Höhere Mathematik

für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete.

Von

J. W. Mellor.

In freier Bearbeitung der zweiten englischen Ausgabe

herausgegeben von

Dr. Alfred Wogrinz und **Dr. Arthur Szarvassi.**

Mit 109 Textfiguren.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1906.

ISBN-13: 978-3-642-88940-0 e-ISBN-13: 978-3-642-90795-1
DOI: 10.1007/978-3-642-90795-1
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1906

Vorwort.

Das vorliegende Buch soll angehenden Physikochemikern und Studierenden anderer naturwissenschaftlicher Gebiete die zunächst notwendigen Kenntnisse in der Mathematik vermitteln.

Es ist eine freie Bearbeitung von J. W. Mellors „Higher mathematics for students of chemistry and physics“, in dem Sinn, daß die leitenden Gedanken und der Aufbau des englischen Werkes festgehalten wurden, während insbesondere bei der Auswahl der Beispiele die Bearbeiter ihrem Ermessen gefolgt sind; so z. B. haben sie manche Kapitel Mellors, in denen lediglich physiko-chemische Theorien erläutert werden, stark gekürzt.

Die Abschnitte II und VI—XI hat Dr. Szarvassi verfaßt, die Abschnitte I und III—V Dr. Wogrinz, dem auch die Gesamtredaktion des Buches zugefallen ist.

Ob das Ziel des Werkes erreicht ist, muß der Erfolg lehren, den es in den Kreisen hat, für die es bestimmt ist.

Schließlich erfüllen die Verfasser eine angenehme Pflicht, wenn sie der Verlagsbuchhandlung für das liebenswürdige Entgegenkommen danken, mit dem alle ihre Wünsche bei der Drucklegung des Buches erfüllt worden sind.

Dezember 1905.

Die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

VIII. Abschnitt.

IX. Abschnitt.

X. Abschnitt.

XI. Abschnitt.

I. Abschnitt.

Einleitung, Erklärung und Bildung des Differentialquotienten.

§ 1. Begriff der Funktion.

Wenn bei gleichbleibender Temperatur der Druck, unter dem eine Menge eines Gases steht, ab- oder zunimmt, ändert sich, wie bekannt, innerhalb gewisser Grenzen ziemlich proportional auch sein Volum. — Die beiden Größen Druck p und Volum v stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang, den wir durch eine Formel ausdrücken, wenn wir schreiben:

$$v = \frac{RT}{p}$$

In der Sprache der Mathematik heißt nun das vom Druck p abhängige Volum v eine Funktion von p; man schreibt kurz:

$$v = f(p)$$

Beide Größen p und v nennt man Variable, und zwar ist hier p die unabhängige, v die abhängige Veränderliche.

Von der Temperatur T haben wir vorausgesetzt, daß sie in unserem Fall eine konstante Größe sein, durch die Änderungen von p und v unbeeinflußt bleiben soll; auch R ist eine solche Konstante — auf ihre Bedeutung brauchen wir hier nicht weiter einzugehen.

Der Flächeninhalt y eines Kreises ist eine Funktion der Länge x des Radius:

$$y = f(x) = x^2 \pi$$

der von einem frei fallenden Körper zurückgelegte Weg s ist eine Funktion der Zeitdauer t des Falles:

$$s = f(t) = \frac{g}{2} t^2$$

usf. usf.

y ist eine Funktion von x, besagt also, daß ein Gesetz besteht, nach welchem innerhalb gewisser Grenzen für jeden Wert von x ein (oder mehrere) Werte für y bestimmt sind.

Ob die mathematische Form dieses Gesetzes, d. h. der Ausdruck für $f(x)$ auch wirklich bekannt ist, bleibt zunächst dahingestellt, wenn wir schreiben:

$$y = f(x)$$

Damit ist vorläufig nur durch ein Symbol angedeutet, daß wir das Bestehen eines derartigen Gesetzes annehmen.

Wir sind z. B. überzeugt, daß der Druck p der Wasserdämpfe in einem geschlossenen Gefäß, das zum Teil mit Wasser gefüllt ist, eine Funktion der Temperatur t ist und schreiben:

$$p = f(t)$$

ohne jedoch den exakten mathematischen Ausdruck für die Beziehungen zwischen p und t zu kennen.

Funktionen wie:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(a, b, c, d sind Konstanten) oder etwa:

$$y = (x^2 + 2)^3 + (x^2 + 2)^2$$

Ausdrücke also, in welchen x nach Ausführung aller angezeigten Operationen nur mit positiven ganzzahligen Exponenten vorkommt, nennt man ganze rationale Funktionen von x.

Funktionen wie:

$$y = ax^2 + bx + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + e$$

$$= ax^2 + bx + cx^{-1} + dx^{-2} + e$$

oder:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + d}$$

$$= (ax^2 + bx + c)(x^3 + d)^{-1}$$

Ausdrücke also, in denen nach Ausführung aller möglichen Vereinfachungen x auch mit negativen ganzzahligen Exponenten vorkommt, heißen gebrochene rationale Funktionen von x.

Funktionen wie:

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx} = (x^3 + ax^2 + bx)^{\frac{1}{2}}$$

oder:

$$y = x^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} = x^2 + bx^{-\frac{1}{2}}$$

Ausdrücke also, in denen nach Ausführung aller Vereinfachungen x auch mit gebrochenen Exponenten vorkommt, heißen irrationale Funktionen von x.

Rationale und irrationale Funktionen nennen wir überhaupt algebraische Funktionen — nicht-algebraische Funktionen heißen transzendent.

Ausdrücke wie:

$$y = a^x \qquad y = (a + bx^2)^{\frac{1}{x}}$$

sogenannte Exponentialfunktionen, oder:

$$y = \log x$$

sind also transzendent.

Transzendent sind ferner die Funktionen:

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x,$$
$$y = \tan x, \qquad y = \cot x,$$

und die inversen zyklometrischen Funktionen:

$$x = \arcsin y, \qquad x = \arccos y,$$
$$x = \arctan y, \qquad x = \operatorname{arccot} y;$$

$x = \arcsin y$, Abkürzung für: $x =$ arcus sinus y, bedeutet nämlich: x ist der Bogen[1]), dessen Sinus y ist.

$x = \arccos y$, Abkürzung für: $x =$ arcus cosinus y, besagt: x ist der Bogen, dessen Sinus y ist, usf.

Offenbar ist x, wenn man y einen bestimmten Wert erteilt, in diesen Funktionen nicht eindeutig bestimmt, denn der Bogen x, dessen Sinus y gleich 1 ist, kann: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$ sein.

§ 2. Die Begriffe „unendlich groß“ und „unendlich klein“.

Es ist ganz unmöglich, mit den Begriffen „unendlich groß“ und „unendlich klein“ irgend eine anschauliche Vorstellung zu verbinden.

$$\tan 90^0 = \infty$$

bedeutet, daß der Wert der Funktion $\tan \alpha$ zunehmend über jeden angebbaren Wert hinauswächst, wenn sich α, der Winkel, 90^0 nähert; — das Symbol ∞ repräsentiert uns keinen Wertbegriff mehr, sondern bezeichnet allgemein die Eigenschaft einer Veränderlichen, unbegrenzt wachsend, jede endliche Grenze zu überschreiten.

Dividieren wir nun eine kleine Zahl n durch eine Million, so erhalten wir einen sehr kleinen Bruch, der weiter eine Millionmal

[1]) Siehe Seite 387, Einleitung von C.

verkleinert dem Nullpunkt der Zahlenlinie nach näher rückt. So fortschreitend können wir Brüche bilden, die geringer sind als jede noch so klein vorgegebene endliche Zahl, d. h. der Null beliebig nahe gebracht werden können, jedoch immer um einen angebbaren endlichen Betrag von ihr verschieden bleiben. Erst wenn wir schließlich den Nenner unendlich groß werden, über jede Grenze hinaus wachsen lassen, wird unser Bruch unendlich klein, der Null unendlich nahe gerückt; in der Ausdrucksweise der Mathematik schreiben wir:

$$\frac{n}{\infty} = 0$$

Die Mathematik operiert mit den erläuterten Symbolen so wie mit algebraischen Größen und führt wie diese das Symbol „∞“ mit positivem und negativem Vorzeichen in die Rechnung ein.

Der Leser überdenke die folgenden Relationen und ihre gegenseitigen Beziehungen; ($\sim$ bedeutet unbestimmte Zahl):

$$\infty + \infty = \infty; \qquad \infty - \infty = \sim.$$

$$n \cdot 0 = 0; \quad n \cdot \infty = \infty; \quad 0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot \infty = \sim; \quad \infty \cdot \infty = \infty.$$

$$n/0 = \infty; \quad n/\infty = 0; \quad 0/n = 0; \quad \infty/n = \infty; \quad 0/0 = \sim;$$

$$\infty/\infty = \sim.$$

$$0^n = 0; \quad \infty^n = \infty; \quad 0^0 = \sim; \quad \infty^0 = \sim.$$

$$1/0^n = \infty; \quad 1/\infty^n = 0; \quad 1/0^0 = \sim; \quad 1/\infty^0 = \sim.$$

$$n^\infty = \infty \text{ wenn: } n > 1.$$

$$1^\infty = \sim.$$

$$n^\infty = 0 \text{ wenn: } 0 < n < 1.$$

$$n^{-\infty} = 1/n^\infty = 0 \quad \text{wenn: } n > 1.$$

$$n^{-\infty} = 1/n^\infty = \infty \text{ wenn: } 0 < n < 1.$$

$$n^0 = 1.$$

§ 3. Ordnungen des unendlich Kleinen.

Stellen wir uns einen Würfel vor, welcher durch drei Gruppen von Schnitten, die in gleichen Abständen geführt sind und parallel zu drei senkrecht aufeinander stehenden Seitenkanten liegen, in kleinere Würfel zerlegt wird. Vermehren wir zunächst die Schnitte parallel einer Seitenfläche, dann wird das Volumen der durch sie gebildeten Schichten unendlich klein, wenn die Zahl der Schnitte unbegrenzt wächst.

Lassen wir jetzt gleichzeitig die Schnitte in einer auf der ersten senkrechten Lage sich unbegrenzt vermehren, so werden die

Volumina der durch die beiden Schnittsysteme gebildeten prismatischen Säulen unendlich klein und zwar auch im Verhältnis zu den erörterten unendlich dünnen Schichten, da ja erst unendlich viele unendlich kleine Säulen eine solche Schicht bilden.

Wenn schließlich die Zahl der Schnitte in allen drei Gruppen, durch die der Körper in kleinere Würfel geteilt wurde, unbegrenzt zunimmt, dann sind die entstehenden unendlich kleinen Würfel sowohl in Bezug auf die unendlich dünnen Schichten als auch die Säulen verschwindend klein, da erst eine unendliche Anzahl derselben aufeinandergesetzt eine unendlich dünne Säule gibt.

Wir sagen: im Vergleich mit den Schichten von unendlich kleinem Volum sind sowohl die Säulen als die Würfel unendlich kleine Größen höherer Ordnung; nehmen wir die Schichten als von erster Ordnung an, so sind die Säulen unendlich klein von der zweiten, die Würfel unendlich klein von der dritten Ordnung.

Wir können ebenso wie eine zweite und dritte, auch eine vierte, fünfte .... nte Ordnung des unendlich Kleinen entwickeln, indem wir allgemein festhalten:

Die Größen irgend einer Ordnung sind unendlich groß im Verhältnis zu jenen, welche der nächsten und allen folgenden höheren Ordnungen angehören, verschwindeud klein im Vergleich zu denen der nächsten und aller weiteren niedrigeren Ordnungen. Sind also z. B. ε_3' und ε_3 unendlich kleine Größen der dritten, und ist ε_4 eine solche der vierten Ordnung, so ist:

$$\frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_4} \text{ wie: } \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} \text{ unendlich groß,}$$

und:

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} \text{ wie: } \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3'}, \text{ unendlich klein,}$$

während das Verhältnis zweier Größen derselben Ordnung: $\varepsilon_3'/\varepsilon_3$ durch eine endliche Zahl ausgedrückt wird.

Ist also der Quotient zweier unendlich kleiner Größen ein endlicher Wert, so sind sie von derselben Ordnung; ist er unendlich groß, so ist der Zähler von einer niedrigeren Ordnung als der Nenner, ist er unendlich klein, dann ist umgekehrt der Nenner von niedrigerer Ordnung als der Zähler.

§ 4. Begriff des Grenzwertes.

Wenn wir einem Kreis regelmäßige Vielecke von immer größerer Seitenzahl einschreiben, bemerken wir, daß sich die Umfangslängen dieser Polygone umsoweniger von der Länge der Kreisperipherie unterscheiden, je größer ihre Seitenzahl ist, — und wächst ihre

Seitenzahl über jeden endlichen Betrag hinaus, so verschwindet der Unterschied zwischen Polygonumfang und Kreisperipherie. — Es ist ferner leicht einzusehen, daß die Umfangslänge eines regelmäßigen Polygons eine Funktion seiner Seitenzahl ist, und wir sagen nun:

P, die Länge der Peripherie eines Kreises, ist der Grenzwert, welchem der Umfang $f(x)$ eines dem Kreise eingeschriebenen Vieleckes zustrebt, wenn seine Seitenzahl x unbegrenzt wächst.

Die Mathematik drückt dies aus, indem sie schreibt:

$$P = \lim_{x=\infty} f(x)$$

Wir bemerken, daß wir den Begriff des Grenzwertes eigentlich schon benutzt haben: die Bedeutung der Begriffe „unendlich groß" und „unendlich klein" gewannen wir als die von Grenzwerten, welchen gewisse Funktionen zustreben:

Es war: $$\lim_{\alpha=90^0}{}^{1)} \tan \alpha = \infty$$

und: $$\lim_{x=\infty} \frac{n}{x} = 0$$

Ohne uns weiter auf die Theorie der Grenzwerte einzulassen, können wir allgemein sagen: Nähert sich der Wert einer Funktion:

$$y = F(x)$$

immer mehr einer Größe A, wenn x, die unabhängige Variable, gegen einen Wert a heranrückt, (— so daß also der Unterschied zwischen y und A durch fortschreitende Annäherung des x an a beliebig gering gemacht werden kann —) dann nennen wir A eine Grenze, welcher der Wert von y mit der Annäherung des x an a zustrebt und schreiben:

$$\lim_{x=a} F(x) = A$$

Die Grenze A kann eine endliche Größe, Null und unendlich sein, bei einem endlichen Wert von x erreicht werden, oder auch erst, wenn die unabhängige Variable Null oder unendlich groß wird.

Beispiele:

$$\lim_{\alpha=0^0} \sin \alpha = 0; \quad \lim_{\alpha=90^0} \sin \alpha = 1; \quad \lim_{\alpha=0^0} \cos \alpha = 1;$$

$$\lim_{\alpha=90^0} \cos \alpha = 0; \quad \lim_{\alpha=0^0} \tan \alpha = 0; \quad \lim_{\alpha=0^0} \cot \alpha = \infty;$$

$$\lim_{x=0} \frac{1}{n^x} = 1; \quad \lim_{x=\infty} \frac{1}{n^x} = 0$$

---

[1]) Abkürzung für: limes, die Grenze.

§ 5. Der Differentialquotient.

Als Geschwindigkeit v eines sich gleichförmig bewegenden Körpers bezeichnen wir den von ihm in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg; sie ergibt sich, wenn man eine von dem Körper durchlaufene Strecke s durch die Anzahl der Zeiteinheiten t dividiert, welche zur Zurücklegung dieser Strecke nötig waren:

$$v = \frac{s}{t}$$

Betrachten wir nun eine gesetzmäßig beschleunigte oder verzögerte Bewegung, bei welcher in aufeinanderfolgenden gleichen Zeiträumen keine gleichen Wegstücke durchmessen werden; offenbar können wir nicht von einer Geschwindigkeit der Bewegung überhaupt, sondern nur von augenblicklichen und ferner von einer mittleren Geschwindigkeit während einer gewissen Beobachtungszeit sprechen.

Es sei z. B. festgestellt, daß ein Eisenbahnzug, der ohne Dampf und Bremse über ein Gefälle heruntergerollt ist:

$s =$ dreißig Kilometer

in einer Stunde zurückgelegt hat. Wir werden nun durchaus nicht behaupten, daß er gerade ein halbes Kilometer in der letzten Minute der einstündigen Fahrt gemacht haben muß, — bilden wir:

$$v = \frac{s}{t}$$

als Zeiteinheit die Minute angenommen, so stellt uns v bloß eine durchschnittliche Geschwindigkeit von einem halben Kilometer in in der Minute dar — hätte der Zug diese mittlere Geschwindigkeit während der ganzen Stunde unter Anwendung von Dampf und Bremse innegehalten, so wären die dreißig Kilometer ebenfalls zurückgelegt worden.

Seine wirklichen Geschwindigkeiten in verschiedenen Momenten der einstündigen Fahrt über das Gefälle werden von diesem Durchschnittswert im allgemeinen abweichen und zwar im Anfang kleiner, gegen Ende größer sein.

Nehmen wir nun eine kürzere Beobachtungszeit als eine Stunde an, — etwa die Zeit t, — während welcher der Zug bloß die Strecke x auf dem Gefälle durchfahren hat; es leuchtet ein, daß die augenblicklichen Geschwindigkeiten während t um so weniger von der mittleren Geschwindigkeit x/t verschieden sind, je kürzer wir t wählen.

Nennen wir Δx den während einer ganz kurzen Beobachtungszeit Δt, — etwa einer Sekunde — zurückgelegten Weg, dann ist diese Annäherung schon außerordentlich groß, die Geschwindigkeit am Anfang und am Ende von Δt wird von dem Durchschnittswert $\Delta x/\Delta t$ in unserem Fall kaum mehr meßbar differieren. Wenn wir schließlich einen unendlich kleinen Zeitraum mit dt und das entsprechende Wegstück mit dx bezeichnen, so stellt uns der Quotient dx/dt die mittlere Geschwindigkeit während eines unendlich kleinen Zeitteilchens, d. h. einen augenblicklichen Geschwindigkeitswert dar.

dx bezeichnet also in der Sprache der Mathematik die Änderung der abhängigen Variablen, der Funktion x, — in unserem Fall des Weges — für die unendlich kleine Änderung dt der unabhängigen Variablen t — in unserem Fall der Zeit.

dx und dt nennt man Differentiale.

Man operiert mit Differentialen wie mit algebraischen Symbolen, so ergibt sich aus:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ohne weiteres sinngemäß:

$$dx = v\,dt$$

Das Verhältnis dx/dt heißt der Differentialquotient der Funktion x nach der Variablen t.

Offenbar ist dx/dt nichts anderes als der Grenzwert von $\Delta x/\Delta t$, welchen dieser letztere Quotient erreicht, wenn Δt geringer als jede endliche Größe, d. h. unendlich klein wird:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

§ 6. Fortsetzung.

Den Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes entnehmen wir schließlich, daß die Ableitung des Differentialquotienten, das Differenzieren einer Funktion darin besteht, den Grenzwert des Verhältnisses:

$$\frac{\text{Änderung der Funktion}}{\text{Änderung der unabhängigen Variablen}}$$

zu bestimmen, wenn die Änderung der unabhängigen Variablen unendlich klein wird.

Wir wollen an einem besonderen Beispiel sehen, wie wir immer vorzugehen haben.

Es sei:

$$y = f(x) = x^2$$

a) x soll nun um den kleinen endlichen Betrag Δx zunehmen, dadurch geht y in $y + \Delta y$ über:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

b) Subtraktion (2) — (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\,\Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

c) somit ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

d) Der Grenzwert dieses Verhältnisses, wenn Δx unendlich klein wird:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\,(2x + \Delta x)_{\Delta x = 0}$$

ist offenbar $2x$, das heißt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^2)}{dx} = 2x$$

Bevor wir nun darangehen, die Differentiation spezieller Funktionen, wie x^m, $\sin x$, $\log x$, e , usf. zu studieren, wollen wir im folgenden Abschnitt noch einige allgemeine formale Betrachtungen anstellen, wie Summen, Produkte, Quotienten und Funktionen von Funktionen zu behandeln sind.

§ 7. Differentiation von Summen, Produkten, Quotienten und Funktionen von Funktionen.

I. *Differentiation einer Summe von mehreren Funktionen:*

u, v, w seien Funktionen von x,

ihre Summe heiße y:

$$y = u + v + w$$

Erteilen wir der unabhängigen Variable einen Zuwachs Δx, so geht dadurch:

$$\begin{aligned} u &\text{ in } u_1 = u + \Delta u \\ v &\text{ in } v_1 = v + \Delta v \\ w &\text{ in } w_1 = w + \Delta w \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} y \text{ in } y_1 = y + \Delta y &= u_1 + v_1 + w_1 \\ &= (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w) \text{ über.} \end{aligned}$$

Offenbar ist nun:

$$\begin{aligned} y_1 - y = \Delta y &= (u_1 - u) + (v_1 - v) + (w_1 - w) \\ &= \quad \Delta u \quad + \quad \Delta v \quad + \quad \Delta w \end{aligned}$$

Wir dividieren jetzt auf beiden Seiten durch Δx, das Increment von x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

und gehen zur Grenze für Δx gleich Null über:

$$\begin{aligned} \lim \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right._{\Delta x = 0} &= \lim \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right._{\Delta x = 0} + \lim \left.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right._{\Delta x = 0} + \lim \left.\frac{\Delta w}{\Delta x}\right._{\Delta x = 0} \\ = \frac{dy}{dx} \quad &= \quad \frac{du}{dx} \quad + \quad \frac{dv}{dx} \quad + \quad \frac{dw}{dx} \end{aligned}$$

Der Differentialquotient einer Summe mehrerer Funktionen von x ist also gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden.

Ia. Wir wollen:

$$y = u + C$$

differenzieren. — u soll eine Funktion von x, C eine konstante Größe bedeuten.

Wir lassen x um Δx wachsen; dadurch geht:

$$u \text{ in } u_1 = u + \Delta u$$

und:

$$y \text{ in } y_1 = y + \Delta y = u + \Delta u + C$$

über. Die Konstante C bleibt natürlich davon, daß x um Δx zunimmt, ganz unbeeinflußt.

$$\Delta y = \overbrace{u + \Delta u + C}^{y_1} - \overbrace{u - C}^{y}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right._{\Delta x = 0} = \frac{dy}{dx} = \lim \left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right._{\Delta x = 0} = \frac{du}{dx}$$

Wir sind also zu dem Resultat gekommen, als wenn wir einfach u differenziert hätten, — das additive, konstante Glied verschwindet, die Ableitung dC/dx einer Konstanten C ist gleich Null zu setzen.

II. *Differenzierung eines Produktes mehrerer Funktionen.*

Es sei zunächst:

$$y = u \cdot v$$

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x)$$

erhält die unabhängige Variable einen kleinen Zuwachs Δx, so geht y, u, v in:

$$y_1 = y + \Delta y \qquad u_1 = u + \Delta u \qquad v_1 = v + \Delta v$$

über, und es ist:

$$y_1 = u_1 v_1 = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$y_1 - y = \Delta y = u_1 v_1 - uv$$

Addiert und subtrahiert man auf der rechten Seite dieser Gleichung uv_1, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta y &= u_1 v_1 - uv + uv_1 - uv_1 \\ &= u(v_1 - v) + v_1(u_1 - u) \\ &= u\Delta v + (v + \Delta v)\Delta u\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim u\frac{\Delta v}{\Delta x}_{\Delta x = 0} + \lim (v + \Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x}_{\Delta x = 0} \\ &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

da offenbar:

$$\lim (v + \Delta v)_{\Delta x = 0} = v$$

Nach dem, was wir über das Rechnen mit Differentialen gesagt haben, können wir das gewonnene Resultat auch in der Form:

$$dy = udv + vdu$$

schreiben.

Haben wir es nicht bloß mit einem Produkt aus zwei, sondern aus mehreren Funktionen zu tun, — ist etwa:

$$y = u \cdot v \cdot w$$

$$u = \varphi(x) \qquad v = \varphi'(x) \qquad w = \varphi''(x)$$

so wenden wir folgenden Kunstgriff an:

Wir setzen:

$$v \cdot w = z$$

und haben dann:

$$y = u \cdot z$$

somit:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$$

und da:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(v \cdot w)}{dx} = v\frac{dw}{dx} + w\frac{dv}{dx}$$

folgt weiter:

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot v\frac{dw}{dx} + u \cdot w\frac{dv}{dx} + v \cdot w\frac{du}{dx}$$

Allgemein können wir sagen:

Um den Differentialquotienten des Produktes einer beliebigen Anzahl Funktionen von x zu ermitteln, multipliziert man nacheinander den Differentialquotienten jeder der einzelnen Funktionen mit dem Produkt der übrigen und addiert alle diese Resultate.

IIa. Wir wollen hier auch gleich die Ableitung des Produktes einer Funktion und einer Konstanten besprechen; es sei:

$$y = C \cdot u$$

$$u = \varphi(x) \qquad C \text{ bedeutet eine Konstante;}$$

für $x + \Delta x$ geht:

$$u \text{ in } u_1 = u + \Delta u \qquad y \text{ in } y_1 = y + \Delta y$$

über.

$$y + \Delta y = C(u + \Delta u)$$

$$y_1 - y = \Delta y = C(u + \Delta u) - Cu = C\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}_{\Delta x = 0} = \frac{dy}{dx} = \lim C \frac{\Delta u}{\Delta x}_{\Delta x = 0} = C\frac{du}{dx}$$

In Worten lautet die Regel: Man differenziert das Produkt einer Konstanten und einer Funktion, indem man die Funktion differenziert und das Ergebnis mit der Konstanten multipliziert.

III. *Differenzierung eines Bruches:*

$$y = \frac{u}{v}$$

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x)$$

Für $x + \Delta x$ haben wir:

$$y_1 = y + \Delta y \qquad u_1 = u + \Delta u \qquad v_1 = v + \Delta v$$

$$y_1 - y = \Delta y = \frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v} = \frac{u_1 v - v_1 u}{v_1 v}$$

Wir addieren und subtrahieren hier u/v_1:

$$\Delta y = \frac{u_1 v - v_1 u}{v_1 v} + \frac{u}{v_1} - \frac{u}{v_1}$$

$$= \frac{v(u_1 - u) - u(v_1 - v)}{v_1 v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

Jetzt dividieren wir durch Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

und gehen zum Grenzwert für Δx gleich Null über:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

kürzer:

$$= \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

geschrieben.

IIIa. Wenn:

$$y = \frac{C}{v}$$

$$v = \varphi(x) \qquad C = \text{konstant}$$

finden wir, wie sich der Leser leicht selbst klar machen kann:

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{dv/dx}{v^2}$$

IIIb. und wenn:

$$y = \frac{v}{C}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{C}\frac{dv}{dx}$$

IV. *Die Ableitung der Funktion einer Funktion.*

Es sei:

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(x)$$

Wir sollen dy/dx bilden. Man sucht zuerst:

$$\frac{dy}{du} = f'(u)$$

den Differentialquotienten von y nach u, und bildet dann:

$$\varphi'(x) = \frac{du}{dx}$$

die Ableitung von u nach x; da:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

stellt das Produkt:

$$f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

die gesuchte Ableitung von $f(u)$ nach x dar.

§ 8. Differentiation einer Potenz von x, in der der Exponent eine Konstante ist.

I. Es sei:

$$y = x^m$$

also:

$$y_1 = y + \varDelta y = (x + \varDelta x)^m$$

m bedeutet eine positive ganze Zahl.

Nach dem binomischen Lehrsatz ist:

$$(x + \varDelta x)^m = x^m + m x^{m-1} \varDelta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \varDelta x^2 + \ldots$$

$$\ldots + m x \varDelta x^{m-1} + \varDelta x^m \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

somit:

$$y_1 - y = \varDelta y = (x + \varDelta x)^m - x^m$$

$$= m x^{m-1} \varDelta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \varDelta x^2 + \ldots$$

$$\ldots + m x \varDelta x^{m-1} + \varDelta x^m \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und weiter:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \ast 2} x^{m-2} \varDelta x + \ldots$$

$$\ldots + m x \varDelta x^{m-2} + \varDelta x^{m-1} \quad \ldots \quad (3)$$

Für $\varDelta x$ gleich Null geht $\varDelta y / \varDelta x$ in dy/dx über, und auf der rechten Seite von (3) verschwinden alle Glieder, in denen $\varDelta x$ vorkommt, so daß sich:

$$\lim \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)_{\varDelta x = 0} = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^m}{dx} = m x^{m-1} \quad \ldots \quad (4)$$

ergibt.

II. Es sei:

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Nach IIIa. des vorhergehenden Paragraphen finden wir, wenn wir

$$C = 1 \qquad v = x^m$$

setzen, zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dx^m / dx}{x^{2m}}$$

Nun ist nach (4):

$$\frac{dx^m}{dx} = m x^{m-1}$$

somit: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-2m+m-1} = -m x^{-m-1}$$

III. Es sei:

$$y = x^{\frac{1}{m}}$$

dann ist:

$$x = y^m$$

somit nach (4):

$$\frac{dx}{dy} = m y^{m-1}$$

bzw.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m y^{m-1}} = \frac{1}{m} y^{-m+1}$$

und da ja:

$$y = x^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}\, x^{\frac{-m+1}{m}} = \frac{1}{m}\, x^{\frac{1}{m}-1}$$

Fassen wir die Ergebnisse der vorstehenden Betrachtungen zusammen, so können wir folgende Regel abziehen:

Der Differentialquotient einer Potenz von x nach x ist gleich der Potenz von x mit dem um eine Einheit verringerten Exponenten, multipliziert mit dem Exponenten der zu differenzierenden Potenz; wenn:

$$y = x^n$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

mag nun n eine positive, negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeuten.

§ 9. Beispiele.

Ausgerüstet mit den in §§ 7 und 8 gewonnenen Kenntnissen können wir nun jeder algebraischen Funktion beikommen.

1. $\qquad y = a x^5; \qquad \frac{dy}{dx}\, 5 = a x^4$

denn nach § 7, IIa. ist zunächst:

$$\frac{d\,(a\,x^5)}{dx} = a\,\frac{d x^5}{dx}$$
$$= 5\,a\,x^{5-1}$$

2. $\qquad y = \frac{a}{x^n}; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{n a}{x^{n+1}}$

denn: $\qquad y = a x^{-n}, \qquad \frac{dy}{dx} = a\,\frac{d x^{-n}}{dx} \qquad$ usw.

3. $$y = x - 2x^2; \qquad \frac{dy}{dx} = 1 - 4x$$

denn nach § 7, I. ist zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} - \frac{d\,2x^2}{dx}$$

usw.

4. $$y = a + \frac{1}{\sqrt{x}}; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\sqrt{x^{-3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{d}\cancel{a}}{\cancel{d}x} + \frac{d\,(1/\sqrt{x})}{dx}$$

$$= \frac{dx^{-\frac{1}{2}}}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

5. $$y = (1 - x^2)^3; \qquad \frac{dy}{dx} = -6x(1 - x^2)^2$$

Wir setzen zunächst:

$$1 - x^2 = u$$

dann ist nach § 7, IV.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,u^3}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2\frac{du}{dx}$$

$$= 3\,(1 - x^2)^2\frac{d\,(1 - x^2)}{dx}$$

6. $$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

Wir setzen:

$$u = 1 - x^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{d\,(1 - x^2)}{dx}$$

7. $$y = (x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3); \qquad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$$

nach § 7, II. ist:

$$\frac{dy}{dx} = (x - 1)(x - 2)\frac{d\,(x - 3)}{dx} + (x - 1)(x - 3)\frac{d\,(x - 2)}{dx}$$

$$+ (x - 2)(x - 3)\frac{d\,(x - 1)}{dx}$$

usw.

8. $$y = x^2(1 + ax^2)(1 - x^2)$$

Man kann natürlich, anstatt wie in Beispiel 7 vorzugehen, auch zuerst die angedeuteten Multiplikationen ausführen, — man findet:

$$y = x^2 + x^4(a - 1) - ax^6$$

— und dann dieses Ergebnis differenzieren:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4(a - 1)x^3 - 6ax^5$$

Das Resultat muß natürlich, ob man den einen oder den anderen Weg einschlägt, stets dasselbe sein.

9. $$y = \frac{x}{1 - x}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

denn nach § 7, III. ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dx}(1 - x) - \frac{d(1 - x)}{dx}x}{(1 - x)^2}$$

usw.

10. $$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}$$

denn:

$$\frac{dy}{dx} = \left\{\frac{d(1 + x^2)}{dx}(1 - x^2) - \frac{d(1 - x^2)}{dx}(1 + x^2)\right\} / (1 - x^2)^2$$

usw.

11. $$y = \underbrace{\frac{x^3}{x^2 - 1}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{x^2}{x - 1}}_{\mathrm{II}}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\mathrm{I}}{dx} - \frac{d\,\mathrm{II}}{dx}$$

usw.

11. Nach Matthiessen läßt sich der Zusammenhang, der zwischen dem Widerstand R eines Platindrahtes und der Temperatur t besteht, durch die Formel:

$$R = R_0(1 - at + bt^2)^{-1}$$

ausdrücken, solange t innerhalb der Grenzen 0^0 und 100^0 liegt. R_0 bedeutet den Widerstand bei 0^0, a und b sind Konstanten.

Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes ist:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R^2(a - 2bt)}{R_0}$$

13. Die Formel von Siemens für den Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur eines Drahtes lautet:

$$R = R_0\,(1 + at + b\sqrt{t})$$

der Leser zeige, daß:

$$\frac{dR}{dt} = R_0\left(a + \frac{1}{2}\,b\,t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

§ 10. Die Ableitung der Kreisfunktionen.

a) Die goniometrischen Funktionen.

I. $$y = \sin x, \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

denn:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

somit:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

und nach Formel 10 auf Seite 389 ergibt sich:

$$= 2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

wir dividieren nun durch Δx und erhalten als Grenzwert für Δx gleich Null:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\, 2\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)_{\Delta x = 0}$$

$$= \lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)_{\Delta x = 0}$$

$$= \cos x$$

da:

$$\lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}_{\Delta x = 0} = 1 \text{ (Beisp. 1, Seite 207).}$$

II. $$y = \cos x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

denn:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

nach Formel 20, Seite 390 ergibt sich:

$$= -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

und weiter folgt dann:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = -\lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= -\sin x$$

III. $\qquad y = \tan x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

denn:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

somit:

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d(\sin x / \cos x)}{dx} = \left\{\frac{d \sin x}{dx} \cos x - \frac{d \cos x}{dx} \sin x\right\} / \cos^2 x \quad {}^{1.)}$$

$$= (\cos^2 x + \sin^2 x) / \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

da:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ (Formel 1, Seite 389).}$$

IV. $\qquad y = \cot x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Der Leser führe selbst nach dem Vorgang in III. die Ableitung durch.

Beispiele:

1. $\qquad y = \cos^n x$

Wir erinnern uns an das über die Ableitung der Funktion einer Funktion Gesagte; wenn:

$$y = f(u)$$

und:

$$u = \varphi(x)$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\S\ 7.\ \text{IV.}).$$

[1]) Wir erinnern uns, daß:

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \left\{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right\} / v^2 \quad (\S\ 7,\ \text{II.})$$

Wenn speziell, wie in unserem Beispiel:

$$y = u^n \qquad u = \varphi(x) = \cos x$$

so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^n)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= n \cos^{n-1} x \frac{d \cos x}{dx}$$

$$= -n \cos^{n-1} x \sin x$$

2. $$y = \sin^n x, \qquad \frac{dy}{dx} = n \sin^{n-1} x \cos x$$

3. Ein Punkt schwingt nach der Gleichung:

$$y = a \sin(bt - c)$$

um seine Ruhelage; wie lautet die Formel für die Geschwindigkeit v in irgend einem Moment?

$$v = \frac{dy}{dt} = ab \cos(bt - c)$$

denn:

$$y = a \sin u \qquad u = \varphi(t) = bt - c$$

somit:

$$\frac{dy}{dt} = a \frac{d \sin u}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{usw.}$$

4. $$y = \sin^2(nx - a), \qquad \frac{dy}{dx} = 2n \sin(nx - a) \cos(nx - a).$$

---

b) Die zyclometrischen Funktionen.

I. $$y = \arcsin x$$

d. h.:

$$x = \sin y$$

daraus folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

nun ist:

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

somit schließlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arcsin x)}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

II. $$y = \arccos x$$

d. h.:

$$x = \cos y$$

auf gleichem Weg wie in I. ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arccos x)}{dx} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

III. $$y \operatorname{artan} x$$

d. h.:

$$x = \tan y$$

daraus folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

nun ist:

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{artan} x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

IV. Ebenso findet man:

$$\frac{d(\operatorname{arcot} x)}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Beispiele:

Man differenziere:

1. $$y = \arcsin x^2$$

Wir erinnern uns an das über die Ableitung der Funktion einer Funktion Gesagte; wenn:

$$y = f(u)$$

und:

$$u = \varphi(x)$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\cancel{x}\,u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Wenn speziell:

$$y = \arcsin u \qquad u = \varphi(x) = x^2$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arcsin u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} 2x$$

2. $$y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$u = \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arcsin u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{d(x/\sqrt{1+x^2})}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

3. $$y = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right); \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. $$y = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

denn: $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arctan x)}{dx} + \frac{d(\arctan u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = \varphi(x) = \frac{1}{x} \quad \text{usf.}$$

5. $$y = \arcsin(\cos x); \qquad \frac{dy}{dx} = -1$$

§ 11. Ableitung der logarithmischen Funktion.

Man kann eine Reihe von Zahlen $a, b, c \ldots$ als Potenzen einer beliebigen Grundzahl B darstellen:

$$a = B^{\alpha}, \qquad b = B^{\beta}, \qquad c = B^{\gamma}, \quad \text{usf.}$$

Wir bezeichnen die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ als die Logarithmen der Zahlen $a, b, c \ldots$ im System mit der Basis B und schreiben:

$$\alpha = \operatorname{logar}_B a, \qquad \beta = \operatorname{logar}_B b, \qquad \gamma = \operatorname{logar}_B c, \quad \text{usf.}$$

Es sei nun:

$$y = \operatorname{logar}_B x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dann ist:

$$y + \Delta y = \operatorname{logar}_B (x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{logar}_B (x + \Delta x) - \operatorname{logar}_B x}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \operatorname{logar}_B \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$$

und weiter:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}_{\Delta x = 0} = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{1}{\Delta x} \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)_{\Delta x = 0} \quad . \quad (2)$$

Den Grenzwert dieses Ausdruckes können wir nun nicht nach Methoden bestimmen, die uns schon bekannt sind, sondern wir müssen einen Umweg einschlagen.

Wir setzen:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{1}{\Delta x} \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} u \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{1}{u}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Nach (3) wächst u, wenn Δx abnimmt, und offenbar ist:

$$u = \infty \text{ wenn: } \Delta x = 0$$

somit:

$$\lim \frac{1}{\Delta x} \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)_{\Delta x = 0} = \frac{1}{x} \lim \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u_{u = \infty} \quad (5)$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz finden wir nun:

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \underbrace{1 + \frac{u}{1} \cdot \frac{1}{u}} + \underbrace{\frac{u(u-1)}{2!} \cdot \frac{1}{u^2}} + \underbrace{\frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \cdot \frac{1}{u^3}} + \ldots .$$

$$= 2 + \frac{1 - \frac{1}{u}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{2}{u}\right)}{3!} + \ldots (6)$$

Wird jetzt u unendlich groß, so verschwinden alle im letzten Ausdruck in den Zählern stehenden Brüche mit dem Nenner u d. h.:

$$\lim \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u_{u = \infty} = \operatorname{logar}_B \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots .. \frac{1}{n!} + \ldots .\right)$$

Die Summe einer unendlichen Anzahl Posten innerhalb der Klammern heißt e. Natürlich läßt sich e, da wir nur eine endliche Anzahl Glieder wirklich ausrechnen und addieren können, bloß näherungsweise angeben:

$$e = 2 \cdot 718281828 \ldots ..$$

Knüpfen wir nun mit dem Ergebnis:

$$\lim \operatorname{logar}_B \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u_{u = \infty} = \operatorname{logar}_B e$$

bei (2) und (5) an, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{logar}_B x}{dx} = \frac{1}{x} \operatorname{logar}_B e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ist y der gemeine oder Briggsche Logarithmus ($B = 10$) von x:

$$y = \log x$$

so ergibt die allgemeine Formel (7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x} M$$

Wir bezeichnen nämlich log e, den Briggschen Logarithmus von e, als den Modul M des Briggschen Systems.

$$M = \log 2 \cdot 718281828 \ldots = 0 \cdot 434294482 \ldots$$

Ist y der natürliche oder Nepersche Logarithmus ($B = e$) von x:

$$y = lx$$

so folgt aus (7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

da offenbar der Logarithmus der Basis eines Systems in diesem System gleich 1 ist:

$$\operatorname{logar}_B B = 1$$

§ 12. Bemerkung über die Beziehungen zwischen den Logarithmen derselben Zahl in verschiedenen Systemen.

Es sei: $\alpha^a = n = \beta^b$

also: 1) $a = \operatorname{logar}_\alpha n$ 2) $b = \operatorname{logar}_\beta n$.

Substituieren wir in 1) β^b für n, so ergibt sich:

$$a = \operatorname{logar}_\alpha n = \operatorname{logar}_\alpha \beta^b$$
$$= b \operatorname{logar}_\alpha \beta$$

und da:

$$b = \operatorname{logar}_\beta n$$

folgt weiter:

$$a = \operatorname{logar}_\alpha n = \operatorname{logar}_\beta n \operatorname{logar}_\alpha \beta$$

beziehungsweise:

$$b = \operatorname{logar}_\beta n = \operatorname{logar}_\alpha n \frac{1}{\operatorname{logar}_\alpha \beta}$$

In Worten: der Logarithmus einer Zahl n in bezug auf die Basis β wird gefunden, indem man den Logarithmus dieser Zahl für die Basis α mit dem reziproken Wert des Logarithmus von β in bezug auf α multipliziert.

Wenn z. B. $\alpha = 10 \qquad \beta = e$

so ist: $$ln = \log n \cdot \frac{1}{\log e} = \log n \cdot \frac{1}{M}$$

Also: Übergang von natürlichen zu gemeinen Logarithmen:

gem. Logarithmus = nat. Logarithmus $\times$ Modul.

Übergang von gemeinen zu natürlichen Logarithmen:

$$\text{nat. Logarithmus} = \frac{\text{gem. Logarithmus}}{\text{Modul}}$$

Beispiele:

1. $y = lax^4, \quad dy/dx = 4x$
2. $y = x^n lx, \quad dy/dx = x^{n-1}(1 + nlx)$
3. $y = x^n / (1+x)^n, \quad ly = nlx - nl(1+x)$
   somit: $dy/dx = yn/x(1+x) = nx^{n-1}/(1+x)^{n+1}$
4. $y = x^4(1+x)^n/(x^3-1)$; die Ermittlung von dy/dx soll nach der in (3) angedeuteten Methode erfolgen.
5. $y = l\sin x, \quad dy/dx = \cot x$
6. $y = l\tan x, \quad dy/dx = 2/\sin 2x$
7. $y = l\arcsin x, \quad dy/dx = -x/(1-x^2)$
8. $y = l\,\mathrm{arccot}\, x, \quad dy/dx = 2x/(1+x^2)$

§ 13. Exponentialfunktionen.

Eine Funktion wie:

$$y = u^v \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

in der:

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x) \qquad \ldots \ldots \quad (2)$$

die unabbängige Variable also auch im Exponenten vorkommt, nennen wir eine Exponentialfunktion.

Offenbar ist: $ly = vlu$

und weiter finden wir:

$$\frac{d(ly)}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d(vlu)}{dx}$$

$$= v\frac{d(lu)}{dx} + lu\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v}{u}\frac{du}{dx} + lu\frac{dv}{dx}$$

somit ist: $$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + lu\frac{dv}{dx}\right\} \qquad \ldots \ldots \quad (3)$$

Beispiele:

1. $$y = e^x$$

$$u = e \qquad v = x$$

es ergibt sich, da: $$le = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

2. $$y = a^x$$

$$u = a \qquad v = x$$

somit:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\, la$$

3. $$y = a^{nx}$$

$$u = a \qquad v = nx$$

$$\frac{dy}{dx} = n a^{nx}\, la$$

4. $$y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$u = x \qquad v = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}}\,(1 - lx)/x^2$$

5. $$y = e^{e^x}$$

$$u = e \qquad v = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\, e^{e^x}$$

7. $$y = (a^x + x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(a^x + x)\,\frac{d\,(a^x + x)}{dx} \text{ usf.}$$

8. Die empirische Formel von Magnus für die Beziehung zwischen dem Druck von Wasserdämpfen und der Temperatur lautet:

$$p = a b^{\frac{t}{c+t}}$$

a, b, c sind Konstanten.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{a c l b}{(c+t)^2}\, b^{\frac{t}{c+t}}$$

9. Biot faßte diese Beziehung in folgendem Ansatz:

$$lp = a + b\alpha^t - c\beta^t$$

daher ist:

$$\frac{dp}{dt} = p b \alpha^t l \alpha - p c \beta^t l \beta$$

10. Es ist die Geschwindigkeit eines Punktes zu bestimmen, da sich nach der Gleichung:

$$y = a e^{-\lambda t} \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} + c\right\}$$

bewegt:

$$\frac{dy}{dt} = -a e^{-\lambda t} \left\{\lambda \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + c\right) + \frac{2\pi}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + c\right)\right\}$$

§ 14. Höhere Differentialquotienten.

Wir haben gesehen, daß bei einer Bewegung, deren Geschwindigkeit sich in gesetzmäßiger Weise mit der Zeit ändert, die Bildung von dx/dt — dem ersten Differentialquotienten des Weges:

$$x = f(t)$$

nach der Zeit — einen allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit v zur Zeit t liefert. Während nun weiter die kurze Zeitspanne Δt verfließt, ändert sich die zur Zeit t konstatierte Geschwindigkeit v wiederum um Δv; — offenbar ist dann $\Delta v / \Delta t$ ein Mittelwert der Geschwindigkeitsänderung während Δt und:

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta t}_{\Delta t = v} = \frac{dv}{dt}$$

bedeutet einen Mittelwert der Geschwindigkeitsänderung im Verlauf des unendlich kleinen Intervalles dt, d. h. die augenblickliche Geschwindigkeitsänderung, die Beschleunigung zur Zeit t.

Da aber:

$$v = f'(t) = \frac{dx}{dt}$$

ist weiter:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d f'(t)}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt}$$

gewöhnlich als zweiter Differentialquotient von x nach t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} =$$

oder als zweite Ableitung der Funktion $f(t)$:

$$f''(t)$$

geschrieben.

Differenzieren wir nun noch weiter die Beschleunigung nach der Zeit:

$$\frac{d f''(t)}{dt} = \frac{d(d^2 x/d t^2)}{dt}$$

— kürzer als dritter Differentialquotient des Weges nach der Zeit oder als dritte Ableitung von $f(t)$:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = f'''(t)$$

geschrieben, — so kommen wir zu einem Ausdruck für die Änderung der Beschleunigung in irgend einem Augenblick.

Bleibt die Beschleunigung während des ganzen Vorganges dieselbe, d. h. ist zwar die Geschwindigkeit noch eine Funktion der Zeit, hingegen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \text{konstant, somit: } \frac{d^3 x}{dt^3} = 0$$

so nennen wir die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte. Eine Bewegung von gleichförmiger Geschwindigkeit charakterisiert:

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{konstant;} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Wir haben also jetzt an einem Beispiel den Begriff der höheren Ableitung gewonnen und sehen, daß man den sogenannten zweiten Differentialquotienten erhält, wenn man das Ergebnis der ersten Ableitung nochmals differenziert, daß weiter die dritte Ableitung durch Differentiation der zweiten sich ergibt, usf.:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d(d^{n-1} y/d x^{n-1})}{dx}$$

Beispiele:

Es sei:

1. $$y = x^m$$

Wir finden:

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \text{ usf.}$$

allgemein:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

Es ist also etwa:

$$\frac{d^4(x^3)}{dx^4} = 0, \quad \frac{d^3(x^{-2})}{dx^3} = -24\,x^{-5}$$

Bei:

2. $$y = \sin x$$

ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \sin x; \text{ usf.}$$

Man beachte, daß hier und auch bei:

$$y = \cos x$$

jede vierte Ableitung gleich der ursprünglichen Funktion ist:

$$\frac{d^{4n} y}{dx^{4n}} = y$$

(n bedeutet eine beliebige positive ganze Zahl).

3. $$y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx}, \; \ldots\ldots \; \frac{dy^n}{dx}, \ldots = e^x$$

4. $$y = lx, \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{6}{x^4}$$

5. $$y = l(x+1), \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -(x+1)^{-2}$$

6. Der von einem frei fallenden Körper in der Zeit t zurückgelegte Weg sei:

$$x = \frac{g}{2} t^2 + C$$

g bedeutet die gleichförmige Beschleunigung des freien Falles, C ist eine Konstante. Der Leser zeige, daß g der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist.

7. Der von einem Körper in der Zeit t zurückgelegte Weg sei:

$$x = at^2 + bt + c$$

Es ist nachzuweisen, daß es sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung handelt.

§ 15. Das Theorem des Leibnitz.

Es sei:

$$y = u \cdot v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wir finden zunächst nach der Regel über die Differentiation eines Produktes zweier Funktionen:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{v\frac{du}{dx}}^{\mathrm{I}} + \overbrace{u\frac{dv}{dx}}^{\mathrm{II}}$$

Weiter ergibt sich dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,(\mathrm{I})}{dx} + \frac{d\,(\mathrm{II})}{dx}$$

Nun ist offenbar nach der eben genannten Regel:

$$\frac{d(\mathrm{I.})}{dx} = \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d(\mathrm{II.})}{dx} = \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx} + u\,\frac{d^2v}{dx^2}$$

somit:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\,\frac{d^2u}{dx^2} + 2\,\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx} + u\,\frac{d^2v}{dx^2}$$

Es dürfte dem Leser nicht schwer fallen, noch höhere Ableitungen von y zu bilden:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = v\,\frac{d^3u}{dx^3} + 3\,\frac{dv}{dx}\,\frac{d^2u}{dx^2} + 3\,\frac{d^2v}{dx^2}\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{d^3v}{dx^3}$$

usw.

Die allgemeine Formel:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n(u\cdot v)}{dx} = v\,\frac{d^nu}{dx^n} + n\,\frac{dv}{dx}\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{d^2v}{dx^2}\,\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots \quad (3)$$

wurde von Leibniz angegeben.

Ein Beispiel:

Es sei:

$$y = x^4 e^{ax}$$

Wir setzen:

$$u = e^{ax} \qquad v = x^4$$

und finden dann:

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}(ax^4 + 4x^3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}(a^2x^4 + 8\,ax^3 + 12x^2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{ax}(a^3x^4 + 12\,a^2x^3 + 36\,ax^2 + 24x)$$

usw.

§ 16. Die Behandlung der Funktionen mehrerer Variabler.

Bis jetzt haben wir uns mit Funktionen einer einzigen Variablen beschäftigt, — wir wenden uns nun zu Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängen.

Solche Funktionen begegnen uns häufig; das Volumen eines Gasquantums wird z. B. nicht nur vom Druck, sondern auch von der Temperatur beeinflußt, der Flächeninhalt eines Dreieckes durch die Länge der Grundlinie und der Höhe bestimmt usw. usw.

Es sei:
$$u = f(x, y)$$
eine derartige Funktion zweier Variabler x und y.

Wir wollen nun vorläufig y als eine Konstante betrachten und u wie eine Funktion von x allein behandeln; — dies deuten wir an, indem wir zu u ein tiefgesetztes x notieren.

Die Ableitung von u_x nach x:
$$\frac{du_x}{dx}, \text{ gewöhnlich: } \frac{\partial u}{\partial x}$$
geschrieben, heißt dann der partielle Differentialquotient der Funktion u nach x und:
$$du_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$
nennen wir ein partielles Differential.

Jetzt betrachten wir x in u als Konstante und allein y als variabel; das Zeichen u_y deutet dies an, daß u augenblicklich nur als Funktion von y aufgefaßt wird.
$$\frac{du_y}{dy}, \text{ gewöhnlich: } \frac{\partial u}{\partial y}$$
geschrieben, heißt der partielle Differentialquotient von u nach y,
$$du_y = \frac{\partial u}{\partial y} dy$$
ist ein zweites partielles Differential.

Die Summe der beiden partiellen Differentiale, die wir gewonnen haben:
$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$
nennen wir das totale Differential du unserer Funktion u.

Ist uns eine Funktion y von n unabhängigen Veränderlichen: $x_1, x_2, \ldots . x_n$ gegeben:
$$y = f(x_1, x_2, \ldots . x_n) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

so finden wir, — indem wir immer nur eine der Größen $x_1, \ldots x_n$ als variabel, alle anderen als Konstanten betrachten — n partielle Differentialquotienten:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial y}{\partial x_n} \quad . \quad . \quad (2)$$

und n partielle Differentiale:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad . \quad (3)$$

deren Summe:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad . \quad (4)$$

dann das totale Differentiale von y heißt.

Beispiele:

1. $$u = x^3 + x^2 y + y^3$$

y wird als Konstante betrachtet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + y \frac{\partial x^2}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

x wird als Konstante betrachtet:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial y^3}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$
$$= (3x^2 + 2xy)\, dx + (x^2 + 3y^2)\, dy$$

2. $$u = xly; \qquad du = ly\, dx + x \frac{dy}{y}$$

3. $$u = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$
$$du = (dx + dy)(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$
$$= (dx + dy)\,[\cos(x + y)].$$

4. $$u = x^y; \qquad du = y x^{y-1}\, dx + x^y\, lx\, dy$$

5. Clairauts Formel zur Berechnung von g, der Beschleunigung des freien Falles, unter verschiedenen geographischen Breiten b und Höhen h über dem Meeresspiegel, lautet:

$$g = 980 \cdot 6056 - 2 \cdot 5028 \cos 2b - 0 \cdot 00000\, 3h \text{ Dynen.}$$

Der Leser diskutiere die Änderung im Gewicht einer Substanzmenge (welche ja ein Maß für die Anziehungskraft der Erde ist) bei Änderung des Ortes nach Höhenlage und geographischer Breite.

Folgende geometrische Illustration mag das eben Gelernte dem Verständnis näher bringen.

Der Flächeninhalt u eines Rechteckes mit Seiten von der Länge x und y ist:

$$u = f(x, y) = x . y$$

x und y sollen von einander ganz unabhängige Variable sein, so daß sich die eine dieser Größen ändern kann, ohne daß die andere dadurch beeinflußt wird.

Nimmt x um dx zu, indessen y ungeändert bleibt, so erhält der Flächeninhalt des Rechteckes einen unendlich kleinen Zuwachs, den wir mit du_x bezeichnen wollen, um anzudeuten, daß er nur durch die Vermehrung des x um dx veranlaßt wurde:

$$\begin{aligned} du_x &= (x + dx) y - x \cdot y \\ &= y dx \end{aligned}$$

nun ist y nichts anderes als der partielle Differentialquotient der Funktion u nach x:

$$y = \frac{\partial u}{\partial x}$$

somit ist:

$$du_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Steigt anderseits die Seitenlänge y um dy, während x sich nicht ändert, so bewirkt dies eine Flächenzunahme:

$$\begin{aligned} du_y &= x (y + dy) - xy \\ &= x dy \end{aligned}$$

x ist nun der partielle Differentialquotient von u nach y:

$$x = \frac{\partial u}{\partial y}$$

somit ist:

$$du_y = \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Würden sich die Seitenlängen x und y gleichzeitig um dx, beziehungsweise dy vermehren, so hätte dies offenbar ein Anwachsen der Fläche unseres Rechteckes um:

$$\begin{aligned} &(x + dx)(y + dy) - xy \\ &= y\,dx + x\,dy + dx\,dy \end{aligned}$$

zur Folge. Von diesem Ausdruck unterscheidet sich aber das totale Differential der Funktion u, nämlich:

$$y\,dx + x\,dy$$

bloß um $dx \cdot dy$, um eine unendlich kleine Größe von zweiter Ordnung, die gegen $y\,dx$ und $x\,dy$ verschwindet, — das heißt, wir dürfen die Summe der unendlich kleinen Änderungen $\partial u / \partial x \cdot dx$ und $\partial u / \partial y \cdot dy$ gleich der Änderung von u setzen, welche die gleichzeitige Zunahme von x und y um dx, beziehungsweise dy veranlaßt.

§ 17. Ein Satz über homogene Funktionen.

Wenn wir die partiellen Ableitungen von:

$$u = x^2 y + x y^2 + 3\,xyz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

aufstellen, nämlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + y^2 + 3yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2xy + 3xz$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy$$

und dann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z$$

bilden:

$$\begin{array}{l} \; 2x^2y + xy^2 + 3xyz \\ + \\ \; x^2y + 2xy^2 + 3xyz \\ + \\ \; 3xyz \\ \hline = 3x^2y + 3xy^2 + 9xyz, \end{array}$$

so sehen wir, daß:

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} = 3\,u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Einen Ausdruck nun, wie u, bei welchem die Addition der ganzen Exponenten der Variablen in jedem Summanden dieselbe Zahl gibt, nennen wir eine homogene Funktion, und zwar ist u eine homogene Funktion vom dritten Grad,

$$u = x^2 + bxy + z^2$$

homogen und vom zweiten Grad,

$$u = x^4 + xyz^2 + x^3y + x^2z^2$$

eine homogene Funktion vom vierten Grad usf.

Das Ergebnis (2) ist nun ein Spezialfall, eines ganz allgemeinen Satzes von Euler über homogene Funktionen; ist nämlich $f(x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n)$ homogen und vom n^{ten} Grad, so ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = nu \quad . \quad (3)$$

§ 18. Fortsetzung des § 16.

Betrachten wir nun folgenden Fall: u heiße wieder die Fläche eines Rechteckes mit den veränderlichen Seitenlängen x und y; diese beiden Variablen sollen aber nicht mehr voneinander unabhängig, sondern derart durch ein Gesetz verbunden sein, daß eine Änderung der einen Größe mit einer Änderung der anderen Hand in Hand gehen muß; x und y seien etwa beide Funktionen der Zeit t:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

Wir können dann zwar das Differential

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

beibehalten als Symbol für den Flächenzuwachs des Rechteckes, welcher durch Ansteigen der Länge x um dx veranlaßt wurde — dürfen aber nicht vergessen, daß gleichzeitig eine Flächenvermehrung:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy$$

stattgefunden hat. Die Änderung von x um dx erforderte eine Zeit dt, innerhalb welcher auch y sich nach einem gewissen Gesetz um dy geändert hat — die Fläche u unseres Rechteckes ist also während dt um:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

größer geworden.

Da nun x und y Funktionen einer gemeinschaftlichen Variablen t sind, ist augenscheinlich auch u eine Funktion dieses Parameters:

$$u = F(t)$$

und als die Ableitung du/dt haben wir die Summe:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

zu betrachten.

du/dt ist offenbar die Schnelligkeit, mit welcher sich die Fläche des Rechteckes vermehrt; sie ist gleich der Summe der Geschwindigkeiten, mit welchen das Gebilde gleichzeitig längs x und y weiter wächst. —

Allgemein setzen wir, wenn:

$$y = f(u_1, u_2 \ldots . u_n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und weiter:

$$u_1 = \varphi_1(x), \qquad u_2 = \varphi_2(x), \; \ldots \; u_n = \varphi_n(x) \; . \; . \quad (2)$$

ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dx}. \quad . \quad (3)$$

Man begegnet in der Natur vielen Erscheinungen, welche durch Funktionen mehrerer Variablen, die ihrerseits wieder Funktionen eines Parameters sind, dargestellt werden müssen. Ein typischer Fall ist der folgende:

Ein Kristall des rhombischen Systems dehnt sich bei Erwärmung nach drei bestimmten senkrecht aufeinanderstehenden Richtungen verschieden stark aus. Aus dem Kristall sei nun ein Parallelepiped geschnitten, dessen Kanten x, y, z parallel diesen drei verschiedenen Ausdehnungsrichtungen liegen; das Volum unseres Stückes ist:

$$V = x \cdot y \cdot z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

und als totales Differential von V:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

ergibt sich:

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Erwärmen wir nun das Parallelepiped, so nimmt sein Volum V zu, und zwar ändern sich die Kantenlängen x, y, z um ungleiche Stücke, d. h. sie sind drei verschiedene Funktionen der Temperatur t:

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

Offenbar ist:

$$\frac{dV}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Die Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt}$$

nennen wir die linearen Ausdehnungskoeffizienten in den charakteristischen Richtungen, α, der Koeffizient der Volumdilatation, ergibt sich, wenn man x, y, z in (5) gleich 1 setzt:

$$\alpha = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$

als gleich der Summe der drei linearen Ausdehnungskoeffizienten.

Bei sogenannten isotropen Körpern, die sich nach jeder Richtung stark ausdehnen, ist offenbar:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

d. h. der lineare Ausdehnungskoeffizient nach jeder Richtung derselbe; wir nennen ihn λ und finden einen Volum-Ausdehnungskoeffizienten:

$$\alpha = 3\lambda$$

Weitere Beispiele.

1. Nach Loschmidt und Obermeyer ist der Diffusionskoeffizient k eines Gases abhängig vom Druck p unter dem das Gas steht und der (hier vom absoluten Nullpunkt gerechneten) Temperatur T:

$$k = k_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \frac{p}{p_0}$$

mit k^0 bezeichnen wir den Diffusionskoeffizienten bei 0^0 Celsius (in absolutem Maß: $T_0 = 273^0$) und beim Druck $p_0 = 760$ mm; n ist eine Konstante.

Man bedenke, daß bei einem abgeschlossenen Gasvolum durch eine Zunahme der Temperatur eine Steigerung des Druckes veranlaßt wird, daß der Druck eine Funktion der Temperatur ist, und zeige, daß:

$$\frac{dk}{dT} = \frac{\partial k}{\partial T} + \frac{\partial k}{\partial p}\frac{dp}{dT}$$
$$= a\, T^{n-1}\left(n p + T\frac{dp}{dT}\right)$$

ist.

2. Nach Biot und Arago ist der Brechungsindex μ eines Gases eine Funktion des Druckes p und der Temperatur t:

$$\mu = 1 + \frac{\mu_0 - 1}{1 + \alpha t}\frac{p}{p_0}$$

den Brechungsindex bei 0^0 C und $p_0 = 760$ mm Druck nennen wir μ_0.

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\mu_0 - 1}{p_0}\left\{\frac{1}{1 + \alpha t}\frac{dp}{dt} + \frac{\alpha p}{(1 + \alpha t)^2}\right\}$$

§ 19. Wiederholte Differentiation einer Funktion von mehreren Veränderlichen.

Es sei:

$$u = x^2 + y^2 + x^2 y^3$$

x und y bedeuten voneinander unabhängige Veränderliche; wir finden zunächst:

$$\text{a) } \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y^3 x \qquad \text{b) } \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 3x^2 y^2$$

Differenzieren wir jetzt a) noch einmal nach x, b) nach y, so ergibt sich:

$$\text{a}') \ \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 2y^3 \qquad \text{b}') \ \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + 6x^2 y$$

bei nochmaliger Wiederholung der Operation kommen wir zu:

$$\text{a}'') \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{b}'') \ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6x^2$$

Wir gewinnen also höhere partielle Differentialquotienten einer Funktion von mehreren Variablen nach einer derselben, indem wir die erste Ableitung ein zweites, drittes, ... n^{tes} Mal nach der betreffenden Variablen differenzieren und dabei stets alle anderen als konstant betrachten. Nun ist aber offenbar jeder partielle Differentialquotient ersten oder höheren Grades im allgemeinen selbst wieder eine Funktion von sämtlichen Variabeln, wir können daher jede partielle Ableitung nach einer beliebigen Veränderlichen weiter differenzieren und z. B. ausgehend von:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2 \ldots . x_n)}{\partial x_1}$$

bilden:

$$\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)/\partial x_1, \qquad \partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)/\partial x_2, \ldots . \qquad \partial\left(\frac{\partial f}{dx_1}\right)/\partial x_n$$

kürzer geschrieben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}$$

ebenso ausgehend von:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2 \ldots . x_n)}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \ldots . \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}$$

usf.

Alle diese Ableitungen zweiten Grades kann man nun wieder nach $x_1, x_2 \ldots . x_n$ differenzieren und findet so partielle Differentialquotienten dritten Grades usw.

Es gilt nun folgender Satz: Bilden wir irgend eine partielle Ableitung höheren Grades nach verschiedenen Variabeln, so ist es für das Resultat ganz gleichgültig, in welcher Reihenfolge die

Differentiationen nach den einzelnen Veränderlichen aufeinanderfolgen. Der Leser kann sich am einleitenden Beispiel sofort überzeugen, daß:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 6\,y^2\,x$$

und wir wollen dann noch den allgemeinen Beweis für unsere Behauptung bei einer Funktion zweier Variablen:

$$u = f(x, y)$$

erbringen.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x = f(x + \partial x, y) - f(x, y) = \varphi(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\partial y = f(x, y + \partial y) - f(x, y) = \psi(x, y)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\partial y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,\partial x\,\partial y =$$

$$= \overbrace{f(x + \partial x, y + \partial y) - f(x, y + \partial y)}^{\varphi(x,\, y + \partial y)} - \overbrace{f(x + \partial x, y) + f(x, y)}^{\varphi(x,\, y)}$$

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}\partial x = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\partial y\,\partial x =$$

$$\overbrace{f(x + \partial x, y + \partial y) - f(x + \partial x, y)}^{\psi(x + \partial x,\, y)} - \overbrace{f(x, y + \partial y) + f(x, y)}^{\psi(x,\, y)}$$

somit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

was zu beweisen war.

II. Abschnitt.

Einiges aus der analytischen Geometrie.

§ 20. Koordinaten eines Punktes.

Wir wollen in diesem Kapitel lernen, Beziehungen zwischen Größen graphisch darzustellen. Gerade in den Naturwissenschaften ist diese Art der Veranschaulichung eines Gesetzes von hoher Wichtigkeit.

Das Mittel dazu bietet die Fixierung von Punkten durch ein sogenanntes Koordinatensystem. Wir ziehen (Fig. 1) in der Ebene zwei unbegrenzte zueinander senkrechte Gerade $x\,O\,x'$ und $y\,O\,y'$; sie teilen die ganze Ebene in 4 Quadranten I, II, III, IV. Es sei nun P_1 ein Punkt im Quadranten I; ziehen wir von ihm je eine Senkrechte $M_1\,P_1$ und $N_1\,P_1$ auf die beiden Geraden $x\,O\,x'$ und $y\,O\,y'$; dann ist es klar, daß durch die beiden Strecken OM_1 und ON_1 der Punkt P_1 vollständig bestimmt ist. Wir können seine Lage bei Angabe dieser beiden Strecken konstruktiv finden, — sie können daher als Repräsentanten des Punktes P_1 angesehen werden und heißen seine Koordinaten.

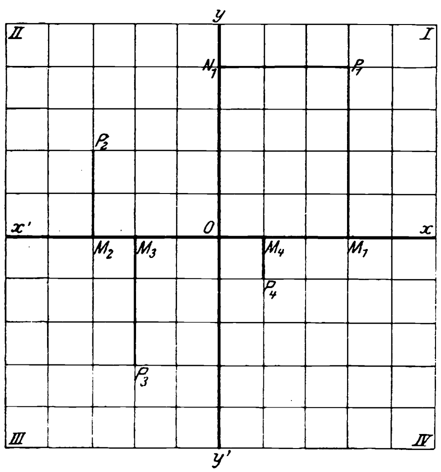

Fig. 1.

Man nennt $OM_1 = x_1$ die Abzisse, $ON_1 = y_1$ die Ordinate des Punktes P_1; entsprechend heißen die Achsen $x\,O\,x'$ und $y\,O\,y'$ bezüglich die Abzissenachse oder X-Achse und die Ordinatenachse oder Y-Achse des Koordinatensystems. Den Punkt O bezeichnen wir als den Ursprung des Koordinatensystems.

Um zwei Punkte voneinander zu unterscheiden, deren Koordinade absolut genommen dieselben Werte haben, welche aber in verschiedenen Quadranten liegen, gibt man den Koordinaten positives und negatives Vorzeichen. Wir wollen festsetzen, daß jede Abmessung auf der Abzissenachse rechts vom O positives, links vom O negatives Vorzeichen haben soll; eine Ordinate oberhalb der X-Achse ist positiv, unterhalb der X-Achse negativ zu bezeichnen. So werden also bespielsweise die Koordinaten der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in Fig. 1 entsprechend sein:

$$(x_1, y_1),\ (-x_2, y_2),\ (-x_3, -y_3),\ (x_4, -y_4).$$

Wir wollen noch die Distanz zweier Punkte berechnen, deren Koordinaten gegeben sind. Die beiden Punkte seien (Fig. 2)

P mit den Koordinaten: x_1, y_1

und

Q „ „ „ x_2, y_2

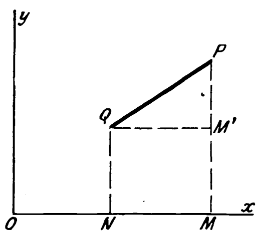

Fig. 2.

Wie aus dem rechtwinkeligen Dreieck $PM'Q$ hervorgeht ist:

$$PQ^2 = M'Q^2 + M'P^2$$

oder da:

$$M'Q = MN = x_1 - x_2$$
$$M'P = y_1 - y_2$$

so ist:

$$PQ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Wir haben hier speziell ein rechtwinkeliges oder Cartesisches Koordinatensystem — so genannt nach seinem Erfinder René Descartes — betrachtet. Man kann aber natürlich auch mit Koordinatensystemen arbeiten, bei denen die beiden Achsen nicht senkrecht aufeinander stehen, sondern spitze oder stumpfe Winkel miteinander einschließen.

§ 21. Die Gleichung der Geraden.

Es sei uns eine Gerade OP (Fig. 3) gegeben.

Wir konstruieren nun zu einer Reihe von Punkten derselben Abszisse und Ordinate, also die Strecken OM_1, OM_2, ... und M_1P_1, M_2P_2, ... und sehen, daß das Verhältnis zwischen irgend einer Ordinate, etwa M_1P_1, und der zugehörigen Abszisse OM_1 dasselbe ist, wie zwischen M_2P_2 und OM_2 oder M_3P_3 und OM_3.

Bezeichnet man überhaupt die Koordinaten irgend eines Punktes der Geraden mit x und y so besteht also die allgemeine Relation:

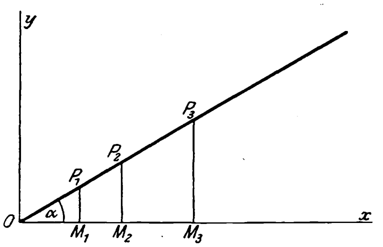

Fig. 3.

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha$$

die den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Abszisse und Ordinate jedes Punktes unserer Geraden ausdrückt; man kann mit ihrer Hilfe zu beliebigen Werten von x stets die zugehörigen Werte von y berechnen, kurz:

$$y = mx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

($\tan\alpha = m$ gesetzt), ist die Gleichung der gegebenen Geraden, welche unter dem Winkel α gegen die X-Achse geneigt durch den Ursprung des Koordinatensystems geht. Da man dem Winkel α jeden beliebigen Wert erteilen kann, stellt 1 alle möglichen Geraden dar, welche durch den Ursprung gehen. Wir können uns jedoch leicht auch von dieser Beschränkung frei machen und die Gleichung aller überhaupt möglichen Geraden in der Ebene aufstellen.

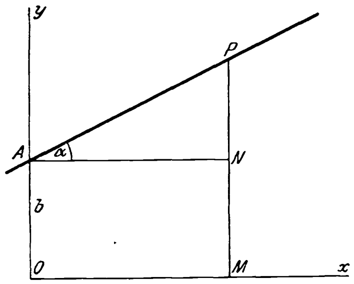

Fig. 4.

Ziehen wir nämlich eine beliebige Gerade AP, (s. Fig. 4), so sieht man, daß für die Ordinate irgend eines Punktes P derselben die Beziehung gilt:

$$MP = MN + NP = MN + AN \tan\alpha$$

oder:

$$y = mx + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn wir $m = \tan\alpha$ und $b = OA$ setzen. Offenbar können wir durch passende Wahl der Konstanten m, b, jede beliebige Gerade durch diese Relation darstellen; sie ist also die allgemeine Form der Gleichung einer Geraden.

Es ist anderseits klar, daß die allgemeinste Gleichung ersten Grades zwischen x, y, stets eine gerade Linie darstellt. Denn eine solche Gleichung hat die Form:

$$Ax + By + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo A, B, C irgend welche Konstanten bedeuten; (2) läßt sich aber stets auf Form (1) bringen; man braucht nur zu setzen:

$$-\frac{A}{B}=m \qquad -\frac{C}{B}=b$$

Gleichung (3) repräsentiert also eine Gerade.

Man kann der Gleichung einer Geraden auch eine symmetrischere Form geben, als (2) sie besitzt. Führen wir nämlich die Konstante $a=OA$ (s. Fig. 5) ein:

$$\frac{b}{a}=\tan(180^0-\alpha)=-\tan\alpha=-m$$

so erhalten wir:

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

oder:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

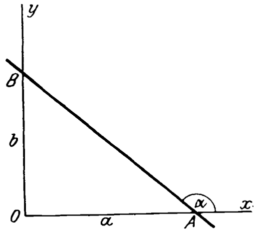

Fig. 5.

§ 22. Einige Probleme, die Gleichung der Geraden betreffend.

1. Man soll aus den Gleichungen zweier Geraden den Winkel bestimmen, den sie einschließen.

Die Gleichungen seien:

$$y=ma+b$$
$$y=m'a+b'$$

in diesen bedeutet: $m=\tan\alpha$, $m'=\tan\alpha'$ (Fig. 6).

Nennen wir φ den gesuchten Winkel, so ist:

$$\varphi=\alpha'-\alpha \qquad \tan\varphi=\tan(\alpha'-\alpha)$$

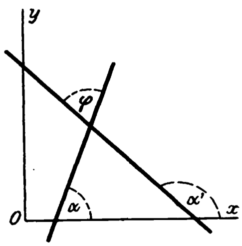

Fig. 6.

oder:

$$\tan\varphi=\frac{\tan\alpha'-\tan\alpha}{1+\tan\alpha'\tan\alpha}=\frac{m'-m}{1+mm'} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hieraus folgt, daß für $\varphi=o$, d. h. wenn die beiden Geraden zueinander parallel sind, die Bedingung erfüllt sein muß:

$$m=m' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

stehen dagegen die Geraden aufeinander senkrecht, so ist $\varphi=90^0$ oder $\tan\varphi=\infty$, d. h.:

$$1+mm'=0$$

oder:

$$m=-\frac{1}{m'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. Die Bedingung aufzustellen, daß eine Gerade durch einen gegebenen Punkt geht.

Ist der Punkt gegeben durch seine Koordinaten x_1, y_1, und ist die allgemeine Gleichung einer Geraden:

$$y = mx + b \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

so wird die letztere Gleichung auch gelten müssen, wenn man in ihr $x = x_1$, $y = y_1$ setzt, da ja der Punkt (x_1, y_1) auf der Geraden liegen soll, d. h. es besteht die Gleichung:

$$y_1 = mx_1 + b \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Gleichung (5) gestattet, eine der beiden unbestimmten Konstanten m, b durch die bestimmten Größen x_1, y_1, auszudrücken; in der Tat hat ja die Gerade dadurch, daß sie durch den bestimmten Punkt gehen soll, einen Grad der Unbestimmtheit oder „Freiheit" eingebüßt. Wir können nun aus (4) und (5) b eliminieren und erhalten als gesuchte Bedingung:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

3. Die Bedingung dafür zu finden, daß eine Gerade durch zwei gegebene Punkte geht.

In diesem Falle hat offenbar die Gerade gar keinen Grad der Freiheit mehr; sie ist durch die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), durch welche sie gehen soll, vollkommen festgelegt. Es sind jetzt gleichzeitig die drei Gleichungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b_2 \end{aligned}$$

Aus diesen kann man beide Konstanten m und b eliminieren und erhält als die gesuchte Bedingung:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

4. Die Koordinaten x_1, y_1, des Schnittpunktes zweier durch ihre Gleichungen gegebener Geraden zu finden.

Es seien die Gleichungen der Geraden:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= m'x + b' \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt beider muß, da er ja auf beiden Geraden liegen soll, mit seinen Koordinaten x_1, y_1, beiden Gleichungen genügen. Also bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_1 &= m'x_1 + b' \end{aligned}$$

aus denen man die gesuchten Koordinaten x_1, y_1, durch die gegebenen Größen m, b, m', b' ausdrücken kann. Man erhält:

$$x_1 = \frac{b' - b}{m - m'} \qquad y_1 = \frac{b'm - b\,m'}{m - m'} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Geht noch eine dritte Gerade:

$$y = m''x + b''$$

durch denselben Punkt, so müssen die Werte (8) für x, y eingesetzt ihrer Gleichung genügen. So z. B. haben die beiden Geraden:

$$5x + 3y = 7$$
$$3x - 4y = 10$$

den Schnittpunkt $x_1 = 2$, $y_1 = -1$; setzt man diese beiden Werte für x, y in die Gleichung:

$$x + 2y = 0,$$

so wird sie identisch erfüllt, d. h. die letztere Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden ersteren, wovon man sich durch Konstruktion überzeugen kann.

Um überhaupt eine Gerade, deren Gleichung:

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

gegeben ist, zu konstruieren, sucht man ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und legt dann durch die beiden so erhaltenen Punkte die Gerade hindurch. Um diese Schnittpunkte zu finden, geht man gemäß dem eben Gesagten vor; dabei muß man bedenken, daß die Gleichung der X-Achse lautet:

$$y = 0$$

die der Y-Achse hingegen:

$$x = 0$$

Man findet also die Schnittpunkte, wenn man in (9) einmal $x = o$, dann $y = 0$ setzt.

§ 23. Koordinaten-Transformation.

Wie man schon aus dem Bisherigen ersieht, hängt die Gleichung einer Kurve wesentlich von ihrer relativen Lage gegen das Koordinatensystem ab. Man kann nun die Gleichung häufig vereinfachen, wenn man das Koordinatensystem anders legt. Wir müssen daher untersuchen, wie man von einem Koordinatensystem zu einem andern übergehen kann.

Nehmen wir zunächst an, die beiden rechtwinkligen Koordinatensysteme liegen einander parallel, so daß das eine durch eine bloße

Parallelverschiebung aus dem andern hervorgegangen ist. Sind die Koordinaten irgend eines Punktes P (s. Fig. 7) in bezug auf das eine System (x, y), in bezug auf das andere (x', y'), sind ferner die Koordinaten des Ursprungs O' des zweiten Systems in bezug auf das erste (h, k), so ist ersichtlich, daß:

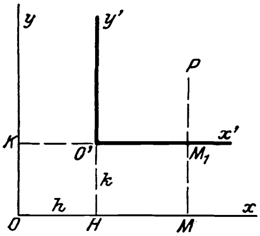

Fig. 7.

$$\left.\begin{aligned} x &= OM = OH + HM = x' + h \\ y &= PM = MM_1 + M_1P = y' + k \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

durch welche Formeln man vom System (x', y') zum System (x, y) übergehen kann. Der entgegengesetzte Übergang folgt aus (1):

$$x' = x - h \qquad y' = y - k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wir nehmen zweitens an, daß die beiden Systeme eine bloße Verdrehung gegeneinander erhalten haben, der Ursprung aber beiden gemeinsam sei. Es schließen also die Abszissenachsen, ebenso die Ordinatenachsen den Winkel α (s. Fig. 8) miteinander ein. Sind wieder x, y, und x', y', die Koordinaten eines Punktes P in beiden Systemen, so sind aus der Figur die folgenden Beziehungen ersichtlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= OM = OR - QM_1 = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= MP = RM_1 + QP = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

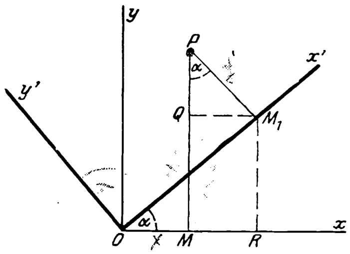

Fig. 8.

Aus diesen Gleichungen folgen die weiteren:

$$\left.\begin{aligned} x' &= y \sin\alpha + x \cos\alpha \\ y' &= y \cos\alpha - x \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad (4)$$

Haben schließlich die beiden Systeme eine beliebige Lage gegeneinander, so läßt sich die Verschiebung des einen gegen das andere stets aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung zusammensetzen. Wir können also im allgemeinen Falle die Formeln (1) und (3), bzw. (2) und (4) nacheinander anwenden.

§ 24. Die Gleichung des Kreises.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung des Koordinatensystems. Betrachten wir irgend einen Punkt P auf der Peripherie (s. Fig. 9), so ist ohne weiteres ersichtlich, daß zwischen den Koordinaten x, y des Punktes und dem Radius r die Beziehung besteht:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung gilt für jeden Punkt der Kurve; sie ist also die Gleichung des Kreises. In der Tat spricht diese Beziehung jene Eigenschaft aus, welche den Kreis definiert, nämlich daß jeder seiner Punkte gleichweit vom Mittelpunkt entfernt ist.

Liegt der Mittelpunkt des Kreises nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern sind seine Koordinaten etwa p, q, so läßt sich die Gleichung für diesen allgemeinen Fall aus (1) durch eine Koordinatentransformation ableiten. Sind nämlich die Koordinaten eines Kurvenpunktes in bezug auf das neue System (x', y'), so ist:

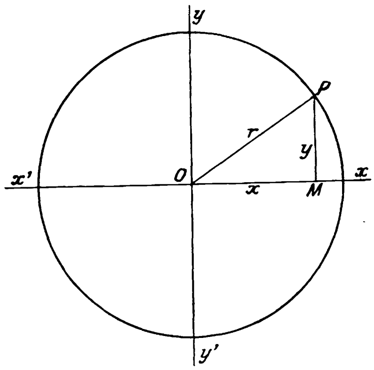

Fig. 9.

$$x' = x + p \qquad y' = y + q$$

und wir erhalten aus (1):

$$(x' - p)^2 = (y' - q)^2 = r^2$$

oder wenn wir die Striche wieder weglassen:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade nach x, y und von der Form:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

wo:

$$a = -2p \qquad b = -2q \qquad c = p^2 + q^2 - r^2$$

ist.

Sie ist also ein Spezialfall der allgemeinen Gleichung zweiten Grades:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad . \; . \quad (3)$$

in der: $A = B$, und $C = 0$ ist.

Beispiel:

Die Bewegung eines Punktes sei durch die Gleichungen:

$$x = a \sin t \qquad y = a \cos t$$

definiert, in denen t die Zeit bedeutet.

Welche Bahn beschreibt der Punkt?

Lösung: Eliminiert man aus den Gleichungen t, so erhält man:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

die Gleichung eines Kreises.

§ 25. Die Gleichung der Ellipse.

