

М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ  
И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено  
Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебника для высших технических  
учебных заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1959

*Филоменко-Бородич Михаил Митрофанович.*

Теория упругости.

Редактор *И. К. Снитко.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*

Корректор *Т. С. Плетнева.*

---

Сдано в набор 10/II 1959 г. Подписано к печати 11/V 1959 г. Бумага 60×92/16.  
Физ. печ. л. 22,75. Условн. печ. л. 22,75. Уч.-изд. л. 21,22. Тираж 13 000 экз. Т-00993.  
Цена 7 р. 35 к. Заказ № 126.

---

Государственное издательство физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию . . . . .	7
Введение . . . . .	9
<b>Глава I. Теория напряжений . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1. Напряженное состояние тела . . . . .	13
§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	16
§ 3. Напряжения на площадках, наклоненных к координатным плоскостям. Условия на поверхности . . . . .	22
§ 4. Исследование напряженного состояния в данной точке тела. Главные площадки и главные напряжения . . . . .	24
§ 5. Распределение напряжений в данной точке. Поверхность напряжений Коши; инварианты тензора напряжений. Эл- липсоид Ламе . . . . .	27
§ 6. Наибольшие касательные напряжения . . . . .	33
* § 7. Октаэдрические площадки и октаэдрические напряже- ния . . . . .	36
* § 8. Шаровой тензор и девиатор напряжений . . . . .	37
§ 9. Обобщение закона взаимности напряжений. Примеры . . . .	40
<b>Глава II. Геометрическая теория деформаций . . . . .</b>	<b>42</b>
§ 10. Компоненты перемещения и компоненты деформации. За- висимость между ними . . . . .	42
§ 11. Уравнения неразрывности деформаций . . . . .	49
* § 12. Тензорный характер деформации тела в данной точке . . . .	54
* § 13. Объемная деформация. Инварианты тензора деформации.	59
* § 14. Девиатор деформации и его инварианты . . . . .	60
* § 15. Конечная деформация . . . . .	63
<b>Глава III. Обобщенный закон Гука . . . . .</b>	<b>67</b>
§ 16. Общие соображения . . . . .	67
§ 17. Выражение деформаций через напряжения . . . . .	70
§ 18. Выражение напряжений через деформации . . . . .	72
* § 19. Работа упругих сил в твердом теле . . . . .	76

* § 20. Потенциал упругих сил . . . . .	77
* § 21. Форма зависимостей между напряжениями и деформациями; гипотеза о естественном состоянии тела . . . . .	78
* § 22. Упругие постоянные; сокращение числа их при существовании потенциала упругих сил . . . . .	82
* § 23. Изотропное тело . . . . .	83
<b>Глава IV. Решение задачи теории упругости в перемещениях</b> . . . . .	<b>89</b>
§ 24. Сводка основных уравнений теории упругости . . . . .	89
§ 25. Уравнения Ламе . . . . .	91
§ 26. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде . . . . .	95
§ 27. Общее решение уравнения колебаний . . . . .	99
§ 28. Продольные колебания стержня. Метод Фурье . . . . .	101
<b>Глава V. Решение задачи теории упругости в напряжениях</b> . . . . .	<b>106</b>
§ 29. Простейшие задачи . . . . .	106
§ 30. Кручение круглого стержня . . . . .	107
§ 31. Принцип Сен-Венана . . . . .	109
§ 32. Окончание задачи о кручении круглого стержня . . . . .	113
§ 33. Чистый изгиб призматического стержня . . . . .	116
§ 34. Растяжение призмы под действием собственного веса . . . . .	122
§ 35. Однозначность решения уравнений теории упругости. . . . .	125
§ 36. Уравнения Бельтрами — Мичелла . . . . .	128
* § 37. Три рода задач теории упругости. Теорема единственности . . . . .	131
<b>Глава VI. Плоская задача в декартовых координатах</b> . . . . .	<b>136</b>
§ 38. Плоская деформация . . . . .	136
§ 39. Обобщенное плоское напряженное состояние. Уравнения М. Леви. Функция напряжений . . . . .	140
§ 40. Решение плоской задачи в полиномах . . . . .	150
§ 41. Изгиб консоли . . . . .	151
§ 42. Балка на двух опорах . . . . .	158
§ 43. Треугольная и прямоугольная подпорные стенки (решения М. Леви) . . . . .	164
§ 44. Изгиб прямоугольной полосы; решения Файлона и Рибьера . . . . .	166
* § 45. Об одном видоизменении метода Файлона . . . . .	174
* § 46. Полоса бесконечной длины . . . . .	180
<b>Глава VII. Плоская задача в полярных координатах</b> . . . . .	<b>184</b>
§ 47. Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах . . . . .	184
§ 48. Задачи, в которых напряжения не зависят от полярного угла . . . . .	189

§ 49. Действие сосредоточенной силы (задача Фламана — Буссинеска) . . . . .	194
§ 50. Клин, нагруженный в вершине . . . . .	199
* § 51. Общее решение плоской задачи в полярных координатах . . . . .	204
<b>Глава VIII. Кручение призматических стержней и изгиб . . . . .</b>	<b>212</b>
§ 52. Кручение призматических стержней . . . . .	212
§ 53. Метод Сен-Венана. Частные случаи . . . . .	219
§ 54. Решение задачи о кручении в напряжениях. Аналогия Прандтля . . . . .	230
§ 55. Случай поперечного изгиба . . . . .	237
<b>* Глава IX. Более общие методы решения задач теории упругости . . . . .</b>	<b>243</b>
§ 56. Общее решение дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях. Функции напряжений . . . . .	243
§ 57. Уравнения равновесия в цилиндрических координатах. Общее решение их . . . . .	248
§ 58. О функциях гармонических и бигармонических . . . . .	250
§ 59. Бигармоническое уравнение . . . . .	255
§ 60. Приведение уравнений Ламе и Бельтрами к бигармоническим уравнениям . . . . .	259
§ 61. Метод Буссинеска; приложение гармонических функций к разысканию частных решений уравнений Ламе . . . . .	261
§ 62. Действие нагрузки на среду, ограниченную плоскостью (задача Буссинеска) . . . . .	267
§ 63. Действие нормальной к границе сосредоточенной силы, приложенной в начале координат . . . . .	270
§ 64. Решение плоской задачи теории упругости в функциях комплексной переменной . . . . .	277
§ 65. Метод Л. Файлона . . . . .	279
§ 66. О волновых уравнениях . . . . .	286
§ 67. Некоторые частные решения волнового уравнения . . . . .	289
<b>Глава X. Изгиб пластинки . . . . .</b>	<b>293</b>
§ 68. Общие замечания . . . . .	293
§ 69. Основные уравнения изгиба и кручения пластинки . . . . .	294
§ 70. Исследование полученных результатов . . . . .	298
§ 71. Граничные условия пластинки . . . . .	303
§ 72. Эллиптическая пластинка, закрепленная по контуру . . . . .	306
§ 73. Прямоугольная пластинка. Решение Навье . . . . .	308
§ 74. Прямоугольная пластинка. Решение М. Леви . . . . .	313
§ 75. Круглая пластинка . . . . .	318
§ 76. Аналогия с мембраной. Метод Маркуса . . . . .	321

* Глава XI. Вариационные методы теории упругости . . . . .	324
§ 77. Вариационные принципы теории упругости. Исходное интегральное тождество . . . . .	324
§ 78. Вариационное уравнение Лагранжа . . . . .	326
§ 79. Метод Ритца — Тимошенко . . . . .	332
§ 80. Вариационное уравнение Кастильяно . . . . .	338
§ 81. Приложение вариационного уравнения Кастильяно к задаче о кручении призматического бруса . . . . .	342
§ 82. Первая задача теории упругости; вторая теорема о минимуме энергии . . . . .	346
§ 83. Приближенный метод, основанный на вариационном уравнении (11.61) . . . . .	348
§ 84. Задача Ламе для упругой прямоугольной призмы . . . . .	351
Именной указатель . . . . .	359
Предметный указатель . . . . .	361

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к настоящему изданию книга подверглась значительной переработке, однако круг читателей, на который она была рассчитана, с точки зрения автора, остается прежним: это студенты вузов и инженеры, которые в связи с быстрым развитием техники вынуждены осваивать все более и более сложные методы расчетов на прочность; в связи с этим объем вопросов, интересующих читателей, возрос за последние десять лет, прошедших после выхода книги в предыдущем издании. Учитывая сказанное, автор счел необходимым значительно пополнить некоторые главы и отдельные параграфы, а также добавить новую, XI главу, посвященную вариационным методам решения задачи теории упругости. Одновременно с этим, во избежание значительного увеличения объема книги, изложение во многих местах было несколько сокращено путем изменения порядка или метода трактовки вопросов с тем однако, чтобы не затруднять, по возможности, читателя.

Более или менее значительные дополнения сделаны в главах I и II, посвященных теориям напряжений и деформаций, в § 31 главы V (принцип Сен-Венана), в главе VI о плоской задаче (§§ 45 и 46) и, наконец, в главе IX (§§ 56 и 57 о функциях напряжений). Некоторые сокращения удалось сделать в §§ 33 и 34 главы V, посвященных чистому изгибу и растяжению призмы, а также в главе X при выводе основных зависимостей в теории изгиба пластинок.

В новой, одиннадцатой главе, вывод вариационных уравнений основан на формальном интегральном тождестве, которое является обобщением тождества, применяемого обычно для доказательства теоремы единственности Кирхгофа; это позволило несколько сократить ход рассуждений, не уменьшая общности окончательных результатов. К недостаткам принятого метода изложения можно отнести

его формальность (что свойственно и доказательству теоремы Кирхгофа), а также невозможность получить дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия из начала возможных перемещений, являющегося общим принципом статики. Однако автору кажется, что этот вывод имел существенное значение в XIX веке, когда теория упругости должна была доказывать свое право на существование в процессе острых дискуссий по вопросу о физической обоснованности ее; сегодня это едва ли представляется необходимым.

Цель книги, по мнению автора, остается прежней: помочь читателю, интересующемуся главным образом техническими приложениями теории упругости, освоить методы этой дисциплины и показать ее применение на более простых, практически важных задачах, не углубляясь в некоторые тонкости современного математического аппарата и не перегружая книгу теми результатами, с которыми можно познакомиться по современной богатой литературе.

Читатель, впервые изучающий предмет, может облегчить себе работу, опуская главы, параграфы и части их, отмеченные звездочкой, как это было сделано и в предыдущем издании.

Январь 1959 г.

Москва



## ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости сформировалась, как один из важных разделов математической физики в первой половине XIX века. До этого времени трудами ученых XVII и XVIII веков — Галилея, Мариотта, Гука, Бернулли, Эйлера, Кулона и других — была довольно детально разработана теория изгиба тонких упругих стержней. В начале XIX века Лагранжем и Софи Жермен было дано решение задачи об изгибе и колебаниях тонких упругих пластинок. Некоторые особенности таких тонких упругих тел позволили значительно упростить постановку и самое решение задач о деформировании под действием внешних сил, не вникая особенно глубоко в существо явлений, происходящих в материале. Начало XIX века ознаменовалось огромными успехами математического анализа, обусловленными отчасти множеством важных задач, возникших в физике, потребовавших применения сложного математического аппарата и дальнейшего развития его; это и послужило основой для возникновения особого направления в физике, названного *математической физикой*. Среди множества проблем, вставших перед этой молодой дисциплиной, необходимо отметить потребность в глубоком исследовании свойств упругих материалов и в построении математической теории, позволяющей возможно полно изучать внутренние силы, возникающие в упругом теле под действием внешних сил, а также деформацию тела, т. е. изменение формы его. Этого рода исследования оказались крайне необходимыми также для удовлетворения запросов быстро развивавшейся техники в связи со строительством железных дорог и машиностроением; запросы эти вызывались необходимостью создать теоретические методы расчета частей сооружений и машин на прочность. Уже в 1825 г. крупный французский инженер и ученый Навье выпустил «Курс лекций по сопротивлению материалов», основанный на имевшихся к тому времени экспериментальных данных и приближенных теориях, указанных нами выше. В России аналогичный курс Н. Ф. Ястржембского появился в 1837 г.

Приоритет в создании основ теории упругости принадлежит французским математикам и механикам Коши, Навье и Пуассону, получившим основные дифференциальные уравнения этой теории. Нельзя не отметить, что при разработке ее встретились большая

принципиальная трудность. Дело в том, что математический анализ того времени был построен на понятии непрерывного геометрического пространства, в котором можно рассматривать бесконечно малые отрезки и на этой основе ввести процессы дифференцирования и интегрирования; между тем общепринятая ньютоновская молекулярная теория строения тел представляла их как дискретные среды, состоящие из отдельных частиц, связанных между собой силами взаимного притяжения и отталкивания; оказалось весьма трудным обосновать применимость к таким средам аппарата математического анализа, который был существенно связан с понятием о непрерывных функциях, способных получать как угодно малые (т. е. бесконечно малые) приращения, и с возможностью перехода к пределу при суммировании их, т. е. при интегрировании. Вследствие этого первые работы по математической теории упругости вызывали большие дискуссии, и обоснованность их подвергалась сомнениям. Однако то обстоятельство, что даже в чрезвычайно малом объеме, мысленно выделенном из тела, содержится огромное количество молекул, наводило исследователей на мысль привлечь закон больших чисел и применить тот метод, который в дальнейшем получил название статистического; это позволило перекинуть мост между непрерывным пространством математического анализа и твердым телом, как дискретной средой; мощный аппарат математики стало возможным применить к созданию новой отрасли физики.

Важность приложений теории упругости в физике и технике и выяснившаяся большая трудность поставленных задач с точки зрения математического анализа привлекли к этой новой отрасли наук внимание крупнейших исследователей XIX и XX веков. Помимо названных выше основателей теории упругости Коши, Навье и Пуассона, здесь можно назвать таких выдающихся ученых, как М. В. Остроградский, Ламе (выпустивший в 1852 г. первый курс лекций по теории упругости), Клапейрон, Сен-Венан, Грин, Максвелл, В. Томсон (лорд Кельвин), Релей, Мичелл, Матье, Ф. С. Ясинский, С. П. Тимошенко, Г. В. Колосов, Н. И. Мухелишвили и многие другие. Читателей, желающих ознакомиться с историей возникновения и развития теории упругости, отсылаем к обстоятельному очерку, помещенному во введении к книге А. Лява «Математическая теория упругости» (ОНТИ, Москва, 1935 г.), а также к книге С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов» (Гостехиздат, 1957).

При изложении статки в теоретической механике указывается, что в условия равновесия тела или системы тел *внутренние силы* не входят, так как они попарно взаимно уравновешиваются на основании третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия. Теория упругости ставит перед собой задачу определения внутренних сил в твердом теле. Силы эти выражают взаимодействие

молекул между собой, обеспечивают существование твердого тела, как такового, его *прочность*. Они действуют и тогда, когда к телу не приложено никаких *внешних сил*; эти силы сами по себе не являются предметом изучения в теории упругости; при действии внешних сил на тело оно деформируется, изменяется взаимное расположение молекул, изменяются расстояния между ними; вследствие этого возникают дополнительные внутренние силы, как результат действия внешних сил, вызвавших деформацию. Статика оперирует с внешними силами, приложенными к телу; поэтому прежде всего встает задача о переводе интересующих нас внутренних сил в категорию сил внешних. Это осуществляется так называемым *методом сечения*, состоящим в следующем (рис. 1).

Мысленно рассежем тело на две части при помощи плоскости \*); эта плоскость пересечет линии сил взаимодействия молекул, находящихся по разные стороны от нее. Если опять-таки мысленно удалим одну из частей тела, например *B*, то система сил взаимодействия, приложенных к молекулам части *A*, находящимся вблизи плоскости сечения, окажется неуравновешенной. Однако оставшаяся часть *A* находится в равновесии; значит,

обнаруженная методом сечения системы внутренних сил, перешедшая теперь в категорию сил, внешних по отношению к части *A*, должна быть уравновешена системой остальных внешних сил  $P_1, P_2, \dots$ , действующих на эту часть тела.

Выделим теперь в плоскости сечения элементарную площадку  $\Delta F$ , весьма малую по сравнению с размерами сечения, но весьма большую по сравнению с расстояниями между отдельными молекулами тела; эту площадку пересекает большое число линий действия обнаруженных внутренних сил, приложенных к молекулам части *A* и выражающих действие удаленной части *B*. Обозначим через  $\Delta P$  главный вектор этих сил; отношение

$$\frac{\Delta P}{\Delta F}$$

называют *средним напряжением* внутренних сил в теле на площадке  $\Delta F$ . Чтобы применить в дальнейшем аппарат математического анализа, будем стягивать контур площадки  $\Delta F$  вокруг какой-либо точки ее *M*; тогда площадь ее  $\Delta F$  и главный вектор сил будут беспрдельно уменьшаться; предел отношения

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = p$$

\*) Вместо плоскости часто берется кривая поверхность.

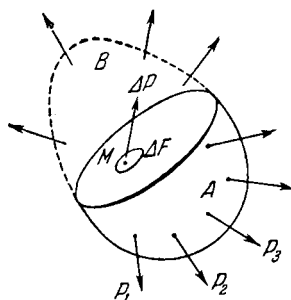


Рис. 1.

называют *напряжением внутренних сил* или просто *напряжением в точке  $M$  тела на площадке, лежащей в плоскости сделанного сечения*. Понятие о напряжении в теории упругости является основной мерой интенсивности внутренних сил, обнаруживаемых методом сечения. Напряжение характеризуется своей величиной, имеющей размерность [сила/длина<sup>2</sup>], направлением и положением, т. е. имеет векторный характер; поэтому оно изображается в виде вектора  $\mathbf{p}$ , приложенного в той точке  $M$ , которой оно соответствует. Вектору  $\mathbf{p}$  присваивается название *полного напряжения*, в отличие от составляющих, на которые он может быть разложен. Основными свойствами напряжений мы займемся далее, в первой главе.

Проделанный выше переход от среднего напряжения по площадке к напряжению в точке связан с воображаемым процессом уменьшения размеров площадки  $\Delta F$  до нуля, необходимым для применения анализа бесконечно малых. Законность и обоснованность такого формального процесса, как уже указывалось выше, долгое время были под сомнением и являлись предметом дискуссий среди ученых; однако приложение полученных основных уравнений теории упругости к решению задач физики довольно быстро показало эффективность разработанных методов и дало ряд замечательных результатов, подтвержденных опытом; это относится прежде всего к области изучения колебаний и распространения волн (например, звуковых) в упругих телах; некоторые более простые задачи этого рода освещены в главах IV и IX настоящей книги. Середина XIX века была особенно богата достижениями в смысле развития теории упругости и получения решений задач, важных для физики и техники; здесь главную роль сыграли работы крупнейшего французского исследователя Сен-Венана и его учеников. В этих условиях постепенно исчезли сомнения в физической обоснованности метода теории упругости, оперирующего как бы с непрерывной, сплошной средой; с этой точки зрения иногда говорят, что теория упругости основывается на *гипотезе сплошного строения твердых тел*. При этом, конечно, нельзя забывать, что такая гипотеза является только *рабочей гипотезой*; она диктуется принятым математическим методом исследования и не вторгается в те области физики, которые непосредственно занимаются вопросами строения тел.

---

# ГЛАВА I

## ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

### § 1. Напряженное состояние тела

Приступая к изучению напряженного состояния тела, прежде всего введем такую систему обозначения напряжений, которая позволила бы легко различать напряжения на различных площадках, проведенных в данной точке, и была бы возможно более мнемоничной.

Существует несколько систем обозначений; здесь мы пользуемся системой, принятой во многих курсах теории упругости.

Представим себе (рис. 2) твердое тело, рассеченное плоскостью на две части  $A$  и  $B$ . Часть  $B$  после рассечения отбросим; в плоскости сечения выделим элементарную площадку  $dF$ ; направление этой площадки будем характеризовать внешней нормалью к ней (внешней по отношению к оставшейся части  $A$ ).

При помощи внешней нормали мы кратко и ясно указываем не только направление площадки, но и ту часть тела ( $B$  или  $A$ ), которая отбрасывается после рассечения и действие которой мы далее заменяем силами.

Пусть  $p$  — полное напряжение в данной точке на площадке  $dF$ . Рассмотрим какую-либо ось  $x$  (т. е. прямую с заданным на ней направлением); проекцию напряжения  $p$  на эту ось будем обозначать через  $X_x$  и читать это обозначение так: «проекция на ось  $x$  напряжения  $p$  на площадке с внешней нормалью  $v$ ». Значит, основная буква  $X$  указывает направление оси, на которую берется проекция;

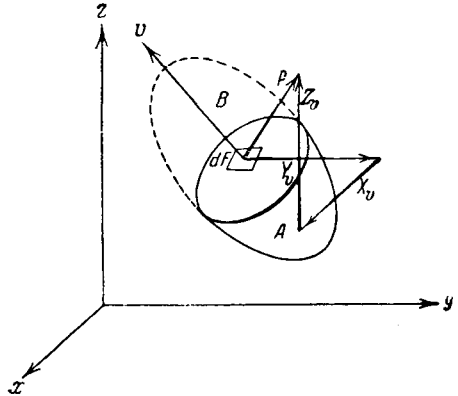


Рис. 2.

индекс  $\nu$  характеризует ориентировку площадки, напряжение на которой рассматривается.

Наметим где-либо в пространстве произвольную систему прямоугольных координат  $Oxyz$ , при помощи которой будем определять положение точек рассматриваемого тела. Напряжения будем определять их проекциями на оси этой системы; ею же далее воспользуемся при исследовании деформаций.

Проекции на оси координат полного напряжения  $p$  на площадке  $dF$  обозначим через  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$ . Если мы после расчленения отбросим часть  $A$ , то внешняя нормаль к той же площадке  $dF$  будет иметь обратное направление; обозначим ее поэтому через  $-\nu$ . Проекция полного напряжения на ней (рис. 3) придется обозначить так:  $X_{-\nu}$ ,  $Y_{-\nu}$ ,  $Z_{-\nu}$ ; при этом очевидно, что

$$\begin{aligned} X_{-\nu} &= -X_\nu; & Y_{-\nu} &= -Y_\nu; \\ Z_{-\nu} &= -Z_\nu, \end{aligned}$$

так как напряжения  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$  выражают действие части  $B$  на часть  $A$ , а напряжения  $X_{-\nu}$ ,  $Y_{-\nu}$ ,  $Z_{-\nu}$  выражают действие части  $A$  на часть  $B$ ; действия эти равны по величине, но противоположны по направлению.

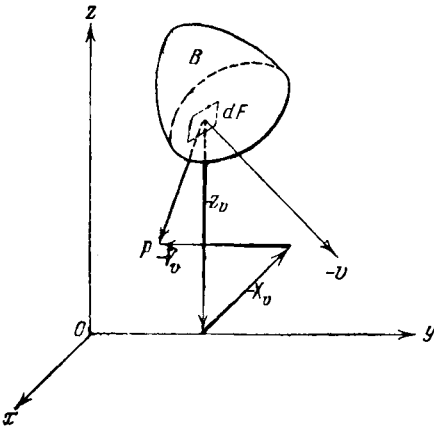


Рис. 3.

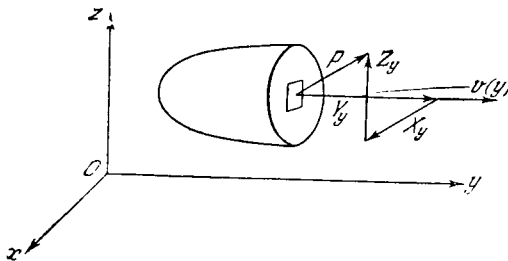


Рис. 4.

В последующем мы чаще всего будем делать сечение, перпендикулярное к какой-либо оси координат. Сделаем, например, сечение перпендикулярное к оси  $Oy$ ; тогда получим следующие проекции полного напряжения (рис. 4):

$$X_y, Y_y, Z_y.$$

Проекция  $Y_y$  направлена нормально к площадке и называется *нормальным напряжением*; проекции  $X_y$  и  $Z_y$ , лежащие в плоскости площадки, называются *касательными напряжениями*.

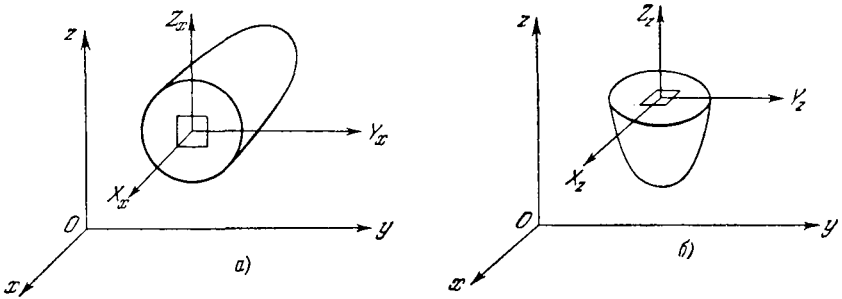


Рис. 5.

На рис. 5, а, б показаны обозначения напряжений на площадках, нормальных к остальным двум осям. Собирая эти результаты, получаем такую систему напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям:

$$X_x, Y_x, Z_x; X_y, Y_y, Z_y; X_z, Y_z, Z_z.$$

Легко видеть, что напряжения

$$X_x, Y_y, Z_z,$$

в обозначении которых обе буквы одинаковы, суть нормальные напряжения. Остальные шесть являются касательными.

Для лучшей ориентировки в этих новых обозначениях предлагаем читателю проделать следующие упражнения.

Упражнения.

1. На рис. 6 изображено поперечное сечение  $oA$  стенки плотины, которая по грани  $Oy$  нагружена давлением воды; грань  $OA$  не несет нагрузки.

Обозначить нормальное и касательное напряжения на грани  $Oy$  и написать, чему они равны (обращать внимание на направление давления, направление оси  $Ox$  и знак проекции). Обозначить также составляющие напряжения на косо

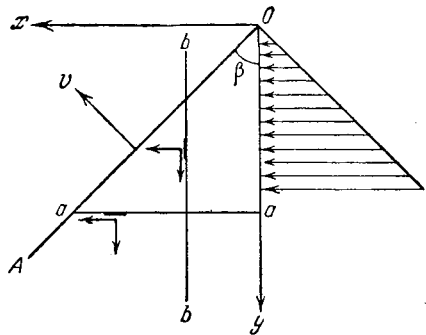


Рис. 6.

грань  $OA$  (внешняя нормаль  $v$ ) и запишите отсюда условия того, что грань  $OA$  свободна от нагрузки. Обозначить напряжения в сечениях  $aa$  и  $bb$  при отбрасывании той или иной части (левой или правой; верхней или нижней) стенки после рассечения.

2. Цилиндрическое тело (рис. 7) скручивается силами, приложенными по концевым поперечным сечениям. Обозначить напряжения в любой точке  $k$

поперечного сечения  $ln$  и записать условие, что нормальное напряжение отсутствует. Обозначить напряжение в любой точке  $m$  боковой поверхности и записать условия, что эта поверхность ничем не нагружена.

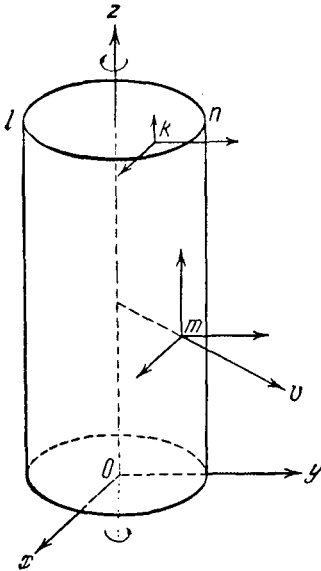


Рис. 7.

3. Цилиндрический брус (рис. 8) изгибается силами, приложенными в конечном поперечном сечении  $pq$ . Записать условия того, что боковая поверхность свободна от нагрузки (см. предыдущее упражнение), обозначить те напряжения в сечении  $mn$  (нормальные и касательные), которые определяются в сопротивлении материалов.

В настоящее время некоторыми авторами применяются следующие обозначения, принятые также в технической литературе: нор-

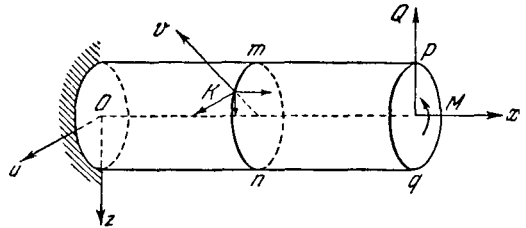


Рис. 8.

мальные напряжения на площадках, нормальных к осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , обозначаются соответственно через

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z;$$

касательные напряжения по тем же площадкам обозначаются через

$$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz},$$

так что

$$X_y = \tau_{xy}; \quad Y_z = \tau_{yz}; \quad X_z = \tau_{xz}.$$

## § 2. Дифференциальные уравнения равновесия

Из твердого тела выделим бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с тремя парами граней, параллельными координатным плоскостям. Ребра этого параллелепипеда пусть будут  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 9). Объем его равен  $d\tau = dx dy dz$ . Действие отброшенных частей тела на выделенный элемент заменим силами. Напряжение на каждой грани разложим на три составляющие. Итого на всех гранях будет действовать  $6 \times 3 = 18$  составляющих напряжений. Это будут внешние силы, действующие на наш параллелепипед. Кроме того, будем предполагать, что в данном теле существуют так называемые объемные силы. Будем считать, что эти силы приложены к массе



тела; такова, например, сила тяжести, с которой мы далее будем иметь дело.

Пусть к единице массы тела приложены некоторые объемные силы, которые мы также разлагаем на три составляющие:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Отсюда следует, что эти величины имеют размерность ускорения. Тогда

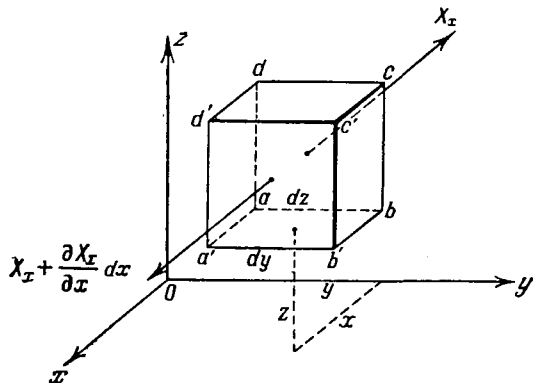


Рис. 9.

объемные силы, приходящиеся на массу параллелепипеда  $\rho d\tau$  ( $\rho$  — плотность тела в данной точке, представляющая собой массу, заключенную в единице объема, и имеющая размерность  $\text{кг сек}^2/\text{см}^4$ ) будут

$$X\rho d\tau = X\rho dx dy dz;$$

$$Y\rho d\tau = Y\rho dx dy dz;$$

$$Z\rho d\tau = Z\rho dx dy dz.$$

Напряжения, вызываемые внешними силами в твердом теле, различны в разных точках его, и потому они, вообще говоря, являются функциями от координат точек:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= F_1(x, y, z); \\ Y_y &= F_2(x, y, z); \\ Z_z &= F_3(x, y, z); \\ \dots &\dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Если на площадку  $abcd$  элемента (рис. 9) действует напряжение  $X_{-x} = -X_x$ , то на площадку  $a'b'c'd'$  действует напряжение  $X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx$ , так как, переходя к площадке  $a'b'c'd'$ , мы в первом равенстве (1.1) изменяем лишь одну из координат, а именно  $x$ . Таким образом, мы легко обозначим напряжения на всех площадках, ограничивающих параллелепипед.

Предполагаем, что данное твердое тело находится в равновесии; тогда для каждого отдельного элемента должны удовлетворяться шесть уравнений равновесия статики:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0, & \sum M_x &= 0, \\ \sum Y &= 0, & \sum M_y &= 0, \\ \sum Z &= 0, & \sum M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Займемся сначала первой группой этих уравнений и, в частности, остановимся на первом уравнении:

$$\sum X = 0. \quad (1.3)$$

Здесь придется принять во внимание только те силы, которые дают проекции на ось  $Ox$ ; это будут нормальные напряжения по боковым

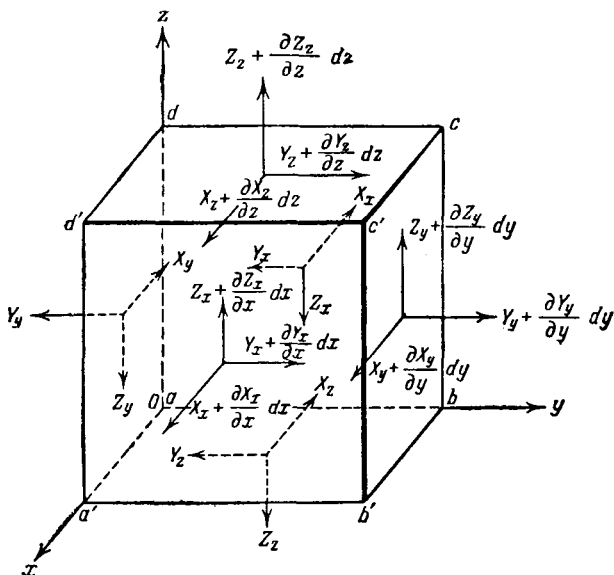


Рис. 10.

граням  $abcd$  и  $a'b'c'd'$  (рис. 10) и касательные напряжения, параллельные оси  $Ox$ , по остальным граням.

Раскрывая уравнение равновесия (1.3), имеем:

$$\begin{aligned} & \left( X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) dy dz - X_x dy dz + \left( X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \right) dx dz - X_y dx dz + \\ & + \left( X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \right) dx dy - X_z dx dy + X_p dx dy dz = 0 \quad (1.4) \\ & \left( = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Если мы рассматриваем случай движения частиц упругого тела (упругие колебания), то  $\sum X$  не обращается в нуль, но, согласно второму закону Ньютона, будет равна произведению массы элемента на проекцию его ускорения на ось  $Ox$ ; если проекции пути (перемещения), проходимого данной точкой на оси координат, обозначим через  $u$ ,  $v$  и  $w$ , то ускорение вдоль оси  $Ox$  будет  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ; поэтому в правой части уравнения (1.4) будет стоять выражение

$$\rho d\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

как это показано в скобках.

После приведения подобных членов в уравнении (1.4) и деления на  $dx dy dz = d\tau$  получим его в окончательном виде:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X\rho = 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).$$

Таким же путем раскрываем остальные два уравнения:

$$\sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

В правой части, в случае движения, вместо нуля будут произведения массы элемента на ускорения вдоль соответственных осей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y\rho &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z\rho &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Переходим теперь к раскрытию последних трех уравнений равновесия (1.2). Возьмем, например, уравнение  $\sum M_x = 0$ . На чертеже поэтому сохраним только силы, могущие дать моменты вокруг оси  $Ox$ , т. е. нормальные к ней. Начало координат для упрощения выкладок поместим в одной из вершин параллелепипеда (рис. 11). Обратим внимание на то, что моменты некоторых сил из числа показанных на чертеже будут бесконечно малыми величинами третьего порядка, другие же — четвертого порядка. Например, для нормальных сил по левой и правой граням мы имеем момент

$$\left( Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dz}{2} - Y_y dx dz \frac{dz}{2}.$$

Этот момент в итоге оказывается величиной четвертого порядка; такой же порядок будут иметь моменты объемных сил:

$$+ Y\rho dx dy dz \frac{dz}{2}; \quad - Z\rho dx dy dz \frac{dy}{2}.$$

Рассматривая рис. 11, найдем только две силы, дающие момент третьего порядка; на чертеже они показаны жирнее. Приравнявая

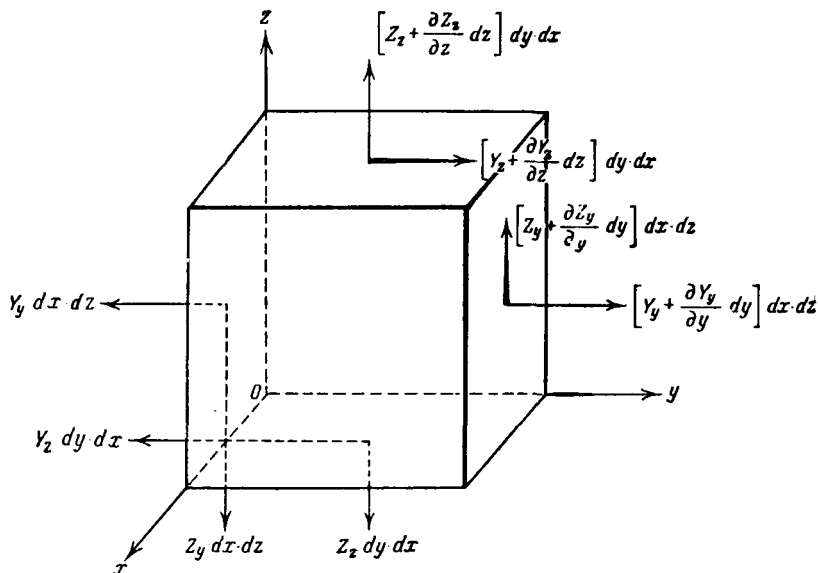


Рис. 11.

нулю сумму моментов этих сил вокруг оси  $Ox$ , получим:

$$\left( Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z} dz \right) dx dy dz - \left( Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y} dy \right) dx dy dz = 0;$$

отбрасывая здесь бесконечно малые величины четвертого порядка, получим:

$$Y_z dx dy dz - Z_y dy dz dx = 0,$$

или, сокращая, имеем:

$$Y_z = Z_y.$$

Это есть закон парности, или сопряженности, касательных напряжений. Соответственно этому два других уравнения дают:

$$Y_x = X_y; \quad Z_x = X_z.$$

Таким образом, условия равновесия статики привели нас к трем дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

содержащим девять функций от координат рассматриваемой точки:  $X_x, X_y, X_z; Y_x, Y_y, Y_z; Z_x, Z_y$  и  $Z_z$ ; однако закон сопряженности касательных напряжений

$$\left. \begin{aligned} Y_z &= Z_y, \\ Z_x &= X_z, \\ X_y &= Y_x \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

показывает, что три из этих девяти функций попарно равны трем другим. Следовательно, мы имеем три дифференциальных уравнения (1.5), содержащих шесть неизвестных функций:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= F_1(x, y, z), \\ Y_y &= F_2(x, y, z), \\ Z_z &= F_3(x, y, z), \\ Y_z &= F_4(x, y, z), \\ Z_x &= F_5(x, y, z), \\ X_y &= F_6(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

В случае упругих колебаний правые части этих уравнений зависят также и от времени  $t$ .

Так как число неизвестных (1.7) превышает число уравнений (1.5), то заключаем, что задача теории упругости оказывается *статически неопределенной*. Недостающие уравнения можно получить, лишь изучая условия деформации и учитывая физические свойства данного упругого тела. Действительно, до сих пор мы не интересовались этими свойствами, выделяя из тела элемент, для которого выведены уравнения (1.5); между тем напряженное состояние тела, несомненно, зависит от этих свойств.

Метод, при помощи которого мы вывели уравнения (1.5), часто применяется в элементарной теории изгиба стержня, например, для получения зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и нагрузкой:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q,$$

или для вывода касательных напряжений при изгибе \*).

Для этих целей мы там выделяем из бруса и уравниваем бесконечно тонкий слой между двумя поперечными сечениями, т. е. элемент, бесконечно малый в одном направлении; здесь же получаем условия равновесия элемента, бесконечно малого по всем трем измерениям.

\*) Зависимости эти выводятся во всех курсах сопротивления материалов.

### § 3. Напряжения на площадках, наклоненных к координатным плоскостям. Условия на поверхности

Уравнения равновесия (1.5) связывают между собой напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям.

Однако иногда требуется знать напряжения по площадкам, иначе ориентированным; с другой стороны, если все упругое тело разбивать на элементы плоскостями, параллельными координатным, то у поверхности тела, вообще говоря, не будет возможности выделить элементы в форме параллелепипеда (рис. 12). По полученным у поверхности наклонным граням, очевидно, будут действовать внешние силы (нагрузки), приложенные к данному телу. Приведенные соображения заставляют нас вывести еще соотношения между напряжениями по трем площадкам, параллельным координатным плоскостям, и напряжениями по площадке, как угодно наклоненной к этим плоскостям.

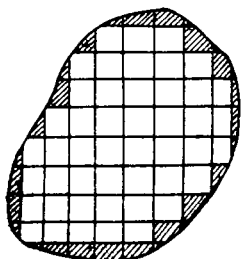


Рис. 12.

Для получения таких соотношений рассмотрим (рис. 13) бесконечно малый элемент, выделенный из данного твердого тела тремя плоскостями, параллельными координатным, и четвертой плоскостью, пересекающей все три оси, т. е. рассмотрим элемент  $Oabc$  в форме тетраэдра или треугольной пирамиды. Назовем площадь его грани  $abc$  через  $dS$ , и пусть внешняя нормаль к ней будет  $\nu$ ; тогда площади остальных граней найдем, как проекции площади грани  $abc$  на координатные плоскости:

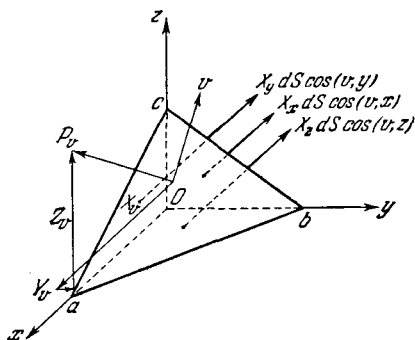


Рис. 13.

пл.  $abc = dS$ ;  
 пл.  $Oab = dS \cos(\nu z)$ ;  
 пл.  $Obc = dS \cos(\nu x)$ ;  
 пл.  $Oac = dS \cos(\nu y)$  \*).

Пусть  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$  — проекции на оси координат полного напряжения  $P$ , действующего на площадке  $abc$ . Тогда первое условие равновесия выделенного тетраэдра  $\sum X = 0$  дает

$$\sum X = X_\nu dS - X_x dS \cos(\nu x) - X_y dS \cos(\nu y) - X_z dS \cos(\nu z) = 0.$$

\*) Здесь в скобках  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обозначают направления, соответственно параллельные осям координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Сокращая на  $dS$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz). \\ \text{Аналогично другие два условия равновесия дают} \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz); \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Введем сокращенные обозначения направляющих косинусов внешней нормали  $v$  к площадке:

$$\cos(v, x) = l; \quad \cos(v, y) = m; \quad \cos(v, z) = n. \quad (1.9)$$

Тогда уравнения (1.8) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x l + X_y m + X_z n; \\ Y_v &= Y_x l + Y_y m + Y_z n; \\ Z_v &= Z_x l + Z_y m + Z_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.8a)$$

которым будем часто пользоваться в дальнейшем.

В эти уравнения не вошли объемные силы, так как они являются малыми третьего порядка, например:  $\rho X d\tau = \rho X \frac{dx dy dz}{6}$ , между тем как все члены первого уравнения (1.8) в его первоначальном виде — второго порядка.

Предполагаем, что в пределе площадь грани  $abc$  стремится к нулю; тогда уравнения (1.8) дают связь между напряжениями в точке  $O$  по *косой площадке* с внешней нормалью  $v$  и по трем площадкам, параллельным координатным плоскостям. Если мы вырезаем тетраэдр  $Oabc$  у поверхности и грань  $abc$  принадлежит поверхности, то  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  являются составляющими напряжения от внешних сил (нагрузок данного тела), приложенных на поверхности. Тогда уравнения (1.8) дают связь между внешней нагрузкой и внутренними силами. В этом случае они называются *условиями на поверхности* тела и оказываются весьма тесно связанными с дифференциальными уравнениями равновесия (1.5); действительно, если функции (1.7) таковы, что уравнения (1.5) и условия на поверхности (1.8) удовлетворены во всех точках тела и на его поверхности, то этим обеспечено равновесие всех элементов (параллелепипедов и тетраэдров), на которые было разбито данное тело; значит, будет обеспечено равновесие всего тела в целом. Математический смысл этого заключения состоит в том, что уравнения (1.5) и граничные условия (1.8) необходимо рассматривать совместно, ибо уравнения (1.5) не могут иметь определенного смысла, пока не даны условия (1.8), заключающие в себе внешнюю нагрузку тела.

Итак, тело в целом будет в равновесии, если удовлетворены уравнения равновесия (1.5) и заданы поверхностные нагрузки; другими словами, мы доказали достаточность уравнений (1.5) и граничных условий (1.8) для равновесия тела под действием заданных внешних

сил. Можно доказать необходимость уравнений (1.5). Действительно, если тело в равновесии, то для любой части, выделенной из него замкнутой поверхностью  $S$ , удовлетворены шесть условий равновесия (1.2). Первое из них раскроем так:

$$\int_{(S)} X_v dS + \int_{(\tau)} X_p d\tau = 0.$$

Здесь первый интеграл распространен по поверхности тела, а второй — по объему его. Однако первый интеграл можно преобразовать также в объемный, пользуясь формулой Грина — Остроградского\*):

$$\begin{aligned} \int_{(S)} X_v dS &= \int_{(S)} [X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz)] dS = \\ &= \int_{(\tau)} \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (1.10)$$

На этом основании предыдущее уравнение равновесия может быть написано так:

$$\int_{(\tau)} \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X \right) d\tau = 0.$$

Интеграл левой части должен обращаться в нуль для любого объема  $\tau$ , выделенного из тела, а это возможно только тогда, когда подынтегральное выражение тождественно равно нулю во всех точках объема  $\tau$ :

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0.$$

Этим доказана необходимость первого из уравнений (1.5). Таким же путем доказывается необходимость других двух уравнений (1.5) и уравнений (1.6).

#### § 4. Исследование напряженного состояния в данной точке тела. Главные площадки и главные напряжения

Предположим, что элемент  $Oabc$  вырезан внутри упругого тела и  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  являются проекциями полного напряжения  $P_v$  по косо́й площадке  $abc$  на оси случайной системы координат  $Oxyz$  (рис. 13).

\* ) Формула Грина — Остроградского имеет вид

$$\int_{(\tau)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \int_{(S)} [P \cos(vx) + Q \cos(vy) + R \cos(vz)] dS,$$

где  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — функции от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , непрерывные на замкнутой поверхности  $S$ ; частные производные от них должны существовать и быть непрерывными во всем объеме  $\tau$ , ограниченном поверхностью  $S$ ;  $v$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$  в некоторой точке ее  $(x, y, z)$ .



Зная проекции полного напряжения ( $X_v, Y_v, Z_v$ ), без труда найдем нормальные и касательные напряжения на той же площадке  $abc$ .

Для этой цели примем нормаль  $v$  к площадке за одну из новых осей координат. Другие две оси  $u, w$  выберем в плоскости  $abc$  (рис. 14). Обозначим косинусы углов между старыми и новыми осями по схеме:

	$x$	$y$	$z$
$u$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$v$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$w$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

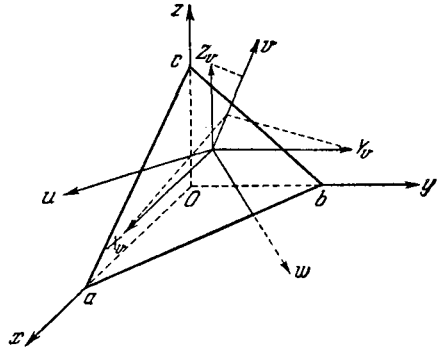


Рис. 14.

Теперь уравнения (1.8), аналогично (1.8a), перепишем короче:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x l_2 + X_y m_2 + X_z n_2 \\ Y_v &= Y_x l_2 + Y_y m_2 + Y_z n_2 \\ Z_v &= Z_x l_2 + Z_y m_2 + Z_z n_2 \end{aligned} \right\} l_2 \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} m_2 \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} n_2 \quad (1.11)$$

Очевидно (рис. 14), нормальное напряжение на площадке  $abc$  получим как сумму проекций напряжений  $X_v, Y_v, Z_v$  на нормаль  $v$ .

Обозначая нормальное напряжение по принятой нами системе через  $V_v$ , получим

$$V_v = X_v l_2 + Y_v m_2 + Z_v n_2 = X_x l_2^2 + Y_y m_2^2 + Z_z n_2^2 + 2Y_x m_2 n_2 + 2Z_x n_2 l_2 + 2X_y l_2 m_2. \quad (1.12)$$

Аналогично получим касательные напряжения, проектируя  $X_v, Y_v, Z_v$  на оси  $u$  и  $w$  соответственно:

$$\left. \begin{aligned} U_v &= X_v l_1 + Y_v m_1 + Z_v n_1 = X_x l_1 l_2 + Y_y m_1 m_2 + Z_z n_1 n_2 + \\ & \quad + Y_x (m_1 n_2 + m_2 n_1) + Z_x (n_2 l_1 + n_1 l_2) + X_y (l_1 m_2 + l_2 m_1); \\ W_v &= X_v l_3 + Y_v m_3 + Z_v n_3 = X_x l_2 l_3 + Y_y m_2 m_3 + Z_z n_2 n_3 + \\ & \quad + Y_x (m_3 n_2 + m_2 n_3) + Z_x (n_3 l_2 + n_2 l_3) + X_y (m_2 l_3 + m_3 l_2). \end{aligned} \right\} (1.13)$$

Формулы (1.12) и (1.13) значительно упрощаются в случае так называемого плоского напряженного состояния, когда все силы параллельны одной плоскости и распределены равномерно в направлении, перпендикулярном к этой плоскости.

Действительно, если все силы расположены в плоскости  $Oxy$ , то вместо тетраэдра  $Oabc$  можно выделить треугольную призму  $Oab$

(рис. 15). В формулах (1.12) и (1.13) исчезают  $X_z, Y_z, Z_z$ ; тогда эти формулы получают вид:

$$\left. \begin{aligned} V_v &= X_x l_2 + Y_y m_2^2 + 2X_y l_2 m_2, \\ U_v &= X_x l_1 l_2 + Y_y m_1 m_2 + X_y (l_1 m_2 + l_2 m_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Углы  $(ux), (uy), (vx), (vy)$  указаны в схеме (а), а соответственные косинусы — в схеме (б):

	$x$	$y$
$u$	$\alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
$v$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\alpha$

(а)

	$x$	$y$
$u$	$l_1 = \cos \alpha$	$m_1 = -\sin \alpha$
$v$	$l_2 = \sin \alpha$	$m_2 = \cos \alpha$

(б)

На основании схемы (б) уравнения (1.14) примут вид

$$\left. \begin{aligned} V_v &= X_x \sin^2 \alpha + Y_y \cos^2 \alpha + 2X_y \sin \alpha \cos \alpha, \\ U_v &= (X_x - Y_y) \sin \alpha \cos \alpha + X_y (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В этом виде они известны из сопротивления материалов; уравнения (1.15) можно, конечно, вывести и непосредственно из рассмотрения рис. 15.

Формулы (1.12) и (1.13) утверждают важное положение о том, что, зная напряжения по трем взаимно перпендикулярным элементарным площадкам в точке  $O$ :

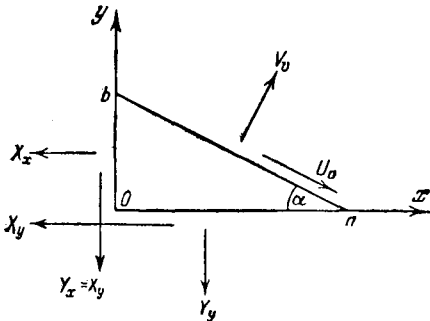


Рис. 15.

$$\left. \begin{aligned} X_x, & X_y, X_z, \\ Y_x, & Y_y, Y_z, \\ Z_x, & Z_y, Z_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

мы можем вычислить все три составляющих напряжения

$$V_v, U_v, W_v$$

по любой четвертой площадке (в точке  $O$ ), определяемой ее внешней нормалью  $w$ ; ввиду этого величины (1.16) иногда называют элементами напряженного состояния

тела. Можно пойти далее и построить в точке  $O$  еще две площадки с внешними нормальями  $u$  и  $w$ ; напряжения по этим площадкам выразятся формулами такого же вида, как (1.12) и (1.13), например:

$$U_u = X_x l_1^2 + Y_y m_1^2 + Z_z n_1^2 + 2Y_z m_1 n_1 + 2Z_x n_1 l_1 + 2X_y l_1 m_1.$$

Выполнив это, получим девять формул [три типа (1.12) и шесть типа (1.13)], выражающих составляющие напряжения по площадкам трехгранника  $Ouvw$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} U_u, V_u, W_u \\ U_v, V_v, W_v \\ U_w, V_w, W_w \end{array} \right\}, \quad (1.17)$$

через напряжения (1.16) по площадкам прежнего трехгранника  $Oxyz$ .

Девять составляющих (1.16) или (1.17) определяют *тензор напряжений* и с этой точки зрения называются *компонентами тензора напряжений*. Формулы типа (1.12) и (1.13) (общее их число, как мы сказали, равно девяти) определяют преобразование тензора от одной системы координат к другой. Тензор напряжений (1.16) симметричен, так как компоненты, симметричные относительно главной диагонали ( $X_x, Y_y, Z_z$ ), равны между собой на основании (1.6); это свойство сохраняется, очевидно, и при других системах координат \*).

### § 5. Распределение напряжений в данной точке. Поверхность напряжений Коши; инварианты тензора напряжений. Эллипсоид Ламе

Обратимся теперь к весьма важному вопросу о том, как распределяются напряжения по всевозможным площадкам, проведенным через данную точку тела; применим для этой цели весьма изящный и наглядный способ, найденный основателем теории упругости Коши. В выбранной точке тела  $M$  поместим начало координат, проведем элементарную площадку с внешней нормалью  $\nu$  и вдоль этой нормали построим вектор длиной  $p$ , которую временно оставим неопределенной. Координаты конца этого вектора будут

$$\xi = pl; \quad \eta = pm; \quad \zeta = pn, \quad (1.18)$$

где  $l, m, n$  — косинусы углов нормали с осями координат. Нормальное напряжение по взятой площадке согласно (1.12) будет

$$V_\nu = X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2 + 2Y_z mn + 2Z_x nl + 2X_y lm. \quad (1.19)$$

Определим  $l, m, n$  из предыдущих равенств и подставим сюда; тогда, по умножении уравнения на  $p^2$ , приведем его к виду

$$X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2Y_z \eta \zeta + 2Z_x \zeta \xi + 2X_y \xi \eta = p^2 V_\nu. \quad (1.20)$$

Распорядимся теперь длиной вектора  $p$  так, чтобы правая часть этого уравнения всегда оставалась постоянной:

$$p^2 V_\nu = \pm c^2;$$

\*) Более подробно о тензоре см. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи теории упругости, изд. АН СССР, 1949.

справа придется брать знак  $+$ , если  $V_v > 0$ , т. е. нормальное напряжение по площадке растягивающее, и знак  $-$ , если оно сжимающее. Тогда

$$p = \sqrt{\frac{\pm c^2}{V_v}}, \text{ или } V_v = \pm \frac{c^2}{p^2}. \quad (1.21)$$

Введя обозначение

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2Y_z \eta \zeta + 2Z_x \zeta \xi + 2X_y \xi \eta, \quad (1.22)$$

уравнение (1.20) запишем так:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \pm c_2. \quad (1.23)$$

Оно изображает поверхность второго порядка, которая называется «поверхностью напряжений» или «квадрикой Коши»; поверхность эта имеет центр в начале координат \*) и потому может быть либо а) эллипсоидом, либо б) однополостным гиперболоидом, либо в) двуполостным гиперболоидом; концы векторов  $p$  будут лежать на этой поверхности.

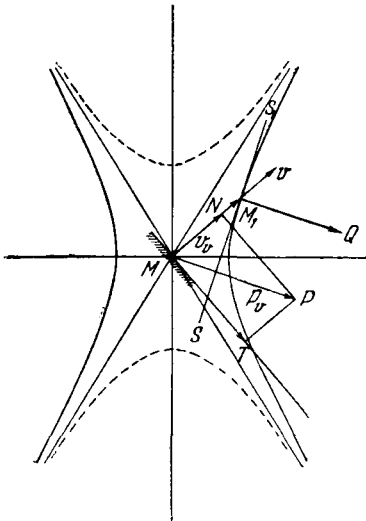


Рис. 16.

Допустим для определенности, что квадрика есть однополостный гиперболоид и что она построена; на рис. 16 для простоты чертежа показано ее сечение одной из главных плоскостей и предположено, что внешняя нормаль  $Mv$  к площадке лежит в этой плоскости. Взяв площадку и проводя к ней внешнюю нормаль  $Mv$ , найдем длину  $MM_1$  вектора  $p$ ; зная ее, по второй из формул (1.21) найдем нормальное напряжение  $V_v = \overline{MN}$ .

Покажем теперь, что можно легко найти и полное напряжение  $P_v$  по данной площадке. Действительно, возь-

мем частные производные функции (1.22) и воспользуемся (1.18) и (1.8a).

Получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 2(X_x \xi + X_y \eta + X_z \zeta) = 2p(X_x l + X_y m + X_z n) = 2pX_v;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 2(Y_x \xi + Y_y \eta + Y_z \zeta) = 2p(Y_x l + Y_y m + Y_z n) = 2pY_v;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 2(Z_x \xi + Z_y \eta + Z_z \zeta) = 2p(Z_x l + Z_y m + Z_z n) = 2pZ_v.$$

\*) Так как в уравнении (1.23) отсутствуют члены первой степени относительно  $\xi, \eta, \zeta$ .

Известно, что эти частные производные пропорциональны косинусам углов, которые образует с осями координат нормаль  $M_1Q$  к поверхности; на этом основании последние равенства показывают, что косинусы направляющих углов нормали к поверхности пропорциональны проекциям  $X_v, Y_v, Z_v$  полного напряжения по взятой площадке на оси координат. Отсюда вывод: полное напряжение  $MP$  на площадке перпендикулярно к касательной плоскости  $\overline{SS_1}$  к поверхности; зная его направление, получим и величину  $P_v = \overline{MP}$ , проведя  $NP \perp MN$ . Теперь, конечно, легко найдем и касательное напряжение  $MT$ . Таким образом, квадратика Коши позволяет полностью исследовать распределение напряжений в данной точке  $M$  тела.

Из аналитической геометрии известно, что путем поворота координатных осей уравнение поверхности второго порядка (1.23) можно преобразовать так, чтобы в новой координатной системе  $(u, v, w)$  исчезли члены, содержащие произведения координат. Тогда, очевидно, будем иметь

$$U_v = 0; \quad V_w = 0; \quad W_u = 0.$$

Значит, на трех взаимно перпендикулярных площадках, нормальных к новым осям  $(u, v, w)$ , касательные напряжения обратятся в нуль. Эти три площадки называют *главными*; нормальные напряжения на них  $U_u, V_v, W_w$  (они же будут и полными напряжениями) называются *главными напряжениями* в данной точке тела  $M$ . Обозначим их короче:

$$U_u = N_1, \quad V_v = N_2, \quad W_w = N_3.$$

Тогда уравнение квадратика Коши в новых осях будет

$$N_1^2 \xi^2 + N_2^2 \eta^2 + N_3^2 \zeta^2 = \pm c^2. \quad (1.24)$$

Окончательный вид этой поверхности зависит от знаков главных напряжений  $N_1, N_2, N_3$  и от обусловленного ими знака правой части уравнения. Рассмотрим два основных случая: 1) все три главных напряжения одного знака; 2) знаки главных напряжений различны.

*1-й случай.* Предположим, что  $N_1 > 0, N_2 > 0, N_3 > 0$ , т. е. все главные напряжения растягивающие. Тогда, очевидно, в правой части уравнения (1.24) следует выбрать знак  $+$ , и оно может быть переписано так:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{c^2}{N_1}\right)} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{c^2}{N_2}\right)} + \frac{\zeta^2}{\left(\frac{c^2}{N_3}\right)} = 1. \quad (1.25)$$

Это есть уравнение эллипсоида с полуосями

$$\bar{a} = \frac{c}{\sqrt{N_1}}; \quad \bar{b} = \frac{c}{\sqrt{N_2}}; \quad \bar{c} = \frac{c}{\sqrt{N_3}}.$$

Из формулы (1.21) видно, что в этом случае  $V_v = +\frac{c^2}{\rho^2} > 0$ , т. е. нормальные напряжения на всяких площадках, проведенных через

исследуемую точку, положительны и, значит, оказываются растягивающими. Если все три главных напряжения сжимающие:  $N_1 < 0$ ,  $N_2 < 0$ ,  $N_3 < 0$ , то в (1.24) надо перед  $c^2$  взять знак —; уравнение это снова дает эллипсоид, но по формуле (1.21) получим

$$V_v = -\frac{c^2}{\rho^2} < 0,$$

и нормальные напряжения на всех площадках будут сжимающими.

*2-й случай.* Предположим, что  $N_1 > 0$ ,  $N_2 > 0$ ,  $N_3 < 0$ , т. е. два из главных напряжений растягивающие, а третье сжимающее. В этом случае уравнение (1.24) приходится писать в двоякой форме:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 - |N_3|\zeta^2 = +c^2,$$

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 - |N_3|\zeta^2 = -c^2,$$

где  $|N_3|$  обозначает абсолютную величину сжимающего главного напряжения. Как и в первом случае, напомним эти уравнения в виде:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{c^2}{N_1}\right)} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{c^2}{N_2}\right)} - \frac{\zeta^2}{\left(\frac{c^2}{|N_3|}\right)} = 1, \quad (1.26)$$

$$-\frac{\xi^2}{\left(\frac{c^2}{N_1}\right)} - \frac{\eta^2}{\left(\frac{c^2}{N_2}\right)} + \frac{\zeta^2}{\left(\frac{c^2}{|N_3|}\right)} = 1. \quad (1.27)$$

Первое из этих уравнений дает однополостный гиперboloид, а второе — двухполостный гиперboloид. Присоединим сюда промежуточный случай, положив  $c^2 = 0$ :

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 - |N_3|\zeta^2 = 0. \quad (1.28)$$

Это уравнение дает асимптотический конус, разделяющий указанные два гиперboloида и стремящийся сблизиться с ними на бесконечности (рис. 16).

Если конец вектора, изображающего нормальное напряжение на площадке, попадает на однополостный гиперboloид (1.26), то это напряжение будет положительным, т. е. растягивающим; если же он попадает на двухполостный гиперboloид, то напряжение будет сжимающим. В промежуточном случае он может направиться по образующей асимптотического конуса (1.28); в этом случае длина вектора обращается в бесконечность и согласно (1.21)  $V_v = 0$ . Значит, на площадках, нормальных к образующим асимптотического конуса, действуют только касательные напряжения.

Если данная площадка  $abc$  (рис. 14) — главная, то полное напряжение  $P_v$ , действующее на ней, направлено вдоль нормали  $\nu$  и является главным напряжением; обозначим его через  $N$ ; проекции его на оси координат будут

$$X_\nu = Nl; \quad Y_\nu = Nm; \quad Z_\nu = Nn.$$

Подставим эти значения в уравнения (1.21), напишем их так:

$$\left. \begin{aligned} (X_x - N)l + X_y m + X_z n &= 0, \\ Y_x l + (Y_y - N)m + Y_z n &= 0, \\ Z_x l + Z_y m + (Z_z - N)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Добавив сюда основное соотношение между направляющими косинусами нормали  $\nu$ :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (1.30)$$

будем иметь четыре уравнения для нахождения главного напряжения  $N$  и соответствующей ему главной площадки, т. е. направляющих косинусов ее нормали  $l, m, n$ . Ход решения будет следующим: однородная система уравнений (1.29) не допускает тривиального решения:

$$l = m = n = 0,$$

так как оно противоречит (1.30); однако для существования других решений этой системы (при которых хотя бы один из косинусов  $l, m, n$  был отличен от нуля) необходимо, чтобы определитель ее был равен нулю. Таким образом, приходим к условию

$$\begin{vmatrix} (X_x - N) & X_y & X_z \\ Y_x & (Y_y - N) & Y_z \\ Z_x & Z_y & (Z_z - N) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.31)$$

Раскрывая определитель левой части, получим кубичное уравнение

$$N^3 - \Theta N^2 + \text{HN} - \Lambda = 0, \quad (1.32)$$

в котором коэффициенты имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= X_x + Y_y + Z_z; \\ \text{H} &= \begin{vmatrix} X_x & X_y \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & X_z \\ X_z & Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y_y & Y_z \\ Y_z & Z_z \end{vmatrix}; \\ \Lambda &= \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Все три корня уравнения (1.32) действительны\*); они и дают значения трех главных напряжений  $N_1, N_2, N_3$ . Внося какое-либо из этих значений  $N$  в уравнения (1.29) и пользуясь двумя из них\*\*), найдем величины  $l'_i, m'_i, n'_i$ , пропорциональные направляющим косинусам нормали к искомой главной площадке:

$$l'_i = \lambda l_i; \quad m'_i = \lambda m_i; \quad n'_i = \lambda n_i.$$

\*) Это доказывается в аналитической геометрии при исследовании главных осей центральной поверхности второго порядка.

\*\*) Третье будет следствием остальных двух по условию (1.31).

Подставляя это в (1.30), найдем множитель  $\lambda$ , а значит, и самые косинусы. Таким образом, направления главных площадок будут определены.

Сделаем еще одно замечание; корни уравнения (1.32) не должны зависеть от системы координат  $x, y, z$ ; значит, коэффициенты этого уравнения тоже не зависят от выбора координатной системы. Отсюда заключаем, что формулы (1.33) дают три функции от компонентов тензора напряжений (1.16), являющиеся инвариантами преобразования координат. Особое значение имеет первый из них — линейный инвариант:

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z, \quad (1.34)$$

как это мы увидим в главе III.

Если главные площадки в данной точке найдены, то наряду с квадрикой Коши можно указать другую геометрическую картину распределения напряжений, предложенную Ламе.

Предположим, что плоскости координат  $Oxy, Oyz$  и  $Ozx$  совпадают с главными площадками в данной точке и, значит, по

этим площадкам:  $Y_z = Z_y = 0$ ;  
 $Z_x = X_z = 0$ ;  $X_y = Y_x = 0$ ;  
 $X_x = N_1$ ;  $Y_y = N_2$ ;  $Z_z = N_3$ .

Тогда уравнения (1.8a) упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} X_v &= N_1 l, \\ Y_v &= N_2 m, \\ Z_v &= N_3 n. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

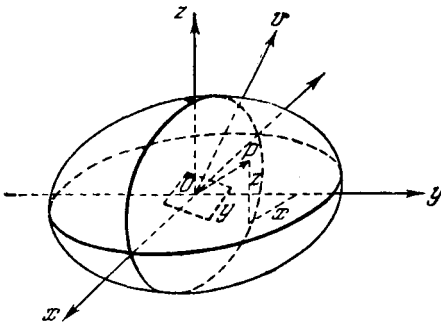


Рис. 17.

Соотношения (1.35) можно изобразить геометрически. Для этого из данной точки  $O$  (рис. 17) будем откладывать вектор  $OP$ , равный полному напряжению на выбранной площадке с внешней нормалью  $v$ ; координаты конца этого вектора будут:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_v; \\ y &= Y_v; \\ z &= Z_v. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

При изменении наклона площадки точка  $P$  будет описывать некоторую поверхность, которая оказывается эллипсоидом; действительно, на основании (1.35) и (1.36) получается

$$x = N_1 l; \quad y = N_2 m; \quad z = N_3 n;$$

отсюда

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (1.37)$$



а это есть уравнение эллипсоида, отнесенного к главным осям. Эллипсоид этот называется эллипсоидом напряжений или эллипсоидом Ламе. Из трех его полуосей одна будет наибольшей, другая — наименьшей, третья будет средней между ними; следовательно, из трех главных напряжений одно будет наибольшее, другое — наименьшее, а третья — среднее между ними.

Если два главных напряжения равны между собой, например  $N_1 = N_2$ , то эллипсоид Ламе будет эллипсоидом вращения и напряженное состояние в данной точке будет симметричным относительно третьей главной оси  $Oz$ . Если все главные напряжения равны между собою:  $N_1 = N_2 = N_3$ , то эллипсоид Ламе обратится в шар и все площадки в данной точке будут главными, а напряжения на них одинаковы; это будет, например, при всестороннем сжатии или растяжении.

## § 6. Наибольшие касательные напряжения

Займемся определением наибольших касательных напряжений. Для простоты исследования снова направим оси координат  $Oxuz$  по нормальям главных площадок (т. е. вдоль главных напряжений).

Выберем произвольную площадку с внешней нормалью  $v$ , определяемой косинусами  $l, m, n$ ; полное напряжение на ней  $P_v$  согласно (1.35) будет иметь проекции

$$X_v = N_1 l; \quad Y_v = N_2 m; \quad Z_v = N_3 n.$$

Нормальное напряжение на этой площадке  $V_v$  будет согласно (1.19)

$$V_v = N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2.$$

Обозначая полное касательное напряжение на взятой площадке через  $T_v$ , будем иметь

$$P_v^2 = V_v^2 + T_v^2,$$

откуда найдем

$$\begin{aligned} T_v^2 &= P_v^2 - V_v^2 = (X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2) - V_v^2 = \\ &= (N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2) - (N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2)^2. \end{aligned} \quad (1.38)$$

При вращении площадки напряжение  $T_v$  будет изменяться, являясь функцией двух переменных, например  $l$  и  $m$ , ибо согласно (1.30)

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2;$$

учитывая это, предыдущее выражение напомним так:

$$\begin{aligned} T_v^2 &= (N_1^2 - N_3^2) l^2 + (N_2^2 - N_3^2) m^2 + N_3^2 - \\ &- [(N_1 - N_3) l^2 + (N_2 - N_3) m^2 + N_3]^2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для получения  $\frac{\max}{\min} T_v$  приравняем нулю частные производные  $T_v$  по  $l$  и  $m$ ; однако удобнее составить другие условия:

$$\frac{\partial T_v^2}{\partial l} = 2T_v \frac{\partial T_v}{\partial l} = 0;$$

$$\frac{\partial T_v^2}{\partial m} = 2T_v \frac{\partial T_v}{\partial m} = 0.$$

Заметим только, что при этом, кроме нужных нам решений, получим лишнее решение  $T_v = 0$ , которое, очевидно, даст главную площадку; это решение мы далее легко обнаружим и отбросим. Раскрывая предыдущие условия, на основании (1.39) получим два уравнения для определения  $l$  и  $m$ :

$$(N_1^2 - N_3^2) l - 2[(N_1 - N_3)l^2 + (N_2 - N_3)m^2 + N_3](N_1 - N_3) l = 0;$$

$$(N_2^2 - N_3^2) m - 2[(N_1 - N_3)l^2 + (N_2 - N_3)m^2 + N_3](N_2 - N_3) m = 0.$$

Рассмотрим наиболее общий случай, когда  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  различны между собою; тогда предыдущие уравнения можно сократить на входящие в них разности главных напряжений и после небольшого преобразования представить так:

$$\left. \begin{aligned} \{N_1 - N_3 - 2[(N_1 - N_3)l^2 + (N_2 - N_3)m^2]\} l &= 0; \\ \{N_2 - N_3 - 2[(N_1 - N_3)l^2 + (N_2 - N_3)m^2]\} m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Имеем два уравнения третьей степени относительно  $l$  и  $m$ ; соответственно этому получим три решения, легко обнаруживаемые. Первое и наиболее простое из них, при котором

$$l = m = 0, \quad n = 1,$$

придется отбросить, так как оно дает главную площадку, лежащую в плоскости  $Oxy$ . Поэтому надо будет рассмотреть три случая:

$$1) l \neq 0; m = 0; \quad 2) l = 0; m \neq 0; \quad 3) l \neq 0; m \neq 0.$$

Однако третий случай невозможен, ибо тогда, сокращая уравнения (1.40) соответственно на  $l$  и  $m$  и вычитая одно из другого, сразу получим

$$N_1 = N_2,$$

что противоречит начальному предположению. В первом случае ( $l \neq 0; m = 0$ ) второе из уравнений (1.40) будет удовлетворено, а первое по сокращении на  $l$  приведет к виду

$$(N_1 - N_3)(1 - 2l^2) = 0, \quad (1.41)$$

откуда

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m = 0; \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Во втором случае из второго уравнения (1.40) аналогично получим

$$l = 0; \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если бы мы в самом начале исключили из (1.38) не  $n$ , а, например,  $m$  и повторили исследование, то получили бы дополнительно еще одно решение:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n = 0.$$

Каждое из найденных трех решений определяет две площадки, проходящие через одну из осей координат и наклоненные к двум другим осям под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$ .

Подставляя первое решение в (1.38), получим искомое максимальное (или минимальное) значение касательного напряжения:

$$T_v^2 = \frac{N_1^2 + N_3^2}{2} - \left( \frac{N_1 + N_3}{2} \right)^2 = \left( \frac{N_1 - N_3}{2} \right)^2;$$

заменяя обозначение  $T_v$  на  $T_2$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \pm \frac{N_1 - N_3}{2}; \\ \text{остальные два решения дадут аналогично} \\ T_1 &= \pm \frac{N_2 - N_3}{2}; \\ T_3 &= \pm \frac{N_1 - N_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Делаем окончательный вывод из выполненного исследования. Три взаимно перпендикулярные главные площадки в точке  $M$  образуют трехгранник. Если (рис. 18) оси  $Mx$ ,  $Mu$ ,  $Mz$  представляют линии их пересечения, то три пары площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, проходят через эти оси и делят пополам двугранные углы между главными площадками.

Максимальные касательные напряжения согласно (1.42) равны полуразностям главных напряжений по двум площадкам, пересекающимся вдоль той из осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , через которую проходит данная площадка  $\text{max } T$ .

Если

$$N_1 > N_2 > N_3,$$

то из напряжений (1.42) наибольшим будет

$$T_2 = \pm \frac{N_1 - N_3}{2}.$$

Если, например,

$$N_1 = N_2 > N_3,$$

то квадрिका Коши и эллипсоид Ламе будут поверхностями вращения вокруг оси  $Mz$ ; все площадки, проходящие через ось  $Mz$  (их имеется бесконечное множество), будут главными. Площадок, на

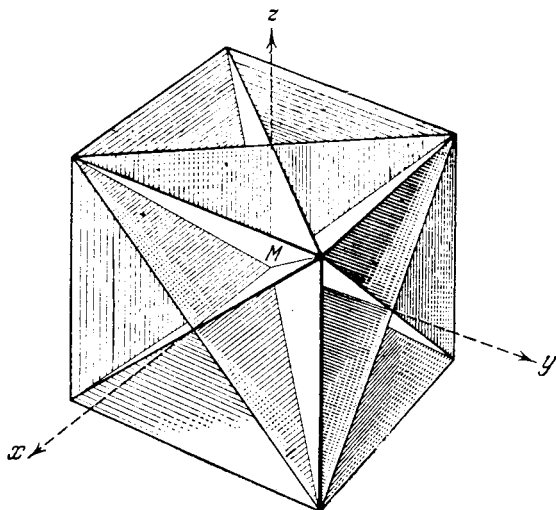


Рис. 18.

которых  $\tau = T = T_2$ , имеется также бесконечное множество; они касаются круглого конуса с осью  $Mz$  и углом раствора  $90^\circ$ .

### \* § 7. Октаэдрические площадки и октаэдрические напряжения \*)

Формулы (1.19) и (1.38) позволяют найти нормальное и касательное напряжения по любой площадке в данной точке, если известны главные площадки и главные напряжения. Пользуясь этим, найдем напряжения на площадках, равно наклоненных к главным площадкам. В восьми октантах координатной системы можно построить восемь таких площадок, образующих октаэдр (восьмигранник); они носят название октаэдрических; напряжения на них также называются *октаэдрическими*.

Направляющие косинусы нормалей к этим площадкам будут:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

\*) Здесь и в дальнейшем звездочкой отмечены те главы, параграфы и отдельные части их, которые при первом ознакомлении с предметом читатель может опустить без ущерба для понимания последующего.

Подставляя эти значения в (1.19) и (1.38), имеем:

$$V_v = N_0 = \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3) = \frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z); \quad (1.43)$$

квадрат касательного октаэдрического напряжения:

$$\begin{aligned} T_0^2 &= \frac{1}{9}(2N_1^2 + 2N_2^2 + 2N_3^2 - 2N_1N_2 - 2N_2N_3 - 2N_3N_1) = \\ &= \frac{1}{9}[(N_1 - N_2)^2 + (N_2 - N_3)^2 + (N_3 - N_1)^2]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

### \* § 8. Шаровой тензор и девиатор напряжений

Октаэдрическое нормальное напряжение можно назвать средним нормальным напряжением в данной точке тела; пользуясь им, построим напряженное состояние в данной точке, выражаемое следующим тензором напряжений:

$$\begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{pmatrix}; \quad (1.45)$$

в этом случае все три главных напряжения одинаковы, а значит, одинаковы напряжения по всем площадкам в данной точке; поверхность напряжений Коши и эллипсоид напряжений Ламе являются шарами, и потому тензор (1.45) называется *шаровым*. Для удобства введем понятие о сложении (вычитании) тензоров. Суммой (разностью) двух тензоров называют тензор, компоненты которого равны суммам (разностям) соответственных компонентов этих тензоров.

Возьмем произвольный тензор напряжений

$$(S) = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

К нему добавим и затем вычтем из него шаровой тензор (1.45), где  $N_0$  имеет значение (1.43):

$$(S) = \begin{pmatrix} X_x - N_0 & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y - N_0 & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z - N_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Таким образом, тензор напряжений в общем случае может быть представлен в виде суммы двух тензоров. Первый из этих тензоров носит название *девиатора напряжений*; для краткости обозначим его через  $(D_S)$ .

Представление тензора напряжений в форме (1.47) имеет большое принципиальное значение при исследовании поведения упругих и пластических тел под нагрузкой, однако уже сейчас нетрудно

усмотреть важность разложения напряженного состояния (1.45) на два слагаемых состояния (1.47). Шаровой тензор (1.45) выделяет из произвольного напряженного состояния равномерное всестороннее растяжение (сжатие) во всех направлениях, при котором изменяется лишь объем данного элемента тела без изменения его формы; поэтому девиатор ( $D_S$ ) выражает такое состояние элемента, при котором изменяется форма элемента без изменения объема его.

Рассмотрим инварианты девиатора. Первый (линейный) инвариант его равен нулю, так как исключено всестороннее растяжение — сжатие; действительно, пользуясь формулами (1.33), получим

$$\begin{aligned}\Theta &= (X_x - N_0) + (Y_y - N_0) + (Z_z - N_0) = \\ &= X_x + Y_y + Z_z - 3 \frac{X_x + Y_y + Z_z}{3} = 0.\end{aligned}\quad (1.48)$$

Второй (квадратичный) инвариант будет

$$\begin{aligned}H &= (Y_y - N_0)(Z_z - N_0) + (X_x - N_0)(Z_z - N_0) + \\ &+ (X_x - N_0)(Y_y - N_0) - Y_z Z_y - Z_x X_z - Y_x X_y = Y_y Z_z + X_x Z_z + \\ &+ X_x Y_y - 2(X_x + Y_y + Z_z)N_0 + 3N_0^2 - Y_x^2 - Z_x^2 - X_y^2 = Y_y Z_z + \\ &+ X_x Z_z + X_x Y_y - 3N_0^2 - Y_z^2 - Z_x^2 - X_y^2 = \\ &= \frac{1}{3} [Y_y Z_z + X_x Z_z + X_x Y_y - X_x^2 - Y_y^2 - Z_z^2 - 3Y_z^2 - 3Z_x^2 - 3X_y^2] = \\ &= -\frac{1}{6} [(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_x + Y_y + Z_x)^2].\end{aligned}\quad (1.49)$$

Если за оси координат примем главные оси, т. е. положим

$$X_x = N_1; \quad Y_y = N_2; \quad Z_z = N_3; \quad X_y = Y_z = Z_x = 0,$$

то это выражение упростится и получит вид

$$H = -\frac{1}{6} [(N_1 - N_2)^2 + (N_2 - N_3)^2 + (N_3 - N_1)^2], \quad (1.50)$$

т. е. с точностью до численного множителя совпадает с квадратом октаэдрического касательного напряжения (1.44).

Третий (кубичный) инвариант будет

$$\Lambda = \begin{vmatrix} X_x - N_0 & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y - N_0 & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z - N_0 \end{vmatrix}.$$

Для простоты здесь также примем за оси координат главные оси; тогда, раскрывая определитель, получим

$$\Lambda = (N_1 - N_0)(N_2 - N_0)(N_3 - N_0). \quad (1.51)$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что это выражение представимо в другом виде:

$$\Lambda = \frac{1}{3} [(N_1 - N_0)^3 + (N_2 - N_0)^3 + (N_3 - N_0)^3]. \quad (1.52)$$

Тогда очевидно, что

$$\sqrt[3]{\Lambda} = \sqrt[3]{\frac{1}{3} [(N_1 - N_0)^3 + (N_2 - N_0)^3 + (N_3 - N_0)^3]}$$

представляет собой среднее кубичное уклонение данного напряженного состояния  $(N_1, N_2, N_3)$  от среднего гидростатического напряжения

$$N_0 = \frac{1}{3} (N_1 + N_2 + N_3). \quad (1.53)$$

Обратимся снова к квадратичному инварианту (1.50) и перепишем его так:

$$II = -\frac{1}{3} (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - N_1 N_2 - N_2 N_3 - N_3 N_1). \quad (1.54)$$

Теперь по аналогии с (1.52) составим квадрат среднего квадратичного уклонения данного напряженного состояния  $(N_1, N_2, N_3)$  от среднего гидростатического напряжения (1.53):

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{3} [(N_1 - N_0)^2 + (N_2 - N_0)^2 + (N_3 - N_0)^2] = \\ &= \frac{1}{3} (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - 3N_0^2). \end{aligned}$$

Подставим сюда значение  $N_0$  из (1.43), найдем, что

$$\Delta^2 = \frac{2}{9} (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - N_1 N_2 - N_2 N_3 - N_3 N_1),$$

а отсюда, сравнивая с (1.54):

$$\Delta^2 = -\frac{2}{3} II. \quad (1.55)$$

Теперь, сопоставляя (1.48), (1.52) и (1.55), приходим к заключению, что линейный инвариант девиатора напряжений указывает на отсутствие сжатия — растяжения «в среднем»; квадратичный и кубичный инварианты характеризуют соответственно средние квадратичное и кубичное уклонения напряженного состояния  $N_1, N_2, N_3$  от среднего гидростатического напряжения, соответствующего тензору напряжений в данной точке тела\*).

\*) Толкование квадратичного инварианта как среднего квадратичного уклонения впервые указано В. В. Новожиловым (1952 г.) и С. Д. Пономаревым (1953 г.).

### § 9. Обобщение закона взаимности напряжений. Примеры

В заключение этой главы обобщим закон взаимности касательных напряжений (1.6).

Рассмотрим (рис. 19) две площадочки с нормальными  $x$  и  $v$ , проходящие через точку  $M$ , и пусть полные напряжения по ним будут соответственно:  $P_x$  и  $P_v$ . Согласно принятым нами обозначениям

$$P_v \cos(P_v x) = X_v.$$

Далее,

$$X_x = P_x \cos(P_x x); \quad Y_x = P_x \cos(P_x y);$$

$$Z_x = P_x \cos(P_x z).$$

Внося это в первое из уравнений (1.8) и учитывая (1.6), получим

$$\begin{aligned} P_v \cos(P_v x) = X_v &= P_x [\cos(vx) \cos(P_x x) + \\ &+ \cos(vy) \cos(P_x y) + \cos(vz) \cos(P_x z)] = \\ &= P_x \cos(P_x v), \end{aligned}$$

но опять, согласно нашим обозначениям,

$$P_x \cos(P_x v) = V_x;$$

таким образом,

$$X_v = V_x; \quad (1.56)$$

значит, проекции полных напряжений  $P_v$  и  $P_x$  по взятым площадкам соответственно на нормали  $x$  и  $v$  к этим площадкам (см. рис. 19) равны между собой. Закон взаимности (1.6) получается отсюда как частный случай, если площадки взаимно перпендикулярны между собой.

Упражнения к §§ 2—4.

1. В стенке плотины, изображенной на рис. 5, найдены следующие напряжения:

$$X_x = -\gamma y; \quad Y_y = \left( \frac{p}{\text{tg}^2 \beta} - \frac{2\gamma}{\text{tg}^3 \beta} \right) x + \left( \frac{\gamma}{\text{tg}^2 \beta} - p \right) y; \quad Y_x = X_y = -\frac{\gamma}{\text{tg}^2 \beta} x;$$

$$Y_x = Z_y = X_z = Z_x = Z_z = 0.$$

Подставить эти выражения в уравнения (1.5) и проверить, при каких условиях они будут удовлетворены. Найти нагрузку, действующую по грани  $Oy$  (т. е. при  $x=0$ ); пользуясь условиями (1.8), найти также нагрузку по грани  $OA$  (при  $x=y \text{ tg} \beta$ ).

2. В круглом стержне диаметра  $2r$  (рис. 7) возникают следующие напряжения:

$$X_x = Y_v = Z_z = X_y = Y_x = 0; \quad X_z = Z_x = -G\tau y; \quad Y_z = Z_y = G\tau x.$$

Проверить, удовлетворяют ли они уравнениям (1.5) и при каких условиях. Доказать при помощи уравнений (1.8), что боковая поверхность свободна от нагрузки (т. е. что  $X_v = Y_v = Z_v = 0$ ).



У к а з а н и е: для точки на боковой поверхности

$$\cos(vx) = \frac{x}{r}; \quad \cos(vy) = \frac{y}{r}.$$

3. При чистом изгибе прямого стержня (при системе координатных осей по рис. 8) возникают напряжения:

$$X_x = -\frac{Ez}{\rho}; \quad Y_y = Z_z = X_y = Y_z = Z_x = 0.$$

Выполнить то же, что в предыдущем упражнении.

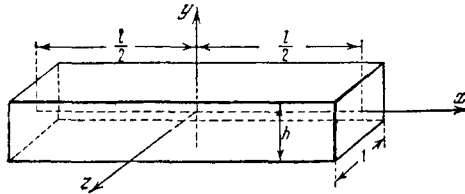


Рис. 20.

4. В одном из случаев изгиба бруса прямоугольного сечения получаются следующие напряжения (рис. 20):

$$X_x = \frac{12}{h^3} \left( M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3;$$

$$Y_y = -\frac{6q}{h^3} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right);$$

$$X_y = -\frac{6q}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) x;$$

$$Y_z = Z_x = Z_z = 0.$$

Проверить, удовлетворяют ли эти напряжения уравнениям (1.5); найти нагрузки, действующие по граням бруса.

## ГЛАВА II

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

#### § 10. Компоненты перемещения и компоненты деформации. Зависимость между ними

Возьмем какое-либо упругое тело и закрепим его так, чтобы оно не могло перемещаться, как тело абсолютно твердое. Тогда перемещения всякой точки его будут вызываться только деформациями.

Рассмотрим какую-либо точку  $M(x, y, z)$  закрепленного таким образом твердого тела (рис. 21). Благодаря происшедшей деформации точка  $M$  переместится в новое положение  $M'$ . Назовем проекции перемещения  $MM'$  на оси координат через

$$u, v, w; \quad (2.1)$$

так как перемещения различных точек будут различны, то *проекции перемещений* (2.1) *будут функциями от координат точки:*

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z); \\ v &= f_2(x, y, z); \\ w &= f_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

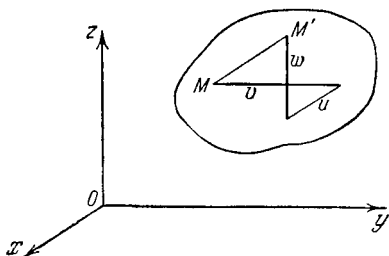


Рис. 21.

От перемещений переходим к деформациям. Выделим в упругом теле бесконечно малый параллелепипед (рис. 22) с ребрами  $dx, dy, dz$ . При деформации тела он переместится и сам деформируется, причем изменятся длины его ребер и первоначально прямые углы между гранями исказятся.

Для оценки деформации упругого тела в данной точке  $M$  следует изучить удлинения (линейные деформации) ребер  $dx, dy, dz$  выделенного параллелепипеда и изменения углов  $1M2, 1M3, 2M3$  (сдвиги или угловые деформации). С этой целью рассмотрим проекции параллелепипеда на координатные плоскости; очевидно, что по деформации этих трех проекций можно судить и о деформации

самого параллелепипеда. В дальнейшем ограничимся только случаем весьма малых деформаций, позволяющим сильно упростить последующие выводы.

