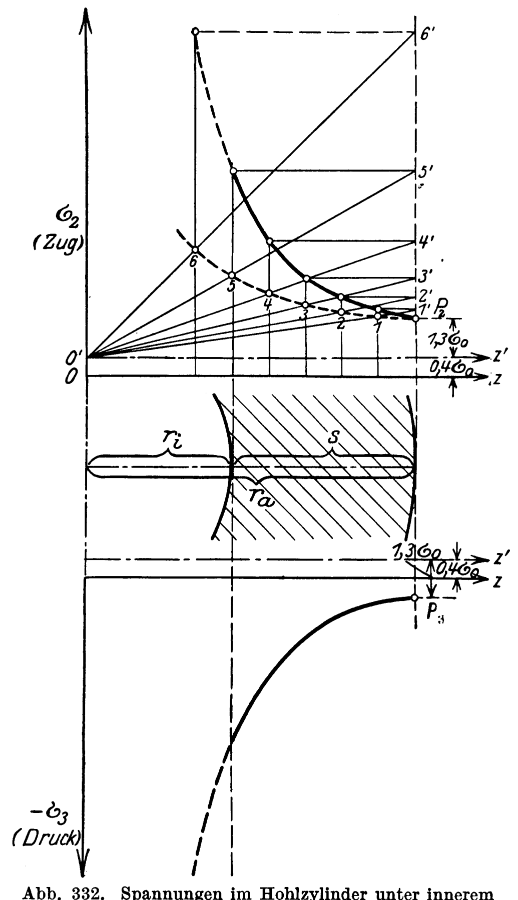


Abb. 332. Spannungen im Hohlzylinder unter innerem Überdruck.

Für $z = r_a$ wird $\sigma_2' = 1{,}3\sigma_0$ und $-\sigma_3' = -1{,}3\,\sigma_0$; das ergibt die P_0 entsprechenden Punkte P_2 und P_3. Man entwirft nun die durch P_2 hindurchgehende gleichseitige Hyperbel (in Abb. 332 gestrichelt gezeichnet) und legt durch O' und die Hyperbelpunkte 1, 2, 3 ... Strahlen, welche die Ordinate durch P_2 in 1', 2', 3' ... schneiden mögen. Die Wagerechten durch 1', 2', 3' ... und die Senkrechten durch 1, 2, 3 ... schneiden sich in Punkten der gesuchten Spannungskurve σ_2, deren Ordinaten von der ausgezogenen z-Achse zu messen sind.

Da $\sigma_3' = -\sigma_2'$ ist, ergibt sich folgende Konstruktion zur Bestimmung der Spannung σ_3. Man trägt die Entfernung der Kurve σ_2 von der z'-Achse im z', σ_3-Koordinatensystem von der z'-Achse nach unten ab, so daß z. B. der Punkt P_2 in den Punkt P_3 übergeht. Die Druckspannung $-\sigma_3$ ist wieder von der ausgezogenen z-Achse ab zu messen.

Die Abbildung zeigt das Ansteigen der Spannungen am inneren Rande mit wachsender Wandstärke. Ist die Wandstärke gering, so weichen die Kurven der Spannungen wenig von einer Geraden ab, und man kann nach Gleichung (34a) gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt annehmen.

b) Hohlzylinder unter äußerem Druck p_a.

Ist Einbeulen oder Einknicken nicht zu befürchten, so ergibt sich nach (28) und (29) mit $p_i = 0$

$$\text{für } z = r_i: \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} = 0\,,$$

$$\text{,,} \quad z = r_a: \quad \sigma_z = \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_a^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} = -p_a.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so wird

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta}\left[c_2(m-1)\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}\right)\right] = -p_a\,,$$

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot c_2(m-1)\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 r_i^2} = -p_a$$

und daher

$$c_2 = -\frac{p_a}{2}\beta\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1) + \frac{\beta}{2}\sigma_x = 0\,,$$

$$\frac{c_1}{2}(m+1) = \frac{c_2}{r_i^2}(m-1) - \frac{\beta}{2}\sigma_x$$

$$= -\frac{m-1}{r_i^2}\frac{p_a}{2}\beta\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{\beta}{2}\sigma_x$$

$$= -\frac{(m-1)\beta}{2}\left[\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{\sigma_x}{m-1}\right]$$

$$c_1 = -\frac{m-1}{m+1}\beta\left[\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{\sigma_x}{m-1}\right].$$

Setzt man die für c_1 und c_2 gefundenen Werte in (28) ein, so ergibt sich

$$\sigma_y = \frac{2}{m-1} \cdot \frac{1}{\beta}\left[-\frac{m-1}{2}\beta\left\{\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{\sigma_x}{m-1}\right\} - \frac{m-1}{z^2} \cdot \frac{p_a}{2}\beta \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\right] + \frac{\sigma_x}{m-1}$$

$$= -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{\sigma_x}{m-1} - \frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{\sigma_x}{m-1}\,,$$

$$\sigma_y = -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \tag{39}$$

und ebenso

$$\sigma_z = -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}. \tag{40}$$

Nach (24) ist mit $p_i = 0$

$$\sigma_x = -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}. \tag{41}$$

Nach (32) wird daher, wenn man noch $m = \frac{10}{3}$ setzt:

$$E\,\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z) = -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$+ \frac{1}{m}\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{1}{m}\frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r^2}$$

$$= -\frac{m-2}{m}\frac{r_a^2 p_a}{r_a^2 - r_i^2} = -0{,}4\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a,$$

$$E\,\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x) = -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$-\frac{1}{m}\frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$= -\frac{m-2}{m}\frac{r_a^2 p_a}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_a}{z^2}$$

$$= -0{,}4\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a - 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_a}{z^2},$$

$$E\,\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$+ \frac{1}{m}\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{1}{m}\frac{p_a}{z^2}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$= -\frac{m-2}{m}\frac{r_a^2 p_a}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_a}{z^2}$$

$$= -0{,}4\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a + 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{p_a}{z^2}.$$

Die größte reduzierte Druckspannung liefert $E\varepsilon_y$ für $z = r_i$; die größte reduzierte Zugspannung $E\varepsilon_z$ ebenfalls für $z = r_i$.

Es ist

$$(-E\,\varepsilon_y)_{\max} = 0{,}4\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a + 1{,}3\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a = 1{,}7\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a,$$

$$(E\cdot\varepsilon_z)_{\max} = -0{,}4\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a + 1{,}3\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a = 0{,}9\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a.$$

Da hier die Druckspannung größer ist, darf sie den zulässigen Wert k nicht überschreiten.

Es muß also

$$1{,}7\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}p_a \leqq k,$$

$$r_a^2(1{,}7\,p_a - k) \leqq -k\,r_i^2,$$

$$r_a^2(k - 1{,}7\,p_a) \geqq k\,r_i^2$$

und daher

$$r_a \geqq r_i \sqrt{\frac{k}{k - 1{,}7\,p_a}} \tag{42}$$

sein.

Für verhältnismäßig kleine Wandstärken kann unter Vernachlässigung der Axialkraft nach (17a)

$$s = r_a - r_i \geqq \frac{p_a\, r_a}{k} \tag{42a}$$

gesetzt werden.

Diese Formel liefert bei $s = 0{,}2\, r_i$ $\sim 8\%$, bei $s = 0{,}9\, r_i$ $\sim 4\%$ zu große Wandstärken.

3. Berechnung einer Hohlkugel.

Eine Reihe von Gefäßen, z. B. die Flaschen für verdichtete Luft und Gase sind aus einem zylindrischen Teil und zwei kugelförmige Stücken zusammengesetzt. Aus diesem Grunde sollen hier die Formeln zur Berechnung von Hohlkugeln angegeben werden, die auf demselben Wege wie bei den früheren Betrachtungen abgeleitet werden können.

Es sei

r_a der äußere Halbmesser der Hohlkugel,

r_i der innere Halbmesser der Hohlkugel,

k_z die zulässige Zugspannung,

k die zulässige Druckspannung

und

$$m = \frac{10}{3}.$$

a) Hohlkugel unter innerem Druck p_i.

Es ist

$$r_a \geqq r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0{,}4\, p_i}{k_z - 0{,}65\, p_i}}\,; \tag{43}$$

für geringe Wandstärken

$$s \geqq \frac{r_i p_i}{2\, k_z}. \tag{43a}$$

b) Hohlkugel unter äußerem Druck p_a.

$$r_a \geqq r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1{,}05\, p_a}}\,; \tag{44}$$

für geringe Wandstärken

$$s \geqq \frac{r_a p_a}{2 \cdot k}. \tag{44a}$$

XVII. Die Festigkeit ebener Platten.

Körper, die nach zwei Richtungen wesentlich größere Abmessungen haben als nach der dritten, nennt man Platten oder Scheiben. Greifen die äußeren Kräfte parallel zur Fläche des Körpers an, wie es z. B. die

Fliehkraft bei einem laufenden Turbinenrade tut, so spricht man von einer Scheibe. Greifen dagegen die Kräfte senkrecht zur Fläche des Körpers an, so daß eine Durchbiegung der Mittelebene eintritt, so liegt eine Platte vor. Da die Platten auf Biegung beansprucht werden, schließt sich ihre Berechnung eng an die Biegungsberechnung von Balken an. Das Problem ist hier nur insofern schwieriger, als man auf die Ausdehnung in drei Richtungen zu achten hat, während der Balken als zweidimensionale Aufgabe behandelt wird. Überhaupt ist nach Bach die Theorie der Platten die schwächste Stelle der Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Um überhaupt die Aufgabe rechnerisch erfassen zu können, muß man eine Reihe vereinfachender Annahmen machen. Diese Vereinfachungen müssen so gewählt werden, daß mit ihnen einerseits möglichst geringe Fehler verbunden sind, andererseits die Durchführung der Aufgabe wirklich erleichtert wird. Von ihnen seien die folgenden genannt[1]:

1. Form der Platte. Unsere Betrachtungen beziehen sich überhaupt nur auf ebene Platten, also z. B. nicht auf Deckel von der in Abb. 333 wiedergegebenen Form. Querschnitte dieser und ähnlicher Art kommen aber in der Wirklichkeit weit häufiger vor als die von uns behandelten ebenen Platten. Ferner setzen wir überall gleiche Plattenstärke voraus, achten also nicht auf Verstärkungen, Anbohrungen, Rippen usw.

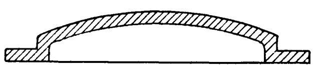


Abb. 333. Deckel.

2. Art der Auflagerung. Wir nehmen an, daß sich die Auflagerkraft gleichmäßig über die ganze Auflagerlänge verteilt. Hier könnte der Einwand erhoben werden, daß Platte und Unterlage theoretisch nur in drei Punkten, praktisch in Flächen von geringer Ausdehnung aufliegen können. Dies scheint auch tatsächlich bei wenig belasteten Platten der Fall zu sein. Die Erfahrung lehrt, daß man diese Platten ähnlich wie einen Tisch mit vier ungleich langen Beinen ins Wackeln und zum Klappern bringen kann. Sobald aber die Belastung der Platte größer wird, und dieser Fall liegt meist vor, wenn Festigkeitsrechnungen erforderlich sind, kann man annehmen, daß die Verbiegungen der Platte so groß sind, daß kleine Ungenauigkeiten der Auflagerfläche ausgeglichen werden und daher angenähert gleichmäßige Verteilung der Auflagerkraft über die Auflagerfläche stattfindet.

3. Bei der frei aufliegenden Platte wird der über die Auflagerkante herüberstehende Rand vernachlässigt, trotzdem er tatsächlich an der Spannungsübertragung teilnimmt.

Wir wählen als Beispiel die frei aufliegende kreisförmige Platte (Abb. 334), welche durch eine Einzellast P in der Mitte belastet sei. Betrachten wir zunächst den gebogenen Balken mit überragenden Enden ab und cd. Diese Enden bleiben gerade und werden nicht durch Spannungen beansprucht. Man wird geneigt sein, dieses Ergebnis auf

[1] Vergleiche A. und O. Föppl: Grundzüge der Festigkeitslehre. S. 236. B. G. Teubner 1923. Bach: Elastizität und Festigkeit. 8. Aufl., S. 599 u. 612.

die Platte zu übertragen, die man sich gewissermaßen als Rotationsfläche aus der elastischen Linie des Balkens um die Achse XX entstanden denken kann. Dies ist aber nicht der Fall. Vor der Beanspruchung bildet der überragende Teil der Platte eine Ringfläche, die nach der Beanspruchung in eine abgestumpfte Kegelfläche übergeht. Da mit dieser Formänderung Längenänderungen der einzelnen Teile gegen

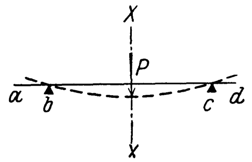


Abb. 334. Platte und Balken.

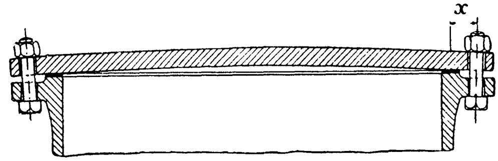


Abb. 335. Verschluß eines zylindrischen Hohlgefäßes.

einander verbunden sind, so kann sie nur durch Spannungen erzwungen werden, die im Plattenquerschnitt an der Auflagerstelle übertragen werden. Das überragende Ende widersetzt sich der Schrägstellung des Randes und wirkt wie eine teilweise Einspannung. Wir nehmen an, daß der Rand so wenig übersteht, daß die durch ihn hervorgerufenen Spannungen vernachlässigt werden können.

4. Überhaupt können durch die Art der Befestigung Spannungen und Formänderungen entstehen, die in der Rechnung nicht berücksichtigt werden können. Ein Beispiel dafür gibt Abb. 335, sie stellt eine Scheibe dar, die ein zylindrisches Hohlgefäß verschließt. Damit eine wirkliche Abdichtung erfolgt, müssen, noch bevor die Flüssigkeitspressung wirkt, die Flanschenschrauben kräftig angezogen werden. Es wird sich daher die Scheibe wölben, und zwar um so mehr, je größer der Abstand x der Schrauben von der Dichtungsstelle ist. Wo diese Stelle liegt, d. h. wie sich der Druck über die Breite der dichtenden Scheibe verteilt, ist unbestimmt; die entstehenden Spannungen, die eintreten, bevor noch die Flüssigkeitspressung in Tätigkeit tritt, sind daher wohl kaum rechnerisch zu erfassen und werden vernachlässigt.

Bei der großen Tragweite dieser Vernachlässigungen ist es klar, daß eine strenge Durchrechnung der Spannungsverteilung wenig Wert hat. Wir werden daher im folgenden eine von Bach stammende Näherungstheorie entwickeln, zumal eine strenge Ermittlung der Spannungen bisher nur für den Fall der kreisförmigen Platte durchgeführt worden ist. Diese von Winkler und Grashof stammende Theorie ist in den erwähnten Büchern von Bach und Föppl ausführlich dargestellt und kann dort nachgelesen werden.

1. Die kreisförmige Platte.

a) Die am Umfang frei aufliegende Platte mit gleichförmig verteilter Belastung p.

Da — Gleichartigkeit des Materials vorausgesetzt — zu erwarten ist, daß die größten Spannungen in der Mitte der Platte auftreten werden, denken wir sie uns nach einem Durchmesser eingespannt

(Abb. 336). Wir berechnen das biegende Moment, wobei wir das Eigengewicht der Platte vernachlässigen wollen.

Von oben wirkt der Flüssigkeitsdruck, dessen Resultierende R die Größe

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot p$$

hat. Da der Flüssigkeitsdruck gleichmäßig über die Fläche verteilt ist, so greift R im Schwerpunkt des Halbkreises an. Dieser hat aber den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$ von der Mitte; folglich ist das vom Flüssigkeitsdruck herrührende biegende Moment

$$\frac{1}{2}\pi r^2 p \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3 \cdot p\,.$$

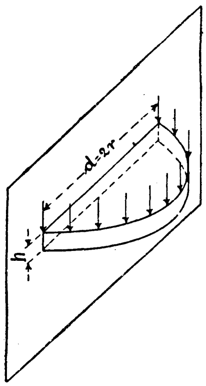


Abb. 336. Kreisförmige Platte mit gleichförmiger Belastung.

Die sich über den Umfang πr verteilende Auflagerkraft ist gleichfalls

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot p$$

und greift im Schwerpunkt der Halbkreislinie an; dieser hat aber den Abstand

$$\frac{2r}{\pi}$$

von der Mitte.

Folglich ist das von der Auflagerkraft herrührende Moment, welches die Platte nach oben zu biegen sucht,

$$\frac{1}{2}\pi r^2 p \cdot \frac{2r}{\pi} = r^3 p\,.$$

Hieraus ergibt sich als resultierendes Moment

$$M = r^3 p - \frac{2}{3} r^3 p = \frac{1}{3} r^3 p\,.$$

Dieses Moment wird eine Beanspruchung ähnlich wie beim gebogenen Balken hervorrufen; da es nach oben gerichtet ist, werden die oberen Fasern gedrückt, die unteren gezogen.

Wir können daher die Platte als einen Stab von veränderlichem rechteckigem Querschnitt auffassen. Da die Breite an der Einspannstelle $d = 2\,r$, die Höhe h beträgt, so wird das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{e} = \frac{\frac{1}{12} 2\,r h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{3} r\,h^2.$$

Wie sich die Spannungen über den Querschnitt verteilen, geht aus der Untersuchung nicht hervor. Man wird vermuten, daß sie in der Mitte am größten sein werden und nach dem Rande der Platte abnehmen werden. Uns interessiert vor allem die größte Spannung $\sigma_{\max}$, die in der Mitte auftreten wird. Diesem Werte $\sigma_{\max}$ stellen wir einen Wert σ_0 gegenüber, der sich ergeben würde, wenn sich die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilen würden. Nach der Biegungstheorie des Balkens ist dann

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{3} r^3 p}{\frac{1}{3} r h^2} = p \frac{r^2}{h^2}.$$

Wir setzen nun

$$\sigma_{\max} = \mu \sigma_0,$$

wobei nach dem Vorhergehenden $\mu > 1$ sein müßte. Nun sind aber auch Einflüsse da, die eine Verminderung der Spannungen und mithin von μ zur Folge haben, z. B. die in der Praxis nie ganz erreichbare freie Auflagerung des Randes, die Vernachlässigung des überstehenden Randes usw. Über die Größe von μ gibt die Theorie keinen Aufschluß. Bach fand bei seinen Versuchen mit Gußeisen Werte von μ, die zwischen

$$\mu = 0{,}8 \div 1{,}2$$

lagen, wobei der kleinere Wert für fest eingespannte, der größere Wert für frei aufliegende Platten gilt. Bezeichnet man die zulässige Spannung mit k_b, so muß

$$\sigma_{\max} = \mu p \frac{r^2}{h^2} \leqq k_b$$

sein. Hieraus folgt

$$h \geqq r \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}}, \tag{1}$$

wodurch die notwendige Plattenstärke bestimmt ist.

b) Die am Umfang frei aufliegende Platte ist in der Mitte durch eine Kraft P belastet, die sich gleichförmig über die Kreisfläche πr_0^2 verteilt (Abb. 337).