Die Ellipse ist eine Kurve, die dadurch definiert ist, daß die Entfernung eines jeden ihrer Punkte von zwei bestimmten Punkten dieselbe Summe ergibt. Ist $P(x, y)$ ein Punkt der Ellipse, (s. Fig. 10), sind ferner F_1 und F_2 die beiden fixen Punkte, (Brennpunkte), und setzen wir die Distanzen:

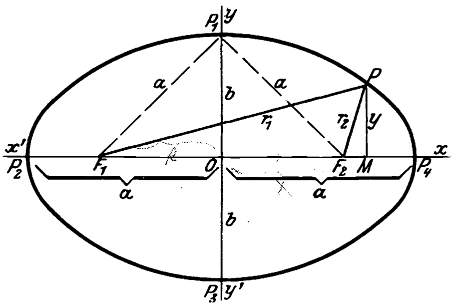

Fig. 10.

$$PF_1 = r_1 \qquad PF_2 = r_2$$

so ist:

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (1)$$

wenn wir die konstante Summe mit $2a$ bezeichnen; jede der Größen r_1, r_2, heißt ein radius vector des Punktes. Nun ist aus der Figur ersichtlich, daß:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x-e)^2 + y^2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wenn wir die Strecke $F_1 O = OF_2$ mit e bezeichnen. Durch Subtraktion erhalten wir:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4ex$$

oder vermöge (1):

$$r_1 - r_2 = 2\frac{e}{a}x$$

also:

$$r_1 = a + \frac{e}{a}x \qquad r_2 = a - \frac{e}{a}x \quad \ldots \quad (3)$$

Substiuieren wir z. B. den Wert für r_1 in die erste der Gleichungen (2), so erhalten wir:

$$(a + \frac{e}{a}x)^2 = (x+e)^2 + y^2$$

oder:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Setzen wir noch:

$$a^2 - e^2 = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

so lautet die letzte Gleichung:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

(5) ist die Gleichung der Ellipse.

Die geometrische Bedeutung der Konstanten a und b ist leicht einzusehen. Betrachten wir den Punkt P_1 der Ellipse mit den Koordinaten 0, y_1, für den $r_1 = r_2 = r$ ist.

Gleichung (5) lautet für diesen Punkt:

$$a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

oder:

$$y_1 = b$$

d. h. die Größe b ist die Länge der Strecke $OP_1 = OP_3$, man nennt $P_1 P_3 = 2b$ die kleine Achse der Ellipse. Ferner folgt aus Dreieck $F_1 O P_1$:

$$\overline{F_1 P_1}^2 = b^2 + e^2$$

daher ergibt sich durch Vergleich mit (4), daß $F_1 P_1 = a$. Analog lautet Gleichung (5) für den Punkt P_4 $(x_4, 0)$:

$$b^2 x_4^2 = a^2 b^2$$

oder:

$$x_4 = a$$

d. h. a ist die Länge von $OP_4 = OP_2$; man nennt $2a$ die große Achse der Ellipse.

Die Gleichung (5) können wir auch in der Form schreiben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Lösen wir einmal nach x, einmal nach y auf, so erhalten wir:

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Es folgt, daß wir nur dann reelle Kurvenpunkte erhalten, wenn:

$$x \leqq a \qquad y \leqq b$$

Die Kurve verläuft also vollständig im Endlichen. Ferner folgt aus (7), daß einem bestimmten Wert von y stets zwei gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete x-Werte entsprechen, die für $y = b$ in $x = 0$ zusammenfallen, also liegt die Kurve symmetrisch zur Y-Achse. Ebenso folgt aus (8), daß die Kurve auch zur X-Achse symmetrisch gelegen ist.

Ein Beispiel:

Zu zeigen, daß ein Punkt, dessen Bewegung durch die Gleichungen:

$$x = a \cos t \qquad y = b \sin t$$

definiert ist, eine Ellipse beschreibt.

Lösung: die Elimination von t liefert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

§ 26. Die Gleichung der Hyperbel.

Eine Kurve von der Eigenschaft, daß die Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei bestimmten Punkten eine konstante Differenz haben, heißt eine Hyperbel.

Ist P ein Punkt der Kurve, (s. Fig. 11), sind r_1, r_2, die Distanzen von den fixen Punkten, den Brennpunkten F_1, F_2, legen wir ferner wie im vorigen Paragraphen die X-Achse in die Gerade F_1, F_2, und den Ursprung nach O, so daß $OF_1 = OF_2 = e$, so ist:

$$r_2 - r_1 = 2a \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} r_2{}^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\ r_1{}^2 &= (x-e)^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

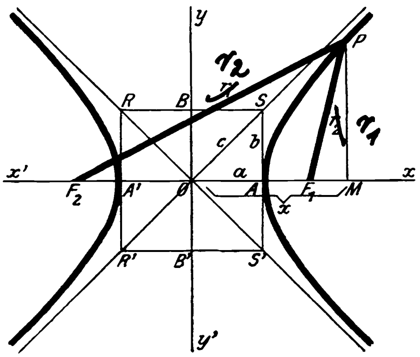

Fig. 11.

also:
$$r_2{}^2 - r_1{}^2 = 4ex$$

Vermöge (1) ist also:
$$r_2 + r_1 = 2\frac{e}{a}x$$

daher:
$$r_2 = \frac{e}{a}x + a \qquad r_1 = \frac{e}{a}x - a \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und durch Substition in die erste der Gleichungen (2) erhalten wir:

$$\left(\frac{e}{a}x + a\right)^2 = (x+e)^2 + y^2$$

oder:

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2 y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

da im Dreieck PF_1F_2: $r_2 - r_1 < F_1F_2$, also:

$$2a < 2e$$

ist hier $a^2 - e^2$ nagativ; wir setzen:

$$e^2 - a^2 = b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und erhalten:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

als die beiden Formen der Hyperbelgleichung.

Analog wie bei der Ellipse erkennt man leicht die geometrische Bedeutung von a; für den Punkt A lautet nämlich (5):

$$b^2{x_1}^2 = a^2b^2$$

also:

$$x_1 = a$$

Die Strecke $AA' = 2a$ heißt die große Achse der Hyperbel, jedoch sind B und B' gar keine Kurvenpunkte, da für $x = 0$, die Gleichung (5) ergibt:

$$-y^2 = b^2$$

oder:

$$y = \pm bi$$

also einen imaginären Wert.

Um die Gestalt der Kurve klarzulegen, diskutieren wir die aus (6) folgenden Ausdrücke:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 - b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Aus (7) folgt, daß alle möglichen y-Werte reelle Werte von x ergeben; die Kurve erstreckt sich also ins Unendliche. Da aber nach (8) für $-a < x < +a$ kein reelles y existiert, so muß die Kurve bloß außerhalb dieses Bereiches verlaufen; sie besteht also aus zwei getrennten Zweigen. Ferner ergeben (7) und (8) wieder die Symmetrie der Hyperbel zu beiden Achsen. Die Gestalt der Kurve zeigt Fig. 11.

§ 27. Die Gleichung der Parabel.

Eine Kurve, deren Punkte gleichen Abstand von einer gegebenen festen Geraden und einem festen Punkte haben, nennt man eine Parabel. Die fixe Gerade heißt Direktrix, der feste Punkt der Brennpunkt. Wir wollen das Koordinatensystem so legen, daß die X-Achse senkrecht zur Direktrix durch den Brennpunkt F geht (s. Fig. 12) und der Ursprung O die Strecke AF halbiert. Ist P (x, y) irgend ein Punkt der Parabel, nennen wir ferner $PF = r$, $OF = OA = a$, so ist:

$$r^2 = (x - a)^2 + y^2$$

oder da nach der Definition der Parabel:

$$r = KP = x + a \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$(x + a)^2 - (x - a)^2 = y^2$$

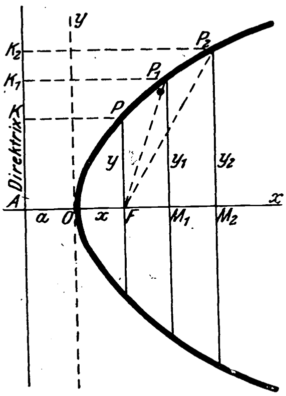

Fig. 12.

d. h.:

$$y^2 = 4ax \quad \ldots \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung der Parabel für die angenommene Lage des Koordinatensystems.

Aus Gleichung (2) folgt:

$$y = \pm 2\sqrt{ax} \quad \ldots \quad (3)$$

Da zu jedem positiven Wert von x reelle Werte von y gehören, negativen x-Werten aber bloß imaginäre Werte von y entsprechen, so liegt die Kurve auf der rechten Seite der Ordinatenachse, erstreckt sich aber hier ins Unendliche. Ferner entsprechen einem x zwei entgegengesetzt gleiche y: die Kurve ist symmetrisch zur X-Achse. Der Wert $x = 0$ ist die kleinstmögliche Abszisse eines Kurvenpunktes; ihm entspricht $y = 0$, d. h. der Scheitel der Parabel liegt im Ursprung. Die Gestalt der Kurve zeigt Fig. 12.

§ 28. Die Tangente einer Kurve.

Es sei OPQ (Fig. 13) ein Stück irgend einer Kurve; es habe der Punkt P die Koordinaten x, y, der Punkt Q die Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, indem wir die Strecken PR und QR bezüglich mit Δx und Δy bezeichnen; die Gleichung der Kurve sei:

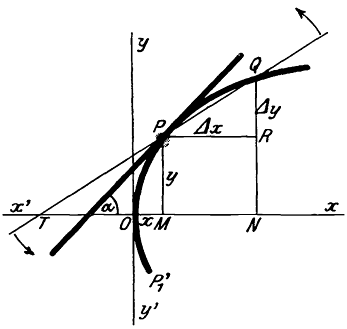

Fig. 13.

$$y = f(x) \quad \ldots \quad (1)$$

daher besteht auch die Beziehung:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \quad (2)$$

Denken wir uns nun P und Q durch eine Gerade verbunden, welche die X-Achse in T unter einem gewissen Winkel schneidet; die trigonometrische Tangente dieses Winkels $\sphericalangle RPQ$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Rückt nun der Punkt Q an P heran, so dreht sich die Gerade PQ um P und wird, wenn Q unendlich nahe an P gerückt ist, zur Tangente an die Kurve in P und schließt dann mit der X-Achse den Winkel α ein. Man erhält demnach:

$$\tan\alpha = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}_{\Delta x = 0}$$

oder nach (1) und (2):

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\tan\alpha = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}_{\Delta x = 0}$$

was gemäß dem Begriffe des Differentialquotienten ergibt:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Die geometrische Bedeutung der Ableitung $f'(x)$ ist demnach die, daß sie gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels ist, welchen die geometrische Tangente an die Kurve $y = \mathrm{f}(x)$ mit der X-Achse einschließt.

So z. B. ist für eine Parabel:

$$y^2 = 4ax$$

daher:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

also beispielsweise für den Punkt $x = a$, dem nach der Gleichung ein $y = 2a$ zugehört, ist:

$$\tan\alpha = 1 \qquad \alpha = 45^0$$

Wir können nunmehr die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkt einer gegebenen Kurve finden. Es sei durch den Punkt P (x_1, y_1) (s. Fig. 14) einer Kurve:

$$y = f(x)$$

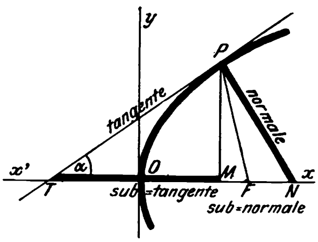

Fig. 14.

eine Tangente TP gelegt. Da sie eine Gerade ist, die durch den Punkt x_1, y_1, geht, hat sie die Gleichung:

$$\eta - y_1 = m(\xi - x_1)$$

wenn wir die laufenden Koordinaten der Geraden mit ξ, η, bezeichnen. Die noch unbestimmte Konstante m ergibt sich dadurch, daß nach (3):

$$m = \tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = f'(x_1)$$

wo mit dem Zeichen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ausgedrückt werden soll, daß der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für den Punkt (x_1, y_1) der Kurve zu bilden ist. So erhalten wir als Gleichung der Tangente:

$$\eta - y_1 = f'(x_1)(\xi - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Man nennt eine senkrecht auf die Tangente im Berührungspunkt errichtete Gerade eine Normale der Kurve; (PN in Fig. 14). Die Gleichung folgt aus jener der Tangente, auf der senkrecht stehend sie durch den Punkt x_1, y_1, geht. Daher ist ihre Gleichung von der Form:

$$\eta - y_1 = m'(\xi - x_1),$$

wo:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

sie lautet also:

$$\eta - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(\xi - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Man spricht auch von der Länge der Tangente und Normale und versteht darunter bezüglich die Stücke PT und PN (Fig. 14), d. h. die Abschnitte der beiden Geraden vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der X-Achse. Die Projektionen dieser beiden Stücke auf die X-Achse, also TM und MN heißen bezüglich Subtangente und Subnormale. Diese vier Größen sind aus den Gleichungen (4) und (5) leicht zu berechnen. Setzt man in diesen nämlich $\eta = 0$, so erhält man die Abszissen der Schnittpunkte der Geraden mit der X-Achse, d. h.:

$$\begin{aligned} TO &= -x_1 + \frac{1}{f'(x_1)} y_1 \quad \left\{ \begin{matrix} \text{(negativ zu nehmen,} \\ \text{weil links von } O) \end{matrix} \right\} \\ NO &= x_1 + f'(x_1) y_1 \end{aligned}$$

daher ist die Subtangente:

$$TM = TO + OM = \frac{1}{f'(x_1)} y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und die Subnormale:

$$MN = ON - OM = f'(x_1) y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Daraus ergeben sich die Längen der Tangente und der Normalen, da in den Dreiecken BPT und MPN:

$$\overline{PT}^2 = \overline{TM}^2 + \overline{MP}^2 = y^2\left(1 + \frac{1}{f'(x_1)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\overline{PN}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = y^2(1 + f'(x_1)^2) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

§ 29. Die Tangenten der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Wir wollen die im vorigen Paragraphen gewonnenen Erkenntnisse auf die drei genannten Kurven anwenden. Die Gleichung einer Ellipse ist:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

daher lautet die Gleichung der Tangente an die Ellipse in einem Punkte (x_1, y_1) nach (4) des vorigen Paragraphen:

$$\eta - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(\xi - x_1)$$

oder da:

$$b^2 x_1{}^2 + a^2 y_1{}^2 = a^2 b^2$$

auch:

$$b^2 \xi x_1 + a^2 \eta y_1 = a^2 b^2 \qquad (1)$$

Die Gleichung der Normalen wäre:

$$\eta - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(\xi - x_1)$$

Die Tangente einer Ellipse hat eine physikalisch wichtige Eigenschaft. Um diese klarzulegen, suchen wir die Abszisse des Schnittpunktes T (s. Fig. 15) der Tangente mit der X-Achse, indem wir in (1) $\eta = 0$ setzen. Wir erhalten:

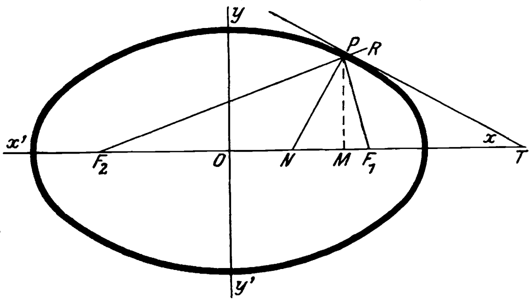

Fig. 15.

$$OT = \frac{a^2}{x_1}$$

daher ist:

$$F_2 T = \frac{a^2}{x_1} + e \qquad F_1 T = \frac{a^2}{x_1} - e$$

ferner sahen wir, daß:

$$F_2 P = a + \frac{e x_1}{a} \qquad F_1 P = a - \frac{e x_1}{a}$$

daher ist:

$$F_2 T : F_1 T = F_2 P : F_1 P$$

Dies ist aber nach einem Satz der elementaren Geometrie nur der Fall, wenn:

$$\sphericalangle RPT = \sphericalangle F_1 PT \quad \text{oder:} \quad \sphericalangle F_2 PN = \sphericalangle F_1 PN$$

Die Tangente halbiert also den Winkel, welchen die radii vectores miteinander einschließen, die Normale seinen Supplementwinkel. Daher kommt es, daß Licht-, Schall- oder elektromagnetische Wellen, die von einem Brennpunkte einer ellipsoidischen Fläche ausgehen, so an ihr reflektiert werden, daß sie sich im andern Brennpunkt sammeln.

Für eine Hyperbel besteht die Gleichung:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

daher lautet die Gleichung der Tangente in einem Punkte (x_1, y_1):

$$\eta - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (\xi - x_1)$$

oder da:

$$b^2 x_1{}^2 - a^2 y_1{}^2 = a^2 b^2$$

auch:

$$b^2 \xi x_1 - a^2 \eta y_1 = a^2 b^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Gleichung der Normalen ist:

$$\eta - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (\xi - x_1)$$

Setzt man in (2) $\eta = 0$, so erhält man die Abszisse ξ_1 des Schnittpunkts der Tangente mit der X-Achse:

$$\xi_1 = \frac{a^2}{x_1}$$

Lassen wir nun den Berührungspunkt der Tangente mit der Hyperbel immer weiter hinausrücken, lassen wir also x_1, y_1, unbegrenzt wachsen, so nähert sich ξ_1 der Grenze null. Es existiert also eine Tangente an die Hyperbel, welche sie erst in unendlicher Entfernung berührt, und die durch den Ursprung geht; eine solche Tangente heißt eine Asymptote. Wie Fig. 11 in § 26 zeigt, hat eine Hyperbel offenbar zwei Asymptoten $R'S$ und RS'.

Um die Winkel zu bestimmen, welche die Asymptoten mit der X-Achse einschließen, muß man:

$$\lim_{x_1 = \infty} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \lim_{x_1 = \infty} \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

bestimmen. Nun ist nach der Hyperbelgleichung:

$$\frac{b^2 x_1^{\,2}}{a^2 y_1^{\,2}} = \frac{b^2}{y_1^{\,2}} + 1$$

also, weil für $x_1 = \infty$ auch $y_1 = \infty$ wird:

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{b^2 x_1^{\,2}}{a^2 y_1^{\,2}} = 1$$

oder:

$$\lim_{x_1 = \infty} \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{x_1}{y_1} = \pm \frac{a}{b}$$

d. h.:

$$\lim_{x_1 = \infty} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \pm \frac{b}{a} = \tan \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Daher ergibt sich die in Fig. 11 angedeutete Konstruktion der Asymptoten.

Schließlich ist die Gleichung der Parabeltangente zu finden:

$$y^2 = 4ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

also lautet die Gleichung der Tangente:

$$\eta - y_1 = \frac{2a}{y_1}(\xi - x_1)$$

oder:

$$\eta y_1 = 2a(\xi + x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Gleichung der Normalen ist:

$$\eta - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(\xi - x_1)$$

Beispiele:

1. Analog wie im Falle der Ellipse zu zeigen, daß die Tangente einer Parabel den Winkel zwischen dem radius vector und der Normalen vom Berührungspunkt auf die Direktrix halbiert. Anwendung auf die Optik (Parabolische Reflektoren).

2. Die Längen der Tangente, Normalen, Subtangente und Subnormalen einer Parabel zu berechnen.

Länge der Tangente	$= \sqrt{x_1(x_1 + a)}$
„ „ Normalen	$= \sqrt{a(x_1 + a)}$
Subtangente	$= 2x_1$
Subnormalen	$= 2a$

3. Zu zeigen, daß die Subtangente der Kurve

$$xy = \text{const.}$$

in irgend einem Punkt (x_1, y_1) die Länge $-x_1$ hat.

4. Zu zeigen, daß der Scheitel einer Parabel das Stück der X-Achse zwischen den Schnittpunkten der Tangente und der Ordinate des Berührungspunktes halbiert.

§ 30. Die gleichseitige Hyperbel.

Eine Hyperbel, deren beide Achsen gleich sind, also bei der:

$$a = b$$

ist, heißt gleichseitig. Ihre Gleichung ist demnach:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Winkel, unter welchen die Asymptoten die X-Achse schneiden, sind dann nach (3) des vorigen Paragraphen gegeben durch:

$$\tan\alpha = \pm\frac{a}{a} = \pm 1 \quad \text{oder:} \quad \alpha = \pm 45^0$$

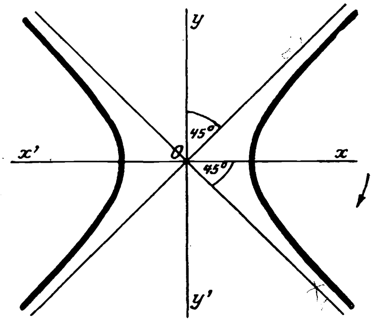

Fig. 16.

die Asymptoten (s. Fig. 16) stehen daher aufeinander senkrecht. Wir können deshalb die Asymptoten selbst zu Koordinatenachsen machen und die Gleichung der Hyperbel bezüglich dieses Koordinatensystems aufstellen. Hierzu führen wir eine einfache Transformation aus, indem wir das alte Koordinatensystem (x, y) um einen Winkel von 45^0 im Sinne des Pfeiles (Fig. 16) drehen; die Koordinaten eines Punktes in bezug auf dieses neue System mögen x', y', heißen. Dann ist nach den Gleichungen (3) in § 23:

$$x = x' \cos(-45^0) - y' \sin(-45^0)$$
$$y = x' \sin(-45^0) + y' \cos(-45^0)$$

Der Winkel α erscheint hier negativ, weil die Drehung im entgegengesetzten Sinne jener in § 23 vorgenommen wurde. Wir haben also

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y') \qquad y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(x' - y')\text{ [1]}$$

Diese Werte in (1) gesetzt, ergeben:

[1]) vgl. XII. Abschnitt, C. III.

$$x'y' = \frac{a^2}{2}$$

oder wenn wir die hochgeschriebenen Striche wieder weglassen und $\frac{a^2}{2} = k$ setzen:

$$xy = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel bezogen auf die Asymptoten als Koordinatenachsen.

Als Anwendung betrachten wir die Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$pv = RT \quad (3)$$

wo p den Druck, v das Volum, T die absolute Temperatur und R die Gaskonstante bedeutet. Für eine gegebene Temperatur T nimmt (3) die Form:

$$pv = \text{const.}$$

an. Betrachten wir nun v als Abszissen, p als Ordinaten eines Kartesischen Koordinatensystems, so stellt die letztere Gleichung eine gleichseitige Hyperbel dar. Diese Kurve repräsentiert also die Zustandsänderung eines Gases bei konstanter Temperatur, ist eine sogenannte Isotherme. Indem wir der Temperatur der Reihe nach verschiedene Werte geben, also die Konstante k der Gleichung (2) ändern, erhalten wir eine ganze Schar von Isothermen, von denen jede für eine bestimmte Temperatur gilt (s. Fig. 17).

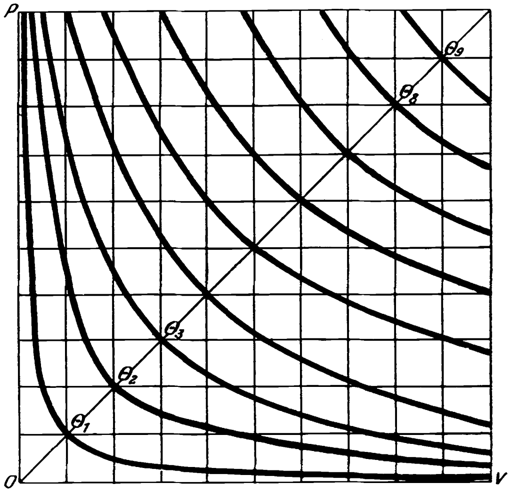

Fig. 17.

§ 31. Die Kegelschnitte im allgemeinen.

Die vier Kurven Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel, von denen der Kreis sich als Spezialfall der Ellipse erweist, heißen Kegelschnitte, weil man sie als Schnitte eines Kegels mit einer Ebene erhalten kann. Die Gleichungen der Kurven sind vom zweiten Grade; man nennt sie daher auch Kurven zweiter Ordnung, indem man allgemein eine Kurve als von der ersten Ordnung auffaßt, wenn ihre Gleichung vom ersten Grade ist. Wir können nun zeigen, daß eine Gleichung zweiten Grades im allgemeinen einen Kegelschnitt darstellt. Die allgemeinste Form einer solchen Gleichung ist:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Wir führen nun zunächst eine Koordinatentransformation, und zwar eine bloße Parallelverschiebung aus, d. h. wir setzen:

$$x = x' + h \qquad y = y' + k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bestimmen wir nun h und k so, daß die Glieder mit x' oder y' in der ersten Potenz verschwinden, daß also:

$$\begin{aligned} 2Ah + Ck + D &= 0 \\ Ch + 2Bk + E &= 0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ist, so nimmt (1) die Form an:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'xy + F' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn wir schließlich statt x', y' wieder x, y schreiben. Aus (3) ergibt sich:

$$h = \frac{CE - 2BD}{4AB - C^2} \qquad k = \frac{CD - 2AE}{4AB - C^2} \quad . \quad . \quad (5)$$

Ferner ist:

$$A' = A \qquad B' = B \qquad C' = C$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, daß die Transformation nicht möglich ist, wenn:

$$\varDelta = 4AB - C^2 = 0$$

ist. Diesen Fall wollen wir später behandeln.

Führen wir nun an Gleichung (4) eine neue Koordinatentransformation aus, durch welche das Glied mit dem Produkt xy verschwindet; dies leistet eine bloße Drehung, das heißt die Substitution:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Bestimmen wir nämlich den Winkel α so, daß:

$$\tan 2\alpha = \frac{C'}{A' - B'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

so verwandelt sich (4) in die Gleichung:

$$A''x^2 + B''y^2 + F'' = \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Eine einfache Rechnung lehrt uns, daß die Beziehung besteht:

$$4A''B'' - C''^2 = 4AB - C^2 = \varDelta$$

da $C'' = 0$.

Wir schreiben (8) in der Form:

$$-\frac{A''}{F''}x^2 - \frac{B''}{F''}y^2 = 1$$

und es sind nun folgende Fälle möglich:

1. $$-\frac{A''}{F''} = \frac{1}{a^2} \quad \text{und:} \quad -\frac{B''}{F''} = \frac{1}{b^2}$$

sind positive Werte; die Kurve:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist eine Ellipse. Ist speziell a^2 gleich b^2, so erhalten wir einen Kreis.

2. $$-\frac{A''}{F''} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und:} \quad -\frac{B''}{F''} - \frac{1}{b^2}$$

sind beide negativ.

Die Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

repräsentiert aber überhaupt keine reelle Kurve, weil sie durch kein reelles Wertepaar x, y befriedigt wird.

3. $$-\frac{A''}{F''} = \frac{1}{a^2} \quad \text{und:} \quad -\frac{B''}{F''} = -\frac{1}{b^2}$$

oder:

$$-\frac{A''}{F''} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und:} \quad -\frac{B''}{F''} = \frac{1}{b^2}.$$

Die Kurve:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist eine Hyperbel.

Die vorgelegte Gleichung (1) repräsentiert also, wenn Δ nicht null ist, eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem A'' und B'' gleich oder ungleich bezeichnet, d. h. je nachdem das Produkt:

$$4A''B'' \lessgtr 0$$

ist. Es bleibt noch der früher ausgeschlossene Fall:

$$\Delta = 0$$

zu erörtern, dann ist die Transformation (2) allerdings nicht möglich; jedoch können wir (1) in der Form schreiben:

$$A\left[\left(x+\frac{C}{2A}y\right)^2+\frac{\Delta}{4A^2}y^2\right]+Dx+Ey+F=0$$

und da $\Delta = 0$, ergibt sich:

$$A\left(x+\frac{C}{2A}y\right)^2+Dx+Ey+F=0$$

Führen wir nun an dieser Gleichung die Transformation (6) aus, und benützen sie, um das Glied mit y^2 zum Verschwinden zu bringen, so erhalten wir:

$$A_3x^2+D_3x+E_3y+F_3=0$$

Führen wir nun noch eine Parallelverschiebung aus, daß das Glied mit x und das Glied F_3 wegfallen, so ist schließlich:

$$A_4x^2+E_4y=0$$

oder:

$$y=4ax^2, \quad \text{wo:} \quad -\frac{A_4}{E_4}=4a$$

Die Kurve ist eine Parabel.

Es ist aber hervorzuheben, daß in dem Falle, wo die linke Seite von (1) in zwei lineare Faktoren $f(x, y)$ und $g(x, y)$ zerfällt, diese Gleichung nur eine abgekürzte Schreibweise für die beiden Gleichungen:

$$f(x, y)=0 \quad \text{und} \quad g(x, y)=0$$

ist, d. h. daß in diesem Falle Gleichung (1) zwei Gerade darstellt.

§ 32. Polarkoordinaten.

Ebenso wie durch die beiden rechtwinkeligen Koordinaten kann ein Punkt der Ebene durch irgend zwei andere Bestimmungsstücke fixiert werden. Wir definieren die Lage eines Punktes P (s. Fig. 18) durch die Distanz r desselben von einem fixen Punkt O und durch den Winkel Θ, den diese Gerade mit einer festen Achse Ox' einschließt und nennen r, Θ, die Polarkoordinaten des Punktes P, und zwar r den radius vector, O heißt der Pol, Ox' die Polarachse. Um den Winkel Θ eindeutig zu bestimmen, muß er in einem bestimmten Sinne von der Achse aus positiv gewählt werden, z. B. wie in der Figur gegen den Uhrzeigersinn.

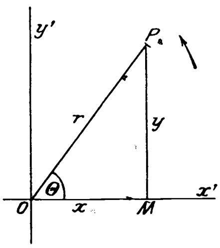

Fig. 18.

Es ist leicht, von Polarkoordinaten zu rechtwinkligen überzugehen. Wir wählen (s. Fig. 18) den Pol O als Ursprung, die

Polarachse Ox' als X-Achse des Kartesischen Systems. Dann ist sofort ersichtlich, daß:

$$x = r\cos\Theta \qquad y = r\sin\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und anderseits:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\Theta = \frac{y}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

So z. B. lautet die Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten nach (1):

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\Theta}{a^2} + \frac{\sin^2\Theta}{b^2}.$$

Es ist jedoch bei den Kegelschnitten üblich, als Pol nicht den Mittelpunkt, sondern einen Brennpunkt zu wählen. Man erhält die Gleichungen für Ellipse und Hyperbel am einfachsten, wenn man von den Sätzen (3) § 25 und (3) § 26 ausgeht. Danach ist für die Ellipse:

$$r = a - \frac{e}{a}x$$

und da:

$$x = e + r\cos\Theta$$

folgt:

$$r = a - \frac{e}{a}(ae + r\cos\Theta)$$

oder:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn man $p = \frac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ setzt. Analog erhalten wir als Polargleichung der Hyperbel:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bei der Parabel ist:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo $p = 2a$ gesetzt ist. Man sieht, daß alle drei Gleichungen in der Form enthalten sind:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\Theta}$$

wobei:

für die Ellipse: $\varepsilon < 1$
für die Parabel: $\varepsilon = 1$
für die Hyperbel: $\varepsilon > 1$

ist.

Als ein zweites Beispiel für die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten nehmen wir die einer Kurve höherer Ordnung, der logarithmischen Spirale. Die Gleichung lautet:

$$r = a^{\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

wo a eine Konstante ist, oder:

$$\log r = \vartheta \log a = k\vartheta$$

indem wir $\log a = k$ setzen. Nehmen wir also zwei Punkte der Kurve, z. B. D und E in Fig. 19 (nach Donkin, Acoustics), denen die Werte r_1 und r_2 sowie ϑ_1 und ϑ_2 entsprechen, so gilt für sie:

$$\log r_1 = k\vartheta_1$$
$$\log r_2 = k\vartheta_2$$

demnach:

$$\log \frac{r_1}{r_2} = k(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

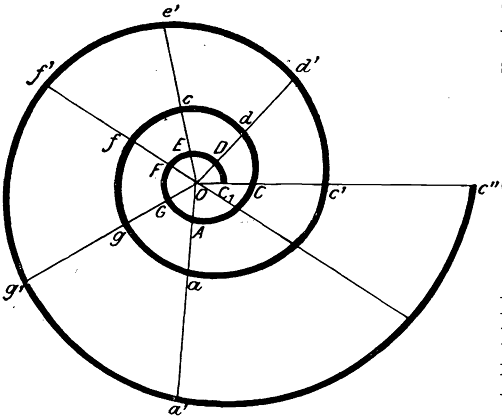

Fig. 19.

Die Kurve hat also die Eigenschaft, daß die Entfernungen ihrer Punkte von einem fixen Punkte O in geometrischer Progression wachsen, wenn die Winkel dieser Leitstrahlen mit einer festen Geraden in arithmetischer Progression zunehmen. Ist z. B. $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\pi$, so ist:

$$\log \frac{r_1}{r_2} = 2k\pi, \quad \text{oder:} \quad \frac{r_1}{r_2} = e^{2k\pi}$$

in diesem Verhältnis stehen beispielsweise die Strecken OC_1, OC, Oc', Oc'', ... zueinander. Die Kurve erstreckt sich also in unendlich vielen Windungen um den Nullpunkt. In einer derartigen Abhängigkeit voneinander sind z. B. die Schwingungszahlen der Töne und ihre relativen Tonhöhen. So sind in der Figur durch Radien die Schwingungszahlen der Töne C_1, D, E, ... der diatonischen Durtonleiter dargestellt; die Intervalle erscheinen als Winkel zwischen den Radien und zwar sind bekanntlich die Intervalle C_1D, FG, AH große ganze Töne ($61^0\,10'\,22''$), DE und GA kleine ganze Töne ($54^0\;43'\;16''$), EF, HC halbe Töne (33^0 $31'\;11''$).

§ 33. Die harmonische Bewegung.

Wir wollen noch eine Kurve mit der Gleichung:

$$y = r \sin x \qquad \ldots \ldots \qquad (1)$$

untersuchen, die von großer Bedeutung bei der Betrachtung gewisser Bewegungsarten ist. Wie man sieht, hat diese Kurve die in Fig. 20 angegebene Gestalt. Sie verläuft ins Unendliche und hat periodischen Charakter, da stets wieder dieselben Werte von y auftreten, wenn x um 2π wächst; man bezeichnet deshalb $\sin x$ als eine periodische Funktion mit der Periode 2π.

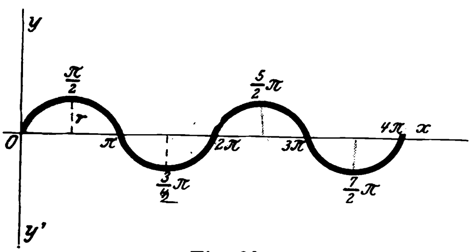

Fig. 20.

y wird 0 für $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$; in diesen Punkten schneidet also die Kurve die X-Achse. Die maximalen Ordinaten erscheinen nach der positiven Seite für $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$, nach der negativen für $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$

Denken wir uns nun, ein Punkt beschreibe in gleichförmiger Bewegung den Umfang eines Kreises. Befindet er sich in einem gewissen Moment im Punkte P (s. Fig. 21), und fällen wir von P eine Normale PM auf Ox, so ist:

$$y = PM = r \sin \alpha \quad . \quad (2)$$

wenn wir mit r den Radius des Kreises bezeichnen. Während also der Punkt gleichförmig im Kreise rotiert, führt seine Projektion auf die Y-Achse die durch (2) beschriebene Bewegung aus; nennen wir die Zeit eines vollständigen Umlaufs τ, so ist offenbar:

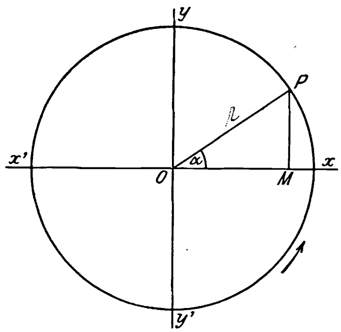

Fig. 21.

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau} t$$

und daher:

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\tau} t \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wenn t die seit dem Beginn der Bewegung verflossene Zeit bedeutet; τ ist also zugleich die Periode der Funktion y. Die durch (3) beschriebene Bewegung heißt eine harmonische, und ihre graphische Darstellung ist in Fig. 20 gegeben, wenn man $x = \frac{2\pi}{\tau} t$ setzt.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß für $t = 0$ auch $y = 0$ ist. Lassen wir diese Einschränkung fallen, so kommen wir zur allgemeinen Form:

$$y = r \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \varepsilon\right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Man nennt ε die Phase (s. Fig. 22).

Zwei oder mehrere harmonische Schwingungen gleicher Periode geben als Resultierende eine harmonische Bewegung der gleichen

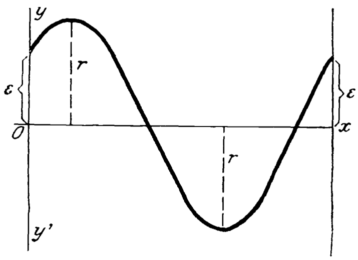

Fig. 22.

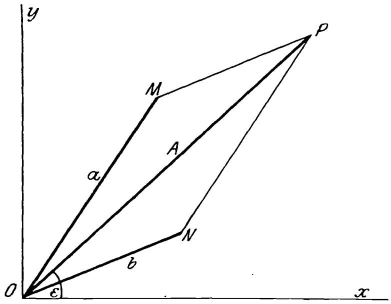

Fig. 23.

Periode, aber von anderer Amplitude und Phase. Sind nämlich die beiden Komponenten gegeben durch:

$$y' = a \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \varepsilon_1\right)$$

$$y'' = b \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \varepsilon_2\right)$$

so ist die resultierende Schwingung darstellbar in der Form:

$$y = y' + y'' = A \sin\left(\frac{r\pi}{\tau} t + \varepsilon\right)$$

wenn die Beziehungen bestehen:

$$A \cos \varepsilon = a \cos \varepsilon_1 + b \cos \varepsilon_2$$

$$A \sin \varepsilon = a \sin \varepsilon_1 + b \sin \varepsilon_2$$

oder:

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{a \sin \varepsilon_1 + b \sin \varepsilon_2}{a \cos \varepsilon_1 + b \cos \varepsilon_2}$$

Diese Abhängigkeit läßt sich graphisch versinnlichen. Konstruiert man nämlich (s. Fig. 23) vom Ursprung O aus zwei Strecken $OM = a$ und $ON = b$ so, daß sie mit der X-Achse bezüglich die Winkel $MOX = \varepsilon_1$ und $NOX = \varepsilon_2$ einschließen, so ist die längere Diagonale OP des mit a und b konstruierten Parallelogramms gleich A, und sie schließt mit der X-Achse den Winkel ε ein.

Die vorstehenden Ausführungen haben grundlegende Bedeutung für die Betrachtungen über periodische Vorgänge wie Wellenbewegungen und Schwingungen, mit denen wir uns beim Studium der Akustik, der Optik, der Theorie der Wechselströme usw. zu befassen haben.

Den einfachsten periodischen Erscheinungen, nämlich harmonisch verlaufenden, begegnen wir zwar nur selten, wir können aber jeden periodischen Vorgang durch Zusammensetzung mehrerer einfacher Sinusfunktionen darstellen. Weiteres siehe im VIII. Abschnitt.

§ 34. Dreieckskoordinaten.

Eine Methode, die Lage eines Punktes in der Ebene zu fixieren, besteht auch darin, daß man seine senkrechten Abstände von den drei Seiten eines Dreiecks, des Bezugsdreiecks, angibt; diese Abstände heißen die Dreieckskoordinaten des Punktes. So sind in Fig. 24 die Strecken pa, pb, pc die Koordinaten des Punktes p. Die drei Strecken sind nicht unabhängig voneinander, vielmehr ist nach einem Satz der elementaren Geometrie die Summe der drei Strecken gleich der Höhe AD des Dreiecks, welches hier als gleichseitig angenommen ist.

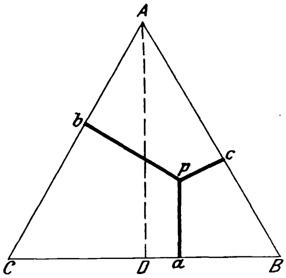

Fig. 24.

Eine Anwendung von dieser Art der Darstellung wurde z. B. bei der Untersuchung über die Schmelzpunkte der Mischungen von drei Salzen gemacht (s. Fig. 25). Jede Spitze des Dreiecks repräsentiert einen Bestandteil der Mischung; jeder Punkt auf einer der Dreiecksseiten stellt eine Mischung in bestimmtem Mengeverhältnis dar von jenen beiden Salzen, die an den Endpunkten der Seite verzeichnet sind. Irgend ein Punkt der Ebene ist daher der Vertreter einer Mischung aller der drei Salze in einem Verhältnis, welches durch die senkrechten Abstände von den Dreiecksseiten gegeben ist. Verbindet man nun jene Punkte, welche Mischungen von gleichem Schmelzpunkt entsprechen, so erhält man Kurven gleicher Schmelzpunkte oder Isothermen. So sind in der Figur einige dieser Isothermen für Mischungen der isomorphen Karbonate von Calcium, Baryum und Strontium wiedergegeben.

Roozeboom, Bancroft u. a. benutzen Dreieckskoordinaten in der Weise, daß die Lage eines Punktes nicht durch die normalen Abstände von den Dreiecksseiten, sondern durch Parallele zu diesen bestimmt wird. Bedeuten z. B. in Fig. 26 die Ecken A, B, C wieder $100\,^0/_0$ je eines Salzes, also Punkte auf den Seiten Mischungen zweier Salze, so vertritt ein Punkt im Innern des Dreiecks, z. B. O, eine Mischung aller drei Salze, deren Komponenten AP, AQ und CR sind, und zwar bedeutet AP die Menge des Bestandteiles C, AQ die von B, die in O vereinigt sind, — d. h. die von einem Eckpunkt auf einer Seite abgetragenen Koordinaten bedeuten stets einen Anteil an jenem Bestandteil, der durch den anderen Endpunkt der Seite dargestellt wird.

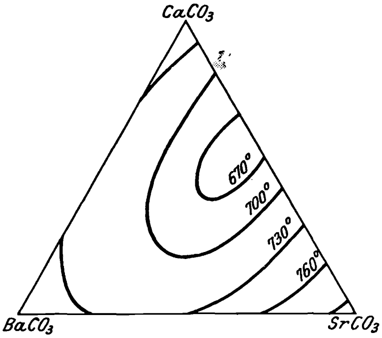

Fig. 25.

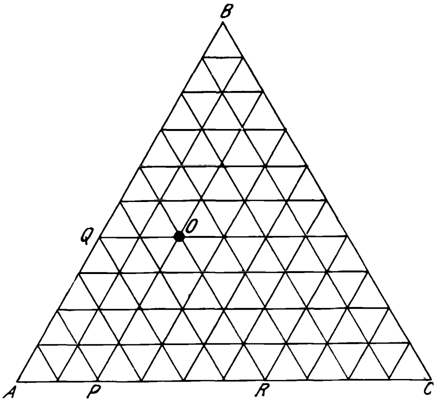

Fig. 26.

§ 35. Analytische Geometrie des Raumes.

Ebenso wie man in der Ebene die Lage eines Punktes durch zwei unabhängige Veränderliche, die Koordinaten, fixiert, so gelingt dies im Raume durch drei solcher Größen. Wir können im Raume ein Koordinatensystem, welches dem rechtwinkeligen in der Ebene entspricht, auf folgende Weise herstellen: Wir legen drei Ebenen senkrecht aufeinander; sie durchschneiden sich dann in drei senkrecht aufeinander stehenden Geraden; erstere heißen die Koordinatenebenen, letztere die Koordinatenachsen. Man bezeichnet diese mit xx', yy', zz' (s. Fig. 27) und nennt sie bezüglich die X-, Y- und Z-Achse. Irgend ein Punkt P des Raumes ist dann seiner Lage nach vollkommen bestimmt durch folgende Konstruktion: Man legt durch ihn drei Ebenen $PNAM$, $PLBM$, $PLCN$ parallel den

Koordinatenebenen; sie schneiden auf den Achsen die Strecken $OA = x_1$, $OB = y_1$, $OC = z_1$ ab, welche die Koordinaten des Punktes heißen und seine Lage eindeutig festlegen. Punkte in zwei verschiedenen Oktanten des Raumes werden wieder durch das Zeichen der Koordinaten voneinander unterschieden.

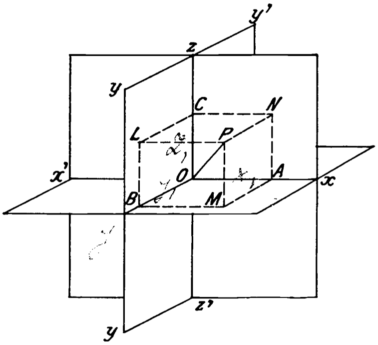

Fig. 27.

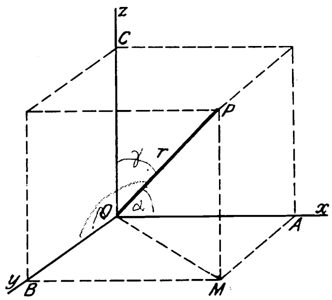

Fig. 28.

Zieht man vom Ursprung O des Koordinatensystems (s. Fig. 28) eine Gerade r zu dem Punkte P (x, y, z), und schließt diese Gerade mit der X-, Y- und Z-Achse bezüglich die Winkel α, β, γ ein, so nennt man $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungscosinus von r. Wie man leicht einsieht, ist:

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\cos\beta \qquad z = r\cos\gamma \quad \ldots \quad (1)$$

Ferner ist aus der Figur ersichtlich, daß:

$$r^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 + z^2$$

und:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = x^2 + y^2$$

daher:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wodurch der Abstand des Punktes P vom Ursprung aus seinen Koordinaten bestimmt ist. Substituiert man (1) in (2), so erhält man als Beziehung zwischen α, β, γ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Nunmehr ist es leicht, die Distanz zweier Punkte durch deren Koordinaten auszudrücken. Sind P_1 (x_1, y_1, z_1) und P_2 (x_2, y_2, z_2) die gegebenen Punkte (s. Fig. 29), so lege man ein Parallelepiped, dessen Begrenzungsebenen den Koordinatenebenen parallel sind, so, daß P_1 und P_2 zwei gegenüberliegende Ecken desselben bilden. Dann ist:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1E}^2 + \overline{EP_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + \overline{EP_2}^2$$
$$\overline{EP_2}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DP_2}^2 = (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

daher:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad . \quad . \quad (4)$$

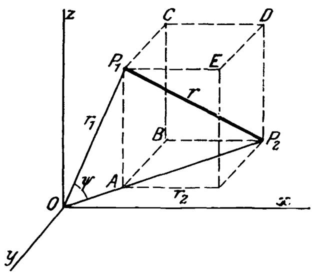

Fig. 29.

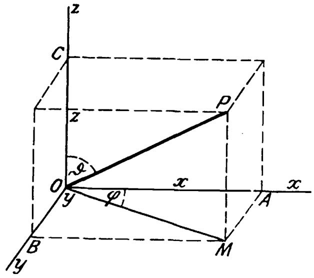

Fig. 30.

Sind die Richtungscosinus der zwei Geraden $OP_1 = r_1$ und $OP_2 = r_2$ gegeben (s. Fig. 30), — sie seien bezüglich:

$$l_1 = \cos \alpha_1 \qquad m_1 = \cos \beta_1 \qquad n_1 = \cos \gamma_1$$

und:

$$l_2 = \cos \alpha_2 \qquad m_2 = \cos \beta_2 \qquad n_2 = \cos \gamma_2$$

so läßt sich aus ihnen der Winkel ψ bestimmen, den r_1 und r_2 miteinander einschließen. Es ist nämlich im Dreieck OP_1P_2:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \psi$$

Setzt man für r, r_1 und r_2 die Werte nach (2) und (4) ein, so erhält man:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos \psi$$

ferner ist:

$$x_1 = r_1 l_1 \qquad y_1 = r_1 m_1 \qquad z_1 = r_1 n_1$$
$$x_2 = r_2 l_2 \qquad y_2 = r_2 m_2 \qquad z_2 = r_2 n_2$$

Daher schließlich:

$$\cos \psi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Stehen die beiden Geraden r_1, r_2 aufeinander senkrecht, so erhält man als Bedingung:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Auch im Raume kann man statt rechtwinkliger Koordinaten Polarkoordinaten einführen. Als solche kann man (s. Fig. 30) die Distanz $OP = r$ des betreffenden Punktes vom Ursprung, den Winkel ϑ, den r mit der Z-Achse einschließt, und etwa den Winkel φ, den die Projektion OM von r auf die XY-Ebene mit der X-Achse bildet, wählen. Es ist leicht, von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten und umgekehrt überzugehen. Wie sich aus der Figur ergibt, ist:

$$\begin{aligned} x &= OA = OM\cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= OB = OM\sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\psi \\ z &= OC = r\cos\vartheta \end{aligned} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Anderseits folgt aus diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan\vartheta &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

§ 36. Die Gleichungen von Flächen und Raumkurven.

Sowie in der Ebene eine Gleichung zwischen den beiden veränderlichen Koordinaten eine Kurve darstellt, so charakterisiert im Raume eine Gleichung zwischen den drei Variabeln x, y, z eine Fläche. Wir wollen zuerst die Gleichung einer Ebene aufstellen.

Die Ebene schneide die Koordinatenachsen in den Punkten A, B, C (s. Fig. 31) und es sei:

$$OA = a \qquad OB = b \qquad OC = c$$

P sei irgend ein Punkt der Ebene mit den Koordinaten x, y, z; wir legen durch ihn eine Ebene $A'B'C'$ normal auf die X-Achse, welche die XY-Ebene in $A'B'$ schneidet. Dann bestehen die folgenden Beziehungen:

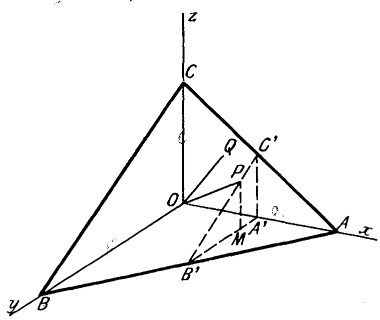

Fig. 31.

$$\Delta\, AOB \backsim \Delta\, AA'B'$$

daher:

$$AO : OB = AA' : A'B'$$

oder:

$$a : b = (a-x) : A'B'$$

$$A'B' = \frac{b}{a}(a-x)$$

und:

$$MB' = A'B' - A'M = \frac{b}{a}(a-x) - y$$

Ferner:

$$\Delta\, BOC \backsim \Delta\, B'MP$$

daher:

$$CO : OB = MP : MB'$$

$$c : b = z : \left[\frac{b}{a}(a-x)-y\right]$$

oder:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

als Gleichung einer Ebene. Sie ist vom ersten Grade; jede Gleichung vom ersten Grade zwischen x, y, z:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

stellt eine Ebene dar. Denn setzt man:

$$-\frac{D}{A}=a \qquad -\frac{D}{B}=b \qquad -\frac{D}{C}=c$$

so ist (2) auf (1) zurückgeführt.

Ist $OQ=p$ der senkrechte Abstand der Ebene vom Ursprung, so stellt p die normale Projektion von OP auf eine Gerade in der Richtung OQ dar. Diese Projektion kann anderseits, wie man leicht einsieht, auch erhalten werden, wenn man die Komponenten von OP auf OQ projiciert, und die einzelnen Projektionen summiert. Sind also die Richtungscosinus von $p : \cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so ist:

$$x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und dies ist eine andere Form der Gleichung der Ebene. Die Konstanten α, β, γ, p der Gleichung (3) und A, B, C, D von (2) stehen in folgender Beziehung:

$$-\frac{A}{D}=\frac{\cos\alpha}{p} \qquad -\frac{B}{D}=\frac{\cos\beta}{p} \qquad -\frac{C}{D}=\frac{\cos\gamma}{p}$$

Quadriert und addiert man und benutzt Gleichung (3) in § 35, so erhält man:

$$-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=p$$

und:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\alpha & \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\beta \\ \multicolumn{2}{c}{\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\gamma} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Man kann eine große Klasse von Flächen dadurch entstanden denken, daß irgend eine Kurve, die Erzeugende, sich im Raume bewegt und dabei die betreffende Fläche beschreibt. Besonders einfacher Natur sind die Rotationsflächen, die von einer Kurve erzeugt werden, die um eine feste Achse rotiert. So z. B. kann eine Kugel entstanden gedacht werden durch Rotation eines Kreises um einen Durchmesser, ein gerader Kegel wird von einem gleichschenkligen Dreieck beschrieben, das um seine Höhe rotiert, usw.

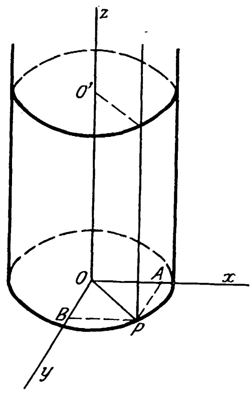

Fig. 32.

Wir wollen als Beispiel die Gleichung eines Zylinders ableiten. Er sei entstanden durch Rotation einer zur XY-Ebene senkrechten Geraden um die Z-Achse. Ist $P(x, y, z)$ irgend ein Punkt der Zylinderfläche (s. Fig. 32), und der Radius des Zylinders $OP = r$, so haben wir:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad . \quad . \quad (5)$$

als Gleichung der Zylinderfläche; sie ist von z unabhängig.

Auch Flächen werden nach dem Grade ihrer Gleichungen in Ordnungen eingeteilt. Die Ebene ist die einzige Fläche erster Ordnung; als Beispiel für die Fläche zweiter Ordnung nehmen wir jene, deren Gleichung:

$$pv = RT$$

also die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist, in der p, v, T als Koordinaten eines Raumpunktes aufgefaßt werden. Da die Schnitte senkrecht zur T-Achse Kurven von der Gleichung:

$$pv = \text{const.}$$

also gleichseitige Hyperbeln sind, so haben wir ein Hyperboloid vor uns (s. Fig. 33).

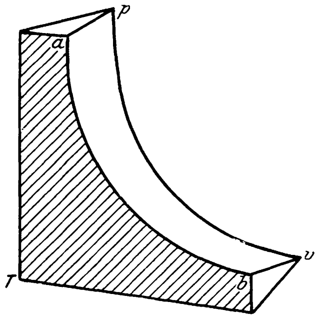

Fig. 33.

Eine Kurve im Raume kann angesehen werden als Schnittlinie zweier Flächen, deren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f\,(x,\ y,\ z) = 0 \\ \varphi\,(x,\ y,\ z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

die Schnittkurve erfüllen muß. Eine Raumkurve ist also im allgemeinen durch zwei Gleichungen von der Form (6) bestimmt. Um z. B. die Gleichungen einer Geraden im Raum abzuleiten, betrachten wir sie als Schnitt zweier Ebenen. Ist AB (Fig. 34) die gegebene

Gerade, so legen wir beispielsweise die Ebenen $AabB$ senkrecht zur XZ-Ebene und $Aa'b'B$ senkrecht zur YZ-Ebene durch sie; die Gleichungen dieser Ebene sind nach (1):

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1 \quad \text{und:} \quad \frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$$

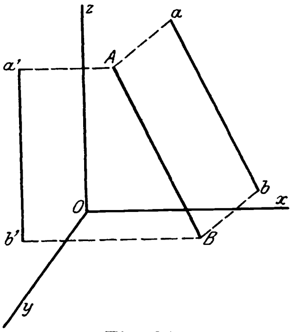

Fig. 34.

d. h. sie stimmen überein mit den Gleichungen der Geraden ab und $a'b'$, also der Projektionen von AB auf die XZ- und YZ-Ebene. Schreiben wir diese Gleichungen in der Form:

$$x=mz+c \quad y=m'z+c'\,. \quad (7)$$

wo m und m' die Tangenten der Winkel sind, welche die beiden Geraden bezüglich mit der X- und Y-Achse bilden, so stellen (7) die Gleichungen der Geraden AB dar.

Wir wollen noch die Gleichung der Tangentialebene an eine Fläche ableiten. Zu dem Zwecke legen wir durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) der Fläche mit der Gleichung:

$$z=f(x, y)$$

zwei Kurven, die auf der Fläche verlaufen. An jede von beiden legen wir die Tangente und bestimmen die Tangentialebene als Schnitt der beiden Tangenten. Wir wollen die Kurven so legen, daß die Tangenten der XZ-, resp. der XY-Ebene parallel sind; dann lauten die Gleichungen der letzteren nach (4) § 28:

$$\left.\begin{aligned} \zeta-z_1&=\frac{\partial z}{\partial x}_{x=x_1}(\xi-x_1) \\ \zeta-z_1&=\frac{\partial z}{\partial y}_{y=y_1}(\eta-y_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)\,.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist daher:

$$\zeta-z_1=\frac{\partial z}{\partial x}_{x=x_1}(\xi-x_1)+\frac{\partial z}{\partial y}_{y=y_1}(\eta-y_1) \quad \ldots \quad (9)$$

denn diese liefert für $\eta=y_1$ die erste, für $\xi=x_1$ die zweite der Gleichungen (8).

Beispiele:

1. Zu zeigen, daß die Gleichung eines geraden Kegels lautet:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \varphi$$

wo φ den halben Öffnungswinkel des Kegels bedeutet; der Ursprung liegt in der Spitze des Kegels.

2. Man leite die Gleichung der Kugel ab:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

3. Man beweise, daß die Tangentialebene in einem Punkt P (x_1, y_1, z_1) durch die Gleichung:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_1} (\xi - x_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_1} (\eta - y_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=z_1} (\zeta - z_1) = 0$$

gegeben ist, wenn die Gleichung der Fläche die Form hat:

$$f(x, y, z) = 0$$

III. Abschnitt.

Maxima und Minima bei Funktionen einer einzigen Veränderlichen; Einiges aus der Kurventheorie.

§ 37. Maxima und Minima einer Funktion.

Wenn wir eine Mischung von Chlor und Wasserstoff belichten, so hängt die Geschwindigkeit der dann zwischen den beiden Gasen stattfindenden chemischen Reaktion von der Wellenlänge der einfallenden Strahlen ab, d. h. bezeichnet y die Menge Chlorwasserstoffsäure, welche in der Zeiteinheit gebildet wird, und x die Wellenlänge des Lichtes, unter deren Einfluß die Umsetzung vor sich geht, so ist y eine Funktion von x.

Die berühmten Versuche von Bunsen und Roscoe haben nun gezeigt, daß y mit abnehmendem x steigt und fällt. Es muß daher, wenn der Wert des x einen bestimmten Betrag erreicht, seine Funktion y, welche bisher zugenommen hat, wieder abzunehmen beginnen, d. h. y ist für diesen speziellen Wert des x größer als irgend ein benachbarter Wert der Funktion. Wir sagen: die Funktion y hat für unseren speziellen Wert von x ein Maximum.

Andererseits gibt es Werte des x, bei welchem y, das bisher abgenommen hat, zu wachsen beginnt. Ist der Wert von y für einen besonderen Wert von x geringer als für irgend ein benachbartes x, so sagen wir: die Funktion y hat an dieser Stelle ein Minimum.

Fig. 35 illustriert die Wirkung von Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge auf eine Mischung von Chlor und Wasserstoff.[1])

[1]) Die mathematische Form der graphisch dargestellten Funktion ist unbekannt; — die gezeichnete Kurve gibt eine annähernde Darstellung der zusammengehörigen Werte der beiden Variablen, die durch Messungen ermittelt wurden.

Die Ordinate der Kurve bewegt sich entlang DJ, fortwährend wachsend, bis sie in die Lage PM kommt, nachher nimmt sie ab. PM ist ein Maximum.

Die abnehmende Ordinate setzt ihre Bewegung fort und erreicht die Lage QN, nach deren Überschreitung sie zunächst wieder wächst. Wir nennen QN ein Minimum.

Eine Funktion kann natürlich mehrere Maxima und Minima aufweisen, — in Fig. 35 haben wir z. B. in der Ordinate IR ein zweites Maximum vor uns.

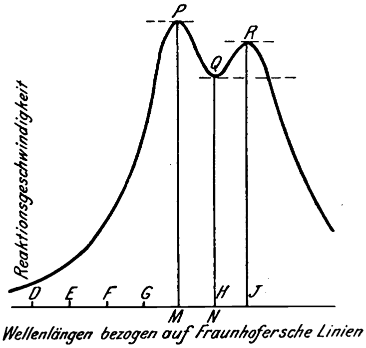

Fig. 35.

Dasjenige Maximum oder Minimum, welches größer, beziehungsweise geringer ist als alle übrigen, nennen wir ein absolutes, die anderen relative.

Beispiel:

Man zeichne die Kurve, welche durch die Gleichung:

$$y = \sin x$$

gegeben ist.

Man erteile x eine Reihe von besonderen Werten: $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, usf.

$$\text{Maxima finden wir bei: } x = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ \ldots$$

$$\text{Minima von } y \text{ bei: } x = -\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \ldots$$

Die gezeichnete Linie ist eine harmonische oder Sinuskurve (Fig. 20 S. 65).

Die Untersuchungen, ob bei einer Funktion Extremwerte — Maxima oder Minima — auftreten, bilden ein wichtiges Anwendungsgebiet der Differentialrechnung.

§ 38. Rechnerische Ermittelung der Maxima und Minima.

Wir wollen Tangenten in verschiedenen Punkten der Kurve:

$$y = f(x)$$

(Fig. 36) ziehen, deren Ordinaten sich mit wachsendem x zunächst einem Maximum MP nähern. Die Tangenten in Punkten vor P bilden mit der X-Achse spitze Winkel, es ist also der Wert von:

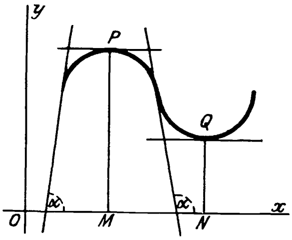

Fig. 36.

$$\tan\alpha, \quad \text{i. e.} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

stets positiv, bis im Punkt P selbst die Tangente parallel zur X-Achse wird, d. h.:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)_{x=OM} = 0$$

Jetzt, nachdem das Maximum überschritten ist, schließen die Tangenten stumpfe Winkel mit der X-Achse ein, — die Werte von $f'(x)$ bleiben beim weiteren Heranrücken an das Minimum QN negativ, erst im Punkte Q liegt die Tangente von neuem parallel zur X-Achse:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)_{x=ON} = 0$$

Nach Überschreitung des Minimums nimmt dann dy/dx wieder positive Werte an.

Es gibt ferner Kurven, welche Maxima und Minima aufweisen, die ähnlich denen in Fig. 37 aussehen. Man sagt, eine solche Kurve hat Spitzen in P' und Q'.

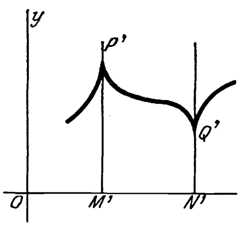

Fig. 37.

Wir bemerken auch hier, daß bei wachsendem x, während sich y einem Maximum nähert, die Tangenten an die Kurve einen spitzen Winkel mit der X-Achse bilden, d. h. der Wert von dy/dx bleibt stets positiv; in P' selbst steht die Tangente senkrecht auf der X-Achse:

$$\frac{dy}{dx}_{x=OM'} = \infty$$

Jetzt, nachdem das Maximum überschritten ist, hat dy/dx negative Werte, Tangenten und X-Achse bilden nämlich stumpfe Winkel bis zum Minimum $Q'N$. — Hier steht die Tangente von neuem senkrecht auf der X-Achse, dy/dx ist unendlich und nimmt dann bei weiterem Fortschreiten wieder positive Werte an.

Wir ziehen nun folgende Regeln ab:

1. Geht der erste Differentialquotient an einer Stelle mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten über, so hat die Funktion dort ein Maximum, und wenn er sein Zeichen von negativ in positiv ändert, weist sie ein Minimum auf.

2. Da:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan \alpha$$

sein Zeichen nur ändern kann, indem sein Wert durch null oder unendlich hindurchgeht, muß notwendigerweise $f'(x)$ einen dieser beiden Werte annehmen, an der Stelle, wo $f(x)$ ein Maximum oder Minimum hat.

3. Um also die Werte von x zu finden, für welche $f(x)$ Maxima oder Minima aufweist, ist $f'(x)$ gleich null (oder unendlich) zu setzen, dann haben wir zunächst die Werte von x zu ermitteln, welche dieser Bedingung genügen, d. h. die Gleichung:

$$f'(x) = 0 \quad (= \infty)$$

nach x aufzulösen und weiter ist dann zu untersuchen, ob der Wert des ersten Differentialquotienten beim Durchgang durch null (oder unendlich) wirklich auch sein Vorzeichen von positiven zu negativen Werten (Maximum) oder umgekehrt (Minimum) ändert.

Beispiele:

1. Man betrachte die Gleichung:

$$y = x^2 - 8x = f(x) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wir haben:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 8 = f'(x) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

jetzt setzen wir:

$$f'(x) = 2x - 8 = 0$$

daraus folgt:

$$x = 4$$

Wir wollen nun zu diesem Wert $+1$ und -1 addieren und alle drei Zahlen dann in (1) einsetzen.

Wenn $x = 3$, ist: $y = 9 - 24 = -15$
,, $x = 4$, ,, : $y = 16 - 32 = -16$
,, $x = 5$, ,, : $y = 25 - 40 = -15$

Größere oder kleinere Werte für x als 4 lassen $f(x)$ größere Beträge als -16 annehmen.

Addieren und subtrahieren wir nicht 1, sondern einen sehr kleinen Wert Δx, so ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} \text{für} & x = 4 - \Delta x & & y = \Delta x^2 - 16 \\ ,, & x = 4 & & y = \quad -16 \\ ,, & x = 4 + \Delta x & & y = \Delta x^2 + 16 \end{array}$$

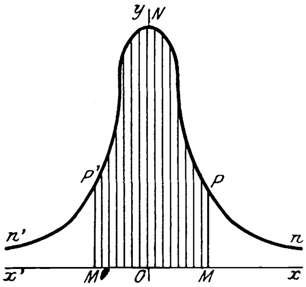

Fig. 38.

So klein wir auch Δx annehmen, die entsprechenden Werte von y sind doch stets größer als -16, die Funktion hat offenbar ein Minimum für $x = 4$.

Der erste Differentialquotient:

$$f'(x) = 2x - 8$$

hat:

$$\begin{array}{lllll} \text{für} & x = 4 - \Delta x & \text{den Wert} & -2\Delta x \\ ,, & x = 4 + \Delta x & ,, \quad ,, & +2\Delta x \end{array}$$

er geht also wirklich von negativen zu positiven Werten über.

2. Man zeige, daß:

$$y = 1 + 8x - 2x^2$$

ein Maximum hat für $x = 2$.

3. Man beweise, daß die Kurve:

$$y = k e^{-h^2 x^2}$$

ein Maximum hat für $x = 0$ (vgl. Fig. 38).

Weitere Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima sind, um nicht hier den Zusammenhang zu stören, am Schluß des Kapitels gegeben.

§ 39. Wendepunkte. — Konkavität, Konvexität.

Wir setzen die Untersuchung des vorhergehenden Abschnittes fort. Wenn an einer Stelle:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \infty$$

wird, so ist dies allein, — was wohl zu beachten ist, — noch kein hinreichender Grund, die Existenz eines Maximums oder Minimums anzunehmen. Eine Funktion kann zwar nicht von positiven zu negativen Werten übergehen, ohne durch null oder unendlich hindurchzugehen,[1]) wohl aber kann sie diese Werte annehmen, ohne ihr Vorzeichen zu wechseln. Ein Blick auf Fig. 39 macht uns dies sofort klar; dort wird:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{dy}{dx} = \infty$$

in den Punkten R beziehungsweise S und doch zeigt die Kurve an diesen Stellen weder Maxima noch Minima.

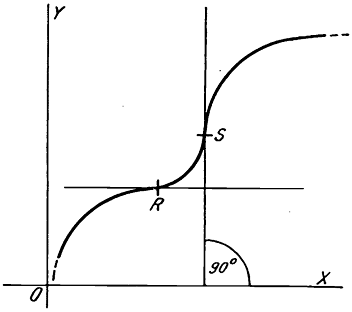

Fig. 39.

Die weitere Prüfung, die also stets notwendig ist, um einen Extremwert einer Funktion y nachzuweisen, ist uns ja bekannt: es ist zu untersuchen, ob an der betreffenden Stelle, wo er null oder unendlich wird, auch ein Zeichenwechsel des Wertes von dy/dx stattfindet.

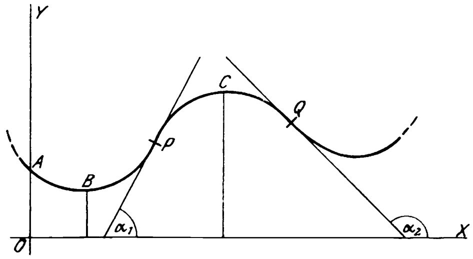

Fig. 40.

Solche Punkte nun, wie R und S in Fig. 39 oder P und Q der Fig. 40, an welchen die Kurve von der einen Seite der Tangente auf die andere geht, — wo sie sich von Konkavität zu Konvexität gegen die X-Achse biegt, nennen wir Wendepunkte.

§ 40. Fortsetzung; Methode der Bestimmung, ob eine Kurve konkav oder konvex gegen die X-Achse ist.

Aus Fig. 40 ersehen wir, daß längs des gegen die X-Achse konvexen Stückes von A bis B die stumpfen Winkel, welche die Tangenten an die Kurve mit der X-Achse bilden, fortwährend größer werden, — der Wert von:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

[1]) Von Funktionen, die sich mit fortschreitenden Werten der unabhängigen Variablen sprungweise ändern, sehen wir bei allen diesen Betrachtungen ganz ab.

schreitet also von größeren negativen Beträgen gegen null fort, d. h. er nimmt zu.

Nachdem dann in B, dem tiefsten Punkt der Kurve, $\tan\alpha$ null geworden ist, schließen Tangente und X-Achse immer größere spitze Winkel ein, die bis zu dem Winkel α_1 wachsen, welchen die Tangente im Wendepunkt P mit der X-Achse bildet; der Wert von $\tan\alpha$ steigt längs BP von null bis zu einem gewissen Betrag $\tan\alpha_1$.

Es ändert sich also von A bis P, längs des ganzen konvexen Stückes der Wert von $\tan\alpha$ im positiven Sinn, von größeren negativen gegen größere positive Werte; — wir drücken dies aus, indem wir schreiben:

$$\frac{d\tan\alpha}{dx} > 0$$

nun ist aber:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

somit:

$$\frac{d\tan\alpha}{dx} = \frac{dy^2}{d^2x^2} = f''(x) > 0$$

Jetzt geht die Kurve auf die andere Seite der Tangente im Wendepunkt P und bleibt in ihrem weiteren Verlauf von R bis S konkav nach unten.

Längs dieses ganzen konkaven Teiles PCQ nimmt offenbar der Wert von $\tan\alpha$ fortwährend ab; von P bis C werden die positiven Beträge kleiner, in Punkt C ist $\tan\alpha$ gleich null, und weiter von C bis Q finden wir ein Übergehen zu immer größeren negativen Werten. Längs des ganzen konkaven Stückes ändert sich also der Wert von $\tan\alpha$ im negativen Sinn:

$$\frac{d\tan\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Wir können Folgendes feststellen:

Je nachdem der Wert der zweiten Differentialquotienten $f''(x)$ positives oder negatives Vorzeichen hat, ist der betreffende Teil der Kurve $f(x)$ konvex oder konkav gegen die X-Achse.

Die Regel gilt, wie leicht einzusehen ist, für Stücke, die oberhalb der X-Achse liegen; ist dies bei der betrachteten Stelle nicht der Fall, dann können wir die X-Achse so lange verschieben, bis diese Voraussetzung zutrifft.

Die allgemeine, von jeder Einschränkung freie Regel lautet: ein Stück einer Kurve ist konkav oder konvex gegen die X-Achse, je nachdem der Wert des Produkts:

$$y\frac{d^2y}{dx^2}$$

längs dieses Stückes negatives oder positives Vorzeichen hat. Der Leser prüfe selbst auf dem Wege graphischer Betrachtung die Richtigkeit dieser Angabe.

§ 41. Fortsetzung; Aufsuchen von Wendepunkten, Beispiele.

Aus unseren bisherigen Betrachtungen über Art der Krümmung und Wendepunkte erhellt, daß es zur Bestimmung der Lage eines Wendepunktes nur nötig ist, die Abszisse des Punktes zu ermitteln an welchem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \tan \alpha}{dx}$$

null oder unendlich wird und mit wachsendem x sein Zeichen wechselt. Ändert sich das Zeichen von negativ zu positiv, so geht die Kurve offenbar von Konkavität zu Konvexität gegen die X-Achse über (Punkt Q Fig. 40); wechseln die Zeichen im entgegengesetzten Sinn, so folgt ein konkaves auf ein konvexes Stück (Punkt P Fig. 40).

Die Regel lautet also:

Um die Lage eines Wendepunktes aufzufinden, an welchem der Wert des zweiten Differentialquotienten $f''(x)$ der Kurvengleichung $f(x)$ sein Zeichen ändert, haben wir denselben gleich null oder unendlich zu setzen, den Wert des x zu ermitteln, welcher dieser Bedingung genügt, d. h.:

$$f''(x) = 0, \quad \text{oder:} \quad f''(x) = \infty$$

nach x aufzulösen und zu prüfen, ob $f''(x)$ auch sein Vorzeichen an dieser Stelle ändert und zwar in welchem Sinn. Liegt die Tangente im Wendepunkt zufällig parallel oder senkrecht zur X-Achse, wie in R und S (Fig. 39), so wird natürlich schon:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

dort null beziehungsweise unendlich, ohne jedoch an diesen Stellen das Zeichen zu wechseln.

Beispiele:

1. Man zeige, daß die Kurve:

$$y = a + (x - b)^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

einen Wendepunkt hat an der Stelle $y = a, \quad x = b$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x-b)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$3(x-b)^2 = 0$$

für $x = b$; an dieser Stelle würde also ein Maximum oder Minimum liegen, wenn der Wert von dy/dx auch dort sein Zeichen wechselt. Wir setzen zur Probe etwas größere und kleinere Werte als b, z. B. $b \pm \Delta x$ in (2) für x ein und finden:

$$3(-\Delta x)^2 > 0 \quad \text{und} \quad 3(+\Delta x)^2 > 0$$

ein Zeichenwechsel tritt nicht ein, — ein Extremwert ist also nicht vorhanden.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-b) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wird nun ebenfalls null für $x = b$. Für:

$$\begin{aligned} x &= b - \Delta x \quad \text{haben wir:} \quad d^2y/dx^2 = -6\Delta x \\ x &= b + \Delta x \quad\quad „ \quad\quad „ \;: \quad d^2y/dx^2 = +6\Delta x \end{aligned}$$

Die Stelle $x=b$, $y=a$ entspricht also einem Wendepunkt. Der Leser zeichne die Kurve.

2. Man untersuche, ob die Kurve:

$$y = a - b\sqrt[5]{(x-c)^2} = f(x) \quad \ldots \quad (4)$$

Wendepunkt hat.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6b}{25\sqrt[5]{(x-c)^8}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

kann offenbar für keinen endlichen Wert von x null werden, hingegen unendlich für $x = c$.

Diesem Wert von x könnte also ein Wendepunkt entsprechen, vorausgesetzt, daß d^2y/dx^2 an dieser Stelle sein Zeichen wechselt. Wir setzen, um dies zu ermitteln, in (4) wieder etwas größere und kleinere Werte als c für x ein, und zwar $c \pm \Delta x$. Offenbar ist:

$$\frac{6b}{25\sqrt[5]{(-\Delta x)^8}} > 0, \quad \text{und ebenso:} \quad \frac{6b}{25\sqrt[5]{(+\Delta x)^8}} > 0$$

$f''(x)$ wechselt sein Zeichen nicht, bleibt positiv, die Kurve hat keinen Wendepunkt, sondern ist vor und nach dem betrachteten Punkt konvex. Die dem Leser überlassene Untersuchung des ersten Differentialquotienten zeigt nun, daß dem Wert $x = c$ ein Maximum entspricht, und zwar eine Spitze (vgl. Fig. 41).

3. Der Leser ermittle die etwaigen Wendepunkte der Kurve:

$$y = a - b\sqrt[5]{(x-c)^3}$$

(vgl. Fig. 42).

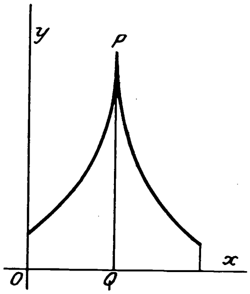

Fig. 41.

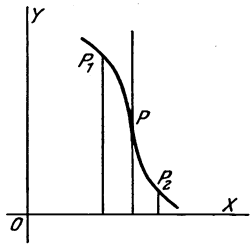

Fig. 42.

4. Der Leser untersuche den Spezialfall der harmonischen Kurve:

$$y = \sin x$$

es gibt eine unendliche Anzahl von Wendepunkten; an denselben wechselt die Ordinate ihr Zeichen, d. h. sie liegen alle auf der X-Achse.

§ 42. Vielfache Punkte.

Einen vielfachen Punkt nennt man den, durch welchen zwei oder mehrere Äste einer Kurve hindurchgehen.

Wenn sich zwei Äste einer Kurve wie in S (Fig. 43) schneiden, so sehen wir, daß der Abszisse des Schnittpunktes nur eine einzige Ordinate entspricht, während für ein wenig größere oder kleinere Werte des x je zwei Ordinatenwerte, entsprechend Punkten auf den beiden Ästen, auftreten.

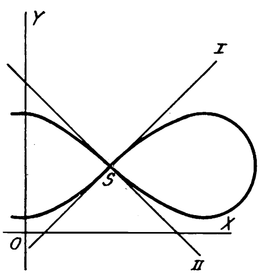

Fig. 43.

Ferner muß es offenbar in diesem Schnittpunkt zwei Tangenten (I II) an die Kurve geben, — je eine an jeden der beiden sich kreuzenden Äste.

Diskutieren wir nun die Gleichung einer Kurve und finden, daß einer bestimmten Abszisse nur eine einzige Ordinate entspricht, während für ein wenig größere oder kleinere Werte des x zwei reelle Ordinaten sich ergeben, und gelingt es uns ferner nachzuweisen, daß in diesem Punkte zwei Tangenten existieren, so haben wir jedenfalls einen Schnittpunkt zweier Äste dieser Kurve, einen sogenannten Doppelpunkt aufgefunden.

Wir betrachten die Kurve:

$$y^2 = a^2 x^2 - x^4, \quad \text{resp.} \quad y = \pm x \sqrt{a^2 - x^2} \quad . \quad (1)$$

y hat zwei reelle, nur im Vorzeichen verschiedene Werte für alle:

$$x \begin{matrix} > 0 \\ < a \end{matrix} \quad \text{und} \quad x \begin{matrix} < 0 \\ > -a \end{matrix}$$

die Kurve liegt offenbar symmetrisch zur X- und Y-Achse. Einen einzigen Wert für y, und zwar null haben wir für:

$$x = a \qquad x = 0 \qquad x = -a$$

Die Differenzierung der Kurvengleichung nach x ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Für $x = \pm a$ hat nun dy/dx nur einen Wert und zwar ∞.

Für $x = 0$ treten jedoch zwei reelle (numerisch gleiche, im Vorzeichen verschiedene) Werte auf:

$$+a \quad \text{und} \quad -a$$

Der Punkt $x = 0$, $y = 0$ entspricht also unseren Bedingungen: seiner Abszisse entspricht ein einziger Wert der Ordinate und in ihm gibt es zwei Tangenten an die Kurve.

Der Ausgangspunkt des Koordinatensystems ist also für die Kurve, welche der Gleichung:

$$y^2 = a^2 x^2 - x^4$$

entspricht, ein vielfacher, und zwar, da sich zwei Zweige schneiden, ein sogenannter Doppelpunkt. Der Leser konstruiere die Kurve.

§ 43. Spitzen.

Eine Spitze ist ein solcher Punkt, in welchem zwei Äste eine Kurve berühren, aber eine gemeinsame Tangente haben, und wo sie endigen. Es gibt zwei Fälle:

1. Die beiden Äste liegen auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente (Fig. 44), — gewöhnliche Spitzen.

2. Die beiden Äste liegen auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente, — Schnabelspitzen (Fig. 45).

Wir wollen eine Kurve, welche durch die Gleichung:

$$y = b \pm \sqrt{(x^2 - a^2)^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dargestellt ist, diskutieren. Jedem Wert für x, der größer ist als a, entsprechen zwei reelle Ordinatenwerte auf der rechten, und ebenso jeder Abszisse, kleiner als $-a$, zwei reelle Werte der Ordinate auf der linken Seite der Y-Achse. Im Punkt:

$$x = +a \quad \text{und} \quad x = -a$$

haben wir nur je einen Wert für y auf beiden Seiten der Y-Achse, nämlich b.

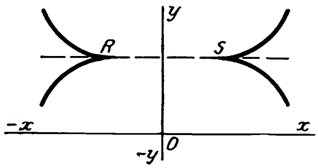

Fig. 44.

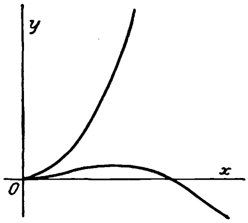

Fig. 45.

In diesen Punkten:

$$x = a \qquad x = -a$$
$$y = b \qquad y = -b$$

treffen also je zwei Äste der Kurve zusammen und endigen auch dort, denn für:

$$x < a \quad \text{und} \quad x > -a$$

gibt die Gleichung keine reellen Werte mehr für die Ordinaten.

Betrachten wir nun den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \pm 3x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

für:

$$x = a \quad \text{und} \quad x = -a$$

hat er nur einen einzigen Wert, nämlich null. In den Punkten mit diesen Abszissen, wo je zwei Kurvenäste zusammenstoßen und endigen, existiert also nur je eine gemeinschaftliche Tangente parallel zur Y-Achse; dorten sind also jedenfalls Spitzen.

Der zweite Differentialquotient:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{2}(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

hat für jeden Wert:

$$x > a \quad \text{und} \quad x < -a$$

je zwei numerisch gleiche, im Vorzeichen verschiedene Werte, z. B. für:

$$x = a + h$$

$$\pm \frac{3}{2}(2ah + h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Von den beiden Ästen ist also der eine konvex, der andere konkav gegen die X-Achse und somit auch gegen die zur X-Achse parallele, beiden Ästen gemeinschaftliche Tangente im Punkt mit der Abszisse a, — d. h. die Äste liegen zu beiden Seiten dieser Tangente, — die Spitzen sind von der ersten Art, ähnlich wie in Fig. 44. Der Leser behandle nun selbst die durch die Gleichung:

$$(y-x^2)^2=x^5 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

dargestellte Kurve der Figur 45. Die Untersuchung des zweiten Differentialquotienten wird ergeben, daß beide Äste in der Nähe der Spitze konvex sind gegen die X-Achse, welche auch die gemeinschaftliche Tangente ist, — die Kurve hat eine Schnabelspitze im Anfangspunkt des Koordinatensystems.