Возьмем, например, проекцию элемента  $M123$  на плоскость  $Oxy$ . До деформации длины ребер были (рис. 23):  $AB = dx$ ,  $AC = dy$ . После деформации они перешли в положение  $A'B'$  и  $A'C'$ . Займемся проекцией  $AB$ . Если перемещение точки  $A$  вдоль оси  $Ox$  равно  $u$ , то соответственное перемещение точки  $B$  будет

$$u + \delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

где  $\delta u$  — приращение; так как точка  $B$  отличается от точки  $A$  только координатой  $x$ , то в последней формуле малое приращение  $\delta u$  с точностью до бесконечно малых второго порядка мы заменили частным дифференциалом функции  $u$  по переменной  $x$ . Аналогично: если перемещение точки  $A$  вдоль оси  $Oy$  будет  $v$ , то перемещение точки  $B$  вдоль той же оси выразим так:

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Проекция абсолютного удлинения отрезка  $AB$  на ось  $Ox$  будет

$$\delta(dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx;$$

относительное удлинение этого ребра

$$e_{xx} = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Рассуждая аналогично, для относительного удлинения ребра  $AC$ , направленного вдоль оси  $Oy$ , получим

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

таким же путем для ребра, параллельного оси  $Oz$  (т. е. ребра  $M3$  на рис. 22), будем иметь

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

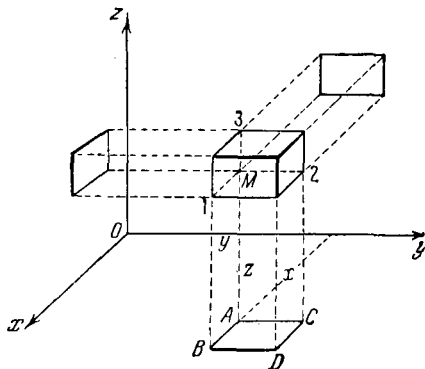


Рис. 22.

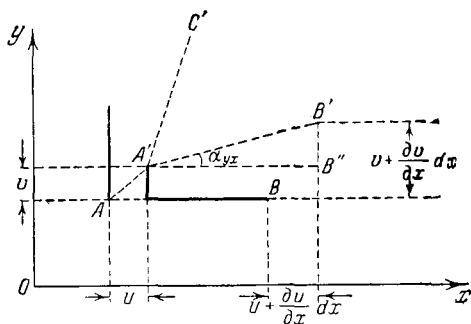


Рис. 23.

Мы получили формулы линейных деформаций (удлинений) в данной точке  $M$  тела по направлениям трех осей координат.

Обратимся к анализу угловых деформаций. Легко найдем угол  $\alpha_{yx}$  поворота ребра  $AB = dx$  в плоскости  $Oxy$ :

$$\alpha_{yx} \approx \operatorname{tg} \alpha_{yx} = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Так как мы ограничились случаем весьма малых деформаций, то в знаменателе последнего выражения отбросим величину  $\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}$ , которая весьма мала по сравнению с единицей; получаем

$$\alpha_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Аналогично получим угол поворота ребра  $AC = dy$  в плоскости  $Oxy$ :

$$\alpha_{xy} \approx \operatorname{tg} \alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.4)$$

После этого легко найдем относительный сдвиг, т. е. искажение прямого угла  $BAC$ :

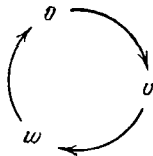
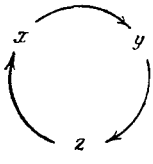


Рис. 24.

$$e_{xy} = \alpha_{yx} + \alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) дает выражение угла сдвига, происходящего в плоскости  $Oxy$ .

Аналогично получим выражения сдвигов в двух других координатных плоскостях при помощи круговой подстановки букв по схеме рис. 24.

Собирая достигнутые результаты, получаем шесть основных зависимостей, характеризующих деформацию:

а) относительные удлинения

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z};$$

б) относительные сдвиги

$$\left. \begin{aligned} e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Эти уравнения были выведены Коши.

Иногда в формулы (2.6) вводятся половины углов сдвига:

$$\bar{e}_{xy} = \frac{1}{2} e_{xy}; \quad \bar{e}_{yz} = \frac{1}{2} e_{yz}; \quad \bar{e}_{zx} = \frac{1}{2} e_{zx},$$

и тогда последние три из них запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{e}_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ 2\bar{e}_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\bar{e}_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6a)$$

В этом виде они иногда оказываются более удобными.

Относительно знаков деформаций  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$ ,  $e_{yz}$ ,  $e_{zx}$ ,  $e_{xy}$  заметим следующее. Если функция  $u$  возрастает с возрастанием  $x$ , т. е.  $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} > 0$ , то мы, очевидно, имеем дело с увеличением длины  $dx$  (перемещение вправо точки  $B$  по рис. 23 более перемещение точки  $A$ ). Значит, если  $e_{xx} > 0$ , то получается удлинение, если  $e_{xx} < 0$ , то получается укорочение; то же правило справедливо для  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$ . Далее, если функция  $v$  возрастает с возрастанием  $x$ , то [формула (2.3)]  $\alpha_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} > 0$ ; при этом (рис. 23) отрезок  $AB$  поворачивается от оси  $+x$  к оси  $+y$ ; точно так же при  $\alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} > 0$  отрезок  $AC$  поворачивается от оси  $+y$  к оси  $+x$ . Отсюда, согласно (2.5), следует, что сдвиг  $e_{xy} > 0$ , если прямой угол между осями  $+x$  и  $+y$  уменьшается. Такое же правило получается и для сдвигов в двух других плоскостях. Резюмируя сказанное, получаем следующее правило знаков деформаций:

а) положительным линейным деформациям  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$  соответствуют удлинения вдоль осей координат; отрицательным — укорочения;

б) положительным угловым деформациям (сдвигам)  $e_{yz}$ ,  $e_{zx}$ ,  $e_{xy}$  соответствует уменьшение углов между положительными направлениями осей; отрицательным — увеличение тех же углов.

Формулы (2.6) показывают, что шесть функций  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$ ,  $e_{yz}$ ,  $e_{zx}$ ,  $e_{xy}$ , называемых компонентами деформации, линейно выражаются через девять частных производных от компонентов перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Компоненты главной диагонали этой матрицы являются удлинениями [см. первые три зависимости (2.6)]. Остальные компоненты представляют собой углы поворота ребер элементарного параллелепипеда  $M123$ , показанного на рис. 22, вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; это видно, например, из формул (2.3) и (2.4); в принятых там обозначениях матрицу (2.7) напомним так:

$$\left. \begin{array}{lll} e_{xx} & \alpha_{yx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} & e_{yy} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yz} & e_{zz} \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Эти обозначения удобны; второй индекс при букве  $\alpha$  указывает на тот элементарный отрезок ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ), поворот которого рассматривается; первый индекс указывает ось, в направлении которой происходит поворот. Например,  $\alpha_{zy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  обозначает угол поворота элемента  $dy$  в направлении от оси  $y$  к оси  $z$ .

Отметим тот важный факт, что невозможно составить систему уравнений, обратных уравнениям (2.6), т. е. выразить девять компонентов матрицы (2.7) через шесть компонентов деформаций (2.6); уравнений (2.6) для этого недостаточно. Причина такого обстоятельства лежит в том, что наша геометрическая картина деформаций в данной точке еще не полна; для довершения ее и достижения симметрии в выкладках введем еще три компонента; пусть элемент  $M123$  на рис. 22 имеет форму куба ( $dx = dy = dz$ ), и рассмотрим углы поворота его диагоналей вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в том случае,

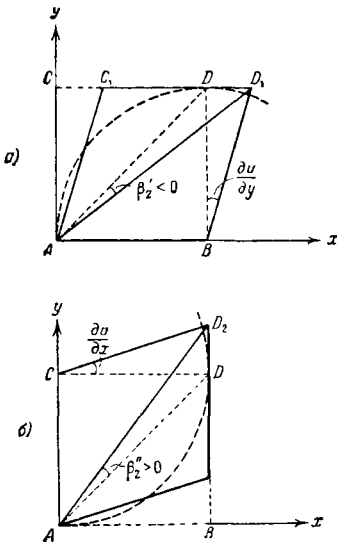


Рис. 25.

когда удлинения  $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0$ ; на рис. 25, а показана проекция  $ABCD$  взятого куба на плоскость  $Axy$ .

Очевидно, угол поворота диагонали куба вокруг оси  $z$  равен углу поворота проекции  $AD$  этой диагонали вокруг точки  $A$ . Возьмем пока частный случай «простого сдвига» параллельно оси  $x$  (рис. 25, а); тогда для угла поворота  $\beta'_z$  диагонали  $AD$  получим

$$\beta'_z = \angle DAD_1 \approx \frac{1}{2} \angle DBD_1.$$

В этом убедимся, если построим окружность  $ADD_1$ , с центром в  $B$ , и примем с точностью до малых второго порядка, что точка  $D_1$

также лежит на этой окружности; тогда углы  $DAD_1$  и  $DBD_1$  опираются на общую дугу  $DD_1$ ; отсюда и вытекает вышенаписанное приближенное равенство; из него следует, что

$$\beta'_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Знак минус взят потому, что в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0, \text{ а } \beta'_z < 0 *).$$

В случае простого сдвига вдоль оси  $y$  (рис. 25, б) найдем аналогично

$$\beta''_z = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

В общем случае сдвига будем иметь

$$\beta_z = \beta'_z + \beta''_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\alpha_{xy} - \alpha_{yx}).$$

Проведя такие же рассуждения для плоскостей  $yz$  и  $zx$ , получим аналогичные формулы для углов поворота диагонали элементарного кубика относительно осей  $x$  и  $y$ . Обычно вводятся удвоенные углы поворота; обозначаются они через  $2\omega$  с соответствующими индексами. Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \\ 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  называются компонентами вращения; для полноты картины деформаций в данной точке следует к уравнениям (2.6) добавить уравнения (2.9). Просмотрим эту картину в простом, но очень важном случае, когда перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  являются линейными функциями координат точки, а именно:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z; \\ v &= v_0 + c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z; \\ w &= w_0 + c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Компоненты деформации (2.6) и компоненты вращения (2.9) будут при этом постоянными числами; такая деформация называется

\*) Принимаем, как обычно в кинематике, что вращение вокруг оси против часовой стрелки положительно.

однородной. При деформации данное тело преобразуется в некоторое другое тело; каждая точка  $(x, y, z)$  переходит в другую точку:

$$\begin{aligned}x_1 &= x + u; \\y_1 &= y + v; \\z_1 &= z + w.\end{aligned}$$

Очевидно, что в случае однородной деформации (2.10) каждая плоскость (или прямая) переходит в плоскость (или прямую); при этом две параллельные плоскости (или прямые) переходят также в две параллельные плоскости (или прямые); прямой параллелепипед преобразуется, вообще говоря, в косой параллелепипед. Так как при выводе уравнений (2.6) мы отбрасывали малые величины высшего порядка, то деформация, определяемая этими уравнениями, в общем случае будет однородной только в весьма малой области, выделенной в теле, значит, элементарный параллелепипед  $M1Z3$  (рис. 22) и в общем случае обратится в косой параллелепипед; противоположные грани его останутся плоскими и взаимно параллельными.

Рассмотрим еще уравнения (2.10) в том случае, когда все компоненты деформации (2.6) равны нулю и тело не деформируется; легко найдем, что тогда

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0; \quad c_{21} = -c_{12}; \quad c_{32} = -c_{23}; \quad c_{31} = -c_{13}.$$

Вводя более краткие обозначения:

$$c_{32} = p; \quad c_{13} = q; \quad c_{21} = r,$$

напишем (2.10) так:

$$\left. \begin{aligned}u &= u_0 + qz - ry; \\v &= v_0 + rx - pz; \\w &= w_0 + py - qx.\end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Эти формулы совпадают с формулами кинематики для бесконечно малых перемещений абсолютно твердого тела;  $u_0, v_0, w_0$  — поступательные перемещения тела;  $p, q, r$  — углы поворота вокруг осей координат. Далее имеем

$$\left. \begin{aligned}2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = c_{32} - c_{23} = 2c_{32} = 2p; \quad \omega_x = p; \\ \text{аналогично} & \\ \omega_y &= q; \quad \omega_z = r;\end{aligned} \right\} \quad (2.11a)$$

значит, введенные компоненты  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  в этом случае представляют собою углы поворота данного элемента вокруг осей.

В теории упругости принято говорить, что формулы (2.11) выражают «жесткое смещение тела».



Рассмотрим теперь обратный случай, когда компоненты деформации (2.6) отличны от нуля, но равны нулю компоненты вращения (2.9); тогда

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

а это есть условие того, что выражение

$$u dx + v dy + w dz$$

является полным дифференциалом некоторой функции

$$\Phi(x, y, z),$$

т. е. что

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

В этом случае говорят, что имеется «чистая деформация» и что перемещения имеют потенциал  $\Phi(x, y, z)$ .

## § 11. Уравнения неразрывности деформаций

Резюмируя предыдущие выводы, мы видим, что перемещение данной точки упругого тела определяется тремя функциями:

$$u, v, w; \tag{2.2}$$

деформация в данной точке определяется шестью функциями:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}. \tag{2.12}$$

Однако уравнения (2.6) показывают, что если заданы три функции (2.2), то этим самым будут определены все шесть составляющих деформации (2.12), выражающихся через первые производные функций (2.2); отсюда уже наперед можно предвидеть, что шесть составляющих деформации (2.12) нельзя задать произвольно; между ними должны существовать какие-то зависимости, к выводу которых мы и переходим. Число этих зависимостей равно шести, и делятся они на две группы.

Первая группа. Продифференцируем первые два из уравнений (2.6) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2};$$

складывая эти уравнения почленно, получаем

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Это одно из нужных нам соотношений между деформациями. Делая в нем круговую подстановку букв, получим два других равенства. Это приводит нас к первой группе зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Вторая группа. Последние три из уравнений (2.6) дифференцируем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} & + \\ \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & + \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & - \end{aligned} \right|$$

Изменим знаки последнего из полученных уравнений и затем их все почленно сложим:

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Это уравнение еще раз дифференцируем по  $z$  и, замечая, что

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y},$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}. \quad (2.14)$$

Это одна из искомых зависимостей второй группы. Делая в уравнении (2.14) круговую подстановку букв, получим еще два уравнения такого же вида. Присоединяя эти зависимости к зависимостям

(2.13), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Необходимость существования этих зависимостей мы обосновали аналитическим путем, сопоставляя число функций (2.2) с числом функций (2.12) и принимая во внимание зависимости между ними (2.6); той же цели можно достичь геометрическим путем. Для этого представим себе упругое тело разрезанным на малые параллелепипеды и дадим каждому из них деформацию, определяемую шестью величинами (2.12); легко сообразим, что если составляющие деформации (2.12) не связаны между собою определенными зависимостями, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное (деформированное) твердое тело. Уравнения (2.15) и доставляют нам эти зависимости; если мы при задании деформаций (2.12) не примем их во внимание, то после деформации тела во всех точках его окажутся бесконечно малые разрывы. Эти соображения придадут новый смысл уравнениям (2.15), и с этой новой точки зрения уравнения (2.15) называются уравнениями неразрывности или совместности деформаций. Выведены они Сен-Венаном и часто называются уравнениями Сен-Венана. Сделаем еще следующее важное замечание.

Если нам удастся по заданным нагрузкам тела найти непосредственно перемещения его точек  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , то после этого деформации (2.12) можно вычислить по уравнениям (2.6); при этом условия неразрывности будут сами по себе удовлетворены, так как они выведены из уравнений (2.6) и являются их следствием\*).

Если же мы по заданным нагрузкам найдем напряжения и затем деформации (2.12), то при этом необходимо будет одновременно удовлетворить и уравнениям неразрывности (2.15); в противном случае деформации будут несовместимы, и мы не будем в состоянии

\* С этой точки зрения уравнения (2.15) иногда называют тождествами Сен-Венана.

найти перемещения (2.2) из уравнений (2.6), так как в них будут взаимные противоречия.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Введя компоненты вращения, мы получаем возможность написать систему уравнений, обратных (2.6), т. е. решить совместно уравнения (2.6) и (2.9) относительно производных (2.7) и выразить их через компоненты деформации и вращения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e_{xx}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= (\bar{e}_{xy} - \omega_z); & \frac{\partial u}{\partial z} &= (\bar{e}_{xz} + \omega_y); \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= (\bar{e}_{xy} + \omega_z); & \frac{\partial v}{\partial y} &= e_{yy}; & \frac{\partial v}{\partial z} &= (\bar{e}_{yz} - \omega_x); \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= (\bar{e}_{xz} - \omega_y); & \frac{\partial w}{\partial y} &= (\bar{e}_{yz} + \omega_x); & \frac{\partial w}{\partial z} &= e_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Теперь можно матрицу компонентов (2.7) условно представить как сумму двух матриц так, что каждый компонент матрицы (2.7) равен сумме соответственных компонентов слагаемых матриц:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Первая матрица правой части симметрична: она определяет чистую деформацию (без вращений). Вторая матрица антисимметрична: видим, что она определяет жесткий поворот тела (без деформации). Наши рассуждения можно связать с теорией тензоров \*) и тогда формулировать последний результат так: тензор малой деформации (2.7) может быть разложен на симметричный тензор чистой деформации и антисимметричный тензор жесткого вращения. Тензор (2.7) иногда называют *тензором относительных перемещений*. Действительно, рассмотрим бесконечно малый параллелепипед с ребрами  $dx = 1$ ,  $dy = 1$ ,  $dz = 1$ ; тогда очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz}$$

представляют собой перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вершин этого параллелепипеда (вдоль осей координат) относительно одной из них. Величины

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_{yx}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_{xy}, \quad \dots$$

являются углами поворота ребер его относительно начальных положений их.

\*) См. цитированную выше книгу Н. И. Мухелишвили.

Равенства (2.16) можно рассматривать как дифференциальные уравнения относительно  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Если заданы компоненты деформации и вращения во всех точках тела, то интегрированием уравнений (2.16) можно найти самые смещения точек тела  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Выполняя это интегрирование, мы действительно убедимся в необходимости удовлетворить условиям неразрывности деформации (2.6).

Обратимся к уравнениям первой строки (2.16), из которых будем разыскивать функцию  $u(x, y, z)$ ; замечаем, что по смыслу этих уравнений правые части их должны быть частными производными одной и той же функции; для этого должны быть удовлетворены три условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{e}_{xy} - \omega_z); & \frac{\partial e_{xx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{e}_{xz} + \omega_y); \\ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{e}_{xz} + \omega_y) &= \frac{\partial}{\partial z} (\bar{e}_{xy} - \omega_z), \end{aligned} \quad (2.18)$$

которые являются результатом исключения функции  $u$  из уравнений (2.16). Из (2.18) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{e}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= -\frac{\partial \bar{e}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xx}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{e}_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{e}_{xz}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение упрощается на основании следующего тождества, которое получается путем дифференцирования равенств (2.9):

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0, \quad (2.19)$$

и тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{e}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= -\frac{\partial \bar{e}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xx}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{e}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{e}_{xy}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Проделявая такие же выкладки со второй и третьей строками уравнений (2.16), исключим из них  $v$  и  $w$  и в дополнение к (2.20) получим еще шесть уравнений; таким путем все девять частных производных от компонентов вращения будут выражены через частные производные от компонентов деформации; другими словами, для  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  мы получим систему уравнений, аналогичных уравнениям (2.16)

для  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Значит, к полученным таким путем уравнениям можно применить весь описанный сейчас процесс и в результате исключить из них  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ; получим опять девять равенств, но они будут содержать только вторые производные от компонентов деформации. Среди этих равенств лишь шесть различны, и они совпадут с уравнениями (2.15). Таким образом, уравнения неразрывности Сен-Венана (2.15) действительно являются необходимыми условиями для возможности определить из (2.6) перемещения по заданным компонентам деформаций.

Условия Сен-Венана одновременно и достаточны для этой цели, если мы рассматриваем тело односвязное, не имеющее сквозных полостей. В случае многосвязного тела условия Сен-Венана также позволяют определить перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , интегрируя уравнения Коши (2,6); однако теперь эти перемещения могут представиться многозначными функциями от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; кроме условий Сен-Венана, необходимо ввести некоторые дополнительные условия для того, чтобы перемещения были однозначны, как этого требует физический характер задачи.

Случай деформации многосвязного тела подробно разобран в главе I и добавлении II цитированной выше книги Н. И. Мухелишвили.

## \* § 12. Тензорный характер деформации тела в данной точке

В главе I мы ввели понятие о тензоре напряжений; с точки зрения общей теории тензоров формальным и вместе с тем основным признаком тензорного характера напряженного состояния в данной точке является то, что при переходе от координатных площадок к какой-либо произвольной площадке с внешней нормалью  $\nu$  компоненты напряжений  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$  выражаются формулами (1.8а), линейными относительно исходных компонентов (1.16), а также относительно направляющих косинусов  $l$ ,  $m$ ,  $n$ . При полном преобразовании, с переходом от осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  к новым осям  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , компоненты напряженного состояния выражаются через исходные по формулам вида (1.12) и (1.13), являющимся линейными относительно исходных компонентов (1.16) и квадратичными (или так называемыми билинейными) относительно направляющих косинусов новой системы (1.10).

В этом параграфе мы покажем, что деформация тела в данной точке, определяемая девятью компонентами матрицы (2.7), также является тензором с указанной сейчас точки зрения.

Деформация в данной точке тела будет вполне определена, если мы можем вычислить относительное удлинение любого бесконечно малого отрезка, проведенного из данной точки. Поэтому рассмотрим (рис. 26) такой отрезок  $AB = \rho$ . Назовем проекции его на оси координат через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . На чертеже показаны координаты начальной точки  $A$  отрезка и конечной точки  $B$ . В процессе деформации эти точки займут новые положения  $A_1$  и  $B_1$ ; координаты их также по-

казаны на рис. 26. Проекции деформированного отрезка  $A_1B_1$  на оси координат получим, очевидно, путем вычитания начальных координат из новых, например:

$$\xi_1 = x + \xi + u + \delta u - (x + u) = \xi + \delta u; \quad (2.21a)$$

таким же путем найдем

$$\eta_1 = \eta + \delta v; \quad \zeta_1 = \zeta + \delta w. \quad (2.21б)$$

Очевидно, величины

$$\xi_1 - \xi = \delta \xi; \quad \eta_1 - \eta = \delta \eta; \quad \zeta_1 - \zeta = \delta \zeta \quad (2.22)$$

представляют собой приращения проекций отрезка  $\rho$  в процессе деформации тела, а величины  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  являются приращениями

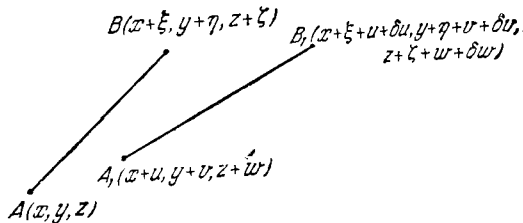


Рис. 26.

функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  при переходе от точки  $A$  к точке  $B$ , т. е. при изменении независимых переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на величины

$$dx = \xi; \quad dy = \eta; \quad dz = \zeta.$$

Эти величины бесконечно малы вследствие бесконечной малости отрезка  $\overline{AB} = \rho$ ; поэтому бесконечно малые приращения их дифференциалами (отбрасывая бесконечно малые высших порядков):

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta; \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta; \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta; \end{aligned}$$

тогда формулы (2.21а, б) получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi &= \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta; \\ \delta \eta &= \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta; \\ \delta \zeta &= \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Разделим эти равенства на первоначальную длину отрезка  $\rho$  и введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{\rho} &= l; & \frac{\eta}{\rho} &= m; & \frac{\zeta}{\rho} &= n; \\ \frac{\delta\xi}{\rho} &= e_{x\rho}; & \frac{\delta\eta}{\rho} &= e_{y\rho}; & \frac{\delta\zeta}{\rho} &= e_{z\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Здесь  $l, m, n$  являются направляющими косинусами начального отрезка  $AB$ ;  $e_{x\rho}, e_{y\rho}, e_{z\rho}$  — удлинения проекций этого отрезка, отнесенные к длине его. Тогда формулы (2.23) получат вид

$$\left. \begin{aligned} e_{x\rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n; \\ e_{y\rho} &= \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n; \\ e_{z\rho} &= \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Эти зависимости построены аналогично зависимостям (1.8а), в которых величины

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$$

представляют собой компоненты тензора напряжений; значит, компоненты матрицы (2.7), входящие в зависимости (2.25), являются компонентами тензора, названного нами тензором относительных перемещений; однако в отличие от (1.16) этот тензор несимметричен, так как, вообще говоря,

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \neq \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Эти неравенства переходят в равенства только при отсутствии вращения в данной точке тела ( $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ), т. е. в случае чистой деформации (см. конец § 10).

Левые части равенств (1.8а) и (2.25) также аналогичны по своему смыслу; это проекции на оси координат: в первом случае — проекции полного напряжения на площадке с внешней нормалью  $\nu(l, m, n)$ ; во втором случае — величины, пропорциональные удлинениям проекций отрезка, имеющего направляющие косинусы  $l, m, n$ .

Рассмотрим теперь удлинение самого отрезка  $AB = \rho$ ; так как

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

то удлинение это с точностью до бесконечно малых второго порядка получим из равенства

$$\rho \delta\rho = \xi \delta\xi + \eta \delta\eta + \zeta \delta\zeta.$$

Разделив обе части этого равенства на  $\rho^2$ , получим

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\xi}{\rho} \frac{\delta\xi}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\delta\eta}{\rho} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\delta\zeta}{\rho}.$$



Левая часть представляет собой относительное удлинение отрезка  $\rho$ :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = e_\rho;$$

пользуясь обозначениями (2.24) и равенствами (2.25), найдем:

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) lm + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) mn + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) nl \quad (2.26)$$

или на основании уравнений Коши (2.6):

$$e_\rho = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + 2\bar{e}_{xy}lm + 2\bar{e}_{yz}mn + 2\bar{e}_{zx}nl. \quad (2.27)$$

Равенства (2.26) и (2.27) окончательно подтверждают тензорный характер величин, составляющих матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{yx} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{zx} & \bar{e}_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

так как, зная компоненты этих матриц, мы можем найти относительное удлинение произвольного отрезка  $\rho$ , проведенного из данной точки; этим, очевидно, вполне определяется деформация тела в данной точке, подобно тому как знание девяти компонентов тензора напряжений (1.16) вполне определяет напряженное состояние в данной точке тела, т. е. позволяет определить напряжения на любой площадке, проведенной через эту точку. В зависимость (2.27) и во вторую из матриц (2.28) введены половины углов сдвига  $\bar{e}_{xy}$ ,  $\bar{e}_{yz}$ ,  $\bar{e}_{zx}$  (срав. 2.6а); при этом зависимость (2.27) получила вид, вполне аналогичный (1.19). Первую из матриц (2.28) мы назвали тензором относительных перемещений, теперь можно установить, что вторая матрица определяет *тензор деформации* в данной точке. Зависимость (1.19) позволила дать геометрическую картину распределения напряжений в данной точке при помощи поверхности напряжений Коши; зависимость (2.27) дает возможность дать такую же картину для описания деформации тела в данной точке. Действительно, умножим обе части равенства (2.27) на  $\rho^2$  и примем во внимание первую строку обозначений (2.24); тогда оно переписывается так:

$$\rho^2 e_\rho = e_{xx}\xi^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + 2\bar{e}_{xy}\xi\eta + 2\bar{e}_{yz}\eta\zeta + 2\bar{e}_{zx}\xi\zeta. \quad (2.27')$$

Примем исследуемую точку тела за начало координат ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) и построим в ней вектор, равный по модулю отрезку  $\rho$ ; тогда  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$

будут координатами конца этого вектора; будем распоряжаться длиной вектора так, чтобы всегда было

$$\rho^2 e_\rho = \pm b^2, \text{ т. е. } \rho = \sqrt{\frac{\pm b^2}{l_\rho}}. \quad (2.29)$$

Тогда (2.27') превратится в уравнение поверхности второго порядка

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \pm b^2, \quad (2.30)$$

где

$$F(\xi, \eta, \zeta) = e_{xx}\xi^2 + e_{yy}\eta^2 + e_{zz}\zeta^2 + 2\bar{e}_{xy}\xi\eta + 2\bar{e}_{yz}\eta\zeta + 2\bar{e}_{zx}\zeta\xi. \quad (2.31)$$

Поверхность (2.30) вполне аналогична поверхности напряжений Коши (1.23), обладает такими же свойствами и носит название *поверхности деформации*. Она является центральной поверхностью второго порядка, с центром в исследуемой точке и может быть или эллипсоидом, или совокупностью однополостного и двухполостного гиперболоидов с общим асимптотическим конусом. Если из центра ее будем строить радиусы-векторы  $\rho$  до пересечения с поверхностью, то из (2.29) будем иметь

$$e_\rho = \pm \frac{b^2}{\rho^2}.$$

Отсюда следует, что относительное удлинение в исследуемой точке тела, измеренное по направлению вектора  $\rho$ , обратно пропорционально квадрату длины этого вектора. Весь пучок подобных векторов полностью характеризует деформацию тела в данной точке и потому может быть принят за геометрическое представление тензора деформации (подобно тому, как геометрическим представлением вектора является отрезок прямой с заданной длиной и направлением).

Поверхность (2.30), как и поверхность напряжений (1.23), имеет три взаимно ортогональные главные оси; если отнесем ее к этим осям, то в уравнении (2.30) исчезнут члены, содержащие произведения координат, т. е. обратятся в нуль коэффициенты при них:

$$\bar{e}_{xy} = \bar{e}_{yz} = \bar{e}_{zx} = 0,$$

значит, сдвиги в главных плоскостях отсутствуют. Для нахождения главных осей, согласно правилу аналитической геометрии, следует приравнять нулю определитель

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} - e \end{vmatrix} = 0,$$

что даст для определения  $e$  кубическое уравнение

$$e^3 - \theta e^2 + \eta e - \lambda' = 0,$$

аналогичное уравнению (1.32); коэффициенты его:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \tag{2.32a}$$

$$\eta = \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xz} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}, \tag{2.32б}$$

$$\lambda' = \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}, \tag{2.32в}$$

представляют собой инварианты преобразования координат. Все три корня его действительны и являются *главными удлинениями* (удлинениями вдоль главных осей); обозначив их через  $e_1, e_2, e_3$ , напишем уравнение поверхности деформации (2.30) в главных осях:

$$e_1^2 \eta^2 + e_2 \eta^2 + e_3^2 \eta^2 = \pm b^2. \tag{2.33}$$

Вид этой поверхности, как и поверхности напряжений, зависит от знаков главных удлинений  $e_1, e_2, e_3$ . Если все три удлинения одного знака, то поверхность будет эллипсоидом; в этом случае по всем направлениям в данной точке имеет место растяжение (если главные удлинения положительны) или сжатие (если главные удлинения отрицательны). Если же главные удлинения разных знаков, то поверхность (2.33) надо представить в виде совокупности однополостного и двухполостного гиперboloидов с разделяющим их асимптотическим конусом. Из данной точки тела (т. е. из центра поверхности) построим вектор по интересующему нас направлению; если вектор пересечет однополостный гиперboloид, то в этом направлении имеет место растяжение; по тем же направлениям, которые пересекают двухполостный гиперboloид, имеет место сжатие; по направлениям образующих асимптотического конуса длина вектора обращается в бесконечность; в этих направлениях удлинения равны нулю.

**\* § 13. Объемная деформация. Инварианты тензора деформации**

В дополнение к компонентам деформации (2.12) найдем еще объемную деформацию. Рассмотрим бесконечно малый элемент тела объема  $d\tau = dx dy dz$ . Легко сообразить, что если в данном элементе произошли только сдвиги без удлинений его ребер, то относительное изменение объема элемента будет малой величиной высшего порядка по сравнению с деформацией сдвига. Следовательно, с точностью до малых высшего порядка можем считать, что изменение объема  $d\tau$  будет зависеть только от удлинений ребер  $dx, dy, dz$ .

Новый объем элемента после деформации будет

$$d\tau + \delta(d\tau) = dx(1 + e_{xx}) dy(1 + e_{yy}) dz(1 + e_{zz}).$$

Раскрывая скобки правой части, получим

$$d\tau + \delta(d\tau) = dx dy dz (1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} + e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz} + e_{xx}e_{yy}e_{zz}).$$

Последние четыре члена в скобках, являющиеся малыми второго и третьего порядков, отбрасываем; тогда, принимая во внимание, что  $dx dy dz = d\tau$ , имеем

$$\delta(d\tau) = d\tau(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}).$$

В результате получаем относительную объемную деформацию

$$\frac{\delta(d\tau)}{d\tau} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

Величину эту обозначим через  $\theta$ ; тогда в дополнение к уравнениям (2.6) запишем выражение объемной деформации:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \quad (2.34)$$

или

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.35)$$

Таким образом, объемная деформация в точности совпадает с первым, линейным инвариантом тензора деформации (2.32а). Он так же, как и остальные два инварианта, построен аналогично соответствующим инвариантам тензора напряжений; поэтому все, что в § 5 сказано относительно инвариантов тензора напряжений, может быть перенесено и на инварианты тензора деформации и формально сведется лишь к замене обозначений

$$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$$

соответствующими обозначениями

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \bar{e}_{xy}, \bar{e}_{yz}, \bar{e}_{zx}.$$

#### \* § 14. Девiator деформации и его инварианты

Тензор деформации

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

аналогично (2.28) разложим на два:

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} - e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

где

$$e = \frac{1}{3}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \quad (2.38)$$

представляет собой среднее удлинение в данной точке. Деформация, соответствующая второму слагаемому (2.37), состоит в том, что элемент, выделенный в данной точке тела, получает одинаковые удлинения по всем направлениям (поверхность деформации — шар); значит, элемент остается подобным себе, изменяя лишь объем, и потому тензор

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

является шаровым. Первое слагаемое

$$(D_e) = \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} - e \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

представляет собой *девиатор деформации*, характеризующий формоизменение элемента, выделенного в данной точке тела, без изменения объема его, так как в этом случае объемное расширение обращается в нуль:

$$\theta = (e_{xx} - e) + (e_{yy} - e) + (e_{zz} - e) = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} - 3e = 0. \quad (2.41)$$

Разложение (2.37) является не только формальной операцией; оно отражает физические свойства явления деформации, так как реальные материалы различно реагируют, в смысле прочности, на изменение объема и изменение формы.

Рассмотрим инварианты девиатора деформаций; они строятся так же, как инварианты тензоров напряжений и деформаций, с соответствующей заменой обозначений.

Первый, линейный инвариант, согласно (2.41), обращается в нуль. Второй, квадратичный инвариант, по аналогии с (1.49), имеет вид

$$\eta = -\frac{1}{6} [(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{yz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \\ + 6(e_{xy} + e_{yz} + e_{zx})^2]; \quad (2.42)$$

он представляет собой первую характеристику формоизменения, соответствующую деформации, определяемой тензором деформации (2.36); если за оси координат принять главные оси деформации,

то, согласно (1.50), он получит более простой вид;

$$\eta = -\frac{1}{6} [e_1 - e_2]^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2]. \quad (2.42')$$

Третий, кубичный инвариант

$$\lambda' = \begin{vmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} - e \end{vmatrix} \quad (2.43)$$

является второй характеристикой формоизменения; если отнесем его к главным осям деформации, то он, аналогично (1.51), получит более простой вид:

$$\lambda' = (e_1 - e)(e_2 - e)(e_3 - e)$$

или, согласно (1.52),

$$\lambda' = \frac{1}{3} [(e_1 - e)^3 + (e_2 - e)^3 + (e_3 - e)^3]. \quad (2.44)$$

Значит, можно сказать, что (как и в случае девиатора напряжений) второй инвариант девиатора деформации характеризует среднее квадратичное, а третий инвариант — среднее кубичное уклонения данной деформации от объемной деформации, описываемой тензором (2.39), где

$$e = \frac{1}{3} (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) = \frac{1}{3} (e_1 + e_2 + e_3)$$

и при которой отсутствует формоизменение. В связи с этим квадратичные инварианты девиаторов напряжений и деформации играют важную роль в современной теории пластичности, так как в пластическом состоянии тела приложенные к нему силы в основном вызывают изменение формы его при незначительном изменении объема.

В главе I мы вывели две основные группы уравнений теории упругости: (1.5) и (1.8); это были уравнения статического характера. В настоящей главе получены новые основные группы уравнений геометрического характера: (2.6), (2.15) и (2.35). Необходимо заметить, что эти уравнения являются приближенными, так как при выводе основных соотношений

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

мы отбросили малые, но конечные величины. С этим надо считаться при оценке всех последующих выводов; они будут достаточно точны в случае малых деформаций (когда все деформации  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ , ...,  $e_{zx}$ ,  $e_{xy}$  весьма малы по сравнению с единицей); деформации в общем случае выражаются через перемещения в форме значительно более сложных, нелинейных зависимостей, которые рассмотрены в следующем параграфе.

## \* § 15. Конечная деформация

В предыдущих параграфах, строго говоря, были изучены бесконечно малые деформации; действительно, основные зависимости (2.6) в этом случае вполне точны, так как при выводе их отбрасывались только бесконечно малые высшего порядка, а это не влияет на точность их. Покажем, как можно получить вместо (2.6) более точные зависимости, соответствующие конечным деформациям.

В качестве исходных примем формулы (2.23); заменим в них левые части согласно (2.21а,б) и перепишем так:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \\ \eta_1 &= \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, \\ \zeta_1 &= \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta.\end{aligned}$$

Разделим обе части этих равенств на измененную в результате деформации длину отрезка  $\rho$  и, кроме того, правые части умножим и разделим на начальную длину этого отрезка  $\rho$ . Тогда, учитывая, что

$$\frac{\xi}{\rho} = l; \quad \frac{\eta}{\rho} = m; \quad \frac{\zeta}{\rho} = n$$

представляют собой направляющие косинусы отрезка  $\rho$  до деформации, а

$$\frac{\xi_1}{\rho_1} = l_1; \quad \frac{\eta_1}{\rho_1} = m_1; \quad \frac{\zeta_1}{\rho_1} = n_1$$

— направляющие косинусы его в результате деформации, придем к следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned}l_1 &= \left[ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n \right] \frac{\rho}{\rho_1}, \\ m_1 &= \left[ \frac{\partial v}{\partial x}l + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)m + \frac{\partial v}{\partial z}n \right] \frac{\rho}{\rho_1}, \\ n_1 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)n \right] \frac{\rho}{\rho_1}.\end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Отсюда исключим неизвестные заранее направляющие косинусы  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  отрезка  $\rho_1$ , получившиеся в процессе деформации; с этой целью возведем все три равенства в квадрат и почленно сложим; тогда, учитывая, что

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1,$$

получим следующую зависимость:

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 = A^2 + B^2 + C^2, \quad (2.46)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  представляют собой выражения в квадратных скобках равенств (2.45). Раскрывая значения  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$ , получим:

$$\begin{aligned} A^2 &= l^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 n^2 + \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\right) lm + 2\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}\right) ln + 2\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} mn, \\ B^2 &= m^2 + 2\frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 n^2 + \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right) lm + 2\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} ln + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right) mn, \\ C^2 &= n^2 + 2\frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 n^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 m^2 + 2\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} lm + \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right) ln + 2\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right) mn. \end{aligned}$$

Сложим эти три выражения и подставим в (2.46); начнем с первых членов выражений и заметим, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

этот результат перенесем в левую часть; складывая остальные члены выражений, соберем коэффициенты при квадратах и произведениях косинусов  $l$ ,  $m$ ,  $n$ . Левую часть равенства преобразуем так:

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} + 1\right)^2 - 1 = (e + 1)^2 - 1 = e^2 + 2e;$$

здесь  $e = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho}$  представляет собой относительное удлинение отрезка  $\rho$ . В результате получим следующее равенство:

$$e^2 + 2e = 2(\varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + 2\varepsilon_{xy}lm + 2\varepsilon_{yz}mn + 2\varepsilon_{zx}nl), \quad (2.47)$$

где для краткости введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right], \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$



Сравнивая зависимость (2.47) с (1.19) и (2.27), видим, что величины (2.48) являются компонентами тензора

$$\begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_{xx}} & \overline{\varepsilon_{xy}} & \overline{\varepsilon_{xz}} \\ \overline{\varepsilon_{xy}} & \overline{\varepsilon_{yy}} & \overline{\varepsilon_{yz}} \\ \overline{\varepsilon_{xz}} & \overline{\varepsilon_{yz}} & \overline{\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

В отличие от (2.36) он носит название тензора конечной деформации. Зная его компоненты, можем вычислить относительные удлинения в данной точке тела по любому направлению, определяемому косинусами  $l, m, n$ ; действительно, обозначив для краткости правую часть (2.47) через  $2f(l, m, n)$ , получим квадратное уравнение для определения  $e$ :

$$e^2 + 2e - 2f = 0; \quad e = \sqrt{1 + 2f} - 1; \quad (2.50)$$

второй корень отбрасывается, так как он даст только отрицательное значение  $e$ . Первые члены формул (2.48) совпадают с правыми частями формул Коши (2.6), которые отсюда получаются, если пренебрежем квадратами и произведениями компонентов тензора относительных перемещений (2.17) в случае их малости. Следует, однако, заметить, что компоненты (2.48) сами по себе не выражают деформаций, как это было в случае малых деформаций. В самом деле, направим, например, отрезок  $\rho$  вдоль оси  $x$ , положив  $l = 1, m = n = 0$ ; тогда из (2.47) найдем удлинение вдоль оси  $x$ :

$$e_{xx} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1.$$

Если компоненты (2.7) представляют собой правильные дроби, значительно меньшие единицы, то, принимая приближенно

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \approx 1 + \varepsilon_{xx},$$

найдем, что они приближенно выражают деформации, например:

$$e_{xx} \approx \varepsilon_{xx}.$$

Наконец, если все производные, входящие в (2.48), весьма малы, то, отбрасывая в (2.48) малые второго порядка, вернемся к формулам Коши.

Упражнения к §§ 10 и 11.

1. Дан брус, изгибаемый в плоскости  $Oxz$  (рис. 8). Требуется:

а) Написать уравнение его оси (т. е. оси  $Ox$ ) до изгиба и выразить прогиб любой точки, пользуясь уравнениями (2.2) § 10.

б) Полагая, что брус заделан в начале координат и пользуясь уравнениями (2.3) и (2.4), записать условия, что элемент  $dx$  оси бруса в начале координат закреплен (не поворачивается в плоскости  $Oxz$ ); то же для элемента  $dz$  — в плоскости поперечного сечения.

2. При чистом изгибе бруса, указанного в предыдущем упражнении, перемещения (2.2) § 10 выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{xz}{\rho}, \\ v &= \frac{\sigma yz}{\rho}, \\ w &= \frac{x^2 + \sigma(z^2 - y^2)}{2\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Требуется:

а) Найти общие выражения деформаций по уравнениям (2.6) и (2.35) и проверить, удовлетворяют ли они уравнениям неразрывности (2.15).

б) Написать уравнение изогнутой оси бруса; для этого в выражения (2.51) подставить координаты точки оси до изгиба (п. «а» предыдущего упражнения).

в) Проверить, удовлетворяются ли условия заделки левого конца (п. «б» предыдущего упражнения).

3. При исследовании кручения круглого стержня (рис. 7) получаются перемещения

$$u = -\tau yz + ay + bz + c; \quad v = \tau xz - ax + ez + f; \quad w = -bx - ey + k.$$

Требуется:

а) Подобрать коэффициенты  $a, b, c, e, f, k$  при условии, чтобы концевое сечение  $z=0$  было закреплено следующим образом: точка  $O$  не должна иметь перемещений; элемент оси  $dz$  не поворачивается в плоскости  $xOz$  и в плоскости  $yOz$ ; элемент сечения  $dy$  не поворачивается в плоскости  $xOy$ .

б) Найти величины деформаций (2.6) и (2.35).

в) Проверить, удовлетворены ли уравнения (2.15).



компонентов деформации  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ , ...,  $e_{xy}$ , равно сумме напряжений, возникающих от каждого из этих компонентов в отдельности.

Физические тела по своему строению разделяются прежде всего на *однородные и неоднородные*. Однородным называется тело, строение и состав которого одинаковы во всех его точках. Теория упругости занимается почти исключительно однородными телами; однако даже среди однородных тел приходится различать тела *изотропные*, свойства которых одинаковы во всех направлениях, и *неизотропные* (анизотропные). Неизотропными оказываются многие кристаллы; при однородности строения таких кристаллов их упругие и оптические свойства различны в разных направлениях. Подробное исследование зависимостей типа (3.2) для неанізотропных тел показывает, что численные значения коэффициентов  $a_{mn}$  тесно связаны с упругими свойствами данного тела в различных направлениях.

В результате этого исследования оказывается, что для изотропного упругого тела, т. е. для тела, физические свойства которого одинаковы во всех направлениях, зависимости (3.2) получают наиболее простую форму; вывести их можно, основываясь на законе Гука для упругих стержней при растяжении и сжатии, известном из физики, а также на формулированном выше законе независимости действий.

На рис. 27, а и б показана так называемая диаграмма растяжения, выражающая зависимость между растягивающим (нормальным)

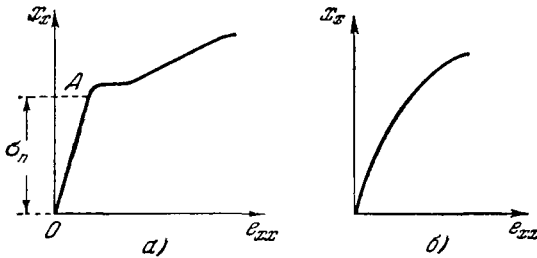


Рис. 27.

напряжением  $X_x$  стержня и относительным удлинением его  $e_{xx}$ . Вид этой диаграммы различен для различных материалов и существенно зависит от химического состава и строения. Диаграмма вида а характерна для металлов, обладающих пластическими свойствами, например для мягких сталей с малым содержанием углерода. Начальный участок  $OA$  этой диаграммы при тщательном проведении опыта получается прямолинейным, т. е. указывает на пропорциональность между напряжением и относительным удлинением:

$$X_x = E e_{xx}; \quad (3.3a)$$

эта зависимость и формулирует закон упругости Гука. Конечная точка  $A$  участка соответствует напряжению  $\sigma_n$ , называемому *пределом пропорциональности*. Вместе с тем опыт показывает, что почти для всех материалов продольное удлинение стержня  $e_{xx}$  при простом растяжении его сопровождается поперечными деформациями одинаковой величины  $e_{yy} = e_{zz}$ , но противоположного знака (т. е. укорочениями), причем эти деформации пропорциональны основному удлинению  $e_{xx}$ :

$$e_{yy} = e_{zz} = -\sigma e_{xx}; \quad (3.36)$$

коэффициент пропорциональности  $\sigma$  представляет собой постоянную величину для каждого материала, но различен для разных материалов. Таким образом, закон Гука формулируется двумя зависимостями: (3.3а) и (3.3б); они содержат два числа, характеризующие упругие свойства материала: модуль продольной упругости, или модуль Юнга  $E$ , имеющий размерность напряжения [сила/длина<sup>2</sup>], и безразмерное число  $\sigma$ , называемое *коэффициентом Пуассона*; иногда применяется величина, обратная коэффициенту Пуассона,  $m = \frac{1}{\sigma}$ , называемая *числом Пуассона*.

Числовое значение модуля упругости  $E$  для различных материалов меняется в весьма широких пределах; например, для сталей имеем приблизительно  $E = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, для дерева  $E = 1 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Коэффициент Пуассона  $\sigma$  всегда выражается правильной дробью, меньшей 0,5; последнее обстоятельство можно установить наперед из физических соображений, как это будет показано далее, в § 18. В случае материалов, не обладающих или почти не обладающих пластическими свойствами, т. е. материалов хрупких, каковы, например, твердые легированные стали, чугун, камни, диаграмма растяжения не имеет начального прямолинейного участка (рис. 27, б); но в большинстве случаев начальная часть ее мало отклоняется от прямой; для упрощения теории этот участок приближенно заменяется прямой, и таким путем закон Гука условно применяется иногда и к материалам, отличающимся хрупкостью. Опыт показывает, что пока материал работает в условиях упругих свойств (прямолинейный участок диаграммы на рис. 27, а), наблюдается пропорциональность между касательными напряжениями на гранях элементарного параллелепипеда и относительным сдвигом этих граней:

$$X_y = G e_{xy}; \quad Y_z = G e_{yz}; \quad Z_x = G e_{zx}.$$

Этой зависимостью формулируется *закон Гука при сдвиге*; коэффициент пропорциональности  $G$  носит название *модуля упругости при сдвиге* или модуля поперечной упругости; размерность его, как и размерность модуля продольной упругости, совпадает с размерностью напряжения. Модуль упругости при сдвиге также является характеристикой упругих свойств материала, но, как будет показано

в конце § 23, между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$ ,  $\sigma$  существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad (3.4)$$

вытекающая из закона Гука; поэтому лишь две из этих постоянных являются независимыми и должны быть найдены из опыта; третья постоянная определится из формулы (3.4). Например, из опытов наиболее удобно и надежно определяются модули  $E$  и  $G$ ; тогда по формуле (3.4) вычислится коэффициент Пуассона:

$$\sigma = \frac{E}{2G} - 1.$$

В дополнение к приведенным здесь соображениям примем пока без доказательства положение, что в упругом, однородном, изотропном материале нормальные напряжения не вызывают сдвигов и, наоборот, касательные напряжения не вызывают удлинений по направлению их действия. На этом основании можем рассматривать отдельно случай нормальных напряжений и случай касательных напряжений и получить наиболее общие зависимости между напряжениями и деформацией упругого, однородного, изотропного материала. Более обоснованный вывод этих зависимостей и распространение их на однородные, но анизотропные материалы изложены далее, в §§ 19—23.

### § 17. Выражение деформаций через напряжения

Начнем с нормальных напряжений и рассмотрим (рис. 28) параллелепипед с ребрами, равными 1, подверженный действию нормальных сил. Если бы действовало только напряжение  $X_x$ , то относительное удлинение  $e_{xx}$ , по закону Гука, было бы  $e'_{xx} = \frac{X_x}{E}$ . При действии только напряжения  $Y_y$  удлинение вдоль оси  $Ox$  составит  $e''_{xx} = -\sigma \frac{Y_y}{E}$ , где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. Аналогично под действием напряжения  $Z_z$  имеем  $e'''_{xx} = -\sigma \frac{Z_z}{E}$ .

Принимая без доказательства закон независимости действия сил, получим полное удлинение вдоль оси  $Ox$ :

$$e_{xx} = e'_{xx} + e''_{xx} + e'''_{xx} = \frac{X_x}{E} - \sigma \frac{Y_y}{E} - \sigma \frac{Z_z}{E},$$

или

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)].$$

Аналогично для удлинений по двум другим осям:

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]; \quad e_{zz} = \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]. \quad (3.5)$$

Формулы (3.5) выражают обобщенный закон Гука для нормальных напряжений; их можно представить в другом виде, прибавляя в правых частях соответственно

$$\sigma X_x - \sigma X_x; \quad \sigma Y_y - \sigma Y_y; \quad \sigma Z_z - \sigma Z_z;$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \sigma) X_x - \sigma \Theta], \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 + \sigma) Y_y - \sigma \Theta], \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [(1 + \sigma) Z_z - \sigma \Theta], \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z. \quad (3.7)$$

В этой форме закон Гука более удобен для некоторых выкладок.

Соотношения между сдвигами и касательными напряжениями принимаем в указанной выше форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z, \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x, \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

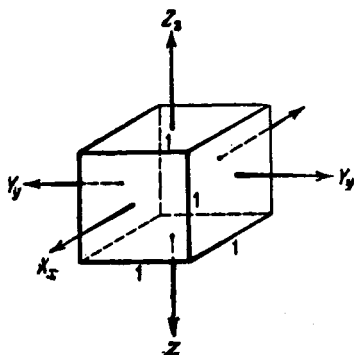


Рис. 28.

Формулы (3.5) или (3.6) совместно с формулами (3.8) и дают нам *обобщенный закон Гука* для однородного и изотропного упругого твердого тела, т. е. тела, упругие свойства которого совершенно одинаковы по всем направлениям.

Это приводит нас к новой основной группе уравнений теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma (Y_y + Z_z)]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma (Z_z + X_x)]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma (X_x + Y_y)]; \\ e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z = \frac{2(1 + \sigma)}{E} Y_z; \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x = \frac{2(1 + \sigma)}{E} Z_x; \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y = \frac{2(1 + \sigma)}{E} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Обратимся опять к равенствам (3.6) и сложим их почленно:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma)(X_x + Y_y + Z_z) - 3\sigma\Theta].$$

Так как на основании уравнений (3.7) и (2.34)

$$X_x + Y_y + Z_z = \Theta; \quad e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \theta,$$

последнее уравнение можем окончательно написать так:

$$\theta = \frac{1 - 2\sigma}{E} \Theta, \quad (3.10)$$

т. е. единичная объемная деформация  $\theta$  пропорциональна сумме трех нормальных напряжений  $\Theta$ . Это есть закон Гука в объемной форме.

Из равенства (3.10) мы можем сделать следующий вывод: объемная деформация  $\theta$  по существу своему не должна зависеть от направления координатных осей. Следовательно, при повороте системы координат она не будет меняться, а значит, согласно (3.10) *сумма нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке есть величина постоянная и не зависит от наклона этих площадок*. Иначе можно сказать, что величина

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z$$

есть инвариант преобразования координат, как это и было уже отмечено в главе I.

### § 18. Выражение напряжений через деформации

Равенства (3.9) и (3.10) дают закон Гука в форме, решенной относительно деформаций. Часто бывает необходимо иметь те же зависимости в обратной форме — решенные относительно напряжений. Для этой цели возьмем первое из уравнений (3.6) и внесем в него значение  $\Theta = \frac{E}{1 - 2\sigma} \theta$  из уравнения (3.10); получим

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \sigma) X_x - \frac{E\sigma}{1 - 2\sigma} \theta \right],$$

отсюда находим

$$X_x = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \theta + \frac{E}{1 + \sigma} e_{xx},$$

или же

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, \quad (3.11)$$

где

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \quad (3.12)$$

$\lambda$  и  $\mu$  называются коэффициентами Ламе. Они так же, как и модули упругости  $E$  и  $G$ , характеризуют упругие свойства твердого тела и связаны с модулями упругости формулами (3.12).



Легко заметить, что коэффициент  $\mu$  совпадает с модулем сдвига

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} = G.$$

Из уравнения (3.11) круговой подстановкой имеем два других уравнения; присоединяя к ним последние три уравнения из группы (3.9), получим закон Гука в нужной нам форме, решенной относительно напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz}, \\ Y_z &= \mu e_{yz}, \\ Z_x &= \mu e_{zx}, \\ X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Складывая почленно первые три уравнения (3.13), снова получим объемный закон Гука, но выраженный через коэффициенты Ламе:

$$X_x + Y_y + Z_z = 3\lambda\theta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}),$$

или

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.14)$$

Разделим обе части этого равенства на 3 и, учтя, что (§ 7 и § 13)

$$\frac{1}{3}\Theta = N_0$$

представляет собой среднее или октаэдрическое \*) напряжение, а

$$\frac{1}{3}\theta = e$$

есть среднее удлинение в данной точке, представим зависимость (3.14) так:

$$N_0 = (3\lambda + 2\mu)e. \quad (3.15)$$

Формулы (3.12) выражают коэффициенты Ламе через модуль  $E$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$ ; легко получить обратные соотношения; для этого исключаем из (3.12) модуль  $E$  почленным делением; получим

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma};$$

отсюда

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

и, далее,

$$1 + \sigma = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}.$$

\*) См. § 7.

Подставляя это во вторую из формул (3.12), найдем

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}.$$

Значит, имеем формулы для выражения  $E$  и  $\sigma$  через коэффициенты Ламе:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}; \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.16)$$

Мы рассмотрели два способа выражения обобщенного закона Гука: через модули  $E$  и  $\sigma$  и через коэффициенты Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ .

Можно вводить и другими способами две другие постоянные для изотропного тела; иногда, например, удобно ввести две такие постоянные:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= G, \\ k &= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

тогда уравнения (3.13) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu(2e_{xx} + k\theta), \\ Y_y &= \mu(2e_{yy} + k\theta), \\ Z_z &= \mu(2e_{zz} + k\theta), \\ Y_z &= \mu e_{yz}, \\ Z_x &= \mu e_{zx}, \\ X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Если рассматриваемый элемент испытывает растяжение в направлениях трех осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , т. е. если

$$X_x > 0; \quad Y_y > 0; \quad Z_z > 0; \quad \theta > 0,$$

то объем его не должен уменьшиться и мы должны иметь

$$\theta \geq 0.$$

На этом основании из (3.10) получим, что

$$\sigma \leq \frac{1}{2},$$

а тогда из (3.12) и (3.17) имеем

$$\lambda > 0; \quad \mu > 0; \quad k > 0.$$

Полученные в этой главе зависимости (3.9) и (3.13) являются последней группой основных уравнений теории упругости, завершающей все необходимые предпосылки, на которых строится общее решение задачи теории упругости.

Уравнения обобщенного закона Гука мы приняли без доказательства в том виде, как они даются в сопротивлении материалов. Ниже, в §§ 18—23, приводятся соображения, доказывающие, что эти уравнения дают самую общую зависимость между напряжениями и деформациями в изотропном упругом теле.

В заключение заметим, что введенные в §§ 4, 8, 12 и 14 понятия о тензорах и девиаторах напряжений и деформаций позволяют выразить обобщенный закон Гука в более компактной тензорной форме. Действительно, построим выражения компонентов девиатора напряжений (1.47) через деформации, пользуясь зависимостями (3.13). Учитывая соотношение (3.15), получим

$$X_x - N_0 = 3\lambda e + 2\mu e_{xx} - (3\lambda + 2\mu)e = 2\mu(e_{xx} - e);$$

таким же путем найдем остальные два нормальных напряжения:

$$Y_y - N_0 = 2\mu(e_{yy} - e),$$

$$Z_z - N_0 = 2\mu(e_{zz} - e).$$

Касательные напряжения (выраженные через половины углов сдвига) будут:

$$Y_z = 2\mu \bar{e}_{yz},$$

$$Z_x = 2\mu \bar{e}_{zx},$$

$$X_y = 2\mu \bar{e}_{xy}.$$

Рассматривая эти зависимости, видим, что все компоненты девиатора напряжений пропорциональны соответствующим компонентам девиатора деформаций с одним и тем же коэффициентом пропорциональности  $2\mu$ . Это обстоятельство можно выразить в тензорной форме: *девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций*

$$\begin{pmatrix} X_x - N_0 & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - N_0 & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - N_0 \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} - e \end{pmatrix}$$

или в принятых нами кратких обозначениях девиаторов:

$$(D_s) = 2\mu (D_e). \quad (3.19)$$

В левую часть равенства (3.14), выражающего объемный закон Гука, вместо  $\Theta$  введем среднее (гидростатическое) напряжение

$$\Theta = 3N_0;$$

тогда получим

$$N_0 = K\theta, \quad (3.20)$$

где

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

носит название *объемного модуля упругости* или *модуля объемной упругости*. В результате видим, что обобщенный закон Гука выражается двумя равенствами: скалярным (3.20) и тензорным (3.19) — и содержит, как и выше, две упругие постоянные  $2\mu$  и  $K$ .

#### У п р а ж н е н и я.

Предлагаем читателю проделать следующие выводы, полезные для следующего.

1. Тонкая прямоугольная резиновая пластинка плотно, но без нажатия лежит между двумя стальными пластинками, которые можно принять абсолютно твердыми по сравнению с резиновой. Трение между пластинками устранено. Если координатную систему выберем так, чтобы ось  $Oz$  была нормальна к плоскостям соприкосновения пластинок, то, согласно условию задачи, можно принять, что вдоль оси  $Oz$  удлинений нет, т. е.  $e_{zz} = 0$ . Резиновая пластинка сжимается силами, приложенными по граням, нормальным к осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Требуется найти зависимость между нормальными напряжениями и удлинениями, а также зависимость между напряжениями  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$ . Задачу решить в двух вариантах, исходя из уравнений (3.9) и (3.13).

2. Резиновый кубик плотно вложен в стальной ящик такой же формы; сверху кубик плотно накрыт стальной крышкой, на которую производится давление  $p$  кг/см<sup>2</sup>. Принимая сталь абсолютно твердой и полагая, что трения между сталью и резиной нет, найти:

а) давление резины на стенки ящика;

б) наибольшие касательные напряжения в резине [исходя из уравнений (1.42) § 6].

Задачу решить в двух вариантах, исходя из уравнений (3.9) и (3.13), сделать подсчет для случаев  $\sigma = 0$  и  $\sigma = \frac{1}{2}$ , найти  $\theta$  и проанализировать оба эти случая.

### \* § 19. Работа упругих сил в твердом теле

Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед размерами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и подсчитаем работу, совершаемую упругими силами, приложенными к нему, если точкам данного тела дадим какие-либо возможные перемещения.

Рассмотрим сначала случай растяжения — сжатия элемента по направлению оси  $Ox$ . Пусть напряжения по граням, нормальным к  $Ox$ , будут

$$X_x \text{ и } X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx, \quad (3.21)$$

и при этом получилось относительное удлинение  $e_{xx}$  и, следовательно, абсолютное  $e_{xx} dx$ . После сообщения телу каких-либо возможных перемещений удлинение это изменится на некоторую величину  $\delta e_{xx} dx$ .

Отбрасывая в (3.21) бесконечно малую  $\frac{\partial X_x}{\partial x} dx$  по сравнению с конечной величиной  $X_x$ , найдем, что две равные и противоположные нормальные силы  $X_x dy dz$ , приложенные к граням параллелепипеда, произведут работу  $X_x \delta e_{xx} dx dy dz$ . Таким же путем получим

работу, совершаемую остальными нормальными силами по граням параллелепипеда:

$$Y_y \delta e_{yy} dy dx dz; \quad Z_z \delta e_{zz} dz dx dy.$$

Переходим к касательным составляющим. К верхней и нижней граням параллелепипеда (рис. 10) приложены касательные силы  $X_z dx dy$  (бесконечно малую разницу между ними снова отбрасываем), образующие пару с моментом

$$X_z dx dy dz;$$

для получения работы этой пары следует ее момент умножить на угол поворота; таким углом поворота явится, очевидно, приращение

$$\delta e_{xz},$$

полученное углом сдвига  $e_{xz}$  на сообщенном телу возможном перемещении. На этом основании получим работу трех пар касательных сил, приложенных к параллелепипеду:

$$X_z \delta e_{xz} dx dy dz; \quad Y_z \delta e_{yz} dz dx dy; \quad X_y \delta e_{xy} dy dx dz.$$

Собирая полученные результаты, напишем работу всех сил, приложенных к параллелепипеду на возможном перемещении:

$$\delta(dT) = (X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + \\ + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}) dx dy dz.$$

Работа, отнесенная к единице объема тела в той точке, где выделен параллелепипед, будет

$$\delta A = \frac{\delta(dT)}{d\tau} = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + \\ + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}. \quad (3.22)$$

### \* § 20. Потенциал упругих сил

Введем теперь чрезвычайно важную в теории упругости гипотезу о том, что внутренние упругие силы имеют потенциал, т. е. что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию, накапливаемую телом при получении им упругих деформаций и возвращаемую им обратно в виде работы сил при исчезновении деформации\*). Потенциальная энергия есть следствие деформаций и вызывается ими одними; поэтому, если мы через  $W$  назовем энергию,

\*) Гипотеза эта верна лишь приблизительно, так как часть работы упругих сил переходит в другие виды энергии (тепловую и электромагнитную), теряемые телом и не возвращаемые в виде работы упругих сил; однако эти дополнительные количества энергии невелики, и практически ими можно в большинстве случаев пренебречь.

отнесенную к единице объема тела в данной точке, то она должна быть функцией компонентов деформаций:

$$W = F(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}). \quad (3.23)$$

Если мы даем телу упругие возможные перемещения, то, согласно введенной гипотезе, работа (3.22), совершаемая внутренними силами на этих перемещениях, должна полностью перейти в упругую энергию и дать приращение ее  $\delta W$ :

$$\delta A = \delta W. \quad (3.24)$$

Приращение  $\delta W$  функции (3.23) с точностью до малых второго порядка заменяем первым полным ее дифференциалом:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \dots + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy}. \quad (3.25)$$

Выражения (3.22) и (3.25) согласно уравнению (3.24) должны совпадать при любых значениях возможных деформаций

$$\delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \delta e_{zz}, \dots, \delta e_{xy}. \quad (3.26)$$

Благодаря этому коэффициенты при величинах (3.22) в уравнениях (3.22) и (3.25) должны быть тождественно равны:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}; & Y_y &= \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}; & Z_z &= \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}; \\ Y_z &= \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}; \dots; & X_y &= \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Значит, если внутренние упругие силы имеют потенциал, то компоненты напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$$

выражаются в виде частных производных потенциальной энергии (3.23) по соответствующим деформациям. Равенства (3.27) совместно с (3.23) являются аналитическим выражением предположения о существовании потенциала упругих сил.

### \* § 21. Форма зависимостей между напряжениями и деформациями; гипотеза о естественном состоянии тела

Так как мы ищем зависимость физического характера, то внешняя математическая форма функций  $f_1, f_2, \dots, f_8$  в уравнениях (3.1) (§ 16), выражающих эту зависимость, наперед ничем не обусловлена, и мы вправе выбрать ее как угодно, лишь бы она соответствовала физическим условиям задачи, т. е. могла бы правильно отражать

исследуемое физическое явление. Пользуясь этим, мы выбираем наиболее простую форму зависимостей (3.1) — линейную:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz} + a_{14}e_{yz} + a_{15}e_{zx} + a_{16}e_{xy}, \\ Y_y &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{zx} + a_{26}e_{xy}, \\ Z_z &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz} + a_{34}e_{yz} + a_{35}e_{zx} + a_{36}e_{xy}, \\ Y_z &= a_{41}e_{xx} + a_{42}e_{yy} + a_{43}e_{zz} + a_{44}e_{yz} + a_{45}e_{zx} + a_{46}e_{xy}, \\ Z_x &= a_{51}e_{xx} + a_{52}e_{yy} + a_{53}e_{zx} + a_{54}e_{yz} + a_{55}e_{zx} + a_{56}e_{xy}, \\ X_y &= a_{61}e_{xx} + a_{62}e_{yy} + a_{63}e_{z} + a_{64}e_{yz} + a_{65}e_{zx} + a_{66}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Соображения, подтверждающие правильность нашего выбора, следующие.

1. Линейная форма зависимостей хорошо согласуется с опытом для многих материалов при простом растяжении или сжатии, где она проявляется в виде прямой пропорциональности между напряжением и относительным удлинением (закон Гука).

2. Заданным деформациям

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} \quad (3.29)$$

в данной точке должна соответствовать одна-единственная система напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, \quad (3.30)$$

и обратно, при заданных напряжениях (3.30) должна получиться одна-единственная система деформаций (3.29).

Этим условиям линейная форма зависимостей удовлетворяет\*).

3. Ограничиваясь, как и ранее, случаем весьма малых деформаций, можно показать, что при любой аналитической форме зависимостей (3.1) они приближенно могут быть заменены линейными функциями; действительно, разлагая правые части уравнений (3.1) в ряд Маклорена, получим с точностью до малых второго порядка

$$X_x = (f_1)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xx}}\right)_0 e_{xx} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{yy}}\right)_0 e_{yy} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xy}}\right)_0 e_{xy}, \quad (3.31)$$

где значок 0 при функции  $f_1$  и ее производных показывает, что следует положить

$$e_{xx} = e_{yy} = \dots = e_{xy} = 0.$$

Коэффициенты при деформациях в (3.31) — постоянные числа, и потому функция (3.31) является линейной относительно деформаций (3.29)\*\*).

\*) Если мы уравнения (3.28) решим относительно деформаций, то получим для них также линейные выражения через напряжения.

\*\*) Это рассуждение справедливо, если не обратятся в нуль все коэффициенты при деформациях в уравнении (3.31), в противном случае придется принять во внимание члены второго порядка малости в ряде Маклорена; однако этого нельзя ожидать, так как в случае простого растяжения существование членов первого порядка ясно обнаруживается (закон Гука).

Заметим еще, что в правых частях уравнений (3.28) нами опущены свободные члены, не зависящие от деформаций. Если бы мы их сохранили, то, положив все деформации (3.29) равными нулю, нашли бы, что напряжения (3.28) отличны от нуля (напряжения не вызывают деформаций); наоборот, положив, все напряжения (3.30) равными нулю, мы уравнения (3.28) обратим в систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными (3.29), для которых отсюда найдем значения, отличные от нуля (деформации не сопровождаются напряжениями).

Оба эти обстоятельства могут иметь место, так как, изучая деформации тела от внешних сил, иногда можем ожидать, что тело уже получило деформацию до приложения к нему сил. Возьмем кусок железа в форме, например, шара (рис. 29, а) и сделав в нем

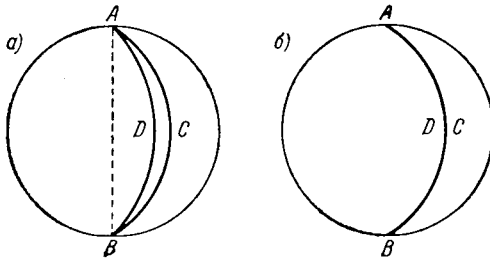


Рис. 29.

узкий секториальный вырез  $ACBD$ , снова сведем вместе плоскости разрезов  $ACB$  и  $ADB$  и сварим их. Получим сплошное тело (рис. 29, б): после произведенной операции в нем, несомненно, будут напряжения, хотя бы внешние силы на него и не действовали; такие напряжения называются начальными; они существуют, например, в чугунных и стальных отливках вследствие неравномерной усадки при остывании. Будем принимать состояние тела б за начальное при измерении деформаций под действием каких-либо сил; тогда мы скажем, что в этом состоянии деформации отсутствуют, но напряжения не равны нулю. Если теперь снова разрежем тело по плоскости  $ACB$ , то оно вернется в прежнее состояние а; при этом произойдут деформации, но напряжения обратятся в нуль.

Характер и величина начальных напряжений обычно нам неизвестны, так как они зависят от истории возникновения тела \*); в дальнейшем мы исключаем их из рассмотрения, вводя гипотезу о естественном состоянии тела, т. е. принимая, что при отсутствии деформаций в теле, напряжения в нем равны нулю. Из сказанного ясно,

\*) Например, в разобранным случае величина напряжений зависит от размера сделанного секториального выреза  $ACBD$ .



что в этом случае свободных членов в уравнениях (3.28) не должно быть, т. е. они должны быть однородными, как это и принято сначала.

Установив вид зависимостей (3.28), можно построить выражение потенциальной упругой энергии  $W$ . Сопоставляя зависимости (3.27) и (3.28), заключаем, что частные производные функции  $W$  представляют собой линейные, однородные функции от компонентов деформации

$$e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy},$$

значит, сама функция  $W$  будет однородной функцией второй степени от этих аргументов. Ее можно получить путем интегрирования уравнений (3.27), но гораздо проще воспользоваться известной теоремой Эйлера об однородных функциях, которая утверждает, что если  $F(x, y, z: \dots)$  есть однородная функция  $n$ -й степени, то

$$nF(x, y, z, \dots) = \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z + \dots$$

Применяя ее к функции  $W$ , найдем, что

$$2W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} e_{yy} + \dots + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} e_{xy},$$

или, пользуясь (3.27), получим

$$2W = X_x e_{xx} + \dots \quad (3.32)$$

Далее с этим выражением можно поступить двояко:

1. Заменить компоненты напряжений их выражениями через компоненты деформации согласно (3.28); тогда получим нужное нам выражение  $W$  в виде однородной функции второй степени от компонентов деформации.

2. Решить систему (3.28) относительно

$$e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}$$

и подставить эти выражения в предыдущее равенство; тогда  $W$  выразится в виде однородной функции второй степени от компонентов напряженного состояния

$$X_x, Y_y, \dots, X_y.$$

В случае изотропного тела пользуемся вместо (3.28) зависимостями (3.13) и обратными им зависимостями (3.9); тогда получаем следующие выражения упругой потенциальной энергии:

1) в функции компонентов деформации

$$2W = \lambda \theta^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2), \quad (3.33)$$

или

$$2W = (\lambda + 2\mu) (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2\lambda (e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) + \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2);$$

2) в функции компонентов напряженного состояния

$$2W = \frac{1}{E} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x) + 2(1 + \sigma)(Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2)]. \quad (3.34)$$

Из (3.33) делаем весьма важное заключение о том, что всегда

$$W > 0,$$

так как в конце § 18 было показано, что  $\lambda > 0$ ;  $\mu > 0$ .

### \* § 22. Упругие постоянные; сокращение числа их при существовании потенциала упругих сил

Уравнения (3.28) содержат 36 постоянных коэффициентов  $a_{mn}$ , называемых упругими постоянными. Они характеризуют упругие свойства тела и по своему измерению вполне аналогичны модулям упругости  $E$  и  $G$ . Число упругих постоянных тела в общем случае, как видим, весьма велико; однако оно значительно сокращается, если существует потенциал упругих сил.

Действительно, возьмем частную производную потенциальной энергии по какой угодно деформации, например по  $e_{yy}$ ; на основании уравнений (3.27) и (3.28) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial e_{yy}} = Y_y = a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{zx} + a_{26}e_{xy};$$

взяв от обеих частей еще раз частную производную, например по  $e_{zx}$ , получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial e_{yy} \partial e_{zx}} = a_{25}. \quad (3.35)$$

Найдем теперь ту же вторую производную, но, дифференцируя в обратном порядке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} &= Z_x, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial e_{zx} \partial e_{yy}} &= \frac{\partial Z_x}{\partial e_{yy}} = a_{52}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Так как величина производной не зависит от порядка дифференцирования, то, сопоставляя уравнения (3.35) и (3.36), находим  $a_{25} = a_{52}$ ; то же, конечно, можно доказать для любых двух коэффициентов  $a_{mn}$  и  $a_{nm}$ :

$$a_{mn} = a_{nm}. \quad (3.37)$$

Зависимость (3.37), являющаяся следствием существования потенциала упругих сил, показывает, что в уравнениях (3.24) коэффициенты, симметричные относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, попарно равны между собой. Следо-

вательно, из 36 упругих постоянных в самом общем случае будут различными 6 постоянных:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66},$$

расположенных по диагонали, и  $\frac{36-6}{2} = 15$  из остальных постоянных, а всего  $6 + 15 = 21$  постоянная.

Таким значительным количеством упругих постоянных может обладать лишь „наиболее анизотропное“ тело, обладающее совершенно различными упругими свойствами в разных направлениях.

### \* § 23. Изотропное тело

В физических неанізотропных телах (кристаллы) наблюдается обычно ббльшая или меньшая симметрия строения, благодаря которой число упругих постоянных значительно сокращается; мы здесь рассмотрим только случай изотропного тела, упругие свойства которого одинаковы во всех направлениях. Для такого тела уравнения (3.28) не должны меняться при каких бы то ни было преобразованиях координат. Исходя из этого, легко сократим число упругих постоянных до 9, если примем во внимание правило о знаке сдвига (§ 10); из этого правила следует, что сдвиг (например,  $e_{xy}$ ) сохраняет свою

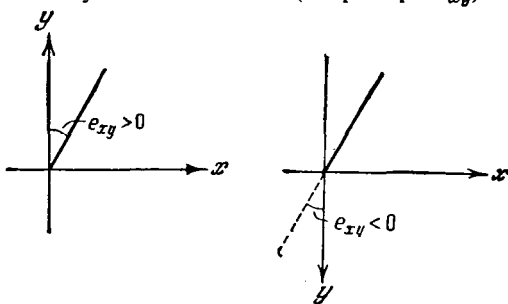


Рис. 30.

величину, но меняет знак, если мы направление одной из осей, в плоскости которых происходит сдвиг, изменим на обратное (рис. 30).

Возьмем, например, первое из уравнений (3.28) и заменим направление оси  $Oy$  на обратное. На левой части уравнения это, очевидно, никак не отразится; в правой части первые три члена (содержащие удлинения) останутся без изменения; равным образом не изменится пятый член; четвертый и шестой члены, сохраняя величину, изменят знак; благодаря этому равенство между левой и правой частью нарушится; этого не будет лишь в случае  $a_{14} = 0$ ;  $a_{16} = 0$ , т. е. эти два коэффициента должны отсутствовать. Если бы мы изменили направление оси  $Oz$  на обратное, то таким же путем нашли бы, что  $a_{14} = a_{16} = 0$ ; значит, делаем общее заключение, что

$a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0$ , т. е. *нормальное напряжение*  $X_x$  не связано со *сдвигами*. Благодаря полной равноправности осей координат в изотропном теле это заключение относится и к двум другим нормальным напряжениям:  $Y_y$  и  $Z_z$ , т. е.  $a_{24} = a_{25} = a_{26} = 0$ ;  $a_{34} = a_{35} = a_{36} = 0$ . После этого на основании уравнения (3.37) замечаем, что симметричные коэффициенты последних трех из уравнений (3.28) обращаются в нуль:

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0,$$

$$a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0,$$

$$a_{61} = a_{62} = a_{63} = 0,$$

т. е. *касательные напряжения не связаны с удлинениями*.

Число упругих постоянных сократилось до 12, и уравнения (3.28) разбились на две независимые группы:

$$X_x = a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz}, \quad Y_z = a_{44}e_{yz} + a_{45}e_{zx} + a_{46}e_{xy},$$

$$Y_y = a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz}, \quad Z_x = a_{54}e_{yz} + a_{55}e_{zx} + a_{56}e_{xy},$$

$$Z_z = a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz}; \quad X_y = a_{64}e_{yz} + a_{65}e_{zx} + a_{66}e_{xy}.$$

Обратимся к последним трем уравнениям. Если направление оси  $Ox$  изменим на обратное, то в четвертом уравнении изменится знак у двух последних членов; левая часть уравнения при этом не изменится, а потому, как и ранее, заключаем, что

$$a_{45} = a_{46} = 0$$

и, далее,

$$a_{54} = a_{56} = 0; \quad a_{64} = a_{65} = 0.$$

Число упругих постоянных сократилось до  $12 - 3 = 9$ , как и было указано выше:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz}, \\ Y_y &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz}, \\ Z_z &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz}, \\ Y_z &= a_{44}e_{yz}, \\ Z_x &= a_{55}e_{zx}, \\ X_y &= a_{66}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Преобразования координат, которые мы до сих пор применяли, сводились к повороту отдельных осей на  $180^\circ$ ; теперь применим поворот осей на  $90^\circ$ , в форме замены  $Oy$  на  $Oz$ ,  $Oz$  на  $Ox$ ,  $Ox$  на  $Oy$  и т. д. Возьмем первое из уравнений (3.38) и оси  $Oy$  и  $Oz$  взаимно переместим. На левой части уравнения, ввиду изотропности тела, это не отразится; в правой же части удлинения  $e_{yy}$  и  $e_{zz}$  поменяются местами; следовательно, равенство не нарушится лишь

при условии  $a_{12} = a_{13}$ ; аналогично во втором и третьем уравнениях должно быть  $a_{21} = a_{23}$ ,  $a_{31} = a_{32}$ , а на основании равенства (3.37) окончательно:  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{21} = a_{31} = a_{32}$ . Заменяя теперь последовательно одну ось другою и имея в виду, что при этом вид уравнений (3.38) не должен меняться, придем к выводу, что и

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}; \quad a_{44} = a_{55} = a_{66};$$

после этого уравнения (3.38) получают вид

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}(e_{yy} + e_{zz}), \\ Y_y &= a_{11}e_{yy} + a_{12}(e_{zz} + e_{xx}), \\ Z_z &= a_{11}e_{zz} + a_{12}(e_{xx} + e_{yy}), \\ Y_z &= a_{44}e_{yz}, \\ Z_x &= a_{44}e_{zx}, \\ X_y &= a_{44}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Таким образом, число упругих постоянных сократилось до трех:

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{44}.$$

Этого результата мы достигли, выполнив требование, чтобы вид соотношений не менялся при повороте осей координат на  $90^\circ$  и  $180^\circ$ ; однако такого условия недостаточно для обеспечения изотропности тела, т. е. полной однородности его во всех направлениях. Поэтому применим еще одно преобразование координат, связанное с поворотом осей на произвольный угол.

Для простоты берем случай плоской деформации, когда

$$e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = 0.$$

Тогда из уравнений (3.39) имеем

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy}, \\ Y_y &= a_{11}e_{yy} + a_{12}e_{xx}, \\ X_y &= a_{44}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Рассмотрим случай простого растяжения в направлении оси  $x$ , когда

$$\begin{aligned} Y_y &= a_{11}e_{yy} + a_{12}e_{xx} = 0, \\ X_y &= a_{44}e_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_{xy} = 0; \quad e_{yy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}e_{xx} \quad (3.41)$$

и первое из уравнений (3.40) дает

$$X_x = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}}e_{xx}.$$

Далее вычислим касательное напряжение  $U_v$  на произвольной площадке, наклоненной к плоскости  $Oxz$  под углом  $\alpha$ ; это можно выполнить двояко: с одной стороны, по второй из формул (1.15), которая дает

$$U_v = X_x \sin \alpha \cos \alpha = \frac{X_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{2a_{11}} e_{xx} \sin 2\alpha.$$

С другой стороны, можем воспользоваться последним из уравнений (3.40), так как тело предполагается изотропным и, значит, уравнение это справедливо при любом направлении осей координат:

$$U_v = a_{44} e_{uv}.$$

Сравнивая оба выражения  $U_v$ , получим

$$(a_{11}^2 - a_{12}^2) e_{xx} \sin 2\alpha = 2a_{11} a_{44} e_{uv}. \quad (3.42)$$

Теперь установим зависимость между вошедшими сюда компонентами деформации  $e_{xx}$  и  $e_{uv}$ . Для этого (рис. 31) в плоскости  $Oxy$  возьмем квадрат  $ABCD$  со стороной, равной единице. Из опыта известно, что в случае простого растяжения в направлении оси  $Ox$  горизонтальные отрезки удлиняются, а вертикальные укорачиваются и квадрат принимает форму  $A_1B_1C_1D_1$ . Подсчитаем углы поворота сторон квадрата и затем угол сдвига  $e_{uv}$  как искажение прямого угла  $ABC$ . Имеем

$$OA = 1 \cdot \sin \alpha; \quad OB = 1 \cdot \cos \alpha,$$

далее,

$$AA_1 = 1 \cdot \sin \alpha (-e_{yy}), \quad BB_1 = 1 \cdot \cos \alpha \cdot e_{xx}.$$

Предполагая деформацию малой, получим с точностью до малых величин второго порядка

$$A_1A_2 = AA_1 \cos \alpha = 1 \cdot \sin \alpha \cos \alpha (-e_{yy}),$$

$$BB_2 = BB_1 \sin \alpha = 1 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot e_{xx}.$$

С той же точностью подсчитаем угол поворота  $\beta$  стороны  $AB$ :

$$\beta = \frac{A_1A_2 + BB_2}{AB} = 1 (e_{xx} - e_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha,$$

или

$$\beta = 1 \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2\alpha.$$

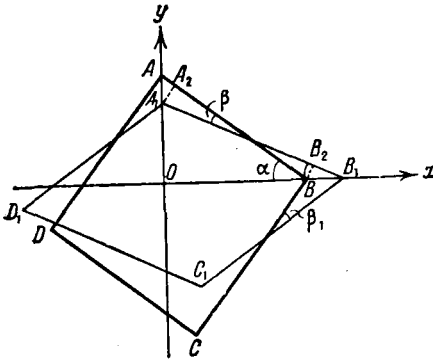


Рис. 31.

Угол поворота  $\beta_1$  другой грани  $BC$  получим из этой же формулы, заменив  $\alpha$  на  $\alpha - \frac{\pi}{2}$ :

$$\beta_1 = -1 \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2\alpha.$$

Искомый угол сдвига будет

$$e_{uv} = \beta - \beta_1 = (e_{xx} - e_{yy}) \sin 2\alpha,$$

или на основании (3.41)

$$e_{uv} = \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}} e_{xx} \sin 2\alpha.$$

Это и есть нужная нам зависимость между  $e_{xx}$  и  $e_{uv}$ ; внося полученное значение  $e_{uv}$  в (3.42), найдем после упрощения

$$a_{11} - a_{12} = 2a_{44}. \quad (3.43)$$

Таким образом, между тремя упругими постоянными существует линейная зависимость (3.43), показывающая, что среди них лишь две независимы; третья выразится через них по уравнению (3.43). Принимая за независимые  $a_{12}$  и  $a_{44}$ , найдем

$$a_{11} = a_{12} + 2a_{44}.$$

Следовательно, изотропное упругое тело характеризуется всего двумя упругими постоянными:  $a_{12}$  и  $a_{44}$ . Это и есть те коэффициенты Ламе, которые мы в § 18 обозначили через  $\lambda$  и  $\mu$ . Возвращаясь к этим обозначениям:  $a_{12} = \lambda$ ;  $a_{44} = \mu$ ;  $a_{11} = \lambda + 2\mu$  — и подставляя это в уравнения (3.39), мы сейчас же приведем их к виду (3.13) § 18. В результате приходим к выводу, что уравнения (3.13) непосредственно получаются из самых общих уравнений (3.28), если принять гипотезу о существовании потенциала упругих сил и предположить, что данное тело изотропно.

В § 16 мы привели без доказательства зависимость между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $\mu$ ,  $G$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

Теперь можно показать, что эта зависимость получается как следствие обобщенного закона Гука (3.13), содержащего *лишь две* упругие постоянные  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}; & Y_z &= \mu e_{yz}; \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy}; & Z_x &= \mu e_{zx}; \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz}; & X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Путем сложения первых трех равенств был получен в § 18 закон Гука в объемной форме:

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta \quad \text{или} \quad \theta = \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu}.$$

Подставляя отсюда значение  $\theta$  в первое из равенств (3.44), найдем выражение  $e_{xx}$  через напряжения:

$$e_{xx} = \frac{X_x}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\Theta;$$

сравним это с первым из равенств (3.6), записанным в виде

$$e_{xx} = \frac{1 + \sigma}{E}X_x - \frac{\sigma}{E}\Theta.$$

Левые части их одинаковы; сравнивая правые части, имеем

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}; \quad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.45)$$

Здесь мы учли, что из сопоставления последних из равенств (3.9) и (3.13) имеем  $\mu = G$ ; первое из равенств (3.45) дает искомую зависимость (3.4); учитывая ее, из второго равенства получим, как и в (3.16),

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$


---



ГЛАВА IV  
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

§ 24. Сводка основных уравнений теории упругости

Обобщенным законом Гука мы закончили вывод всех основных групп уравнений теории упругости; дадим их еще раз в общей сводке и для удобства ссылок в дальнейшем снабдим их особой нумерацией (римскими цифрами).

А. Статические уравнения

1. Дифференциальные условия равновесия (уравнения Навье) (1.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \quad \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \quad \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \quad \left( = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

2. Условия на поверхности (1.8):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz); \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz); \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

В. Геометрические уравнения

3. Связь между перемещениями и деформациями (уравнения Коши) (2.6):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

4. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана) (2.15):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

### С. Физические уравнения

5. Обобщенный закон Гука (3.9), (3.13):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)]; & e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]; & e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]; & e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

$$\theta = \frac{1-2\sigma}{E} \Theta. \quad (Va)$$

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}; & Y_z &= \mu e_{yz}; \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy}; & Z_x &= \mu e_{zx}; \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz}; & X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (V')$$

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (V'a)$$

На основе этих групп уравнений можно уже приступить непосредственно к решению общей задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в изотропном упругом теле под действием внешних сил.

Следует еще раз отметить, что все полученные нами уравнения выведены в предположении весьма малых деформаций; это было уже оговорено в § 10 относительно уравнений (III), а следовательно, и (IV); уравнения (I) выведены для недеформированного состояния тела и также могут считаться справедливыми лишь в случае весьма малых деформаций.

Уравнения (I)—(V) содержат весьма много неизвестных функций, выражающих напряжения, перемещения и деформации. Поэтому следует предварительно выбрать те величины, которые мы примем за основные неизвестные, подлежащие разысканию в первую очередь, и по которым далее можно уже находить все остальные факторы, характеризующие напряженное состояние и деформацию тела.

История развития теории упругости показывает, что здесь можно идти двумя различными путями.