Das vom Auflagerdruck $\frac{1}{2} P$ herrührende Moment kann wie unter a) ermittelt werden. Da der Schwerpunktsabstand der Halbkreislinie $\frac{2r}{\pi}$ ist, so wird das biegende Moment

$$\frac{1}{2} P \cdot \frac{2r}{\pi} = \frac{P \cdot r}{\pi}.$$

Demselben wirkt das Moment entgegen, das die über die Halbkreisfläche $\frac{1}{2} \pi r_0^2$ gleichmäßig verteilte Kraft P liefert. Da der Schwerpunktsabstand des Halbkreises $\frac{4 r_0}{3\pi}$ ist, so wird das von der belastenden Kraft herrührende Biegungsmoment

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{4 r_0}{3\pi} = \frac{2}{3} \frac{P r_0}{\pi}.$$

Somit wird das resultierende Moment

$$M = \frac{Pr}{\pi} - \frac{2}{3} \frac{P r_0}{\pi} = P \frac{r}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right)$$

und daher, falls σ_0 wieder die gleichmäßig über den Einspannungsquerschnitt verteilte Spannung bedeutet:

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} = \frac{P\frac{r}{\pi}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_0}{r}\right)}{\frac{1}{3}r h^2} = \frac{3}{\pi}\frac{P}{h^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_0}{r}\right).$$

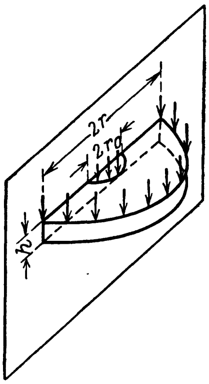


Abb. 337. Kreisförmige Platte mit Einzellast.

Setzt man wieder die größte Spannung

$$\sigma_{\max} = \mu\,\sigma_0$$

und bezeichnet die zulässige Spannung mit k_b, so wird

$$\sigma_{\max} = \mu\cdot\frac{3}{\pi}\frac{P}{h^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_0}{r}\right) \leqq k_b,$$

woraus

$$h \geqq \sqrt{\mu\,\frac{3}{\pi}\,\frac{P}{k_b}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r_0}{r}\right)} \tag{2}$$

folgt.

Für $P = \pi r^2\cdot p$ und $r_0 = r$ geht diese Gleichung über in

$$h \geqq r\sqrt{\mu\frac{p}{k_b}},$$

d. h. in Gleichung (1), wie verlangt werden muß.

Für sehr kleine Werte r_0, theoretisch für $r_0 = 0$ folgt aus (2)

$$h \geqq \sqrt{\mu\frac{3}{\pi}\frac{P}{k_b}}, \tag{2a}$$

wonach also die Plattenstärke h vom Durchmesser $d = 2\,r$ unabhängig wäre. Diese Beziehung besteht in Wirklichkeit nicht ganz, da μ unter sonst gleichen Verhältnissen mit dem Durchmesser der Scheibe wachsen wird.

Für kleine Werte von r_0 (bis etwa 0,1 r) kann nach den Versuchen von Bach

$$\mu = 1{,}5$$

gesetzt werden.

Beispiel. Eine frei aufliegende, kreisförmige Platte von 2 cm Stärke sei aus Gußeisen hergestellt. Wie groß darf die Belastung P sein, falls sie, a) gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist, b) in der Mitte auf einer sehr kleinen Fläche angreift. Die zulässige Biegungsspannung sei $k_b = 200$ kg/cm^2.

a) Aus (1) folgt mit $\mu = 1$

$$h^2 = \frac{\pi r^2 p}{\pi k_b} = \frac{P}{\pi k_b},$$

mithin

$$P = \pi h^2 k_b = \pi\cdot 2^2\cdot 200 = 2513 \text{ kg}.$$

b) Gemäß (2a) ergibt sich mit $\mu = 1{,}5$

$$h^2 = 1{,}5\cdot\frac{3}{\pi}\frac{P}{k_b},$$

mithin
$$P = \frac{\pi h^2 k_b}{3 \cdot 1{,}5} = \frac{2513}{4{,}5} = 558\,\mathrm{kg}.$$

Bei gleichförmiger Verteilung über die ganze Platte darf die Kraft also 4,5 mal so groß sein.

2. Die quadratische Platte.

Es ist zu erwarten, daß die größten Spannungen, wie bei der kreisförmigen Platte, in der Mitte auftreten werden. In welcher Richtung aber diese Spannungen auftreten und daher der erste Riß erfolgt, ob parallel zu den Seiten oder in der Diagonale, kann nur der Versuch entscheiden. Solche Versuche sind von Bach mit Eisenbetonplatten ausgeführt worden, mit dem Ergebnis, daß die ersten Einrisse in Richtung der Diagonale auftreten (Abb. 338). Wir werden daher die größte Beanspruchung in Richtung der Diagonale zu erwarten haben und denken uns die quadratische Platte der Seitenlänge a in dieser Richtung eingespannt (Abb. 339).

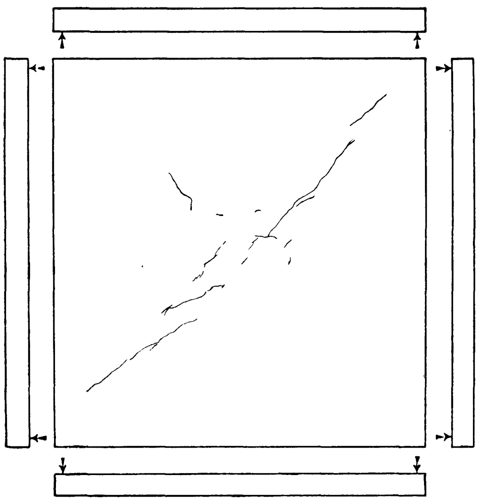


Abb. 338. Quadratische Platte aus Eisenbeton.

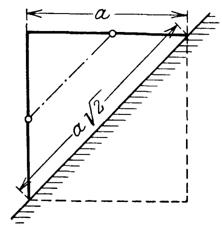


Abb. 339. Quadratische Platte.

a) Die am Umfang frei aufliegende Platte mit gleichförmig verteilter Belastung p.

Auf jede der beiden Kanten der Seitenlänge a wirkt der Auflagerdruck $\frac{1}{4} p a^2$, der in der Mitte angreift. Die Resultierende dieser beiden Auflagerkräfte wird daher in der Mitte der parallel zur Diagonale verlaufenden gestrichelten Linie der Abb. 339 angreifen. Diese hat den Abstand $\frac{1}{4} a \sqrt{2}$ von dem eingespannten Querschnitt, so daß das biegende Moment
$$2 \cdot \frac{1}{4} p a^2 \cdot \frac{1}{4} a \sqrt{2} = \frac{1}{8} \sqrt{2}\, a^3 p$$
wird.

Die Resultierende des belastenden Druckes greift im Schwerpunkt der von der Diagonalen begrenzten Quadrathälfte an. Da der Schwerpunkt eines Dreiecks um den dritten Teil der Höhe von der Grundlinie entfernt ist, so hat er den Abstand

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{a}{6} \sqrt{2},$$

und das Biegungsmoment hat die Größe

$$\frac{1}{2} p a^2 \cdot \frac{a}{6} \sqrt{2} = \frac{1}{12} \sqrt{2}\, a^3 p .$$

Das resultierende Biegungsmoment wird daher

$$M = \frac{1}{8} \sqrt{2}\, a^3 p - \frac{1}{12} \sqrt{2}\, a^3 p = \frac{1}{24} \sqrt{2}\, a^3 p .$$

Das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnittes der Breite $a\sqrt{2}$ und der Höhe h beträgt

$$W = \frac{J}{e} = \frac{\frac{1}{12} a \sqrt{2}\, h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} \sqrt{2}\, a h^2,$$

so daß die theoretisch angenommene, gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Spannung

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{24} \sqrt{2}\, a^3 p}{\frac{1}{6} \sqrt{2}\, a h^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 p$$

wäre.

Mit

$$\sigma_{\max} = \mu \sigma_0$$

und k_b als zulässiger Biegungsspannung wird

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{4} \mu \left(\frac{a}{h}\right)^2 p \leqq k_b ,$$

woraus

$$h \geqq \frac{1}{2} a \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}} \tag{3}$$

folgt.

Nach den von Bach angestellten Versuchen ist

$$\mu = 0{,}75 \text{ bis } 1{,}12$$

zu setzen, je nachdem die Platte mehr oder weniger an den Auflagerkanten eingespannt ist.

b) Die frei aufliegende Platte ist in der Mitte durch eine Kraft P belastet.

Die Resultierende des Auflagerdruckes hat, wie unter a) nachgewiesen, den Abstand $\frac{a}{4}\sqrt{2}$ von dem eingespannten Querschnitt, so daß das biegende Moment

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{a}{4} \sqrt{2} = \frac{1}{8} \sqrt{2}\, a P$$

wird.

Daher ist

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{8}\sqrt{2}\,a P}{\frac{1}{6}\sqrt{2}\,a h^2} = \frac{3}{4}\frac{P}{h^2}$$

und

$$\sigma_{\max} = \mu\,\sigma_0 = \frac{3}{4}\,\mu\,\frac{P}{h^2} \leqq k_b\,.$$

Hieraus folgt

$$h \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3\,\mu\,\frac{P}{k_b}}\,, \tag{4}$$

worin nach den Versuchen von Bach μ zwischen den Grenzen

$$\mu = 1{,}75 \text{ bis } 2$$

liegt.

Beispiel. Mit welcher Kraft P darf man eine gußeiserne quadratische Platte von 2 cm Stärke belasten, wenn die zulässige Spannung den Wert $k_b = 200$ kg/cm² nicht überschreiten soll?

a) Die Kraft $P = a^2 p$ ist gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Nach (3) wird mit $\mu = 1$

$$P = a^2 p = 4\,h^2 k_b = 4 \cdot 2^2 \cdot 200 = 3200 \text{ kg}.$$

b) Die Kraft P greift im Mittelpunkt der Platte an. Nach (4) wird mit $\mu = 1{,}9$

$$P = \frac{4}{3\,\mu}\,h^2 \cdot k_b = \frac{4}{3 \cdot 1{,}9}\,2^2 \cdot 200 = 562 \text{ kg}.$$

Die Werte weichen nur wenig von dem für die kreisförmige Platte gefundenen Ergebnis ab.

3. Die rechteckige Platte.

Bei der rechteckigen Platte bereitet die Feststellung des gefährlichen Querschnittes erhebliche Schwierigkeiten. Wie die Abb. 340 und 341 erkennen lassen, treten die ersten Risse im mittleren Teile der Platte

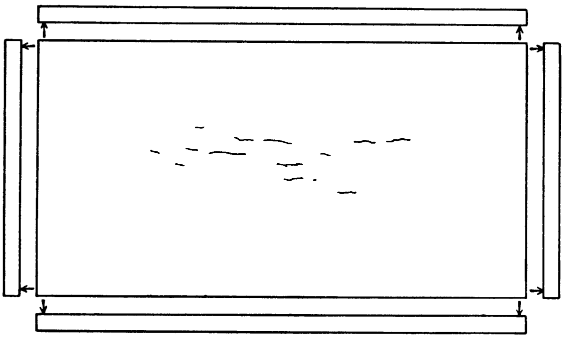


Abb. 340. Rechteckige Platte aus Eisenbeton.

parallel zur langen Seite auf; unter höheren Belastungen kommen Risse hinzu, die gegen die Ecken der Platte verlaufen.

Um die Rechnung einfach zu gestalten, entschließen wir uns, die Diagonale BB (Abb. 342) als gefährlichen Querschnitt zu betrachten

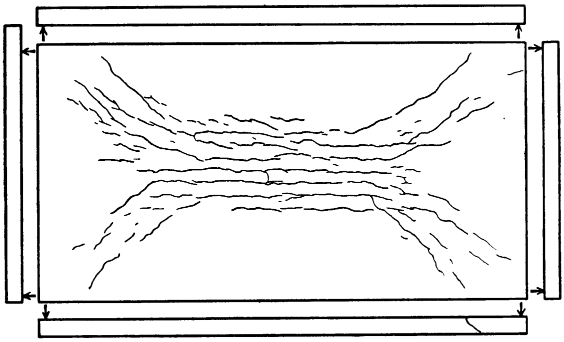


Abb. 341. Rechteckige Platte aus Eisenbeton.

und denken uns die Platte in dieser Richtung eingespannt; dies ist um so eher zulässig, da unsere Gleichungen den Berichtigungskoeffizienten μ enthalten, der aus Versuchen zu bestimmen wäre.

a) Die am Umfang frei aufliegende Platte mit gleichförmig verteilter Belastung p.

Die Resultierende der Auflagerkräfte (Abb. 343) liegt auf der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der Seiten a und b; sie ist also um $\frac{c}{2}$ vom Einspannquerschnitt entfernt. Nun ist aber $d = \sqrt{a^2+b^2}$ und der doppelte Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks $d \cdot c = ab$, mithin

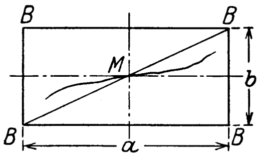


Abb. 342. Rechteckige Platte.

$$c = \frac{ab}{d} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{c}{2} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Die nach unten wirkende Belastung $\frac{pab}{2}$ der Platte greift im Schwerpunkt S an, der um

$$\frac{c}{3} = \frac{ab}{3\sqrt{a^2+b^2}}$$

vom Einspannquerschnitt entfernt ist.

Folglich wird das biegende Moment:

$$M = \frac{pab}{2} \cdot \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{pab}{2} \frac{ab}{3\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{1}{12} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} p$$

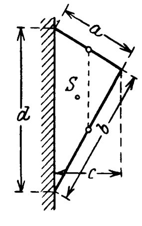


Abb. 343. Rechteckige Platte.

und hiernach die Biegungsgleichung für den $\sqrt{a^2+b^2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} p \leqq k_b \cdot \frac{1}{6} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mu} h^2,$$

wobei, wie stets, der Koeffizient μ der ungleichförmigen Verteilung der Spannungen Rechnung tragen soll.

Hieraus folgt

$$h \geqq \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{2\mu}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{p}{k_b}}. \tag{5}$$

Nun ist aber

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}.$$

Folglich wird

$$h \geqq c \sqrt{\frac{\mu p}{2 k_b}}, \tag{5a}$$

woraus zu ersehen ist, daß die Höhe c allein für die Bestimmung der Plattenstärke maßgebend ist.

Für $b = a$ wird $c = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, also

$$h \geqq \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu p}{k_b}},$$

wie auf Seite 456 für die quadratische Platte abgeleitet wurde.

b) Die am Umfang frei aufliegende Platte wird durch eine Kraft P in der Mitte belastet.

Wie unter a) gezeigt, greift die Resultierende der Auflagerkräfte im Abstand

$$\frac{c}{2} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

vom Einspannquerschnitt an. Folglich wird das biegende Moment

$$M = \frac{P}{2} \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{4} \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot P.$$

Es lautet daher die Biegungsgleichung

$$\frac{1}{4} \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot P \leqq k_b \cdot \frac{1}{6} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mu} h^2;$$

hieraus folgt

$$h \geqq \sqrt{\frac{3}{2} \mu \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \frac{P}{k_b}}. \tag{6}$$

Mit $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $d = \sqrt{a^2+b^2}$ geht die Biegungsgleichung über in

$$\frac{1}{4} c P \leqq k_b \cdot \frac{1}{6} \frac{d}{\mu} h^2.$$

Es ist also

$$h \geqq \sqrt{\frac{3}{2} \mu \frac{c}{d} \frac{P}{k_b}}. \tag{6a}$$

Setzt man $b = a$, so wird für die quadratische Platte

$$h \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3\,\mu\,\frac{P}{k_b}},$$

wie auf Seite 457 abgeleitet.

Wenn die belastende Kraft nicht in der Mitte angreift, sondern sich über eine kleine Kreisfläche πr_0^2 verteilt, so wird (vgl. Seite 453)

$$\frac{P}{2}\,\frac{c}{2} - \frac{P}{2}\,\frac{4\,r_0}{3\pi} \leqq k_b \cdot \frac{1}{6}\,\frac{d}{\mu}\,h^2. \tag{7}$$

Für μ kann man, da keine Versuchsergebnisse vorliegen, dieselben Werte wie für die quadratische Platte benutzen.

XVIII. Umlaufende Räder und Scheiben.

1. Festigkeitsberechnung eines Schwungrades.

a) Formänderung des Kranzes.

Ohne Berücksichtigung der Arme ist der Kranz eines Schwungrades nach Seite 32 als frei schwebender Ring mit der Tangentialkraft

$$T_0 = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R^2 \omega^2$$

zu berechnen. Hierin ist

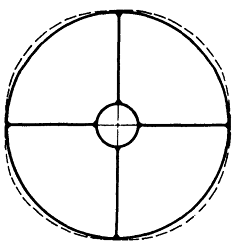


Abb. 344. Formänderung des Kranzes.

F in cm² der Kranzquerschnitt,

γ in kg/cm³ das spezifische Gewicht des Baustoffes,

$g = 981$ cm/sek² die Erdbeschleunigung,

R in cm der mittlere Halbmesser des Kranzes,

ω in sek⁻¹ die Winkelgeschwindigkeit.