NB. Der untere Ast weist auch ein Maximum bei $x=16/25$ auf:

$$\frac{dy}{dx}=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

dem unteren Ast entspricht offenbar die durch:

$$2x-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (5a)$$

in ihrer Lage definierte Tangente und:

$$2x-\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=0$$

für: $x=16/25$.

§ 44. Isolierte Punkte, Endpunkt.

Ein isolierter Punkt ist ein solcher, dessen Koordinaten der Gleichung der Kurve genügen, während er graphisch mit ihr in keinem Zusammenhang steht.

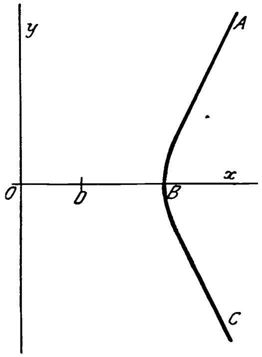

Fig. 46.

Ein solcher isolierter Punkt, der zum Kurvenzug ABC gehört, ist D mit den Koordinaten $x=a$, $y=0$ in Fig. 46.

Die Gleichung lautet:

$$y=\pm(x-a)\sqrt{x-b}$$
$$a<b!$$

Offenbar müssen Werten von x, die kleiner sind als OB, imaginäre Ordinaten zu beiden Seiten von D entsprechen.

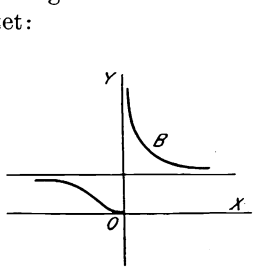

Fig. 47.

Bricht ein Ast einer Kurve plötzlich ab, so haben wir einen sogenannten Endpunkt vor uns. Fig. 47 stellt die Kurve:

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

dar. Läßt man x von $-\infty$ bis 0 gehen, so sinkt y von 1 bis 0; im Anfangspunkt des Koordinatensystems bricht dieser Ast ab, — die Fortsetzung für positive Werte von x stellt B dar.

§ 45. Die Krümmung.

Von zwei Kurven AC und AD (Fig. 48) hat diese um Punkt A die größere Krümmung, welche sich schneller von der gemeinschaftlichen Tangente AB entfernt.

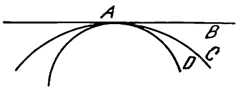

Fig. 48.

Der Winkel zwischen den Tangenten an den Enden eines Bogens einer Kurve heißt die absolute Krümmung des Stückes. Beim Übergehen von einem Punkt P zu einem benachbarten P_1 längs eines Bogenstückes Δs der ebenen Kurve AB (Fig. 50) dreht sich nämlich die Tangente über den Winkel $\Delta\alpha$ hinweg, $\Delta\alpha$ mißt also die totale oder absolute Krümmung des betrachteten Bogens; das Verhältnis:

$$\frac{\text{absolute Krümmung}}{\text{Bogenlänge}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

heißt seine mittlere Krümmung, und den Grenzwert dieses Verhältnisses:

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

bezeichnen wir kurzweg als die Krümmung im Punkt P.

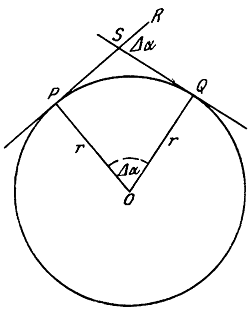

Fig. 49.

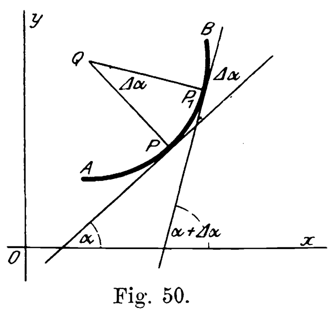

Fig. 50.

Die Krümmung eines Kreisumfanges ist offenbar an allen Stellen dieselbe; — sie ist gleich dem reziproken Wert des Halbmessers, steht also bei verschiedenen Kreisen im umgekehrten Verhältnis wie die Radien.

Dies kann folgendermaßen dargetan werden:

Im Kreis Fig. 49 ist O der Mittelpunkt, r bezeichnet Halbmesser. Wir wissen aus der elementaren Geometrie, daß:

$$\sphericalangle RSQ = \sphericalangle POQ$$

Im Bogenmaß ist POQ gegeben durch das Verhältnis der Bogenlänge PQ zum Radius.

Winkel POQ im Bogenmaß $= \dfrac{\operatorname{arc} POQ}{r}$, somit:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta s/r}{\Delta s} = \frac{1}{r} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Die mittlere Krümmung eines Kreises ist also eine Konstante, unabhängig von der Bogenlänge, und zwar ist sie gleich dem reziproken Wert des Radius. Offenbar ist auch die Grenze für Δs gleich null:

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r}. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Den Krümmungsradius in einem Punkt einer Kurve:

$$y = f(x)$$

nennen wir den Radius dieses Kreises, welcher dieselbe Krümmung hat, wie die Kurve im betreffenden Punkt.

Die Krümmung der gegebenen Kurve in irgend einem Punkt sei:

$$\frac{d\alpha}{ds}$$

Der Radius des Kreises von der gleichen Krümmung heiße R, dann ist:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

zu setzen. Nun ist:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d(\tan\alpha)}{dx} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

daraus:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \cos^2\alpha$$

Nun ist:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

somit:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ferner ist:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

also endlich nach (5), (6) und (7):

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dx}{d\alpha/dx} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Beispiele:

1. Man ermittle den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkt der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$$R = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Im Punkt: $x = a$, $y = 0$ ist z. B.:

$$R = \frac{b^2}{a}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ wurde schrittweise folgendermaßen entwickelt:

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x\,dy/dx}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2y^3} \text{ usf.}$$

2. Man beweise, daß der Krümmungsradius von:

$$xy = a$$

ist:
$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} / 2a$$

Ist eine Kurve nur wenig gegen die X-Achse geneigt, so ist dy/dx praktisch null, und für den Krümmungradius findet man den Ausdruck:

$$R = 1 \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$$

ein Resultat, welches häufig bei Berechnungen über Kapillarität, in der Linsentheorie usw. verwendet wird. Die Richtung der Krümmung wurde in § 40 diskutiert. Es ist dort gezeigt worden, daß eine Kurve konkav oder konvex im Punkt P ist, je nachdem $d^2y/dx^2 < 0$ oder > 0 ist.

§ 46. Kurvenscharen. Einhüllende Kurven oder Enveloppen.

Eine Gleichung wie:

$$f(x, y, \alpha) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

stellt uns für jeden beliebigen konstanden Wert von α eine ebene Kurve dar; nun gibt es eine unendliche Anzahl bestimmter Werte α, also entspricht unserer Funktion eine ganze Schar oder Familie von Kurven; α nennen wir einen veränderlichen Parameter.

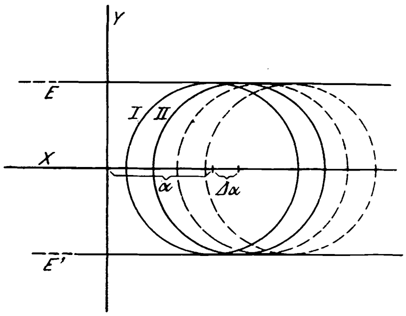

Fig. 51.

Eine Familie von Kreisen, deren Mittelpunkt auf einer geraden Linie liegt (Fig. 51), repräsentiert z. B. die Gleichung:

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

α ist der Parameter; einem bestimmten Wert, den wir ihm erteilen, entspreche Kreis I, einem neuen: $\alpha + \Delta\alpha$, somit der Gleichung $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha)$ der Kreis II.

Die Schnittpunkte von I und II, die ja beiden Kreisen angehören, müssen offenbar die Gleichung jeder der beiden Kurven, d. h.:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \text{und} \quad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

und somit auch:

$$\frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

befriedigen. Diese Relation wird richtig bleiben, so klein wir auch $\Delta\alpha$ annehmen, und somit auch für:

$$\lim_{\Delta\alpha = 0} \frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial\alpha} \quad . \quad (2)$$

gelten. Ergibt nun die Elimination von α aus (1) und (2) eine Funktion:

$$\varphi(xy)$$

so stellt diese eine Kurve dar, welche die Einhüllende oder Enveloppe der durch $f(x, y, \alpha)$ siehe (1) gegebenen Schar heißt.

Die Einhüllende ist nach Vorstehendem der geometrische Ort der Punkte, welche unendlich nahe Angehörige der Schar miteinander gemeinsam haben.

Ein Blick auf Fig. 51 zeigt uns, daß die Einhüllende unserer Schar von Kreisen in zwei geraden Linien E und E' besteht:

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial\alpha} = 2(x - \alpha) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Elimination von α aus (3) und (4) ergibt:

$$y = \pm R$$

die Gleichung zweier zur X-Achse in der Entfernung $\pm R$ parallelen Geraden.

Beispiel:

Man beweise, daß die Einhüllende der Kurvenfamilie:

$$(x - m - a)^2 + y^2 = 4ma$$

eine Parabel:

$$y^2 = 4mx$$

ist.

Eine durch eine Funktion $f(x, y, \alpha)$ gegebene Schar muß nicht unbedingt eine einhüllende Kurve haben.

Fassen wir z. B. in der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

R als Parameter auf, so stellt sie uns eine Familie von konzentrischen Kreisen vor, welche ebensowenig wie ein System von konfokalen Ellipsen:

$$\frac{x}{a^2+\alpha}+\frac{y^2}{b^2+\alpha^2}=1$$

eine Enveloppe hat.

§ 47. Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima.

Bei Aufgaben über Maxima und Minima, wie den nachstehenden, hat man vorerst die Beziehungen zwischen den Variablen in Form einer algebraischen Gleichung auszudrücken, die dann weiter nach den in § 38 gelernten Regeln behandelt wird.

Bei den meisten Fällen, die praktisch vorkommen, ist bloß einiges Nachdenken erforderlich, um sich klarzumachen, ob ein besonderer Wert von x, welcher $f'(x)$ null werden läßt, auch wirklich einem Maximum oder Minimum von $f(x)$ entspricht.

1. Eine Strecke so in zwei Teile zu teilen, daß das rechtwinkelige Viereck, dessen Seitenlängen gleich diesen zwei Teilen sind, die größtmögliche Fläche hat.

Nennen wir a die Länge der gegebenen Strecke, x die Länge des einen Teiles, $a-x$ die des anderen, dann ist der Flächeninhalt des Viereckes:

$$y=(a-x)\cdot x$$

wir differenzieren:

$$\frac{dy}{dx}=a-2x=f'(x)$$

und setzen:

$$f'(x)=a-2x=0$$

es ergibt sich:

$$x=\frac{1}{2}a$$

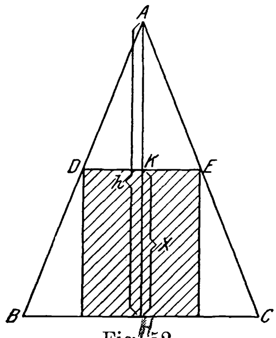

Fig. 52.

Die Strecke muß also halbiert werden, und das Viereck von größtem Flächeninhalt ist ein Quadrat.

2. Das rechtwinkelige Viereck von größtem Flächeninhalt zu ermitteln, welches einem gegebenen gleichschenkeligen Dreieck eingeschrieben werden kann.

In Fig. 52 möge b die Länge der Basis des Dreieckes ABC, h seine Höhe bezeichnen. x sei die Höhe des eingeschriebenen rechwinkeligen Viereckes. Wir müssen zuerst die Beziehung zwischen der Fläche des eingeschriebenen Viereckes und des Dreiecks finden. Nach den Sätzen über ähnliche Dreiecke haben wir:

$$AH:AK = BC:DE$$
$$h:h-x = b:DE$$

Die Fläche des Viereckes ist offenbar:

$$y = DE \times KH$$

und da:

$$DE = \frac{b}{h}(h-x) \qquad KH = x$$

ist:

$$y = \frac{b}{h}(hx - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{h}(h-2x)$$

wird nun null, wenn:

$$h = 2x \qquad x = \frac{h}{2}$$

Das heißt, die Höhe des Viereckes muß gleich der halben Höhe des Dreieckes sein.

3) Man zeige, daß das größte rechtwinkelige Viereck, welches dem Kreis:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

eingeschrieben werden kann, ein Quadrat ist. Seitenlänge desselben?

4. ACB (Fig. 53) sei eine kreisförmige Metallplatte vom Radius 1, und wir sollen nun einen Sektor AOB ausschneiden, so daß das hohlkegelförmige Gefäß, das dann durch Verbindung von AO mit BO hergestellt werden kann, die größtmögliche Menge Flüssigkeit faßt. Vor allem müssen wir wieder den Zusammenhang zwischen den Dimensionen der Platte und dem Hohlraum des Kegels finden.

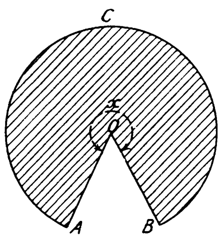

Fig. 53.

Offenbar wird ACB der Umfang der kreisförmigen Basis des Kegels sein.

Wir nennen r den Radius, y den Umfang dieser Basis; dann ist:

$$ACB = y = 2r\pi \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Bezeichnet h die Höhe des Kegels, so ist sein Volum durch die Formel 33, S. 386 gegeben:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

h und r bilden aber ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse $OB = OA = 1$ und dessen Grundlinie r ist, somit ist:

$$h = \sqrt{1 - r^2} \text{ und nach (1): } h = \sqrt{1 - y^2/4\pi^2} \quad . \quad . \quad (3)$$

weiter dann nach (2) und (3):

$$V = \frac{y^2}{12\pi}\sqrt{1 - \frac{y^2}{4\pi^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Unsere Aufgabe ist nun, den Wert von y zu suchen, für den V ein Maximum wird.

Wir lassen in (4) die Konstante $1/12\pi$ beiseite, differenzieren und setzen den erhaltenen Ausdruck gleich null: [1])

$$\frac{dV'}{dy} = 2y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4\pi^2}} - \frac{y^3}{4\pi^2\sqrt{1 - y^2/4\pi^2}}$$

Beim Ausmultiplizieren mit: $\sqrt{1 - y^2/4\pi^2}$ ergibt sich:

$$2y\ (1 - y^2/4\pi^2) - y^3/4\pi^2 = 0$$

und weiter, wenn man durch y dividiert:

$$2 - 3y^2/4\pi^2 = 0, \quad \text{oder:} \quad y = 2\pi\sqrt{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun ist aber:

Umfang eines Sektors ACB : gesamten Kreisumfang
$= \sphericalangle x^0 : 360^0$

somit, da die Metallscheibe den Radius 1 hat:

$$y : 2\pi = \sphericalangle x^0 : 360^0$$

setzen wir den hier sich ergebenden Wert von y in (5) ein, so finden wir schließlich:

$$x^0 = 360^0\sqrt{\frac{2}{3}} = appr \cdot 294^0$$

Der Winkel des wegzunehmenden Sektors beträgt also beiläufig 66^0.

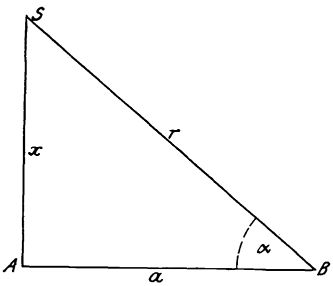

Fig. 54.

5. Es sei S (Fig. 54) eine Lichtquelle, deren Höhe x über einem feststehenden Tisch veränderlich und so zu bestimmen ist, daß die Stelle B der Tischfläche die größtmögliche Beleuchtung empfängt. Wir setzen $AB = a$ und nennen α den Winkel, den das auf B fallende Strahlenbündel $SB = r$ mit der Tischfläche in B bildet.

---

[1]) Wir differenzieren V' statt V; $V' = 12\pi \cdot V$

Die Intensität der Beleuchtung von B ändert sich im umgekehrten Verhältnis mit dem Quadrat der Entfernung zwischen der Lichtquelle S und der beleuchteten Stelle und im gleichen Verhältnis mit dem Sinus des Einfallswinkels α.

Da nun:

$$r^2 = a^2 + x^2, \quad \text{und:} \quad \sin\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ist also, damit die Stärke der Beleuchtung in B am größten wird, der Wert von x so zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$y = \frac{1}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ein Maximum wird.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{x\,(a^2 + x^2)} = 0, \quad \text{daraus:} \quad x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$$

6. Das Snellsche Gesetz der Lichtbrechung; Brechungsindex. Es sei S (Fig. 55) ein leuchtender Punkt in einem farblosen Medium M, in dem sich das von S ausgesendete Licht mit der Geschwindigkeit v fortpflanzt. R sei ein Punkt in einem zweiten farblosen Medium M', in dem sich das Licht mit einer geringeren Geschwindigkeit v' ausbreitet.

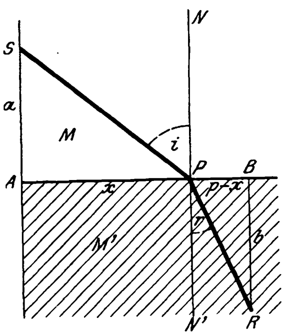

Fig. 55.

Um in der kürzesten Zeit von der Lichtquelle S nach R zu gelangen, schlägt nun das Licht den Weg SPR ein, das heißt, es durchsetzt im Punkt P die ebene Trennungsfläche der beiden Medien M und M'; welcher Bedingung entspricht die Lage von P?

SP heißt der einfallende, PR der gebrochene Strahl und die Normale NP das Einfallslot. $SPN = i$ nennen wir den Einfallswinkel und $N'PR = r$ den Brechungswinkel. Wir ziehen nun die Normalen $SA = a$ und $RB = b$ von den Punkten S und R auf die Trennungsfläche der beiden Medien und setzen:

$$AB = p$$
$$AP = x \qquad BP = p - x$$

Um nun von S nach P zu kommen, braucht das Licht SP/v, um weiter von P nach R zu gelangen, PR/v' Sekunden; die ganze Zeit, nötig für den Übergang von S nach R, beträgt somit:

$$t = \frac{SP}{v} + \frac{PR}{v'}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + (p - x)^2}}{v'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

da:

$$SP = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{und:} \quad PR = \sqrt{b^2 + (p - x)^2}$$

und wir haben nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen der Ausdruck (7) für t ein Minimum ist; wir differenzieren ihn:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{p - x}{v'\sqrt{b^2 + (p - x)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und bemerken, daß (8) null wird, wenn:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} : \frac{p - x}{\sqrt{b^2 + (p - x)^2}} = v : v'$$

oder wenn:

$$\sin i : \sin r = v : v' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

da ja:

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad \sin r = \frac{p - x}{\sqrt{b^2 + (p - x)^2}}$$

Der Punkt P liegt also so, daß sich der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels verhält, wie die Lichtgeschwindigkeit v im ersten Medium M zu der Lichtgeschwindigkeit v' im zweiten Medium M'. Den konstanten Quotienten des Verhältnisses $\sin i / \sin r$ nennen wir den Brechungsindex des von S ausgehenden Lichtes für den Übergang vom Medium M ins Medium M'.

7. Die Bewegungsgeschwindigkeit v einer Welle in tiefem Wasser ist gegeben durch die Formel:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}}$$

in der λ die Länge der Welle bezeichnet und a eine Konstante ist.

Zu berechnen ist die Wellenlänge, bei der die Geschwindigkeit ein Maximum wird.

Offenbar ist dies der Fall, wenn:

$$\lambda = a$$

8. Wenn v_0 das Volumen einer Wassermenge bei 0^0 bedeutet v das Volumen bei t^0C, so ist nach Hällströms Formel für Temperaturen zwischen 0^0 und 30^0 C

$$v = v_0\,(1 - 0{\cdot}000057{,}577\,t + 0{\cdot}000007{,}5601\,t^2 - 0{\cdot}000000{,}03509\,t^3).$$

Man zeige, daß nach diesem Ansatz das Volumen am kleinsten, die Dichte am größten wäre bei $t = 3{\cdot}92^0$ C, und daß nach Kopps Formel:

$$v = v_0\,(1 - 0{\cdot}000061045\,t + 0{\cdot}0000077183\,t^2 - 0{\cdot}000000{,}03734\,t^3)$$

die für Temperaturen zwischen 0^0 und 25^0 C gilt, die Temperatur der maximalen Dichte $4{\cdot}08^0$ C wäre.

IV. Abschnitt.

Integralrechnung.

§ 48. Begriff des Integrals.

Sind für irgend einen Vorgang die Beziehungen zwischen den ihn bestimmenden Größen — etwa als Ergebnisse von Beobachtungen — bekannt und in der Ausdrucksweise der Mathematik als Gleichung gefaßt, dann befähigen uns die Methoden der Differentialrechnung, mathematische Relationen für gewisse charakteristische Eigenschaften der Erscheinung, wie zum Beispiel für die momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Bewegung festzustellen.

Fast noch häufiger tritt jedoch eine andere Aufgabe an den Forscher heran: — er kennt z. B. die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit eines Vorganges und soll nun das Gesetz ermitteln, welches den gesamten Gang der Erscheinung in seiner Abhängigkeit von der Zeit beherrscht.

Wir wollen unsere Ideen gleich an einem bestimmten Beispiel entwickeln.

Der Zerfall des Rohrzuckers in Traubenzucker und Fruchtzucker bei Gegenwart verdünnter Säuren findet statt nach der chemischen Umsetzungsgleichung:

$$\underbrace{C_{12}H_{22}O_{11}}_{\text{1 Mol. Rohrzucker}} + H_2O = \underbrace{2\,C_6H_{12}O_6}_{\substack{\text{1 Mol. Traubenzucker} \\ \text{1 „ Fruchtzucker.}}}$$

Bezeichnet x die Menge des in der Zeit t gespaltenen Rohrzuckers, so ist der in der Lösung noch unzersetzt verbliebene Anteil: $A - x$, wenn ursprünglich A Gewichtsteile Disaccharid vorhanden waren.

Die Geschwindigkeit der Reaktion in irgend einem Augenblick ist:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

resp.:

$$dx = v\,dt$$

Nach Wilhelmys Gesetz ist sie proportional der jeweils unzersetzt vorhandenen Rohrzuckermenge:

$$\frac{dx}{dt} = k(A - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

k ist eine Konstante, der Koeffizient der Reaktionsgeschwindigkeit.[1])

Die Wilhelmysche Differentialgleichung nun ist der Ausdruck dessen, was wir über die Geschwindigkeit der Zuckerinversion durch verdünnte Säuren wissen, oder zunächst als Hypothese aufstellen; die Aufgabe ist, aus diesem Ansatz x, die umgesetzte Rohrzuckermenge als Funktion der Zeit darzustellen, und so die Prüfung der hypothetischen Annahme über die Reaktionsgeschwindigkeit durch Messung der nach bestimmten endlichen Zeiten umgesetzten Zuckermengen zu ermöglichen.

Wäre uns die Form von:

$$x = f(t)$$

bekannt, dann wären wir, ausgerüstet mit unseren Kenntnissen der Differentialrechnung, in der Lage:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

die Geschwindigkeit des betrachteten Vorganges in irgend einem Augenblick zu ermitteln. Aus dem gegebenen oder angenommenen Ausdruck für $f'(t)$ hingegen die Form von $x = f(t)$ zu bestimmen, ist Aufgabe der Integralrechnung.

Differentiation und Integration sind also reziproke Operationen in demselben Sinne wie Multiplikation und Division, Addition und Subtraktion:

$$\frac{a \times b}{b} = a \qquad a + b - b = a$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \qquad \int f'(x)\,dx = f(x)$$

resp.:

$$df(x) = f'(x)\,dx \qquad d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx$$

„$\int$" ist das Zeichen für eine auszuführende Integration.

[1]) Die Bedeutung dieser Konstante wird sofort klar, wenn man x gleich null und A gleich der Mengeneinheit setzt, dann ist:

$$k = \frac{dx}{dt}$$

die Umsetzungsgeschwindigkeit, wenn die Mengeneinheit Rohrzucker vorhanden ist.

Nach dem eben Gesagten müssen gewisse grundlegende Relationen, die wir bei unseren Betrachtungen über das Differenzieren gewonnen haben, auch für die Integralrechnung von Bedeutung sein. So ergibt sich unmittelbar:

I. Zu dem Resultat einer Integration ist stets eine Konstante zu addieren.

Wir haben bemerkt, daß ein additives konstantes Glied in einem Ausdruck bei der Differentiation verschwindet:

$$d\left[f(x)+C\right]=f'(x)\,dx$$

das heißt, es gibt eine unendliche Anzahl von Ausdrücken, welche sich bloß durch den Wert des konstanten Gliedes unterscheiden und beim Differenzieren alle dasselbe Ergebnis liefern.

Wenn wir daher das Resultat einer Integration angeben, müssen wir die Möglichkeit eines solchen Gliedes berücksichtigen, indem wir eine Konstante, deren Wert dahingestellt bleibt — die sogenannte Integrationskonstante, man bezeichnet sie gewöhnlich mit C — zum Resultat addieren.

$$\int f'(x)\,dx=f(x)+C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

II. Es wurde gezeigt, daß die Differenzierung des Produktes aus einer Konstanten und einer Variablen die Konstante multipliziert mit dem Differential der Variablen liefert:

$$d\left\{af(x)\right\}=af'(x)\,dx$$

ohne weiteres folgt dann:

$$\int af'(x)\,dx=a\int f'(x)\,dx=af(x)+C \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Der Leser drücke die Regel in Worten aus!

III. Integration von Summe oder Differenz mehrerer Variabler.

Da:

$$d(x+y+z+\ldots)=dx+dy+dz+\ldots.$$

ist, folgt:

$$\int d(x+yzt+\ldots.)=\int dx+\int dy+\int dz+\ldots.$$

$$=x+y+z+\ldots. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mehr der Integrationskonstanten. Man schreibt dieselbe gewöhnlich erst beim Schlußresultat und nicht in den Zwischenstufen der Rechnung.

Ebenso ist:

$$\int(dx-dy-dz)=\int dx-\int dy-\int dz-$$

$$=x-y-z\ldots.+C \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Beispiele:

1. $\int l\{(a+bx)(1+2x)\}\,dx = \int l(a+bx)\,dx + \int l(1+2x)\,dx$

2. $\int l\frac{a+bx}{1+2x}\,dx = \int l(a+bx)\,dx - \int l(1+2x)\,dx$

IV. Jede Differentiation korrespondiert mit einer Integration als inverser Operation. Ist die Funktion bekannt, von welcher der zu integrierende Ausdruck als Differential abstammt, so kann sie natürlich, vermehrt um die Integrationskonstante, ohne weiteres als das gesuchte Integral hingeschrieben werden.

Tabellen der in diesem Sinn zusammenhängenden Funktion heißen Integraltafeln.

Die folgenden Beziehungen sind die grundlegenden; es ist angezeigt, sie dem Gedächtnis einzuprägen.

Funktion	Differentialquotient	Integral
$u = x^n$	$\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$u = e^x$	$\frac{du}{dx} = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$u = a^x$	$\frac{du}{dx} = a^x\,la$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C$
$u = lx$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = lx + C$
$u = \sin x$	$\frac{du}{dx} = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$u = \cos x$	$\frac{du}{dx} = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$u = \tan x$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$u = \cot x$	$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$u = \arcsin x$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$u = \arccos x$	$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$= -\arccos x + C'$

Funktion	Differentialquotient	Integral
$u = \operatorname{arctan} x$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan} x + C$
$u = \operatorname{arcot} x$	$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcot} x + C'$

Betrachten wir z. B. die Integration von $ax^n\,dx$; n bedeutet eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl mit Ausnahme von -1. Wir haben:

$$d(ax^{n+1}) = a(n+1)\,x^n dx$$

somit:

$$ax^n dx = d(ax^{n+1})/n+1$$

$$a\int x^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Um also einen Ausdruck von der Form $ax^n dx$ zu integrieren, vermehrt man den Exponenten der Variablen um die Einheit, dividiert das Resultat durch den so erhaltenen neuen Exponenten und multipliziert mit dem etwa vorhandenen konstanten Faktor.

Einer Ausnahme begegnen wir, wenn:

$$n = -1$$

Nach vorstehender Regel ergäbe sich:

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Wir haben aber seinerzeit gesehen, daß:

$$d(lx) = \frac{dx}{x} = x^{-1} dx$$

somit:

$$\int x^{-1} dx = \int d(lx) = lx + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ist der Zähler eines Bruches das Differential des Nenners, so ist das Integral des Bruches der natürliche Logarithmus des Nenners.

Wir wollen hier auch gleich bemerken, daß wir statt:

$$lx + C \quad \text{auch:} \quad lx + lc = l(xc)$$

schreiben können, da uns ja lc genau so gut eine allgemeine Konstante darstellt, wie C.

Der Leser prüfe auf dem angedeuteten Weg noch andere Beziehungen der Tabelle, etwa daß:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a} + C;\ \int e^x\,dx = e^x + C;\ \int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\,e^{-ax} + C.$$

Beispiele:

1. $\int a x^3 dx = \frac{1}{4}\,a x^4 + C$

2. $\int 4\,a x^{-\frac{1}{5}}\,dx = 5\,a x^{\frac{4}{5}} + C$

3. $\int (1 + x)^2\,x^3\,dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\,x + \frac{1}{6}\,x^2\right) x^4 + C$

Man führt die Potenzierung des Klammerausdruckes unter dem Integralzeichen aus und integriert dann gliedweise, ebenso in:

4. $\int \left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(\frac{2}{3}\,a^2 + a\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\,x\right) x^{\frac{3}{2}} + C$

5. $\int a\,\frac{dx}{b\,x} = \frac{a}{b}\int \frac{dx}{x} = \frac{a}{b}\,l\,x + C$

6. $\frac{dx}{dt} = k\,(A - x)$

ordnen wir, so ergibt sich leicht:

$$\text{da:}\quad \int \frac{dx}{A - x} = -\int \frac{d(A - x)}{A - x} = k\,t$$

$$-\,l\,(A - x) + C = k\,t \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

oder:

$$-\,l\,(A - x) + l\,c = l\,\frac{c}{A - x} = k\,t \quad \ldots \quad (9\,\mathrm{a})$$

Bevor wir nun zur Besprechung der Methoden übergehen, nach welchen die Integration komplizierterer Ausdrücke durchzuführen ist, wollen wir uns noch einmal zur Betrachtung der Integrationskonstante wenden.

§ 49. Geometrische und physikalische Bedeutung der Integrationskonstante; ihre Bestimmung in speziellen Fällen.

Wir wissen, daß ein Ausdruck:

$$y = f(x)$$

als Gleichung einer Kurve aufgefaßt werden kann; zu einem Wert von x gehören ein oder mehrere, durch die gegebene Gleichung bestimmte Werte von y als Ordinaten. Den Neigungswinkel zwischen der Tangente in irgend einem Punkt der Kurve $f(x)$ und der X-Achse können wir ermitteln, indem wir:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

bilden und dann im Ausdruck für $f'(x)$ die Abszisse des betreffenden Punktes für x substituieren.

Er sei I in Fig. 56 der durch $y = f(x)$ definierte Kurvenzug; die zu demselben Abszissenwert gehörenden Ordinaten von II, III, IV und allen weiteren zu I parallelen Kurven unterscheiden sich von der entsprechenden Ordinate der Kurve $f(x)$ dann offenbar nur durch ein additives konstantes Glied; wir haben:

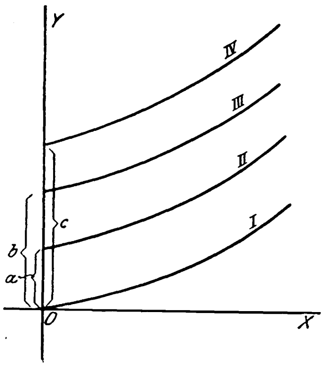

Fig. 56.

für II: $y = f(x) + a$
„ III: $y = f(x) + b$
„ III: $y = f(x) + c$
usw.

Die Differentiation aller dieser Ausdrücke nach x liefert als Resultat $f'(x)$, das heißt: im Punkt mit der gleichen Abszisse ist bei allen, unendlich vielen Kurven:

$$f(x) + C$$

(C ist ein beliebiger konstanter Wert) — der Neigungswinkel zwischen der X-Achse und der Tangente der gleiche.

Die Integralrechnung hat nun, wie wir wissen, die Aufgabe, aus dem gegebenen Ausdruck für $f'(x)$ die Form von $f(x)$ zu ermitteln, und wir sehen jetzt schon ein, welche geometrische Bedeutung es hat, daß wir zum Ergebnis dieser Operation eine allgemeine Konstante hinzufügen:

Das uns durch $f'(x)$ gegebene Gesetz der Tangente bestimmt nicht eine einzige, sondern gilt für eine unendliche Anzahl von Kurven, die auseinander durch parallele Verschiebung hervorgehen, — diese unendliche Anzahl von Kurven repräsentiert:

$$f(x) + C$$

wenn C eine unbestimmte Konstante bedeutet; — nur diese allgemeine Relation kann das Resultat der Integration sein.

Die — natürlich von Fall zu Fall verschiedene — physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten wollen wir in zwei Beispielen betrachten.

g, die Beschleunigung beim freien Fall im luftleeren Raum, die gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit um beiläufig 9·8 m in der Sekunde, ist der Wert des ersten. Differentialquotienten der Fallgeschwindigkeit nach der Zeit:

$$\frac{dv}{dt} = g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

beziehungsweise:

$$dv = g\,dt$$

Wir integrieren die vorstehende Differentialgleichung:

$$\int dv = g \int dt$$

$$v = gt + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und fragen nun: welche physikalische Bedeutung hat die unbestimmte Konstante C im vorliegenden Fall, im allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit des freien Falles in irgend einem Augenblick?

Offenbar kann der Körper in dem Moment, von dem ab wir t rechnen, sich in der Richtung oder gegen die Richtung des freien Falles bewegt haben, oder er kann auch in Ruhe gewesen sein, — das heißt er hatte im Augenblick, von dem ab wir t rechnen, im Sinne der Fallrichtung eine positive, eine negative oder gar keine Anfangsgeschwindigkeit. Bezeichnen wir diese Anfangsgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit wenn t null ist, mit v_0 und setzen in (2):

$$v = v_0 \qquad t = 0$$

so ergibt sich:

$$v_0 = g \times 0 + C$$

$$v_0 = C$$

C bedeutet also hier nichts anderes, als die Anfangsgeschwindigkeit, die Geschwindigkeit, die der Körper in dem Moment, von dem ab wir t rechnen, schon hatte, und wir können (2) schreiben:

$$v = gt + v_0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wie haben wir nun in einem speziellen Fall die Größe von v_0 zu bestimmen? Wir müssen beobachten, welche Geschwindigkeit v_1 der Körper etwa im Moment t_1 hat; setzen wir nun die beobachteten Werte v_1 und t_1 in (3) ein, so ergibt sich:

$$v_1 = g t_1 + v_0$$

und daraus:

$$v_0 = v_1 - g t_1$$

Eine Bestimmung der Integrationskonstanten in einer Gleichung, die irgend einen Vorgang darstellt, ist also möglich, wenn die Natur des Problemes gestattet, den Wert der Funktion (hier der Geschwindigkeit v) für irgend einen speziellen Wert (hier t_1) der unabhängigen Variablen (hier der Zeit t) zu bestimmen.

Ein Beispiel:

Den Wert von c in der Reaktionsgleichung:

$$t = \frac{1}{k} l \frac{c}{A - x} \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zu bestimmen. t bedeutet die Zeit, in welcher der Anteil x der zu Beginn der Beobachtung vorhandenen Substanzmenge A umgesetzt wurde; wenn:

$$t = 0, \quad \text{ist offenbar auch:} \quad x = 0$$

und wenn wir diese zusammengehörigen Werte von x und t in (4) substituieren, ergibt sich:

$$\frac{1}{k} l \frac{c}{A} = 0 \qquad lc - lA = 0$$

$$c = A$$

somit ist:

$$t = \frac{1}{k} l \frac{A}{A - x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

---

§ 50. Integration durch Substitution.

Wir wollen jetzt einige Methoden kennen lernen, die bei der Integration komplizierterer Funktionen einer einzigen Variablen oft von großem Nutzen sind; sie zielen dahin, derartige Ausdrücke durch geschickte — eventuell schrittweise — Behandlung schließlich in solche Formen überzuführen oder aufzulösen, die eine unmittelbare Integration gestatten.

Oft erreichen wir dies schon durch zweckmäßige Substitution einer neuen Variablen.

Am besten wird die Methode beim Durchrechnen von Beispielen erfaßt werden; dieselben sind nach typischen Fällen geordnet.

I. Ausdrücke von der Form $\int (a + bx)^n \, dx$

---

[1]) vid. § 48, 9a.

n kann eine beliebige positive, negative, ganze oder gebrochene Zahl sein.

Wir setzen zur Vereinfachung des gegebenen Ausdruckes:

$a + bx = y$; für dx ist folglich $\frac{1}{b}dy$ zu setzen, und es ergibt sich:

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b}\int y^n dy$$

Hier ist unmittelbare Integration möglich:

$$\frac{1}{b}\int y^n dy = \frac{1}{(n+1)\,b} y^{n+1} + C$$

respektive, wenn wir jetzt für y wieder $a + bx$ einführen:

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{1}{(n+1)\,b}(a+bx)^{n+1} + C \quad . \quad . \quad (1)$$

Spezielle Fälle:

1. $$\int (a-bx)^3 dx = -\frac{1}{b}\int y^3 dy = -\frac{1}{4b} y^4$$
$$= -\frac{1}{4b}(a-bx)^4 + C$$

2. $$\int (a+x)^{-4} dx = -\frac{1}{3}(a+x)^{-3} + C$$

3. $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{b}\,ly = \frac{1}{b}\,l(a+bx) + C$$

II. Ausdrücke von der Form $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^m}$.

Wir setzen: $a + bx = y$, somit ist: $x = \frac{y-a}{b}$, $dx = \frac{dy}{b}$.

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^2}\int \frac{(y-a)\,dy}{y^m} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dy}{y^{m-1}} - \frac{a}{b^2}\int \frac{dy}{y^m} \text{ usf.} \quad . \quad (2)$$

Spezielle Fälle:

1. $$\int \frac{x\,dx}{1+2x} = \frac{1}{4}\int dy - \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y}$$
$$= \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\,\mathrm{l}y = \frac{1+2x}{4} - \frac{1}{4}\,l(1+2x) + C$$

2. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{4}\int y^{\frac{1}{2}} dy - \frac{1}{4}\int y^{-\frac{1}{2}} dy$$
$$= \frac{1}{6} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{(1-2x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2x} + C$$

III. Ausdrücke von der Form $\int (a + bx^2)^m x\,dx$.

m kann eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeuten.

Wir nennen wieder:

$$a + bx^2 = y, \quad \text{somit:} \quad x\,dx = \frac{dy}{2b},$$

$$\int (a + bx^2)^m x\,dx = \frac{1}{2b}\int y^m dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Spezielle Fälle:

1. $\int (a - x^2)^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\int y^3 dy = -\frac{1}{8}y^4 = -\frac{(a-x^2)^4}{8} + C$

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C$

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C$

4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

5. $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\int y^{-1} dy = \frac{1}{2b} ly = \frac{1}{2b} l(a + bx^2) + C$

IV. Wichtig sind ferner folgende Integrale:

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$; wir setzen:

$$\frac{x}{a} = y, \quad \text{somit ist:} \quad dx = a\,dy, \quad \text{und:}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\arctan y = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (4)$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; dieselbe Substitution gibt:

$$= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad . \quad . \quad (5)$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; wir setzen:

$$y = x + \sqrt{a^2+x^2}, \quad dy = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) dx = \frac{y\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

also: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, resp.:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{dy}{y} = l y = l(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C \qquad (6)$$

3a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; Vertauschung von $+a^2$ gegen $-a^2$ in

3. gibt: $= l(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$ . . . . . (7)

V. Manche aus trigonometrischen Funktionen gebildete Ausdrücke sind bequem nach dieser Methode zu behandeln, so zum Beispiel:

1. $\int \sin\,(a + b\,x)\; dx$

$$a + b\,x = u \qquad dx = \frac{1}{b}\,du$$

$$\int \sin(a + b\,x)\,dx = \frac{1}{b}\int \sin u\,du = -\frac{1}{b}\cos u = -\frac{1}{b}\cos(a + b\,x) + C$$

2. $\int \cos n\,x\,dx = \frac{1}{n}\sin n\,x + C$

$$u = n\,x \qquad dx = \frac{1}{n}\,du$$

3. $\int \sin x \cos x\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}\,u^2 = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

wenn wir setzen:

$$\sin x = u \qquad d\,(\sin x) = \cos x\,dx = du$$

4. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\,l(\cos x) + C$

$\cos x = u$ gesetzt!

5. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin x} + C$

Vorstehende Beispiele sind Spezialfälle der allgemeinen Formen:

a) $$\int \sin^m x \cos x\,dx = \int \sin^m x\,d(\sin x)$$
$$= \int u^m\,du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8)$$

b) $$\int \cos^m x \sin x\,dx = -\int \cos^m x\,d(\cos x)$$
$$= -\int u^m\,du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

Zwei weitere wichtige Formen sind:

$$\text{c)}\quad \int \cos^{2n+1} x\, dx = \int \cos^{2n} x \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - u^2)^n\, du \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{d)}\quad \int \sin^{2m+1} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^m \sin x\, dx$$

$$= -\int (1 - u^2)^m\, du \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

z. B.:

$$6.\quad \int \cos^3 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x \cos x\, dx$$

und schließlich beachte man, daß:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \quad .\ .\ (12)$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\text{e)}\quad \int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{1}{\cos^{2m-2} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)^{m-1}\, d(\tan x)$$

$$= \int (1 + u^2)^{m-1}\, du \quad .\ .\ (13)$$

usw., und

$$\text{f)}\int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = \int \frac{1}{\sin^{2m-2} x} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + \cot^2 x)^{m-1}\, d(\cot x) \quad (14)$$

usw.

Spezielle Beispiele:

$$7.\quad \int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\cot x - \frac{2 \cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + C$$

$$8.\quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

Manche Ausdrücke erfordern einige Findigkeit und Geschicklichkeit in der Substitution, welche nur durch Übung zu erlangen ist; wir wissen z. B., daß:

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$$

Wir wollen nun ausführen:

9. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}$$

jetzt dividieren wir Zähler und Nenner durch $\cos^2 \frac{1}{2} x$ und erhalten:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx / \cos^2 \frac{1}{2} x}{2 \tan \frac{1}{2} x} = \int \frac{d\left(\tan \frac{1}{2} x\right)}{\tan \frac{1}{2} x} = l\left(\tan \frac{1}{2} x\right) + C \quad (15)$$

Ein anderer Kunstgriff wird im folgenden Beispiel angewendet:

10. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx\,(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin x \cos x}$$

$$= \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = l\,(\tan x) + C \quad . \; . \; . \quad (16)$$

N.B. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

§ 51. Partielle Integration.

Es sei:

$$\int u\, dv$$

zu lösen, wo:

$$u = \varphi(x) \qquad v = \varphi(x)$$

bedeutet. Auf Seite 10 wurde gezeigt, daß:

$$d(uv) = v\, du + u\, dv$$

Man integriere nun beide Seiten:

$$uv = \int v\, du + \int u\, dv$$

daher:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

d. h., die aufgegebene Integration, von der wir annehmen, daß sie uns auf anderem Wege nicht gelungen ist, kann durchgeführt werden, wenn:

$$\int v\, du$$

lösbar ist.

Beispiele.

Man behandle folgende Ausdrücke:

1. $\int lx\,dx$

$$u = lx \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$$

$$\int lx\,dx = x\,lx - \int dx = x\,(lx - 1) + C$$

2. $\int x^m\,lx\,dx$

$$u = lx \qquad dv = x^m dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\int x^m\,lx\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,lx - \frac{1}{m+1}\int x^m\,dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(lx - \frac{1}{m+1}\right) + C$$

1. ist der Spezialfall von 2. für $m = 0$.

3. $\int x^m\,e^x\,dx$

$$u = x^m \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = m x^{m-1} \qquad v = e^x$$

$$\int x^m\,e^x\,dx = x^m\,e^x - m\int x^{m-1}\,e^x\,dx$$

Das zu berechnende Integral ist auf das einfachere: $\int x^{m-1}\,e^x\,dx$ reduziert. Offenbar muß man, — m bedeutet eine positive ganze Zahl, — schließlich bei fortgesetzter Anwendung des Verfahrens auf $\int e^x\,dx$ kommen; es sei z. B. $m = 3$:

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\,x^2 e^x + 6\,x e^x - 6\,e^x + C$$

4. Eine wiederholte Anwendung des Verfahrens ist auch bei $\int (lx)^m dx$ nötig; m bedeutet eine positive ganze Zahl. Wir setzen:

$$u = (lx)^m \qquad dv = dx$$

$$du = m\,(lx)^{m-1}\frac{dx}{x} \qquad v = x$$

$$\int (lx)^m\,dx = x\,(lx)^m - m\int (lx)^{m-1}\,dx$$

usf.,

schließlich kommen wir zu $\int lx\,dx$, dem Fall des Beispieles 1.

5. $\int x \sin x\,dx$

$$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x \qquad (1)$$

6. $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x$ . . . . (2)

Auf diese Integrale kommen wir schließlich bei der fortgesetzten Behandlung von $\int x^m \sin x\,dx$ und $\int x^m \cos x\,dx$; man setze: $u = x^m$, $dv = \sin x\,dx$, resp.: $= \cos x\,dx$, usw.

§ 52. Weitere Beispiele.

1. $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$u = x^{m-1} \qquad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$du = (m-1)\,x^{m-2} \qquad v = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

nun beachte man, daß:

$$x^{m-2}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,x^{m-2} = \frac{a^2 x^{m-2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x^m}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (m-1)\,a^2\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$- (m-1)\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\text{,,} \quad = -\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2 - x^2}}{m} + \frac{(m-1)\,a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (1)$$

Wir haben also das ursprüngliche Integral schon auf $\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ reduziert. Bei fortgesetzter Anwendung der beschriebenen Methode $\left(\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right.$ wird reduziert auf $\int \frac{x^{m-4}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ usf.$\left.\right)$ kommen wir, wenn:

m eine gerade Zahl, zu $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ . . § 50, (5)

m eine ungerade Zahl, zu $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$ . . § 50, III.

Für ungerades n verwendet man übrigens besser von vornherein die Substitution: $\sqrt{a^2-x^2} = y$; daraus:

$$a^2 - x^2 = y^2 \qquad x^2 = a^2 - y^2$$

$$x\,dx = -y\,dy$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x^{2n}\,x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{(a^2-y^2)^n y\,dy}{y} = -\int (a^2-y^2)^n\,dy \quad (1\text{a})$$

2. $\int x^m \sqrt{a^2-x^2}\,dx; \quad = \int \frac{x^m(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

$$= a^2 \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^{m+2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,. \quad (2)$$

Der weitere Vorgang ergibt sich aus Beispiel (7). Auch hier verwende man, wenn m ungerade ist, gleich wieder die Substitution: $\sqrt{a^2-x^2} = y$.

3. $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2-x^2}}$; m ist eine beliebige ganze Zahl.

Wir wollen zunächst aus:

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$u = x^{-(m-1)} \qquad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$du = -(m-1)\,x^{-m} \qquad v = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^{m-1}} - (m-1)\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^m}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^m} = \int \frac{(a^2-x^2)\,dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

somit:

$$\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^{m-1}}-a^2(m-1)\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}}+(m-1)\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$-(m-2)\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^{m-1}}-a^2(m-1)\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}}$$

und

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2(m-1)x^{m-1}}+\frac{m-2}{a^2(m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (3)$$

Es ist z. B. für $m=2$:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$$

auf dieses Integral kommt man immer, wenn m gerade ist; ist m ungerade, so bleibt schließlich rechts $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ aufzulösen.

Wir substituieren:

$$x=\frac{a}{y} \qquad dx=-\frac{a\,dy}{y^2}$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{y}\sqrt{y^2-1} \qquad y=\frac{a}{x}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=-\frac{1}{a}\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

[vide § 50, (7)].

4. $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$; m eine positive ganze Zahl.

$$u=x^{m-1} \qquad dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$du=(m-1)x^{m-2} \qquad v=\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x^{m-1}\sqrt{a^2+x^2}-(m-1)\int x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

Der Leser bedenke, daß:

$$\int x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x^{m-2}(a^2+x^2)\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

und führe selbst durch, daß endlich:

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2(m-1)}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad (4)$$

Man kommt, wenn m eine gerade Zahl, auf:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = l(x+\sqrt{a^2+x^2}) \quad \text{§ 50, (7)}$$

wenn ungerade, auf:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} \quad \text{§ 50, III.}$$

In letzterem Fall wendet man übrigens zweckmäßiger von vornherein die Substitution an:

$$\sqrt{a^2+x^2} = y, \quad \text{usw. usw.}$$

5. Aus vorstehendem Beispiel ergibt sich auch die Behandlung von $\int x^m \sqrt{a^2+x^2}\,dx$; sie bleibe dem Leser überlassen.

6. $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2+x^2}}$; wir behandeln zuerst:

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{x\,dx}{x^{m-1}\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$u = \frac{1}{x^{m-1}} \qquad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$du = -(m-1)\frac{1}{x^m} \qquad v = \sqrt{a^2+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^{m-1}} + (m-1)\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^m}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^m}\,dx = a^2\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(m-1)a^2x^{m-1}} - \frac{m-2}{(m-1)a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{usw.} \quad (5)$$

Ist m gerade, so ist schließlich das Integral $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$ nach vorstehender Formel zu behandeln; es ergibt sich:

$$= -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} \quad \ldots \ldots \quad (5\text{a})$$

Ist m ungerade, so bleibt $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ zu lösen; wir substituieren:

$$x = \frac{a}{y} \qquad dx = -\frac{a\,dy}{y^2}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{y}\sqrt{1 + y^2} \qquad y = \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{1}{a}\, l\,(y + \sqrt{1+y^2})$$

$$= -\frac{1}{a}\, l\left(\frac{a + \sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) \qquad (5\text{b})$$

Bemerkung:

Nach den gegebenen Reduktionsformeln sind auch die Integrale:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \qquad \int x^m \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{x^m\sqrt{x^2 - a^2}}$$

zu behandeln; ist im letzten Fall m eine ungerade Zahl, so kommt man bei der Reduktion schließlich auf:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}; \text{ wir substituieren:}$$

$$x = \frac{a}{y} \qquad dx = -a\frac{dy}{y^2} \qquad y = \frac{a}{x}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - a^2} = \frac{a}{y}\sqrt{1 - y^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin y = -\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right) \quad (6)$$

Häufig kommt es übrigens vor, daß ein derartiger Ausdruck, welcher die Quadratwurzel eines quadratischen Binoms enthält, durch glückliche Substitution einer goniometrischen Funktion gelöst werden kann. Die Form der Differentiale der zyklometrischen Funktion wird uns oft zur richtigen Wahl leiten. Hat der Wurzelausdruck die Form:

$\sqrt{1 - x^2}$ oder: $\sqrt{a^2 - x^2}$, so versuche man: $x = \sin\varphi$, $x = \cos\varphi$,
beziehungsweise: $x = a\sin\varphi$, $x = a\cos\varphi$;

bei: $\sqrt{x^2 - 1}$ oder: $\sqrt{x^2 - a^2}$ versuche man: $x = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, $x = \dfrac{1}{\sin\varphi}$,
beziehungsweise: $x = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, $x = \dfrac{a}{\sin\varphi}$;

bei: $\sqrt{x^2 + 1}$ oder: $\sqrt{x^2 + a^2}$ versuche man: $x = \tan\varphi$, $x = \cot\varphi$,
beziehungsweise: $x = a\tan\varphi$, $x = a\cot\varphi$.

7. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; wir setzen:

$$x=a\sin\varphi \qquad dx=a\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$$

da:
$$2\cos^2\varphi=1+\cos 2\varphi$$

Nun war:

$$x=a\sin\varphi \qquad \varphi=\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\sin\varphi\cos\varphi=\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

8. $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sin\varphi}=\frac{1}{a^4}\int\cos^3\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{a^4}\int(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=\frac{1}{a^4}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{3a^4}\left(\frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x^3}\right)+C$$

Es wurde: $x=\dfrac{a}{\cos\varphi}$ gesetzt.

9. $\int\dfrac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; wir setzen:

$$x=a\tan\varphi \qquad dx=\frac{a\,d\varphi}{\cos^2\varphi} \qquad \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos\varphi}$$

somit:

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=a^3\int\frac{\tan^3\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi}=a^3\int\frac{\sin^3\varphi\,d\varphi}{\cos^4\varphi}$$

$$=-a^3\int\frac{1-u^2}{u^4}\,du$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{u^3}-\frac{3}{u}\right)$$

$\cos\varphi=u$ gesetzt.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{\cos^3\varphi} - \frac{3}{\cos\varphi}\right) = \frac{a^3}{3}\left\{\frac{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}{a^3} - \frac{3\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{a^2+x^2}\,(x^2-2a^2)+C,$$

$$\text{da: } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

10. Im Abschnitt über die Integration durch Substitution haben wir schon das Integral von $\sin^m x dx$ und $\cos^m x dx$ für den Fall, daß m eine ungerade Zahl ist, gelöst; bedeutet m eine gerade Zahl, so wenden wir die Methode der partiellen Integration an.

$$u = \sin^{m-1} x \qquad dv = \sin x\, dx$$
$$du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x\, dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int \sin^m x\, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x\,(1-\sin^2 x)\, dx$$

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Man sieht, daß schließlich als vorletztes Integral:

$$\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx \quad . \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{a})$$

sich ergeben muß.

Die Anwendung des vorstehenden Schemas auf $\int \cos^m x\, dx$ für m gleich einer geraden Zahl bleibe dem Leser überlassen.

11. $\int \frac{dx}{\cos^n x}$. Wir behandeln zunächst $\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^{n-1} x}$

$$u = \cos^{-(n-1)} x \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = (n-1)\cos^{-n} x \sin x\, dx \qquad v = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{n-2x}} = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-1)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x}\, dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-1)\int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^n x}\, dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-1)\int \frac{dx}{\cos^n x} + (n-1)\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

und schließlich ist:

$$\int \frac{dx}{\cos^n} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \quad . \quad . \quad (8)$$

$\int \frac{dx}{\sin^n x}$ ist ebenso zu behandeln.

Ist n eine gerade Zahl, so ist übrigens die Methode der Substitution, die wir in § 50, (13) (14) kennen gelernt haben, praktischer.

12. $\int \sin^m x \cos^n dx$

a) m und n seien beide positive und gerade Zahlen; wir setzen:

$$u = \sin^{m-1} x \qquad dv = \cos^n x \sin x \, dx$$

$$du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx \qquad v = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx$$

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx = \int \sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx - \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

somit:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx \quad (9)$$

wir kommen bei weiterer Reduktion schließlich auf $\int \cos^n x \, dx$

b) Wir hatten:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx$$

Ist m positiv gerade, und n eine negative gerade Zahl, $-r$, so ist diese Formel direkt zu verwenden:

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^r x} dx = -\frac{\sin^{m-1} x}{(-r+1)\cos^{r-1} x} + \frac{m-1}{-r+1} \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{r-2} x} dx \quad (10)$$

Ist etwa: $n = -m$, so haben wir:

$$\int \tan^m x \, dx = \frac{1}{m-1} \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x \, dx \quad . \quad (11)$$

c) Setzen wir:

$$u = \cos^{n-1} x \qquad dv = \sin^m x \cos x \, dx$$

$$du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx \qquad v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

so ergibt sich:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx \quad (12)$$

d) Dieser Ansatz wird verwendet, wenn n positiv und $m = -r$ ist.

$$\int \sin^{-r} x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x}{(-n+1)\sin^{r-1} x} + \frac{n-1}{-r+1}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{r-2} x}\,dx \quad (13)$$

Ist etwa: $m = -n$, so haben wir:

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx \quad . \; . \; . \quad (14)$$

§ 53. Integration nach Zerlegung in Partialbrüche.

Wir wollen nun eine allgemeine Methode kennen lernen, die uns stets die Integration gebrochener rationaler Funktionen ermöglicht.

Wir unterscheiden unter ihnen zwei Gruppen, nämlich echt gebrochene und unecht gebrochene:

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^3 + cx^2 + dx}$$

ist z. B. eine echt gebrochene, während:

$$\frac{x^5}{x^2+1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x^3+1}{x^3+x^2+2x}$$

unecht gebrochene rationale Funktionen sind.

Derartige Ausdrücke, bei denen also der Zähler von höherem Grad ist, als der Nenner, lassen sich aber einfach durch Division als die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion darstellen:

$$\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3+1}{x^3+x^2+2x} = 1 - \frac{x^2+2x-1}{x^3+x^2+2x}$$

Wir brauchen ihnen also weiter keine besondere Aufmerksamkeit zu schenken, denn die Aufgabe, eine derartige unecht gebrochene Funktion zu integrieren, führt doch stets zur Bearbeitung einer echt gebrochenen Funktion.

Nun haben wir eine Reihe einfacherer derartiger Ausdrücke allerdings schon (z. B. § 50 I. II. III. IV.) behandelt und es kommt manchmal vor, daß auch bei komplizierteren Ansätzen geschickte Umformungen möglich sind, oder zwischen Zähler und Nenner gewisse Relationen bestehen, z. B. daß der Zähler das Differential des Nenners ist usw., und daß uns dann die bisher gelernten Integrationsmethoden zum Ziel führen, — im allgemeinen müssen aber gebrochene rationale Funktionen erst als Summe einfacherer Brüche dargestellt werden, die einzeln integrierbar sind.

Ist der Nenner eingliederig, dann ist diese Aufgabe nicht schwer:

$$\int\frac{(x^2+x+1)dx}{x^5}=\int\left(\frac{x^2}{x^5}+\frac{x}{x^5}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{dx}{x^4}+\int\frac{dx}{x^5}$$

Ist er aber ein mehrgliederiger Ausdruck, wie beispielsweise in:

$$\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x^4+dx^3+ex^2+fx+g}$$

dann stellen wir die gegebene Funktion als Summe von Partialbrüchen dar, die nach gewissen Regeln zu bilden sind, welche wir zunächst praktisch kennen lernen wollen.

In den Beispielen, die wir zu diesem Zweck durchrechnen werden, ist der Nenner meist als aufgelöstes Produkt linearer Faktoren geschrieben; als ein solches Produkt n linearer Faktoren von der Form:

$$x \pm m$$

läßt sich nämlich jede Funktion n ten Grades:

$$x^n+a_1x^{n-1}x+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad . \quad . \quad (1)$$

(n bedeutet eine positive ganze Zahl) darstellen.

Die Gleichung zweiten Grades:

$$x^2+ax+b=0$$

hat z. B. die Wurzeln:

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \qquad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

und es ist:

$$x^2+ax+b=(x-x_1)(x-x_2)$$

Eine Gleichung n ten Grades, wie (1) hat n Wurzeln, d. h. es gibt n Werte, die sie erfüllen:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots.\ x_n,$$

unter denen einige oder alle gleich sein können, und es ist wieder:

$$x^n+a_1x^{n-1}x+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\ .\ (2)$$

Da wir uns aber mit der Lösung solcher Gleichungen höheren Grades erst später beschäftigen wollen, somit die für unsere Zwecke nötige Darstellung eines Nenners von der Form wie (1) als Produkt linearer Faktoren, die den weiteren Operationen vorausgehen muß, Schwierigkeiten machen würde, sind die Beispiele entsprechend gewählt.

I. Fall.

Der Nenner kann in lineare Faktoren aufgelöst werden, die alle voneinander verschieden sind, wie dies etwa bei:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x-c}{(x-a)(x-b)}$$

der Fall ist. Man setzt dann:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x-c}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad . \quad . \quad (3)$$

die gegebene Funktion gleich der Summe von Partialbrüchen, deren Nenner die linearen Faktoren von $F(x)$ sind, und deren Zähler A, B wir jetzt zu bestimmen haben.

Es ergibt sich zunächst, wenn wir in (3) auf beiden Seiten mit dem Generalnenner der Partialbrüche, nämlich dem Nenner $F(x)$ der gegebenen Funktion multiplizieren:

$$\begin{aligned} x-c &= A(x-b) + B(x-a) \\ &= x(A+B) - Ab - Ba \end{aligned}$$

a) Nun heben wir links und rechts die Koeffizienten gleicher Potenzen von x heraus und setzen sie gleich:

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ c &= Ab + Ba \end{aligned}$$

wodurch wir also Relationen gewinnen, aus denen sich A und B berechnen läßt; sie liefern:

$$A = \frac{a-c}{a-b}$$

$$B = \frac{c-b}{a-b}$$

Substitution dieser Ausdrücke für A und B in (3) ergibt:

$$\frac{x-c}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-c}{(a-b)(x-a)} + \frac{c-b}{(a-b)(x-b)} \quad . \quad (4)$$

$$\int \frac{(x-c)\,dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-c}{a-b}\int \frac{dx}{x-a} + \frac{c-b}{a-b}\int \frac{dx}{x-b} \quad . \quad . \quad (5)$$

b) Eine andere Methode zur Ermittelung der Zähler wird im folgenden Beispiel verwendet.

Es sind die Zähler der rechtsstehenden Partialbrüche zu berechnen:

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-a)(x-b)(x+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x+c} \;. \quad (6)$$

Wir multiplizieren wieder beiderseits mit dem Nenner der gegebenen Funktion und finden:

$$x^2 - 3x + 1 = A(x-b)(x+c) + B(x-a)(x+c) + C(x-a)(x-b)$$

Diese Identität ist richtig für jeden Wert von x, ist also auch erfüllt, wenn wir setzen:

$x = a$; dann ist:

$$a^2 - 3a + 1 = A(a-b)(a+c) \qquad A = \frac{a^2 - 3a + 1}{(a-b)(a+c)}$$

Sie gilt ebenso für: $x = b$; dann ist:

$$b^2 - 3b + 1 = B(b-a)(b+c) \qquad B = \frac{b^2 - 3b + 1}{(b-a)(b+c)}$$

und für: $x = -c$

$$c^2 - 3c + 1 = C(-c-a)(-c-b) \qquad C = \frac{c^2 + 3c + 1}{(c+a)(c+b)}$$

Diese Ausdrücke für A, B, C führen wir nun wieder als Zähler der Partialbrüche in (6) ein.

Beispiele:

1. Es ist zu zeigen, daß:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\, l\, \frac{x-a}{x-b} + C$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Man multipliziert mit dem Generalnenner:

$$1 = A(x-b) + B(x-a)$$

Man ordnet:

$$1 = x(A+B) - Ab - Ba$$

setzt die Koeffizienten derselben Potenzen von x beiderseits gleich:

$$0 = A + B$$

$$1 = -Ab - Ba$$

$$A = \frac{1}{a-b} \qquad B = \frac{1}{b-a}$$

oder man setzt zuerst:

$$x = a$$

dann ist:

$$1 = A(a-b) \qquad A = \frac{1}{a-b}$$

weiter setzt man:

$$x = b$$

dann ist:

$$1 = B(b-a) \qquad B = \frac{1}{b-a}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{x-a} + \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{x-b}$$

usw.

2. Man zeige, daß: $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a-x)} = \frac{1}{a}\, l\, \frac{x}{a-x} + C$

$$\frac{1}{x(a-x)} = \frac{1}{(x+0)(a-x)} = \frac{A}{x+0} + \frac{B}{a-x}$$

usw.

Integrale von dieser Form sind sehr häufig in der chemischen Dynamik.

3. Man löse: $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2}$

$$\frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} - x^2}$$

$$\frac{1}{\frac{a^2}{b^2} - x^2} = \frac{A}{\frac{a}{b} + x} + \frac{B}{\frac{a}{b} - x}$$

usw.

J. J. Thomsons Formel für die Bildungsgeschwindigkeit der Jonen in gewissen Gasen (d. h. der Zunahme ihrer Anzahl n in der Zeiteinheit) unter dem Einfluß von Röntgenstrahlen lautet z. B.:

$$\frac{dn}{dt} = q - an^2$$

somit:

$$\int \frac{dn}{q - an^2} = t$$

Es ist zu beweisen, daß:

$$t = \frac{1}{2a\sqrt{\frac{q}{a}}}\, l\, \frac{\sqrt{\frac{q}{a}} + n}{\sqrt{\frac{q}{a}} - n}$$

q und a sind Konstanten.

4. $\displaystyle\frac{x^2 + x + 1}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{x^2 + x + 1}{(x+2i)(x-2i)(x+2)}$ vid. Fußnote [1])

1. Imaginäre und komplexe Größen:
Es gibt keine reelle Zahl, welche bei der Multiplikation mit sich selbst ein Resultat mit negativem Vorzeichen liefert; sowohl:

denn:

$$x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i),$$

wir schreiben nun analog wie früher:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x + 2i)(x - 2i)(x + 2)} = \frac{A}{x + 2i} + \frac{B}{x - 2i} + \frac{C}{x + 2}$$

$$+a \cdot +a = a^2 \quad \text{als:} \quad -a \cdot -a = a^2$$

Daß a^2 das Ergebnis der Multiplikation von $+a$ mit sich selbst, als auch der Multiplikation von $-a$ mit sich selbst sein kann, drückt man aus, wenn man schreibt:

$$\sqrt{a^2} = \pm a$$

Die Quadratwurzel aus einer negativen Größe kann also keine reelle Zahl sein.

Nichtsdestoweniger kommen Formen wie etwa: $\sqrt{-a^2}$ bei mathematischen Untersuchungen häufig vor; fassen wir nun $-a^2$ auf als das Produkt aus a^2 und -1, so können wir $\sqrt{-a^2}$ als das Produkt von $\pm a$ und $\sqrt{-1}$ darstellen.

Man nennt $\pm a$ den reellen und $\sqrt{-1}$ den imaginären Teil von $\sqrt{-a^2}$; nach Gauß bezeichnet man $\sqrt{-1}$ kurz mit i und schreibt also:

$$\sqrt{-a^2} = \pm ai$$

$i = \sqrt{-1}$ folgt allen Regeln der Algebra; so ist:

$$i \cdot i = (\sqrt{-1})^2 = -1 \qquad i \cdot (-i) = -(\sqrt{-1})^2 = -(-1) = 1$$

allgemein ist:

$$i^{4n} = 1 \qquad i^{4n+1} = i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$$

usf.

n bedeutet eine positive ganze Zahl.

Ausdrücke, die durch Summierung reeller und imaginärer Größen entstehen, wie etwa:

$$a \pm bi$$

heißen komplexe Größen.

$$a + bi \quad \text{und} \quad a - bi$$

nennt man konjugierte komplexe Größen.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$(a + bi)(a - bi) = (b + ai)(b - ai) = a^2 + b^2$$

Die Summe und ebenso das Produkt von konjugierten komplexen Größen sind reelle Größen.

Man beachte, daß die quadratische Gleichung:

$$x^2 + bx + c = 0$$

die beiden Wurzeln:

$$-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{2} - c} \quad \text{und} \quad -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

hat; die beiden Wurzeln sind offenbar konjugierte komplexe Größen, wenn:

$$b^2 - 4c < 0$$

Das Produkt und der Quotient aus zwei nichtkonjugierten komplexen Größen sind wieder komplexe Größen:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc + ad}{c^2 + d^2} i$$

Multiplikation auf beiden Seiten mit dem Nenner der gegebenen Funktion liefert:

$$x^2+x+1=A(x-2i)(x+2)+B(x+2i)(x+2)+C(x+2i)(x-2i)$$

Weiter können wir nun nach Methode *a*) oder *b*) vorgehen; wählen wir die letztere als die raschere, so haben wir in der vorstehenden Identität zu setzen:

erst: $x=-2i$, es ergibt sich: $A=\dfrac{3+2i}{8(1+i)}$

und weiter, wenn man Zähler und Nenner mit $(1-i)$ multipliziert:

$$A=\frac{5-i}{16}$$

dann setzen wir: $x=2i$, es ergibt sich: $B=\dfrac{3-2i}{8(1-i)}$

und weiter, wenn man Zähler und Nenner mit $(1+i)$ multipliziert:

$$B=\frac{5+i}{16}$$

schließlich setzen wir $x=-2$, und finden: $C=\dfrac{3}{8}$

$$\int\frac{x^2+x+1}{(x^2+4)(x+2)}=\frac{5-i}{16}\int\frac{dx}{x+2i}+\frac{5+i}{16}\int\frac{dx}{x-2i}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x+2}$$

usw.

Auch wenn also im Nenner komplexe Faktoren vorkommen, ist die gelernte Methode anwendbar; sie ist aber dann ziemlich schwerfällig und liefert ein wenig elegantes Resultat, in dem komplexe Größen vorkommen, was wir vermeiden können. Wir sehen nämlich, daß die Zähler A und B der Partialbrüche mit konjugiert komplexen Nennern ebenfalls konjugiert komplexe Zahlen sind, — dies drücken wir kurz aus, wenn wir schreiben:

$$A=a+bi, \qquad B=a-bi$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+4)(x+2)}dx=\overbrace{\frac{a+bi}{x+2i}}^{\mathrm{I}}+\overbrace{\frac{a-bi}{x-2i}}^{\mathrm{II}}+\overbrace{\frac{C}{x+2}}^{\mathrm{III}}$$

Addieren wir nun die Partialbrüche I und II, nachdem wir sie auf den gemeinschaftlichen Nenner x^2+4 gebracht haben, so erhalten wir als Ergebnis einen Ausdruck von der Form:

$$\frac{Mx+N}{x^2+4}$$

wenn wir:

$$M = \frac{5}{8} \qquad \text{und} \qquad N = -\frac{1}{4}$$

setzen.

Wir schreiben nun gleich von vornherein, statt drei Partialbrüche der einfachsten Form zu bilden:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 4)(x + 2)} = \frac{Mx + N}{x^2 + 4} + \frac{C}{x + 2}$$

und haben jetzt zunächst M, N und C zu bestimmen; wir multiplizieren in der vorstehenden Gleichung auf beiden Seiten mit dem Generalnenner:

$$(x^2 + 4)(x + 2),$$

erhalten:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (Mx + N)(x + 2) + C(x^2 + 4) \\ &= x^2(M + C) + x(N + 2M) + 2N + 4C \end{aligned}$$

durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von x weiter die drei Gleichungen:

$$1 = M + C \qquad 1 = N + 2M$$
$$1 = 2N + 4C$$

und daraus:

$$M = \frac{5}{8} \qquad N = -\frac{1}{4} \qquad C = \frac{3}{8}$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 4)(x + 2)} &= \int \frac{\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2 + 4} dx + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x + 2} \\ &= \frac{5}{8}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + 4} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x + 2} \\ &= \frac{5}{16} l(x^2 + 4) - \frac{1}{8} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{8} l(x + 2) + \text{Konst.} \end{aligned}$$

usw.

5. $\dfrac{x^2 - 8}{(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i)(x - 3)}$ ist zu integrieren.

Wir könnten entweder nach der zuerst gelernten Methode vorgehen und die drei Partialbrüche:

$$\frac{A}{(x - 3) - 2i} \qquad \frac{B}{(x - 3) + 2i} \qquad \frac{C}{x - 3}$$

bilden, oder wir beachten, daß:

$$(x - 3) - 2i \qquad \text{und} \qquad (x - 3) + 2i$$

konjugiert komplexe Zahlen sind, und setzen:

$$\frac{x^2-8}{(x-3-2i)(x-3+2i)(x-3)}=\frac{Mx+N}{\{(x-3)-2i\}\{(x-3)+2i\}}+\frac{C}{x-3}$$
$$=\frac{Mx+N}{(x-3)^2+2^2}+\frac{C}{x-3}$$

Multiplikation mit dem Nenner des zu integrierenden Ausdruckes liefert:

$$x^2-8=(Mx+N)(x-3)+C\{(x-3)^2+2^2\}$$
$$=x^2(M+C)+x(N-3M-6C)+13C-3N$$

Gleichsetzung der gleichen Koeffizienten derselben Potenz von x ergibt:

$$1=M+C \qquad 0=N-3M-6C$$
$$-8=13C-3N$$

und daraus folgt:

$$M=\frac{3}{4} \qquad N=\frac{15}{4} \qquad C=\frac{1}{4}$$

somit:

$$\int\frac{x^2-8}{(x-3-2i)(x-3+2i)(x-3)}=\int\frac{\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}}{(x-3)^2+2^2}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3}$$

Die Behandlung des ersten Integrales der rechten Seite ist leicht; wir setzen:

$$x-3=y$$

somit:

$$x=3+y \qquad dx=dy$$

und kommen zu:

$$\int\frac{\frac{3}{4}\left(3+y\right)+\frac{15}{4}}{y^2+2^2}dy=\int\frac{\frac{3}{4}y+6}{y^2+2^2}dy$$
$$=\frac{3}{4}\int\frac{y\,dy}{y^2+2^2}+6\int\frac{dy}{y^2+2^2}$$
$$=\frac{3}{8}l(y^2+2^2)+3\arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

und wenn wir jetzt für y wieder $x-3$ einsetzen, finden wir:

$$\int\frac{\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}}{(x-3^2)+2^2}dx=\frac{3}{8}l\{(x-3)^2+2^2\}+3\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

und schließlich:

$$\int \frac{x^2-8}{(x-3-2i)(x-3+2i)(x-3)} = \frac{3}{8} l \{ x-3)^2 + 2^2 \} + 3 \arctan \left(\frac{x-3}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4} l (x-3) + \text{Konst.}$$

5. H. Dannell kommt bei seinen Studien über die freie Energie chemischer Reaktionen (Zeitschr. f. phys. Chemie, **33**, 415, 1900) zu einer Gleichung von der Form:

$$\frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = k dt$$

es ist zu zeigen, daß:

$$\int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{2a} \arctan \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{4a} l \frac{x+a}{a-x} + \text{Konst.}$$

Man beachte, daß:

$$\frac{x^2}{a^4 - x^4} = \frac{x^2}{(x^2+a^2)(a^2-x^2)} = \frac{Mx+N}{x^2+a^2} + \frac{C}{a+x} + \frac{D}{a-x}$$

bestimme jetzt M, N, C und D usw.

Nach Zerlegung der gegebenen echt gebrochenen rationalen Funktion können uns also schließlich nur die folgenden Arten von Integralen vorkommen:

1. $C \int \frac{dx}{x \pm a} = C l (x \pm a) + C'$

2. $C \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{C}{2} l (x^2 + a^2) + C'$

3. $C \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{C}{a} \arctan \left(\frac{x}{a}\right) + C'$

und eventuell (Beispiel 5) die Form:

$$C \int \frac{Mx + N}{(x \pm a)^2 + b^2} dx$$

die aber durch die Substitution:

$$x \pm a = y$$

$$(\text{somit:} \quad x = y \mp a \qquad dx = dy)$$

auf die Formen 2. und 3. zurückgeführt wird.

II. Fall.

Der Nenner der gegebenen Funktion kann in Faktoren zerlegt werden, unter denen einige gleich sind, wie z. B. in:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2(x-3)}$$

Wir können dann nicht so vorgehen, wie im Fall I., denn wenn wir schrieben:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$
$$= \frac{A+B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

so wäre der Generalnenner der rechten Seite:

$$(x+1)(x-3)$$

und nicht:

$$(x+1)^2(x-3).$$

Wir setzen vielmehr an:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{B}{x-3} \quad . \quad . \quad (7)$$

Jetzt multiplizieren wir wieder auf beiden Seiten mit dem Generalnenner und es ergibt sich:

$$x^2 - 2x + 3 = A_1(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + B(x+1)^2$$
$$= x^2(A_2 + B) + x(A_1 - 2A_2 + 2B) - 3A_1 - 3A_2 + B$$

Hier heben wir links und rechts die Koeffizienten gleicher Potenzen heraus und setzen sie gleich:

$$\begin{aligned} 1 &= B + A_2 \\ -2 &= A_1 - 2A_2 + 2B \\ 3 &= -3A_1 - 3A_2 + B \end{aligned}$$

und diese Relationen liefern:

$$A_1 = -\frac{3}{2} \qquad A_2 = \frac{5}{8} \qquad B = \frac{3}{8}$$

$$\int \frac{(x^2 - 2x + 3)\,dx}{(x+1)^2(x-3)} = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x-3}$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{8}\, l(x+1) + \frac{3}{8}\, l(x-3) + C$$

Beispiele.

1. Goldschmidt hat für die Geschwindigkeit einer gewissen Reaktion die Formel:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)^2$$

aufgestellt; man zeige, daß:

$$k\int dt = \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)^2} = \frac{1}{(a-b^2)}\left\{\frac{a-b}{b-x} - l\frac{a-x}{b-x}\right\} + C$$

um C zu bestimmen, setzen wir:

$$x = 0 \qquad \text{für} \qquad t = 0$$

Das Endresultat lautet:

$$kt(a-b)^2 = \frac{(a-b)x}{b(b-x)} + l\frac{a(b-x)}{b(a-x)}$$

2. Man zeige, daß: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{4}l\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)} + C$

(W. Meyerhofer, Ztschrft. f. phys. Chemie, **2**, 585, 1888.)

3. Man zeige, daß: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2x+3)} = -\frac{1}{3x} + \frac{2}{9}l\frac{x+\frac{3}{2}}{x} + C$

$$\frac{1}{x^2(2x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+0)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{(x+0)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A_1}{(x+0)^2} + \frac{A_2}{x+0} + \frac{B}{x+\frac{3}{2}}$$

usw.

4. Man zeige, daß:

$$\int \frac{x^3+2}{(x+2)^2(x-1)^2} = \frac{2}{3(x+2)} + \frac{8}{9}l(x+2) - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{9}l(x-1) + C$$

Wir setzen:

$$\frac{x^3+2}{(x+2)^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x+2)^2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{x-1}$$

durch Multiplikation mit dem Generalnenner usw. sind die Zähler A_1, A_2, B_1 und B_2 zu bestimmen; man findet:

$$A_1 = -\frac{2}{3} \qquad A_2 = \frac{8}{9} \qquad B_1 = \frac{1}{3} \qquad B_2 = \frac{1}{9}$$

usw.

Der Leser möge sich vor Augen halten, daß er in jedem Stadium die Richtigkeit seiner Rechnung prüfen kann; die Summierung der Partialbrüche muß die zu zerlegende Funktion ergeben, ebenso muß sie als Resultat erscheinen, wenn man das Endergebnis der Integration differenziert.

Auch wenn im Nenner komplexe Faktoren vorkommen, von denen einige einander gleich sind, wie z. B. in:

$$\frac{x^3+2}{(x^2+2^2)^2} = \frac{x^3+2}{(x+2i)^2(x-2i)^2}$$

bliebe unsere Methode anwendbar; wir hätten zu setzen:

$$\frac{x^3+2}{(x^2+2^2)^2} = \frac{A_1}{(x+2i)^2} + \frac{A_2}{x+2i} + \frac{B_1}{(x-2i)^2} + \frac{B_2}{x-2i}$$

jetzt A_1, A_2, B_1 und B_2 zu bestimmen, usw.

Wollen wir aber in der Rechnung und im Resultat komplexe Größen vermeiden, so müssen wir anders vorgehen.

Wir können eine echt gebrochene rationle Funktion, deren Nenner bei der Zerlegung konjugiert komplexe Faktoren liefert, unter denen einige gleich sind, wie z. B.:

$$\frac{f(x)}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^m(x-c)(x-d)} = \frac{f(x)}{(x+ai)^n(x-ai)^n(x+bi)^m(x-bi)^m(x-c)(x-d)}$$

(im Nenner kommen die konjugiert komplexen Faktoren:

$$x+ai \quad \text{und} \quad x-ai$$

n mal, die konjugiert komplexen Faktoren:

$$x+bi \qquad x-bi$$

m mal vor) durch die Summe:

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+a^2)^n} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+a^2)^{n-2}} + \dots + \frac{M_nx+N_n}{x^2+a^2}$$
$$+ \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+b^2)^m} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+b^2)^{m-1}} + \frac{P_3x+Q_3}{(x^2+a^2)^{m-3}} + \dots + \frac{P_mx+Q_m}{x^2+b^2}$$
$$+ \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d}$$

darstellen. Dann sind zunächst die Größen $M_1, \dots M_n$, $N_1, \dots N_n$, $P_1, \dots P_m$, $Q_1, \dots Q_m$, C und D zu ermitteln, indem man wieder beiderseits mit dem Nenner der gegebenen Funktion multipliziert, die Koeffizienten gleicher Potenzen von x gleichsetzt usw.