1) Принять в качестве основных неизвестных перемещения точек упругого тела; тогда в каждой точке  $(x, y, z)$  тела мы имеем три неизвестных:

$$u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z). \quad (4.1)$$

и задача приведет к разысканию трех функций (4.1), причем надо будет удовлетворять трем условиям равновесия (I); одновременно на поверхности должны удовлетворяться условия (II), содержащие внешние силы (нагрузку)

$$X_v, \quad Y_v, \quad Z_v.$$

2) Принять в качестве основных неизвестных напряжения; тогда в каждой точке тела мы будем иметь шесть неизвестных:

$$\left. \begin{array}{l} X_x(x, y, z), \quad Y_y(x, y, z), \quad Z_z(x, y, z), \\ Y_x(x, y, z), \quad Z_x(x, y, z), \quad X_y(x, y, z). \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Задача сведется к разысканию шести функций (4.2); они должны удовлетворять трем уравнениям равновесия (I); однако этих уравнений недостаточно, и придется привлечь еще шесть условий неразрывности деформаций (IV). Одновременно на поверхности, как и при первом способе, должны удовлетворяться условия (II).

Из этих рассуждений видно, что первый способ («решение задачи в перемещениях») проще с математической стороны, так как при нем имеется меньшее число неизвестных и приходится иметь дело с меньшим числом уравнений. Разыскав перемещения (4.1), мы далее по уравнениям (III) без труда найдем деформации  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$  и, наконец, подставляя их в уравнения закона Гука (V'), определим напряжения:

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_x, \quad Z_x, \quad X_y.$$

В настоящей главе мы рассмотрим способ решения задачи теории упругости в перемещениях и применим его к нескольким частным случаям.

## § 25. Уравнения Ламе

Выпишем дифференциальные уравнения равновесия (I):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X_\rho = 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_\rho = 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_\rho = 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \end{array} \right\} \quad (I)$$

и условия на поверхности (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz); \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz); \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Все эти уравнения нам придется преобразовать, выразив в них напряжения через перемещения (4.1), принимаемые нами за неизвестные. С этой целью мы выразим напряжения через деформации по закону Гука ( $V'$ ), деформации же выразим через перемещения по (III). Выбирая в ( $V'$ ) напряжения, входящие в первое из уравнений (I), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ X_y &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ X_z &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Дифференцируя их, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial X_y}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Внося это в первое из уравнений (I), получаем

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X\rho = \\ = 0 \left( + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

и введем краткое обозначение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u.$$

Это выражение называется оператором Лапласа или лапласовым оператором над функцией  $u(x, y, z)$ . После этого уравнение (4.4) получит вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X\rho = 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \quad (4.5)$$

Аналогично преобразуем остальные два из уравнений (I); мы их получим непосредственно из (4.5), делая в нем круговую подстановку букв  $(x, y, z)$  и  $(u, v, w)$ ; приходим к следующей системе основных уравнений теории упругости для разыскания перемещений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Если объемные силы  $\rho X$ ,  $\rho Y$ ,  $\rho Z$  отсутствуют, то уравнения (VI) будут однородными. В случае равновесия правые части их равны нулю; деля все уравнения на  $\mu$  и вводя упругие постоянные  $\mu$  и  $k$  (3.17), приведем их к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0; \\ \nabla^2 v + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 w + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (VI')$$

Уравнения (VI) носят название уравнений Ламе (Lamé). Они дают синтез учений о напряжениях, деформациях и зависимости между ними — учений, освещенных в предыдущих трех главах. Значит, уравнения Ламе заключают в себе все те предпосылки механического, геометрического и чисто физического характера, на которых основывается теория упругости. Действительно, они:

1) выражают условия равновесия каждого элемента тела (если правые их части равны нулю) или являются уравнениями движения этого элемента;

2) содержат геометрические характеристики деформаций  $u, v, w$  и  $\theta$ ;

3) содержат физические факторы  $\lambda, \mu$  и  $\rho$ , характеризующие упругие свойства и плотность тела.

Уже из этих соображений можно заранее оценить ту огромную роль, которую уравнения (VI) играют в теории упругости в смысле возможности при их помощи приступить к решению ряда весьма важных задач.

Таким же путем преобразуем условия на поверхности (II); подставляя в первое из них вместо напряжений их выражения (4.3), будем иметь

$$\begin{aligned} X_v = \lambda \theta \cos(vx) + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(vz) \right] + \\ + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(vz) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Правую часть этого уравнения можем написать проще, если примем во внимание, что выражение в первых квадратных скобках представляет собой производную функции  $u(x, y, z)$  по нормали к поверхности тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial V} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial V} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial V} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(vz). \end{aligned}$$

Применяя такие же рассуждения к двум остальным уравнениям (II), получим окончательный вид условий на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda \theta \cos(vx) + \mu \frac{\partial u}{\partial V} + \\ &+ \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(vz) \right]; \\ Y_v &= \lambda \theta \cos(vy) + \mu \frac{\partial v}{\partial V} + \\ &+ \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(vz) \right]; \\ Z_v &= \lambda \theta \cos(vz) + \mu \frac{\partial w}{\partial V} + \\ &+ \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(vz) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (VIa)$$

Уравнения Ламе (VI) совместно с условиями на поверхности (VIa) позволяют уже перейти непосредственно к решению задач теории упругости. Если нам удастся проинтегрировать уравнения (VI) и найти функции  $u$ ,  $v$  и  $w$ , удовлетворяющие условиям на поверхности в форме (II) или (VIa), то, внося их в уравнения (III), найдем деформации  $e_{xx}$ , ...,  $e_{xy}$ ; внося же эти последние в уравнения закона Гука (V'), найдем напряжения

$$X_x, Y_y, \dots, X_y.$$

Интегрирование уравнений (VI) при соблюдении условий на поверхности (VIa) представляет большие трудности. Однако при решении многих задач, имеющих практическое значение, оказывается удобным применять обратный метод, задавая перемещения как функции координат точки  $(x, y, z)$  и разыскивая на основании условий (VIa) внешние силы на поверхности тела (нагрузку), которым соответствуют заданные перемещения. Оказался весьма плодотворным также «полу-обратный» способ Сен-Венана, согласно которому задают часть внешних сил и часть перемещений и разыскивают остальные факторы из условия, чтобы были удовлетворены основные уравнения (VI) и (VIa). Оба эти способа мы рассмотрим на задачах, имеющих практическое приложение.

**§ 26. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде**

Применим к этой задаче обратный метод, т. е. зададимся перемещениями, и проверим, возможны ли они в однородной упругой среде, другими словами, удовлетворяют ли они уравнениям Ламе (VI). Так как мы рассматриваем случай движения, то перемещения (4.1) (§ 17) должны зависеть не только от координат точки, но и от времени  $t$ .

А. Выберем такие выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, t), \\ v &= 0, \\ w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

и предположим, кроме того, что объемные силы отсутствуют, т. е. что

$$X = Y = Z = 0.$$

Так как  $v = w = 0$ , то перемещения всех точек происходят параллельно оси  $Ox$ ; кроме того, перемещение  $u$  не зависит от  $y, z$ ; следовательно, если мы (рис. 32) будем рассматривать точки, которые при отсутствии движения расположены в плоскости  $P$ , нормальной к оси  $Ox$ , то все эти точки будут перемещаться одинаково и одновременно; другими словами, плоскость  $P$  будет перемещаться в направлении оси  $Ox$ , не деформируясь.

Действительно, уравнение плоскости  $P$  в состоянии покоя будет  $x = x_0$ . В любой момент во время движения оно будет иметь вид  $x = x_0 + u$  или  $x = x_0 + u(x_0, t)$ . Это по-прежнему плоскость, параллельная плоскости  $yOz$ , но расположенная от  $yOz$  на переменном расстоянии, зависящем от времени. Если мы выберем в нашей упругой среде ряд таких плоскостей:  $P, P_1, P_2, \dots$ , то все они будут перемещаться нормально к  $Ox$ , взаимно сближаясь или удаляясь\*). В этом случае движение, выраженное уравнениями (4.7), называется однородным продольным колебанием вдоль оси  $Ox$ .

Условиям на поверхности (VIa) нам удовлетворять не надо, так как среда предположена неограниченной.

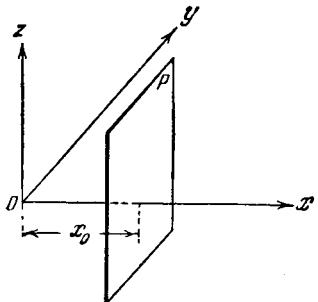


Рис. 32.

\*) Так как расстояние  $d$  между двумя любыми плоскостями  $x = x_0$  и  $x = x_1$  во время движения зависит от времени  $t$ :

$$d = x_1 + u(x_1, t) - [x_0 + u(x_0, t)] = x_1 - x_0 + u(x_1, t) - u(x_0, t).$$

Для проверки возможности колебаний, выражаемых уравнениями (4.7), подставим их в уравнения (VI). Предварительно вычисляем:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0;$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \nabla^2 v = 0; \quad \nabla^2 w = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

После этого замечаем, что второе и третье из уравнений (VI) удовлетворяются тождественно; первое же преобразуется так:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.8)$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (4.9)$$

Отсюда делаем основной вывод: заданное нами продольное колебательное движение, согласно уравнениям (4.7), возможно, если функция  $u(x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.8).

В. Выберем теперь такие выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \\ v &= 0, \\ w &= w(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Пусть объемные силы также отсутствуют:

$$X = Y = Z = 0.$$

В этом случае все перемещения происходят параллельно оси  $Oz$ . Рассуждая, подобно предыдущему, легко убедимся, что все точки любой плоскости  $P$  (рис. 32) перемещаются одинаково и одновременно, оставаясь на постоянном расстоянии от плоскости  $zOy$ . Если будем рассматривать несколько таких параллельных плоскостей, то они будут перемещаться вертикально. В случае периодического движения мы будем иметь дело с *однородным поперечным колебанием* вдоль оси  $Oz$ . Проверим возможность таких колебаний; на основании уравнений (4.10) имеем

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$



значит, объемных деформаций нет. Далее,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0; \quad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0;$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

При этих условиях первое и второе из уравнений (VI) удовлетворяются тождественно; третье получает вид

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.11)$$

где

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (4.12)$$

Значит, колебание (4.10) возможно, если функция  $w(x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.11). Замечаем, что уравнения (4.8) и (4.11) имеют совершенно одинаковый вид и разнятся только величиной постоянного коэффициента [ср. формулы (4.9) и (4.12)].

С. Рассмотрим частный случай гармонических колебаний. Для продольного колебания зададим функцию  $u(x, t)$  [ср. уравнения (4.7)] так:

$$u = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right). \quad (4.13)$$

Внося это выражение в уравнение (4.8) и производя сокращения, получаем

$$\frac{1}{T^2} = \frac{a^2}{l^2},$$

или

$$\frac{l}{T} = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (4.14)$$

Следовательно, колебание (4.13) возможно в неограниченной упругой среде, если параметры  $l$  и  $T$  удовлетворяют соотношению (4.14).

Параметр  $A$  (амплитуда колебания) остается произвольным. Параметр  $T$  есть период колебания; действительно, если мы оставим  $x$  постоянным (т. е. все время будем рассматривать одну и ту же плоскость  $P$  на рис. 32), а времени  $t$  дадим приращение  $T$ , то отклонение  $u$ , согласно уравнению (4.13), не изменится.

Параметр  $l$  есть длина волны. Геометрический смысл его проще всего уяснить, рассматривая относительное удлинение

$$e_{x,x} = \frac{\partial u}{\partial x} = A \frac{2\pi}{l} \cos 2\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right). \quad (4.15)$$

Оставим время  $t$  постоянным, т. е. будем рассматривать всевозможные плоскости  $P$  (рис. 32) в некоторый определенный момент. Так как  $e_{x,x}$  выразилось в виде периодической функции от  $x$ , то формула (4.15) показывает, что если абсциссе  $x$  дадим приращение  $l$ , то получим новую плоскость  $P$ , в точках которой  $e_{x,x}$  имеет ту же величину; будем, например, рассматривать  $\min e_{x,x}$ ; это будет в тех местах, где в данный момент  $t$  имеется наибольшее сжатие плоскостей  $P$  (рис. 33); расстояние между этими точками, как сейчас указывалось, равно  $l$ ; поэтому

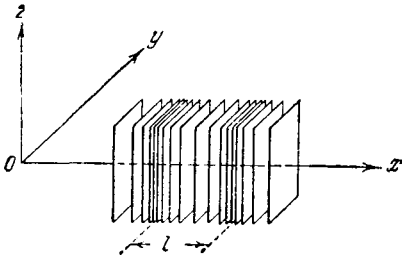


Рис. 33.

$l$  и называется длиной волны. Величина наибольшего сжатия (расширения), согласно уравнению (4.15), получится, если положим

$$\cos 2\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right) = \pm 1$$

или

$$\frac{x}{l} - \frac{t}{T} = \frac{m}{2}, \quad (4.16)$$

где  $m$  — целое число.

Из уравнения (4.16) видим, что абсцисса  $x$  этой точки равномерно перемещается с течением времени  $t$ ; скорость этого движения равна

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{T}.$$

Это есть скорость распространения волны. На основании уравнения (4.14) имеем

$$V = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (4.17)$$

Делаем вывод из предыдущего исследования: заданное гармоническое колебание (4.13) возможно в однородной упругой среде. Амплитуда  $A$  произвольна; длина волны  $l$  и период колебания  $T$  могут быть также различны, но скорость распространения продольной волны  $V = \frac{l}{T}$ , согласно уравнению (4.17), есть величина постоянная, зависящая от коэффициентов упругости  $\lambda$  и  $\mu$ , а также плотности  $\rho$  среды.

Рассматриваемые нами продольные колебания суть так называемые звуковые колебания, так как при

$$\frac{1}{16} \text{ сек} > T > \frac{1}{50\,000} \text{ сек}$$

эти колебания воспринимаются ухом как звук. Формула (4.17) важна тем, что она дает скорость распространения звука в твердом теле неограниченных размеров. Так как вместе с тем формула (4.17)

дает скорость распространения продольной деформации  $e_{xx}$  [ср. формулу (4.15)], то продольные деформации распространяются в упругой среде с вполне определенной скоростью, равной скорости звука.

### § 27. Общее решение уравнения колебаний

Мы рассмотрели лишь случай гармонического продольного колебания по закону (4.13); однако в упругом теле возможны колебания самого разнообразного вида. Действительно, самое общее решение уравнения (4.8) будет

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (4.18)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные функции; подставляя это выражение в уравнение (4.8), убедимся, что оно тождественно удовлетворяется. Легко видеть, что правая часть уравнения (4.18) выражает два колебания, распространяющихся в стороны положительной и отрицательной осей  $Ox$  со скоростью  $a$ .

Возьмем, например, частное решение

$$u = \varphi(x - at). \quad (4.19)$$

Если независимые переменные  $x$  и  $t$  свяжем условием

$$x - at = C \quad (4.20)$$

[ср. равенство (4.16)], то получим:  $u = \varphi(C) = \text{постоянная}$ . Уравнение (4.20) указывает, что точка с данной постоянной величиной отклонения  $u$  перемещается равномерно со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = V = a.$$

Вообще можно заметить, что уравнение (4.13) есть частный случай уравнения (4.19); действительно, его можно переписать так:

$$u = A \sin \frac{2\pi}{l} (x - at), \quad \text{где } a = \frac{l}{T}.$$

Аналогично частное решение  $u = \psi(x + at)$  соответствует колебанию, распространяющемуся по направлению отрицательной оси  $Ox$  с той же скоростью.

Окончательное заключение: скорость распространения продольного колебания в однородном упругом теле постоянна и выражается формулой (4.17). Закон колебания может быть произвольным благодаря произвольности функций  $\varphi$  и  $\psi$  в общем решении (4.18) уравнения (4.8).

Соображения эти справедливы, конечно, и в отношении уравнения (4.11) поперечных колебаний.

Общее решение его такое:

$$w = \varphi(x - bt) + \psi(x + bt).$$

Здесь  $b$  есть скорость распространения поперечных колебаний. Рассмотрим частный случай гармонического поперечного колебания:

$$\omega = B \sin 2\pi \left( \frac{x}{l_1} - \frac{t}{T_1} \right) = B \sin \frac{2\pi}{l_1} (x - bt),$$

где

$$b = \frac{l_1}{T_1}. \quad (4.21)$$

Здесь  $l_1$  — длина волны поперечных колебаний (рис. 34);  $T_1$  — период колебания. Как и в случае продольных колебаний, найдем, что скорость распространения колебания [ср. формулы (4.21) и (4.12)]

$$V_1 = \frac{l_1}{T_1} = b = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (4.22)$$

Сравнивая (4.17) и (4.22), видим, что

$$|V_1| < |V|, \quad (4.23)$$

т. е. скорость распространения поперечных колебаний менее скорости распространения продольных. Отношение их будет

$$\left| \frac{V_1}{V} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2 - 2\sigma}} \quad (4.24)$$

и зависит только от упругих постоянных среды.

На основании уравнений (III) § 24 и (4.10) заключаем, что поперечные колебания сопровождаются сдвигом

$$e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Сдвиг этот распространяется в упругой среде со скоростью, выражаемой формулой (4.22). Из формул (4.23) и (4.24) следует, что поперечные деформации (сдвиги) в изотропной упругой среде распространяются значительно медленнее, чем продольные деформации. Действительно, если в (4.24) положим, например,  $\sigma = \frac{1}{3}$ , то получим

$$\left| \frac{V_1}{V} \right| = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}}{2 - \frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Самые скорости  $V$  и  $V_1$ , как известно, весьма велики; вычислим, например, скорость распространения продольных колебаний для стали; согласно (4.14), имеем

$$\begin{aligned} V = a &= \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\rho} + 2} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\mu} \frac{2\sigma}{\rho} + 2} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}}. \end{aligned}$$

Для стали  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\rho = \frac{7,85}{10^3 \cdot 981}$  кг/см<sup>3</sup>;  $\sigma = 0,3$ ; подставляя это в предыдущую формулу, получим

$$\begin{aligned} V = a &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 981 (1-0,3)}{7,85 (1+0,3)(1-0,6)}} = 10^4 \sqrt{3350} = \\ &= 580\,000 \text{ см/сек} = 5800 \text{ м/сек}. \end{aligned}$$

Необходимо заметить, однако, что при столь значительной скорости упругих волн, скорости самих частиц тела  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t}$  остаются очень небольшими.

## § 28. Продольные колебания стержня. Метод Фурье

Рассуждения предыдущих параграфов относились к неограниченной упругой среде, т. е. к среде, распространяющейся беспредельно в направлении всех трех осей координат. Если мы будем

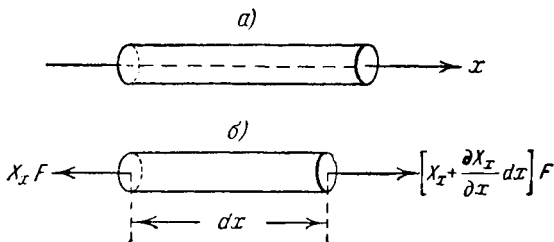


Рис. 35.

рассматривать тонкий цилиндрический стержень (рис. 35, а), то колебания его будут протекать несколько иначе, чем для неограниченной среды; например, при продольных колебаниях поперечные размеры его будут изменяться вследствие продольных удлинений  $e_{xx}$ ; следовательно, кроме основных перемещений  $u$  вдоль оси  $Ox$ , появятся побочные поперечные перемещения  $v$  и  $w$ , и явление значительно усложняется. Однако в случае тонкого стержня можно без

особой ошибки пренебречь поперечными деформациями, и тогда легко вывести дифференциальное уравнение продольных колебаний такого стержня.

Выделим (рис. 35, б) из стержня элемент длиной  $dx$  и действие отброшенных частей заменим силами

$$-X_x F \quad \text{и} \quad \left( X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) F,$$

где  $F$  — площадь сечения стержня. Масса выделенного элемента равна  $\rho F dx$ , и уравнение движения его будет

$$\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} dx F, \quad (4.25)$$

или

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} *).$$

Так как мы предполагаем в стержне лишь простое растяжение или сжатие, то по закону Гука имеем

$$X_x = E e_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

а следовательно,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Внося это выражение в уравнение (4.25), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.26)$$

где

$$a_1^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.26) отличается от уравнения (4.8) для неограниченной среды лишь постоянным коэффициентом [ср. формулы (4.9) и (4.27)]; различие обусловлено тем, что в случае неограниченной среды мы предполагали отсутствие поперечных перемещений  $v$  и  $w$  и соответственных деформаций, а это в свою очередь вызывает появление поперечных напряжений  $Y_y$  и  $Z_z$ ; в случае же стержня этих напряжений нет. Уравнение (4.27) дает возможность вычислить модуль упругости стержня  $E$ , зная его плотность  $\rho$  и скорость распространения звука в нем  $a_1$ .

Общее решение дифференциального уравнения (4.26) имеет прежнюю форму (4.18)\*\*), однако при решении частных задач чаще

\*) Это равенство, очевидно, совпадает в рассматриваемой задаче с первым из уравнений Навье (I).

\*\*) Оно найдено Даламбером для струны, уравнение поперечного колебания которой имеет тот же вид (4.8).

всего пользуются интегрированием уравнения (4.26) в рядах Фурье. Для этой цели напишем уравнение в общей форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.28)$$

где  $\alpha = a, b, a_1$  в зависимости от характера решаемой задачи. Постараемся найти частное решение уравнения (4.28) в форме

$$u = XT, \quad (4.29)$$

где  $X$  — функция одной переменной  $x$ ,  $T$  — функция одной переменной  $t$ . Подставляя это в уравнение (4.28), найдем

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

или, разделяя переменные:

$$\frac{1}{\alpha^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (4.30)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от  $t$ , а правая — только от  $x$ ; но так как обе эти переменные независимы, то уравнение (4.30) может быть удовлетворено тождественно только в том случае, если левая и правая части его в отдельности равны одному и тому же постоянному числу; назовем его через  $-\lambda^2$ ; тогда уравнение (4.30) разлагается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 \alpha^2 T; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X.$$

Общие решения их:

$$T = A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t,$$

$$X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

Подставляя это в уравнение (4.29), получим частное решение уравнения (4.28):

$$u = (A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t) (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x). \quad (4.31)$$

Меняя здесь  $A, B, C, D, \lambda$ , получим сколько угодно частных решений. Так как уравнение (4.28) линейное, то сумма всех таких частных решений также будет удовлетворять ему, и мы получим решение его в виде ряда

$$u = \sum (A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t) (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x); \quad (4.32)$$

в каждом члене этой суммы  $A, B, C, D, \lambda$  могут иметь свои особые значения; число членов ряда не ограничено.

Входящие сюда неопределенные постоянные следует искать из граничных и начальных условий стержня. Ход рассуждений поясним на простом примере. Пусть мы имеем стержень длиной  $l$ , заделанный нижним концом и совершающий продольные колебания. Заделка

нижнего конца дает условие: при любом  $t$  и при  $x=0$   $u=0$ . Для удовлетворения его в уравнении (4.32) следует, очевидно, положить

$$C = 0;$$

тогда

$$u = \sum (A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t) \sin \lambda x. \quad (4.33)$$

Предположим, что верхний конец стержня свободен и потому при  $x=l$  удлинение равно  $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  в любой момент времени  $t$ . Имея это в виду, из уравнения (4.33) получим  $\cos \lambda l = 0$ . Отсюда

$$\lambda l = \frac{i\pi}{2}, \text{ или } \lambda = \frac{i\pi}{2l},$$

где  $i$  может быть равно любому нечетному числу:  $i = 1, 3, 5, \dots$ ,  $\infty$ , и потому

$$u = \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left( A_i \cos \frac{i\pi}{2} \alpha t + B_i \sin \frac{i\pi}{2} \alpha t \right) \sin \frac{i\pi}{2l} x. \quad (4.34)$$

Для определения произвольных постоянных  $A_i$  и  $B_i$  необходимо задать состояние стержня в начальный момент, например при  $t=0$ , т. е. указать перемещения  $u$  и скорости  $\frac{\partial u}{\partial t}$  всех точек стержня в этот момент; пусть

$$\left. \begin{aligned} u_{t=0} &= f(x), \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} &= \varphi(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi a}{2l} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left( -A_i i \sin \frac{i\pi}{2l} \alpha t + B_i i \cos \frac{i\pi}{2l} \alpha t \right) \sin \frac{i\pi}{2l} x. \quad (4.36)$$

На основании уравнений (4.34) и (4.36) условия (4.35) дают

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{2l}, \\ \varphi(x) &= \frac{\pi a}{2l} \sum_{i=1}^{\infty} B_i i \sin \frac{i\pi x}{2l}. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Задача свелась к разложению функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в ряды Фурье, стоящие в правых частях уравнений (4.37), т. е. к разысканию коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  этих рядов. Коэффициенты эти, как

\*) Постоянную  $D$ , очевидно, можем опустить, приравняв ее единице, без вреда для общности решения, так как, внося ее в скобки, получим в них опять лишь две постоянные  $AD$  и  $BD$ .



известно, выражаются формулами Эйлера и в данном случае имеют такие значения:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{i\pi}{2l} x dx, \\ B_i &= \frac{2}{i\pi a} \int_{-l}^{+l} \varphi(x) \sin \frac{i\pi}{2l} x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Изложенный здесь способ легко приводит к цели в случае свободных колебаний стержней. При исследовании вынужденных колебаний, а также поперечных колебаний стержней под периодически меняющейся или под движущейся нагрузкой задача значительно осложняется.

Общая теория колебаний упругого тела находит большие приложения в сейсмологии при изучении колебаний земной коры; не углубляясь в этот вопрос, отметим только, что обнаруженное нами

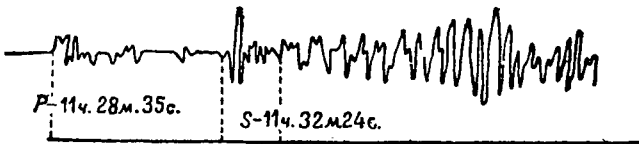


Рис. 36.

постоянство скоростей продольных и поперечных колебаний позволяет по записи колебаний на сейсмической станции (сейсмограмма) определить расстояние центра землетрясения от станции; поперечные колебания, как мы видели, распространяются медленнее продольных и доходят до станции позднее; на рис. 36 показана часть сейсмограммы землетрясения в Малой Азии 9 февраля 1909 г., записанной на Пулковской обсерватории\*); здесь точки *P* и *S* показывают моменты прихода первых продольных и первых поперечных волн. Зная промежуток времени *PS* и скорости обоих видов волн, можно найти искомое расстояние. В §§ 56 и 57 главы IX даны дополнительные сведения о распространении упругих волн.

\*) Чертеж заимствован из курса геологии проф. Иностранцева.

ГЛАВА V  
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
В НАПРЯЖЕНИЯХ

§ 29. Простейшие задачи

В § 24 уже было отмечено, что если мы по заданным внешним силам хотим непосредственно найти в упругом теле напряжения

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, \quad (5.1)$$

то условий равновесия (I)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

для этой цели будет недостаточно, так как число неизвестных (5.1) превышает число уравнений (I); поэтому придется привлечь еще условия неразрывности деформаций (IV). В дальнейшем для этой цели уравнения (IV) мы преобразуем, подставив в них вместо деформаций напряжения [по уравнениям (V) § 24].

Теперь же мы рассмотрим тот частный случай, когда напряжения (5.1) выражаются функциями первой степени (линейными) от координат точки или оказываются постоянными числами. На основании уравнений (V) легко видеть, что вторые производные от деформаций выражаются всегда линейными функциями от вторых производных напряжений (5.1), например:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma \left( \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x \partial z} \quad \text{и т. д.}$$

Так как в нашем случае напряжения являются линейными функциями от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то все вторые производные от деформаций обра-

тятся в нуль; значит, все условия неразрывности (IV) будут удовлетворены. Остается лишь удовлетворить уравнениям (I) и условиям на поверхности тела (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz); \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz); \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Задачи рассматриваемого рода называются простейшими задачами теории упругости. Мы сейчас рассмотрим три такие задачи.

### § 30. Кручение круглого стержня

В этой задаче рассматривается напряженное состояние и деформация стержня, имеющего форму круглого цилиндра (рис. 37), к основаниям которого приложены внешние силы, вызывающие только

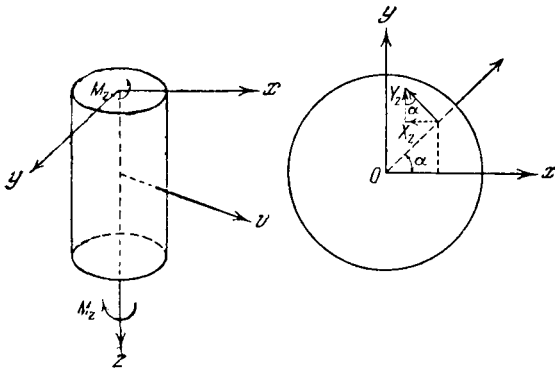


Рис. 37.

касательные напряжения и приводящиеся к двум противоположным парам сил; момент такой пары носит название *крутящего момента*. Согласно теории кручения, данной Кулоном в конце XVIII века, деформация стержня состоит в том, что плоские поперечные сечения стержня, не претерпевая каких-либо искажений, вращаются одно относительно другого; во всех точках сечения возникают только касательные напряжения  $T_z$ , направленные нормально к радиусам-векторам точек. Предполагается, что эти касательные напряжения распределены одинаково во всех сечениях (в том числе и на основаниях цилиндра); система сил, действующих в сечении, сводится к крутящему моменту

$$M_z = \int_R T_z r dF, \quad (5.2)$$

где  $dF$  — элементарная площадка, выделенная в сечении; интеграл распространяется на всю площадь сечения. Обозначим через  $\tau$  угол взаимного поворота двух сечений, расстояние между которыми равно единице; тогда из элементарных геометрических соображений легко найти угол сдвига, возникающий в точке сечения, отстоящей от оси сечения на расстоянии  $r$ , и соответствующий взаимному углу поворота  $\tau$ :

$$1\gamma = r\tau.$$

На основании закона Гука при сдвиге отсюда получим величину касательного напряжения  $T_z$  в данной точке:

$$T_z = G\gamma = Gr\tau. \quad (5.3)$$

Проекция его на оси  $x$  и  $y$  будут (рис. 37)

$$X_z = -T_z \sin \alpha = -T_z \frac{y}{r}; \quad Y_z = T_z \cos \alpha = T_z \frac{x}{r}$$

или, согласно (5.3),

$$X_z = -G\tau y; \quad Y_z = G\tau x.$$

Предполагая, что остальные из составляющих напряжений (5.1) обращаются в нуль, приходим к такой системе напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x = 0; & \quad Y_y = 0; & \quad Z_z = 0; \\ Y_z = G\tau x; & \quad X_z = -G\tau y; & \quad X_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Проверим, возможна ли эта система напряжений с точки зрения теории упругости. Так как напряжения (5.4) являются функциями не выше первой степени от координат точки, то данная задача относится к простейшим; поэтому придется только удовлетворить уравнениям (I) и проверить по условиям на поверхности (II), соответствуют ли напряжения (5.4) условиям задачи о кручении. Подставляя данные из уравнений (5.4) в уравнения (I), найдем

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$

следовательно, напряжения (5.4) возможны при условии отсутствия объемных сил (например, собственного веса стержня).

Далее переходим к условиям на поверхности стержня. Легко видеть (рис. 37), что на боковой поверхности всюду  $\cos(vz) = 0$ ;

$$\cos(vx) = \cos \alpha = x/r; \quad \cos(vy) = \sin \alpha = y/r.$$

Подставляя отсюда и из уравнений (5.4) данные в уравнения (II), найдем, что

$$X_v = 0; \quad Y_v = 0; \quad Z_v = G,$$

т. е. боковая поверхность свободна от нагрузки

На концевом поперечном сечении имеем

$$\begin{aligned}\cos(vx) &= \cos(vy) = 0, \\ \cos(vz) &= 1.\end{aligned}$$

Внося отсюда и из (5.4) данные в (II), имеем

$$\left. \begin{aligned}X_v = X_z = -G\tau y; \quad Y_v = Y_z = G\tau x; \\ Z_v = 0.\end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Следовательно, здесь приложены (как и во всяком другом поперечном сечении) только касательные силы. Равнодействующая их имеет следующие проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\begin{aligned}\iint X_z dF &= -\iint G\tau y dF = -G\tau \iint y dF = 0, \\ \iint Y_z dF &= G\tau \iint x dF = 0,\end{aligned}$$

так как начало координат помещено в центре тяжести сечения. Следовательно, силы, приложенные к концевому сечению, приводятся к паре; значит, мы действительно имеем задачу о кручении стержня.

Момент крутящей пары вокруг оси  $Oz$  равен

$$M_z = \iint (X_z y - Y_z x) dF = -G\tau \iint (x^2 + y^2) dF = -G\tau J_p, \quad (5.6)$$

где  $J_p = \frac{\pi R^4}{2}$  — полярный момент инерции круглого сечения.

### § 31. Принцип Сен-Венана

Сделаем одно важное замечание. Мы показали, что система напряжений (5.4) соответствует кручению круглого стержня; *однако мы не вправе сделать обратное заключение, что при кручении круглого стержня всегда получается система напряжений* (5.4).

Действительно, формулируя задачу о кручении, мы лишь указываем, что к концевому поперечному сечению приложена пара сил; однако такого указания недостаточно, так как эта пара может быть осуществлена самыми разнообразными способами, т. е. напряжения, приводящиеся к паре, могут быть различно распределены по точкам сечения. Система напряжений (5.4) получается при вполне определенном способе осуществления крутящей пары, указанном формулами (5.5); при другом способе приложения крутящей пары получится и другая система напряжений в стержне.

Эти соображения будут справедливы и по отношению ко многим другим задачам; они показывают, что часто мы формулируем задачи схематично, задавая иногда не силы, приложенные к телу, а лишь

равнодействующие этих сил (например, «сжатие стержня двумя силами» или «изгиб парой сил» и т. д.). Каждая такая формулировка при более точном методе решения приводит ко множеству довольно разнообразных задач.

Однако Сен-Венан высказал весьма важный общий принцип, показывающий, что во всей бесчисленной совокупности задач, обнимаемых такой общей схематической формулировкой, есть много общего; принцип этот указывает, что в *точках твердого тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок*; например, для только что решенной задачи о кручении принцип Сен-Венана говорит, что в точках стержня, достаточно далеких от концевых поперечных сечений, напряжения при скручивании почти не зависят от способа приложения крутящих пар и мало меняются при изменении этого способа. Но, конечно, у концов стержня способ приложения крутящих пар существенно влияет на характер и величину напряжений.

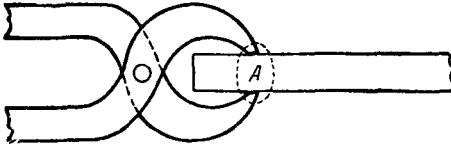


Рис. 38.

Принцип Сен-Венана вытекает из следующего предварительного положения, теперь

уже достаточно доказанного как при решении многих частных задач, так и в общем виде.

*Если к какой-либо части тела А (рис. 38) приложена уравновешенная система сил, то она вызовет в этом теле напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от части А.*

Рис. 38 поясняет это положение на частном случае стержня, который сжимается клещами, осуществляющими уравновешенную систему сил. Очевидно, как бы ни были велики эти силы (например, при перерезании клещами проволоки), они почти не вызовут напряжений вне небольшой области А, очерченной пунктиром.

Приняв это положение, мы путем простого статического преобразования перейдем от него к высказанному выше принципу Сен-Венана. Необходимые для этого рассуждения проделаем снова на конкретном примере (рис. 39, а, б) бруса, изгибаемого в одном случае силой Р, подвешенной на конце бруса снизу, а в другом — такой же силой, но давящей сверху.

Очевидно, что напряжения в области А будут весьма различны для этих двух случаев, но легко понять, что вне области А различие будет невелико.

Действительно, присоединим сюда временно третий случай (рис. 39, в), добавив к случаю а две равные противоположные силы  $P_1$  и  $P_2$ , причем по абсолютной величине все три силы одинаковы:  $P_1 = P_2 = P$ .

Замечаем, что случай *в* отличается:

от случая *а* уравновешенной системой сил  $P_1, P_2,$   
 » » *б* » » »  $P, P_2.$

Однако эти уравновешенные системы, согласно высказанному выше принципу, не вызовут почти никаких напряжений вне малой области *A*; следовательно, вне этой области случай *в* даст для напряжений весьма малое отличие от случаев *а* и *б*; значит, случаи *а* и *б* между собой также почти не будут различаться в смысле напряжений вне области *A*, а это и надо было доказать.

Следует оговориться, что приведенные здесь рассуждения имеют целью дать общее представление о принципе Сен-Венана ввиду его

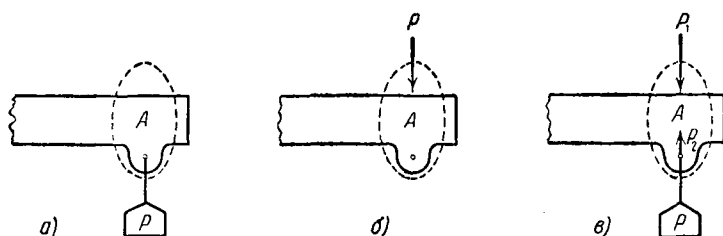


Рис. 39.

исключительного значения в самой постановке задач теории упругости и при решении их. Однако данная выше схематическая формулировка исходного положения, касающаяся уравновешенной системы сил, приложенной к части тела, может привести к ошибочным применениям принципа Сен-Венана, если не внесем в нее некоторое существенное добавление; учитывая это, дадим более полную формулировку условий, при которых справедлив принцип Сен-Венана.

Возьмем на поверхности тела небольшую область, *размеры которой невелики по сравнению со всеми размерами тела*; пусть по этой области распределена уравновешенная нагрузка (т. е. нагрузка, главный вектор и главный момент которой равны нулю); тогда принцип Сен-Венана утверждает, что под действием такой нагрузки напряжения будут заметными лишь в части тела, непосредственно прилегающей к загруженной области; они настолько быстро убывают, что в точках, расстояние которых от загруженной области превышает наибольший размер этой области, ими можно практически пренебречь.

В этой формулировке существенно требование, чтобы загруженная область была мала по сравнению со всеми размерами тела; в предельном случае она может быть *одного порядка с наименьшим размером тела*. Если это требование не соблюдено, то тем самым не удовлетворены условия, при которых справедлив принцип Сен-Венана, и пользоваться им нельзя. Это соображение не следует

упускать из вида в случае тонких оболочек и так называемых тонкостенных стержней, например стержней двутаврового сечения (рис. 40, б). Здесь размеры, характеризующие форму тела, могут значительно различаться между собой; например, общие размеры  $AB$  и  $BC$  поперечного сечения могут быть малы по сравнению с длиной стержня  $AE$ , но значительно превышать толщину стенки  $\delta$ . Представим себе одновременно два стержня (рис. 40), одинаково закрепленные в стене;

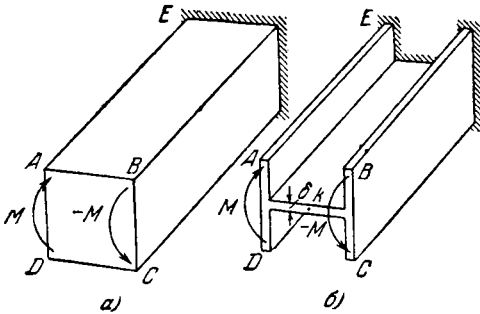


Рис. 40.

один из них имеет прямоугольное сечение, а другой — двутавровое сечение, причем размеры  $AB$ ,  $BC$  и  $AE$  в обоих случаях одинаковы. Приложим к свободному концу каждого стержня по одинаковой уравновешенной системе сил, состоящей из двух пар с равными, но противоположными моментами  $+M$  и  $-M$ . Если размеры поперечных сечений  $AB$  и  $BC$

малы по сравнению с длиной стержня  $AE$ , то, согласно принципу Сен-Венана, можем утверждать, что в случае рис. 40, а напряжения в стержне практически будут ничтожны, за исключением небольшой части его, прилегающей к свободному концу; длина этой части будет того же порядка, что и размеры поперечного сечения  $AB$  и  $BC$ .

В случае рис. 40, б этого нельзя утверждать, так как толщина стенки поперечного сечения  $\delta$  мала по сравнению с размерами нагруженной области  $ABCD$ . Это очевидно из следующих рассуждений: будем мысленно уменьшать толщину стенки  $\delta$  до нуля; в пределе стенка исчезнет и стержень обратится в две отдельные полосы (полки двутавра), каждая из которых нагружена неуравновешенной системой сил, т. е. парой; при этом каждая из полос будет испытывать чистый изгиб, рассмотренный в следующем параграфе; напряжения будут одинаковы во всех поперечных сечениях каждой полосы и распространятся до закрепленного конца ее, как бы ни была велика ее длина. Фактически толщина стенки  $\delta$  не равна нулю, и столь резкого эффекта не получится, однако чем меньше  $\delta$ , тем больше будет область распространения напряжений по длине стержня. Несмотря на это, нельзя сказать, что в случае рис. 40, б принцип Сен-Венана неверен; здесь просто не создано условий, необходимых для возможности применения его. Такие условия будут соблюдены, если пары  $+M$  и  $-M$  сблизим между собой и приложим к стенке двутавра в какой-нибудь точке  $K$  так, чтобы расстояние между плоскостями пар не превышало  $\delta$  — наименьшего размера стержня. Тогда



принцип Сен-Венана будет справедлив и можно утверждать, что напряжения будут ничтожными всюду, кроме малой области вблизи точки  $K$ ; размеры этой области того же порядка, как и толщина стенки  $\delta$ .

### § 32. Окончание задачи о кручении круглого стержня

Закончим задачу о кручении круглого стержня и найдем перемещения его точек.

Внося напряжения (5.4) в закон Гука (V) (§ 24), получим деформации; затем заменяем деформации их выражениями через перемещения по уравнениям (III) (§ 24) и получаем такую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau x, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= -\tau y. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Интегрируя уравнения (5.7), имеем

$$\left. \begin{aligned} u &= f(y, z), & v &= \varphi(x, z), \\ w &= \psi(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  — произвольные функции; вид их определим из уравнений (5.8), которые на основании (5.9) получают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial}{\partial y} \right| \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right. &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial}{\partial z} \right| \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right. &= \tau x, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right. &= -\tau y. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Постараемся путем дифференцирования исключить из этих уравнений поочередно функции  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ . Процесс этот может быть выполнен систематически; последовательность необходимых выкладок приведем подробно, так как она в той же форме будет применяться и в других задачах, изложенных далее в §§ 33 и 34. Продифференцируем уравнения (5.10) последовательно, как указано в первом.

втором и третьем столбцах слева от этих уравнений; получим следующие девять уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \\ \left. \begin{array}{l} + \quad + \quad - \\ + \quad - \quad + \\ - \quad + \quad + \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \tau; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\tau. \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

Последние три из этих уравнений почленно сложим три раза, изменяя последовательно знаки в них, как это указано в трех столбцах слева; получим такие три равенства:

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 2\tau; \quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -2\tau; \quad 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5.12)$$

Таким образом, уравнения (5.11) и (5.12) дадут следующую таблицу вторых производных функций (5.9):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \tau; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.13)$$

Предыдущие выкладки имели целью получение именно этой, более простой системы уравнений взамен (5.10); на основании ее легко установить теперь общий вид функций  $f$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ ; действительно, последние три уравнения показывают, что функция  $\psi$  будет первой степени от  $x$  и  $y$ ; первая и вторая строки показывают, что  $f$  и  $\varphi$  должны быть второй степени (соответственно от  $y, z$  и от  $x, z$ ), но не должны содержать квадратов переменных; поэтому на основании уравнений (5.13) и (5.9) легко напишем

$$\left. \begin{array}{l} f = -\tau yz + ay + bz + c, \\ \varphi = \tau xz + dx + ez + f, \\ \psi = gx + hy + k. \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

Функции (5.14) являются общим решением уравнений (5.13); эти последние получены как следствие уравнений (5.10) с помощью дифференцирования. Поэтому порядок их выше порядка последних;

значит, не всякое решение уравнений (5.13) будет удовлетворять уравнениям (5.10). Например, из дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

дифференцированием получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Общее решение последнего

$$y = C_1x + C_2$$

удовлетворит первому лишь при условии  $C_1 = 0$ . Поэтому необходимо установить, какие из решений (5.14) удовлетворяют уравнениям (5.10).

Подставляя функции (5.14) в уравнения (5.10), установим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tau z + d - \tau z + a &= 0, \\ h + \tau x + e &= \tau x, \\ -\tau y + b + g &= -\tau y, \end{aligned}$$

или

$$d = -a; \quad h = -e; \quad g = -b,$$

и затем имеем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} u &= f = -\tau yz + ay + bz + c, \\ v &= \varphi = \tau xz - ax + ez + f, \\ w &= \psi = -bx - ey + k. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

В полученные выражения перемещений (5.15) вошло шесть произвольных постоянных; наличие их здесь легко объяснить. Действительно, в § 10 мы условились закрепить исследуемое упругое тело, чтобы исключить его движение, изучаемое в механике абсолютно твердого тела и названное выше, в конце § 10, жестким смещением; однако в настоящей задаче мы еще не осуществили такого закрепления; линейные трехчлены в формулах (5.15) указывают, что пока еще сохраняется возможность поворотов всего бруса вокруг осей координат на произвольные малые углы  $-e$ ,  $-b$ ,  $-a$  и поступательных смещений его  $c$ ,  $f$ ,  $k$  вдоль этих осей [ср. формулы (2.11)].

Условия закрепления осуществим на верхнем конце стержня: закрепим центр сечения  $z = 0$ , поставив требование, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = y = z = 0 \\ u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Однако это условие недостаточно, так как, несмотря на него, стержень может вращаться вокруг начала координат (рис. 41); чтобы устранить возможность этих вращений, потребуем еще, чтобы два из трех элементов  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  у начала координат  $O$  оставались неподвижными. В § 10 [см. формулы (2.3) и (2.4) и матрицу (2.8)] мы уже получили выражения углов поворота элементарных отрезков; пользуясь ими, выражаем нужные нам условия.

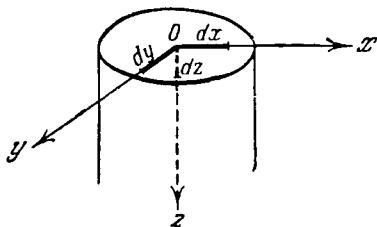


Рис. 41.

а) Отрезок  $dz$  неподвижен

при  $x = y = z = 0$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (5.17)$$

б) Отрезок  $dy$  неподвижен в плоскости  $Oxy$

при  $x = y = z = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . (5.18)

Легко сообразить, что поставленных условий (5.16), (5.17) и (5.18) достаточно для закрепления стержня против жесткого смещения его. Применяя эти условия к уравнениям (5.15), получим

$$a = b = c = e = f = k = 0^*),$$

и потому

$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau yz, \\ v &= \tau xz, \\ w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Последнее уравнение подтверждает гипотезу о том, что плоские поперечные сечения круглого стержня при кручении остаются плоскими.

### § 33. Чистый изгиб призматического стержня

Дан стержень призматического сечения (рис. 42), и к основаниям его приложены равные, но противоположные пары сил. Ось  $z$  направим по оси стержня; плоскость  $xz$  совпадает с плоскостью действия приложенных пар. Случай этот носит название чистого изгиба; элементарная теория его разработана в XVIII веке Я. Бернулли и Эйлером; она основана на гипотезе, предполагающей, что ось стержня  $OB$  изогнется по кривой, лежащей в плоскости  $xz$ , и что плоские поперечные сечения стержня останутся плоскими и нормальными к изогнувшейся оси. Из простых геометрических соображений (излагаемых в курсах сопротивления материалов) можно заключить, что

\*) Значит, все компоненты жесткого смещения в формулах (2.11) обратились в нуль.

при этом продольные «волокна» стержня, параллельные оси его, получают относительные удлинения, пропорциональные расстояниям их от плоскости  $yz$ , содержащей ось стержня и называемой нейтральной:

$$e_{zz} = -\frac{x}{\rho},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны изогнувшейся оси стержня. Предполагается, что все компоненты тензора напряжений равны нулю, за исключе-

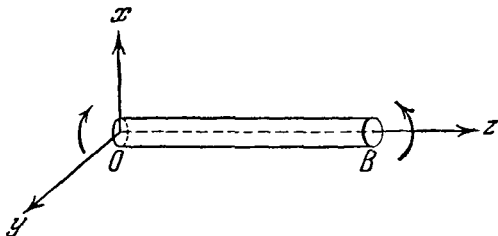


Рис. 42.

нием компонента  $Z_z$ , вызывающего простое растяжение или сжатие волокон стержня; тогда по закону Гука найдем, что

$$Z_z = Ee_{zz} = -\frac{Ex}{\rho},$$

где  $E$  — модуль Юнга. На основании всего сказанного приходим к такой системе напряжений:

$$X_x = Y_y = X_y = Y_z = Z_x = 0; \quad Z_z = -\frac{Ex}{\rho}. \quad (5.20)$$

Проверим, возможна ли система напряжений (5.20) с точки зрения теории упругости и соответствуют ли эти напряжения чистому изгибу.

Подстановкой функций (5.20) в уравнения равновесия (I) убедимся, что они удовлетворяются при отсутствии объемных сил. Уравнения неразрывности (IV) (§ 24) будут удовлетворены. Для условий на боковой поверхности стержня имеем всюду

$$\cos(vz) = 0.$$

Подставляя это и (5.20) в уравнения (II), найдем, что боковая поверхность свободна от напряжений.

Усилия на конечном сечении  $B$  приводятся к паре сил\*) с моментом

$$M_y = \iint Z_z x \, dF = -\frac{E}{\rho} \iint x^2 \, dF = -\frac{EJ}{\rho}.$$

\*) Предлагаем читателю убедиться, что равнодействующая сил  $Z_z \, dF$  равна нулю.

Значит, напряжения (5.20) возможны и соответствуют чистому изгибу\*). Переходим к определению перемещений. Подставляя напряжения (5.20) в закон Гука (V) и полученные отсюда деформации в уравнения (III), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma x}{\rho}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma x}{\rho}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x}{\rho}; \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5.22)$$

Интегрирование их ведем тем же порядком, как в предыдущем параграфе. Из уравнений (5.21) находим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sigma x^2}{2\rho} + f(y, z), \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} + \varphi(x, z), \\ w &= -\frac{xz}{\rho} + \psi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Вид функций  $f$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  находим при помощи уравнений (5.22):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{z}{\rho}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\sigma y}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения (5.10) в задаче о кручении; значит, для определения функций  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  применим изложенный там ход решения; таким путем найдем вторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\sigma}{\rho}; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{1}{\rho}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

\*) Необходимо заметить, что изложенная здесь теория справедлива только тогда, когда плоскость  $xz$  действия пар является главной плоскостью стержня, т. е. в ней лежит одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения стержня.

Имея их, без труда определим вид функций  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и, подставив результат в уравнения (5.22), получим их в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{z^2}{2\rho} + \frac{\sigma(x^2 - y^2)}{2\rho} + ay + bz + c, \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} - ax + ez + f', \\ w &= -\frac{xz}{\rho} - bx - ey + k. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Входящие сюда линейные трехчлены, как и в задаче о кручении, выражают жесткое перемещение стержня. Для определения их осуществим закрепление стержня, например, на левом конце его (рис. 42). Закрепим прежде всего центр сечения, поставив условием, что при

$$x = y = z = 0 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

на этом основании из уравнений (5.25) находим

$$c = f' = k = 0.$$

Далее закрепляем элемент оси стержня  $dz$ , устранив его повороты в плоскостях  $Oxy$  и  $Oyz$ , т. е. поставив условия, что при

$$x = y = z = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Наконец, остается устранить вращение стержня вокруг его оси; для этого закрепим, например, элемент  $dx$  оси  $Ox$  против поворота в плоскости  $Oxy$ , т. е. потребуем, чтобы при

$$x = y = z = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Из всех этих условий находим, что  $a = b = e = 0$ , и получаем окончательные выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{z^2 + \sigma(x^2 - y^2)}{2\rho}, \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho}, \\ w &= -\frac{xz}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Всякая точка стержня  $(x_1, y_1, z_1)$  после деформации переходит в новое положение:

$$x = x_1 + u = x_1 + \frac{z_1^2 + \sigma(x_1^2 - y_1^2)}{2\rho},$$

$$y = y_1 + v = y_1 + \frac{\sigma x_1 y_1}{\rho},$$

$$z = z_1 + w = z_1 - \frac{x_1 z_1}{\rho}.$$

Для точек оси стержня ( $x = y = 0$ ) получаем

$$\left. \begin{aligned} v = w = 0, \\ u = \frac{z^2}{2\rho}; \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

это есть уравнение изогнутой оси стержня.

Возьмем какое-либо плоское сечение стержня  $z = z_0$ . Новая координата  $z$  любой его точки после деформации будет

$$z = z_0 + w_0;$$

но по уравнениям (5.26) имеем

$$w_0 = -\frac{xz_0}{\rho}.$$

Следовательно,

$$z = z_0 \left( 1 - \frac{x}{\rho} \right). \quad (5.28)$$

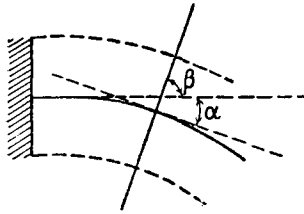


Рис. 43.

Это уравнение плоскости, параллельной оси  $Oy$  (рис. 43); ему удовлетворяют все точки сечения  $z = z_0$  после деформации. Следовательно, плоское поперечное сечение остается плоским после деформации.

Уравнение (5.28) перепишем так:

$$x = -\frac{\rho}{z_0} z + \rho. \quad (5.29)$$

Угловым коэффициентом здесь будет  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\rho}{z_0}$ . Тангенс угла наклона касательной к оси (5.27) в точке  $z = z_0$  равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=z_0} = \frac{z_0}{\rho}. \quad (5.30)$$

Таким образом, имеем (рис. 43)

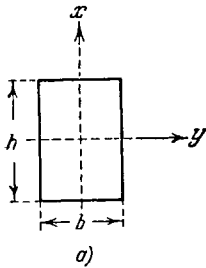
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -1.$$

Следовательно, плоское сечение  $z = z_0$  после изгиба остается нормальным к оси, и гипотеза плоских сечений в случае чистого изгиба оправдывается полностью.

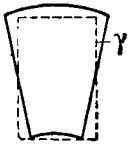
Рассмотрим еще частный случай стержня прямоугольного сечения (рис. 44, а) и исследуем искажение контура его поперечного сечения. Вопрос этот представляет интерес для дальнейшего.

Боковая сторона его до изгиба определяется уравнениями

$$z = z_0; \quad y = \pm \frac{b}{2};$$



а)



б)

Рис. 44.



после деформации эти уравнения перейдут в такие:

$$y = \pm \frac{b}{2} + v = \pm \frac{b}{2} \pm \frac{\sigma x b}{2\rho} = \pm \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{\sigma x}{\rho} \right),$$

$$z = z_0 + w = z_0 - \frac{x z_0}{\rho} = z_0 \left( 1 - \frac{x}{\rho} \right).$$

Получилось два уравнения первой степени относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; следовательно, боковые стороны после изгиба остаются прямыми. Из уравнения

$$y = \pm \frac{\sigma b}{2\rho} x \pm \frac{b}{2}$$

видно, что (рис. 44, б)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma b}{2\rho}, \quad (5.31)$$

где  $\gamma$  — угол между проекциями начального и деформированного положений боковой стороны на плоскость  $Oxy$ . Переходим к верхней и нижней сторонам, имеющим уравнения

$$z = z_0; \quad x = \pm \frac{h}{2}.$$

После изгиба их уравнения будут

$$x = \pm \frac{h}{2} + u = \pm \frac{h}{2} + \frac{z_0^2 + \sigma \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2\rho}; \quad z = z_0 \left( 1 - \frac{x}{\rho} \right).$$

Первое из этих уравнений — второй степени, а второе — первой степени относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Следовательно, верхняя и нижняя стороны обращаются в плоские кривые. Первое уравнение дает нам проекцию этих кривых на плоскость  $Oxy$ :

$$x = \pm \frac{h}{2} + \frac{z_0^2}{2\rho} + \frac{\sigma h^2}{8\rho} - \frac{\sigma}{2\rho} y^2. \quad (5.32)$$

Это есть уравнение двух парабол (верхняя и нижняя стороны). Радиус кривизны изогнутой оси (5.27) и радиус кривизны парабол (5.32) приблизительно равны соответственно

$$\rho \text{ и } \frac{\rho}{\sigma}.$$

Уравнения (5.27) и (5.32) приближены, так как в выражениях деформаций нами были отброшены конечные малые величины высших порядков [ср. § 10, формулы (2.3) и (2.4)]. При более точном решении кривые (5.27) и (5.32) будут окружностями с радиусами

$$\rho \text{ и } \frac{\rho}{\sigma}.$$

Искаженная форма контура сечения показана на рис. 44, б. Верхняя уширенная часть соответствует сжатым продольным волокнам, а нижняя — растянутым.

### § 34. Растяжение призмы под действием собственного веса

Пусть мы имеем (рис. 45, а) призму или цилиндр произвольного поперечного сечения, подвешенный верхним основанием и растягиваемый собственным весом. Легко убедиться, что данной задаче соответствует такая система напряжений:

$$X_x = Y_y = 0; \quad Z_z = \rho g z; \quad Y_z = Z_x = X_y = 0. \quad (5.33)$$

Подставив в уравнения (I) эти выражения, найдем, что  $X = Y = 0$ ,  $Z = -g$ , т. е. мы действительно имеем задачу о действии собственного веса. Далее, при  $z = 0$  получаем

$$Z_z = 0,$$

т. е. нижнее основание свободно от нагрузки; внося значения (5.33) в уравнения (II), убедимся, что боковая поверхность призмы также

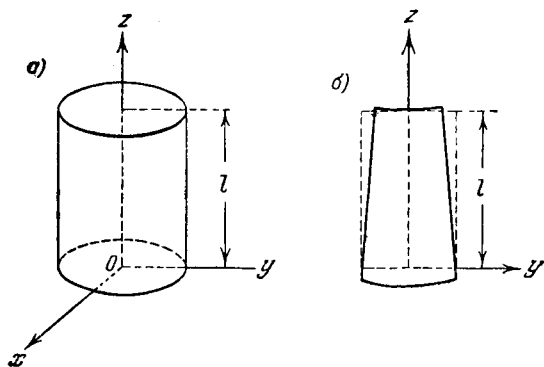


Рис. 45.

свободна от нагрузки. Перемещения разыскиваем совершенно так же, как и в двух предыдущих задачах.

На основании (III) и (V) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\sigma \rho g}{E} z, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\sigma \rho g}{E} z, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\rho g}{E} z; \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Интегрируя уравнения (5.34), получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sigma\rho g}{E}zx + f(y, z), \\ v &= -\frac{\sigma\rho g}{E}zy + \varphi(x, z), \\ w &= \frac{\rho g}{E}\frac{z^2}{2} + \psi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Внося это в (5.35), получаем уравнения для отыскания  $f$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{\sigma\rho g}{E}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\sigma\rho g}{E}x + \frac{\partial f}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Способ определения их остается таким же, как и в §§ 32 и 33, и потому, не повторяя его, приведем окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sigma\rho g}{E}zx + ay + bz + c, \\ v &= -\frac{\sigma\rho g}{E}zy - ax + ez + m, \\ w &= \frac{\rho g}{2E}[z^2 + \sigma(x^2 + y^2)] - bx - ey + k. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Условия закрепления призмы осуществляем, как и в двух предыдущих задачах, но по условиям этой задачи закрепляем не начало координат, а центр верхнего сечения; поэтому ставим следующие требования:

$$\text{при } x=0, \quad y=0, \quad z=l$$

должно быть

$$\begin{aligned} u &= 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0^* \end{aligned}$$

Отсюда легко найдем, что  $a=b=c=e=m=0$ ,  $k=-\frac{\rho g}{2E}l^2$ , и перемещения (5.38) окончательно получат вид

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sigma\rho g}{E}xz; \quad v = -\frac{\sigma\rho g}{E}yz; \\ w &= \frac{\rho g}{2E}[z^2 - l^2 + \sigma(x^2 + y^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

\*) Вместо этого можно потребовать, чтобы было  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .

Точки на оси стержня (уравнения ее:  $x = 0$ ;  $y = 0$ ) перемещаются вертикально ( $u = 0$ ;  $v = 0$ ); у всех прочих точек имеются также и горизонтальные перемещения.

Если возьмем в недеформированном состоянии некоторую точку  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , то координаты ее в результате деформации будут

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \left( 1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0 \right), \\ y &= y_0 \left( 1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0 \right), \\ z &= z_0 + \frac{\rho g}{2E} [z_0^2 - l^2 + \sigma (x_0^2 + y_0^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Пользуясь ими, исследуем характер деформации призмы.

1. Рассмотрим поперечное сечение ее;

$$z = z_0 = \text{const.}$$

Возводя в квадрат первые два из уравнений (5.40) и складывая их, получим

$$x^2 + y^2 = \left( 1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0 \right)^2 (x_0^2 + y_0^2) \quad (5.41)$$

или

$$r^2 = \left( 1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0 \right)^2 r_0^2,$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ ; значит, всякая окружность радиуса  $r_0$  в поперечном сечении с центром на оси призмы переходит в окружность радиуса  $r$ , причем  $r < r_0$ . Поверхность, в которую перейдет сечение  $z = z_0$ , найдем, исключив из (5.40) начальные координаты  $x_0$  и  $y_0$ ; учитывая (5.41), получим из третьего уравнения (5.40)

$$z = z_0 + \frac{\rho g}{2E} \left( z_0^2 - l^2 + \frac{\sigma}{\left( 1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0 \right)^2} r^2 \right). \quad (5.42)$$

В цилиндрических координатах  $r$ ,  $z$ ,  $\varphi$  это уравнение дает параболоид вращения, так как сюда не входит полярный угол  $\varphi$ .

2. Выделим мысленно в призме круговую цилиндрическую поверхность радиуса  $r_0$ :

$$x_0^2 + y_0^2 = r_0^2. \quad (5.43)$$

В результате деформации она перейдет в поверхность вращения; это наперед ясно на основании сказанного выше относительно деформации окружностей, описываемой уравнением (5.41). Для получения уравнения этой поверхности следует из четырех уравнений (5.40)

и (5.43) исключить начальные координаты  $x_0, y_0, z_0$ ; однако первые два из уравнений (5.40) можно заменить уравнением (5.41):

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0\right)^2 r_0^2, \\ z &= z_0 + \frac{\rho g}{2E} [z_0^2 - l^2 + \sigma(x_0^2 + y_0^2)], \\ x_0^2 + y_0^2 &= r_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда сразу же исключается  $x_0^2 + y_0^2$ ; остается два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left(1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z_0\right) r_0, \\ z &= z_0 + \frac{\rho g}{2E} (z_0^2 - l^2 + \sigma r_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Для получения уравнения искомой поверхности остается исключить из них  $z_0$  (или рассматривать их как параметрические уравнения поверхности с параметром  $z_0$ ; в координатах  $r, z$  эти уравнения дают образующую нашей поверхности). Первое из уравнений (5.44) дает

$$z_0 = \frac{E}{\sigma \rho g r_0} (r_0 - r).$$

Подставляя это во второе уравнение, получим

$$z = \frac{E}{\sigma \rho g r_0} (r_0 - r) + \frac{E}{2\sigma^2 \rho g r_0^2} (r_0 - r)^2 + \frac{\sigma \rho g}{2E} r_0^2. \quad (5.45)$$

Это есть поверхность, получаемая вращением параболы вокруг оси  $z$ .

### § 35. Однозначность решения уравнений теории упругости

При решении всех предыдущих задач мы шли обратным методом, задаваясь напряжениями и выясняя, при каких силах, действующих на поверхности, получается выбранная система напряжений; при этом каждый раз может возникнуть вопрос, нельзя ли при какой-либо другой системе напряжений получить такие же силы на поверхности. Если это окажется возможным, то решение уравнений теории упругости окажется многозначным: заданным силам на поверхности будут соответствовать несколько систем напряжений, и необходимо выяснить, какие из этих систем имеют место в действительности. В этом случае при обратном или полуобратном способе решения мы не будем уверены, что выбрали именно ту систему напряжений, которая соответствует действительности. Благодаря этому вопрос об однозначности решения уравнений теории упругости приобретает большое значение.

Заметим, что если в теле возможны начальные напряжения, то при действии внешних сил на это тело полные напряжения в нем могут быть весьма разнообразными; действительно, возьмем, например, тот железный шар с начальными напряжениями, о котором мы говорили в § 21. Если мы его подвергнем действию сил, то окончательные суммарные напряжения в нем будут зависеть от размера секториального выреза, который был предварительно сделан. В подобных случаях уравнения теории упругости должны иметь многозначное решение.

Отбросим случай начальных напряжений, т. е. примем гипотезу о естественном состоянии тела, а также примем закон независимости действия сил. Тогда легко доказать, что решение будет однозначным и потому единственным.

Действительно, предположим обратное, именно, что под действием заданных поверхностных сил

$$X_v, Y_v, Z_v \quad (5.46)$$

и объемных

$$X, Y, Z \quad (5.47)$$

возможны две различные системы напряжений:

$$X'_x, Y'_y, Z'_z, Y'_z, Z'_x, X'_y \quad (5.48')$$

и

$$X''_x, Y''_y, Z''_z, Y''_z, Z''_x, X''_y. \quad (5.48'')$$

Обе эти системы должны удовлетворять основным уравнениям (I) и (II):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} + \rho Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.49')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X'_x \cos(vx) + X'_y \cos(vy) + X'_z \cos(vz), \\ Y_v &= Y'_x \cos(vx) + Y'_y \cos(vy) + Y'_z \cos(vz), \\ Z_v &= Z'_x \cos(vx) + Z'_y \cos(vy) + Z'_z \cos(vz); \end{aligned} \right\} \quad (5.50')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X''_x}{\partial x} + \frac{\partial X''_y}{\partial y} + \frac{\partial X''_z}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial Y''_x}{\partial x} + \frac{\partial Y''_y}{\partial y} + \dots + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial Z''_x}{\partial x} + \dots + \rho Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.49'')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X''_x \cos(vx) + X''_y \cos(vy) + X''_z \cos(vz), \\ Y_v &= Y''_x \cos(vx) + Y''_y \cos(vy) + \dots, \\ Z_v &= Z''_x \cos(vx) \dots \end{aligned} \right\} (5.50'')$$

Почленным вычитанием соответственных уравнений систем (5.49) и (5.50) получим такую новую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(X'_x - X''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(X'_y - X''_y)}{\partial y} + \frac{\partial(X'_z - X''_z)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(Y'_x - Y''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Y'_y - Y''_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Y'_z - Y''_z)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(Z'_x - Z''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Z'_y - Z''_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Z'_z - Z''_z)}{\partial z} &= 0; \\ 0 &= (X'_x - X''_x) \cos(vx) + (X'_y - X''_y) \cos(vy) + \\ &\quad + (X'_z - X''_z) \cos(vz), \\ 0 &= (Y'_x - Y''_x) \cos(vx) + (Y'_y - Y''_y) \cos(vy) + \\ &\quad + (Y'_z - Y''_z) \cos(vz), \\ 0 &= (Z'_x - Z''_x) \cos(vx) + (Z'_y - Z''_y) \cos(vy) + \\ &\quad + (Z'_z - Z''_z) \cos(vz). \end{aligned} \right\} (5.51)$$

На основании закона независимости действий сил разности напряжений, входящие в уравнения (5.51), можем принять за некоторую новую систему напряжений. Однако уравнения (5.51) показывают, что эти напряжения существуют при отсутствии поверхностных и объемных сил, и потому все они, на основании гипотезы о естественном состоянии тела, должны быть равны нулю, т. е.

$$X'_x = X''_x, \quad X'_y = X''_y \text{ и т. д.}$$

Значит, обе системы напряжений, (5.48') и (5.48''), совпадают, что и требовалось доказать.

Если в данной задаче закон независимости действий несправедлив, то мы снова встречаемся с многозначностью решения. Иллюстрацию этого можно видеть на эйлеровой задаче о продольном изгибе стержня. Действительно, возьмем два груза,  $P_1$  и  $P_2$ , каждый из которых немногим меньше критического  $P_{кр}$ . При действии каждого из грузов  $P_1$  и  $P_2$  в отдельности получается простое сжатие стержня. При действии же суммы грузов  $P_1 + P_2$  к суммарному сжимающему напряжению добавятся колоссальные напряжения от изгиба; поэтому здесь закон независимости действий отсутствует

и действие суммы сил не равно сумме их действий порознь. Одновременно здесь имеется в наличии многозначность решения, так как возможно несколько форм равновесия, каждой из которых соответствует своя система напряжений.

В § 37 вопрос о единственности решения будет рассмотрен в более общей форме.

### § 36. Уравнения Бельтрами — Мичелла

Обратимся теперь к общему случаю решения задачи теории упругости в напряжениях. Выше уже не раз указывалось (§§ 24 и 29), что если в качестве основных неизвестных выбраны напряжения, то число этих неизвестных будет равно шести:

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y. \quad (5.52)$$

Значит, трех уравнений равновесия (I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

оказывается недостаточно, и для решения задачи придется привлечь также условия неразрывности деформаций (IV). Кроме того, конечно, на поверхности должны удовлетворяться условия (II):

$$\begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz); \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz); \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned}$$

Таким образом, задача приведет к интегрированию девяти уравнений (I) и (IV) с шестью неизвестными функциями. Входящие в общее решение этих уравнений произвольные функции надо будет определять из условий на поверхности (II).

Так как условия неразрывности (IV) связывают между собой деформации

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy},$$

нам придется эти условия преобразовать, выразив деформации через напряжения (5.52) при помощи закона Гука (V). Выполняя эту подстановку и пользуясь одновременно уравнениями равновесия (I),



мы уравнения (IV) преобразуем к следующему виду при отсутствии объемных сил или если эти силы постоянны\*):

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma) \nabla^2 X_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

Таким образом, для решения задачи придется проинтегрировать девять уравнений (I) и (VII) и удовлетворить условиям на поверхности (II).

Бельтрами нашел уравнения (VII) несколько иным путем, исходя из уравнений Ламе (VI). При этом ход рассуждений получается следующий. Предполагаем, как и выше, что объемных сил нет или они постоянны во всех точках тела, т. е. что

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = \dots = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (5.53)$$

Прежде всего доказываем вспомогательное положение о том, что знаки лапласова оператора и частной производной можно переставлять между собой, например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если через  $t$  обозначим любую из переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 f) = \nabla^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (5.54)$$

Далее доказываем, что при условиях (5.53) объемная деформация  $\theta$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (5.55)$$

\*) Вывод этот здесь опущен; найти его можно в курсе «Теории упругости» С. П. Тимошенко, ч. I, 1934.

Для этого дифференцируем первое из уравнений (VI) по  $x$ , второе по  $y$  и третье по  $z$ ; складывая полученные результаты и пользуясь (5.53) и (5.54), получим

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = 0,$$

откуда и приходим к уравнению (5.55).

Теперь из уравнений Ламе (VI) путем дифференцирования мы выведем шесть дифференциальных зависимостей между деформациями. Дифференцируя по  $x$  первое из уравнений (VI) и пользуясь уравнениями (5.53) и (5.54), получаем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \nabla^2 e_{xx} = 0. \quad (5.56)$$

Отсюда круговой подстановкой получим еще две аналогичные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \mu \nabla^2 e_{yy} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 e_{zz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Дифференцируем теперь второе из уравнений (VI) по  $z$ , а третье по  $y$  и, складывая результаты, получим

$$2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0,$$

или

$$2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \mu \nabla^2 e_{yz} = 0. \quad (5.58)$$

Круговая подстановка дает еще две зависимости:

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} + \mu \nabla^2 e_{zx} &= 0, \\ 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \mu \nabla^2 e_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Шесть уравнений (5.56) — (5.59), связывающие вторые производные деформаций изотропного упругого тела, в нашем случае (когда объемных сил нет или они постоянны) эквивалентны шести уравнениям Сен-Венана (VI) и могут их заменить. Теперь остается уравнения (5.56) — (5.59) преобразовать к напряжениям на основании закона Гука ( $V'$ ) и ( $V'_a$ ). Из ( $V'_a$ ) имеем

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Theta.$$

Из ( $V'$ ) получаем

$$e_{xx} = \frac{X_x - \lambda \theta}{2\mu}$$

и далее, пользуясь (5.55), определим

$$\nabla^2 e_{xx} = \frac{1}{2\mu} \nabla^2 X_x.$$

Подставляя это в (5.56), найдем, что

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \nabla^2 X_x = 0. \quad (5.60)$$

Но (см. § 11)

$$1 + \sigma = 1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}. \quad (5.61)$$

Имея это в виду, заметим, что (5.60) совпадает с первым из уравнений (VII). Второе и третье из уравнений (VII) получим отсюда круговой подстановкой.

Обращаемся к уравнениям (5.58) — (5.59); так как согласно (V') известно, что

$$e_{yz} = \frac{1}{\mu} Y_z,$$

то, подставляя отсюда и из (V'a) в (5.58), получим

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \nabla^2 Y_z = 0,$$

что, согласно (5.61), совпадает с четвертым из уравнений (VII); остальные два получим отсюда путем круговой подстановки.

Мичелл вывел уравнения (VII) для общего случая, когда объемные силы не постоянны. Тогда зависимости получаются сложнее и, например, первое из уравнений (VII) заменяется таким:

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = - \frac{\sigma}{1 - \sigma} \rho \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2\rho \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Предлагаем читателю вывести эти уравнения самостоятельно; для этого следует повторить весь изложенный в этом параграфе вывод, но сохраняя в уравнениях Ламе объемные силы  $\rho X$ ,  $\rho Y$ ,  $\rho Z$ .

### \* § 37. Три рода задач теории упругости. Теорема единственности

Уравнения Бельтрами — Мичелла завершают полную систему уравнений теории упругости, позволяющую решать необходимые задачи в перемещениях или в напряжениях.

До сих пор мы предполагали, что на поверхности упругого тела заданы нагрузки и даны также объемные силы. Сформулированную таким образом задачу назовем *первой основной задачей теории упругости*. В приложениях теории упругости встречается другой случай, когда на поверхности упругого тела заданы перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  всех ее точек; назовем этот случай *второй основной задачей*

*теории упругости*; одновременно с заданными перемещениями точек поверхности возникают и напряжения на ней, но они наперед нам неизвестны. Возможна также *смешанная задача теории упругости*, когда на одной части поверхности заданы перемещения, а на другой — нагрузки (напряжения); во всех этих задачах могут, конечно, существовать также наперед заданные объемные силы.

Указанные три основные задачи представляют собой некоторую схематизацию реальных физических задач; ближе к действительным условиям стоят так называемые контактные задачи, рассматривающие взаимное нажатие двух тел: упругого на упругое или абсолютно твердого на упругое; с контактной задачей приходится иметь дело, например, при расчете подшипников (простых и шариковых), катков и плит, подвижных опор ферм и балок, а также в задачах о нажатии штампа на плоскую поверхность упругого тела.

В § 35 было дано доказательство единственности решения первой основной задачи теории упругости; сейчас мы распространим его на вторую и смешанную задачи; доказательство, приводимое ниже, дано Кирхгофом; оно основано на свойствах работы сил, вызывающих деформацию упругого тела.

Пусть  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  — проекции внешней нагрузки, приложенной на поверхности тела, связанные с напряжениями вблизи поверхности уравнениями (II);  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — перемещения соответственной точки поверхности. Составим следующий двойной интеграл, распространенный по поверхности тела:

$$J = \int_{(S)} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS.$$

Для последующего вывода необязательно дать физический смысл этого интеграла, но легко сообразить, что он выражает удвоенную работу внешних нагрузок в процессе деформации тела, если эти нагрузки возрастают весьма медленно от начального естественного состояния тела. [Это следует из теоремы Клапейрона \*).]

Заменим  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  их выражениями по формулам (II) и соберем коэффициенты при косинусах углов между внешней нормалью  $v$  и осями координат. Тогда наш интеграл получит вид

$$J = \int_{(S)} [P \cos(vx) + Q \cos(vy) + R \cos(vz)] dS,$$

где

$$P = X_x u + Y_x v + Z_x w,$$

$$Q = X_y u + Y_y v + Z_y w,$$

$$R = X_z u + Y_z v + Z_z w.$$

\*) Теорема эта далее выражена в общем виде уравнением (5.62).

На основании формулы Грина, приведенной в § 3 (сноска на стр. 24), этот интеграл может быть преобразован в интеграл, распространенный по объему тела  $\tau$ :

$$J = \int_{(\tau)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau.$$

Вычислим входящие сюда производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial X_x}{\partial x} u + \frac{\partial Y_x}{\partial x} v + \frac{\partial Z_x}{\partial x} w + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Z_x \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial X_y}{\partial y} u + \frac{\partial Y_y}{\partial y} v + \frac{\partial Z_y}{\partial y} w + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial X_z}{\partial z} u + \frac{\partial Y_z}{\partial z} v + \frac{\partial Z_z}{\partial z} w + X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Сложим эти равенства почленно, но при сложении первых трех столбцов справа заметим, что на основании уравнений (I)

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\rho X \text{ и т. д.}$$

При сложении последних трех столбцов учтем закон взаимности касательных напряжений (1.6) и формулы (III); в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = & -\rho Xu - \rho Yv - \rho Zw + \\ & + X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + Y_z e_{yz} + Z_x e_{zx} + X_y e_{xy}, \end{aligned}$$

или на основании (3.32):

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\rho Xu - \rho Yv - \rho Zw + 2W.$$

Пользуясь этой зависимостью при преобразовании рассматриваемого интеграла  $J$ , придем к следующему равенству:

$$\int_{(S)} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS + \int_{(\tau)} (\rho Xu + \rho Yv + \rho Zw) d\tau = 2 \int_{(\tau)} W d\tau. \quad (5.62)$$

Первый интеграл левой части, как уже было сказано, выражает удвоенную работу поверхностных сил, совершенную в процессе деформации; второй интеграл выражает удвоенную работу объемных сил; в правой части стоит удвоенная потенциальная упругая энергия, накопленная телом. Очевидно, что соотношение (5.62) формулирует предположение, сделанное в начале § 20 гл. III о существовании потенциала упругих сил; согласно этой гипотезе, работа поверхностных и объемных сил должна быть полностью накоплена в форме упругой потенциальной энергии.

Равенство (5.62) позволяет легко доказать теорему единственности решения для всех трех основных задач теории упругости; для этой цели продолжим рассуждения § 35 и предположим, что при одних и тех же условиях на поверхности и при одних и тех же объемных силах мы получили две различные системы напряжений, перемещений и деформаций, как это обозначено в (5.48).

Если примем закон независимости действия сил, то «разность этих решений»

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X'_v - X''_v; & Y_v &= Y'_v - Y''_v; & Z_v &= Z'_v - Z''_v, \\ X_x &= X'_x - X''_x; & Y_y &= Y'_y - Y''_y; & \dots & X_y = X'_y - X''_y, \\ u &= u' - u''; & v &= v' - v''; & \omega &= \omega' - \omega'', \\ e_{xx} &= e'_{xx} - e''_{xx}; & e_{yy} &= e'_{yy} - e''_{yy}; & \dots & e_{xy} = e'_{xy} - e''_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

также может быть принята в качестве решения некоторой задачи теории упругости; значит, к этому решению возможно применить равенство (5.62) с тем упрощением, что второй интеграл левой части обратится в нуль, так как в обоих решениях объемные силы одинаковы, и потому

$$\rho X = \rho X' - \rho X'' = 0$$

и т. д.

Таким образом, получим

$$\int \int_{(S)} (X_v u + Y_v v + Z_v \omega) dS = 2 \int \int_{(\tau)} W d\tau, \quad (5.64)$$

где  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  взяты из первой и третьей строк (5.63); если функция  $W$  выражена в форме (3.33), то аргументы ее следует взять из четвертой строки (5.63); если же она дана в форме (3.34), то аргументы следует взять из второй строки (5.63). Обращаясь теперь к интегралу левой части (5.64), заметим, что:

1) в случае первой основной задачи будем иметь всюду на поверхности

$$X_v = 0, \quad Y_v = 0, \quad Z_v = 0; \quad (5.65)$$

2) в случае второй основной задачи всюду на поверхности

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \omega = 0; \quad (5.66)$$

3) в случае смешанной задачи на одних частях поверхности, где заданы напряжения, соблюдены условия (5.65), а на других, где заданы перемещения, выполнены условия (5.66).

Очевидно, что во всех трех случаях интеграл левой части (5.64) обратится в нуль и получится равенство

$$\int_{(\tau)} W d\tau = 0.$$

Однако в конце § 21 было показано, что

$$W > 0$$

во всех точках тела; значит, последнее равенство возможно лишь тогда, если все аргументы функции  $W$  равны нулю, т. е.

$$e_{xx} = e'_{xx} - e''_{xx} = 0 \quad \text{и т. д.,}$$

$$X'_x - X''_x = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда следует, что обе допущенные вначале системы напряжений должны совпадать во всех точках тела; то же относится и к деформациям.

Этим доказана теорема единственности. Из приведенного доказательства еще не следует, что и перемещения в обоих допущенных решениях будут одинаковы; в случае первой основной задачи, где на поверхности заданы напряжения, это не будет иметь места; действительно, из условий

$$e_{xx} = e'_{xx} - e''_{xx} = 0 \quad \text{и т. д.,}$$

согласно сказанному в § 10 относительно формул (2.11), следует, что упругому телу, имеющему определенные напряжения и деформации под действием заданных сил, можно дать любое малое дополнительное жесткое смещение. Очевидно, что во второй и смешанной задачах перемещения в обоих решениях также будут одинаковы, так как они определенно заданы на всей поверхности тела или на части ее.

---

## ГЛАВА VI

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

#### § 38. Плоская деформация

Мы переходим к большой категории задач теории упругости, важных в смысле практических приложений и вместе с тем допускающих значительное упрощение математической стороны решения.

Упрощение заключается в том, что в этих задачах одну из координатных осей, например  $Oz$ , можно отбросить и все явление рассматривать как бы происходящим в одной плоскости  $Oxy$ . На практике такой случай в чистом виде осуществить весьма трудно, но с некоторым приближением мы его встречаем во многих задачах. Задачи эти можно разделить на две группы, в некотором отношении взаимно противоположные, но объединяемые одной общей математической формой решения.

Первая из этих групп соответствует случаю, когда одно из перемещений, например  $w$ , всюду равно нулю, другие же два  $u$  и  $v$  не зависят от координаты  $z$ , соответствующей перемещению  $w$ ; значит, случай этот характеризуется следующими условиями, справедливыми во всех точках тела:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y); & v &= f_2(x, y); \\ w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

При этих условиях уравнения (III) дают

$$\left. \begin{aligned} e_{zz} &= 0; & e_{yz} &= 0; & e_{zx} &= 0; \\ e_{xx} &= \varphi_1(x, y); & e_{yy} &= \varphi_2(x, y); \\ e_{xy} &= \varphi_3(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) показывают, что все перемещения и деформации происходят исключительно в направлениях, параллельных плоскости  $Oxy$ , и притом во всех сечениях тела, параллельных плоскости  $Oxy$  ( $z = z_0$ , где  $z_0$  — любое число), картина перемещений и деформаций одинакова. Деформация этого рода называется плоской деформацией.



С близким к этому случаем мы встречаемся в задачах, где рассматривается длинное призматическое или цилиндрическое тело с осью, параллельной оси  $Oz$ , нагруженное по боковой поверхности нагрузкой, нормальной к оси  $Oz$  и постоянной вдоль оси (хотя бы и меняющейся в направлениях, нормальных к оси). Таковы, например, задачи о длинной плотине (рис. 46, а), длинном катке (рис. 46, б),

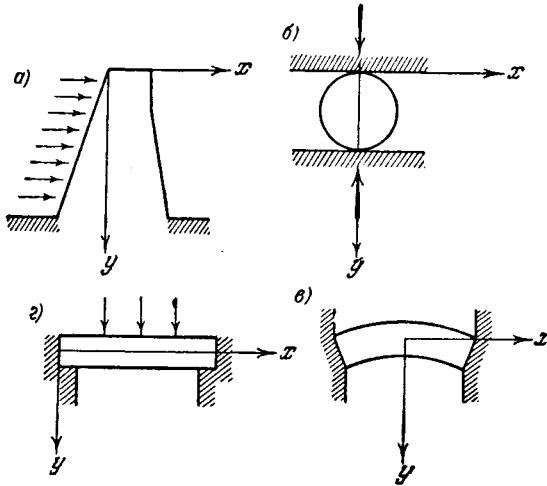


Рис. 46.

длинном своде (рис. 46, в), длинной пластинке (рис. 46, г) с осью, параллельной оси  $Oz$ ; предполагаем во всех этих случаях, что нагрузка не меняется вдоль оси  $Oz$ .

Если из такого длинного призматического тела двумя близкими сечениями, параллельными плоскости  $Oxy$ , выделим вдали от его концов тонкий элемент с приходящейся на него нагрузкой и представим себе, что он работает как отдельное упругое тело, то заметим, что в нем должны появиться удлинения вдоль оси  $Oz$ ; удлинения эти являются результатом поперечного действия нагрузки, параллельной плоскости  $Oxy$  (начало § 16). На самом же деле этот элемент находится в соседстве с другими двумя элементами, имеющими такие же удлинения, но в обратном направлении; в результате взаимодействия этих элементов удлинений и перемещений вдоль оси  $Oz$  не будет, но между соседними элементами появятся силы взаимодействия, выражающиеся в нормальных напряжениях  $Z_z$ , появляющихся вследствие уничтожения деформации  $e_{zz}$ .

Действительно, возьмем третье из уравнений закона Гука (V); уничтожение деформации  $e_{zz}$  приведет нас к уравнению

$$Z_z - \sigma(X_x + Y_y) = 0,$$

или

$$Z_z = \sigma(X_x + Y_y). \quad (6.3)$$

Следовательно,  $Z'_z \neq 0$ , но оно есть функция основных напряжений  $X_x$  и  $Y_y$ , вызванных нагрузкой.

Поясним эти рассуждения на примере. Пусть мы имеем сплошной изгибаемый настил из ряда прямоугольных балок (рис. 47, а); направим ось  $Ox$  вдоль пролета их. При изгибе поперечные сечения балок искажаются (рис. 47, б), как это было показано (§ 33), и при этом появятся удлинения и укорочения  $e_{zz}$ . Если же вместо настила из балок мы имеем сплошную широкую плиту шириной  $AA'$ , то при прогибе ее искажение отдельных элементов  $mnpq$ , выделенных вдали от концов  $A$  и  $A'$ , не может произойти; зато появятся напряжения  $Z_z$ , так как в верхних точках  $n$  (рис. 47, б) элементы нажмут друг на друга, а в нижних точках  $q$  между ними появится растяжение. Эти напряжения  $Z_z$  и выражаются формулой (6.3).

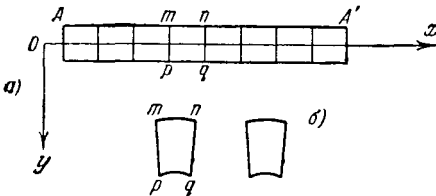


рис. 47.

Далее, предполагая, что соседние элементы рассматриваемого призматического тела (рис. 46 и 47) несут одинаковую нагрузку и работают в совершенно одинаковых условиях, то нет основания ожидать ка-

ких-либо сдвигов между ними; отсюда легко сообразим, что всюду  $e_{yz} = 0$ ,  $e_{zx} = 0$ . Таким образом, для элементов рассматриваемого длинного призматического тела, удаленных от его концов, приблизительно соблюдаются условия (6.1), (6.2), (6.3) плоской деформации. Легко видеть, что при этих условиях все наши основные группы уравнений значительно упрощаются. Начнем с закона Гука в форме (V); первое из этих уравнений на основании (6.3) получает вид

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma Y_y - \sigma^2 (X_x + Y_y)] = \frac{1 + \sigma}{E} [(1 - \sigma) X_x - \sigma Y_y],$$

второе получает вид

$$e_{yy} = \frac{1 + \sigma}{E} [(1 - \sigma) Y_y - \sigma X_x].$$

Эти уравнения удобно написать в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E_1} (X_x - \sigma_1 Y_y), \\ e_{yy} &= \frac{1}{E_1} (Y_y - \sigma_1 X_x), \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где

$$E_1 = \frac{E}{1 - \sigma^2}; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{1 - \sigma}. \quad (6.5)$$

Уравнения четвертое и пятое на основании (6.2) дают

$$Y_z = 0; \quad Z_x = 0. \quad (6.6)$$

Шестое уравнение получит вид

$$e_{xy} = \frac{2(1 + \sigma)}{E} X_y.$$

Но, пользуясь (6.5), найдем, что

$$\frac{2(1 + \sigma_1)}{E_1} = \frac{2(1 + \sigma)}{E},$$

и потому

$$e_{xy} = \frac{2(1 + \sigma_1)}{E_1} X_y. \quad (6.4')$$

Далее, на основании (6.2) уравнения (6.4) показывают, что

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \psi_1(x, y), & Y_y &= \psi_2(x, y), \\ X_y &= Y_x = \psi_3(x, y), \\ X_z &= Y_z = 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

на этом основании по уравнению (6.3)

$$Z_z = \psi_4(x, y),$$

т. е. все не равные нулю напряжения не зависят от координаты  $z$ , что, конечно, ясно и наперед.