Nach Seite 33 streckt sich ein kreisender Stab weniger als die Aufweitung des kreisenden Ringes ausmacht; es ist demnach bei Berücksichtigung der Arme ein Einziehen des Kranzes zu erwarten. Die Formänderung, die der Kranz erleidet, ist in Abb. 344 grundsätzlich dargestellt. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß die Tangente in den Armanschlußpunkten Kreistangente bleibt, während sich der mittlere Teil des Kreisausschnittes infolge der Fliehkraft nach außen wölbt. Der Kranz ist an den Armen eingespannt; außerdem erfährt er eine tangentiale Zugkraft.

Wir schneiden einen Ringteil von Mitte Feld bis Mitte Feld heraus (Abb. 345). Da die Verhältnisse bei symmetrischer Anordnung der Arme in jedem Sektor gleich sind, genügt die Untersuchung eines Sektors. Den herausgeschnittenen Teil machen wir frei. Das erfordert

1. je eine Normalkraft $N_a = N_b$ in den Schwerpunkten der Schnittflächen A und B,

2. je ein Moment $M_a = M_b$ in den Schnittflächen A und B,

3. Die Armspannkraft X, die durch die Formänderung des Ringes hervorgerufen wird.

Aus Symmetriegründen ist in den Punkten A und B keine Schubkraft vorhanden.

Auf ein Bogenelement ds entfällt eine Fliehkraft

$$dC = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R \cdot d\varphi \cdot R\omega^2,$$

die mit der Armachse den Winkel $(\alpha - \varphi)$ einschließt. Ihre Seitenkraft in Richtung X ist also

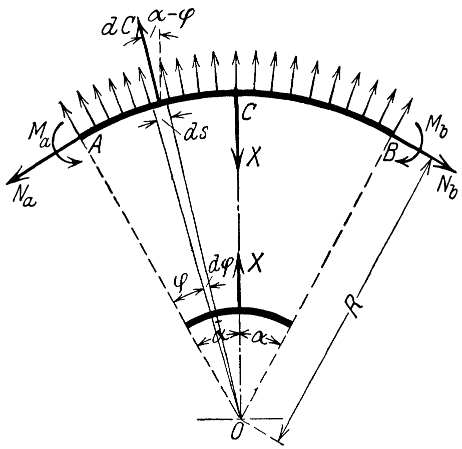


Abb. 345. Untersuchung eines Ringteiles.

$$dC \cdot \cos(\alpha - \varphi) = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R \cdot d\varphi \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\alpha - \varphi).$$

Die Summe sämtlicher Seitenkräfte in Richtung X, hervorgerufen durch die Fliehkraft des Kranzsegmentes mit dem Zentriwinkel 2α, ist

$$\int dC \cdot \cos(\alpha - \varphi) = F \cdot \frac{\gamma}{g} R^2\omega^2 \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi) \cdot d\varphi.$$

Die Normalkräfte N haben in Richtung X zwei gleich große und gleich gerichtete Seitenkräfte $N \sin\alpha$, so daß die erste Gleichgewichtsbedingung $\sum X = 0$ die Gleichung

$$2N_a \sin\alpha + X - F \cdot \frac{\gamma}{g} R^2\omega^2 \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi)\, d\varphi = 0$$

ergibt. Setzen wir

$$F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R^2\omega^2 = T_0,$$

wobei T_0 der tangentialen Spannkraft des frei schwebenden Ringes entsprechen würde, so erhalten wir

$$2N_a \sin\alpha + X - T_0 \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi) \cdot d\varphi = 0$$

und berechnen zunächst das Integral. Aus

$$\alpha - \varphi = z, \text{ d. h. } \varphi = \alpha - z \quad \text{und} \quad d\varphi = -dz$$

folgt

$$T_0 \cdot \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi) \cdot d\varphi = T_0 \cdot \int \cos z\,(-dz) = -T_0 \cdot \sin z,$$

$$T_0 \cdot \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi)\, d\varphi = -T_0 \cdot \sin(\alpha - \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\alpha}.$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert

$$T_0 \cdot \int\limits_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \varphi) \cdot d\varphi = -T_0 \Big[\sin(\alpha - 2\alpha) - \sin(\alpha - 0)\Big] = 2\,T_0 \cdot \sin\alpha$$

und damit

$$2\,N_a \sin\alpha + X - 2\,T_0 \cdot \sin\alpha = 0$$

oder

$$N_a = \frac{2\,T_0 \cdot \sin\alpha - X}{2\sin\alpha} = T_0 - \frac{X}{2\sin\alpha}.$$

Nunmehr legen wir einen Schnitt, der um den Zentriwinkel φ von A entfernt ist. Damit das Gleichgewicht des abgetrennten Teiles gewahrt bleibt, sind hinzuzufügen:

1. eine Normalkraft N im Schwerpunkt der Schnittfläche,
2. ein Moment M, das dem am Ende des Bogens angreifenden Moment M_a entgegengesetzt ist,
3. die Querkräfte, die wir wie üblich vernachlässigen.

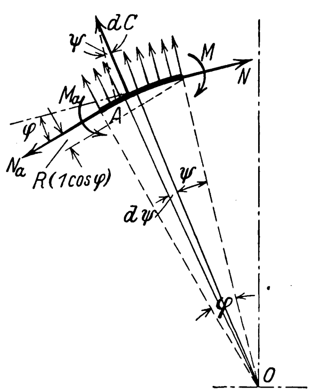


Abb. 346. Schnitt durch den Kranz.

Die erste Gleichgewichtsbedingung verlangt, daß die Summe sämtlicher Seitenkräfte in einer beliebigen Richtung — wir wählen N — gleich Null ist. Auf ein Bogenelement ds (Abb. 346) wirkt die Fliehkraft

$$d\,C = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R \cdot d\psi \cdot R \cdot \omega^2,$$

ihre Seitenkraft in Richtung N ist

$$d\,C \cdot \sin\psi = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R^2\omega^2 \cdot \sin\psi \cdot d\psi,$$

die Summe sämtlicher Seitenkräfte längs des abgetrennten Bogens infolge der Fliehkraft

$$\int\limits_0^{\varphi} d\,C \cdot \sin\psi = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R^2\omega^2 \int\limits_0^{\varphi} \sin\psi \cdot d\psi = T_0 \cdot \int\limits_0^{\varphi} \sin\psi \cdot d\psi.$$

Einschließlich der Seitenkräfte von N_a und N wird

$$N - N_a \cdot \cos\varphi - T_0 \cdot \int\limits_0^{\varphi} \sin\psi \cdot d\psi = 0.$$

Das Integral ist

$$T_0 \cdot \int\limits_0^{\varphi} \sin\psi \cdot d\psi = -T_0 \cdot \Big[\cos\psi\Big]_0^{\varphi} = -T_0 \cdot \Big[\cos\varphi - \cos 0\Big] = T_0 - T_0 \cdot \cos\varphi,$$

also

$$N = N_a \cdot \cos\varphi - T_0 \cdot \cos\varphi + T_0.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung N_a durch

$$N_a = T_0 - \frac{X}{2\sin\alpha},$$

so erhalten wir

$$N = T_0 \cdot \cos\varphi - \frac{X \cdot \cos\varphi}{2\sin\alpha} - T_0 \cdot \cos\varphi + T_0\,,$$

$$N = T_0 - \frac{X \cdot \cos\varphi}{2 \cdot \sin\alpha}\,. \tag{a}$$

Es fehlt noch die Bestimmung des Biegungsmomentes M in dem Schnitt, der unter dem Winkel φ gelegt ist. Das im Punkte A angreifende Moment M_a sei links drehend und positiv, weil es Zugspannungen in der Außenschicht des Bogens hervorruft. Die Normalkraft N_a dreht in Beziehung auf den Schnitt φ am Hebelarm $R\,(1 - \cos\varphi)$ ebenfalls links herum. Die auf das Bogenelement ds entfallende Fliehkraft

$$dC = F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot R \cdot d\psi \cdot R \cdot \omega^2 = T_0 \cdot d\psi$$

dreht am Hebelarm $R \cdot \sin\psi$ rechts herum und ist negativ, weil sie in der Außenschicht des Bogens Druckspannungen hervorruft. Insgesamt wirkt im Schnitt φ das Moment

$$M = M_a + N_a \cdot R\,(1 - \cos\varphi) - T_0 \cdot R \int_0^{\varphi} \sin\psi \cdot d\psi\,.$$

Mit $\displaystyle\int_0^{\varphi} \sin\psi \cdot d\psi = -\cos\psi \Big|_0^{\varphi} = -[\cos\varphi - \cos 0] = 1 - \cos\varphi$

und $$N_a = T_0 - \frac{X}{2\sin\alpha}$$

wird $$M = M_a + \left(T_0 - \frac{X}{2\sin\alpha}\right) \cdot R\,(1 - \cos\varphi) - T_0 \cdot R\,(1 - \cos\varphi)\,,$$

das nach dem Auflösen der Klammern übergeht in

$$M = M_a - \frac{X R}{2\sin\alpha} + X R \cdot \frac{\cos\varphi}{2\sin\alpha}\,. \tag{b}$$

Die statisch nicht bestimmbaren Größen sind das Einspannmoment M_a und die Spannkraft X im Arm. Nach dem Satze von Castigliano (Seite 195) ist

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \Delta_R\,,$$

wobei Δ_R die Verschiebung des Punktes C (Abb. 345) ist.

Ferner macht M_a die Formänderungsarbeit zu einem Minimum, weil die Querschnitte A und B radial gerichtet sind; es wird

$$\frac{\partial A}{\partial M} = 0$$

(Seite 199).

Nach Seite 199 ist daher

$$0 = 2 \cdot \int_0^{\alpha} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_a} \cdot ds + 2 \int_0^{\alpha} \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial M_a} \cdot ds\,, \tag{I}$$

$$\Delta R = 2 \int_0^{\alpha} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \cdot ds + 2 \int_0^{\alpha} \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} \cdot ds\,. \tag{II}$$

Die Integrale erstrecken sich über den ganzen Sektor. Die Gleichungen (a) und (b) liefern

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial M_a} = 0;$$

ferner ist $ds = R \cdot d\varphi$;

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{R}{2\sin\alpha} + \frac{R\cdot\cos\varphi}{2\sin\alpha}; \quad \frac{\partial N}{\partial X} = -\frac{\cos\varphi}{2\sin\alpha}.$$

Mit diesen Werten geht Gleichung (I) über in

$$0 = \frac{1}{EJ}\int\limits_0^\alpha \left(M_a - \frac{XR}{2\sin\alpha} + \frac{XR\cdot\cos\varphi}{2\sin\alpha}\right) R\cdot d\varphi$$

$$= \frac{R}{EJ}\left(M_a \cdot \int\limits_0^\alpha d\varphi - \frac{XR}{2\sin\alpha}\cdot\int\limits_0^\alpha d\varphi + \frac{XR}{2\sin\alpha}\int\limits_0^\alpha \cos\varphi\cdot d\varphi\right)$$

$$= M_a\,[\alpha] - \frac{XR}{2\sin\alpha}[\alpha] + \frac{XR}{2\sin\alpha}[\sin\alpha];$$

hieraus folgt

$$M_a = \frac{XR}{2\sin\alpha} - \frac{XR}{2\alpha}. \tag{c}$$

Setzen wir M und M_a in Gleichung (II) ein, so ergibt sich

$$\Delta R = 2\cdot\int\limits_0^\alpha \frac{R^3}{EJ}\left(-\frac{X}{2\alpha} + \frac{X\cos\varphi}{2\sin\alpha}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{2\sin\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha}\right)\cdot d\varphi,$$

$$+ 2\cdot\int\limits_0^\alpha \frac{R}{EF}\left(T_0 - \frac{X\cos\varphi}{2\sin\alpha}\right)\left(-\frac{\cos\varphi}{2\sin\alpha}\right)\cdot d\varphi.$$

Wir lösen die Klammern auf und integrieren die einzelnen Glieder:

$$\Delta R = 2\cdot\frac{R^3}{EJ}\left[-\frac{X}{4\alpha\cdot\sin\alpha}\cdot\int\limits_0^\alpha \cos\varphi\cdot d\varphi + \frac{X}{4\sin^2\alpha}\cdot\int\limits_0^\alpha \cos^2\varphi\cdot d\varphi + \frac{X}{4\alpha\cdot\sin\alpha}\cdot\int\limits_0^\alpha d\varphi\right.$$

$$\left. - \frac{X}{4\sin^2\alpha}\int\limits_0^\alpha \cos\varphi\cdot d\varphi\right] + 2\cdot\frac{R}{EF}\left[-\frac{T_0}{2\sin\alpha}\cdot\int\limits_0^\alpha \cos\varphi\cdot d\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{X}{4\sin^2\alpha}\cdot\int\limits_0^\alpha \cos^2\varphi\cdot d\varphi\right],$$

$$\Delta R = 2\cdot\frac{R^3}{EJ}\left\{-\frac{X}{4\alpha\cdot\sin\alpha}[\sin\alpha] + \frac{X}{4\sin^2\alpha}\left[\frac{1}{4}\sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}\right] + \frac{X}{4\alpha\cdot\sin\alpha}[\alpha]\right.$$

$$\left. - \frac{X}{4\sin^2\alpha}[\sin\alpha]\right\} + 2\cdot\frac{R}{EF}\left\{-\frac{T_0}{2\sin\alpha}[\sin\alpha]\right.$$

$$\left. + \frac{X}{4\sin^2\alpha}\left[\frac{1}{4}\sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}\right]\right\},$$

$$\Delta R = \frac{R^3}{EJ}\left[-\frac{X}{2\alpha}+\frac{X}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}\right]+\frac{R}{EF}\left[-T_0+\frac{X}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}\right]$$

$$\frac{T_0\cdot R}{EF}+\Delta R=\frac{X R^3}{EJ}\left[\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}\right]+\frac{X R}{EF}\cdot\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\alpha}.$$

Wir setzen
$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\alpha}=\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{1-\cos 2\alpha}=B,$$

$$\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}=\frac{\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{\alpha}{2}}{1-\cos 2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}=B-\frac{1}{2\alpha}=A$$

und schreiben
$$\frac{T_0 R}{EF}+\Delta R=A\cdot\frac{X R^3}{EJ}+B\cdot\frac{X R}{EF}.$$

b) Formänderung des Armes.

Die Verlängerung ΔR des Armes setzt sich aus der Verlängerung infolge X und der Verlängerung infolge der Eigenfliehkraft des Armes zusammen; sie ist der Kraft X (Abb. 345) entgegengerichtet. Verstehen wir unter δ_1 die Verlängerung des Armes durch eine Axialkraft von 1 t, so verlängert die Kraft X den Arm um $X\cdot\delta_1$; die Verlängerung durch die Fliehkraft sei δ_c. Mit diesen Werten erhalten wir

$$\frac{T_0 R}{EF}-\delta_c=A\cdot\frac{X R^3}{EJ}+B\cdot\frac{X R}{EF}+X\cdot\delta_1,$$

weil $\Delta R=-X\cdot\delta_1-\delta_c$ ist,
und daraus

$$X=\frac{\frac{T_0 R}{EF}-\delta_c}{A\cdot\frac{R^3}{EJ}+B\cdot\frac{R}{EF}+\delta_1}. \tag{d}$$

δ_1 und δ_c hängen von der Form und dem Baustoff der Arme ab und sind Seite 28 für zylindrische und keglige Stäbe entwickelt. Die Beiwerte A und B sind für die üblichen Armzahlen nachstehender Zahlentafel zu entnehmen.

Zahlentafel.

Armzahl =	4	6	8	10
α	$\frac{\pi}{4}=0{,}78540$	$\frac{\pi}{6}=0{,}52360$	$\frac{\pi}{8}=0{,}39270$	$\frac{\pi}{10}=0{,}31416$
$\frac{\alpha}{2}$	0,39270	0,26180	0,19635	0,15708
$\frac{1}{2\alpha}$	0,63662	0,95492	1,2732	1,5916
$\sin 2\alpha$	1	0,86603	0,70711	0,58779
$\cos 2\alpha$	0	0,5	0,70711	0,80902
$\frac{1}{4}\sin 2\alpha$	0,25	0,21651	0,17678	0,14695
A	0,00608	0,00170	0,0007	0,0003
B	0,64270	0,95662	1,2739	1,5919

Mit der Entwicklung der statisch nicht bestimmbaren Größen M_a und X ist die Berechnung der Spannungen in jedem beliebigen Querschnitt möglich.

c) Spannungen im Kranz.

Gefährliche Querschnitte liegen in der Mitte zwischen zwei Armen, d. h. für $\varphi = 0$, und im Armanschlußpunkt, d. h. für $\varphi = \alpha$. Sie sind auf Zug und Biegung beansprucht. Es ist

$$\sigma_A = + \frac{N_a}{F} \pm \frac{M_a}{W},$$

$$\sigma_C = + \frac{N_C}{F} \pm \frac{M_C}{W}.$$

Wir erhalten N und M aus

$$N_a = T_0 - \frac{X}{2 \sin \alpha},$$

$$M_a = \frac{X R}{2 \sin \alpha} - \frac{X R}{2 \alpha} = \frac{X R}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right),$$

$$N_C = T_0 - \frac{X \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = T_0 - \frac{X}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$M_C = M_a - \frac{X R}{2 \sin \alpha} + \frac{X R \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha},$$

$$= -\frac{X R}{2 \alpha} + \frac{X R \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = -\frac{X R}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

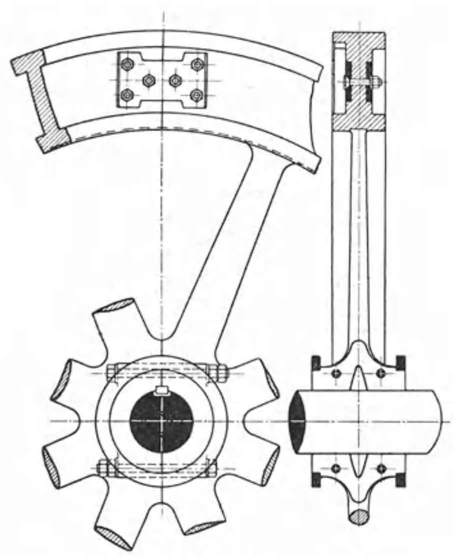


Abb. 347. Schwungrad.

d) Spannungen in den Armen.