In unserem Fall hätten wir also zu schreiben:

$$\frac{x^3+2}{(x^2+2^2)^2} = \frac{M_1x+N}{(x^2+2^2)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2^2}$$

Multiplikation mit dem Generalnenner liefert:

$$x^3 + 2 = M_2 x^3 + N_2 x^2 + (M_1 + 4\,M_2)\,x + N_1 + 4\,N_2$$

woraus dann weiter folgt:

$$M_1 = -4 \qquad N_1 = 2 \qquad M_2 = 1 \qquad N_2 = 0$$

somit ist:

$$\int \frac{x^3 + 2}{(x^2 + 2^2)^2} = \overbrace{\int \frac{-4\,x + 2}{(x^2 + 2^2)^2}\,dx}^{\mathrm{I}} + \overbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2^2}}^{\mathrm{II}}$$

Die Lösung des Integrals II macht keine Schwierigkeiten, — solche Formen sind uns ja auch schon beim Fall I. vorgekommen:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\,l\,(x^2 + 2^2)$$

Die Behandlung des Integrales I bietet aber zum Teil Neues; zunächst ist:

$$\int \frac{-4\,x + 2}{(x^2 + 2^2)^2}\,dx = -\,4 \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 2^2)^2} + 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2^2)^2}$$

Dem ersten rechtsstehenden Ausdruck können wir nun leicht beikommen; wir setzen nach § 50, II.:

$$x^2 + 2^2 = y \qquad x\,dx = \frac{1}{2}\,dy$$

und finden:

$$-\,4 \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 2^2)^2} = \frac{2}{x^2 + 2^2}$$

Umständlicher ist die Behandlung des zweiten rechtsstehenden Integrales. Es stellt einen Spezialfall der allgemeinen Form:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}$$

dar. Wir substituieren zunächst ay für x, somit ist dann:

$$(x^2 + a^2)^m = a^{2m}\,(y^2 + 1)^m, \quad \text{und:} \quad dx = a\,dy$$

also:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m} = \frac{1}{a^{2m-1}} \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^m}$$

zu setzen, nun ist:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + 1)^m} = \int \frac{1 + y^2 - y^2}{(y^2 + 1)^m}\,dy = \int \frac{y^2 + 1}{(y^2 + 1)^m}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^m}\,dy$$

$$= \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^{m-1}} - \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^m}\,dy$$

Den letzten rechtsstehenden Ausdruck behandeln wir jetzt nach der Methode der partiellen Integration (§ 51); wir setzen:

$$u = \frac{y}{2} \quad \text{und:} \quad dv = \frac{2y\,dy}{(y^2+1)^m},$$

somit ist:

$$du = \frac{1}{2}\,dy, \quad \text{und:} \quad v = \frac{-1}{(m-1)\,(y^2+1)^{m-1}}$$

$$\underbrace{\int \frac{y^2}{(y^2+1)^m}\,dy}_{\int u\,dv} = \underbrace{-\frac{y}{(2m-2)\,(y^2+1)^{m-1}}}_{uv} \underbrace{+\frac{1}{2m-2}\int\frac{dy}{(y^2+1)^{m-1}}}_{-\int v\,du}$$

Diesen Ausdruck substituieren wir nun, fassen zusammen und erhalten:

$$\int\frac{dy}{(y^2+1)^m} = \frac{y}{(2m-2)\,(y^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dy}{(y^2+1)^{m-1}}$$

das letzte rechtsstehende Integral können wir durch die gleiche Behandlung weiter auf das noch einfachere $\int\frac{dy}{(y^2+1)^{m-2}}$ zurückführen und kommen schließlich zu:

$$\int\frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctan} y = \operatorname{arctan}\frac{x}{a}$$

In unserem speziellen Fall ($a = 2$, $m = 2$) setzen wir:

$$x = 2y \qquad (x^2+2^2) = 2^2(y^2+1) \qquad dx = 2\,dy$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+2^2)^2} = \frac{1}{2^3}\int\frac{dy}{(y^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2^3}\left\{\frac{y}{2\,(y^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctan} y\right\}$$

$$= \frac{x}{2^3\,(x^2+2^2)} + \frac{1}{2^4}\operatorname{arctan}\frac{x}{2}$$

dann ist:

$$\int\frac{-4x+2}{(x^2+2^2)^2}\,dx = \frac{x+2^3}{2^2(x^2+2^2)} + \frac{1}{2^3}\operatorname{arctan}\frac{x}{2}$$

und schließlich:

$$\int\frac{x^3+2}{(x^2+2^2)^2}\,dx = \frac{x+2^3}{4\,(x^2+2^2)} + \frac{1}{8}\operatorname{arctan}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,l\,(x^2+2^2) + C$$

Kommen bei der Zerlegung des Nenners einer echt gebrochenen rationalen Funktion gleiche Faktoren vor, so können schließlich außer den schon beim I. Fall besprochenen noch folgende Arten von Integralen auftreten:

$$1. \quad C\int\frac{dx}{(x\pm a)^m} = \frac{C}{(-m+1)\,(x\pm a)^{m-1}} + C'$$

$$2. \quad C\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^m} = \frac{C}{(-2m+2)(x^2+a^2)^{m-1}} + C'$$

$$3. \quad C\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$$

Dieses letzte Integral ist durch schrittweise Reduktion zu vereinfachen, wie wir es eben gelernt haben. Formen wie:

$$C\int\frac{x\,dx}{\{(x\pm a)^2+b^2\}^m} \quad \text{und:} \quad C\int\frac{dx}{\{(x\pm a)^2+b^2\}^m}$$

stellen keine neuen Probleme dar, da sie durch die Substitution:

$$x\pm a = y$$

$$x = y\mp a \qquad dx = dy)$$

auf die Formen 2. und 3. zurückgeführt werden.

§ 54. Bemerkungen über die Integration irrationaler Funktionen.

Wir haben schon in früheren Abschnitten auch eine Reihe von Integralen irrationaler Funktion gelöst; hier sollen noch kurz einige Andeutungen über die Behandlung gewisser allgemeiner Formen gegeben werden.

1. Es kommen in der Funktion unter dem Integralzeichen keine anderen Irrationalitäten vor, als Potenzen der unabhängigen Variablen mit gebrochenen Exponenten, wie z. B. in:

$$\int\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})}\,dx = \int\frac{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}{x\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}\right)}\,dx$$

Man substituiert dann:

$$x = y^m, \quad \text{somit:} \quad dx = (m-1)\,y^{m-1}\,dy$$

und wählt m so, daß diese Zahl durch die Nenner aller Exponenten teilbar ist; in unserem Fall hätten wir zu setzen:

$$x = y^{12}, \quad \text{somit:} \quad dx = 12\,y^{11}\,dy$$

daraus ergibt sich:

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})}\,dx = 12\,\frac{y^9+y^6}{y^{12}(y^4-y^2)}\,y^{11}\,dy$$

$$= 12\,\frac{y^6+y^3}{y^2-1}\,dy =$$

$$= 12\left(y^4+y^2+y+1+\frac{y+1}{y^2-1}\right)dy$$

Die Integration dieses Ausdruckes ist leicht.

2. Es kommen in der zu integrierenden Funktion keine anderen Irrationalitäten vor, als Potenz eines Binoms:

$$ax+b$$

mit gebrochenen Exponenten, also Formen wie:

$$(ax+b)^{\frac{m}{n}},\quad (ax+b)^{\frac{p}{q}},\quad (ax+b)^{\frac{r}{s}},\ \ldots\ldots$$

x selbst erscheint nur mit ganzzahligen Enponenten; setzt man dann:

$$ax+b=t$$

somit:

$$x=\frac{1}{a}\,t-\frac{b}{a}\qquad dx=\frac{1}{a}\,dt$$

so wird dieser Fall auf die Behandlung des früheren zurückgeführt.

Beispiel:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right)+C$$

Man setzt:

$$x+a=t\qquad x=t-a\qquad dx=dt$$

$$\int\frac{dt}{(t-a)\sqrt{t}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{x+a}}$$

Jetzt substituiert man y^2 für t:

$$\int\frac{dt}{(t-a)\sqrt{t}}=2\int\frac{dy}{y^2-a}$$

usw.

---

3. Es kommen in der zu integrierenden Funktion keine anderen Irrationalitäten vor, als Potenzen eines Ausdruckes von der Form:

$$\frac{ax+b}{Ax+B}$$

mit gebrochenen Exponenten, also Ausdrücke wie:

$$\left(\frac{ax+b}{Ax+B}\right)^{\frac{m}{n}}, \qquad \left(\frac{ax+b}{Ax+B}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots.$$

x selbst erscheint uns mit ganzzahligen Exponenten; setzt man dann:

$$\frac{ax+b}{Ax+B}=t$$

somit:

$$x=\frac{Bt-b}{a-At} \qquad dx=\frac{Ba-Ab}{(a-A)t^2}dt$$

so wird auch dieser Fall wieder auf die Behandlung des ersten zurückgeführt.

4a. Es kommen in der zu integrierenden Funktion keine anderen Irrationalitäten vor, als Potenzen mit ganzzahligen Exponenten eines Ausdruckes von der Form:

$$\sqrt{x^2+ax+b}$$

x selbst tritt nur mit ganzzahligen Exponenten auf. Man setzt dann:

$$\sqrt{x^2+ax+b}=yx+\sqrt{b}$$

daraus ergibt sich:

$$x^2+ax+b=y^2x^2+2yx\sqrt{b}+b$$

und somit weiter:

$$x=\frac{2y\sqrt{b}-a}{1-y^2} \qquad \sqrt{x^2+ax+b}=\frac{y^2\sqrt{b}-ay+\sqrt{b}}{1-y^2}$$

$$dx=\frac{2\,(y^2\sqrt{b}-ay+\sqrt{b})}{(1-y^2)^2}dy$$

Führt man nun die für x, dx und $\sqrt{x^2+ax+b}$ gefundenen Ausdrücke in die zu integrierende Funktion ein, so erhält man einen Ausdruck, in dem nur Potenzen von y mit ganzen Exponenten vorkommen, der also zum mindesten nach der Zerlegung in Partialbrüche integrierbar ist. Im Ergebnis der Integration ist dann wieder y durch x auszudrücken, also:

$$y=\frac{\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{b}}{x}$$

zu setzen.

Ein Beispiel:

Durch die Substitution:

$$\sqrt{x^2 + ax + b} = \frac{y^2\sqrt{b} - ay + \sqrt{b}}{1 - y^2}$$

$$dx = 2\,\frac{y^2\sqrt{b} - ay + \sqrt{b}}{(1 - y^2)^2}\,dy$$

geht das Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + ax + b}} \qquad \text{über in:} \qquad 2\int \frac{dy}{1 - y^2}$$

$$2\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int \frac{dy}{1 - y} + \int \frac{dy}{1 + y} = l\,\frac{1 + y}{1 - y}$$

$$= l\,\frac{x + \sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{b}}{x - \sqrt{x^2 + ax + b} + \sqrt{b}} + C$$

4b. Kommen in der zu integrierenden Funktion keine andere Irrationalitäten vor, als Potenzen mit ganzzahligen Exponenten eines Ausdruckes von der Form:

$$\sqrt{-x^2 + ax + b}$$

und x selbst tritt nur mit ganzen Exponenten auf, so setzen wir wieder:

$$\sqrt{-x^2 + ax + b} = yx + \sqrt{b}$$

Wir finden auf demselben Weg wie oben, daß dann

für: x einzuführen ist: $\dfrac{a - 2y\sqrt{b}}{1 + y^2}$

„ $\sqrt{-x^2 + ax + b}$ „ „ $\dfrac{\sqrt{b} + ay - y^2\sqrt{b}}{1 + y^2}$

„ dx „ „ $-2\,\dfrac{\sqrt{b} + ay - y^2\sqrt{b}}{(1 + y^2)^2}\,dy$

4c. Kommen in der zu integrierenden Funktion keine anderen Irrationalitäten vor, als Potenzen mit ganzzahligen Exponenten eines Ausdruckes von der Form:

$$\sqrt{x^2 + ax - b}$$

und x selbst tritt nur mit ganzen Exponenten auf, so gehen wir folgendermaßen vor: Wir suchen zunächst die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + ax - b = 0$$

sie mögen mit x_1 und x_2 bezeichnet werden; es ist also:

$$x^2 + ax - b = (x - x_1)(x - x_2)$$

Wir setzen nun:

$$\sqrt{x^2 + ax - b} = \sqrt{(x - x_1)(x - x_2)}$$

gleich:

$$(x - x_1)\, y$$

durch Quadrierung beider Seiten von:

$$\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_1)\, y^2$$

ergibt sich:

$$x - x_2 = (x - x_1)\, y$$

und daraus folgt weiter:

$$x = \frac{x_2 - x_1 y^2}{1 - y^2} \qquad \sqrt{x^2 + ax - b} = \frac{(x_2 - x_1)\, y}{1 - y^2}$$

$$dx = 2\, \frac{(x_2 - x_1)\, y}{(1 - y^2)^2}\, dy$$

Die für x, $\sqrt{x^2 + ax - b}$ und dx gewonnenen Ausdrücke führt man jetzt in die zu integrierende Funktion ein usw.

Ob der Koeffizient a von x in den Ausdrücken: $\sqrt{x^2 + ax + b}$ usw. eine positive, eine negative Größe oder gleich Null ist, ist an sich für die obigen Betrachtungen belanglos; ist er gleich Null, handelt es sich also um die Integration von Ausdrücken, in denen die Irrationalitäten:

$$\sqrt{x^2 + b} \qquad \text{oder:} \qquad \sqrt{b - x^2} \qquad \text{oder:} \qquad \sqrt{x^2 - b}$$

mit ganzzahligem Exponenten vorkommen und auch x nur mit ganzzahligen Exponenten auftritt, so gibt es allerdings oft raschere Wege zur Lösung des vorgelegten Integrals (vid. §§ 50, 52).

Man beachte ferner beim Studium von 4a, 4b und 4c, daß sich ein Ausdruck von der Form:

$$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma x}$$

leicht auch die in 4a betrachtete Form zurückführen läßt:

$$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha}}$$

$$= \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + ax + b}$$

wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{\beta}{\alpha} = a \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = b$$

setzt. Ebenso ist:

$$\sqrt{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{-x^2 + ax + b}$$

und:

$$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x - \gamma} = \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + ax - b}$$

wenn a für β/α und b für γ/α schreiben.

§ 55. Quadratur der Kurven; bestimmte Integrale.

$\widehat{PQ}$ (Fig. 57) sei ein Stück einer Kurve; — die Aufgabe ist, die Fläche zu bestimmen, welche durch den Bogen PQ, die Ordinaten PM und QN und das Stück der X-Achse MN abgegrenzt wird.

Annähernd kann sie ermittelt werden, indem man $\widehat{PQ}MN$ in schmale Streifen senkrecht auf der X-Achse zerlegt. Nun berechne man zunächst die Fläche jedes einzelnen Streifens, unter der Annahme, daß die oberen Begrenzungen statt Bögen gerade Linien sind, und addiere die Inhalte aller der so berechneten Trapeze.

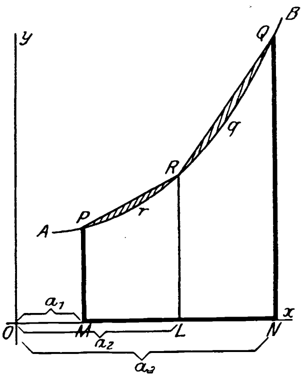

Fig. 57.

Es soll z. B. $\widehat{PQ}MN$ durch LR bloß in zwei Streifen zerschnitten werden; man ziehe die Sehnen $\overline{PR}$ und $\overline{RQ}$ und hat dann:

$$\overline{PRQMN} = \overline{PRLM} + \overline{PRLN}$$

Diese Flächensumme stellt ersichtlich eine rohe Annäherung an den Inhalt der auszumessenden Figur $\widehat{PQ}MN$ dar; die schraffierten Teile des Diagramms zeigen die Größe des begangenen Fehlers.

Ohne weiteres leuchtet nun ein, daß diese Abweichung immer geringer wird, je schmäler wir die einzelnen Streifen machen, denn desto geringer wird der Unterschied zwischen Bogen und Sehne sein, die schließlich bei unendlich geringer Streifenbreite zusammenfallen.

In Fig. 58 sei: $PM = y$ für: $OM = x$
und: $RS = y + \Delta y$ „ $OS = x + \Delta x$

ΔA heiße der Flächeninhalt des betrachteten Stückes $\widehat{PR}MS$; wäre PR kein Bogen, sondern eine Gerade, so hätten wir:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \Delta x\,(PM + RS) = \Delta x\left(y + \frac{1}{2} \Delta y\right) \quad . \quad . \quad (1)$$

lassen wir Δx immer kleinere Werte annehmen, so nähert sich das Verhältnis $\Delta A/\Delta x$ einer Grenze:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=\frac{dA}{dx}=\lim_{\Delta y=0}\left(y+\frac{1}{2}\Delta y\right)=y \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

resp.: $dA=y\,dx$

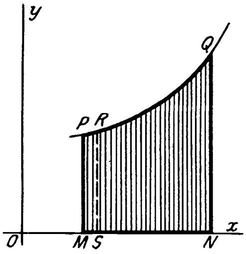

Fig. 58.

Mit dem Übergang zur Grenze verschwindet aber der Unterschied zwischen Bogen und Sehne; — dA ist der Inhalt eines Streifens der Figur von der Breite dx, die Summe der unendlichen Anzahl solcher Flächenelemente $y\,dx$, die zwischen PM und QN liegen, das bestimmte Integral von $y\,dx$ zwischen den Grenzen: $x=OM$ und $x=ON$:

$$\int_{x=OM}^{x=ON} y\,dx$$

definiert die Fläche der Figur $\widehat{PQ}MN$.

Um die angedeutete Rechnung wirklich ausführen zu können, müssen wir vor allem die Gleichung der begrenzenden Kurve wissen; sie ist eventuell erst nach y aufzulösen, und dann haben wir zunächst das allgemeine Integral $\int y\,dx$, den Ausdruck für ein unbestimmtes Flächenstück zu entwickeln. Aus dem Resultat ergibt sich weiter der Wert des bestimmten Integrals, der Inhalt eines abgegrenzten Stückes, indem man den Ausdruck, welchen man durch Substitution der unteren Grenze in das allgemeine Integral erhält, von dem subtrahiert, welcher sich durch Einsetzen des oberen Wertes ergibt:

Allgemeines Integral: $\int f'(x)\,dx=f(x)+C$,

bestimmtes ,, $\int_a^b f'(x)\,dx=[f(x)+C]_{x=b}-[fx+C]_{x=a}$

gewöhnlich kurz geschrieben: $=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$. (3)

a) Man sieht leicht ein, warum die Hinzufügung einer Konstante C zu $[f(x)]_a^b$ überflüssig ist, und ferner ergibt sich sofort (siehe Fig. 59), daß:

$$\text{b)}\quad \overset{\mathrm{I}}{\int_a^b f'(x)\,dx} = \overset{\mathrm{II}}{\int_a^c f'(x)\,dx} + \overset{\mathrm{III}}{\int_c^d f'(x)\,dx} + \overset{\mathrm{IV}}{\int_d^b f'(x)\,dx} \qquad (4)$$

denn:

$$\overbrace{f(b)-f(a)}^{\mathrm{I}} = \overbrace{f(c)-f(a)}^{\mathrm{II}} + \overbrace{f(d)-f(c)}^{\mathrm{III}} + \overbrace{f(b)-f(d)}^{\mathrm{IV}}$$

Weiter leuchtet ein, daß:

$$\text{c)}\qquad -\int_a^b f'(x)\,dx = \int_b^a f'(x)\,dx$$

$$-\{f(b)-f(a)\} = f(a)-f(b) \quad . \; . \; . \quad (5)$$

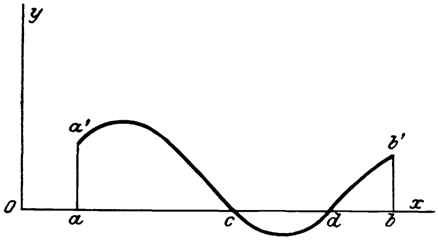

Fig. 59.

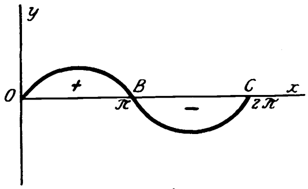

Fig. 60.

Wir haben bei unseren Untersuchuugen bisher vorausgesetzt, daß das betrachtete Stück der Kurve y ganz über der X-Achse liegt; ist dies nicht der Fall, sondern liegt ein Teil des Bogens unter derselben, so beachte man, daß (Fig. 59):

$$\int_a^b y\,dx = \int_d^b y\,dx + \int_c^d y\,dx + \int_a^c y\,dx$$

seine geometrische Bedeutung als Fläche allerdings beibehält, daß aber die y für alle $x \lesseqgtr {}^d_c$ negative Werte sind, somit auch die Flächendifferentiale $y\,dx$; Summe $\int_c^d y\,dx$ geht mit negativem Wert in die Addition ein. In Fig. 60 ist ein Stück der Sinuskurve:

$$y = \sin x$$

und zwar der Bogen für x von 0 bis 2π gezeichnet; im Einklang mit dem Gesagten ist:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$-[\cos x]_0^{2\pi} = -[\cos x]_0^{\pi} + \{-[\cos x]_{\pi}^{2\pi}\} = 0$$

Handelt es sich nun darum, bloß den numerischen Wert der Fläche des abgegrenzten Stückes zu ermitteln, so ist Vorstehendes zu berücksichtigen; man muß z. B. beim letzten Exempel in zwei Schritten vorgehen, — erst den Wert von $\int_0^\pi \sin x\,dx$ ermitteln und dazu das Stück $\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx$ mit negativen Vorzeichen addieren; der Flächenraum des vom gezeichneten Bogen der Sinuskurve und der X-Achse eingeschlossenen Stückes ist also gegeben durch:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx + \left\{-\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

resp. nach c):

$$\int_0^\pi \sin x\,dx + \int_{2\pi}^{\pi} \sin x\,dx = -[\cos x]_0^\pi + \left\{-[\cos x]_{2\pi}^\pi\right\} = 2 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Der Flächenraum des von der Kurve $a'cdb'$ (Fig. 59) und der X-Achse begrenzten Stückes:

$$\int_d^b y\,dx + \left\{-\int_c^d y\,dx +\right\} + \int_a^c y\,dx$$

$$= \int_d^b y\,dx + \int_d^c y\,dx + \int_a^c y\,dx$$

Die Berechnung des Flächeninhaltes von solchen ebenen Figuren nennt man Quadratur der Kurven.

Es wird dem Leser empfohlen, bei derartigen Aufgaben stets eine Zeichnung anzufertigen, und sich die Verhältnisse erst an dieser klarzumachen.

Beispiele:

1. Eine Kurve (Fig. 61) sei durch die Gleichung:

$$8y = x^2$$

gegeben; man soll die Fläche $A'ABB'$ berechnen; $OA' = 2$, $OB' = 7$

$$F = \frac{1}{8}\int_2^7 x^2 dx = \frac{1}{24}\left[x^3\right]_2^7 = \frac{335}{24}$$

2. Die Fläche F der Figur $Q_1 P_1 P_2 Q_2$ (Fig. 62) zu bestimmen;

die begrenzende Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung:

$$xy = 1$$

$OQ_1 = x_1$, $OQ_2 = x_2$; wir haben dann:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = [lx]_{x_1}^{x_2} = l\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

setzt man $x_1 = 1$ und $x_2 = x$, so erhält man:

$$F = lx$$

Der Flächeninhalt der Figur A_1APQ, in welcher $OA_1 = 1$, gibt also die geometrische Deutung der Funktion lx.

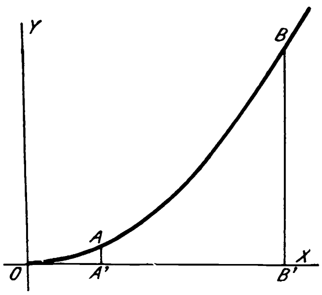

Fig. 61.

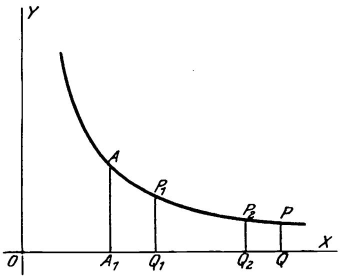

Fig. 62.

3. Den Flächeninhalt einer Ellipse mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ resp.: } y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

zu ermitteln.

Wenn die Kurve im ersten Quadranten die X-Achse schneidet, hat x den Wert a; wenn sie die Y-Achse schneidet, den Wert null. Die Summe aller Flächenelemente im ersten Quadranten ist daher:

$$\int_{x=0}^{x=a} y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{ab}{2}\arcsin 1 = \frac{ab\pi}{4}$$

$$\text{da:} \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Die ganze Fläche der Ellipse ist viermal so groß als der in einem Quadranten liegende Teil, also:

$$F = ab\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Werden große und kleine Achse gleich, $a = b$, so geht die Ellipse in einen Kreis über, dessen Inhalt $a^2\pi$ ist.

4. Die Gleichung einer Kurve ist (Fig. 63):

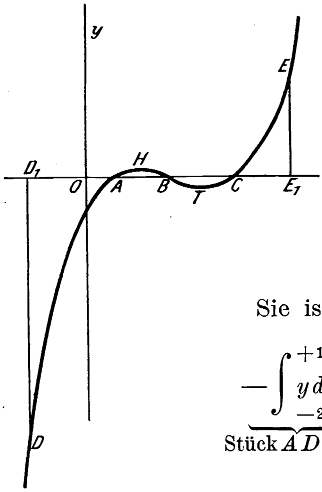

Fig. 63.

$$y = \frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-5)$$

sie schneidet die X-Achse in den Punkten:

$$A\,(x = 1) \qquad B\,(x = 3) \qquad C\,(x = 5)$$

Es ist die Fläche zu bestimmen, welche die Fig. $D_1DABCEE_1$ einnimmt, wenn $OD_1 = -2$, $OE_1 = 7$.

Sie ist nach dem früher Gesagten offenbar:

$$\underbrace{-\int_{-2}^{+1} y\,dx}_{\text{Stück } ADD_1} + \underbrace{\int_{1}^{3} y\,dx}_{\text{Stück } AHB} + \Big\{\underbrace{-\int_{3}^{5} y\,dx}_{\text{Stück } BFC} + \Big\} + \underbrace{\int_{5}^{7} y\,dx}_{\text{Stück } CEE_1}$$

$$= \int_{+1}^{-2} y\,dx + \int_{1}^{3} y\,dx + \int_{5}^{3} y\,dx + \int_{5}^{7} y\,dx$$

Die Lösung des allgemeinen Integrales ist leicht:

$$\int y\,dx = \frac{1}{12}\int (x-1)(x-3)(x-5) = \frac{1}{12}\int (x^3 - 9x^2 + 23x - 15)\,dx$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 23\frac{x^2}{2} - 15x\right]$$

Der Leser führe die Rechnung aus und gebe sich genau Rechenschaft über die Bedeutung des Resultates im Vergleich zum Ergebnis von:

$$\int_{-2}^{+7} y\,dx = \frac{1}{48}(119 - 416) = -\frac{99}{16}$$

5. Zwei Kurven: $F'(x)$ und $f'(x)$ (Fig. 64) schneiden sich in den Punkten $P_1\,(x = a)$ und $Q_1\,(x = b)$; es ist das zwischen den Bogen $PABQ$ und $PA'B'Q$ liegende Stück zu berechnen.

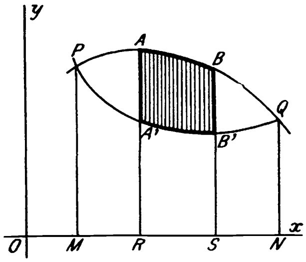

Fig. 64.

Man bestimmt zuerst: $\overset{\frown}{M\,P\,A\,B\,Q\,N_1}$

$$=\int_a^b F'(x)\,dx$$

und subtrahiert davon $\overset{\frown}{M\,PA'B'Q\,N}$

$$=\int_a^b f'(x)\,dx$$

Die Differenz $\Big[F(x)-f(x)\Big]_a^b$ ist das gesuchte Stück.

Wäre $A\,A'B'B$ zu ermitteln, so hätte man zu bilden:

$$\int_c^d F'(x)\,dx - \int_c^d f'(x)\,dx$$
$$=\Big[F'(x)-f'(x)\Big]_c^d$$

wenn $OS=d$, und $OR=c$.

Quadratur von Kurven bei Verwendung von Polarkoordinaten.

Die Koordinaten eines Punktes P der Kurve P_1PA (Fig. 65) seien r und φ, die eines benachbarten Punktes P_1, $r+\Delta r$ und $\varphi+\Delta\varphi$.

Der Flächeninhalt des Dreieckes $\overline{OPP_1}$ ist:

$$\Delta S = \frac{1}{2}\,OP\,.\,OP_1 \sin\Delta\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\,r\,(r+\Delta r)\sin\Delta\varphi \quad . \quad (9)$$

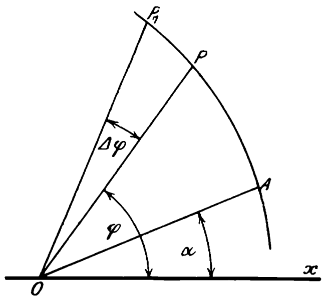

Fig. 65.

Dieser Flächeninhalt wird dem Inhalt des Stückes $O\overset{\frown}{PP_1}$ um so näher liegen, je mehr die Sehne sich dem Bogen nähert, d. h. je kleiner $\Delta\varphi$ wird.

Sehne und Bogen fallen zusammen, wenn $\Delta\varphi = d\varphi$; wir gehen also zur Grenze des Ausdruckes:

$$\frac{\Delta S}{\Delta\varphi}=\frac{1}{2}\,r\,(r+\Delta r)\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$$

über, und haben, da:

$$\lim (r + \varDelta r) = r, \qquad \text{und:} \qquad \lim \frac{\sin \varDelta \varphi}{\varDelta \varphi} = 1$$

$$\lim_{\varDelta \varphi = 0} \frac{\varDelta S}{\varDelta \varphi} = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2} r^2 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

respektive für ds, das Flächendifferential:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und der Sektor, die Fläche, die zu einem endlichen Stück der Kurve gehört, ist:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

wenn φ_1 und φ_2 die φ der Endpunkte des begrenzenden Bogens sind.

Beispiele:

1. Man soll den Flächeninhalt des Sektors $P_1 O P_2$ bei der Spirale des Archimedes (Fig. 66):

$$r = a\varphi$$

berechnen.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{6} \left[\varphi^3 \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

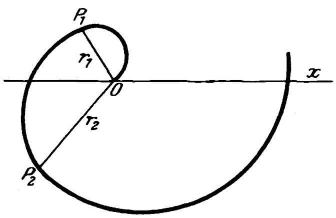

Fig. 66.

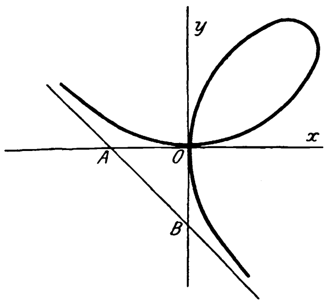

Fig. 67.

2. Die Gleichung des „Folium Cartesii“ (Fig. 67) lautet in Polarkordinaten:

$$r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

Man soll den Flächeninhalt der Schleife im ersten Quadranten rechnen.

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}$$

Man dividiere Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen durch $\cos^6\varphi$ und beachte, daß:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d\,(\tan\varphi)$$

es ergibt sich:

$$F = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\varphi \, d(\tan\varphi)}{(1+\tan^3\varphi)^2} = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$$

wenn man $\tan\varphi$ kurz t nennt:

Jetzt setzt man:

$$1 + t^3 = z, \quad \text{somit:} \quad 3t^2dt = dz,$$

es wird:

$$\int \frac{3t^2dt}{(1+t^3)^2} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}$$

also schließlich:

$$F = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{z}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}$$

§ 56. Bemerkung über bestimmte Integrale; Beispiele.

Der Leser möge noch zur Übung die untenstehenden Beispiele unter Anwendung des über bestimmte Integrale bisher Gelernten durchrechnen und Folgendes beachten.

Wenn wir schrieben:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

haben wir bisher angenommen, daß b und a unveränderliche feste Werte sind; jetzt wollen wir uns vorstellen, daß z. B. die obere Grenze b nicht mehr eine Konstante, sondern eine Veränderliche sei, die über jeden Betrag hinaus wächst; wir kämen zum Ausdruck: $\int_a^\infty f'(x)dx$, den wir als Grenze der Funktion $\int_a^b f'(x)dx$ für $b = \infty$

auffassen können:

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{b=\infty} f(b) - f(a) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ebenso können wir a, die untere Grenze, als Variable betrachten und hätten $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,dx$ zu erklären als:

$$\lim_{\substack{b=+\infty \\ a=-\infty}} \int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{b=\infty} f(b) - \lim_{a=-\infty} f(a) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Derartige Integrale können, wie der Leser aus den Beispielen ersehen wird, unendlich sein, einen endlichen bestimmten Wert haben oder unbestimmt bleiben.[1])

Beispiele:

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b=\infty} \left[2\sqrt{x} \right]_1^b = 2 \lim_{b=\infty} \sqrt{b} - 2 = \infty$

2. $\int_0^\infty e^x\,dx = \lim_{b=\infty} \left[e^x \right]_0^b = \lim_{b=\infty} e^b - 1 = \infty$

3. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -\lim_{b=\infty} \left[e^{-x} \right]_0^b = 1 - \lim_{b=\infty} \frac{1}{e^b} = 1$

4. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -2 \lim_{b=\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]_1^b = 2$

[1]) Wir betrachten hier nur solche bestimmte Integrale, bei denen $f'(x)$, die Funktion unter dem Integralzeichen, kontinuirlich verlaufend für keinen Wert des x:

$$a < x < b$$

also für keinen Wert des x zwischen den Grenzen der Integration unendlich wird, sondern erst für

$$x = b = \infty$$

$$\text{bezw.} \quad x = a = -\infty$$

eventuell unendlich wird.

5. $\int_0^\infty \cos x\, dx = \lim_{b=\infty} \Big[\sin x\Big]_0^b =$ unbestimmt!

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ . . . . (4)

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ . . . . (4a)

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\pi.$ Man löse zuerst das allgemeine Integral durch partielle Integration:

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$2\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\Big[-\sin x \cos x + x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$ wird ebenso abgeleitet . . . . (5a)

---

§ 57. Weitere Beispiele.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx$ ist zu entwickeln.

Für das allgemeine Integral $\int \sin^{2n} x\, dx$ hatten wir (§ 52 Beispiel 10):

$$= -\frac{1}{2n}\sin^{2n-1} x \cos x + \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2} dx$$

und:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \left[-\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x \cos x + \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} x\, dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\, dx$$

Setzt man auf beiden Seiten der letzten Gleichung statt n $(n-1)$, so ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\, dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4} x\, dx$$

also aus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4} x\, dx$$

Auf diese Weise kann man fortfahren, bis man auf der rechten Seite zum Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$$

kommt, und findet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots.5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots.6\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad (1)$$

und auf ganz gleichem Wege:

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4\cdot 2} \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad (1a)$$

3. $$\int \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n} x \sin x + \frac{2n}{2n+1} \int \cos^{2n-1} x\, dx$$

somit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x\, dx$$

weiter wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x\, dx = \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} x\, dx$$

usf., bis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{3}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots.4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1} \quad . \quad (2)$$

und:

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1} \quad . \quad . \quad (2a)$$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx = -\left[\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

7. Das allgemeine Integral:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \qquad (\text{§ 52 Beispiel 12})$$

a) $$= -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx$$

oder:

b) $$= \frac{1}{m+n}\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

ist m eine ganze Zahl, > 1, so ergibt a) sofort:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{m-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \quad . \quad . \quad (3)$$

Je nachdem m gerade oder ungerade ist, wird man bei weiterer Reduktion nach dieser Formel entweder zu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ oder zu

---

Zu 5) und 6): $\int \sin^m x \cos x dx = \int t^m dt,$

$$\int t^m dt = \frac{1}{m+1}\cdot t^{m+1} = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

usw.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x \, dx$ kommen; beide Formen sind in vorstehendem behandelt.

Ist n eine ganze Zahl > 1, so liefert b):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{a})$$

usw.

Interessant ist die Berechnung von π mittels der Formeln (1) und (2a).

Für irgend ein x zwischen O und $\frac{\pi}{2}\left(O < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ist jedenfalls

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

da niedrigere Potenzen eines Bruches größer sind als höhere; offenbar ist dann auch:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx \quad . \quad . \quad (5)$$

oder:

$$\frac{2n(2n-2) \ldots . 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \ldots 5 \cdot 3} < \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot}{2n(2n-2) \ldots 4 \cdot 2 \cdot} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2n-1)(2n-3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot}{2n(2n-2) \ldots . 4 \cdot 2 \cdot} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4) \ldots . 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \ldots . 5 \cdot 3},$$

woraus folgt:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \quad . \quad (6)$$

§ 58. Die Gamma-Funktion.

(Dazu Tabelle I. Seite 396.)

Manchmal ist es bequem, die Lösung physikalischer Probleme durch bestimmte Integrale auszudrücken, deren numerische Werte für eine Reihe von Werten der Variablen mehr oder weniger genau bekannt sind.

Solche bestimmte Integrale sind z. B. die elliptischen (§ 61), zu denen Legendre Tafeln berechnet hat, ferner wären zu nennen die Funktionen:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt, \qquad \int_0^a \frac{dx}{lx}$$

und das für die theoretische Optik wichtige Fresnelsche Integral:

$$\int_0^v \cos \frac{1}{2} \pi v dv, \qquad \int_0^v \sin \frac{1}{2} \pi v dv$$

zu dem von Gilbert Werttabellen gegeben worden sind. Weiter hat Legendre für Werte von n zwischen 1 und 2 Tabellen zu:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

der sogenannten Gamma-Funktion oder dem zweiten Eulerschen Integral, einer sehr wichtigen und merkwürdigen Funktion, berechnet.

Mit Hilfe dieser Zusammenstellungen kann nun der angenäherte Wert aller bestimmten Integrale, welche sich durch die Gamma-Funktion ausdrücken lassen, leicht ermittelt werden.

Liegt n zwischen 1 und 2, dann ist ohne weiteres die Tafel I S. 396 zu verwenden; ist aber n größer als 2, so beachte man folgendes:

Nach der Methode der partiellen Integration ergibt sich leicht:

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x} x^n + n \int e^{-x} x^{n-1} dx$$

somit, da für $n > 1$:

$$\Big[e^{-x} x^n \Big]_0^\infty = 0$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \quad \ldots\ldots \quad (2\,\mathrm{a})$$

Das rechtsstehende Integral läßt sich nun weiter durch partielle Integration reduzieren und man sieht ein, daß man endlich, wenn n zwischen zwei ganzen Zahlen liegt, auf ein Integral kommt, bei dem der Exponent von x zwischen 0 und 1 fällt, dessen Wert also der Legendreschen Tabelle entnommen werden kann — oder man findet, wenn n eine ganze Zahl bedeutet:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad . \quad . \quad (3)$$

Der Leser mache noch sich klar, daß:

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(2) = 1 \qquad \Gamma(0) = \infty$$

und betrachte dann die folgenden Beispiele.

1. Setzen wir in:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1}\, dy$$

$$y = ax$$

so finden wir:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-ax} (ax)^{n-1}\, a\, dx$$

$$a^n \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx$$

d. h.:

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{a^n} \Gamma(n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

2. Wir wollen, ohne auf den Beweis einzugehen, festhalten, daß:

$$2. \int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}\, dy = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad . \quad (5)$$

ist, wenn $y = x/1+x$, somit $dy = dx/(1+x)^2$

$\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}\, dy$ heißt das erste Eulersche Integral oder die Beta-Funktion; man schreibt sie symbolisch:

$$B(m, n)$$

Setzt man in der Beta-Funktion:

$$n = 1 - m$$

so ergibt sich nach (5) ohne weiteres:

$$\int_0^1 \frac{y^{m-1}\, dy}{(1-y)^m} = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{1+x} = \Gamma(m)\,\Gamma(1-m) \quad . \quad . \quad (6)$$

Weiter wollen wir festhalten, daß:

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man in der Beta-Funktion:

$$m = 1 + r \qquad n = 1 - r$$

so finden wir wieder nach (5), daß:

$$\int_0^1 \frac{y^r\,dy}{(1-y)^r} = \int_0^\infty \frac{x^r\,dx}{(1+x)^2} = \Gamma(1+r)\,\Gamma(1-r) \quad . \quad . \quad (8)$$

nun ist aber nach (3):

$$\Gamma(1+r) = r\,\Gamma(r)$$

somit:

$$\Gamma(1+r)\,\Gamma(1-r) = r\,\Gamma(r)\,\Gamma(1-r) \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

$$= \frac{r\pi}{\sin r\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,b)$$

Setzt man im vorstehenden Ausdruck:

$$r = \frac{1}{2}$$

dann erhalten wir, da:

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

leicht die wichtige Relation:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx_{\,n=\frac{1}{2}} = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad (9)$$

3. Setzt man in der Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$x = a^2y^2 \qquad dx = 2\,a^2y\,dy$$

so ergibt sich:

$$\int_0^\infty e^{-a^2y^2}\,dy = \frac{1}{2\,a}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\,a}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wenn nun:

$$a = 1$$

dann ist also:

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Bemerkung.

Die Integrale vom Typus:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

haben besondere Bedeutung; eine Lösung der wichtigen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

wird z. B. durch diese Funktion dargestellt, die uns in der theoretischen Optik, der Theorie der Wärmeleitung usw. begegnet.

Es existieren auch Zusammenstellungen der Integrale, welche sich auf (12) zurückführen lassen, so daß der numerische Wert derartiger Ausdrücke aus Tabellen entnommen werden kann.

In der kinetischen Gastheorie kommen häufig folgende Formen vor:

$$\frac{2\,N m\,\alpha^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^4\,dx \quad \text{und:} \quad \frac{2\,N\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^3 dx \quad (13\,\text{a},\ 13\,\text{b})$$

setzen wir:

$$x^2 = y, \quad \text{somit:} \quad x = y^{\frac{1}{2}}, \qquad dx = \frac{1}{2}\,y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

so ergibt sich, daß:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^4 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{3}{2}}\,dy$$

vid. S. 158, (3) $= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$

somit ist:

vid. S. 158, (3) $\quad \frac{2\,N m\,\alpha^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^4\,dx = \frac{3}{4}N m\,\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$

ebenso finden wir:

$$\frac{2\,N\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^3\,dx = N\alpha/\sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

§ 59. Bestimmung des Volumens bei Rotationskörpern.

Die Volumbestimmung bei Körpern nennt man auch „Kubatur".

Stellen wir uns vor, das Stück AB einer Kurve:

$$y = f(x)$$

(Fig. 68), rotiere um die X-Achse. AB beschreibt dabei die Mantelfläche eines Körpers, dessen Rauminhalt wir berechnen wollen. Denken wir uns zu diesem Zweck in ihn eine Anzahl zu AA' und BB' paralleler Scheiben von der Dicke Δx hineingelegt; — offenbar ist die Summe der Volumina dieser Zylinder:

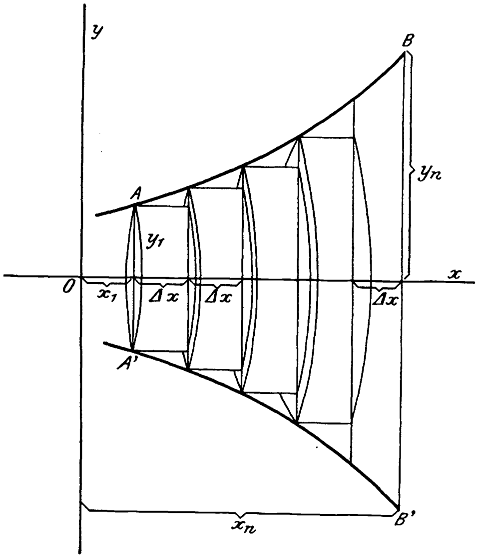

Fig. 68.

$$y_1^2 \pi \Delta x + \ldots . + y_n^2 \pi \Delta x = f^2(x_1) \pi \Delta x + \ldots . + f^2(x_n) \pi \Delta x$$

um einen gewissen Betrag kleiner als der Inhalt von $AA'BB'$; dieser Unterschied wird um so geringer werden, je größer die Anzahl der aneinandergelegten Scheiben, d. h. je geringer ihre Dicke ist, und er wird verschwinden, wenn eine unendliche Anzahl von unendlich geringer Dicke zusammengesetzt wird. Der Rauminhalt eines solchen Zylinders, z. B. an der Stelle:

$$x = a$$

wird nun:

$$f^2(a) \pi \, dx$$

sein, und die Summe aller zwischen:

$$x = x_1 \quad \text{und} \quad x = x_n$$

liegenden Scheiben von der Dicke dx ist offenbar:

$$\pi \int_{x_1}^{x_n} y^2 \, dx = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

das gesuchte Volum des Rotationskörpers.

Entsteht ein Körper durch Rotation einer Kurve um die Y-Achse (Fig. 69), so ergibt sich auf gleiche Weise, wenn:

$$x = \varphi(y)$$

als Volum von: $AA'BB'$:

$$\int_{y=a}^{y=b} x^2\,dy$$

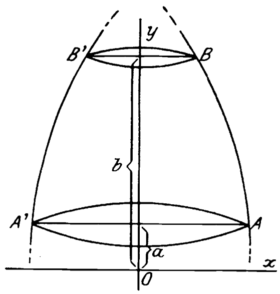

Fig. 69.

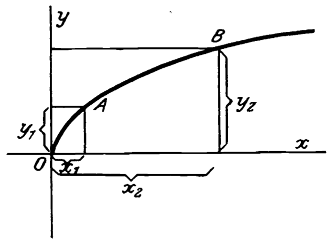

Fig. 70.

Beispiele:

1. Der Leser berechne das Volum des Körpers, welcher entsetzt durch die Rotation des Bogens OB (Fig. 70) der Parabel:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

$$V = \pi \int_{x=0}^{x=x_2} y^2\,dx = 2\,\pi\,p \int_{x=0}^{x=x_2} x\,dx = \left[2\,p\,\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^{x_2}$$

$$= 2\,p\,x_2 \frac{\pi\,x_2}{2} = \frac{1}{2}\,\pi\,y_2{}^2 x_2$$

2. Wir wollen beweisen, daß das Volum einer Kugel mit dem Radius r:

$$\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$$

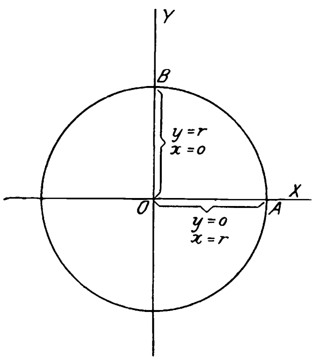

Fig. 71.

ist. Durch die Rotation des Quadranten AB eines Kreises mit dem Radius r um die Y-Achse (Fig. 71) entsteht eine Halbkugel, deren Volum:

$$\pi \int_{y=0}^{y=r} x^2\,dy = \pi \int_{y=0}^{y=r} (r^2 - y^2)\,dy = \frac{2}{3}\,r^3\,\pi$$

beträgt; das Volum der ganzen Kugel ist somit:

$$\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$$

3. Eine Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

rotiert: a) um die Y-Achse, b) um die X-Achse; welche sind die Volumina der entstehenden Rotationskörper?

§ 60. Rektifikation ebener Kurven.

Die Bestimmung der Länge einer Kurve, deren Gleichung gegeben ist, oder eines Stückes derselben nennt man ihre Rektifikation.

a) *Die Gleichung der Kurve ist auf rechtwinklige Koordinaten bezogen.*

Wir sollen die Länge l eines Bogens AB der Kurve:

$$y=f(x)$$

(Fig. 72) ermitteln.

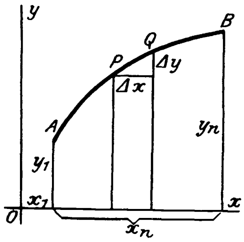

Fig. 72.

Es seien die Koordinaten von P und Q:

$$P\begin{cases} x \\ y \end{cases} \qquad Q\begin{cases} x+\Delta x \\ y+\Delta y \end{cases}$$

dann ist die Sehne $\overline{PQ}$, wir nennen sie Δs:

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Nun wird, wie wir uns schon klargemacht haben, der Unterschied zwischen Bogen und Sehne um so geringer werden, je kleiner wir Δx annehmen, und für:

$$\Delta x=0$$

werden die Verhältnisse:

$$\frac{\text{Sehne}}{\Delta x} \quad \text{und:} \quad \frac{\text{zugehöriger Bogen}}{\Delta x}$$

denselben Grenzwert haben; bezeichnet Δl den zu Δs gehörigen Bogen, so ist:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta l}{\Delta x}=\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

d. h. das Bogendifferential dl ist:

$$dl=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und unser endliches Bogenstück AB hat die Länge:

$$\int_{x_1}^{x_n} dl=\int_{x_1}^{x_n} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Man kann die Kurve natürlich auch durch eine Gleichung:

$$x = \varphi(y)$$

definieren, das heißt y zur unabhängigen Veränderlichen machen, dann ist:

$$dl = \int_{y_1}^{y_n} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

b) *Die Kurve ist in Polarkoordinaten gegeben.*

Es sei die Länge l des zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 liegenden Bogenstückes AB der Kurve:

$$f(r, \varphi) = 0$$

(Fig. 73) zu bestimmen.

Die Punkte P und P_1 sollen die Koordinaten:

$$P \begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \qquad P_1 \begin{cases} r + \Delta r \\ \varphi + \Delta \varphi \end{cases}$$

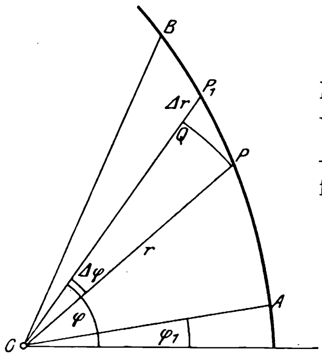

Fig. 73.

haben; das Bogenstück $\widehat{PP_1}$ heiße Δl; wie beschreiben nun mit r einen Bogen PQ, und haben dann im Dreieck $\overline{P_1PQ}$ für die Sehne $\overline{PP_1}$, die wir Δs nennen:

$$\Delta s = \sqrt{\overline{QP}^2 + \overline{QP_1}^2}$$
$$= \sqrt{r^2 \sin^2 \Delta\varphi + \Delta r^2}$$

Der Wert der Verhältnisse:

$$\frac{\Delta s}{\Delta \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta l}{\Delta \varphi}$$

ist um so weniger verschieden, je kleiner wir $\Delta\varphi$ annehmen, je mehr P und P_1 aneinanderrücken, und es wird sein:

$$\lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{\Delta s}{\Delta \varphi} = \lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{\Delta l}{\Delta \varphi} = \frac{dl}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

da ja, wie wir wissen:

$$\lim_{\Delta\varphi = 0} \left(\frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}\right) = 1$$

Das Bogendifferential dl ist also:

$$dl = d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

und unser Bogen AB hat die Länge:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Beispiele:

1. Die Länge des Bogenstückes AB der Parabel Fig. 70 zu bestimmen.

$$y^2 = 2px \qquad y\,dy = p\,dx \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$$

$$dl = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = dy\sqrt{\frac{p^2 + y^2}{p^2}}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} dl = \frac{1}{p}\int_{y_1}^{y_2} dy\,\sqrt{p^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{y}{2}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2}\,l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right)\right]_{y_1}^{y_2}$$

2. Man beweise, daß der Umfang eines Kreises $2r\pi$ ist.

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad x\,dx + y\,dy = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$dl = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} = dx\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}$$

Die Länge des Bogens im ersten Quadranten ($\widehat{AB}$, Fig. 71) ist dann:

$$L = \int_{x=0}^{x=r} dl = r\int_{x=0}^{x=r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \arcsin\frac{x}{r}\right]_{x=0}^{x=r} = \frac{r\pi}{2}$$

der Umfang des ganzen Kreises:

$$4L = 2r\pi$$

3. Die Länge eines Bogens AB der Kettenlinie (Fig. 74) zu bestimmen; ihre Gleichung lautet:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

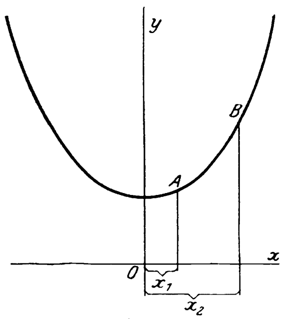

Fig. 74.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{x}}-e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad \left(\frac{dl}{dx}\right)^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

somit:

$$=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

also:

$$\frac{dl}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$l=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

4. Man bestimme die Länge eines Bogenstückes AB bei der logarithmischen Spirale (Fig. 75)

$$r=e^{\varphi}$$

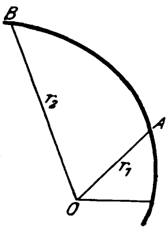

Fig. 75.

$$dl=d\varphi\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}=d\varphi\sqrt{2\,(e^{\varphi})^2}=r\,d\varphi\sqrt{2}$$

nun ist:

$$d\varphi=\frac{dr}{e^{\varphi}}=\frac{r}{r}$$

somit:

$$dl=dr\sqrt{2}\;;\quad l=\sqrt{2}\int_{r=r_1}^{r=r_2}dr=(r_2-r_1)\sqrt{2}$$

5. Der Leser zeige nun selbst, daß die Länge des Bogens einer sogenannten Zykloide:

$$x=r\,(\varphi-\sin\varphi) \qquad y=r\,(1-\cos\varphi)$$

von $\varphi=\varphi_1$ bis $\varphi=\varphi_2$:

$$4r\left(\cos\frac{\varphi_1}{2}-\cos\frac{\varphi_2}{2}\right)$$

ist.

§ 61. Bemerkung über die sogenannten elliptischen Integrale.

Funktionen, in denen eine Irrationalität wie:

$$\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$$

oder:

$$\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$$

vorkommt, also unter dem Wurzelzeichen ein Polynom dritten oder vierten Grades — (eventuell tritt auch noch x mit ganzzahligen

Exponenten auf) —, sind nicht allgemein integrierbar, d. h. es ist nicht möglich, das Integral eines solchen Ausdruckes so umzugestalten, daß es auf vollständig lösbare Integrale zurückgeführt erscheint.[1])

Derartige Integrale nennt man nach Legendre „elliptische“; ihr Wert in speziellen Fällen ist nur näherungsweise bestimmbar, nach einem Verfahren, das wir später andeuten werden.

Probleme der Kurventheorie und der theoretischen Physik führen häufig zu derartigen Ausdrücken, so z. B. auch die Rektifikation der Ellipse.

Das Verhältnis:

$$\frac{c}{a} = e$$

nennen wir die Exzentrizität einer Ellipse, wenn:

$$c^2 = a^2 - b^2; \quad \text{somit ist:} \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

Substituieren wir jetzt von hier in die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so ergibt sich:

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$$

daraus weiter:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(1 - e^2)x^2}{a^2 - x^2}$$

und für die Länge eines Quadranten der betrachteten Kurve das elliptische Integral:

---

1) Vorausgesetzt, daß die Gleichungen:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

beziehungsweise:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

nicht mehrere gleiche Lösungen haben, denn wenn dies der Fall ist, können die Irrationalitäten auf Formen, wie sie im § 54 betrachtet worden sind, zurückgeführt werden; so ist z. B.

$$\int x^2 \sqrt{x^3 - 8x^2 - 21x - 18}\, dx = \int x^2 \sqrt{(x-3)^2(x-2)}\, dx$$
$$= \int x^2 (x-3)\sqrt{x-2}\, dx$$

$$l = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx\ ^{1)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung können wir noch etwas vereinfachen, wenn wir:

$$x = a \sin\varphi, \quad \text{somit } \sqrt{1 - x^2} = \cos\varphi, \quad dx = \cos\varphi\, d\varphi$$

setzen.

Wir finden:

$$l = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (1\,\text{a})$$

Der Teil, welcher bei Behandlung einer irrationalen Funktion von der Form:

$$\int f(x, \sqrt{e + dx + cx^2 + bx^3 + ax^4})\, dx$$

als nicht weiter auflösbar hinterbleibt, gehört stets in eine der drei folgenden Gruppen:

a) Elliptische Integrale erster Klasse:

$$F(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} \quad \text{oder:} \quad F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad (2)$$

$$x = \sin\varphi$$

Die strenge Behandlung von Pendelbewegungen führt zu derartigen Ausdrücken.

b) Elliptische Integrale zweiter Klasse:

$$E(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx \quad \text{oder:} \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \quad (3)$$

Eine solche Funktion ergab die Rektifikation der Ellipse (Gleichung (1)).

---

[1])
$$\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \int_0^a \sqrt{\frac{(a^2 - e^2x^2)(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2}}\, dx$$

$$= \int_0^a \frac{\sqrt{(a^2 - e^2x^2)(a^2 - x^2)}}{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^a \frac{\sqrt{e^2x^4 - a^2x^2 - e^2a^2x^2 + a^4}}{a^2 - x^2}\, dx$$

c) Elliptische Integrale dritter Klasse:

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \quad . \quad . \quad (4)$$

n bedeutet eine reelle Zahl, den sogenannten Legendreschen Parameter.

Sind die oberen Grenzen in a) und b):

$$x = 1$$

resp.:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

so heißen die Integrale vollständige.

Die verschiedenen elliptischen Integrale sind durch gewisse Formelsysteme miteinander verknüpft; für die erster und zweiter Klasse hat Legendre Tabellen berechnet.

§ 62. Komplanation der Rotationsflächen.

Die Ausmessung einer gekrümmten Fläche heißt ihre Komplanation.

Wir wollen ermitteln, wie sich der Inhalt einer Fläche berechnen läßt, welche durch Rotation einer Kurve um die X-Achse oder Y-Achse entsteht. Es rotiere (Fig. 76) die Kurve:

$$y = f(x)$$

um die X-Achse; sie beschreibt dabei die Mantelfläche eines Körpers, dessen Rauminhalt zu bestimmen wir bereits gelernt haben.

Die Punkte P und Q sollen die Koordinaten:

$$P\begin{cases} x \\ y \end{cases} \quad \text{und} \quad Q\begin{cases} x + \Delta x \\ y + \Delta y \end{cases}$$

haben; die Sehne $\overline{PQ}$ zwischen ihnen — wir nennen sie Δs — liefert die Mantelfläche ΔF eines Kegelstumpfes:

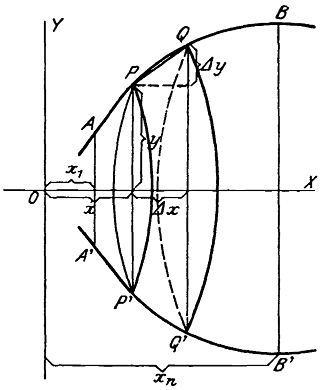

Fig. 76.

$$\Delta F = \pi\{2y + \Delta y\}\Delta s$$

Je kleiner wir nun Δx annehmen, um so geringer ist der Unterschied zwischen:

$$\Delta s = \overline{PQ} \quad \text{und} \quad \Delta l = \widehat{PQ}$$

resp. den von diesen Linien beschriebenen Flächengebilden ΔF und ΔO und es wird sein:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta O}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\pi\{2y+\Delta y\}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\pi\{2y+\Delta y\}\frac{\Delta l}{\Delta x}$$

$$\frac{dO}{dx}=2\pi y\frac{dl}{dx},\quad \text{resp.:}\quad dO=2\pi y\,dl \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo dl das Bogendifferential:

$$dl=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

bedeutet.

Das ganze durch die Rotation von $\widehat{AD}$ entstandene Flächenstück eO ist dann:

$$O=2\pi\int_{x_1}^{x_n}y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn x_1 und x_n die Abszissen von resp. A und B bedeuten.

Beispiele:

1. Man bestimme die Mantelfläche des Kegels, welche durch die Rotation des Stückes OC (Fig. 77) der geraden Linie:

$$y=mx$$

um die X-Achse entsteht.

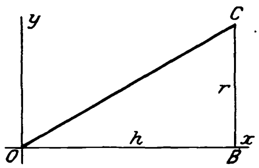

Fig. 77.

$$\frac{dy}{dx}=m \qquad dO=2\pi y\,dl=2\pi mx\sqrt{1+m^2}\,dx$$

$$O=2\pi m\sqrt{1+m^2}\int_{x=0}^{x=h}x\,dx=\pi m\sqrt{1+m^2}\cdot h^2$$

nun ist:

$$m=\frac{r}{h}$$

somit:

$$\pi m\sqrt{1+m^2}\cdot h^2=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=2r\pi\cdot\frac{OC}{2}$$

2. Wir wollen die Mantelfläche des Rotationsparaboloids Fig. 78 bestimmen; die Gleichung der Parabel, welcher der erzeugende Bogen OP angehört, ist:

$$y^2=2px$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y} \qquad dl=\frac{dx}{y}\sqrt{p^2+2px} \qquad y\,dl=dx\sqrt{p^2+2px}$$

$$O = 2\pi \int_{x=0}^{x=x_1} y\,dl = 2\pi \int_{x=0}^{x=x_1} dx\sqrt{p^2 + 2px} = \frac{2\pi}{3p}\Big[(p^2 + 2px)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{x_1}$$

$$= \frac{2\pi}{3p}\left\{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right\}$$

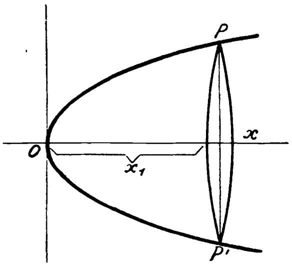

Fig. 78.

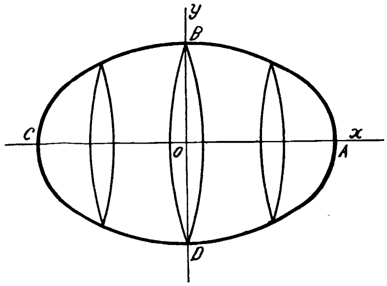

Fig. 79.

3. Der Leser beweise, daß die Oberfläche der Kugel $4r^2\pi$ ist.

4. Die Bestimmung der Oberfläche eines Rotationsellipsoids (Fig. 79), entstanden durch die Rotation der Ellipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2}{x^2} = 1$$

um die X-Achse.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad dl = \frac{b}{a^2 y}\sqrt{a^4 - e^2x^2} \quad ^{1)}$$

$$dO = 2\pi y\,dl = \frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2x^2}\,dx = \frac{2\pi b e}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}\,dx$$

Durch die Rotation des Bogens $\widehat{Ab}$ wird somit die Oberfläche:

$$O = \frac{2\pi b e}{a^2}\int_{x=0}^{x=a}\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}\,dx$$

erzeugt; die Fläche des ganzen Ellipsoids ist offenbar:

$$2\,O = 2b^2\pi + \frac{2a^2\pi b}{e}\arcsin\frac{e}{a}.$$

Entsteht eine Rotationsfläche, indem sich eine Kurve:

$$y = f(x)$$

[1]) e bedeutet die numerische Exzentrizität, $b^2 = a^2 - e^2$.

um die Y-Achse dreht, so ist, wenn wir y zur unabhängigen Variablen in der gegebenen Gleichung machen:

$$x = \varphi(y)$$

$$dl = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad dO = 2\pi x\, dl$$

$$O = 2\pi\int x\, dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Der Leser berechne selbst die Oberfläche des Rotationskörpers, welche durch die Drehung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die Y-Achse entsteht; sie ist:

$$2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{e}\, l\left(\frac{a+e}{b}\right)$$

resp. da:

$$b^2 = a^2 - e^2 \qquad 2l\left(\frac{a+e}{b}\right) = l\left(\frac{a+e}{b}\right)^2$$

weiter:

$$2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e}\, l\left(\frac{a+e}{a-e}\right)$$

§ 63. Wiederholte Integration, mehrfache Integrale.

a) *Wiederholte Integration.* — Wir erinnern uns, daß wir zu einem zweiten, dritten und höheren Differentialquotienten einer Funktion $f(x)$ gekommen sind, indem wir die erste Abteilung nochmals differenzierten, vom Ergebnis wiederum die Ableitung nach x bildeten, usf. Umgekehrt können wir das Ergebnis einer ersten Integration ein zweites Mal integrieren, dieses Resultat von neuem so behandeln, usf. Daß derartiges mit einem gegebenen Ausdruck $f(x)$ gehchehen soll, daß etwa das Ergebnis der ersten Integration:

$$\varphi(x) + C = \int f(x)\, dx$$

nochmals integriert werden muß, deuten wir an, indem wir schreiben:

$$\int dx \int f(x)\, dx$$

Beispiele:

$$1. \quad \int dx \int dx \int x^3 dx = ?$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$\int \left\{ \frac{1}{4} x^4 + C \right\} dx = \frac{1}{4} \int x^4 dx + C \int dx = \frac{1}{20} x^5 + Cx + C'$$

$$\frac{1}{20} \int x^5 dx + C \int x dx + C' \int dx = \frac{1}{120} x^6 + \frac{C}{2} x^2 + C'x + C''.$$

Man beachte, daß so viele Konstanten $C, C', C'' \ldots.$ im Resultat auftreten, als Integralzeichen vorgeschrieben sind.

2. Man suche einen allgemeinen Ausdruck für s, wenn:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

$$s = \int dt \int g dt = \frac{g}{2} t^2 + Ct + C'$$

b) *Mehrfache Integrale.* — Betrachten wir den in Fig. 80 dargestellten Körper, einen geraden Kegel mit elliptischer Grundfläche. Jede Ebene, die parallel zur Y-Z-Ebene zwischen $x = 0$ und $x = c$ liegt, schneidet das Gebilde in einer Ellipse; die Halbachsen dieser Ellipsen sind aber Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ von x, denn sie werden um so größer, je mehr wir nach rechts rücken, und zwar nach dem Gesetze, nach welchem die Ordinaten gerader Linien, welche durch den Ausgangspunkt des Koordinatensystems gehen, zunehmen, d. h.:

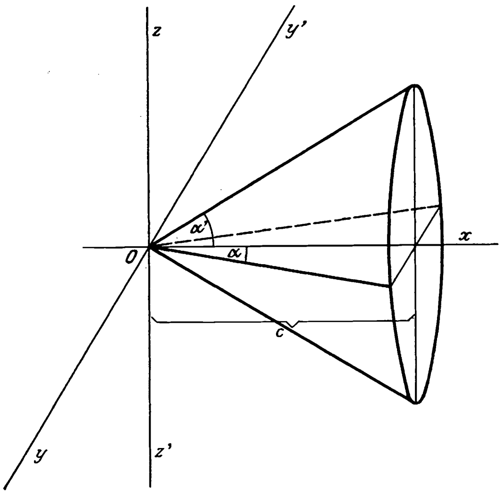

Fig. 80.

$$f(x) = ax \qquad \varphi(x) = a_1 x$$

und es ist die allgemeine Gleichung der Schnittellipse somit:

$$\frac{y^2}{a^2x^2} + \frac{z^2}{a_1{}^2x^2} = 1$$

zu schreiben. Der Flächeninhalt irgend einer dieser Schnittkurven in der Entfernung x von der Y-Z-Ebene ist dann dargestellt durch:

$$4\frac{a_1}{a}\int\limits_{y=0}^{y=ax} dy\sqrt{a^2x^2-y^2}$$
$$= \pi a a_1 x^2$$

wie sich nach (§ 55, Bsp. 3) ohne weiteres ergibt, wenn man ax statt a und $a_1 x$ statt b setzt. Wir haben ax bei der Integration wie eine Konstante behandelt, das Ergebnis der Rechnung, der allgemeine Ausdruck für die Fläche einer der Schnittellipsen präsentiert sich uns nun in seiner Abhängigkeit von x. Das Volumen irgend einer elliptischen Scheibe von der Dicke dx, in der Entfernung x parallel zur Y-Z-Ebene ist offenbar:

$$\pi a a_1 x^2 dx,$$

somit das Volumen des ganzen Körpers durch:

$$\pi a a_1 \int\limits_0^c x^2 dx = \frac{\pi a a_1 c^3}{3}$$

oder durch das sogenannte Doppelintegral:

$$\int\limits_0^c dx\, 4\frac{a_1}{a}\int\limits_{y=0}^{y=ax} dy\sqrt{a^2x^2-y^2} = 4\frac{a_1}{a}\int\limits_0^c\int\limits_0^{y=ax} dx\,dy\sqrt{a^2x^2-y^2}$$

gegeben.

Rein formal haben wir also, wenn uns ein Doppelintegral:

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d F(x,y)\,dx\,dy$$

vorgelegt ist (c und d können noch, wie im Beispiel, Funktionen von x sein), so vorzugehen, daß wir etwa erst $F(x_1 y)$ nnr als Funktion von y betrachten und zwischen den Grenzen c und d integrieren; — das Ergebnis dieser Rechnung ist dann als Funktion von x zwischen den Grenzen a und b zu integrieren.

Ob wir zuerst die eine oder die andere Integration vornehmen, ist natürlich gleichgültig — es darf nur keine Verwechslung der Grenzen, zwischen denen jede einzelne Integration auszuführen ist, vorkommen.

Die Behandlung eines drei- — $n$fachen Integrales:

$$\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

beziehungsweise:

$$\int dx_1 \int dx_2 \ldots . \int dx_n\, f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$$

bedarf nach dem Gesagten wohl keiner Erläuterung mehr. Doppelintegrale spielen bei der Kubatur von Körpern und der Komplanation von Flächen eine bedeutende Rolle, — wir gehen jedoch auf dieses Kapitel nicht näher ein.

§ 64. Verfahren zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale.

Wir haben gelernt, von Kurvenbögen begrenzte Flächenstücke durch Berechnung von bestimmten Integralen auszumessen. Jetzt wollen wir den Weg in entgegengesetzter Richtung gehen.

Ist etwa ein allgemeiner Integral $\int f(x)dx$ nicht lösbar, so können wir doch den Wert von $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ finden, indem wir die Kurve $f(x)$ zeichnen, die Ordinaten y_0 und y_n in den Punkten x_0 und x_n errichten und dann die zwischen dem Kurvenbogen, der X-Achse und den gezeichneten Ordinaten eingeschlossene Fläche irgendwie ausmessen.

Eine solche Flächenmessung kann mit dem sogenannten Planimeter vorgenommen werden, einer sinnreich konstruierten mechanischen Vorrichtung, — oder wir schneiden die gezeichnete Figur aus einem Blatt Papier oder einem anderen gleichförmigen Material aus; ist nun w_1 das Gewicht einer bekannten Papierfläche a_1, und w das Gewicht des ausgeschnittenen Stückes, so ergibt sich dessen Fläche x offenbar aus der Proportion:

$$w_1 : a = w : x.$$

Wir können aber auch noch einen anderen Weg einschlagen. Ist $f(x)$ die Gleichung der Kurve $\ldots AN \ldots$ in Fig. 81, so bedeutet:

$$F = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

die Fläche $A'\widehat{AN}N'$. Wir wollen nun zwischen y_0 und y_n eine ungerade Zahl von Ordinaten errichten, so daß die betrachtete Fläche in eine gerade Anzahl von Streifen $A'\widehat{AB}B'$, $B'\widehat{BC}C'$, usw. zerlegt wird.

Die Summierung der Trapeze: $A'A''C''C'$, $C'\overline{C''E''}E'$ usf.:

$$2h\{y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{n-1}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

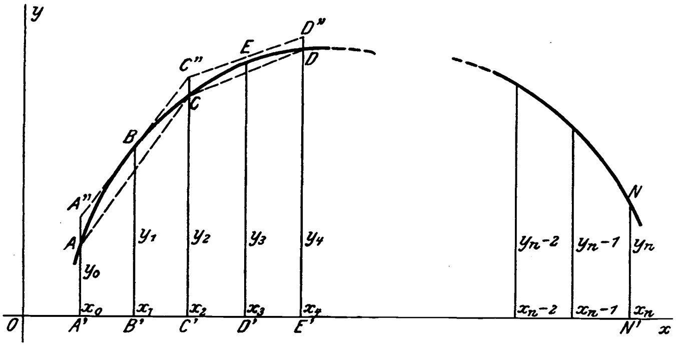

Fig. 81.

gibt dann einen Näherungswert N_1 für $A'\overset{\frown}{AN}N'$. Ebenso liefert auch die Summierung der Trapeze: $A'\overline{ACC'}$, $C'\overline{CEE'}$ usf.:

$$2h\left\{\frac{y_0+y_2}{2}+\frac{y_2+y_4}{2}+\ldots+\frac{y_{n-2}+y_n}{2}\right\}$$

$$=2h\left\{\frac{y_0}{2}+y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}+\frac{y_n}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

einen Näherungswert N_2. In unserem Fall ist ersichtlich:

$$N_2 < F < N_1$$

Um nun eine noch größere Genauigkeit zu erzielen, können wir das arithmetische Mittel aus N_2 und N_1 einführen:

$$N_3 = \frac{N_1+N_2}{2}$$

da offenbar:

$$N_2 < N_3 < N_1$$

muß ja N_3 dem Wert F näher liegen als N_1 und N_2. Aus (1) und (2) ergibt sich ohne weiteres, daß:

$$N_3 = h\left\{\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots+y_{n-2}+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right\} \quad (3)$$

Dieser Ansatz ist die sogenannte Trapezformel.

N_3 ist nämlich nichts anderes als die Summe der Trapeze: $A'ABB'$, $B'BCC'$ usf., die sich ergeben, wenn man die obere Begrenzung jedes einzelnen Streifens als gerade Linie auffaßt. Noch einen Schritt weiter geht die Simpsonsche Regel; augenscheinlich ist in unserem Fall wieder:

$$N_3 < F < N_1.$$

Die Simpsonsche Regel bestimmt nun als weitere Annäherung N_4, einen zwisehen N_3 und N_1 liegenden Wert, der aber unter der Voraussetzung gebildet wird, daß N_3 dem Wert F näher liegt als N_1:

$$N_4 = \frac{1}{3} N_1 + \frac{2}{3} N_3,$$

und aus (1) und (3) ergibt sich nun, daß:

$$N_4 = \frac{1}{3} h \left\{ y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Beispiele:

1. Es ist der Wert von:

$$l2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

nach der Trapezregel und nach der Simpsonschen Regel zu berechnen; wir wollen zwischen:

$$y_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad y_n = 1/2$$

neun Ordinaten in gleichem Abstand h voneinander legen; also:

$$h = 0{\cdot}1 \qquad n = 10$$

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 1 & y_0 = 1/1{\cdot}0 \\
x_1 = 1{\cdot}1 & y_1 = 1/1{\cdot}1 \\
x_2 = 1{\cdot}2 & y_2 = 1/1{\cdot}2 \\
x_3 = 1{\cdot}3 & y_3 = 1/1{\cdot}3 \\
\vdots & \vdots \\
x_9 = 1{\cdot}9 & y_9 = 1/1{\cdot}9 \\
x_{10} = 2 & y_{10} = 1/2
\end{array}$$

Berücksichtigt man bei den Divisionen zur Bestimmung von $y_0 \ldots$ neun Dezimalstellen, so ergibt sich nach der Trapezregel:

$$N_3 = 0{\cdot}69377140$$

nach der Simpsonschen Formel:

$$N_4 = 0{\cdot}69315024$$

Nun berechne man bis auf 8 Dezimalstellen:

$$l\,2 = \frac{\log 2}{M} \qquad (\S\ 12)$$

$$(\log 2 = 0{\cdot}3010300 \qquad M = 0{\cdot}434294482)$$

und zeige, daß die Abweichung bei Verwendung der Trapezregel:

$$0{\cdot}00062421$$

beträgt, bei Verwendung der Simpsonschen Formel hingegen nur:

$$0{\cdot}00000305$$

Über die angenäherte Auswertung der Geschwindigkeitsgleichungen gewisser Reaktionen, siehe auch bei R. Wegscheider, Zeitschrift f. phys. Chemie, **41**, 52, 1902 und bei G. Bredig und F. Epstein, Zeitschrift f. anorg. Chemie **42**, 341, 1904.

V. Abschnitt.

Über unendliche Reihen und ihre Verwendung.

§ 65. Allgemeines über Reihen.

Wir grenzen uns auf einer geraden Linie Ax ein Stück AB (Fig. 82) ab, dessen Länge a heißen soll. Teilen wir AB im Punkt O_1 in die Hälfte, halbieren dann wieder $O_1 B$ im Punkte O_2,

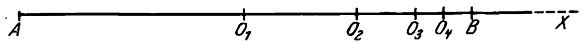

Fig. 82.

weiter $O_2 B$ im Punkte O_3 usf., so werden wir mit den weiteren Halbierungspunkten so nahe an B herankommen können, als es uns beliebt, und nehmen wir eine genügende Anzahl von Posten in der Summe:

$$A O_1 + O_1 O_2 + O_2 O_3 + \ldots\ldots + O_{n-1} O_n + \ldots.$$

so können wir den Unterschied zwischen dem Ergebnis dieser Addition und AB beliebig klein machen. Dies ist die geometrische Bedeutung der unendlichen Folge von Größen:

$$\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \ldots. + \left(\frac{a}{2}\right)^n + \ldots.$$

Solch ein Ausdruck nun, in welchem die in unbegrenzter Anzahl einander folgenden Glieder sich nach irgend einem bestimmten Gesetz ergeben, nennen wir eine unendliche Reihe.

Nähert sich die Summe einer Anzahl von aufeinanderfolgenden Gliedern in einer derartigen Reihe — eben wie in unserem Beispiel — immer mehr irgend einem bestimmten endlichen Wert, wenn die Zahl der addierten Glieder ohne Grenze wächst, so nennen wir die Reihe konvergent.

Die Summe einer unendlichen Anzahl von Gliedern einer konvergenten Reihe heißt ihre Grenze. Steigt hingegen die Summe mit zunehmender Anzahl der addierten Glieder über jeden endlichen Betrag, wie etwa bei:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots . + n + \ldots .$$

so sprechen wir von einer divergenten Reihe.

Eine Reihe, deren Grenzwert unbestimmt bleibt, ist, z. B.:

$$a - a + a - a + a \ldots \ldots$$

Es heiße S der Grenzwert (oder die Summe einer unendlichen Anzahl von Gliedern) der Reihe:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n + \ldots \quad . \quad . \quad (1)$$

$$0 < r < 1$$

Brechen wir die Addition bei irgend einem Glied, z. B. dem $n$ten ab; s_n bedeute die Summe bis zu diesem, σ_n die Summe der weggelassenen Glieder.

Dann ist:

$$S = s_n + \sigma_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots . + ar^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Multiplikation der letzteren Gleichung mit r ergibt:

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots . + ar^n \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Subtraktion: 3) — 4) liefert:

$$s_n (1 - r) = a (1 - r^n)$$

die Summe der n ersten Glieder ist also:

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \overbrace{\frac{a}{1 - r}}^{\mathrm{I}} - \overbrace{\frac{ar^n}{1 - r}}^{\mathrm{II}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da ja r einen echten Bruch bedeutet, wird II um so kleiner sein, je größer wir n annehmen, und offenbar ist:

$$\lim_{n = \infty} \frac{ar^n}{1 - r} = 0$$

Wir finden also nach (5)

$$\lim_{n = \infty} s_n = \frac{a}{1 - r} = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als Grenze von (1), welchen Ausdruck wir eine geometrische Reihe nennen.

Wir sollen nun die Größe des Fehlers bestimmen, den wir begehen, wenn wir statt der Grenze einer derartigen Reihe die Summe einer endlichen Anzahl Glieder, z. B. der n ersten nehmen; der Fehler ist offenbar:

$$\varsigma_n = S - s_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} + \frac{ar^n}{1-r}$$
$$= a\frac{r^n}{1-r}$$

Daß derartige geometrische Progressionen, wie die eben besprochene, eine endliche Grenze haben, ist von vornherein leicht einzusehen; nicht bei jeder Reihe aber ist die Entscheidung so leicht, ob sie konvergiert oder divergiert.

Wir wollen einige diesbezügliche Anhaltspunkte kennen lernen.

a) Eine Reihe, deren Glieder alternierend positives und negatives Vorzeichen haben, wie etwa:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + u_{2n} - u_{2n+1} + \ldots \quad (7)$$

konvergiert unbedingt, wenn die Reihe:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{2n} + u_{2n+1} + \ldots \quad (8)$$

eine endliche Grenze S hat, d. h. konvergent ist.

Dies machen wir nun folgendermaßen klar:

Wir setzen:

$$u_0 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} + \ldots = \sigma_1$$

und die Summe:

$$u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n+1} \ldots = \sigma_2$$

dann ist (8)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = S$$

und (7)

$$\sigma_1 - \sigma_2$$

Da ihre Addition die endliche Summe S ergibt, müssen offenbar σ_1 und σ_2 endliche Werte sein, — dann ist aber auch ihre Differenz:

$$\sigma_1 - \sigma_2$$

ein endlicher Betrag, das heißt Reihe (7) ist ebenfalls konvergent.

b) Man soll eine Reihe:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots \quad (9)$$

auf Konvergenz untersuchen.

Es sei nun:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_v + \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

eine andere Reihe, deren Konvergenz feststeht, und wir finden, daß:

$$u_n < v_0, \quad u_{n+1} < v_1, \quad u_{n+2} < v_2, \ldots . \quad u_{n+p} < v_p, \ldots \qquad (11)$$

ist; dann ist erwiesen, daß auch die zu untersuchende Reihe (9) konvergiert.

Die unendliche Folge:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots . + u_{n+p} + \ldots$$

muß ja nach (11) eine endliche Grenze haben, und auch die Summe des n ersten Gliedes:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots . + u_{n-1}$$

kann als Ergebnis der Addition einer begrenzten Anzahl endlicher Beträge nur ein endlicher Wert sein.

c) Haben wir eine Reihe:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots . + u_n + \ldots . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

zu untersuchen, und finden, daß vom $n$ten Glied ab:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \ldots . < k \quad . \quad . \qquad (13)$$

bleibt, wo k eine bestimmte Zahl:

$$0 < k < 1$$

bedeutet, so ist damit erwiesen, daß die betrachtete Reihe konvergiert; die Glieder vom $n$ten an sind ja kleiner als die entsprechenden der konvergenten geometrischen Reihe:

$$u_n + u_n k + u_n k^2 + \ldots .$$

Beispiele:

1. In der Reihe:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots . + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \quad . \quad . \qquad (14)$$

sind die Quotienten der aufeinander folgenden Glieder:

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{x}{2}, \ldots . \quad \frac{x}{n}, \ldots .$$

kleiner als 1, wenn n größer ist als x, und dies muß offenbar einmal eintreten, daß das wachsende n den Betrag des x überschreitet; die betrachtete Reihe ist also konvergent für jeden endlichen Wert von x.

Ebenso sind dies auch die Reihen:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Daß nämlich die Reihen:

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

beziehungsweise:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

für jeden endlichen Wert des x konvergieren, kann der Leser leicht selbst nach der Regel c) dartun; nach Regel a) folgt, daß dann auch die zu untersuchenden Reihen (15) und (16) konvergent sind.

Stellen wir uns vor, zwei Reihen:

a) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

b) $$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$$

haben dieselbe Grenze S.

Wir wollen nun aus irgend einem Grunde statt dieser Summe einer unendlichen Anzahl Glieder, die der ersten n Posten der Reihe a) oder b) als Näherungswert verwenden.

Der Fehler, den wir dann begehen, ist offenbar:
bei a)

$$\sigma' = S - s'_n$$

wenn s'_n die Summe:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \dots$$

bedeutet, ebenso ist der Fehler:
bei b)

$$\sigma'' = S - s''_n$$

s''_n heiße die Summe:

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

Ist nun:

$$\sigma'' < \sigma'$$

so sagen wir: b) konvergiert rascher als a). Der Fehler, den wir bei Verwendung von s''_n als Näherungswert an Stelle von S machen, ist kleiner, als der, den wir bei Verwendung von s'_n begehen würden; b) die rascher konvergierende Reihe ist also für unsere

Zwecke besser geeignet und auch bequemer als a). Wir brauchen nämlich weniger Glieder von b) zu summieren, um die gleiche Annäherung an S zu erreichen, wie sie erst die Addition einer größeren Anzahl Glieder der Reihe a) gibt.

§ 66. Die Mac-Laurinsche Reihe.

Mit der Darstellung von Funktionen durch konvergente Reihen beschäftigen wir uns deshalb, um in diesen Reihen Ausdrücke zu gewinnen, welche uns die Berechnung der numerischen Werte der betreffenden Funktionen für gegebene Werte der unabhängigen Variablen gestatten.

Wir werden z. B im folgenden sehen, daß:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

also etwa:

$$e^{0 \cdot 5} = 1 + \frac{0 \cdot 5}{1} + \frac{0 \cdot 5^2}{2!} + \frac{0 \cdot 5^3}{3!} + \frac{0 \cdot 5^4}{4!} + \ldots.$$

ist, d. h. der Wert von $e^{0 \cdot 5}$ ist gleich der Summe einer unendlichen Anzahl Glieder der rechtsstehenden Reihe. Eine unendliche Anzahl von Summanden können wir nun allerdings nicht addieren, d. h. exakt können wir zwar den numerischen Wert der Funktion e^x für ein gegebenes x nicht feststellen, — wohl aber können wir ihn mit einem um so höheren Grad der Annäherung berechnen, je mehr Posten der rechten Seite wir summieren.