Отсюда вытекают нижеследующие выводы. Из группы уравнений равновесия (I) остаются лишь первые два, и они переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I_n)$$

Условия на поверхности (II) упрощаются так:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy); \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy). \end{aligned} \right\} \quad (II_n)$$

Зависимости (III) сводятся к следующим трем:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (III_n)$$

Из шести условий неразрывности деформаций (IV), как легко видеть, остается одно первое:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (IV_n)$$

Закон Гука (V) получает вид

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E_1} (X_x - \sigma_1 Y_y); \\ e_{yy} &= \frac{1}{E_1} (Y_y - \sigma_1 X_x); \\ e_{xy} &= \frac{2(1 + \sigma_1)}{E_1} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (V_n)$$

Уравнения (I<sub>n</sub>) — (V<sub>n</sub>) позволяют уже приступить к решению задачи о плоской деформации.

### § 39. Обобщенное плоское напряженное состояние.

#### Уравнение М. Леви. Функция напряжений

Обратимся теперь к другому случаю, аналогичному предыдущему, но противоположному в смысле протяжения вдоль оси  $Oz$ , т. е. опять рассмотрим задачу, показанные на рис. 46. Предположим, однако, что длина призматического тела вдоль оси  $Oz$  весьма мала; значит, мы будем иметь тонкую пластинку (толщиной  $h$ ), нагруженную по боковой поверхности (ребру) силами, параллельными ее основаниям. Пока нагрузка не превосходит некоторого предела (критического значения), равновесие пластинки будет устойчиво и она не будет прогибаться в направлении оси  $Oz$ . Этот случай называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

Основания пластинки (параллельные плоскости  $Oxy$ ) по предположению свободны от нагрузки, т. е. на них всюду

$$Z_z = 0; \quad X_z = 0; \quad Y_z = 0.$$

Но так как расстояние между этими основаниями (толщина пластинки) весьма мало, то и внутри пластинки эти напряжения можно принять весьма малыми \*). Остальные составляющие напряжения  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$  по той же причине (малость толщины вдоль оси  $Oz$ ) весьма мало будут меняться вдоль оси  $Oz$ , вследствие чего мы их примем не зависящими от координаты  $z$ . Таким образом, в рассматриваемой задаче для напряжений приблизительно соблюдаются

\*) В отношении нормальных напряжений  $Z_z$  это предположение не может вызвать сомнений; что касается напряжений  $X_z$  и  $Y_z$ , то оно справедливо, если нагрузка на боковой поверхности распределена равномерно вдоль образующей (как это предполагалось в случае плоской деформации).

такие условия:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \psi_1(x, y); & Y_y &= \psi(x, y); \\ X_y &= \psi_3(x, y); & Y_z = Z_y &= 0; \\ Z_x &= X_z = 0; & Z_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

От соответственных условий (6.6) и (6.7) для плоской деформации они отличаются только условием  $Z_z = 0$ .

В отношении деформаций от задачи о плоской деформации данная задача отличается тем, что здесь  $e_{zz}$  не равно нулю [ср. формулы (6.2)]. Оно будет представлять собой поперечную деформацию (ср. начало § 16) вдоль оси  $Oz$ , вызываемую основными напряжениями  $X_x, Y_y$ , лежащими в плоскостях, параллельных  $Oxy$ .

Деформация  $e_{zz}$  повлечет за собой некоторое искривление плоских оснований пластинки. Однако вследствие малой толщины пластинки искривление это будет весьма малым. Например, возьмем случай чистого изгиба прямоугольной балки, рассмотренный в § 33. Свободные от нагрузки боковые ребра поперечного сечения наклоняются на угол  $\gamma$  (рис. 44, б); однако из формулы (5.31) § 33 видно, что угол этот пропорционален ширине балки  $b$ ; значит,

Обобщим задачу и предположим, что нагрузка распределена симметрично относительно срединной плоскости пластинки  $O-O$ , но неравномерно (рис. 48, а); тогда в сечении  $m\pi$  касательные напряжения  $Z_x$  или  $Z_y$  могут быть значительными; однако кривая распределения их (эпюра) будет антисимметричной, и площадь ее будет равна нулю; это можно выразить в форме равенств

$$\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z_x dz = 0;$$

$$\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z_y dz = 0.$$

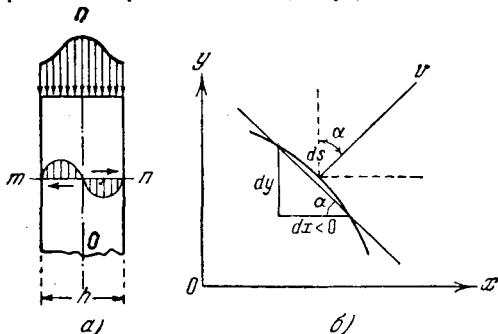


Рис. 48.

Значит, можно сказать, что касательные напряжения  $Z_x$  и  $Z_y$  будут равны нулю в среднем по толщине пластинки. Поэтому при более строгом изложении теории обобщенного плоского напряженного состояния все компоненты тензора напряжений заменяются средними их значениями по толщине пластинки. В дальнейшем для простоты будем считать, что поверхностные нагрузки распределены равномерно вдоль образующих, и потому примем, что всюду в пластинке

$$Z_x = X_z = Z_x = Y_z = Z_y = 0.$$

если  $b$  мало, т. е. если балка имеет форму тонкой пластинки, то углы  $\gamma$  будут также весьма малы и искривление боковых поверхностей ее будет ничтожно.

На основании уравнений (6.8) делаем следующие заключения: основные группы уравнений (I) и (II) в рассматриваемом случае имеют тот же вид (I<sub>п</sub>) и (II<sub>п</sub>), как и для случая плоской деформации; из группы (III) также достаточно сохранить лишь уравнения (III<sub>п</sub>); равным образом в группе (IV) можно ограничиться одним уравнением (IV<sub>п</sub>); в законе же Гука (V), на основании последнего из условий (6.8), будет отличие от уравнений (V<sub>п</sub>) задачи о плоской деформации; действительно, в нашем случае имеем

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y), \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x), \\ e_{xy} &= \frac{2(1 + \sigma)}{E} X_y. \end{aligned} \right\} (V'_п)$$

Резюмируя предыдущие рассуждения, скажем, что при решении задач, как на плоскую деформацию, так и на обобщенное плоское напряженное состояние, можно пользоваться основными группами уравнений: (I<sub>п</sub>), (II<sub>п</sub>), (III<sub>п</sub>) и (IV<sub>п</sub>). Закон же Гука выражается для этих задач различно: для плоской деформации — уравнениями (V<sub>п</sub>), а для плоского напряженного состояния — уравнениями (V'<sub>п</sub>). Однако важно отметить, что вид этих уравнений в обоих случаях одинаков; различие заключается лишь в значении упругих постоянных, которые в случае плоской деформации выражаются через  $E$  и  $\sigma$  формулами (6.5).

В дальнейшем за неизвестные мы выбираем напряжения  $X_x, Y_y, X_y = Y_x$ ; поэтому уравнение неразрывности деформаций (IV<sub>п</sub>) необходимо преобразовать, внося в него вместо деформаций их выражения из уравнений (V<sub>п</sub>) или (V'<sub>п</sub>), в зависимости от того, имеем ли мы плоскую деформацию или плоское напряженное состояние.

Выполняем над уравнениями (V<sub>п</sub>) дифференцирование, как того требует уравнение (IV<sub>п</sub>):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E_1} \left( \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E_1} \left( \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1 + \sigma_1)}{E_1} \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y}. \quad (6.10)$$

Правую часть уравнения (6.10) преобразуем, выразив касательное напряжение  $X_y$  через нормальные  $X_x$  и  $Y_y$  из уравнений (I<sub>п</sub>); диф-

ференцируя их и перенося некоторые члены в правые части, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 Y_x}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial Y}{\partial y}.\end{aligned}$$

Складывая почленно, получаем

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (6.11)$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда объемные силы постоянны по всему объему тела; тогда

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

В частности, мы будем иметь дело с силой тяжести и ось  $Oy$  будем направлять вниз; это даст

$$\left. \begin{aligned} X &= 0, & Y &= g, \\ \rho Y &= \rho g = p. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

где  $p$  — вес единицы объема тела; теперь уравнение (6.11) получит вид

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = -\left( \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right),$$

и уравнения (6.9) и (6.10) переписутся так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E_1} \left( \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E_1} \left( \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} \right), \\ -\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1 + \sigma_1}{E_1} \left( \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Складывая их почленно, получим левую часть (IV<sub>п</sub>) в форме, преобразованной к напряжениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{E_1} \left[ \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right] = \\ &= \frac{1}{E_1} \left[ \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial y^2} \right].\end{aligned}$$

Здесь выражение в квадратных скобках представляет собой лапласов оператор второго порядка над функцией  $(X_x + Y_y)$ :

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial y^2}.$$

Внося это в уравнение неразрывности деформаций ( $IV_n$ ), получим его в окончательной, преобразованной к напряжениям, форме:

$$\nabla^2(X_x + Y_y) = 0.$$

Это есть так называемое условие Мориса Леви (M. Lévy). Его можно получить другим путем, исходя из того, что при отсутствии объемных сил объемное расширение  $\theta$  есть функция гармоническая [ср. формулу (5.55)]:

$$\nabla^2\theta = 0,$$

а следовательно, согласно (3.10) будем иметь

$$\nabla^2\Theta = 0,$$

где

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z.$$

Но в случае плоской деформации

$$Z_z = \sigma(X_x + Y_y),$$

а в случае обобщенного плоского напряженного состояния

$$Z_z = 0.$$

Отсюда получим, что

$$\nabla^2(X_x + Y_y) = 0,$$

Таким образом, решение плоской задачи приводится к интегрированию трех дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + p = 0; \quad (I_n)$$

$$\nabla^2(X_x + Y_y) = 0, \quad (IV_n)$$

и удовлетворению условий на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy), \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy). \end{aligned} \right\} \quad (II_n)$$

Если нам удастся таким путем найти напряжения

$$X_x, Y_y, X_y, \quad (6.13)$$

то, внося их для плоской деформации в ( $V_n$ ) или для плоского напряженного состояния в ( $V'_n$ ), найдем деформации  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{xy}$  как функции от  $x$  и  $y$ ; внося их далее в уравнения ( $III_n$ ), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e_{xy}, \quad (III_n)$$

а интегрируя последние, получим перемещения  $u$ ,  $v$ . Этим решение задачи будет закончено.



Очень важно заметить следующее. Если в данной задаче надо найти только напряжения, то можно ограничиться уравнениями  $(I_n)$ ,  $(IV'_n)$  и  $(II_n)$ , в которые не входят упругие постоянные. Значит, следует ожидать, что напряженное состояние не зависит от материала; это заключение справедливо для тела, ограниченного односвязной поверхностью (которая в плоскости действия сил изображается односвязным контуром). В случае многосвязного контура напряженное состояние не зависит от материала, если внешние нагрузки уравновешены на каждом из контуров в отдельности\*). Эти заключения лежат в основе практических приложений оптического метода исследования напряжений в поляризованном свете; при этом данный материал заменяется другим — прозрачным и оптически активным, из которого изготавливается пластинка, подвергаемая испытанию в качестве модели.

Эри (Airy) указал на возможность дальнейшего упрощения в решении задачи. Это упрощение основано на том, что мы можем легко найти общее решение системы уравнений  $(I_n)$  и в дальнейшем не иметь с ними дела. Система  $(I_n)$  неоднородна, и потому общее решение ее представит собой сумму общего решения однородной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

и какого-либо частного решения системы  $(I_n)$ ; это частное решение легко найти, полагая, например [см. формулу (6.12)],

$$X_x = Y_y = 0; \quad X_y = -px, \quad (6.15)$$

или

$$X_x = X_y = 0; \quad Y_y = -py. \quad (6.15')$$

Обратимся теперь к системе (6.14). Общее решение ее содержит одну произвольную функцию  $\varphi(x, y)$  от независимых переменных  $x$  и  $y$  и имеет простой вид:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (6.16)$$

Если эти выражения напряжений подставим в уравнения (6.14), то убедимся, что они тождественно удовлетворяются, какова бы ни была функция  $\varphi(x, y)$ , лишь бы существовали и были непрерывными частные производные ее до четвертого порядка включительно. Функция эта называется *функцией напряжений* или *функцией Эри*.

\*) Точнее говоря, если равнодействующая нагрузок на каждом контуре в отдельности равна нулю.

Общее решение (6.16) можно получить без труда следующим путем: первому уравнению системы (6.14) удовлетворим, полагая

$$X_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad X_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.17)$$

где  $\psi(x, y)$  — произвольная функция. Второе уравнение будет удовлетворено, если

$$X_y = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad Y_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (6.18)$$

где  $\chi(x, y)$  — также произвольная функция. Однако оба уравнения (6.14) будут удовлетворены одновременно только тогда, если выражения  $X_y$  в (6.16) и (6.17) будут совпадать, значит, должно быть

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0,$$

а этому уравнению удовлетворим, полагая:

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \chi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

внеся эти значения  $\psi$  и  $\chi$  в (6.17) и (6.18), получим формулы (6.16). Общее решение уравнений  $(I_n)$  найдем, добавив к (6.16) частное решение их, например, в форме (6.15'); тогда будем иметь окончательно:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - p x. \quad (VIII)$$

Подставляя эти выражения в уравнения  $(I_n)$ , легко убедиться, что последние будут тождественно удовлетворены, и далее с ними не придется иметь дела. Остается одно уравнение  $(IV'_n)$ , которое легко выражается через функцию  $\varphi$ ; действительно, на основании (VIII)

$$X_x + Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi,$$

и уравнение  $(IV'_n)$  символически изобразится так:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (IX')$$

Раскрывая символ лапласова оператора, получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (IX)$$

Таким образом, решение плоской задачи в напряжениях сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения (IX) четвертого порядка в частных производных; если из этого уравнения определим функцию  $\varphi(x, y)$ , то далее по формулам (6.16) или (VIII) найдем напряжения в любой точке тела. К уравнению (IX), конечно, должны быть добавлены граничные условия, соответствующие каждой

данной конкретной задаче. Здесь мы остановимся на *первой основной задаче теории упругости* (§ 37); в этом случае на границе тела, т. е. на контуре поперечного сечения (если рассматривается плоская деформация) или на контуре пластинки (при обобщенном плоском напряженном состоянии), следует задать напряжения, т. е. нагрузки. Граничные условия будут иметь наиболее простой вид, если контуром тела явится прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат  $Ox$  и  $Oy$ . Тогда на сторонах, параллельных оси  $Ox$ , следует задать напряжения  $Y_y$  и  $X_y$ , а на сторонах, параллельных оси  $Oy$ , — напряжения  $X_x$  и  $Y_x$ ; согласно (6.16), эти напряжения равны соответствующим значениям вторых производных функции  $\varphi(x, y)$ , которые и должны быть заданы. В следующих параграфах разобрано несколько задач этого рода.

\* Рассмотрим граничные условия в случае контура произвольного очертания; с этой целью обратимся к общим условиям на поверхности  $(\Pi_n)$ ; при помощи функции напряжений  $\varphi(x, y)$  они запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(vx) - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right) \cos(vy), \\ Y_v &= - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right) \cos(vx) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(vy). \end{aligned} \right\} \quad (X)$$

Таким образом, решение плоской задачи представляется так: следует найти функцию  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющую во всех точках поперечного сечения исследуемого тела (рис. 46) уравнению (IX), а на контуре этого сечения — уравнениям (X), где  $X_v$  и  $Y_v$  — проекции внешней нагрузки на оси координат. Найдя функцию  $\varphi$ , по уравнениям (VIII) определим напряжения; дальнейшее разыскание деформаций и перемещений выполняется по уравнениям  $(V_n)$  или  $(V'_n)$  и  $(III_n)$ , как указано выше.

Замечание. Если объемных сил нет (т. е. если  $p = 0$ ), то условия на поверхности (X) можно написать короче, вводя понятие о производной функции по дуге контура поперечного сечения. Действительно, имеем (рис. 48, б)

$$\begin{aligned} \cos(vx) &= \sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \\ \cos(vy) &= \cos \alpha = - \frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

Внося это в уравнения (X), имеем

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ Y_v &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Эти равенства позволяют выразить условия на контуре в другой форме, представляющей интерес в смысле общей постановки вопроса

об интегрировании уравнения плоской задачи (IX) при заданных на контуре нагрузках. Умножим (6.19) на  $ds$  и интегрируем по  $s$  вдоль контура, начиная от произвольной точки  $S_0$ , принятой за начало дуг:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -A - \int_0^s Y_v ds = -Y^{(s)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= B + \int_0^s X_v ds = X^{(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные; они выражают значения производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

в точке  $S_0$  контура. Для придания большей наглядности дальнейшим выкладкам введем следующую аналогию: заменим контур исследуемого тела стержнем той же формы, разрезанным в точке  $S_0$  (рис. 49), где приложим силы:

$A$  параллельно оси  $y$ ,  
 $B$  » » »  $x$ .

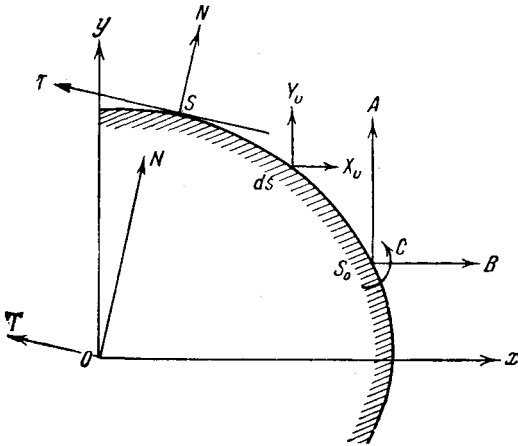


Рис. 49.

Имея в виду, что поверхностные нагрузки  $X_v$  и  $Y_v$  рассчитываются на единицу длины дуги контура, заметим, что величины  $X^{(s)}$  и  $Y^{(s)}$  в правых частях равенств (6.20) представляют собой суммы проекций на оси  $Ox$  и  $Oy$  сил, приложенных к части  $S_0S$  стержня. Если вместо осей  $Ox$  и

$Oy$  возьмем новые оси  $ON$  и  $OT$  (рис. 49), направленные параллельно нормали и касательной к контуру в точке  $S$ , то формулы (6.20) в новых координатах  $n$  и  $t$  напишутся так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -T^{(s)}, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = N^{(s)}, \quad (6.22)$$

где  $T^{(s)}$  — продольная сила в точке  $S$  стержня,  $N^{(s)}$  — поперечная сила в точке  $S$  стержня.

В формуле (6.21) величина

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

представляет собой производную от функции напряжения  $\varphi$  по нормали к контуру; аналогично

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

есть производная по касательной к контуру или по дуге контура

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Сопоставляя равенство (6.22) с известной теоремой о производной изгибающего момента в стержне

$$\frac{\partial M}{\partial t} = Q,$$

можно считать, что

$$\varphi = M^{(s)}, \quad (6.23)$$

где  $M^{(s)}$  — момент сил, приложенных к части  $S_0S$  стержня относительно точки  $S$ ; при вычислении  $M^{(s)}$  путем интегрирования уравнения (6.22) добавится произвольная постоянная, которую можно задать, приложив в начальной точке  $S_0$  пару сил с произвольным моментом  $C$  (рис. 49).

Все приведенные рассуждения позволяют представить условия на контуре (в случае заданных на нем нагрузок) в нужной нам новой форме; для этого следует по заданным на контуре нагрузкам подсчитать в каждой его точке значение функции напряжений  $\varphi(x, y)$  и ее нормальной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

по формулам (6.21) и (6.23) как продольную силу и изгибающий момент от заданных на контуре нагрузок. В состав  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  войдут три произвольные постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  (начальные параметры); они, очевидно, не влияют на заданные контурные нагрузки  $X_v$  и  $Y_v$  и на напряжения, вызываемые ими.

Функции, удовлетворяющие уравнению (IX), называются бигармоническими; плоскую задачу теории упругости при заданных на контуре нагрузках можем теперь трактовать в следующей математической форме: требуется найти бигармоническую функцию

$$\varphi(x, y)$$

во всех точках области, ограниченной заданным контуром, если на контуре заданы значения самой функции  $\varphi$  и ее нормальной производной.

### § 40. Решение плоской задачи в полиномах

Во многих задачах оказывается удобным идти полуобратным методом, задавая наперед аналитическую форму функции напряжений  $\varphi(x, y)$  и подбирая ее параметры (например, коэффициенты) так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности (X) и основное уравнение (IX). Рассмотрим несколько задач, в которых  $\varphi(x, y)$  можно задать в виде целой функции (полинома). Если функция  $\varphi$  представляет собой полином второй степени

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2, \quad (6.24)$$

то уравнение (IX), очевидно, будет всюду удовлетворено при любых значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Напряжения, согласно уравнениям (VIII), выразятся так\*):

$$X_x = c; \quad Y_y = a; \quad X_y = -b - px. \quad (6.25)$$

Если  $p = 0$ , то напряжения постоянны; получаем случай *однородного напряженного состояния*.

Если  $\varphi$  есть полином третьей степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{d}{6} x^3 + \frac{e}{2} x^2 y + \frac{f}{2} x y^2 + \frac{k}{6} y^3 + \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2, \quad (6.26)$$

то уравнение (IX) по-прежнему будет удовлетворено при произвольных значениях коэффициентов; напряжения по уравнениям (VIII) выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= fx + ky + c, \\ Y_y &= dx + ey + a, \\ X_y &= -ex - fy - b - px, \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

т. е. они будут линейными функциями от координат.

Если  $\varphi$  зададим как функцию четвертой степени или выше, то производные ее, входящие в уравнение (IX), вообще говоря, будут отличны от нуля; поэтому коэффициенты придется подобрать так, чтобы условие неразрывности (IX) было удовлетворено при произвольных значениях  $x$  и  $y$ . Напряжения при этом будут функциями второй степени или выше.

Чистый изгиб. Рассмотрим частный случай функции напряжений (6.26):

$$\varphi = \frac{k}{6} y^3.$$

\* Из уравнений (6.25) видно, что членов первой степени в функции (6.24) задавать не надо, так как они не отразятся на величине напряжений.

Пренебрегая влиянием собственного веса, из уравнений (6.27) получим напряжения

$$X_x = ky; \quad Y_y = 0; \quad X_y = Y_x = 0. \quad (6.28)$$

Если возьмем пластинку шириной  $h$  (рис. 50) и предположим, что в ней осуществляются напряжения (6.28), то на поверхности



Рис. 50.

ее будут действовать следующие напряжения. На верхней и нижней гранях (при  $y = \pm \frac{h}{2}$ )

$$Y_y = Y_{-y} = X_y = X_{-y} = 0;$$

на боковых гранях (при  $x = \pm \frac{l}{2}$ )

$$X_x = ky; \quad X_{-x} = -X_x = -ky; \quad Y_x = Y_{-x} = 0.$$

Эпюры напряжений  $X_x$  показаны на чертеже; очевидно, мы имеем дело со случаем чистого изгиба, обследованным в общем виде в § 33.

### § 41. Изгиб консоли

Рассмотрим пластинку, заделанную левым концом и нагруженную грузом  $Q$ , распределенным по правому концевому сечению (рис. 51). Элементарная теория изгиба дает для этого случая такую систему напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{M}{J} y = -\frac{Q(l-x)}{J} y, \\ Y_y &= 0, \\ X_y &= Y_x = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2J}. \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

Здесь  $M$  — изгибающий момент,  $Q$  — поперечная сила,  $J$  — момент инерции поперечного сечения; в случае обобщенного плоского напряженного состояния  $J = \frac{\delta h^3}{12}$ ; в случае плоской деформации  $J = \frac{1h^3}{12}$ ;  $\delta$  — толщина пластинки в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа.

Проверим, возможны ли напряжения (6.29) с точки зрения плоской задачи и соответствуют ли они случаю изгиба, показанному на рис. 51. Для ответа на первый вопрос достаточно рассмотреть, могут ли напряжения (6.29) быть получены из какой-либо функции напряжений  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению (IX).

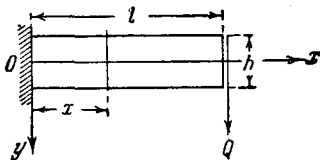


Рис. 51.

Общий вид функций (6.29), выражающих напряжения, такой:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bxy = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ Y_y &= 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ X_y &= C + Dy^2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (6.30)$$

Интегрируя дважды первое из этих уравнений, имеем

$$\varphi(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + \psi(x)y + \omega(x). \quad (6.31)$$

Дифференцируя эту функцию по  $x$  и подставляя в последние два из уравнений (6.30), получаем

$$\psi''(x)y + \omega''(x) = 0, \quad (6.32)$$

$$-\frac{By^2}{2} - \psi'(x) = C + Dy^2. \quad (6.33)$$

Оба эти условия должны удовлетворяться при любых значениях  $x$  и  $y$ ; поэтому делаем выводы:

$$\psi''(x) = 0; \quad \omega''(x) = 0;$$

$$\psi(x) = Ex + F;$$

$$\omega(x) = Hx + K;$$

подставляя это значение в уравнение (6.33), имеем

$$-\frac{By^2}{2} - E = C + Dy^2.$$

Отсюда

$$E = -C; \quad D = -\frac{B}{2}.$$

Функция напряжений (6.31) получает вид

$$\varphi(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + Exy + Fu + Hx + K. \quad (6.31)$$

Члены первой степени  $Hx + Fu + K$  можно отбросить, так как на напряжения они, очевидно, не влияют. Легко убедиться, что функция (6.31) удовлетворяет уравнению (IX) (§ 39) при любых значениях коэффициентов, т. е. является решением его.



Напряжения выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Ay + Bxy, \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{B}{2} y^2 - E. \end{aligned} \right\} \quad (6.29a)$$

Это показывает, что напряжения вида (6.29) или в более общей форме, (6.30), удовлетворяют уравнениям теории упругости. Теперь следует попытаться подобрать неопределенные коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $E$  так, чтобы удовлетворились условия на поверхности (рис. 51).

1. На верхней и нижней гранях

$$\text{при } y = \frac{h}{2} \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0;$$

$$\text{при } y = -\frac{h}{2} \quad Y_{-y} = -Y_y = 0, \quad X_{-y} = -X_y = 0.$$

2. На правом концевом сечении

$$\text{при } x = l \quad X_x = 0.$$

И так как закон распределения касательных напряжений по сечению  $x = l$  в условии задачи ничем не обусловлен, то остается лишь условие:

при  $x = l$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy = Q,$$

требуемое, чтобы усилия на концевом поперечном сечении приводились к заданному грузу  $Q$ .

Предлагаем читателю в качестве упражнения проделать нужные выкладки и убедиться, что при этом для напряжений получатся выражения (6.29).

Значит, в данной задаче выражения напряжений (6.29), получаемые на основании гипотезы плоских сечений, подтверждаются и с точки зрения теории упругости при условии, если груз  $Q$  по концевому сечению распределен по закону, указываемому последней из формул (6.29). При другом способе приложения груза  $Q$  выражения напряжений также будут иными, но значительная численная разница на основании принципа Сен-Венана (§ 31, рис. 39) будет лишь вблизи нагруженного правого конца пластинки.

В этой задаче представляется интересным исследовать деформации и перемещения и сравнить результат с тем, что дает гипотеза плоских сечений в сопротивлении материалов. Так как теперь

нам придется воспользоваться законом Гука, то выберем сначала, на каком из двух случаев (плоской деформации или плоского напряженного состояния) мы остановимся; для получения полного соответствия с аналогичной задачей сопротивления материалов остановимся на плоском напряженном состоянии и потому воспользуемся законом Гука в форме  $(V'_n)$  (§ 39). Тогда из  $(III_n)$ ,  $(V'_n)$  и (6.29) получаем такую систему уравнений для определения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{Q}{EJ}(ly - xy), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\sigma Q}{EJ}(ly - xy); \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(1 + \sigma)Q}{EJ} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.35)$$

Интегрируя уравнения (6.34), получим

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Q}{EJ} \left( lyx - \frac{x^2 y}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_1(y), \\ v &= \frac{\sigma Q}{EJ} \left( \frac{ly^2}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции; для удобства дальнейших выкладок мы им дали коэффициент  $\frac{Q}{EJ}$ . Для определения вида этих функций вносим выражения (6.36) в уравнение (6.35); предварительно находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\sigma Q}{EJ} \frac{y^2}{2} + \frac{Q}{EJ} f'_2(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{Q}{EJ} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f'_1(y). \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Подставляя это в уравнение (6.35) и сокращая на  $\frac{Q}{EJ}$ , получаем

$$-\frac{\sigma y^2}{2} + f'_2(x) - \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + f'_1(y) = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4} - (1 + \sigma) y^2$$

или после перестановки членов

$$\left[ f'_2(x) - \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[ f'_1(y) - \frac{\sigma y^2}{2} + (1 + \sigma) y^2 \right] = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4}. \quad (6.38)$$

В квадратных скобках стоят функции, зависящие: первая только от  $x$ , вторая только от  $y$ ; но так как  $x$  и  $y$  произвольны и между собой независимы, то равенство (6.38) может существовать только при условии, если выражения в квадратных скобках равны постоянным числам  $m$  и  $n$ , причем

$$m + n = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4}. \quad (6.39)$$

На этом основании из уравнения (6.38) получаем

$$f_2'(x) = lx - \frac{x^2}{2} + m,$$

$$f'(y) = \frac{\sigma y^2}{2} - (1 + \sigma)y^2 + n = -\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)y^2 + n.$$

Интегрируя эти уравнения, имеем

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + mx + \alpha, \\ f_1(y) &= -\frac{2+\sigma}{6}y^3 + ny + \beta. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Вносим это в уравнения (6.36):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Q}{EJ} \left[ -lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{2+\sigma}{6}y^3 + ny + \beta \right], \\ v &= \frac{Q}{EJ} \left[ \frac{\sigma ly^2}{2} - \frac{\sigma xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + mx + \alpha \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Для определения произвольных постоянных  $m$ ,  $n$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  осуществим закрепление левого конца; в сопротивлении материалов все рассуждения относят к оси бруса; поэтому и здесь прежде всего закрепим начальную точку оси, т. е. поставим условия:

$$\text{при } x = y = 0 \quad u = 0; \quad v = 0.$$

Тогда из уравнений (6.41) сразу имеем  $\alpha = \beta = 0$ .

Следует закрепить теперь (рис. 51) опорное сечение (против вращения вокруг точки  $O$ ); чаще всего с этой целью ставится условие горизонтальности начальной касательной:

$$\text{при } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0^*);$$

при этом условии из уравнений (6.41) находим

$$m = 0$$

и из уравнения (6.39)

$$n = \frac{(1 + \sigma) h^2}{4}.$$

Уравнения (6.41) дают

$$u = \frac{Q}{EJ} \left[ -\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{(2 + \sigma)y^3}{6} + \frac{(1 + \sigma)h^2y}{4} \right], \quad (6.42)$$

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[ \frac{\sigma(l - x)y^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]. \quad (6.43)$$

\* ) Ср. это с формулой (2.3) § 10.

Из уравнения (6.43), положив  $y=0$ , найдем уравнение изогнутой оси бруса:

$$v = \frac{Q}{EJ} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (6.44)$$

что совпадает с решением, получаемым в сопротивлении материалов. Исследуем теперь деформацию плоских поперечных сечений; пусть уравнение такого сечения до деформации будет

$$x = x_0,$$

после деформации его уравнение будет

$$x = x_0 + u_0,$$

или

$$x = x_0 + \frac{Q}{EJ} \left[ - \left( l - \frac{x_0}{2} \right) x_0 y - \frac{(2+\sigma)}{6} y^3 + \frac{(1+\sigma)h^2}{4} y \right]. \quad (6.45)$$

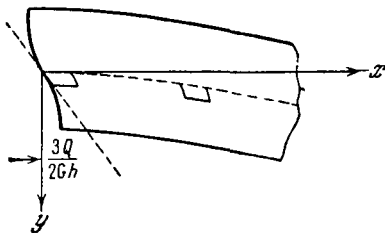


Рис. 52.

Значит, сечение не остается плоским, но искривляется по параболе третьего порядка (6.45). При осуществленном нами способе закрепления левого конца (рис. 52) левое крайнее сечение ( $x_0=0$ ) также искривляется по кривой

$$x = \frac{Q}{EJ} \left[ \frac{(1+\sigma)h^2}{4} y - \frac{(2+\sigma)}{6} y^3 \right].$$

Если возьмем линейный элемент  $dy$  на оси бруса в точке закрепления (при  $x=0$ ,  $y=0$ ), то угол поворота его [формула (2.4) § 10] будет

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{(1+\sigma)Qh^2}{4EJ} = \frac{3Q}{2Gh} > 0.$$

Следовательно, элемент поворачивается (§ 10) по направлению от положительной оси  $Oy$  к положительной оси  $Ox$ ; значит, плоские поперечные сечения после деформации искривляются и не остаются нормальными к оси\*). Это показывает, что в нашей задаче формула нормального напряжения

$$X_x = \frac{M}{J} y,$$

\*) Легко найти общую формулу наклона сечения относительно оси во всех точках ее; наклон этот, очевидно, равен (рис. 52) сдвигу:

$$(e_{xy})_{y=0} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Проще всего вычислить его по (6.35).

выведенная из гипотезы плоских сечений, остается верной и при искривлении сечений.

В § 31 отмечалась встречающаяся иногда схематичность формулировки задач в отношении нагрузки; здесь полезно отметить такую же схематичность формулировки условий «закрепления на опоре». Действительно, закрепление это можно осуществить бесчисленным множеством способов: можно, например, потребовать, чтобы все точки сечения оставались неподвижными, или можно в таком же смысле закрепить только несколько точек сечения; наконец, можно добавить к этим условиям требование, чтобы некоторые линейные элементы не поворачивались в результате деформации. Очевидно, что распределение напряжений вблизи места закрепления консоли будет зависеть в таких условиях от самого способа закрепления. Однако рассмотренное выше решение уже полностью предопределило распределение напряжений во всей консоли. Для осуществления закрепления в нашем распоряжении осталось только жесткое *смещение консоли*, не влияющее на распределение напряжений; поэтому в данной задаче понятие о закреплении носит лишь кинематический характер и способы закрепления ограничены.

В предыдущих рассуждениях мы осуществили закрепление левого конца, поставив условие, чтобы элемент оси  $dx$  у опорного конца оставался горизонтальным ( $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  при  $x = y = 0$ ).

Осуществим теперь то же закрепление другим способом, (рис. 53), поставив условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=y=0} = 0,$$

требующее [формула (2.4) § 10], чтобы элемент  $du$  опорного сечения оставался вертикальным.

При этом первое из уравнений (6.41) дает  $n = 0$ , а из уравнения (6.39)

$$m = \frac{(1 + \sigma) h^2}{4};$$

из уравнений (6.41) получим вместо (6.42) и (6.43) такие уравнения:

$$u = \frac{Q}{EJ} \left[ -\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{(2 + \sigma)y^3}{6} \right],$$

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[ \frac{\sigma(l-x)y^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1 + \sigma)h^2x}{4} \right].$$

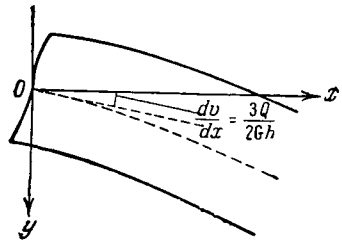


Рис. 53.

Значит, все перемещения изменились. Уравнение изогнутой оси будет [ср. с формулой (6.44)]

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1+\sigma)h^2x}{4} \right]. \quad (6.46)$$

Прогиб правого конца в первом случае [по формуле (6.44)]:

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ};$$

при втором же способе закрепления (рис. 53) он равен

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{(1+\sigma)Qh^2l}{4EJ} = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{3Ql}{2Gh}. \quad (6.47)$$

Последний член  $\frac{3Ql}{2Gh}$  учитывает влияние сдвигов (другими словами, влияние поперечной силы) на прогиб.

Из предыдущих рассуждений видно, что прогиб правого конца в данной задаче есть понятие само по себе неопределенное; он может быть различным в зависимости от способа «заделки» левого конца.

Кроме двух рассмотренных способов заделки, можно представить себе бесчисленное количество других способов; каждому из них будут соответствовать свои перемещения и свой прогиб. Принцип Сен-Венана говорит, что при этом напряжения будут существенно меняться только вблизи закрепленного сечения; перемещения же будут различными на всем протяжении бруса.

## § 42. Балка на двух опорах

Рассмотрим изгиб балки на двух опорах под сплошной равномерной нагрузкой  $q$ . Опорные реакции предположим в форме касательных сил, распределенных по конечным сечениям.

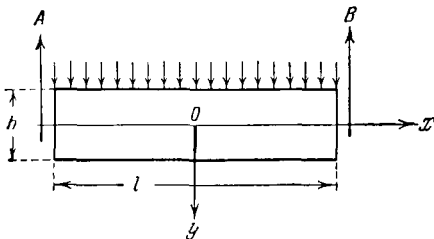


Рис. 54.

При расположении осей координат по рис. 54 элементарное решение задачи приводит к таким напряжениям:

$$X_x = \frac{q}{2} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) y,$$

$$X_y = Y_x = -\frac{qx \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2}.$$

Запишем эти формулы в более общем виде:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y, \\ X_y &= Y_x = Cx + Dx^2y, \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

и проверим, удовлетворяют ли они всем уравнениям плоской задачи. Напряжениями  $Y_y$  обычно пренебрегают; это обстоятельство позволяет наперед утверждать, что система напряжений (6.48) совместно с допущением  $Y_y = 0$  наверное не удовлетворит уравнениям теории упругости, так как на верхней поверхности при  $y = -\frac{h}{2}$  имеем равенство

$$Y_{-y} = -Y_y = q \neq 0.$$

Поэтому постараемся удовлетворить уравнениям теории упругости, задавшись напряжениями (6.48), но отбросив условие  $Y_y = 0$ .

Подберем пока общий вид функции напряжений при напряжениях (6.48); по уравнениям (VIII) (§ 39) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= Ay + Bx^2y, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -Cx - Dx^2y. \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Интегрируя первое из этих уравнений, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{A}{2} y^2 + \frac{B}{2} x^2 y^2 + f_1(x), \quad (6.50)$$

$$\varphi = \frac{Ay^3}{6} + \frac{B}{6} x^2 y^3 + f_1(x)y + f_2(x), \quad (6.51)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции от  $x$ . Дифференцируя уравнение (6.50) по  $x$  и подставляя полученное значение во второе уравнение (6.49), имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = Bxy^2 + f_1'(x) = -Cx - Dx^2y;$$

отсюда получаем

$$D = -B; \quad f_1(x) = -\frac{C}{2} x^2 + E.$$

Внося это значение в равенство (6.51), имеем

$$\varphi = \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{6} x^2 y^3 - \frac{C}{2} x^2 y + Ey + f_2(x).$$

Подставляя это выражение в уравнение (IX) (§ 39), видим, что оно не удовлетворяется\*); значит,  $\varphi$  не может быть принята за функцию напряжений; поэтому добавим к ней произвольную пока функцию  $\psi(x, y)$ \*\* и получим

$$\varphi = \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{6} x^2 y^3 - \frac{C}{2} x^2 y + f_2(x) + \psi(x, y). \quad (6.52)$$

\*) Оно получит вид  $4By = 0$ .

\*\*) Член  $Ey$ , не влияющий на напряжения, отбрасываем.

Функцию  $\psi(x, y)$  подберем так, чтобы условие неразрывности деформаций (IX) было удовлетворено. Из равенства (6.52) имеем

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}; \quad 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4By + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4},$$

и уравнение (IX) получает вид (полагая  $f_2^{IV}(x) \equiv 0$ ):

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = -4By. \quad (6.53)$$

Рассматривая это уравнение, легко сообразим, что наиболее простое решение его выразится целой функцией пятой степени:

$$\psi(x, y) = \frac{F}{24} x^4 y + \frac{H}{120} y^5 + \frac{K}{12} x^2 y^3.$$

Внося это в уравнение (6.53), имеем

$$Fy + 2Ky + Hy = -4By,$$

т. е.

$$F + 2K + H = -4B. \quad (6.54)$$

В функции  $\psi$  член  $\frac{K}{12} x^2 y^3$  можем отбросить, так как в равенстве (6.52) член подобного вида  $\frac{B}{6} x^2 y^3$  уже имеется; тогда из уравнения (6.54) имеем

$$H = -4B - F.$$

После этого функция напряжений (6.52) получает окончательный вид

$$\varphi = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bx^2 y^3}{6} - \frac{C}{2} x^2 y + f_2(x) + \frac{F}{24} x^4 y - \frac{(4B + F)}{120} y^5, \quad (6.55)$$

удовлетворяющий условию (IX). Отсюда получаем напряжения

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2 y - \frac{4B + F}{6} y^3, \\ Y_y &= \frac{B}{3} y^3 - Cy + f_2''(x) + \frac{F}{2} x^2 y, \\ X_y = Y_x &= -Bxy^2 + Cx - \frac{F}{6} x^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Для окончания решения остается удовлетворить условиям на поверхности; сначала займемся условиями на верхней и нижней гранях.

1. На верхней грани при  $y = -\frac{h}{2}$

$$Y_{-y} = -Y_y = q; \quad X_y = -X_{-y} = 0. \quad (6.57)$$

2. На нижней грани при  $y = +\frac{h}{2}$

$$Y_y = 0; \quad X_y = 0. \quad (6.58)$$



Первое из условий (6.58) дает

$$\frac{Bh^3}{24} - \frac{Ch}{2} + f_2''(x) + \frac{Fh}{4} x^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$F = 0; \quad f_2''(x) = L,$$

и напряжения (6.56) будут

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y - \frac{2}{3}By^3, \\ Y_y &= \frac{B}{3}y^3 - Cy + L, \\ X_y &= Y_x = -Bxy^2 + Cx. \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Из условий (6.57) и (6.58) для нормальных напряжений получаем

$$-\frac{Bh^3}{24} + \frac{Ch}{2} + L = -q; \quad \frac{Bh^3}{24} - \frac{Ch}{2} + L = 0.$$

Складывая эти уравнения, найдем

$$L = -\frac{q}{2}; \quad (6.60)$$

вычитая, получим

$$\frac{Bh^3}{12} - Ch = q. \quad (6.61)$$

Условия (6.57) и (6.58) для касательных напряжений дают

$$-\frac{Bh^2}{4} + C = 0; \quad (6.62)$$

решая совместно уравнения (6.61) и (6.62), найдем

$$B = -\frac{6q}{h^3}; \quad C = -\frac{3}{2} \frac{q}{h}. \quad (6.63)$$

Подставляя значение  $L$ ,  $B$  и  $C$  из (6.60) и (6.63) в формулы (6.59), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay - \frac{6q}{h^3} x^2y + 4 \frac{q}{h^3} y^3, \\ Y_y &= -\frac{6q}{h^3} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right), \\ X_y &= -\frac{6q}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) x. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Переходим к условиям на концевых сечениях бруса:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = \pm \frac{l}{2} \quad X_x = 0, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy = -\frac{ql}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

Последнее условие требует, чтобы касательные напряжения на концевом сечении приводились к опорной реакции  $(-\frac{ql}{2})$ ; легко убедиться, что оно уже удовлетворено, так как последнее из уравнений (6.64) в точности совпадает с заданным нами выражением касательного напряжения [формулы (6.48)]. Вместе с тем замечаем, что первое из условий (6.65) не может быть удовлетворено; действительно, при  $x = \pm \frac{l}{2}$

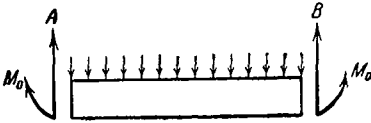


Рис. 55.

$$X_x = \left[ \left( A - \frac{6ql^2}{4h^3} \right) y + 4 \frac{q}{h^3} y^3 \right] \quad (6.66)$$

и, следовательно,  $X_x$  не обращается в нуль; но так как правая часть равенства (6.66) есть нечетная функция от  $y$ , то отсюда следует, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x dy = 0, \quad (6.67)$$

т. е. нормальные напряжения по концевому сечению приводятся к паре с моментом

$$M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x y dy = A \frac{h^3}{12} - \frac{ql^2}{8} + \frac{qh^2}{20}. \quad (6.68)$$

Таким образом, решение (6.64) соответствует изгибу пластинки под действием сплошной равномерной нагрузки  $q$  и моментов  $\pm M_0$  на опорах (рис. 55).

Распоряжаясь коэффициентом  $A$ , мы можем опорным моментам (6.68) дать любую величину. Выражая коэффициент  $A$  через опорный момент  $M_0$  по уравнению (6.68), имеем

$$A = \frac{12}{h^3} \left( M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right)$$

и выражения напряжений (6.64) перепишем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{12}{h^3} \left( M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3, \\ Y_y &= -\frac{6q}{h^3} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right), \\ X_y &= -\frac{6q}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) x. \end{aligned} \right\} (6.69)$$

Если здесь положим

$$M_0 = 0, \quad (6.70)$$

то уничтожим опорные моменты и вернемся к изгибу пластинки под действием одной сплошной нагрузки, но с наличием нормальных напряжений (6.66) на опорных сечениях; однако на основании уравнений (6.67) и (6.70) эти напряжения приводятся к уравновешенной системе сил, и потому влияние их на основании принципа Сен-Венана (§ 31) будет заметно только вблизи концов балки. При  $M_0 = 0$  первое из уравнений (6.69) можно написать так:

$$X_x = \frac{12q}{h^3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) y - \frac{h^2}{20} y + \frac{y^3}{3} \right]. \quad (6.71)$$

Сравнивая это с первым из уравнений (6.48), замечаем, что разница в выражениях напряжения

$$\frac{12q}{h^3} \left( \frac{h^2}{20} y - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{q}{J} \left( \frac{h^2}{20} y - \frac{y^3}{3} \right)$$

при малой высоте сечения  $h$  по сравнению с пролетом  $l$  окажет лишь небольшое влияние на величину напряжений в средней части балки (при малом  $x$ ).

Резюмируя все предыдущие выводы, можем сказать, что:

1. Выражение касательных напряжений, даваемое элементарным решением, подтверждается настоящим более точным решением (6.69).

2. Для нормального напряжения  $X_x$  элементарное решение дает значения, близкие к действительности вдали от концов плиты или пластинки (в случае, если высота  $h$  мала по сравнению с пролетом), где эти напряжения играют главную роль.

3. Второе из уравнений (6.69) дает выражение нормального напряжения  $Y_y$ , которым в элементарном решении пренебрегают. Эпюра распределения этих напряжений по высоте сечения (кубическая парабола) показана на рис. 56.

Пользуясь уравнениями (6.69), можно, очевидно, решить задачу о балке, заделанной концами в стенки; для этого величину опорных моментов  $M_0$  следует подобрать так, чтобы на концах оси балки удовлетворялись условия вида  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  или  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  (ср. § 41).

Предварительно, конечно, надо найти перемещения балки, как это сделано в § 41.

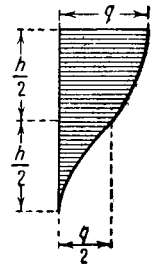


Рис. 56.

### § 43. Треугольная и прямоугольная подпорные стенки (решения М. Леви)

Рассмотрим задачу о стенке плотины или подпорной стенке, подверженной давлению воды или сыпучего тела по гидростатическому закону пропорционально глубине данной площадки (рис. 57). Условия на поверхности выразятся, очевидно, так:

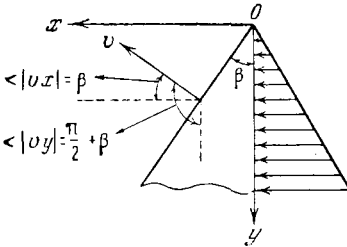


Рис. 57.

1. На грани  $Oy$  при  $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} Y_{-x} &= -Y_x = 0, \\ X_{-x} &= -X_x = \gamma y. \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

2. На грани  $OA$  при  $x = y \operatorname{tg} \beta$

$$X_v = 0; \quad Y_v = 0. \quad (6.73)$$

Так как число условий на поверхности равно четырем, то для решения задачи достаточно взять функцию напряжений с четырьмя неопределенными коэффициентами. Воспользуемся функцией третьей степени (6.26), сохранив в ней первые четыре члена, т. е. положив

$$a = b = c = 0.$$

Согласно уравнениям (6.27) (§ 40), напряжения будут линейными функциями и выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= fx + ky; \quad Y_y = dx + ey; \\ Y_x &= X_y = -ex - fy - \rho g x. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Здесь  $\rho g$  — вес объемной единицы стенки; для краткости назовем его через  $p$ , т. е.

$$\rho g = p.$$

Применяя условия (6.72), имеем:  $fy = 0$ ,  $ky = -\gamma y$ . Отсюда  $f = 0$ ,  $k = -\gamma$ , и напряжения (6.74) напишутся так:

$$X_x = -\gamma y; \quad Y_y = dx + ey; \quad Y_x = X_y = -(e + p)x, \quad (6.74')$$

Условия (6.73) раскрываем по уравнениям  $(II_n)$  (§ 38) и вносим в них значения косинусов углов внешней нормали  $v$  с осями (рис. 57):

$$X_x \cos \beta - X_y \sin \beta = 0; \quad Y_x \cos \beta - Y_y \sin \beta = 0.$$

Сюда вносим значения напряжений (6.74'), положив в них, согласно условиям (6.73),  $x = y \operatorname{tg} \beta$ :

$$\begin{aligned} -\gamma y \cos \beta + (e + p) y \operatorname{tg} \beta \sin \beta &= 0, \\ -(e + p) y \operatorname{tg} \beta \cos \beta - (d y \operatorname{tg} \beta + e y) \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

Сокращая оба уравнения на  $y$  и деля на  $\cos \beta$ , получаем

$$(e + p) \operatorname{tg}^2 \beta = \gamma; \quad (d \operatorname{tg} \beta + e) \operatorname{tg} \beta = -(e + p) \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда легко найдем

$$e = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p; \quad d = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta},$$

и напряжения (6.74) получают окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y, \\ Y_y &= \left( \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left( \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p \right) y, \\ Y_x &= X_y = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x. \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

Эпюры напряжений  $Y_y$  и  $X_y$  по горизонтальному сечению  $y = y_0$  показаны на рис. 58. Сравнивая это с результатом элементарного расчета по формулам

$$Y_y = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \left( x - \frac{a}{2} \right), \quad X_y = \frac{QS}{Jb},$$

найдем, что значения нормальных напряжений  $Y_y$  в обоих решениях совпадают; распределение же касательных напряжений  $X_y$  получается существенно различным.

До сих пор мы выбирали функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  в виде полинома не выше пятой степени [ср. формулу (6.55) § 42].

Повышая степень полинома, можно достичь решения более сложных задач. Например, задавая  $\varphi$  как полином шестой степени, можно получить решение, данное Морисом Леви (M. Lévy) для случая прямоугольной плотины или подпорной стенки. Решение это имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{x}{a} \right), \\ Y_y &= -py - \frac{\gamma y^3}{a^2} \left( 2 \frac{x}{a} - 1 \right) + \gamma y \left( 4 \frac{x^3}{a^3} - 6 \frac{x^2}{a^2} + \frac{12}{5} \frac{x}{a} - \frac{1}{5} \right), \\ Y_x &= X_y = -\frac{\gamma x}{a} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \left[ 3 \frac{y^2}{a} - \frac{a}{5} + x \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

Читатель легко убедится, что эти напряжения удовлетворяют следующим условиям на поверхности (рис. 59):

1. При  $x = 0$

$$X_{-x} = \gamma y; \quad Y_{-x} = 0.$$

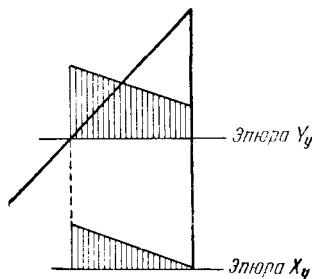


Рис. 58.

2. При  $x = a$

$$X_x = 0; \quad Y_x = 0.$$

3. При  $y = 0$

$$Y_{-y} = 0.$$

Последнее необходимое условие:  
при  $y = 0$

$$X_{-y} = 0,$$

не удовлетворяется полностью, и на верхней грани стенки остаются касательные напряжения

$$X_{-y} = -X_y = \frac{\gamma x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[x \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{a}{5}\right].$$

Однако эти напряжения приводятся к уравновешенной системе сил, так как равнодействующая их равна нулю:

$$\int_0^a X_y dx = 0;$$

поэтому они имеют лишь местное значение, и область влияния их согласно принципу Сен-Венана невелика, тем более, что они действуют в верхней, мало напряженной части стенки, которая обычно не нуждается в проверке на напряжения.

Решая данную задачу элементарным путем, мы для напряжений  $Y_y$  получили бы такое выражение:

$$Y_y = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \left(x - \frac{a}{2}\right) = -py -$$

$$-\frac{\gamma y^2}{2} \frac{y}{3} \frac{a}{\left(\frac{a^3}{12}\right)} \left(2 \frac{x}{a} - 1\right) = -py - \frac{\gamma y^3}{a^2} \left(2 \frac{x}{a} - 1\right),$$

что соответствует первым двум членам второго из уравнений (6.76).

Предлагаем читателю таким же путем сравнить выражения напряжений  $X_y = Y_x$  в элементарном решении и по уравнениям (6.76).

#### § 44. Изгиб прямоугольной полосы; решения Файлона и Рибьера

Рассмотренный в предыдущих параграфах способ решения плоской задачи при помощи алгебраических полиномов представляет ограниченные возможности в смысле практического использования, так как этим путем очень трудно подобрать полином, дающий решение, соответствующее наперед заданной, более или менее сложной нагрузке. Гораздо более эффективным оказался способ тригонометрических полиномов, предложенный Рибьером и Файлоном для случаев

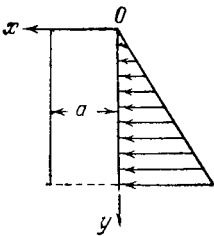


Рис. 59.

изгиба прямоугольной полосы, длина которой значительно более высоты  $h$  (рис. 60). В таких случаях наиболее важно бывает возможно точнее удовлетворить условиям на длинных сторонах полосы, где задается нагрузка, вызывающая изгиб полосы; условиям на коротких сторонах (торцах) можно удовлетворить лишь в форме задания

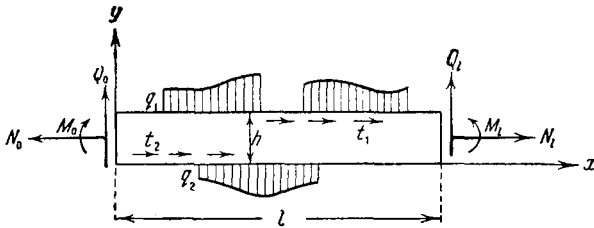


Рис. 60.

равнодействующих факторов  $N_0, Q_0, M_0, N_l, Q_l, M_l$ , характеризующих реакции опор или нагрузки на концах полосы (не заботясь о законе распределения напряжений по высоте  $h$  начального и конечного сечений); при малой величине отношения  $\frac{h}{l}$  это допустимо с точки зрения принципа Сен-Венана (§ 31).

Как указано в § 39, решение плоской задачи при помощи функции напряжений  $\varphi(x, y)$  сводится к интегрированию уравнения (IX):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (6.77)$$

при заданных граничных условиях; этими условиями мы займемся далее, сейчас же постараемся получить возможно более общее решение уравнения (6.77). Такое решение легко найти методом разделения переменных, использованным выше, в § 28, по отношению к уравнению колебаний (4.28); методы Рибьера и Файлона получатся отсюда как частные случаи.

Будем искать частное решение уравнения (6.77) в форме

$$\varphi(x, y) = XY, \quad (6.78)$$

где  $X$  есть функция только от  $x$ , а  $Y$  — только от  $y$ . Подставив (6.78) в (6.77), пишем его так:

$$X^{(IV)}Y + 2X''Y'' + XY^{(IV)} = 0. \quad (6.79)$$

Исключим отсюда функцию  $X$ ; для этого достаточно потребовать, чтобы  $X^{(IV)}$  и  $X''$  были пропорциональны  $X$ :

$$X^{(IV)} = \alpha^4 X; \quad X'' = -\lambda^2 X, \quad (6.80)$$

где  $\alpha^4$  и  $\lambda^2$  — некоторые постоянные. Значит, функция  $X$  должна одновременно удовлетворять двум дифференциальным уравнениям

(6.80). Рассмотрим, при каком условии они будут совместимы; для этого продифференцируем второе уравнение дважды и, сравнивая результат с первым уравнением, получим

$$X^{(IV)} = -\lambda^2 X'' = \alpha^4 X.$$

Тогда первое уравнение (6.80) можно заменить таким:

$$-\lambda^2 X'' = \alpha^4 X,$$

и вместо (6.80) рассматривать систему:

$$-\lambda^2 X'' = \alpha^4 X; \quad X'' = -\lambda^2 X.$$

Из нее следует, что  $\frac{\alpha^4}{\lambda^2} = \lambda^2$ , т. е. можно принять  $\alpha = \lambda$ , и система (6.80) заменится такой:

$$X^{IV} = \lambda^4 X; \quad X'' = -\lambda^2 X. \quad (6.81)$$

Подставив это в (6.79), исключим из него  $X$ , и для определения  $Y$  получим уравнение четвертого порядка

$$Y^{IV} - 2\lambda^2 Y'' + \lambda^4 Y = 0. \quad (6.82)$$

Функцию  $X$  найдем из второго уравнения (6.81):

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (6.83)$$

Общее решение его хорошо известно:

$$X = K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x. \quad (6.84)$$

Займемся уравнением (6.82). Разыскивая частные решения его в виде

$$Y = e^{sy},$$

получим характеристическое уравнение

$$(s^2 - \lambda^2)^2 = 0, \quad (6.82a)$$

имеющее два двукратных корня:

$$s = \pm \lambda.$$

Поэтому обычным способом получим общее решение уравнения (6.82) в виде

$$Y = A \operatorname{ch} \lambda y + B \operatorname{sh} \lambda y + C y \operatorname{ch} \lambda y + D y \operatorname{sh} \lambda y, \quad (6.85)$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные.

Подставляя значения (6.83) и (6.85) в (6.78), найдем такое частное решение уравнения плоской задачи (6.77):

$$\varphi(x, y) = (K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (A \operatorname{ch} \lambda y + B \operatorname{sh} \lambda y + C y \operatorname{ch} \lambda y + D y \operatorname{sh} \lambda y). \quad (6.86)$$



Эта функция является решением уравнения (6.77) при произвольных значениях постоянных

$$K_1, K_2, A, B, C, D \text{ и } \lambda.$$

Значит, можно построить сколько угодно решений типа (6.86); сумма таких решений также будет решением уравнения (6.77) (так как это уравнение линейное). Взяв достаточно большое число членов такой суммы, мы будем иметь в своем распоряжении много произвольных постоянных; в дальнейшем следует постараться их так подобрать, чтобы условия, заданные на границах полосы, были возможно полнее удовлетворены.

Займемся сначала условиями на торцах полосы, имеющей длину  $l$  (рис. 60). Потребуем, чтобы в этих сечениях, т. е. при

$$x = 0 \text{ и } x = l,$$

не было нормальных напряжений; иначе говоря, поставим условия, чтобы

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \text{и } x = l \end{array} \right\} X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (6.87)$$

При этом на торцах останутся касательные напряжения, и нагрузки на длинных сторонах полосы будут уравновешены силами  $Q_0$  и  $Q_l$ , приложенными на торцах балки; эти силы можно считать реакциями опор простой балки длиной  $l$ .

Условия (6.87) будут удовлетворены, если в частном решении (6.86) положим

$$K_1 = 0; \quad K_2 = 1; \quad \lambda = \frac{m\pi}{l},$$

где  $m$  есть нуль или целое положительное число:  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \dots, \infty$ . Составим таким путем сумму частных решений, взяв

$$\begin{aligned} & m = 1, 2, 3, \dots, n^*); \\ \varphi = \sum_{m=1}^{m=n} \sin \frac{m\pi x}{l} & \left( A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + \right. \\ & \left. + C_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + D_m y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} \right). \quad (6.88) \end{aligned}$$

Сюда вошли  $4n$  произвольных постоянных  $A_m, B_m, C_m, D_m$ , которые при достаточно большом числе  $n$  позволят удовлетворить условиям на длинных сторонах полосы, если там заданы нагрузки. Решение в форме (6.88) было впервые предложено Файлоном.

Переходим к условиям на длинных сторонах. Пусть на верхней стороне ( $y = h$ ) задана произвольная нормальная нагрузка  $q_1 = q_1(x)$

\*) Значение  $m = 0$  пока опустим и займемся им далее.

и тангенциальная нагрузка  $t_1 = t_1(x)$ ; на нижней стороне ( $y = 0$ ) имеется нормальная нагрузка  $q_2 = q_2(x)$  и тангенциальная  $t_2 = t_2(x)$ . Относительно тангенциальных нагрузок предположим, что сумма каждой из них в отдельности равна нулю, т. е.

$$\int_0^l t_1(x) dx = 0, \quad \int_0^l t_2(x) dx = 0. \quad (6.89)$$

Тогда получим такие граничные условия для функции напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = h \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_1(x), \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_1(x); \\ \text{при } y = 0 \quad -Y_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q_2(x), \quad -X_y = +\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_2(x), \end{aligned} \right\} (6.90)$$

или, внося сюда выражение  $\varphi(x, y)$  из (6.88), получим

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{m=1}^n m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \left( A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} + \right. \\ \left. + C_m h \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} + D_m h \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} \right) = f_1(x); \\ \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^n m \cos \frac{m\pi x}{l} \left[ \left( A_m \frac{m\pi}{l} + D_m \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} + \right. \\ \left. + \left( B_m \frac{m\pi}{l} + C_m \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} + C_m h \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} + \right. \\ \left. + D_m h \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} \right] = t_1(x); \\ \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{m=1}^n m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} A_m = f_2(x); \\ \frac{\pi}{l} \sum_{m=1}^n m \cos \frac{m\pi x}{l} \left( B_m \frac{m\pi h}{l} + C_m \right) = t_2(x). \end{aligned} \right\} (6.90a)$$

Рассматривая второе и четвертое из этих уравнений, убедимся в необходимости ограничения, наложенного на нагрузки  $t_1$  и  $t_2$  условиями (6.89); действительно, соответствующие интегралы от левых частей этих равенств, взятые в пределах  $(0, l)$ , обращаются в нуль. Во всяком случае предыдущие равенства показывают, что функции, стоящие в правых частях, должны быть приближенно представлены на промежутке  $(0, l)$  рядами Фурье соответственно по  $\sin \frac{m\pi x}{l}$  и  $\cos \frac{m\pi x}{l}$ . Чем больше взятое число членов  $n$  в функции напряжений (6.88), тем более точным будет это представление. Для опреде-

ления коэффициентов рядов поступаем по общему правилу: множим обе части равенства соответственно на  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  или  $\cos \frac{k\pi x}{l}$  и интегрируем в пределах от 0 до  $l$ ; таким путем получим следующие четыре уравнения для определения коэффициентов  $A_k, B_k, C_k, D_k$ , входящих в  $k$ -й член функции напряжений (6.88):

$$\left. \begin{aligned}
 A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} + C_k h \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + D_k h \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} &= \\
 &= -\frac{2l}{\pi^2 k^2} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \\
 A_k \frac{k\pi}{l} \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} + B_k \frac{k\pi}{l} \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + C_k \left( \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + h \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} \right) + \\
 + D_k \left( \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} + h \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} \right) &= \frac{2}{\pi k} \int_0^l t_1(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx; \\
 A_k &= \frac{2l}{\pi^2 k^2} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \\
 B_k \frac{k\pi h}{l} + C_k &= \frac{2}{\pi k} \int_0^l t_2(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx.
 \end{aligned} \right\} (6.906)$$

Полагая здесь  $k=1, 2, 3, \dots, n$ , получим уравнения для определения всех коэффициентов функции напряжений (6.88). Имея функцию напряжений, можем находить напряжения в любой точке полосы по формулам

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Изложенный здесь способ исследования изгиба полосы оказался очень удобным, так как, пользуясь им, мы можем вводить достаточно произвольные нагрузки на длинных сторонах. В курсах теории упругости С. П. Тимошенко и П. Ф. Папковича можно найти много примеров применения этого способа к задачам, важным в практическом отношении.

Если тангенциальные нагрузки  $t_1$  и  $t_2$  отсутствуют, то получится задача о поперечном изгибе полосы обычными поперечными нагрузками  $q_1$  и  $q_2$ . Отметим частный случай, когда нагрузка  $q_1 = f_1(x)$  задана произвольно, а нагрузка  $q_2 = f_2(x)$  распределена на двух участках (рис. 61); интенсивности ее  $q_2'$  и  $q_2''$  подберем так, чтобы все эти нагрузки были взаимно уравновешены. Хотя при этом на торцах балки останутся касательные усилия, однако равнодействующие их  $Q_0$  и  $Q_l$  (рис. 60) обратятся в нуль; влияние таких

уравновешенных касательных сил  $Y_x$  согласно принципу Сен-Венана будет заметно лишь вблизи торцов балки. Таким путем мы получим решение задачи о балке на двух опорах при условии, что реакции опор  $q'_2$  и  $q''_2$  распределены по заранее заданному закону. Ряд задач этого

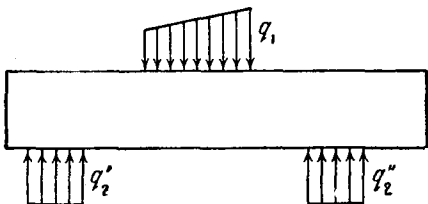


Рис. 61.

рода решен Г. Н. Масловым для простых и неразрезных балок.

Другой интересный частный случай получим, взяв нагрузки  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 62) одинаковые, но противоположные по направлению ( $t_1$  и  $t_2$  по-прежнему отсутствуют). Силы  $Q_0$  и  $Q_1$  будут равны нулю, и мы получим сжатие полосы в поперечном направлении. Если нагрузки  $q_1$  и  $q_2$  распределены на малом участке (рис. 62, а), то, уменьшая его, в пределе получим схему, близкую к рис. 38, на которой был пояснен принцип Сен-Венана. В данной задаче принцип этот подтверждается видом эпюры напряжений  $Y_y$  по среднему сечению  $ab$ , показанной на рис. 62, б для предельного случая сжатия полосы сосредоточенными грузами. Решение этой задачи дано Файлоном \*).

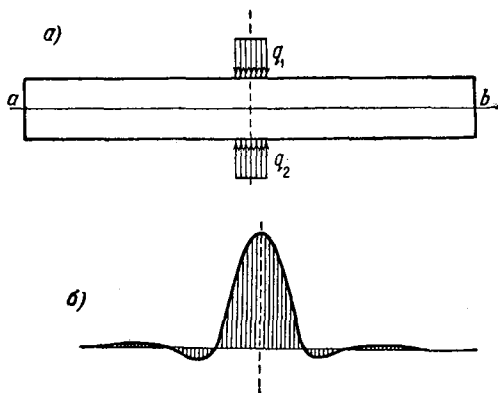


Рис. 62.

Рибьер применял к некоторым задачам решение, аналогичное (6.88) и получаемое тем же путем из (6.86), если в нем положим  $K_2 = 0$ ,  $\lambda = \frac{m\pi}{l}$ ; таким образом, будем иметь

$$\varphi = \sum_{m=1}^{m=n} \cos \frac{m\pi x}{l} \left( A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + D_m y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} \right). \quad (6.91)$$

Ряд приложений этого решения дан в курсе теории упругости П. Ф. Папковича.

\*) См. Э. Кокер и Л. Файлон, Оптический метод исследования напряжений, ОНТИ, 1936 г.; С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, ГТТИ, 1934 г.

Для того чтобы в решении Файлона освободиться от ограничения, налагаемого на тангенциальные нагрузки условиями (6.89), и вообще расширить область его применения, следует к найденному выше решению (6.88) добавить еще одно частное решение, вытекающее из принятого метода разделения переменных, но опущенное пока нами. Действительно, в дополнение к значениям  $m = 1, 2, 3, \dots$ , принятым в (6.88) для построения функции  $\varphi$ , положим еще  $m = 0$ , т. е.  $\lambda = \frac{m\pi}{l} = 0$ ; тогда уравнения (6.83) и (6.82) перейдут в такие:

$$\begin{aligned} X'' &= 0, \\ Y^{(IV)} &= 0; \end{aligned}$$

общие их решения будут

$$\begin{aligned} X &= \alpha x + \beta, \\ Y &= \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{2} y^2 + Cy + D, \end{aligned}$$

и согласно (6.78) получим \*) соответственную функцию напряжений

$$\varphi_0 = (\alpha x + \beta) \left( \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{2} y^2 + Cy \right). \quad (6.92)$$

Таким образом, к решению (6.88) вполне планомерно добавляется решение в форме полинома четвертой степени (6.92); компоненты напряженного состояния при этом будут такие:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = (\alpha x + \beta)(Ay + B), \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0, \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = -\alpha \left( \frac{A}{2} y^2 + By + C \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

На длинных сторонах полосы получим напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \\ \text{при } y=h \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Y_y &= 0, \quad X_y = -\alpha C; \\ Y_y &= 0, \quad X_y = -\alpha \left( \frac{Ah^2}{2} + Bh + C \right). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Значит, распоряжаясь произвольными постоянными  $\alpha, \beta, A, B, C$ , мы можем:

1. На длинных сторонах ( $y=0; y=h$ ) получить постоянные тангенциальные нагрузки  $X_y$  произвольной интенсивности согласно (6.94) и этим избавиться от ограничения (6.89).

\*) Далее полагаем  $D = 0$ .

2. На торцах полосы получить нормальные напряжения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \text{при } x = l \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_x = \beta (Ay + B); \\ X_x = (\alpha l + \beta) (Ay + B). \end{array} \quad (6.95)$$

распределенные по линейному закону; это позволит добавить к решению (6.88) еще два фактора произвольной интенсивности: сжатие — растяжение полосы вдоль ее оси и изгибающие моменты на торцах.

### \* § 45. Об одном видоизменении метода Файлона \*)

Излагаемое здесь видоизменение может оказаться полезным в тех случаях, когда данную полосу надо рассчитывать при различных нагрузках, а также в тех случаях, когда требуется определять перемещения ее верхней или нижней границ; последнее необходимо при решении *контактных задач*; например, в случае полосы, лежащей на абсолютно твердом основании и нагружаемой по верхней грани; иногда требуется подсчитывать перемещения  $v$  (прогибы) нижней или верхней грани полосы, опертой на концах.

Для решения задачи, изложенной в § 44, надо было функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  представить в виде (6.88); здесь первый множитель под знаком суммы  $\sin \frac{m\pi x}{l}$  является частным решением уравнения (6.83); его мы оставим без изменения; второй множитель (заключенный в скобки) представляет собой общее решение уравнения (6.82) при  $\lambda = \frac{m\pi}{l}$ . Он составлен из четырех частных решений:

$$\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l}; \quad \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l}; \quad y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l}; \quad y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l}, \quad (6.96)$$

полученных при помощи характеристического уравнения (6.82а); однако вместо них можно взять какие-либо другие четыре частных, линейно независимых решения, представляющих собой линейные функции от решений (6.96); запишем их в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{1m}(z) = a_{1m} \operatorname{ch} z + b_{1m} \operatorname{sh} z + c_{1m} z \operatorname{ch} z + d_{1m} z \operatorname{sh} z, \\ \psi_{2m}(z) = a_{2m} \operatorname{ch} z + b_{2m} \operatorname{sh} z + c_{2m} z \operatorname{ch} z + d_{2m} z \operatorname{sh} z, \\ \psi_{3m}(z) = a_{3m} \operatorname{ch} z + b_{3m} \operatorname{sh} z + c_{3m} z \operatorname{ch} z + d_{3m} z \operatorname{sh} z, \\ \psi_{4m}(z) = a_{4m} \operatorname{ch} z + b_{4m} \operatorname{sh} z + c_{4m} z \operatorname{ch} z + d_{4m} z \operatorname{sh} z, \end{array} \right\} \quad (6.97)$$

\*) См. работу автора «Об изгибе полосы», Вестник Военно-Инженерной академии им. В. В. Куйбышева, № 20, 1936.

где для краткости введено обозначение

$$z = \frac{m\pi y}{l}; \quad (6.98)$$

величины  $a_{1m}, b_{1m}, \dots, d_{4m}$  пока произвольны; далее мы выберем их с таким расчетом, чтобы выполнение граничных условий было возможно более простым.

Общее решение уравнения (6.82), данное формулой (6.85), заметится теперь таким:

$$Y_m = \bar{A}_m \psi_{1m}(z) + \bar{B}_m \psi_{2m}(z) + \bar{C}_m \psi_{3m}(z) + \bar{D}_m \psi_{4m}(z), \quad (6.99)$$

где  $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$  — новые произвольные постоянные. Функция напряжений (6.88) получит вид

$$\varphi = \sum_{m=1}^n \sin \frac{m\pi x}{l} Y_m. \quad (6.100)$$

При выборе коэффициентов в формулах (6.97) будем руководствоваться следующими соображениями. Компоненты напряженного состояния, действующие на верхней и нижней гранях полосы, выражаются так:

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} Y_m;$$

$$X_y = - \sum \frac{m\pi}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} Y'_m.$$

Сюда входят функции (6.99) и их первые производные; распорядимся функциями (6.97) так, чтобы при  $y=0$  и  $y=h$  выражения  $Y_m$  и  $Y'_m$  были одночленными; с этой целью определим коэффициенты функций (6.97) из следующих граничных условий (где  $\beta = \pi \frac{h}{l}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1m}(0) &= 1; & \psi'_{1m}(0) &= 0; & \psi_{1m}(m\beta) &= 0; & \psi'_{1m}(m\beta) &= 0; \\ \psi_{2m}(0) &= 0; & \psi'_{2m}(0) &= 1; & \psi_{2m}(m\beta) &= 0; & \psi'_{2m}(m\beta) &= 0; \\ \psi_{3m}(0) &= 0; & \psi'_{3m}(0) &= 0; & \psi_{3m}(m\beta) &= 1; & \psi'_{3m}(m\beta) &= 0; \\ \psi_{4m}(0) &= 0; & \psi'_{4m}(0) &= 0; & \psi_{4m}(m\beta) &= 0; & \psi'_{4m}(m\beta) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.101)$$

Здесь  $\psi'_{km}(0)$  и  $\psi'_{km}(m\beta)$  обозначают производные функций (6.97) по аргументу, с подстановкой граничных значений его  $z=0$

и  $z = m\beta = \frac{m\pi h}{l}$ . Подставив в эти условия выражения функций (6.97), получим четыре системы уравнений для определения коэффициентов

$$a_{km}, \quad b_{km}, \quad c_{km}, \quad d_{km},$$

где индексу  $k$  последовательно даются значения 1, 2, 3, 4. Уравнения эти без труда решаются в общем виде; в следующей таблице приведены получаемые таким путем выражения коэффициентов:

	$a_{km}$	$b_{km}$	$c_{km}$	$d_{km}$	
$\psi_{1m}$	1	$-\frac{\text{sh } m\beta \text{ ch } m\beta + m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\frac{\text{sh } m\beta \text{ ch } m\beta + m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$-\frac{\text{sh}^2 m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\psi_{1m}$
$\psi_{2m}$	0	$-\frac{(m\beta)^2}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\frac{\text{sh}^2 m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$-\frac{\text{sh } m\beta \text{ ch } m\beta - m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\psi_{2m}$
$\psi_{3m}$	0	$\frac{m\beta \text{ ch } m\beta + \text{sh } m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$-\frac{m\beta \text{ ch } m\beta + \text{sh } m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\frac{m\beta \text{ sh } m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\psi_{3m}$
$\psi_{4m}$	0	$-\frac{m\beta \text{ sh } m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\frac{m\beta \text{ sh } m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$-\frac{m\beta \text{ ch } m\beta - \text{sh } m\beta}{\text{sh}^2 m\beta - (m\beta)^2}$	$\psi_{4m}$

Коэффициенты эти не зависят от нагрузки и могут быть вычислены раз навсегда для полос с данным отношением размеров  $h:l$ , входящим в параметр  $\beta = \pi \frac{h}{l}$ ; вычисления облегчаются попарным равенством ряда коэффициентов:

$$c_{1m} = -b_{1m}, \quad c_{2m} = -d_{1m}, \quad c_{3m} = -b_{3m}, \quad c_{4m} = d_{3m} = -b_{4m}.$$

Построенные таким образом частные решения (6.97) уравнения (6.82) позволяют получить следующие простые граничные значения функций  $Y_m(y)$  и  $Y'_m(y)$  при  $y=0$  и  $y=h$  (при дифференцировании следует учитывать, что  $\frac{dY'_m}{dy} = \frac{dY_m}{dz} \frac{m\pi}{l}$ ):

$$\left. \begin{aligned} Y_m(0) &= \bar{A}_m; & Y'_m(0) &= \frac{m\pi}{l} \bar{B}_m; \\ Y_m(h) &= \bar{C}_m; & Y'_m(h) &= \frac{m\pi}{l} \bar{D}_m. \end{aligned} \right\} \quad (6.102)$$

Это обстоятельство в свою очередь позволяет значительно упростить граничные условия для полосы по сравнению с ранее полученными (6.89). Действительно, если на нижней грани ( $y=0$ ) действуют нагрузки  $q_2(x)$  и  $t_2(x)$  (рис. 60), то соответствующие граничные



условия на основании (6.102) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned}
 Y_{-y} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} Y_m(0) = \\
 &= \sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{A}_m \sin \frac{m\pi x}{l} = q_2(x), \\
 -X_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{l} Y'_m(0) = \\
 &= \sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{B}_m \cos \frac{m\pi x}{l} = t_2(x); \\
 \text{условия на верхней грани } y=h \text{ будут} \\
 Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} Y_m(h) = \\
 &= -\sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{C}_m \sin \frac{m\pi x}{l} = q_1(x), \\
 X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{l} Y'_m(h) = \\
 &= -\sum \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{D}_m \cos \frac{m\pi x}{l} = t_1(x).
 \end{aligned} \right\} (6.103)$$

Разложим заданные нагрузки в тригонометрические ряды:

$$\left. \begin{aligned}
 q_2(x) &= \sum_{m=1}^n A_m \sin \frac{m\pi x}{l}; & t_2 &= \sum_{m=1}^n B_m \cos \frac{m\pi x}{l}; \\
 q_1(x) &= \sum_{m=1}^n C_m \sin \frac{m\pi x}{l}; & t_1 &= \sum_{m=1}^n D_m \cos \frac{m\pi x}{l},
 \end{aligned} \right\} (6.104)$$

коэффициенты которых находятся по формулам Эйлера:

$$\left. \begin{aligned}
 A_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q_2(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx; & B_m &= \frac{2}{l} \int_0^l t_2(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx, \\
 C_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q_1(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx; & D_m &= \frac{2}{l} \int_0^l t_1(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx;
 \end{aligned} \right\} (6.105)$$

Подставляя выражения нагрузок (6.104) в (6.103) и сравнивая коэффициенты правых и левых частей, получим

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A}_m &= \left( \frac{l}{m\pi} \right)^2 A_m; & \bar{B}_m &= \left( \frac{l}{m\pi} \right)^2 B_m; \\
 \bar{C}_m &= -\left( \frac{l}{m\pi} \right)^2 C_m; & \bar{D}_m &= -\left( \frac{l}{m\pi} \right)^2 D_m.
 \end{aligned} \right\} (6.106)$$

Значит, коэффициенты функций (6.99) оказываются пропорциональными коэффициентам разложения нагрузок (6.105), и для их определения не требуется решать системы уравнений (ср. уравнения (6.90б)). Функция напряжений (6.100) получает окончательный вид, удовлетворяющий условиям на верхней и нижней гранях:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \times \\ \times [A_m \psi_{1m}(z) + B_m \psi_{2m}(z) + C_m \psi_{3m}(z) + D_m \psi_{4m}(z)], \quad (6.107) \\ z = \frac{m\pi y}{l}.$$

Напряжения вычисляются по обычным формулам:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum \sin \frac{m\pi x}{l} Y_m''(y), \\ Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{l}\right) Y_m(y), \\ X_y = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = - \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right) \cos \frac{m\pi x}{l} Y_m'(y).$$

Внося сюда выражение функции (6.99), получим окончательные формулы напряжений для полосы при заданных нагрузках на длинных сторонах ее (при дифференцировании, как было указано выше, надо учесть, что  $\frac{d\psi_{km}(z)}{dy} = \frac{d\psi_{km}(z)}{dz} \frac{m\pi}{l}$ ):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sum [A_m \psi_{1m}''(z) + B_m \psi_{2m}''(z) - \\ &\quad - C_m \psi_{3m}''(z) - D_m \psi_{4m}''(z)] \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ Y_y &= - \sum [A_m \psi_{1m}(z) + B_m \psi_{2m}(z) - \\ &\quad - C_m \psi_{3m}(z) - D_m \psi_{4m}(z)] \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ X_y = Y_x &= - \sum [A_m \psi_{1m}'(z) + B_m \psi_{2m}'(z) - \\ &\quad - C_m \psi_{3m}'(z) - D_m \psi_{4m}'(z)] \cos \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (6.108)$$

При расчете данной полосы на различные нагрузки в формулы (6.108) следует лишь подставлять соответствующие им коэффициенты разложений (6.105); функции же  $\psi_{km}(z)$  и их производные от нагрузок не зависят. В большинстве практических задач фигурируют не все нагрузки, предусмотренные в формулах (6.108), и они упрощаются. Например, в случае полосы, опертой на концах и нагруженной по верхней грани (рис. 61), следует положить  $A_m = B_m = D_m = 0$ .

Приведенный здесь метод решения задачи представляет некоторые удобства в случае необходимости определять перемещения точек полосы  $u$  и  $v$ , что требуется, например, при решении контактных задач. Перемещения находятся тем же путем, как и в случае консоли, рассмотренной в § 41. Не приводя всего соответствующего хода рассуждений (см. работу, указанную в сноске в начале этого параграфа), дадим некоторые окончательные результаты. Общая формула вертикальной составляющей перемещения имеет вид

$$v = -\frac{l}{E\pi} \sum \frac{1}{m} \{A_m [\Psi_{1m}(z) + \sigma\psi'_{1m}(z)] + B_m [\Psi_{2m}(z) + \sigma\psi'_{2m}(z)] - C_m [\Psi_{3m}(z) + \sigma\psi'_{3m}(z)] - D_m [\Psi_{4m}(z) + \sigma\psi_{4m}(z)]\} \sin \frac{m\pi x}{l} - \frac{\gamma x - \varepsilon}{E}, \quad (6.109)$$

где через  $\Psi_{km}(z)$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) обозначены следующие первообразные функций  $\psi_{km}(z)$  (см. (6.97)):

$$\Psi_{km}(z) = \frac{l}{m\pi} [(b_{km} - c_{km}) \operatorname{ch} z + (a_{km} + d_{km}) \operatorname{sh} z + d_{km} z \operatorname{ch} z + c_{km} z \operatorname{sh} z];$$

$\gamma$  — угол поворота и  $\varepsilon$  — вертикальная составляющая жесткого смещения полосы. Ограничимся случаем вертикальных нагрузок  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  и потому далее положим  $B_m = D_m = 0$ . В практических приложениях наибольший интерес представляют перемещения верхней и нижней граней полосы; поэтому в следующей табличке даны граничные значения функций  $\Psi_{km}(z)$ , входящих в формулу (6.109):

	$\Psi_{1m}$	$\Psi_{2m}$	$\Psi_{3m}$	$\Psi_{4m}$
$z = 0$	$-2c_{1m}$	$1 - 2c_{2m}$	$-2c_{3m}$	$-2c_{4m}$
$z = m\beta$	$2c_{3m}$	$-2c_{4m}$	$2c_{1m}$	$1 - 2c_{2m}$

Пользуясь ими, легко найдем перемещение (прогиб) нижней грани ( $z = 0$ ):

$$v = \frac{2l}{E\pi} \sum \frac{1}{m} [A_m c_{1m} - C_m c_{3m}] \sin \frac{m\pi x}{l} - \frac{\gamma x - \varepsilon}{E}. \quad (6.110)$$

Если нагрузка имеется только на верхней грани, то

$$v = -\frac{2l}{E\pi} \sum \frac{1}{m} C_m c_{3m} \sin \frac{m\pi x}{l} - \frac{\gamma x - \varepsilon}{E}. \quad (6.110a)$$

Имея формулу (6.109), можно решить задачу о полосе, положенной на абсолютно твердое основание и нагруженной поверху нагрузкой

$q_2(x)$  (формулы (6.104)). В данном случае имеем смешанную задачу (§ 37). Если между полосой и основанием нет трения, то условия на нижней грани будут такие: при  $z=0$ ,  $v=0$ ,  $X_y=0$ ; предполагается, что полоса нигде не отстаёт от основания. Решение задачи приводит к таким выражениям для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sum C_m \left[ \frac{c_{3m}}{c_{1m}} \psi''_{1m}(z) - \psi''_{3m}(z) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ Y_y &= - \sum C_m \left[ \frac{c_{3m}}{c_{1m}} \psi_{1m}(z) - \psi_{3m}(z) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ X_y &= - \sum C_m \left[ \frac{c_{3m}}{c_{1m}} \psi'_{1m}(z) - \psi'_{3m}(z) \right] \cos \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (6.111)$$

Положив во второй формуле  $z=0$ , найдем реакцию основания на полосу:

$$Y_y = - \sum C_m \frac{c_{3m}}{c_{1m}} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (6.112)$$

Перемещение (оседание) верхней грани под действием нагрузки выражается так:

$$v = - \frac{2l}{E\pi} \sum c_{1m} \frac{C_m}{m} \left[ \left( \frac{c_{3m}}{c_{1m}} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (6.113)$$

Простота последних формул показывает практическую применимость изложенного здесь способа.

### \* § 46. Полоса бесконечной длины

В предыдущих параграфах рассматривалась полоса конечной длины  $l$ ; вместе с тем можно сказать, что здесь мы имеем полосу бесконечную, но нагруженную нагрузками, периодически повторяющимися на участках длиной  $l$ , так как все решение выражено через периодические функции  $\cos \frac{m\pi x}{l}$  и  $\sin \frac{m\pi x}{l}$ . Оказывается, что полученное решение можно видоизменить и получить решение задачи для бесконечной полосы под произвольной нагрузкой. С этой целью возвратимся к исходному частному решению (6.86) для функции напряжений  $\varphi(x, y)$ . Параметру  $\lambda$  мы давали *дискретные* значения  $\lambda = \frac{m\pi}{l}$  ( $m=1, 2, \dots, \infty$ ), и потому получалось решение задачи в тригонометрических рядах. Теперь будем  $\lambda$  менять непрерывно от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; это приведет к решению задачи в интегралах. Коэффициенты  $A, B, C, D$  также будем считать функциями от  $\lambda$ ; коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$  без уменьшения общности положим равными единице и решение (6.86) запишем так:

$$\varphi(x, y) = \sin \lambda x Y_1(\lambda y) + \cos \lambda x Y_2(\lambda y), \quad (6.114)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\lambda y) &= A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + \\ &\quad + C(\lambda) \lambda y \operatorname{ch} \lambda y + D(\lambda) \lambda y \operatorname{sh} \lambda y, \\ Y_2(\lambda y) &= A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + \\ &\quad + C(\lambda) \lambda y \operatorname{ch} \lambda y + D(\lambda) \lambda y \operatorname{sh} \lambda y. \end{aligned} \right\} (6.115)$$

Сумма решений (6.114) теперь представится в виде интеграла

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda x Y_1(\lambda y) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \lambda x Y_2(\lambda y) dy; \quad (6.116)$$

она также, очевидно, будет решением уравнения (6.77). Имея функцию напряжений (6.116), получим напряжения

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \cos \lambda x Y_1''(\lambda y) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \sin \lambda x Y_2''(\lambda y) d\lambda, \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \cos \lambda x Y_1(\lambda y) d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \sin \lambda x Y_2(\lambda y) d\lambda, \\ X_y &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \sin \lambda x Y_1'(\lambda y) d\lambda - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \cos \lambda x Y_2'(\lambda y) d\lambda. \end{aligned} \right\} (6.117)$$

Здесь одним и двумя штрихами обозначены производные функций  $Y_1(\lambda y)$  и  $Y_2(\lambda y)$  по аргументу  $\lambda y$ .