Ist F_1 der Armquerschnitt an der Nabe, F_2 der Armquerschnitt am Kranz, so ist

$$\sigma_1 = \frac{X}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{X + C}{F_2},$$

wenn C die Eigenfliehkraft des Armes bedeutet; vergleiche Seite 465.

e) Zahlenbeispiel.

Als Beispiel wählen wir das Schwungrad der Abb. 347, das Tolle, Regelung der Kraftmaschinen[1]), entnommen ist, um einen Vergleich der Rechnungsergebnisse zu ermöglichen. Das Rad hat acht Arme und läuft mit 240 Umdrehungen in der Minute, so daß

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 240}{30} = 8 \pi$$

---

[1]) Tolle, M.: Regelung der Kraftmaschinen. 3. Auflage. Berlin: Julius Springer. 1921.

ist. Der Baustoff ist Gußeisen mit dem spezifischen Gewicht $\gamma = \frac{7{,}25}{1000}$ kg/cm^3 und $E = 1\,000\,000$ kg/cm^2. Die Abmessungen sind

Kranz: Querschnitt $F = 720$ cm^2; $J = 154250$ cm^4; $W = 6855$ cm^3;
Arme: $l = 90$ cm; $F_1 = 141{,}37$ cm^2; $F_2 = 70{,}68$ cm^2;
Halbmesser bis zum Schwerpunkt des Kranzquerschnittes $R = 152$ cm;
Halbmesser bis zur Nabe $r = 40$ cm.

Die Spannkraft im frei schwebenden Ring ist

$$T_0 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot F = \frac{7{,}25 \cdot (8\pi)^2}{981 \cdot 1000} \cdot 152^2 \cdot 720 = 77040 \text{ kg}.$$

Die Spannkraft X im Arm im Armanschlußpunkt ist

$$X = \frac{\frac{T_0 \cdot R}{F} - E \cdot \delta_c}{A \cdot \frac{R^3}{J} + B \cdot \frac{R}{F} + E \cdot \delta_1}.$$

δ_1 war die Verlängerung des Armes infolge der gleichbleibenden Kraft „Eins" (in kg); sie ist nach S. 27 bestimmt durch

$$E \cdot \delta_1 = \frac{l}{F_1} \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = \frac{90}{141{,}37} \sqrt{\frac{141{,}37}{70{,}68}} = 0{,}9 \text{ kg/cm}.$$

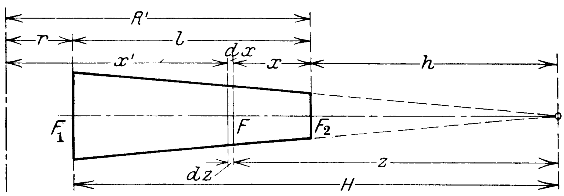


Abb. 348. Berechnung der Fliehkraft des Armes.

δ_c war die Verlängerung des Armes durch die Eigenfliehkraft; wir berechnen sie in Anlehung an die Aufgabe S. 36 nach Abb. 348.

Die verschwindend kleine Scheibe $F \cdot dx$ des Armes erfährt die Fliehkraft

$$dC = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot F \cdot x' \cdot dx,$$

wofür wir mit

$$F : F_1 = (h + x)^2 : H^2 \text{ und } x' = R' - x$$

schreiben

$$dC = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot F_1 \cdot \frac{(h + x)^2}{H^2} (R' - x) \cdot dx,$$

$$C = \int_0^x dC = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \cdot \int_0^x (h + x)^2 \, (R' - x) \cdot dx.$$

Wir verlegen den Koordinatenanfangspunkt in die Spitze des Ergänzungskegels und setzen

$$h + x = z; \; x = z - h; \; R' - x = R' + h - z; \; dx = dz,$$

erhalten also

$$C = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \int_h^z z^2 (R' + h - z) \cdot dz$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \int [z^2 (R' + h) - z^3] \, dz$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \left[(R' + h) \cdot \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_{z=h}^{z=z},$$

$$C = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \left[\frac{R' + h}{3} (z^3 - h^3) - \frac{1}{4} (z^4 - h^4) \right].$$

Als Zugspannung im Querschnitt F ergibt sich

$$\sigma = \frac{C}{F} = \frac{\gamma}{g} \, \omega^2 \cdot \frac{F_1}{H^2} \cdot \frac{\frac{R' + h}{3} (z^3 - h^3) - \frac{1}{4} (z^4 - h^4)}{F_1 \cdot \frac{z^2}{H^2}},$$

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{\frac{R' + h}{3} (z^3 - h^3) - \frac{1}{4} (z^4 - h^4)}{z^2}.$$

Die Verlängerung des verschwindend kleinen Armteilchens ist

$$\Delta \, dx = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot dx,$$

demnach die Gesamtverlängerung des Armes

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int \sigma \cdot dx,$$

$$\frac{g}{\gamma \cdot \omega^2} \cdot E \cdot \Delta l = \int_h^H \frac{\frac{R' + h}{3} (z^3 - h^3)}{z^2} \, dz - \frac{1}{4} \int_h^H \frac{z^4 - h^4}{z^2} \cdot dz$$

$$= \frac{R' + h}{3} \left\{ \int z \, dz - h^3 \int \frac{dz}{z^2} \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \int z^2 \, dz - h^4 \int \frac{dz}{z^2} \right\},$$

$$\frac{g}{\gamma \cdot \omega^2} \cdot E \cdot \Delta l = \frac{R' + h}{3} \left\{ \frac{1}{2} [z^2] + h^3 \left[\frac{1}{z} \right] \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} [z^3] + h^4 \left[\frac{1}{z} \right] \right\}.$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert

$$\frac{g}{\gamma \cdot \omega^2} \cdot E \cdot \Delta l = \frac{R' + h}{3} \left\{ \frac{1}{2} (H^2 - h^2) + h^3 \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{h} \right) \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} (H^3 - h^3) + h^4 \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{h} \right) \right\}$$

oder mit $H - h = l$

$$\frac{g}{\gamma \cdot \omega^2} \cdot E \cdot \Delta l = \frac{R' + h}{3} \left\{ \frac{1}{2} (H^2 - h^2) - h^2 \cdot \frac{l}{H} \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} (H^3 - h^3) - h^3 \cdot \frac{l}{H} \right\}.$$

Den gegebenen Zahlenwerten entnehmen wir

$$R' = l + r = 90 + 40 = 130 \text{ cm},$$
$$F_2 : F_1 = h^2 : H^2 = 1 : 2; \text{ also } H^2 = 2 h^2,$$
$$H^2 = (h + 90)^2 = h^2 + 180 h + 90^2.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich: $h = 90\,(1+\sqrt{2}) = 217{,}26$ cm,

$$H = 90\,(2+\sqrt{2}) = 307{,}26 \text{ cm}.$$

Ferner ist $H^2 - h^2 = h^2$; $\quad \dfrac{h^2}{H} = \dfrac{H}{2}$,

$$\frac{g}{\gamma\cdot\omega^2}\cdot E\cdot\Delta l = \frac{130+217{,}26}{3}\cdot 217{,}26^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{90}{307{,}26}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\,(307{,}26^3 - 217{,}26^3) - \frac{90\cdot 217{,}26\cdot 307{,}26}{2}\right\},$$

$$E\cdot\Delta l = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2\cdot 319740\,,$$

$$E\cdot\delta_c = E\cdot\Delta l = \frac{7{,}25\cdot 64\pi^2}{1000\cdot 981}\cdot 319740 = 1492{,}6 \text{ kg/cm}.$$

Aus der Zahlentafel entnehmen wir für acht Arme

$$A = 0{,}0007;\quad B = 1{,}2739;$$

demnach

$$X = \frac{\dfrac{77040\cdot 152}{720} - 1493}{0{,}0007\cdot\dfrac{152^3}{154250} + 1{,}2739\cdot\dfrac{152}{720} + 0{,}9} = 12620 \text{ kg}.$$

Dieser Wert weicht gegen den Tolleschen — $X = 12916$ kg — um 2,5% ab, eine Abweichung, die keine Rolle spielt, wenn man sich vor Augen hält, daß die ganze Berechnung auf einer immerhin schwankenden Grundlage ruht, die namentlich bei einem so unzuverlässigen Baustoff wie Gußeisen nur einen Überblick über die Art der Beanspruchung gewährt. Berücksichtigt man ferner noch die Einflüsse, die sich zahlenmäßig überhaupt nicht fassen lassen, z. B. Spannungen, die durch ungleichmäßige Abkühlung der Arme gegen den Kranz auftreten und Blasen im Guß, so wird man sich mit der angegebenen Berechnung begnügen und sich gegen zu hohe Beanspruchung des Rades durch die Wahl kleiner zulässiger Spannungen schützen.

Mit X sind die übrigen für die Beanspruchung der Querschnitte des Rades maßgebenden Größen bestimmt. Es wird

$$N_a = T_0 - \frac{X}{2\sin\alpha} = 77040 - \frac{12620}{2\cdot 0{,}38268} = 60550 \text{ kg},$$

$$N_C = T_0 - \frac{X\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha} = 77040 - \frac{12620\cdot 0{,}92388}{2\cdot 0{,}38268} = 61810 \text{ kg},$$

$$M_a = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{X\cdot R}{2} = 0{,}06667\cdot\frac{12620\cdot 152}{2} = 63940 \text{ cmkg},$$

$$M_C = -\left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right)\cdot\frac{X\,R}{2} = -\,0{,}13225\cdot\frac{12620\cdot 152}{2} = -\,126840 \text{ cmkg}.$$

Maximale Spannungen im Kranz:

$$\sigma_A = +\frac{N_a}{F} + \frac{M_a}{W} = \frac{60550}{720} + \frac{63940}{6855} = 84{,}2 + 9{,}3 = 93{,}5 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_C = +\frac{N_C}{F} + \frac{M_C}{W} = \frac{61810}{720} + \frac{126840}{6855} = 85{,}9 + 18{,}5 = 104{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

f) Spannungen infolge des auf die Welle übertragenen Drehmomentes.

Das Schwungrad übertrage ein Drehmoment M_d, das sich auf die n-Arme gleichmäßig verteilen möge. Ferner nehmen wir an, daß der Kranz im Vergleich zu den Armen als starr anzusehen sei.

Diese Annahme besagt, daß die Kranzquerschnitte trotz der Formänderung der Arme radial bleiben, der Kranz also durch M_d keine Formänderung erleidet. Beide Annahmen erscheinen vornehmlich dann zulässig, wenn die Abmessungen des Kranzes gegenüber denen der Arme groß sind. Weniger sicher sind sie bei einem schwachen Kranz, in dem zweifellos Biegungsspannungen auftreten werden.

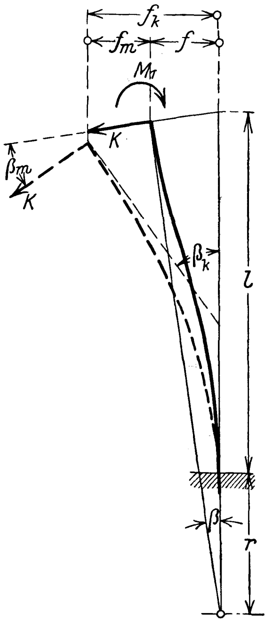


Abb. 349. Formänderung des Armes infolge eines Drehmomentes.

Infolge der Voraussetzung gleichmäßiger Beanspruchung sämtlicher Arme genügt die Untersuchung eines Armes als an der Nabe eingespannter Freiträger, der an seinem freien Ende durch eine unbekannte Einzelkraft K und ein unbekanntes Biegungsmoment M_1 belastet ist. Die zu erwartende Formänderung ist in Abb. 349 dargestellt. Der Stab ist zweifach statisch unbestimmt. Aus der zweiten Voraussetzung folgt, daß die Querschnittebene des Kranzes im Armanschlußpunkt durch den Mittelpunkt des Rades geht; sie möge mit der Ebene durch die Achse des nicht verformten Armes den Winkel β bilden. Mit anderen Worten: die Tangente an die Biegungslinie des Armes im Kranzanschlußpunkt bildet mit der Tangente im Nabenanschlußpunkt den Winkel β. Die tangentiale Verschiebung des Armendpunktes sei f. Um den gleichen Winkel β dreht sich der Armquerschnitt im Endpunkt gegen den Querschnitt an der Einspannstelle. Diesen Winkel β erhalten wir aus der Arbeitsgleichung von C a s t i g l i a n o (Seite 199) zu

$$\beta = \int_0^l \frac{M}{E J} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} \cdot d x;$$

hierin ist M_1 das statisch nicht bestimmbare Moment am Armendpunkt, M das Moment im Punkte X, J das — meist veränderliche — Trägheitsmoment des Armquerschnittes im Punkte X. Aus

$$M = M_1 - K \cdot x$$

folgt

$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1,$$

demnach

$$\beta = \int_0^l \frac{M_1}{E J} d x - \int_0^l \frac{K \cdot x}{E J} \cdot d x,$$

$$= \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M_1}{J} d x - \frac{1}{E} \int_0^l \frac{K \cdot x}{J} \cdot d x$$

oder

$$E \cdot \beta = M_1 \cdot \int_0^l \frac{1}{J}\, dx - K \cdot l \int_0^l \frac{1}{J} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx.$$

Die Integrale stellen die E-fachen Winkeländerungen dar, welche der Armendpunkt infolge eines Momentes $M_1 = 1$ und einer Kraft $K = \frac{1}{l}$ erleiden würde und lassen sich zeichnerisch leicht ermitteln (Abb. 350).

Wir zeichnen zunächst die durch $M_1 = 1$ und $K = \frac{1}{l}$ hervorgerufenen Momentenlinien $M = 1$ und $M = \frac{x}{l}$, die wir in Abb. 350b von einer Wagerechten nach oben und unten abtragen. Die Ordinaten dieser Kurven dividieren wir durch die Werte J des Trägheitsmomentes der Querschnitte, so daß die Kurven

$$z_m = \frac{1}{J} \quad \text{und} \quad z_k = \frac{1}{J}\frac{x}{l}$$

entstehen.

Diese Kurven sind in Abb. 350c dargestellt. Bezeichnet man die von ihnen und der Achse begrenzten Flächen mit $\mathfrak{F}_m$ und $\mathfrak{F}_k$, so sind

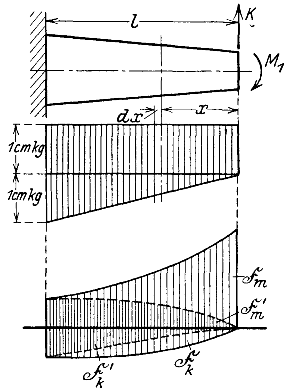


Abb. 350. Formänderung des Armes.

$$\mathfrak{F}_m = \int_0^l z_m\, dx = \int_0^l \frac{1}{J}\, dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_k = \int_0^l z_k\, dx = \int_0^l \frac{1}{J}\frac{x}{l}\, dx$$

die gesuchten Integrale; sie sind also $(M:J)$-Flächen. (Seite 176.) Es wird

$$E \cdot \beta = M_1 \cdot \mathfrak{F}_m - K l \cdot \mathfrak{F}_k.$$

Die Verschiebung f des Armendpunktes ist nach Castigliano

$$f = \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial K} \cdot dx$$

Mit

$$\frac{\partial M}{\partial K} = -x$$

wird

$$f = \int_0^l \frac{M_1}{E\, J}(-x)\, dx - \int_0^l \frac{K \cdot x}{E \cdot J}(-x) \cdot dx\,,$$

oder

$$E \cdot f = -M_1 l \int_0^l \frac{1}{J} \cdot \frac{x}{l}\, dx + K l^2 \int_0^l \frac{1}{J} \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{l}\, dx\,.$$

Auch die in der letzten Gleichung auftretenden Integrale lassen sich durch Flächen darstellen. Man braucht nur nach dem Verfahren von

Nehls (Seite 80) die Ordinaten der Kurven z_m und z_k im Verhältnis $\frac{x}{l}$ verkleinern. Es entstehen so die beiden gestrichelten Kurven der Abb. 350c. Bezeichnet man die zwischen ihnen und der Achse liegenden Flächen mit $\mathfrak{F}'_m$ und $\mathfrak{F}'_k$, so ist

$$\mathfrak{F}'_m = \int_0^l z_m \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = \int_0^l \frac{1}{J} \cdot \frac{x}{l}\, dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}'_k = \int_0^l z_k \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = \int_0^l \frac{1}{J} \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{l}\, dx.$$

Die Werte

$$\mathfrak{S}_m = l\,\mathfrak{F}'_m = \int_0^l z_m \cdot x \cdot dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_k = l\,\mathfrak{F}'_k = \int_0^l z_k \cdot x \cdot dx$$

sind die statischen Momente der $(M:J)$-Flächen, bezogen auf den Armendpunkt; sie sind die E-fachen Durchbiegungen des Armendpunktes infolge eines Momentes $M_1 = 1$ und einer Kraft $K = \frac{1}{l}$ (Seite 471), denn es ist

$$E \cdot f = -M_1 \cdot l \cdot \mathfrak{F}'_m + K l^2 \cdot \mathfrak{F}'_k = -M_1 \cdot \mathfrak{S}_m + K l \cdot \mathfrak{S}_k.$$

Je nach dem Verhältnis des in Abb. 350 links drehenden, von uns negativ angenommenen Momentes der Kraft K zu dem rechtsdrehenden Moment M_1 wird die Verschiebung f des Armendpunktes nach links oder rechts von der nicht verformten Stabachse gehen. Überwiegt die negative Kraft K, wie in Abb. 350 gezeichnet, so folgt, weil die Kranzquerschnitte radial bleiben,

$$-f = (l + r) \cdot \beta = R' \cdot \beta$$

und daraus

$$K = \frac{M_1}{l} \cdot \frac{\mathfrak{F}_m \cdot R' - \mathfrak{S}_m}{\mathfrak{F}_k \cdot R' - \mathfrak{S}_k} = \frac{M_1}{l \cdot \xi}.$$