Für die Entwicklung von Funktion in eine Reihe, nach ganzzahligen steigenden Potenzen der unabhängigen Variablen ist nun die durch den Taylorschen Satz gegebene Methode die wichtigste; ein Spezialfall der Taylorschen ist die Mac-Laurinsche Reihe, die wir zuerst besprechen wollen.

Es sei uns eine Funktion:

$$u = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gegeben, von der wir wissen, daß sie selbst und auch jede ihrer Ableitungen:

$$\frac{du}{dx} = f'(x), \quad \frac{d^2u}{dx^2} = f''(x), \ldots \qquad \frac{d^n u}{dx^n} = f^n(x), \ldots$$

endlich bleibt, solange x endlich ist!

Es soll nun möglich sein, die gegebene Funktion durch eine unendliche konvergente Reihe:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots. \quad . \quad . \quad (2)$$

darzustellen, die für jeden endlichen Wert von x richtig bleibt und in der A, B, $C, \ldots$ Konstanten bedeuten; ihre Werte wollen wir jetzt ermitteln.

Sukzessive Differentiation von (2) ergibt zunächst:

$$\frac{du}{dx} = f'(x) = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + \ldots \qquad (3\text{a})$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f''(x) = 2\,C + 3\cdot 2\,Dx + 4\cdot 3\,Ex^2 + \ldots \qquad (3\text{b})$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = f'''(x) = 3\cdot 2\,D + 4\cdot 3\cdot 2\,Ex + \ldots \qquad (3\text{c})$$

usf.

Nun soll, wie gesagt, (2) und somit auch (3a), (3b), (3c) richtig bleiben für jeden beliebigen Wert von x, also auch, wenn man x in dieser Relation gleich null setzt; tuen wir das, dann finden wir:

aus 2) $\qquad A = f(0)$

aus 3a) $\qquad B = f'(0)$

aus 3b) $\qquad 1\cdot 2\cdot C = f''(0) \qquad C = \frac{1}{2!} f''(0)$

aus 3c) $\qquad 1\cdot 2\cdot 3\,D = f'''(0) \qquad D = \frac{1}{3!} f'''(0)$

usf.

Jetzt führen wir die für A, B, C, $D \ldots$ gefundenen Werte in (2) ein und erhalten so folgenden Ausdruck:

$$u = f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (4)$$

die Mac-Laurinsche oder Stirlingsche Reihe.

Wir wollen, um das eben Durchgenommene ganz zu erfassen, gleich einige Funktionen betrachten, die nach diesem Schema durch konvergente Reihen darstellbar sind.

1) Die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$.

Es sei:

$$u = f(x) = \sin x$$

dann ist:

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & \qquad f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f^{IV} x &= \sin x & f^{IV}(0) &= \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

usf.

Substitution der Werte von $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)\ldots.$ in das Mac-Laurinsche Schema (4) ergibt:

$$u = \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die sogenannte Sinusreihe.

Der Leser entwickle nun selbst die Cosinusreihe:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Beide Reihen sind konvergent für jeden endlichen Betrag des x (vid. §. 65).

Man braucht nur die Werte der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ für Winkel zwischen:

$$\alpha = 0 \quad \text{bis} \quad \alpha = 45^0$$

i. e.

$$x = 0 \quad \text{bis} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

berechnen, denn die Sinusse und Cosinusse der Winkel zwischen:

$$\alpha = 45^0 \quad \text{bis} \quad \alpha = 90^0$$

i. e.

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{bis} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

ergeben sich aus den Formeln:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$$

Nehmen wir an, wir hätten bereits eine Tabelle der Sinusse und Cosinusse berechnet, welche zu den Winkeln zwischen 0^0 und 45^0 gehören und sollen jetzt die Werte von:

$$\sin 72^0 \quad \text{und:} \quad \cos 72^0$$

angeben.

$$\sin 72^0 = \sin(90^0 - 18^0) = \cos 18^0$$
$$\cos 72^0 = \cos(90^0 - 18^0) = \sin 18^0$$

2. Die Reihen für die Exponentenfunktionen e^x und a^x:

$$u = f(x) = e^x$$

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{d^2e^x}{dx^2} = \ldots \frac{d^ne^x}{dx^n} = \ldots = f'(x) = f''(x) = \ldots f^n(x) \ldots$$
$$= e^x$$

setzen wir in diesen Relationen x gleich null, so ergibt sich:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots . f^n(0) = \ldots . = e^0 = 1$$

und das Mac-Laurinsche Schema liefert:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

setzt man hier x gleich 1, so ergibt sich:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

Man zeige ferner, daß:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

und prüfe noch die Entwickelung:

$$a^x = a + x\,l\,a + \frac{x^2 (l\,a)^2}{2!} + \frac{x^3 (l\,a)^3}{3!} + \dots \quad . \quad . \quad (8)$$

Die im Vorstehenden betrachteten Funktionen ließen sich nach dem Mac-Laurinschen Satz durch Reihen darstellen, die für jeden endlichen Wert des x konvergent sind, d. h. das Entwicklungsschema:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

blieb gültig für jeden endlichen Wert von x. Nun gibt es aber andere Funktionen, die sich wohl auch nach dem Mac-Laurinschen Schema in Reihen entwickeln lassen, welche aber bloß so lange konvergieren und die gegebene Funktion richtig darstellen, solange der Wert x innerhalb bestimmter Grenzen liegt.

Unser Schema (7) gilt also, wenn $f(x)$ eine derartige Funktion ist, nicht mehr wie früher für jedes endliche x, sondern die rechtsstehende Reihe divergiert, wenn der Wert des x gewisse Grenzen überschreitet.

Beispiele:

Es sei:

a) $$u = f(x) = \operatorname{arctan} x$$

dann ist:

b) $$f'(x) = \frac{d \operatorname{arctan} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} = \overbrace{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots}^{\mathrm{I}}$$

c) $$f''(x) = \frac{d(\mathrm{I})}{dx} = \overbrace{-2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots}^{\mathrm{II}}$$

d) $$f'''(x) = \frac{d(\mathrm{II})}{dx} = \overbrace{-2 + 12x^2 + 30x^4 + \dots}^{\mathrm{III}}$$

usf.

Setzt man in a) bis d) x gleich null, so ergibt sich:

$$f(0) = \arctan 0 = 0$$

$$f'(0) = +1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -2!$$

und wenn wir wie begonnen fortsetzten, fänden wir weiter:

$$f^{IV}(0) = 0 \qquad f^{V} = 4! \qquad f^{VI} = 0 \qquad f^{VII} = -6!$$

usw.

Nach Substitution dieser Werte liefert das Mac-Laurinsche Schema die Reihe:

$$u = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \ldots \quad (9)$$

oder da ja:

$$x = \tan u$$

$$u = \tan u - \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{5}\tan^5 u - \frac{1}{7}\tan^7 u + \ldots.$$

Diese Entwicklung ist als Gregorys Reihe bekannt; sie konvergiert nur, wenn:

$$-1 \leqq x (= \tan u) \leqq 1$$

solange also:

$$-\frac{\pi}{4} \leqq u \leqq \frac{\pi}{4}$$

Gregorys Reihe ist auch zur Berechnung der Zahl π verwendet worden.

Es sei:

$$u = \frac{1}{4}\pi$$

Wir wissen nun aus der Trigonometrie, daß:

$$x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

dann ergibt sich nach Substitution in (9):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots. \quad (10)$$

die sogenannte Reihe von Leibnitz.

Hier haben wir nun eine günstige Gelegenheit, auf das am Schluß des vorhergehenden § 65 Gesagte zurückzukommen, und die Unzweckmäßigkeit einer derart langsam konvergierenden Reihe festzustellen. Es wäre — der Leser mag es versuchen — ziemlich mühsam, π auch nur einigermaßen genau mittelst des Ansatzes (10) zu berechnen. Ein kleiner Kunstgriff führt uns aber weiter.

Wir fassen zusammen:

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\ldots.$$

$$=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\ldots.$$

also:

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

Diese Reihe läßt sich schon besser handhaben. Nehmen wir jetzt an:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

dann ist:

$$u=\arctan x=\frac{\pi}{6}$$

Wir substituieren in (9) und fassen die Glieder mit positiven und negativen Vorzeichen gesondert zusammen:

$$\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3^5}}+\ldots.\right)-\left(\frac{1}{3\sqrt{3^3}}+\frac{1}{7\sqrt{3^7}}+\ldots.\right) \quad (12)$$

und wollen jetzt π mittelst dieser Formel auf fünf Dezimalstellen genau berechnen.

Vor allem ist wohl klar, daß wir zwei oder drei Dezimalen mehr, als im Schlußresultat verlangt sind, bei jedem Glied ausrechnen müssen, und ferner haben wir genügend viele Glieder in die Rechnung einzubeziehen, daß die weggelassenen keinen Einfluß mehr auf die Genauigkeit der fünften Dezimalstelle im gewünschten Resultat ausüben können.

Glieder in der ersten Kammer:	Glieder in der zweiten Kammer:
0·57735 03	0·06415 01
0·01283 00	0·00305 48
0·00079 20	0·00021 60
0·00006 09	0·00001 76
0·00000 52	0·00000 15
0·00000 05	0·00000 02
0·59103 89	0·06744 02

$$\pi=6\,(0{\cdot}5910389-0{\cdot}0674402)=3{\cdot}1415922.$$

Die sechste und siebente Dezimale ist nicht mehr sicher; der bis dahin genaue Wert lautet:

$$\pi=3{\cdot}1415926\ldots.$$

§ 67. Der Taylorsche Satz.

Es sei uns eine Funktion der Summe:

$$x + h$$

gegeben:

$$u = f(x + h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wir setzen nun voraus, daß weder die betrachtete Funktion selbst, noch irgend eine ihrer Ableitungen:

$$\frac{df(x+h)}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x+h)}{dh^2}, \ldots . \frac{d^n f(x+h)}{dh^n} \ldots .$$

unendlich wird, für Werte von x und h, die innerhalb bestimmter Grenzen liegen, und es soll auch möglich sein, u, solange die Werte von x und h die gedachten Grenzen nicht überschreiten, durch eine konvergente Reihe:

$$f(x+h) = x_0 + x_1 h + x_2 h^2 + x_3 h^3 + \ldots . + x_n h^n \ldots . \quad (2)$$

darzustellen, in der:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots . x_n, \ldots .$$

zwar von h unabhängig, jedoch Funktionen von x sind, die wir bestimmen wollen. — Wenn wir (2) successive nach h differenzieren, finden wir:

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \overbrace{0 + x_1 + 2x_2 h + 3x_3 h^2 + 4x_4 h^3 + \ldots .}^{\mathrm{I.}} \quad . \quad . \quad . \quad (3\,\mathrm{a})$$

$$\frac{d^2 f(x+h)}{dh^2} = \frac{d(I)}{dh} = 0 + \overbrace{0 + 2x_2 + 3 \cdot 2x_3 h + 4 \cdot 3 \cdot x_4 h^2 + \ldots .}^{\mathrm{II.}} \quad (3\,\mathrm{b})$$

$$\frac{d^3 f(x+h)}{dh^3} = \frac{d(II)}{dh} = \overbrace{0 + 0 + 0 + 3 \cdot 2x_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2x_4 h + \ldots .}^{\mathrm{III.}} \quad (3\,\mathrm{c})$$

usf.

Setzt man jetzt in den Relationen (2) bis (3c) h gleich null, so ergibt sich:

$$f(x+h)_{h=0} = f(x) = x_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{aus (2)}$$

$$\left(\frac{df(x+h)}{dh}\right)_{h=0} = x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{,, (3a)}$$

$$\left(\frac{d^2 f(x+h)}{dh^2}\right)_{h=0} = 2x_2 \qquad x_2 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2 f(x+h)}{dh^2}\right)_{h=0} \quad \text{,, (3b)}$$

$$\left.\frac{d^3 f(x+h)}{dh^3}\right|_{h=0} = 3\cdot 2 x_3 \qquad x_3 = \frac{1}{3!}\cdot\left.\frac{d^3 f(x+h)}{dh^3}\right|_{h=0} \quad ,, \qquad (3\,\mathrm{c})$$

usf.

$$x_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n f(x+h)}{dh^n}$$

usf.

Nun setzen wir die für: $x_1, \ldots x_n, \ldots$ gefundenen Ausdrücke in (2) ein und erhalten:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{x}{1}\left[\frac{df(x+h)}{dh}\right]_{h=0} + \frac{x^2}{2!}\left[\frac{d^2 f(x+h)}{dh^2}\right]_{h=0} + \frac{x^3}{3!}\left[\frac{d^3 f(x+h)}{dh^3}\right]_{h=0} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^n f(x+h)}{dh^n}\right]_{h=0} + \cdots \qquad (4)$$

die sogenannte Taylorsche Reihe.

Man beachte nun folgendes:

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{d(x+h)}\cdot\frac{d(x+h)}{dx} = f'(x+h)\cdot\frac{d(x+h)}{dx}$$

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \frac{df(x+h)}{d(x+h)}\cdot\frac{d(x+h)}{dh} = f'(x+h)\cdot\frac{d(x+h)}{dh},$$

nun ist offenbar auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{d(x+h)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d(x+h)}{dh} = \frac{dh}{dh} = 1$$

somit auch:

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

Wir werden also in Gleichung (4) statt der Symbole in den eckigen Klammern, welche bedeuten, daß erst der betreffende Differentialquotient von $f(x+h)$ nach h zu bilden und im Ergebnis dieser Operation h gleich null zu setzen ist, mit dem gleichen Sinn kürzer:

$$f'(x+h)_{h=0}, \qquad f''(x+h)_{h=0}, \;\ldots\; f^n(x+h)_{h=0}, \ldots$$

schreiben, oder noch einfacher:

$$f'(x), \qquad f''(x), \;\ldots\; f^n(x), \ldots$$

so daß (4) lautet:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{x}{1} + f''(x)\frac{x^2}{2!} + f'''(x)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^n(x)\frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (5)$$

Beispiele:

1. Es sei:

$$u = f(x+h) = (x+h)^n .$$

n bedeutet irgend eine reelle (positive, negative, ganze oder gebrochene) Zahl, ebenso kann x einen beliebigen endlichen Wert annehmen, nur für h gilt:

$$-x < h < +x$$

Wir wollen nun die gegebene Funktion nach dem Taylorschen Satz entwickeln:

$$f(x+h)_{h=0} = f(x) = x^n$$

$$f'(x+h) = n(x+h)^{n-1} \qquad f'(x+h)_{h=0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f''(x+h) = n(n-1)(x+h)^{n-2} \quad f''(x+h)_{h=0} = f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x+h) = n(n-1)(n-2)(x+h)^{n-3} \quad f'''(x+h)_{h=0} = f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

usf.

Somit ist:

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + . \quad (6)$$

Diese Entwicklung, bekannt unter dem Namen die Binomialreihe, konvergiert für jeden beliebigen reellen endlichen Wert von n und x, wenn, wie vorausgesetzt:

$$-x < h < x$$

Gleichung (6) gilt jedoch nicht, die rechtsstehende Reihe ist divergent, wenn wir h einen Wert:

$$h > +x$$
$$h < -x$$

erteilen.

Wir haben also bei der Darstellung irgend einer Potenz:

$$(a \pm b)^n$$

nach obiger Reihe für h stets den kleineren der beiden Summanden a und b zu setzen, mit Ausnahme, wenn n eine positive ganze Zahl ist; dann hat nämlich die Reihe nur eine endliche Anzahl Glieder, und es ist, wie sich der Leser an einem speziellen Beispiele, etwa:

$$(a+b)^4$$

leicht klarmachen kann, gleichgültig, ob wir für h den größeren oder kleineren der Werte a, b, einführen.

2. Es sei:

$$u = f(y) = ly.$$

Offenbar kann man diese Funktion nicht ohne weiteres nach dem Mac-Laurinschen Schema entwickeln, da:

$$f(0) = l0 = -\infty$$

Wir gebrauchen nun einen Kunstgriff, nämlich wir setzen:

$$y = x + h$$

und entwickeln:

$$l(x + h)$$

nach dem Taylorschen Satz.

$$l(x+h)_{h=0} = lx$$

$$f'(x+h) = \frac{1}{x+h} \qquad f'(x+h)_{h=0} = f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x+h) = -\frac{1}{(x+h)^2} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x+h) = +\frac{2}{(x+h)^3} \qquad f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x+h) = -\frac{3\cdot 2}{(x+h)^4} \qquad f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{3\cdot 2}{x^4}$$

usf.

Nach Einführung vorstehender Ausdrücke für $f'(x)$, $f''(x), \ldots.$ in das Taylorsche Schema ergibt sich:

$$f(x+h) = l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots. \tag{7}$$

x kann natürlich nur eine positive endliche Zahl bedeuten; die Reihe konvergiert, solange:

$$-x < h \leqq +x$$

ist und zwar ziemlich rasch, wenn nur der Betrag des x einigermaßen größer ist als der von h. Betrachten wir nun an einigen Zahlenbeispielen, wie etwa die Entwicklung (7) zur systematischen Berechnung einer Logarithmentafel zu verwenden wäre.

$l1 = 0$

$l\,1{\cdot}1 = ?$; wir setzen: $x = 1$, $h = 0{\cdot}1$, also:

$$l(1\cdot 1) = l(1 + 0\cdot 1) = l\,1 + \frac{0\cdot 1}{1} - \frac{0\cdot 1^2}{2} + \frac{0\cdot 1^3}{3} - \frac{0\cdot 1^4}{4} + \dots.$$

$$l(1\cdot 2) = l(1\cdot 1 + 0\cdot 1) = l\,1\cdot 1 + \frac{0\cdot 1}{1\cdot 1} - \frac{0\cdot 1^2}{2\cdot 1\cdot 1^2} + \frac{0\cdot 1^3}{3\cdot 1\cdot 1^3} - \frac{0\cdot 1^4}{4\cdot 1\cdot 1^4} + \dots$$

$$l(1\cdot 3) = l(1\cdot 2 + 0\cdot 1) = l\,1\cdot 2 + \frac{0\cdot 1}{1\cdot 2} - \frac{0\cdot 1^2}{2\cdot 1\cdot 2^2} + \frac{0\cdot 1^3}{3\cdot 1\cdot 2^3} - \frac{0\cdot 1^4}{4\cdot 1\cdot 2^4} + \dots$$

usf.

$l(0\cdot 9) = ?$; wir setzen: $x = 1$, $h = -0\cdot 1$, also:

$$l(0\cdot 9) = l(1 - 0\cdot 1) = l\,1 - \frac{0\cdot 1}{1} - \frac{0\cdot 1^2}{2} - \frac{0\cdot 1^3}{3} - \frac{0\cdot 1^4}{4} - \dots.$$

$$l(0\cdot 8) = l(0\cdot 9 - 0\cdot 1) = l\,0\cdot 9 - \frac{0\cdot 1}{0\cdot 9} - \frac{0\cdot 1^2}{2\cdot 0\cdot 9^2} - \frac{0\cdot 1^3}{3\cdot 0\cdot 9^3} - \frac{0\cdot 1^4}{4\cdot 0\cdot 9^4} - \dots.$$

Die aus vorstehenden Ansätzen errechneten natürlichen Logarithmen wären noch mit dem Modul:

$$M = 0\cdot 434294482\dots.$$

zu multiplizieren, um sie in gemeine zu verwandeln.

Partes proportionales. — Wird eine Zahl um einen sehr geringen Bruchteil ihres Betrages vermehrt, so ist der Zuwachs nahezu proportional dem Unterschied zwischen den Logarithmen der beiden Zahlen.

Wir fanden nämlich:

$$\log(n+h) = \left\{ l n + \frac{h}{n} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{n^3} - \dots \right\} \cdot 0\cdot 4343\dots$$

$$= \log n + \left\{ \frac{h}{n} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{n^3} - \dots \right\} \cdot 0\cdot 4343\dots$$

Es sei nun n nicht kleiner als 10000 und h nicht größer als 1; — dann ist:

$$\frac{h}{n} \leqq 0\cdot 0001$$

und das nächste Glied der obigen Entwicklung:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{n^2} \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(0\cdot 0001)^2}$$

das heißt, ist kleiner oder höchstens gleich:

$$\frac{1}{2\cdot 10^8}.$$

Wir können daher, ohne bis zur siebenten Dezimalstelle einen Fehler zu machen, näherungsweise:

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n}\, 0{\cdot}4343\ldots$$

setzen, und wenn:

$$h < 1$$

ist, mit noch geringerem Fehler:

$$\log(n+h) - \log n = \frac{h}{n}\, 0{\cdot}4343\ldots$$

schreiben. Aus Vorstehendem ziehen wir nun das, — einleitend in Worte gefaßte, — wichtige Resultat:

$$\{\log(n+h) - \log n\} : \{\log(n+1) - \log n\} = h : 1,$$

woraus sich weiter ergibt:

$$\log n + h = h\{\log(n+1) - \log n\} + \log n \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Eine Relation, die bis auf sieben Dezimalstellen genaue Ergebnisse liefert, wenn das Verhältnis:

$$\frac{h}{n} \leqq \frac{1}{10000}$$

ist. Die Formel (8) dient dazu, die Logarithmen von Zahlen zu berechnen, die mehr Stellen haben als die in der zur Verfügung stehenden Tafel aufgeführten, oder auch dazu, die Numeri von Logarithmen zu ermitteln, welche mit den in der Tafel gegebenen nicht zusammenfallen.

Die folgenden Beispiele werden uns den Vorgang klarmachen:

1. Man bestimme den Logarithmus von:

$$46501 \cdot 32 \ldots . n + h$$

Aus unserer Tafel ist zu entnehmen:

$$\begin{array}{rl} \log 46501 = & 4{\cdot}6674623 \ldots . \log n \\ \log 46502 = & 4{\cdot}6674716 \ldots . \log(n+1) \\ \hline \text{Differenz:} & 0{\cdot}0000093 \ldots . \log(n+1) - \log n \end{array}$$

$$\underbrace{\{\log(n+1) - \log n\}}_{0{\cdot}0000093} \times \underbrace{h}_{0{\cdot}32} + \underbrace{\log n}_{4{\cdot}6674623} = \log(n+h)$$
$$= 4{\cdot}6674653$$

2. Man ermittle die Zahl, deren Logarithmus

I. $4{\cdot}6816223$

ist. Wir finden in der Tafel:

$$\text{II.} \qquad 4{\cdot}6816211 = \log 48042$$

$$\text{III.} \qquad 6{\cdot}6816301 = \log 48043.$$

Einen Unterschied von 0·0000090 der Logarithmen III. und II., zwischen denen I. liegt, entspricht einer Differenz von 1 der Numeri — welcher Differenz x entspricht der Unterschied zwischen dem gegebenen Logarithmus (I.) und dem nächst niederen der Tafel (II.)?

$$1 : x = 0{\cdot}0000090 : 0{\cdot}0000012$$

$$x = 0{\cdot}13$$

$$\text{Numerus von } 4{\cdot}6816223 = 48042 + 0{\cdot}13$$

§ 68. Eine Anwendung des Taylorschen Satzes.

Die auf dasselbe Achsensystem bezogenen Gleichungen zweier Kurven I. und II., Fig. 83, seien:

$$\text{I.} \quad y = f(x)$$

$$\text{II.} \quad y = \varphi(x)$$

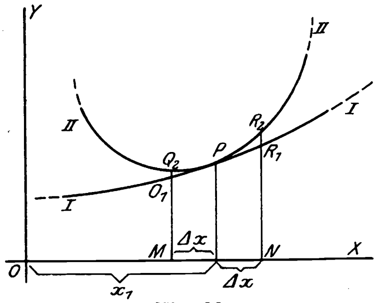

Fig. 83.

Die Abszisse des Punktes P, in welchem die Kurven sich berühren, heiße x_1.

Einer um ein wenig größeren Abszisse:

$$x_1 + \Delta x$$

entsprechen die Ordinaten:

$$f(x_1 + \Delta x) = R_1 N, \quad \text{beziehungsweise:} \quad \varphi(x_1 + \Delta x) = R_2 N$$

einer etwas kleineren Abszisse:

$$x_1 - \Delta x$$

die Ordinaten:

$$f(x_1 - \Delta x) = Q_1 M, \quad \text{beziehungsweise:} \quad \varphi(x_1 - \Delta x) = Q_2 M$$

Nach dem Taylorschen Satz ist nun:

$$f(x_1 \pm \Delta x) = f(x_1) \pm f'(x_1) \frac{\Delta x}{1} + f''(x_1) \frac{\Delta x^2}{2!} \pm f'''(x_1) \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots \quad (1)$$

$$\varphi(x_1 \pm \Delta x) = \varphi(x_1) \pm \varphi'(x_1) \frac{\Delta x}{1} + \varphi''(x_1) \frac{\Delta x_2}{2!} \pm \varphi'''(x_1) \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots \quad (2)$$

Auf der rechten Seite bedeuten:

$$f(x_1) = \varphi(x_1)$$

die Ordinaten des Berührungspunktes, während:

$$f'(x_1), \qquad f''(x_1), \ldots .$$
$$\varphi'(x_1), \qquad \varphi''(x_1), \ldots .$$

die Differentialquotienten der beiden Kurvengleichungen für den Punkt P bedeuten. In diesem Berührungsort haben die zwei Kurven dieselbe Tangente, es ist also jedenfalls:

$$f'(x_1) = \varphi'(x_1)$$

ist nun dabei $f''(x_1)$ nicht mehr gleich $\varphi''(x_1)$:

$$f''(x_1) \gtrless \varphi''(x_1)$$

so sagen wir, zwischen beiden Kurven findet eine Berührung erster Ordnung statt.

Ist aber weiter auch noch:

$$f''(x_1) = \varphi''(x_1)$$

und:

$$f'''(x_1) \gtrless \varphi'''(x_1)$$

so sprechen wir von einer Berührung zweiter Ordnung, — allgemein wenn:

$$f^n(x_1) = \varphi^n(x_1)$$
$$f^{n+1}(x_1) \gtrless \varphi^{n+1}(x_1)$$

von einer Berührung der $n$ten Ordnung.

Je höher nun die Ordnung der Berührung ist, d. h. je mehr gleiche Glieder wir auf den rechten Seiten von (1) und (2) finden, desto geringer wird offenbar der Unterschied zwischen:

$$f(x_1 \pm \varDelta x) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1 \pm \varDelta x)$$

sein, d. h. desto enger schmiegen sich die Kurven beim Berührungspunkt aneinander an.

§ 69. Erweiterung des Taylorschen Lehrsatzes.

Der Taylorsche Satz kann auch auf die Entwicklung von Funktionen zweier oder mehrerer unabhängiger Variablen ausgedehnt werden.

Es sei z. B.:

$$u = f(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

x und y sind voneinander unabhängige Variable. Wir erteilen jeder einen kleinen Zuwachs, so daß unbeeinflußt voneinander:

$$x \quad \text{in} \quad x + h$$
$$y \quad \text{in} \quad y + h$$

übergeht.

Zuerst möge sich x ändern, y wird als konstant betrachtet; — dann ist nach dem Taylorschen Schema:

$$f(x+h,\, y)=u+\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{h^3}{3!}+\cdots\ . \qquad (2)$$

nimmt jetzt y in (2) um k zu, so geht auf der linken Seite

$$f(x+h,\, y) \quad \text{in} \quad f(x+h,\, y+k)$$

über, und auf der rechten Seite:

$$u=f(x,\, y) \text{ in:}$$

$$f(x,\, y+k)=\overbrace{u+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{k^2}{2!}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\frac{k^3}{3!}+\cdots}^{\mathrm{I}}\text{ [1]}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\text{ in: }\frac{\partial(\mathrm{I})}{\partial x}=\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}k+\frac{\partial^3 y}{\partial y^2\partial x}\frac{k^2}{2!}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^3\partial x}\frac{k^3}{3!}}^{\mathrm{II}}+\cdots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{ in: }\frac{\partial(\mathrm{II})}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}k+\frac{\partial^4 y}{\partial y^2\partial x^2}\frac{k^2}{2!}+\frac{\partial^5 u}{\partial y^3\partial x^2}\frac{k^3}{3!}+\cdots$$

Alle diese Ausdrücke setzten wir in (2) ein und finden leicht:

$$\left.\begin{aligned}
f(x+h,\, y+k)&=f(x,\, y)+\left\{h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\\
&+\frac{1}{2!}\left\{h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}\\
&+\frac{1}{3!}\left\{h^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right\}\\
&+\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

§ 70. Betrachtungen über Maxima und Minima.

Der Taylorsche Satz gestattet uns auch, die Betrachtungen des § 38 über Extremwerte zu verallgemeinern.

I. Es sei uns eine Funktion einer einzigen Variablen,

$$y=f(x)$$

gegeben; wir haben nun zu ermitteln, für welche Werte des x sie Maxima und Minima aufweist.

---

[1]) $f(x,\, y+k)$ nach steigenden Potenzen von k entwickelt.

$$f(x+h)$$

soll nach dem Taylorschen Satz darstellbar sein; der Wert von h möge innerhalb der Grenzen:

$$-a \leqq h \leqq +a$$

liegen, wobei a einen sehr kleinen Betrag bedeutet.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots . \quad (1)$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, daß in dieser Reihe das zweite Glied $f'(x)h$ größer ist, als die Summe aller noch weiter folgenden Posten.

Setzen wir nämlich:

$$f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots . = R_2 h$$

so ergibt sich aus (1):

$$f(x+h) - f(x) = h\{f'(x) + R_2 h\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Wenn wir jetzt h immer geringere Werte erteilen, so muß offenbar endlich:

$$R_2 h < f'(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

werden.

Ein Maximum ist nun dadurch charakterisiert, daß der Wert von $f(x)$ an der betreffenden Stelle größer ist als die benachbarten Funktionswerte:

$$f(x-a) < f(x) > f(x+a)$$

es ist also:

$$f(x+a) - f(x) < 0$$

und auch:

$$f(x-a) - f(x) < 0$$

d. h. diese beiden Differenzen haben negative Vorzeichen. An der Stelle eines Minimums ist der Wert von $f(x)$ kleiner als die benachbarten Funktionswerte:

$$f(x-a) > f(x) < f(x+a)$$

somit ist:

$$f(x+a) - f(x) > 0$$

und:

$$f(x-a) - f(x) > 0$$

Diese beiden Differenzen haben positive Vorzeichen.

Setzen wir:

$$R_2 {}_{\text{für: } h=+a} = r_2$$

$$R_2 {}_{\text{für: } h=-a} = r_2'$$

so ergibt sich aus (2):

$$f(x+a)-f(x)=\quad a\{f'(x)-r_2\,a\}. \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\mathrm{a})$$

$$f(x-a)-f(x)=-a\{f'(x)-r_2'\,a\}. \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\mathrm{b})$$

Hat hier $f'(x)$ einen endlichen Wert und ist a ein genügend kleiner Betrag, daß (3) gilt, dann haben die in (4a) und (4b) rechtsstehenden Ausdrücke und damit auch die linksseitigen Differenzen verschiedenes Vorzeichen, — $f(x)$ kann also für keinen Wert des x ein Maximum oder Minimum aufweisen, bei welchem $f'(x)$ einen endlichen Betrag hat.

Ist aber für ein anderes x:

$$f'(x)=0$$

dann finden wir zunächst aus (2):

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= R_2 h^2 \\ &= f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

Ähnlich wie oben läßt sich beweisen, daß $f''(x)\frac{h^2}{2}$ bei genügend kleinem h größer ist als die Summe aller noch folgenden Glieder.

Wir setzen in (5):

$$f'''(x)\frac{h}{3!}+f^{IV}(x)\frac{h^2}{4!}+\ldots .=R_3 h$$

und haben dann an dieser Stelle:

$$f(x+h)-f(x)=h^2\left\{f''(x)\frac{1}{2!}+R_3 h\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wenn jetzt der Betrag des h immer mehr abnimmt, muß endlich:

$$R_3 h < f''(x)\frac{1}{2!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

werden.

In (6) ist nun h^2 als Quadrat stets positiv, — das Vorzeichen der rechten und linken Seite kann also, — falls h genügend klein ist, daß (7) gilt, — nur davon abhängen, welches Vorzeichen $f''(x)$ hat und bleibt davon unbeeinflußt, ob der für h eingesetzte kleine Betrag positives oder negatives Zeichen hat.

Wir finden:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+a) \\ f(x-a) \end{array}\right\} - f(x) < 0$$

das heißt $f(x)$ ist für solche Werte des x ein Maximum, bei denen:

$$f'(x) = 0 \qquad f''(x) < 0$$

und:

$$\left.\begin{matrix} f(x+a) \\ f(x-a) \end{matrix}\right\} - f(x) > 0$$

das heißt $f(x)$ ist für solche Werte des x ein Minimum, bei denen:

$$f'(x) = 0 \qquad f''(x) > 0$$

Verschwindet für irgend einen Wert von x sowohl $f'(x)$ als auch $f''(x)$, und hat erst $f'''(x)$ einen endlichen Wert, so ergibt sich wie oben:

$$f(x+h) - f(x) = h^3 \left\{ f'''(x) \frac{1}{3!} + R_4 h \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$R_4 h \text{ bedeutet: } f^{IV}(x) \frac{h}{4!} + f^{V}(x) \frac{h^2}{5!} + \ldots$$

bei genügend kleinem h ist wieder:

$$f'''(x) \frac{1}{3!} > R_4 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und das Vorzeichen in (8) hängt dann davon ab, welches Vorzeichen der für h eingeführte kleine Betrag hat, da h eine Potenz mit ungeradem Exponenten ist. — $f(x)$ kann also keinen Extremwert zeigen bei solchen Werten des x, für welche $f'(x)$ und $f''(x)$ verschwindet, während $f'''(x)$ einen endlichen Wert hat.

Wird aber auch:

$$f'''(x) = 0$$

so ist:

$$f(x+h) - f(x) = h^4 \left\{ f^{IV}(x) \frac{1}{4!} + R_5 h \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ob dann die Differenz der linksstehenden Ausdrücke größer oder kleiner als Null ist, hängt, — bei genügend kleinem h, daß:

$$f^{IV}(x) \frac{1}{4!} > R_5 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist, — nur davon ab, welches Zeichen $f^{IV}(x)$ hat, da ja h^4 als Potenz mit geradzahligem Exponenten stets positiv ist.

Finden wir also für irgend einen Wert des x:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0; \qquad f^{IV}(x) < 0$$

so hat $f(x)$ für diesen Wert des x ein Maximum, — ein Minimum, wenn sich ergibt, daß:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0; \qquad f^{IV}(x) > 0$$

ist. — Führen wir nun unsere Untersuchung auf dem betretenen Weg weiter fort, so können wir folgende allgemeine Regel feststellen:

Ist bei einem bestimmten Wert von x der erste nicht verschwindende Differentialquotient der gegebenen Funktion von gerader Ordnung und positiv, so hat sie an dieser Stelle ein Minimum, ein Maximum hingegen, wenn der erste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist und negatives Vorzeichen hat.

II. Man soll besondere Werte für die beiden unabhängigen Variablen x und y finden, bei welchen ihre stetige Funktion:

$$u = f(x, y)$$

Extremwerte zeigt.

Offenbar ist u ein Maximum, wenn die Differenz:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) < 0$$

das heißt negativ ist, für genügend kleine, positive und negative Werte von h und k, — und u ist ein Minimum, wenn die Differenz:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) > 0$$

das heißt stets positiv ist, für genügend kleine Beträge von h und k, unbeeinflußt davon, ob sie positives oder negatives Vorzeichen haben.

Wenn wir:

$$f(x+h, y+k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

nach dem verallgemeinerten Taylorschen Satz (§ 69) entwickeln, so ergibt sich, bei ähnlichem Gedankengang wie in I., daß für solche Werte von x und y, bei welchen u ein Maximum oder Minimum aufweist, zunächst das zweite Glied der Entwicklung, nämlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

null ist. Da h und k voneinander ganz unabhängig sind, ist dies nur möglich, wenn:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Weiter muß das dritte Glied in der Reihenentwicklung, nämlich:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(wenn es nicht etwa auch verschwindet) bei genügend kleinem h und k dasselbe Vorzeichen behalten, unbeeinflußt davon, ob die Symbole h und k positive oder negative Beträge bedeuten.

Es kann nun dargetan werden, daß ein Ausdruck:

$$\{ah^2 + bhk + ck^2\}$$

unabhängig vom Vorzeichen der Beträge, die man für h und k einführt, sein Zeichen behält, wenn:

$$ac > b^2$$

und die Vorzeichen von a und c dieselben sind. In unserem Fall wird also für genügend kleine Beträge von h und k, unberührt davon, ob dieselben positives oder negatives Vorzeichen haben, (4) sein Zeichen unverändert behalten, wenn:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dasselbe Vorzeichen haben, und:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

ist.

Wenn dies Lagrangesche Kriterium für irgendwelche Werte von x und y erfüllt ist, so hat die betreffende Funktion u an dieser Stelle ein Maximum oder Minimum, je nachdem das Zeichen von·

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

negativ oder positiv ist.

Ist aber für irgendwelche Werte des x und y zwar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

hingegen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

oder haben die Werte von:

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

verschiedene Vorzeichen, so zeigt die Funktion an dieser Stelle weder ein Maximum noch ein Minimum.

Ist weiter für gewisse Werte des x und y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

so verschwindet offenbar auch das dritte Glied (4) der Taylorschen Entwicklung, wenn man für h und k den gleichen Betrag mit entgegengesetzten Vorzeichen einsetzt. Die Untersuchung muß sich dann auf die weiter folgenden Glieder der Reihe erstrecken, und zwar muß, damit ein Extremwert vorliegt, die erste nicht verschwindende Gruppe von Differentialquotienten gerader Ordnung sein.

Beispiele:

1. Man untersuche, für welche reellen Werte von x und y die Funktion:

$$u = x^3 + y^3 - 3axy$$

Extremwerte zeigt. Es muß sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

(a) und (b) sind erfüllt, wenn:

$$x = 0 \qquad y = 0$$

oder auch für:

$$x = a \qquad y = a$$

$$\text{c)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \qquad \text{d)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3a \qquad \text{e)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

Wenn nun:

$$x = 0 \qquad y = 0$$

so ist:

$$\text{c)} = 0 \qquad \text{d)} = -3a \qquad \text{e)} = 0$$

und wenn:

$$x = a \qquad y = a$$

so ist:

$$\text{c)} = 6a \qquad \text{d)} = -3a \qquad \text{e)} = 6a$$

Für letzteres Wertepaar zeigt die Funktion u ein Minimum, da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0, \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Für:

$$x = 0 \qquad y = 0$$

tritt weder ein Maximum noch ein Minimum auf.

2. Man zeige, daß:

$$u = x^3 y^2 (1 - x - y)$$

ein Maximum hat für:

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{3}$$

3. Man zeige, daß:

$$u = 2x^3 - 3ax^2 - 4ay^2$$

ein Maximum hat, für:

$$x = 0 \qquad y = 0$$

Auch für:

$$x = a \qquad y = 0$$

finden wir, daß:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Die Lagrangesche Bedingung ist jedoch nicht erfüllt, wir haben daher nach (7) an dieser Stelle keinen Extremwert.

§ 71. Behandlung unbestimmter Formen.

I. Bei manchen Ausdrücken von der Form $f(x)/F(x)$ finden wir, daß der Zähler $f(x)$ und der Nenner $F(x)$ beide null werden, wenn x einen gewissen Wert a annimmt; so kommt man z. B. bei $\sin x/x$ zu dieser unbestimmten Form $0/0$, wenn man x den Wert $a = 0$ erteilt:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$$

Wir wollen nun eine Methode kennen lernen, wie man vorzugehen hat, um in einem solchen Fall den Wert der Quotienten $f(a)/F(a)$ zu bestimmen.

Wir setzen in der Zähler- und der Nennerfunktion $a + h$ für x und entwickeln $f(a+h)$ sowie $F(a+h)$ nach der Taylorschen Regel:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} \cdots + f^n(a)\frac{h^n}{n!} + \cdots}{F(a) + F'(a)\frac{h}{1!} + F''(a)\frac{h^2}{2!} \cdots + F^\nu(a)\frac{h^\nu}{\nu!} + \cdots} \tag{1}$$

Auf der rechten Seite ist jedenfalls $f(a)$ und $F(a)$ null; es mag aber vorkommen, daß auch noch die folgenden Ableitungen:

$$f'(x), \qquad f''(x), \ldots . f^{n-1}(x)$$

beziehungsweise:

$$F'(x), \qquad F''(x), \ldots . F^{\nu-1}(x)$$

null werden, wenn x den Wert a annimmt, d. h.:

$$f'(a), \qquad f''(a), \ldots . f^{n-1}(a) = 0$$

beziehungsweise:

$$F'(a), \qquad F''(a), \ldots . F^{\nu-1}(a) = 0$$

und erst $f^n(a)$ sowie $F^\nu(a)$ sollen von null verschieden sein.

Wir haben dann:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^n(a)\frac{h^n}{n!} + f^{n+1}(a)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots .}{F^\nu(a)\frac{h^\nu}{\nu!} + F^{\nu+1}(a)\frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \ldots .}$$

$$= \frac{h^n \cdot \nu!}{h^\nu \cdot n!} \cdot \frac{f^n(a) + f^{n+1}(a)\frac{h}{n+1} + \ldots .}{F^\nu(a) + F^{\nu+1}(a)\frac{h}{\nu+1} + \ldots .} \qquad (2)$$

Hier sind nun drei Fälle möglich:

1. $n = \nu$.

Dann ist zunächst:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^n(a) + f^{n+1}(a)\frac{h}{n+1} + \ldots .}{F^n(a) + F^{n+1}(a)\frac{h}{n+1} + \ldots .} \quad . \quad . \quad (3)$$

Lassen wir jetzt h null werden, so verschwinden auf der rechten Seite alle Glieder mit h als Faktor und es bleibt:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f^n(a)}{F^n(a)}$$

2. $n > \nu$; es ist etwa: $n - \nu = p$.

Dann ist:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = h^p \cdot \frac{\nu}{n} \cdot \frac{f^n \ldots .}{F^\nu \ldots .} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Lassen wir jetzt h gleich null werden, so verschwindet offenbar die ganze rechte Seite, da sie den Faktor 0^p enthält, d. h.:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = 0$$

3. $n < \nu$; es sei etwa: $\nu - n = p$.

Dann ist:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{1}{h^p} \cdot \frac{\nu}{n} \cdot \frac{f^n \ldots .}{F^n \ldots .} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Lassen wir jetzt h null werden, so wird offenbar die rechte Seite, da sie den Faktor $1/0^p$ enthält, unendlich groß:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \infty$$

Das Ergebnis vorstehender Betrachtungen kann man in folgendem Resumé fassen: Wird in einem Quotienten $f(x)/F(x)$ die Zähler- und die Nennerfunktion für einen besonderen Wert a der Variablen x gleichzeitig null:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{0}{0}$$

so kann man den Wert von $f(a)/F(a)$ folgendermaßen bestimmen:

Man sucht die erste, für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von $f(x)$ und $F(x)$ auf.

Sind nun die ersten für $x = a$ nicht verschwindenden Ableitungen beider Funktion von derselben, etwa der $n$ten Ordnung, so ist der Quotient:

$$\frac{f^n(a)}{F^n(a)} \quad \text{gleich dem gesuchten Quotienten} \quad \frac{f(a)}{F(a)}$$

Ist die erste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von $f(x)$ von einer höheren Ordnung, als die von $F(x)$, so ist:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = 0$$

Ist das Umgekehrte der Fall, so ist:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \infty$$

Beispiele:

1. $$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\cos x_{x=0} = 1$$

somit ist:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x=0} \frac{d \sin x/dx}{dx/dx} = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Entwickeln wir die Zählerfunktion $\sin x$ nach der Mac-Laurinschen Methode, so ergibt sich:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)}{x}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Lassen wir jetzt links und rechts x null werden, so ergibt sich wieder:

$$\frac{\sin 0}{0} = 1$$

2. $$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

$$\frac{d(1 - \cos x)}{dx} = \sin x \qquad \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

$$\sin x_{x=0} = 0 \qquad 2x_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^2(1 - \cos x)}{dx} = \cos x \qquad \frac{d^2x^2}{dx^2} = 2$$

$$\cos x_{x=0} = 1$$

somit ist:

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{d^2(1 - \cos x)/dx^2}{d^2x^2/dx^2} = \frac{1}{2}$$

3. Man zeige, daß:

$$\lim_{x=0} \frac{(a^x - b^x)}{x} = l\frac{a}{b}$$

4. Man zeige, daß:

$$\lim_{x=a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1}$$

5. Man zeige, daß:

$$\lim_{x=1} \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = \frac{m}{n}$$

II. Man findet auch Ausdrücke von der Form $f(x)/F(x)$, bei denen für einen gewissen Wert a von x Zähler- und Nennerfunktion unendlich groß werden, so daß wir also bei Substitution von a für x

zur unbestimmten Form ∞/∞ kommen. Es ist aber leicht einzusehen, daß man ohne weiteres genau so vorgehen kann, wie wir es eben gelernt haben, denn setzt man:

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)} \quad \text{also:} \quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$F(x) = \frac{1}{F_1(x)} \quad \text{also:} \quad F_1(x) = \frac{1}{F(x)}$$

so ergibt sich, daß:

$$\lim_{x=a} f_1(x) = \lim_{x=a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

und:

$$\lim_{x=a} F_1(x) = \lim_{x=a} \frac{1}{F(x)} = 0$$

daß also:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=a} \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{0}{0}$$

Beispiele:

1.
$$\lim_{x=0} \frac{\cot 2x}{\cot x} = ?$$

$$\frac{d \cot 2x}{dx} = -\frac{2}{\sin^2 2x} \qquad \frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x=0} \frac{d \cot 2x}{dx} \Big/ \frac{d \cot x}{dx} = \lim_{x=0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{d\, 2 \sin^2 x}{dx} = 4 \sin x \cos x \qquad \frac{d \sin^2 2x}{dx} = 4 \sin 2x \cos 2x$$

$$\lim_{x=0} \frac{d\, 2 \sin^2 x}{dx} \Big/ \frac{d \sin^2 x}{dx} = \lim_{x=0} \frac{\sin x \cos x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{d \sin x \cos x}{dx} = \left\{\cos^2 x - \sin^2 x\right\} \qquad \frac{d \sin 2x \cos 2x}{dx} = 2\left\{\cos^2 2x - \sin^2 2x\right\}$$

$$\lim_{x=0} \frac{d \sin x \cos x}{dx} \Big/ \frac{d \sin 2x \cos 2x}{dx} = \lim_{x=0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)} = \frac{1}{2}$$

2. Man zeige, daß:

$$\lim \frac{l \sin x}{l \sin 2x} = 1$$

$$\frac{d\, l \sin x}{dx} = \cot x \qquad \frac{d\, l \sin 2x}{dx} = 2 \cot 2x$$

die Bestimmung von:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{2} \frac{\cot x}{\cot 2x}$$

ergibt sich nun unmittelbar aus dem früheren Beispiel.

III. Liegt uns ein Ausdruck von der Form: $f(x) \cdot F(x)$ vor, in dem $f(x)$ für einen gewissen Wert a von x gleich null, $F(x)$ unendlich groß wird, ergäbe also eine direkte Substitution die Unbestimmtheit $0 \cdot \infty$:

$$\lim f(x) \cdot F(x) = 0 \cdot \infty$$

so gehen wir folgendermaßen vor.

Wir setzen entweder:

$$F(x) = \frac{1}{F_1(x)} \qquad F_1(x) = \frac{1}{F(x)}$$

es ist:

$$\lim_{x=a} F_1(x) = 0$$

und die Bestimmung von:

$$\lim_{x=a} f(x)\, F(x)$$

ist auf die Behandlung von:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F_1(x)}$$

zurückgeführt, eines Ausdruckes, bei dem die direkte Substitution von a für x die Unbestimmtheit $0/0$ ergibt.

Wenn wir anderseits:

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)} \qquad f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$$

setzen, so ergibt sich, daß:

$$f(x) \cdot F(x) = \frac{F(x)}{f_1(x)}$$

und:

$$\lim_{x=a} \frac{F(x)}{f_1(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Beispiele:

1. $$\lim_{x=0} x \cot x = ?$$

direkte Substitution ergäbe die Unbestimmtheit $0 \cdot \infty$. Nun setzen wir:

$$f(x) = x \qquad F(x) = \cot x$$

somit ist:

$$F_1(x) = \frac{1}{\cot x} = \tan x$$

und wir haben:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{F_1(x)} = \lim_{x=0} \frac{x}{\tan x}$$

zu behandeln, welcher Ausdruck bei direkter Substitution die Unbestimmtheit $0/0$ ergäbe.

$$\frac{dx}{dx} = 1 \qquad \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x=0} \frac{df(x)}{dx} \Big/ \frac{dF'(x)}{dx} = \cos^2 x_{x=0} = 1$$

2. $$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = ?$$

$$f(x) = x - \frac{\pi}{2} \qquad F(x) = \tan x$$

$$F_1(x) = \cot x$$

Wir haben also jetzt:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{F_1(x)} = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cot x}$$

zu behanden und finden leicht -1 als Grenze.

3. $$\lim_{x=0} x\, lx = ?$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = lx$$

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{f_1(x)} = \lim_{x=0} \frac{lx}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$\frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x=0} \frac{dlx/dx}{d(\frac{1}{x})/dx} = \lim_{x=0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

IV. Begegnen wir einem Ausdruck von der Form:

$$f(x) - F(x)$$

in dem für x gleich a sowohl $f(x)$ als $F(x)$ unendlich groß wird, ergäbe also die direkte Substitution von a die Unbestimmtheit:

$$\infty - \infty$$

so gehen wir folgendermaßen vor. Wir setzen:

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)} \qquad f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$F(x) = \frac{1}{F_1(x)} \qquad F_1(x) = \frac{1}{F(x)}$$

dann ist weiter:

$$f(x) - F(x) = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{F_1(x)}$$

$$= \frac{F_1(x) - f_1(x)}{f_1(x) \cdot F_1(x)}$$

und da:

$$\lim_{x=a} f_1(x) = 0 \qquad \lim_{x=a} F_1(x) = 0$$

führt die Substitution von a für x in (6) wieder zur Unbestimmtheit $0/0$.

Beispiele:

1. Man zeige, daß:

$$\lim_{x=1} \left\{\frac{x}{lx} - \frac{1}{lx}\right\} = 1$$

$$f_1(x) = \frac{lx}{x} \qquad F_1(x) = lx$$

$$\frac{F_1(x) - f_1(x)}{f_1(x) \cdot F_1(x)} = \frac{x-1}{lx}$$

$$\lim_{x=1} \frac{x-1}{lx} = \frac{0}{0}$$

usw.

2. Man zeige, daß:

$$\lim_{x=1}\left\{\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lx}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{F_1(x)-f_1(x)}{F_1(x)\cdot f_1(x)}=\frac{xlx-x+1}{(x-1)lx}$$

zweimalige Differentiation von Zähler und Nenner führt zu:

$$\lim_{x=1}\frac{lx+1}{lx+2}=\frac{1}{2}$$

V. Bei Ausdrücken wie $F(x)^{\varphi(x)}$, die bei direkter Substitution eines gewissen Wertes a für x zu einer der unbestimmten Formen:

$$1^{\infty}, \qquad \infty^{0}, \qquad 0^{0}$$

führen, bestimmt man zunächst:

$$\lim_{x=a} l\, F(x)^{f(x)}=\lim_{x=a} f(x)\, l\, F(x)$$

Beispiel:

$$\lim_{x=0} x^{x}=?$$

$$lx^{x}=xlx$$

$$\lim_{x=0} xlx=0 \qquad \text{(III. Beispiel 3)}$$

und da:

$$0=l1$$

ergibt sich, daß:

$$\lim_{x=0} x^{x}=1$$

§ 72. Interpolation; — die Formeln von Newton und Stirling.

Es seien im Verlauf eines Experimentes zu einer Anzahl von Werten der unabhängigen Variablen x die zugehörigen Werte der abhängigen Variablen y beobachtet und verzeichnet worden und zwar heiße der:

für x_1	beobachtete	Wert	von	y :	$y_1=f(x_1)$
,, x_2	,,	,,	,,	,, :	$y_2=f(x_2)$
,, x_3	,,	,,	,,	,, :	$y_3=f(x_3)$
,, x_4	,,	,,	,,	,, :	$y_4=f(x_4)$
,, x_5	,,	,,	,,	,, :	$y_5=f(x_5)$

Wir sollen nun, ohne die mathematische Form des Gesetzes zu kennen, nach dem sich y in seiner Abhängigkeit von x ändert, also ohne die Form von:

$$y = f(x)$$

zu wissen, bloß gestützt auf die vorliegenden Ergebnisse der Beobachtung zu Werten von x, die zwischen x_1 und x_2 oder x_2 und x_3 usw. liegen, die zugehörigen Werte von y berechnen, „interpolieren".

Sind beim Experiment die aufeinanderfolgenden Werte von x so gewählt worden, daß sie sich stets um den gleichen Betrag unterscheiden, — war z. B.:

$$\begin{array}{lll} x_1 = a & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_1 = f(a) \\ x_2 = a + h & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_2 = f(a+h) \\ x_3 = a + 2h & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_3 = f(a+2h) \\ x_4 = a + 3h & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_4 = f(a+3h) \\ x_5 = a + 4h & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_5 = f(a+4h) \end{array}$$

und bemerken wir dann, daß die Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden besonderen Werten y_1, y_2, usw. klein und ziemlich regelmäßig sind, so können wir Werte von y zu irgendwelchen Zwischenwerten von x unter der Annahme berechnen, daß die Änderung im Wert von y proportional ist der Änderung im Wert der unabhängigen Variablen.

Wir gehen dann nach einer Methode vor, die wir schon auf Seite 195 verwendet haben, um $\log(n+h)$ zu berechnen, wenn $\log n$ und $\log(n+1)$ gegeben waren.

Sind aber die Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden besonderen Werten von y groß oder unregelmäßig, dann können wir nicht ohne weiteres auf Grund der Annahme einer einfachen Proportionalität rechnen, sondern wir müssen uns einer der Interpolationsformeln bedienen, die von Newton, Stirling, Langrange und Gauß angegeben worden sind.

a) Die Interpolationsformel von Newton.

Wir bilden zunächst die Differenzen Δ^1 zwischen je zwei aufeinanderfolgenden besonderen Werten von y:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= f(a+h) - f(a) &&= \Delta^1{}_a \\ y_3 - y_2 &= f(a+2h) - f(a+h) &&= \Delta^1{}_{a+h} \\ y_4 - y_3 &= f(a+3h) - f(a+2h) &&= \Delta^1{}_{a+2h} \\ y_5 - y_4 &= f(a+4h) - f(a+3h) &&= \Delta^1{}_{a+3h} \end{aligned}$$

Nun bilden wir die Differenzen Δ^2:

$$\begin{aligned} \Delta^2{}_a &= \Delta^1{}_{a+h} - \Delta^1{}_a \\ \Delta^2{}_{a+h} &= \Delta^1{}_{a+2h} - \Delta^1{}_{a+h} \\ \Delta^2{}_{a+2h} &= \Delta^1{}_{a+3h} - \Delta^1{}_{a+2h} \end{aligned}$$

dann die Differenzen Δ^3:

$$\begin{aligned}\Delta^3{}_a &= \Delta^2{}_{a+h} - \Delta^2{}_a \\ \Delta^3{}_{a+h} &= \Delta^2{}_{a+2h} - \Delta^2{}_{a+h}\end{aligned}$$

und schließlich können wir noch die Differenz Δ^4 bilden:

$$\Delta^4{}_a = \Delta^3{}_{a+h} - \Delta^3{}_a$$

Höhere Ordnungen von Differenzen können wir offenbar nicht mehr bilden, wenn nur fünf besondere Werte von x und die zugehörigen Werte von y gegeben sind.

Die besonderen Werte der unabhängigen Variablen, die zugehörigen Funktionswerte und die gebildeten Differenzen stellen wir nun in Form einer Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{llllll}
a & f(a) & & & & \\
 & & \Delta^1{}_a & & & \\
a+h & f(a+h) & & \Delta^2{}_a & & \\
 & & \Delta^1{}_{a+h} & & \Delta^3{}_a & \\
a+2h & f(a+2h) & & \Delta^2{}_{a+h} & & \Delta^4{}_a \\
 & & \Delta^1{}_{a+2h} & & \Delta^3{}_{a+h} & \\
a+3h & f(a+3h) & & \Delta^2{}_{a+2h} & & \\
 & & \Delta^1{}_{a+3h} & & & \\
a+4h & f(a+4h) & & & &
\end{array}$$

Aus den obigen Gleichungen ergibt sich nun leicht:

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \Delta^1{}_a \\
f(a+2h) &= f(a+h) + \Delta^1{}_{a+h} \\
&= f(a) + \Delta^1{}_a + \Delta^1{}_{a+h} \\
&= f(a) + \Delta^1{}_a + \Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a \\
&= f(a) + 2\Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a \\
f(a+3h) &= f(a+2h) + \Delta^1{}_{a+2h} \\
&= f(a) + 2\Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^1{}_{a+2h} \\
&= f(a) + 2\Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^1{}_{a+h} + \Delta^2{}_{a+h} \\
&= f(a) + 2\Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^2{}_{a+h} \\
&= f(a) + 2\Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^1{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^2{}_a + \Delta^3{}_a \\
&= f(a) + 3\Delta^1{}_a + 3\Delta^2{}_a + \Delta^3{}_a
\end{aligned}$$

usw.

Allgemein ist:

$$f(a+nh) = f(a) + n\Delta^1{}_a + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2{}_a + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3{}_a + \quad (1)$$

und wenn wir setzen:

$$nh = z, \text{ somit } n = \frac{z}{h}$$

ergibt sich weiter:

$$f(a+z)=f(x)=f(a)+\frac{z}{h}\cdot\frac{\Delta^1{}_a}{1}+\frac{z(z-h)}{h^2}\cdot\frac{\Delta^2{}_a}{2!}+\frac{z(z-h)(z-2h)}{h^3}\cdot\Delta^3{}_a+ \quad (2)$$

$$z=x-a$$

Dies ist die Newtonsche Interpolationsformel; wenn a gleich null ist, haben wir zu schreiben:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{h}\cdot\frac{\Delta^1{}_0}{1}+\frac{x(x-h)}{h^2}\cdot\frac{\Delta^2{}_0}{2!}+\frac{x(x-h)(x-2h)}{h^3}\cdot\frac{\Delta^3{}_0}{3!}+ \quad (3)$$

da ja dann:

$$z=x$$

Einige Beispiele sollen die praktische Verwendung der Formel klarmachen.

Beispiele:

1. $f(0)=2{\cdot}844$, $f(1)=2{\cdot}705$, $f(2)=2{\cdot}501$, $f(3)=2{\cdot}236$. Man berechne $f(\frac{1}{5})$.

Zuerst stellen wir eine Tabelle nach obigem Schema auf:

Werte der unabhängigen Variablen	Funktions- werte	Δ^1	Δ^2	Δ^3
0	2·844			
		$(-0{\cdot}139)_0$		
1	2·705		$(-0{\cdot}065)_0$	
		$(-0{\cdot}204)_1$		$(0{\cdot}004)_0$
2	2·501		$(-0{\cdot}061)_1$	
		$(-0{\cdot}265)_2$		
3	2·236			

Setzen wir nun zunächst die Werte:

$$z=x=\frac{1}{5} \qquad h=1$$

in die Formel (3), so ergibt sich:

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=f(0)+\frac{1}{5}\Delta^1{}_0+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\Delta^2{}_0+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\Delta^3{}_0$$

jetzt setzen wir aus der Tabelle die Zahlenwerte von $\Delta^1{}_0$, $\Delta^2{}_0$ und $\Delta^3{}_0$ ein, führen die Rechnung aus und finden, daß nach dieser Formel:

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=2{\cdot}821592$$

ist.

2. Gegeben ist:

$$\log 4{\cdot}22 = 0{\cdot}6253125 \qquad \log 4{\cdot}23 = 0{\cdot}6263404$$
$$\log 4{\cdot}24 = 0{\cdot}6273659 \qquad \log 4{\cdot}25 = 0{\cdot}6283889$$

zu berechnen ist:

$$\log 4{\cdot}21684.$$

Es handelt sich in dem Fall um eine sogenannte „Extrapolation":

$$f(x) = f(a) + \frac{z}{h} \cdot \frac{\Delta^1_a}{1} + \frac{z(z-h)}{h^2} \frac{\Delta^2_a}{2!}$$

wir begnügen uns mit drei Gliedern auf der rechten Seite.

$$x = 4{\cdot}21684 \qquad a = 4{\cdot}22 \qquad z = x - a = 0{\cdot}00316$$
$$f(a) = \log 4{\cdot}22 \qquad h = 0{\cdot}01$$

$$\log 4{\cdot}21684 = \log 4{\cdot}22 + \frac{-0.00316}{0{\cdot}01} \cdot \Delta^1_a + \frac{-0{\cdot}00316(-0{\cdot}00316 - 0{\cdot}01)}{0{\cdot}01^2} \cdot \frac{\Delta^2_a}{2!}$$

Nun bilde man wie bekannt Δ^1_a und Δ^2_a, setze die Zahlenwerte ein und führe die Rechnung aus; man findet:

$$\log (4{\cdot}22 - 0{\cdot}00316) = \log 4{\cdot}21684 = 0{\cdot}6249872$$

3. Gegeben ist:

$$\sqrt[3]{60} = 3{\cdot}914868 \qquad \sqrt[3]{61} = 3{\cdot}936497 \qquad \sqrt[3]{62} = 3{\cdot}957892$$
$$\sqrt[3]{63} = 3{\cdot}979057 \qquad \sqrt[3]{64} = 4$$

Man berechne:

$$\sqrt[3]{60{\cdot}25}$$

$$x = 60{\cdot}25 \qquad a = 60 \qquad z = 0{\cdot}25$$
$$f(a) = \sqrt[3]{60} \qquad h = 1$$

b) Eine Bemerkung; — die Stirlingsche Interpolationsformel.

Es seien bei einem Experiment für eine größere Anzahl von Werten der unabhängigen Variablen — etwa für 20 — die zugehörigen Werte der abhängigen Variablen y bestimmt worden, so daß:

y_1	entspricht:	a
y_2	„	$a + h$
y_3	„	$a + 2h$
$\vdots$		$\vdots$
y_{20}	„	$a + 19h$

Handelt es sich nun etwa darum, zu einem Wert x der unabhängigen Variablen, der zwischen:

$$a + 13 \quad \text{und:} \quad a + 14h$$

liegt, den zugehörigen Wert von y zu berechnen, dann wird man nicht etwa ansetzen:

$$y_x = y_1 + \frac{\zeta}{h} \cdot \frac{\Delta^1{}_a}{1} + \frac{\zeta(\zeta - h)}{h^2} \frac{\Delta^2{}_a}{2!} + \ldots .$$
$$(\zeta = x - a)$$

sondern man wird die Interpolationsformel so bilden, daß das erste Glied der rechten Seite y_{14} ist; wir schreiben, um uns klarzumachen, wie dies gemeint ist:

$$\begin{array}{ll}
a + 13h = a & \qquad y_{14} = f(a) \\
a + 14h = a + h & \qquad y_{15} = f(a + h) \\
a + 15h = a + 2h & \qquad y_{16} = f(a + 2h) \\
a + 16h = a + 3h & \qquad y_{17} = f(a + 3h) \\
a + 17h = a + 4h & \qquad y_{18} = f(a + 4h)
\end{array}$$

Noch weiter folgende Werte aufzunehmen ist meist nicht nötig, da die Genauigkeit der Rechnung bei Berücksichtigung von fünf Gliedern in der Newtonschen Formel fast immer genügend ist. — Nun bilden wir die Tabelle:

$$\begin{array}{llllll}
a & f(a) & & & & \\
 & & \Delta^1{}_a & & & \\
a + h & f(a + h) & & \Delta^2{}_a & & \\
 & & \Delta^1{}_{a+h} & & \Delta^3{}_a & \\
a + 2h & f(a + 2h) & & \Delta^2{}_{a+h} & & \Delta^4{}_a \\
 & & \Delta^1{}_{a+2h} & & \Delta^3{}_{a+h} & \\
a + 3h & f(a + 3h) & & \Delta^2{}_{a+2h} & & \\
 & & \Delta^1{}_{a+3h} & & & \\
a + 4h & f(a + 4h) & & & &
\end{array}$$

und rechnen:

$$y_x = f(x)$$

aus der Formel:

$$f(x) = f(a) + \frac{z}{h} \cdot \frac{\Delta^1{}_a}{1} + \frac{z(z - h)}{h^2} \cdot \frac{\Delta^2{}_a}{2!} + \ldots .$$

in der:

$$z = x - a$$

Zu einer Interpolation nach der Stirlingschen Formel für einen Wert x der unabhängigen Variablen, der wieder zwischen:

$$a + 13h \quad \text{und} \quad a + 14h$$

liegt, wären die Wertepaare:

$$\begin{array}{ll} \alpha + 11h, & y_{12} \\ \alpha + 12h, & y_{13} \\ \alpha + 13h, & y_{14} \\ \alpha + 14h, & y_{15} \\ \alpha + 15h, & y_{16} \end{array}$$

aus der Reihe der beobachteten zu entnehmen und die folgende Tabelle zu bilden:

$$\begin{array}{lllllll}
a - 2h (= \alpha + 11h) & f(a - 2h) & & & & & \\
 & & \Delta^1_{a-2h} & & & & \\
a - h (= \alpha + 12h) & f(a - h) & & \Delta^2_{a-2h} & & & \\
 & & \Delta^1_{a-h} & & \Delta^3_{a-2h} & & \\
a (= \alpha + 13h) & \boldsymbol{f(a)} & & \Delta^2_{a-h} & & \Delta^4_{a-2h} \\
 & & \Delta^1_{a} & & \Delta^3_{a-h} & & \\
a + h (= \alpha + 14h) & f(a + h) & & \Delta^2_{a} & & & \\
 & & \Delta^1_{a+h} & & & & \\
a + 2h (= \alpha + 15h) & f(a + 2h). & & & & &
\end{array}$$

Die Stirlingsche Interpolationsformel lautet nun:

$$f(x) = f(a) + \frac{z}{h} \cdot \frac{\Delta^1_a + \Delta^1_{a-h}}{2} + \frac{z^2}{2!\,h^2} \Delta^2_{a-h} +$$
$$\frac{(z+h)z(z-h)}{3!\,h^3} \cdot \frac{\Delta^3_{a-h} + \Delta^3_{a-2h}}{2} + \frac{(z+h)z^2(z-h)}{4!\,h^4} \Delta^4_{a-2h}$$
$$+ \frac{(z+2h)(z+h)z(z-h)(z-2h)}{5!\,h^5} \cdot \frac{\Delta^5_{a-2h} + \Delta^5_{a-3h}}{2} + \ldots. \quad (4)$$

Es ist hier noch ein sechstes Glied entwickelt, um das System der Formel augenfällig zu machen; bei der praktischen Verwendung der Formel wird man kaum jemals mehr als fünf Glieder der rechten Seite verwenden, so daß man nicht mehr Wertepaare zu berücksichtigen und Ordnungen von Differenzen aufzustellen braucht, als in der obigen Tabelle aufgenommen sind.

Ein Beispiel:

Werte der unabhängigen Variablen	Funktions-werte	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
21	21·857				
		— 0·832			
25	21·025		— 0·061		
		— 0·893		**— 0·033**	
29	**20·132**		**— 0·094**		**+ 0·026**
		— 0·987		**— 0·007**	
33	19·145		— 0·101		
		— 1·088			
37	18·057				

Man berechne den Wert von $f(x)$, wenn $x = 30$ nach der Stirlingschen Formel:

$$y = 20{\cdot}132 - \frac{0{\cdot}940}{4} - \frac{0{\cdot}094}{2!\times 4^2} + \frac{15\times 0{\cdot}02}{3!\times 4^3} - \frac{15\times 0{\cdot}026}{4!\times 4^4}$$
$$= 20{\cdot}132 - 0{\cdot}235 - 0{\cdot}003 + 0{\cdot}0008 - 0{\cdot}0001 = 19{\cdot}895.$$

§ 73. Weitere Interpolationsformeln; — die graphische Interpolation.

a) Die Interpolationsformel von Lagrange.

Wir haben bisher angenommen, daß die aufeinander folgenden Werte der unabhängigen Variablen so gewählt worden sind, daß sie sich stets um den gleichen Betrag unterscheiden; nun wollen wir diese Einschränkung fallen lassen.

Es seien die besonderen Werte:

$$y_a,\ y_b,\ y_c,\ \ldots .\ y_n$$

einer Funktion y_x für die Werte:

$$a,\ b,\ c,\ \ldots .\ n$$

der unabhängigen Variablen x bestimmt worden, diese aufeinander folgenden Werte von x unterscheiden sich aber nicht mehr stets um denselben Betrag.

Lagrange hat nun gezeigt, daß sich dann der Wert von y_x für irgend einen Zwischenwert von x nach der Formel:

$$y_x = \frac{(x-b)(x-c)\ldots .(x-n)}{(a-b)(a-c)\ldots .(a-n)}\, y_a + \frac{(x-a)(x-c)\ldots .(x-n)}{(b-a)(b-c)\ldots .(b-n)}\, y_b + \quad (1)$$

berechnen läßt.

Beispiele.

1. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß eine 53 Jahre alte Person 1 Jahr leben wird, wenn die Wahrscheinlichkeit, daß sie noch ein Jahr leben wird, für eine Person

von	50	Jahren:	0·98 428
,,	51	,, :	0·98 335
,,	54	,, :	0·98 008
,,	55	,, :	0·97 877

ist. Wir setzen in der Rechnung:

$$\begin{array}{ll} a = 0 & y_a = 0{\cdot}98\,428 \\ b = 1 & y_b = 0{\cdot}98\,335 \\ c = 4 & y_c = 0{\cdot}98\,008 \\ d = 5 & y_d = 0{\cdot}97\,877 \end{array}$$
$$x = 3$$

daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
(x-b)(x-c)(x-d) &= (3-1)(3-4)(3-5) = +\ 4\\
(x-a)(x-c)(x-d) &= (3-0)(3-4)(3-5) = +\ 6\\
(x-a)(x-b)(x-d) &= (3-0)(3-1)(3-5) = -12\\
(x-a)(x-b)(x-c) &= (3-0)(3-1)(3-4) = -\ 6\\
(a-b)(a-c)(a-d) &= (0-1)(0-4)(0-5) = -20\\
(b-a)(b-c)(b-d) &= (1-0)(1-4)(1-5) = +12\\
(c-a)(c-b)(c-d) &= (4-0)(4-1)(4-5) = -12\\
(d-a)(d-b)(d-c) &= (5-0)(5-1)(5-4) = +20
\end{aligned}
$$

$$x = -\frac{4}{20}y_a + \frac{6}{12}y_b + \frac{12}{12}y_c - \frac{6}{20}y_d = -\frac{0{\cdot}98428}{5} + \frac{0{\cdot}98335}{2} + \frac{0{\cdot}98008}{1} - \frac{3\times 0{\cdot}97877}{10}$$

2. Gegeben ist:

$$y_a = \log 280 = 2{\cdot}4472 \qquad y_b = \log 281 = 2{\cdot}4487$$
$$y_c = \log 283 = 2{\cdot}4518 \qquad y_d = \log 286 = 2{\cdot}4564$$

Man bestimme nach der Formel von Lagrange log 282. Für die Rechnung setzen wir:

$$a = 0 \qquad b = 1$$
$$c = 3 \qquad d = 6$$
$$x = 2$$

$$y_x = -\frac{2}{9}y_a + \frac{4}{5}y_b + \frac{4}{9}y_c - \frac{1}{45}y_d = 2{\cdot}4502$$

3. Gegeben ist:

$$y_a = \log 200 = 2{\cdot}30103 \qquad y_b = \log 210 = 2{\cdot}32222$$
$$y_c = \log 220 = 2{\cdot}34242 \qquad y_d = \log 230 = 2{\cdot}36173$$

Man bestimme x nach der Formel von Lagrange, wenn:

$$y_x = \log x = 2{\cdot}33333$$

Für die Rechnung setzen wir:

$$a = 0 \qquad b = 1$$
$$c = 2 \qquad d = 3$$

$$y_x = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}y_a + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}y_b + \ldots$$

$$2{\cdot}33333 = -\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}\,2{\cdot}30103 + \frac{x^3-5x^2+6x}{2}\,2{\cdot}32222 + \ldots$$

die weiteren Glieder bilde der Leser selbst, führe dann die Rechnung aus und fasse zusammen; so ergibt sich zunächst:

$$2{\cdot}33333 = 2{\cdot}30103 + 0{\cdot}02171\,x - 0{\cdot}00055\,x^2 + 0{\cdot}00001\,x^3$$

Diese Gleichung ist nun nach x zu lösen (§ 110, usw.) und wir finden:

$$x = \text{appr. } 215{\cdot}462$$

4. Die Leitfähigkeit von Ammonsulfatlösungen ist bei 18^0 und einem Gehalt:

von 0·793	Gramm	Äquivalenten	im	Liter:	$526 \cdot 10^{-8}$
„ 1·584	„	„	„	„ :	$939 \cdot 10^{-8}$
„ 3·366	„	„	„	„ :	$1664 \cdot 10^{-8}$

(Hg von $0^0 = 10^8$). Man berechne die Leitfähigkeit bei einem Gehalt von einem Gramm-Äquivalent im Liter:

$$a = 0{\cdot}793 \qquad b = 1{\cdot}584 \qquad c = 3.366$$
$$y_a = 526 \qquad y_b = 939 \qquad y_c = 1664$$
$$x = 1$$

$$y_x = \frac{(1 - 1{\cdot}584)(1 - 3{\cdot}366)}{(0{\cdot}793 - 1{\cdot}584)(0{\cdot}793 - 3{\cdot}366)} 526 + \frac{(1 - 0{\cdot}793)(1 - 3.366)}{(1{\cdot}584 - 0{\cdot}793)(1{\cdot}584 - 3{\cdot}366)} 939 + \ldots$$

$$= \frac{0{\cdot}584 \cdot 2{\cdot}366}{0{\cdot}791 \cdot 2{\cdot}573} 526 + \frac{0{\cdot}207 \cdot 2{\cdot}366}{0{\cdot}791 \cdot 1{\cdot}782} 939 - \frac{0{\cdot}207 \cdot 0{\cdot}584}{2{\cdot}573 \cdot 1{\cdot}782} 1664$$

usw. Kohlrausch, Wiedemanns Ann. 1879, S. 1 und 145.

b) die Interpolationsformel von Gauß.

Sind beim Experiment wieder n Werte:

$$y_a,\ y_b,\ \ldots\ldots\ y_n,$$

für n Werte:

$$a,\ b,\ \ldots\ldots\ n$$

der unabhängigen Variablen x gemessen worden, und zeigt sich nun, daß y_x periodischen Charakter hat, so verwendet man zur Interpolation eines Zwischenwertes die Formel von Gauß:

$$y_x = \frac{\sin\frac{1}{2}(x-b)\sin\frac{1}{2}(x-c)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-n)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a-c)\ldots\sin\frac{1}{2}(a-n)}\, y_a + \frac{\sin\frac{1}{2}(x-a)\sin\frac{1}{2}(x-c)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-n)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)\sin\frac{1}{2}(b-c)\ldots\sin\frac{1}{2}(b-n)}\, y_b + \ldots \quad (2)$$

c) graphische Interpolation.

Man trägt die gewählten Werte der unabhängigen Variablen und die zugehörigen gemessenen Funktionswerte als Abszissen und Ordinaten in einem Koordinatensystem ein und verbindet die Enden der Ordinaten durch einen Linienzug; je mehr Messungen gemacht wurden, desto genauer stellt natürlich die gezeichnete Kurve den Verlauf der Funktion dar.

Zu irgend einem Zwischenwert der unabhängigen Variablen ermittelt man dann den zugehörigen Funktionswert, indem man einfach im Diagramm auf der Abszissenachse das Stück abträgt, das dem Zwischenwert der unabhängigen Variablen entspricht und die zugehörige Ordinate abmißt.

Sehr geeignet für derartige Arbeiten ist das sogenannte Millimeterpapier.

§ 74. Näherungsweise Berechnung von Werten für dy/dx auf Grund von Beobachtungsergebnissen.

Es seien wieder durch Beobachtung eines Vorganges für eine Reihe von Werten der unabhängigen Variablen x die zugehörigen Werte der abhängigen Variablen y bestimmt worden; die mathematische Form von $f(x) = y$ sei unbekannt.

Es ist dann manchmal — wie wir im folgenden Paragraph sehen werden, — eine wichtige Aufgabe, für eine Anzahl von Werten der unabhängigen Variablen x näherungsweise die Werte von dy/dx zu berechnen.

Um sie zu lösen, können wir zwei Wege einschlagen. Tragen wir die zusammengehörigen Werte von x und y in ein Koordinatensystem ein und verbinden die Enden der Ordinaten durch einen Linienzug, so gibt uns die erhaltene Kurve ein mehr oder weniger genaues Bild des Verlaufes von $f(x)$ innerhalb des ersten und letzten beobachteten Wertes von y. Um nun für irgend einen Wert von x — etwa $x = a$ — den Wert von dy/dx zu berechnen, legen wir (Fig. 84) in dem Punkt mit den Koordinaten a und y_a eine Tangente an die Kurve und berechnen $\tan \alpha$, indem wir MN abmessen und den Wert des Verhältnisses y_a/MN ausrechnen. Die Genauigkeit der Methode ist natürlich im allgemeinen nicht sehr groß.

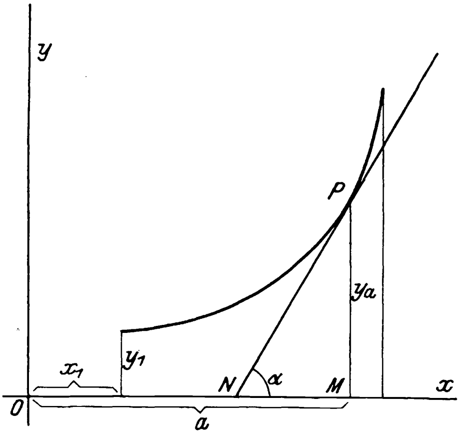

Fig. 84.

Auf dem anderen Wege müssen wir von einer der Interpolationsformeln ausgehen.

Es seien die aufeinander folgenden Werte der unabhängigen Variablen so gewählt worden, daß sie sich stets um den gleichen Betrag h unterscheiden, a sei einer dieser Werte, und wir sollen nun für den Punkt mit den Koordinaten $x=a$ und $y_a=f(a)$ näherungsweise den Wert von dy/dx berechnen.

Nach der Stirlingschen Interpolationsformel ist nun $f(x)$, wenn:

$$a < x < a + h$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h} \cdot \frac{\Delta'_a + \Delta'_{a-h}}{2} + \frac{(x-a)^2}{2!\,h^2} \Delta^2_{a-h} + \cdots \quad (1)$$

da ja:

$$z = x - a$$

Bilden wir nun $df(x)/dx$ und setzen im Resultat:

$$x = a$$

d. h. lassen den Punkt mit den Koordinaten x und $f(x)$ unendlich nahe an den Punkt mit den Koordinaten a und $f(a)$ heranrücken, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^1_a + \Delta^1_{a-h}}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3_{a-h} + \Delta^3_{a-2h}}{2} + \frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5_{a-2h} + \Delta^5_{a-3h}}{2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta'_a + \Delta'_{a-h}}{2} - \frac{1^2}{3!}\,\frac{\Delta^3_{a-h} + \Delta^3_{a-2h}}{2} + \frac{1^2 \cdot 2^2}{5!}\,\frac{\Delta^5_{a-2h} + \Delta^5_{a-3h}}{2} + \cdots\right) \quad (2)$$

Ein Beispiel.

Werte der unabhängigen Variablen	Funktionswerte	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
4·9	134·290					
		14·123				
5·0	148·413		1·486			
		15·609		0·155		
5·1	164·022		1·641		0·019	
		17·250		**0·174**		**— 0·004**
5·2	**181·272**		**1·815**		**0·015**	
		19·065		**0·189**		**+ 0·009**
5·3	200·337		2·004		0·024	
		21·069		0·213		
5·4	221·406		2·217			
		23·386				
5·5	244·692					

Man zeige, daß:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=5\cdot2}=\frac{1}{0\cdot1}\left(\frac{17\cdot250+19\cdot065}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{0\cdot174+0\cdot189}{2}+\frac{1}{30}\cdot\frac{0\cdot009-0\cdot004}{2}\right)=181\cdot273$$

2. Aus Horstmanns Daten über den Dissoziationsdruck p der Ammonsilberchloride bei verschiedenen Temperaturen t:

t:	8,	12,	16, ... ^0C
p:	43·2,	52·0,	65·3, ... cm Hg

berechne man:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=12^0}=2\cdot76$$

Der Leser mache sich nun noch selbst klar, daß:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2{}_{a-h}-\frac{1}{12}\Delta^4{}_{a-2h}+\frac{1}{90}\Delta^6{}_{a-3h}+\dots\right)$$

Bei Rechungen mit den Ergebnissen von praktischen Beobachtungen ist es kaum jemals nötig, mehr als höchstens drei Glieder in den entwickelten Reihen zu verwenden.

§ 75. Aufstellung einer Formel für einen Vorgang auf Grund von Messungen.

Ist man nicht in der Lage, von allgemeinen theoretischen Gesichtspunkten aus den Zusammenhang zwischen der unabhängigen und der abhängigen Variablen bei einem betrachteten Vorgang in der Ausdrucksweise und Mathematik zu fassen, eine sogenannte theoretische Formel aufzustellen, wie wir dies beispielsweise beim Zerfall des Rohrzuckers unter dem Einfluß verdünnter Säuren konnten, so müssen wir auf Grund der Meßergebnisse eine empirische Formel zu gewinnen suchen, die den Zusammenhang zwischen x und y (wenn allgemein x die unabhängige, y die abhängige Variable bezeichnet) wenigstens im Bereich der Messungen möglichst genau darstellt.

Strenge Regeln, wie man dabei vorzugehen hat, lassen sich nicht geben, — Findigkeit und Übung spielen eine wichtige Rolle bei derartigen Arbeiten.

Häufig gibt die graphische Darstellung der Beobachtungsresultate wichtige Anhaltspunkte.

Ist die gezeichnete Kurve innerhalb des Meßbereiches eine gerade Linie, so ist die Gleichung, die den Zusammenhang zwischen x und y darstellt, von der Form:

$$y=a+bx$$

Ist dies nicht der Fall, so versuche man es mit den Relationen:

$$y = ax^n \quad \text{oder:} \quad y = \frac{ax}{1 + bx}$$

Nützlich ist es ferner, für eine Reihe von Werten von x die angenäherten Werte von dy/dx zu berechnen.