Если на верхней и нижней гранях заданы нагрузки  $q_1(x)$ ,  $t_1(x)$ ,  $q_2(x)$ ,  $t_2(x)$  (рис. 60), то граничные условия запишутся аналогично (6.90а) следующим образом (обозначение пределов интегралов опускаем для простоты записи)

при  $y = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} Y_{-y} &= q_2(x) = \int \lambda^2 \cos \lambda x Y_1(0) d\lambda + \int \lambda^2 \sin \lambda x Y_2(0) d\lambda, \\ X_{-y} &= t_2(x) = - \int \lambda^2 \sin \lambda x Y_1'(0) d\lambda + \int \lambda^2 \cos \lambda x Y_2'(0) d\lambda, \end{aligned} \right\} (6.118)$$

при  $y = h$ :

$$\begin{aligned} Y_y &= q_1(x) = - \int \lambda^2 \cos \lambda x Y_1(\lambda h) d\lambda - \int \lambda^2 \sin \lambda x Y_2(\lambda h) d\lambda, \\ X_y &= t_1(x) = \int \lambda^2 \sin \lambda x Y_1'(\lambda h) d\lambda - \int \lambda^2 \cos \lambda x Y_2'(\lambda h) d\lambda. \end{aligned}$$

Эти условия должны послужить для определения коэффициентов функций (6.115):

$$\left. \begin{array}{l} A(\lambda), \quad B(\lambda), \quad C(\lambda), \quad D(\lambda); \\ A_1(\lambda), \quad B_1(\lambda), \quad C(\lambda), \quad D(\lambda). \end{array} \right\} \quad (6.119)$$

Граничные значения этих функций входят в подынтегральные выражения (6.118); их прежде всего и следует найти. При решении задачи в рядах такая операция соответствует определению коэффициентов по формулам Эйлера; в рассматриваемом методе для этой цели необходимо воспользоваться *формулой Фурье*, выражающей произвольную функцию  $f(x)$  (удовлетворяющую так называемым условиям Дирихле) в форме двойного интеграла, в подынтегральном выражении которого содержится та же функция  $f(x)$ . Вывод этой формулы можно найти в курсах интегрального исчисления; она имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha \right] d\lambda. \quad (6.120)$$

В ней  $x$  играет лишь роль параметра; внутреннее интегрирование выполняется по переменной  $\alpha$ , а внешнее — по  $\lambda$ . Раскрывая выражение косинуса, напомним (6.120) в следующем виде (пределы интегралов по-прежнему опускаем):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \cos \lambda x \left[ \int f(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha \right] d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int \sin \lambda x \left[ \int f(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right] d\lambda. \quad (6.120a)$$

Структура ее аналогична структуре формул (6.118), и из сравнения их получим интересующие нас граничные значения функций  $Y_1$  и  $Y_2$  и их производных. Действительно, положим в (6.120a), что  $f(x) = q_1(x)$ , и, сравнивая результат с третьей формулой (6.118), найдем, что

$$Y_1(\lambda h) = \frac{-1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} q_1(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha; \quad Y_2(\lambda h) = -\frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} q_1(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha.$$

Полагая теперь  $f(x) = t_1(x)$  и сравнивая с четвертой формулой (6.118), получим

$$Y'_1(\lambda h) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t_1(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha; \quad Y'_2(\lambda h) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t_1(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha.$$

Таким же путем, используя первые две формулы (6.118), найдем четыре граничных значения функций

$$Y_1(0), \quad Y_2(0), \quad Y'_1(0), \quad Y'_2(0).$$

Получить эти формулы предлагаем для упражнения читателю. Найденные восемь граничных значений функций (6.115) и их производных следует подставить в левые части этих равенств, а в правых соответственно положить  $y=0$  или  $y=h$ . Это даст восемь уравнений для определения коэффициентов (6.119), и граничные условия для полосы будут удовлетворены; остается определить напряжения по формулам (6.117).

Наличие в решении интегралов с бесконечными пределами требует некоторых ограничений в отношении нагрузок, если они приложены не на участке конечной длины, но продолжают бесконечно: в этом случае равнодействующие их должны быть конечными; в противном случае интегралы могут потерять смысл (обратиться в бесконечность). Входящие в решение интегралы лишь в редких случаях берутся в конечном виде; приходится подсчитывать их численным способом. Приложения рассмотренного в этом параграфе метода можно найти в книге П. Ф. Папковича «Теория упругости» (Обонгиз, 1939 г.).

---

## ГЛАВА VII

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

#### § 47. Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах

До сих пор при решении задач теории упругости мы пользовались декартовыми координатами, в которых точка  $M(x_0, y_0, z_0)$  определялась пересечением трех плоскостей:  $x = x_0$ ;  $y = y_0$ ;  $z = z_0$ .

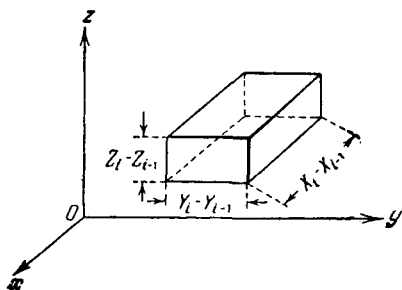


Рис. 63.

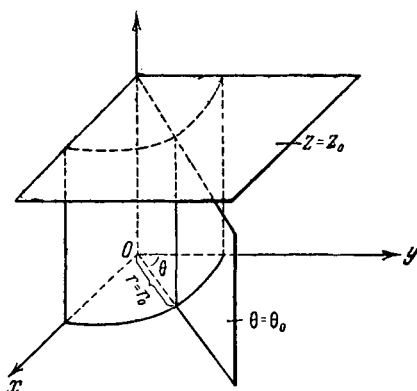


Рис. 64.

Применяя эти координаты, мы разделяли исследуемое тело на бесконечно малые элементы тремя системами плоскостей:

$$\begin{aligned} x &= x_1; & x &= x_2; & \dots; & x &= x_i; \\ y &= y_1; & y &= y_2; & \dots; & y &= y_i; \\ z &= z_1; & z &= z_2; & \dots; & z &= z_i. \end{aligned}$$

Поверхность, на которой одна из координат сохраняет постоянное значение, называется координатной поверхностью; в данном случае эти поверхности оказываются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и при этом получают элементы в форме параллелепипеда (рис. 63).



Однако во многих задачах оказывается более удобным выбирать другие системы координат. В частности, рассмотрим цилиндрические координаты, в которых точка (рис. 64) определяется тремя числами:  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ . Иначе можем сказать, что точка определяется пересечением следующих координатных поверхностей: круглого цилиндра  $r = r_0$ , плоскости  $\theta = \theta_0$ , проходящей через ось  $Oz$ , и плоскости  $z = z_0$ , параллельной  $Oxy$ . Соответственно этому в данном случае разделение исследуемого тела на бесконечно малые элементы мы будем осуществлять тремя следующими системами поверхностей: системой концентрических цилиндров  $r = r_1, r = r_2, \dots, r = r_i$ ; затем пучком плоскостей  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_i$ , проходящих через ось  $Oz$ , и системой плоскостей  $z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_i$ , параллельных  $Oxy$ . Форма получающегося при этом бесконечно малого элемента показана на рис. 65.

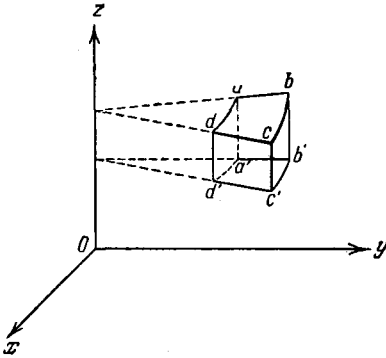


Рис. 65.

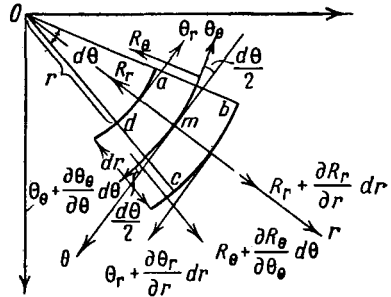


Рис. 66.

Применим цилиндрические координаты к плоской задаче, причем ось исследуемого призматического тела направим параллельно оси  $Oz$ . Внешняя нагрузка согласно нашим предположениям будет параллельной плоскости  $Oxy$ . В этом случае, как мы видели, и для плоской деформации и для плоского напряженного состояния можно отбросить формально ось  $Oz$ , и, следовательно, вся задача будет решаться как бы на плоскости, в полярных координатах  $r$ ,  $\theta$ .

Выведем теперь основные уравнения теории упругости для плоской задачи в полярных координатах. Займемся сначала дифференциальными уравнениями равновесия (I). Выделим из тела элемент  $abcd$  с центральным углом  $d\theta$  и наименьшим радиусом  $r$ . Стороны его будут (рис. 66)

$$\left. \begin{aligned} ab &= cd = dr, \\ ad &= r d\theta, \\ bc &= (r + dr) d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Наметим две оси  $mr$  и  $m\theta$  и, пользуясь ими, будем обозначать напряжения, действующие по граням элемента, согласно правилу, принятому вначале; обозначения эти показаны на чертеже. Составим условия равновесия элемента  $abcd$ , проектируя приложенные к нему силы на оси  $r$  и  $\theta$ . Объемными силами при этом пренебрежем. Толщину элемента вдоль оси  $Oz$  примем равной 1. При проектировании сил ввиду бесконечной малости угла  $d\theta$  будем принимать

$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}, \quad \cos \frac{d\theta}{2} = 1.$$

Перемножая напряжения, показанные на чертеже, на соответствующие площадки (7.1) и проектируя полученные силы на оси  $r$  и  $\theta$ , найдем

$$\begin{aligned} & \left( R_r + \frac{\partial R_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - R_{r,r} d\theta + \left( R_\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \\ & \quad - R_\theta dr - \left( \Theta_\theta + \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} - \Theta_\theta dr \frac{d\theta}{2} = 0, \\ & \left( \Theta_\theta + \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \Theta_\theta dr + \left( R_\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \\ & \quad + R_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \left( \Theta_r + \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \Theta_{r,r} d\theta = 0. \end{aligned}$$

Сокращая полученные уравнения и отбрасывая бесконечно малые величины третьего порядка, получим

$$\begin{aligned} R_r dr d\theta + \frac{\partial R_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta dr - 2\Theta_\theta \frac{dr d\theta}{2} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} d\theta dr + 2R_\theta \frac{dr d\theta}{2} + \Theta_r dr d\theta + \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} r dr d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Далее, разделяя эти уравнения на  $dr d\theta$ , а также имея в виду, что  $\Theta_r = R_\theta$ , будем иметь окончательные дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{2R_\theta}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I_{\text{пн}})$$

Для уравнений равновесия в декартовых координатах (6.14), соответствующих (I<sub>пн</sub>), удалось найти общее решение (6.16), выраженное через функцию напряжений  $\varphi(x, y)$ . Аналогичное решение можно получить и для уравнений (I<sub>пн</sub>) при помощи функции напряжений

$\varphi(r, \theta)$ ; существует несколько способов вывода этого решения, однако мы не будем здесь их приводить; запишем только результат:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\ \Theta_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ R_\theta &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII}_\Pi)$$

Подставив эти выражения в уравнения (I<sub>III</sub>), убедимся в том, что они тождественно удовлетворяются. К ним необходимо добавить, конечно, условие совместности деформаций; в декартовых координатах оно имело вид (IV<sub>II</sub>, § 39)

$$\nabla^2(X_x + Y_y) = 0. \quad (\text{IV}_\Pi)$$

Вспомним теперь, что

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z$$

представляет собой инвариант преобразования координат, и потому он сохранит свою величину при замене декартовых координат полярными. В случае плоской деформации ( $w = 0$ )

$$\Theta = X_x + Y_y - \sigma(X_x + Y_y) = (1 - \sigma)(X_x + Y_y).$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния ( $Z_z = 0$ )

$$\Theta = X_x + Y_y.$$

Значит, в плоской задаче  $X_x + Y_y$  будет инвариантом, и потому

$$X_x + Y_y \equiv R_r + \Theta_\theta.$$

На этом основании из (IV<sub>II</sub>) непосредственно получим условие совместности деформаций в полярных координатах:

$$\nabla^2(R_r + \Theta_\theta) = 0. \quad (7.2)$$

Однако инвариант  $X_x + Y_y$  представляет собой лапласов оператор над функцией напряжений в декартовых координатах:

$$X_x + Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \nabla^2 \varphi(x, y);$$

значит, на основании (VIII<sub>II</sub>)

$$R_r + \Theta_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \nabla^2 \varphi(r, \theta)$$

является лапласовым оператором над той же функцией в полярных координатах; отсюда общий вывод: символ лапласова оператора в полярных координатах означает следующую дифференциальную операцию:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (7.3)$$

Вследствие этого уравнение совместности деформаций (7.2) в полярных координатах имеет вид

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) = 0. \quad (\text{IX}_n)$$

Выполнив действия, обозначенные в первой скобке, получим дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных, которому должна удовлетворять функция напряжений  $\varphi(r, \theta)$ ; имея ее, вычислим напряжения по формулам (VIII<sub>n</sub>).

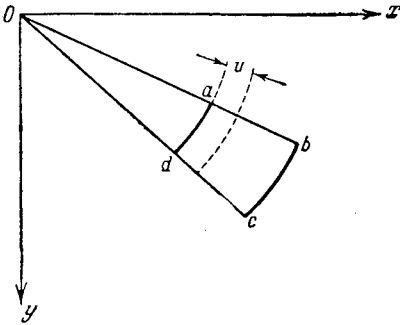


Рис. 67.

Займемся теперь деформациями и перемещениями (рис. 67). Будем обозначать перемещения точек вдоль оси  $r$  через  $u$ , а вдоль оси  $\theta$  через  $v$ ; удлинение вдоль оси  $r$  — через  $e_{rr}$ ; вдоль оси  $\theta$  — через  $e_{\theta\theta}$  и сдвиг, т. е. искажение прямого угла  $bad$ , — через  $e_{r\theta}$ .

При помощи таких же рассуждений, как и ранее (§ 10), мы получим  $e_{rr} = \frac{du}{dr}$ . Переходим к удлинению  $e_{\theta\theta}$ . Это удлинение может получиться от двух причин. Во-первых, если произошли только радиальные перемещения  $u$ , то относительное удлинение линейного элемента  $ad = r d\theta$  выразится так:

$$\frac{(r+u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Вследствие перемещений  $v$  вдоль оси  $\theta$  также получится относительное удлинение  $\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{r d\theta}$ ; полное удлинение будет

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}.$$

Теперь займемся сдвигом. Из чертежа (рис. 68) видно, что сдвиг выразится так:

$$e_{r\theta} = (\beta - \alpha) + \gamma; \quad (7.4)$$

далее замечаем, что

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \alpha = \frac{v}{r}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{r \partial \theta}.$$

Подставляя эти значения в формулу (7.4), получаем

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Таким образом, вместо уравнений (III<sub>п</sub>') для плоской задачи мы теперь получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}_{\text{пн}})$$

Закон Гука (V<sub>п</sub>') для случая обобщенного плоского напряженного состояния имеет прежний вид, лишь меняются обозначения напряжений и деформаций:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E} (R_r - \sigma \Theta_\theta), \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} (\Theta_\theta - \sigma R_r), \\ e_{r\theta} &= \frac{2(1 + \sigma)}{E} R_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V}_{\text{пн}})$$

В случае плоской деформации следует  $E$  и  $\sigma$  заменить на  $E_1$  и  $\sigma_1$  по формулам (6.5).

### § 48. Задачи, в которых напряжения не зависят от полярного угла

Применим выведенные уравнения к решению некоторых задач. Наиболее просто задача решается в тех случаях, когда напряжения (VIII<sub>п</sub>) не зависят от угла  $\theta$ , т. е. когда во всех точках любой окружности с центром в полюсе  $O$ ,  $R_r$ ,  $\Theta_\theta$  и  $R_\theta$  одинаковы.

Функцию напряжений  $\varphi$ , очевидно, можем взять в этом случае не зависящей от  $\theta$ ; тогда уравнение (IX<sub>п</sub>) упрощается:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad (\text{IX}'_{\text{п}})$$

выражения напряжений (VIII<sub>п</sub>) переходят в такие:

$$R_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \Theta_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad R_\theta = \Theta_r = 0. \quad (\text{VIII}'_{\text{п}})$$

Уравнение (IX<sub>п</sub>') легко интегрируется при помощи подстановки  $\varphi = r^n$ , которая приводит к характеристическому уравнению с двумя

кратными корнями. В результате общее решение уравнения (IX<sub>n</sub>) имеет вид

$$\varphi(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (7.5)$$

Отсюда по (VIII<sub>n</sub>) находим напряжения

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C, \\ \Theta_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C, \\ R_\theta &= \Theta_r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

В качестве примера воспользуемся уравнениями (7.6) для решения задачи Ламе о равномерном внешнем и внутреннем сжатии круглой трубы. Пусть внешнее давление равно  $p_2$ , а внутреннее —  $p_1$ .

Тогда мы, очевидно, получаем следующие условия на поверхности (рис. 69):

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r=a \quad R_{-r} &= +p_1 \quad \text{или} \quad R_r = -p_1, \\ \text{при } r=b \quad R_r &= -p_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Для получения решения Ламе при этих условиях произвольную постоянную  $B$  положим равной нулю; тогда уравнения (7.6) дают

$$R_r = \frac{A}{r^2} + 2C; \quad \Theta_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \quad (7.8)$$

Постоянные  $A$  и  $C$  легко найти из условий (7.7); удовлетворив им, получим

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}, \\ \Theta_\theta &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8a)$$

При решении этой задачи мы сделали допущение, положив заранее  $B=0$ ; имея три произвольные постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  и два условия (7.7), мы могли бы решить задачу и при других допущениях; однако можно доказать, что действительному распределению напряжений соответствует решение Ламе (7.8a). Особенность этой задачи заключается в том, что мы здесь встречаемся с *двухсвязным контуром*, так как сечение трубы ограничено двумя замкнутыми кривыми, не пересекающимися между собой; при наличии двухсвязного или многосвязного контура решение задачи, вообще говоря, осложняется и возможна многозначность решения. Это затруднение можно обойти двумя способами.

*Первый способ.* Решение задачи в перемещениях. Так как напряжения и деформации не зависят от полярного угла  $\theta$ , то из уравне-

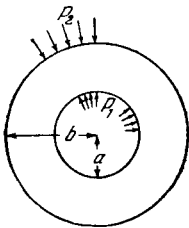


Рис. 69.

ний равновесия (I<sub>пп</sub>) остается одно первое, и оно упрощается:

$$\frac{dR_r}{dr} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r} = 0; \quad (7.9)$$

зависимости (III<sub>пп</sub>) также упрощаются:

$$e_{rr} = \frac{du}{dr}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}; \quad e_{r\theta} = 0. \quad (7.10)$$

Закон Гука (6.4) в случае плоской деформации:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E_1} (R_r - \sigma_1 \Theta_\theta), \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E_1} (\Theta_\theta - \sigma_1 R_r). \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Отсюда

$$R_r = \frac{E_1}{1 - \sigma_1^2} (e_{rr} + \sigma_1 e_{\theta\theta}); \quad \Theta_\theta = \frac{E_1}{1 - \sigma_1^2} (e_{\theta\theta} + \sigma_1 e_{rr}), \quad (7.11a)$$

или, подставляя сюда из (7.10), имеем

$$R_r = \frac{E_1}{1 - \sigma_1^2} \left( \frac{du}{dr} + \sigma_1 \frac{u}{r} \right); \quad \Theta_\theta = \frac{E_1}{1 - \sigma_1^2} \left( \frac{u}{r} + \sigma_1 \frac{du}{dr} \right). \quad (7.12)$$

Внеся эти выражения напряжений в уравнение равновесия (7.9), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно  $u$ ; в общее решение его войдут лишь две произвольные постоянные, определяемые из условий на внешнем и внутреннем контурах. В результате из (7.12) получим те же формулы напряжений (7.8). Метод этот приводится в курсах сопротивления материалов.

*Второй способ.* Решаем задачу по-прежнему в напряжениях. К уравнению равновесия (7.9) добавляем условие неразрывности деформаций, которое получим, исключив из зависимостей (7.10) единственное перемещение  $u$ . Вторая из этих зависимостей дает  $u = r e_{\theta\theta}$ , и отсюда  $\frac{du}{dr} = e_{\theta\theta} + r \frac{de_{\theta\theta}}{dr}$ . Подставив это в первую, получим искомое условие совместности в виде простого дифференциального уравнения *первого порядка*:

$$\frac{e_{rr} - e_{\theta\theta}}{r} = \frac{de_{\theta\theta}}{dr}. \quad (7.13)$$

Подставив сюда значения деформаций из (7.11), получим условие совместности деформаций, выраженное в напряжениях:

$$\frac{d\Theta_\theta}{dr} - \sigma \frac{dR_r}{dr} = (1 + \sigma_1) \frac{R_r - \Theta_\theta}{r}. \quad (7.13a)$$

В отличие от (7.2) оно оказалось уравнением первого порядка, так как осесимметрический характер задачи наложил ограничения на

деформации и напряжения; класс возможных решений уравнения (7.13а) значительно уже, чем класс решений уравнения (7.2); из него выпали решения, не соответствующие осесимметрической задаче, а среди них находится то, которое соответствует в (7.5) значению  $B \neq 0$ . Интегрируем уравнение равновесия (7.9) и уравнение совместности деформаций (7.13а); умножим первое из них на  $(1 + \sigma_1)$  и сложим со вторым; получим

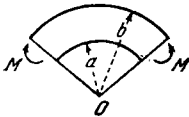


Рис. 70.

откуда

$$\frac{d\Theta_\theta}{dr} + \frac{dR_r}{dr} = 0,$$

$$\Theta_\theta + R_r = 2C_1 \quad \text{или} \quad \Theta_\theta = 2C_1 - R_r.$$

Это позволит из (7.9) исключить  $\Theta_\theta$ , и оно получит вид

$$\frac{dR_r}{dr} + \frac{2(R_r - C_1)}{r} = 0.$$

Интегрируя его, найдем

$$R_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2}; \quad \Theta_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2},$$

что совпадает с (7.8).

Рассмотрим часть круглого кольца, изгибаемую силами, приложенными к концевым сечениям и приводящимися к парам (рис. 70). Условия на поверхности выразятся так:

$$\text{при } r = a \quad R_r = 0;$$

$$\text{при } r = b \quad R_r = 0;$$

$$\int_a^b \Theta_\theta dr = 0; \quad \int_a^b \Theta_\theta r dr = M.$$

Раскрывая эти условия, получим

$$\frac{A}{a^2} + 2B \ln a + B + 2C = 0; \quad \frac{A}{b^2} + 2B \ln b + B + 2C = 0;$$

$$b \left( \frac{A}{b^2} + 2B \ln b + B + 2C \right) - a \left( \frac{A}{a^2} + 2B \ln a + B + 2C \right) = 0;$$

$$-A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + (B + C)(b^2 - a^2) = M.$$

Мы получили четыре уравнения для определения трех постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$ ; однако замечаем, что третье уравнение является следствием первых двух. Решая эти уравнения, найдем

$$A = \frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}; \quad B = \frac{2M}{N} (b^2 - a^2);$$

$$C = -\frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)],$$



где

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Внося эти значения в формулы (7.6), получим такие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{4M}{N} \left( \frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} \right), \\ \Theta_\theta &= \frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 + b^2 \right), \\ \Theta_r &= 0. \end{aligned} \right\} (7.14)$$

Сравнивая результат вычисления напряжения  $\Theta_\theta$  по формулам (7.14) с тем, что дает элементарная теория бруса большой кривизны (гипотеза плоских сечений), можно убедиться в том, что получаемая разница невелика; ее следует отнести за счет того, что элементарная теория не учитывает напряжений  $R_r$ , обусловливаемых нажатием отдельных криволинейных продольных волокон друг на друга; эти напряжения создают дополнительную деформацию бруса \*).

Рассмотрим еще в данной задаче изменение центрального угла  $d\theta$  бесконечно малого элемента  $abcd$  (рис. 71). Так как в данном случае

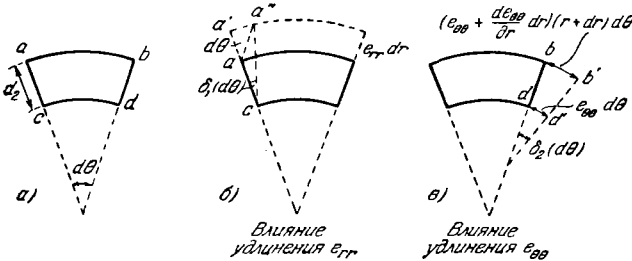


Рис. 71.

сдвиги отсутствуют ( $\Theta_r = 0$ ), то изменение угла  $\delta(d\theta)$  зависит от двух удлинений:  $e_{rr}$  и  $e_{\theta\theta}$ . Рис. 71, б и в ясно показывают влияние обоих этих факторов; из них получаем влияние радиального удлинения  $e_{rr}$  (рис. 71, б):

$$\delta_1(d\theta) = -\frac{a'a''}{ca'} = -\frac{e_{rr} dr d\theta}{dr + e_{rr} dr} \approx -e_{rr} d\theta;$$

влияние осевого удлинения  $e_{\theta\theta}$  (рис. 71, в)

$$\delta_2(d\theta) = \frac{bb' - dd'}{bd},$$

\*) Читатель заметит, что в аналогичном случае чистого изгиба прямого бруса напряжения  $Y_y$ , соответствующие напряжениям  $R_r$  данного случая, отсутствовали [формула (6.28) § 40]; следовательно, в прямом брус при чистом изгибе нет взаимного нажатия отдельных волокон.

но

$$bb' - dd' = \left( e_{\theta\theta} + \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - e_{\theta\theta} r d\theta \approx \\ \approx e_{\theta\theta} dr d\theta + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} dr d\theta; \quad bd = dr;$$

поэтому

$$\delta_2(d\theta) \approx \left( e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} \right) d\theta.$$

Значит, полное изменение угла  $d\theta$  будет

$$\delta(d\theta) = \delta_1(d\theta) + \delta_2(d\theta) = \left( e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - e_{rr} \right) d\theta,$$

а относительное изменение

$$e_{\theta} = \frac{\delta(d\theta)}{d\theta} = e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - e_{rr}.$$

Если сюда вместо деформаций подставим их выражения через напряжения из (V<sub>н</sub>) § 47 и воспользуемся уравнениями (7.14), то легко убедимся, что  $e_{\theta}$  не зависит от радиуса  $r$ . Это, очевидно, покажет, что плоские поперечные сечения в случае чистого изгиба остаются плоскими, и, значит, подтверждается гипотеза плоских сечений, принимаемая обычно в элементарной теории кривого бруса.

### § 49. Действие сосредоточенной силы (Задача Фламана — Буссинеска)

Рассмотрим (рис. 72) однородную упругую среду, ограниченную плоскостью  $AB$  и распространяющуюся беспредельно вниз от этой плоскости. Пусть в точке  $C$  среды приложена сила  $P$ ; в отношении протяжения среды нормально к плоскости чертежа, как и всегда в плоской задаче, могут быть два случая: или это протяжение весьма мало (обобщенное плоское напряженное состояние), или оно беспредельно (плоская деформация); в последнем случае силу  $P$  придется предполагать не сосредоточенной, но равномерно распределенной по прямой, нормальной к плоскости чертежа и проходящей через точку  $C$ .

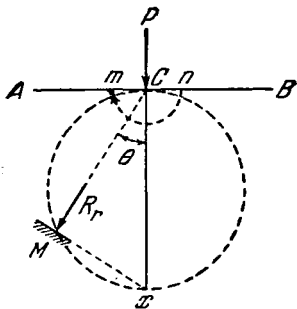


Рис. 72.

Очевидно, что вблизи точки  $C$  напряжения будут весьма велики и превзойдут предел упругости; поэтому мы будем рассматривать лишь точки, расположенные вне небольшой области, ограниченной кругом  $mn$  радиуса  $r$ ; ввиду этого, пользуясь принципом Сен-Венана, груз  $P$  заменим нагрузкой, распределенной по полуокружности  $mn$  и эквивалентной грузу  $P$ ; это мало отразится на напряжениях в точках, удаленных от круга  $mn$ .

Попробуем удовлетворить условиям задачи такими простыми предположениями:

1) в любой точке  $M$  по площадке, нормальной к радиусу  $CM = r$ , нет касательных напряжений;

2) сжимающее нормальное напряжение  $R_r$  по этой площадке обратно пропорционально радиусу  $r$  и прямо пропорционально  $\cos \theta$ ;

3) нормальные напряжения  $\Theta_\theta$  по площадкам радиального направления отсутствуют.

Сделанные предположения приводят к такой системе напряжений:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -k \frac{\cos \theta}{r}, \\ \Theta_\theta &= 0, \\ R_\theta &= \Theta_r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Эти напряжения удовлетворяют условиям задачи на поверхности  $AB$ ; действительно, ограничивающая плоскость  $AB$  ( $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta = 0$ ) свободна от напряжений, кроме точки  $C$ , где  $R_r$  принимает неопределенный вид  $\frac{0}{0}$ ; но точку  $C$  и даже малый полукруг  $mn$  мы исключили из нашего анализа. Далее, коэффициент  $k$  в уравнении (7.15) легко подобрать так, чтобы нормальные напряжения  $R_r$  по полуокружности  $mn$  были эквивалентны заданному грузу  $P$ , т. е. чтобы сумма проекций усилий

$$R_r \rho d\theta$$

по полуокружности  $r = \rho$  на ось  $Ox$  была равна  $P$ :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R_{-r} \rho \cos \theta d\theta = P. \quad (7.16)$$

Подставляя сюда значение  $R_r$  из (7.15) и выполняя интегрирование, легко получим

$$k = \frac{2P}{\pi}. \quad (7.17)$$

Распределение напряжений, определяемое формулами (7.15), иногда называют *простым радиальным распределением* напряжений.

Для того чтобы окончательно принять построенное нами распределение напряжений (7.15), следует проверить, удовлетворяет ли оно дифференциальным уравнениям равновесия ( $I_{\text{III}}$ ) и уравнению совместности деформаций ( $IX'_{\text{II}}$ ). Так как  $\Theta_\theta = R_\theta = 0$ , то уравнения равновесия сводятся к одному:

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{R_r}{r} = 0. \quad (7.18)$$

Подставив в него значение  $R_r$  из (7.15), убедимся, что оно тождественно удовлетворено. Уравнение совместности деформаций  $(IX'_n)$  принимает простой вид:

$$\nabla^2 R_r = \frac{1}{r} \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 R_r}{\partial r^2} = 0.$$

Подстановка в него значения  $R_r$  показывает, что оно также тождественно удовлетворяется.

\* Можно показать, что напряжения (7.15) могут быть получены по формулам (VIII<sub>n</sub>) при помощи функции напряжений

$$\varphi = \frac{k}{2} r \theta \sin \theta. \quad (7.19)$$

Действительно, формулы эти после подстановки в них значений (7.15) переходят в систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -k \frac{\cos \theta}{r}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Последние два из них будут удовлетворены, если положим  $\varphi = rf(\theta)$ . Тогда первое перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''(\theta) + f(\theta) = -k \cos \theta.$$

Общее решение его:

$$\varphi(\theta) = -\frac{k}{2} \theta \sin \theta + A \cos \theta + B \sin \theta,$$

и тогда

$$\varphi = rf(\theta) = -\frac{k}{2} r \theta \sin \theta + Ar \cos \theta + Br \sin \theta.$$

Последние два члена можно отбросить, так как в декартовых координатах они представляют собой линейную функцию

$$Ar \cos \theta + Br \sin \theta = Ax + By,$$

не влияющую на напряжения.

Мы доказали, что напряжения (7.15) удовлетворяют всем уравнениям теории упругости; на основании (7.17) они напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \Theta_\theta &= 0, \quad R_\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Исследуя их, придем к следующим выводам:

1) площадка в любой точке  $M$  (рис. 72), нормальная к радиусу  $r$ , является главной, так как по ней нет касательных напряжений;

2) построим окружность  $CMx$  (рис. 72); проходящую через данную точку  $M$ , и пусть диаметр ее  $Cx = d$ ; тогда

$$CM = Cx \cos \theta;$$

но

$$CM = r; \quad Cx = d;$$

поэтому

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d};$$

подставляя это в (7.20), найдем

$$R_r = \frac{2P}{\pi d} = \text{const.} \quad (7.21)$$

Значит, во всех точках построенной окружности напряжение  $R_r$  одинаково. Отсюда: всякая окружность с центром под грузом  $P$  и проходящая через точку его приложения  $O$  есть траектория равных напряжений  $R_r$  \*).

Найдем теперь напряжения в пластинке по горизонтальной площадке на расстоянии  $x$  от поверхности. Из условий равновесия элементарных призм  $abc$  и  $a_1b_1c_1$  (рис. 73) получим \*\*)

$$\begin{aligned} X_x &= R_r \cos^2 \theta, \\ Y_x &= R_r \sin \theta \cos \theta, \\ Y_y &= R_r \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7.22)$$

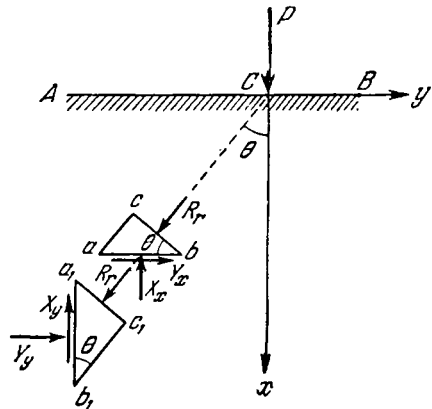


Рис. 73.

Внося сюда значение  $R_r$  из (7.20) и принимая во внимание, что

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (7.23)$$

будем иметь

$$X_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Y_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (7.24)$$

На рис. 74 показан вид эпюр этих напряжений. В практических расчетах принято действие груза  $P$  на заданной глубине  $x$  распределять под некоторым углом; в условиях данной задачи имеем

$$\max X_x = -\frac{P}{\frac{\pi x}{2}} = -\frac{P}{1,57x}.$$

\*) Напоминаем, что при этом исключаются точки внутри полуокружности  $mn$ .

\*\*) Ср. формулы (1.15) § 4.

Значит, для расчета можно условно принять, что груз  $P$  равномерно распределяется на площадку длиной около  $1,6x$ , что соответствует углу  $\theta \approx 38^\circ$  (рис. 75).

Если имеется несколько грузов, приложенных в различных точках прямой  $AB$  (рис. 73), то мы без труда найдем напряжения (7.22)

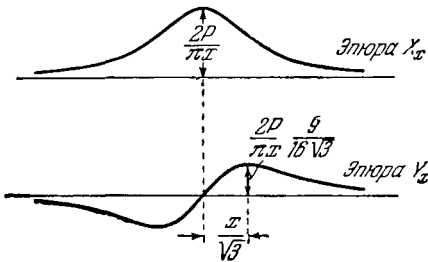


Рис. 74.

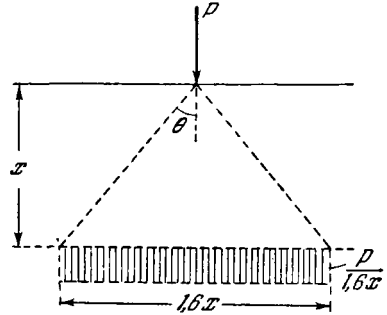


Рис. 75.

в любой точке, суммируя действия отдельных грузов. Далее задачу легко распространить на случай любой сплошной нагрузки (рис. 76).

Если интенсивность нагрузки в данной точке равна  $p$ , то нагрузка, приходящаяся на бесконечно малый элемент  $dy$  прямой  $ab$ , будет  $pdy$ , но из чертежа видим, что

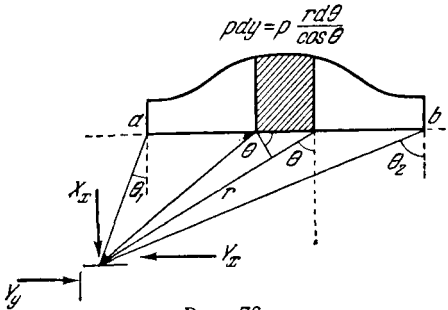


Рис. 76.

$$dy = \frac{r d\theta}{\cos \theta},$$

и элементарная нагрузка равна

$$\frac{pr d\theta}{\cos \theta}. \quad (7.25)$$

Эту величину вносим вместо груза в первое из уравнений (7.20) и получаем

$$R_r = - \frac{2p}{\pi} d\theta.$$

Подставляя это значение  $R_r$  в уравнения (7.22), получим напряжения, вызываемые одним элементом нагрузки (7.25):

$$X_x = - \frac{2p}{\pi} \cos^2 \theta d\theta,$$

$$X_y = - \frac{2p}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

и аналогично

$$Y_y = -\frac{2p}{\pi} \sin^2 \theta d\theta.$$

Значение угла  $\theta$  ясно из чертежа (рис. 76). Если нагрузка распространяется от точки  $a$  ( $\theta = \theta_1$ ) до  $b$  ( $\theta = \theta_2$ ), то, суммируя напряжения от отдельных элементов ее, получим окончательные выражения напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cos^2 \theta d\theta, \\ X_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Из этих формул видно, что нагрузку  $p$  следует предварительно выразить в функции угла  $\theta$ . Если нагрузка равномерная, то  $p$  постоянно; вынося его за знаки интегралов в уравнениях (7.26), можем последние легко взять и получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{p}{2\pi} [2\theta + \sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}, \\ Y_y &= -\frac{p}{2\pi} [2\theta - \sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}, \\ X_y &= Y_x = \frac{p}{2\pi} \cos 2\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Эти формулы можно преобразовать к декартовым координатам  $x$  и  $y$ , приняв во внимание уравнения (7.23) и прибавив к ним

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Задачи о напряжениях в среде, ограниченной плоскостью, в настоящее время приобретают значение в теории оснований и фундаментов для тех видов грунта, которые при не очень больших давлениях сохраняют свойства, близкие к свойствам однородного упругого тела.

### § 50. Кли́н, нагруженный в вершине

Решение (7.15) можно применить к более общей задаче, введя в него еще один произвольный параметр путем замены  $\theta$  через  $(\theta - \theta_0)$ , где  $\theta_0$  — пока произвольный угол. Тогда получим

$$R_r = -k \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{r} = -k \cos \theta_0 \frac{\cos \theta}{r} - k \sin \theta_0 \frac{\sin \theta}{r}. \quad (7.28)$$

Первый член правой части, как мы уже знаем, удовлетворяет всем основным уравнениям плоской задачи. Второй член также удовлетворит им, так как он получится из первого путем поворота полярной оси на  $90^\circ$ , т. е. заменой  $\theta$  на  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ .

Рассмотрим (рис. 77) клин, к вершине которого приложена сила  $P$  произвольного направления. Полярную ось  $Ox$  направим по оси клина. Постоянные  $k$  и  $\theta_0$  (7.28) подберем, как и в § 49, из условия, чтобы нормальные усилия

$$R_{r,\rho} d\theta$$

по дуге  $m\pi$  любого радиуса  $\rho$  были эквивалентны данной силе  $P$ . Проектируя все силы на оси  $Ox$  и  $Oy$ , получим

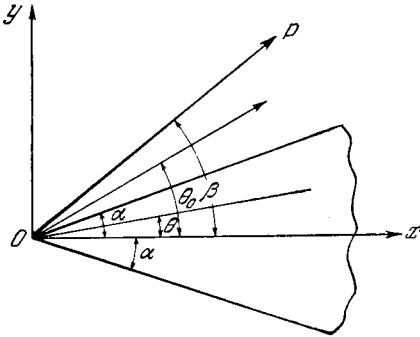


Рис. 77.

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} R_{-r,\rho} d\theta \cos \theta = P \cos \beta;$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} R_{-r,\rho} d\theta \sin \theta = P \sin \beta.$$

Подставляя сюда значение  $R_{-r} = -R_r$  из (7.28), получим такие уравнения для отыскания  $k$  и  $\theta_0$ :

$$k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta = P \cos \beta,$$

$$k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta = P \sin \beta.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, найдем

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \\ A = & \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha), \\ B = & \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$



Внося это в предыдущие уравнения, получаем

$$Ak \cos \theta_0 = P \cos \beta; \quad Bk \sin \theta_0 = P \sin \beta.$$

Отсюда без труда найдем, что

$$\left. \begin{aligned} k &= P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{A^2} + \frac{\sin^2 \beta}{B^2}} \\ \operatorname{tg} \theta_0 &= \frac{A}{B} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Рассматривая формулу (7.28), замечаем, что она имеет тот же вид, как и формула (7.15), но полярный угол в ней ( $\theta_0 - \theta$ ) отсчитывается от некоторого направления  $\theta_0$  (рис. 77), определяемого из второй формулы (7.30); так как вообще

$$\frac{A}{B} \neq 1,$$

то  $\theta_0 \neq \beta$ , и это направление в общем случае не совпадает с направлением груза  $P$ . Если положим  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то вернемся к «полуплоскости», рассмотренной в § 49, но нагруженной наклонной силой (под углом  $\beta$  к нормали к плоскости); тогда из (7.29) и (7.30)

$$A = B = \frac{\pi}{2}; \quad k = \frac{2P}{\pi}; \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \beta; \quad \theta_0 = \beta.$$

Значит,

$$\begin{aligned} R_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos(\theta - \beta)}{r}, \\ R_\theta &= \Theta_r = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $(\theta - \beta)$  есть (рис. 77) полярный угол, отсчитываемый от направления груза  $P$ . Таким образом, решение (7.20) непосредственно пригодно для случая, когда груз  $P$  (рис. 72) приложен не нормально к плоскости  $AB$ , а под любым углом; следует лишь помнить, что полярный угол  $\theta$  всегда отсчитывается от направления груза  $P$ . Следовательно, это решение можно применить к случаю груза, приложенного по направлению  $AB$ ; аналогично предыдущему решению (§ 49) можно решить задачу о сплошной тангенциальной нагрузке по плоскости  $AB$ . Комбинируя случаи нормальной и тангенциальной нагрузок можем решать задачу о любой наклонной сплошной нагрузке.

В качестве примеров на расчет клина возьмем два случая: сжатие клина (рис. 78, а) и изгиб клина силой, приложенной на конце (рис. 78, б).

В первом случае

$$\beta = 0$$

и из уравнений (7.29) и (7.30) имеем

$$\theta_0 = 0; \quad k = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha}.$$

Эти значения  $k$  и  $\theta_0$  надо внести в формулу (7.28).

Аналогично (7.22) можно найти напряжения по сечению клина  $mn$  (рис. 78, а) на глубине  $x_0$ ; нормальное напряжение

$$X_x = - \frac{kx_0^3}{(x_0^2 + y^2)^2}.$$

Если через  $\omega$  (рис. 78, а) обозначим угол наклона радиуса-вектора

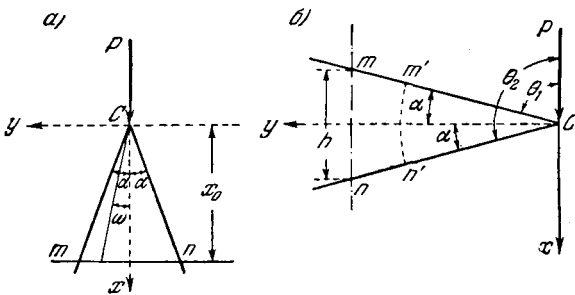


Рис. 78.

точки  $(x_0, y)$  в сечении  $mn$ , то предыдущую формулу можно написать так:

$$X_x = - \frac{k}{x_0} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega)^2}, \quad (7.31)$$

где

$$-\alpha \leq \omega \leq \alpha.$$

В случае острого клина (угол  $\alpha$  мал) напряжение  $X_x$  мало отклоняется от величины

$$X_x = - \frac{k}{x_0} = - \frac{2P}{(2\alpha + \sin 2\alpha) x_0},$$

т. е. распределение напряжений по сечению  $mn$  почти равномерно. Если же клин тупой (угол  $\alpha$  не мал), то напряжения распределены весьма неравномерно; например, при  $\alpha = 45^\circ$   $X_x$  меняется в пределах

$$\text{от } -\frac{k}{x_0} \text{ до } -\frac{k}{4x_0}.$$

В случае изгиба (рис. 78, б) имеем

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

и из уравнений (7.29) и (7.30)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}; \quad k = \frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Из (7.28) имеем

$$R_r = -k \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r} = -k \frac{\sin \theta}{r}.$$

Но  $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$  есть полярный угол, отсчитываемый от направления груза; значит, и в этом случае остается в силе решение (7.15), где  $k$  имеет найденное сейчас значение. Напряжения по сечению  $mn$ , как и выше, найдем аналогично (7.22), пользуясь уравнениями (7.15), но помня, что угол  $\theta_1$  согласно сказанному сейчас следует отсчитывать от направления груза, как это показано на рис. 78, б. Напряжения по поперечному сечению  $mn$  в этом случае выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} Y_y &= -\frac{2Mx \sin^4 \theta}{(2\alpha - \sin 2\alpha) y^3}, \\ X_y &= -\frac{2Px^2 \sin^4 \theta}{(2\alpha - \sin 2\alpha) y^3}, \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

где  $M = Py$  — величина изгибающего момента в сечении.

Если угол клина  $2\alpha$  мал, то, разлагая  $\sin 2\alpha$  в ряд, получим приближенно

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}.$$

При этом после некоторых преобразований формулы напряжений могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} Y_y &= -\frac{Mx}{J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta, \\ X_y &= -\frac{12Px^2}{h^3} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

где  $h$  — высота сечения  $mn$ ,  $J$  — его момент инерции. При малом  $\alpha$  величина  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$  близка к единице; кроме того, так как

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

то при малом  $\alpha$  угол  $\theta$  близок всюду к  $\frac{\pi}{2}$  и  $\sin \theta \cong 1$ . Поэтому легко усмотреть, что величина нормального напряжения  $Y_y$  в уравнении (7.33) близка к тому, что нам дает элементарное решение. Распределение касательных напряжений существенно отличается от элементарного результата по формуле

$$X_y = \frac{QS}{Jb};$$

из уравнений (7.33) видно, что они обращаются в нуль на оси клина (при  $x=0$ ) и достигают наибольшей величины на краях сечения. Однако если вместо плоского сечения  $mn$  сделаем сечение бруса цилиндрической поверхностью, показанной на чертеже другой  $m'n'$  с центром в  $C$ , то, очевидно, в этом сечении касательных напряжений вообще не будет.

### \* § 51. Общее решение плоской задачи в полярных координатах

Будем искать частные решения основного дифференциального уравнения (VIII<sub>п</sub>) плоской задачи, пользуясь методом разделения переменных, примененным в § 44 к уравнению (IX):

$$\nabla^2(\nabla^2\varphi) = 0, \quad (7.34)$$

где для полярных координат

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad (7.35)$$

будем искать решения его в форме

$$\varphi = rR\Theta, \quad (7.36)$$

где  $R$  — функция от одной переменной  $r$ , а  $\Theta$  — функция от одной переменной  $\theta$ . Множитель  $r$  в (7.36) введен для удобства дальнейших выкладок.

Для подстановки в (7.35) и (7.34) вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \left( \frac{R}{r} + R' \right) \Theta, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= (2R' + rR'') \Theta, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{r} R\Theta''. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$\nabla^2\varphi = \frac{R}{r} \Theta'' + \left( rR'' + 3R' + \frac{R}{r} \right) \Theta, \quad (7.37)$$

или

$$\nabla^2\varphi = \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1 = r \frac{R}{r^2} \Theta'', \quad (7.38)$$

$$\psi_2 = r \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right) \Theta. \quad (7.39)$$

Значит,

$$\nabla^2(\nabla^2\varphi) = \nabla^2\psi_1 + \nabla^2\psi_2. \quad (7.40)$$

Но выражения  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют такую же структуру, как и  $\varphi$  в (7.36); поэтому мы вычислим

$$\nabla^2\psi_1 \quad \text{и} \quad \nabla^2\psi_2$$

по прежней формуле (7.37), если в ней: при вычислении  $\nabla^2\psi_1$  заменим  $R$  на  $\frac{R}{r^2}$  и  $\Theta$  на  $\Theta''$ , а при вычислении  $\nabla^2\psi_2$  заменим  $R$  на  $R'' + 3\frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2}$  и  $\Theta$  оставим без замены.

Таким путем получим

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi_1 &= \frac{R}{r^3} \Theta^{IV} + \left[ r \left( \frac{R}{r^2} \right)'' + 3 \left( \frac{R}{r^2} \right)'' + \frac{R}{r^3} \right] \Theta'', \\ \nabla^2\psi_2 &= \left( \frac{R''}{r} + 3 \frac{R'}{r^2} + \frac{R}{r^3} \right) \Theta'' + \left[ r \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right)'' + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right)' + \frac{1}{r} \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right) \right] \Theta. \end{aligned}$$

Остается выполнить дифференцирование выражений

$$\frac{R}{r^2} \quad \text{и} \quad \left( R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right),$$

показанное штрихами в квадратных скобках, и результаты подставить в (7.40). Сделав эти выкладки, напомним уравнение (7.34) в следующем виде (умножив обе части его на  $r^3$ ):

$$R\Theta^{IV} + 2A\Theta'' + B\Theta = 0, \quad (7.41)$$

где введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= R''r^2 + R'r + R, \\ B &= R^{IV}r^4 + 6R'''r^3 + 5R''r^2 - R'r + R. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

В уравнении (7.41) переменные легко разделяются; деля обе части его на  $R$ , найдем

$$\Theta^{IV} + 2\frac{A}{R}\Theta'' + \frac{B}{R}\Theta = 0, \quad (7.43)$$

и дифференцируя частным образом по  $r$ , получим

$$2\left(\frac{A}{R}\right)'\Theta'' + \left(\frac{B}{R}\right)'\Theta = 0. \quad (7.44)$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\left(\frac{A}{R}\right)' \neq 0. \quad (7.45)$$

В этом случае, деля обе части (7.44) на  $2\left(\frac{A}{R}\right)'\Theta$ , получим

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{\left(\frac{B}{R}\right)'}{2\left(\frac{A}{R}\right)'} = -m^2;$$

здесь  $m$  — постоянное число. Переменные разделены:

$$\Theta'' + m^2\Theta = 0; \quad (7.46)$$

$$\left(\frac{B}{R}\right)' - 2m^2 \left(\frac{A}{R}\right)' = 0. \quad (7.46a)$$

Общее решение (7.46) известно:

$$\Theta = D_{m1} \cos m\theta + D_{m2} \sin m\theta. \quad (7.47)$$

Далее имеем

$$\Theta'' = -m^2\Theta,$$

$$\Theta^{IV} = -m^2\Theta'' = m^4\Theta.$$

Подставляя это в (7.41), имеем

$$Rm^4 - 2Am^2 + B = 0$$

или, раскрывая это при помощи (7.42), получим

$$R^{IV}r^4 + 6R'''r^3 + (5 - 2m^2)R^2r^2 - \\ - (1 + 2m^2)R'r + (1 - m^2)^2R = 0. \quad (7.48)$$

Решения уравнения (7.48) ищем в форме

$$R = r^n. \quad (7.49)$$

Внося это в (7.48) и сокращая его на  $r^n$ , получим после упрощений следующее характеристическое уравнение:

$$n^4 - 2(m^2 + 1)n^2 + (m^2 - 1)^2 = 0.$$

Четыре корня его будут

$$n_1 = m + 1; \quad n_2 = m - 1; \quad n_3 = -m + 1; \quad n_4 = -m - 1. \quad (7.50)$$

Будем давать  $m$  целые положительные значения; если при этом  $m \neq 0$  и  $m \neq 1$ , то среди корней (7.50) нет кратных, и мы получим из (7.49) четыре линейно независимых частных решения уравнения (7.48); тогда при  $m = 2, 3, 4, \dots$  получим следующее общее решение этого уравнения:

$$R = C_{m1}r^{m+1} + C_{m2}r^{m-1} + C_{m3}r^{-m+1} + C_{m4}r^{-m-1},$$

где  $C_{mk}$  — произвольные постоянные. Внося это и (7.47) в (7.36) и суммируя по  $m$ , получим

$$\varphi = \sum_{m=2}^n (C_{m1}r^{m+2} + C_{m2}r^m + C_{m3}r^{-m+2} + \\ + C_{m4}r^{-m}) (D_{m1} \cos m\theta + D_{m2} \sin m\theta). \quad (7.51)$$

Рассмотрим теперь случаи, когда 1)  $m = 0$ , 2)  $m = 1$ . В первом случае уравнение (7.46) заменяется таким:  $\Theta'' = 0$ , откуда

$$\Theta = D_{01}\theta + D_{02}.$$

Корни (7.50) будут кратными:  $n_1 = n_3 = 1$ ;  $n_2 = n_4 = -1$ ; они дадут четыре независимых решения уравнения (7.48):

$$r; \quad r \ln r; \quad \frac{1}{r}; \quad \frac{1}{r} \ln r.$$

Общим решением его будет

$$R = C_{01}r + C_{02}r \ln r + C_{03} \frac{1}{r} + C_{04} \frac{1}{r} \ln r.$$

Согласно (7.36) функция  $\varphi$  будет

$$\varphi_0 = (C_{01}r^2 + C_{02}r^2 \ln r + C_{03} + C_{04} \ln r)(D_{01}\theta + D_{02}). \quad (7.52)$$

Во втором случае ( $m = 1$ ) общее решение (7.47) уравнения (7.46) имеет вид

$$\Theta = D_{11} \cos \theta + D_{12} \sin \theta$$

и корни (7.50) переходят в такие:  $n_1 = 2$ ;  $n_4 = -2$ ;  $n_2 = n_3 = 0$ . Им соответствуют четыре независимых решения уравнения (7.48);

$$r^2; \quad \frac{1}{r^2}; \quad 1; \quad \ln r.$$

Общее решение уравнения (7.48) тогда будет таким:

$$R = C_{11}r^2 + C_{12} \frac{1}{r^2} + C_{13} + C_{14} \ln r.$$

Функция  $\varphi_1$  согласно (7.36) будет

$$\varphi_1 = \left( C_{11}r^3 + C_{12} \frac{1}{r} + C_{13}r + C_{14}r \ln r \right) (D_{11} \cos \theta + D_{12} \sin \theta). \quad (7.53)$$

Однако здесь можно положить  $C_{13} = 0$ , ибо  $r \cos \theta = x$ ,  $r \sin \theta = y$ ; следовательно, получается функция первой степени в декартовых координатах.

Таким образом, если согласно (7.45)

$$\left( \frac{A}{R} \right)' \neq 0,$$

то это приводит к трем типам решения: (7.51), (7.52), (7.53).

Обратимся теперь к случаю

$$\left( \frac{A}{R} \right)' = 0 \quad \text{или} \quad A = c_1 R, \quad (7.54)$$

где  $c_1$  — произвольная постоянная. При этом уравнение (7.44) принимает вид

$$\left( \frac{B}{R} \right)' \Theta = 0,$$

откуда или  $\left( \frac{B}{R} \right)' = 0$ , т. е.

$$B = c_2 R, \quad (7.55)$$

или  $\Theta = 0$ ; но этот тривиальный случай интереса не представляет, и мы его отбросим, так как он согласно (7.36) приводит к решению

$$\varphi \equiv 0.$$

На основании (7.54) и (7.55) основное уравнение (7.41) приводится к виду

$$\Theta^{IV} + 2c_1\Theta'' + c_2\Theta = 0. \quad (7.56)$$

Сюда добавляем (7.54) и (7.55):

$$A - c_1R = 0; \quad B - c_2R = 0,$$

а раскрыв их с помощью (7.42), получаем

$$\left. \begin{aligned} R''r^2 + R'r + (1 - c_1)R &= 0, \\ R^{IV}r^4 + 6R'''r^3 + 5R''r^2 - R'r + (1 - c_2)R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  должны быть подобраны так, чтобы уравнения (7.57) имели решения, общие для них обоих, и в дальнейшем можно пользоваться, конечно, только этими общими решениями; будем искать их в форме

$$R = r^m. \quad (7.58)$$

Подставляя это в (7.57), получим два характеристических уравнения:

$$m^2 + 1 = c_1; \quad (m^2 - 1)^2 = c_2.$$

Внося эти значения  $c_1$  и  $c_2$  в (7.56) и (7.57), приведем их к виду

$$\Theta^{IV} + 2(m^2 + 1)\Theta'' + (m^2 - 1)^2\Theta = 0, \quad (7.59)$$

$$\left. \begin{aligned} R''r^2 + R'r - m^2R &= 0, \\ R^{IV}r^4 + 6R'''r^3 + 5R''r^2 - R'r + [1 - (m^2 - 1)^2]R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

Решения

$$r^m \text{ и } r^{-m} \quad (7.61)$$

будут удовлетворять обоим уравнениям (7.60) (так как последние не меняются при замене  $m$  на  $-m$ ). Решение уравнения (7.59) ищем в форме  $\Theta = e^{k\theta}$ . Характеристическое уравнение будет

$$k^4 + 2(m^2 + 1)k^2 + (m^2 - 1)^2 = 0,$$

откуда

$$k^2 = -(m^2 + 1) \pm 2m = -(m \pm 1)^2 = (m \pm 1)^2 i^2,$$

т. е.

$$k = \pm (m \pm 1) i. \quad (7.62)$$

Если

$$m \neq 0; \quad m \neq 1, \quad (7.63)$$

то (7.62) дает четыре различных корня и (7.59) имеет четыре частных решения вида

$$\cos(m + 1)\theta; \quad \sin(m + 1)\theta; \quad \cos(m - 1)\theta; \quad \sin(m - 1)\theta. \quad (7.64)$$



Комбинируя их с (7.61), заметим, что при этом получим согласно (7.36) значения функции  $\varphi$ , совпадающие с теми, из которых составлено уже полученное ранее решение (7.51); значит, в случае (7.63) наше исследование не даст новых решений.

Остается исследовать случаи: 1)  $m = 0$ , 2)  $m = 1$ . При рассмотрении этих случаев будем для большей наглядности повторно искать решения уравнений (7.60) в форме

$$R = r^n.$$

Получим такие характеристические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= m^2, \\ (n^2 - 1)^2 &= (m^2 - 1)^2; \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

они имеют совместное решение:  $n_1 = m$ ;  $n_2 = -m$ . При  $m = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 0$  имеем два частных решения:

$$r^0 = 1; \quad r^0 \ln r = \ln r.$$

Следовательно,

$$R = \bar{C}_{01} + \bar{C}_{02} \ln r. \quad (7.66)$$

Уравнение (7.59) напишется так:

$$\Theta^{IV} + 2\Theta'' + \Theta = 0.$$

Характеристическое уравнение его  $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$  имеет два двукратных корня:  $k_1 = i$ ;  $k_2 = -i$ , дающих четыре частных решения:

$$\cos \theta; \quad \sin \theta; \quad \theta \cos \theta; \quad \theta \sin \theta. \quad (7.67)$$

Пользуясь (7.66) и (7.67), строим функцию напряжений

$$\varphi = (\bar{D}_{01} \cos \theta + \bar{D}_{02} \sin \theta + \bar{D}_{03} \theta \cos \theta + \bar{D}_{04} \theta \sin \theta) (\bar{C}_{01} r + \bar{C}_{02} r \ln r).$$

По сравнению с (7.53) здесь обнаруживаются новые решения:

$$\bar{\varphi}_0 = (\bar{C}_{01} r + \bar{C}_{02} r \ln r) (\bar{D}_{03} \theta \cos \theta + \bar{D}_{04} \theta \sin \theta). \quad (7.68)$$

Перейдем ко второму случаю  $m = 1$ . Уравнения (7.65) имеют корни  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = -1$ , дающие два решения:

$$r; \quad \frac{1}{r}. \quad (7.69)$$

Уравнение (7.59) напишется так:

$$\Theta^{IV} + 4\Theta'' = 0.$$

Общим его решением будет

$$\Theta = \bar{D}_{11} \cos 2\theta + \bar{D}_{12} \sin 2\theta + \bar{D}_{13} \theta + \bar{D}_{14}. \quad (7.70)$$

Выражения (7.69) и (7.70) дают такую функцию напряжений:

$$\varphi = (\bar{C}_{11} r^2 + \bar{C}_{13}) (\bar{D}_{11} \cos 2\theta + \bar{D}_{12} \sin 2\theta + \bar{D}_{13} \theta + \bar{D}_{14}).$$

Сравнивая это с (7.51) и (7.52), заметим, что новых решений мы здесь не получим.

Подводя итог проделанному интегрированию основного дифференциального уравнения плоской задачи (7.34), получаем окончательное значение функции напряжений как сумму решений (7.51), (7.52), (7.53), (7.68). Очевидно, что в формуле (7.51) и остальных перечисленных можно, не уменьшая общности, положить все коэффициенты  $D$  равными единице; каждый член суммы (7.51) можно заменить двумя, собирая коэффициенты при  $\cos m\theta$  и  $\sin m\theta$ ; при этом постоянные  $C_{mk}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) можно взять различными в обоих случаях; то же можно сказать и о формулах (7.52), (7.53) и (7.68).

Таким путем получим

$$\varphi = {}_1\varphi_0 + {}_2\varphi_0 + {}_1\varphi_1 + {}_2\varphi_1 + \bar{{}_1\varphi}_0 + \bar{{}_2\varphi}_0 + {}_1\varphi_m + {}_2\varphi_m, \quad (7.71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} {}_1\varphi_0 &= C_{01}r^2 + C_{02}r^2 \ln r + C_{03} + C_{04} \ln r, \\ {}_2\varphi_0 &= (C'_{01}r^2 + C'_{02}r^2 \ln r + C'_{03} + C'_{04} \ln r) \theta, \\ {}_1\varphi_1 &= \left( C_{11}r^3 + C_{12} \frac{1}{r} + C_{13}r + C_{14}r \ln r \right) \cos \theta, \\ {}_2\varphi_1 &= \left( C'_{11}r^3 + C'_{12} \frac{1}{r} + C'_{13}r + C'_{14}r \ln r \right) \sin \theta, \\ \bar{{}_1\varphi}_0 &= (\bar{C}_{01}r + \bar{C}_{03}r \ln r) \theta \cos \theta, \\ \bar{{}_2\varphi}_0 &= (\bar{C}_{01}r + \bar{C}_{02}r \ln r) \theta \sin \theta, \\ {}_1\varphi_m &= \sum_{n=2}^n (C_{m1}r^{m+2} + C_{m2}r^m + C_{m3}r^{-m+2} + C_{m4}r^{-m}) \cos m\theta, \\ {}_2\varphi_m &= \sum_{n=2}^n (C'_{m1}r^{m+2} + C'_{m2}r^m + C'_{m3}r^{-m+2} + C'_{m4}r^{-m}) \sin m\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.72)$$

Здесь можно положить  $C_{03} = C_{13} = C'_{13} = 0$ , так как выражения функции  $\varphi$ , соответствующие этим постоянным, не дают напряжений. Выражение функции (7.71) было найдено Мичеллом, за исключением членов

$$C'_{02}r^2 \ln r \cdot \theta; \quad C'_{04} \ln r \cdot \theta; \quad \bar{C}_{02}r \ln r \cdot \theta \cos \theta; \quad C_{02}r \ln r \cdot \theta \sin \theta, \quad (7.73)$$

не вошедших в данное им выражение \*).

\* Наиболее полный перечень частных решений уравнения (7.34), содержащий как эти решения, так и еще два: вида  $\cos(m \ln r) \operatorname{ch} m\theta$ ;  $r^2 \cos(m \ln r) \operatorname{ch} m\theta$ , имеется в книге К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, М., 1950.

Соответственные этим членам компоненты напряженного состояния в полярных координатах будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для } \varphi = C'_{04} \ln r \theta \\ R_r = C'_{04} \frac{A\theta}{r^2}, \\ \Theta_\theta = -C'_{04} \frac{\theta}{r^2}, \\ R_\theta = C'_{04} \frac{\ln r - 1}{r^2}. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Для } \varphi = C'_{02} r^2 \ln r \theta \\ R_r = C'_{02} (2 \ln r + 1) \theta, \\ \Theta_\theta = C'_{02} (2 \ln r + 3) \theta, \\ R_\theta = -C'_{02} (\ln r + 1). \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для } \varphi = C_{02} r \ln r \cdot \theta \sin \theta \\ R_r = C_{02} \left( \frac{2 \ln r}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \theta \sin \theta \right), \\ \Theta_\theta = C_{02} \frac{1}{r} \theta \sin \theta, \\ R_\theta = -C_{02} \left( \frac{1}{r} \sin \theta + \frac{1}{r} \theta \cos \theta \right). \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для } \varphi = \bar{C}_{02} r \ln r \theta \cos \theta \\ R_r = \bar{C}_{02} \left( \frac{1}{r} \theta \cos \theta - \frac{2 \ln r}{r} \sin \theta \right), \\ \Theta_\theta = \bar{C}_{02} \frac{1}{r} \theta \cos \theta, \\ R_\theta = -\bar{C}_{02} \left( \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{1}{r} \theta \sin \theta \right). \end{array} \right\}$$

Если полюс полярной системы координат лежит внутри исследуемого тела, то все эти функции оказываются многозначными и ими пользоваться нельзя; однако в односвязной области эти компоненты однозначны, если полюс координатной системы помещен вне упругого тела или на границе его.

Из решения (7.71) в настоящей главе были использованы лишь некоторые начальные члены. Действительно, в обеих задачах § 48 решение основано на функции [ср. формулы (7.5)]

$${}_1\varphi_0 = C_{01} r^2 + C_{02} r^2 \ln r + C_{04} \ln r.$$

В задачах §§ 48—50 использованы частично функции  $\bar{{}_1\varphi}_0$  и  $\bar{{}_2\varphi}_0$  [ср. формулу (7.19)]. Остальные члены функции (7.71) позволяют решать много важных задач, относящихся к расчету клина и замкнутого кольца\*). Соответственные решению (7.72) напряжения найдутся по формулам (VII<sub>п</sub>).

\*) См. С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1934, и П. Ф. Папко-вич, Теория упругости, 1939.

## ГЛАВА VIII

### КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ И ИЗГИБ

#### § 52. Кручение призматических стержней

Рассмотрим задачу о кручении призматического или цилиндрического стержня (с поперечным сечением произвольной формы) парами сил, лежащими в плоскостях его крайних сечений. Влиянием собственного веса стержня пренебрегаем, т. е. принимаем в уравнениях (VI) (§ 25)  $X = Y = Z = 0$ .

Будем решать задачу в перемещениях (§ 25) и воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана, т. е. зададим часть перемещений, а остальные найдем из уравнений Ламе (VI) и из условий на поверхности (II) или (VIa).

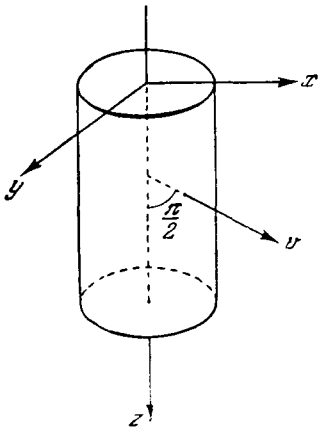


Рис. 79.

Оси координат возьмем согласно рис. 79 и, следуя Сен-Венану, предположим, что перемещения  $u$  и  $v$  имеют такие же значения, как и в случае стержня круглого поперечного сечения [формулы (5.19) § 30]:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau yz, \\ v &= \tau xz. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

От предположения  $w = 0$ , имевшего место для круглого сечения, придется отказаться, так как этим мы введем гипотезу о том, что плоские поперечные сечения стержня остаются при кручении плоскими; между тем такая гипотеза в общем случае произвольного поперечного сечения не может иметь места\*); в соответствии с этим положим, что

$$w = \tau \varphi(x, y), \quad (8.2)$$

где функция  $\varphi$  изображает форму искривленной поверхности поперечного сечения; ее называют *функцией кручения*. Она принята

\*) Это будет доказано в конце настоящего параграфа.

не зависящей от  $z$ , т. е. предположено, что все поперечные сечения искривляются одинаково.

Необходимо прежде всего проверить, удовлетворяют ли предположения (8.1) и (8.2) уравнениям Ламе (VI), и определить функцию  $\varphi$  так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности стержня, соответствующие поставленной задаче о кручении его. Для подстановки в уравнения (VI) вычисляем, пользуясь (8.1) и (8.2):

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \nabla^2 u &= 0; \quad \nabla^2 v = 0; \quad \nabla^2 w = \tau \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

При этом первые два из уравнений (VI) удовлетворяются тождественно, а последнее получает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.4)$$

Это есть уравнение Лапласа на плоскости; следовательно,  $\varphi(x, y)$  должна быть гармонической функцией. Для разыскания ее необходимо к (8.4) присоединить условия на поверхности (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz), \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz), \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Пользуясь (8.1), (8.2), (8.3), уравнениями Коши (III) и законом Гука ( $V'$ ), вычисляем компоненты тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad X_y = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0; \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \mu\tau \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \\ Y_z &= \mu\tau \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Значит, при наших предположениях (8.1) и (8.2) в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения, и притом одинаково распределенные во всех сечениях.

Рассмотрим граничные условия (8.5), применяя их сначала к боковой цилиндрической поверхности стержня, которая по условиям задачи свободна от напряжений, т. е.  $X_v = Y_v = Z_v = 0$ . На этой поверхности (рис. 79)  $\cos(vz) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Учтя еще (8.6),

заметим, что первые два из условий (8.5) будут удовлетворены тождественно, а третье примет вид

$$X_z \cos(vx) + Y_z \cos(vy) = 0.$$

Смысл этого условия весьма прост: если через  $T$  обозначим полное касательное напряжение в данной точке, то

$$X_z = T \cos(tx); \quad Y_z = T \cos(ty),$$

и тогда из предыдущего равенства получим

$$T [\cos(tx) \cos(vx) + \cos(ty) \cos(vy)] = 0$$

или проще:

$$T \cos(tv) = 0, \quad \text{т. е. } \cos(tv) = 0.$$

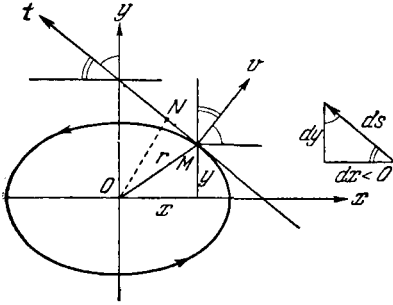


Рис. 80.

Значит, касательное напряжение в точке  $y$  контура сечения направлено параллельно касательной к контуру сечения в этой точке; такое условие непосредственно вытекает из закона взаимности касательных напряжений, поскольку боковая поверхность стержня свободна от усилий.

Выразим теперь условие на контуре сечения через функцию кручения  $\varphi$  при помощи (8.7). По умножении на дифференциал дуги контура  $ds^*$  получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) \cos(vx) ds + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \cos(vy) ds = 0. \quad (8.8)$$

Но из рис. 80 имеем

$$ds \cos(vx) = dy; \quad ds \cos(vy) = -dx,$$

и потому из (8.8)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dy - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) dx = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = x dx + y dy. \quad (8.9)$$

Это и есть граничное условие (условие на контуре сечения), которое необходимо присоединить к (8.4) для нахождения гармонической функции  $\varphi(x, y)$ .

\*) Считаем, что дуга возрастает, т. е.  $ds > 0$  при движении влево, помеченном стрелкой на рис. 80.

Условие на контуре поперечного сечения (8.8) можно представить в другой форме; напишем его так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos (ux) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos (vy) = y \cos (ux) - x \cos (vy).$$

Левая часть представляет собой производную функции  $\varphi$  по нормали к контуру [ср. вывод условия (VIa) в § 25]. Для преобразования правой части заметим, что из рис. 80

$$\cos (vx) = \cos (ty); \quad \cos (vy) = -\cos (tx),$$

где  $t$  — касательная к контуру сечения; далее,

$$\begin{aligned} x &= r \cos (rx), \\ y &= r \cos (ry), \end{aligned}$$

где  $r$  — радиус-вектор точки  $M$  контура.

Поэтому

$$y \cos (vx) - x \cos (vy) =$$

$$= r [\cos (rx) \cos (tx) + \cos (ry) \cos (ty)] = r \cos (rt) = \overline{MN},$$

где  $\overline{MN}$  (рис. 80) — проекция радиуса-вектора  $r$  на касательную  $t$ . На этом основании условие на контуре сечения (8.8) получает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = r \cos (rt). \quad (8.10)$$

Этим условием определяется значение производной по нормали

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

в каждой точке контура; таким образом, задача о разыскании функции кручения  $\varphi(x, y)$  сводится к классической задаче Неймана об определении гармонической функции по заданным на контуре значениям нормальной ее производной.

Решение задачи о кручении примет изящную форму и откроет новые возможности, если в дополнение к гармонической функции  $\varphi(x, y)$  введем другую, сопряженную с ней гармоническую функцию  $\psi(x, y)$ , так что эти две функции удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Внося это в условие на контуре сечения (8.9), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = x dx + y dy,$$

или

$$d\psi = d \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Интегрируя, получим

$$\psi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C, \quad (8.12)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Очевидно, (8.12) есть уравнение того контура поперечного сечения, при котором получатся перемещения (8.1) и (8.2), т. е.

$$u = -\tau yz; \quad v = \tau xz; \quad w = \tau\varphi(x, y).$$

Можно сказать, что уравнение (8.12) задает значения функции  $\psi(x, y)$  на контуре сечения

$$\psi = \frac{r^2}{2} + C, \quad (8.13)$$

где по-прежнему  $r$  — радиус-вектор точки контура. Значит, для функции  $\psi(x, y)$  ставится другая классическая задача, именно задача Дирихле: найти гармоническую функцию по заданным значениям этой функции на контуре сечения.

Теперь необходимо показать, что найденное решение действительно соответствует чистому кручению стержня. Уже доказано, что боковая цилиндрическая поверхность стержня свободна от напряжений. Силы, приложенные в поперечных сечениях, дают лишь касательные напряжения (8.7); остается показать, что эти силы приводятся к паре, т. е. не дают равнодействующей, или, другими словами, главный вектор их равен нулю.

Если в (8.7) функцию  $\varphi$  заменим сопряженной с ней функцией  $\psi$  согласно условиям Коши—Римана (8.11), то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right), \\ Y_z &= -\mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - x \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Введем новую функцию

$$\Phi(x, y) = \mu\tau \left( \psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad (8.15)$$

и заметим, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - x \right); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \mu\tau \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right);$$

тогда из (8.14) получим следующие простые формулы для касательных напряжений в поперечном сечении:

$$X_z = \frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad Y_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \quad (8.16)$$

Функция  $\Phi$  предложена Прандтлем и, по аналогии с функцией Эри в плоской задаче, называется функцией напряжений. Важно



отметить, что согласно (8.12) эта функция во всех точках контура сохраняет постоянное, хотя и произвольное значение

$$\Phi = C_{\text{п.т.}} \quad (8.17)$$

Подсчитаем проекцию главного вектора касательных сил в поперечном сечении на ось  $Ox$ :

$$\begin{aligned} X_T &= \int_F X_z dF = \int_{(F)} \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx [\Phi(y_1) - \Phi(y_0)] = 0, \end{aligned}$$

так как  $\Phi(y_1)$  и  $\Phi(y_0)$  — значения функции напряжений в двух точках контура — одинаковые согласно (8.17). Совершенно так же можно показать, что другая проекция  $Y_T$  главного вектора обращается в нуль. Этим доказано, что решение задачи, проделанное выше, соответствует чистому кручению стержня.

Для завершения решения задачи следует выразить крутящий момент  $M_k$  через касательные силы в сечении. Получим

$$M_k = \int_{(F)} (Y_z x - X_z y) dF = - \int_{(F)} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF - \int y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dF. \quad (8.18)$$

Вычислим первый из интегралов правой части

$$\int_{(F)} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF = \int_{(F)} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx.$$

Применяя к внутреннему интегралу интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx &= \int_{y_0}^{y_1} dy \left[ x \Phi \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx \right] = \\ &= \int dy \left[ x_1 \Phi(x_1, y) - x_0 \Phi(x_0, y) - \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx \right]. \quad (8.19) \end{aligned}$$

Но

$$\Phi(x_1, y) \quad \text{и} \quad \Phi(x_0, y)$$

являются значениями функции  $\Phi$  на контуре сечения, определяемыми формулой (8.17); значение постоянной  $C$  не отразится на величине крутящего момента (8.18), так как эта величина не изменится, если  $\Phi$  заменим на  $\Phi + C_1$ , где  $C_1$  — также произвольная постоянная. Если поперечное сечение односвязное, т. е. ограничено одним

замкнутым контуром, то можно для простоты в (8.17) положить  $C = 0$ ; тогда

$$\Phi(x_1, y) = \Phi(x_0, y) = 0$$

и (8.19) дает

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = - \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx = - \int_{(F)} \int \Phi dF.$$

Проведя такие же рассуждения в отношении второго интеграла правой части (8.18), найдем для него то же значение. Таким образом, окончательно

$$M_k = + 2 \int_{(F)} \int \Phi dF, \quad (8.20)$$

или

$$M_k = + 2\mu\tau \int_{(F)} \int \left( \psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dF. \quad (8.21)$$

Если крутящий момент задан, то отсюда можно определить единственный угол кручения  $\tau$ :

$$\tau = \frac{M_k}{\mu K}, \quad (8.22)$$

где

$$K = \int_{(F)} (2\psi - x^2 - y^2) dF \quad (8.23)$$

зависит от размеров и формы контура сечения и представляет собой геометрическую характеристику сечения. Величина  $\mu K$  есть жесткость стержня на кручение.

Из проделанного решения можно сделать важный вывод о пределах приложимости теории кручения, данной Кулоном и основанной на предположении, что плоские поперечные сечения стержня остаются плоскими. Действительно, в этом случае

$$\omega = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi(x, y) = \text{const}.$$

Тогда из (8.11) найдем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

значит,

$$\psi(x, y) = \text{const} = C.$$

Подставляя это в уравнение контура сечения (8.12), получим

$$x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Следовательно, поперечное сечение есть круг. Ко всяким другим сечениям теория Кулона неприменима, и поперечные сечения при кручении будут искривляться.

### § 53. Метод Сен-Венана. Частные случаи

Связь, устанавливаемая уравнениями (8.11) между функцией кручения  $\varphi(x, y)$  и функцией  $\psi(x, y)$ , определяющей согласно (8.12) контур соответствующего поперечного сечения, позволила Сен-Венану предложить следующий изящный прием решения ряда частных задач.

Возьмем какую-либо аналитическую функцию  $f(z)$  комплексной переменной

$$z = x + iy$$

и отделим в ней действительную и мнимую часть:

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y);$$

функции  $U$  и  $V$  будут гармоническими, и притом они удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy}; \quad \frac{dU}{dy} = -\frac{dV}{dx}.$$

Положим поэтому  $\varphi = U$ ;  $\psi = V$ . Тогда, если уравнение

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$$

выражает какую-либо замкнутую кривую, то оно даст контур поперечного сечения стержня, а функция  $U$  будет соответствующей функцией кручения, так что уравнение

$$W = \tau U(x, y)$$

определит перемещение в направлении оси  $z$ , т. е. даст искривление плоского поперечного сечения. Напряжения найдем по формулам (8.14). Можно, конечно, поступить обратно, т. е. положить

$$\varphi = V(x, y); \tag{8.24}$$

тогда уравнением контура (если он замкнут) будет

$$-U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C^* \tag{8.25}$$

и перемещение выразится так:

$$\omega = \tau V(x, y). \tag{8.26}$$

Рассмотрим частные случаи.

---

\*) Здесь учтено, что если функция  $U + iV$  — аналитическая, то  $V - iU$  — также аналитическая, ибо для них условия Коши — Римана одинаковы.

## А. Стержень эллиптического сечения

Возьмем аналитическую функцию

$$D_2 z^2 = D_2 (x + iy)^2 = D_2 (x^2 - y^2) + i2D_2 xy.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} U &= D_2 (x^2 - y^2), \\ V &= 2D_2 xy. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Положим, что

$$\varphi = V = 2D_2 xy.$$

Тогда по (8.25) получим уравнение контура, заменив  $C$  на  $-D_1$ :

$$D_2 (x^2 - y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = D_1,$$

или

$$\left(D_2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - D_2\right)y^2 = D_1,$$

или, наконец,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{D_1}{D_2 + \frac{1}{2}}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{D_1}{\frac{1}{2} - D_2}\right)} = 1.$$

Положив здесь

$$\frac{D_1}{D_2 + \frac{1}{2}} = a^2, \quad \frac{D_1}{\frac{1}{2} - D_2} = b^2, \quad (8.28)$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.29)$$

т. е. будем иметь стержень эллиптического сечения.

Из (8.28) находим постоянные  $D_1$  и  $D_2$ , выражая их через полуоси  $a$  и  $b$  эллипса поперечного сечения:

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}; \quad D_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Отсюда

$$w = 2D_2 \tau xy = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau xy. \quad (8.30)$$

Далее, по (8.7) находим касательные напряжения по сечению, заменяя обозначение  $\mu$  на  $G$ :

$$\left. \begin{aligned} X_z &= G \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau y - \tau y \right) = -G \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \tau y, \\ Y_z &= G \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \tau x. \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Наконец, связываем напряжения по сечению с крутящим моментом  $M_k$ :

$$M_k = - \int_F \int (X_2 y - Y_2 x) dF = - G \frac{2\tau}{a^2 + b^2} \int_F \int (-a^2 y^2 - b^2 x^2) dF. \quad (8.32)$$

Но

$$\int \int y^2 dF = J_x; \quad \int \int x^2 dF = J_y,$$

где  $J_x$  и  $J_y$  — моменты инерции эллипса около его осей:

$$J_x = \frac{\pi a b^3}{4}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Поэтому из (8.32) получаем

$$M_k = G \frac{2\tau}{a^2 + b^2} \frac{\pi a^3 b^3}{2} = G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tau.$$

Отсюда выражаем угол закручивания  $\tau$  через крутящий момент:

$$\tau = \frac{M_k}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}.$$

В случае круглого сечения элементарная теория Кулона дает

$$\tau = \frac{M_k}{G J_p},$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции сечения. Для сравнения этих выражений свяжем величину

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

с полярным моментом инерции эллипса:

$$\begin{aligned} J_p &= J_x + J_y = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi a b (a^2 + b^2)}{4} = \\ &= \frac{\pi a^4 b^4 (a^2 + b^2)}{4 a^3 b^3} = \frac{\pi a^4 b^4}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \frac{\pi^3}{\pi^3} = \frac{F^4}{4 \pi^2} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{F^4}{4 \pi^2 J_p} \approx \frac{F^4}{39,4 J_p},$$

и, следовательно,

$$\tau = \frac{M_k}{G F^4} 39,4 J_p. \quad (8.33)$$

Заменив в равенстве (8.30)  $w$  на  $z$ , получим уравнение искривленной поверхности поперечного сечения  $z = m x y$ , где

$$m = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau;$$

поверхность эта есть гиперболический параболоид; в пересечении с системой горизонтальных плоскостей  $z = z_n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , она дает гиперболы

$$xy = \frac{z_n}{m},$$

отнесенные к асимптотам (рис. 81).

По уравнениям (8.31) можем найти наибольшие касательные напряжения. Действительно, полное касательное напряжение будет по величине таким:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} = \frac{2G\tau}{a^2 + b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = \\ &= 2G\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Отсюда видно, что напряжение  $T$ , как функция  $x$  и  $y$ , сохраняет постоянное значение

$$T = 2G\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \quad (8.35)$$

во всех точках кривой

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = C^2, \quad (8.36)$$

где  $C$  — какое-нибудь постоянное число. При различных значениях  $C$  уравнение (8.36) дает семейство кривых [линий уровня функции  $T(x, y)$ ]; каждая из этих кривых представляет собой эллипс с полуосями

$$a_1 = a^2 C; \quad b_1 = b^2 C. \quad (8.37)$$

Если положим, что  $b < a$ , то

$$\frac{b_1}{a_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \frac{b}{a},$$

и эллипс (8.36) будет более вытянут, чем эллипс (8.29) контура сечения. Уравнение (8.36) дает семейство подобных и подобно расположенных эллипсов (отношение  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b^2}{a^2}$  постоянно), причем по мере увеличения размеров эллипса возрастает и напряжение (8.35), постоянное для

всех его точек (рис. 82). Отсюда ясно, что наибольшая величина напряжения (соответствующая эллипсу 3) получается в крайних точках  $C$  и  $D$  малой оси сечения. Для этих точек из (8.37) имеем  $b_1 = b = b^2 C$ , или  $C = \frac{1}{b}$ , а потому по уравнению (8.35)

$$T_1 = \max T = 2G\tau \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

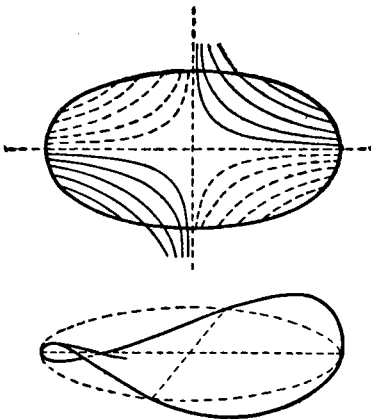


Рис. 81.

В точках  $A$  и  $B$  напряжение (одинаковое во всех точках соответствующего эллипса  $I$ ) будет меньше; для них имеем

$$a_1 = a = a^2 C; \quad C = \frac{1}{a};$$

$$T_2 = 2G\tau \frac{ab^2}{a^2 + b^2} < T_1.$$

### Б. Стержень треугольного сечения

Возьмем аналитическую функцию

$$C_3 z^3 = C_3 (x + iy)^3 = C_3 (x^3 - 3xy^2) + iC_3 (3x^2y - y^3)$$

и примем

$$\varphi = V = C_3 (3x^2y - y^3). \quad (8.38)$$

Тогда по (8.25) получим уравнение контура

$$C_3 (x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = -C$$

или, полагая

$$C_3 = \frac{1}{2} D_3; \quad -C = \frac{1}{2} D_1, \quad (8.39)$$

будем иметь

$$D_3 (x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 = D_1. \quad (8.40)$$

Это уравнение выражает полную гиперболу третьего порядка с тремя асимптотами, направления которых получим по общему

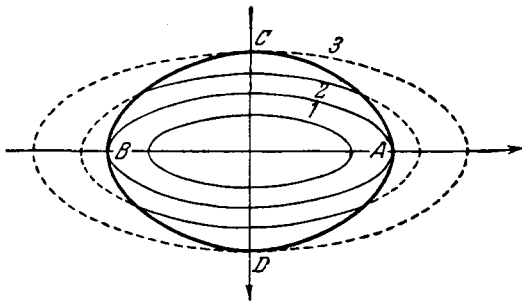


Рис. 82.

правилу, приравнивая нулю совокупность членов третьей степени  $x^3 - 3xy^2 = x(x + y\sqrt{3})(x - y\sqrt{3}) = 0$ ; отсюда уравнения трех прямых, параллельных асимптотам, будут

$$x = 0; \quad x + y\sqrt{3} = 0; \quad x - y\sqrt{3} = 0.$$

Возьмем три прямые, параллельные этим:

$$x = a; \quad x + y\sqrt{3} = b; \quad x - y\sqrt{3} = b. \quad (8.41)$$

Можно показать, что при надлежащем выборе постоянных  $D_1$  и  $D_3$  кривая (8.40) распадается на эти три прямые, т. е. уравнение ее примет вид

$$D_3(x-a)(x-b+y\sqrt{3})(x-b-y\sqrt{3})=0,$$

или

$$D_3(x-a)[(x-b)^2-3y^2]=0. \quad (8.42)$$

Действительно, раскрывая уравнения (8.40) и (8.42), имеем

$$D_3x^3-3D_3xy^2+x^2+y^2-D_1=0, \quad (8.43)$$

$$D_3x^3-3D_3xy^2-D_3(a+2b)x^2+3D_3ay^2+D_3b(2a+b)x-D_3ab^2=0. \quad (8.44)$$

Сравнивая коэффициенты этих уравнений, получим условия для определения  $D_1$ ,  $D_3$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} -D_3(a+2b) &= 1; & D_3b(2a+b) &= 0; \\ 3D_3a &= 1; & D_3ab^2 &= D_1. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$b=-2a; \quad D_3=\frac{1}{3a}; \quad D_1=\frac{4}{3}a^2, \quad (8.45)$$

и уравнение (8.44) примет вид

$$(x-a)[(x+2a)^2-3y^2]=0$$

или

$$(x-a)(x+2a+y\sqrt{3}) \times \\ \times (x+2a-y\sqrt{3})=0,$$

т. е. кривая (8.44) распадается на три прямые:

$$x=a; \quad x+2a+y\sqrt{3}=0; \quad x+2a-y\sqrt{3}=0,$$

образующие (рис. 83) равносторонний треугольник с центром тяжести в начале координат. Таким образом, мы приходим к задаче о кручении стержня треугольного сечения.