Für den Sonderfall eines gleichbleibenden Armquerschnittes ist die $(M:J)$-Fläche infolge $M_1 = 1$ ein Rechteck; infolge $K = \frac{1}{l}$ ein Dreieck mit der Höhe $\frac{1}{J}$ für $x = l$. Es ist daher

$$J \cdot \mathfrak{F}_m = 1 \cdot l; \qquad J \cdot \mathfrak{S}_m = 1 \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{2};$$

$$J \cdot \mathfrak{F}_k = \frac{1}{2}\, l \cdot 1 = \frac{l}{2}; \quad J \cdot \mathfrak{S}_k = \frac{1}{2}\, l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}\, l = \frac{l^2}{3}.$$

Die Gleichung für K liefert mit diesen Werten

$$K = \frac{M_1}{l} \cdot \frac{l \cdot R' - \frac{l^2}{2}}{\frac{l}{2} \cdot R' - \frac{l^2}{3}} = 3\,\frac{M_1}{l} \cdot \frac{2R' - l}{3R' - 2l}$$

und

$$\xi = \frac{1}{3} \cdot \frac{3R' - 2l}{2R' - l}.$$

Das von dem Arm aufzunehmende Drehmoment ist

$$\frac{M_d}{n} = M_1 - K \cdot R' = \xi \cdot Kl - KR' = Kl\left(\xi - \frac{R'}{l}\right),$$

folglich

$$Kl = \frac{M_d}{n} \cdot \frac{1}{\xi - \frac{R'}{l}}.$$

Das am Nabenanschlußpunkt auftretende Moment ist

$$M_1 - Kl = Kl(\xi - 1),$$

$$= \frac{M_d}{n} \cdot \frac{\xi - 1}{\xi - \frac{R'}{l}}.$$

Das am Kranzanschlußpunkt auftretende Moment M_1 ergibt sich aus

$$\frac{M_d}{n} = M_1 - K \cdot R' = M_1 - \frac{M_1}{\xi l} \cdot R'$$

zu

$$M_1 = \frac{M_d}{n} \cdot \frac{\xi}{\xi - \frac{R'}{l}}.$$

Die größten zusätzlichen Beanspruchungen der Arme ergeben sich aus

$$M = M_1 - K \cdot x$$

$$\text{für } x = 0 \text{ zu } \sigma_1 = \frac{M_1}{W} \text{ und für } x = l \text{ zu } \sigma_2 = \frac{M_1 - Kl}{W}.$$

Damit sind die zusätzlichen Biegungsspannungen bestimmt, die den aus dem Beharrungszustand sich ergebenden hinzuzufügen sind. Angenähert bleiben die angegebenen Beziehungen auch für Seilscheiben und Riemenscheiben richtig, die eine Leistung von N PS oder ein Drehmoment

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{N}{n}$$

übertragen.

Für den verjüngten Arm des Zahlenbeispiels (Seite 466) sind die Flächen $\mathfrak{F}_m$, $\mathfrak{F}'_m$ und $\mathfrak{F}_k$, $\mathfrak{F}'_k$ in Abb. 350 dargestellt.

2. Berechnung umlaufender Scheiben.

Aus der zur y—z-Ebene symmetrischen Scheibe (Abb. 351) schneiden wir einen Kreisausschnitt vom Zentriwinkel $d\varphi$ heraus und aus diesem ein Ringstück von der Breite dz.

Wie bei dem Hohlzylinder (Abb. 327) wirken an den Schnittflächen die Spannungen σ_y, σ_z und $\sigma_z + d\sigma_z$, wobei σ_y die tangentiale und σ_z die radiale Spannung ist. Die Dicke der Scheibe sei so gering, daß man die Neigung der radialen Spannungen gegen die Symmetrieebene vernachlässigen und sie gleichmäßig verteilt annehmen kann. An der

Zylinderfläche vom Halbmesser z wirkt die nach innen gerichtete Kraft

$$2\,xz\,d\varphi\cdot\sigma_z.$$

An der Zylinderfläche vom Halbmesser $z+dz$ und der Höhe $2x+2dx$ wirkt nach außen die Kraft

$$2\,(x+dx)\,(z+dz)\,d\varphi\,(\sigma_z+d\sigma_z);$$

an den seitlichen Schnittflächen wirken die Kräfte

$$2\,x\,dz\cdot\sigma_y.$$

Der nach innen gerichtete senkrechte Anteil der Umfangskräfte beträgt

$$2\cdot 2x\,dz\,\sigma_y\cdot\sin\frac{d\varphi}{2}=\sim 2x\,dz\,\sigma_y\,d\varphi,$$

wenn $\sin\frac{d\varphi}{2}$ angenähert durch $\frac{d\varphi}{2}$ ersetzt wird.

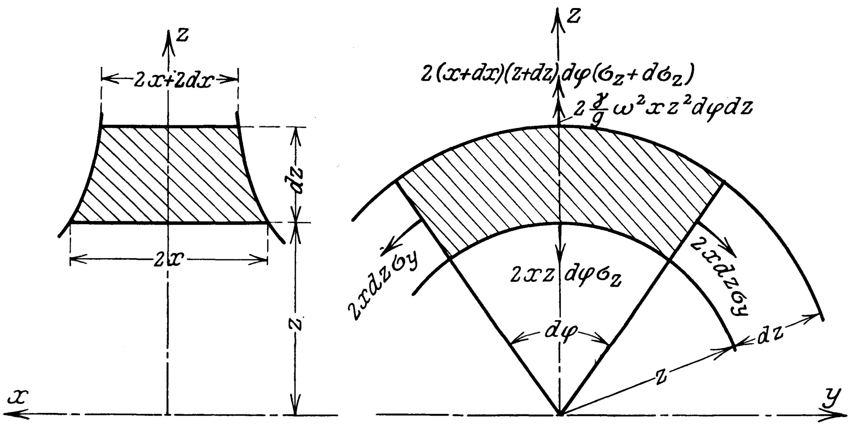


Abb. 351. Umlaufende Scheibe.

Infolge der Fliehkraft greift noch die Kraft

$$dm\cdot z\omega^2$$

an dem Element an, wobei $dm=\frac{\gamma}{g}dV$ die Masse, γ das spezifische Gewicht, g die Erdbeschleunigung und dV das Volumen ist.

Mit

$$dV=z\,d\varphi\,dz\cdot 2\,x$$

wird

$$dm\,z\omega^2=\frac{\gamma}{g}\,z\,d\varphi\,dz\cdot 2\,x\cdot z\,\omega^2$$

$$=2\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 x z^2\,d\varphi\,dz.$$

Aus der Bedingung, daß die Summe der senkrechten Komponenten aller Kräfte gleich Null sein muß, folgt:

$$2\,(x+dx)\,(z+dz)\,d\varphi\,(\sigma_z+d\sigma_z)+2\frac{\gamma}{g}\,\omega^2xz^2\,d\varphi\,dz=2xz\,d\varphi\cdot\sigma_z$$
$$+2x\,dz\,\sigma_y\,d\varphi.$$

Multiplizieren wir aus, dividieren durch $d\varphi$ und vernachlässigen die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung, so wird

$$2dxz\sigma_z + 2xdz\sigma_z + 2xzd\sigma_z + 2\frac{\gamma}{g}\omega^2 xz^2 dz = 2xdz\sigma_y\,,$$

oder, wenn wir durch $2xzdz$ dividieren,

$$\frac{\sigma_z\,dx}{x\,dz} + \frac{\sigma_z}{z} + \frac{d\sigma_z}{dz} + 2\frac{\gamma}{g}\omega^2 z = \frac{\sigma_y}{z}\,,$$

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{z} - \frac{\gamma}{g}\omega^2 z - \frac{\sigma_z\,dx}{x\,dz}\,. \tag{1}$$

a) Die Scheibe gleicher Festigkeit.

Gleiche Festigkeit bedeutet, daß die radialen und tangentialen Spannungen überall denselben Wert haben sollen:

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma = \text{konst.}$$

Da hiernach auch $\frac{d\sigma_z}{dz} = 0$ ist, folgt aus (1):

$$0 = 0 - \frac{\gamma}{g}\omega^2 z - \frac{\sigma}{x}\frac{dx}{dz}\,,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{\sigma} z dz\,.$$

Integrieren wir, indem wir die Integrationskonstante mit $\ln C$ bezeichnen, so wird

$$\ln x = -\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{\sigma}\frac{z^2}{2} + \ln C$$

oder

$$x = Ce^{-\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{\sigma}\frac{z^2}{2}}\,.$$

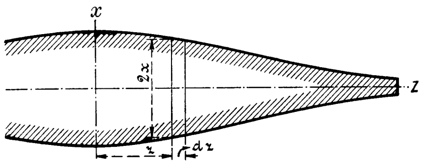


Abb. 352. Scheibe gleicher Festigkeit.

Mit Rücksicht auf die Herstellung wird die Scheibe am äußersten Umfang ($z = r_a$) eine bestimmte, geringste Dicke s haben müssen (Abb. 352); dort hört die Scheibe auf, ein Körper gleicher Festigkeit zu sein, falls nicht eine äußere Kraft, z. B. die Fliehkraft des Kranzes der Schaufeln, angreift.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten erhalten wir die Gleichung

$$s = 2Ce^{-\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{\sigma}\frac{r_a^2}{2}}\,,$$

daher ist

$$x = se^{\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma}(r_a^2 - z^2)}\,. \tag{2}$$

Die Dicke der Scheibe ohne Bohrung beträgt in der Mitte mit $z = 0$

$$s_m = se^{\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma}r_a^2}\,. \tag{3}$$

Ist $\frac{\omega^2 r_a^2}{\sigma}$ groß, so ergibt sich eine starke Wölbung der Scheibe. Damit ist eine Neigung der Spannungen gegen die Symmetrieebene verbunden, die wir nicht berücksichtigt haben. Gleichung (3) gilt also nur für Scheiben, die nicht zu stark gewölbt sind.

Beispiel. Eine Scheibe von 2 m Durchmesser soll bei 3000 Umdr./min aus Nickelstahl hergestellt werden.

Wir wählen $s = 15$ mm und die Spannung $\sigma = 2000$ kg/cm². Mit $\gamma = 0{,}0078$ kg/cm³ und $g = 981$ cm/s² wird

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma} = \frac{0{,}0078}{981}\,\frac{\left(\frac{2\pi\cdot 3000}{60}\right)^2}{2\cdot 2000} = 0{,}0001962\,,$$

mithin

$$2x = 1{,}5\, e^{0{,}0001962\cdot(100^2 - z^2)}.$$

Für $z = 0$ wird die Dicke der Scheibe in der Mitte

$$s_m = 1{,}5\, e^{1{,}962} = 1{,}5\cdot 7{,}114 = 10{,}7 \text{ cm}.$$

Wir wollen noch die Spannungen berechnen.

Nach Seite 215 sind die reduzierten Spannungen in Richtung der x-, y- und z-Achse

$$E\,\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\,,$$

$$E\,\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\,,$$

$$E\,\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\,.$$

Für die Scheibe gleicher Festigkeit ist

$$\sigma_x = 0; \qquad \sigma_y = \sigma_z = \sigma\,.$$

Mithin wird

$$E\,\varepsilon_z = -\frac{2}{m}\sigma = -0{,}6\,\sigma; \qquad E\,\varepsilon_y = E\,\varepsilon_z = \sigma\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0{,}7\,\sigma\,,$$

wenn man

$$m = \frac{10}{3}$$

setzt.

Als maßgebende Spannung muß daher

$$0{,}7\,\sigma \leqq k_z$$

sein.

In unserem Beispiel war $\sigma = 2000$ kg/cm². Folglich beträgt die zulässige Spannung

$$k_z = 0{,}7\cdot 2000 = 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Die Scheibe gleicher Dicke.

Da hier $\frac{dx}{dz} = 0$ ist, wird gemäß (1)

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{z} - \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 z\,. \tag{4}$$

Es treten keine Kräfte in Richtung der x-Achse auf; folglich haben wir einen ähnlichen Spannungszustand wie bei dem auf Seite 432 berechneten Rohre.

Bezeichnet man wieder die radiale Verschiebung mit ξ, so wird entsprechend den Gleichungen (6) und (8) auf Seite 434

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y=\frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{\xi}{z}+\frac{d\xi}{z}\right),\quad \sigma_z=\frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{d\xi}{dz}+\frac{\xi}{z}\right)\\ \sigma_y-\sigma_z=\frac{2}{\beta}\left(\frac{\xi}{z}-\frac{d\xi}{dz}\right)\\ \frac{d\sigma_z}{dz}=\frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Setzen wir diese Werte in (4) ein, so folgt

$$\frac{2}{\beta}\frac{m}{m-1}\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\xi}{z^2}$$
$$=\frac{2}{\beta}\frac{\xi}{z^2}-\frac{2}{\beta}\cdot\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\gamma}{g}\omega^2 z,$$

oder, indem man die beiden ersten Glieder der rechten Seite auf die linke Seite bringt

$$\frac{2}{\beta}\frac{m}{m-1}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}\right)=-\frac{\gamma}{g}\omega^2 z,$$

$$\frac{d^2\xi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}=-\frac{m-1}{2m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z. \qquad (6)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der auf Seite 435 abgeleiteten Beziehung (9) nur durch die rechte Seite; die Integration kann in derselben Weise erfolgen.

Unter Benutzung der Gleichung (7) Seite 434:

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{z}\right)}{dz}=\frac{1}{z}\frac{d\xi}{dz}-\frac{\xi}{z^2}$$

wird

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d\xi}{dz}+\frac{\xi}{z}\right)=-\frac{m-1}{2m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z.$$

Die Integration liefert

$$\frac{d\xi}{dz}+\frac{\xi}{z}=c_1-\frac{m-1}{4m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2,$$

wobei c_1 die Integrationskonstante ist.

Multipliziert man mit z und beachtet, daß

$$\frac{d(\xi z)}{dz}=z\frac{d\xi}{dz}+\xi$$

ist, so wird

$$\frac{d(\xi z)}{dz}=c_1 z-\frac{m-1}{4m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^3.$$

Integrieren wir nochmals, so folgt

$$\xi z=c_2+\frac{c_1}{2}z^2-\frac{m-1}{16m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^4, \qquad (7)$$

wobei c_2 die zweite Integrationskonstante ist. Hieraus ergibt sich

$$\frac{\xi}{z}=\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_1}{2}-\frac{m-1}{16m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2$$

und
$$\frac{d\xi}{dz} = -\frac{\xi}{z} + c_1 - \frac{m-1}{4m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2$$
$$= -\frac{c_2}{z^2} - \frac{c_1}{2} + \frac{m-1}{16m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2 + c_1 - \frac{m-1}{4m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2$$
$$= -\frac{c_2}{z^2} + \frac{c_1}{2} - \frac{3}{16}\frac{m-1}{m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2.$$

Diese Werte werden in die Gleichungen (5) eingesetzt.

Es ist
$$\sigma_y = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{\xi}{z} + \frac{d\xi}{dz}\right) = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(\frac{m c_2}{z^2} + \frac{m c_1}{2} - \frac{m-1}{16}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2 - \frac{c_2}{z^2}\right.$$
$$\left. + \frac{c_1}{2} - \frac{3}{16}\frac{m-1}{m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2\right)$$
$$= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left\{\frac{c_1}{2}(m+1) + \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right\} - \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 z^2}{8}\left(\frac{3}{m} + 1\right) \tag{8}$$

und
$$\sigma_z = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{d\xi}{dz} + \frac{\xi}{z}\right) = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{\beta}\left(-\frac{m c_2}{z^2} + \frac{m c_1}{2} - \frac{3}{16}(m-1)\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2\right.$$
$$\left. + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_1}{2} - \frac{m-1}{16m}\beta\frac{\gamma}{g}\omega^2 z^2\right)$$
$$= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left\{\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right\} - \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 z^2}{8}\left(\frac{1}{m} + 3\right). \tag{9}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 müssen wir die in den einzelnen Fällen gültigen Grenzbedingungen beachten.

Die umlaufende Scheibe gleicher Dicke mit Nabenbohrung. Am äußeren und inneren Rande sollen keine äußeren Kräfte wirken, folglich muß für $z = r_i$ und $z = r_a$ $\sigma_z = 0$ werden. Aus (9) folgt daher
$$0 = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left\{\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1)\right\} - \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 r_i^2}{8}\left(\frac{1}{m} + 3\right)$$
und
$$0 = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left\{\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_a^2}(m-1)\right\} - \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 r_a^2}{8}\left(\frac{1}{m} + 3\right).$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen wird
$$0 = \frac{2}{\beta}c_2\cdot\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 r_i^2} - \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left(\frac{1}{m} + 3\right)\left(r_a^2 - r_i^2\right)$$
oder
$$c_2 = \beta\left(\frac{1}{m} + 3\right)\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}r_a^2 r_i^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt
$$\frac{c_1}{2}(m+1) = \frac{c_2}{r_i^2}(m-1) + \beta(m-1)\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}\left(\frac{1}{m} + 3\right)r_i^2;$$
mit dem für c_2 gefundenen Ausdruck wird
$$\frac{c_1}{2}(m+1) = (m-1)\left(\frac{1}{m} + 3\right)\beta\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}r_a^2 + (m-1)\beta\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}\left(\frac{1}{m} + 3\right)r_i^2$$
$$= (m-1)\left(\frac{1}{m} + 3\right)\beta\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}(r_a^2 + r_i^2),$$

mithin

$$c_1 = \beta \frac{m-1}{m+1}\left(\frac{1}{m}+3\right)\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(r_a^2+r_i^2)\,.$$

c_1 und c_2 werden nun in die Gleichungen (8) und (9) eingesetzt.