Findet man dann, daß sich dy/dx proportional mit y ändert, so kann man den Zusammenhang zwischen x und y durch:

$$y = b e^{ax} \quad \text{oder:} \quad y = b e^{-ax}$$

ausdrücken. Erfolgt die Änderung von dy/dx proportional mit der Änderung des Verhältnisses x/y, so versuche man die Beziehung:

$$y = b x^a$$

Ändert sich dy/dx proportional mit x, so ist die Gleichung:

$$y = a + b x^2$$

anzuwenden. Haben alle diese Versuche kein befriedigendes Resultat ergeben, so muß man es weiter mit Beziehungen wie:

$$y = \frac{a + x}{b - x} \qquad y = 10^{a + bx} \qquad y = a + b \log x$$

$$y = a + b c^x$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

versuchen. Zeigt y in seiner Abhängigkeit von x periodische Eigenschaften, so läßt sich die Beziehung zwischen den Variablen durch trigonometrische Reihen darstellen, bezüglich deren auf das Kapitel über die Fourierschen Reihen verwiesen sei.

§ 76. Auswertung der Konstanten in empirischen und theoretischen Formeln.

I. Methode:

Man wählt aus den beobachteten Wertepaaren so viele aus, als Konstanten a, b, $c \ldots.$ zu berechnen sind, setzt sie in die Gleichung zwischen y und x ein und löst die erhaltenen Relationen nach a, b, $c \ldots.$ auf.

Beispiel:

Es seien n Werte:

$$y_1, \; y_2, \; \ldots. \; y^n$$

für die Werte:

$$x_1 = 0, \; x_2, \; \ldots. \; x^n$$

der unabhängigen Variablen gemessen worden; man berechne die Konstanten in der Gleichung:

$$y = a \cdot 10^{\frac{bx}{1+cx}}$$

die den Zusammenhang zwischen x und y beim betrachteten Vorgang darstellen soll.

Wenn:

$$x_1 = 0, \quad \text{ist} \quad y_1 = a$$

es bleiben also nur noch die Konstanten b und c. Wenn wir zu ihrer Berechnung die Wertepaare:

$$x_2, \ y_2 \qquad \text{und} \qquad x_3, \ y_3$$

verwenden, ergibt sich:

$$y_2 = a \cdot 10^{\frac{bx_2}{1+cx_2}} \quad \text{und} \quad y_3 = a \cdot 10^{\frac{bx_3}{1+cx_3}}$$

$$\log y_2 = \log a + \frac{bx_2}{1+cx_2} \qquad \log y_3 = \log a + \frac{bx_3}{1+cx_3}$$

$$b = \frac{\log \frac{y_3}{a}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) \log \frac{y_2}{a}}{\log \frac{y_3}{a} - \log \frac{y_2}{a}} \qquad c = \frac{\frac{1}{x_2} \log \frac{y_2}{a} - \frac{1}{x_3} \log \frac{y_3}{a}}{\log \frac{y_3}{a} - \log \frac{y_2}{a}}$$

Die Methode ist verwendbar, wenn auf eine genaue Bestimmung der Konstanten kein besonderes Gewicht gelegt wird, oder wenn die Fehler bei den Beobachtungen verhältnismäßig klein waren.

II. Methode der kleinsten Quadrate.

Eine der besten Methoden, die numerischen Werte der Konstanten in irgend einer Formel zu bestimmen, ist die Methode der kleinsten Quadrate. Die Regel geht von der Annahme aus, daß die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten die sind, für welche die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen beobachteten und gerechneten Werten die kleinmöglichste ist.

Betrachten wir den folgenden Fall: Es sei uns bekannt, daß bei irgend einem Vorgang der Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variablen x und y durch:

$$y = a + bx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

gegeben ist. Um nun die Konstanten a und b auszuwerten, messen wir für eine Reihe von Werten von x:

$$x_1, \ x_2, \ldots \ x_n$$

die zugehörigen Werte von y; wir bezeichnen die gefundenen Zahlen mit:

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

Wären die Meßergebnisse absolut genau, d. h. würden die beobachteten Werte:

$$y_1, y_1, \dots\dots y_n$$

absolut genau den wirklichen Werten von y:

$$y_{w1}, y_{w2}, \dots\dots y_{wn}$$

gleichkommen, die den Werten

$$x_1, x_2, \dots\dots x_n$$

entsprechen, so müßte:

$$a + bx_1 - y_1 = 0, \quad a + bx_2 - y_2 = 0, \dots\dots a + bx_n - y_n = 0$$

sein. Da aber eine derartige Genauigkeit nicht erreichbar ist und immer gewisse Differenzen v zwischen den beobachteten Werten von y und den wirklichen bestehen:

$$v_1 = y_{w1} - y_1, \quad v_2 = y_{w2} - y_2, \dots\dots v_n = y_{wn} - y_n. \quad (2)$$

so haben wir zu schreiben:

$$a + bx_1 - y_1 = v_1, \; a + bx_2 - y_2 = v_2, \dots\dots a + bx_n - y_n = v_n \quad (3)$$

Die Aufgabe ist nun, die Konstanten a und b so zu bestimmen, daß:

$$\Sigma(v^2) = v_1^2 + v_2^2 + \dots\dots + v_n^2 = \Sigma(a + bx - y)^2$$

ein Minimum wird; dies ist für solche Werte von a und b der Fall, für welche die partiellen Ableitungen von:

$$\Sigma(a + bx - y)^2$$

nach a und b null werden. Wir setzen also:

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma(a + bx - y)^2 = 0$$

somit:

$$\Sigma(a + bx - y) = \Sigma(a) + b\,\Sigma(x) - \Sigma(y) = 0 \; . \quad . \quad (4)$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial b}\Sigma(a + bx - y)^2 = 0$$

somit:

$$\Sigma x(a + bx - y) = a\,\Sigma(x) + b\,\Sigma(x^2) - \Sigma(x \cdot y) = 0 \; . \quad (5)$$

liegen nun zu n Werten von x die beobachteten Werte von y vor, so können wir weiter schreiben, da dann:

$$\Sigma(a) = na$$

$$na + b\,\Sigma(x) - \Sigma(y) = 0 \qquad a\,\Sigma(x) + b\,\Sigma(x^2) - \Sigma(x \cdot y) = 0 \quad (6)$$

und wenn wir jetzt nach a und b auflösen, erhalten wir die zwei Gleichungen:

$$a = \frac{\Sigma(x) \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma(x^2)\,\Sigma(y)}{[\Sigma(x)]^2 - n\,\Sigma(x^2)} \qquad b = \frac{\Sigma(x)\,\Sigma(y) - n\,\Sigma(x \cdot y)}{[\Sigma(x)]^2 - n\,\Sigma(x^2)} \quad (7)$$

welche die Werte der Konstanten a und b so bestimmen, daß $\Sigma(v^2)$ ein Minimum wird.

Beispiele.

1. Es sei beobachtet worden, daß ein Volum Wasser bei 760 mm Barometerstand:

bei $t = 0^0$	löst:	1·80	Volumina (v)	Kohlensäure,
„ $t = 5^0$	„	1·45	„	„
„ $t = 10^0$	„	1·18	„	„
„ $t = 15^0$	„	1·00	„	„

Zwischen v und t bestehe in dem betrachteten Temperaturintervall der allgemeine Zusammenhang:

$$v = a + b\,t$$

Man soll die Konstanten a und b auswerten.

Wir bilden zunächst die folgende Tabelle:

t	v	t^2	$t \cdot v$
0	1·80	0	0
5	1·45	25	7·25
10	1·18	100	11·80
15	1·00	225	15·00
$\Sigma(t) = 30$	$\Sigma(v) = 5{\cdot}43$	$\Sigma(t^2) = 350$	$\Sigma(t \cdot v) = 34{\cdot}05$

Die Werte für Σ(t), $\Sigma(v)$, $\Sigma(t^2)$, $\Sigma(t \cdot v)$ führen wir nun in die Formeln ein und finden:

$$a = 1{\cdot}758 \qquad b = -0{\cdot}0534$$

$$v = 1{\cdot}758 - 0{\cdot}0534\,t$$

Um zu zeigen, daß diese Formel, in der die Konstanten a und b aus den Ergebnissen der Beobachtung nach der Methode der kleinsten Quadrate gerechnet wurden, die geeignetste ist, obwohl sich nach ihr rechnerisch für:

$$t = 0^0 \quad \text{ergibt, daß:} \quad v = 1{\cdot}758$$

während die direkte Beobachtung 1·80 lieferte, bilde man die folgende Tabelle:

t	v gerechnet	v beobachtet	Differenzen zwischen den berechneten und den beobachteten Werten von v	Quadrate der nebenstehenden Differenzen
0	1·758	1·80	— 0·042	0·00176
5	1·491	1·45	+ 0·041	0·00168
10	1·224	1·18	+ 0·044	0·00194
15	0·957	1·00	— 0·043	0·00185
				0·00723

Die Zahl 0·00723 ist die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten Werten und denen, die sich aus der Formel:

$$v = a + bt$$

errechnen lassen, wenn a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungsergebnissen bestimmt wurden.

Jede Änderung der Werte von a und b bewirkt, daß als Summe der Quadrate der Differenzen eine größere Zahl erscheint, als 0·00723. Dies läßt sich leicht nachweisen. Wenn wir z. B. in die Formel

$$v = a + bt$$

die beobachteten Werte:

$$t = 0 \quad \text{und} \quad v = 1{\cdot}8$$

einsetzten, ergäbe sich:

$$a = 1{\cdot}8$$

und aus:

$$1{\cdot}45 = 1{\cdot}8 + 5b$$

dann weiter:

$$b = -0{\cdot}07$$

nun rechnen wir aus der Formel:

$$v = 1{\cdot}8 - 0{\cdot}07t$$

die Volumina für:

$$t = 10^0 \text{ und erhalten: } v = 1{\cdot}10$$
$$t = 15^0 \text{ „ „ : } v = 0{\cdot}75$$

und bilden die folgende Tabelle:

t	v gerechnet	v beobachtet	Differenzen zwischen den berechneten und den beobachteten Werten von v	Quadrate der nebenstehenden Differenzen
0	1·80	1·80	0	0
5	1·45	1·45	0	0
10	1·10	1·18	— 0·08	0·0064
15	0·75	1·00	— 0.25	0·0625
				0·0689

Die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen dem auf Grund der Formel:

$$v = 1{\cdot}80 - 0{\cdot}07\,t$$

berechneten und dem beobachteten Wert ist 0·0689.

2. Wir stellen aus einer gewissen Substanz einen Stab her, der sich mit steigender Temperatur ausdehnt, und zwar messen wir die Längen:

l: 1000·22, 1000·65, 1000·90, 1001·05 mm

bei:

t: 20, 40, 50, 60 °C

Man berechne nach der Methode der kleinsten Quadrate die Konstanten a und b in der Formel:

$$l = a + bt$$

die den Zusammenhang zwischen Länge und Temperatur innerhalb des Bereiches der Messungen ausdrückt.

$$a = 999{\cdot}804 \qquad b = 0{\cdot}0212$$

$$l = 999{\cdot}804 + 0{\cdot}0212 \cdot t$$

(vid. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, Leipzig, 1901.)

Haben wir bei einem Vorgang den Zusammenhang zwischen x und y in der Form:

$$y = a + bx + cx^2$$

gefaßt, so berechnen wir die Konstanten b und c aus den Formeln:

$$b = \frac{\Sigma(x^4)\cdot\Sigma(xy) - \Sigma(x^3)\cdot\Sigma(x^2y)}{\Sigma(x^2)\cdot\Sigma(x^4) - [\Sigma(x^3)]^2} \qquad c = \frac{\Sigma(x^2)\cdot\Sigma(x^2y) - \Sigma(x^3)\cdot\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)\cdot\Sigma(x^4) - [\Sigma(x^3)]^2} \quad (8)$$

die ähnlich abgeleitet werden, wie oben (7); a wird gesondert bestimmt, indem man den Wert von y für $x = 0$ mißt.

Beispiele:

1. In Grenelle (Frankreich) wurden in einem artesischen Brunnen in den Tiefen:

x: 28, 66, 173, 248, 298, 400, 505, 548 m

die Temperaturen:

t: 11·71, 12·90, 16·40, 20·00, 22·20, 23·75, 26·45, 27·70 °C

gemessen; die mittlere Temperatur auf der Erdoberfläche ($x = 0$) war 10·6 °C. Man berechne die Konstanten in der Formel für den Zusammenhang zwischen x und t:

$$t = a + bx + cx^2$$

Man findet:

$$a = 10{\cdot}6 \qquad b = 0{\cdot}042096 \qquad c = -0{\cdot}000020558$$

2. Es sei:

x: 8·97,	20·56,	36·10,	49·96,	62·38,	83·73
y: 1·0078,	1·0184,	1·0317,	1·0443,	1·0563,	1·0759

$$y = 1 \quad \text{wenn:} \quad x = 0$$

Der Zusammenhang zwischen y und x werde durch:

$$y = a + bx + cx^2$$

ausgedrückt; man zeige, daß:

$$a = 1 \qquad b = 0{\cdot}00084 \qquad c = 0{\cdot}0000009$$

§ 77. Darstellung von Integralen durch Reihen.

Es ist gar nichts Außergewöhnliches, wenn wir auf Formen stoßen, die nach den gewöhnlichen uns zur Verfügung stehenden Methoden der Integration nicht lösbar sind. Ist z. B. $\int_a^b f(x)dx$ ein derartiger Ausdruck, bei welchem das allgemeine Integral $\int f(x)\,dx$ nicht lösbar ist, so können wir aber wenigstens einen Näherungswert für $\int_a^b f(x)dx$ finden, indem wir nach den in § 64 gelernten Verfahren, nämlich der Simpsonschen Regel usw., vorgehen. Ein anderer Weg bietet sich uns noch, falls es möglich ist, $f(x)$ für $a < x < b$ in einer konvergenten Reihe nach Potenzen von x zu entwickeln. Wenn wir in dieser Reihe dann Glied für Glied integrieren, so entsteht eine neue ebenfalls konvergente Reihe für $\int f(x)\,d(x)$, und integrieren wir Glied für Glied zwischen den Grenzen a und b, so können wir $\int_a^b f(x)\,dx$ mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

Einige Beispiele werden das Gesagte rasch klarmachen.

Beispiele:

1. Wenn:

$$-1 < x < 1$$

so ergibt die Entwicklung nach dem Taylorschen Schema, daß:

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

somit ist innerhalb der Grenzen -1 und $+1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^b dx - \int_a^b x^2\,dx + \int_a^b x^4\,dx - \int_a^b x^6\,dx + \ldots.$$

$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots.\right]_b^a = \text{arctan b} - \text{arctan a}$$

Man sehe § 66, Beispiele. Wir erinnern uns, daß:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + \mathrm{C}$$

2. Man zeige ferner, daß innerhalb der Grenzen -1 und $+1$:

$$\int_a^b (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3 x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots.\right]_a^b = \left[\arcsin x\right]_a^b$$

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = 2\sqrt{\sin x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\sin^4 x}{9} + \ldots\right)_{x=\frac{\pi}{4}}$$

4. $$\int^{0\cdot 5} e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \ldots_{x=0\cdot 5} \text{vid. § 66, (7 b)}$$

5. Sehr wichtig für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das Integral:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}\,d\,(hx)$$

Setzen wir $hx = t$, so ergibt sich ohne weiteres:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

welches Integral wir für kleine Werte der oberen Grenze nach 4. behandeln. Andererseits ist offenbar:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \underbrace{\int_0^t e^{-t^2}\,dt}_{\text{I.}} + \underbrace{\int_t^\infty e^{-t^2}\,dt}_{\text{II.}}$$

somit:

$$\int_0^t e^{-t^2}\,dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt}_{\text{I.}} - \underbrace{\int_t^\infty e^{-t^2}\,dt}_{\text{II.}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_t^\infty e^{-t^2}\,dt$$

daß:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

haben wir bei Besprechung der Gamma-Funktion gelernt. II. finden wir folgendermaßen. Durch partielle Integratien (vide § 51) ergibt sich, daß:

$$\int e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2t} e^{-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2t} e^{-t^2} + \frac{1}{2^2 t^3} e^{-t^2} + \int \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt$$

usw., somit schließlich:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = 1 - \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}} \left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1\cdot 3}{(2t^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2t^2)^3} + \ldots\right\}$$

welchen Ansatz wir bei großen Werten der oberen Grenze verwenden.

Für $k^2 < 1$ ist:

$$6. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$7. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2 + \ldots\right\}$$

(vide § 61)

VI. Abschnitt.

Hyperbolische Funktionen.

§ 78. Einführung der hyperbolischen Funktionen.

In § 66 wurden die folgenden Reihen entwickelt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Setzen wir nun ix an die Stelle von x, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so erhalten wir:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

oder:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \dots\dots \quad (1)$$

Ebenso findet man:

$$e^{-ix} = 1 - ix + \frac{i^2x^2}{2!} - \frac{i^3x^3}{3!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) - i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

oder:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad \dots\dots \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}\right\} \qquad \dots\dots \quad (3)$$

Schreiben wir in (1) an Stelle von x die Größe nx, wo n irgend eine reelle Zahl bedeutet, so erhalten wir zunächst:

$$\cos nx + i \sin nx = e^{inx} = (e^{ix})^n$$

demnach weiter:

und ebenso:
$$\left.\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^n &= \cos nx + i \sin nx \\ (\cos x - i \sin x)^n &= \cos nx - i \sin nx \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (4)$$

Diese Gleichungen sind unter dem Namen des Moivreschen Theorems bekannt.

Man kann nun analog der Definition der trigonometrischen Funktionen durch (3) neue Funktionen definieren, wenn man in (3) statt x überall ix setzt. Man erhält so die hyperbolischen Funktionen, und zwar den cosinus hyperbolicus:

$$\cosh x = \cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

und den hyperbolischen sinus:

$$\sinh x = \frac{1}{i} \sin ix = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

Analog den trigonometrischen werden die übrigen hyperbolischen Funktionen definiert:

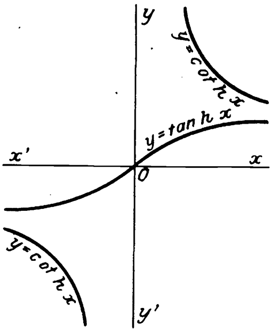

Fig. 85.

$$\left.\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sin hx}{\cos hx} & \coth x &= \frac{\cos hx}{\sin hx} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cos hx} & \operatorname{cosech} x &= \frac{1}{\sin hx} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Gemäß der Definition sind die hyperbolischen Funktionen nicht mehr periodisch, wie die trigonometrischen, sondern haben den Charakter von Exponentialfunktionen. Die Figuren 85, 86, 87 stellen die sechs hyperbolischen Funktionen graphisch dar.

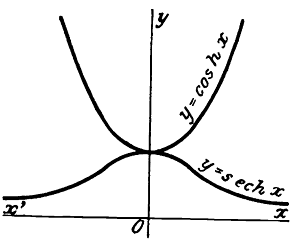

Fig. 86.

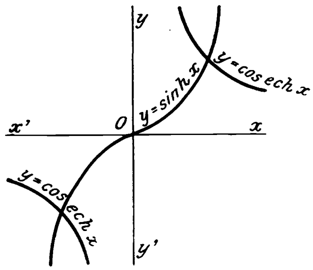

Fig. 87.

§ 79. Die geometrische Bedeutung der hyperbolischen Funktionen.

Die geometrische Bedeutung der trigonometrischen Funktionen ist uns schon bekannt. Zieht man in einem Kreise vom Radius eins mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 1$$

den Radius zu einem Punkte der Peripherie, so stellen die Koordinaten x, y dieses Punktes bezügl. den cosinus und sinus des Bogens dar, den der gezogene Radius mit der X-Achse einschließt. Eine ähnliche Bedeutung haben die hyperbolischen Funktionen für eine gleichseitige Hyperbel, nur daß an Stelle des Winkels im Bogenmaß der doppelte Inhalt des vom Radiusvektor, der X-Achse und zugehörigen Bogenstück der Hyberbel eingeschlossene Fläche tritt.

Um diese Beziehungen nachzuweisen, berechnen wir den Flächeninhalt des Stückes OPA (Fig. 88), welches nach rechts durch den Bogen AP einer gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

begrenzt wird:

Es ist:

$$\text{Fläche } OPA = \text{Fläche } OPM - \text{Fläche } APM$$

$$= \frac{xy}{2} - \int_1^x y\,dx$$

wenn wir die Koordinaten von $P\,(x, y)$ nennen und bedenken, daß nach (1) $OA = 1$ ist. Der doppelte Flächeninhalt OPA ist also:

$$u = xy - 2\int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\,dx = x\sqrt{x^2 - 1} - 2\int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

oder es ist:

$$u = \mathrm{l}(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hieraus folgt:

$$e^u = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

oder:

$$e^{2u} - 2xe^u + 1 = 0$$

dividiert man durch e^u, so ergibt sich:

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = x$$

d. h.:

$$\cosh u = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus (1) erhält man:

$$y^2 = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - 1$$

oder:

$$y = \sinh u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Demnach sind die Koordinaten x, y des Punktes P resp. $\cosh u$ und $\sinh u$ des Arguments u, d. i. der Fläche OPA. Aus (1), (3) und (4) folgt noch:

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

welche Beziehung der Relation:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

bei den trigonometrischen Funktionen entspricht.

Beschreibt man um O (Fig. 88) einen Kreis mit dem Radius OA, zieht von M eine Tangente MP' und nennt den Winkel MOP' im Bogenmaß ϑ, so ersieht man, daß zwischen den trigonometrischen Funktionen von ϑ und den hyperbolischen der Fläche u einfache Beziehungen bestehen. Es ist nämlich:

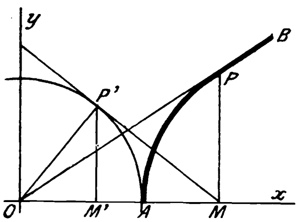

Fig. 88.

$$\frac{MO}{OP'} = x = \sec\vartheta = \cosh u \quad . \quad (6)$$

und da: $y^2 = x^2 - 1$, so ist:

$$y = \tan\vartheta = \sinh u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ferner hat man nach (5) und (6) des vorigen Paragraphen:

$$e^u = \cosh u + \sinh u = \sec\vartheta + \tan\vartheta$$

$$u = \mathrm{l}\,(\sec\vartheta + \tan\vartheta) = \mathrm{l}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right) \quad . \quad . \quad (8)$$

Da nun:

$$\tanh\frac{u}{2} = \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{\frac{-u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}} + e^{\frac{-u}{2}}} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right) + 1}$$

so folgt:

$$\tanh\frac{u}{2} = \tan\frac{\vartheta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ϑ heißt der zu u gehörige Lambertsche Winkel.

§ 80. Beziehungen der Hyperbelfunktionen zueinander; die inverse Hyperbelfunktion.

Ebenso wie in der Lehre von den trigonometrischen Funktionen lassen sich eine ganze Reihe von Beziehungen angeben, die zwischen den Hyperbelfunktionen verschiedener Argumente bestehen. Eine Grundformel fanden wir schon in (5), § 79. Andere Relationen ergeben sich, wenn man stets auf die Definitionen (5), (6) in § 78 zurückgeht. So z. B.:

$$\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = \cosh^2 x + \sin h^2 x \quad (1)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

usw.

Da das Argument der Hyperbelfunktion nicht einen Winkel, sondern eine Fläche darstellt, so schreibt man die inverse Funktion von:

$$x = \sinh y$$

in der Form:

$$x = \text{area} \sinh y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da die hyperbolischen Funktionen durch Exponentielle dargestellt werden können, so haben die inversen Funktionen die Eigenschaften von Logarithmen. Es ist:

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

daher:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

soll x reell sein, so ist das obere Zeichen zu nehmen, und man erhält:

analog:

$$\left.\begin{array}{r}x = \text{area} \sinh y = l(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ \text{area} \cosh y = l(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) \\ \text{area} \tanh y = \frac{1}{2} l \frac{1+y}{1-y} \\ \text{area} \coth y = \frac{1}{2} l \frac{y+1}{y-1} \\ \text{area} \operatorname{sech} y = l \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \\ \text{area} \operatorname{cosech} y = l \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

§ 81. Differentiation und Integration der Hyperbelfunktionen.

Die Differentialquotienten der Hyperbelfunktionen ergeben sich aus ihrer Definition durch Exponentialfunktionen; so ist:

$$y = \sin h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cosh x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Analog ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\cosh x}{dx} &= \sinh x \\ \frac{d\tanh x}{dx} &= \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist ferner:

$$y = \operatorname{area}\sinh x$$

also:

$$x = \sinh y$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

ähnlich findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\operatorname{area}\cosh x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{area}\tanh x) &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Hyperbolische Funktionen erweisen sich bei der Berechnung von Integralen irrationaler Funktionen ebenso nützlich wie trigonometrische; hat man zum Beispiel:

$$y = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$$

auszuwerten, so setze man:

$$x = a \sinh u$$

Man erhält so:

$$\begin{aligned} y = a^2 \int \cosh^2 u\, d\, u &= \frac{1}{2} a^2 (\sinh u \cosh u + u) \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{area}\sinh \frac{x}{a} \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \,\mathrm{l}\, \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Man werte aus:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Lösung:

$$J = \mathrm{l}\, \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + C$$

2. Ebenso:

$$J = \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$$

Lösung:

$$J = \mathrm{l}\,\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C$$

3. Ebenso:

$$J = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Lösung:

$$J = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + 1} - \text{area}\sinh x) + C$$

4. Man bestimme die Bogenlänge l der Kurve:

$$y = \cosh\frac{x}{c}$$

vom Punkte $x = 0$ bis zu einem Punkte (x, y).

Lösung:

$$l = c\sinh\frac{x}{c}$$

5. Man zeige, daß:

$$y = A\cosh mx + B\sinh mx$$

eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2x$$

ist.

VII. Abschnitt.

Differentialgleichungen.

§ 82. Allgemeine Erläuterungen.

Jede Gleichung zwischen zwei oder mehreren Variablen, die auch Differentialquotienten dieser Variablen enthält, nennen wir eine Differentialgleichung. Wir können uns eine solche stets durch Differentiation und Elimination von Konstanten aus einer gewöhnlichen Gleichung abgeleitet denken. Nehmen wir als Beispiel die Gleichung einer Geraden:

$$y = mx + b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Durch Differentiation erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Eliminieren wir aus (1) und (2) die Konstante m, so bekommen wir eine andere Differentialgleichung:

$$y = x\frac{dy}{dx} + b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Eine weitere liefert die Differentiation von (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Wir sehen gleichzeitig, daß jede Differentiation eine Konstante der ursprünglichen Gleichung verschwinden läßt. Gleichung (1) enthält zwei Konstanten; sie stellt eine Gerade dar, die einen Winkel, dessen Tangente m ist, mit der Abszissenachse bildet und die Ordinatenachse in der Entfernung b vom Ursprung schneidet. Von diesen zwei Bedingungen erfüllen Gleichungen (2) und (3) nur noch je eine, Gleichung (4) gar keine; letztere stellt also jede mögliche Gerade dar, sie ist die allgemeinste Gleichung einer Geraden. So wie in diesem Falle werden überhaupt die allgemeinsten Gesetzmäßigkeiten durch Differentialgleichungen, die von allen speziellen Konstanten frei sind, dargestellt.

Nun ist aber in Anwendungen der Weg, wie wir ihn eben eingeschlagen haben, der weniger wichtige; es handelt sich meist nicht darum, von der gewöhnlichen zur Differentialgleichung aufzusteigen, sondern umgekehrt aus letzterer die Gleichung zu finden, von welcher sie abgeleitet worden ist, d. h. wir haben eine Gleichung zwischen den Veränderlichen und gewissen Konstanten zu suchen, die der Differentialgleichung genügt, aus der sie also durch Differentiation und Elimination der Konstanten gebildet werden kann. Diese gesuchte Gleichung heißt die allgemeine oder vollständige Lösung, auch das vollständige Integral der Differentialgleichung. Gibt man den Konstanten der vollständigen Lösung spezielle Werte, so erhält man partikuläre Lösungen.

So ist beispielsweise die Bewegungsgleichung eines Körpers, der sich mit konstanter Beschleunigung bewegt:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wie aus:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{const}$$

folgt. Eine erste Integration liefert:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wenn g der Wert der konstanten Beschleunigung ist. Integrieren wir abermals, so finden wir:

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Diese Gleichung enthält die neue Konstante v_0, die, wie wir wissen, nichts anderes bedeutet als den Wert der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ für $t = 0$, also die Anfangsgeschwindigkeit. Schließlich erhalten wir durch Integration von (7):

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Die neue Konstante s_0 gibt den zu Anfang der Zeit bereits zurückgelegten Weg an, definiert also die Anfangslage des Körpers. (8) ist das allgemeine Integral von (5). Befindet sich der Körper zur Zeit $t = 0$ im Anfangspunkte der Bahn, so ist $s_0 = 0$ zu setzen, und es ist:

$$x = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

ein partikuläres Integral der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichungen werden eingeteilt in gewöhnliche und partielle, je nachdem eine oder mehrere unabhängige Variable vorhanden sind. Wir werden uns zunächst mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Die Ordnung einer Differentialgleichung wird durch durch jene des höchsten Differentialquotienten, der in ihr vorkommt, bestimmt. So z. B. ist Gleichung (5) von der dritten, (6) von der zweiten, (7) von der ersten Ordnung.

Wir konnten bereits bemerken, daß durch jede Integration eine neue Konstante erscheint und daß daher das allgemeine Integral von (4) zwei, dasjenige von Gleichung (5) drei willkürliche Konstanten enthält. Es läßt sich allgemein beweisen, daß das vollständige Integral einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung n und nur n willkürliche Konstanten aufweist.

§ 83. Die Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variabeln.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist ohne weiteres möglich, wenn es gelingt, die beiden Veränderlichen zu trennen; diesen Weg haben wir schon früher einigemal eingeschlagen.

So z. B. lassen sich in der Gleichung:

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

die Veränderlichen sofort trennen, und man erhält:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

und als Integral:

$$lx + ly = C$$

oder:

$$l(xy) = lC'$$

$$xy = C'$$

Es ergibt sich aus diesem Beispiel gleichzeitig, daß das Integral in verschiedenen Formen erhalten werden kann.

Eine Gleichung, bei der die Methode nicht ohne weiteres angewendet werden kann, wird dem Verfahren oft durch eine geschickte Substitution zugänglich; man betrachte z. B.:

$$(x - y^2)\,dx + 2\,xy\,dy = 0$$

Man setzt zunächst: $y^2 = v$, also:

$$(x - v)\,dx + x\,dv = 0$$

nach Division durch x^2 erhält man:

$$\frac{dx}{x} + d\left(\frac{v}{x}\right) = 0$$

daher durch die Substitution $\frac{v}{x} = u$:

$$\frac{dx}{x} + du = 0$$

$$lx + u = C$$

$$lx + \frac{v}{x} = C$$

$$xlx + y^2 = Cx$$

$$x = e^{C - \frac{y^2}{x}}$$

$$xe^{\frac{y^2}{x}} = C'$$

Ist die Gleichung homogen in x und y, so genügt zu dem bezeichneten Zweck die Substitution $y = tx$ oder $x = ty$.

Nehmen wir beispielsweise die Gleichung:

$$x + y\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

Man setze $y = xt$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{(1-t)^2} = 0$$

$$lx + \frac{1}{1-t} + l(1-t) = C$$

$$\frac{x}{x-y} + l(x-y) = C$$

$$(x-y)\, e^{\frac{x}{x-y}} = C'$$

Auch nicht-homogene Gleichungen können durch passende Substitutionen in homogene verwandelt werden. So kann die allgemeinste nicht-homogene lineare Gleichung

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

durch die Substitution $x = u + h$, $y = v + k$, wo h, k noch näher zu bestimmende Konstanten sind, homogen gemacht werden. Man erhält nämlich

$$[au + bv + (ah + bk + c)]\,du + [a'u + b'v + (a'h + b'k + c')]\,dv = 0$$

und bestimmt nun h und k so, daß:

$$ah + bk + c = 0 \qquad a'h + b'k + c' = 0$$

d. h.:
$$h = \frac{b'c - bc'}{a'b - ab'} \qquad k = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}$$

wodurch die Differentialgleichung die homogene Form annimmt

$$(au + bv)\,du + (a'u + b'v)\,dv = 0$$

Wie man aus den Ausdrücken für h und k sieht, versagt die Methode, wenn $a'b - ab' = 0$. In diesem Falle setzen wir

$$a : a' = b : b' = 1 : m$$

so daß die ursprüngliche Differentialgleichung lautet:

$$(ax + by + c)\,dx + [m(ax + by) + c']\,dy = 0$$

Die Substitution

$$z = ax + by$$

bringt die Gleichung auf die Form

$$\frac{dz}{dx} + b\frac{z + c}{mz + c'} - a = 0$$

wo die Variabeln ohne weiteres getrennt werden können.

Beispiele:

1. Die Gleichung für die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer Newtonschen Anziehung von einem fixen Punkt ist:

$$v\frac{dv}{dx} + \frac{\mu}{x^2} = 0$$

Lösung:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{x} + C$$

2.
$$(1 + x^2)\,dy = \sqrt{y} \cdot dx$$

Lösung:
$$2\sqrt{y} = \operatorname{arctan} yx + C$$

3.
$$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y + \frac{dy}{dx}\right)$$

Lösung:
$$y = C(a + x)^{1-a}$$

4. Die Ladung eines elektrisierten Körpers nimmt infolge schlechter Isolierung mit einer Geschwindigkeit ab, die der momentanen Ladung proportional ist.

$$\frac{dE}{dt} = aE$$

Wie groß ist die Ladung nach einer Zeit t?

Lösung: $$E = E_0 e^{-at}$$

wo E_0 die anfängliche Ladung (für $t = 0$) bedeutet.

5. Welche Kurve hat $-\frac{x}{y}$ zur trigonometrischen Tangente ihres Neigungswinkels mit der X-Achse?

Lösung: Der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$.

6. Bei adiabatischer Zustandsänderung ist der Zusammenhang zwischen Änderungen des Druckes und des Volums gegeben durch:

$$\gamma p dv + v dp = 0$$

Man zeige, daß daraus das Poissonsche Gesetz:

$$p v^\gamma = \text{const.}$$

folgt.

7. Die Helmholtzsche Gleichung für die Stärke i eines veränderlichen elektrischen Stromes zur Zeit t ist:

$$iw + L\frac{di}{dt} = E$$

wo E die elektromotorische Kraft, w den Widerstand und L die Selbstinduktion bedeuten. Man zeige, daß bei konstanten E, L, w die Lösung lautet:

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right)$$

vorausgesetzt, daß für $t = 0$ auch $i = 0$ ist.

8. $$(y - x)\,dy + y\,dx = 0$$

Lösung: $$y = Ce^{-\frac{x}{y}}$$

9. $$x^2\,dy - y^2\,dx - xy\,dx = 0$$

Lösung: $$x = Ce^{-\frac{x}{y}}$$

10. $$(3y - 7x - 7)\,dx + (7y - 3x - 3)\,dy = 0$$

Lösung: Die Substitution $x = u + h$, $y = v + k$ gibt für $h = -1$, $k = 0$ die homogene Gleichung:

$$(3v - 7u)\,du + (7v - 3u)\,dv = 0$$

Diese wird, wie gewöhnlich, durch die Substitution $v = ut$ integrabel gemacht und liefert das Integral:

$$(x - y + 1)^2 (x + y + 1)^5 = C$$

11. $$(2x + 3y - 5)\,dy + (2x + 3y - 1)\,dx = 0$$

Wie man sieht, gehört diese Gleichung zu jenen, wo die Substitution $x = u + h$, $y = v + k$ nicht anwendbar ist. Man setzt daher:

$$2x + 3y = z$$

und findet als Lösung:

$$x + y - 4 l (2x + 3y + 7) = C$$

12. $$(3y + 2x + 4)\,dx - (4x + 6y + 5)\,dy = 0$$

Lösung:

$$14y - 7x - 3 l (21y + 14x + 22) = C$$

§ 84. Exakte Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wenn eine Differentialgleichung durch einfache Differentiation aus einer gewöhnlichen Gleichung entstanden ist, so ist ihr Integral leicht angebbar. Ihre linke Seite, nachdem man sie auf null reduziert hat, ist ja dann das vollständige Differential einer Funktion der beiden Veränderlichen; wir nennen eine solche Gleichung eine exakte. Nun ist es leicht einzusehen, daß in einer exakten Gleichung:

$$du = M dx + N dy = 0 \quad \dots\dots \quad (1)$$

zwischen M und N die Beziehung:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

besteht, denn (vid. § 19) es muß sein:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Wir können nun zeigen, daß auch umgekehrt, wenn diese Beziehung besteht, die linke Seite von Gleichung (1) das vollständige Differential einer Funktion u von x und y ist. Wir zeigen dies, indem wir mit Hilfe von (2) die Funktion u wirklich herstellen.

Wir bilden zunächst eine Funktion u, welche der Bedingung genügt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M$$

sie hat die Form:

$$u = \int M dx + \varphi(y) \quad \dots\dots \quad (3)$$

wo $\varphi(y)$ eine noch unbestimmte Funktion von y ist. Um diese zu bestimmen, differenzieren wir (3) nach y und bedenken, daß $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ sein soll:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

oder:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M dx$$

also:

$$\varphi(y) = \int\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M dx\right) dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Durch Substitution von (4) in (3) erhält man:

$$u = \int M dx + \int\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M dx\right) dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die angedeuteten Rechenoperationen sind auf jeden Fall ausführbar, auch wenn M und N die Bedingung (2) nicht erfüllen. Allein man kann zeigen, daß u nur dann eindeutig bestimmt ist, wenn Bedingung (2) erfüllt ist. Wir können nämlich zur Bildung von u auch ausgehen von der Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N$$

oder:

$$u = \int N dy + \psi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo $\psi(x)$ eine noch näher zu bestimmende Funktion von x ist. Indem man (6) nach x differenziert, erhält man analog wie oben:

$$\psi(x) = \int\left(M - \frac{\partial}{\partial x}\int N dy\right) dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und daher:

$$u = \int N dy + \int\left(M - \frac{\partial}{\partial x}\int N dy\right) dx \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Nun sieht man aber, daß (5) und (8) nur dann übereinstimmen, wenn:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Hat man u auf einem der beiden Wege gebildet, so ist:

$$u = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

die Lösung von Gleichung (1).

Nehmen wir als Beispiel die Gleichung:

$$x(x + 2y)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy = 0$$

Hier ist:

$$M = x(x + 2y) \qquad N = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

also die Bedingung erfüllt. Wir bilden zunächst:

$$u = \int M dx + \varphi(y)$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y + \varphi(y)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = -y^2$$

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3}$$

daher:

$$u = \frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} = C$$

als Lösung der Differentialgleichung.

Beispiele:

1. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0$

Lösung: $x^3 - 6x^2 y - 6xy^2 + y^3 = C$

2. $(a^2 y + x^2)\,dx + (b^3 + a^2 x)\,dy = 0$

Lösung: $a^2 xy + b^3 y + \frac{1}{3}x^3 = C$

3. $(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

Lösung: $\frac{x^3}{3} - xy^2 = C$

§ 85. Der integrierende Faktor.

Ist der Ausdruck $Mdx + Ndy$ kein vollständiges Differential, so kann man ihn zu einem solchen machen, indem man ihn mit einem geeigneten Faktor μ multipliziert. Man kann sich denken, daß dieser Faktor bei der Entstehung der Differentialgleichung aus der ursprünglichen Gleichung wegdividiert wurde und nunmehr wieder ersetzt werden muß.

So z. B. ist $ydx - xdy$ kein vollständiges Differential; durch Multiplikation mit $\frac{1}{xy}$ wird aber der Ausdruck das Differential von $\mathrm{l}\frac{x}{y}$.

Eine Gleichung von der Form:

$$M dx + N dy = 0$$

deren linke Seite kein vollständiges Differential ist, kann also durch Multiplikation mit μ in die Form gebracht werden:

$$\mu M dx + \mu N dy = du = 0$$

so daß sie integrabel wird. Multiplizieren wir nun mit einer beliebigen Funktion von u, so wird:

$$\mu\varphi(u) M dx + \mu\varphi(u) N dy = \varphi(u) du$$

$\varphi(u) du$ läßt sich aber stets als vollständiges Differential einer Funktion $f(u)$ darstellen, so daß auch $\mu\varphi(u)$ ein integrierender Faktor ist. Es gibt also für jeden Differentialausdruck unendlich viele integrierende Faktoren.

Beispielsweise wurde oben die Differentialgleichung:

$$y dx - x dy = 0$$

durch den Faktor $\frac{1}{xy}$ integriert; sie ergab als Lösung:

$$u = \frac{x}{y} = C$$

Also ist auch $\frac{1}{xy}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ein integrierender Faktor. Setzen wir etwa $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}$, so erhalten wir den Faktor $\frac{1}{y^2}$, der in der Tat die obige Gleichung integrabel macht.

Es gibt keine allgemeine Methode, den integrierenden Faktor zu finden. Wir wollen ihn daher nur für einige Typen von Differentialgleichungen angeben.

1. Eine Gleichung von der Form:

$$m y dx + n x dy = 0$$

hat den integrierenden Faktor $x^{m-1} \; y^{n-1}$, denn es ist identisch:

$$x^{m-1} y^{n-1} (m y dx + n x dy) = d(x^m y^n)$$

Also hat:

$$x^\alpha y^\beta (m y dx + n x dy) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

den integrierenden Faktor $x^{m-1-\alpha} y^{n-1-\beta}$ oder allgemeiner:

$$x^{km-1-\alpha} y^{kn-1-\beta}$$

wo k irgend eine konstante Größe ist.

Hat die Gleichung die Form:

$$x^\alpha y^\beta (m y dx + n x dy) + x^{\alpha'} y^{\beta'} (m' y dx + n' x dy) = 0 \qquad (2)$$

so wären die integrierenden Faktoren der beiden Glieder der linken Seite bezüglich:

$$x^{km-1-\alpha} y^{kn-1-\beta} \quad \text{und} \quad x^{k'm'-1-\alpha'} y^{k'n'-1-\beta'}$$

Setzt man nun:

$$km - 1 - \alpha = k'm' - 1 - \alpha'; \quad kn - 1 - \beta = k'n' - 1 - \beta' \quad (3)$$

so werden beide Faktoren identisch, man kommt zu einem Faktor des ganzen gegebenen Ausdrucks. Berechnet man aus (3) k und k', so erhält man:

$$k = \frac{n'(\alpha - \alpha') - m'(\beta - \beta')}{mn' - m'n} \qquad k' = \frac{n(\alpha - \alpha') - m(\beta - \beta')}{mn' - m'n}$$

aus welchen Ausdrücken hervorgeht, daß die Methode unbrauchbar wird, wenn:

$$mn' - m'n = 0$$

oder:

$$m : m' = n : n'$$

Nennt man aber den Wert dieses Verhältnisses $\frac{1}{\lambda}$, so wird aus (2):

$$(x^\alpha y^\beta + \lambda x^{\alpha'} y^{\beta'})(my\,dx + nx\,dy) = 0$$

oder:

$$my\,dx + nx\,dy = 0$$

und daher von der einfacheren Form, die wir oben besprochen haben. — Man betrachte z. B.:

$$y^3(y\,dx - 2x\,dy) + x^4(2y\,dx + x\,dy) = 0$$

Hier ist:

$$\begin{array}{llll} m = 1 & n = -2 & \alpha = 0 & \beta = 3 \\ m' = 2 & n' = 1 & \alpha' = 4 & \beta' = 0 \end{array}$$

daher lauten die Gleichungen (3):

$$k - 1 = 2k' - 5 \qquad -2k - 4 = k' - 1$$

woraus $k = -2$, und daher als integrierender Faktor x^{-3} folgt, so daß die Gleichung nach Multiplikation mit ihm lautet:

$$(x^{-3}y^4 + 2xy)\,dx + (x^2 - 2x^{-2}y^3)\,dy = 0$$

wo die linke Seite jetzt ein vollständiges Differential ist.

Das Integral lautet:

$$2x^2y - y^4x^{-2} = C$$

2. Ist die Gleichung:

$$M dx + N dy = 0$$

homogen, so ist: $\frac{1}{Mx + Ny}$ ein integrierender Faktor. Denn gesetzt, es sei $M dx + N dy$ vom Grade m, μ ein integrierender Faktor vom Grade n, so ist:

$$\mu M dx + \mu N dy = du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

vom Grade $m + n$, daher u vom Grade $m + n + 1$. Nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen (§ 17) ist daher:

$$\mu Mx + \mu Ny = (m + n + 1)u \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Durch Division von (4) und (5) erhält man:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{m+n+1}\frac{du}{u}$$

also ist:

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$$

ein vollständiges Differential.

Die Methode ist nicht anwendbar, wenn:

$$Mx+Ny=0$$

in diesem Falle reduziert sich jedoch die gegebene Differentialgleichung auf:

$$ydx-xdy=0$$

die ohne weiters integrabel ist.

So z. B. ist $\frac{1}{x^3y-xy^3}$ ein integrierender Faktor der Gleichung:

$$(x^2y+y^3)dx-2xy^2dy=0$$

denn es ist:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y+y^3}{x^3y-xy^3}\right)=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy^2}{x^3y-xy^3}\right)=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$$

also die linke Seite der Gleichuung ein vollständiges Differential geworden.

3. Eine Gleichung von der Form:

$$f_1(xy)\,ydx+f_2(xy)\,xdy=0$$

hat einen integrierenden Faktor:

$$\frac{1}{[f_1(xy)-f_2(xy)]\,xy}$$

Hierbei sind f_1 und f_2 beliebige Funktionen des Produkts xy. Multipliziert man die Gleichung mit dem Faktor, so wird:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1}{(f_1-f_2)x}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{f_1}{f_1-f_2}\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2}{(f_1-f_2)y}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{f_2}{f_1-f_2}\right)$$

wenn $xy=z$ gesetzt wird. Also ist:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

Ist $Mx - Ny = 0$, so versagt die Methode; dann aber reduziert sich die Differentialgleichung auf:

$$ydx + xdy = 0$$

deren Integral $xy = C$ ist. Nehmen wir als Beispiel:

$$(1 + xy)ydx + (1 - xy)xdy = 0$$

Der integrierende Faktor ist $\frac{1}{2x^2y^2}$. Nach Multiplikation mit ihm erhält man als Integral:

$$x = Cye^{\frac{1}{xy}}$$

4. Haben die Koeffizienten der Differentialgleichung:

$$Mdx + Ndy = 0$$

die Eigenschaft, daß:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

also eine Funktion von x allein ist, so ist $e^{\int f(x)\,d(x)}$ ein integrierender Faktor. Denn es ist:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Me^{\int f(x)\,dx}\right) = e^{\int f(x)\,dx}\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Ne^{\int f(x)\,dx}\right) = e^{\int f(x)\,dx}\left(\frac{\partial N}{\partial x} + Nf(x)\right)$$

welche beiden Ausdrücke wegen (6) gleich sind. Es läßt sich auf analoge Weise zeigen, daß $e^{\int f(y)\,dy}$ ein integrierender Faktor ist, wenn:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(y)$$

So ist bei der Differentialgleichung:

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$$

der Ausdruck:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) = -\frac{2}{x}$$

daher:

$$e^{-2\int\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$$

ein integrierender Faktor.

Beispiele:

1. $$(y^3 - 2\,yx^2)\,dx + (2\,xy^2 - x^3)\,dy = 0$$

Lösung: $$x^2y^2\,(y^2 - x^2) = C$$

2. Man zeige, daß $\frac{1}{x^2 - nxy + y^2}$ ein integrierender Faktor der Gleichung:

$$y\,dy + (x - ny)\,dx = 0$$

ist.

3. $$(y^4 + 2y)\,dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)\,dy = 0$$

Lösung: $$xy^3 + y^4 + 2x = Cy^2$$

§ 86. Anwendung auf den ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik kann in der Form:

$$dQ = dU + dW \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

geschrieben werden, d. h. eine verschwundene Wärmemenge dQ tritt teils als Vergrößerung der inneren Energie U eines Körpers, teils in Form von geleisteter Arbeit dW auf.

Nun ist der Zustand des Körpers in thermodynamischer Hinsicht vollkommen definiert durch eine gewisse Zahl von Variabeln, z. B. der eines Gases durch Angabe von Druck p, Volum v und Temperatur T. Da eine dieser Größen sich durch die Zustandsgleichung:

$$pv = RT$$

aus den beiden anderen bestimmt, so hängt der Zustand von zwei unabhängigen Veränderlichen ab. Die innere Energie U ist durch den jeweiligen Zustand vollkommen bestimmt, sie ist eine eindeutige Funktion der Zustandsvariabeln, als welche wir z. B. v und T wählen können. Es ist also dU das vollständige Differential einer Funktion U von v und T. Oder anders ausgedrückt: Wenn wir, ausgehend von einem Zustand, der durch den Punkt A der Fig. 89 dargestellt sei, auf irgend einem Wege übergehen zu einem andern Zustand B, so ist die Energie U in dem neuen Zustande durch die Lage des Punktes B, d. h. durch Angabe seiner Koordinaten vollkommen bestimmt, also unabhängig von der Wahl des Weges APB oder AQB, auf dem man von A nach B gelangt.

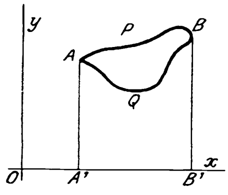

Fig. 89.

Anders verhält es sich mit den Größen dQ und dW. Diese sind durchaus nicht die vollständigen Differentiale von gewissen Funktionen Q resp. W der Koordinaten v, T. Für ein Gas ist z. B. dW darstellbar in der Form:

$$dW = p\,dv$$

Da p Funktion von v und T ist, so sieht man deutlich, daß pdv, also auch dW, im allgemeinen kein vollständiges Differential ist. Es existiert keine Funktion W, deren totales Differential dW wäre, sondern dW ist nur eine abgekürzte Schreibweise für den Differentialausdruck pdv. Ebenso verhält es sich mit dQ. Dem entspricht es, daß sowohl die verschwundene Wärmemenge als die geleistete Arbeit vom Wege abhängen, auf dem man die Substanz vom Zustand A in den Zustand B überführt. So ist die Arbeitsleistung auf dem Wege APB gegeben durch den Inhalt des Flächenstücks $A'APBB'$, während sie auf dem Wege AQB der Fläche $A'AQBB'$ gleich ist.

Multiplizieren wir jedoch Gleichung (1) mit einem integrierenden Faktor μ, so wird:

$$\mu dQ = \mu dU + \mu dW$$

ein vollständiges Differential. Es ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, daß der Faktor:

$$\mu = \frac{1}{T}$$

ist.

§ 87. Lineare Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

Lineare Differentialgleichungen sind solche, in denen die abhängige Variable y und deren Differentialquotienten nur im ersten Grade und nicht miteinander multipliziert vorkommen. Die allgemeine Form einer linearen Gleichung erster Ordnung ist:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo P- und Q Funktionen von x allein sind. Schreibt man (1) in der Form:

$$Mdx + Ndy = 0$$

wo:

$$M = Py - Q \qquad N = 1$$

ist, so sieht man, daß:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = P$$

daß folglich die Gleichung (1) unter Typus 4 in § 85 fällt und daher $e^{\int P dx}$ ein integrierender Faktor ist. Nach Multiplikation mit diesem erhält man ein allgemeines Integral:

$$y\, e^{\int P dx} = \int e^{\int P dx}\, Q\, dx + C \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Z. B. ist in der Gleichung:

$$(1+x^2)\,dy=(m+xy)\,dx$$

oder:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x^2}y=\frac{m}{1+x^2}$$

$$P=-\frac{x}{1+x^2}$$

daher der integrierende Faktor:

$$e^{\int P\,dx}=e^{-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Bringt man also die Gleichung auf die Form:

$$dy-\frac{xy+m}{1+x^2}dx=0$$

und multipliziert mit dem integrierenden Faktor, so erhält man als Integral:

$$y=mx+C\sqrt{1+x^2}$$

Die sogenannte Bernoullische Gleichung:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$$

kann auf eine lineare zurückgeführt werden. Dividiert man nämlich durch y^n, so erhält man:

$$-\frac{1}{n-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)+\frac{P}{y^{n-1}}=Q$$

oder:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)+(1-n)\frac{P}{y^{n-1}}=(1-n)Q$$

setzt man also $\frac{1}{y^{n-1}}=u$, so wird die Gleichung auf die lineare Form gebracht:

$$\frac{du}{dx}+(1-n)Pu=(1-n)Q$$

Man betrachte z. B.:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2$$

Hier ist: $P=\frac{1}{x}$, $Q=1$, $n=2$; nach der Transformation erhält die Gleichung die Form:

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-1$$

Der integrierende Faktor ist $e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$ und das Integral:

$$(C - lx)\, xy = 1$$

Beispiele:

1. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes, der sich unter dem Einfluß einer Kraft bewegt, die eine gegebene Funktion der Zeit ist, und der dabei einen Widerstand proportional seiner jeweiligen Geschwindigkeit erfährt, lautet:

$$\frac{dv}{dt} + kv = f(t)$$

Man zeige, daß die Formel für die Geschwindigkeit lautet:

$$v = Ce^{-kt} + e^{-kt} \int e^{kt} f(t)\, dt$$

2. $$x\,dy + y\,dx = x^3\,dx$$

Lösung:
$$y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

3. Eine Differentialgleichung, die Harcourt und Esson bei ihren Studien über chemische Dynamik aufgestellt haben, ist:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{k}{y} - \frac{k}{x} = 0$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Lösung:
$$\frac{1}{y} e^{-kx} + k \int \frac{1}{x} e^{-kx}\, dx = C$$

Das Integral muß durch Reihenentwicklung gelöst werden.

§ 88. Nicht-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Ist eine Differentialgleichung erster Ordnung von höherem als dem ersten Grade in y und $\frac{dy}{dx}$, so kann der Ausdruck häufig in reelle Faktoren vom ersten Grade zerlegt werden. Man kann dann jeden solchen Faktor gesondert integrieren. Die Gleichung:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$$

z. B. kann geschrieben werden:

$$\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)\left(\frac{dy}{dx} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = 0$$

Das Integral der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 0$$

ist:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{C}$$

das der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{\frac{y}{x}} = 0$$

lautet:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{C}$$

Die beiden Integrale sind die beiden Zweige der Parabel:

$$(x-y)^2 - 2C(x+y) + C^2 = 0$$

in dieser letzten Form sind also beide Lösungen enthalten.

Ist diese Faktorenzerlegung nicht anwendbar, wohl aber die Differentialgleichung auflösbar nach x, y, $\frac{dy}{dx} = p$ oder $\frac{y}{x}$, so hilft häufig eine nochmalige Differentiation. Nehmen wir beispielsweise an, die Gleichung sei nach y auflösbar, dann hat sie die Form:

$$y = f(x, p) \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Eine Differentiation nach x liefert:

$$p = \varphi(x, p, p') \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und p. Können wir diese integrieren, so erhalten wir eine gewöhnliche Gleichung zwischen x, p. Eliminieren wir dann aus dieser und (1) p, so erhalten wir eine Gleichung zwischen x und y, also das Integral von (1). Nehmen wir z. B. die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 + y^2$$

oder:

$$p = (x-y)^2$$

also:

$$y = x + \sqrt{p}$$

Die Differentiation nach x liefert:

$$p = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{dp}{dx}$$

Löst man diese Differentialgleichung, in der sich die Variabeln ohne weiteres trennen lassen, so erhält man:

$$x = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1} + l\,C$$

oder auch:

$$\sqrt{p} = \frac{C + e^{2x}}{C - e^{2x}}$$

Eliminert man aus dieser und der gegebenen Differentialgleichung p, so bekommt man das allgemeine Integral:

$$y = x + \frac{C + e^{2x}}{C - e^{2x}}$$

Fehlt in der Differentialgleichung eine der beiden Veränderlichen, so läßt sich, falls man nach dem Differentialquotienten auflösen kann, unmittelbar integrieren, wie z. B. in:

$$p^2 + px + 1 = 0$$

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$$

daher:

$$y = \int \left(-\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}\right) dx$$

oder:

$$y = -\frac{x^2}{4} \pm \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\,l\,(x + \sqrt{x^2 - 4})\right] + C$$

Beispiele:

1. $$xyp^2 - (x^2 - y^2)\,p - xy = 0$$

Lösung: Man zerlege in die Faktoren $p - \frac{x}{y}$ und $p + \frac{y}{x}$ und erhält als Integrale:

$$y^2 - x^2 = C \quad \text{und} \quad xy = C_1$$

2. $$p^2 - 7p + 12 = 0$$

Lösungen: $y = 3x + C \qquad y = 4x + C_1$

3. $$xp^2 - 2yp + ax = 0$$

Lösung:
$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{C} + aC\right)$$

4. $$yp^2 + 2xp - y = 0$$

Lösung: $y^2 = 4C(C - x)$

5. $$p = y + \frac{1}{y}$$

Lösung: $y^2 = Ce^{2x} - 1$

6. $$p = x + \frac{1}{x}$$

Lösung:
$$y = \frac{x^2}{2} + lx + C$$

§ 89. Die Clairautsche Gleichung und die singulären Lösungen.

Einen häufig vorkommenden Typus von Differentialgleichungen erster Ordnung repräsentiert die Clairautsche Gleichung:

$$y = px + f(p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$. Durch Differentiation erhält man:

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

woraus folgt, daß entweder:

$$x + f'(p) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dx} = 0$$

Wählen wir zunächst die zweite Lösung, so erhalten wir:

$$p = C \quad \text{oder} \quad y = Cx + f(C)$$

wie man durch Einsetzen in (1) findet.

Die andere Lösung $x + f'(p) = 0$ liefert in Kombination mit (1) durch Elimination von p eine Gleichung zwischen x und y, die ein anderes Integral darstellt. Dieses Integral enthält nicht wie das erste eine willkürliche Konstante und kann auch nicht aus dem ersten etwa dadurch abgeleitet werden, daß man der Konstante C einen speziellen Wert erteilt. Außer dem allgemeinen Integral, aus dem wir durch Spezialisierung der Konstanten alle partikulären Integrale gewinnen, existiert also in diesem Falle noch ein anderes; wir nennen es ein singuläres Integral.

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung:

$$y = px + \frac{a}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wir differenzieren und erhalten:

$$\left(x - \frac{a}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

also entweder $x - \frac{a}{p^2} = 0$ oder $\frac{dp}{dx} = 0$

wenn das letztere ist:

$$p = C \quad \text{oder} \quad y = Cx + \frac{a}{C} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

im ersteren Falle hingegen:

$$p = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

Nach Substitution in (2) folgt:

$$y^2 = 4ax \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wie man sieht, ist (4) aus (3) nicht ableitbar und enthält keine willkürliche Konstante: (4) ist das singuläre Integral von (1).

Das allgemeine Integral stellt eine Schar von Kurven dar, deren einzelne man erhält, indem man der willkürlichen Konstanten spezielle Werte erteilt; so repräsentiert (3) eine Schar von Geraden. Das singuläre Integral hingegen repräsentiert eine einzige Kurve, so (4) eine Parabel. Da aber der Wert von $p = \frac{dy}{dx}$ aus beiden Gleichungen der Differentialgleichung genügt, so stimmen die Tangenten der Kurvenschar (3) mit denen an (4) überein oder (4) ist die Einhüllende der Kurven (3).

Wie in der Algebra gezeigt wird, ist die Bedingung dafür, daß eine quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gleiche Wurzeln hat, das Bestehen der Relation:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Daher heißt die linke Seite der letzteren Gleichung die Diskriminante. Schreiben wir nun (2) in der Form:

$$xp^2 - yp + a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

so ist die Bedingung dafür, daß zwei gleiche Werte für p der Gleichung genügen:

$$y^2 - 4ax = 0$$

also die Gleichung der Einhüllenden, was nach der eben gemachten Bemerkung verständlich ist. Schreiben wir aber Gleichung (3) in der Form:

$$xC^2 - yC + a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so erhält man wieder dieselbe Gleichung als Bedingung für die Gleichheit zweier Wurzeln C. Das bedeutet, daß die Einhüllende der Ort der Schnittpunkte je zweier unendlich benachbarter Geraden der Schar (6) ist.

Die Umkehrung ist jedoch nicht zulässig, d. h., die Diskriminante von (5) oder (6) gleich null gesetzt, braucht nicht die Gleichung der Einhüllenden zu sein. So würde der geometrische Ort der Berührungspunkte je zweier nicht benachbarter Kurven der Kurvenschar, z. B. die Gerade PQ in Fig. 90, die p-Diskriminante, nicht aber die C-Diskriminante verschwinden lassen. Hingegen würde für den geometrischen Ort aller mehrfachen Punkte der Kurvenschar (RS in Fig. 90) die C-Diskriminante, nicht aber die p-Diskriminante null werden. Für

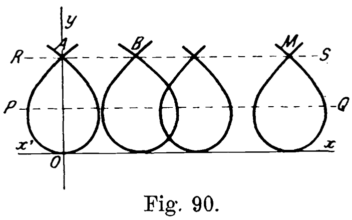

Fig. 90.

den Ort aller Spitzen würden beide Diskriminanten null sein. Trotzdem würde keiner dieser geometrischen Orte die gegebene Differentialgleichung erfüllen.

Beispiele:

1. $$y = px + p^2$$

Das allgemeine Integral ist:

$$y = Cx + C^2$$

die singuläre Lösung:

$$x^2 + 4y = 0$$

2. $$(y - px)(p - 1) = p$$

Allgemeine Lösung: $(y - Cx)(C - 1) = C$

Singuläre Lösung: $\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1$

3. $$xp^2 - 2yp + ax = 0$$

Lösung: Man gelangt zur Gleichung:

$$(p^2 - a)\left(1 - \frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

Der erste Faktor liefert die singuläre Lösung:

$$y^2 = ax^2$$

Der zweite das allgemeine Integral:

$$x^2 - 2Cy + aC^2 = 0$$

4. $$4xp^2 = (3x - a)^2$$

Allgemeines Integral: $(y - C)^2 = x(x - a)^2$

Aus der p-Diskriminante erhält man:

$$x(3x - a)^2 = 0$$

Aus der C-Diskriminante:

$$x(x - a)^2 = 0$$

Von den 3 Lösungen dieser zwei Gleichungen:

$$x = 0 \qquad x = \frac{a}{3} \qquad x = a$$

ist keine ein singuläres Integral; die erste ist der Ort der Spitzen, die zweite derjenige der Berührungspunkte, die dritte jener der mehrfachen Punkte der Kurven.

5. $$y^2(p^2 + 1) = a^2$$

Lösung: Das allgemeine Integral ist:

$$y^2 + (x - C)^2 = a^2$$

eine Schar von Kreisen.

$$y = \pm a$$

sind die singulären Lösungen, zwei Gerade als Einhüllende.

$$y = 0$$

ist der Ort der Berührungspunkte.

§ 90. Das Problem der Trajektorien.

Kurven, die eine Schar anderer Kurven unter konstantem Winkel schneiden, heißen Trajektorien. Orthogonale Trajektorien, auf deren Betrachtung wir uns beschränken, schneiden eine Kurvenschar unter rechtem Winkel.

Ist die Kurvenschar gegeben durch die Gleichung:

$$f(x, y, C) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so eliminieren wir durch Differentiation zunächst den willkürlichen Parameter C und erhalten:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

wenn α den Winkel zwischen der Tangente an eine Kurve der Schar und der Abszissenachse bedeutet. Ist der Winkel zwischen der Tangente, die in demselben Punkt an die orthogonale Trajektorie gelegt wird und der X-Achse α', so ist offenbar:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

also:

$$\tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \alpha'} = \infty$$

und wir werden zur Beziehung geführt:

$$1 + \tan \alpha \tan \alpha' = 0$$

oder:

$$\tan \alpha' = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Setzt man also in (2) $-\frac{dx}{dy}$ statt $\frac{dy}{dx}$, so gelangt man zur Differentialgleichung der Trajektorien:

$$\varphi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Beispielsweise ist:

$$xy = C$$

die Gleichung einer Schar von gleichseitigen Hyperbeln. Durch Differentiation erhält man:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

daher ist die Differentialgleichung der Trajektorien:

$$-x\frac{dx}{dy} + y = 0$$

deren allgemeines Integral lautet:

$$y^2 - x^2 = C_1$$

also eine Schar von Hyperbeln, deren Achsen mit den Asymptoten der gegebenen Hyperbelschar zusammenfallen.

Beispiele:

1. Die orthogonalen Trajektorien der Parabelschar:

$$y^2 = 4\,ax$$

zu suchen.

Lösung:

$$2x^2 + y^2 = C^2$$

also ein System von Ellipsen, deren Mittelpunkt im Scheitel der Parabeln liegt.

2. Die Niveauflächen des Potentials eines Magnetstabs mit punktförmigen Polen haben die Gleichung:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = C$$

wo r_1, r_2 die Entfernungen eines Punktes von den Polen sind; wie lautet die Gleichung der Kraftlinien, d. i. der orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen?

Lösung: Setzt man die Distanz der Pole 2a, so ist die Gleichung des Schnitts der Niveauflächen mit der XY-Ebene:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = C$$

Hieraus gewinnt man nach der Regel die Differentialgleichung der Trajektorien:

$$-\frac{1}{r_1{}^3}\left[(x-a)\,dy - y\,dx\right] + \frac{1}{r_2{}^3}\left[(x+a)\,dy - y\,dx\right] = 0$$

oder:

$$-\frac{(x-a)^2}{r_1{}^3}\,d\left(\frac{y}{x-a}\right) + \frac{(x+a)^2}{r_2{}^3}\,d\left(\frac{y}{x+a}\right) = 0$$

Nennt man die Winkel von r_1, r_2 mit der positiven X-Achse bezügl. ϑ_1, ϑ_2, so kann man die Gleichung schreiben:

$$-\frac{\cos^2\vartheta_1}{r_1}\, d(\tan\vartheta_1) + \frac{\cos^2\vartheta_2}{r_2}\, d(\tan\vartheta_2) = 0$$

oder:

$$-\frac{1}{r_1}\, d\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\, d\vartheta_2 = 0$$

daher folgt schließlich, weil:

$$r_1 : r_2 = \sin\vartheta_2 : \sin\vartheta_1$$

$$\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = C$$

als die Gleichung der Kraftlinien.

§ 91. Lineare Differentialgleichungen der zweiten und höherer Ordnung.

Von den Differentialgleichungen höherer als der ersten Ordnung sind die linearen wichtig und verhältnismäßig einfach. Ihre allgemeine Form ist:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_n y = X$$

wo die Größen X_1, $X_2 \ldots X_n$ Funktionen von x allein sind. Da die Gleichung zweiter Ordnung schon alles Charakteristische aufweist, wollen wir der Einfachheit halber nur diese studieren.

Wir beschäftigen uns also mit:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo P, Q, R Funktionen von x sind. Es läßt sich zeigen, daß ihr allgemeines Integral sich aus demjenigen u der Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und einem partikulären Integral v von (1) zusammensetzt. Setzen wir nämlich:

$$y = u + v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

in (1) ein, so erhalten wir:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) + \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv\right) = R$$

Da u ein Integral von (2), v ein solches von (1) sein soll, ist diese Gleichung identisch erfüllt. Da ferner u als allgemeines Integral von (2) zwei willkürliche Konstante enthält, ist der in (3) angegebene

Ausdruck wirklich das allgemeine Integral von (1). Wir haben es also in erster Linie mit Gleichungen von der Form (2) zu tun.

Wir können nun zeigen, daß die Kenntnis eines partikulären Integrals gestattet, die Ordnung einer solchen Gleichung um eine zu erniedrigen. Ist nämlich $y = u$ ein partikuläres Integral und substituieren wir:

$$y = uv \quad \text{. . . . .} \quad (4)$$

wo v eine neue Variable bedeutet, in die Gleichung, so nimmt sie die Form an:

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + \left(2\frac{du}{dx} + Pu\right)\frac{dv}{dx} = 0$$

Diese Gleichung aber ist in $\frac{dv}{dx} = z$ von der ersten Ordnung:

$$u\frac{dz}{dx} + \left(2\frac{du}{dx} + Pu\right)z = 0$$

und allgemein, wenn die ursprüngliche Gleichung von n^{ter} Ordnung war, liefert die Substitution (4) eine von der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung. Man kann allgemein zeigen, daß die Kenntnis von r partikulären Integralen die Ordnung der Gleichung um r zu erniedrigen gestattet.

Betrachten wir z. B. die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y$$

Man sieht, daß $y = e^{ax}$ ein partikuläres Integral ist. Substituieren wir $y = ve^{ax}$, so verwandelt sich die Gleichung in:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 2a\frac{dv}{dx} = 0$$

oder falls man $\frac{dv}{dx} = z$ setzt, in:

$$\frac{dz}{dx} + 2az = 0$$

Das Integral lautet:

$$z = Ce^{-2ax}$$

daher ist:

$$v = -\frac{C}{2a}e^{-2ax} + C_1$$

und schließlich:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$$

§ 92. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Wir wollen zunächst das allgemeine Integral einer Gleichung von der Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

suchen unter der Voraussetzung, daß P und Q konstante Größen sind. Versuchen wir zu setzen:

$$y=e^{mx}$$

Dadurch verwandelt sich (1) in:

$$(m^2+Pm+Q)\,e^{mx}=0$$

Wird also m so bestimmt, daß:

$$m^2+Pm+Q=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so ist e^{mx} ein Integral von (1). Gleichung (2) heißt die charakteristische Gleichung.

Hat (2) zwei ungleiche Wurzeln m_1 und m_2, so ist sowohl e^{m_1x} als e^{m_2x} ein Integral; wie man leicht sieht, ist auch $C_1e^{m_1x}$ und $C_2e^{m_2x}$ je ein Integral, und ebenso die Summe beider. Nun hat, wie wir bereits erwähnt haben, eine Gleichung zweiter Ordnung ein allgemeines Integral mit zwei und nur zwei unabhängigen Konstanten. Also ist:

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

das allgemeine Integral.

Nehmen wir als Beispiel:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+14\frac{dy}{dx}-32y=0$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$m^2+14m-32=0$$

mit den zwei Wurzeln:

$$m_1=-16, \quad m_2=2$$

daher das allgemeine Integral:

$$y=C_1e^{-16x}+C_2e^{2x}$$

Sind die beiden Wurzeln komplex, so lautet das Integral:

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= e^{\alpha x}(C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}C_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+e^{\alpha x}C_2(\cos\beta x-i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x] \end{aligned}$$

Setzen wir also:

$$C_1+C_2=A; \quad i(C_1-C_2)=B$$

so wird das Integral:

$$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

Die Bewegungsgleichung eines Punktes, der unter dem Einflusse einer der Entfernung aus der Ruhelage proportionalen Kraft schwingt, ist z. B.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0$$

die charakteristische Gleichung lautet:

$$m^2 + a^2 = 0$$

und hat die Wurzeln $m_1 = +ia$, $m_2 = -ia$. Die Bewegung wird daher beschrieben durch:

$$x = A \cos at + B \sin at$$

Ist z. B. für $t = 0$ auch $x = 0$, so ist $A = 0$ und wir haben:

$$a = B \sin at$$

eine einfache Sinusschwingung.

Hat hingegen Gleichung (2) zwei gleiche Wurzeln:

$$m_1 = m_2 = m$$

so würde das Integral lauten:

$$y = (C_1 + C_2)\, e^{mx}$$

Dieses wäre aber noch nicht das allgemeine Integral, da $C_1 + C_2$ in Wahrheit nur eine einzige Konstante vertritt. Es muß also in diesem Falle noch ein zweites Integral existieren; wir wollen zeigen, daß es die Form hat:

$$y = xe^{mx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Zu diesem Zweck benützen wir den Satz der Algebra, daß m, wenn es eine doppelte Wurzel der Gleichung (2) ist, auch eine einfache Wurzel der Ableitung von (2), also der Gleichung:

$$2m + P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ist. Setzen wir nunmehr (4) in die linke Seite von (1) ein, so erhalten wir:

$$xe^{mx}(m^2 + Pm + Q) + e^{mx}(2m + P)$$

Da nun m nach der letzten Bemerkung Wurzel sowohl von (2) als von (5) ist, wird dieser Ausdruck null, d. h. (4) ist ein Integral von (1). Das allgemeine Integral lautet also in diesem Falle:

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Ähnliches gilt für Differentialgleichungen höherer Ordnung; wenn die charakteristische Gleichung p gleiche Wurzeln m hat, so sind:

$$e^{mx},\ xe^{mx},\ x^2e^{mx} \ldots x^{p-1}e^{mx}$$

Integrale der Differentialgleichung; man betrachte z. B.:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$m^3 - m^2 - m + 1 = 0$$

oder:

$$(m^2 - 1)(m - 1) = 0$$

Die Wurzeln sind:

$$m_1 = m_2 = 1 \qquad m_3 = -1$$

Also ist das allgemeine Integral:

$$y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}$$

Da wir nun Gleichung (1) in jedem Falle lösen können, wollen wir an die Aufgabe schreiten, auch die allgemeinere Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zu integrieren, wo R irgend eine Funktion von x ist. Nun haben wir gezeigt, daß ganz allgemein eine Gleichung von der Form (7) integriert werden kann, wenn man das allgemeine Integral von (7) für $R = 0$ und außerdem ein partikuläres Integral der vollständigen Gleichung (7) kennt. Wir brauchen also nur noch die Methoden zu besprechen, wie man ein partikuläres Integral von (7) finden kann, was im folgenden Paragraphen geschehen soll.

Beispiele:

1. $$\frac{d^2 y}{dx^2} - m^2 y = 0$$

Lösung: $$y = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

2. $$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Lösung: $$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

3. $$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$$

Lösung: $$y = e^{2x} (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}$$

4. $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Lösung:

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{1}{2} \sqrt{3}\, x + B \sin \frac{1}{2} \sqrt{3}\, x\right)$$

5. $$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

Lösung: $$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

6. $$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

Lösung: Die charakteristische Gleichung ist:

$$(m^2 + 1)(m - 1)^2 = 0$$

daher: $$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x)\, e^x$$

§ 93. Über partikuläre Lösungen einer vollständigen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Es ist von großem Vorteil, sich statt der Schreibweise $\frac{d}{dx}$ des Symbols D zu bedienen und dieses wie eine algebraische Größe zu behandeln. Wir schreiben also statt:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \text{ die Form } Dy, D^2 y, \ldots$$

Dann sieht man ohne weiteres, daß beispielsweise die Regeln gelten:

$$D(u + v + \ldots.) = Du + Dv + \ldots.$$
$$D(Cu) = CDu$$
$$D^m D^n u = D^{m+n} u$$

Ist: $$Du = v$$

so schreiben wir: $$u = D^{-1} v$$

so daß D^{-1} eine Integration bedeutet, also die letzte Gleichung den Sinn hat:

$$u = \int v\, dx\,.$$

So wäre beispielsweise:

$$D^{-3} . 1 = \frac{x^3}{3!}, \quad \text{da} \quad Dx = 1$$

Die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

schreiben wir nunmehr in der Form:

$$(D^2 + PD + Q)\, y = R$$

oder: $$f(D)\, y = R$$

Eine Lösung der Gleichung ist:

$$y = f(D)^{-1} R$$

und es handelt sich darum, anzugeben, wie $f(D)^{-1} R$ berechnet werden kann.

Wir zerlegen zunächst $f(D)$ in Faktoren, also:

$$f(D) = (D - \alpha)(D - \beta)$$

daher:

$$f(D)^{-1} = \frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}$$

$$= \frac{A}{D-\alpha} + \frac{B}{D-\beta}$$

indem wir in Partialbrüche zerlegen; es ist demnach:

$$f(D)^{-1} R = \left(\frac{A}{D-\alpha} + \frac{B}{D-\beta}\right) R$$

Einen Ausdruck von der Form $\frac{1}{D-\alpha} R$ berechnen, heißt eine Funktion u suchen, derart, daß:

$$(D - \alpha) u = R$$

oder:

$$\frac{du}{dx} - \alpha u = R$$

Dies ist aber eine lineare Gleichung erster Ordnung; wir haben gefunden, daß ein partikuläres Integral derselben ist:

$$u = e^{+\alpha x} \int e^{-\alpha x} R\, dx$$

d. h.:

$$\frac{1}{D-\alpha} R = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} R\, dx$$

folglich ist:

$$f(D)^{-1} R = A e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} R dx + B e^{\beta x} \int e^{-\beta x} R\, dx$$

Nehmen wir als Beispiel die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6 y = R$$

oder:

$$(D^2 - 5 D + 6) y = R$$

Hier ist:

$$f(D) = (D - 3)(D - 2)$$

$$f(D)^{-1} = \frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-2}$$

also:

$$y = \left(\frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-2}\right) R$$

oder:

$$y = e^{3x} \int e^{-3x} R\, dx + e^{2x} \int e^{-2x} R\, dx$$

Da das allgemeine Integral von:

$$(D^2 - 5D + 6)\,y = 0$$

lautet:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

so ist schließlich das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + e^{3x}\int e^{-3x} R\,dx + e^{2x}\int e^{-2x} R\,dx$$

In einigen Fällen können etwas andere Wege eingeschlagen werden:

1. Ist R eine ganze rationale Funktion von x, so entwickelt man $f(D)^{-1}$ nach steigenden Potenzen von D. Da:

$$D^{n+1} x^n = 0$$

so braucht man in der Entwicklung nur bis zu jener Potenz von D zu gehen, welche gleich ist der höchsten von x in R. — Man löse:

$$(D^2 - 4D + 4)\,y = x^2$$

Hier ist:

$$f(D) = (D-2)^2$$

$$f(D)^{-1} = (D-2)^{-2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-2}$$

$$f(D)^{-1} x^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\,\frac{D}{2} + 3\,\frac{D^2}{4}\right) x^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)$$

Also ist das partikuläre Integral:

$$y = \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$$

2. Ist R von der Form:

$$R = e^{ax} X$$

wo X eine Funktion von x ist, so kann man folgendermaßen vorgehen.

Da:

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$$

und:

$$D(e^{ax} X) = e^{ax} DX + a e^{ax} X = e^{ax}(D + a)\,X$$

so ist allgemein nach dem Leibnizschen Theorem:

$$D^n(e^{ax} X) = e^{ax}(D + a)^n X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man kann sofort zeigen, daß diese Formel auch für negatives n gilt, also:

$$D^{-n}(e^{ax} X) = e^{ax}(D + a)^{-n} X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

denn führen wir an dieser Gleichung die Operation D^{-n} aus, so wird die linke Seite $e^{ax}X$, und die rechte Seite nach (1):

$$D^n\left[e^{ax}(D+a)^{-n}X\right] = e^{ax}(D+a)^n(D+a)^{-n}X = e^{ax}X$$

womit (2) bewiesen ist. Diese Formel sagt also aus, daß man die Operation D^{-n} an $e^{ax}X$ ausführt, indem man e^{ax} vor das Zeichen D setzt und an Stelle von D mit $(D+a)$ operiert.

Zerlegt man demnach $f(D)^{-1}$ in Faktoren, so ist, wenn $(D-\alpha)^n$ ein solcher Faktor ist:

$$\frac{1}{(D-\alpha)^n}R = \frac{1}{(D-\alpha)^n}(e^{ax}X) = e^{ax}\frac{1}{(D+a-\alpha)^n}X$$

Läßt sich also die letztere Operation ausführen, so ist die Integration ohne weiteres möglich. — Man betrachte z. B.:

$$(D^2-2D+1)\,y = x^2e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{(D-1)^2}x^2e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{(D+2)^2}x^2$$

$$\frac{1}{(D+2)^2}x^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-2}x^2 = \frac{1}{4}\left(1-D+\frac{3}{4}D^2\right)x^2$$

also:

$$y = \frac{1}{8}e^{3x}(2x^2-4x+3)$$

Ist X eine Konstante, so ist der Vorgang wesentlich einfacher: Da nämlich in diesem Falle:

$$D^{-n}(e^{ax}X) = XD^{-n}e^{ax} = X\frac{e^{ax}}{a^n}$$

so ergibt sich die Regel, daß an Stelle von D einfach a zu schreiben ist.