Уравнение (8.38) на основании (8.39) и (8.45) дает

$$w=\frac{\tau}{6a}(3x^2y-y^3), \quad (8.46)$$

т. е. поперечное сечение искривляется по поверхности

$$z=\frac{\tau}{6a}(3x^2y-y^3),$$

или

$$z=\frac{\tau}{6a}y(x\sqrt{3}+y)(x\sqrt{3}-y).$$

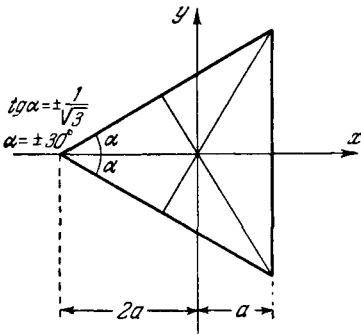


Рис. 83.



Отсюда видно, что прямые

$$y = 0; \quad y = -x\sqrt{3}; \quad y = x\sqrt{3},$$

являющиеся тремя высотами треугольника сечения, остаются в первоначальной плоскости сечения, так как для всех точек этих прямых  $\omega = z = 0$ . На рис. 84 показан вид искривленного поперечного сечения. Имея функцию (8.46), по уравнениям (8.2) и (8.7) найдем составляющие напряжения  $X_z$  и  $Y_z$ . Далее, аналогично уравнению (8.32) получим связь между крутящим моментом  $M_k$  и углом закручивания  $\tau$ .

### В. Стержень прямоугольного сечения

Задача эта также была решена Сен-Венаном; обозначим длины сторон сечения через  $b$  и  $c$  (рис. 85)

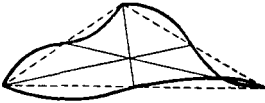


Рис. 84.

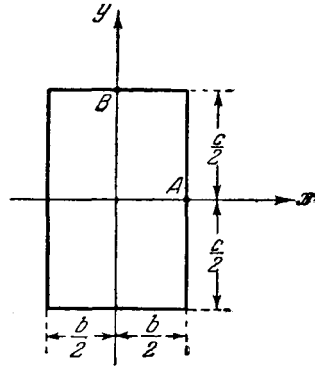


Рис. 85.

и начнем решение задачи с разыскания функции кручения  $\varphi(x, y)$  в форме ряда. Частные решения уравнения (8.4) найдем уже применявшимся ранее методом разделения переменных, полагая

$$\varphi = XY. \quad (8.47)$$

Переменные сейчас же разделяются:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2,$$

и отсюда

$$\left. \begin{aligned} X'' &= -\lambda^2 X, \\ Y'' &= \lambda^2 Y. \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

Как увидим в дальнейшем, удобно положить

$$\lambda = \frac{m\pi}{b}, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

При  $m = 0$  уравнения (8.48) дают

$$X = \alpha x + \beta, \quad Y = \gamma x + \delta.$$

Подставив это в (8.47) и удерживая лишь член второй степени, получим (положив еще  $\alpha = \gamma = 1$ )

$$\varphi_0 = xy. \quad (8.49)$$

При  $m \neq 0$  решения уравнений (8.48) будут

$$\left. \begin{aligned} X &= C_m \sin \frac{m\pi x}{b} + C'_m \cos \frac{m\pi x}{b}, \\ Y &= D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

Суммируя решения (8.49) и (8.50), получим (полагая при этом  $C'_m = 0$  для всех значений  $m$ )

$$\varphi = xy + \sum C_m \sin \frac{m\pi x}{b} \left( D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right). \quad (8.51)$$

Произвольными постоянными  $C_m$ ,  $D_m$  и  $D'_m$  распорядимся так, чтобы были удовлетворены условия на контуре; они, как мы видели выше, требуют, чтобы касательные напряжения здесь были направлены по касательной к контуру; следовательно (рис. 85), на боковых сторонах при  $x = \pm \frac{b}{2}$  должно быть согласно (8.7)

$$X_z = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y; \quad (8.52)$$

на верхней и нижней сторонах при  $y = \pm \frac{c}{2}$

$$Y_z = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x. \quad (8.53)$$

Обращаясь к (8.51), найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + \sum C_m \frac{m\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{b} \left( D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right).$$

Отсюда видно, что условие (8.52) удовлетворится, если  $m$  будем давать только нечетные значения:  $m = 1, 3, 5, \dots$ ; действительно, тогда при  $x = \pm \frac{b}{2}$  имеем

$$\cos \frac{m\pi x}{b} = \cos \left( \pm \frac{m\pi}{2} \right) = 0.$$

Для рассмотрения условия (8.53) вычисляем из (8.51)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \sum C_m \frac{m\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{b} \left( D_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} \right).$$

Внося сюда значение  $y = \pm \frac{c}{2}$ , напомним условие (8.53) в виде

$$-2x = \sum_{m=1, 3, 5, \dots} C_m \frac{m\pi}{b} \left( D_m \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b} \pm D'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi c}{2b} \right) \sin \frac{m\pi x}{b}.$$

Ввиду двузначности второго члена в скобках необходимо положить  $D'_m = 0$ ; кроме того, конечно, можно принять  $D_m = 1$ , и тогда получим наше условие в окончательной форме

$$-2x = \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \beta_m \sin \frac{m\pi x}{b}, \quad (8.54)$$

где

$$\beta_m = C_m \frac{m\pi}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}. \quad (8.55)$$

Из (8.54) видно, что  $\beta_m$  являются коэффициентами ряда Фурье для функции  $-2x$  на отрезке  $(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$ ; определяются они обычным путем; умножая обе части (8.54) на  $\sin \frac{m\pi x}{b}$  и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \beta_m \frac{b}{2} &= -2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x \sin \frac{m\pi x}{b} dx = -\frac{4b^2}{\pi^2 m^2} (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \\ &= \frac{4b^2}{\pi^2 m^2} (-1)^{\frac{m+1}{2}} *), \quad \text{или} \quad \beta_m = \frac{8b}{\pi^2 m^2} (-1)^{\frac{m+1}{2}}. \end{aligned}$$

На этом основании из (8.55) найдем

$$C_m = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{8b^2}{\pi^3 m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}}.$$

Внося это в (8.51) и учитывая, что  $D_m = 1$ ;  $D'_m = 0$ , получим окончательное выражение функции кручения:

$$\varphi(x, y) = xy + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \sin \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b}. \quad (8.56)$$

Далее, пользуясь условиями Коши—Римана (8.11), ищем сопряженную с ней функцию  $\psi(x, y)$ ; имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \sin \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

\*) Здесь сделана замена

$$\sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при} \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Интегрируя первое из этих уравнений, получим

$$\psi = \frac{y^2}{2} + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + \omega_1(x);$$

второе дает

$$\psi = -\frac{x^2}{2} + \frac{8b^2}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + \omega_2(y),$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — произвольные функции. Для того чтобы оба эти выражения функции  $\psi$  были тождественны, следует положить

$$\omega_1(x) = -\frac{x^2}{2} + C,$$

$$\omega_2(y) = \frac{y^2}{2} + C,$$

$C$  — произвольная постоянная.

Окончательно получаем:

$$\psi = \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + C. \quad (8.57)$$

Теперь по формуле (8.15) подсчитываем функцию напряжений (при этом принимаем  $C = \frac{b^2}{4}$ , чтобы эта функция на контуре обращалась в нуль):

$$\Phi(x, y) = \mu\tau \left[ \frac{b^2}{4} - x^2 + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right]. \quad (8.58)$$

Для определения угла закручивания  $\tau$  по заданному крутящему моменту пользуемся зависимостью (8.20); выполняя в ней интегрирование, получим \*)

$$\begin{aligned} M_k &= \mu\tau \left[ \frac{b^3 c}{3} + \frac{64b^4}{\pi^5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} (-1)^m \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b} \right] = \\ &= \mu\tau b^3 c \left[ \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{c} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\tau = \frac{M_k}{\mu b^3 c a}, \quad (8.59)$$

\*) В выкладках далее учтено, что  $(-1)^m = -1$  при  $m = 1, 3, 5, \dots$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^3} \frac{b}{c} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{m^3} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b}. \quad (8.60)$$

Видим, что  $\alpha$  зависит только от отношения сторон прямоугольника  $\frac{b}{c}$ ; для квадрата, т. е. при  $\frac{b}{c} = 1$ , получим

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^3} \left( \operatorname{th} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{243} \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} + \dots \right).$$

Для очень вытянутого прямоугольника приближенно считаем  $\frac{b}{c} = 0$ , и тогда

$$\alpha = \frac{1}{3} = 0,333 \dots$$

Чтобы закончить решение задачи, вычислим касательные напряжения, пользуясь (8.16) и (8.58):

$$X_z = \mu\tau \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b}, \quad (8.61)$$

$$Y_z = \mu\tau \left[ 2x + \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \sin \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right]. \quad (8.62)$$

Если  $b < c$ , то максимальное значение касательного напряжения получается в точке  $A$  (рис. 85), т. е. при  $x = \frac{b}{2}$ ,  $y = 0$ ; тогда из (8.62) имеем

$$T_A = T_{\max} = \mu\tau b \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \right],$$

или, пользуясь (8.59):

$$T_{\max} = \frac{M_k}{b^2 c \beta^3}, \quad (8.63)$$

где

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}}}.$$

Напряжение в точке  $B$  (рис. 85) получим из (8.61), полагая  $x = 0$ ;  $y = \frac{c}{2}$ :

$$X_z = T_B = \mu\tau \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b},$$

или

$$T_B = \frac{M_k}{b^2 c \beta_1}, \quad (8.64)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{\frac{8}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b}}.$$

Значения введенных нами коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\beta_1$  даны в таблице:

$\frac{c}{b}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta_1$	0,208	0,270	—	0,309	—	0,354	0,379	0,402	—	—	0,448

### § 54. Решение задачи о кручении в напряжениях. Аналогия Прандтля

Введение функции напряжений Прандтля позволяет изменить весь ход решения задачи о кручении и найти прежде всего касательные напряжения в сечении (ср. §§ 17 и 36).

Функция кручения  $\varphi(x, y)$  и сопряженная с ней  $\psi(x, y)$  являются гармоническими, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (8.65)$$

Посмотрим, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция напряжений  $\Phi(x, y)$ . Выше мы нашли (8.16), что

$$\left. \begin{aligned} -Y_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu\tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right), \\ X_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu\tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

Исключим отсюда  $\psi$ , пользуясь вторым из уравнений (8.65); дифференцируя первое из уравнений (8.66) по  $x$ , а второе по  $y$  и складывая результаты, получим

$$\nabla^2 \Phi = -2\mu\tau. \quad (8.67)$$

Таким образом, функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона (8.67). Можно видеть, что это уравнение представляет собой уравнение совместности деформаций, которое необходимо добавить к уравнениям равновесия, так как введение функции напряжений Прандтля позволяет решать задачу в напряже-

ниях. Действительно, уравнения совместности Сен-Венана выводятся из уравнений Коши (III) путем исключения из них перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Однако в самом начале этой главы на перемещения были наложены ограничения формулами (8.1):

$$\dot{u} = -\tau yz; \quad v = \tau xz,$$

и потому уравнения Коши значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0; \quad e_{xy} = 0; \\ e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \tau y; \quad e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \tau x. \end{aligned}$$

Дифференцируя последние два из них и вычитая результаты, исключим единственное оставшееся перемещение  $w$ :

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} = 2\tau.$$

Умножим это равенство на постоянную Ламе  $\mu$  и, пользуясь законом Гука:

$$\mu e_{yz} = Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \mu e_{xz} = X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

получим уравнение (8.67). В задаче о кручении оно эквивалентно шести уравнениям Бельтрами (VII) § 36; как и в случае осесимметрической плоской задачи (§ 48, уравнение (7.13)), такое упрощение является следствием ограничений, наложенных на перемещения.

К уравнению (8.67) следует добавить полученное выше граничное условие на контуре сечения (8.17)

$$\Phi = \mu \tau C. \quad (8.68)$$

В случае односвязного поперечного сечения, т. е. сечения, ограниченного одним замкнутым контуром и, следовательно, не имеющего внутренних полостей, произвольную постоянную  $C$  можно положить равной нулю. Тогда определение функции напряжений сведется к классической задаче интегрирования уравнения Пуассона (8.67) при условии, что функция  $\Phi$  на контуре сечения обращается в нуль:

$$\Phi = 0 \quad (\text{на контуре}). \quad (8.69)$$

Если эта задача решена, то напряжения в поперечном сечении сейчас же найдутся по формулам (8.66), а угол закручивания  $\tau$  — по уравнению (8.20).

Случай, рассмотренный в предыдущем параграфе, легко решить этим способом. Например, для эллиптического сечения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

решение уравнения (8.67) можно взять в форме

$$\Phi = K\mu\tau \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (8.70)$$

удовлетворяющей граничному условию (8.69). Подставляя это решение в (8.67), сейчас же найдем постоянную  $K$ .

Этот метод решения задачи, предложенный Прандтлем, привел его к следующей аналогии, которая придает большую наглядность соответствующим выкладкам и вместе с тем позволяет дать чисто экспериментальный метод решения задачи при любом контуре поперечного сечения скручиваемого стержня. Представим себе гибкую нерастяжимую мембрану, натянутую на упругий контур той же формы, как и контур заданного поперечного сечения; натяжение постоянно во всех направлениях. Если к мембране приложим равномерное давление  $p$ , то она может несколько выпучиться за счет небольших деформаций самого упругого контура\*); уравнение равновесия мембраны было выведено Лапласом; оно совпадает с тем уравнением, которое приводится во всех курсах сопротивления материалов для расчета тонких резервуаров, имеющих форму тел вращения:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h},$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — главные напряжения в стенке резервуара,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — главные радиусы кривизны стенки,  $h$  — толщина стенки.

Учитывая, что натяжение мембраны постоянно, т. е. что  $\sigma_1 = \sigma_2$  и что  $h\sigma_1 = h\sigma_2 = H$  есть величина этого натяжения на единицу длины сечения мембраны, получим

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{p}{H};$$

если выпучивание мембраны мало, то здесь можно положить

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

где  $z$  — ордината поверхности мембраны, и мы получим следующее дифференциальное уравнение поверхности мембраны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{H}, \quad \text{или} \quad \nabla^2 z = \frac{p}{H}. \quad (8.71)$$

К нему добавим очевидное граничное условие

$$z = 0 \quad (\text{на контуре}). \quad (8.72)$$

\*) Однако можно убедиться, что эти деформации будут малы по сравнению с провисанием мембраны  $z$ , и ими можно пренебречь.



Сравнивая (8.71) и (8.72) соответственно с (8.67) и (8.69), придем к аналогии Прандтля: если натяжение мембраны  $H$  и нагрузку  $p$  выберем так, что

$$\frac{p}{H} = -2\mu\tau, \quad (8.73)$$

то

$$z = \Phi; \quad (8.74)$$

значит, ордината поверхности выпучившейся мембраны даст значение функции напряжений в данной точке поперечного сечения, а крутящий момент согласно (8.20) равен удвоенному объему, ограниченному поверхностью мембраны и ее первоначальной плоскостью.

Распределение касательных напряжений по сечению также может быть наглядно представлено с помощью аналогии Прандтля. Через выбранную произвольную точку  $A$  сечения (рис. 86) проведем любой замкнутый контур  $BC$  и проведем в  $A$  касательную  $AT$  и внутреннюю нормаль  $A\nu$  к контуру. Проекция полного напряжения  $t$  в этой точке на касательную  $AT$  будет

$$t^{(T)} = X_z \cos(xT) + Y_z \cos(yT);$$

но

$$\cos(xT) = + \cos(y\nu),$$

$$\cos(yT) = - \cos(x\nu).$$

Пользуясь также формулами (8.16), получим

$$t^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(x\nu) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(y\nu),$$

или

$$t^{(T)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}; \quad (8.75)$$

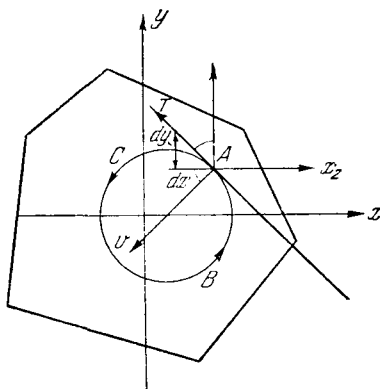


Рис. 86.

это есть обобщение свойства функции напряжений, выраженного формулами (8.16); проекция полного напряжения на какое-либо направление  $T$  равна производной функции  $\Phi$  по нормали  $\nu$  к этому направлению.

Рассмотрим теперь поверхность выпучившейся мембраны и расчленим ее рядом плоскостей, проведенных через равные промежутки параллельно контуру (рис. 87). Получим ряд замкнутых контуров — горизонталей поверхности. В любой точке  $A$  горизонтали производная  $\partial \Phi / \partial T$  по касательной к ней равна нулю, так как в этом направлении  $\Phi = \text{const}$ . Отсюда по (8.75) заключаем, что проекция полного касательного напряжения  $t$  на нормаль  $A\nu$  к горизонтали равна нулю; значит, напряжение  $t$  направлено по касательной к горизонтали в этой точке. Та же формула (8.75) показывает, что величина

полного касательного напряжения равна производной функции  $\Phi$  по внутренней нормали к горизонтали, или, что то же, градиенту функции  $\Phi$  в данной точке:

$$t = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \text{grad } \Phi. \quad (8.76)$$

Учитывая, что градиент (тангенс наибольшего угла наклона поверхности мембраны в данной точке к начальной плоскости ее) пропорционален густоте горизонталей, видим, что система горизонталей, дает наглядную картину распределения напряжений в сечении скручиваемого бруса. Отсюда, например, можно сделать следующие довольно общие выводы.

1. Если сечение ограничено простым, всюду выпуклым контуром, то густота горизонталей

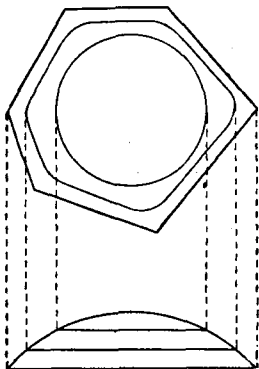


Рис. 87.

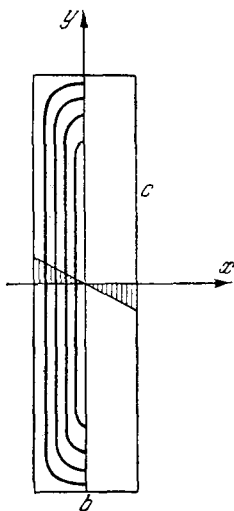


Рис. 88.

возрастает по мере приближения к контуру, где и следует ожидать наибольших напряжений.

2. Если контур, указанный в п. 1, имеет две оси симметрии и несколько вытянут в направлении одной из этих осей, то густота горизонталей будет наибольшей у концов малой оси, как это имеет место, например, для эллипса или прямоугольника. (У концов большой оси возможность выпучивания мембраны стеснена меньшей шириной ее, измеренной перпендикулярно к большой оси.)

3. Если поперечное сечение имеет форму очень вытянутого прямоугольника, так что одна его сторона  $b$  значительно менее другой стороны  $c$  (рис. 88), тогда в местах, удаленных от коротких сторон, поверхность соответствующей мембраны может быть приближенно принята за цилиндрическую; ввиду равномерности нагрузки  $p$

на мембрану сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси  $y$ , будет параболой \*)

$$z = \frac{p}{2H} \left( -\frac{b^2}{4} + x^2 \right).$$

Но согласно аналогии Прандтля [см. формулы (8.73) и (8.74)] отсюда имеем

$$\Phi = \mu\tau \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right). \quad (8.77)$$

Далее, согласно (8.20) получим

$$M_k = -2c\mu\tau \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) dx = -\mu\tau \frac{b^3 c}{3};$$

$$\tau = \frac{M_k}{\mu b^3 c \frac{1}{3}},$$

что уже было получено выше. Рассмотрим в поперечном сечении прямую  $y = \text{const}$ , параллельную оси  $x$ , проведенную вдали от концов сечения. На этой прямой касательные напряжения

$$Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{6M_k}{b^3 c} x,$$

распределены по линейному закону (рис. 88); касательные напряжения  $X_z$ , очевидно, будут ничтожны вдали от коротких сторон прямоугольника.

Очевидно, эти результаты, полученные для узкого прямоугольника, могут быть применены к другим сечениям, имеющим форму изогнутой полосы (швеллеры, двутавры, уголки, незамкнутые кольца и т. д.), исключая, конечно, те места, где кривизна контура сечения резко меняется; здесь конфигурация горизонталей мембраны значительно осложняется (например, вблизи выкружек и входящих углов сечения). Эти приложения теории Сен-Венана и аналогии Прандтля подробно рассматриваются в курсах сопротивления материалов, и здесь мы на них останавливаться не будем.

В случае замкнутого кольцевого сечения приходится иметь дело с особенностью, присущей всякому двухсвязному или вообще многосвязному сечению, ограниченному несколькими взаимно не пересекающимися замкнутыми контурами. Дифференциальное уравнение (8.67) и граничное условие (8.68) для функции напряжений  $\Phi$  сохраняют силу; однако постоянные  $C$  в (8.68) на каждом из контуров,

\*) Которая является веревочной кривой для равномерной нагрузки.

ограничивающих сечение, будут различными; для одного из контуров, например для внешнего, эту постоянную можно выбрать произвольно; способ определения остальных постоянных был указан Бредтом\*).

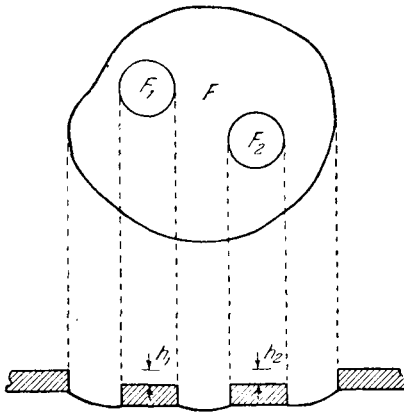


Рис. 89.

Соответствующая теорема Бредта, вытекающая из общей формулы Стокса, для наших целей может быть легко и наглядно получена из аналогии Прандтля. В случае многосвязного сечения аналогично эту приходится строить следующим образом (рис. 89). Те области  $F_1$  и  $F_2$  мембраны, где в сечении скручиваемого стержня имеются полости, накрываем абсолютно твердыми пластинками, склеенными с мембраной; после этого на всю область сечения  $F$  оказываем равномерное давление  $p$ .

Условие (8.68) требует, чтобы пластинки  $F_1$  и  $F_2$  опустились параллельно своему начальному положению (для этого к пластинкам, кроме давления, необходимо, вообще говоря, приложить некоторые пары, которые, однако, в дальнейшие рассуждения не войдут). Запишем условие равновесия одной такой пластинки  $F_m$ , приравняв нулю сумму проекций сил, приложенных к ней, на ось, нормальную к начальной плоскости мембраны. Это условие выразится в виде следующего уравнения (рис. 90):

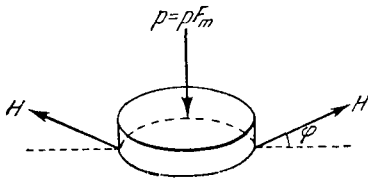


Рис. 90.

$$\int H \sin \varphi ds = p F_m, \quad (8.78)$$

где интеграл распространен на весь контур взятой пластинки, а  $F_m$  означает площадь ее. Замечаем, что [ср. (8.76)]

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \operatorname{grad} \Phi = t.$$

Кроме того,  $H$ , как постоянную, вынесем за знак интеграла и учтем, что согласно (8.73)  $p = -2\mu\tau H$ . Уравнение равновесия (8.78) получит вид

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \int \frac{\partial \Phi}{\partial v} ds &= -2\mu\tau F_m \\ \int t ds &= -2\mu\tau F_m; \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

\*) См. А. и Л. Фёппль, Сила и деформация, т. II, стр. 77.

это и есть нужный нам частный случай теоремы Бредта о «циркуляции напряжения», выражаемой интегралом левой части второго из уравнений (8.79). Таких уравнений можно написать столько, сколько имеется внутренних полостей в данном сечении. Можно показать, что левые части уравнений (8.79) будут линейно зависеть от значений функции  $\Phi$  на внутренних контурах сечения; эти значения из (8.79) могут быть определены. Заметим, что в случае многосвязного контура формула (8.18) после интегрирования правой части по частям даст вместо (8.20) следующий результат:

$$M_k = 2C_0F_0 - 2 \sum C_m F_m - 2 \int \int \Phi ds, \quad (8.80)$$

где  $F_0$  — площадь, ограниченная внешним контуром;  $C_0$  — значение функции  $F_0$  на этом контуре;  $F_m$  и  $C_m$  обозначают те же величины для внутренних контуров. Двойной интеграл распространяется на площадь сечения за вычетом внутренних полостей. В (8.80) остается подставить значения постоянных  $C_0$  и  $C_m$ , найденные, как указано выше.

### § 55. Случай поперечного изгиба

Рассмотрим (рис. 91) случай изгиба прямого бруса с произвольным поперечным сечением, длиной  $l$ , заделанного левым концом и нагруженного на правом конце силой  $Q$ , которую предполагаем осуществленной в форме касательных напряжений, распределенных по концевому поперечному сечению.

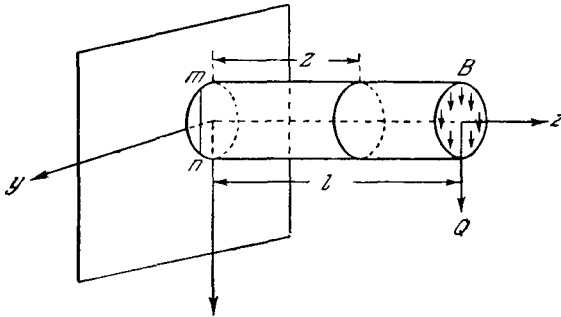


Рис. 91.

Эту задачу решил Сен-Венан, применяя к ней полуобратный метод; решение ее проведем в напряжениях, пользуясь рассуждениями § 36. При решении аналогичной задачи в случае плоской деформации или плоского напряженного состояния (§ 41) мы сделали следующие предположения:

$$Z_z = \frac{M}{J} x = -\frac{Q(l-z)}{J} x; \quad Y_z = Y_y = X_x = X_y = 0.$$

Следуя Сен-Венану, решим настоящую задачу также полуобратным методом; несколько изменив предположения в том смысле, что положим отличным от нуля также напряжение  $Y_z$ . Следовательно, мы делаем такие предположения:

$$\left. \begin{aligned} Z_z &= -\frac{Q(l-z)}{J}x, \\ X_x &= Y_y = X_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.81)$$

Остальные напряжения,  $X_z = Z_x$  и  $Y_z = Z_y$ , найдем из условий на поверхности, и притом так, чтобы были удовлетворены уравнения (I) и (VII). Посмотрим, какой вид примут эти уравнения при наших предположениях (8.81). Уравнения равновесия (I) напишутся так:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0; \quad (8.82)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = -\frac{Qx}{J}. \quad (8.83)$$

Уравнения (8.82) показывают, что касательные напряжения  $X_z$  и  $Y_z$  не зависят от  $z$ , т. е. во всех поперечных сечениях они должны распределяться одинаково и, конечно, по тому же самому закону они должны быть распределены на конечном поперечном сечении  $B$ . Это налагает ограничение на способ приложения силы  $Q$  в сечении  $B$ . При других способах приложения силы  $Q$  будут получаться другие напряжения; однако, согласно принципу Сен-Венана, разница в распределении напряжений будет существенной только вблизи нагруженного конца  $B$ .

Переходим теперь к уравнениям (VII), заметив предварительно, что в нашем случае

$$\Theta = Z_z = -\frac{Q(l-z)}{J}x.$$

Легко видеть, что из уравнений (VII) первое, второе, третье и шестое удовлетворяются тождественно предположениями (8.81). Уравнения же четвертое и пятое напишутся так:

$$(1 + \sigma)\nabla^2 Y_z = 0; \quad (1 + \sigma)\nabla^2 X_z + \frac{Q}{J} = 0$$

или

$$\nabla^2 Y_z = 0; \quad \nabla^2 X_z = -\frac{Q}{(1 + \sigma)J}. \quad (8.84)$$

Напишем еще условия (II) на боковой поверхности бруса. Первые два из них удовлетворяются тождественно, так как на боковой поверхности  $\cos(vz) = 0$ . Остается только последнее:

$$Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) = 0. \quad (8.85)$$

Таким образом, задача сводится к разысканию двух напряжений  $X_z$  и  $Y_z$ , являющихся функциями  $x$  и  $y$ , из того условия, чтобы они всюду в бруске удовлетворяли уравнениям (8.83) и (8.84), а на боковой поверхности — условию (8.85).

В дальнейшем надо еще добиться, чтобы эти касательные напряжения на конечном сечении приводились к заданному грузу  $Q$ , приложенному в центре тяжести сечения. Как и ранее, мы можем упростить решение задачи, вводя функцию напряжений; однако здесь оказывается удобным ввести две новые функции; зададим напряжения так:

$$\left. \begin{aligned} Z_x = X_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y), \\ Z_y = Y_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.86)$$

Здесь  $\varphi(x, y)$  и  $f(y)$  — произвольные пока функции\*). Подставляя эти выражения в уравнение (8.83), видим, что оно будет тождественно удовлетворено. Остается удовлетворить уравнениям (8.84) и условию на боковой поверхности (8.85).

Подставляя напряжения (8.86) в уравнения (8.84), напишем их так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi &= 0; & \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi - \frac{Q}{J} + f''(y) &= -\frac{Q}{J(1+\sigma)} \\ \text{или же} & & \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi &= 0; & \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi &= \frac{\sigma Q}{J(1+\sigma)} - f''(y). \end{aligned}$$

Из этих уравнений легко находим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{Q\sigma y}{J(1+\sigma)} - f''(y) + C. \quad (8.87)$$

Переходим к условию на боковой поверхности (8.85). Как и в задаче о кручении, получим

$$\cos(vx) = \frac{dy}{ds}; \quad \cos(vy) = -\frac{dx}{ds}.$$

Подставляя отсюда и из (8.86) в условие (8.85), будем иметь

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y) \right] \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$$

или, имея в виду, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\varphi}{ds},$$

получим

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left[ \frac{Qx^2}{2J} - f(y) \right] \frac{dy}{ds}. \quad (8.88)$$

Вопрос сводится к интегрированию уравнения (8.87) при соблюдении условия на боковой поверхности (8.88). Введенной нами произвольной функцией  $f(y)$  постараемся распорядиться так, чтобы выражение в квадратной скобке уравнения (8.88) на контуре

\*) Введение функции  $f(y)$  предложено С. П. Тимошенко.

поперечного сечения обращалось в нуль, т. е. на контуре должно соблюдаться условие

$$f(y) - \frac{Qx^2}{2J} = 0; \quad (8.89)$$

тогда уравнение (8.88) сведется к условию  $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ , требующему, чтобы функция напряжений  $\varphi$  сохраняла на контуре сечения постоянное значение. Остается рассмотреть условие на концевом поперечном сечении. Проектируя силы, приложенные к этому сечению, на ось  $Oy$ , имеем

$$\int \int Y_z dx dy = - \int \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 0,$$

т. е. сумма касательных сил  $Q$  направлена вертикально (рис. 88). Далее,

$$\begin{aligned} \int \int X_z dx dy &= \int \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy - \frac{Q}{2J} \int \int x^2 dx dy + \int \int f(y) dx dy = \\ &= -\frac{Q}{2} + \int dy \int f(y) dx = -\frac{Q}{2} + \int dy [f(y_p) x_p - f(y_m) x_m] = \\ &= -\frac{Q}{2} + \int dy \left[ \frac{Qx_p^3}{2J} - \frac{Qx_m^3}{2J} \right] = \\ &= -\frac{Q}{2} + \frac{3}{2} \frac{Q}{J} \int \frac{(x_p^3 - x_m^3) dy}{3} = -\frac{Q}{2} + \frac{3}{2} \frac{Q}{J} J = Q. \end{aligned}$$

Таким образом, касательные напряжения по концевому сечению действительно приводятся к заданному грузу  $Q$ , направленному вниз.

У нас еще осталась одна произвольная постоянная  $C$  в уравнении (8.87). Можно убедиться, что при сечении, симметричном относительно плоскости  $xOz$ , следует принять  $C = 0$ .

Окончательно, для решения задачи нужно подобрать  $f(y)$  так, чтобы на контуре соблюдалось уравнение (8.89). Это выражение  $f(y)$  вносим в уравнение (8.87) и интегрируем его. Получив отсюда  $\varphi(x, y)$ , вносим ее в уравнения (8.86) и находим касательные напряжения.

Если поперечное сечение бруса не симметрично относительно главной центральной оси  $Ox$ , то явление изгиба значительно осложняется. Приведенное сейчас решение задачи сохраняет силу, если равнодействующая нагрузки  $Q$  лежит не в главной плоскости  $Oxz$  бруса, а в другой плоскости, ей параллельной и пересекающей поперечное сечение в некоторой точке, называемой центром изгиба. В случае тонкостенных брусев разыскание центра изгиба можно выполнить приближенно элементарным способом, излагаемым в курсах сопротивления материалов. Общий метод определения его можно найти в книге А. и Л. Фёппль «Сила и деформация», т. II, ОНТИ, 1936 г. Приложение: «О центре изгиба», статья Г. Э. Проктора.



Пример. Изгиб круглого бруса. Пусть контур сечения будет круг:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (8.90)$$

Для удовлетворения уравнения (8.89) на контуре функцию  $f(y)$ , очевидно, можно задать так:

$$f(y) = \frac{Q}{2J} (r^2 - y^2). \quad (8.91)$$

После этого уравнение (8.87) получает такой вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\sigma Q y}{J(1+\sigma)} + \frac{Q y}{J} + C = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} y + C. \quad (8.92)$$

Постараемся удовлетворить этому уравнению, задав функцию  $\varphi$  в следующем виде:

$$\varphi = m (r^2 - x^2 - y^2) y.$$

Для подстановки в уравнение (8.92) имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -2my; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -6my,$$

и уравнение (8.92) дает

$$-8my = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} y + C.$$

Отсюда, очевидно,  $C = 0$ ,

$$m = -\frac{1}{8} \frac{(1+2\sigma)}{(1+\sigma)} \frac{Q}{J}.$$

Функция напряжений окончательно получается такой:

$$\varphi = \frac{1}{8} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} (x^2 + y^2 - r^2) y.$$

Подставляя это выражение функции  $\varphi$ , а также  $f(y)$  из уравнения (8.91) в уравнения (8.86), находим касательные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left( r^2 - x^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right), \\ Y_z &= -\frac{1}{4} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} xy. \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

Замечаем, что касательные напряжения зависят от пуассонова отношения  $\sigma$ ; полагая, например,  $\sigma = \frac{1}{3}$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{11}{32} \frac{Q}{J} \left( r^2 - x^2 - \frac{1}{11} y^2 \right), \\ Y_z &= -\frac{5}{16} \frac{Q}{J} xy. \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

Так как, вообще говоря,  $Y_z \neq 0$ , то полное касательное напряжение

$$t = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2}$$

направлено не вертикально. В точках сечения, расположенных на осях координат ( $x=0$ ,  $y=0$ ), составляющая  $Y_z$  отсутствует, и здесь  $t$  вертикально. На нейтральной оси ( $x=0$ ) имеем

$$X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left( r^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right).$$

Отсюда видно, что по нейтральной оси напряжения  $X_z$  распределяются неравномерно. Наибольшее их значение (в центре сечения при  $y=0$ ) равно

$$X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} r^2;$$

при  $\sigma = \frac{1}{3}$  из уравнений (8.94) найдем

$$\max X_z = \frac{11}{32} \frac{Q}{J} r^2 = \frac{11}{32} \frac{Q4r^2}{\pi r^4} = \frac{11}{8} \frac{Q}{F} = 1,375 \frac{Q}{F}, \quad (8.95)$$

где  $F = \pi r^2$  — площадь сечения бруса. Элементарный подсчет по формуле  $X_z = t = \frac{QS}{Jb}$  дает

$$\max X_z = \frac{4Q}{3\pi r^2} = 1,33 \frac{Q}{F}.$$

Ошибка по сравнению с точным значением (8.95) составляет около 3,4%. Напряжениями  $Y_z$  в элементарном расчете обычно пренебрегают.

\* Г Л А В А IX

БОЛЕЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ

§ 56. Общее решение дифференциальных уравнений равновесия  
в напряжениях. Функции напряжений

Решение задачи теории упругости в напряжениях требует совместного решения двух систем дифференциальных уравнений: уравнений равновесия (I) и уравнений совместности деформаций Бельтрами — Мичелла (VII). Ограничимся случаем отсутствия объемных сил; тогда все эти уравнения будут однородными. В этом параграфе мы покажем, что система уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

может быть решена в общем виде, причем все компоненты тензора напряжений выразятся через три произвольные функции от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , называемые *функциями напряжений*; с подобными решениями (правда, для более узких классов задач) мы уже встречались в плоской задаче (функция Эри) и в теории кручения Сен-Венана (функция Прандтля).

Если получено общее решение уравнений равновесия (9.1), то с ними в дальнейшем уже не придется иметь дела и останется интегрировать только уравнения Бельтрами; этим решение задачи будет несколько облегчено.

Одна из форм общего решения была предложена Максвеллом в 1862 г.; другая форма дана Морэра в 1892 г. Решения эти могут быть получены без особого труда.

1. Решение Максвелла. Возьмем три произвольные функции:

$$\varphi_1(x, y, z); \quad \varphi_2(x, y, z); \quad \varphi_3(x, y, z), \quad (9.2)$$

и выразим через них касательные напряжения следующим образом:

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}; \quad Y_z = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}; \quad Z_x = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}. \quad (9.3)$$

Эти формулы получаются одна из другой круговыми подстановками

$$(x, y, z); \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Далее мы увидим, что возможны и другие задания касательных напряжений, но, во всяком случае, формулы их не должны менять вид при перестановке букв в обозначениях напряжений, как этого требует закон взаимности касательных напряжений, например:

$$X_y = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial x} = Y_x.$$

Подставляя выражения  $X_y$  и  $X_z$  из (9.3) в первое из уравнений (9.1), получим

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^2 \partial x}.$$

Отсюда найдем компонент  $X_x$ , интегрируя по  $x$  и отбрасывая произвольную постоянную интегрирования (т. е. произвольную функцию от  $y$  и  $z$ ), которая роли не играет ввиду произвольности функций  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ :

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}. \quad (9.4)$$

Таким же путем из второго и третьего уравнений (9.1) получим остальные нормальные компоненты  $Y_y$  и  $Z_z$ ; однако выражения их получатся из (9.4') указанными выше круговыми подстановками. В результате имеем следующее решение уравнений (9.1):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}; & X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}; \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}; & Y_z &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}; \\ Z_z &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}; & Z_x &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

В этом решении функции (9.2) называются *функциями напряжений Максвелла*.

В том, что решение (9.4) является общим, мы убедимся, если докажем, что для всякого тензора

$$\begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

удовлетворяющего уравнениям равновесия (9.1), можно построить три функции (9.2). Это легко сделать, интегрируя дважды равенства правого столбца (9.4):

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= - \int \int X_y dx dy; & \varphi_1 &= - \int \int Y_z dy dz; \\ \varphi_2 &= - \int \int X_z dx dz. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования, как и выше, отбрасываем. Остается убедиться в том, что при подстановке этих значений функций в равенства левого столбца (9.4) они обращаются в тождества; для подстановки в первое равенство находим:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = - \int \frac{\partial X_y}{\partial y} dx; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = - \int \frac{\partial X_z}{\partial z} dx;$$

тогда оно запишется так:

$$X_x = - \int \left( \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dx.$$

Продифференцировав его по  $x$ , найдем

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

На основании первого из уравнений (9.1) это равенство дает тождество; таким же путем докажем, что и остальные два равенства (9.4) обращаются в тождества.

2. Решение Морёра. Возьмем три произвольные функции:

$$\varphi_1(x, y, z); \quad \varphi_2(x, y, z); \quad \varphi_3(x, y, z), \quad (9.6)$$

и выразим через них нормальные напряжения:

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}; \quad Z_z = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}. \quad (9.7)$$

Формулы эти также получаются одна из другой круговыми подстановками

$$(x, y, z); \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Внося значения напряжений (9.7) в уравнения равновесия (9.1), запишем их так:

$$\left. \begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial x} & \left| \begin{aligned} \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= - \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y \partial z}, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} &= - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y \partial z}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Продифференцировав их по схеме, показанной слева, и сложив почленно, получим

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right);$$

а отсюда имеем

$$X_y = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right).$$

Остальные два касательных компонента получим указанными выше круговыми подстановками или меняя знаки при дифференцировании уравнений (9.8). Таким путем приходим к следующей форме решения уравнений (9.1):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}; & X_y &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right); \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x}; & Y_z &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right); \\ Z_z &= \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y}; & Z_x &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

В этом решении функции (9.6) называются *функциями напряжений Морёра*. Общность решения Морёра можно доказать способом, указанным выше для решения Максвелла; функции (9.6) находятся двукратным интегрированием равенств левого столбца (9.9); затем подстановка их в равенства правого столбца показывает, что они обращаются в тождества на основании уравнений равновесия (9.1).

Решения Максвелла и Морёра не являются единственно возможными; В. И. Блох и Ю. А. Крутков указали ряд других форм общего решения уравнений равновесия\*). Эти решения выражаются через вторые производные функций напряжений; можно искать решения, выраженные через производные более высоких порядков. Возьмем, например, одну произвольную функцию  $F(x, y, z)$  и три также произвольных постоянных параметра  $a, b, c$  и запишем компоненты тензора напряжений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= (b + c) \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2}; & X_y &= -c \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}; \\ Y_y &= (c + a) \frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial x^2}; & Y_z &= -a \frac{\partial^4 F}{\partial y \partial z \partial x^2}; \\ Z_z &= (a + b) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}; & Z_x &= -b \frac{\partial^4 F}{\partial z \partial x \partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

\*) Ю. А. Крутков, Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости, Изд. АН СССР, 1949. В. И. Блох, Функции напряжений в теории упругости, ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.

Подставив эти значения компонентов в уравнения равновесия (9.1), убедимся, что они тождественно удовлетворяются. Составим сумму решений вида (9.10):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sum_{m=1}^{\infty} (b_m + c_m) \frac{\partial^4 F_m}{\partial y^2 \partial z^2}; & X_y &= - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\partial^4 F_m}{\partial x \partial y \partial z^2}; \\ Y_y &= \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + a_m) \frac{\partial^4 F_m}{\partial z^2 \partial x^2}; & Y_z &= - \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial^4 F_m}{\partial y \partial z \partial x^2}; \\ Z_z &= \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + b_m) \frac{\partial^4 F_m}{\partial x^2 \partial y^2}; & Z_x &= - \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial^4 F_m}{\partial z \partial x \partial y^2}; \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

она также будет решением уравнений (9.1).

Если теперь положим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\partial^2 F_m}{\partial x^2} &= \varphi_1(x, y, z); & \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} &= \varphi_2(x, y, z); \\ \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2} &= \varphi_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (9.12)$$

и подставим эти значения в формулы (9.11), то получим решение Максвелла (9.4). Благодаря произвольности параметров  $a_m, b_m, c_m$  функции (9.12) независимы между собой, а благодаря произвольности функций  $F_m(x, y, z)$  они также произвольны.

Заменим теперь параметры  $a_m, b_m, c_m$  другими по формулам

$$\left. \begin{aligned} b_m + c_m &= \alpha_m; & a_m &= \frac{1}{2}(\beta_m + \gamma_m + \alpha_m); \\ c_m + a_m &= \beta_m; & b_m &= \frac{1}{2}(\gamma_m + \alpha_m - \beta_m); \\ a_m + b_m &= \gamma_m; & c_m &= \frac{1}{2}(\alpha_m + \beta_m + \gamma_m) \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

и положим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 F_m}{\partial y \partial z} &= \psi_1(x, y, z); & \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \frac{\partial^2 F_m}{\partial z \partial x} &= \psi_2(x, y, z); \\ \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \frac{\partial^2 F_m}{\partial x \partial y} &= \psi_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Подставив эти значения в формулы (9.11), получим решение Морэра (9.9). Формулы (9.12) и (9.14) представляют функции Максвелла и Морэра в виде рядов; значит, входящие в них параметры  $a_m, b_m,$

$c_m$  и  $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$  следует выбрать так, чтобы ряды сходились и формулы имели смысл.

Заметим, что если в формулах Максвелла (9.4) положим  $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$ , а функция  $\varphi_3 \equiv \varphi(x, y)$  (т. е. не зависит от  $z$ ), то она представляет собой функцию Эри в плоской задаче и формулы (9.4) совпадают с формулами (6.16) главы VI.

### § 57. Уравнения равновесия в цилиндрических координатах. Общее решение их

Цилиндрические координаты были применены в § 47 для решения плоской задачи; пользуясь ими, мы получили дифференциальные уравнения равновесия (I<sub>пп</sub>), в которые, однако, не вошли некоторые компоненты тензора напряжений, соответствующие общей пространственной задаче теории упругости. На рис. 92 показаны эти компоненты:

$$Z_z; R_z = Z_r; Z_\theta = \Theta_z. \quad (9.15)$$

Для вывода дифференциальных уравнений пространственной задачи выделим из тела тот же элемент, который показан на рис. 65 (он повторен и на рис. 92). Приложим к нему напряжения, учтенные в плоской задаче (рис. 66), и те, которые мы ввели вновь; при этом, конечно, следует принять в расчет приращения компонентов (9.15), получаемые ими благодаря приращениям координат  $dr, d\theta, dz$  в процессе перехода от одной грани элемента к другой, как это показано на рис. 66 в отношении компонентов плоской задачи. Проектируя все силы,

приложенные к элементу, на три оси, получим три дифференциальных уравнения равновесия, представляющие собой обобщение уравнений (I<sub>пп</sub>) § 47 плоской задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Theta_z}{\partial z} + \frac{2R_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial Z_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{R_z}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

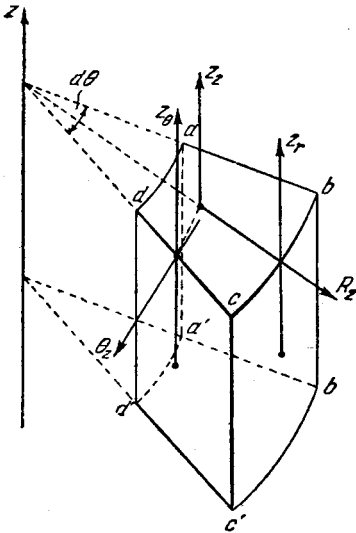


Рис. 92.



Первые три члена каждого из этих уравнений могут быть формально получены из уравнений (9.1) путем замены обозначений:

$$\begin{aligned} x \text{ на } r; \quad \partial x \text{ на } \partial r; \\ y \text{ на } \theta; \quad \partial y \text{ на } r\partial\theta. \end{aligned}$$

Последние члены, содержащие самые компоненты, появляются вследствие криволинейности координатных поверхностей  $r = \text{const}$  (ср. рис. 64); благодаря этому площадка  $add'a'$  (рис. 92) не равна площадке  $bcc'b'$ , а площадки  $cdd'c'$  и  $abb'a'$  не параллельны между собой; эти обстоятельства и влияние их можно проследить на выводе уравнений (I<sub>III</sub>) в § 47.

Для уравнений (9.16), как и для уравнений (9.1), можно получить общее решение, при этом формы его еще более разнообразны, чем в случае декартовых координат (см. указанные выше работы В. И. Блоха и Ю. А. Круткова). Общее решение содержит также три произвольные функции напряжений. Приведем одну из возможных форм решения\*), выраженную через функции напряжений

$$\left. \begin{aligned} & f_1(r, \theta, z); \quad f_2(r, \theta, z); \quad f_3(r, \theta, z); \\ R_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}; \quad \Theta_\theta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}; \quad R_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}; \\ Z_z &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 f_3}{\partial r \partial \theta}; \\ R_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta \partial z}; \\ Z_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f_3}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_3}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Общность этого решения доказывается, как и в § 56, путем определения функций  $f_1, f_2, f_3$  из уравнений первой строки (9.18) и подстановки их в остальные уравнения. Как и в случае плоской задачи в полярных координатах, формулы (9.18) значительно упрощаются, если напряженное состояние не зависит от координаты  $\theta$ ; тогда выпадают все производные по этой координате; получаем

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}; \quad \Theta_\theta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}; \quad R_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}; \\ Z_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial r} \right); \quad R_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial r} \right); \\ Z_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (rf_3)}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Однако внимательное рассмотрение этих формул показывает возмож-

\*) См. работу автора «Некоторые обобщения задачи Ламе для упругого параллелепипеда», Прикладная математика и механика, т. XVII, вып. 4, 1953.

ность дальнейшего упрощения. Действительно, введем вместо  $f_1, f_2, f_3$  три новые функции напряжений:

$$\omega = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}; \quad \psi = f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial r}; \quad \chi = \frac{\partial (rf_3)}{\partial z},$$

откуда найдем

$$f_2 = \psi + \frac{\partial f_1}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

и формулы (9.19) приобретают весьма простой вид:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{\omega}{r}; & \Theta_\theta &= \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; & R_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial z}; \\ R_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; & Z_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; & Z_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Эти формулы позволяют выделить две категории задач, важных в смысле практических приложений.

1. Положим  $\chi = 0$ ; тогда  $R_\theta = Z_\theta = 0$ ; значит (рис. 66 и 92), из касательных напряжений остаются только  $R_z = Z_r$  и получается *осесимметрическое пространственное напряженное состояние*; но согласно закону Гука

$$e_{r\theta} = \frac{1}{\mu} R_\theta = 0; \quad e_{z\theta} = \frac{1}{\mu} Z_\theta = 0,$$

и потому имеет место осесимметрическая пространственная деформация; отличные от нуля компоненты тензора напряжений:  $R_r, \Theta_\theta, Z_z$  и  $R_z = Z_r$  — выражаются через две функции напряжений:  $\omega$  и  $\psi$ .

2. Положим  $\omega = \psi = 0$ . В этом случае отличны от нуля только два компонента тензора напряжений:

$$R_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial z}; \quad Z_\theta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r},$$

выраженные через одну функцию напряжений. Это решение используется в задаче о кручении бруса, имеющего форму тела вращения.

Приведенные в последних двух параграфах общие решения уравнений равновесия сами по себе не дают решения задачи теории упругости, так как содержащиеся в них функции напряжений должны быть определены из условий совместности деформаций (например, из уравнений Бельтрами в декартовых координатах) и условий на поверхности тела; однако эти решения оказывают существенную пользу при вариационном методе решения задач, данном Кастильяно и изложенном в главе XI; там они будут использованы.

## § 58. О функциях гармонических и бигармонических

В предыдущих главах нам приходилось встречаться с функциями гармоническими и бигармоническими. Из дальнейшего будет видно, что решение всех задач теории упругости очень тесно связано с этими функциями; в настоящем и следующем параграфах мы поэтому по-

знакомимся ближе с некоторыми свойствами гармонических и бигармонических функций и общими методами построения последних.

Гармонической называется, как известно, функция

$$\varphi(x, y, z), \quad (9.21)$$

удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (9.22)$$

Гармонические функции иногда называются потенциалами Лапласа или лапласовыми потенциалами. Возьмем декартову систему координат  $x, y, z$  в пространстве; тогда полем функции  $\varphi(x, y, z)$  называется та часть пространства, во всех точках которой функция  $\varphi(x, y, z)$  принимает определенные конечные значения и остается однозначной. Если функция  $\varphi$  является потенциалом, то к ней предъявляется дополнительное требование: необходимо, чтобы в пределах поля существовали ее первые частные производные; часто приходится требовать, чтобы существовали и производные высших порядков; например, из уравнения (9.22) видно, что для лапласова потенциала должны существовать производные по крайней мере второго порядка.

Если мы к функции (9.21) не предъявим никаких других требований кроме того, что она должна удовлетворять уравнению Лапласа, то заметим, что таких функций существует бесконечное множество. В частности, если нам известна какая-либо гармоническая функция, то, исходя из нее, можно получить сколько угодно новых гармонических функций, пользуясь свойством лапласова оператора, указанным в формуле (5.54) § 36. Действительно, если  $\varphi(x, y, z, a, b, c, \dots)$  есть гармоническая функция, причем  $a, b, c, \dots$  — какие-либо параметры или коэффициенты, входящие в ее состав, то легко показать, что частная производная

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где  $t$  — любая из величин  $x, y, z, a, b, c, \dots$ , также есть гармоническая функция. Проверим это:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \varphi;$$

но так как  $\varphi$  есть гармоническая функция, то  $\nabla^2 \varphi = 0$ , а следовательно,

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0,$$

что и требовалось доказать. Ясно, что если существуют последующие производные функции

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \quad \text{и т. д.,}$$

то все они являются также гармоническими функциями.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

или, короче,

$$\varphi = \frac{1}{r}, \quad (9.23)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  есть радиус-вектор от начала координат в точку  $(x, y, z)$ .

Прежде всего покажем, что функция (9.23) есть гармоническая. Предварительно заметим, что из зависимости

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (9.24)$$

получим

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad (9.25)$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r};$$

таким же путем

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}. \quad (9.26)$$

На этом основании из (9.23) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1 \cdot r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}. \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

Аналогично, дифференцируя по  $y$  и по  $z$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{y^2}{r^5}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{z^2}{r^5}. \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

Складывая эти равенства почленно, находим

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -3 \frac{1}{r^3} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -3 \frac{1}{r^3} + 3 \frac{1}{r^3} = 0,$$

что и требовалось доказать. Значит, функция (9.23) является лапласовым потенциалом. Полем этой функции является все безграничное пространство, за исключением одной точки — начала координат, где функция (9.23) обращается в бесконечность.

Градиент функции (9.23) имеет такие проекции на оси координат [ср. формулы (9.27)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{x}{r^3}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{y}{r^3}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

Однако обратим внимание на то, что

$$\frac{x}{r} = \cos(r, x); \quad \frac{y}{r} = \cos(r, y); \quad \frac{z}{r} = \cos(r, z),$$

и тогда формулы (9.29) перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, x), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, y), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, z). \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Отсюда заключаем, что

1) величина градиента равна  $\frac{1}{r^2}$ ;

2) направлен он вдоль радиуса-вектора  $r$  к началу координат.

Такого рода поле получается, если в начале координат находится центр, притягивающий материальную точку по закону всемирного тяготения (обратно пропорционально квадрату расстояния).

Так как функция  $\frac{1}{r}$  есть функция гармоническая, то путем дифференцирования получим из нее ряд новых гармонических функций. Например, уравнения (9.29) дают нам три гармонические функции:

$$-\frac{x}{r^3}, \quad -\frac{y}{r^3}, \quad -\frac{z}{r^3}. \quad (9.31)$$

Функции (9.28), очевидно, также гармонические.

Докажем теперь одну лемму, весьма полезную для последующего: если  $\psi(x, y, z)$  есть гармоническая функция, то имеем тождество

$$\nabla^2(x\psi) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (9.32)$$

в самом деле, дифференцируя последовательно функцию  $x\psi$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) &= \psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\psi) &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y}(x\psi) &= x \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x\psi) &= x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial z}(x\psi) &= x \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x\psi) &= x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Складывая почленно равенства (9.33) и замечая, что  $\nabla^2\psi = 0$  по условию, убедимся в справедливости (9.32). Эта лемма, очевидно, может быть распространена таким образом: если  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  — любые гармонические функции, то

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(x\psi_1) &= 2 \frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \\ \nabla^2(y\psi_2) &= 2 \frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \\ \nabla^2(z\psi_3) &= 2 \frac{\partial\psi_3}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

На основании этих тождеств легко докажем следующую весьма важную теорему. Если  $\varphi(x, y, z)$  — гармоническая функция, то

$$\Phi = x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (9.35)$$

— также гармоническая функция.

Так как производные функции  $\varphi$  будут также гармоническими функциями, то в (9.34) мы имеем право положить

$$\psi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad \psi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad \psi_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

После этого складывая тождества (9.34) почленно, найдем

$$\nabla^2 \left( x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = 2\nabla^2\varphi = 0,$$

что и требовалось доказать.

Функции  $\Phi$  можно дать простое векторное выражение. Действительно, если  $r$  — радиус-вектор точки  $(x, y, z)$ , то

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(r, x), \\ y &= r \cos(r, y), \\ z &= r \cos(r, z). \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

Далее, если  $\nabla\varphi$  есть градиент функции  $\varphi$  или производная ее по нормали  $|\nabla\varphi| = \frac{d\varphi}{dn}$ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{d\varphi}{dn} \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, x\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{d\varphi}{dn} \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, y\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{d\varphi}{dn} \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, z\right). \end{aligned} \right\} \quad (9.37)$$

Подставляя из (9.36) и (9.37) в (9.35), получим

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dn} r \left[ \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, x\right) \cos(r, x) + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, y\right) \cos(r, y) + \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, z\right) \cos(r, z) \right],$$

или

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dn} r \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, r\right). \quad (9.38)$$

Но

$$\frac{d\varphi}{dn} \cos\left(\frac{d\varphi}{dn}, r\right) = \frac{d\varphi}{dr} *;$$

поэтому из (9.38) получаем следующее векторное выражение функции:

$$\Phi = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (9.39)$$

### § 59. Бигармоническое уравнение

Бигармоническим иногда называется дифференциальное уравнение вида

$$\nabla^2 \nabla^2 f(x, y, z) = 0. \quad (9.40)$$

Функция  $f$ , удовлетворяющая этому уравнению, называется бигармонической. Уравнения типа (9.40) играют большую роль в теории упругости. Со случаем, когда функция  $f$  зависит только от двух переменных  $(x, y)$ , мы уже встречались в плоской задаче; там было показано, что функция напряжений должна удовлетворять бигармоническому уравнению (см. § 39)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0.$$

Далее мы покажем, что уравнения Ламе (VI) § 25 при отсутствии объемных сил ( $X=Y=Z=0$ ) и уравнения Бельтрами (VII) § 36 также могут быть приведены к бигармоническим. Имея это в виду, мы сейчас укажем некоторые типы решений бигармонического уравнения, нужные для приложений. Решения эти указаны Буссинеском (Boussinesq); они тесно связаны с гармоническими функциями, чего вполне естественно ожидать, если мы примем во внимание весьма близкое родство между гармоническим уравнением (9.22) и бигармоническим (9.40).

Прежде всего заметим, что всякая гармоническая функция  $\varphi(x, y, z)$  есть решение бигармонического уравнения, так как она удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi = 0$ , а потому и по давню удовлетворяет уравнению (9.40):  $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \nabla^2 0 = 0$ . Таким образом, устанавливаем, что

\*) Это следует из определения понятия производной от функции точки по данному направлению.

первый тип решений уравнения (9.40) представляется любой гармонической функцией.

Покажем теперь, что если  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  — какие-либо гармонические функции, то функции

$$x\psi_1, y\psi_2, z\psi_3 \quad (9.41)$$

будут решениями бигармонического уравнения. Это легко сделать на основании вывода, резюмированного в формулах (9.34). Действительно, применив лапласов оператор к обеим частям первого из равенств (9.34), получим

$$\nabla^2 \nabla^2 (x\psi_1) = 2\nabla^2 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right).$$

Но так как  $\psi_1$  есть гармоническая функция, то  $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$  также будет гармонической; следовательно, правая часть последнего равенства равна нулю, а отсюда

$$\nabla^2 \nabla^2 (x\psi_1) = 0, \quad (9.42)$$

что и требовалось доказать.

Используя тем же путем второе и третье из равенств (9.34), покажем, что и остальные из функций (9.41) являются решениями бигармонического уравнения (9.40). Таким образом, мы приходим ко второму типу решений бигармонического уравнения в форме функций (9.41).

Если мы нашли два решения  $f_1$  и  $f_2$  уравнения (9.40), то сумма их также будет решением этого уравнения. Действительно, легко убедиться в том, что

$$\nabla^2 (f_1 + f_2) = \nabla^2 f_1 + \nabla^2 f_2.$$

Применив еще раз оператор Лапласа к обеим частям этого равенства, получим

$$\nabla^2 \nabla^2 (f_1 + f_2) = \nabla^2 \nabla^2 f_1 + \nabla^2 \nabla^2 f_2;$$

но правая часть этого уравнения равна нулю, так как  $f_1$  и  $f_2$  являются решениями уравнения (9.40). Отсюда следует

$$\nabla^2 \nabla^2 (f_1 + f_2) = 0,$$

что и надо было доказать. Пользуясь этим выводом, мы получим третий тип решений бигармонического уравнения, суммируя решения первого и второго типов:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + x\psi_1, \\ F_2 &= \varphi_2 + y\psi_2, \\ F_3 &= \varphi_3 + z\psi_3, \end{aligned} \right\} \quad (9.43)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  — какие-либо гармонические функции. Конечно, вместо этих функций можно брать любые частные произ-



водные их. Дальше нам понадобятся, например, три решения бигармонического уравнения следующего вида [по типу третьего из уравнений (9.43)]:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ F_2 &= \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ F_3 &= \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9.44)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\psi$  — гармонические функции.

Покажем теперь, что функция вида

$$r^2 \psi \quad (9.45)$$

является решением бигармонического уравнения, если  $\psi$  есть функция гармоническая. Для этой цели займемся составлением лапласова оператора функции (9.45); получаем

$$\frac{\partial (r^2 \psi)}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} \psi + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

но из (9.25) имеем

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad (9.46)$$

следовательно,

$$\frac{\partial (r^2 \psi)}{\partial x} = 2x \psi + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 (r^2 \psi)}{\partial x^2} = 2\psi + 2x \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2r \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

или, пользуясь (9.46),

$$\frac{\partial^2 (r^2 \psi)}{\partial x^2} = 2\psi + 4x \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^2 (r^2 \psi)}{\partial y^2} = 2\psi + 4y \frac{\partial \psi}{\partial y} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 (r^2 \psi)}{\partial z^2} = 2\psi + 4z \frac{\partial \psi}{\partial z} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Складывая последние три равенства почленно, найдем

$$\nabla^2 (r^2 \psi) = 6\psi + 4 \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + r^2 \nabla^2 \psi;$$

так как по предположению  $\psi$  — гармоническая функция, то последний член исчезает и мы получаем

$$\nabla^2(r^2\psi) = 6\psi + 4\left(x \frac{\partial\psi}{\partial x} + y \frac{\partial\psi}{\partial y} + z \frac{\partial\psi}{\partial z}\right). \quad (9.47)$$

Но правая часть этого уравнения есть сумма двух решений гармонического уравнения [ср. формулу (9.35)], а потому она также является гармонической функцией. Следовательно, и левая часть  $\nabla^2(r^2\psi)$  представляет собой гармоническую функцию. Поэтому

$$\nabla^2\nabla^2(r^2\psi) = 0; \quad (9.48)$$

значит, функция (9.45) действительно есть решение бигармонического уравнения. Это есть новый — четвертый — тип решений. Так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

— гармонические функции, то функции

$$r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad r^2 \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad r^2 \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

также будут решениями бигармонического уравнения. Суммируя эти решения с решениями первого типа  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , получим пятый тип решений:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ F_2 &= \varphi_2 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ F_3 &= \varphi_3 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.49)$$

Если к правым частям добавим еще решения первого типа в виде функций

$$-a^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad -a^2 \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad -a^2 \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

где  $a$  — постоянное число, то получим решения следующего — шестого — типа:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + (r^2 - a^2) \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ F_2 &= \varphi_2 + (r^2 - a^2) \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ F_3 &= \varphi_3 + (r^2 - a^2) \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.50)$$

### § 60. Приведение уравнений Ламе и Бельтрами к бигармоническим уравнениям

Найденные нами частные решения бигармонического уравнения типов (9.44) и (9.49) имеют большое значение при решении задачи теории упругости в перемещениях, так как основные в этом методе уравнения Ламе

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X\rho &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y\rho &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z\rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

при отсутствии объемных сил, т. е. при  $X = Y = Z = 0$ , легко приводятся к трем независимым бигармоническим уравнениям. Это обстоятельство значительно облегчает решение задачи.

Отбросив объемные силы, уравнения (VI) напомним в форме (VI')

§ 25:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 v + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 w + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

где согласно (3.17)

$$k = \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma}.$$

Уравнения закона Гука соответственно этому напомним в форме (3.18):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu (2e_{xx} + k\theta), \\ Y_y &= \mu (2e_{yy} + k\theta), \\ Z_z &= \mu (2e_{zz} + k\theta), \\ Y_z &= \mu e_{yz}, \\ Z_x &= \mu e_{zx}, \\ X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

Таким образом, уравнения (9.51) и (9.52) выражены через две упругие постоянные  $\mu$  и  $k$ .

Обращаясь теперь к уравнениям Ламе (9.51), вспомним, что [§ 36, уравнение (5.55)] в нашем случае, когда объемных сил нет, объемная деформация  $\theta$  удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией:

$$\nabla^2 \theta = 0.$$

Производные

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

также будут гармоническими функциями, поэтому

$$\nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \quad \nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0; \quad \nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

На этом основании, применяя к уравнениям (9.51) оператор Лапласа, заметим, что они приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 u &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 v &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.53)$$

Особенно важно то, что эти уравнения независимы, т. е. в каждое из них входит лишь одна из искоемых функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , а так как эти уравнения — бигармонические, то выводы § 59 дадут нам возможность без труда подыскать для них сколько угодно частных решений\*).

Обратимся теперь к уравнениям Бельтрами [(VII) § 36]. Мы имели [см. формулы (5.55) § 36 и (3.14) § 18]  $\nabla^2 \theta = 0$ ,  $\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta$ . Отсюда получим  $\nabla^2 \Theta = 0$ , т. е. при отсутствии объемных сил функция  $\Theta = X_x + Y_y + Z_z$  является гармонической.

Примем еще во внимание, что, например:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 \Theta) = 0;$$

тогда, применив оператор Лапласа к каждому из уравнений Бельтрами (VII), получим

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 X_x &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 Y_z &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 Y_y &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 Z_x &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 Z_z &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 X_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

Значит, при отсутствии объемных сил уравнения Ламе и Бельтрами приводятся к бигармоническим. Отсюда следует весьма важное заключение: все основные неизвестные функции в общей задаче теории упругости:

$$u, \quad v, \quad w; \\ X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y,$$

являются функциями бигармоническими.

\*) Правда, как мы увидим далее, не все эти решения будут удовлетворять исходным уравнениям (9.51).

### § 61. Метод Буссинеска; приложение гармонических функций к разысканию частных решений уравнений Ламе

Соображения §§ 59 и 60 показывают, что решения уравнений Ламе можно разыскивать как бигармонические функции, задавая их выражения в виде (9.44), (9.49) и (9.50); входящие в их состав гармонические функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$  следует определить так, чтобы были удовлетворены уравнения Ламе и заданные граничные условия.

Исследуем решения типа (9.44):

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.55)$$

и решения типа (9.49):

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

Решений типа (9.50) мы не будем использовать, лишь отметим, что они нужны для задачи о равновесии упругого шара. Заметим, однако, следующее: вместо уравнений Ламе (9.51) мы путем дифференцирования получили уравнения (9.53) более высокого порядка, но более простого вида и нашли решения этих уравнений (9.55) и (9.56). Однако нельзя сказать, что (9.55) и (9.56) обязательно явятся также решениями уравнений Ламе (9.51): решения уравнений Ламе всегда будут удовлетворять уравнениям (9.53), так как эти последние являются следствием уравнений Ламе; но благодаря более высокому порядку уравнений (9.53) они будут иметь более широкий класс решений, чем уравнения (9.51). Значит, нам придется установить, при каких условиях (9.55) и (9.56) будут удовлетворять уравнениям (9.51); для этого надо, очевидно, подставить (9.55) и (9.56) в (9.51)\*).

Займемся решением (9.55). Для подстановки в (9.51) вычислим предварительно функции

$$\theta; \quad \nabla^2 u; \quad \nabla^2 v; \quad \nabla^2 w.$$

\*) Заметим, что этот прием мы уже не раз применяли в §§ 32, 33 и 34.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти уравнения и принимая во внимание, что функция  $\psi$  — гармоническая, найдем

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.57)$$

Далее получим

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \varphi_1 + \nabla^2 \left( z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right);$$

так как функции  $\varphi_1$  и  $\psi$  — гармонические, то

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

и согласно (9.34)

$$\nabla^2 \left( z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right),$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 v &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 w &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

буквально так же найдем

Результаты (9.57) и (9.58) вносим в уравнения (9.51):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + (k+1) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + (k+1) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0.$$

Целяя приведение в квадратных скобках, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (k+1) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0.$$

Точно такие же выкладки для второго и третьего уравнений дают

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (k+1) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ (k+1) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0.$$

Эти три уравнения удовлетворяются только при условии

$$(k+1)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) + (k+3)\frac{\partial\psi}{\partial z} = C, \quad (9.59)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Уравнение (9.59) и представляет собой то интересующее нас условие, при котором функции (9.55) будут решением системы уравнений Ламе (9.51). Произвольная постоянная  $C$  в (9.59) роли не играет, и мы положим ее равной нулю\*). Отсюда

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{k+1}{k+3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right). \quad (9.60)$$

Получаем следующий вывод: частное решение системы уравнений Ламе

$$\nabla^2 u + (k+1)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,$$

$$\nabla^2 v + (k+1)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0,$$

$$\nabla^2 w + (k+1)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

можно получить в форме

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 + z \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + z \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + z \frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — произвольные гармонические функции, а гармоническая функция  $\psi$  определяется из уравнения (9.60). Этим путем, очевидно, можно получить огромное количество частных решений, пользуясь имеющейся произвольностью выбора гармонических функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Рассмотрим теперь форму (9.56) решения бигармонических уравнений (9.53) и установим, при каких условиях это решение удовлетворяет уравнениям Ламе (9.51). Составляем на основании (9.56) выражение объемного расширения  $\theta$ . Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}\right); \quad (9.62)$$

---

\*) Действительно, мы, не нарушая общности уравнения (9.59), можем положить  $C = D(k+3)$ , где  $D$  — новая произвольная постоянная; обозначим еще  $\psi - Dz = \psi_1$ , где  $\psi_1$  будет, очевидно, как и  $\psi$ , гармонической функцией, тогда (9.59) получит вид

$$(k+1)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) + (k+3)\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = 0.$$

но

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial (r^2)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

или на основании (9.25)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2x \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Вносим это в (9.62); аналогично вычисляем и остальные производные, нужные для  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2x \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + 2y \frac{\partial \psi}{\partial y} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z \frac{\partial \psi}{\partial z} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

Складывая эти равенства почленно и помня, что

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

найдем

$$\theta = \theta_0 + 2\Phi, \quad (9.64)$$

где введены следующие сокращенные обозначения \*):

$$\theta_0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}, \quad (9.65)$$

$$\Phi = x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.66)$$

Переходим теперь к составлению операторов Лапласа:

$$\nabla^2 u, \quad \nabla^2 v, \quad \nabla^2 w.$$

Первое из уравнений (9.56) дает

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (9.67)$$

так как  $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ .

Для раскрытия правой части (9.67) воспользуемся формулой (9.47), заменив в ней  $\psi$  на  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ :

$$\nabla^2 u = 6 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4 \left( x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right). \quad (9.68)$$

\*) См. формулу (9.39).



Здесь скобку правой части преобразуем на основании следующих соображений:

$$\begin{aligned}x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Складывая почленно эти тождества и пользуясь обозначением (9.66), найдем

$$x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Внося это в (9.68), получим

$$\nabla^2 u = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x} (\psi + 2\Phi). \quad (9.69)$$

Совершенно таким же путем получим

$$\left. \begin{aligned}\nabla^2 v &= 2 \frac{\partial}{\partial y} (\psi + 2\Phi), \\ \nabla^2 w &= 2 \frac{\partial}{\partial z} (\psi + 2\Phi).\end{aligned} \right\} \quad (9.69)$$

Вносим (9.64) и (9.69) в первое из уравнений (9.51):

$$2 \frac{\partial}{\partial x} (\psi + 2\Phi) + (k+1) \frac{\partial}{\partial x} (\theta_0 + 2\Phi) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} [(k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi] = 0.$$

Остальные два из уравнений (9.51) дадут:

$$\frac{\partial}{\partial y} [(k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [(k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi] = 0.$$

Отсюда получаем вывод

$$(k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi = \text{const.}$$

Не уменьшая общности этого уравнения, мы можем постоянную правую часть его положить равной нулю \*); деля все уравнение на  $2(k+3)$ , найдем

$$\Phi + \frac{1}{k+3} \psi = -\frac{k+1}{2(k+3)} \theta_0. \quad (9.70)$$

\* ) Эту постоянную можно присоединить к любой из функций  $\theta_0$  или  $\psi$  в левой части уравнения.

Припомним теперь, что согласно формуле (9.39) § 58 функция  $\Phi$  имеет векторное выражение

$$\Phi = r \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

уравнение (9.70) перепишем так:

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{k+3} \psi = -\frac{k+1}{2(k+3)} \theta_0,$$

или

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \alpha \psi = -\beta \theta_0, \quad (9.71)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{k+3}; \quad \beta = \frac{k+1}{2(k+3)}.$$

Если от декартовых координат  $x, y, z$  перейдем к другой системе, в которой одной из координат является радиус-вектор  $r$  (например, к полярным координатам в пространстве), то производную  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  от функции  $\psi$  по направлению  $r$  можно рассматривать как частную производную  $\psi$  по переменной  $r$ ; при этом, очевидно, предполагается, что две другие координаты, определяющие направление радиуса-вектора  $r$ , остаются постоянными. Если эти же рассуждения приложим и к функции  $\theta_0$ , то уравнение (9.71) можно будет рассматривать как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно функции  $\psi$ . Интегрируя его, найдем  $\psi$  как функцию от радиуса-вектора  $r$ ; однако произвольная постоянная, которая при этом войдет, будет, вообще говоря, зависеть от двух других координат, т. е. будет зависеть от направления радиуса-вектора  $r$ .

Уравнение (9.71) интегрируем обычным способом подстановки:

$$\psi = UV, \quad (9.72)$$

где  $U$  и  $V$  — две новые функции от  $r$ . Подставляя это в (9.71), находим

$$r(UV' + U'V) + \alpha UV = -\beta \theta_0,$$

или

$$rUV' + (rU' + \alpha U)V = -\beta \theta_0. \quad (9.73)$$

Подбираем функцию  $U$  из условия

$$rU' + \alpha U = 0 \quad \text{или} \quad r \frac{\partial U}{\partial r} = -\alpha U. \quad (9.74)$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{U} = -\alpha \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln U = -\alpha \ln r \quad \text{или} \quad U = r^{-\alpha}. \quad (9.75)$$

На основании (9.74) и (9.75) уравнение (9.73) получает вид

$$r^{-\alpha+1} \frac{dV}{dr} = -\beta \theta_0,$$

или

$$\frac{dV}{dr} = -\beta r^{\alpha-1} \theta_0.$$

Умножая обе части на  $dr$  и интегрируя, находим

$$V = -\beta \int \theta_0 r^{\alpha-1} dr + C.$$

Подставляя отсюда и из (9.75) в (9.72), находим функцию  $\psi$ :

$$\psi = -\beta r^{-\alpha} \int \theta_0 r^{\alpha-1} dr + Cr^{-\alpha}. \quad (9.76)$$

Здесь, как указано выше, постоянная  $C$ , вообще говоря, зависит от направления радиуса-вектора  $r$ , т. е. при  $C$ , равном постоянному числу, (9.76) дает закон изменения функции  $\psi$  при движении по выбранному направлению, проведенному из начала координат.

### § 62. Действие нагрузки на среду, ограниченную плоскостью (задача Буссинеска)

Аналогичная задача рассматривалась нами в § 49 для случая плоской деформации; там мы предполагали, что нагрузка равномерно распределена по безграничной прямой на плоскости, ограничивающей среду. Здесь мы укажем метод решения задачи в общем случае, когда на рассматриваемую среду действует произвольная нагрузка; самую среду для краткости будем называть полупространством, а плоскость, ее ограничивающую, — границей.

Начало координат выберем где-либо на границе; оси  $Ox$  и  $Oy$  направим в граничной плоскости, а ось  $Oz$  нормально к ней по внешней нормали. Тогда интересующую нас задачу можно формулировать так: требуется найти напряжения и перемещения в любой точке полупространства (т. е. для любых  $x$ ,  $y$  и  $z < 0$ ), если на границе  $z = 0$  заданы напряжения от нагрузки  $X_z$ ,  $Y_z$ ,  $Z_z$  как функции от  $x$  и  $y$ . Если бы на границе были заданы не напряжения, а перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , то решение задачи можно было бы найти прямо в форме (9.61). Действительно, если задано, что при  $z = 0$  на границе

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y); \quad w = f_3(x, y),$$

то, полагая в (9.61)  $z = 0$ , найдем, что

$$\varphi_1(x, y, 0) = f_1(x, y); \quad \varphi_2(x, y, 0) = f_2(x, y); \quad \varphi_3(x, y, 0) = f_3(x, y).$$

Значит, гармонические функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  надо найти из условия, чтобы на границе  $z = 0$  они обращались в заданные функции  $f_1$ ,  $f_2$

и  $f_3$ ; это есть основная краевая задача теории потенциала, допускающая вполне определенное решение; определив функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , далее по (9.60) найдем функцию  $\psi$  и, внося все это в (9.61), закончим решение задачи.

Однако мы считаем заданными на границе напряжения, и потому ход решения задачи придется несколько осложнить. Пусть напряжения на границе заданы в виде функций от  $x$  и  $y$  следующим образом:

$$Z_x = \Phi_1(x, y); \quad Z_y = \Phi_2(x, y); \quad Z_z = \Phi_3(x, y). \quad (9.77)$$

Так как мы решаем задачу в перемещениях (гл. IV, § 24), то левые части этих равенств выразим через перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$ , пользуясь законом Гука (9.52) и уравнениями Коши (III) § 24:

$$\left. \begin{aligned} \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} + k\theta \right) &= \Phi_1, \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \Phi_2, \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \Phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.78)$$

Эти уравнения справедливы только на границе, т. е. при  $z=0$ . Теперь предположим, что мы нашли три гармонические функции:

$$\omega_1(x, y, z); \quad \omega_2(x, y, z); \quad \omega_3(x, y, z),$$

такие, что на границе  $z=0$  они обращаются в заданные нами функции (9.77) с точностью до постоянного множителя  $\mu$ , который мы вводим для упрощения дальнейших выкладок:

$$\left. \begin{aligned} \mu \omega_1(x, y, 0) &= \Phi_1(x, y), \\ \mu \omega_2(x, y, 0) &= \Phi_2(x, y), \\ \mu \omega_3(x, y, 0) &= \Phi_3(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (9.79)$$

Внесем отсюда значения  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  в правые части уравнений (9.78), а в левых заменим  $u$ ,  $v$  и  $w$  их выражениями из (9.61) и (9.57); получаем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + k \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= \omega_1, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} &= \omega_2, \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \omega_3. \end{aligned}$$

В этих уравнениях отбросим члены, имеющие множитель  $z$  (так как на границе  $z=0$ ), и заметим, что на основании (9.57) и (9.60)

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{k+3}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.80)$$

Тогда предыдущие уравнения получат такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \omega_1, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \omega_2, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.81)$$

Эти уравнения, как мы уже говорили, имеют место на границе полупространства. Однако как левые, так и правые части их являются гармоническими функциями; известно, что если две гармонические функции совпадают на границе области, то они тождественно одинаковы во всей области\*). Отсюда следует, что уравнения (9.81) справедливы во всем полупространстве  $z < 0$ . Это заключение позволит нам, исключив из (9.81) и (9.60) три функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , выразить  $\psi$  через  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , которые предполагаются уже определенными ранее для любой точки полупространства.

Продифференцируем первое из уравнений (9.81) по  $z$ , второе по  $x$  и третье по  $y$  и сложим результаты почленно; в полученном при этом уравнении исчезает ряд членов, так как функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и  $\psi$  — гармонические, и потому

$$\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = \nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \psi = 0.$$

Мы найдем следующий результат:

$$-\frac{k-1}{k+1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y}.$$

Чтобы исключить отсюда функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , воспользуемся уравнением (9.60) и получим окончательно

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right). \quad (9.82)$$

После этого ход решения задачи представится в следующем виде:

1. По заданным функциям  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  [см. уравнения (9.77)] найдем гармонические функции  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , удовлетворяющие на границе условиям (9.79).

2. Из (9.82) двукратным интегрированием находим функцию  $\psi$ .

3. Из (9.81) разыскиваем гармонические функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ .

4. Внося значения  $\psi$  и  $\varphi$  в (9.61), находим перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

5. Из закона Гука (9.52) находим напряжения в произвольной точке полупространства.

В последующем мы ограничимся такими случаями нагрузки на границе, когда равнодействующая ее есть величина конечная. Тогда

\*) Эта теорема справедлива, если указанные функции не только удовлетворяют уравнению Лапласа, но, кроме того, нигде в области существования не имеют особенностей и, в частности, не обращаются в бесконечность.

при безграничном возрастании  $z$  (т. е. для бесконечно удаленного горизонтального сечения полупространства) все перемещения и напряжения должны стремиться к нулю; отсюда на основании уравнений (9.61) замечаем, что при  $z \rightarrow -\infty$  функция  $\psi$  и первые ее производные также должны стремиться к нулю. Замечанием этим мы воспользуемся при определении функции  $\psi$  из уравнения (9.82). Интегрируя его дважды по  $z$  в пределах от  $-\infty$  до произвольного значения  $z$ , получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = - \int_{-\infty}^z \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz + f_1(x, y),$$

$$\psi = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz + z f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Но при  $z = -\infty$  левые части обоих этих равенств по условию должны обращаться в нуль; так как при этом интегралы правых частей также обращаются в нуль, то заключаем, что

$$f_1 = f_2 = 0,$$

и получаем окончательно:

$$\psi = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz. \quad (9.83)$$

Первый этап указанного выше хода решения нашей задачи ставит нас перед необходимостью решить краевую задачу Дирихле для гармонических функций  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  [см. формулы (9.79)]. Однако эта задача, как показал Буссинеск, легко решается в том случае, когда нагрузка состоит из одной сосредоточенной силы, приложенной к какой-либо точке границы; отсюда к случаю произвольной нагрузки можно перейти примерно таким же приемом, какой мы в § 49 применили к соответственной плоской задаче.

### § 63. Действие нормальной к границе сосредоточенной силы, приложенной в начале координат

Условия на границе полупространства [см. уравнения (9.77)] в этом случае таковы:

1. Функции  $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$  на всей границе.

2. Функция  $\Phi_1$  равна нулю на всей границе, за исключением начала координат ( $x = y = 0$ ), где она обращается в бесконечность.

Из этих условий нам следует найти [ср. условия (9.79)] гармонические функции  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Но можно доказать, что если гармоническая функция равна нулю на границе области, то она равна

нулю и всюду в области; поэтому из условий  $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$  на границе полупространства мы заключаем, что  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  во всем полупространстве.

Остается найти функцию  $\omega_1(x, y, z)$  из условия, что на всей границе ( $z=0$ ) она равна нулю, за исключением начала координат ( $x=y=z=0$ ), где она имеет особенность, ибо обращается в бесконечность; характер этой особенности надо ближе рассмотреть, чтобы точнее определить поведение функции на границе и вблизи особой точки.

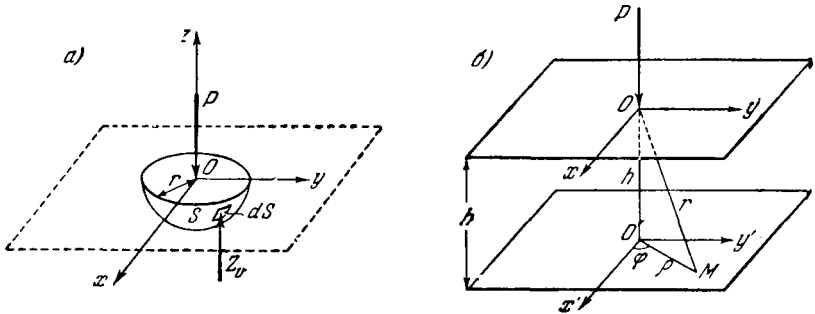


Рис. 93.

Вырежем из полупространства полусферу радиусом  $r$  с центром в начале координат  $O$ ; из условия равновесия этой полусферы следует (рис. 93, а), что

$$\int Z_v dS = P,$$

где  $Z_v$ , как обычно, обозначает проекцию на ось  $Oz$  напряжения по площадке  $dS$  поверхности полусферы; интеграл распространен на поверхность полусферы. По теореме о среднем значении интеграла получаем

$$\int Z_v dS = Z_{vm} \int dS = Z_{vm} \cdot 2\pi r^2,$$

где  $Z_{vm}$  — некоторое среднее напряжение на поверхности полусферы. Отсюда

$$Z_{vm} \cdot 2\pi r^2 = P$$

и, наконец,

$$Z_{vm} = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{C}{r^2}. \tag{9.84}$$

Это заключение относится к некоторому среднему напряжению на поверхности полусферы; однако отсюда можно сделать важный вывод, что вообще напряжения в полупространстве от действия силы  $P$  при приближении к точке ее приложения возрастают со скоростью того же порядка, как и (9.84), где  $r$  — расстояние от данной точки до точки приложения силы.

Но, как видно из (9.77) и (9.79), функция  $\omega_1$  есть величина того же порядка, как и напряжение; значит, она также должна:

1) обращаться в нуль всюду на границе, кроме начала координат;

2) обращаться в бесконечность такого же порядка, как  $\frac{1}{r^2}$  при  $r \rightarrow 0$ ;

3) быть функцией гармонической, т. е. удовлетворять уравнению  $\nabla^2 \omega_1 = 0$  всюду, кроме начала координат \*).

Всем этим условиям удовлетворяет последняя из функций (9.31), указанных в § 58; мы возьмем ее в форме

$$\omega_1 = \frac{Cz}{r^3},$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования; далее ее мы свяжем с величиной силы  $P$ . Таким образом, примем

$$\omega_1 = \frac{Cz}{r^3}; \quad \omega_2 = \omega_3 = 0. \quad (9.85)$$

Переходим к разысканию функции  $\psi$ ; из уравнения (9.83) имеем

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz dz = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \omega_1 dz.$$

Но в § 58 мы видели, что [ср. (9.27)]

$$\frac{z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{r} \right).$$

Поэтому

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{C}{r} \right) dz = \frac{C}{2} \frac{1}{r}. \quad (9.86)$$

Вычисляем функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  из уравнений (9.81). Первое из них дает

$$2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \omega_1 - \frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{Cz}{r^3} + \frac{2}{k+1} \frac{C}{2} \frac{z}{r^3} = \frac{k+2}{k+1} \frac{Cz}{r^3},$$

но

$$\frac{k+2}{k+1} = 2(1-\sigma).$$

Поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} &= C(1-\sigma) \frac{z}{r^3}, \\ \varphi_3 &= -\frac{C(1-\sigma)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (9.87)$$

\*) Кроме того, как указывалось выше относительно уравнений (9.81), она всюду должна оставаться конечной в полупространстве, т. е. при  $z < 0$ , в том числе при стремлении  $x$ ,  $y$ ,  $z$  к бесконечности.