Es ist

$$\sigma_y = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left\{\beta(m-1)\left(\frac{1}{m}+3\right)\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}(r_a^2+r_i^2) + \frac{m-1}{z^2}\beta\left(\frac{1}{m}+3\right)\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{16}r_a^2 r_i^2\right\}$$
$$-\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 z^2}{8}\left(\frac{3}{m}+1\right) = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{\left(\frac{1}{m}+3\right)\left(r_a^2+r_i^2+\frac{r_a^2 r_i^2}{z^2}\right)-\left(\frac{3}{m}+1\right)z^2\right\} \tag{10}$$

und ebenso

$$\sigma_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{\left(\frac{1}{m}+3\right)\left(r_a^2+r_i^2-\frac{r_a^2 r_i^2}{z^2}\right)-\left(\frac{1}{m}+3\right)z^2\right\}. \tag{11}$$

Ferner ergeben sich die reduzierten Spannungen aus den Gleichungen Seite 476 mit $\sigma_x = 0$:

$$E\,\varepsilon_x = -\frac{1}{m}(\sigma_y+\sigma_z) = -\frac{1}{m}\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{4}\left\{\left(\frac{1}{m}+3\right)(r_a^2+r_i^2)-\left(\frac{2}{m}+2\right)z^2\right\},$$

$$E\,\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{\left(\frac{1}{m}+3\right)\left[(r_a^2+r_i^2)\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{r_a^2 r_i^2}{z^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{1}{m^2}\right)z^2\right\},$$

$$E\,\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{1}{m}\sigma_y = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{\left(\frac{1}{m}+3\right)\left[(r_a^2+r_i^2)\left(1-\frac{1}{m}\right)-\frac{r_a^2 r_i^2}{z^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left(3-\frac{3}{m^2}\right)z^2\right\}.$$

Setzt man

$$m = \frac{10}{3},$$

so wird

$$E\,\varepsilon_x = -\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{1{,}98\,(r_a^2+r_i^2)-1{,}56\,z^2\right\},$$

$$E\,\varepsilon_y = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{2{,}31\,(r_a^2+r_i^2)+4{,}29\,\frac{r_a^2 r_i^2}{z^2}-0{,}91\,z^2\right\},$$

$$E\,\varepsilon_z = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{2{,}31\,(r_a^2+r_i^2)-4{,}29\,\frac{r_a^2 r_i^2}{z^2}-2{,}73\,z^2\right\}.$$

$E\,\varepsilon_x$ und $E\,\varepsilon_z$ sind stets negativ, also Druckspannungen, während $E\,\varepsilon_y$ eine Zugspannung ist.

Die absolut größten Werte ergeben sich am Innenrand der Scheibe mit $z = r_i$.

Es wird

$$(-E\,\varepsilon_x)_{\max} = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(1{,}98\,r_a^2+0{,}42\,r_i^2),$$

$$(E\,\varepsilon_y)_{\max} = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(6{,}6\,r_a^2+1{,}4\,r_i^2),$$

$$(-E\,\varepsilon_z)_{\max} = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(1{,}98\,r_a^2+0{,}42\,r_i^2) = (-E\,\varepsilon_x)_{\max}\,.$$

Ersichtlich muß $(E\varepsilon_y)_{\max}$ als größte Spannung kleiner als die zulässige Spannung sein:

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(6{,}6\,r_a^2+1{,}4\,r_i^2)\leqq k_z\,. \tag{12}$$

Die umlaufende Scheibe gleicher Dicke mit sehr kleiner Bohrung. Ist die Bohrung sehr klein, so kann man in der letzten Gleichung $1{,}4\,r_i^2$ gegen $6{,}6\,r_a^2$ vernachlässigen und erhält als maßgebende Spannung am Innenrand der Scheibe:

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\cdot 6{,}6\,r_a^2=0{,}825\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_a^2.$$

Die reduzierte Spannung am äußeren Rande der Scheibe ist mit $z=r_a$

$$E\,\varepsilon_y=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(2{,}31\,r_a^2-0{,}91\,r_a^2)=0{,}175\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_a^2.$$

Die umlaufende Scheibe gleicher Dicke ohne Nabenbohrung. Ist eine Bohrung in der Scheibe überhaupt nicht vorhanden, so muß für $z=0$ $\xi=0$ sein, da im Mittelpunkt keine Richtung vor der anderen bevorzugt ist.

Aus (7) folgt daher, daß

$$c_2=0$$

ist.

Die Gleichungen (8) und (9) lauten daher für die Scheibe ohne Bohrung

$$\sigma_y=\frac{m+1}{m-1}\frac{1}{\beta}c_1-\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 z^2}{8}\left(\frac{3}{m}+1\right),$$

$$\sigma_z=\frac{m+1}{m-1}\frac{1}{\beta}c_1-\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 z^2}{8}\left(\frac{1}{m}+3\right).$$

Für $z=0$ wird $\sigma_y=\sigma_z$, wie zu erwarten, weil für den Kreis vom Radius $z=0$ jeder Durchmesser als Tangente angesehen werden kann. Da für $z=r_a$ $\sigma_z=0$ sein muß, ist

$$\frac{m+1}{m-1}\frac{1}{\beta}c_1=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 r_a^2}{8}\left(\frac{1}{m}+3\right)$$

und daher

$$\sigma_y=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{r_a^2\left(\frac{1}{m}+3\right)-\left(\frac{3}{m}+1\right)z^2\right\}, \tag{13}$$

$$\sigma_z=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{r_a^2\left(\frac{1}{m}+3\right)-\left(\frac{1}{m}+3\right)z^2\right\}. \tag{14}$$

Für die maßgebende Spannung $E\,\varepsilon_y$ wird

$$E\,\varepsilon_y=\sigma_y-\frac{1}{m}\sigma_z=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}\left\{r_a^2\left(\frac{1}{m}+3\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)-\left(1-\frac{1}{m^2}\right)z^2\right\}$$

$$=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}(2{,}31\,r_a^2-0{,}91\,z^2),$$

wenn wir wieder $m=\dfrac{10}{3}$ setzen.

Für die Scheibenmitte ($z = 0$) wird die größte reduzierte Spannung

$$E\,\varepsilon_y = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8} \cdot 2{,}31\, r_a^2 = 0{,}29\,\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r_a^2 \leqq k_z\,,$$

während für den Scheibenrand mit $z = r_a$

$$E\,\varepsilon_y = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8} \cdot 1{,}4\, r_a^2 = 0{,}175\,\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r_a^2$$

ist.

Infolge Fehlens der kleinen Bohrung ist die Spannung in der Scheibenmitte von $0{,}825\,\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r_a^2$ auf $0{,}29\,\frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r_a^2$, also auf fast den dritten Teil zurückgegangen. Die Spannungen am äußeren Rande der Scheibe sind, wie zu erwarten, dieselben geblieben. Es ist jedoch zu beachten, daß infolge der bei Herstellung der kleinen Bohrung auftretenden bleibenden Formänderung der Unterschied der Spannungen in der Mitte der Scheibe geringer sein wird, als es die Rechnung ergibt.

Die Wirkung von Kräften (Spannungen), die am Rande der Scheibe gleicher Dicke angreifen. Durch Drucke, welche in der Bohrung der Scheibe auftreten, etwa durch die eingezogene Welle, sowie durch Kräfte die am Außenrande angreifen, z. B. die Fliehkraft des Kranzes und der Schaufeln, wird die Scheibe in derselben Weise beansprucht, wie das auf Seite 432 behandelte Rohr. Die Spannung betrage am äußeren Rande $\sigma_z = p_a$ (Zug), bzw. $\sigma_z = -p_i$ (Druck) am inneren Rande (Abb. 353). Man kann daher die abgeleiteten Formeln benutzen, wenn man an Stelle von p_a stets $-p_a$ setzt.

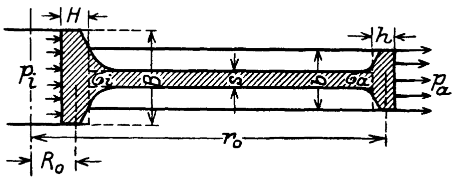


Abb. 353. Scheibe gleicher Dicke.

Beanspruchung durch die äußere Zugspannung p_a. Es ist nach Seite 439

$$E\,\varepsilon_y = \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(0{,}7 + 1{,}3\,\frac{r_i^2}{z^2}\right),$$

$$E\,\varepsilon_z = \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(0{,}7 - 1{,}3\,\frac{r_i^2}{z^2}\right).$$

Somit wird die Spannung am inneren Rande, d. h. für $z = r_i$

$$E\,\varepsilon_y = 2\,\frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

und

$$E\,\varepsilon_z = -\,0{,}6\,\frac{p_a r_a^2}{r_a - r_i^2};$$

am äußeren Rande, d. h. für $z = r_a$

$$E\,\varepsilon_y = \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(0{,}7 + 1{,}3\,\frac{r_i^2}{r_a^2}\right),$$

$$E\,\varepsilon_z = \frac{p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(0{,}7 - 1{,}3\,\frac{r_i^2}{r_a^2}\right).$$

Ist $r_i = 0$, d. h. wird die Scheibe ohne Bohrung ausgeführt, so wird wieder $\xi = 0$ für $z = 0$. Folglich wird nach Gleichung (9a) Seite 435

$$c_2 = 0$$

und die Gleichungen (11) ergeben

$$\sigma_y = \frac{m+1}{m-1}\frac{1}{\beta}c_1 = \sigma_z .$$

Da nun für $z = r_a$ $\sigma_z = p_a$ sein muß, so wird für jeden Punkt der Scheibe

$$\sigma_y = \sigma_z = p_a .$$

Die reduzierten Spannungen sind (Seite 476)

$$E\,\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_z = \left(1 - \frac{1}{m}\right)p_a = 0{,}7\,p_a ,$$

$$E\,\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{1}{m}\sigma_y = \left(1 - \frac{1}{m}\right)p_a = 0{,}7\,p_a .$$

Beanspruchung durch die Pressung p_i in der Nabe. Nach Seite 436 ist

$$E\,\varepsilon_y = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(0{,}7 + 1{,}3\frac{r_a^2}{z^2}\right),$$

$$E\,\varepsilon_z = \frac{p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(0{,}7 + 1{,}3\frac{r_a^2}{z^2}\right).$$

Die maßgebende Spannung tritt wieder am inneren Rande ($z = r_i$) auf.

Die Spannungen sind zu den aus den Gleichungen (10) bis (14) ermittelten algebraisch zu addieren. Über den Einfluß von Kranz und Nabe auf die Scheibe gleicher Dicke und die entsprechende Aufgabe für die Scheibe gleicher Festigkeit vgl. C. Bachs „Elastizität und Festigkeit“ und das Werk „Dampf- und Gasturbinen“ von Stodola.

XIX. Wärmespannungen.

Auf Seite 43 haben wir den Ausdehnungskoeffizienten α kennen gelernt und als Beispiel die Spannungen ermittelt, die in zwei Körpern entstehen, welche sich unter dem Einfluß der Wärme ausdehnen (Abb. 33). Jetzt soll ein Stab untersucht werden, der einseitig erwärmt wird.

An der Außenseite AB (Abb. 354) herrsche die Temperatur t_2, an der Innenseite CD die Temperatur $t_1 < t_2$. Der Temperaturverlauf durch die Dicke des Stabes folge der Kurve $a'c'$, die willkürlich angenommen sein mag. Das durch Strichelung hervorgehobene Stabteilchen II von der Länge l, der Breite b und der unendlich kleinen Dicke dx im Abstande x von der kälteren Begrenzungsfläche CD habe die Temperatur t. Die der Temperatur t entsprechende mögliche Verlängerung des Teiles II ist $l \cdot \alpha \cdot (t - t_1)$; die wirkliche durch die Kopplung aller Teile eintretende Verlängerung des ganzen Körpers sei Δl. Die mögliche

Verlängerung $l \cdot \alpha \cdot (t - t_1)$ wird demnach um den Betrag $l \cdot \alpha \cdot (t - t_1) - \Delta l$ zurückgedrückt. Dieser Zurückdrückung entspricht die Spannung

$$\sigma = -E \cdot [\alpha \cdot (t - t_1) - \varepsilon],$$

wenn wir $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ setzen oder

$$\sigma = E \cdot [\varepsilon - \alpha (t - t_1)]. \qquad \text{(I)}$$

In dieser Gleichung ist ε der von der Verlängerung Δl, $\alpha \cdot (t - t_1)$ der von der Wärme herrührende Betrag der Dehnung, der also in Abzug zu bringen ist.

Eine zweite Gleichung erhalten wir aus den Gleichgewichtsbedingungen, wenn wir nach dem Durchschneiden die Spannungen als äußere Kräfte anbringen. Das Gleichgewicht erfordert, daß die Summe sämtlicher Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null ist, wenn die Endflächen AC und BD des Stabes in senkrechter Richtung frei beweglich sind. Ist dF der Querschnitt des Stabteilchens von der Dicke dx, σ die auf 1 cm² bezogene Kraft, so kommt auf das Querschnittsteilchen eine Kraft von $\sigma \cdot dF$ kg. Für den ganzen Querschnitt erhält man

$$\int \sigma dF = 0 \qquad \text{(II)}$$

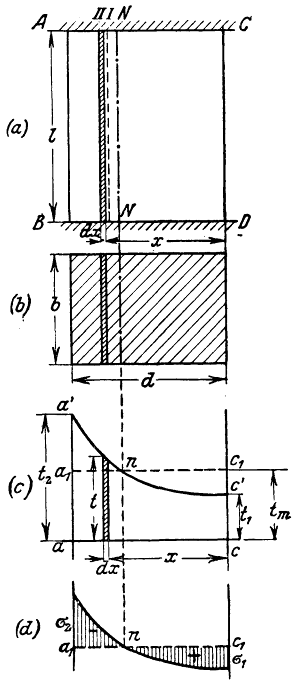


Abb. 354. Einseitig erwärmter Stab.

oder mit Benutzung der Gleichung (I)

$$E \cdot \int \left[\varepsilon - \alpha (t - t_1)\right] \cdot dF = 0,$$

$$\varepsilon \int dF - \alpha \int t \cdot dF + \alpha t_1 \int dF = 0,$$

wobei sich die Integrale über den ganzen Querschnitt erstrecken. Ist b die Breite des Stabes, so wird

$$dF = b \cdot dx,$$

also

$$\varepsilon \cdot b \cdot \int_0^d dx - \alpha \cdot b \cdot \int_0^d t \cdot dx + \alpha \cdot t_1 \cdot b \cdot \int_0^d dx = 0;$$

hierin ist d die Dicke des Stabes. Dividiert man durch b, so wird

$$\varepsilon \cdot d - \alpha \cdot \int t \cdot dx + \alpha \cdot t_1 \cdot d = 0,$$

oder

$$\varepsilon = \alpha \cdot \frac{1}{d} \int t \cdot dx - \alpha \cdot t_1.$$

Damit geht Gleichung (I) über in

$$\sigma = E \cdot \left\{\alpha \cdot \frac{1}{d} \int_0^d t \cdot dx - \alpha \cdot t\right\}.$$

$t \cdot dx$ ist ein Flächenstreifen im Temperaturschaubild (Abb. 354c) $\int\limits_{d} t \cdot dx$ ist der Inhalt der von der Temperaturlinie begrenzten Fläche. $\frac{1}{d}\int\limits_{0} t\,dx$ ist die Höhe eines flächengleichen Rechtecks über d als Grundlinie. Nennt man diese mittlere Höhe im Temperaturschaubild t_m, so ist

$$\sigma = E\,\alpha\,(t_m - t).$$

Ferner ist

$$\varepsilon = \alpha \cdot (t_m - t_1),$$

so daß sich für die Verlängerung $\Delta l = \varepsilon \cdot l$ des Stabes

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot (t_m - t_1)$$

ergibt.

Die größten auftretenden Spannungen sind die Randspannungen; man erhält für $t = t_2$, bzw. $t = t_1$

$$\sigma_2 = E \cdot \alpha \cdot (t_m - t_2) \quad \text{und} \quad \sigma_1 = E \cdot \alpha \cdot (t_m - t_1).$$

Wegen $t_2 > t_m$ wird σ_2 negativ, bedeutet also Druck, während σ_1 wegen $t_1 < t_m$ eine Zugspannung ist.

Für Flußeisen ist $E \cdot \alpha = 2150000 \cdot 0{,}000012 = 25{,}8$, so daß schon ein Temperaturunterschied von beispielsweise 50° C gegen t_m eine Spannung von rund 1300 kg/cm² hervorruft.

Man erhält aus dem Temperaturschaubild das Spannungsschaubild, wenn man die Spannungen von einer um t_m verschobenen Wagerechten $a_1 c_1$ aus abträgt (Abb. 354d).