Z. B.:

$$(D^2-3D+2)\,y = e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{D^2-3D+2}e^{3x} = \frac{1}{3^2-3\cdot3+2}e^{3x} = \frac{1}{2}e^{3x}$$

Diese letztere Methode würde versagen, wenn a eine Wurzel von $f(D)=0$, wenn also $f(a)=0$ wäre. In diesem Falle muß man zur Hauptregel zurückkehren, also setzen:

$$\frac{1}{D^n}e^{ax} = e^{ax}\cdot\frac{1}{(D+a)^n}\cdot 1$$

wie z. B. in:

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x$$

Hier ist:

$$f(D) = D-1,\quad a=1,\quad \text{also}\quad f(a)=0$$

daher:

$$y = \frac{1}{D-1}e^x = e^x\frac{1}{D}\cdot 1 = x\,e^x$$

3. Nehmen wir an, R sei ein Produkt von sinus- oder cosinus-Faktoren.

Es ist identisch:

$$(D^2)^m \sin(nx+a) = (-n^2)^m \sin(nx+a)$$

wo n und a Konstanten sind. Daher ist auch:

$$f(D^2)\sin(nx+a) = f(-n^2)\sin(nx+a)$$

und es folgt ebenso wie bei Fall 2, daß:

$$\frac{1}{f(D^2)}\sin(nx+a) = \frac{1}{f(-n^2)}\sin(nx+a)$$

Ebenso ist:

$$\frac{1}{f(D^2)}\cos(nx+a) = \frac{1}{f(-n^2)}\cos(nx+a)$$

Kann man also $f(D)$ als Funktion von D^2 darstellen, so wird die Operation $\frac{1}{f(D^2)}$ an einem sin oder cos des Arguments $nx+a$ ausgeführt, indem man an Stelle von D^2, $-n^2$ setzt. — Man löse:

$$(D^3+D^2+D+1)\,y = \sin 2x$$

Hier ist: $n = 2$

Wir haben: $$y = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\sin 2x$$

$$\frac{1}{D^2+1}\sin 2x = \frac{1}{-2^2+1}\sin 2x = -\frac{1}{3}\sin 2x$$

$$y = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{D+1}\sin 2x$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner mit $D-1$, so erhalten wir:

$$y = -\frac{1}{3}\,\frac{D-1}{D^2-1}\sin 2x = -\frac{1}{3}(D-1)\left(-\frac{1}{5}\sin 2x\right)$$

$$y = \frac{1}{15}(D-1)\sin 2x = \frac{1}{15}(2\cos 2x - \sin 2x)$$

Die verwendete Methode ist nicht mehr anwendbar, wenn der Operator die Form $\frac{1}{D^2+n^2}$ hat; denn in diesem Falle würde:

$$D^2+n^2 = 0$$

wenn man $D^2 = -n^2$ setzte. Nun ist aber:

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

ferner:
$$\frac{1}{D^2+n^2}e^{inx}=e^{inx}\frac{1}{(D+in)^2+n^2}\cdot 1$$
$$=e^{inx}\frac{1}{2\,inD}\,\frac{1}{1+\frac{D}{2in}}\cdot 1$$
$$=e^{inx}\frac{1}{2\,inD}\left(1-\frac{D}{2\,in}+\ldots\right)\cdot 1$$
$$=e^{inx}\frac{1}{2\,inD}\cdot 1=\frac{1}{2\,in}\,x\,e^{inx}$$

ebenso ist:
$$\frac{1}{D^2+n^2}\,e^{-inx}=-\frac{1}{2\,in}\,x\,e^{-inx}$$

folglich:
$$\frac{1}{D^2+n^2}\sin nx=-\frac{1}{2n}\,x\cos nx$$

analog:
$$\frac{1}{D^2+n^2}\cos nx=\frac{1}{2n}\,x\sin nx$$

Die Gleichung:
$$(D^2+1)\,y=\sin x$$
hat z. B. das partikuläre Integral:
$$y=\frac{1}{D^2+1}\sin x=-\frac{1}{2}\,x\cos x$$

Beispiele:

1.
$$(D^2-4\,D+3)\,y=2\,e^{3x}$$
Das allgemeine Integral ist:
$$y=C_1\,e^x+C_2\,e^{3x}+x\,e^{3x}$$

2.
$$(D-2)^2\,y=x$$
Allgemeine Lösung:
$$y=C_1\,e^{2x}+C_2\,x\,e^{2x}+\frac{1}{4}(x+1)$$

3.
$$(D^2-1)\,y=2+5\,x$$
Lösung:
$$y=C_1 e^x+C_2 e^{-x}-5\,x-2$$

4.
$$(D-1)\,y=e^x\,\mathrm{l}\,x$$
Ein partikuläres Integral ist:
$$y=xe^x\,\mathrm{l}\,\frac{x}{e}$$

5. Man zeige, daß $\frac{1}{4}e^x$ ein partikuläres Integral ist von:
$$(D^2+2\,D+1)\,y=e^x$$

6. Man werte aus:

$$y = \frac{1}{(D+1)^3} e^{-x}$$

Lösung:

$$y = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

7. $$\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = \cos mx \quad (k,\ m \text{ Konstanten.})$$

Lösung:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} - \frac{1}{m^2 + k^2} \cos mx$$

8. Man werte aus:

$$y = (D^2 + 4)^{-1} \cos 2x$$

Lösung:

$$y = \frac{x}{4} \sin 2x$$

9. Man löse: $(D^3 - 1)\, y = x \sin x$

Das allgemeine Integral ist:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\, x\right) + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\, x\right) + \\ + \frac{1}{2}\left[(x-3)\cos x - x \sin x\right]$$

10. Das partikuläre Integral von:

$$(D^3 - 1)\, y = x e^{2x}$$

Lösung:

$$y = \left(x - \frac{12}{7}\right) \frac{1}{7} e^{2x}$$

11. $$(D^2 - 1)\, y = x^2 \cos x$$

zu finden; Lösung:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x \sin x + \frac{1}{2} \cos x\, (1 - x^2)$$

§ 94. Lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten.

Von diesen wollen wir zunächst den folgenden Typus herausgreifen:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^n} + \ldots + a_n y = X \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ konstante Größen sind und X eine Funktion von x bedeutet. Wir behandeln zunächst den Fall $X = 0$ und studieren der Einfachheit halber wieder die Gleichung zweiter Ordnung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Versucht man zu setzen:

$$y = x^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so wird (2) zu:

$$[m(m-1) + a_1 m + a_2]\, x^m = 0$$

Wählt man nun m so, daß:

$$m(m-1) + a_1 m + a_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

so ist (3) ein Integral von (2). Die Größe x^m vertritt hier also e^{mx} bei den linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Hat (4) zwei ungleiche Wurzeln m_1 und m_2, so ist das allgemeine Integral:

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

Sind aber die Wurzeln gleich:

$$m_1 = m_2 = m$$

so ist nicht nur x^m, sondern auch $x^m \operatorname{l} x$ ein Integral. Um Letzteres nachzuweisen, setzen wir diesen Wert für y in (2) ein und erhalten:

$$[m(m-1) + a_1 m + a_2]\, x^m lx + [2m - 1 + a_1]\, x^m$$

Nun ist der erste Teil dieses Ausdruckes null, weil m eine Wurzel von (4) ist und der zweite Teil ist null, weil m auch eine Wurzel der Ableitung von (4) ist. Also lautet in diesem Falle das allgemeine Integral:

$$y = C_1 x^m + C_2 x^m lx$$

Ist die Gleichung von höherer Ordnung, und sind p Wurzeln m einander gleich, so ist das Integral:

$$y = (C_1 + C_2\, lx + C_3\, l^2 x + \ldots . + C_p \operatorname{l}^{p-1} x)\, x^m$$

Nehmen wir als Beispiel die Gleichung:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung lautet:

$$m(m-1)(m-2) + 2m(m-1) + 3m - 3 = 0$$

oder:

$$(m-1)(m^2 + 3) = 0$$

mit den Wurzeln $m_1 = 1$, $m_2 = i\sqrt{3}$, $m_3 = -i\sqrt{3}$. Daher ist das Integral:

$$y = C_1 x + C_2 x^{i\sqrt{3}} + C_3 x^{-i\sqrt{3}}$$

oder, da:

$$x^{im} = e^{\operatorname{l} x^{im}} = \cos(m \operatorname{l} x) + i \sin(m \operatorname{l} x)$$

und:

$$x^{-im} = \cos(m \operatorname{l} x) - i \sin(m \operatorname{l} x)$$

kann man schreiben:

$$y = Ax + B\cos(\sqrt{3} \operatorname{l} x) + C \sin(\sqrt{3} \operatorname{l} x)$$

Als zweites Beispiel betrachten wir:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=0$$

Die charakteristische Gleichung heißt:

$$m(m-1)-3m+4=0$$

oder:

$$(m-2)^2=0$$

mit den gleichen Wurzeln:

$$m=2$$

Daher lautet das Integral:

$$y=(C_1+C_2\,l\,x)\,x^2$$

Um die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\,x\frac{dy}{dx}+a_2\,y=X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

zu finden, haben wir zum allgemeinen Integral von (2) ein partikuläres von (5) hinzuzufügen. Letzteres finden wir auf einem ähnlichen Wege, wie wir ihn im vorigen Paragraphen eingeschlagen haben. Wir führen das Operationszeichen ϑ ein, indem wir setzen:

$$x\frac{d}{dx}=x\,D=\vartheta$$

Man sieht leicht, daß die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}xD&=\vartheta\\ x^2D^2&=\vartheta(\vartheta-1)\\ x^3D^3&=\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

Demnach können wir (5) auch schreiben:

$$f(\vartheta)\,y=[\vartheta(\vartheta-1)+a_1\,\vartheta+a_2]\,y=X$$

und wir erhalten wieder ein Integral in der Form:

$$y=\frac{1}{f(\vartheta)}X$$

$\frac{1}{f(\vartheta)}$ ist nach ähnlichen Regeln wie: $\frac{1}{f(D)}$ zu behandeln.

Man löse:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=x^4$$

$$\begin{aligned}f(\vartheta)&=\vartheta(\vartheta-1)-2\vartheta-4=\\ &=\vartheta^2-3\vartheta-4\\ &=(\vartheta-4)(\vartheta+1)\end{aligned}$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(\vartheta-4)(\vartheta+1)}\,x^4 \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\vartheta-4}-\frac{1}{\vartheta+1}\right)x^4 \\ &= \frac{1}{5}\,x^4\left(\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\vartheta+5}\right)1 \\ &= \frac{1}{5}\,x^4\,l\,x-\frac{1}{25} \end{aligned}$$

Also lautet das partikuläre Integral:

$$y=\frac{1}{5}x^4\,l\,x$$

Ein Typus von Gleichungen, der ohne weiteres auf die eben besprochene Form gebracht werden kann, ist die Gleichung von Legendre:

$$(a+bx)^n\frac{d^n y}{dx^n}+A_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+A_n y=R$$

wo $A_1, A_2 \ldots A_n, a, b$ Konstante sind. Setzen wir nämlich:

$$a+bx=z \qquad \frac{dy}{dx}=b\,\frac{dy}{dz}$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$b^n z^n\frac{d^n y}{dz^n}+A_1 b^{n-1}z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\ldots+A_n y=R$$

welche die Form von (1) hat.

Beispiele:

1. $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+q^2y=0$$

Lösung: $$y=C_1\cos(q\,l\,x)+C_2\sin(q\,l\,x)$$

2. $$(x^2D^2+2xD-2)\,y=0$$

Lösung: $$y=C_1x+C_2x^{-2}$$

3. $$[\vartheta(\vartheta-1)-2]\,y=0$$

Lösung: $$y=C_1x^2+C_2x^{-1}$$

4. Man finde ein partikuläres Integral von:

$$[\vartheta(\vartheta-1)+7\vartheta+5]\,y=x^5$$

Lösung: $$y=\frac{1}{60}x^5$$

5. $$[\vartheta(\vartheta-1)+4\vartheta+2]\,y=e^x$$

Lösung:
$$y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{e^x}{x^2}$$

6. $$(x^3D^3+2x^2D^2-xD+1)\,y=x+x^3$$

Lösung: Das allgemeine Integral der Gleichung ohne zweites Glied ist:
$$y=C_1x^{-1}+C_2x+C_3\,xlx$$
ein partikuläres Integral der gegebenen Gleichung:
$$y=\frac{1}{4}\,xl^2x+\frac{1}{16}x^3$$

Also ist das allgemeine Integral:
$$y=C_1x^{-1}+C_2\,x+C_3\,x\,l\,x+\frac{1}{4}xl^2x+\frac{1}{16}x^3$$

7. $$(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4\,(x+a)\frac{dy}{dx}+6\,y=x$$

Man setze:
$$x+a=z$$
so daß die Gleichung lautet:
$$(z^2D^2-4zD+b)\,y=z-a$$
das allgemeine Integral ist:
$$y=C_1\,(x+a)^2+C_2\,(x+a)^3+\frac{1}{6}(3x+2a)$$

§ 95. Exakte lineare Differentialgleichungen.

Es besteht eine einfache Bedingung dafür, daß die linke Seite einer linearen Gleichung, etwa von der Form:
$$X_0\frac{d^3y}{dx^3}+X_1\frac{d^2y}{dx^2}+X_2\frac{dy}{dx}+X_3\,y=R\quad .\quad .\quad .\quad (1)$$
wo X_0, $X_1\ldots$ und R Funktionen von x sind, ein exaktes Differential ist. Um diese Bedingung abzuleiten, bilden wir die Identität:
$$X_0\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(X_0\frac{d^2y}{dx^2}\right)-X_0'\frac{d^2y}{dx^2}$$
wo $X_0'=\dfrac{dX_0}{dx}$, und substituieren in (1). Wir erhalten:
$$\frac{d}{dx}\left(X_0\frac{d^2y}{dx^2}\right)+(X_1-X_0')\frac{d^2y}{dx^2}+X_2\frac{dy}{dx}+X_3\,y=R\quad .\quad (2)$$

Ebenso bilden wir:

$$(X_1 - X_0')\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[(X_1 - X_0')\frac{dy}{dx}\right] - (X_1' - X_0'')\frac{dy}{dx}$$

und substituieren in (2). Das Resultat ist:

$$\frac{d}{dx}\left[X_0\frac{d^2y}{dx^2} + (X_1 - X_0')\frac{dy}{dx}\right] + (X_2 - X_1' + X_0'')\frac{dy}{dx} + X_3 y = R \quad (3)$$

Schließlich ist analog:

$$(X_2 - X_1' + X_0'')\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(X_2 - X_1' + X_0'')y] - (X_2' - X_1'' + X_0''')y$$

und daher wird (3) zu:

$$\frac{d}{dx}\left[X_0\frac{d^2y}{dx^2} + (X_1 - X_0')\frac{dy}{dx} + (X_2 - X_1' + X_0'')y\right] + (X_3 - X_2' + X_1'' - X_0''')y = R \quad (4)$$

Man sieht, daß die linke Seite von (4) ein vollständiges Differential ist, wenn:

$$X_3 - X_2' + X_1'' - X_0''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichung ist also hinreichend, damit die linke Seite von (1) ein vollständiges Differential sei. Zugleich sieht man, daß man in diesem Falle (4) einmal integrieren kann, und erhält:

$$X_0\frac{d^2y}{dx^2} + (X_1 - X_0')\frac{dy}{dx} + (X_2 - X_1' + X_0'')y = \int R\,dx + C_1 \quad . \quad (6)$$

Wir nennen (6) ein erstes Integral von (1). Ist also die Bedingung (5) erfüllt, so läßt sich die Ordnung der Gleichung um eine Einheit erniedrigen.

Als Beispiel diene:

$$x^5\frac{d^3y}{dx^3} + 15x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 60x^3\frac{dy}{dx} + 60x^2 y = e^x$$

Hier ist:

$$X_0 = x^5 \quad X_1 = 15x^4 \quad X_2 = 60x^3 \quad X_3 = 60x^2$$

daher:

$$X_3 - X_2' + X_1'' - X_0''' = 60x^2 - 180x^2 + 180x^2 - 60x^2 = 0$$

die Bedingung ist erfüllt, also läßt sich die Ordnung der Gleichung um eine Einheit erniedrigen. Wir erhalten nach (6):

$$x^5\frac{d^2y}{dx^2} + 10x^4\frac{dy}{dx} + 20x^3 y = e^x + C_1$$

Untersuchen wir nun, ob die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist. Hier ist die Bedingung:

$$X_2 - X_1' + X_0'' = 20x^3 - 40x^3 + 20x^3 = 0$$

wieder erfüllt, daher können wir die Ordnung der Gleichung abermals herabdrücken und finden:

$$x^5 \frac{dy}{dx} + 5x^4 y = e^x + C_1 x + C_2$$

Nunmehr ist:

$$X_1 - X_0' = 5x^4 - 5x^4 = 0$$

Die linke Seite ist ein vollständiges Differential, und wir erhalten schließlich:

$$x^5 y = e^x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

als Integral.

Beispiele:

1. Man untersuche, ob die linke Seite der Gleichung:

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + (x^2 - 3) \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

ein exaktes Differential ist und erniedrige die Ordnung der Gleichung soweit als möglich.

Lösung: Wir haben ein exaktes Differential vor uns und können die Ordnung bis auf die erste herabdrücken:

$$x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 5) y = 0$$

2. Ebenso verfahre man mit:

$$x^3 \frac{d^4 y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Lösung: Man gelangt zu:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (x - 4) y = 0$$

3. Man zeige, dass:

$$(x^3 D^4 + x^2 D^3 + x^2 D + 2x) y$$

ein vollständiges Differential ist.

§ 96. Über Differentialgleichungen, in denen eine Variable fehlt.

1. Nehmen wir zunächst an, es fehle die unabhängige Veränderliche x. Eine solche Gleichung ist von der Form:

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

falls wir uns auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränken. Setzen wir:

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

so erhalten wir:

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

also eine Gleichung erster Ordnung in y und p, die wir integrieren können.

In diese Kategorie gehört die Gleichung:

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y^2 = 0$$

welche die Schwingungen eines Pendels in Luft bestimmt. Das angedeutete Verfahren liefert hier:

$$py\frac{dp}{dy} + p^2 - 2y^2 = 0$$

oder:

$$\frac{y}{2}\frac{d(p^2)}{dy} + p^2 - 2y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dy}(p^2y^2) = 4y^3$$

Die Integration ergiebt:

$$p^2y^2 = y^4 + C^4$$

woraus weiter folgt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sqrt{\frac{y^4 + C^4}{y^2}}$$

$$x = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^4 + C^4}} = \frac{1}{2}\text{ arc sinh }\frac{y^2}{C^2} - 2C_1$$

oder schließlich:

$$y^2 = C^2 \sinh(2x + C_1)$$

Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = 0$$

welche die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer der Entfernung aus der Ruhelage proportionalen, anziehenden Kraft beschreibt, läßt sich noch auf andere Weise behandeln. Multipliziert man nämlich beide Seiten mit $2\frac{dx}{dt}$, so erhält man:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + q^2\frac{dx^2}{dt} = 0$$

oder:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + q^2x^2 = C$$

Die Integration der Gleichung liefert:

$$x = A \sin(qt - \delta)$$

wenn die Integrationskonstanten mit A und δ bezeichnet werden. Die Bewegung ist also eine einfache Schwingung mit der Amplitude A, der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{q}$ und der Phase δ.

Lautete die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - q^2x = 0$$

so wäre das Integral von der Form:

$$x = C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}$$

2. Wenn die abhängige Veränderliche in der Gleichung fehlt, dieselbe also die Form hat:

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

so bringt sie die Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = p; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

ohneweiters auf eine Gleichung erster Ordnung:

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

Als Beispiel behandeln wir die Gleichung:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{P}{l\mu} = 0$$

welche die Strömung einer Flüssigkeit in einer zylindrischen Röhre vom Radius r und der Länge l beschreibt. Die Geschwindigkeit v hat die Richtung der Achse und ist eine Funktion von r; P ist die Druckdifferenz an beiden Enden der Röhre, μ der Reibungskoeffizient. Setzen wir:

$$p = \frac{dv}{dr}$$

so wird die Gleichung:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} + \frac{P}{l\mu} = 0$$

$$\frac{d}{dr}(pr) = -\frac{P}{l\mu}r$$

also ein erstes Integral:

$$pr = -\frac{P}{2l\mu} r^2 + C_1$$

somit:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P}{2l\mu} r + \frac{C_1}{r}$$

$$v = -\frac{P}{4l\mu} r^2 + C_1 \,\mathrm{l}\, r + C_2$$

Da für $r=0$, $lr = \infty$ würde, so muß $C_1 = 0$ sein; $C_2 = v_0$ bedeutet die Geschwindigkeit in der Achse.

Beispiele:

1.
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x + v = 0$$

Lösung:
$$x = C_1 \cos(t\sqrt{\mu}) + C_2 \sin(t\sqrt{\mu}) - \frac{v}{\mu}$$

2.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Lösung:
$$e^{-ay} = C_1 x + C_2$$

3.
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{d^2y}{dx^2}$$

Lösung:
$$y = C_1 \cosh(C_1 y - C_2)$$

4.
$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Lösung:
$$y = \frac{1}{2} a C_1 e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{2}\frac{a}{C_1} e^{-\frac{x}{a}} + C_2$$

5.
$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{d^3y}{dx^3} = x$$

Lösung: Man setze: $\frac{d^3y}{dx^3} = p$

Das Integral ist:

$$y = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{x^4}{24} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

6.
$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

ist eine Gleichung, die in der Potentialtheorie vorkommt.

Lösung:
$$V = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

§ 97. Die Differentialgleichung der schwingenden Bewegung.

Da Schwingungsbewegungen in vielen Gebieten der Physik eine große Rolle spielen, so wollen wir ihre Differentialgleichung etwas näher diskutieren. Die einfachste Form ist:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -q^2 s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Sie drückt aus, daß $\frac{d^2 s}{d t^2}$, die Beschleunigung der Bewegung, der jeweiligen Bewegungsrichtung entgegengesetzt und der Entfernung von einem fixen Punkte direkt proportional ist. Wir haben schon gesehen, daß das Integral der Gleichung die Form hat:

$$s = A \sin(q t + \delta) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

d. h. die Bewegung ist eine einfach harmonische (s. § 33) mit der Amplitude A, der Periode $T = \frac{2\pi}{q}$ und der Phase δ. Rechnen wir die Zeit von einem Durchgange durch die Ruhelage an, d. h. ist für $t = 0$ auch $s = 0$, so ist $\delta = 0$, und wir kommen zur einfacheren Gleichung:

$$s = A \sin q t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Ein Beispiel bieten Pendelschwingungen von kleiner Amplitude oder die ungedämpften Bewegungen einer Galvanometernadel. In diesen Fällen ist:

$$q = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

wo J das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers und D das maximale Drehungsmoment der wirkenden Kraft bedeutet.

Wir wollen nun annehmen, daß die Bewegung in einem widerstehenden Medium vor sich geht, und daß infolgedessen eine Widerstandskraft auftritt, welche der augenblicklichen Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional ist, d. h.:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -\mu \frac{d s}{d t} - q^2 s$$

oder:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + 2 f \frac{d s}{d t} + q^2 s = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Hier bedeutet $\mu = 2 f$ den Reibungskoeffizienten. Die Gleichung wird nach der gewöhnlichen Methode (§ 92) gelöst und liefert:

$$s = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{-\beta t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wo α und β die Wurzeln der Gleichung:

$$m^2 + 2fm + q^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

sind, also:

$$-\alpha = -f + \sqrt{f^2 - q^2} \qquad -\beta = -f - \sqrt{f^2 - q^2}$$

1. Es seien α und β reell und ungleich, also:

$$f > q$$

In diesem Falle ist die Lösung durch (5) dargestellt. Der Widerstand ist so groß, daß keine Schwingungen zustande kommen können; der Körper bewegt sich gegen seine Ruhelage, die er strenge genommen erst nach unendlich langer Zeit erreicht (s. Kurve 1, Fig. 91, die für $f = 3$, $q = 2$ gezeichnet ist).

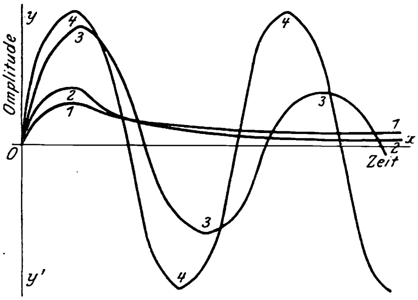

Fig. 91.

2. Ähnlich verläuft die Bewegung im zweiten Fall, daß die Wurzeln reell und gleich sind, also:

$$\alpha = \beta = f = q$$

Die Lösung nimmt die Form an:

$$s = (C_1 + C_2 t)\, e^{-ft} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

Der Verlauf ist durch Kurve 2, Fig. 91 ($f = q = 2$) dargestellt. In 1. und 2. sind sogenannte aperiodische Bewegungen behandelt.

3. Die Wurzeln der Gleichung (6) seien entgegengesetzt gleich; dies ist nur möglich, wenn sie beide imaginär sind:

$$f = 0 \quad \alpha = qi \quad \beta = -qi$$

Die Lösung lautet jetzt:

$$s = C_1 \sin qt + C_2 \cos qt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

Die Bewegung ist rein periodisch, was natürlich ist, da wir für $f = 0$ wieder Gleichung (1) vor uns haben (s. Kurve 4 für $q = 2$).

4. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung seien komplex, also:

$$f < q$$

Dann ist, wenn wir:

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = a - bi$$

setzen:

$$s = e^{-at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

Die Bewegung wird durch Kurve 3 ($f = 1$, $q = 2$) dargestellt.

Zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten dienen die Werte von s und $v = \frac{ds}{dt}$ zur Zeit $t = 0$; wir nennen sie bezügl. s_0 und v_0. So ergibt sich beispielsweise aus (5):

$$s_0 = C_1 + C_2$$
$$v_0 = -aC_1 - aC_2$$

Die Kurven sind für den Fall gezeichnet, daß $s_0 = 0$ und $v_0 = 0$ (bei 1) oder $v_0 = 1$ (bei 2, 3, 4).

Der Fall 4 (Kurve 3) beansprucht ein erhöhtes Interesse. Er stellt eine gedämpfte Schwingung dar, d. h. eine periodische Bewegung von abnehmender Amplitude. Die Schwingungen eines Pendels, die durch Luftreibung gedämpft werden, die einer Magnetnadel, die in einer benachbarten Kupferplatte während ihrer Bewegung Foucaultsche Ströme induziert, geben Beispiele für diese Bewegung ab. Wir können für $s_0 = 0$ Gleichung (9) einfacher schreiben:

$$s = e^{-at} A \sin bt$$

Die Periode dieser Schwingung ist:

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Wäre die Schwingung ungedämpft, so wäre, wie wir gesehen haben, die Periode:

$$T_0 = \frac{2\pi}{q}$$

also ist:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{q}{b}$$

oder da:

$$q^2 = a^2 + b^2$$

weiter:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

Wie man sieht, wird durch die Dämpfung die Periode der Schwingungen vergrößert.

Es ist:

$$s = e^{-at} A \sin bt$$

addieren wir zu t der Reihe nach $\frac{T}{2}$, T, $\frac{3}{2}T \ldots$, so erhalten wir:

$$s_1 = -e^{-a\left(t+\frac{T}{2}\right)} A \sin bt$$
$$s_2 = e^{-a(t+T)} A \sin bt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das Verhältnis irgend zweier aufeinander folgender ist gleich und zwar ist:

$$\frac{s_{n-1}}{s_n} = -e^{a\frac{T}{2}}$$

Die Amplitude der Schwingungen nimmt also in dem konstanten Verhältnis:

$$k = e^{\frac{aT}{2}}$$

ab; die Größe k heißt das Dämpfungsverhältnis. Ihr natürlicher Logarithmus:

$$l\,k = \lambda$$

wird logarithmisches Dekrement genannt (Gauß).

Es ist:

$$\lambda = l\,k = \frac{aT}{2} = \frac{a\pi}{b}$$

daher:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}$$

Ist die Dämpfung, also a, und daher λ klein, so ist

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\pi^2} + \ldots$$

also:

$$T = T_0$$

bis auf Größen zweiter Ordnung.

Fig. 92 stellt die Abnahme der Amplitude graphisch dar.

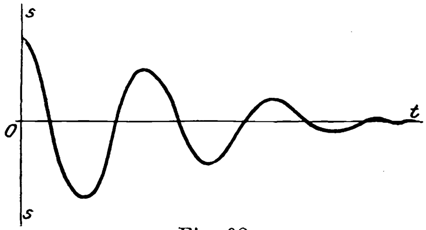

Fig. 92.

Wir betrachten endlich noch den Fall einer erzwungenen Schwingung. Die Gleichung lautet:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + 2f\frac{ds}{dt} + q^2 s = f(t) \quad (10)$$

$f(t)$ ist die äußere Kraft, welche den Körper stets zu neuen Schwingungen anregt. Das allgemeine Integral der Gleichung setzt sich zusammen aus demjenigen von (10) für $f(t) = 0$ und aus einem partikulären Integral der vollständigen Gleichung. Das erstere haben wir eben diskutiert; wir haben gesehen, daß es im allgemeinen eine gedämpfte Schwingung darstellt, die in Grenzfällen zu einer einfach harmonischen oder einer ganz aperiodischen Bewegung werden kann; nunmehr tritt ein Glied hinzu, das von der äußeren Kraft $f(t)$ herrührt. Nehmen wir als Beispiel:

$$f(t) = \cos(nt + \delta)$$

Die Gleichung (10) lautet:

$$(D^2 + 2fD + q^2)\, s = \cos(nt + \delta)$$

Das partikuläre Integral wird nach den Regeln (s. § 93) erhalten und ist:

$$s = \frac{q^2 - n^2}{(q^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2} \cos(nt + \delta) + \frac{2fn}{(q^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2} \sin(nt + \delta)$$

Setzt man:

$$\frac{1}{(q^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2} = R^2; \qquad \frac{2fn}{q^2 - n^2} = \tan\delta_1$$

so wird:

$$s = R\cos\delta_1 \cos(nt + \delta) + R\sin\delta_1 \sin(nt + \delta)$$

oder:

$$s = R\cos(nt + \delta - \delta_1)$$

Die Kraft $f(t)$ bewirkt also, daß sich der gedämpften Schwingung eine einfach harmonische von der Amplitude R, der Periode $\frac{2\pi}{n}$ und der Phase $\delta - \delta_1$ überlagert.

Beispiele:

Die Stromstärke J in einem Leiter vom Widerstand W und der Selbstinduktion L an einer elektromotorischen Kraft E wird dargestellt durch:

$$WJ + L\frac{dJ}{dt} = E$$

Welche sind die auftretenden Erscheinungen in folgenden Fällen:

a) E konstant?

Lösung:

$$J = \frac{E}{W}\left(1 - e^{-\frac{W}{L}t}\right)$$

wo für $t = 0$, $J = 0$ gesetzt wurde. Das zweite Glied repräsentiert den Extrastrom bei Stromschluß; der Strom strebt dem konstanten Wert $\frac{E}{W}$ zu.

b) $E = E_0 \sin qt$?

Lösung:

$$J = \frac{E_0}{W^2 + L^2q^2}(W\sin qt - Lq\cos qt)$$

oder:

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + Lq^2}} \sin(qt - \varphi)$$

wenn man:

$$\tan\varphi = \frac{Lq}{W}$$

setzt.

Im Leiter mit dem scheinbaren Widerstand (Impedanz) $\sqrt{W^2 + Lq^2}$ fließt ein Wechselstrom J, der gegen die elektromotorische Kraft die Phasenverschiebung φ hat.

c) $E = 0$

Lösung:

$$J = J_0 e^{-\frac{W}{L} t}$$

wo $J = J_0$ für $t = 0$ ist. J ist der Extrastrom beim Öffnen des Stromes von der Intensität J_0.

§ 98. Simultane Differentialgleichungen.

Hat man zwischen mehreren Veränderlichen nicht eine Gleichung, sondern ein ganzes System von Differentialgleichungen, so nennt man dieses ein System von simultanen Differentialgleichungen. Am einfachsten ist der Fall, daß nur eine einzige unabhängige Veränderliche vorkommt; dann müssen zur vollständigen Lösbarkeit so viel Gleichungen vorhanden sein, als abhängige Variable in ihnen erscheinen. Wir wollen zunächst ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachten. Welchen Weg man zu ihrer Lösung einschlägt, wird am besten aus einem Beispiele klar werde

Gesetzt, wir hätten die beiden Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} + ay = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} + bx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Wir suchen eine der Variabeln, z. B. y, zu eliminieren; zu dem Zwecke differenzieren wir die erste Gleichung und eliminieren dann $\frac{dy}{dt}$. So erhalten wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - abx = 0$$

daher ist:

$$x = C_1 e^{\sqrt{ab}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{ab}\, t}$$

Durch Einsetzen in (1) findet man:

$$y = -C_1 \sqrt{\frac{b}{a}} e^{\sqrt{ab}\, t} + C_2 \sqrt{\frac{b}{a}} e^{-\sqrt{ab}\, t}$$

Wir haben zwei willkürliche Konstanten; im allgemeinen ist die Zahl derselben gegeben durch die Summe der höchsten Ordnungen aller einzelnen Gleichungen. Nun hätten wir allerdings dadurch, daß wir y auf demselben Wege wie x berechnen, scheinbar zwei neue Integrationskonstanten erhalten; dieselben sind jedoch nicht unabhängig, sondern durch zwei Gleichungen mit den ersten zwei Konstanten verbunden. Diese Gleichungen würden wir dadurch erhalten, daß wir x und y in (1) und (2) einsetzten.

Ferner betrachten wir ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit variabeln Koeffizienten, z. B. von der Form:

$$P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

wo die P, Q, R Funktionen aller drei Veränderlichen sind. Da man aus (3) und (4) die Verhältnisse je zweier der Differentiale dx, dy, dz bestimmen kann, so lassen sich die Gleichungen auf die Form bringen:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Form (3), (4) ist sofort lösbar, wenn die linken Seiten vollständige Differentiale sind; (5) hingegen ist empfehlenswert, wenn eine der Gleichungen nur zwei Variable enthält. Dies ist z. B. der Fall bei:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$$

Die erste Gleichung liefert:

$$x^2 - y^2 = C_1$$

Da also: $\quad x = \sqrt{C_1 + y^2} \;$ und $\; \dfrac{dy}{\sqrt{C_1 + y^2}} = \dfrac{dz}{z}$

so hat man als zweites Integral:

$$y + \sqrt{y^2 + C_1} = C_2 z$$

Sind l, m, n irgend welche drei Faktoren, so ist identisch:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{lP + mQ + nR}$$

wählt man sie nun derartig, daß:

$$lP + mQ + nR = 0$$

so ist auch: $\quad l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$

Ist hier etwa die linke Seite ein vollständiges Differential, so kennen wir ein Integral des gegebenen Systems. Ebenso können drei andere Faktoren l', m', n' zu einem zweiten führen.

Man betrachte z. B.:

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

Da: $$l(mz - ny) + m(nx - lz) + n(ly - mx) = 0$$

ebenso: $$x(mz - ny) + y(nx - lz) + z(ly - mx) = 0$$

so sind l, m, n und x, y, z je drei Faktoren von der gewünschten Eigenschaft, so daß wir haben:

$$ldx + mdy + ndz = 0$$
$$xdx + ydy + zdz = 0$$

deren Integrale lauten:

$$lx + my + nz = C_1$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

Beispiele:

1. $$\frac{dx}{dt} + y = 3x \qquad \frac{dy}{dt} - y = x$$

Lösung: $$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{2t}$$
$$y = (C_1 - C_2 + C_2 t) e^{2t}$$

2. Die gleichförmige Rotation eines starren Körpers um eine Achse ist beschrieben durch die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \omega y \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega x$$

ω ist die konstante Winkelgeschwindigkeit.

Lösung: $$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$
$$y = C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t$$

3. $$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2 x \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -n^2 y$$

sind die Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer der Entfernung proportionalen Zentralkraft.

Lösung: $$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$$
$$y = C_1' \cos nt + C_2' \sin nt$$

4. $$\frac{dx}{dt} + by + cz = 0 \qquad \frac{dy}{dt} + ax + cz = 0 \qquad \frac{dz}{dt} + ax + by = 0$$

Lösung: Man betrachte die Gleichungen als algebraische zwischen x, y, z mit den Koeffizienten D, a, b, c. Man eliminiere y, z und erhält eine Gleichung in x. Das Integral ist:

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} + C_3 e^{\gamma t}$$

wo α, β, γ die Wurzeln der Gleichung:

$$u^3 - (ab + bc + ca)\, u + abc = 0$$

sind. Analog wird y und z bestimmt.

5. $$W_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = E_1$$

$$W_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = E_2$$

sind die Gleichungen für die Stromstärken i_1, i_2 in zwei benachbarten Stromkreisen mit den Widerständen W_1, W_2, den Selbstinduktionskoeffizienten L_1, L_2, dem wechselseitigen Induktionskoeffizienten M und den konstanten eletromotorischen Kräften E_1, E_2.

Lösung: Man setze:

$$i_1 = A e^{mt} \qquad i_2 = B e^{mt}$$

und erhält als Integrale:

$$i_1 = \frac{E_1}{W_1} + A_1 e^{-m_1 t} + A_2 e^{-m_2 t}$$

$$i_2 = \frac{E_2}{W_2} + B_1 e^{-m_1 t} + B_2 e^{-m_2 t}$$

wo $-m_1$, $-m_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(L_1 L_2 - M^2) m^2 + (L_1 W_2 + L_2 W_1) m + W_1 W_2 = 0$$

sind. Da aus physikalisehen Gründen:

$$L_1 L_2 - M^2 > 0$$

so sind die Wurzeln reell und negativ.

6. $$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

Lösung: Die Gleichsetzung der letzten zwei Ausdrücke liefert das erste Integral:

$$y = C_1 z$$

das zweite findet man durch die Multiplikatoren x, y, z; man erhält die Gleichung:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

oder: $$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

Eine Reihe von interessanten Beispielen findet der Leser auch unter den Gleichungssystemen, welche für die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen mit Nebenwirkungen aufgestellt wurden; es sei insbesondere verwiesen auf die sehr allgemeinen Betrachtungen von Wegscheider: Ztschrft. f. phys. Chemie: **30**, 593, (1899); **34**, 290, (1900); **35**, 513, (1900); Monatshefte für Chemie: **21**, 693, (1900).

§ 99. Partielle Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung, in der eine abhängige und mehrere unabhängige Veränderliche, sowie die Differentialquotienten der ersteren nach den letzteren vorkommen, heißt eine partielle. So ist z. B. die Gleichung:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine partielle Differentialgleichung. Wie wir wissen, ist (1) nichts anderes als das Eulersche Theorem, wenn u eine homogene Funktion n-ten Grades von x, y, z ist. Daraus folgt, daß der Gleichung (1) jede homogene Funktion vom Grade n genügt, der im übrigen ganz willkürlich gewählt werden kann. Oder wenn wir beispielsweise setzen:

$$z=f(ax+by)$$

wo f eine beliebige Funktion bedeutet, und einmal nach x, einmal nach y differenzieren, erhalten wir:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=af'(ax+by) \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=bf'(ax+by)$$

woraus folgt:

$$b\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{dz}{dy}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Also genügt der Gleichung (2) jede beliebige Funktion von $ax+by$. Aus diesen Beispielen ersieht man, daß eine partielle Differentialgleichnng im allgemeinen eine unendliche Zahl von Integralen besitzt, die jedoch nicht wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen aus einem dadurch abgeleitet werden können, daß man gewissen Konstanten verschiedene Werte beilegt.

Ist die Differentialgleichung von der ersten Ordnung, so läßt sich zeigen, daß es drei verschiedene Arten von Lösungen einer solchen Gleichung gibt. Nehmen wir nämlich eine Funktion von x, y, z mit zwei willkürlichen Konstanten a, b an:

$$F(x, y, z, a, b)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und differenzieren wir nach x und y, so erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Eliminieren wir nun aus diesen beiden Gleichungen und (3) die Konstanten a, b, so kommen wir zur Differentialgleichung:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Umgekehrt ist (3) ein Integral von (4); man nennt es ein vollständiges Integral. Man sieht aus dem Prozeß, daß man nur zwei willkürliche Konstanten eliminieren kann, falls in (4) nur zwei Differentialquotienten vorkommen, daß also (3) auch nur zwei solche enthält. (3) repräsentiert eine Schar von doppelt unendlich vielen Flächen.

Beispielsweise werden durch die Gleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

alle Kugelflächen vom Radius r dargestellt, deren Zentren auf der XY-Ebene liegen. Durch Differentiation erhält man:

$$x-a+z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad y-b+z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Substituiert man die Werte von $x-a$ und $y-b$ in (5), so findet man:

$$z^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1\right]=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als die Differentialgleichung, deren vollständiges Integral (5) ist.

Betrachten wir nun in (3) a und b als variabel und differenzieren nach ihnen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial b}=0$$

Eliminieren wir nunmehr aus diesen Gleichungen und (3) a und b, so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$F_1(x, y, z)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

die abermals ein Integral von (4) darstellt. Wir nennen sie das singuläre Integral von (4) und sie repräsentiert die Einhüllende der ganzen Flächenschar (3). So ist in unserem Beispiel:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-2(x-a)=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial b}=-2(x-b)=0$$

also folgt durch Einsetzen in (5) das singuläre Integral:

$$z=\pm r$$

Dies ist die Gleichung zweier der XY-Ebene paralleler Ebenen, welche die Schar von Kugelflächen berühren.

Nehmen wir schließlich an, daß von den beiden Größen a, b die eine eine willkürliche Funktion der andern ist:

$$b=f(a)$$

und differenzieren wir (3) nach a, so erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}f'(a)=0$$

die Elimination von a zwischen dieser Gleichung und (3) gibt ein drittes Integral von (4):

$$F_2(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dies ist ein allgemeines Integral von (4). Die Gestalt desselben hängt offenbar von der Wahl der Funktion $f(a)$ ab. Wir greifen so unter den Flächen (4) eine bestimmte Flächenfamilie heraus, und (8) ist die Einhüllende dieser Flächenfamilie.

Nehmen wir in unserem Beispiel:

$$a = b$$

dies in (5) eingesetzt, gibt:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + z^2 = r^2$$

Wir differenzieren nach a:

$$a = \frac{x + y}{2}$$

und die Elimination von a aus den beiden letzten Gleichungen liefert als allgemeines Integral:

$$(x - y)^2 + 2\,z^2 = 2\,r^2$$

eine Zylinderfläche, welche alle Kugeln einhüllt, deren Mittelpunkte auf der Linie $x = y$ liegt.

Es läßt sich zeigen, daß in diesen drei Klassen von Integralen alle möglichen enthalten sind.

Mit der Auffindung eines Integrals ist jedoch in der Regel wenig geholfen. Es ist vielmehr meistens die Hauptaufgabe, die in dem Integral vorkommenden willkürlichen Funktionen so zu bestimmen, daß das Integral gewissen Bedingungen, den sogenannten Grenzbedingungen genügt.

§ 100. Partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

Wir wollen im folgenden die Lösungsmethoden für einige Typen von Gleichungen erster Ordnung behandeln. Hierbei nennen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

1. Typus. Die Variabeln selbst kommen nicht vor. Die Gleichung hat also die Form:

$$f(p, q) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Lösung lautet:

$$z = ax + by + C$$

Substituieren wir in (1), so ergibt sich:

$$f(a, b) = 0$$

woraus folgt:

$$b = \varphi(a)$$

Daher lautet das vollständige Integral:

$$z = ax + \varphi(a)\, y + C \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Man löse z. B.:

$$p^2 + q^2 = m^2$$

Wir setzen:

$$z = ax + by + C$$

und erhalten:

$$a^2 + b^2 = m^2$$
$$b = \sqrt{m^2 - a^2}$$

also das vollständige Integral:

$$z = ax + \sqrt{m^2 - a^2}\, y + C$$

Setzt man:

$$C = f(a)$$

so liefert dies:

$$z = ax + \sqrt{m^2 - a^2}\, y + f(a)$$

und nach a differenziert:

$$x - \frac{a}{\sqrt{m^2 - a^2}}\, y + f'(a) = 0$$

Eliminiert man aus den zwei letzten Gleichungen a, so erhält man das allgemeine Integral.

2. Typus. Die unabhängigen Veränderlichen fehlen:

$$f(z, p, q) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Man setzt:

$$q = ap$$

und substituiert in (3); aus (3) erhält man:

$$p = \varphi(z)$$

Setzt man nun p, q in die Identität:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$= \varphi(z)\,dx + a\,\varphi(z)\,dy$$

so findet man:

$$x + ay = \int \frac{dz}{\varphi(z)} + C \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

als vollständiges Integral. — Man betrachte:

$$p^2 z + q^2 = 4$$
$$q = ap$$

daher:

$$p^2 z + a^2 p^2 = 4$$

$$p = \frac{2}{\sqrt{a^2 + z}}$$

demnach:

$$dz = \frac{2}{\sqrt{a^2 + z}} dx + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + z}} dy$$

$$2(x + ay) = \int \sqrt{a^2 + z}\, dz + 2C$$

$$= \frac{2}{3}(a^2 + z)^{\frac{3}{2}} + 2C$$

$$(a^2 + z)^3 = 9(x + ay - C)^2$$

als vollständiges Integral.

3. Typus. z fehlt explizit, und die Gleichung möge die Form haben:

$$f_1(x, p) = f_2(y, q) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzt man:

$$f_1 = f_2 = a$$

so läßt sich:

$$p = \varphi_1(x, a) \qquad q = \varphi_2(y, b)$$

darstellen und daher wie im vorigen Fall:

$$dz = p\,dx + q\,dy = \varphi_1(x, a)\,dx + \varphi_2(y, b)\,dy$$

welcher Ausdruck als vollständiges Differential integriert werden kann. — Man löse:

$$q - p = x - y$$

Man setzt:

$$x + p = y + q = a$$

$$p = a - x; \qquad q = a - y$$

$$dz = (a - x)\,dx + (a - y)\,dy$$

$$z = -\frac{1}{2}(x - a)^2 - \frac{1}{2}(y - a)^2 + C$$

4. Typus. Eine Gleichung, welche der Clairautschen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen entspricht, ist:

$$z = px + qy + f(p, q) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Analog wie bei der Clairautschen Gleichung kann man setzen:

$$p = a \qquad q = b$$

also folgt:

$$z = ax + by + f(a, b) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

als vollständiges Integral. — Man löse z. B.:

$$z = px + qy + pq$$

Vollständige Lösung:

$$z = ax + by + ab$$

Differenziert man nach a resp. b, so erhält man:

$$x + b = 0 \quad \text{und} \quad y + a = 0$$

Eliminiert man a und b, so bekommt man das singuläre Integral:

$$z = -xy$$

Beispiele:

1.
$$pq = 1$$

Vollständiges Integral: $z = ax + \dfrac{y}{a} + C$

2.
$$x^2 p^2 + y^2 q^2 = z^2$$

Man setze:

$$\mathrm{l}\, x = \mu \qquad \mathrm{l}\, y = v \qquad \mathrm{l}\, z = w$$

und gelangt zur Form:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^2 = 1 \quad \text{(Typus 1)}$$

Vollständiges Integral:

$$z = C x^a y^{\sqrt{1-a^2}}$$

3.
$$p(1 + q^2) = q(z - a)$$

Vollständige Lösung:

$$(x + ay + C)^2 = 4a(z - a)$$

4.
$$q^2 + p^2 = x + y$$

Vollständige Lösung:

$$z = \frac{2}{3}(x - a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y + a)^{\frac{3}{2}} + C$$

5.
$$q = 2yp^2$$

Vollständige Lösung:

$$z = ax + a^2 y^2 + C$$

6.
$$z = px + qy + k\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Vollständige Lösung:

$$z = ax + by + k\sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

Singuläre Lösung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

§ 101. Lineare partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Für die partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung gibt es keine allgemeinen Lösungsmethoden. Wir wollen unter ihnen als wichtigsten Fall die linearen betrachten, und zwar zunächst jene mit konstanten Koeffizienten.

1. Wir betrachten zunächst die Gleichungen von der Form:

$$A_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo A_0, A_1, A_2 konstante Größen sind. Wir setzen:

$$z = f(y + mx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und substituieren in (1):

$$(A_0 m^2 + A_1 m + A_2) f''(y + mx) = 0$$

Also ist (2) ein Integral, wenn:

$$A_0 m^2 + A_1 m + A_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gleichung (3) habe 2 verschiedene Wurzeln m_1 und m_2. Dann ist also das Integral von (1):

$$z = f_1(y + m_1 x) + f_2(y + m_2 x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Als Beispiel wählen wir die Gleichung von D'Alembert für die Bewegung einer schwingenden Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Da die Gleichung:

$$m^2 - a^2 = 0$$

die Wurzeln hat:

$$m_1 = a \qquad m_2 = -a$$

so ist das Integral von der Form:

$$u = f_1(at + x) + f_2(at - x)$$

Physikalisch besagt diese Lösung noch gar nichts, solange sie nicht Grenzbedingungen genügt. Nehmen wir z. B. an, die Saite sei an beiden Enden befestigt, d.h. für $x = 0$ und $x = l$ (l = Länge der Saite) soll die Exkursion $u = 0$ sein. Demnach ist:

$$f_1(at) + f_2(at) = 0$$
$$f_1(at + l) + f_2(at - l) = 0$$

für jede beliebige Zeit t. Infolge der ersten dieser beiden Gleichungen lautet die zweite:

$$f_1(at + l) - f_1(at - l) = 0$$

Die Funktion f_1 hat also die Eigenschaft, daß sie sich nicht ändert, wenn man zu at die Größe $2l$, oder, was dasselbe ist, wenn man zu t die Größe $\frac{2l}{a}$ addiert, f_1 ist also eine periodische Funktion der Zeit mit der Periode $T = \frac{2l}{a}$. Die Saite macht also Schwingungen mit der genannten Periode. Zur weiteren Untersuchung des Problems benötigt man das Hilfsmittel der Fourierschen Reihen (s. Kap. VIII).

Sind die beiden Wurzeln der Gleichung (3) gleich:

$$m_1 = m_2 = m$$

so ist außer $f(y + mx)$ auch $xf(y + mx)$ ein Integral. Denn substituiert man das letztere in (1), so erhält man:

$$F(m) = (A_0 m^2 + A_1 m + A_2)\, x f''(y + mx) + (2 A_0 m + A_1) f'(y + mx)$$

Da nun im Falle einer Doppelwurzel nicht nur (3), sondern auch die Ableitung von (3) verschwindet, so ist $F(m) = 0$. Demnach ist in diesem Falle das Integral von (1):

$$z = f_1(y + mx) + x f_2(y + mx)$$

Man löse:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Die Gleichung:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

hat die doppelte Wurzel $m = -1$. Daher ist das Integral:

$$z = f_1(y - x) + x f_2(y - x)$$

2. Die Gleichung habe die allgemeine Form:

$$A_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial x} + A_4 \frac{\partial z}{\partial y} + A_5 z = 0 \quad (5)$$

Führt man die Symbole ein:

$$\frac{\partial}{\partial x} = D \qquad \frac{\partial}{\partial y} = D'$$

so läßt sich (5) schreiben in der Form:

$$(A_0 D^2 + A_1 DD' + A_2 D'^2 + A_3 D + A_4 D' + A_5)\, z = 0$$

Läßt sich der Klammerausdruck in Faktoren zerlegen, so daß man hat:

$$A_0 (D + m D' + a)(D + nD' + b)\, z = 0$$

so braucht man nur jeden Faktor für sich zu integrieren und die einzelnen Integrale zu summieren. — Man betrachte z. B.:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

oder:
$$(D^2 - D'^2 + D + D')\,z = 0$$
$$(D + D')(D - D' + 1)\,z = 0$$

Das Integral von:
$$(D + D')\,z = 0$$
ist:
$$z = f_1(y - x)$$
dasjenige von:
$$(D - D' + 1)\,z = 0$$
lautet:
$$z = e^{-x} f_2(y + x)$$

Das Integral der gegebenen Gleichung ist somit:
$$z = f_1(y - x) + e^{-x} f_2(y + x)$$

Ist dieser Weg jedoch nicht gangbar, so setzt man:
$$z = e^{\alpha x + \beta y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$
Substituieren wir in (5), so erhalten wir:
$$(A_0 \alpha^2 + A_1 \alpha\beta + A_2 \beta^2 + A_3 \alpha + A_4 \beta + A_5)\,z = 0 \quad . \quad (7)$$

Damit wir also ein Integral vor uns haben, muß der Klammerausdruck verschwinden; nun gibt es eine unendliche Zahl zusammengehöriger Werte von α und β, für welche dies der Fall ist. Es gibt also unendlich viele partikuläre Integrale (6). Nun läßt sich leicht zeigen, daß, wenn μ ein Integral der Differentialgleichung ist, Cu ebenfalls ein solches ist — C bedeutet eine willkürliche Konstante; — C sind ferner u_1, $u_2 \ldots$ Integrale, so ist es auch ihre Summe. Ein Integral der gegebenen Gleichung ist also auch:
$$z = \Sigma C e^{\alpha x + \beta y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hier ist Σ eine Summe von unendlich vielen Gliedern, indem man C, α, β alle möglichen Werte gibt. — Man löse:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Hier ist: $\alpha^2 - \beta = 0$ oder $\beta = \alpha^2$

also das partikuläre Integral:
$$z = C e^{\alpha x + \alpha^2 y}$$

Wir bemerken, daß auch die Ableitungen verschiedener Ordnung von z nach α Integrale sind, also auch:
$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = C(x + 2\alpha y)\,e^{\alpha x + \alpha^2 y}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = C\,[(x + 2\alpha y)^2 + 2y]\,e^{\alpha x + \alpha^2 y}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man sieht also, daß man eine unendliche Zahl von Möglichkeiten hat, Integrale zu bilden. Eine Auswahl unter ihnen wird mit Rücksicht darauf getroffen, daß sie gewisse Grenzbedingungen zu erfüllen haben.

Beispiele:

1. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Lösung:
$$z = f_1(y - 2x) + x f_2(y - 2x)$$

2. $$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Lösung:
$$z = f_1(y + 2x) + f_2(2y - x)$$

3. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Lösung:
$$z = f_1(y + x) + f_2(y - x)$$

4. $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

Lösung:
$$z = x_1 f_1(y - x) + f_2(y - x) + f_3(y + x)$$

5. $$(D^2 - DD' + D - D')\,z = 0$$

Lösung:
$$z = e^{-x} f_1(y) + f_2(x - y)$$

6. $$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')\,z = 0$$

Lösung: Man gewinnt einerseits durch Faktorenzerlegung das Integral:
$$z = f_1(y + x) + e^{3y} f_2(y - x)$$
anderseits erhält man die Form:
$$z = \Sigma\, C e^{\alpha(x + y)} + e^{3y}\,\Sigma\, C\, e^{\alpha(x - y)}$$

7. $$(DD' + aD + bD' + ab)\,z = 0$$

Lösung:
$$z = e^{-ay} f_1(x) + e^{-bx} f_2(y).$$

§ 102. Die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen mit zweitem Glied.

Ihre allgemeine Form für Gleichungen zweiter Ordnung mit drei Variabeln ist:

$$(A_0 D^2 + A_1 DD' + A_2 D'^2 + A_3 D + A_4 D' + A_5)\,z = R \qquad (1)$$

wo R irgend eine Funktion von x, y ist. Es besteht hier ein ähnlicher Satz wie bei den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen: das allgemeine Integral von (1) wird erhalten, wenn man zu dem allgemeinen Integral von (1) für $R = 0$ ein partikuläres Integral von (1) addiert. Wir haben also nur noch zu zeigen, wie man partikuläre Integrale von (1) finden kann.

Die Rechenmethoden sind ganz analog jenen, welche wir bei gewöhnlichen linearen Gleichungen (s. § 93) gefunden haben. Schreiben wir (1) in der Form:

$$F(D, D')\, z = R$$

so handelt es sich um die Ermittelung von:

$$z = \frac{1}{F(D, D')} R \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist beispielsweise:

$$R = e^{ax + by}$$

so besteht der Satz:

$$\frac{1}{F(D, D')} e^{ax+by} = \frac{1}{F(a, b)} e^{ax+by}$$

denn wir haben schon im vorigen Paragraphen bemerkt, daß:

$$F(D, D')\, e^{ax+by} = F(a, b)\, e^{ax+by}$$

Aus einem ähnlichen Grunde ist:

$$\frac{1}{F(D, D')} e^{ax+by} X = e^{ax+by} \frac{1}{F(D+a, D'+b)} X$$

wo X eine Funktion von x, y ist.

Beispiele:

1. $$(D^2 + DD' - 2D'^2)\, z = \sin(x + 2y)$$

Lösung. Man setzt:

$$\sin(x + 2y) = \frac{e^{i(x+2y)} - e^{-i(x=2y)}}{2i}$$

und findet das partikuläre Integral:

$$z = \frac{1}{5} \sin(x + 2y)$$

2. $$(D^2 + DD' - 2D'^2)\, z = \sin(x - y) + \sin(x + y)$$

Partikuläre Lösung:

$$z = \frac{1}{2} \sin(x - y) - \frac{1}{3} x \cos(x + y)$$

3. $$(D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D + 2D')z = e^{2x+3y}$$

Partikuläre Lösung:

$$z = -\frac{1}{10} e^{2x+3y}$$

4. $$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')z = e^{x+2y}$$

Vollständige Lösung:

$$z = f_1(x+y) + e^{3y} f_2(y-x) + y e^{x+2y}$$

5. $$(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')z = xy$$

Lösung. Man bringt die Gleichung auf die Form:

$$(D - D')(D + D' - 3)z = xy$$

entwickelt $\frac{1}{D-D'}$ in Potenzen von $\frac{D'}{D}$, und $\frac{1}{D+D'-3}$ nach Potenzen von $D+D'$, wobei man nicht höher zu gehen braucht, als die höchste Potenz in dem zu behandelnden Ausdruck R beträgt. Man findet das partikuläre Integral:

$$z = -\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x^2 y - \frac{2}{27}x - \frac{1}{9}xy$$

6. $$(D^2 - D')z = x e^{ax + a^2 y}$$

Partikuläre Lösung:

$$z = \frac{1}{4} e^{ax + a^2 y}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{x}{a^2}\right)$$

§ 103. Lineare partielle Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten.

Unter ihnen wollen wir nur jene betrachten, bei denen die einzelnen Glieder von der Form $x^r y^s \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$ sind.

Setzt man nämlich:

$$lx = u \qquad ly = v$$

so verwandelt sich die Gleichung in eine solche mit konstanten Koeffizienten. Man betrachte z. B.:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Macht man die angegebene Substitution, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

Das Integral der letzteren Gleichung ist:

$$z = f_1(u + v) + f_2(u - v)$$

oder:

$$z = f_1(1\,x\,y) + f_2\left(1\frac{x}{y}\right)$$

$$z = \varphi_1(x\,y) + \varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

Beispiele:

1. $$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,x\,y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Lösung:

$$z = f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x f_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. $$(x + y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Lösung:

$$z = f_1(y) + \int (x + y)^a f_2(x)\,dx$$

(Man setze zunächst:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z')$$

§ 104. Integration der Differentialgleichungen durch Reihen.

Es kommt verhältnismäßig selten vor, daß man das Integral einer Differentialgleichung in endlicher, geschlossener Form darstellen kann. Im allgemeinen — und gerade bei den physikalisch wichtigsten Differentialgleichungen — erscheint das Integral in Form einer unendlichen Reihe. Der Weg, den man in diesen Fällen einschlagen muß, wird am besten aus einem Beispiele ersichtlich.

Betrachten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - cy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Versuchen wir sie durch die Reihe:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

zu lösen. Wir nehmen an, wir könnten $\frac{dy}{dx}$ dadurch bilden, daß wir die Reihe (2) gliedweise differenzieren:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Bilden wir ebenso:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots$$

und substituieren in (1), so erhalten wir:

$$(2a_2 - ca_0) + (3 \cdot 2a_3 - a_1 - ca_1)x + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - ca_2)x^2 + \\ + (5 \cdot 4a_5 - 3a_3 - ca_3)x^3 + \ldots = 0$$

Damit diese Gleichung für alle möglichen Werte von x gelte, muß jeder Koeffizient einzeln verschwinden, und man erhält die Gleichungen:

$$a_2 = \frac{c}{2} a_0$$

$$a_4 = \frac{c+2}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{c(c+2)}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{c+4}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{c(c+2)(c+4)}{6!} a_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und:

$$a_3 = \frac{c+1}{3 \cdot 2} a_1 = \frac{c+1}{3!} a_1$$

$$a_5 = \frac{c+3}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(c+1)(c+3)}{5!} a_1$$

$$a_7 = \frac{c+5}{7 \cdot 5} a_5 = \frac{(c+1)(c+3)(c+5)}{7!} a_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man sieht, daß a_0 und a_1 willkürlich, die anderen Koeffizienten der Reihe aber dann gesetzmäßig bestimmt sind. Man muß nun noch zeigen, daß die so erhaltene Reihe auch konvergiert.

Setzen wir z. B. $a_0 = 0$, so erhalten wir ein partikuläres Integral von der Form:

$$y = a_1 x + \frac{c+1}{3!} a_1 x^3 + \frac{(c+1)(c+3)}{5!} a_1 x^5 + \ldots$$

oder:

$$y = a_1 x \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(c+1)(c+3)\ldots(c+\lambda)}{(\lambda+2)!} x^{\lambda+1}\right)$$

Eine solche Reihe kann eine neue, durch bisher bekannte Funktionen nicht in endlicher Weise darstellbare Funktion ergeben.

Man kommt so zu einer anderen Auffassung der Differentialgleichungen: sie erscheinen als Definitionsgleichungen für neue Funktionen. So z. B. definiert die Gleichung:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+m(m+1)=0$$

die sogenannte Kugelfunktion:

$$P_m(x)=1-\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}x^4-\ldots$$

VIII. Abschnitt.

Fouriersche Reihen.

§ 105. Die Fourierschen Reihen und die Berechnung ihrer Koeffizienten.

Eines der in Hinsicht auf Anwendungen wichtigsten Hilfsmittel der Mathematik sind Reihen, die nach sinus und cosinus von ganzen Vielfachen einer Veränderlichen fortschreiten: die Fourierschen oder trigonometrischen Reihen.

Wir wollen versuchen eine willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ in eine solche Reihe entwickeln und setzen also:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots \\ &+ b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos (1)\, 3x + \ldots \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Da die Funktionen sinus und cosinus periodisch sind mit der Periode 2π, so nimmt offenbar die Reihe denselben Wert an, wenn man zu x die Größe 2π addiert, also kann die Funktion $f(x)$ nur in einem Intervall von der Größe 2π willkürlich gegeben sein; wählen wir etwa das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$.

Ist die Gleichung (1) richtig und dürfen wir die Reihe gliedweise integrieren, so können wir die noch unbekannten Koeffizienten a_n, b_n auf folgende Weise bestimmen: Wir multiplizieren zunächst beide Seiten der Gleichung mit $\sin nx\, dx$ und integrieren zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$. Da nun:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0, \quad \text{wenn} \quad m \neq n$$

und stets:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0$$

hingegen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi$$

so findet man:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = a_n \pi$$

oder:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nach diesem allgemeinen Schema erhält man alle Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ Um b_n zu bestimmen, multipliziert man beiderseits mit $\cos nx\, dx$ und integriert zwischen $-\pi$ und $+\pi$; da auch:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \quad \text{wenn} \quad m \neq n$$

und nur:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$$

übrigbleibt, erhält man:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Schließlich wird b_0 gefunden, indem man beide Seiten von (1) mit dx multipliziert und zwischen denselben Grenzen wie oben integriert; es ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx = 0$$

und:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

daher:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Für diese Operationen ist offenbar nötig, daß die Funktion $f(x)$ innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ integrabel sei.

Hat man nun die Koeffizienten nach (2), (3), (4) bestimmt, so ist damit allerdings noch gar nicht gesagt, daß die Gleichung (1) richtig ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn erstlich die trigonometrische Reihe mit den in der angegebenen Weise bestimmten Koeffizienten konvergiert, und wenn sie zweitens wirklich die Funktion $f(x)$ darstellt. Wir wollen uns hier begnügen, die Resultate der diesbezüglichen Untersuchungen anzuführen,[1]) die ge-

[1]) S. z. B. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, I, p. 62 ff.

zeigt haben, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn $f(x)$ die folgenden Eigenschaften hat:

1. endlich und einwertig zu sein im Intervall $-\pi$ bis $+\pi$;

2. nur eine endliche Zahl Maxima und Minima im genannten Intervall zu besitzen;

3. periodisch zu sein mit der Periode 2π, da, wie wir erwähnt haben, die Reihe jedenfalls diese Periode hat.

So z. B. ist $\arctan x$ zwar endlich, aber nicht einwertig, denn zu einer und derselben Tangente x gehören unendlich viele Bogen $\arctan x$, die sich um ganzzahlige Vielfache von π voneinander unterscheiden, d. h. die Kurve:

$$y = \arctan x$$

besteht aus unendlich vielen Zweigen. Man hat nun zur Bestimmung der Koeffizienten der trigonometrischen Reihe die Funktion zu integrieren und dies ist nur möglich, wenn man stets auf demselben Zweig der Kurve bleibt; beschränkt man sich auf einen solchen Zweig, so kann man die derart eindeutig gemachte Funktion in eine Fouriersche Reihe entwickeln.

§ 106. Beispiele für die Entwicklung von Funktionen in trigonometrische Reihen.

Nehmen wir als erstes Beispiel einer Funktion, die wir in eine Fouriersche Reihe entwickeln wollen:

$$f(x) = x$$

Nach (2), (3), (4) des vorigen Paragraphen sind die Koeffizienten der Reihe:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,dx = 0$$

Die Reihe lautet also:

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right) \quad . \quad . \quad (1)$$

Wie man sieht, ist der Grund, warum die cosinus-Glieder fehlen, der, daß x eine ungerade Funktion ist, d. h. das Zeichen ändert, wenn die unabhängige Veränderliche dies tut. Alle solche

Funktionen werden also durch reine Sinusreihen dargestellt. Umgekehrt wird eine gerade Funktion, d. h. eine solche, die ihren Wert bei Zeichenumkehr der unabhängigen Variabeln beibehält, eine trigonometrische Reihe mit lauter cosinus ergeben.

Die Gleichung $y = x$ stellt eine Gerade dar, die durch den Ursprung des Koordinatensystems unter einem Winkel von 45^0 gegen beide Achsen geht. Je mehr Glieder der Reihe (1) man addiert, um so näher kommt die Kurve, die den Zusammenhang zwischen der Summe und der unabhängigen Variablen darstellt, der Geraden. Fig. 93 zeigt in den punktierten Kurven 1, 2, 3 die ersten drei Glieder der Reihe; die Kurve 4 ist die durch Zusammensetzung von 1, 2, 3 erhaltene resultierende Kurve.

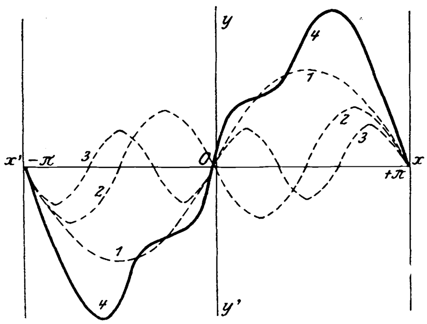

Fig. 93.

Als Beispiel einer geraden Funktion wählen wir:

$$f(x) = x^2$$

Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe sind:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

daher erhält man:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \ldots\right) \quad . \quad (2)$$

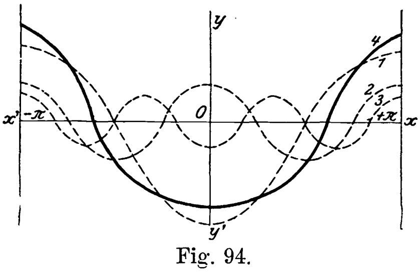

Fig. 94.

Die Fig. 94 zeigt die aus den ersten drei Gliedern erhaltene Kurve.

Ist die Funktion gerade oder ungerade, so genügt es statt des Intervalles $-\pi$ bis $+\pi$ das Intervall 0 bis π zu betrachten. Für eine gerade Funktion haben wir nämlich die Reihe:

$$f(x) = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

und jeder Koeffizient ergibt sich aus der allgemeinen Form:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Für eine ungerade Funktion aber ist:

$$f(x) = a_1 \sin x_2 + a_2 \sin 2x + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

und:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

weil zwischen $-\pi$ und 0 sowohl $f(x)$ als $\sin nx$ sich nur durch das Zeichen von den entsprechenden Werten für das Intervall 0 bis π unterscheiden.

Jede Funktion, die nach einer sinus-Reihe entwickelt, also ungerade ist, kann auch nach einer cosinus-Reihe entwickelt, d. h. als gerade Funktion definiert werden. Ist nämlich $f(x)$ im Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ eine ungerade Funktion, so kann sie dadurch zu einer geraden gemacht werden, daß man sie bloß im Intervall 0 bis π wie vordem definiert, von 0 bis $-\pi$ aber so fortsetzt, daß sie gerade wird. Die beiden Definitionen von $f(x)$ stimmen dann von 0 bis π überein, unterscheiden sich aber zwischen $-\pi$ und 0 durch das Zeichen. So z. B. ist, wie wir sahen, $f(x) = x$, eine ungerade Funktion; definieren wir aber

$$f(x) = +x$$

nicht nur von 0 bis π, sondern auch zwischen $-\pi$ und 0, so wird diese Funktion zu einer geraden. Es ist dann:

$$x = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$

und:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

daher die Reihe:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right) \qquad (5)$$

welche zwischen 0 und π dasselbe Resultat geben muß wie (1), aber zwischen $-\pi$ und 0 sich von ihr durch das Zeichen unterscheidet. Die beiden Fig. 95 und 96 zeigen die Kurve $y = x$ in den beiden Definitionen, und zwar Fig. 95 als cosinus-, Fig. 96 als sinus-Reihe.

Wir haben bisher angenommen, daß das Intervall, in dem die Funktion definiert erscheint, die Größe 2π hat. Diese Beschränkung ist aber unnötig; wir können zeigen, daß, auch wenn das Intervall die beliebige Größe $2l$ hat, die Funktion also von $-l$ bis $+l$ definiert ist, wir sie ohne weiteres in eine trigonometrische Reihe entwickeln können. Ist nämlich die Funktion $f(x)$, so setzen wir:

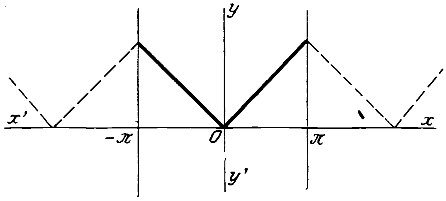

Fig. 95.

$$x = \frac{l}{\pi} z \quad \text{oder} \quad z = \frac{\pi}{l} x$$

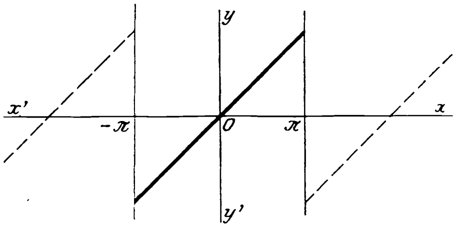

Fig. 96.

während x sich von $-l$ bis $+l$ ändert, nimmt z die Werte $-\pi$ bis $+\pi$ an. Wir können also jetzt $f\left(\frac{l}{\pi} z\right) = \varphi(z)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln:

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 \cos z + b_2 \cos 2z + \ldots + a_1 \sin z + a_2 \sin 2z + \ldots$$

wo:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos nz dz$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sin nz dz$$

Substituieren wir nunmehr wieder x statt z, so erhalten wir:

$$f(x) = b_0 + b_1 \cos \frac{\pi}{l} x + b_2 \cos 2 \frac{\pi}{l} x + \ldots + a_1 \sin \frac{\pi}{l} x + a_2 \sin 2 \frac{\pi}{l} x + \ldots \quad (6)$$

und:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

So ist z. B. die Funktion $f(x) = x$ im Intervall $-l$ bis $+l$ gegeben durch die Reihe:

$$x = \frac{2l}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{l} x - \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi}{l} x \ldots \right)$$

Wie oben bemerkt, muß eine Funktion, die in einem bestimmten Intervall 2π durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden soll, über das Intervall hinaus sich periodisch fortsetzend gedacht werden. Daraus folgt, daß man das Intervall, ohne seine Größe zu ändern, um ein beliebiges Stück verschieben darf. Nehmen wir nämlich eine beliebige Zahl c, so ist z. B.:

$$\int_{-\pi}^{c-\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{\pi}^{c+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

da ja die Funktion über $x=\pi$ hinaus wieder dieselben Werte wie von $x=-\pi$ annimmt. Daher ist:

$$\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

statt (7) können wir jetzt allgemeiner schreiben:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

so daß also eine Funktion in einem ganz beliebigen Intervall $c-l$ bis $c+l$, das nicht mehr symmetrisch zum Nullpunkt liegt, in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Beispiele:

1. Man entwickle die Funktion:

$$f(x)=1$$

im Intervall 0 bis π in eine sinus-Reihe.

Lösung:

$$1=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots.\right)$$

Die ersten drei Glieder der Reihe sind in Fig. 97 gezeichnet.

2. Man zeige, daß von $x=-\pi$ bis $x=\pi$ die Entwickelung besteht:

$$e^x=\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+1^2}\cos x+\frac{1}{1+2^2}\cos 2x-\frac{1}{1+3^2}\cos 3x+\ldots.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+1^2}\sin x-\frac{2}{1+2^2}\sin 2x+\frac{3}{1+3^2}\sin 3x-\ldots\right)$$

3. Zu zeigen, daß zwischen $-\pi$ und π besteht:

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{2}{2^2-1}\cos 2x + \frac{2}{3^2-1}\cos 3x - \frac{2}{4^2-1}\cos 4x + \ldots$$

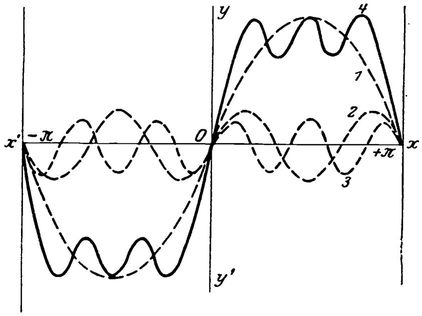

Fig. 97.

Setzt man hier $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man eine Reihe für π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \ldots.$$

4. Man entwickle x zwischen 0 und l in eine cosinus-Reihe.
Lösung:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{l}x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{l}x + \ldots\right)$$

§ 107. Das Fouriersche Integral.

Nehmen wir an, wir hätten im Intervall $-l$ bis $+l$ eine Funktion $f(x)$ gegeben und entwickeln sie in eine Fouriersche Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_2\cos 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\sin 2\frac{\pi x}{l} + \ldots \quad (1)$$

Die Koeffizienten sind gegeben durch:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt$$

wenn wir die Integrationsvariable statt mit x mit t bezeichnen, was im bestimmten Integral ja erlaubt ist. Substituieren wir die Werte für a_n, b_n in (1), so erhalten wir:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n-1}^{n=\infty}\cos n\frac{\pi x}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{l}\sum_{n-1}^{n-\infty}\sin n\frac{\pi x}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt =$$

und weiter:

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt \quad . \quad . \quad (2)$$

indem wir die Formel verwenden:

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$$

Weil der cosinus eine gerade Funktion ist, erhält man auch denselben Wert fx, wenn man n allen negativen ganzen Zahlen von -1 bis $-\infty$ durchlaufen läßt:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt \quad . \quad (3)$$

Addiert man (2) und (3), so ergibt dies:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt$$

Man kann diesem Ausdruck noch die Form geben:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{\alpha}{n}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo $\alpha=\frac{n\pi}{l}$ gesetzt wurde, und nun die Frage stellen, welcher Grenze sich $f(x)$ nähert, wenn man l ins Unendliche wachsen läßt; man wird vermuten, daß dann die Summe in ein Integral übergehen wird. In der Tat läßt sich zeigen, daß in diesem Falle (4) übergeht in:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Den Beweis hierfür wollen wir hier nicht erbringen. Das Doppelintegral (5) heißt das Fouriersche Integral. Es ersetzt gleichsam die Fouriersche Reihe für den Fall, daß das Intervall unendlich groß wird. Die Bedingungen, unter denen man eine willkürliche Funktion $f(x)$ durch (5) darstellen kann, sind dieselben, die für die Darstellbarkeit durch eine Fouriersche Reihe gelten.

Da der cosinus eine gerade Funktion ist, kann man (5) auch schreiben:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzen wir in (6) $-t$ statt t, so erhalten wir:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\cos\alpha(x+t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ist nun $f(t)$ eine ungerade Funktion, also:

$$f(-t) = -f(t)$$

so liefert die Addition von (6) und (7):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin\alpha x \sin\alpha t\, dt$$

oder weil $f(t) \sin\alpha t$ gerade ist:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(t) \sin\alpha x \sin\alpha t\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ist hingegen $f(t)$ gerade, also:

$$f(-t) = f(t)$$

so erhalten wir durch Addition von (6) und (7):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos\alpha x \cos\alpha t\, dt$$

oder weil $f(t) \cos\alpha t$ gerade ist:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(t) \cos\alpha x \cos\alpha t\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

§ 108. Anwendung auf die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit gegebenen Grenzbedingungen.

Wir haben schon hervorgehoben, daß partielle Differentialgleichungen eine unendlich große Zahl unabhängiger partikulärer Integrale haben, und daß die Hauptaufgabe darin besteht, jenes zu finden, das gewissen gegebenen Bedingungen genügt. Für diesen Zweck leisten nun Fouriersche Reihen und Integrale die wichtigsten Dienste. Wir werden die einzuschlagende Methode am besten an Beispielen kennen lernen.

Betrachten wir zunächst die Laplacesche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und suchen wir ein Integral, das den folgenden Bedingungen genügt: für $y = 0$ soll $V = f(x)$, eine willkürlich gegebene Funktion von x, für $y = \infty$ aber $V = 0$ sein.

Wir versuchen zunächst als Lösung von (1):

$$V = e^{\alpha y + \beta x}$$

und finden durch Einsetzen, daß dieser Ausdruck wirklich ein Integral ist, wenn:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0$$

also ist:

$$V = e^{\alpha(y \pm ix)}$$

ein Integral, und daher auch:

$$V = e^{-\alpha y} \cos \alpha x \quad \text{und} \quad V = e^{-\alpha y} \sin \alpha x$$

ebenso wie:

$$V = e^{-\alpha y} \cos \alpha x \cos \alpha t \quad \text{und} \quad V = e^{-\alpha y} \sin \alpha x \sin \alpha t$$

wo t irgend ein veränderlicher Parameter ist. Die Summe der beiden letzten Lösungen ist ebenfalls ein Integral, d. i.:

$$V = e^{-\alpha y} \cos \alpha (t - x)$$

Diese Lösung erfüllt nun die zweite Bedingung, aber noch nicht die erste, nämlich daß $V = f(x)$ werden soll für $y = 0$. Multiplizieren wir aber mit $f(t)\,dt$ und bilden das Doppelintegral:

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y} f(t) \cos \alpha (t - x)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so haben wir einen Ausdruck, der, wie man sich sofort überzeugen kann, die Gleichung (1) erfüllt und auch für $y = 0$ nach dem Fourierschen Theorem in $f(x)$ übergeht, also das gewünschte Integral darstellt.

Eine große Zahl physikalischer Vorgänge wird durch die Gleichung beschrieben:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin ist V eine Eigenschaft eines Körpers, eine Funktion des Ortes (x, y, z) und der Zeit t; $\varkappa$ bedeutet eine Materialkonstante. So werden durch (3) die Vorgänge der Wärmeleitung, wobei V die Temperatur bedeutet, dargestellt; in Problemen der Elektrizitätslehre (V = Potential), in der Hydrodynamik (V = Geschwindigkeitspotential), bei Diffusionsvorgängen (V = Salzmenge) erscheint die Gleichung. Finden Änderungen nur in der X-Richtung statt, so reduziert sie sich auf:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wir wollen die Gleichung zunächst auf Probleme der Wärmeleitung anwenden:

1. Eine große eiserne Platte (Temperaturleitungs-Koeffizient $\varkappa = 0{\cdot}2$) von π cm Dicke, die zu Anfang die gleichförmige Tempera-

tur $V = 100^0$ C hat, wird plötzlich in ein Bad von 0^0 C getaucht; wie ist die Temperatur nach 10 Sekunden verteilt, vorausgesetzt, daß die Begrenzungsflächen auf 0^0 erhalten werden und nur die vom Rande weit entfernten Teile der Platte in Betracht kommen?

Man hat offenbar ein Integral von (4) § 108 zu finden, das folgenden Bedingungen genügt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } t = 0 \text{ und beliebige } x\text{: } V = 100^0 \\ \text{„ beliebiges } t \text{ und } x = 0\text{: } V = 0^0 \\ \text{„ beliebiges } t \text{ und } x = \pi\text{: } V = 0^0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wir versuchen wieder als Integral von (4):

$$V = e^{\alpha x + \beta t}$$

und finden nach Einsetzen als Bedingung:

$$\beta = \varkappa \alpha^2$$

setzen wir also $\alpha = i\mu$, so ist:

$$V = e^{i\mu x - \varkappa \mu^2 t}$$

daher auch:

$$V = e^{-\varkappa \mu^2 t} \sin \mu x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ein Integral von (4). Dieser Wert genügt auch den beiden letzten Bedingungen (5); um der noch nicht erfüllten Bedingung zu genügen, bilden wir eine Reihe aus Gliedern von der Form (6):

$$V = a_1 e^{-\varkappa t} \sin x + a_2 e^{-2\varkappa t} \sin 2x + a_3 e^{-3\varkappa t} \sin 3x + \ldots .$$

die für $t = 0$ übergeht in:

$$V = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots .$$

also in eine Fouriersche Reihe, gültig im Intervall 0 bis π, in der die a_n so zu bestimmen sind, daß $V = 100$ wird. Nun ist im genannten Intervall (s. § 106, Beispiel 1):

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots .\right)$$

demnach:

$$100 = \frac{400}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots .\right)$$

Daher ist das Integral von (4), welches allen drei Bedingungen (5) genügt:

$$V = \frac{400}{\pi}\left(e^{-\varkappa t}\sin x + \frac{1}{3}e^{-3\varkappa t}\sin 3x + \frac{1}{5}e^{-5\varkappa t}\sin 5x + \ldots .\right). \quad (7)$$

für die gegebenen Zahlenwerte wird also die Temperatur in einer Tiefe x den Wert haben:

$$V = \frac{400}{\pi}\left(e^{-2}\sin x + \frac{1}{3}e^{-6}\sin 3x + \ldots .\right)$$

Z. B. ist die Temperatur in der Mitte der Plattendicke $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$, — wenn wir bloß das erste Glied berücksichtigen, bis auf $^1/_{10}{}^0$ genau — (s. Tab. XVIII):

$$V=\frac{400}{\pi}e^{-2}=17{\cdot}2^0\ \mathrm{C}$$

2. Eine von einer ebenen Fläche begrenzte unendlich große Masse habe zu Anfang eine beliebige Temperaturverteilung: $V=f(x)$; welche Verteilung stellt sich nach der Zeit t ein, wenn die Begrenzungsebene (YZ-Ebene) auf 0^0 gehalten wird?

Lösung: Man sucht ein Integral von Gleichung (4), das den beiden Bedingungen genügt, daß:

$$\begin{array}{ll} \text{für } t=0 & V=f(x) \\ \text{„ } x=0 & V=0 \end{array}$$

Man findet mit Verwendung von (6) und (2):

$$V=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty e^{-\varkappa\alpha^2 t}f(z)\cos\alpha(z-x)\,dz$$

oder nach (8), § 107, da wir nur positive Werte von x zu berücksichtigen haben:

$$V=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty e^{-\varkappa\alpha^2 t}f(z)\sin\alpha x\sin\alpha z\,dz$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(z)\,dz\int_0^\infty e^{-k\alpha^2 t}\left[\cos\alpha(z-x)-\cos\alpha(z+x)\right]d\alpha$$

Das innere Integral kann man nach folgendem Verfahren, der Integration durch Differentiation nach einem Parameter auswerten: Will man das Integral:

$$J=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx$$

berechnen, so bildet man:

$$\frac{dJ}{db}=-\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin bx\,dx$$

durch partielle Integration erhält man:

$$\frac{dJ}{db}=-\frac{b}{2a^2}J$$

daher:

$$J=Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C setzt man $b=0$, und hat:

$$C=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

(§ 58, Gl. 10) so daß man erhält:

$$J=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Nach Anwendung dieser Methode wird nun:

$$V=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int_0^\infty f(z)\left(e^{-\frac{(z-x)^2}{4\varkappa t}}-e^{-\frac{(z+x)^2}{4\varkappa t}}\right)dz$$

Nimmt man z. B. die Anfangstemperatur im ganzen Körper als konstant an, $f(z)=V_0$, so wird:

$$V=\frac{2V_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-\beta^2}\,d\beta$$

indem man als neue Veränderliche:

$$\beta=\frac{z-x}{2\sqrt{\varkappa t}}$$

einführt. Zur Berechnung muß man in eine Reihe entwickeln (Bsp. 5, § 77):

$$V=\frac{V_0 x}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 2^2\varkappa t}+\frac{x^4}{5\cdot 2^4\varkappa^2 t^2}-\dots\right)$$

Indem Lord Kelvin [1]) dieses Resultat auf die Abkühlung der ehemals schmelzflüssigen Erde anwendet und für V_0 und $\varkappa$ plausible Zahlen ($\varkappa=400$) setzt, kommt er zu dem Schlusse, daß das Festwerden der Erde nicht früher als vor 400 Millionen Jahren und nicht später als vor 20 Millionen Jahren stattgefunden haben kann.