Пользуясь вторым из уравнений (9.81), находим  $\varphi_1$ :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} \frac{x}{r^3},$$

$$\varphi_1 = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} x \int \frac{dz}{r^3}.$$

Чтобы взять этот интеграл, припомним, что

$$r = \sqrt{z^2 + \xi^2}, \quad \text{где } \xi^2 = x^2 + y^2,$$

и применим подстановку Эйлера

$$r = t + z,$$

где  $t$  — новая переменная. Имеем

$$z = -\frac{t^2 - \xi^2}{2t}; \quad dz = -\frac{t^2 + \xi^2}{2t^2} dt; \quad r = \frac{t^2 + \xi^2}{2t}.$$

Внося это в интеграл, получим

$$\int \frac{dz}{r^3} = -4 \int \frac{t dt}{(t^2 + \xi^2)^2} = \frac{2}{t^2 + \xi^2} = \frac{1}{r(r-z)},$$

и потому

$$\varphi_1 = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} \frac{x}{r(r-z)}. \quad (9.88)$$

Пользуясь третьим из уравнений (9.81), совершенно так же находим \*)

$$\varphi_2 = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} \frac{y}{r(r-z)}. \quad (9.89)$$

Теперь нам остается найденные функции (9.86), (9.87), (9.88) и (9.89) внести в уравнения (9.61), и мы получим следующие выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{C}{2} \left[ (1-2\sigma) \frac{x}{r(r-z)} + \frac{xz}{r^3} \right], \\ v &= -\frac{C}{2} \left[ (1-2\sigma) \frac{y}{r(r-z)} + \frac{yz}{r^3} \right], \\ w &= -\frac{C}{2} \left[ 2(1-\sigma) \frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.90)$$

В дополнение мы выведем выражение объемного расширения, необходимое при разыскании напряжений. Для этой цели проще всего

\*) Здесь, как и в (9.87) и (9.88), при вычислении неопределенных интегралов отброшены произвольные постоянные из того соображения, что функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  при  $z \rightarrow \infty$  должны обращаться в нуль.

воспользоваться уравнением (9.80), внося в него значение функции  $\psi$  из (9.86):

$$\theta = -\frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{C}{k+1} \frac{z}{r^3} = C(1-2\sigma) \frac{z}{r^3}. \quad (9.91)$$

Имея выражения (9.90) и (9.91), можем вычислить компоненты напряжения по формулам закона Гука (9.52) и уравнениям Коши (III). Опуская соответствующие выкладки, приводим окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= C\mu \left\{ \frac{3x^2z}{r^5} - (1-2\sigma) \left[ \frac{r^2 + rz - z^2}{r^3(r-z)} - \frac{x^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right\}, \\ Y_y &= C\mu \left\{ \frac{3y^2z}{r^5} - (1-2\sigma) \left[ \frac{r^2 + rz - z^2}{r^3(r-z)} - \frac{y^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right\}, \\ Z_z &= 3C\mu \frac{z^3}{r^5}, \\ Y_z &= 2C\mu \frac{yz^2}{r^5}, \\ Z_x &= 3C\mu \frac{xz^2}{r^5}, \\ X_y &= C\mu \left[ \frac{3xyz}{r^5} + (1-2\sigma) \frac{xy(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.92)$$

Теперь остается определить вошедшую в выражения напряжений постоянную  $C$  таким образом, чтобы нагрузка на границе (в начале координат) приводилась к заданной силе  $P$ . Для этого достаточно потребовать, чтобы равнодействующая нормальных усилий  $Z_z dS$  (рис. 93, б) по любому горизонтальному сечению полупространства на постоянной глубине  $z = -h$  была равна  $-P$  (под  $P$  разумеем абсолютную величину силы и предполагаем ее сжимающей). Отсюда получаем условие

$$\int Z_z dS = -P,$$

где интеграл распространяется на всю плоскость  $z = -h$ , параллельную границе. Подставляя вместо  $Z_z$  его выражение (9.92), найдем

$$-3C\mu h^3 \int \frac{dS}{r^5} = -P. \quad (9.93)$$

Для вычисления имеющегося здесь интеграла мы (рис. 93, б) воспользуемся полярными координатами  $\rho$  и  $\varphi$ . К этим переменным преобразуем интеграл. Получаем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} = \sqrt{\rho^2 + h^2}.$$

Элемент площади в полярных координатах, как известно, будет  $dS = \rho d\rho d\varphi$ . Внося все это в интеграл равенства (9.93), будем иметь

$$3C\mu h^3 \int \int \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = P,$$

или

$$3C\mu h^3 \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi = P;$$

выполняем интегрирование по  $\varphi$ , а затем по  $\rho$ :

$$\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{(\rho^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}}{\left(-\frac{3}{2}\right)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{3h^3}.$$

Таким образом, предыдущее уравнение дает

$$3C\mu h^3 \cdot 2\pi \frac{1}{3h^3} = P,$$

а отсюда

$$C\mu \cdot 2\pi = P; \quad C = \frac{P}{2\pi\mu}. \quad (9.94)$$

Остается внести это значение  $C$  в уравнения (9.92) и (9.90), и мы получим окончательные выражения напряжений и перемещений.

Относительно формул (9.90) и (9.92) необходимо сделать такую же оговорку, какую мы делали в начале § 49 для аналогичной плоской задачи: выражения (9.90) и (9.92) справедливы во всем полупространстве, за исключением небольшой области вблизи начала координат (точка приложения сосредоточенной силы), где напряжения переходят предел упругости данного материала. В этой области закон Гука, на котором основан весь вывод, не имеет места; пригодность нашего вывода в остальной части полупространства, как и в задаче § 49, определяется принципом Сен-Венана.

Продланное нами решение задачи о действии сосредоточенной силы на границу полупространства основывалось на выражениях перемещений в форме (9.55) при условии (9.60).

Аналогичным путем решается задача о действии сосредоточенной силы в точке неограниченного пространства; для этого следует в качестве исходного пункта взять выражения перемещений (9.56) при условии (9.76)\*).

Ляв показал, что решение Буссинеска (9.90) и (9.92) для сосредоточенной силы может быть распространено на случай распределенной нагрузки интенсивности  $q(\xi, \eta)$ , находящейся на границе полупространства, где  $\xi, \eta$  — координаты некоторой точки нагруженной части границ; тогда можем принять, что на элементарной площадке  $dS$  в этой точке приложена элементарная сосредоточенная сила

$$q(\xi, \eta) dS. \quad (9.95)$$

\* См. Тр е ф ф ц, Математическая теория упругости, ГТТИ, 1932 г., стр. 74.

Суммируя действие таких сил, получим перемещения и напряжения в упругом полупространстве от заданной распределенной нагрузки. Формулы Лява для перемещений в этом случае даны в его курсе теории упругости, а также в «Курсе теории упругости» Л. С. Лейбензона.

Очень просто получается наиболее важная в приложениях формула для перемещения  $w$  точки на границе  $z=0$ , перпендикулярного к ней; для элементарной нагрузки (9.95) имеем согласно третьей из формул (9.90) и формуле (9.94), полагая  $z=0$ :

$$\delta w = - \frac{q(\xi, \eta) dS}{4\pi\mu} 2(1-\sigma) \frac{1}{r'},$$

где

$$r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

есть расстояние от груза (9.95) до точки границы  $(x, y)$ , в которой определяется перемещение. Выражение  $\delta w$  следует просуммировать по координатам  $\xi$  и  $\eta$  для всех точек нагруженной области; получим выражение полного вертикального перемещения точки  $(x, y)$  границы:

$$w = - \frac{1-\sigma}{2\pi\mu} \int \frac{q(\xi, \eta)}{r'} dS = - \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \int \frac{q(\xi, \eta)}{r'} d\xi d\eta. \quad (9.96)$$

Случай нагрузки, распределенной на границе полупространства, послужил Герцу исходным пунктом для решения задачи о сжатии двух тел, ограниченных кривыми поверхностями. В теории Герца формула (9.96) является основной. Эта же формула лежит в основе многих работ, касающихся теории расчета грунтов как упругих оснований для различного рода зданий и сооружений.

Мы рассмотрели в этом параграфе случай сосредоточенной силы, нормальной к границе полупространства. Если сила  $P$  направлена в плоскости основания, например, вдоль оси  $Ox$ , то весь ход решения изменится лишь в том смысле, что вместо (9.85) надо положить

$\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\omega_2 = \frac{Cz}{r^3}$  и соответственно выполнить все последующие выкладки.

Имея решения для случаев вертикальной и горизонтальной сил, можно, конечно, получить отсюда перемещения и напряжения для силы, наклоненной к границе под произвольным углом.

Рассмотренные в настоящем параграфе решения Буссинеска вида (9.55) и (9.56), выраженные через три произвольные гармонические функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , не являются общими решениями уравнений теории упругости, хотя они и позволяют решить большое количество задач. Общее решение, выражающееся при отсутствии объемных сил через три произвольные бигармонические функции, найдено академиком Б. Г. Галеркиным\*).

\*) См., например, Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, Гостехиздат, гл. IV, § 16, 1950.

**§ 64. Решение плоской задачи теории упругости  
в функциях комплексной переменной**

В предыдущих параграфах (58—63) было выяснено важное значение гармонических функций от трех переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  при построении решений основных уравнений теории упругости. Обращаясь к плоской задаче, заметим, что здесь мы будем иметь дело с гармоническими функциями на плоскости, которые весьма тесно связаны с аналитическими функциями комплексной переменной

$$z = x + iy.$$

Сейчас мы приведем достаточно простые выкладки формального характера, которые подтвердят эту связь и вместе с тем будут полезны для последующего. Заменяем независимые переменные  $x$  и  $y$  другими переменными  $z$  и  $\bar{z}$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy, \\ \bar{z} &= x - iy. \end{aligned} \right\} \quad (9.97)$$

Очевидно, что  $z$  и  $\bar{z}$  — два взаимно сопряженных комплексных числа. Дифференцируя (9.97) по  $x$  и по  $y$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1; & \frac{\partial z}{\partial y} &= i, \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= 1; & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} &= -i. \end{aligned} \right\} \quad (9.98)$$

Рассмотрим какую-либо функцию  $f(x, y)$  и предположим, что независимые переменные ее  $x$  и  $y$  заменены переменными  $z$  и  $\bar{z}$  согласно (9.97). Тогда при дифференцировании этой функции по  $x$  и по  $y$  необходимо применить правило дифференцирования сложной функции. Например:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x},$$

или, пользуясь (9.98), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial z} i - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} i. \end{aligned} \right\} \quad (9.99)$$

и аналогично

Из (9.99) сейчас же находим равенства, нужные для последующего:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.100)$$

Дифференцируя (9.99) соответственно по  $x$  и по  $y$  и снова пользуясь (9.98), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, получим формулу преобразования лапласова оператора к переменным  $z$  и  $\bar{z}$ :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (9.101)$$

Значит, уравнение Лапласа  $\nabla^2 f = 0$  в новых переменных получает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0,$$

и потому сразу найдем общее его решение в форме

$$f = F_1(z) + F_2(\bar{z}), \quad (9.102)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные аналитические функции переменных  $z$  и  $\bar{z}$  (соответственно). Правильность решения (9.102) проверяется дифференцированием.

Значит, всякая гармоническая функция согласно (9.102) может быть представлена в виде суммы двух функций комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$ . Это обстоятельство лежит в основе нескольких способов приложения комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. Наиболее важные заслуги в этом отношении принадлежат Г. В. Колосову\*) и особенно Н. И. Мусхелишвили, развившему метод Г. В. Колосова и построившему законченную теорию этого вопроса\*\*). Исследования Н. И. Мусхелишвили и созданный им метод нашли широкое применение и легли в основу большого количества работ, составивших особое направление в развитии теории упругости за последние десятилетия.

\*) Г. В. Колосов, Об одном приложении функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости, Юрьев, 1909 г.

\*\*\*) Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, АН СССР, 1933, 1935 и 1949 гг.

Из более ранних исследований следует отметить работу А. Лява, изложенную в его курсе теории упругости, а также способ, предложенный Л. Файлоном еще в 1903 г. Файлон показал, что путем замены переменных, рассмотренной в предыдущем параграфе, можно привести уравнения Ламе в плоской задаче к виду, допускающему интегрирование в квадратурах и найти общее решение их. Однако он не дал каких-либо существенных применений полученного важного результата, и способ остался забытым. Решение Файлона мы здесь изложим, так как оно получается простым и естественным ходом рассуждений и позволит читателю подойти к тому этапу исследования, начиная с которого открываются пути к эффективному методу решения конкретных задач, разработанному Н. И. Мусхелишвили и его школой.

### § 65. Метод Л. Файлона

Рассмотрим случай плоской деформации при отсутствии объемных сил; уравнения Ламе для этого случая получим из (9.51) § 60, положив  $w = 0$  и считая  $u$  и  $v$  функциями только от  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 v + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.103)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9.104)$$

Для преобразования к новым независимым переменным  $z$  и  $\bar{z}$  умножим второе из уравнений (9.103) на  $\pm i$  и сложим с первым; получим следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 (u + iv) + (k+1) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= 0, \\ \nabla^2 (u - iv) + (k+1) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.105)$$

Заменим теперь искомые функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  новыми  $U$  и  $\bar{U}$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} U &= u + iv, \\ \bar{U} &= u - iv. \end{aligned} \right\} \quad (9.106)$$

Пользуясь (9.99), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= i \frac{\partial v}{\partial z} - i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, имеем

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u - iv)$$

или на основании (9.106)

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}. \quad (9.107)$$

Таким образом,  $\theta$  выражено через новые функции (9.106) и новые независимые переменные  $z$  и  $\bar{z}$ . Далее, для преобразования (9.105) имеем из (9.101) и (9.100)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(u + iv) = \nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ \nabla^2(u - iv) = \nabla^2 \bar{U} = 4 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial \bar{z}}; \end{aligned} \right\} \quad (9.108)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} - i \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.109)$$

Внося (9.108) и (9.109) в уравнения (9.105), представим их в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (k+1) \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) + 2 \frac{\partial U}{\partial z} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ (k+1) \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) + 2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, получим (после небольшого приведения в квадратных скобках)

$$\begin{aligned} (k+3) \frac{\partial U}{\partial z} + (k+1) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} &= f'_1(z); \\ (k+1) \frac{\partial U}{\partial z} + (k+3) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} &= f'_2(\bar{z}), \end{aligned}$$

где  $f'_1(z)$  и  $f'_2(\bar{z})$  — произвольные аналитические функции переменных, показанных в скобках. Штрихами обозначены производные от них. Решаем последние уравнения относительно  $\partial U / \partial z$  и  $\partial \bar{U} / \partial \bar{z}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{1}{4k+8} [(k+3)f'_1(z) - (k+1)f'_2(\bar{z})], \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4k+8} [(k+3)f'_2(\bar{z}) - (k+1)f'_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.110)$$



Интегрируя эти уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{4k+8} [(k+3)f_1(z) - (k+1)zf_2'(z) + \varphi_2(z)], \\ \bar{U} &= \frac{1}{4k+8} [(k+3)f_2(\bar{z}) - (k+1)\bar{z}f_1'(z) + \varphi_1(z)]. \end{aligned} \right\} (9.111)$$

где  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(\bar{z})$  — две новые произвольные аналитические функции переменных  $z$  и  $\bar{z}$  (соответственно). Выражения (9.111) дают общее решение уравнений Ламе (9.103); зная  $U$  и  $\bar{U}$ , можем по (9.106) найти компоненты перемещения  $u$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{U + \bar{U}}{2}, \\ v &= \frac{U - \bar{U}}{2i} = i \frac{\bar{U} - U}{2}. \end{aligned}$$

Таким путем получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{8(k+2)} \{ (k+3)[f_1(z) + f_2(\bar{z})] - \\ &\quad - (k+1)[zf_2'(z) + \bar{z}f_1'(z)] + \varphi_1(z) + \varphi_2(\bar{z}) \}, \\ v &= \frac{i}{8(k+2)} \{ (k+3)[f_2(\bar{z}) - f_1(z)] - \\ &\quad - (k+1)[\bar{z}f_1'(z) - zf_2'(\bar{z})] + \varphi_1(z) - \varphi_2(\bar{z}) \}. \end{aligned} \right\} (9.112)$$

В дополнение к этим формулам напишем выражение объемного расширения, пользуясь (9.107) и (9.110):

$$\theta = \frac{1}{2(k+2)} [f_1'(z) + f_2'(\bar{z})]. \quad (9.113)$$

Для определения компонентов напряженного состояния примем во внимание закон Гука, исходя из уравнений (9.52):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + k\theta \right), \\ Y_y &= \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} + k\theta \right), \\ Z_z &= \mu k\theta, \\ X_y &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (9.114)$$

Внося сюда значения  $u$ ,  $v$  и  $\theta$  из (9.112) и (9.113), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{4(k+2)} \left\{ 2(k+1)[f'_1(z) + f'_2(\bar{z})] - \right. \\ &\quad \left. - (k+1)[zf''_2(\bar{z}) + \bar{z}f''_1(z)] + \varphi'_1(z) + \varphi'_2(\bar{z}) \right\}, \\ Y_y &= \frac{\mu}{4(k+2)} \left\{ 2(k+1)[f'_1(z) + f'_2(\bar{z})] + \right. \\ &\quad \left. + (k+1)[zf''_2(\bar{z}) + \bar{z}f''_1(z)] - \varphi'_1(z) - \varphi'_2(\bar{z}) \right\}, \\ X_y &= \frac{\mu i}{4(k+1)} \left\{ (k+1)[- \bar{z}f''_1(z) + zf''_2(\bar{z})] + \right. \\ &\quad \left. + \varphi'_1(z) - \varphi'_2(\bar{z}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.115)$$

Правые части формул (9.112), (9.113) и (9.115), вообще говоря, являются функциями комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$ , однако по смыслу самой задачи они должны быть действительными. Этого мы достигнем, если четыремя пока произвольными аналитическими функциями

$$f_1(z), f_2(\bar{z}), \varphi_1(z) \text{ и } \varphi_2(\bar{z}) \quad (9.116)$$

распорядимся так, чтобы было

$$\left. \begin{aligned} f_2(\bar{z}) &= \bar{f}_1(\bar{z}), \\ \varphi_2(\bar{z}) &= \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \end{aligned} \right\} \quad (9.117)$$

где  $\bar{f}_1(\bar{z})$  и  $\bar{\varphi}_1(\bar{z})$  — выражения, сопряженные  $f_1(z)$  и  $\varphi_1(z)$  соответственно, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \chi(x, y) + i\psi(x, y), \\ \varphi_1(z) &= \chi_1(x, y) + i\psi_1(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (9.118')$$

то

$$\left. \begin{aligned} f_2(\bar{z}) &= \bar{f}_1(\bar{z}) = \chi(x, y) - i\psi(x, y), \\ \varphi_2(\bar{z}) &= \bar{\varphi}_1(\bar{z}) = \chi_1(x, y) - i\psi_1(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (9.118'')$$

В самом деле, нетрудно показать, что при соблюдении условий (9.117) перемещения  $u$  и  $v$ , определяемые равенствами (9.112), а следовательно, и напряжения (9.115) будут действительными величинами.

В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} f'_1(z) &= \frac{\partial \chi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ f'_2(\bar{z}) &= \frac{\partial \chi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (9.119)$$

и, пользуясь (9.97), без труда найдем, что

$$\begin{aligned} z f'_2(\bar{z}) + z f'_1(z) &= 2 \left( x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right); \\ \bar{z} f'_1(z) - z f'_2(\bar{z}) &= 2i \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Подставляя все это в (9.112) и (9.113), получим после сокращения и упрощения

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4(k+2)} \left[ (k+3)\chi(x, y) - (k+1) \left( x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \chi_1 \right], \\ v &= \frac{1}{4(k+2)} \left[ (k+3)\psi(x, y) + (k+1) \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - \psi_1 \right], \\ \theta &= \frac{1}{k+2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (9.120)$$

где функции  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\chi_1$ ,  $\psi_1$  связаны уравнениями Коши — Римана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; & \frac{\partial \chi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}; & \frac{\partial \chi_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (9.121)$$

Таким образом, формулы (9.120) при условии (9.117) дают для  $u$ ,  $v$  и  $\theta$  действительные значения, что и требовалось доказать. Очевидно, что при этом формулы (9.115) дадут действительные значения компонентов напряженного состояния. Благодаря наличию условий (9.121) все входящие сюда функции  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\chi_1$ ,  $\psi_1$  являются гармоническими.

Формулы (9.120) при условиях (9.121) дают общее решение плоской задачи для случая плоской деформации в функциях от действительных переменных  $x$ ,  $y$ .

Однако можно вести дальнейшее решение в функциях комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$ , взяв за основу полученные выше формулы (9.111) — (9.115) и (9.117). Действительно, отсюда легко получить исходные формулы указанных в конце § 64 методов А. Лява и Н. И. Мусхелишвили.

В дополнение к последней из формул (9.120) выведем выражение компонента вращения

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пользуясь формулами (9.112), (9.117) и (9.118), получаем

$$2\omega_z = \frac{i}{2} [\bar{f}'_1(\bar{z}) - f'_1(z)] = \frac{i}{2} \left( -2i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$(k+2)\theta + i2\omega_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

или на основании (9.119) находим

$$(k+2)\theta + 2i\omega_z = f'_1(z). \quad (9.122)$$

Эта формула получена А. Лявом из уравнений Ламе (9.103) и является исходной в его методе.

В методе Н. И. Мусхелишвили исходными являются:

1) первая из формул (9.111), которая на основании (9.117) примет вид

$$u + iv = \frac{1}{4(k+2)} [(k+3)f_1(z) - (k+1)zf'_1(\bar{z}) + \bar{\varphi}_1(\bar{z})]; \quad (9.123)$$

2) две следующие формулы, легко получающиеся из (9.115):

$$\left. \begin{aligned} X_x + Y_y &= \mu \frac{k+1}{k+2} [f'_1(z) + \bar{f}'_1(\bar{z})], \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= \frac{\mu}{k+2} [(k+1)\bar{z}f''_1(z) - \varphi'_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.124)$$

Первая из этих формул позволяет найти комплексное выражение функции напряжений Эри, использованной в главе VI. Действительно, левая часть этой формулы представляет собой лапласов оператор над функцией напряжений:

$$X_x + Y_y = \nabla^2 \varphi.$$

Комплексное выражение его дано в формуле (9.101); на этом основании имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = \mu \frac{k+1}{4(k+2)} [f'_1(z) + \bar{f}'_1(\bar{z})].$$

Двукратное интегрирование дает

$$\varphi = \mu \frac{k+1}{4(k+2)} [\bar{z}f_1(z) + zf_1(\bar{z}) + \omega_1(\bar{z}) + \omega_2(z)],$$

где  $\omega_1(\bar{z})$  и  $\omega_2(z)$  — произвольные функции; легко проверить, что выражение в квадратных скобках является величиной действительной; для того чтобы сумма двух последних членов была действительной, следует положить

$$\omega_1(\bar{z}) = \bar{\omega}_2(\bar{z}).$$

Таким образом, выражение функции напряжений будет

$$\varphi = \mu \frac{k+1}{4(k+2)} [\bar{z}f_1(z) + zf_1(\bar{z}) + \omega_2(z) + \bar{\omega}_2(\bar{z})]. \quad (9.124')$$

Выясним смысл вошедших сюда функций  $\omega_2(z)$  и  $\bar{\omega}_2(\bar{z})$ ; для этого, во-первых, найдем отсюда напряжение  $Y_y$ :

$$Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\mu(k+1)}{4(k+2)} \{ 2[f_1'(z) + \bar{f}_1'(\bar{z})] + \bar{z}f_1''(z) + z\bar{f}_1''(\bar{z}) + \omega_2''(z) + \bar{\omega}_2''(\bar{z}) \},$$

а во-вторых, получим то же по второй из формул (9.115) с учетом (9.118') и (9.118'')

$$Y_y = \frac{\mu(k+1)}{4(k+2)} \left\{ 2[f_1'(z) + \bar{f}_1'(\bar{z})] + \bar{z}f_1''(z) + z\bar{f}_1''(\bar{z}) - \frac{\varphi_1'(z)}{k+1} - \frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{z})}{k+1} \right\}.$$

Сравнивая полученные выражения, найдем, что

$$\omega_2''(z) = -\frac{\varphi_1'(z)}{k+1}; \quad \bar{\omega}_2''(\bar{z}) = -\frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{z})}{k+1}.$$

Формулы (9.123), (9.124) и (9.124') при этом условии совпадут с теми, которые даны Н. И. Мухелишвили, если введенные здесь функции  $f_1$  и  $\varphi_1$  заменить другими функциями  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{k+1}{2(k+2)} \mu f_1(z) &= \varphi(z), \\ -\frac{1}{2(k+2)} \mu \varphi_1(z) &= \psi(z) \end{aligned} \right\} \quad (9.125)$$

и положить

$$\frac{k+3}{k+1} = 3 - 4\sigma = .$$

Все наши рассуждения относились к случаю плоской деформации; для случая обобщенного плоского напряженного состояния закон Гука получит вид

$$\begin{aligned} X_x &= \mu(2e_{xx} + k\theta), \\ Y_y &= \mu(2e_{yy} + k\theta), \\ Z_z = 0 &= \mu(2e_{zz} + k\theta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_{zz} &= -\frac{k}{2}\theta; \quad \theta = e_{xx} + e_{yy} - \frac{k}{2}\theta; \\ \theta &= \frac{2}{k+2}(e_{xx} + e_{yy}) = \frac{2}{k+2}\theta', \end{aligned}$$

где

$$\theta' = e_{xx} + e_{yy}.$$

Поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu (2e_{xx} + k'\theta'), \\ Y_y &= \mu (2e_{yy} + k'\theta') \end{aligned} \right\} \quad (9.126)$$

где

$$k' = \frac{2k}{k+2} = \frac{2\sigma}{1-\sigma}.$$

Значит, в случае обобщенного плоского напряженного состояния все формулы останутся в силе, если в них упругую постоянную  $k$  заменить на  $k'$ .

### § 66. О волновых уравнениях

В §§ 26—28. главы IV было установлено, что динамические уравнения Ламе

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.127)$$

позволяют решать задачи о малых движениях упругого тела, и там были рассмотрены простейшие случаи распространения малых однородных колебаний бесконечной упругой среды, описываемые дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (9.128)$$

где  $f$  — функция от  $x$  и  $t$ . Это есть наиболее простой вид «волнового уравнения» \*). В заключение настоящей главы мы выведем волновые уравнения для общей задачи о распространении упругих колебаний, принимая, как и ранее, что объемные силы отсутствуют; поэтому они в уравнениях (9.127) опущены.

Применим к уравнениям (9.127) выкладку, уже использованную в § 36 для получения уравнения (5.55), т. е. продифференцируем их соответственно по  $x$ ,  $y$  и  $z$  и сложим; при этом учтем, что (при постоянной плотности  $\rho$ )

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right);$$

два других равенства этого же вида получим, заменяя  $x$  на  $y$  и на  $z$ ; тогда получим

$$(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (9.129)$$

\*) Ср. уравнения (4.8), (4.11), (4.26).

или

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \theta, \quad (9.129')$$

где, как и в (4.9), обозначено

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (9.130)$$

Продифференцируем теперь третье уравнение (9.127) по  $y$  и второе по  $z$  и вычтем один результат из другого:

$$\mu \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

но согласно (2.9)

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x,$$

и поэтому предыдущее уравнение приводится к прежнему виду (9.129):

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_x, \quad (9.131a)$$

где [ср. формулу (4.12)]

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (9.132)$$

Круговая подстановка в (9.131a) дает два уравнения того же вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \omega_y, \\ \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (9.131б)$$

Уравнения, имеющие структуру (9.129) и (9.131a, б), представляют собой «волновые уравнения» общего вида. Коэффициенты  $a$  и  $b$ , как мы видели в § 2б, представляют собой скорости распространения плоских волн двух видов: волн расширения и волн сдвига. Если удастся проинтегрировать уравнения (9.129) и (9.131a, б), то этим будут всюду определены: объемное расширение  $\theta$ , т. е. дивергенция вектора перемещения  $\mathbf{u}$  ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ), и вектор вращения (вихрь)  $\omega$  ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ).

В векторном исчислении доказывается, что, зная  $\theta$  и  $\omega$ , можно найти во всех точках поля вектор  $\mathbf{u}$ , т. е. определить перемещения точек упругого пространства\*).

Рассмотрим в отдельности два предельных случая:

1.  $\theta = 0$  во всем пространстве;
2.  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  » » »

В первом случае волновой процесс совершается без изменения объема; при этом, как видно прямо из уравнений Ламе (9.127), для

\* ) См. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление, ГОНТИ, 1938 г., стр. 223.

компонентов вектора перемещения и получаются волновые уравнения общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 v, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (9.133)$$

где введено обозначение (9.132). Волны этого типа называются эквиволлюминальными (равнообъемными); распространяются они со скоростью

$$b = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Второй случай  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  мы получим тогда, когда перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  имеют потенциал (см. конец § 10 главы II)

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Исходя из этих зависимостей, преобразуем первое из уравнений Ламе (9.127):

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi;$$

поэтому

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi = \nabla^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \nabla^2 u.$$

Остается это подставить в первое из уравнений (9.127); сделав аналогичное преобразование в остальных двух уравнениях и введя обозначение (9.130), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 v, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (9.134)$$

Для перемещения снова получились волновые уравнения общего вида, как это было и в случае эквиволлюминальных волн (9.133); волны, соответствующие рассматриваемому случаю, называются безвихревыми волнами расширения. Скорость распространения их  $a$ , как мы уже знаем из § 26, значительно больше скорости распространения эквиволлюминальных волн  $b$ . Из всего сказанного ясно.



что основной задачей теории упругих волн является задача интегрирования общего волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f, \quad (9.135)$$

где

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \quad (9.136)$$

$c$  — скорость распространения волн. Простейшие волновые уравнения однородных колебаний (плоских волн), рассмотренные в §§ 26 и 28, получаются из (9.135), если  $f$  зависит лишь от одной координаты, например от  $x$ , ибо тогда согласно (9.136)

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

и вместо (9.135) мы получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (9.137)$$

Для этого уравнения имеется общее решение Даламбера [см. формулу (4.18)]

$$f = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad (9.138)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — знаки произвольных функций.

### § 67. Некоторые частные решения волнового уравнения

На общей задаче интегрирования волнового уравнения (9.135) мы здесь останавливаться не можем, но отметим одно простое свойство частных решений его, совершенно аналогичное свойству частных решений уравнений Лапласа, указанному в начале § 58; если известно какое-либо частное решение уравнения (9.135)

$$f = f_0(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \quad (9.139)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  — некоторые параметры или коэффициенты, то частная производная от  $f_0$  по любому из аргументов, показанных в скобках (9.139), также будет частным решением уравнения (9.135). Справедливость этого заключения прямо следует из того, что если через  $\zeta$  обозначим любой из указанных аргументов, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla^2 f_0) &= \nabla^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.140)$$

Действительно, так как  $f_0$  является решением уравнения (9.135), то

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f_0.$$

Дифференцируя обе части по  $\zeta$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla^2 f_0),$$

а на основании (9.140) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right) = c^2 \nabla^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right);$$

значит,

$$\frac{\partial f_0}{\partial \zeta}$$

есть решение уравнения (9.135), что и требовалось доказать.

Рассмотрим чрезвычайно важное частное решение вида

$$f = f_0(r, t), \tag{9.141}$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  представляет собой радиус-вектор произвольной точки относительно начала координат. Очевидно, что решение (9.141) соответствует симметричному распределению фактора  $f_0$  относительно начала координат, так что во всех точках сферы радиуса  $r$  с центром в начале координат величина  $f_0$  \*) имеет одно и то же значение; этот случай называется случаем сферических волн, имеющих источник в точке, выбранной за начало координат. Такие волны мы здесь рассматриваем только как математический образ [т. е. как частное решение уравнения (9.135)]; однако они реально могут осуществляться как результат действия мгновенной или вообще переменной силы, приложенной в начале координат.

Проверим возможность решения (9.141) путем подстановки его в (9.135) и для этого подсчитаем лапласов оператор  $\nabla^2 f_0$  [ср. формулы (9.25) — (9.27)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x} &= \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r - \frac{x}{r} x}{r^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - x^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Вычисляя аналогично вторые производные по  $y$  и по  $z$ , получаем в результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - z^2}{r^3}. \end{aligned}$$

\*) Под  $f_0$  можно разуметь какую-либо из величин:

$u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \theta.$

Складывая эти равенства почленно и учитывая, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

получим

$$\nabla^2 f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_0}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0).$$

Подставив это в (9.135), получим

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0),$$

или

$$r \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0);$$

но очевидно, что

$$r \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r f_0),$$

и последнее уравнение примет форму простейшего волнового уравнения [ср. (9.137)]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r f_0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0),$$

и потому сразу напишем общее его решение по типу (9.138):

$$r f_0 = \psi(r - ct) + \psi(r + ct),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные функции. Отсюда получим искомое частное решение уравнения (9.135), т. е. уравнение сферической волны:

$$f_0 = \frac{1}{r} \varphi(r - ct) + \frac{1}{r} \psi(r + ct). \quad (9.142)$$

Первый член правой части соответствует волне, распространяющейся из центра (начало координат), второй член соответствует волне обратного направления (отраженная волна). Решение (9.142), как и решение (9.138) для случая однородных колебаний, изображает движущуюся волну.

Весьма важные частные решения типа «стоячих волн» могут быть получены для общего уравнения (9.135) методом разделения переменных, применявшимся к простейшему волновому уравнению (4.28) в § 28. Для этого следует искать решения в форме произведения двух функций

$$f = F(x, y, z) \cdot T(t). \quad (9.143)$$

Внося это в (9.135), получим

$$F(x, y, z) T''(t) = c^2 \nabla^2 F(x, y, z) T(t)$$

или, деля обе части на  $F \cdot T$ , разделяем переменные:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\nabla^2 F(x, y, z)}{F(x, y, z)} = -\lambda^2,$$

где  $\lambda^2$  — произвольная постоянная. Это приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad (9.144)$$

$$\nabla^2 F(x, y, z) + \frac{\lambda^2}{c^2} F(x, y, z) = 0. \quad (9.145)$$

Частные решения уравнения (9.144):

$$T_1 = \sin \lambda t; \quad T_2 = \cos \lambda t,$$

дают гармонические колебания; поэтому решение (9.143) получает один из видов:

$$f_1 = F(x, y, z) \sin \lambda t,$$

$$f_2 = F(x, y, z) \cos \lambda t,$$

где  $F(x, y, z)$  должна удовлетворять уравнению (9.145).

Рассмотренные нами волны расширения и эквиволюминальные имеют место внутри упругого тела; вблизи поверхности его возможны волны другого типа (волны Релея), вблизи же поверхности контакта двух упругих тел возникают особые волны (волны Лява)\*.

---

\*) См., например, «Курс теории упругости» Л. С. Лейбензона.

## ГЛАВА X ИЗГИБ ПЛАСТИНКИ

### § 68. Общие замечания

Пластинкой мы называем тело призматической или цилиндрической формы, у которого высота  $h$  мала по сравнению с размерами оснований (рис. 94).

Отметим срединную плоскость пластинки, делящую пополам ее высоту. Эта плоскость в теории пластинок играет такую же роль, как ось и нейтральная плоскость в теории изгиба бруса. Наметим систему координат, располагая ось  $Ox$  и  $Oy$  в срединной плоскости; ось  $Oz$  направим вниз.

В главах VI и VII мы рассматривали задачи о напряжениях и деформациях такой пластинки в том случае, если внешняя нагрузка и соответствующие ей реакции действуют в срединной плоскости (обобщенное плоское напряженное состояние). Если при этом нагрузка не превосходит некоторого предела, то срединная

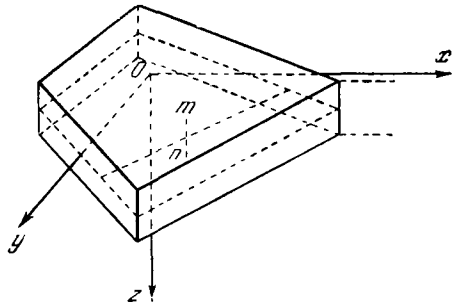


Рис. 94.

плоскость не искривляется. Теперь мы обратимся к другому случаю, когда нагрузка и опорные реакции нормальны к срединной плоскости; в этом случае срединная плоскость пластинки искривляется, и мы имеем дело с изгибом плоской пластинки. Следует отметить, что, вообще говоря, мы здесь встречаемся не с одним изгибом (как он понимается в элементарной теории изгиба балки), так как в громадном большинстве случаев изгиб сопровождается кручением пластинки.

В дальнейшем мы рассматриваем приближенную теорию изгиба пластинок, пригодную для пластинок, толщина которых мала по сравнению с другими их размерами, но вместе с тем прогибы малы по сравнению с толщиной. Такие пластинки называются «пластинками средней толщины» или, по терминологии Б. Г. Галеркина, «тонкими

плитами». При изучении напряжений и деформаций таких пластинок можно пользоваться теми же методами, как и в приближенной теории изгиба бруса, однако в данном случае теория изгиба значительно усложняется как отмеченным выше явлением скручивания, так и тем, что приходится относить распределение напряжений и деформаций не к одной линии (ось бруса), но к целой плоскости (срединная плоскость). Это приводит к замене обыкновенных дифференциальных уравнений изгиба уравнениями в частных производных, интегрирование которых значительно сложнее.

В дальнейшем для упрощения теории мы будем принимать следующие допущения:

1. При исследовании деформаций будем (как и в элементарной теории изгиба бруса) пренебрегать напряжениями  $Z_z$ , возникающими вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоев пластинки, а значит, и деформациями  $e_{zz}$  пластинки по направлению ее толщины; благодаря этому обобщенный закон Гука (V) для пластинки примем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y), \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

2. Введем гипотезу, аналогичную гипотезе плоских сечений в бресе. При этом, если пластинка изгибается по цилиндрической поверхности, то указанную гипотезу можем принять в том же виде, как она формулируется для бруса: плоские поперечные сечения пластинки при изгибе остаются плоскими и нормальными к искривленной срединной плоскости. Если же пластинка изгибается не по цилиндрической поверхности, то нашу гипотезу будем формулировать так: прямолинейный элемент  $mn$  (рис. 94) внутри пластинки, нормальный к срединной плоскости, при изгибе остается прямым и нормальным к этой плоскости после ее искривления. Это допущение впервые было предложено Кирхгофом; иногда его называют *гипотезой прямолинейного элемента*.

3. Вследствие малости прогибов пластинки будем считать, что точки срединной плоскости перемещаются только по направлению оси  $z$ , т. е. для них

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = f(x, y).$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что в срединной плоскости отсутствуют деформации, т. е. удлинения и сдвиги.

## § 69. Основные уравнения изгиба и кручения пластинки

Принятые нами допущения дают возможность вывести основные уравнения приближенной теории изгиба пластинок средней толщины. Согласно третьему пункту этих допущений, перемещения  $u$  и  $v$  обра-

щаются в нуль в срединной плоскости; они отличны от нуля в точках вне этой плоскости, однако гипотеза Кирхгофа позволяет выразить их через прогибы  $w(x, y)$  точек срединной плоскости. Действительно, на рис. 95 показано сечение пластинки какой-либо плоскостью, параллельной  $Oxz$ . Пусть  $OK$  — след срединной плоскости после

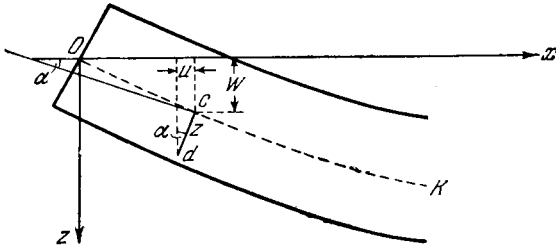


Рис. 95.

искривления. Возьмем какую-либо точку  $d$  на расстоянии  $cd = z$  от срединной плоскости. Учитывая второй и третий пункты сделанных выше допущений, имеем из чертежа:

$$u = -z \sin \alpha \approx -z \operatorname{tg} \alpha = -z \frac{\partial w}{\partial x},$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к следу срединной плоскости; в равенстве выбран знак минус, так как, например, в случае, показанном на рис. 95,  $z > 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,  $u < 0$ . Таким образом,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (10.2)$$

Сделав сечение пластинки плоскостью, параллельной  $Oyz$ , найдем путем таких же рассуждений

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (10.3)$$

Имея зависимости (10.2) и (10.3), можем из формул Коши (III) получить выражения следующих трех компонентов тензора деформаций:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Разрешим теперь уравнения закона Гука (10.1) относительно напряжений:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}), \\ Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}), \\ Y_x = X_y &= \frac{E}{2(1+\sigma)} e_{xy} = \frac{E}{2(1-\sigma^2)} (1-\sigma) e_{xy}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{xy}$  из (10.4), получим выражения трех из компонентов тензора напряжений через прогиб  $w(x, y)$ :

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Y_y &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ Y_x = X_y &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2} (1-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Остальные три компонента  $X_z$ ,  $Y_z$ ,  $Z_z$  теперь можно получить из уравнений равновесия (1), которые до сих пор не были еще использованы нами; первое из них дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_z}{\partial x} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + (1-\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \\ &= \frac{Ez}{1-\sigma^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \end{aligned}$$

где

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Из второго уравнения (1) таким же путем получим

$$\frac{\partial Y_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Остается эти два уравнения проинтегрировать по  $z$ , учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w$$

не зависят от  $z$ ; при этом

$$\int z \, dz = \frac{z^2}{2} + C. \quad (10.6)$$

Нагрузки и опорные реакции пластинки предполагаем нормальными к верхней и нижней плоскостям ее, и потому на этих плоскостях, т. е. при  $z = \pm \frac{h}{2}$ , должно быть

$$X_z = Y_z = 0.$$



В соответствии с этим выбираем значение произвольной постоянной в формуле (10.6):

$$C = -\frac{h^2}{8},$$

и получаем окончательные выражения касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{E\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{2(1-\sigma^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega, \\ Y_z &= \frac{E\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}{2(1-\sigma^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

Обращаясь, наконец, к третьему уравнению (I), найдем из него

$$\frac{\partial Z_z}{\partial z} = -\frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial Y_z}{\partial y}$$

или, подставляя сюда выражения касательных напряжений из (10.7):

$$\frac{\partial Z_z}{\partial z} = -\frac{E}{2(1-\sigma^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) \nabla^2 \nabla^2 \omega. \quad (10.8)$$

Отсюда, интегрируя по  $z$ , можем получить выражение  $Z_z$ , характеризующее взаимное нажатие горизонтальных слоев пластинки; однако напряжение  $Z_z$  само по себе не представляет интереса, так как не превышает по абсолютной величине интенсивности внешней нагрузки пластинки; последняя же ничтожно мала по сравнению с напряжениями (10.5), вызываемыми изгибом пластинки, и потому  $Z_z$  было отброшено в формулах закона Гука (10.1). Уравнение (10.8) мы используем для другой, более важной цели; проинтегрировав его по всей толщине пластинки, т. е. в пределах от  $-\frac{h}{2}$  до  $+\frac{h}{2}$ , исключим из него  $z$  и таким путем получим дифференциальное уравнение для определения функции  $\omega(x, y)$ , через которую удалось выразить остальные перемещения (формулы (10.2) и (10.3)) и напряжения (формулы (10.5) и (10.7)).

Учитывая, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) dz = -\frac{h^3}{6}, \quad (10.8')$$

из (10.8) получим

$$Z_z\left(\frac{h}{2}\right) - Z_z\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \nabla^2 \nabla^2 \omega. \quad (10.9)$$

Будем предполагать, что нагрузка  $q(x, y)$  приложена на верхней поверхности пластинки ( $z = -\frac{h}{2}$ ); тогда при выбранной системе координат (рис. 94) имеем

$$q(x, y) = Z_{-z}\left(-\frac{h}{2}\right) = -Z_z\left(-\frac{h}{2}\right), \\ Z_z\left(\frac{h}{2}\right) = 0.$$

Подставив эти значения в (10.9), получим искомое дифференциальное уравнение относительно прогиба  $w(x, y)$ :

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (10.10)$$

Здесь (см. формулу (6.5))

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} = \frac{E_1 h^3}{12}. \quad (10.11)$$

Эта величина носит название *цилиндрической жесткости пластинки*, по аналогии с жесткостью бруса или стержня прямоугольного сечения с размерами  $b$  и  $h$  в элементарной теории изгиба:

$$B = EJ = \frac{Eb^3 h^3}{12} \quad \text{или при } b = 1 \quad B = \frac{Eh^3}{12}.$$

В раскрытом виде уравнение (10.10) запишется так:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (10.10')$$

Его иногда называют *уравнением Софи Жермен* (Sophie Germain) по имени молодой французской исследовательницы, впервые получившей его в окончательной форме в 1815 г.

При решении каждой частной задачи к уравнению (10.10) следует добавить граничные условия, т. е. условия закрепления пластинки; их мы рассмотрим далее, а сейчас займемся выяснением физического смысла полученных формул.

## § 70. Исследование полученных результатов

Обращаясь к формулам (10.5), заметим, что вторые производные

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

приближенно выражают кривизны кривых, получаемых при сечении срединной поверхности пластинки плоскостями  $y = \text{const}$  и  $x = \text{const}$ , проведенными через данную точку. Эти кривизны характеризуют явление изгиба пластинки и показывают, что напряжения  $X_x$  и  $Y_y$

возникают вследствие изгиба; по толщине пластинки они меняются пропорционально  $z$ , т. е. по линейному закону. По такому же закону меняются нормальные напряжения в поперечном сечении бруса в элементарной теории изгиба, и этими напряжениями определяется *изгибающий момент* в сечении бруса. При изгибе пластинки в каждой точке существуют два изгибающих момента в сечениях, нормальных к осям  $x$  и  $y$ ; для подсчета их выделим из пластинки (рис. 96) четырьмя вертикальными плоскостями элемент размерами  $dx$ ,  $dy$ ,  $h$ ; по элементарным полоскам шириной  $dz$  на гранях элемента приложены силы

$$X_x dy dz; \quad Y_y dx dz.$$

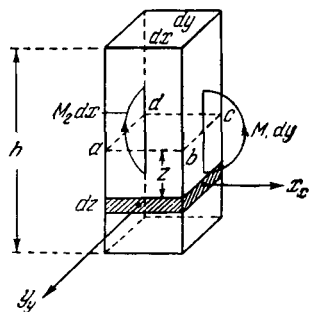


Рис. 96.

Изгибающие моменты, действующие на гранях элемента, подсчитаем, как моменты этих сил относительно осей  $y$  и  $x$ :

$$M_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dy dz = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dz; \quad M_2 dx = dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z dz.$$

Сокращая эти равенства соответственно на  $dy$  и  $dx$ , получим изгибающие моменты в пластинке, рассчитанные на единицу длины поперечного сечения:

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z dz. \quad (10.11)$$

Если сюда подставим выражения напряжений (10.5) и выполним интегрирование, то, учитывая обозначение (10.11), получим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Кроме изгибающих моментов, на гранях выделенного элемента действуют также поперечные силы, вызванные наличием касательных напряжений  $Z_x = X_z$  и  $Z_y = Y_z$ , определяемых формулами (10.7); на гранях элемента возникают силы

$$Z_x dy dz; \quad Z_y dx dz.$$

Искомые поперечные силы подсчитаем, как равнодействующие этих сил:

$$N_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z_x dy dz; \quad N_2 dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z_y dx dz.$$

Сюда надо подставить выражения напряжений (10.7) и выполнить интегрирование; учитывая (10.8') и (10.11), получим выражения поперечных сил, рассчитанных на единицу длины сечения:

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad N_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (10.13)$$

Изгибающие моменты (10.12) вместе с поперечными силами (10.13) определяют явление изгиба пластинки. Остается рассмотреть влияние касательных напряжений  $X_y$  (третья из формул (10.5)) на деформацию пластинки.

Выше мы видели, что вторые производные  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  выражают кривизны сечений срединной поверхности пластинки; смешанная производная  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  может быть записана в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{tg} \alpha_x); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg} \alpha_y), \end{aligned} \quad (a)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha_x$  и  $\operatorname{tg} \alpha_y$  — угловые коэффициенты касательных к указанным сейчас сечениям; значит, смешанная производная выражает скорость изменения углового коэффициента касательной к сечению при движении этого сечения в направлении, нормальном к его плоскости; в этом смысле смешанная производная характеризует «кручение» срединной поверхности пластинки. Касательные напряжения  $Y_x$ , согласно (10.5), изменяются пропорционально  $z$ , т. е. линейно по толщине пластинки; равнодействующая системы элементарных сил  $X_y dx dz$  (рис. 97) обращается в нуль, и они сведутся к паре сил с моментом \*)

$$H_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x z dy dz,$$

\*) Момент считаем положительным, если, смотря со стороны положительной оси  $x$ , видим вращение по часовой стрелке; смешанная же производная, выражающая «кручение» поверхности, положительна при вращении касательной против часовой стрелки [см. выше — второй вид формулы (a)]. Это учтено в знаке правой части формулы (10.14).

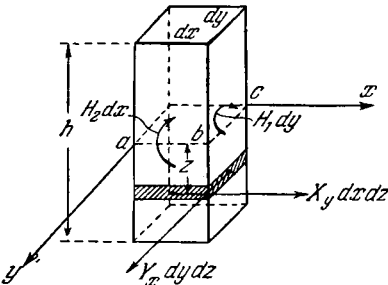


Рис. 97.

который носит название крутящего момента. Подставляя сюда выражение касательного напряжения  $Y_x$  из (10.5) и выполнив интегрирование, получим крутящий момент, рассчитанный на единицу длины сечения:

$$H_1 = -D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (10.14)$$

Касательные напряжения  $X_y$ , действующие на грани, нормальной к оси  $y$ , также дадут крутящий момент  $H_2$ , но он равен  $-H_1$ ; это следует как из закона взаимности касательных напряжений  $Y_x = X_y$ , так и из того, что формула (10.14) не меняется при перестановке  $x$  и  $y$ .

Подводя итог рассуждениям этого параграфа, приходим к выводу, что деформация пластинки под действием нагрузки  $q(x, y)$ , приложенной на верхней плоскости ее, определяется дифференциальным уравнением (10.10'). Деформация эта получается в результате: 1) изгиба, характеризуемого изгибающими моментами  $M_1$  и  $M_2$  [формулы (10.12)] и поперечными силами  $N_1$  и  $N_2$  [формулы (10.13)]; 2) кручения, характеризуемого крутящим моментом  $H = H_1$  [формула (10.14)]. В пластинке оба эти явления, вообще говоря, не отделимы одно от другого. Действительно, возвратимся к рассуждениям § 38 по поводу случая, изображенного на рис. 47. Если пластинку заменим настилом из отдельных брусков, то каждый из них будет изгибаться под действием приходящейся на него нагрузки, независимо от соседних брусков; пусть теперь они связаны в монолитную плиту (пластинку). Если нагружен только один брусок, поперечное сечение которого  $mnpq$  показано на рис. 47, то, прогибаясь, он увлечет за собой соседние бруски, прилагая к граням их те поперечные силы, которые мы здесь обозначили через  $N_1$  и  $N_2$ ; силы эти вызовут поворот поперечного сечения, т. е. кручение бруска.

Случай *чистого кручения* пластинки получим, положив

$$M_1 = M_2 = N_1 = N_2 = 0; \quad H = \text{const.} \quad (10.15)$$

Тогда формула (10.14) сведется к дифференциальному уравнению относительно функции  $w(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{H}{D(1 - \sigma)}. \quad (10.16)$$

Легко проверить путем подстановки, что частное решение его, удовлетворяющее условиям (10.15), можно взять в виде

$$w(x, y) = -\frac{H}{D(1 - \sigma)} xy. \quad (10.17)$$

Это уравнение показывает, что срединная поверхность пластинки при чистом кручении является гиперболическим параболоидом (или так называемой косою плоскостью). Выше было выяснено, что смешанная

производная от прогиба  $w$  выражает кручение поверхности, равное погонному (единичному) углу закручивания, обозначенному в главе VIII через  $\tau$ . Если учтем еще, что

$$D(1 - \sigma) = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}(1 - \sigma) = \frac{\mu h^3}{6} \quad (\text{ср. формулу (3.12)}),$$

то формулу (10.17) запишем так:

$$\tau = - \frac{H}{\frac{\mu h^3}{6}}.$$

Мы рассматриваем случай, когда пластинка скручивается двумя парами взаимных моментов  $H = -H'$ , рассчитанных на единицу длины сечения; если эту длину обозначим через  $c$ , то

$$H = \frac{M_k}{c},$$

где  $M_k$  — крутящий момент, приложенный ко всему сечению, и тогда получим

$$\tau = - \frac{M_k}{\frac{\mu c h^3}{6}}. \quad (10.18)$$

Предположим, что имеется прямоугольная пластинка, скручиваемая моментами, приложенными по четырем краям ее. Формула (10.18) дает погонный угол закручивания ее. Если устраним, например, пару моментов  $-H'$ , то перейдем к случаю простого кручения моментами, рассматривавшемуся в главе VIII. Следует ожидать, что в этом случае угол кручения уменьшится в два раза по сравнению с (10.18), и мы получим

$$\tau = - \frac{M_k}{\frac{\mu c h^3}{3}}.$$

Этот результат совпадает с формулой Сен-Венана (8.59), если в ней для случая очень вытянутого прямоугольного сечения положить  $\alpha = \frac{1}{3}$  (см. таблицу в конце § 53).

Случай *чистого изгиба* пластинки получим, положив

$$N_1 = N_2 = H = 0; \quad M_1 = M_2 = M = \text{const}. \quad (10.19)$$

В этом случае формулы (10.12) дают два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= - \frac{M}{D}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= - \frac{M}{D}; \end{aligned}$$

решив их относительно производных, получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D(1+\sigma)}. \quad (10.20)$$

Решение их, удовлетворяющее условиям (10.19), будет

$$w = \frac{M}{2D(1+\sigma)}(x^2 + y^2). \quad (10.21)$$

Отсюда следует, что срединная плоскость пластинки при чистом изгибе переходит в параболоид вращения. Если бы в уравнениях (10.20) приближенные значения кривизн заменили точными:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} = \text{const},$$

то непосредственно из этих уравнений нашли бы, что срединная плоскость переходит в шаровую поверхность радиуса

$$\rho = \frac{D(1+\sigma)}{M}.$$

Чистый изгиб пластинки имеет место лишь в исключительных случаях, например в круглой пластинке, нагруженной по контуру равномерно распределенным изгибающим моментом интенсивности  $M$  на единицу длины контура.

## § 71. Граничные условия пластинки

Как было указано выше, граничные условия являются теми условиями на поверхности пластинки, которые должны быть заранее заданы для получения решения уравнения (10.10'), соответствующего поставленной конкретной задаче. В число таких условий входит нагрузка  $q(x, y)$  на верхней и нижней плоскостях пластинки, но она уже учтена в самой постановке общей задачи об изгибе пластинок и вошла в свободный член уравнения (10.10'). Остается выяснить условия на боковой поверхности, т. е. на краях пластинки, в зависимости от условий их закрепления или опирания. В целях простоты начнем со случая прямоугольной пластинки (рис. 98), края которой параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$ . Не считаясь пока с условиями закрепления, помеченными на чертеже, заметим, что, например, на левом или на

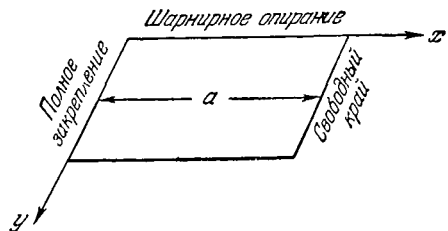


Рис. 98.

В целях простоты начнем со случая прямоугольной пластинки (рис. 98), края которой параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$ . Не считаясь пока с условиями закрепления, помеченными на чертеже, заметим, что, например, на левом или на

правом крае ( $x = 0$  или  $x = a$ ) в каждой точке действуют:

$$\left. \begin{array}{l} \text{изгибающий момент } M_1, \\ \text{крутящий момент } H, \\ \text{поперечная сила } N_1. \end{array} \right\} \quad (10.22)$$

которые мы можем наперед задать, и, кроме того, можно поставить условие относительно прогиба  $w$ , требуя, чтобы он был равен нулю или заданной величине. Вопрос о граничных условиях в задаче об изгибе пластинки оказался весьма трудным, и им подробно занимался ряд крупнейших ученых XIX века (Пуассон, Кирхгоф, Кельвин и Тэт, Ламб и др.). Здесь мы можем лишь кратко осветить его, исходя из следующих рассуждений.

Пусть нагрузка  $q(x, y)$  отсутствует; в этом случае изгиб пластинки может все-таки иметь место под действием усилий, приложенных на краях (например, усилий  $M, H, N$ , указанных выше), или вследствие заданных здесь прогибов  $w$ . В этом случае уравнение (10.10') превращается в однородное:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

и совпадает с уравнением (IX) главы VI для функции напряжений в плоской задаче теории упругости. Пользуясь им при решении задачи для области, ограниченной заданным контуром, мы получаем единственное, вполне определенное решение, поставив на этом контуре два условия; в *первой задаче* на контуре указываются значения нормального и касательного напряжений; во *второй задаче* задаются перемещения  $u$  и  $v$  точек контура; в *смешанной задаче* может быть задана какая-либо комбинация одного из перемещений и одного из напряжений (если, например, полоса положена на жесткое основание, то на поверхности контакта их должно обращаться в нуль перемещение, нормальное к этой поверхности, и при отсутствии трения — касательное напряжение). Родственный характер уравнений (10.10') и (X) указывает, что в задаче об изгибе пластинки на контуре ее также можно задавать не более двух условий; какое-либо третье условие может создать противоречие в постановке задачи, которая несколько стеснена принятой гипотезой прямолинейного элемента. Ограничиваясь двумя условиями, следует выполнить наиболее важные требования, предъявляемые характером закрепления или опирания пластинки. Рассмотрим основные случаи, встречающиеся в расчетной практике (рис. 98).

1. *Левый край полностью закреплен.* В соответствии с этим ставим условия: при  $x = 0$ ;  $w = 0$ ;  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ , требующие отсутствия прогиба и угла наклона касательной к срединной плоскости на опоре.



2. *Задний край шарнирно оперт.* Следовательно, на опоре должны обращаться в нуль прогиб и изгибающий момент  $M_2$  [формулы (10.12)]; значит,

$$\text{при } y=0, \varpi=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (10.23)$$

В обоих этих случаях не ставились условия для поперечных сил и крутящих моментов; но они, будучи приложены к краю, лежащему на опоре, окажут некоторое влияние только на величину опорных реакций пластинки и на распределение напряжений в ней вблизи этого края.

3. *Правый край свободен.* Этот случай представляет наибольшие затруднения. На прогиб здесь не накладывается никаких ограничений; однако все три усилия  $M_1, H, N_1$  должны быть равны нулю, и нет оснований пренебречь каким-либо из них, считая его второстепенным. Кирхгоф предложил выход из этого затруднения, основанный на следующих соображениях.

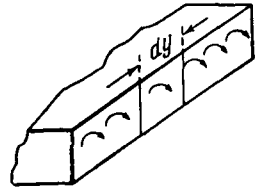


Рис. 99.

Предположим, что к грани  $x=a$  приложены распределенные крутящие пары. Распределение их предположим, вообще говоря, неравномерным и обозначим через  $H_1$  величину момента этих пар, приходящуюся на единицу длины грани в данной точке. Величина момента на длину  $dy$  грани равна, очевидно,  $H_1 dy$ .

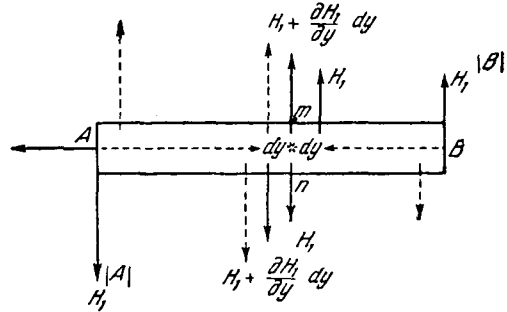


Рис. 100.

Заметим, что с точки зрения статики распределенные крутящие пары равносильны некоторой поперечной силе. Действительно, пару с моментом  $H_1 dy$

мы можем осуществить (рис. 100) в виде двух равных противоположных сил  $H_1$ , приложенных по краям площадки длиной  $dy$ .

По соседней площадке длиной  $dy$  пару  $(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy) dy$  также осуществим в виде двух противоположных сил  $H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy$  с плечом  $dy$ . Выполнив это для всех площадок рассматриваемой грани, видим, что силы, приложенные в точках  $m$  и  $n$  на границе двух площадок, сводятся к одной силе  $\frac{\partial H_1}{\partial y} dy$ , приходящейся на длину  $dy$ . Заметим, однако, что на краях  $A$  и  $B$  грани при этом останутся две неуничтоженные конечные сосредоточенные силы  $H_1^A$  и  $H_1^B$ .

Отсюда мы и заключаем, что распределенные крутящие пары интенсивности  $H_1$  статически эквивалентны распределенной поперечной силе, имеющей интенсивность

$$\frac{\partial H_1}{\partial y}, \quad (10.24)$$

и двум сосредоточенным поперечным силам  $H_1^A$  и  $H_1^B$  на концах, т. е. на углах пластинки; если контур гладкий и не имеет углов, то эти сосредоточенные силы отсутствуют. Исходя из этого, Кирхгоф предложил объединить три граничных условия на свободном крае в два, приравнявая нулю изгибающий момент  $M_1$  и поперечную силу  $N_1$ , но добавив к ней слагаемое (10.24), отражающее влияние крутящего момента  $H$ . Тогда придем к следующим двум условиям на свободном крае:

$$\left. \begin{aligned} M_1 = 0, \\ N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \text{или: } \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ - \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Эта форма граничных условий для свободного края общепринята.

В настоящее время появились некоторые работы, имеющие целью избавиться от стеснений, налагаемых на приведенную здесь приближенную теорию изгиба пластинок гипотезой Кирхгофа о прямолинейном элементе; эта гипотеза, как мы видим, затрудняет соблюдение всех необходимых граничных условий. С другой стороны, в ней содержится некоторое противоречие, так как, учитывая касательные напряжения  $Z_x = X_z$  и  $Z_y = Y_z$ , эта теория исключает возможность соответствующих им сдвигов  $e_{xz}$  и  $e_{yz}$ ; учет их позволяет уточнить теорию и соответственные граничные условия\*). Рассмотрим некоторые частные случаи изгиба пластинок.

## § 72. Эллиптическая пластинка, закрепленная по контуру

Зададимся выражением прогиба в форме

$$w = c \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (10.26)$$

и, обозначая для краткости

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = U, \quad (10.27)$$

будем иметь

$$w = cU^2. \quad (10.28)$$

\*) E. Rössner, Journ. of Mathem. and Phys., т. 23, 1944, стр. 184—191; L. Bolle, Bul. techn. de la Suisse Romand, 1947. Б. Ф. Власов, Вестник МГУ, № 2, 1957, Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1957, ДАН Аз. ССР, № 9, 1957.

Замечаем, что прогиб обращается в нуль на эллиптическом контуре:

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (10.29)$$

Значит, получим решение задачи об изгибе эллиптической пластинки если функция (10.26) удовлетворяет основному уравнению (10.10')

Взяв первые производные от прогиба (10.28):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2cU \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2cU \frac{\partial U}{\partial y},$$

видим, что они обращаются в нуль всюду на контуре (10.29); отсюда легко заключить, что на контуре срединная плоскость остается горизонтальной; значит, мы имеем пластинку с заделанными краями. В уравнение (10.10') входят четвертые производные прогиба; из выражения (10.26) видно, что все они будут постоянными числами; отсюда очевидно, что уравнению (10.10') можно удовлетворить, если  $q = \text{const}$ , т. е. если нагрузка сплошная, равномерная.

Вычисление последовательных производных дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 4 \frac{c}{a^2} Ux; & \frac{\partial w}{\partial y} &= 4 \frac{c}{b^2} Uy; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 8 \frac{c}{a^4} x^2 + 4 \frac{c}{a^2} U; & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2} xy; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 8 \frac{c}{b^4} y^2 + 4 \frac{c}{b^2} U; & \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 24 \frac{c}{a^4} x; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2} y; & \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2} x; & \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 24 \frac{c}{b^4} y; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 24 \frac{c}{a^4}; & \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2}; & \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= 24 \frac{c}{b^4}. \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Подставляя значения производных в уравнение (10.10'), найдем не определенную пока постоянную  $c$ :

$$c = \frac{q}{\left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) D}.$$

Внося это значение в (10.26), получим уравнение искривленной срединной плоскости.

Предлагаем читателю проделать следующие упражнения:

1. Найти наибольший прогиб пластинки в центре.
2. Пользуясь формулами (10.12), (10.13), (10.14) и выражениями производных (10.30), найти общие выражения  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H_1 = -H_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$ .
3. Вычислить наибольшие изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  на концах осей контура (моменты заделки) и в центре пластинки.
4. Положив  $b = a$  (круглая пластинка), найти величины, указанные в предыдущих пунктах.

### § 73. Прямоугольная пластинка. Решение Навье

Рассмотрим пластинку с шарнирно закрепленными краями, нагруженную произвольной нагрузкой. В данном случае решение основного уравнения (10.10'), т. е. выражение прогиба  $w$ , приходится разыскивать в форме бесконечного тригонометрического ряда. Зададим его в следующем виде, который, как легко в этом убедиться, удовлетворяет условию шарнирного закрепления всех четырех сторон контура\*):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.31)$$

Если для краткости обозначим

$$A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = U_{mn}, \quad (10.32)$$

то ряд (10.31) представится в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} = \\ & = U_{11} + U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1k} + \dots + U_{1n} + U_{1n+1} + \dots \\ & + U_{21} + U_{22} + U_{23} + \dots + U_{2k} + \dots + U_{2n} + \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} + \dots + U_{mk} + \dots + U_{mn} + \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (10.33)$$

каждая строка этого выражения является рядом по индексу  $n$ , а каждый столбец — рядом по индексу  $m$ .

Дифференцируя выражение (10.32) и подставляя его производные вместо  $w$  в левую часть уравнения (10.10'), получим

$$DA_{mn}\pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

поэтому уравнение (10.10') напишется так:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y), \quad (10.34)$$

или короче:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y), \quad (10.34a)$$

\*) Действительно, на контуре, т. е. при  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ , имеем  $w = 0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ , и условия для шарнирно закрепленного края будут удовлетворены.

где

$$C_{mn} = D\pi^4 A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (10.35)$$

Остается так подобрать коэффициенты ряда  $C_{mn}$ , чтобы уравнение (10.34а) было удовлетворено тождественно по всей площади пластинки; иначе говоря, согласно (10.34а), наша задача заключается в разложении функции  $q(x, y)$  в тригонометрический ряд по двум переменным  $x$  и  $y$ ; выполняем это при помощи обычного приема Эйлера для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда; так как мы имеем двойной ряд, то и прием надо повторять дважды. Сначала умножим обе части равенства (10.34а) на

$$\sin \frac{k\pi y}{b} dy,$$

где  $k$  — какое-нибудь целое число, и проинтегрируем в пределах от 0 до  $b$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \int_0^b q(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \quad (10.36)$$

Состав этой двойной суммы, конечно, такой же, как и в выражении (10.33), однако известно, что если  $n \neq k$ , то

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = 0;$$

если же  $n = k$ , то

$$\int_0^b \sin^2 \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}. \quad (10.37)$$

Отсюда легко понять, что в сумме левой части (10.36) исчезнут все члены, кроме членов, соответствующих  $k$ -му столбцу (10.33), в котором  $m$  имеет все значения 1, 2, 3, ...  $\infty$ , и на основании (10.37) равенство (10.36) получит вид

$$\frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mk} \sin \frac{m\pi x}{a} = \int_0^b q(x, y) \frac{\sin k\pi y}{b} dy. \quad (10.38)$$

Обе части этого равенства являются функциями одного  $x$ . Над равенством (10.38) повторяем проделанный прием: обе части умножим на

$$\sin \frac{i\pi x}{a} dx$$

и интегрируем в пределах от 0 до  $a$ ; в левой части исчезнут все члены, кроме члена, имеющего индекс  $m = i$ ; по аналогии с (10.37) имеем

$$\int_0^a \sin^2 \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2};$$

тогда из равенства (10.38) получаем

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} C_{ik} = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Отсюда находим коэффициент  $C_{ik}$ :

$$C_{ik} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy,$$

и далее на основании (10.35) напомним

$$A_{ik} = \frac{4}{D\pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Это есть общее выражение любого коэффициента ряда (10.31); заменяя обозначения  $i$  и  $k$  снова через  $m$  и  $n$ , получим

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (10.39)$$

По заданному распределению нагрузки  $q(x, y)$ , входящие сюда интегралы можно вычислить и, подставив найденные значения коэффициентов  $A_{mn}$  в уравнение (10.31), найти уравнение искривленной срединной плоскости. Рассмотрим два основных случая, необходимых в расчетной практике.

1. Пусть нагрузка  $q$  — сплошная, равномерная по всей площади пластинки. Тогда для вычисления коэффициента  $A_{mn}$  по уравнению (10.39) имеем

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = q \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (10.40)$$

Следовательно, двойной интеграл разбился на два простых; вычисляем их:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{m\pi} \left[ -\cos \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{m\pi} (1 - \cos m\pi),$$

$$\int_0^b \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{b}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

При нечетных  $m$  и  $n$  эти интегралы равны соответственно  $\frac{2a}{m\pi}$ ,  $\frac{2b}{n\pi}$ ; при четных  $m$  и  $n$  они обращаются в нуль. На этом основании интеграл (10.40) отличен от нуля только при нечетных  $m$  и  $n$ , и тогда он равен

$$\frac{4qab}{\pi^2 mn}.$$

Подставляя это значение в (10.39), получим

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

где  $m = 1, 3, 5, \dots, \infty$ ;  $n = 1, 3, 5, \dots, \infty$ .

Замечаем, что при возрастании  $m$  и  $n$  величина коэффициента  $A_{mn}$  быстро убывает и ряд (10.31) быстро сходится; получаем окончательно:

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (10.41)$$

где  $m = 1, 3, 5, \dots, \infty$ ;  $n = 1, 3, 5, \dots, \infty$ .

Для разыскания наибольшего прогиба в центре пластинки полагаем  $x = 0,5a$ ;  $y = 0,5b$ ; тогда

$$f = \max w = \frac{16}{\pi^6 D} \sum \sum \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} = \frac{16q}{\pi^6 D} \beta. \quad (10.42)$$

Сюда вместо  $D$  следует вставить его выражение из (10.11). Для вычислений удобно положить  $\frac{b}{a} = \mu$  и последнюю формулу выразить так:

$$f = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Коэффициент  $\alpha$  выражается в виде двойного ряда [ср. формулу (10.42)] и зависит от отношения сторон  $\mu$  (см. таблицу на стр. 312).

Имея выражение прогиба (10.41), можем по уравнениям (10.12), (10.13) и (10.14) найти усилия в любой точке пластинки, например:

$$M_1 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{m^2 + \sigma \frac{n^2}{\mu^2}}{mn \left( m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$M_2 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left( m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Благодаря шарнирному закреплению краев наибольший момент получается в центре пластинки при  $x = 0,5a$ ;  $y = 0,5b$ :

$$\max M_1 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{m^2 + c \frac{n^2}{\mu^2}}{mn \left( m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = 3qa^2,$$

$$\max M_2 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left( m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = 3_1qa^2.$$

Таким же путем вычисляются поперечные силы и опорные реакции пластинки по контуру. Результаты показаны в таблице, данной академиком Б. Г. Галеркиным.

$\frac{b}{a}$	$\max w = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}$	$\max M_1 = \beta qa^2$	$\max M_2 = \beta_1 qa^2$	$\max N_1 = \gamma qa$	$\max N_2 = \gamma_1 qb$	$\max \left( N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \delta qa$	$\max \left( N_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \delta_1 qb$	$R = m q a b$
$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$\beta_1$	$\gamma$	$\gamma_1$	$\delta$	$\delta_1$	$m$
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0553	0,0494	0,360	0,315	0,440	0,400	0,064
1,2	0,0616	0,0626	0,0501	0,380	0,294	0,455	0,377	0,062
1,3	0,0697	0,0693	0,0504	0,397	0,275	0,468	0,357	0,061
1,4	0,0770	0,0753	0,0506	0,411	0,258	0,478	0,337	0,059
1,5	0,0843	0,0812	0,0500	0,424	0,242	0,486	0,323	0,057
1,6	0,0906	0,0862	0,0493	0,435	0,229	0,491	0,303	0,054
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,216	0,496	0,287	0,052
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,205	0,499	0,273	0,050
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,194	0,502	0,260	0,048
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,185	0,503	0,248	0,046
3,0	0,1336	0,1189	0,0404	0,493	0,124	0,505	0,166	0,031
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,093	0,502	0,125	0,024
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,074	0,500	0,100	0,019
$\infty$	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	—	0,500	—	—

Величины

$$\max \left( N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \delta a q; \quad \max \left( N_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \delta_1 a q$$

выражают наибольшие единичные опорные реакции в серединах сторон контура.  $R = m a b q$  — сосредоточенные реакции в углах пластинки; при вычислениях принято  $\sigma = 0,3$ .



2. Пластинка изгибается сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в любой точке  $x=c$ ;  $y=d$ . Силу  $P$  заменим сплошной нагрузкой  $q$  на бесконечно малой площадке  $dx dy$ :

$$P = q dx dy \text{ или } q = \frac{P}{dx dy}. \quad (10.43)$$

Тогда в формуле (10.39) функция  $q(x, y)$  равна нулю всюду, кроме точки  $x=c$ ,  $y=d$ , где она равна величине (10.43). В интеграле правой части уравнения (10.39) сохраняется лишь один элемент, соответствующий точке  $(c, d)$ :

$$\begin{aligned} \int \int q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ = \frac{P}{dx dy} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} dx dy = P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}; \end{aligned}$$

тогда по уравнению (10.39)

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{D\pi^4 ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Из (10.31) получаем уравнение искривленной срединной плоскости:

$$w = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.44)$$

## § 74. Прямоугольная пластинка. Решение М. Леви

Метод, данный Морисом Леви (M. Levy), является более общим по сравнению с методом Навье; вместе с тем он тесно связан с решениями Файлона и Рибьера для плоской задачи о прямоугольнике, изложенными в § 44, что объясняется отмеченным выше близким сходством основных уравнений:

для прогиба пластинки

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (10.45)$$

и для функции напряжений в плоской задаче

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Метод Леви пригоден для всех тех случаев, когда (рис. 101) у прямоугольной пластинки два противоположных края, например  $OB$  и  $AC$ , оперты шарнирно; два других —  $OA$  и  $BC$  — могут быть

опертыми как угодно или свободными. Имея в виду эти условия, будем искать решение уравнения (10.45) в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (10.46)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \sum m^2 f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

то имеем

$$\left. \begin{array}{l} x=0; \\ x=a \end{array} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. удовлетворены условия шарнирного описания краев  $OB$  и  $AC$ .

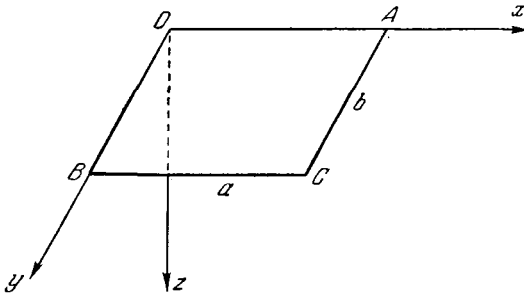


Рис. 101.

Подставляя (10.46) в левую часть уравнения (10.45), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ f_m^{(IV)}(y) - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m''(y) + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (10.47)$$

или короче:

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m^*(y) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (10.48)$$

где

$$D_m^* = f_m^{(IV)}(y) - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m''(y) + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y). \quad (10.49)$$

Левая часть представляет собой ряд Фурье по синусам, поэтому и правую часть надо представить себе разложенной в такой же ряд:

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где  $F_m(y)$  — коэффициенты ряда, зависящие от  $y$ , так как от него зависит, вообще говоря, заданная нагрузка  $q(x, y)$ ; подставляя это

в правую часть (10.48), приравниваем коэффициенты соответственных членов слева и справа:

$$D_m^*(y) = F_m(y),$$

а это согласно (10.49) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка для отыскания неизвестной пока функции  $f_m(y)$ .

Практически этот процесс сводится к следующей формальной выкладке: умножаем обе части (10.47) на  $\sin \frac{n\pi x}{a}$  (где  $n = 1, 2, \dots$ ) и интегрируем в пределах от нуля до  $a$ ; учитывая, что

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

равен нулю при  $m \neq n$  и равен  $\frac{a}{2}$  при  $m = n$ , получим нужное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} f_n^{(IV)}(y) - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n''(y) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 f_n(y) &= \\ &= \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \end{aligned} \quad (10.50)$$

По выполнении интегрирования в правой части этого уравнения она, очевидно, станет функцией от одного только  $y$ .

Общее решение уравнения (10.50) составит из общего решения однородного уравнения, которое совпадает с уравнением (6.82) § 44, если в последнем положить

$$\lambda = \frac{n\pi}{a},$$

и из какого-либо частного решения полного уравнения (10.50); обозначим это частное решение через

$$\bar{f}_n(y);$$

общее решение однородного уравнения сразу напишем, пользуясь рассуждениями § 44, по типу формулы (6.88) с заменой в ней обозначений  $m$  на  $n$  и  $l$  на  $a$ :

$$f_n^{(0)}(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}. \quad (10.51)$$

Поэтому общее решение уравнения (10.50) будет

$$\begin{aligned} f_n(y) = f_n^{(0)}(y) + \bar{f}_n(y) &= A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \\ &+ B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \bar{f}_n(y). \end{aligned} \quad (10.52)$$

Внося это значение  $f_n(y)$  в (10.46), найдем решение уравнения (10.45), соответствующее заданной нагрузке  $q(x, y)$  и удовлетворяющее граничным условиям на шарнирно опертых краях  $OB$  и  $AC$ . Остается так распорядиться произвольными постоянными

$$A_n, B_n, C_n, D_n, \quad (10.53)$$

чтобы каждый член суммы (10.46) в отдельности удовлетворял граничным условиям, заданным на двух других краях  $OA$  и  $BC$ ; число этих условий равно всегда четырем, и их достаточно для определения постоянных (10.53). Рассмотрим, например, случай, когда края  $OA$  и  $BC$  также шарнирно оперты; тогда граничные условия будут

$$\left. \begin{array}{l} y = 0; \\ y = b; \end{array} \right\} w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (10.54)$$

или согласно (10.46) имеем

$$\begin{aligned} \sum f_n(0) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0; & \sum f_n''(0) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0; \\ \sum f_n(b) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0; & \sum f_n''(b) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0, \end{aligned}$$

или ввиду произвольности  $x$  ( $0 \leq x \leq a$ ) получаем

$$\left. \begin{array}{l} f_n(0) = 0; \quad f_n''(0) = 0; \\ f_n(b) = 0; \quad f_n''(b) = 0. \end{array} \right\} \quad (10.55)$$

Раскрывая эти условия при помощи (10.52), получим четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\bar{f}_n^{(0)}(0), \\ A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + D_n 2 \frac{n\pi}{a} &= -\bar{f}_n''(0), \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{c} + C_n b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + D_n b \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} &= -\bar{f}_n(b), \\ A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + B_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \\ &+ C_n \left[ 2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} \right] + \\ &+ D_n \left[ 2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 b \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right] &= -\bar{f}_n''(b). \end{aligned} \right\} \quad (10.56)$$

Подставив в правые части этих уравнений соответственные значения частного решения

$$\bar{f}_n(y), \quad (10.57)$$

мы должны решить их относительно постоянных (10.53). Решение сильно упрощается, если, пользуясь свободой выбора частного решения (10.57), построим его так, что

$$\bar{f}_n(0) = 0; \quad \bar{f}_n''(0) = 0. \quad (10.58)$$

Тогда первые два уравнения (10.56) дадут

$$A_n = D_n = 0. \quad (10.59)$$

Решая остальные два уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} \left\{ b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} \bar{f}_n''(b) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ 2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} \right] \bar{f}_n(b) \right\}, \\ C_n &= \frac{1}{2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \bar{f}_n(b) - \bar{f}_n''(b) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.60)$$

Частное решение (10.57), удовлетворяющее условиям (10.58), найдем методом Коши. Для этого сначала найдем из (10.51), подбирая соответственным образом постоянные (10.53), то частное решение однородного уравнения

$$D_n^*(y) = 0,$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$f_n(0) = f_n'(0) = f_n''(0) = 0; \quad f_n'''(0) = 1; \quad (10.61)$$

обозначим его  $Y_n(y)$ ; оно имеет вид

$$Y_n = \frac{a^2}{2(n\pi)^2} \left[ y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} - \frac{a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right]. \quad (10.62)$$

Путем дифференцирования можно убедиться, что это решение удовлетворяет условиям (10.61). Если для краткости введем в правой части (10.50) обозначение

$$\frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \varphi_n(y), \quad (10.63)$$

то, следуя методу Коши, найдем нужное нам частное решение уравнения (10.50) в следующей форме:

$$\bar{f}_n(y) = \int_0^y Y_n(y - \eta) \varphi_n(\eta) d\eta, \quad (10.64)$$

или в раскрытом виде:

$$\bar{f}_n(y) = \frac{a}{D(n\pi)^2} \int_0^y \left\{ \left[ (y-\eta) \operatorname{ch} \frac{n\pi(y-\eta)}{a} - \frac{a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-\eta)}{a} \right] \int_0^a q(x, \eta) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \right\} d\eta. \quad (10.64a)$$

Подставив значения (10.59), (10.60) и (10.64) в (10.52), найдем окончательно функцию  $f_n(y)$ , а внеся ее в (10.46), получим решение для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру при любой заданной нагрузке  $q(x, y)$ . Усилия определяются обычным путем по формулам (10.12), (10.13) и (10.14).

Это решение удобнее для приложений, чем решение Навье, данное в § 73, благодаря хорошей сходимости соответствующих рядов. Таким же путем можно получить решения и для других граничных условий на краях  $OA$  и  $BC$ ; следует только соответственно изменить уравнения (10.56) для отыскания постоянных (10.53); дальнейший ход решения остается в силе.

Много задач, касающихся изгиба пластинок, решено акад. Б. Г. Галеркиным. Все эти результаты собраны в его капитальном труде «Упругие тонкие плиты» (Госстройиздат, 1933).

## § 75. Круглая пластинка

При исследовании круглой пластинки весьма удобно пользоваться полярными координатами  $r$  и  $\theta$ ; поэтому все основные уравнения изгиба пластинки преобразуем к полярным координатам по формулам

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta.$$

Так как левая часть основного уравнения (10.10') по своему составу совершенно сходна с левой частью уравнения (IX) § 39 плоской задачи, то для нужных нам преобразований мы можем использовать выкладки § 47, заменив в них функцию  $\varphi$  на  $w$ . Таким образом, непосредственно получаем

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

и основное уравнение (10.10) получит вид [ср. (IX<sub>n</sub>) § 47]

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta), \quad (10.65)$$

Мы здесь коснемся только случая, когда нагрузка не зависит от  $\theta$ , т. е. когда она по всем направлениям от центра пластинки распределена одинаково. В этом случае искривленная срединная поверхность,

очевидно, должна быть поверхностью вращения, прогиб  $w$  не будет зависеть от  $\theta$  и уравнение (10.65) упрощается (ср. уравнение (IX'<sub>н</sub>) § 47]:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = q. \quad (10.66)$$

Общее решение этого уравнения составит из общего решения  $w$  уравнения без последнего члена:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (10.67)$$

и какого-либо частного решения полного уравнения (10.66); однако общее решение уравнения (10.67) мы уже знаем [уравнение (7.5) § 48]:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2; \quad (10.68)$$

поэтому общее решение (10.66) напомним так:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \bar{w}. \quad (10.69)$$

Частное решение  $\bar{w}$  весьма просто разыскивается, если нагрузка  $q$  постоянна (сплошная равномерная нагрузка по всей площади пластинки); самый вид уравнения (10.66) показывает, что можно положить  $\bar{w} = cr^4$ , где  $c$  — неопределенное пока число; подставляя это значение в уравнение (10.66), легко найдем, что  $c = q/64D$ , и поэтому

$$\bar{w} = \frac{qr^4}{64D},$$

Подставляя это в уравнение (10.69), получим общее решение для круглой пластинки под сплошной равномерной нагрузкой:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (10.70)$$

Для вычисления моментов воспользуемся уравнениями (10.12) и (10.14), преобразовав их к полярным координатам. Направляя ось  $Ox$  вдоль радиуса — вектора  $r$  данной точки, найдем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Внося это в уравнения (10.12) и (10.14), найдем

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ M_2 &= -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ H_1 &= H_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.71)$$

Здесь  $M_1$  — изгибающий момент по площадке, нормальной к радиусу,  $M_2$  — момент по радиальному сечению; крутящие моменты по

рассматриваемым основным сечениям, как и следовало ожидать, ввиду симметрии пластинки и нагрузки, отсутствуют.

Рассмотрим несколько частных случаев закрепления пластинки на контуре. Если мы возьмем полную пластинку без круглого выреза вокруг центра, то в общем решении (10.70) придется отбросить два первых члена; в противном случае в центре пластинки  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$  обращаются в бесконечность, т. е. будут равны  $\infty$  прогиб и кривизна пластинки. Следовательно, получим

$$w = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q r^4}{64D}. \quad (10.72)$$

Оставшиеся две произвольные постоянные можно определить из условий закрепления.

а) Если пластинка радиуса  $a$  заделана по контуру, то получим следующие условия на контуре: при  $r = a$ ,  $w = 0$ ,  $\partial w / \partial r = 0$ . Находя из этих условий  $C_3$  и  $C_4$  и подставляя их значения в уравнение (10.72), получим

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (10.73)$$

Далее, по уравнениям (10.71) найдем

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q}{16} [a^2(1 + \sigma) - r^2(3 + \sigma)], \\ M_2 &= \frac{q}{16} [a^2(1 + \sigma) - r^2(1 + 3\sigma)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.74)$$

Предлагаем читателю проверить эти формулы и найти  $\max M$  на контуре пластинки и в центре ее; равным образом найти прогиб в центре. Все эти результаты предлагаем сверить с результатами § 72 в случае  $b = a$ .

б) Если пластинка шарнирно оперта по контуру, то условия на контуре при  $r = a$ , имеют вид  $w = 0$

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0;$$

определяя отсюда  $C_3$  и  $C_4$ , получим из уравнения (10.72)

$$w = \frac{q}{64D} \left[ (a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \sigma} \right]. \quad (10.75)$$

Далее найдем по уравнениям (10.71)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q}{16} [a^2(3 + \sigma) - r^2(3 + \sigma)], \\ M_2 &= \frac{q}{16} [a^2(3 + \sigma) - r^2(1 + 3\sigma)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.76)$$

Предлагаем читателю вычислить  $\max M$  и прогиб в центре пластинки.



в) Рассмотрим еще случай пластинки с шарнирно опертым краем при отсутствии нагрузки ( $q = 0$ ), но под действием равномерно распределенного момента  $M_1 = M$  по контуру. В этом случае из уравнения (10.72) получаем

$$w = C_3 + C_4 r^2.$$

Постоянные придется определить из условий при  $r = a$ ,  $w = 0$

$$-D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = M.$$

Без труда получим, что

$$w = \frac{M}{2D(1+\sigma)} (a^2 - r^2). \quad (10.77)$$

Это решение оказывается необходимым при расчете днищ круглых цилиндрических резервуаров. Здесь мы имеем дело со случаем чистого изгиба пластинки.

В заключение приведем результаты, получающиеся в случае нагрузки пластинки сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре пластинки. Если пластинка заделана по контуру, то

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ \frac{1}{2} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (10.78)$$

Если пластинка опята шарнирно, то

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ \frac{1}{2} \frac{3+\sigma}{1+\sigma} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (10.79)$$

Вычисление моментов по уравнениям (10.71) не представит затруднений.

Комбинируя эти решения с предыдущими и приравнявая нулю прогиб в центре, можно решить задачу о пластинке, подпертой по контуру и в центре и нагруженной сплошной равномерной нагрузкой.

## § 76. Аналогия с мембраной. Метод Маркуса

Покажем новую форму, принимаемую основными уравнениями пластинки при введении лапласова оператора от прогиба

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

и так называемой приведенной суммы моментов (см. формулы (10.12))

$$\mathfrak{M} = \frac{M_1 + M_2}{1 + \sigma} = -D \nabla^2 w. \quad (10.80)$$

Это приводит к дифференциальному уравнению

$$D \nabla^2 w = -\mathfrak{M}. \quad (10.81)$$

Выражения поперечных сил (10.13) можем написать так:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}, \\ N_2 &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10.82)$$

Эти соотношения аналогичны известной зависимости для прямого бруса

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Далее уравнение (10.10) на основании (10.81) перепишем так:

$$D \nabla^2 \left( -\frac{\mathfrak{M}}{D} \right) = q, \text{ или } \nabla^2 \mathfrak{M} = -q. \quad (10.83)$$

Для прямого бруса имеется аналогичная зависимость:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Будем теперь параллельно с пластинкой рассматривать гибкую нерастяжимую мембрану (пленку), закрепленную на таком же контуре, как и рассматриваемая пластинка, и нагруженную такой же нагрузкой  $q(x, y)$ ; дифференциальное уравнение поверхности мембраны было получено в § 54 [см. уравнение (8.71)]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{H}, \quad (10.84)$$

или короче:

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{H}. \quad (10.84a)$$

Для веревочной кривой имеем аналогичное уравнение:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{H},$$

где  $H$  — полюсное расстояние.