Da die Aufgabe praktische Bedeutung hat, soll ein zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung von t_m angegeben werden, das überall angewendet werden kann, wo es sich um die Umwandlung einer beliebigen Fläche in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie handelt. Zerlege die von der Kurve $t = f(x)$ begrenzte Fläche in eine Anzahl senkrechter Streifen (Abb. 355) und verwandle diese Streifen nach Augenmaß in flächengleiche Rechtecke, projiziere die mittleren Höhen auf die Senkrechte aa' und verbinde die Schnittpunkte mit dem Pol O, der im Abstande $H = d$ auf der x-Achse angenommen wird. Ziehe nunmehr durch a die Gerade I parallel zur Geraden 1 innerhalb des ersten Streifens, durch den Endpunkt $II \parallel 2$ innerhalb des zweiten Streifens, durch den Endpunkt $III \parallel 3$ innerhalb des dritten Streifens usw.; die

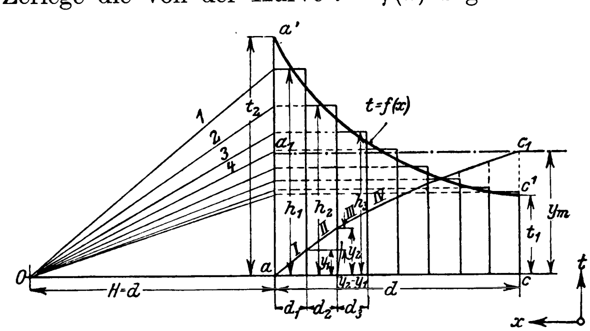


Abb. 355. Zeichnerische Integration.

letzte Parallele schneide auf cc' die Strecke $cc_1 = y_m = t_m$ ab; sie ist ein Maß für die Größe der von $t = f(x)$ begrenzten Fläche. Nach der Konstruktion sind die von I und 1 über d_1, bzw. $H = d$ liegenden rechtwinkligen Dreiecke ähnlich, folglich ist

$$h_1 : H = y_1 : d_1 \quad \text{oder} \quad h_1 \cdot d_1 = H \cdot y_1 .$$

Infolge $II \,\|\, 2$ ist das von 2, h_2 und H gebildete rechtwinklige Dreieck ähnlich dem von II, $y_2 - y_1$ und d_2 gebildeten; es ist also

$$\begin{aligned} h_2 : H = (y_2 - y_1) : d_2 \quad \text{oder} \quad h_2 \cdot d_2 &= H \cdot y_2 - H \cdot y_1, \\ h_2 \cdot d_2 + H \cdot y_1 &= H \cdot y_2, \\ h_2 \cdot d_2 + h_1 \cdot d_1 &= H \cdot y_2 . \end{aligned}$$

In gleicher Weise wird $h_3 \cdot d_3 + h_2 \cdot d_2 + h_1 d_1 = H \cdot y_3$ usw., so daß

$$h_1 d_1 + h_2 d_2 + h_3 d_3 + \ldots = H \cdot y_m$$

wird. Die linke Seite der Gleichung ist aber gleich dem Inhalt F' der von $t = f(x)$ begrenzten Fläche. Da die Polweite H gleich der Grundlinie d des gesuchten flächengleichen Rechtecks gemacht wurde, ist

$$H \cdot y_m = d \cdot y_m = F' \quad \text{und daraus} \quad y_m = \frac{F'}{d} = t_m .$$

Das Spannungsschaubild, Abb. 354d, zeigt im Punkte n die Spannung Null; das heißt, die Faserschicht NN (Abb. 354a) ist spannungslos. Sie ist um den Betrag $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot (t_m - t_1)$ verlängert und verhält sich wie ein von t_1 auf t_m erwärmter Stab, der sich frei ausdehnen kann.

Über die Art der Einspannung der Enden des Stabes braucht nur angenommen zu werden, sie solle so beschaffen sein, daß alle Fasern des Stabes gleiche Länge annehmen, und daß Längenänderungen möglich sind; andere Formänderungen sollen ausgeschlossen sein. Wir betrachten nunmehr den Stab unter der Voraussetzung, daß er ohne jede Einspannung sich selbst überlassen bleibe, denken ihn also beispielsweise auf eine heiße Platte gelegt. Jetzt werden die wärmeren Schichten ihrem natürlichen Bestreben folgen und eine größere Länge annehmen als die kälteren: der Stab wird sich krümmen, und zwar werden sich die Enden von der Platte abheben. Zur Bestimmung des die Krümmung oder Biegung hervorrufenden Momentes gehen wir von dem Spannungszustande des gezwungen gerade bleibenden Stabes der Abb. 354 aus, denken ihn quer zur Achse durchgeschnitten und bringen in der Schnittfläche Spannungen als äußere Kräfte an, welche den Spannungen des gerade bleibenden Stabes entgegengesetzt gerichtet sind. Auf jedes cm^2 des Querschnittes entfallen σ kg; auf den Flächenstreifen von der Dicke dx und der Breite b kommt eine Kraft von $b \cdot dx \cdot \sigma$ kg. Die Zugspannungen über e_2 (Abb. 356a) ergeben als Mittelkraft eine Zugkraft Z, die Druckspannungen über e_1 eine Druckkraft D. Da $B'D'$ die Spannungsfläche in zwei flächengleiche Teile teilt, wird $Z = D$; die beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar mit dem Moment

$$M = Z \cdot f = D \cdot f .$$

Da ferner $Z \cdot f = Z\,(a + f) - D \cdot a$ ist, so beziehen wir M auf den Punkt D' und erhalten als biegendes Moment

$$M = -\int_0^d b \cdot dx \cdot \sigma \cdot x = -b \int_0^d \sigma \cdot x \cdot dx = -b \cdot S.$$

$\sigma \cdot dx$ ist der durch Strichelung hervorgehobene Flächenstreifen (Abb. 356 a); $\sigma \cdot dx \cdot x$ sein statisches Moment, bezogen auf den Punkt D'; $\int \sigma \cdot dx \cdot x$ demnach die Summe der statischen Momente der Flächenteile, die

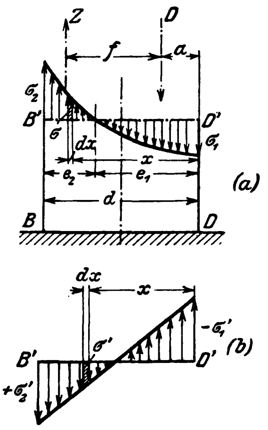


Abb. 356. Einseitig erwärmter Stab.

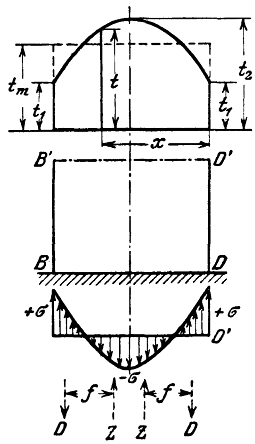


Abb. 357. Von beiden Seiten abgekühlter Stab.

aber gleich dem statischen Moment S der ganzen Fläche, bezogen auf D' als Drehpunkt, ist. Die Bedingung, daß keine Biegung auftritt, erfordert

$$M = -b \cdot \int_0^d \sigma \cdot x \cdot dx = -b \cdot S = 0 \text{ oder } S = 0;$$

sie ist z. B. bei dem Stabe der Abb. 357 erfüllt, der gleichzeitig von beiden Seiten abgekühlt wird und demzufolge den gezeichneten Temperatur- und Spannungsverlauf zeigt, wenn die Längenänderung aller Teile dieselbe ist. Die Gegenkräfte Z und D der als äußere Kräfte angebrachten Spannungen ergeben zwei gleich große, entgegengesetzte Momente $Z \cdot f$ bzw. $D \cdot f$, die sich aufheben, also keine Krümmung hervorrufen können, das statische Moment S der Spannungsfläche, bezogen auf D', ist gleich Null.

Wenn daher der Stab der Abb. 357 freie Ausdehnungsmöglichkeiten hat, so wird er sich nicht krümmen. Infolge der als äußere Kräfte an dem gerade bleibenden Stabe angebrachten Spannungen werden sich die Endflächen wölben und die inneren Spannungen des gerade bleibenden Stabes, welche von Querschnitt zu Querschnitt in gleicher Stärke übertragen werden, zum größten Teil aufgehoben werden. In einiger Entfernung von den Endquerschnitten werden sich aber nach dem Prinzip von de Saint-Venant (Seite 224) die infolge der äußeren Kräfte auftretenden Spannungen ausgeglichen haben, so daß die Querschnitte eben sind und die den Zustand des geraden Stabes herbeiführenden Spannungen in voller Höhe erhalten bleiben.

Wir wollen jetzt den einseitig erwärmten Stab der Abb. 354 untersuchen. Infolge des Momentes $Z \cdot f = b \cdot S$ werden in dem Stabe Biegungsspannungen auftreten, die den in Abb. 356b dargestellten Verlauf zeigen, wenn das Hookesche Gesetz zugrunde gelegt wird, der Stab also unterhalb der Proportionalitätsgrenze beansprucht wird. Wärmespannungen (Abb. 356a) und Biegungsspannungen (Abb. 356b) decken sich also nicht.

Sind σ' die Biegungsspannungen, so wird

$$M = b \int_0^d \sigma' \, dx \cdot x = b \cdot S'$$

das ihnen entsprechende Moment. Aus der Gleichheit der Momente folgt

$$S' = S;$$

d. h. die Spannungsfläche (Abb. 356b) ist so zu entwerfen, daß sie ein ebenso großes statisches Moment hat wie die Spannungsfläche Abb. 356a. Wie sich die Verhältnisse gestalten, soll an einem Beispiel gezeigt werden. Temperaturverlauf und demzufolge Wärmespannungsverlauf $D_1 B_2$ (Abb. 358) sei parabolisch angenommen; der Biegungsspannungsverlauf $D_3 B_3$ gerade. Der Scheitel der Parabel liege in D_1. Das statische Moment S der Wärmespannungsfläche $D' B' B_2 D_1$ ist gleich dem statischen Moment des Parabelabschnittes $D_1 B_1 B_2$ vermindert um das statische Moment des Rechtecks $D' B' B_1 D_1$, bezogen auf D':

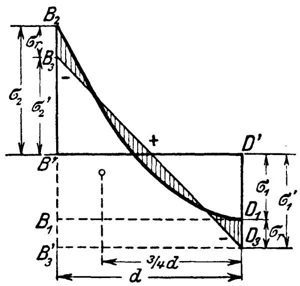


Abb. 358. Einseitig erwärmter Stab.

$$S = \frac{1}{3} d (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \frac{3}{4} d - \sigma_1 \cdot d \cdot \frac{d}{2}.$$

Da infolge der Parabel $\sigma_2 = 2\sigma_1$ ist, wird

$$S = \frac{1}{3} d \cdot 3\sigma_1 \cdot \frac{3}{4} d - \sigma_1 \cdot d \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma_1.$$

Das statische Moment der Biegungsspannungsfläche $D' B' B_3 D_3$ ist gleich dem statischen Moment des Dreiecks $D_3 B_3 B_3'$ vermindert um das statische Moment des Rechtecks $D' B' B_3' D_3$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (\sigma_1' + \sigma_2') \cdot \frac{2}{3} \cdot d - \sigma_1' \cdot d \cdot \frac{d}{2}.$$

Mit $\sigma_2' = \sigma_1'$ wird

$$S' = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 2\sigma_1' \cdot \frac{2}{3} d - \sigma_1' \cdot d \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{6} d^2 \cdot \sigma_1'.$$

$S' = S$ ergibt

$$\frac{1}{6} d^2 \cdot \sigma_1' = \frac{1}{4} d^2 \cdot \sigma_1 \quad \text{oder} \quad \sigma_1' = \frac{3}{2} \sigma_1 .$$

Soweit sich beide Spannungsflächen decken, heben sich die Spannungen bei der Krümmung auf; es bleibt die durch Strichelung hervorgehobene Fläche der Restspannungen σ_r übrig. Für diese Spannungen gilt das, was wir für die Spannungen des von beiden Seiten abgekühlten Stabes festgestellt haben. Vollkommen spannungslos wird der erwärmte Stab nur dann, wenn sich Wärmespannungsfläche und Biegungsspannungsfläche decken, und das setzt voraus, daß der Temperaturverlauf geradlinig erfolgt.

In Abb. 354 ist ein Stab untersucht worden, bei dem die Ausdehnung nur in einer Richtung erfolgt. Läßt sich diese Voraussetzung nicht mehr aufrecht erhalten, so ist der Körper als Scheibe anzusehen und demzufolge zu berechnen. Wir legen die x-Achse in Richtung der Länge l, die y-Achse in Richtung der Breite b und die z-Achse in Richtung der Dicke des Stabes. Die beiden Achsen der Scheibe seien x und y, die in diesen Richtungen auftretenden Spannungen σ_x und σ_y, denen die elastischen Dehnungen ε_x und ε_y entsprechen. Beim gleichzeitigen Auftreten beider Spannungen σ_x und σ_y (vgl. den zweiachsigen Spannungszustand Seite 50) sind die resultierenden Dehnungen

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y}{m} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_x}{m}$$

oder bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes

$$\varepsilon_1 \cdot E = \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 \cdot E = \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x .$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$\frac{m}{m-1} E (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \sigma_x + \sigma_y ,$$

die Multiplikation beider Gleichungen mit m ergibt

$$m \cdot E \cdot \varepsilon_1 = m \sigma_x - \sigma_y \quad \text{und} \quad m \cdot E \cdot \varepsilon_2 = m \sigma_y - \sigma_x .$$

Aus

$$\frac{m}{m-1} E (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \sigma_x + \sigma_y ,$$

$$m \cdot E \cdot \varepsilon_1 = m \sigma_x - \sigma_y$$

folgt durch Addition

$$(m+1) \cdot \sigma_x = m \cdot E \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1}\right) ,$$

$$\sigma_x = \frac{m}{m+1} \cdot E \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1}\right) .$$

Ersetzt man E durch $2 \frac{m+1}{m} \cdot G$, so erhält man

$$\sigma_x = 2 G \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_y = 2 G \left(\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1}\right)$$

als Hauptspannungen in den Richtungen x und y.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (I) sind unsere Dehnungen ε zu ersetzen durch $\varepsilon - \alpha \cdot (t - t_1)$, so daß sich als Hauptspannungen ergeben, wenn wir der einfacheren Schreibweise wegen die Temperaturerhöhung $t - t_1$ mit t bezeichnen,

$$\sigma_x = 2\,G\left[(\varepsilon_1 - \alpha\,t) + \frac{(\varepsilon_1 - \alpha t) + (\varepsilon_2 - \alpha t)}{m-1}\right],$$

$$\sigma_y = 2\,G\left[(\varepsilon_2 - \alpha\,t) + \frac{(\varepsilon_1 - \alpha t) + (\varepsilon_2 - \alpha t)}{m-1}\right].$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$\sigma_x = 2\,G\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1} - \frac{m+1}{m-1}\,\alpha t\right),$$

$$\sigma_y = 2\,G\left(\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1} - \frac{m+1}{m-1}\,\alpha t\right).$$

Beide Gleichungen enthalten vier Unbekannte σ_x, σ_y, ε_1 und ε_2; es sind also noch zwei Bedingungsgleichungen erforderlich, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben.

Legen wir einen Schnitt senkrecht zur x-Achse und bringen die Spannungen als äußere Kraft an, so muß Gleichgewicht herrschen. Ein Querschnittsteilchen von der Dicke dz überträgt, wenn b die Breite der Scheibe ist, $\sigma_x \cdot b \cdot dz$ kg. Da am abgetrennten Teil weiter keine Kräfte auftreten, verlangt die erste Gleichgewichtsbedingung, Summe sämtlicher Kräfte in Richtung X gleich Null

$$b \cdot \int_0^d \sigma_x \cdot dz = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^d \sigma_x \cdot dz = 0\,.$$

Ein Schnitt senkrecht zur y-Achse liefert

$$l \cdot \int_0^d \sigma_y \cdot dz = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^d \sigma_y \cdot dz = 0\,.$$

Ersetzt man σ_x durch den vorher gefundenen Wert und integriert aus, so erhält man

$$\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-1} - \frac{m+1}{m-1}\,\alpha \cdot \frac{1}{d}\int_0^d t \cdot dz = 0\,.$$

In gleicher Weise wie auf Seite 484 wird $\frac{1}{d}\int_0^d t \cdot dz = t_m$ und damit

$$\sigma_x = 2\,G \cdot \frac{m+1}{m-1}\,\alpha\,(t_m - t); \text{ bzw. } \sigma_y = 2\,G\,\frac{m+1}{m-1}\,\alpha\,(t_m - t)\,.$$

Hierbei ist t die Temperatur, t_m die mittlere Temperatur. Für die Randspannungen erhält man

$$\sigma_{x_2} = -\,2\,G\,\frac{m+1}{m-1}\,\alpha\,(t_2 - t_m) = \sigma_{y_2}$$

$$\sigma_{x_1} = +\,2\,G\,\frac{m+1}{m-1}\,\alpha\,(t_m - t_1) = \sigma_{y_1}\,.$$

Die Hauptspannungen sind in beiden Richtungen gleich groß.

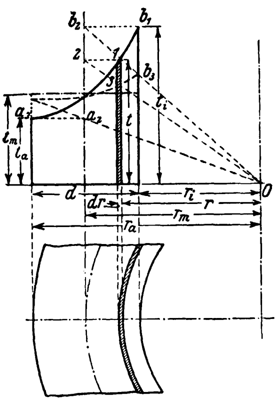


Abb. 359. Hohlzylinder.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Entwicklung, wenn die Scheibe zum Hohlzylinder wird, doch führt sie zu den gleichen Ergebnissen, wenn man

$$\int t dF = t_m \cdot F$$

setzt, wobei $dF = 2\pi r \cdot dr$ ein Querschnittsteilchen von der Dicke dr ist (Abb. 359). Mit r_i als innerem, r_a als äußeren Halbmesser, bzw. t_i und t_a als entsprechenden Manteltemperaturen erhält man

$$\sigma_{xi} = 2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_m - t_i);$$

$$\sigma_{xa} = 2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_m - t_a);$$

$$\sigma_{ti} = 2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_m - t_i); \qquad \sigma_{ta} = 2G\frac{m+1}{m-1}\alpha(t_m - t_a);$$

$$\sigma_{ri} = 0; \qquad \sigma_{ra} = 0.$$

σ_x ist die Hauptspannung in Richtung der Zylinderachse,
σ_t ist die Hauptspannung in tangentialer Richtung,
σ_r ist die Hauptspannung in radialer Richtung.