Сопоставим теперь уравнения (10.81), (10.83) и (10.84a):

$$\nabla^2 w = -\frac{\mathfrak{M}}{D}, \quad (10.81)$$

$$\nabla^2 \mathfrak{M} = -\frac{q}{1}, \quad (10.83)$$

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{H}. \quad (10.85)$$

Отсюда сделаем следующие выводы, подобные выводам, основанным на аналогии между упругой линией и веревочной кривой.

1. Если положим  $H = 1$ , то  $z = \mathfrak{M}$ ; значит, при натяжении мембраны, равном единице, поверхность ее провисания под нагрузкой  $q$  дает эпюру приведенной суммы моментов  $\mathfrak{M}$  от этой нагрузки.

(Сравните с эпюрой  $M$ , как веревочной кривой или веревочным многоугольником для данной нагрузки.)

2. Если положим  $H = D$ ;  $q = \mathfrak{M}$ , то  $z = w$ ; следовательно, при натяжении мембраны, равно жесткости  $D$ , поверхность провисания мембраны под нагрузкой в виде эпюры  $\mathfrak{M}$  дает искривленную поверхность пластинки. (Ср. с упругой линией, как веревочной кривой от нагружения эпюрой  $M$ .)

Пользуясь этой аналогией между пластинкой и мембраной, Г. Маркус построил свой способ расчета пластинки; мембрану он заменяет сеткой (ср. приближенную замену веревочной кривой веревочным многоугольником) и этим дифференциальное уравнение ее (10.84а) превращает в уравнение в конечных разностях; идя таким путем, он заменяет интегрирование дифференциального уравнения (10.84а) решением системы уравнений первой степени \*).

---

\*) См. H. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin, 1924.

\* Г Л А В А  X I

**ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**§ 77. Вариационные принципы теории упругости.  
Исходное интегральное тождество**

Вариационными принципами теории упругости называются некоторые основные теоремы, выраженные в форме интегральных равенств, связывающих напряжения, деформации и перемещения во всем объеме тела, и основанные на свойствах работы упругих сил. Вариационные принципы представляют практический интерес в том смысле, что на них основаны методы, позволяющие находить эффективное решение задач во многих случаях, когда классический путь интегрирования основных уравнений теории упругости представляет не преодолимые пока затруднения. В этом параграфе мы займемся одним интегральным преобразованием, которое позволит упростить дальнейшие выводы.

Рассмотрим некоторое состояние равновесия или малых упругих колебаний тела, характеризуемое напряжениями

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y$$

и перемещениями

$$u, \quad v, \quad w,$$

удовлетворяющее основным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X_\rho &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_\rho &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_\rho &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

причем на поверхности тела действуют внешние силы

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz), \\ Y_n &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz), \\ Z_n &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Одновременно рассмотрим три функции:

$$u'(x, y, z, t); \quad v'(x, y, z, t); \quad w'(x, y, z, t), \quad (11.3)$$

непрерывные во всем объеме тела и имеющие непрерывные частные производные первого и второго порядка по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  в той же области. Будем считать их перемещениями, возникающими в теле под действием каких-то сил, которыми мы пока не интересуемся. Вследствие перемещений (11.3) возникнут деформации

$$\left. \begin{aligned} e'_{xx} &= \frac{\partial u'}{\partial x}; & e'_{yy} &= \frac{\partial v'}{\partial y}; & e'_{zz} &= \frac{\partial w'}{\partial z}; \\ e'_{yy} &= \frac{\partial v'}{\partial y}; & e'_{zx} &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}; \\ e'_{zz} &= \frac{\partial w'}{\partial z}; & e'_{xy} &= \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Составим следующий интеграл, распространенный по поверхности тела:

$$I = \int_{(S)} (X_x u' + Y_y v' + Z_z w') dS. \quad (11.5)$$

Подставив сюда значения  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$  из (11.2) и собирая коэффициенты при косинусах, получим

$$I = \int_{(S)} [P \cos(vx) + Q \cos(vy) + R \cos(vz)] dS, \quad (11.6)$$

где

$$\begin{aligned} P &= X_x u' + Y_x v' + Z_x w', \\ Q &= X_y u' + Y_y v' + Z_y w', \\ R &= X_z u' + Y_z v' + Z_z w'. \end{aligned}$$

Далее, как и в § 37, преобразуем этот поверхностный интеграл в объемный:

$$I = \int_{(\tau)} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] d\tau, \quad (11.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} u' + \frac{\partial Y_x}{\partial x} v' + \frac{\partial Z_x}{\partial x} w' + X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + Y_x \frac{\partial v'}{\partial x} + Z_x \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial X_y}{\partial y} u' + \frac{\partial Y_y}{\partial y} v' + \frac{\partial Z_y}{\partial y} w' + X_y \frac{\partial u'}{\partial y} + Y_y \frac{\partial v'}{\partial y} + Z_y \frac{\partial w'}{\partial y}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial X_z}{\partial z} u' + \frac{\partial Y_z}{\partial z} v' + \frac{\partial Z_z}{\partial z} w' + X_z \frac{\partial u'}{\partial z} + Y_z \frac{\partial v'}{\partial z} + Z_z \frac{\partial w'}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Для подстановки в (11.7) сложим эти равенства почленно, но при сложении первых трех столбцов справа воспользуемся уравнениями (11.1), а при сложении следующих столбцов — равенствами (11.4). Тогда найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = & \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) u' + \rho \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \right) v' + \\ & + \rho \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z \right) w' + X_x e'_{xx} + Y_y e'_{yy} + Z_z e'_{zz} + \\ & + Y_z e'_{yz} + Z_x e'_{zx} + X_y e'_{xy}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Внесем значение (11.9) в (11.7), а в левой части последнего заменим  $I$  его выражением (11.5); тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{(S)} [X_y u' + Y_x v' + Z_x w'] dS + \int_{(\tau)} \rho \left[ \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u' + \left( Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) v' + \right. \\ \left. + \left( Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) w' \right] d\tau = \int_{(\tau)} (X_x e'_{xx} + Y_y e'_{yy} + Z_z e'_{zz} + Y_z e'_{yz} + \\ + Z_x e'_{zx} + X_y e'_{xy}) d\tau. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Это равенство получено путем формальных выкладок, однако, придавая тот или иной смысл, с одной стороны, напряженному состоянию

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y \quad (11.11a)$$

и соответственным перемещениям

$$u, v, w, \quad (11.11b)$$

а с другой стороны, перемещениям

$$u', v', w', \quad (11.12)$$

мы получим все общие теоремы теории упругости.

В качестве одного из примеров предположим, что напряженное состояние (11.11a) соответствует равновесию тела (т. е.  $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$ ) и в качестве  $u', v', w'$  взяты действительные перемещения  $u, v, w$ ; тогда равенство (11.10) перейдет в (5.62) и даст теорему Клапейрона.

## § 78. Вариационное уравнение Лагранжа

Пусть напряженное состояние (11.11a) и перемещения (11.11b) соответствуют некоторым малым упругим колебаниям тела (а в частности, состоянию равновесия тела). В качестве  $u', v'$  и  $w'$  примем произвольные вариации перемещений  $u, v, w$ , не нарушающие

геометрических связей \*), наложенных на эти перемещения, и обозначим

$$u' = \delta u; \quad v' = \delta v; \quad w' = \delta w.$$

Уравнение (11.10) примет следующий вид:

$$\int_{(S)} (X, \delta u + Y, \delta v + Z, \delta w) dS + \int_{(\tau)} \rho \left[ \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u + \left( Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v + \left( Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right] d\tau = \int_{(\tau)} (X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}) d\tau. \quad (11.13)$$

В правой части учтено, что

$$e'_{xx} = \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \delta e_{xx}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e'_{xy} = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) = \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \delta e_{xy}$$

т. е.  $\delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \dots$  представляют собой вариации компонентов деформации, соответствующей напряженному состоянию (11.11а). Выращение под интегралом в правой части (11.13) преобразуем, пользуясь формулой (3.25):

$$X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + \dots = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \dots = \delta W. \quad (11.13a)$$

Здесь  $\delta W$  — вариация упругой энергии  $W$ , получившаяся вследствие вариации перемещений  $\delta u, \delta v, \delta w$ . Тогда

$$\int_{(\tau)} (X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + \dots) d\tau = \int_{(\tau)} \delta W d\tau = \delta \int_{(\tau)} W d\tau$$

\*). Примеры геометрических связей:

1. Если в каких-либо точках тело неподвижно оперто, то должны быть наложены следующие условия на вариации:

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0.$$

2. Если элемент  $dx$  в данной точке закреплен от вращений в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$ , то [ср. формулы (2.3), (2.4), (2.8)]

$$a_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad a_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

а отсюда вытекают условия, налагаемые на вариации в этой точке:

$$\delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) = 0; \quad \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) = 0.$$

представляет собой вариацию упругой энергии во всем теле. Равенство (11.13) даст нам вариационное уравнение

$$\int_{(S)} (X, \delta u + Y, \delta v + Z, \delta w) dS + \int_{(\tau)} \rho \left[ \left( X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u + \left( Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v + \left( Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right] d\tau = \delta \int_{(\tau)} W d\tau, \quad (11.14)$$

формулирующее общий принцип Даламбера применительно к упругому телу.

Весьма часто мы имеем дело с задачами о равновесии упругого тела; в этом случае ускорения равны нулю и уравнение (11.14) формулирует принцип Лагранжа, т. е. начало возможных перемещений:

$$\int_{(S)} (X, \delta u + Y, \delta v + Z, \delta w) dS + \int_{(\tau)} \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) d\tau = \delta \int_{(\tau)} W d\tau. \quad (11.15)$$

Необходимо подчеркнуть, что при составлении уравнений (11.14) и (11.15) мы варьируем перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и соответствующие им деформации, внешние же силы

напряжения  $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_x, Z_x, X_z, Y_z, Z_y$

и силы инерции  $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

не варьируем. Помня это, в левой части уравнения (11.15) знак вариации вынесем за знаки интегралов и напомним ее так:

$$\delta \left[ \int_{(S)} (X, u + Y, v + Z, w) dS + \int_{(\tau)} \rho (Xu + Yv + Zw) d\tau \right] = \delta U,$$

где

$$U = \int_{(S)} (X, u + Y, v + Z, w) dS + \int_{(\tau)} \rho (Xu + Yv + Zw) d\tau.$$

$U$  есть работа всех внешних сил, приложенных к телу, на возможных перемещениях. Но это не есть работа  $A$ , действительно произведенная внешними силами: равновесие будет достигнуто только тогда, когда внешние силы бесконечно медленно возрастают от нуля до своих конечных значений (не создавая ускорений); тогда, согласно



теореме Клапейрона,  $U = 2A$  и уравнение (11.15) можно написать в одной из следующих двух форм:

$$\delta \left[ U - \int_{(\tau)} \dot{W} d\tau \right] = 0, \quad (11.16a)$$

$$\delta \left[ 2A - \int_{(\tau)} W d\tau \right] = 0. \quad (11.16б)$$

Величина

$$F = U - \int_{(\tau)} W d\tau$$

есть силовая функция, а  $\Pi = -F$  — потенциальная энергия системы внешних и внутренних сил. Уравнение (11.16a) дает необходимое условие максимума или минимума потенциальной энергии системы, если упругое тело находится в равновесии. На основании критерия Лежен — Дирихле \*) потенциальная энергия имеет минимальное значение, если равновесие устойчиво. Неустойчивость упругого равновесия может иметь место, как известно, в случае тонких тел: стержней, пластинок и оболочек.

Если на поверхности тела заданы перемещения (т. е. если мы имеем вторую задачу теории упругости), вариации их должны быть равны нулю; если при этом объемные силы отсутствуют, то вариация работы внешних сил равна нулю:

$$\delta U = 0,$$

и уравнение (11.16a) получает вид

$$\delta \int_{(\tau)} W d\tau = 0. \quad (11.17)$$

Оно формулирует теорему о минимуме упругой энергии: действительное деформированное и напряженное состояние отличается тем, что для него полная упругая энергия тела имеет минимальное значение. Назовем эту теорему *первой теоремой о минимуме* и еще раз отметим, что здесь варьируются перемещения и деформации, соответствующие состоянию равновесия, напряжения же не варьируются; действительно, согласно (11.13a)

$$\delta W = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy};$$

при составлении силовой функции

$$F = U - \int_{(\tau)} W d\tau, \quad (11.18)$$

\*) Он излагается в курсах теоретической механики.

минимум которой следует искать согласно (11.16а), упругая энергия  $W$  подсчитывается, как работа сил:

$$\frac{1}{2}(X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + Y_z e_{yz} + Z_x e_{zx} + X_y e_{xy}), \quad (11.19)$$

а затем напряжения выражаются через деформации согласно обобщенному закону Гука; таким образом,  $W$  представляется, как функция компонентов деформации.

Однако при исследовании изгиба стержней, пластинок и оболочек небольшой толщины вводимые там гипотезы плоских сечений и прямолинейных элементов позволяют вычислять упругую энергию, как работу изгибающих и крутящих моментов и поперечных сил. Например, при изгибе прямого стержня мы выделяем элемент его двумя близкими сечениями; тогда, пренебрегая работой поперечной силы, будем иметь энергию изгиба этого элемента:

$$\frac{1}{2} M d\varphi = \frac{1}{2} M \frac{dx}{\rho},$$

где  $\frac{1}{\rho}$  — кривизна оси стержня.

Зависимость между моментом и деформацией дает

$$M = \frac{EJ}{\rho}.$$

Энергия изгиба на единицу длины стержня ( $dx = 1$ ) будет

$$W = \frac{EJ}{2} \left( \frac{1}{\rho} \right)^2.$$

Но благодаря простой приближенной зависимости между деформацией и прогибом стержня  $v$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dx^2},$$

мы получаем возможность выразить упругую энергию в функции перемещения  $v$ :

$$W = \frac{1}{2} EJ \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2.$$

Например, для балки под распределенной нагрузкой интенсивности  $q(x)$  работа внешних сил в уравнении (11.16а) будет

$$U = \int_0^l q(x) v(x) dx,$$

и уравнение получит вид

$$\delta \left[ \int_0^l q(x) v(x) dx - \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \right] = 0.$$

Значит, задача сводится к разысканию такой функции  $v(x)$ , которая дает минимум интеграла

$$F = \int_0^l \left[ q(x) v(x) - \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx. \quad (11.20)$$

В случае изгиба пластинки средней толщины также можем подсчитать упругую энергию, как функцию прогиба  $w$ , пользуясь результатами главы X; на основании теоремы Клапейрона получим на единицу площади срединной поверхности

$$\frac{1}{2} \left( M_1 \frac{1}{\rho_1} + M_2 \frac{1}{\rho_2} + H\tau \right);$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &\approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{\rho_2} &\approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \text{— кривизны срединной поверхности}$$

$$\tau = -2 \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \text{— кручение.}$$

Подставляя эти значения и значения моментов (10.12) и (10.14) в предыдущее выражение, получим упругую энергию выделенного элемента:

$$dW = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy; \quad (11.21')$$

интегрируя ее по всей срединной поверхности, найдем полную энергию пластинки. В нее не вошла работа поперечных сил  $N_1$  и  $N_2$ , так как соответствующие им сдвиги  $e_{xz}$  и  $e_{yz}$ , согласно гипотезе прямолинейных элементов, равны нулю. Пользуясь выражением (11.21'), составим уравнение (11.16а) для пластинки, изгибаемой нагрузкой  $q(x, y)$ . Оно требует, чтобы значение интеграла

$$F = \iint \left\{ q(x, y) w(x, y) - \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (11.21)$$

распространенного на всю срединную поверхность пластинки, было минимальным.

Задачи разыскания функций, дающих минимум определенного интеграла, рассматриваются в вариационном исчислении. Здесь мы остановимся только на так называемом прямом методе вариационного исчисления, начало которого было положено Ритцем при решении задачи об изгибе и колебаниях пластинки, применительно к интегралу (11.21).

### § 79. Метод Ритца — Тимошенко

Сущность этого метода состоит в том, что вид искомым функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  задается с таким расчетом, чтобы граничные условия для них (условия на поверхности тела) были соблюдены, а вместе с тем функции эти содержали достаточное число произвольных параметров, варьируя которые мы можем варьировать самые функции, не нарушая наложенных на тело геометрических связей, (т. е. связей, ограничивающих перемещения).

Для случая изгиба стержня (формула (11.20)) прогиб задаем в виде

$$v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + \dots + c_n v_n(x), \quad (11.22)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — произвольные параметры, а  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  — функции, выбираемые, вообще говоря, произвольно, но удовлетворяющие условиям, наложенным на перемещения. Например, для консоли, закрепленной на левом конце ( $x=0$ ), все функции должны удовлетворять условиям:

$$\text{при } x=0, \quad v_k(x) = 0 \quad \frac{dv_k}{dx} = 0. \quad (11.23)$$

В случае балки, шарнирно опертой на концах ( $x=0$  и  $x=l$ ), условия будут:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l \quad v_k(x) = 0. \quad (11.24)$$

Обязательными являются только эти *геометрические* условия; удовлетворение статических условий лишь желательно. Например, в случае консоли, под действием только распределенной нагрузки должно быть:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=l \quad \frac{d^2 v_k}{dx^2} = 0; \\ \text{при } x=l \quad \frac{d^3 v_k}{dx^3} = 0. \end{array} \right\} \quad (11.25)$$

Удовлетворение этих условий, вообще говоря, не обязательно, но ими определяется более или менее удачный выбор функций  $v_k(x)$ , а от этого выбора зависит и успешность применения самого метода в данной задаче. Например, если для шарнирно опертой балки примем

$$v(x) = c_1 x(l-x) + c_2 x^2(l-x)^2 + \dots + c_m x^m(l-x)^m, \quad (11.26)$$

то геометрические условия (11.24) будут удовлетворены, статические же условия не удовлетворяются, так как изгибающие моменты на концах не обращаются в нуль; однако это обстоятельство смягчается, если в формуле (11.26) взять достаточное число членов. Приняв

$$v(x) = c_1 \sin \frac{\pi x}{l} + c_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + c_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (11.27)$$

мы удовлетворим и геометрическим, и статическим условиям; поэтому даже при небольшом числе членов в формуле (11.27) получим хороший результат.

Для пояснения хода решения проделаем его до конца в случае равномерной нагрузки. Работа нагрузки будет

$$\begin{aligned} \int_0^l qv(x) dx &= q \int_0^l \sum c_m \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \\ &= q \sum c_m \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{ql}{\pi} \sum \frac{c_m}{m} (1 - \cos m\pi). \end{aligned}$$

Члены этой суммы при  $m$  четном обращаются в нуль; поэтому

$$\int_0^l qv(x) dx = \frac{2ql}{\pi} \sum c_m \frac{1}{m}; \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Упругая энергия будет

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \sum \left( -\frac{\pi^2}{l^2} c_m m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \right) \right]^2 dx = \\ &= \frac{EJ\pi^4}{2l^4} \sum c_m^2 m^4 \frac{l}{2} = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3} \sum m^4 c_m^2. \end{aligned}$$

Силовая функция

$$\begin{aligned} F &= \int_0^l qv(x) dx - \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{2ql}{\pi} \sum \frac{c_m}{m} - \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum m^4 c_m^2; \quad (11.28) \end{aligned}$$

она является полиномом второй степени относительно коэффициентов  $c_m$  функции (11.27). Для получения минимума этой функции приравняем нулю частные производные ее по  $c_m$ :

$$\frac{\partial F}{\partial c_m} = \frac{2ql}{\pi m} - \frac{EJ\pi^4}{4l^3} 2m^4 c_m = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{4ql^4}{\pi^5 m^5 EJ}; \\ v &= \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ} \left( \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right). \quad (11.29) \end{aligned}$$

Стрела прогиба (при  $x = l/2$ ) будет

$$f = v_{\max} = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ} \left( 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right).$$

Если в формуле (11.27) удержим лишь один первый член, то, учитывая, что ошибка в знакочередующемся ряду менее первого отброшенного члена, видим, что ошибка эта составит менее чем

$$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{243} = 0,0041 = 0,4\%$$

и

$$f = \frac{ql^4}{\pi^3 EJ} = \frac{5ql^4}{382,5EJ}$$

вместо точного значения  $F = \frac{5ql^4}{384EJ}$ .

В случае изгиба прямоугольной пластинки с длиной сторон  $a$  и  $b$ , шарнирно опертой по контуру, прогиб ее можно выразить в форме

$$w = \sum \sum C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad *). \quad (11.30)$$

Подставляя это значение в выражение упругой энергии (11.21') и выполняя интегрирование, получим

$$W = \frac{D\pi^4}{8} ab \sum \sum \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 C_{mn}^2$$

Если пластинка нагружена одним сосредоточенным грузом  $P$  в точке  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ , то работа внешних сил будет

$$P \sum \sum C_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}.$$

Силловая функция выразится так

$$F = P \sum \sum C_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} - \frac{D\pi^4}{8} ab \sum \sum C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

Приравнявая нулю производные ее по коэффициентам  $C_{mn}$ , получим систему уравнений вида

$$P \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} - \frac{D\pi^4}{4} ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 C_{mn} = 0;$$

откуда находим коэффициенты  $C_{mn}$ :

$$C_{mn} = \frac{4Pa^3b^3}{D\pi^4 (m^2b^2 + n^2a^2)^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}.$$

Подставляя это в (11.30), получим уравнение изогнутой срединной плоскости пластинки:

$$w = \frac{4Pa^3b^3}{D\pi^4} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{(m^2a^2 + n^2b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

\*) Здесь удовлетворены не только геометрические, но и статические условия на контуре, так как опорные изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  обращаются в нуль.

Если здесь примем  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$  и  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , то получим точное решение Навье, изложенное в § 73 главы X; удержав в (11.30) один первый член, найдем приближенное уравнение:

$$\omega = \frac{4Pa^3b^3}{D\pi^4} \frac{\sin \frac{\pi\xi}{a} \sin \frac{\pi\eta}{b}}{(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Если груз приложен в центре  $(\xi = \frac{a}{2}, \eta = \frac{b}{2})$ , то максимальный прогиб будет в той же точке:

$$\omega_{\max} = f = \frac{4Pa^3b^3}{D\pi^4(a^2 + b^2)^2}.$$

Это первое приближение в случае квадратной пластинки менее чем на 10% отличается от точного значения.

Рассмотренные примеры относились к стержням и пластинкам. В пространственной задаче теории упругости в случае равновесия тела произвольной формы общее вариационное уравнение (11.15) применяется следующим образом.

Предположим, что тело находится под действием поверхностных сил

$$X_y, Y_y, Z_y,$$

и объемных сил

$$X_p, Y_p, Z_p$$

и, кроме того, на него наложены геометрические связи (например, закрепления), благодаря которым перемещения некоторых точек его наперед определены; для простоты предположим, что эти связи наложены лишь на поверхности тела; значит, на всей поверхности или на части ее, где наложены связи, перемещения должны иметь заданные значения:

$$u = \bar{u}(x, y, z); \quad v = \bar{v}(x, y, z); \quad w = \bar{w}(x, y, z), \quad (11.31)$$

например, обращать в нуль.

Пусть теперь

$$u_0(x, y, z); \quad v_0(x, y, z); \quad w_0(x, y, z) \quad (11.32)$$

— произвольные пока функции; если наложены связи (11.31), то эти функции на поверхности (или на соответствующей части ее) должны удовлетворять связям, т. е. здесь должно быть

$$u_0 = \bar{u}; \quad v_0 = \bar{v}; \quad w_0 = \bar{w}; \quad (11.33)$$

далее, пусть

$$f_m(x, y, z); \quad \varphi_m(x, y, z); \quad \psi_m(x, y, z) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

— также функции произвольные, но обращающиеся в нуль в точках поверхности тела, где наложены связи. Зададим перемещения точек тела следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \sum a_m f_m, \\ v &= v_0 + \sum b_m \varphi_m, \\ w &= w_0 + \sum c_m \psi_m; \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

$a_m, b_m, c_m$  — произвольные постоянные коэффициенты. Варьируя их, можно из (11.34) получить множество деформированных состояний тела, удовлетворяющих условиям, налагаемым связями, так как при любых значениях постоянных  $a_m, b_m, c_m$  условия (11.31) удовлетворены.

Подставляя значения (11.34) в уравнения (III) главы IV, а отсюда в формулу (3.33) упругой энергии

$$W = \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)], \quad (11.35)$$

заметим, что интеграл правой части уравнения (11.15), выражающий упругую энергию всего тела, окажется однородной функцией  $V$  второй степени от постоянных  $a_m, b_m, c_m$ :

$$\int W \, d\tau = V(a_m, b_m, c_m).$$

Далее, для подстановки в (11.15) подсчитаем вариации перемещений (11.34), учитывая, что варьируются только постоянные  $a_m, b_m, c_m$ :

$$\delta u = \sum f_m(x, y, z) \delta a_m,$$

$$\delta v = \sum \varphi_m(x, y, z) \delta b_m,$$

$$\delta w = \sum \psi_m(x, y, z) \delta c_m.$$

Внося эти значения вариаций в уравнение (11.15) и собирая коэффициенты при вариациях постоянных  $\delta a_m, \delta b_m, \delta c_m$ , получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum \left[ \int_{(S)} X_\nu f_m \, dS + \int_{(\tau)} X_\rho f_m \, d\tau - \frac{\partial V}{\partial a_m} \right] \delta a_m + \sum \left[ \int_{(S)} Y_\nu \varphi_m \, dS + \right. \\ \left. + \int_{(\tau)} Y_\rho \varphi_m \, d\tau - \frac{\partial V}{\partial b_m} \right] \delta b_m + \sum \left[ \int_{(S)} Z_\nu \psi_m \, dS + \right. \\ \left. + \int_{(\tau)} Z_\rho \psi_m \, d\tau - \frac{\partial V}{\partial c_m} \right] \delta c_m = 0, \quad (11.36) \end{aligned}$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Так как все вариации  $\delta a_m, \delta b_m, \delta c_m$  произвольны и независимы между собой, то уравнения (11.36) возможны



только в том случае, если коэффициенты при всех вариациях равны нулю; отсюда приходим к такой системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_m} &= \int_{(S)} X_\nu f_m dS + \int_{(\tau)} X_\rho f_m d\tau, \\ \frac{\partial V}{\partial b_m} &= \int_{(S)} Y_\nu \varphi_m dS + \int_{(\tau)} Y_\rho \varphi_m d\tau, \\ \frac{\partial V}{\partial c_m} &= \int_{(S)} Z_\nu \psi_m dS + \int_{(\tau)} Z_\rho \psi_m d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

Левые части этих уравнений являются линейными функциями постоянных  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ , а правые — от этих постоянных не зависят; число уравнений равно числу неизвестных  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ .

Так как  $V$  есть однородная функция второй степени от  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ , то коэффициенты при этих неизвестных в левых частях (11.37) образуют симметричную матрицу, и система уравнений (11.37) является, по терминологии строительной механики, канонической.

Значения коэффициентов  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ , найденные из (11.37) внесем в (11.34) и найдем перемещения; далее по формулам (III) определим деформации  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ , ...,  $e_{xy}$  и, наконец, из уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}; & Y_z &= \mu e_{yz}; \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy}; & Z_x &= \mu e_{zx}; \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz}; & X_y &= \mu e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

найдем напряжения. Следует отметить, что у поверхности тела эти напряжения, вообще говоря, не будут соответствовать заданным нагрузкам  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$ , так как в процессе решения не требовалось удовлетворить статическим условиям на поверхности

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z), \\ Y_\nu &= Y_x \cos(\nu x) + Y_y \cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z), \\ Z_\nu &= Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z). \end{aligned} \right\} \quad (11.39)$$

Эти условия будут удовлетворены приближенно и тем точнее, чем большее число членов будет взято в выражениях (11.34) и, значит, чем большее число постоянных  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  будет введено в решение. С этим обстоятельством мы выше уже встретились, рассматривая задачу об изгибе стержня и задавая перемещения в виде (11.26), где статические условия  $M=0$  при  $x=0$  и  $x=l$  не были удовлетворены.

### § 80. Вариационное уравнение Кастильяно

В главе IV было указано, что трех дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X_p &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_p &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_p &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

недостаточно для определения напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x \quad (11.40)$$

и что, следовательно, задача теории упругости статически неопределенна; значит, можно получить сколько угодно систем напряжений (11.40), удовлетворяющих уравнениям (I) и заданным условиям на поверхности тела

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz), \\ Y_v &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz), \\ Z_v &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Введем, кроме (11.40), другую систему напряжений, бесконечно мало от нее отличающуюся:

$$\left. \begin{aligned} X_x + \delta X_x; \quad Y_y + \delta Y_y; \quad Z_z + \delta Z_z; \\ X_y + \delta X_y; \quad Y_z + \delta Y_z; \quad Z_x + \delta Z_x, \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

и также удовлетворяющую уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(X_x + \delta X_x) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y + \delta X_y) + \frac{\partial}{\partial z}(X_z + \delta X_z) + X_p &= 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.42)$$

Величины  $\delta X_x, \delta Y_y, \delta Z_z, \delta X_y, \delta Y_z, \delta Z_x$  назовем вариациями напряжений. Для общности предположим, что напряжения (11.41) получаются от нагрузки, бесконечно мало отличающейся от прежней нагрузки, так что на поверхности

$$\left. \begin{aligned} X_v + \delta X_v &= (X_x + \delta X_x) \cos(vx) + (X_y + \delta X_y) \cos(vy) + \\ &+ (X_z + \delta X_z) \cos(vz), \\ Y_v + \delta Y_v &= (Y_x + \delta Y_x) \cos(vx) + (Y_y + \delta Y_y) \cos(vy) + \\ &+ (Y_z + \delta Y_z) \cos(vz), \\ Z_v + \delta Z_v &= (Z_x + \delta Z_x) \cos(vx) + (Z_y + \delta Z_y) \cos(vy) + \\ &+ (Z_z + \delta Z_z) \cos(vz), \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

где  $\delta X_x, \delta Y_y, \delta Z_z$  — вариации поверхностных сил. Вычитая почленно уравнения (I) из (11.42), а уравнения (II) из (11.43), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\delta X_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta X_z) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta X_x = \delta X_x \cos(vx) + \delta X_y \cos(vy) + \delta X_z \cos(vz), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

Значит, вариации напряжений сами по себе должны удовлетворять уравнениям равновесия (11.44) без объемных сил и условиям на поверхности (11.45).

Пусть система напряжений (11.40) является действительно существующей в упругом теле под действием заданных поверхностных и объемных сил

$$X_x, Y_y, Z_z; \quad X_p, Y_p, Z_p.$$

Посмотрим, чем она отличается от всего множества близких к ней систем напряжений (11.41) и как ее можно выделить из указанного множества. С этой целью вернемся к основному равенству (11.10), отбросив в нем силы инерции

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

так как имеем дело с равновесием тела.

Примем в (11.10) в качестве перемещений  $u', v', w'$  и соответствующих им деформаций  $e'_{xx}, e'_{yy}, \dots, e'_{zx}$  перемещения и деформации, действительно существующие в упругом теле, и обозначим их, как обычно, через

$$\left. \begin{aligned} u; \quad v; \quad w; \\ e_{xx}; \quad e_{yy}; \quad e_{zz}; \quad e_{xy}; \quad e_{yz}; \quad e_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.46)$$

причем деформации свяжем с действительно существующими напряжениями законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)]; \quad e_{xy} = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y; \\ e_{yy} = \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]; \quad e_{yz} = \frac{2(1+\sigma)}{E} Y_z; \\ e_{zz} = \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]; \quad e_{zx} = \frac{2(1+\sigma)}{E} Z_x. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

В качестве же напряжений, обозначенных в (11.10) через  $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$ , возьмем вариации

$$\delta X_x; \quad \delta Y_y; \quad \delta Z_z; \quad \delta X_y; \quad \delta Y_z; \quad \delta Z_x \quad (11.47)$$

действительных напряжений, указанных в правых частях (V); это мы имеем право сделать, так как вариации (11.47) по условию удовле-

творяют уравнениям равновесия (11.44). Соответственно этому  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  придется в (11.45) заменить вариациями

$$\delta X_v; \quad \delta Y_v; \quad \delta Z_v$$

нагрузок, заданных на поверхности тела. Наконец, объемные силы  $X\rho$ ,  $Y\rho$ ,  $Z\rho$  следует также заменить их вариациями

$$\delta(X\rho); \quad \delta(Y\rho); \quad \delta(Z\rho);$$

однако выше мы предположили, что в смежных напряженных состояниях объемные силы одинаковы (ср. уравнения (I) и (11.42)); значит, эти вариации надо приравнять нулю; в результате второй интеграл в левой части равенства (11.10) исчезнет, и оно переписывается так:

$$\int_{(s)} (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) dS = \int_{(\tau)} (\delta X_x e_{xx} + \delta Y_y e_{yy} + \delta Z_z e_{zz} + \delta X_y e_{xy} + \delta Y_z e_{yz} + \delta Z_x e_{zx}) d\tau. \quad (11.48)$$

Можем заметить, что здесь интеграл правой части представляет собой вариацию удвоенной упругой энергии тела:

$$\frac{1}{2} \int_{(\tau)} (X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + X_y e_{xy} + Y_z e_{yz} + Z_x e_{zx}) d\tau$$

(ср. формулу (3.32) гл. III), выполненную в предположении, что деформации (и перемещения) не варьируются, а варьируются только напряжения, причем их вариации удовлетворяют уравнениям равновесия (11.44)\*.

Внесем теперь в подынтегральное выражение правой части (11.10) выражения деформаций через напряжения (V); тогда этот интеграл выразится так:

$$\frac{1}{E} \int_{(\tau)} [X_x \delta X_x + Y_y \delta Y_y + Z_z \delta Z_z - \sigma (Y_y \delta X_x + X_x \delta Y_y + Y_y \delta Z_z + Z_z \delta Y_y + X_x \delta Z_z + Z_z \delta X_x) + 2(1 + \sigma)(X_y \delta X_y + Y_z \delta Y_z + Z_x \delta Z_x)] d\tau. \quad (11.49)$$

Но очевидно, что

$$X_x \delta X_x = \delta \left( \frac{X_x^2}{2} \right); \quad Y_y \delta Y_y = \delta \left( \frac{Y_y^2}{2} \right); \quad Z_z \delta Z_z = \delta \left( \frac{Z_z^2}{2} \right);$$

$$Y_y \delta X_x + X_x \delta Y_y = \delta (X_x Y_y) \text{ и т. д.};$$

$$X_y \delta X_y = \delta \left( \frac{X_y^2}{2} \right) \text{ и т. д.}$$

\*) Это значит, что в этом процессе вариации мы сравниваем действительное напряженное состояние с другими, близкими к нему, но также удовлетворяющими уравнениям равновесия.

Подставляя эти значения в интеграл (11.49) и вынося знак вариации  $\delta$  за скобку и далее за знак интеграла, представим его так:

$$\delta \left\{ \frac{1}{2E} \int_{(\tau)} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x) + 2(1 + \sigma)(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)] d\tau \right\}. \quad (11.50)$$

Сравнивая это с формулой (3.34) главы III, видим, что подынтегральное выражение представляет собой упругую энергию, относенную к единице объема тела, и интеграл (11.50) можно написать так:

$$\delta \int_{(\tau)} W d\tau.$$

Подставляя это в правую часть (11.48), получим вариационное уравнение Кастильяно:

$$\int_{(S)} (\delta X_x u + \delta Y_y v + \delta Z_z w) dS = \delta \int_{(\tau)} W d\tau. \quad (11.51)$$

Левая часть этого равенства представляет собой работу вариаций поверхностных сил на действительных перемещениях; справа стоит вариация упругой энергии тела, получающаяся вследствие вариации действительного напряженного состояния.

Правую часть (11.51) удобно представить в форме (11.49), причем вариации напряжений  $X_x, Y_y, \dots, Z_z$  должны удовлетворять уравнениям равновесия (11.44), а вариации поверхностных нагрузок

$$X_y, Y_z, Z_x,$$

необходимо вычислять по формулам (11.45) через вариации напряжений.

Вариационное уравнение (11.51) дает искомую связь между действительным напряженным состоянием равновесия упругого тела и смежными состояниями, удовлетворяющими также условиям равновесия.

Во всех предыдущих рассуждениях мы не касались условий совместности деформаций (уравнения (IV) главы IV), которые для изотропного тела при отсутствии объемных сил принимают форму уравнений Бельтрами (VII) (глава V, § 36). Эти уравнения также должны быть удовлетворены; однако важно отметить, что уравнения неразрывности деформаций (IV) оказываются следствием вариационного уравнения (11.51) и могут быть из него выведены\*). Поэтому, применяя вариационное уравнение (11.51) нет надобности заботиться об удовлетворении условий совместности (неразрывности деформаций).

\*) См. Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947 г., глава XI, § 122.

### § 81. Приложение вариационного уравнения Кастильяно к задаче о кручении призматического бруса

Для использования принципа Кастильяно в этой задаче прежде всего необходимо задаться системой напряжений, удовлетворяющей уравнениям равновесия (I) и условиям на поверхности; это напряженное состояние легко получить, пользуясь функцией напряжений Прандтля  $U(x, y)$  [формула (8.16)]:

$$\left. \begin{aligned} X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0; \\ X_z = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Y_z = -\frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (11.52)$$

Ограничимся случаем односвязного поперечного сечения; уравнения равновесия при этом удовлетворены; если еще потребуем, чтобы функция  $U$  обращалась в нуль на контуре, то боковая поверхность бруса будет свободна от нагрузок и, следовательно, условия на ней удовлетворены. Условия на концах бруса, как мы видели в гл. VIII, задаются, согласно принципу Сен-Венана, лишь в интегральной форме: главный вектор усилий на каждом из оснований равен нулю, а главный момент их выражается через функцию напряжений:

$$M_z = 2 \iint U \, dx \, dy. \quad (11.53)$$

Перемещения точек бруса согласно (8.1) и (8.2) выражаются формулами

$$u = -\tau yz; \quad v = \tau xz; \quad w = \tau \varphi(x, y). \quad (11.54)$$

Вариацию напряжений (11.52) осуществим, дав вариацию  $\delta U$  функции напряжений; тогда

$$\begin{aligned} \delta X_x = \delta Y_y = \delta Z_z = \delta X_y = 0; \\ \delta X_z = \frac{\partial}{\partial y} (\delta U); \quad \delta Y_z = -\frac{\partial}{\partial x} (\delta U), \end{aligned}$$

и вариация упругой энергии (11.50) выразится так:

$$\delta \left\{ \frac{2(1+\nu)}{2E} \int_{(\tau)} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] d\tau \right\}.$$

Напряжения  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$  на боковой поверхности равны нулю, и если здесь вариация функции напряжений будет обращаться в нуль, то будем иметь

$$\delta X_x = \delta Y_y = \delta Z_z = 0,$$

и, следовательно, поверхностный интеграл в левой части (11.48) на боковой поверхности обратится в нуль. Обратимся к основаниям бруса; распределение напряжений одинаково во всех поперечных

сечениях, в том числе и на основаниях бруса; значит, если мы варьируем напряжения (11.52), то будут варьироваться и условия на основаниях; интеграл левой части (11.48) будет здесь отличен от нуля, и его следует подсчитать. На основаниях имеем из (II)

$$X_v = X_z; \quad Y_v = Y_z; \quad Z_v = 0.$$

Положим, что нижнее основание  $z = 0$  закреплено в своей плоскости; тогда на нем  $u = v = 0$  и соответственный интеграл обратится в нуль. Остается вычислить интеграл по верхнему основанию  $z = l$ , где  $l$  — длина бруса; поэтому, полагая в (11.54)  $z = l$ , уравнение (11.51) запишем так:

$$\int_{(S)} (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) dS = -l\tau \int_{(S)} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\delta U) y + \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) x \right] dS. \quad (11.55)$$

Рассмотрим первый из интегралов правой части:

$$\iint y \frac{\partial}{\partial y} (\delta U) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} y \frac{\partial}{\partial y} (\delta U) dy. \quad (11.56)$$

К внутреннему интегралу применим интегрирование по частям:

$$\int_{y_1}^{y_2} y \frac{\partial}{\partial y} (\delta U) dy = y \delta U \Big|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \delta U dy.$$

Так как по условию вариация  $\delta U$  на контуре обращается в нуль, то в этой формуле первый член исчезает (рис. 102), и мы имеем

$$\int y \frac{\partial}{\partial y} (\delta U) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \delta U dy.$$

Подставив это в (11.56), найдем, что

$$\begin{aligned} \iint y \frac{\partial}{\partial y} (\delta U) dy &= \\ &= - \iint \delta U dx dy. \end{aligned}$$

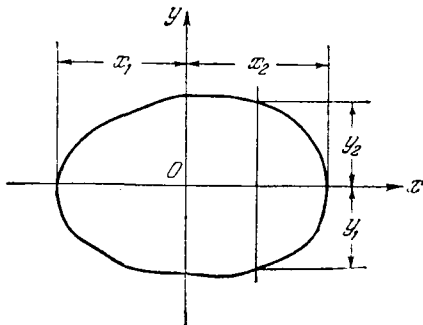


Рис. 102.

Если применим аналогичное преобразование ко второму члену правой части (11.55), то получим тот же результат, поэтому (11.55) даст

$$\int_{(S)} (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) dS = -2l\tau \iint \delta U dx dy.$$

Вариационное уравнение (11.51) получит вид

$$\delta \left\{ \frac{l}{2\mu} \iint \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} = -2\tau l \delta \iint U dx dy.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{\mu}$$

и что при интегрировании по  $z$  распределение напряжений не зависит от  $z$ . Разделив предыдущее уравнение на  $\frac{l}{\mu}$ , перенесем все члены в левую часть и вынесем знак вариации за общие скобки:

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - 4\mu\tau U \right] dx dy \right\} = 0. \quad (11.57)$$

Это равенство требует, чтобы функция  $U(x, y)$ , соответствующая действительному распределению напряжений при кручении, соответствовала минимуму интеграла, стоящего в фигурных скобках. Условие (11.57) равносильно дифференциальному уравнению (8.67):

$$\Delta^2 U = -2\mu\tau \quad (8.67)$$

при условии на контуре  $U = 0$ ; это можно доказать. Действительно, выполнив варьирование в (11.57), получим

$$\iint \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial U}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) - 2\mu\tau \delta U \right] dx dy = 0. \quad (11.58)$$

Применяя интегрирование по частям и взаимно перемещая порядок варьирования и дифференцирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial U}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy &= \int dy \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) dx = \\ &= \int dy \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \delta U \Big|_{x_1}^{x_2} - \int \delta U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx \right]. \end{aligned}$$

Но в подстановке вне знака внутреннего интеграла значения  $x_1$  и  $x_2$  относятся к точкам контура, в которых по условию  $\delta U = 0$ , и поэтому

$$\iint \frac{\partial U}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = - \iint \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \delta U dx dy.$$

Аналогично получим, что

$$\iint \frac{\partial U}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy = - \iint \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \delta U dx dy.$$

Подставив это в (11.58) и вынося за скобку  $\delta U$ , будем иметь

$$- \iint \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\mu\tau \right] \delta U dx dy = 0.$$



Но так как вариация  $\delta U$  произвольна, то интеграл левой части этого равенства может обратиться в нуль только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю во всех точках области интегрирования, т. е. во всех точках поперечного сечения. Значит, для всех точек сечения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2\mu\tau;$$

это совпадает с уравнением (8.67), которое является условием совместности деформаций в задаче о кручении; это вполне естественно; действительно, как было указано в конце § 80, условия совместности Сен-Венана (IV) являются следствием вариационного уравнения Кастильяно.

Вариационное уравнение (11.57) дает весьма важное средство для решения задач о кручении бруса со сложным поперечным сечением; решение таких задач обычным способом интегрирования уравнения (8.67) с граничным условием  $U=0$  удастся найти в крайне редких случаях; между тем вариационное уравнение (11.57) дает возможность найти для случая односвязного сечения приближенное решение с достаточной точностью.

Действительно, пусть контур поперечного сечения выражается уравнением

$$F(x, y) = 0^*.$$
 (11.59)

Зададим функцию напряжений в следующем виде:

$$U(x, y) = F(x, y)[C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y) + \dots + C_n f_n(x, y)],$$
 (11.60)

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные,  $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$  — произвольные функции. Функция  $U$  при этом удовлетворяет граничному условию задачи, так как обращается в нуль на контуре сечения. Вариацию ее мы осуществим, варьируя коэффициенты  $C_m$ . При этом вариация  $\delta U$  на контуре также обращается в нуль. Подставив это значение  $U$  в уравнение (11.57) и выполнив интегрирование, найдем, что интеграл левой части его выразится в виде квадратичной функции, т. е. многочлена второй степени относительно постоянных  $C_m$ :

$$\begin{aligned} \psi(C_1, C_2, \dots, C_n) = & A_{11}C_1^2 + A_{22}C_2^2 + \dots + A_{12}C_1C_2 + \dots \\ & \dots + A_{01}C_1 + A_{02}C_2 + \dots, \end{aligned}$$

и для приближенного решения задачи следует найти минимум этой функции, т. е. приравнять нулю частные производные ее по  $C_1, C_2,$

\* Так как сечение предполагается односвязным, то функция  $F(x, y)$  не должна обращаться в нуль внутри сечения.

$C_3, \dots, C_n$ . При этом, как уже указывалось в § 79, мы получим каноническую систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов  $C_m$ , и функция  $U$  согласно (11.60) будет определена. Пользуясь этим методом, Л. С. Лейбензон дал решение ряда задач о кручении стержней с различными поперечными сечениями. (См. его «Вариационные методы решения задач теории упругости», Гостехиздат, Москва, 1943.)

## § 82. Первая задача теории упругости; вторая теорема о минимуме энергии

Первой задачей теории упругости в § 37 главы V мы назвали тот случай, когда на поверхности тела заданы нагрузки; нагрузки эти должны по смыслу задачи быть одинаковыми как в действительном состоянии тела, так и во всех смежных состояниях, получаемых путем варьирования; значит, в уравнении (11.51) мы должны приравнять нулю вариации нагрузок  $X_v, Y_v, Z_v$  на всей поверхности тела; тогда получим следующее вариационное уравнение:

$$\delta \int_{(\tau)} W d\tau = 0. \quad (11.61)$$

Это есть необходимое условие того, что упругая энергия тела в действительном состоянии равновесия имеет максимум или минимум по сравнению со всеми возможными смежными состояниями равновесия; в раскрытом виде это уравнение мы получим, приравняв нулю интеграл (11.49). Для суждения о том, имеет ли здесь место максимум или минимум, составим полную вариацию упругой энергии. Вариация, выраженная формулой (11.49), является первой вариацией; видим, что она формально составлена как первый дифференциал функции от нескольких независимых переменных; например, первый дифференциал функции  $z(x, y)$  имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Второй дифференциал получим, дифференцируя  $dz$  по  $x$  и по  $y$ , но считая  $dx$  и  $dy$  постоянными:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

По аналогии с этим получим вторую вариацию энергии

$$\int_{(\tau)} W d\tau,$$

варьируя в интеграле (11.49) напряжения  $X_x, Y_y, \dots, Z_z$ , но считая  $\delta X_x, \delta Y_y, \dots, \delta Z_z$  постоянными; следовательно,

$$\delta^2 \left[ \int W d\tau \right] = \frac{1}{E} \int [\delta X_x \delta X_x + \delta Y_y \delta Y_y + \delta Z_z \delta Z_z - \sigma (\delta Y_y \delta X_x + \delta X_x \delta Y_y + \dots) + 2(1 + \sigma) (\delta X_y \delta X_y + \dots)] d\tau = \frac{1}{E} \int \{ (\delta X_x)^2 + (\delta Y_y)^2 + (\delta Z_z)^2 - 2\sigma (\delta X_x \delta Y_y + \delta Y_y \delta Z_z + \delta X_x \delta Z_z) + 2(1 + \sigma) [(\delta X_y)^2 + (\delta Y_z)^2 + (\delta Z_x)^2] \} d\tau.$$

Заметим, что выражение в фигурных скобках представляет собой упругую энергию, отнесенную к единице объема и вызванную напряжениями

$$\delta X_x, \delta Y_y, \dots, \delta Z_z.$$

В конце § 21 главы III было указано, что упругая энергия всегда положительна; значит,

$$\delta^2 \left( \int_{(\tau)} W d\tau \right) > 0. \quad (11.62)$$

Возвращаясь к аналогии с дифференцированием функций, вспомним, что условие

$$dz = 0$$

является необходимым условием максимума или минимума функции  $z$ ; если при этом окажется, что

$$d^2z > 0,$$

то функция  $z$  имеет минимум. Таким образом, условия (11.61) и (11.62) показывают, что действительное напряженное состояние равновесия упругого тела отличается от всех смежных состояний равновесия тем, что оно дает минимум упругой энергии. Это есть начало наименьшей работы, известное в строительной механике. Для применения его, согласно (11.50), (11.51) и (11.61), следует упругую энергию выразить в функции напряжений:

$$W = \frac{1}{2E} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma (X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x) + 2(1 + \sigma) (X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)]. \quad (11.63)$$

В задачах строительной механики мы имеем дело с брусками или стержнями, к которым при растяжении, сжатии и изгибе возможно применить гипотезу плоских сечений, и это дает возможность выразить упругую энергию не в функции напряжений, а в функции изгибающих и крутящих моментов, а также продольных и поперечных сил:

$$W = \frac{1}{2} \left[ \frac{M^2}{EJ} + \frac{N^2}{EF} + \frac{Q^2}{GF_x} + \frac{M_k^2}{GC} \right],$$

причем здесь  $C$  — жесткость стержня при кручении; энергия отнесена не к единице объема, а к единице длины оси стержня; поэтому вариационное уравнение (11.61) в данном случае требует минимума интеграла

$$\int \left( \frac{M^2}{EJ} + \frac{N^2}{EF} + \frac{Q^2}{GF_z} + \frac{M_k^2}{GC} \right) ds, \quad (11.62')$$

взятого по всей длине  $s$  оси стержня; это условие, как известно, позволяет решать статически неопределимые задачи. Общая задача теории упругости для тела, на поверхности которого заданы нагрузки, также статически неопределима; для решения ее можно применить приближенный способ, основанный на вариационном уравнении (11.61) и аналогичный методу Ритца — Тимошенко, изложенному в § 79.

### § 83. Приближенный метод, основанный на вариационном уравнении (11.61)

Способ этот предложен П. Ф. Папковичем и состоит в следующем. Постараемся найти какое-либо напряженное состояние тела, удовлетворяющее уравнениям равновесия (I) и заданным условиям на поверхности тела; обозначим компоненты соответствующего тензора напряжений через

$$X_x^{(0)}, Y_y^{(0)}, Z_z^{(0)}, Y_z^{(0)}, Z_x^{(0)}, X_y^{(0)}. \quad (11.64)$$

Теперь найдем несколько напряженных состояний с компонентами

$$X_x^{(m)}, Y_y^{(m)}, Z_z^{(m)}, Y_z^{(m)}, Z_x^{(m)}, X_y^{(m)}, \quad (11.65)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Эти напряженные состояния должны также удовлетворять уравнениям равновесия (I), но при этом вся поверхность тела должна оставаться свободной от напряжений, так что на поверхности, согласно (II),

$$\left. \begin{aligned} X_x^{(m)} \cos(vx) + X_y^{(m)} \cos(vy) + X_z^{(m)} \cos(vz) &= 0, \\ Y_x^{(m)} \cos(vx) + Y_y^{(m)} \cos(vy) + Y_z^{(m)} \cos(vz) &= 0, \\ Z_x^{(m)} \cos(vx) + Z_y^{(m)} \cos(vy) + Z_z^{(m)} \cos(vz) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.66)$$

Напряженные состояния (11.64) и (11.65), вообще говоря, не удовлетворяют условиям совместности деформаций, т. е. уравнениям Бельтрами (VII) или Мичелла (гл. V, § 36), так как это требование

внесло бы чрезвычайные трудности при решении задачи \*), но в методе Кастильяно оно, как мы видели, не обязательно; вместе с тем напряженное состояние (11.65) при условиях (11.66) само по себе невозможно, так как оно давало бы начальные напряжения («само-напряженное состояние»), отсутствие которых мы заранее предполагаем (см. § 21) согласно гипотезе естественного состояния. Однако мы его как самостоятельное напряженное состояние не будем рассматривать, но, пользуясь (11.64) и (11.65), построим новое напряженное состояние

$$\left. \begin{aligned} X_x &= X_x^{(0)} + \sum C_m X_x^{(m)}; & Y_z &= Y_z^{(0)} + \sum C_m Y_z^{(m)}; \\ Y_y &= Y_y^{(0)} + \sum C_m Y_y^{(m)}; & Z_x &= Z_x^{(0)} + \sum C_m Z_x^{(m)}; \\ Z_z &= Z_z^{(0)} + \sum C_m Z_z^{(m)}; & X_y &= X_y^{(0)} + \sum C_m X_y^{(m)}, \end{aligned} \right\} \quad (11.67)$$

где  $C_m$  — произвольные постоянные.

Очевидно, что напряжения (11.67):

- 1) удовлетворяют уравнениям равновесия;
- 2) удовлетворяют условиям на поверхности тела;

3) содержат линейно несколько произвольных постоянных  $C_m$ , позволяющих варьировать напряженное состояние тела при соблюдении условий равновесия и условий на поверхности, что и требуется для применения вариационного уравнения Кастильяно (11.61), т. е. разыскания минимума упругой энергии тела. Чем большее число напряженных состояний (11.65) и соответствующих постоянных  $C_m$  мы введем, тем шире будут возможности варьирования энергии, тем ближе будет получаемое решение к точному и тем ближе мы подойдем к удовлетворению условий совместности деформаций.

Если значения напряжений (11.67) подставить в выражение упругой энергии

$$W = \frac{1}{2E} \int_{(\tau)} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x) + 2(1 + \sigma)(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)] \quad (11.68)$$

и выполнить интегрирование, то оно представится как функция (многочлен) второй степени относительно постоянных  $C_m$ :

$$W = \sum \sum A_{ij} C_i C_j + \sum B_k C_k;$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

---

\*) Если бы напряжения (11.64) удовлетворяли условиям совместности деформаций, то они давали бы полное решение задачи.

выпишем это выражение подробнее:

$$W = A_{11}C_1^2 + A_{12}C_1C_2 + A_{13}C_1C_3 + \dots + A_{1N}C_1C_N +$$

$$+ \dots + A_{m1}C_mC_1 + A_{m2}C_mC_2 + \dots + A_{mn}C_mC_n + \dots + A_{mN}C_mC_N +$$

$$+ \dots + A_{n1}C_nC_1 + A_{n2}C_nC_2 + \dots + A_{nm}C_nC_m + \dots + A_{nN}C_nC_N +$$

$$+ \dots + B_1C_1 + B_2C_2 + \dots + B_mC_m + \dots + B_nC_n + \dots + B_NC_N + E. \quad (11.69)$$

Для получения минимума упругой энергии следует приравнять нулю производные выражения (11.69) по всем постоянным  $C_m$ , и это даст систему  $N$  линейных уравнений для определения этих постоянных, например:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial C_m} &= A_{m1}C_1 + A_{m2}C_2 + \dots + A_{mn}C_n + \dots \\ &\quad \dots + A_{mN}C_N + B_m = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial C_n} &= A_{n1}C_1 + A_{n2}C_2 + \dots + A_{nm}C_m + \dots \\ &\quad \dots + A_{nN}C_N + B_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.70)$$

Заметим еще, что из первого уравнения (11.70) имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial C_m \partial C_n} = A_{mn},$$

а из второго

$$\frac{\partial^2 W}{\partial C_n \partial C_m} = A_{nm},$$

и потому

$$A_{mn} = A_{nm}. \quad (11.71)$$

Значит, система уравнений (11.70) по терминологии строительной механики будет канонической; это даст важный способ проверки достаточно сложных выкладок при вычислении коэффициентов  $A_i$  системы (11.70).

Следует отметить, что уравнения (11.70) являются обобщением канонических уравнений строительной механики; это обобщение естественно получается при переходе от стержневой системы к телу произвольной формы; при этом постоянные  $C_m$  играют роль лишних неизвестных, но число их в общем случае бесконечно велико, так как упругое тело есть система с бесконечным числом лишних неизвестных. Задавая в суммах (11.67) конечное число неизвестных  $C_m$ , мы приходим к приближенному решению задачи путем уменьшения числа лишних неизвестных. Сами формулы (11.67) являются обобщением формул для моментов поперечных и продольных сил в стержневых системах; если, например, лишние неизвестные такой системы обозначим через  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ , то момент в данном сечении системы

выразится формулой, аналогичной (11.67):

$$M = M^{(0)} + C_1 M_1 + C_2 M_2 + \dots + C_N M_N = M^{(0)} + \sum C_m M_m, \quad (11.72)$$

где  $M^{(0)}$  — момент от заданной нагрузки;  $M_1, M_2, \dots, M_N$  — моменты от единичных нагрузок  $C_1 = 1, C_2 = 1, \dots, C_N = 1$ .

Коэффициенты  $A_{ij}$  в (11.69) и (11.70), являющиеся интегралами квадратов и попарных произведений функций, входящих в выражения (11.67), представляют собой обобщение известных интегралов Мора:

$$\int \frac{MM'}{EJ} ds; \quad \int \frac{NN'}{EF} ds; \quad \int \frac{QQ'}{GF} ds.$$

Аналогия между (11.67) и (11.72) показывает, что напряженное состояние (11.64), удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям, но не удовлетворяющее условиям совместности деформаций, соответствует, в случае стержневой системы, напряженному состоянию в основной статически определимой системе метода сил (когда в данной системе отброшены лишние связи). Напряженное состояние (11.65) аналогично «единичным» напряженным состояниям основной системы, возникающим от действия единичных сил  $C_m = 1$ ,

Следовательно, в формулах (11.67) эти величины могут быть истолкованы как обобщенные усилия.

В основе всех рассуждений этого параграфа лежит условие, что напряжения на поверхности тела не варьируются, так как предполагается, что они заданы. Однако в случае применения полуобратного метода распределение напряжений на некоторых частях поверхности иногда не задается, а задаются лишь главный вектор (или равнодействующая) и главный момент сил на этих частях поверхности. Например, в главе VIII при рассмотрении задач о кручении и изгибе призматического бруса на основаниях его задавались: при изгибе — груз  $Q$ , с условием, что момент касательных сил, его образующих, равен нулю; при кручении — крутящий момент  $M_z$ , с условием, что главный вектор касательных сил его образующих равен нулю. Распределение напряжений во всех поперечных сечениях бруса получается одинаковым; значит, варьируя напряжения во всей области бруса, мы должны допустить варьирование их и на основаниях его. В таких случаях вместо (11.61) необходимо обратиться к вариационному уравнению общего вида (11.51). В следующем параграфе рассмотрено приложение метода Кастильяно к общей задаче о брусе прямоугольного сечения.

## § 84. Задача Ламе для упругой прямоугольной призмы

Представим себе упругую прямоугольную призму, на поверхности которой действуют нагрузки, нормальные или касательные к ее граням; требуется определить напряжения в любой точке призмы. Ламе поставил эту задачу в 1852 г. и указал на большую важность

ее в смысле практических приложений, так как решение ее доставило бы возможность проверки приближенных элементарных способов исследования изгиба и кручения балок прямоугольного сечения, а также сжатия колонн неравномерной нагрузкой. Вместе с тем Ламе отметил чрезвычайные трудности этой задачи при решении дифференциальных уравнений (VI) с условиями, поставленными на поверхности призмы; действительно, в такой форме задача эта осталась нерешенной до сих пор. Вместе с тем метод Кастильяно позволяет доводить до конца решение задачи Ламе в некоторых частных случаях нагрузки на гранях призмы. Такое решение, как было установлено выше, будет приближенным вследствие того, что в суммах формул (11.67) приходится практически ограничиться конечным числом слагаемых, а следовательно, конечным числом варьируемых коэффициентов  $C_m$ . Чем больше это число, тем точнее будут удовлетворены условия совместности деформаций; вместе с тем здесь имеются большие возможности для удовлетворения граничных условий на гранях призмы, а это важно, если все три основных размера призмы одного порядка и смягчение граничных условий с помощью принципа Сен-Венана не обосновано. Рассмотрим несколько подробнее ход решения задачи.

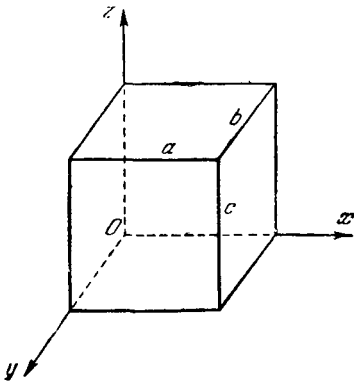


Рис. 103.

Согласно (11.67) тензор напряжений следует представить в виде суммы двух тензоров:

$$\begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x^{(0)} & Y_x^{(0)} & Z_x^{(0)} \\ X_y^{(0)} & Y_y^{(0)} & Z_y^{(0)} \\ X_z^{(0)} & Y_z^{(0)} & Z_z^{(0)} \end{pmatrix} + \\ + \sum C_m \begin{pmatrix} X_x^{(m)} & Y_x^{(m)} & Z_x^{(m)} \\ X_y^{(m)} & Y_y^{(m)} & Z_y^{(m)} \\ X_z^{(m)} & Y_z^{(m)} & Z_z^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (11.73)$$

Первый из них, удовлетворяющий уравнениям равновесия (I) и заданным граничным условиям, назовем для краткости *основным тензором*. Построение его не представляет принципиальных трудностей, но оказывается более или менее сложным, в зависимости от сложности заданных нагрузок. Второй тензор правой части (11.73) должен также удовлетворять уравнениям равновесия (I); он не зависит от заданной нагрузки, так как поверхность призмы должна быть свободной от напряжений; значит, он может быть построен один раз навсегда для данной призмы: назовем его *корректирующим тензором*. Рассмотрим один из способов построения его \*).

\*) См. работу автора в журнале ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.



Пусть дана призма с размерами ребер  $a, b, c$  (рис. 103). Составим следующие три системы функций:

$$\left. \begin{aligned} P_m(x) &= \cos \frac{m\pi x}{a} - \cos \frac{(m+2)\pi x}{a} & (m=0, 1, 2, \dots), \\ P_n(y) &= \cos \frac{n\pi y}{b} - \cos \frac{(n+2)\pi y}{b} & (n=0, 1, 2, \dots), \\ P_p(z) &= \cos \frac{p\pi z}{c} - \cos \frac{(p+2)\pi z}{c} & (p=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (11.74)$$

Они обладают следующими свойствами\*).

1. Каждая из таких функций и первая производная ее обращаются в нуль на обоих концах соответствующего интервала  $a, b, c$ ; это

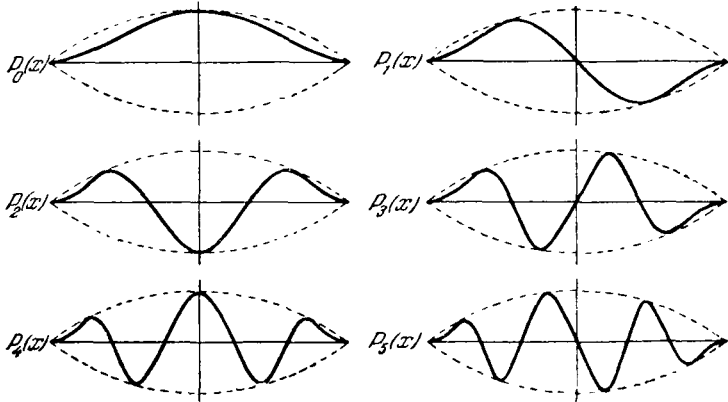


Рис. 104.

видно также на графиках нескольких первых функций систем (11.74), показанных на рис. 104.

2. Всякая функция, которая может быть разложена в тригонометрический ряд (ряд Фурье), может быть с такой же точностью представлена на соответствующем интервале многочленом, составленным из функций (11.74); например, если на интервале  $x=0, x=a$  задана функция  $f(x)$ , то в равенстве

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \dots + c_m P_m(x) + \dots$$

можно так выбрать коэффициенты  $c_m$ , что правая часть сколь угодно точно изобразит функцию  $f(x)$ . Такое свойство системы функций называют ее полнотой или замкнутостью (на некотором различии этих понятий не останавливаемся). Системой функций (11.74)

\*). См. работу автора в журнале ПММ, т. X, вып. 1, 1946.

воспользуемся для построения корректирующего тензора следующим образом. Так как он должен удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия (I), то компоненты его составим при помощи функций напряжений; воспользуемся, например, функциями Максвелла  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и запишем выражения компонентов в форме (9.4) § 56. Самые функции напряжений представим в виде тройных сумм, составленных из функций (11.74):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z), \\ \varphi_2 &= \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z), \\ \varphi_3 &= \sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z), \end{aligned} \right\} \quad (11.75)$$

где  $A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}$  — произвольные постоянные коэффициенты, допускающие варьирование функций (11.75). В результате компоненты корректирующего тензора выразятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sum_m \sum_n \sum_p [C_{mnp} P_m(x) P_n''(y) P_p(z) + \\ &\quad + B_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p''(z)], \\ Y_y &= \sum_m \sum_n \sum_p [A_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p''(z) + \\ &\quad + C_{mnp} P_m''(x) P_n(y) P_p(z)], \\ Z_z &= \sum_m \sum_n \sum_p [B_{mnp} P_m''(x) P_n(y) P_p(z) + \\ &\quad + A_{mnp} P_m(x) P_n''(y) P_p(z)], \\ X_y &= - \sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp} P_m'(x) P_n'(y) P_p(z), \\ Y_z &= - \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} P_m(x) P_n'(y) P_p'(z), \\ Z_x &= - \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_m'(x) P_n(y) P_p'(z). \end{aligned} \right\} \quad (11.76)$$

Легко убедиться в том, что при напряженном состоянии, описываемом формулами (11.76), все грани призмы остаются свободными от нагрузок. Действительно, рассмотрим, например, грани  $x=0$  и  $x=a$ , нормальные к оси  $Ox$ ; на них действуют напряжения  $X_x, Y_x = X_y, Z_x = X_z$ , которые здесь обращаются в нуль; это вытекает из свойств функций (11.76):

$$\left. \begin{aligned} P_m(0) &= 0; & P_m(a) &= 0; \\ P_m'(0) &= 0; & P_m'(a) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.77)$$

Таким же путем убедимся, что и остальные две пары граней:

$$\begin{aligned}y &= 0; & y &= b; \\z &= 0; & z &= c,\end{aligned}$$

также свободны от напряжений при произвольных значениях коэффициентов  $A_{mnp}$ ,  $B_{mnp}$ ,  $C_{mnp}$ . Отмеченная выше полнота систем функций (11.74) позволяет при помощи функций Максвелла (11.75) построить очень широкий класс напряженных состояний (11.76), оставляющих всю поверхность призмы свободной от нагрузок; таким образом, формулы (11.76) представляют корректирующий тензор в весьма общем виде. Добавив к нему основной тензор, соответствующий нагрузкам, заданным на поверхности призмы, получим общий тензор, который удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия призмы, граничным условиям поставленной задачи и содержит сколь угодно большое число варьируемых параметров  $A_{mnp}$ ,  $B_{mnp}$ ,  $C_{mnp}$ ; параметры эти можно определить, пользуясь вариационным методом Кастильяно, рассмотренным в § 83, так что в конечном счете задача сведется к решению системы линейных уравнений вида (11.70).

Можно отметить некоторое отличие корректирующего тензора (11.76) от той формы его, которая впервые была предложена П. Ф. Папковичем в формулах (11.67); если в этих формулах индексу  $m$  дадим ряд численных значений  $0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ , то введем простой ряд коэффициентов:

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}, \quad (11.78)$$

и для определения их получим систему  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными. Если же в формулах (11.76) индексам  $m, n, p$  будем давать те же численные значения, то коэффициенты образуют тройной ряд и число их будет  $3N^3$ ; таково же будет число уравнений для определения их. Дадим, например, в первом приближении всем индексам одно значение:  $m = n = p = 0$ ; тогда введем три коэффициента:

$$A_{000}, B_{000}, C_{000}. \quad (11.79)$$

Во втором приближении введем два значения индексов:  $m = 0, 1$ ;  $n = 0, 1$ ;  $p = 0, 1$ ; тогда получим восемь коэффициентов  $A_{mnp}$ :

$$\left. \begin{aligned}A_{000}; & A_{100}; & A_{010}; & A_{001}; \\A_{011}; & A_{101}; & A_{110}; & A_{111}.\end{aligned} \right\} \quad (11.80)$$

Всего же будет введено 24 коэффициента  $A_{mnp}$ ,  $B_{mnp}$ ,  $C_{mnp}$ . Таким образом, стремление повысить точность решения влечет за собой значительное увеличение числа неизвестных, вводимых в задачу, и создает трудности технического характера, связанные с решением

систем с большим числом уравнений; это вызвано, конечно, сложным, пространственным характером самой задачи. Форма решения (11.67), предложенная П. Ф. Папковичем, проще в смысле построения, но для достижения той же степени точности, очевидно, потребует введения значительно большего числа членов в ряде (11.78). Решение в форме (11.76) можно несколько упростить, пользуясь *неполными приближениями*; например, при введении нового значения индексов  $m, n, p$  можно сохранять только те коэффициенты, в тройных индексах которых это новое значение встречается один раз; так, при введении второго приближения (11.80) сохраним только коэффициенты первой строки, где индекс «1» встречается один раз. Тогда общее число коэффициентов будет  $3 \times 4 = 12$ , т. е. по сравнению с полным вторым приближением сократится в два раза.

Приложение метода Кастильяно к задаче Ламе поясним на самом простом случае, когда призма сжимается или растягивается одинаковыми нагрузками, произвольно распределенными на двух противоположных гранях, например на гранях  $z = 0$  и  $z = c$ ; тогда граничные условия на этих гранях будут

$$\begin{aligned} \text{при } z = c & \quad X_z = Y_z = 0; \quad Z_z = F(x, y); \\ \text{при } z = 0 & \quad X_{-z} = Y_{-z} = 0; \quad Z_{-z} = -F(x, y); \end{aligned}$$

остальные грани должны быть свободны от нагрузок. Все эти условия будут соблюдены, если основной тензор возьмем в виде

$$X_x = Y_y = X_y = Y_z = Z_x = 0; \quad Z_z = F(x, y).$$

Подстановка в уравнения равновесия (I) показывает, что они также тождественно удовлетворяются. (Такое напряженное состояние может существовать, если призму заменим блоком той же формы, составленным из отдельных стержней, параллельных оси  $Oz$ , в предположении, что между ними нет трения и взаимного нажатия; тогда каждый стержень воспримет ту часть нагрузки, которая приходится на его концы, и напряжение  $Z_z$  в нем будет постоянным по длине и не будет зависеть от  $z$ ; при этом условия совместности деформаций; конечно, не будут удовлетворены.) Остается построить общий тензор напряжений, как сумму основного (11.73) и корректирующего (11.76); от тензора (11.76) он отличается только тем, что в формуле компонента  $Z_z$  добавится слагаемое  $F(x, y)$ .

На рис. 105 показан частный случай призмы с квадратным основанием  $a = b = 1$ ,  $c = 2$ , нагруженной по верхнему и нижнему основаниям нагрузками, распределенными по закону

$$F(x, y) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right).$$

Поверхность, характеризующая это распределение, показана на верхнем основании призмы. Нагрузка (как и самая призма) имеет две оси симметрии; поэтому в формулах (11.75) следует удерживать только

функции  $P_m$ ,  $P_n$ ,  $P_p$  четных номеров, имеющие графики (рис. 104), симметричные относительно середины отрезков  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Решение этой задачи во втором неполном приближении привело к системе 12-ти уравнений \*) относительно коэффициентов

$$A_{000}; A_{002}; A_{020}; A_{200};$$

$$B_{c00}; B_{002}; B_{020}; B_{200};$$

$$C_{000}; C_{002}; C_{020}; C_{200}.$$

На рис. 105 показана поверхность распределения напряжений  $Z_z$  в сечении посередине высоты призмы. Несмотря на резкую неравномерность заданной на основаниях нагрузки, распределение напряжений в среднем сечении достаточно близко к равномерному, как это следует из принципа Сен-Венана.

Вариационный метод Кастильяно дал возможность получить решение задачи Ламе для призмы в других, более сложных случаях нагрузок. В. П. Нетребко \*\*) рассмотрел задачи о кручении прямоугольной призмы при заданном распределении касательных напряжений на основаниях ее, а также случаи так называемого стесненного кручения, когда одно или оба основания не могут искривляться (как это следует из теории Сен-Венана) и должны оставаться плоскими. Е. С. Кононенко \*\*\*) нашел решение задачи о сжатии призмы между двумя абсолютно твердыми плитами при наличии полного сцепления на поверхностях контакта; задача решена во втором полном приближении (с 24-мя коэффициен-

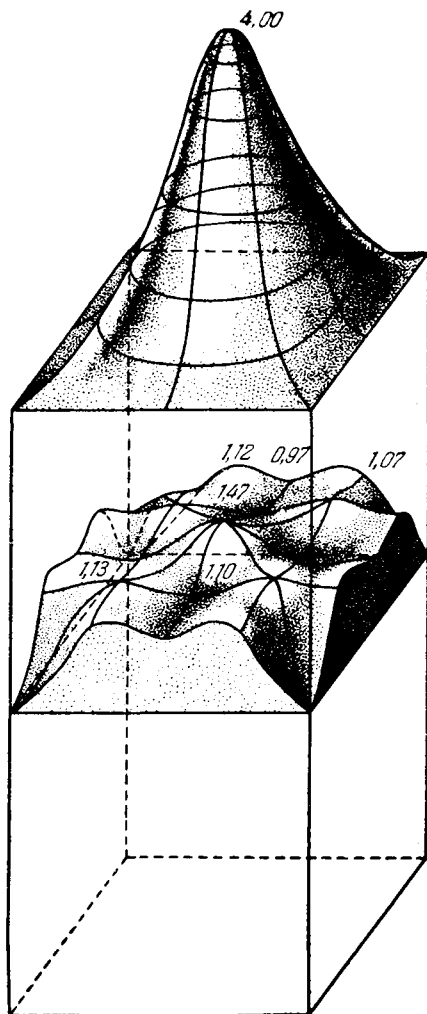


Рис. 105.

\*) См. работу автора в ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.

\*\*) Вестник МГУ, № 12, 1954 и № 6, 1956.

\*\*\*) Исследования по теории сооружений, вып. 6, 1954 и вып. 7, 1957.

тами), и впервые детально выяснено распределение напряжений внутри призмы в этом сложном случае нагрузок.

Используя цилиндрические координаты, можно распространить изложенный в этом параграфе метод на случаи круглого цилиндра, трубы или сектора трубы при заданных нагрузках на поверхности \*). Построение корректирующего тензора для таких тел можно выполнить в весьма общем виде, пользуясь, например, формулами (9.18), содержащими три функции напряжений. Несколько задач такого рода решено в работах В. Н. Ионова, В. М. Любимова и Е. Р. Мирошниченко \*\*).

\*) Работа автора, ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.

\*\*\*) В. Н. Ионов, Исследования по теории сооружений, вып. 7, 1957; Е. Р. Мирошниченко, Задача о сжатии цилиндра между жесткими плитами без скольжения, Моск. лесотех. ин-т, 1957; В. М. Любимов, ПММ, т. XXI, вып. 4, 1957.

### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А., Математическая теория упругости, 1935 г.
2. Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, 1947 г.
3. Тимошенко С. П., Теория упругости, 1934 г.
4. Папкович П. Ф., Теория упругости, 1939 г.
5. Фёпль А. и Л., Сила и деформация, т. 1 и 2, 1936 и 1939 гг.
6. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи теории упругости, 1933, 1937 и 1949 гг.
7. Треффц Е., Математическая теория упругости, 1932 г.
8. Пфейффер П., Колебания упругих тел, 1932 г.
9. Колосов Г. В., Применение комплексной переменной к теории упругости, 1935 г.
10. Серенсен С. В., Основы технической теории упругости, 1934 г.
11. Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, 1932 г.

### ИНОСТРАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Navier, Résumé des leçons, 1864 г., с примечаниями С.-Венана.
2. Mathieu E., Theorie de l'élasticité des corps solides, 1890 г.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бельтрами 128  
Бернулли Я. 9, 116  
Бицено К. Б. 210  
Блох В. И. 246  
Бредт 236  
Буссинеск 194, 255, 261, 267

Галеркин Б. Г. 276, 312, 318  
Галилей Г. 9  
Герц Г. 276  
Граммель Р. 210  
Грин 10  
Гук Р. 9, 68

Даламбер Ж. 102, 289, 328  
Дирихле П. 182, 216

Жермен С. 9, 298

Иностранцев 105  
Ионов В. Н. 358

Кастильяно 250, 338  
Кельвин — см. Томсон  
Кирхгоф Г. 132, 294, 304  
Клапейрон 10, 132  
Кононенко Е. С. 357  
Кокер Э. 172  
Колосов Г. В. 10, 278, 358  
Кочин Н. Е. 287  
Коши О. 9, 27, 44, 215  
Крутков Ю. А. 246  
Крылов А. Н. 358  
Кулон Ш. 9, 107, 218

Лагранж Ж. 9, 326  
Ламб 304

Ламе 10, 32, 72, 91, 190, 351  
Лаплас П. 92, 230  
Леви М. 144, 165, 313  
Лейбензон Л. С. 276, 292, 341, 346,  
358  
Любимов В. М. 358  
Ляв А. 10, 275, 276, 279, 292, 358

Максвелл Д. 10, 243  
Мариотт Э. 9  
Маркус Г. 321, 358  
Маслов Г. Н. 172  
Матье 10, 358  
Мирошниченко Е. Р. 358  
Мичелл 10, 128, 210  
Мор 351  
Морера 243  
Мухелишвили Н. И. 10, 27, 52, 278,  
358

Навье 9, 308, 358  
Нейман 215  
Нетребко В. П. 357  
Новожилов В. В. 39

Остроградский М. В. 10

Папкович П. Ф. 171, 172, 183, 348,  
358  
Пономарев С. Д. 39  
Прандтль 216, 232  
Проктор Г. Э. 240  
Пуассон С. 9, 69, 304  
Пфейффер П. 358

Релей Дж. 10, 292  
Рибьер 166, 172  
Ритц 331

- Сен-Венан 10, 12, 51, 94, 109, 219, 237  
Серенсен С. В. 358  
Тимошенко С. П. 10, 129, 171, 172, 211, 239, 358, 332  
Томсон У. 10, 304  
Треффи Е. 275, 358  
Тэт 304  
Файлон Л. 166, 172, 174, 279  
Фёппль А. 236, 240, 358  
Фёппль Л. 236, 240, 358  
Филоненко-Бородич М. М. 174, 249, 353, 358  
Фламан 194  
Фурье Ж. 103  
Эйлер Л. 9, 81, 116, 177, 273  
Эри 145  
Юнг Т. 69  
Ясинский Ф. С. 10  
Ястржембский Н. Ф. 9
-



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда колебания 97  
Аналогия Прандтля 232
- Бельтрами — Мичелла уравнения 128, 231, 255, 259  
Бредта теорема 236  
Брус большой кривизны 193  
— цилиндрический 16  
Буссинеска задача 267
- Вариация напряжения 338  
Вектор вращения (вихрь) 287  
Волна Лява 292  
— отраженная 291  
— равнообъемная (эквиволуминальная) 288  
— расширения 287  
— — безвихревая 288  
— Релея 292  
— сдвига 287  
— стоячая 291  
— сферическая 290
- Герца задача о сжатии двух тел 276  
Гипотеза Кирхгофа прямолинейного элемента 294  
— о естественном состоянии тела 80, 126  
— сплошного строения твердых тел 12  
Градиент функции напряжения Прандтля 234  
Грина — Остроградского формула 24  
Гука закон 68, 79
- Даламбера принцип 328  
Девиатор деформации 61  
— напряжений 37  
Действие нагрузки на среду, ограниченную плоскостью 267
- Деформация 9, 42  
— конечная 63  
— линейная (удлинение) 42  
— многосвязного тела 54  
— объемная 59  
— однородная 47, 48  
— плоская 136  
— угловая 42  
— чистая 49  
Диаграмма растяжения 68  
Дивергенция вектора перемещения 287  
Дирихле условия 182  
Длина волны колебания 97  
Днище цилиндрического резервуара 321
- Единственность решения уравнений теории упругости 125, 131
- Жермен уравнение 298  
Жесткость пластинки цилиндрическая 298
- Задача Буссинеска 267  
— Герца о сжатии двух тел 276  
— Дирихле о нахождении гармонической функции 216, 270  
— контактная 132, 174  
— Ламе о равномерном сжатии круглой трубы 190  
— Неймана 215  
— теории упругости смешанная 132  
— Фламана — Буссинеска 194  
Закон взаимности (парности, сопряженности) касательных напряжений 20, 42  
— Гука 68, 79  
— обобщенный 71, 87, 90, 138, 189

- Закон Гука при сдвиге 69, 108  
 — независимости действий 67, 126  
 — парности (сопряженности) касательных напряжений 20, 40  
 Замкнутость системы функций 353
- Изгиб** балки, заделанной концами 163  
 — — на двух опорах 158  
 — — прямоугольной 120, 141  
 — бруса 41, 66  
 — — круглого 241  
 — — поперечный 237  
 — клина 201  
 — консоли 151  
 — пластинки 293  
 — — чистый 302  
 — полосы 174  
 — — прямоугольной 166  
 — стержня 41  
 — — призматического чистый 116, 150  
 — — продольный 127  
 Изотропия тел 68  
 Инварианты деватора деформаций 61  
 — — напряжений 38  
 — тензора деформации 60  
 — — напряжений 32  
 Интеграл Мора 351
- Кастильяно** вариационное уравнение 338  
 Квадрика Коши 28, 36  
 Кирхгофа гипотеза прямолинейного элемента 294  
 Клапейрона теорема 132, 326  
 Клип, нагруженный в вершине 199  
 Колебание гармоническое 97  
 — поперечное однородное 96  
 — продольное однородное 95  
 — стержня продольное 101  
 — упругое 19  
 Кольцо замкнутое 211  
 Компонент вращения 47  
 — деформации 45  
 Координаты цилиндрические 185  
 Коши квадрика 28, 36  
 — уравнения 44, 89  
 Коэффициент Пуассона 69  
 Коэффициенты Ламе 72, 87  
 Критерий Лежен — Дирихле 329  
 Кручение бруса, имеющего форму тела вращения 250  
 — — призматического 342  
 — пластинки 293, 301
- Кручение стержня 66, 107, 212  
 Кулона теория кручения — см. теория кручения Кулона
- Лагранжа** принцип 328  
 — уравнение вариационное 326  
 Ламе коэффициенты 72, 87  
 — уравнения 91, 129, 255, 259  
 — эллипсоид напряжений 33, 36  
 Лапласа оператор 92, 187  
 Леви условие (уравнение) 144  
 Лежен — Дирихле критерий 329  
 Линии уровня функции 222  
 Лява волна 292  
 — формулы перемещений 276
- Максвелла** функции напряжений — см. функции напряжений Максвелла  
 Матрица симметричная 337  
 Мембрана 232  
 Метод исследования напряжений оптический 145  
 — Ритца — Тимошенко 332  
 — сечения 11  
 Модуль объемной упругости 76  
 — поперечной упругости 69  
 — продольной упругости 69  
 — упругости при сдвиге 69  
 — Юнга 69  
 Момент изгибающий 299  
 — крутящий 107, 217, 301  
 Мора интеграл 351  
 Морера функции напряжений 246
- Навьё** уравнения 20, 89, 102, 186, 248  
 Напряжение 12  
 — гидростатическое среднее 39  
 — главное 29  
 — касательное 15  
 — начальное 80  
 — нормальное 15  
 — октаэдрическое 36, 73  
 — полное 12  
 — среднее 11  
 Начало возможных перемещений 328  
 — наименьшей работы 347  
 Неймана задача 215
- Однозначность решения уравнений теории упругости 125, 131  
 Однородность тел 68  
 Оператор Лапласа 92, 187  
 Ось нейтральная 117

- Параболоид 222, 301, 303  
 Перемещение 19, 42  
 Период колебаний 97  
 Пластика 293, 306, 307, 308, 318  
 Плита тонкая 293  
 Плоскость главная 118  
 — косая 301  
 Плотность 17  
 Площадка главная 29  
 — октаэдрическая 36  
 Поверхность деформации 58  
 — напряжений 28, 36  
 Подстановка Эйлера 273  
 Поле функции 251  
 Полнота системы функций 353  
 Полоса на абсолютно твердом осно-  
 вании 174, 180  
 Постоянная упругая 82  
 Потенциал Лапласа 213, 250  
 — перемещений 49  
 — упругих сил 77  
 Прандтля аналогия 232  
 — функция 216, 230  
 Предел пропорциональности 68  
 Призма прямоугольная упругая 351  
 Принцип Даламбера 328  
 — Лагранжа 328  
 — Сен-Венана 110  
 Пуассона коэффициент 69  
 — число 69
- Работа нагрузок внешних 132  
 — сил поверхностных 133  
 — — упругих 76  
 Равновесие упругого шара 261  
 Распределение напряжений радиаль-  
 ное простое 195  
 Растяжение призмы под действием  
 собственного веса 122  
 Расширение объемное 287  
 Релея волна 292  
 Решение плоской задачи в напряже-  
 ниях 146  
 Ритца — Тимошенко метод 332  
 Ряд Фурье 103
- Сводка основных уравнений теории  
 упругости 89  
 Сдвиг 42  
 Сен-Венана принцип 110  
 — тождество 51  
 — уравнения 51, 90, 140, 187  
 Сжатие клина 201  
 Сила внешняя 11  
 — внутренняя 10
- Сила объемная 16  
 — поперечная 299  
 Скорость распространения колебаний  
 98, 100  
 Смещение тела жесткое 48  
 Состояние напряженное 13  
 — — однородное 150  
 — — плоское 25  
 — — обобщенное 140  
 — — пространственное осесимметри-  
 ческое 250  
 — самонапряженное 349  
 Стокса теорема 236  
 Стенка подпорная 164  
 Стержень 220, 223, 225
- Тело анизотропное 68  
 — изотропное 68, 83  
 — неоднородное 68  
 — однородное 68  
 Тензор деформации 57  
 — — конечной 65  
 — корректирующий 352  
 — напряжений 27  
 — основной 352  
 — относительных перемещений 52  
 — шаровой 37  
 Теорема Бредта 236  
 — Клапейрона 132, 326  
 — Стокса 236  
 — Эйлера об однородных функциях  
 81  
 Теоремы о минимуме 329, 346  
 Теория кручения Кулона 107, 218  
 — молекулярная строения тел 10  
 Тождества Сен-Венана 51  
 Траектория равных напряжений 197
- Удлинение 42  
 — главное 59  
 Уравнение бигармоническое 255  
 — вариационное Кастильяно 338  
 — — Лагранжа 326  
 — волновое 286  
 — Жермен 298  
 — Лапласа 230, 278  
 — Леви 144  
 — поперечного колебания струны  
 102  
 Уравнения Бельтрами — Мичелла 128,  
 231, 255, 259  
 — геометрические 89  
 — изгиба пластинки 294  
 — канонические 337  
 — Коши 44, 89

- Уравнения кручения пластинки 294  
 — Ламе 91, 129, 255, 259  
 — Навье дифференциальные 20, 89, 102, 186, 248  
 — плоской задачи в полярных координатах 184  
 — — статика 18  
 — Сен-Венана неразрывности (совместности) деформаций 51, 90, 140, 187  
 Условие Леви 144  
 Условия Дирихле 182  
 — Коши — Римана 215, 219, 283  
 — на поверхности 23, 89
- Формула Грина — Остроградского 24  
 — Фурье 182  
 Формулы перемещений Лява 276  
 Функции напряжений Максвелла 244  
 — — Морера 246  
 Функция аналитическая 219  
 — бигармоническая 149, 250, 255
- Функция гармоническая 213, 250  
 — кручения 212, 230  
 — — напряжений Прандтля 216, 230  
 — — Эри 145, 150, 152, 248, 284  
 — силовая 329  
 Фурье ряд 103  
 — формула 182
- Циркуляция напряжений 237
- Число Пуассона 69
- Элементы напряженного состояния 26  
 Эллипсоид напряжений Ламе 33, 36  
 Энергия потенциальная упругая 133, 330  
 Эри функция 145, 150, 152, 248, 284
- Юнга модуль 69
-