Die mittlere Temperatur t_m im Querschnitt bestimmt sich allerdings nicht so einfach wie bei den vorher behandelten Fällen. Ist das Temperaturschaubild bekannt, so ist $t \cdot dr$ ein Flächenstreifen, $t \cdot 2\pi r dr$ der von diesem Flächenstreifen bei der Drehung um die Zylinderachse beschriebene Hohlzylinder, $\int t \cdot dF = \int t \cdot 2\pi r dr$ der Inhalt des von dem Temperaturschaubilde beschriebenen Umdrehungskörpers. Der Ansatz

$$\int t dF = \int t \cdot 2\pi r \cdot dr = t_m \cdot F$$

besagt, der Inhalt des von dem Temperaturschaubilde beschriebenen Umdrehungskörpers soll gleich dem Inhalt eines Hohlzylinders sein, dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt des gegebenen Hohlzylinders ist, und dessen Höhe gleich der Temperatur t_m ist. t_m bestimmen heißt also, den vom Temperaturschaubilde beschriebenen Umdrehungskörper in einen raumgleichen Hohlzylinder mit derselben Grundfläche verwandeln. Nach der Guldinschen Regel ist der Inhalt eines Umdrehungskörpers gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Wege ihres Schwerpunktes. Ist d die Dicke der Wandung, so ist

$$t_m \cdot F = t_m \cdot d \cdot r_m \cdot 2\pi,$$

wenn mit r_m der mittlere Radius bezeichnet wird. Aus

$$t_m \cdot F = t_m \cdot d \cdot r_m \cdot 2\pi = \int t \cdot 2\pi r dr$$

ergibt sich
$$t_m = \frac{1}{d}\int t \cdot \frac{r}{r_m} \cdot dr = \frac{F'}{d}\,.$$

$t \cdot \frac{r}{r_m}$ ist die im Verhältnis $r : r_m$ geteilte Temperaturkoordinate t. Man erhält sie, indem man den Endpunkt 1 einer beliebigen Ordinate t auf die Senkreckte im Abstande r_m projiziert (2) und 2 mit O verbindet. Der Strahl O 2 schneidet die Ordinate t in 3. Führt man die Konstruktion für verschiedene Werte durch t, so liegen die Schnittpunkte 3 auf einer Kurve $a_3 b_3$, die die Fläche F' begrenzt. Dann ist t_m die Höhe eines Rechtecks über d als Grundlinie, dessen Inhalt gleich F' ist. Sie kann nach dem auf Seite 484 angegebenen Verfahren zeichnerisch oder durch Auszählen des Flächeninhaltes rechnerisch bestimmt werden für den Fall, daß auf Millimeterpapier gezeichnet wurde.

Welche gefährlich hohen Werte Wärmespannungen in Hohlzylindern annehmen können — beispielsweise beim Einfüllen heißer Flüssigkeiten in Gefäße — zeigt folgendes Zahlenbeispiel: Das Gefäß sei aus Flußeisen mit $G = 800\,000$ kg/cm² und $\alpha = 0{,}000011$; die Flüssigkeit habe eine Temperatur von 120° C, das Gefäß von 20° C, so daß im Augenblick des Einfüllens die Temperaturdifferenz rd. 100° C beträgt, die annähernd voll zur Geltung kommt, solange kein Temperaturausgleich stattgefunden hat, der Temperaturverlauf also ungefähr der Kurve ia (Abb. 360) folgt. Dann weicht t_m wenig von t_a ab. Als Hauptspannungen an der Innenwand erhält man

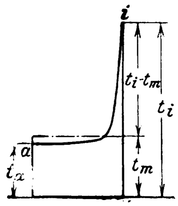


Abb. 360. Temperaturverlauf in einem mit heißer Flüssigkeit gefüllten Gefäß.

$$\sigma_{xi} = \sim 2 \cdot 800\,000 \cdot \frac{\frac{10}{3}+1}{\frac{10}{3}-1} \cdot 0{,}000\,011\,(-100) = \sim -3300\ \text{kg/cm}^2 = \sigma_{ti}\,.$$

Die Abb. 360 lehrt ferner, daß eine Verstärkung der Wandung keinen Zweck hat, da durch sie die mittlere Temperatur im Augenblick des Einfüllens, wo die hohe Temperatur nur wenig in die Wandung eindringt, fast gar nicht beeinflußt wird.

In gleicher Weise ungünstig ist eine plötzliche Abkühlung, wie Abb. 361 zeigt. Auch hier ist $t_m = cc_1$ angenähert gleich der Temperatur $t_2 = aa'$ zu setzen, so daß fast der volle Temperaturunterschied zur Geltung kommt.

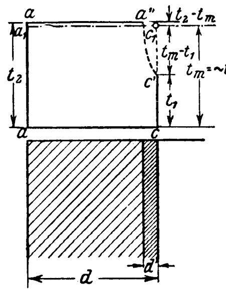


Abb. 361. Plötzliche Abkühlung.

Die Spannungen überschreiten die Streckgrenze. Wir gehen auf Abb. 33 zurück und nehmen an, daß die infolge der Erwärmung des Rohres auftretenden Spannungen die Streckgrenze überschreiten. Es findet über σ_s, bzw. ε_s hinaus zwar eine Formänderung statt, aber mit ihr ist keine Spannungserhöhung verbunden. Die Gesamtdehnungen ε_1 und ε_2 setzen sich aus zwei Teilen, den elastischen Dehnungen ε_{e_1} bzw. ε_{e_2}, welche den Elastizitätsgrenzen entsprechen, und den bleibenden Dehnungen ε_{b_1} bzw. ε_{b_2} zusammen. Schneiden wir den Bolzen durch, so wird er zunächst um den Betrag der elastischen Verlängerung, d. h. um $\varepsilon_{e_1} \cdot l$ klaffen; gleichzeitig schnellt aber auch das Rohr, das ja nun nicht mehr an der Ausdehnung gehindert ist, um den Betrag $\varepsilon_{e_2} \cdot l$ zurück, so daß der Schnitt durch den Bolzen um $(\varepsilon_{e_1} + \varepsilon_{e_2}) \cdot l$ klafft. Jetzt werde angenommen, daß sich das Rohr von t_2 auf t_1 abkühlt; dann erstrebt es die Verkürzung $\alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1)$. Daran wird es nicht gehindert, solange der Bolzen klafft. Die Verkürzung $(\varepsilon_{e_1} + \varepsilon_{e_2}) \cdot l$ geht spannungslos vor sich; der Dehnung $\varepsilon_{e_1} + \varepsilon_{e_2}$ entspricht keine Spannung. Erst nachdem sich die Schnittflächen des Bolzens berührt haben, entstehen in beiden Teilen Spannungen, und zwar wird von nun an der Bolzen gedrückt und das Rohr gezogen. Die Verhältnisse liegen jetzt so, wie bei der Betrachtung auf Seite 44. Die damals aufgestellte Gleichung

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha\,(t_2 - t_1)$$

geht in dem vorliegenden Falle über in

$$\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_{b_2} = \alpha\,(t_2 - t_1) - (\varepsilon_{e_1} + \varepsilon_{e_2}).$$

Gleiche Querschnitte und derselbe Baustoff vorausgesetzt, erhalten wir

$$\varepsilon_{b_1} = \varepsilon_{b_2} = \varepsilon_b \quad \text{und} \quad \varepsilon_{e_1} = \varepsilon_{e_2} = \varepsilon_e\,,$$

$$2\,\varepsilon_b = \alpha\,(t_2 - t_1) - 2\,\varepsilon_e,$$

$$\varepsilon_b = \frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} - \varepsilon_e\,.$$

Angenähert dürfen wir ε_e durch ε_s, das der Streckgrenze entspricht, ersetzen. Damit wird

$$\varepsilon_b = \frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} - \varepsilon_s\,,$$

dem eine Spannung

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_b = E\left[\frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} - \varepsilon_s\right]$$

entsprechen würde. Ist $\frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} < \varepsilon_s$, so bleiben bei einer Rückkühlung von t_2 auf t_1 keine Spannungen; ist aber $\frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} > \varepsilon_s$, und das ist der Fall, wenn beim Erwärmen die Streckgrenze überschritten wurde, so verschwinden die Spannungen bei der Rückkühlung **nicht**, sie ändern nur ihre Richtung. Ihre Größe ist allerdings wesentlich kleiner, da an die Stelle der Dehnung $\frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2}$ nunmehr $\frac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} - \varepsilon_s$ tritt. Wechseln Erwärmung und Abkühlung ab, so wechseln auch die Spannungen ihre Größe und Richtung. Diese Art der Beanspruchung ist für den in Frage kommenden Bau- oder Maschinenteil besonders gefährlich, da ein Bruch eintreten kann, ohne daß die Bruchfestigkeit des Baustoffes überschritten wird (vgl. Seite 17).

Sie ist um so gefährlicher, je plötzlicher der Wechsel eintritt, denn der plötzliche Spannungswechsel ist von ähnlicher Wirkung wie ein Schlag.

Die Eigenspannungen lassen sich durch Belastungsversuche nicht feststellen. Höchstens könnte der Versuch ergeben, daß die Elastizitätsgrenze früher erreicht wird, wenn Eigenspannungen vorhanden sind, als wenn es sich um einen spannungsfreien Körper handelt. Soll der Versuch über die Größe der Eigenspannungen Auskunft geben, so müßte er sich an das von uns auf Seite 492 angewandte Verfahren anlehnen. Der Bolzen (Abb. 33) klaffte, als wir ihn durchschnitten. Dieser meßbaren elastischen Längenänderung entspricht die gesuchte Spannung. Um also nachträglich festzustellen, ob ein Körper, z. B. ein Kesselblech, Eigenspannungen hatte, wird man den Zusammenhang ganz oder auch teilweise durch Schnitte lösen und die dabei entstehenden Formänderungen messen. Aus den gemessenen Formänderungen errechnet man nach dem Hookeschen Gesetz die Spannungen[1]).

Es bliebe noch zu untersuchen, welche Art von Spannungen auftreten, wenn zwei miteinander fest verbundene Stabteile von einer hohen Temperatur, die bleibende oder plastische Formänderungen zur Folge hat, verschieden schnell auf die gewöhnliche Temperatur abkühlen, wie es beispielsweise bei der Abkühlung von Guß- und Schmiedestücken der Fall ist. Wir denken uns eine Kugel aus flüssigem Eisen in der Form und nehmen an, daß die Materialschichten wie die Schalen einer Zwiebel konzentrisch um den Mittelpunkt liegen. Die äußere Schale (*I*) wird schneller abkühlen als die folgende (*II*). Da die Dehnungen den Temperaturen verhältnisgleich sind, so erhalten wir die Dehnung-Zeit-Linien (Abb. 362), wenn wir die Temperaturen als Ordinaten über der Zeit als Abszisse auftragen. Zu Beginn der Abkühlung haben beide Schalen gleiche Dehnung, die ε_I-Linie wird sich wegen der größeren Kühlgeschwindigkeit steiler senken als die ε_{II}-Linie, also ε_{II} stets größer sein als ε_I. Infolge des innigen Zusammenhanges beider Schalen kann keine die ihrer Dehnung entsprechende Formänderung annehmen, sie müssen sich auf eine mittlere Dehnung ε_m einigen. Im Augenblick des Erstarrens vergrößert zwar die äußere Schale ihr Volumen, bleibt aber so lange spannungslos, wie sie sich im Gebiete der plastischen Formänderungen befindet. Erstarrt die zweite Schale, so vergrößert auch sie ihr Volumen, doch ruft diese Volumenänderung auch keine Spannungen in der Schale *I* hervor, da diese nur plastischer Formänderungen fähig ist. Wesentlich anders werden aber die Verhältnisse, wenn die äußere Schale bei fortschrei-

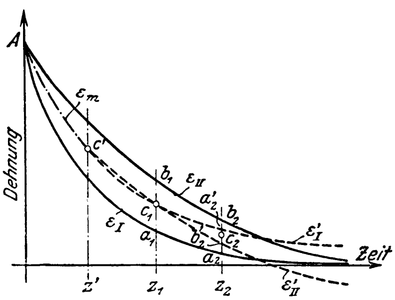


Abb. 362. Abkühlung einer Kugel.

---

[1]) Vgl. Martens-Heyn: Materialienkunde für den Maschinenbau, II A, S. 340. Berlin: Julius Springer.

tender Abkühlung in das Gebiet der elastischen Formänderungen gelangt. Von jetzt an würde eine geringe Formänderung von beachtlichen Spannungen begleitet sein. Während sich bisher beide Schalen auf eine mittlere Dehnung ε_m geeinigt hatten, ohne daß Spannungen auftreten, wird nunmehr die äußere Schale Zugspannungen erhalten, da sich die ε_m-Linie der ε_I-Linie zwar nähern würde, sie jedoch nicht ganz erreichen kann. Es bleibt ein geringer Dehnungsunterschied, der mit allerdings geringen Spannungen verbunden ist. Dieser Zustand dauert so lange, bis auch die zweite Schale in das Gebiet der elastischen Formänderungen gebracht ist. Abgesehen von dem Zwischenzustande, wo sich Schale I elastisch, Schale II plastisch ändert, dürfen wir sagen, zur Zeit z' haben sich beide Schalen fast spannungslos auf die mittlere Dehnung ε_m (Punkt c' der Abb. 362) geeinigt. Diesem Punkte c' kommt die gleiche Bedeutung zu wie dem Punkt A zu Beginn der Abkühlung; beide Schalen folgen von c' aus dem ihnen eignen Gesetz der Abkühlung, so daß die Dehnungslinien $\varepsilon_I' \parallel \varepsilon_I$ und $\varepsilon_{II}' \parallel \varepsilon_{II}$ verlaufen. Dabei hätten wir zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Die Abkühlungsgeschwindigkeit der Schale II ist größer als die der Schale I, d. h. auf die Dehnungen bezogen, die ε_I-Linie verläuft steiler als die ε_{II}-Linie, dann würden die ihnen parallelen ε'-Linien klaffen, und die Kopplung ruft außen Zug-, innen Druckspannungen hervor. 2. Allmählich wird die ε_I-Linie und damit die ε_I'-Linie flacher, dann schneiden sich ε_I' und ε_{II}' (Punkt c_1), und verlaufen von da an so, daß die ε_I'-Linie über der ε_{II}'-Linie liegt. Infolge der festen Kopplung erfährt Schale II eine elastische Verlängerung b_2c_2, Schale II eine elastische Verkürzung a_2c_2, denn beide müssen sich auf eine mittlere Dehnung (Punkt c_2) einigen. Es entstehen also außen Druck-, innen Zugspannungen, und dieser Zustand bleibt, denn die den Temperaturen verhältnisgleichen Dehnungen ε_I und ε_{II} nähern sich der Zeitachse asymptotisch und die parallele ε_I'-Linie wird über, die parallele ε_{II}'-Linie unterhalb der Zeitachse liegen. Für unsere Kugel wird sich ein Endzustand einstellen, bei dem die Verteilung der tangentialen Spannungen über einen Äquatorschnitt der Kurve *aia* folgt (Abb. 363); σ_{ta} sind Druck-, σ_{ti} Zugspannungen. Die Gleichgewichtslage erfordert wegen des Fehlens äußerer Kräfte

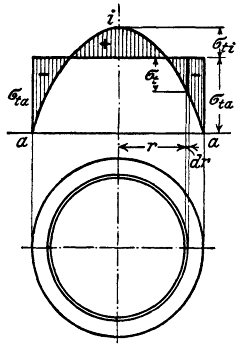


Abb. 363. Abkühlung einer Kugel.

$$\int \sigma_t \cdot dF = 0.$$

Über die Größe der Spannungen läßt sich nichts Sicheres aussagen. Außer den maßgebenden tangentialen Spannungen treten noch radiale Spannungen σ_r auf, und zwar herrschen innerhalb der tangentialen Zugzone radiale Druckspannungen. Auch sie bilden unter sich ein Gleichgewichtssystem.

Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der für Ingenieure und Physiker wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einschließlich der Näherungsverfahren und mechanischen Hilfsmittel. Mit besonderen Abschnitten über Variationsrechnung und Integralgleichungen. Von Prof. Dr. **Wilhelm Hort,** Oberingenieur der AEG-Turbinenfabrik, Berlin. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage unter Mitwirkung von Dr. phil. **W. Birnbaum** und Dr.-Ing. **K. Lachmann.** Mit 308 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. XII, 700 Seiten. 1925.
Gebunden RM 25.50

Der praktische Maschinenbauer. Ein Lehrbuch für Lehrlinge und Gehilfen, ein Nachschlagebuch für den Meister. Herausgegeben von Dipl.-Ing. **H. Winkel.**

Erster Band: **Werkstattausbildung.** Von August Laufer, Meister der Württembergischen Staatseisenbahn. Mit 110 Textfiguren. VI, 208 Seiten. 1921. Gebunden RM 6.—

Zweiter Band: **Die wissenschaftliche Ausbildung.**

1. Teil: Mathematik und Naturwissenschaft. Bearbeitet von R. Kramm, K. Ruegg und H. Winkel. Mit 369 Textfiguren. VIII, 380 Seiten. 1923. Gebunden RM 7.—

2. Teil: Fachzeichnen, Maschinenteile, Technologie. Bearbeitet von W. Bender, H. Frey, K. Gotthold und H. Guttwein. Mit 887 Textfiguren. IX, 411 Seiten. 1923. Gebunden RM 8.—

Dritter Band: **Maschinenlehre.** Kraftmaschinen, Elektrotechnik, Werkstatt-Förderwesen. Bearbeitet von H. Frey, W. Gruhl und R. Hänchen. Mit 390 Textabbildungen. VIII, 316 Seiten. 1925.
Gebunden RM 12.—

Festigkeit und Formänderung. Von Dipl.-Ing. **H. Winkel †.** Mit 67 Textfiguren. (Werkstattbücher, Heft 20.) 68 Seiten. 1925. RM 1.80

Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von Prof. Dr.-Ing. **C. Bach** und Prof. **R. Baumann,** Stuttgart. Neunte, vermehrte Auflage. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 2 Buchdrucktafeln und 25 Tafeln in Lichtdruck. XXVIII, 687 Seiten. 1924. Gebunden RM 24.—

Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien. Von Prof. Dr.-Ing. **C. Bach** und Prof. **R. Baumann,** Stuttgart. Zweite, stark vermehrte Auflage. Mit 936 Figuren. IV, 190 Seiten. 1921. Gebunden RM 15.—

Einführung in die Festigkeitslehre nebst Aufgaben aus dem Maschinenbau und der Baukonstruktion. Ein Lehrbuch für Maschinenbauschulen und andere technische Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht und für die Praxis. Von Ingenieur **Ernst Wehnert,** Leipzig. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 247 Textfiguren. X, 268 Seiten. 1910. Unveränderter Neudruck. 1921. RM 6.—

Die Lehre von der zusammengesetzten Festigkeit nebst Aufgaben aus dem Gebiete des Maschinenbaues und der Baukonstruktion. Ein Lehrbuch für Maschinenbauschulen und andere technische Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und für die Praxis. Von Ingenieur **Ernst Wehnert,** Leipzig. Mit 142 Textfiguren. VIII, 224 Seiten. 1908. Unveränderter Neudruck. 1920. Gebunden RM 7.—