§ 109. Die Anwendung der Fourierschen Reihen auf die Beschreibung von Diffusionsvorgängen.

Die Gleichung (4) in § 108 dient auch zur Beschreibung der Vorgänge, die in einer ungleich konzentrierten Salzlösung auftreten, wenn man mit V die Konzentration in irgend einer Ebene x zur Zeit t, und mit $\varkappa$ den Diffusionskoeffizienten bezeichnet

[1]) S. Thomson and Tait, Treatise on natural philosophy, vol. 1, pag. 711, 1867.

(Ficksches Gesetz). Wir wollen das Fouriersche Theorem noch auf diese besonders für den Chemiker interessante Frage anwenden.

Denken wir uns ein zylindrisches Gefäß von der Höhe h mit einer Salzlösung gefüllt und in ein größeres Gefäß, in dem sich das reine Lösungsmittel, z. B. Wasser, befindet, so gestellt, daß die Öffnung in der Nähe der Wasseroberfläche sich befindet. Es diffundiert dann Lösung aus dem Diffusionsgefäß in das Lösungsmittel und sinkt zu Boden; die Salzlösung ist also, wie man annehmen kann, stets mit reinem Lösungsmittel in Berührung. Es sei zu Anfang die Konzentration in der ganzen Lösung dieselbe, V_0; wie groß ist sie nach Verlauf der Zeit t in einer Tiefe x der Lösung? Wir haben also ein Integral der genannten Differentialgleichung zu finden, das folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{array}{llll} \text{für } x = h & \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \text{und beliebige } t: & & V = 0 \\ \text{„} \quad x = 0 & & & \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \text{„} \quad t = 0 & \text{„} \qquad \text{„} & x: & V = V_0 \end{array}$$

Die zweite Bedingung bedeutet, daß auf dem Boden des Gefäßes keine Wanderung des Salzes stattfinden, also die Konzentration auch kein Gefälle haben kann.

Ein Integral, das die Bedingung (2) erfüllt, ist:

$$V = a e^{-\varkappa \mu^2 t} \cos \mu x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

denn:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - a \mu e^{-\varkappa \mu^2 t} \sin \mu x$$

und verschwindet daher für $x = 0$. Zur Erfüllung der ersten Bedingung muß:

$$\cos \mu h = 0$$

sein, was eine Bestimmung von μ ermöglicht; es folgt nämlich, daß:

$$\mu = \frac{(2n-1)\pi}{2h}$$

wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Bilden wir nun aus (1) den Ausdruck:

$$V = a_1 e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 \varkappa t} \cos \frac{\pi x}{2h} + a_2 e^{-\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2 \varkappa t} \cos \frac{3\pi x}{2h} + \ldots . \quad (2)$$

so erfüllt dieser die genannten zwei Bedingungen und wir haben nur noch die Koeffizienten a_n so zu bestimmen, daß auch der dritten Bedingung genügt werde. Für $t = 0$ wird (2):

$$V_0 = a_1 \cos \frac{\pi x}{2h} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{2h} + \ldots .$$

dieser Ausdruck ist aber eine zwischen 0 und h giltige Fouriersche cosinus-Reihe, und die Koeffizienten bestimmen sich daher durch:

$$a_n = \frac{2 V_0}{h} \int_0^h \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2h} dx$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{4 V_0}{(2n-1)\pi}$$

Die gesuchte Lösung folgt also durch Einsetzen in (2):

$$V = \frac{4 V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} e^{-\left(\frac{2n-1}{2h}\pi\right)^2 \varkappa t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2h} \quad (3)$$

Nach genügend langer Zeit ist der Zustand stationär geworden; dann ist $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, und die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

woraus folgt: $$V = ax + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Aus (3) läßt sich leicht ableiten, welche Salzmenge in einer gewissen Zeit T durch irgend einen Querschnitt der Lösung, den wir etwa gleich der Einheit annehmen können, hindurchdiffundiert. Es ist nämlich die Menge, die während der Zeit dt durch den Querschnitt wandert, $-\varkappa \frac{\partial V}{\partial x} dt$, und daher die gesuchte Menge:

$$Q = -\varkappa \int_0^T \frac{\partial V}{\partial x} dt$$

also nach (3):

$$Q = \frac{2 \varkappa V_0}{h} \int_0^T \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} e^{-\left(\frac{2n-1}{2h}\pi\right)^2 \varkappa t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2h} dt$$

oder:

$$Q = \frac{8 V_0 h}{A^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{2n-1}{2h}\pi\right)^2 \varkappa T}\right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2h} \quad (5)$$

Setzt man $x = h$, so findet man die aus dem Diffusionsgefäß während der Zeit T herausdiffundierende Salzmenge:

$$Q_1 = \frac{8 V_0 h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{2n-1}{2h}\pi\right)^2 \varkappa T}\right) \quad . \; . \quad (6)$$

Man kann den Ausdruck (6) benutzen, um $\varkappa$ zu bestimmen; da nämlich die Reihe für größere T sehr rasch konvergiert, so genügt schon das erste Glied derselben:

$$Q_1 = \frac{8 V_0 h}{\pi^2}\left(1 - e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 \varkappa T}\right)$$

woraus folgt:

$$\varkappa = -\frac{4h^2}{T\pi^2} \, \mathrm{l}\left(1 - \frac{Q_1 \pi^2}{8 h V_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Besondere Fälle:

1. Graham[1]) schichtete in einem zylindrischen Gefäß auf eine Salzlösung von der Konzentration V_0 und der Höhe h eine Wassersäule, so daß die gesamte Höhe der Flüssigkeit H betrug; wie groß war die Konzentration in irgend einer Schichte x (vom Boden der Flüssigkeit gerechnet) nach Verlauf der Zeit t?

Lösung: Man hat ein Integral der Fickschen Gleichung mit folgenden Bedingungen zu finden:

$$\text{für } t = 0 \begin{cases} \text{von } x = 0 \text{ bis } x = h: & V = V_0 \\ \quad " \quad x = h \quad " \quad x = H: & V = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} " \quad x = 0 \\ " \quad x = H \end{array}\right\} \text{ und beliebige } t: \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn man setzt:

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varkappa}{H^2} t} \cos \frac{n \pi x}{H}$$

wo die Koeffizienten a_n durch die Bedingungen (1) bestimmt werden, nämlich:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos \frac{n \pi x}{H} = \begin{cases} V_0 \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = h \\ 0 \quad " \quad x = h \quad " \quad x = H \end{cases}$$

sonst ist:

$$a_0 = \frac{1}{H}\int_0^H V dx = \frac{1}{H}\left\{\int_0^h V_0 dx + \int_h^H 0 \cdot dx\right\} = \frac{h}{H} V_0$$

$$a_n = \frac{2}{H}\int_0^H V \cos \frac{n\pi x}{H} dx = \frac{2}{H}\int_0^h V_0 \cos \frac{n\pi x}{H} dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} V_0 \sin \frac{n\pi h}{H}$$

Daher ist die Lösung:

$$V = \frac{h}{H} V_0 + \frac{2 V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varkappa}{H^2} t} \sin \frac{n\pi h}{H} \cos \frac{n \pi x}{H}$$

---

[1]) Phil. Trans. **151,** 183, 1861.

In Grahams Experimenten war $h = \frac{1}{8} H$; die Richtigkeit der Theorie wurde dadurch geprüft, daß die Lösung nach Verlauf einer gewissen Zeit in acht Schichten geteilt, und jede Schichte auf ihren Salzgehalt untersucht wurde. Die Salzmenge in der $r$ten Schicht ist:

$$Q_r = \int_{\frac{r-1}{8} H}^{\frac{r}{8} H} V dx$$

also:

$$Q_r = \frac{V_0 H}{64} + \frac{4 V_0 H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varkappa}{H^2} t} \sin\frac{n\pi}{8} \sin\frac{n\pi}{16} \cos\frac{(2r-1)n\pi}{16}$$

Der Querschnitt der Lösung ist gleich eins gesetzt.

Konvergiert die Reihe hinreichend rasch, so daß man sich mit dem ersten Glied begnügen kann, so ist die Berechnung von Q_r leicht. Stefan[1]) wiederholte die Experimente und prüfte die Theorie durch die Untersuchung, ob, — wie aus Q_r folgt, — z. B.:

$$Q_1 + Q_4 + Q_5 + Q_8 = \frac{V_0 H}{16} = \frac{Q_0}{2}$$

wenn Q_0 die gesamte Salzmenge der Lösung bedeutet.

2. Nach dem Daltonschen Gesetz ist bei der Diffusion zweier Gase ineinander der Partialdruck p des einen nach der Zeit t an einer Stelle x gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Loschmidt[2]) setzte zwei gleich lange Röhren von der Länge $\frac{h}{2}$, die mit zwei Gasen gefüllt waren, übereinander und ließ die Gase ineinander diffundieren; die Röhren waren an den Enden verschlossen. Wie groß war der Partialdruck p des einen Gases nach der Zeit t an einer Stelle x, wenn der Anfangsdruck desselben p_0 war?

Lösung: Es ist ein Integral der genannten Gleichung zu suchen, das folgenden Bedingungen genügt:

$$\text{für } t = 0 \begin{cases} \text{von } x = 0 \text{ bis } x = \frac{h}{2}\colon\ p = p_0 \\ \quad\text{„}\quad x = \frac{h}{2} \quad\text{„}\quad x = h\colon\ p = 0 \end{cases}$$

$$\text{„}\quad x = 0 \text{ und beliebiges } t\colon\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

---

[1]) Wien. Akad. Ber. **79**, II, 161, 1879.

[2]) Wien. Akad. Ber. **61**, 367, 1870; **62**, 468, 1870.

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn:

$$p = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \cos \frac{n \pi x}{h} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varkappa}{h^2} t}$$

Die in den beiden Röhren nach Verlauf einer Zeit t enthaltenen Gasmengen sind:

$$Q' = \int_0^{\frac{h}{2}} p\,dx \qquad Q'' = \int_{\frac{h}{2}}^{h} p\,dx$$

(Querschnitt = eins) daher ist:

$$\frac{Q' - Q''}{Q' + Q''} = \frac{4}{p_0 \pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \varkappa}{h^2} t}$$

Bei hinreichend großem t genügt es, das erste Glied zu berücksichtigen, und man hat so eine Methode zur Bestimmung von $\varkappa$.

IX. Abschnitt.

Numerische Gleichungen.

§ 110. Die graphische Methode für die näherungsweise Lösung von numerischen Gleichungen.

Indem wir die Grundsätze der Theorie algebraischer Gleichungen als bekannt voraussetzen, wollen wir in diesem Kapitel einige Methoden angeben, die Wurzeln numerischer Gleichungen mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Eine bequeme Methode, die reellen Wurzeln einer Gleichung:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . + a_n = 0$$

in erster Annäherung zu finden, besteht darin, daß man die Kurve:

$$y = f(x)$$

aus einzelnen Punkten konstruiert und ihre Schnittpunkte mit der X-Achse aufsucht. Die so gefundenen Abszissen sind offenbar Werte, für die $y = f(x) = 0$ ist, d. h. sie sind die gesuchten Wurzeln der Gleichung. Wie man sieht, hängt die Genauigkeit der Methode von jener der Zeichnung ab.

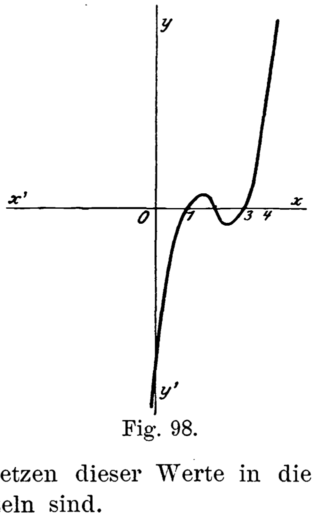

Fig. 98.

Hat man z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

so konstruiert man die Kurve:

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

aus einzelnen Punkten, indem man x der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3. 4 .... und -1, -2, -3 .... erteilt (s. Fig. 98); man findet, daß die Kurve die Abszissenachse bei $x = 1, 2, 3$ schneidet. In der Tat zeigt das Einsetzen dieser Werte in die gegebene Gleichung, daß sie die Wurzeln sind.

Man kann diese Methode noch in etwas anderer Weise verwenden. Es seien z. B. die reellen Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 + x - 2 = 0$$

zu suchen. Die Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$x^3 = -x + 2$$

konstruiert man nun die beiden Kurven:

$$y = x^3 \quad \text{und} \quad y = -x + 2$$

(s. Fig. 99) und sucht den Schnittpunkt P derselben (in diesem Falle existiert nur einer), so erhält man einen Wert OM für x, der für beide Kurven einen Wert y liefert, d. h. eine Wurzel der Gleichung. In unserem Beispiel ist diese die einzige reelle Wurzel, die beiden anderen sind komplex.

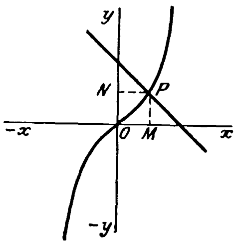

Fig. 99.

Dieselbe Methode kann auch Anwendung finden, um die reellen Wurzeln zweier simultaner Gleichungen zu finden. Wir betrachten z. B.:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 - 4x = y^2 - 3y$$

Konstruiert man die Kurven, die den Gleichungen entsprechen, — einen Kreis und eine Hyperbel (s. Fig. 100) — so geben die Schnittpunkte P, P' die beiden Gleichungen gemeinsamen Werte von x und y, d. h. die Wurzeln: $x = OM$, OM'; $y = PM$, $P'M'$.

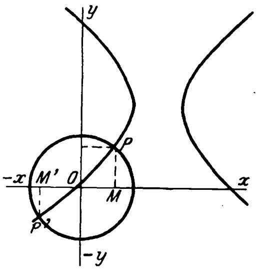

Fig. 100.

Die graphische Methode kann auch zur Lösung transzendenter Gleichungen verwendet werden. So z. B. sucht man zur Lösung der Gleichung:

$$x + \cos x = 0$$

die Schnittpunkte der Kurven:

$$y = -x \quad \text{und} \quad y = \cos x$$

Beispiele:

1. Man zeige auf graphischem Wege, daß die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

zwischen 1 und 2 und zwischen 6 und 7 liegen.

2. Man bestimme die reellen Wurzeln von:

$$x + e^x = 0$$

(s. Tab. XVII).

3. Man zeige auf graphischem Wege, daß eine Gleichung ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten stets eine ungerade Zahl reeller Wurzeln, hingegen eine Gleichung von geradem Grade entweder keine oder eine gerade Zahl reeller Wurzeln hat.

Lösung: Für hinreichend große x nimmt das Gleichungspolynom das Zeichen der höchsten Potenz von x an, ändert es also bei ungeradem Grade; die Kurve muß also von positiven x und y zu negativen übergehen, also die X-Achse eine ungerade Zahl von Malen schneiden. Analog bei geradem Grade.

4. $$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Lösung: Die Kurve berührt die X-Achse bei $x = 1$, ohne sie zu schneiden; dieser Wert ist eine Doppelwurzel, denn für ihn ist sowohl $f(x)$ wie $f'(x)$ null.

5. Lösungen zu finden von:

a) $$9x^3 - 41x^{0\cdot 8} + 0\cdot 5^{2x} - 92 = 0$$

Antwort: $$x = 2\cdot 35$$

b) $$e^x - e^{-x} + 0\cdot 4x - 10 = 0$$

Antwort: $$x = 2\cdot 22$$

§ 111. Die Newtonsche Näherungsmethode.

Diese Methode gestattet, eine Wurzel mit beliebiger Annäherung zu berechnen, falls man dieselbe, etwa auf dem angegebenen graphischen Wege, zwischen gewisse Grenzen eingeschlossen hat. Nehmen wir nämlich an, man habe einen angenäherten Wert v für eine Wurzel der Gleichung:

$$f(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gefunden, und es sei a der wahre Wert der Wurzel, so daß identisch:

$$f(a) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dann setze man:

$$a = v + h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und entwickle $f(v+h)$ nach dem Taylorschen Satz:

$$f(v+h) = f(v) + h f'(v) + \frac{h^2}{2!} f''(v) + \ldots$$

Da nach der Voraussetzung der Fehler h klein sein soll, begnügen wir uns mit den ersten zwei Gliedern der Entwicklung und setzen:

$$f(v+h) = f(a) = f(v) + h f'(v) = 0$$

oder:

$$h = -\frac{f(v)}{f'(v)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hierdurch erhalten wir einen genaueren Wert v'; mit diesem können wir ebenso verfahren und auf diese Weise dem wahren Werte beliebig nahe kommen. — Man betrachte z. B.:

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$

Es ist leicht ersichtlich, daß eine Wurzel zwischen -3 und -4 liegt; daher setzt man:

$$x = -3 + h$$

und erhält für h:

$$h = -\frac{f(-3)}{f'(-3)} = -\frac{1}{20} = -0{\cdot}05$$

die erste Annäherung liefert also:

$$x_1 = -3{\cdot}05$$

Man setzt nun:

$$x = -3{\cdot}05 + h_1$$

d. h.:

$$h_1 = -\frac{f(-3{\cdot}05)}{f'(-3{\cdot}05)} = -0{\cdot}001082$$

daher ist die zweite Näherung:

$$x_2 = -3{\cdot}051082$$

usw.

Für praktische Zwecke ist die erste Näherung häufig genügend.

Es ist leicht, die Methode von Newton geometrisch zu interpretieren (s. Fig. 101). Ist MQ ein Stück der Kurve $y = f(x)$, $OQ = a$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, $OP = v$ der angenommene Näherungswert, so ist $MP = f(v)$; ferner ist:

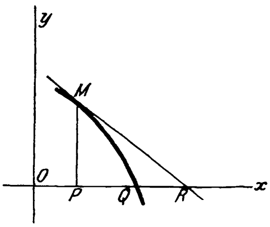

Fig. 101.

$$\tan MRP = -f'(v)$$

und da:

$$\tan MRP = \frac{MP}{PR}$$

so erhält man:

$$PR = -\frac{f(v)}{f'(v)}$$

Also ist nach (4) PR nichts anderes als die Korrektion h, und die Newtonsche Methode bedeutet geometrisch, daß man statt OP die Abszisse OR des Schnittpunktes der Tangente mit der X-Achse als genäherteren Wert der Wurzel nimmt. Es wird also angenommen, daß der Punkt R dem Punkte Q näher liegt als der Punkt P. Hier liegt die schwache Seite der Newtonschen Methode: man sieht ein, daß diese Voraussetzung nicht unter allen Umständen zutreffen muß; man würde dann statt einer besseren eine schlechtere Annäherung erhalten.

So z. B. zeigt eine genauere Untersuchung, daß die obige Gleichung:

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

außer der besprochenen noch zwei reelle Wurzeln hat, die zwischen $x = 1$ und $x = 2$ liegen und einander nahe benachbart sind. Würden wir nun zur Auffindung derselben nach der Newtonschen Methode etwa $x = 1{\cdot}5$ und daher:

$$h = -\frac{f(1{\cdot}5)}{f'(1{\cdot}5)} = 0{\cdot}5$$

setzen, so gäbe dies den Wert $x_1 = 2$, der weiter von den gesuchten Wurzeln abliegt als $1{\cdot}5$.

Beispiele:

1. Man zeige, daß eine der Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

lautet: $x = 4{\cdot}2491405\ldots$, welcher Wert in zwei Schritten nach der Newtonschen Methode von $x = 4$ ausgehend zu erreichen ist.

2. $$x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$$

Eine Wurzel ist $x = 2{\cdot}9022834\ldots$

3. $$x^2 + 4 \sin x = 0$$
$$x = -1{\cdot}933\ldots$$

§ 112. Die Auffindung der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

so ist identisch:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \quad \ldots \quad (1)$$

Nehmen wir nun an, daß eine Wurzel x_λ mehrmals, z. B. zweimal vorkommt, so wird (1) den Faktor $(x - x_\lambda)^2$ enthalten. Daher wird die Ableitung von (1) den Faktor $x - x_\lambda$ enthalten, d. h. x_λ ist eine einfache Wurzel der Gleichung:

$$f'(x) = 0$$

Ist allgemein x_λ eine $r$fache Wurzel von $f(x) = 0$, so ist sie eine $r - 1$fache Wurzel von $f'(x) = 0$, daher eine $r - 2$fache von

$f''(x) = 0$ usw. Um also zu erkennen, ob eine Gleichung $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt, braucht man nur zu untersuchen, ob $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinsamen Faktor besitzen.

So z. B. haben:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$$

und:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 8$$

den gemeinsamen Faktor $x - 4$, wie man durch Division von $f(x)$ durch $f'(x)$ erfährt; daher ist $x = 4$ mindestens eine zweifache Wurzel von:

$$f(x) = 0.$$

Da sie aber nicht auch Wurzel von $f''(x) = 0$ ist, so ist sie bloß eine zweifache.

Beispiel:

Man zeige, daß $x = -5$ Doppelwurzel von:

$$x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 55x + 50 = 0$$

ist.

§ 113. Der Sturmsche Satz.

Eine ganze rationale Funktion:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

durchläuft ihre Werte bei Änderung der unabhängigen Variabeln stetig: sie muß daher, um von einem negativen zu einem positiven Werte überzugehen, jedenfalls durch null hindurchgehen. Man kann also die Zahl der Wurzeln von $f(x)$ in einem Intervall finden, wenn man untersucht, wie oft die Funktion in diesem Intervall ihr Zeichen wechselt. Diese Untersuchung wird aber dadurch unsicher, daß zwei Wurzeln einander sehr nahe liegen können, so daß man den zwischen diesen beiden Werten eintretenden Zeichenwechsel der Funktion nicht bemerkt. Eine Methode, die Zahl der Wurzeln in einem Intervall mit vollkommener Sicherheit zu bestimmen, wird durch den sogenannten Sturmschen Satz gegeben.

Wir nehmen zunächst an, die mehrfachen Wurzeln seien durch den im vorigen Paragraphen angegebenen Prozeß bereits entfernt; demnach besitzen $f(x)$ und seine Ableitung, die wir mit $f_1(x)$ bezeichnen, keinen gemeinschaftlichen Teiler mehr. Wir schlagen nun das unter dem Namen der Kettendivision bekannte Verfahren ein, als ob es sich darum handelte, den größten gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $f_1(x)$ zu finden. Dieses Verfahren gestaltet sich bekanntlich folgendermaßen: Man dividiert $f(x)$ durch $f_1(x)$, wodurch man einen Quotienten Q_1 und einen Rest erhält, den wir mit $-f_2(x)$ bezeichnen; den vorigen Divisor $f_1(x)$ dividiert man durch $f_2(x)$, erhält einen Quotienten Q_2 und einen Rest $-f_3(x)$ usw. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die Division aufgeht; der letzte Divisor gibt dann den größten gemeinsamen Teiler der beiden ursprünglichen Funktionen. Hierbei nimmt der Grad der auftretenden Funktionen beständig ab. Da nun $f(x)$ und $f_1(x)$ in unserem Falle keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so können wir das Verfahren so lange fortsetzen, bis der letzte Rest $-f_n(x)$ eine Konstante ist. Wir haben also die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f &= f_1 Q_1 - f_2 \\ f_1 &= f_2 Q_2 - f_3 \\ &\cdots\cdots \\ f_{n-2} &= f_{n-1} Q_{n-1} - f_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Haben wir so die Funktionen $f, f_1, \ldots f_n$ gebildet, so untersuchen wir, welche Werte sie annehmen, falls man für x irgend einen bestimmten Wert x_0 setzt. Es interessiert uns hierbei aber nicht der absolute Wert der einzelnen Funktionen, sondern nur ihr Zeichen. Ordnen wir die Funktionen in der Reihenfolge ihrer Indices und zählen wir ab, wie oft das Zeichen wechselt, wenn wir von der einen zur nächstfolgenden übergehen; wir erhalten so eine bestimmte Zahl von Zeichenwechseln. Für einen anderen Wert x_1 von x wird diese Zahl im allgemeinen eine andere sein.

Geht man nun von $x = x_0$ zu $x = x_1 > x_0$ über, so kann die Zahl von Zeichenwechseln nur abgenommen haben, und es ist die verlorene Zahl von Zeichenwechseln gerade gleich der Zahl der Wurzeln, welche $f(x)$ im Intervall x_0 bis x_1 besitzt; dies ist der Inhalt des Sturmschen Satzes.

Wir können die Richtigkeit dieses Satzes folgendermaßen einsehen. Eine Änderung in der Zahl der Zeichenwechsel der sogen. Sturmschen Funktionen $f, f_1 \ldots f_n$ kann nur dadurch eintreten, daß irgend eine derselben, z. B. $f_\lambda(x)$, ihr Zeichen ändert; dies ist aber wieder nur dadurch möglich, daß sie durch null hindurchgeht. Ist also für $x = a$, $f_\lambda(a) = 0$, so folgt nach (1) aus:

$$f_{\lambda-1}(x) = f_\lambda(x) Q_\lambda - f_{\lambda+1}(x)$$

daß für $x = a$:

$$f_{\lambda-1}(a) = -f_{\lambda+1}(a)$$

d. h. daß in der Nähe dieser Stelle die beiden Funktionen $f_{\lambda-1}$ und $f_{\lambda+1}$ entgegengesetztes Zeichen haben. Daraus folgt, daß bei Änderung des Zeichens von $f_\lambda(x)$ ein Zeichenwechsel weder verloren noch gewonnen wird. Ist z. B. in der Nähe der Stelle $x = a$, $f_{\lambda-1}(x)$ positiv, so ist $f_{\lambda+1}(x)$ daselbst negativ; geht nun $f_\lambda(x)$ an dieser Stelle von positiven zu negativen Werten über, so bilden für $x < a$ die Funktionen f_λ, $f_{\lambda+1}$, für $x > a$ aber $f_{\lambda-1}$ und f_λ einen Zeichenwechsel, so daß die Zahl der Zeichenwechsel durch die Zeichenänderung von f_λ nicht geändert wird. Dieser Tatbestand könnte sich nur dadurch ändern, daß zwei benachbarte Sturmsche Funktionen gleichzeitig null würden; das ist aber unmöglich. Denn dann müßten nach (1) auch alle vorhergehenden, also auch $f(x)$ und $f_1(x)$ null sein; dies würde aber der Voraussetzung widersprechen, daß diese beiden Funktionen keine gemeinsame Wurzel haben sollen.

Diese Überlegung ist stichhaltig für alle f_λ bis auf f und f_n. Letztere kann aber ihr Zeichen überhaupt nicht wechseln, weil sie konstant ist. Eine Änderung in der Zahl der Zeichenwechsel kann also nur davon herrühren. daß $f(x)$ sein Zeichen ändert. Es ist demnach nur noch zu zeigen, daß, so oft $f(x)$ durch null hindurchgeht, die Zahl der Zeichenwechsel um eine Einheit abnimmt. Diese Tatsache nun entspringt der Eigenschaft von $f_1(x)$ als der Ableitung von $f(x)$, positiv oder negativ zu sein, je nachdem $f(x)$ wächst oder abnimmt. Geht also $f(x)$ von positiven Werten durch null zu negativen über, so ist an dieser Stelle $f_1(x)$ negativ, daher geht bei diesem Übergang ein Zeichenwechsel verloren. Geht aber $f(x)$ vom Negativen ins Positive über, so ist daselbst $f_1(x)$ positiv, und es tritt wieder Verlust eines Zeichenwechsels ein. Jeder Durchgang von $f(x)$ durch null ist also mit dem Verlust eines Zeichenwechsels verbunden. Zählt man demnach an zwei Stellen x_0 und x_1 die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Sturmschen Funktionen ab, so gibt die Differenz der beiden Zahlen an, wie oft $f(x)$ durch null hindurchging, während x von x_0 bis x_1 wuchs, d. h. die Zahl der Wurzeln von $f(x)$ in diesem Intervalle.

Nehmen wir als Beispiel die schon oben betrachtete Funktion:

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$

und bilden wir die Reihe der Sturmschen Funktionen:

$$f_1(x) = 3x^2 - 7$$
$$f_2(x) = 2x - 3$$
$$f_3(x) = 1$$

Bei der Bildung dieser Funktionen kann zur Vereinfachung mit positiven konstanten Faktoren multipliziert werden, da es nur auf das Zeichen, nicht auf den absoluten Wert ankommt. Indem wir nun in diese vier Funktionen für x der Reihe nach verschiedene Werte setzen und auf die Zahl der Zeichenwechsel achten, können wir die Zahl der reellen Wurzeln von $f(x)$ in einem beliebigen Intervall finden. Hierzu dient die folgende Tabelle:

Werte von x	Zeichen der Sturmschen Funktionen	Zahl der Zeichenwechsel
$-\infty$	$-+-+$	3
-4	$-+-+$	3
-3	$++-+$	2
-2	$++-+$	2
-1	$+--+$	2
0	$+--+$	2
$+1$	$+--+$	2
$+2$	$++++$	0
$+\infty$	$++++$	0

Wir ersehen aus dieser Tabelle, daß für kleinere Werte von x als -4 und für größere als $+2$ keine Wurzel von $f(x)$ zu finden ist; ferner daß zwischen -4 und -3 ein Zeichenwechsel, zwischen -1 und $+2$ deren zwei verloren gehen. Demnach muß eine Wurzel zwischen -4 und -3 die beiden anderen zwischen $+1$ und $+2$ liegen, was wir in der Tat schon oben konstatiert haben.

Beispiele:

1. Man zeige, daß die Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 13 = 0$$

eine Wurzel zwischen -3 und -2 und zwei zwischen 2 und 3 hat.

2. Die Gleichung:

$$x^3 - 4x^2 - 6x + 8 = 0$$

hat ihre Wurzeln zwischen 0 und 1, 4 und 5, -1 und -2.

3. Man untersuche die Gleichung:

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 4 = 0$$

auf die Zahl reeller Wurzeln hin.

Lösung: Die fünf Sturmschen Funktionen haben für $x = -\infty$ die Zeichen $+-+++$, für $x = +\infty$ aber $+++-+$, d. h. in beiden Fällen zwei Zeichenwechsel; also besitzt die Gleichung keine reelle Wurzel.

§ 114. Die Hornersche Näherungsmethode.

Man kann mit Hilfe des Sturmschen Satzes die Wurzeln einer Gleichung voneinander trennen und etwa nach der Newtonschen Methode in so enge Grenzen einschließen als man will. Zur wirklichen Ausführung dieser Rechnungen hat Horner eine bequeme Methode angegeben.

Ist die gegebene Gleichung:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \quad . \quad (1)$$

und $x = x_1$ ein genäherter Wert der Wurzel, so bildet man aus (1) eine Gleichung, deren Wurzel um x_1 kleiner ist, in der also statt x die Veränderliche $x - x_1$ erscheint. Dies wird folgendermaßen erreicht: Nach dem Taylorschen Satz ist:

$$f(x) = f(x_1 + x - x_1) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_1)^n = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Offenbar erhält man $f(x_1)$ als Rest bei der Division von $f(x)$ durch $x - x_1$, $f'(x_1)$ als Rest bei der neuerlichen Division des so erhaltenen Quotienten durch $x - x_1$ usw. Um also die Koeffizienten der transformierten Gleichung zu erhalten, dividiert man $f(x)$ durch $x - x_1$, das Resultat abermals durch $x - x_1$ usw., die gesuchten Koeffizienten sind dann die Reste, die bei diesen Divisionen bleiben. Für die Ausführung der Divisionen hat Horner nun das folgende Schema gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots & a_n \\ & a_0 x_1 & b_1 x_1 & b_2 x_1 \ldots\ldots & b_{n-1} x_1 \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots & b_n \end{array}$$

d. h. der gesuchte Quotient bei der Division von $f(x)$ durch $x - x_1$ hat die Form:

$$a_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wobei b_1 gleich der Summe von a_1 und $a_0 x_1$, b_2 gleich der Summe a_2 und $b_1 x_1$ usw. ist; der Rest ist b_n. Dividiert man (3) abermals durch $x - x_1$, so erhält man einen Quotienten:

$$a_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}$$

und einen Rest c_{n-1}, wobei die Größen c_1, $c_2 \ldots c_{n-1}$ nach dem Schema gefunden werden:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots & b_{n-1} \\ & a_0 x_1 & c_1 x_1 & c_2 x_2 \ldots\ldots & c_{n-2} x_1 \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \ldots\ldots & c_{n-1} \end{array}$$

Auf diese Weise fortfahrend erhält man alle Koeffizienten $b_n = f(x_1)$, $c_{n-1} = f'(x_1) \ldots$ der Gleichung (2), und wenn x_1 eine einzifferige Zahl ist, sind alle vorkommenden Multiplikationen sehr einfach.

Dieses Verfahren benützt man nun zu folgendem Zweck: Man habe die gesuchte Wurzel der Gleichung (1) zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen x_1 und $x_1 + 1$ eingeschlossen; man kennt also die ganzen Stellen x_1 der Wurzel. Die transformierte Gleichung (2) dient dann dazu, um die erste Dezimalstelle zu finden; die entsprechende Wurzel dieser Gleichung liegt nämlich zwischen null und eins. Diese Stelle kann z. B. nach der Newtonschen Methode gefunden werden, indem man bildet:

$$x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{b_n}{c_{n-1}}$$

Aus Gleichung (2) leitet man nun wieder eine neue Gleichung ab, deren Wurzel um x_2 kleiner ist, und berechnet aus ihr die zweite Dezimalstelle der gesuchten Wurzel. Durch Fortsetzung des Verfahrens kann man die Wurzel mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Die Ausführung an einem numerischen Beispiel wird dies klarer machen.

Wir wissen, daß die Gleichung:

$$x^3 - 7x + 7 = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

zwei Wurzeln zwischen 1 und 2 hat. Wir verwandeln sie daher in eine Gleichung, deren Wurzeln um 1 kleiner sind als die der ursprünglichen. Dies geschieht nach dem Hornerschen Schema:

1	0	— 7	7
	1	1	— 6
1	1	— 6	1
	1	2	
1	2	— 4	
	1		
1	3		

Die neue Gleichung lautet daher:

$$x_3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (5)$$

und wir wissen, daß sie zwei Wurzeln zwischen 0 und 1 hat. Um sie zu trennen, können wir den Sturmschen Satz anwenden. Wir bilden also die vier Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ f_1(x) &= 3x^2 + 6x - 4 \\ f_2(x) &= 2x - 1 \\ f_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

und untersuchen die Zahl der Zeichenwechsel:

Werte von x	Zeichen der Sturmschen Funktionen	Zahl der Zeichenwechsel
0·1	$+--+$	2
0·2	$+--+$	2
0·3	$+--+$	2
0·4	$---+$	1
0·5	$--++$	1
0·6	$-+++$	1
0·7	$++++$	0

Wir finden, daß eine Wurzel zwischen 0·3 und 0·4, die andere zwischen 0·6 und 0·7 liegt; daraus folgt, daß die erste der beiden Wurzeln von Gleichung (4) bis auf die erste Dezimalstelle zu 1·3 berechnet ist. Nunmehr transformieren wir (5) auf eine Gleichung, deren Wurzeln um 0·3 kleiner sind:

1	3	— 4	1
	0·3	0·99	— 0·903
1	3·3	— 3·01	**0·097**
	0·3	1·08	
1	3·6	— **1·93**	
	0·3		
1	**3·9**		

Die Gleichung lautet also:

$$x^3 + 3{\cdot}9x^2 - 1{\cdot}93x + 0{\cdot}097 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Da nun $0{\cdot}097 = f(0{\cdot}3)$, $-1{\cdot}93 = f'(0{\cdot}3)$ ist, falls man die linke Seite von (5) mit $f(x)$ bezeichnet, so ist die nächste Annäherung nach dem Newtonschen Verfahren:

$$\frac{0{\cdot}097}{1{\cdot}93} = 0{\cdot}05$$

die gesuchte Wurzel also 1·35. Man sieht also, daß man die zwei letzten nach dem Hornerschen Verfahren erhaltenen Koeffizienten durcheinander zu dividieren hat, um die nächste Dezimalstelle zu erhalten. Wenden wir das Verfahren noch einmal an, so finden wir demnach:

1	3·9	— 1·93	0·097
	0·05	0·1975	— 0·086625
1	3·95	— 1·7325	**0·010375**
	0·05	0·2	
1	4·00	— **1·5325**	
	0·05		
1	**4·05**		

Die nächste Stelle ist also $\frac{0\cdot010375}{1\cdot5325} = 0\cdot006$ und die bis Wurzel drei Stellen berechnete Wurzel lautet 1·356.

Beispiele:

Man berehne die zwischen 6 und 7 liegende Wurzel der Gleichung:

$$4x^3 - 13x^2 - 31x = 275$$

bis auf zwei Stellen.

Lösung: $x = 6\cdot25$

2. Man bestimme die Wurzel der Gleichung:

$$x^3 + x^2 + x - 100 = 0$$

die zwischen 4 und 5 liegt.

Lösung: 4·2644 ....

3. Man suche die positive und die negative Wurzel von:

$$x^4 + 8x^2 + 16x = 440$$

Lösung: 3·976 ... und — 4·3504 ...

§ 115. Die van der Waalssche Zustandsgleichung.

Wir wollen zum Schlusse noch eine Gleichung diskutieren, die große physikalische Bedeutung hat, nämlich die van der Waalssche Zustandsgleichung der Gase. Sie lautet:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und gibt eine Beziehung zwischen den zusammengehörigen Werten von Druck p, Volum v und absoluter Temperatur T; a, b, R sind spezifische Konstanten des betreffenden Gases. Die Gleichung ist vom dritten Grade in v, und hat daher drei Wurzeln α, β, γ, so daß:

$$(v - \alpha)(v - \beta)(v - \gamma) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Sie können entweder alle reell sein, oder es muß eine reell sein, während die beiden anderen imaginär sind. Ist das letztere der Fall, so entspricht für eine bestimmte Temperatur T einem Druck p ein einziger Wert des Volums v. In Fig. 102 sind die pv-Kurven der Kohlensäure für verschiedene Werte der Temperatur, also die sogenannten Isothermen gezeichnet; der besprochene Fall tritt, wie man sieht, beispielsweise für $T = 321\cdot1^0$ oder $48\cdot1^0$ C ein. Aber auch der zweite Fall ist in der Natur wenigstens teilweise realisiert. So liefert die Gleichung für $13\cdot1^0$ C die Kurve

$ABCD$, welche von einer parallel zur Abszissenachse gezogenen Geraden in den drei Punkten α, β, γ getroffen wird; einem Werte p_0 des Drucks gehören drei verschiedene Werte des Volums zu. Der Punkt α entspricht dem gasförmigen, der Punkt γ dem flüssigen Zustande der Kohlensäure unter demselben Druck. Hingegen ist das Kurvenstück $C\beta B$ bisher physikalisch nicht realisiert worden; es müßte an dieser Stelle bei Volumsverkleinerung auch der Druck des Gases abnehmen. In Wahrheit durchläuft bei Volumsverkleinerung das Gas die gerade Linie $\alpha\beta\gamma$, indem bei α die Verflüssigung beginnt und unter dem konstanten Druck p_0 des gesättigten Dampfes bis zur vollständigen Verflüssigung γ fortschreitet. Die Stücke αy und γx, welche labilen Zuständen des Gases entsprechen, sind realisiert worden; αy repräsentiert den Kondensationsverzug des Gases, γx den Siedeverzug der Flüssigkeit.

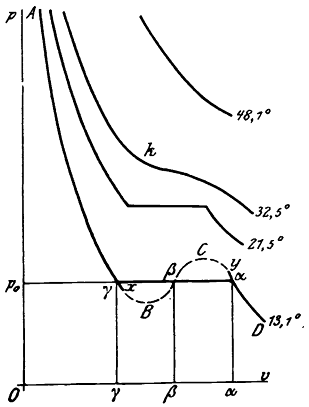

Fig. 102.

Es ist noch der Fall zu erörtern, daß die drei Wurzeln α, β, γ einander gleich sind; er bildet den Übergang zwischen den beiden anderen Fällen und tritt bei Kohlensäure, wie aus der Figur ersichtlich, bei $32{\cdot}5^0$ C ein. Der Punkt K heißt der kritische. Für diesen Fall ist nach (2):

$$(v-\alpha)^3 = 0$$

bezeichnen wir also die kritischen Werte von Druck, Volum und Temperatur bezügl. mit p_c, v_c und T_c, so ist identisch:

$$\left(p_c + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) - RT_c = (v-v_c)^3 = 0$$

und daher, wenn man die einzelnen Potenzen von v vergleicht:

$$3v_c = b + \frac{RT_c}{p_c}; \qquad 3v_c^{\,2} = \frac{a}{p_c}; \qquad v_c^{\,3} = \frac{ab}{p_c}$$

Es lassen sich also die Konstanten a, b, R der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Daten berechnen. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} a &= 3v_c^{\,2}p_c \\ b &= \frac{v_c}{3} \\ R &= \frac{8}{3}\,\frac{p_c v_c}{T_c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man diese Werte in (1) ein und führt die Größen $\frac{p}{p_c}=\pi$, $\frac{v}{v_c}=\varphi$, $\frac{T}{T_c}=\vartheta$ als neue Veränderliche ein, so erhält man:

$$\left(\pi+\frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi-1)=8\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

eine Gleichung, welche keine spezifischen Konstanten mehr enthält und daher für alle Gase gilt (Theorie der übereinstimmenden Zustände).

Wir können diese Verhältnisse auch noch in folgender Weise untersuchen. Lösen wir (1) nach p auf:

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und differenzieren wir nach v, indem wir T als konstant betrachten:

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}$$

Dieser Differentialquotient gibt die Richtung der Tangente an die Kurve in einem beliebigen Punkte an.

Er ist negativ, null oder positiv, je nachdem:

$$\frac{RT}{(v-b)^2} \gtreqless \frac{2a}{v^3}$$

d. h.:

$$\frac{RT}{2a} \gtreqless \frac{(v-b)^2}{v^3}$$

Da nun die rechte Seite dieser Ungleichung ein Maximum bei $v=3b$ hat, so ist $\frac{dp}{dv}$ stets negativ, wenn nur:

$$T>\frac{8}{27}\frac{a}{Rb}$$

In diesem Falle geht die Kurve ohne Maximum oder Minimum von großen p- und kleinen v-Werten zu kleinen p- und großen v-Werten über; so in der Fig. für $t=48{\cdot}1^0$ C. Wenn:

$$T<\frac{8}{27}\frac{a}{Rb}$$

kann $\frac{dp}{dv}$ sowohl negativ als positiv werden. Die Kurve kann also Maxima und Minima haben; sie werden gefunden aus der Gleichung:

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=0$$

oder:

$$-RTv^3+2a(v-b)^2=0$$

Die Maxima und Minima liegen zu beiden Seiten von $v = 3b$, da die linke Seite der letzten Gleichung sowohl zwischen $v = b$ und $v = 3b$ als auch zwischen $v = 3b$ und $v = \infty$ je einen Zeichenwechsel erfährt. Dies ist in der Figur auf dem punktierten Teil der Isotherme $13 \cdot 1^0$ C ersichtlich. Für:

$$T = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}$$

wird $\frac{dp}{dv}$ bloß für $v = 3b$ null. Bildet man:

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4}$$

so sieht man, daß dieser Ausdruck für die angegebenen Werte von v und T ebenfalls verschwindet. An dieser Stelle besitzt die Isotherme einen Wendepunkt; wie aus der Figur ersichtlich, tritt dies bei der kritischen Isotherme $32 \cdot 5^0$ ein. In der Tat stimmen die hier erhaltenen Werte von v und T mit den oben genannten für v_c und T_c überein.

X. Abschnitt.

Einiges über Determinanten.

---

§ 116. Die Lösung von simultanen linearen Gleichungen.

Es sei die Aufgabe gestellt, Lösungen der beiden simultanen linearen Gleichungen:

$$a_1 x + b_1 y = 0 \qquad a^2 x + b_2 y = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

zu finden. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit b_2, die zweite mit b_1 und subtrahieren, so finden wir:

$$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

auf gleiche Weise erhalten wir:

$$y(a_2 b_1 - a_1 b_2) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die beiden Gleichungen (2) und (3) liefern entweder:

$$x = y = 0$$

oder:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

d. h. die Gleichungen (1) liefern nur dann von null verschiedene Lösungen, wenn die Bedingung (4) erfüllt ist. Die gegebenen Gleichungen stellen zwei Gerade dar, die durch den Koordinatenursprung gehen. Die geometrische Anschauung ergibt, daß sie bei beliebiger Neigung gegen die Abszissenachse nur den Ursprung miteinander gemein haben können; sollen sie irgend einen anderen Punkt gemeinsam haben, so müssen sie überhaupt zusammenfallen. Dies besagt nun auch die Bedingung (4); denn sie macht die beiden Gleichungen (1) identisch. Man hat für den wichtigen Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ein eigenes Symbol eingeführt und schreibt:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

man nennt diesen Ausdruck eine Determinante, und zwar eine solche zweiter Ordnung, weil in jeder Zeile oder Kolonne zwei Elemente stehen. Aus unserer Ableitung folgt also, daß das Gleichungssystem (1) nur dann von null verschiedene Lösungen besitzt, wenn seine Determinante verschwindet.

Sind die beiden Gleichungen nicht homogen, haben sie also die Form:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad . \quad . \quad (5)$$

so findet man für x und y die Werte:

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Führt man also die eben festgestellte Bezeichnungsweise ein, und setzt:

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} = \varDelta_1$$

$$c_1 a_2 - c_2 a_1 = \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix} = \varDelta_2$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \varDelta$$

so wird:

$$x = \frac{\varDelta_1}{\varDelta} \qquad y = \frac{\varDelta_2}{\varDelta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man ersieht hieraus, daß ein bestimmtes Wertepaar für x, y sich nur dann ergibt, wenn $\varDelta$, die sogenannte Determinante des Gleichungssystems (5), von null verschieden ist. Ist sie jedoch null, während $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ nicht null sind, so werden x und y unendlich groß; es gibt also keine endlichen Werte für x, y, welche die gegebenen Gleichungen erfüllen. Ist außer $\varDelta$ auch noch z. B. $\varDelta_1 = 0$, so wird x unbestimmt; in der Tat reduzieren sich in diesem Falle die beiden Gleichungen (5) auf eine einzige, da:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

Ist aber schließlich $\varDelta = \varDelta_1 = \varDelta_2 = 0$, so sind die Gleichungen für ganz beliebige x und y befriedigt.

Die Gleichungen (5) stellen zwei Gerade dar, und die Lösungen (6) deren Schnittpunkt. Schreibt man (5) in der Form:

$$y = -\frac{a_1}{b_1} x - \frac{c_1}{b_1} \qquad y = -\frac{a_2}{b_2} x - \frac{c_2}{b_2}$$

so erkennt man, daß die Bedingung $\Delta = 0$ bedeutet, daß die beiden Geraden parallel sind; für $\Delta = \Delta_1 = 0$ aber fallen sie zusammen.

Setzt man:

$$x = \frac{X}{Z} \qquad y = \frac{Y}{Z}$$

so werden die Gleichungen (5):

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0 \qquad a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

also homogen. Man nennt daher die Größen X, Y, Z in geometrischer Deutung die homogenen Koordinaten eines Punktes. Wie man sieht, bestimmen sich aus (7) die Verhältnisse:

$$X : Y : Z = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta$$

Beispiel:

$$4x + 5y = 7 \qquad 3x - 10y = 19$$

Lösung:

$$X : Y : Z = \begin{vmatrix} 5, & -7 \\ -10, & -19 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -7, & 4 \\ -19, & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4, & 5 \\ 3, & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -165 : 55 : -55$$

also:

$$x = 3 \qquad y = -1$$

§ 117. Simultane lineare Gleichungen mit drei Unbekannten.

Wenn drei Gerade:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

durch denselben Punkt gehen sollen, so müssen seine Koordinaten allen drei Gleichungen genügen. Führen wir also homogene Koordinaten ein durch den Ansatz:

$$x = \frac{X}{Z} \qquad y = \frac{Y}{Z}$$

so müssen die drei Gleichungen:

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0 \quad (1)$$

eine gemeinsame Lösung besitzen. Eliminieren wir aus den drei Gleichungen z. B. Y und Z, so erhalten wir die Beziehung:

$$[a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)]\, X = 0 \quad (2)$$

Schreibt man statt X bezüglich Y und Z, so erhält man die für diese Veränderlichen gültigen Bedingungen. Man ersieht, daß nur dann von null verschiedene Werte von X, Y, Z die Gleichungen

(1) erfüllen, wenn der eckig eingeklammerte Faktor in (2) verschwindet. Wir schreiben auch ihn folgendermaßen in symbolischer Form:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

und nennen $\varDelta$ eine Determinante dritter Ordnung der 9 Elemente $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$. Wie man sieht, läßt sich $\varDelta$ folgendermaßen darstellen:

$$\varDelta = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2, & a_2 \\ c_3, & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix}$$

$\varDelta$ ist also eine Summe von Ausdrücken, die man dadurch erhält, daß man jedes Element der ersten Zeile multipliziert mit einer Determinante zweiter Ordnung; diese besteht aus jenen Elementen, die mit dem ersten Elemente weder Zeile noch Kolonne gemeinsam haben. Hierbei muß in der Anordnung die zyklische Reihenfolge $a, b, c, a \ldots$ gewahrt werden. Die genannten Determinanten zweiter Ordnung heißen die Subdeterminanten von $\varDelta$.

Da man $\varDelta$ auch in der Form darstellen kann:

$$\varDelta = a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_2 (c_3 a_1 - c_1 a_3) + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

so folgt, daß man die Determinante dritter Ordnung auch berechnen kann, indem man die Elemente der zweiten Zeile mit den zugehörigen Subdeterminanten multipliziert und die Produkte addiert. Ebenso kann man nach den Elementen der dritten Zeile entwickeln. Man kann aber auch schreiben:

$$\varDelta = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

d. h. man kann ebenso wie nach den Elementen einer Zeile auch nach den Elementen einer Kolonne entwickeln. Man sieht hiernach, welche Bedeutung im allgemeinen eine Determinante $n$ter Ordnung haben wird.

So z. B. läßt sich die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 2, & 2, & 2, & 1 \\ 0, & 3, & 1, & 1 \\ 4, & 0, & 1, & 3 \\ 3, & 0, & 0, & 2 \end{vmatrix}$$

in folgender Weise berechnen. Man entwickelt nach Subdeterminanten der letzten Zeile und erhält:

$$\varDelta = 3 \begin{vmatrix} 2, & 2, & 1 \\ 3, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2, & 2, & 2 \\ 0, & 3, & 1 \\ 4, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 3\,\varDelta_1 + 2\,\varDelta_2$$

Man entwickelt nun auch Δ_1 und Δ_2 nach den Elementen der letzten Zeile und erhält:

$$\Delta_1 = 1 \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 \cdot (-4) = -11$$

$$\Delta_2 = 4 \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 0, & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 6 = -10$$

daher ist $\Delta = -53$.

Sind die drei linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

aufzulösen, so kann man in der Art vorgehen, daß man die erste Gleichung mit einer Größe l, die zweite mit einer anderen m, die dritte mit n multipliziert und sie addiert. Man bestimmt nun die Größen l, m, n so, daß die Koeffzienten von y und z verschwinden, also:

$$b_1 l + b_2 m + b_3 n = c_1 l + c_2 m + c_3 n = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

und erhält für x die Beziehung:

$$(a_1 l + a_2 m + a_3 n) x = d_1 l + d_2 m + d_3 n \quad \ldots \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) sind homogen nach l, m, n, also ist nach § 116:

$$l : m : n = \begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_3, & b_1 \\ c_3, & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2 \end{vmatrix}$$

Daher kann man nach (5) x in der Form darstellen:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

wo Δ_1 und Δ die beiden Determinanten dritter Ordnung sind:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1, & b_1, & c_1 \\ d_2, & b_2, & c_2 \\ d_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Analog erhält man:

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & d_2, & c_2 \\ a_3, & d_3, & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt, daß die gegebenen Gleichungen nur dann zur eindeutigen Bestimmung von x, y, z genügen, wenn Δ von null verschieden ist.

Ein analoges Resultat erhält man bei der Lösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten.

Einen ähnlichen Weg kann man einschlagen, um aus zwei Gleichungen in x von beliebigem Grade die Veränderliche zu eliminieren. Soll z. B. aus den Gleichungen:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \qquad b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

x eliminiert werden, so multipliziere man der Reihe nach die erste Gleichung mit x, die zweite mit x und x^2 und erhält die fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{r}
0 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\
a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x + 0 = 0 \\
0 + 0 \quad + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \\
0 + b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x + 0 = 0 \\
b_2x^4 + b_1x^3 + b_0x^2 + \ 0 \ + 0 = 0
\end{array}$$

Damit sie zusammen bestehen können, muß die Gleichung:

$$\begin{vmatrix}
0, & a_3, & a_2, & a_1, & a_0 \\
a_3, & a_2, & a_1, & a_0, & 0 \\
0, & 0, & b_2, & b_1, & b_0 \\
0, & b_2, & b_1, & b_0, & 0 \\
b_2, & b_1, & b_0, & 0, & 0
\end{vmatrix} = 0$$

gelten, die das gesuchte Eliminationsresultat ist.

Beispiele:

1. Man zeige, daß:

$$\begin{vmatrix} 0, & b, & c \\ b, & 0, & a \\ c, & a, & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

2. Zu zeigen, daß:

$$\begin{vmatrix} 2, & 2, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \\ 4, & 2, & 1 \end{vmatrix} = 4$$

3. Man löse:

$$5x + 3y + 3z = 48 \qquad 2x + 6y - 3z = 18 \qquad 8x - 3y + 2z = 21$$

Lösung:

$$x = 3 \qquad y = 5 \qquad z = 6$$

4. Ebenso:

$$x - ay + a^2z = a^3 \qquad x - by + b^2z = b^3 \qquad x - cy + c^2z = c^3$$

Lösung:

$$x = abc \qquad y = ab + bc + ca \qquad z = a + b + c$$

§ 118. Einige Eigenschaften der Determinanten.

1. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man Zeilen in Kolonnen und vice versa verwandelt, also gewissermaßen die Determinante um einen rechten Winkel dreht. Es ist also:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

Entwickelt man nämlich die erste Determinante in Subdeterminanten nach Elementen der ersten Zeile, die zweite nach Elementen der ersten Kolonne, so erhält man das gleiche Resultat.

2. Vertauscht man in einer Determinante irgend zwei Zeilen oder irgend zwei Kolonnen, so ändert sich das Zeichen der Determinante. Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1, & a_1, & c_1 \\ b_2, & a_2, & c_2 \\ b_3, & a_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

denn durch die Umstellung geht die zyklische Reihenfolge $a, b, c, a \ldots$ in die andere $b, a, c, b \ldots.$ über.

3. Eine Determinante, in der zwei Zeilen oder Kolonnen gleich sind, ist identisch null. Denn nach Vertauschung der beiden identischen Zeilen ist die Determinante unverändert geblieben, während sie nach Regel 2 das Zeichen ändern sollte. Dieser Widerspruch fällt nur weg, wenn ihr Wert null ist.

4. Eine Determinante, in der eine Zeile oder Kolonne aus Nullen besteht, hat den Wert null. Entwickelt man nämlich nach den Elementen der betreffenden Zeile oder Kolonne, so erhält man eine Reihe von Summanden, von denen jeder null ist.

5. Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man die Elemente irgend einer Zeile oder Kolonne mit dem Faktor multipliziert. So ist z. B.:

$$m \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1, & b_1, & c_1 \\ ma_2, & b_2, & c_2 \\ ma_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Entwickelt man nämlich die rechts stehende Determinante nach Subdeterminanten der ersten Kolonne, so tritt m als Faktor heraus. Ist im speziellen $m = -1$, so erhält man den Satz:

6. Wird das Zeichen jedes Elements einer Reihe oder Kolonne geändert, so ändert die ganze Determinante das Zeichen.

Man kann Satz 5 zuweilen verwenden, um die Elemente einer Zeile oder Kolonne der Determinante gleich eins zu machen, ohne dadurch Brüche in die Determinante zu bringen. Nehmen wir als Beispiel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3, & 4, & 6 \\ 2, & 8, & 8 \\ 6, & 7, & 9 \end{vmatrix}$$

Dividiert man die Elemente der ersten Zeile durch 3, während man gleichzeitig die der zweiten Kolonne mit 3 multipliziert, so wird der Wert der Determinante nicht geändert:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 4, & 2 \\ 2, & 24, & 8 \\ 6, & 21, & 9 \end{vmatrix}$$

ebenso, wenn man die Elemente der zweiten Kolonne durch 4 dividiert, die der letzten Zeile mit derselben Zahl multipliziert:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 2, & 6, & 8 \\ 24, & 21, & 36 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 6, & 4 \\ 24, & 21, & 18 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & 2 \\ 8, & 7, & 6 \end{vmatrix}$$

7. Die algebraische Summe zweier Determinanten, die nur in einer Zeile oder Kolonne nicht übereinstimmen, ist eine Determinante, deren Elemente in der betreffenden Zeile oder Kolonne die algebraische Summe der entsprechenden Elemente in den gegebenen Determinanten ist:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} d_1, & b_1, & c_1 \\ d_2, & b_2, & c_2 \\ d_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm d_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 \pm d_2, & b_2, & c_2 \\ a_3 \pm d_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Es sind nämlich die bezüglich zu a_1, a_2, a_3 gehörigen Subdeterminanten in der ersten Determinante dieselben wie die zu d_1, d_2, d_3 gehörigen in der zweiten; sie seien Δ_1, Δ_2, Δ_3. Daher ist:

$$(a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + a_3 \Delta_3) \pm (d_1 \Delta_1 + d_2 \Delta_2 + d_3 \Delta_3) =$$
$$= (a_1 \pm d_1) \Delta_1 + (a_2 \pm d_2) \Delta_2 + (a_3 \pm d_3) \Delta_3$$

Hieraus folgt:

8. Der Wert einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen einer Zeile oder Kolonne jene einer andern Zeile oder Kolonne addiert. Denn es ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm b_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 \pm b_2, & b_2, & c_2 \\ a_3 \pm b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1, & b_1, & c_1 \\ b_2, & b_2, & c_2 \\ b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

und die letzte Determinante ist nach Satz 3 null.

Man kann diese Tatsache zur Vereinfachung von Determinanten benützen. So z. B. wird aus:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1, & x, & y+z \\ 1, & y, & z+x \\ 1, & z, & x+y \end{vmatrix}$$

nach Addition der zweiten Kolonne zur dritten:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1, & x, & x+y+z \\ 1, & y, & x+y+z \\ 1, & z, & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1, & x, & 1 \\ 1, & y, & 1 \\ 1, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9. Wenn alle Elemente einer Zeile oder Kolonne bis auf eines Nullen sind, so beschränkt sich die Determinante auf das Produkt aus dem einen von null verschiedenen und der Subdeterminante desselben; dies wird ohne weiteres ersichtlich, wenn man nach den Elementen der betreffenden Zeile oder Kolonne entwickelt. Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der folgende:

10. Sind alle Elemente auf einer Seite der Diagonale Nullen, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt aus den Elementen der Diagonale. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ 0, & b_2, & c_2 \\ 0, & 0, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ 0, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$$

Beispiele:

Zu zeigen, daß:

1. $$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ z, & x, & y \\ y, & z, & x \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ z, & x, & y \\ y, & z, & x \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 4, & 1, & 7 \\ 3, & 6, & -2 \\ 5, & 1, & 8 \end{vmatrix} = -23$$

3. $$\begin{vmatrix} 4, & 1, & 5 \\ 8, & 2, & 6 \\ 12, & 3, & 7 \end{vmatrix} = 0$$

§ 119. Multiplikation und Differentiation von Determinanten.

Wir wollen noch, ohne einen allgemeinen Beweis zu geben zeigen, wie zwei Determinanten gleicher Ordnung miteinander multipliziert werden. Betrachten wir zwei Determinanten zweiter Ordnung; es ist:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1, & d_1 \\ c_2, & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + b_1 d_1, & a_1 c_2 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 d_1, & a_2 c_2 + b_2 d_2 \end{vmatrix}$$

Daß diese Gleichung richtig ist, ergibt sich, wenn man die rechts stehende Determinante entwickelt:

$$\begin{vmatrix} a_1c_1+b_1d_1, & a_1c_2+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2d_1, & a_2c_2+b_2d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1c_1, & a_1c_2 \\ a_2c_1, & a_2c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1c_1, & b_1d_2 \\ a_2c_1, & b_2d_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1d_1, & a_1c_2 \\ b_2d_1, & a_2c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1d_1, & b_1d_2 \\ b_2d_1, & b_2d_2 \end{vmatrix} =$$

$$=(a_1a_2c_1c_2+b_1b_2d_1d_2)\cdot\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} + (c_1d_2-d_1c_2)\cdot\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1, & d_1 \\ c_2, & d_2 \end{vmatrix}$$

Das Produkt der zwei Determinanten könnte jedoch noch in anderen Formen geschrieben werden, die sich ergeben, wenn man im ersten oder zweiten Faktor oder in beiden Faktoren Reihen mit Kolonnen vertauscht, wodurch ihr Wert nicht geändert wird. So z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1, & d_1 \\ c_2, & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1c_1+b_1c_2, & a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2, & a_2d_1+b_2d_2 \end{vmatrix}$$

Die Methode gilt für Determinanten beliebig hoher Ordnungen.

Wir wollen ferner darauf hinweisen, wie eine Determinante, deren Elemente Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t sind, nach dieser differenziert wird. Da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

so ist:

$$\frac{d\Delta}{dt} = x_1\frac{dy_2}{dt} - x_2\frac{dy_1}{dt} + y_2\frac{dx_1}{dt} - y_1\frac{dx_2}{dt} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1, & \dfrac{dy_1}{dt} \\ x_2, & \dfrac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt}, & y_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt}, & y_2 \end{vmatrix}$$

§ 120. Funktional- und Hessesche Determinanten.

Es seien u, v, w Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, z. Man nennt die Determinante:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

eine Jacobische oder Funktionaldeterminante und schreibt symbolisch:

$$J=\frac{\partial(u,\ v,\ w)}{\partial(x,\ y,\ z)}$$

Setzt man in dieser Determinante für u, v, w bezügl. die partiellen Ableitungen einer Funktion, z. B. φ, nach x, y, z, so entsteht die folgende:

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \end{vmatrix}=\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial(x,\ y,\ z)}$$

Man nennt H eine Hessesche Determinante. Einige Hinweise werden die Bedeutung dieser Determinanten illustrieren.

Sind u, v zwei Funktionen von x, y und ist überdies:

$$u=f(v)$$

so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(v)\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=f'(v)\frac{\partial v}{\partial y}$$

daher:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}=0$$

Sind also zwei Funktionen von x, y voneinander abhängig, so ist ihre Funktionaldeterminante null. Wichtiger noch ist es, daß sich auch der umgekehrte Satz beweisen läßt: Bei verschwindender Funktionaldeterminante besteht zwischen u, v eine Gleichung:

$$u=f(v)$$

Setzt man für u, v bezügl. $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, so erhält man den Satz: Wenn die Hessesche Determinante einer Funktion null ist, besteht zwischen den partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ eine Beziehung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Es seien u_1, u_2 zwei Funktionen von x_1, x_2, und die letzteren zwei Veränderlichen selbst Funktionen von y_1, y_2. Dann ist:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2}$$

Daher muß nach dem Multiplikationstheorem zweier Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

sein, oder:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

ein Satz, welcher analog ist der Differentiationsregel:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

Sind zwei Funktionen u, v der Variabelen x, y nicht explizit, sondern durch die Gleichungen:

$$f_1(x, y, u, v) = 0 \qquad f_2(x, y, u, v) = 0$$

gegeben, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Diese vier Gleichungen können mit Hilfe des Multiplikationstheorems der Determinanten in die eine Gleichung vereinigt werden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}, & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}, & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

oder:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$$

Auch dieser Satz steht in Analogie zu der Differentiationsregel impliziter Funktionen.

XI. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung.

§ 121. Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es kommt sehr oft, ja meistens, vor, daß wir über den Eintritt irgend eines zukünftigen Ereignisses nicht mit voller Sicherheit aburteilen können. Indem wir die günstigen wie die ungünstigen Eventualitäten abwägen, scheint uns die Hoffnung auf das Eintreten des Geschehnisses bald größer, bald kleiner zu sein. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung macht es sich zur Aufgabe, die Größe dieser Hoffnung mathematisch zu formulieren.

Zu diesem Zwecke ist es nötig, zunächst den Begriff „Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses" zu definieren. Sind für den Eintritt des Ereignisses a Fälle günstig, b Fälle ungünstig, so daß also im ganzen $a+b$ Fälle überhaupt möglich sind, so nennen wir die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Ereignisses:

$$w = \frac{a}{a+b}$$

Nach dieser Definition ist die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des Ereignisses:

$$w_1 = \frac{b}{a+b}$$

Demnach ist:

$$w + w_1 = 1$$

Die Einheit ist das mathematische Symbol der Gewißheit.

Wenn z. B. ein Schütze unter zwölf Schüssen einmal ins Schwarze trifft, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihn, einen Kernschuß zu tun, $\frac{1}{12}$, und die, fehlzuschießen, $\frac{11}{12}$. Offenbar setzt diese Überlegung aber voraus, daß alle Schüsse unter denselben Verhältnissen, z. B. derselben Beleuchtung, abgegeben werden. Die Bedingung für die aufgestellte Definition der Wahrscheinlichkeit ist also, daß alle Fälle gleich möglich sind.

1. Wenn zwei Ereignisse vollkommen unabhängig voneinander eintreten können, so ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen beider Ereignisse das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten jedes der beiden Ereignisse. Ist also die eine Wahrscheinlichkeit p, die andere q, so ist die für den gleichzeitigen Eintritt beider Ereignisse pq (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit).

Denn wenn für das erste Ereignis unter m_1 überhaupt möglichen Fällen a_1 günstig sind, ist:

$$p = \frac{a_1}{m_1}$$

analog ist:

$$q = \frac{a_2}{m_2}$$

wo a_2, m_2 die für das zweite Ereignis günstigen, resp. möglichen Fälle bedeuten. Nun kann es im ganzen in $m_1 m_2$ Fällen geschehen, daß beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, und $a_1 a_2$ Fälle sind diesem Geschehnis günstig; daher ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall:

$$\frac{a_1 a_2}{m_1 m_2} = pq$$

Zwei Urnen enthalten eine gewisse Zahl schwarzer und weißer Kugeln, und zwar die erste a_1 weiße und b_1 schwarze, die zweite a_2 weiße und b_2 schwarze Kugeln. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, aus der ersten Urne eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{a_1}{a_1 + b_1}$; die, eine schwarze zu ziehen, $\frac{b_1}{a_1 + b_1}$; die analogen Zahlen für die zweite Urne sind $\frac{a_2}{a_2 + b_2}$ und $\frac{b_2}{a_2 + b_2}$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit:

a) zwei weiße Kugeln aus beiden Urnen gleichzeitig zu ziehen:

$$\frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$$

b) zwei schwarze zu ziehen:

$$\frac{b_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$$

c) aus der ersten Urne eine weiße, aus der zweiten eine schwarze zu ziehen:

$$\frac{a_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$$

d) aus der ersten Urne eine schwarze, aus der zweiten eine weiße zu ziehen:

$$\frac{a_2 b_1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$$

2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgend eines von mehreren Ereignissen, die nicht gleichzeitig eintreten können, geschehe, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten eines jeden Ereignisses.

So ist in dem letzten Beispiele die Wahrscheinlichkeit, aus beiden Urnen eine weiße und eine schwarze Kugel zu ziehen:

$$\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}$$

denn diese Wahrscheinlichkeit ist die Summe der unter c) und d) erwähnten Einzelwahrscheinlichkeiten.

3. Ist p die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis in einem Falle eintritt, so ist die für das r-malige Eintreten unter n Fällen:

$$w = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

Da nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis bei einem Versuche eintritt, p ist, so beträgt die, daß es jedesmal bei r Versuchen eintritt, p^r, und die, daß es bei $n - r$ Versuchen nicht eintritt $(1 - p)^{n-r}$. Die Wahrscheinlichkeit also, daß es gleichzeitig in r bestimmten Fällen eintritt, in $n - r$ bestimmten Fällen nicht eintritt, ist $p^r (1 - p)^{n-r}$. In welchen Fällen aber das Ereignis eintritt, in welchen nicht, soll ganz beliebig sein; und da es $\binom{n}{r}$ mögliche Kombinationen dieser Fälle gibt, hat die gesuchte Wahrscheinlichkeit den angegebenen Wert.

Wird n sehr groß und p sehr klein, so geht die obige Formel angenähert in die folgende über:

$$w = \frac{n^r}{r!} p^r (1 - p)^n$$

oder:

$$w = \frac{(np)^r}{r!} e^{-np}$$

§ 122. Das Fehlergesetz.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Theorie der Beobachtungsfehler. Die Erfahrung lehrt, daß die mehrmalige Beobachtung derselben Größe selbst unter scheinbar ganz gleichbleibenden äußeren Umständen verschiedene Resultate liefert. Wenn z. B. verschiedene Beobachter die Länge einer Quecksilbersäule von 1 mm^2 Querschnitt messen, welche gerade ein Ohm Widerstand bei 0^0 C besitzt, so erhalten sie etwa die folgenden Resultate (in cm):

106·33	106·31	106·24
106·32	106·29	106·21
106·32	106·27	106·19

Da die kontrollierbaren Umstände, unter denen die Beobachtungen ausgeführt wurden, ganz gleich erhalten werden, so können die Abweichungen nur durch Einflüsse erklärt werden, die sich der Beobachtung entziehen, und die wir zufällige nennen. Wir haben einen ganz analogen Fall vor uns wie in dem oben angeführten Beispiele des Schützen, der nach der Scheibe schießt, sie aber im allgemeinen in größerer oder kleinerer Distanz vom Zentrum trifft. Eben weil die Beobachtungsfehler als zufällige aufzufassen sind, wird die Frage Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir müssen annehmen, daß jede Beobachtung mit einem gewissen Fehler behaftet ist, daß sie von dem wahren Wert der gesuchten unbekannten Größe um einen bestimmten Betrag abweicht. Es ist nun die Frage: Nach welchem Gesetze sind die Fehler verteilt, d. h. wie zahlreich sind die Fehler einer gewissen Größe? Allein, um diese Frage zu entscheiden, müßten wir von vornherein den wahren Wert der Unbekannten kennen. Dies ist nicht der Fall, und wir müssen daher gewisse uns plausibel scheinende Annahmen machen; es seien dies die folgenden:

1. Kleine Fehler sind zahlreicher als große.
2. Positive und negative Fehler kommen gleich oft vor.
3. Am häufigsten ist der Fehler null, während sehr große Fehler gar nicht vorkommen.

Nennen wir die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Werten x und $x + dx$ liegt, $\varphi(x)\,dx$. Die Funktion $\varphi(x)$ muß solche Eigenschaften haben, daß die genannten drei Bedingungen erfüllt sind; d. h. sie muß erstlich mit wachsendem x abnehmen, zweitens eine gerade Funktion sein, so daß $\varphi(x) = \varphi(-x)$ ist, und drittens für $x = 0$ ein Maximum aufweisen. Eine solche Funktion ist:

$$\varphi(x) = k e^{-h^2 x^2}$$

Von ihr hat Gauß gezeigt, daß sie zum arithmetischen Mittel als dem wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten führt. Wir wollen die Annahme graphisch versinnlichen, indem wir ein Koordinatensystem konstruieren, dessen Abszissen die Größe des Fehlers angeben und dessen Ordinaten der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Fehlers proportional sein sollen. Wir tragen demnach die Kurve $y = k e^{-h^2 x^2}$ auf (s. Fig. 38 S. 80). Da die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen x und $x + dx$ liege, durch $y dx$ gegeben ist, wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen irgend zwei Werten a und b liege, durch: $\int_a^b y dx$, d. h. durch die von der Abszissenachse, den Ordinaten in den Punkten a, b und der Kurve begrenzte Fläche dargestellt. Die gesamte zwischen der Kurve und der Abszissenachse liegende Fläche repräsentiert also die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt ein Fehler gemacht worden ist; sie ist natürlich der Einheit gleich, d. h. es muß:

$$k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 1$$

sein. Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Konstanten k. Es ist nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\text{ [1]}$$

und daher:

$$\frac{k\sqrt{\pi}}{h} = 1 \qquad k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

Die Funktion $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ ist unter dem Namen des **Gauß**schen Fehlergesetzes bekannt. Über ihr Integral siehe § 77, Beispiele.

Bessel hat dieses theoretische Fehlergesetz an den Beobachtungsfehlern geprüft, die in gewissen astronomischen Messungen von **Bradley** vorgekommen sind. Er fand:

Größe des Fehlers in Bogensekunden zwischen:	Zahl der Fehler	
	Beobachtung	Theorie
0 und 0·1	94	95
0·1 „ 0·2	88	89
0·2 „ 0·3	78	78
0·3 „ 0·4	58	64
0·4 „ 0·5	51	50
0·5 „ 0·6	36	36
0·6 „ 0·7	26	24
0·7 „ 0·8	14	15
0·8 „ 0·9	10	9
0·9 „ 1·0	7	5
über 1·0	8	5

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung eine sehr gute.

[1]) Vid. S. 159 (10).

§ 123. Mittlerer, durchschnittlicher und wahrscheinlicher Fehler.

Hat man eine bestimmte Beobachtungsreihe gemacht, so ist es wünschenswert, zu wissen, welche Genauigkeit sie besitzt und mit welcher Annäherung man das arithmetische Mittel aller Beobachtungen dem wahren Wert der gesuchten Größe substituieren darf. Nun wird offenbar eine Beobachtungsreihe für um so genauer zu gelten haben, je seltener große Fehler und je häufiger vergleichsweise kleine Fehler auftreten. Um danach ein Maß für die Genauigkeit der Beobachtungsreihe aufzustellen, werden wir bis zu einem gewissen Grade willkürlich verfahren können. Am natürlichsten ist es, einen Durchschnittswert aller Fehler zu bilden; je kleiner er ausfällt, um so genauer ist die Beobachtungsreihe. Da wir nun annehmen, daß positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen, so wäre der Durchschnittswert aller Fehler immer null. Um also zu einem brauchbaren Maße zu gelangen, dürfen wir jeden Fehler nur mit seinem absoluten Werte einführen.

Ein solcher Durchschnittswert wird erhalten, wenn man jeden Fehler x — absolut genommen — mit der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens multipliziert und alle Produkte addiert. Ist also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen x und $x+dx$ liege, $\varphi(x)\,dx$, so ist der gesuchte Durchschnittswert:

$$d = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei $|x|$ den absoluten Wert von x bedeutet. Die Größe d heißt der durchschnittliche Fehler der Beobachtungsreihe.

Wählt man im speziellen für $\varphi(x)$ das Gaußsche Fehlergesetz, so wird:

$$d = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-h^2x^2}\,dx$$

daher: [1])

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Größe h des Gaußschen Fehlergesetzes ist also dem durchschnittlichen Fehler umgekehrt proportional. Je genauer also die Beobachtungsreihe, um so größer ist h; daher nennt Gauß diese Größe das Maß der Präzision.

---

[1]) Man setze:

$$h^2x^2 = y, \text{ somit: } x = y^{\frac{1}{2}}/h, \; x\,dx = dy/2h^2$$

und erhält dann eine Form, die man nach dem im § 58 Gelernten zu behandeln hat.

Statt den Durchschnittswert aller Fehler aufzusuchen, wird man auch ein Maß der Genauigkeit erhalten, wenn man den Durchschnitt irgend einer Potenz der Fehler untersucht.

Besonders eignet sich hierzu das Quadrat, weil man bei dieser Wahl nicht nötig hat, die absoluten Werte der Fehler zur Berechnung zu verwenden. Man bildet also die Größe:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und nennt m den mittleren Fehler der Beobachtungsreihe. Für $\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ erhält man: [1])

$$m^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2h^2}$$

oder:

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Es ist schließlich noch eine dritte Art im Gebrauch, die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe abzuschätzen. Man sucht nämlich eine Größe w von der Beschaffenheit, daß ein Fehler x dem absoluten Betrage nach mit derselben Wahrscheinlichkeit unterhalb wie oberhalb jener Größe liegt, d. h. es soll die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler x zwischen null und w liegt, $\frac{1}{2}$ sein, oder:

$$2 \int_0^{w} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die so definierte Größe w heißt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungsreihe. Nimmt man wieder für $\varphi(x)$ das Gaußsche Gesetz, so ist:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{w} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2}$$

und um eine Dezimale genauer als durch Interpolation aus Tabelle VIII:

$$h\,w = 0{\cdot}4769 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus (2), (4) und (6) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} w &= 0{\cdot}6745\, m \\ w &= 0{\cdot}8453\, d \\ m &= 1{\cdot}2533\, d \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

[1]) Vid. S. 363 Note 1.

Es wurde bisher immer vorausgesetzt, daß die Beobachtungen und daher auch die Beobachtungsfehler eine kontinuierliche Zahlenreihe darstellen, daß also unter ihnen jede beliebige Zahl zwischen 0 und $\pm\infty$ vorkommt. In der Tat ist dies aber nicht der Fall: man hat vielmehr eine endliche, diskrete Zahl von Beobachtungen und daher von Fehlern vorliegen. Es ist nun definitionsgemäß das Quadrat des mittleren Fehlers der Mittelwert der Quadrate der einzelnen Fehler. Sind also n Fehler $x_1, x_2 \ldots . x_n$ vorhanden, so ist der mittlere Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots . + x_n{}^2}{n}}$$

oder:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Analog ist der durchschnittliche Fehler einer endlichen Anzahl von Beobachtungsfehlern:

$$d = \frac{\Sigma |x|}{n} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Um schließlich den wahrscheinlichen Fehler von n Beobachtungen zu finden, kann man entweder das Gaußsche Fehlergesetz annehmen und erhält nach (7):

$$w = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

oder man kann w seiner Definition nach finden. Man ordnet nämlich die Fehler ihrer Größe nach und sucht eine Zahl w derart, daß gleichviele Fehler zwischen 0 und w, wie über w liegen.

Aber auch diese Annahmen entsprechen noch nicht den wirklich vorkommenden Tatsachen. Die bisher benützten Größen x sind die sogenanten „wahren“ Fehler, d. h. die Abweichungen der Beobachtungen von dem in der Regel vollständig unbekannten wahren Werte der gesuchten Größe. Nehmen wir statt seiner das arithmetische Mittel aller Beobachtungen, so geben die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von jenem Mittel gewisse Fehler λ; diese sind es, die uns allein zugänglich sind. Es handelt sich also darum, den mittleren Fehler einer Beobachtungsreihe als Funktion der Größen λ auszudrücken.

Es seien n Beobachtungen $l_1, l_2 \ldots . l_n$ gemacht worden. Ihre Abweichungen vom arithmetischen Mittel a sind die Fehler λ_1, $\lambda_2 \ldots . \lambda_n$. Daher bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= a + \lambda_1 \\ l_2 &= a + \lambda_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Ist anderseits der wahre Wert der Unbekannten u, so ist für die wahren Fehler x_1, $x_2 \ldots . x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = u + x_1 \\ l_2 = u + x_2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Nun ist das Quadrat des mittleren Fehlers nach (8):

$$m^2 = \frac{\Sigma x^2}{n}$$

Quadriert und addiert man die Gleichungen (12), so kommt man zu:

$$\Sigma x^2 = \Sigma l^2 - 2u\Sigma l + nu^2$$

tut man dasselbe mit den Gleichungen (11), so liefert diese Operation:

$$\Sigma \lambda^2 = \Sigma l^2 - 2a\Sigma l + na^2$$

da a das arithmetische Mittel der l ist, geben diese zwei Gleichungen:

$$\Sigma x^2 = \Sigma \lambda^2 + n(a-u)^2$$

durch Subtraktion der Gleichungen (12) von den entsprechenden (11) erhält man:

$$n(a-u) = \Sigma x - \Sigma \lambda = \Sigma x$$

weil $\Sigma \lambda = 0$ ist. Daher ist:

$$m^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{\Sigma \lambda^2}{n} + \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

Der Ausdruck $(\Sigma x)^2$ besteht aus den Gliedern $x_1{}^2$, $x_2{}^2 \ldots$ und $2x_1x_2$, $2x_1x_3 \ldots$ Der Durchschnitt der letzteren Produkte muß aber null sein, wenn für die wahren Fehler ein Fehlergesetz mit der Bedingung $\varphi(+x) = \varphi(-x)$ (s. § 122) besteht. Daher erhalten wir schließlich:

$$m^2 = \frac{\Sigma \lambda^2}{n} + \frac{\Sigma x^2}{n^2} = \frac{\Sigma \lambda^2}{n} + \frac{m^2}{n}$$

und:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Hieraus findet man den wahrscheinlichen Fehler nach (7):

$$w = \pm 0{\cdot}6745 \sqrt{\frac{\lambda^2}{n-1}} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

(Bessels Formel).

§ 124. Fortsetzung und Beispiel.

Cavendish hat für die mittlere Dichte der Erde die folgenden 29 Werte erhalten:

Beobachtete Werte l	Abweichungen vom Mittel λ	λ^2
4·88	— 0·57	0·325
5·50	+ 0·05	0·003
5·61	+ 0·16	0·026
5·07	— 0·38	0·122
5·26	— 0·19	0·036
5·55	+ 0·10	0·010
5·36	— 0·09	0·008
5·29	— 0·16	0·026
5·58	+ 0·13	0·017
5·65	+ 0·20	0·040
5·57	+ 0·12	0·014
5·53	+ 0·08	0·006
5·62	+ 0·17	0·029
5·29	— 0·16	0·026
5·44	— 0·01	0·000
5·34	— 0·11	0·012
5·79	+ 0·34	0·116
5·10	— 0·35	0·122
5·17	— 0·28	0·079
5·39	— 0·06	0·004
5·42	— 0·03	0·001
5·47	+ 0·02	0·000
5·63	+ 0·18	0·033
5·34	— 0·11	0·012
5·46	+ 0·01	0·000
5·30	— 0·15	0·023
5·75	+ 0·30	0·090
5·68	+ 0·23	0·053
5·85	+ 0·40	0·160

Aus den Werten der ersten Kolonne folgt der Mittelwert 5·445; die zweite Kolonne enthält die Abweichungen der Beobachtungen vom Mittelwert, also die Fehler λ. Es ergibt sich zunächst als Rechnungskontrolle:

$$\Sigma\lambda = 0$$

Um den mittleren Fehler einer Beobachtung zu bestimmen, bildet man die Größen λ^2, die in der dritten Kolonne verzeichnet stehen und berechnet:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}}$$

man erhält:

$$m = \pm 0{\cdot}222$$

Hingegen wäre der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung:

$$w = 0{\cdot}6745\, m = \pm 0{\cdot}149$$

Man wünscht nun auch noch zu wissen, wie groß der mittlere Fehler in der Berechnung des arithmetischen Mittels ist. Hierzu gelangt man in folgender Weise:

Gesetzt, es sei eine lineare Funktion L von n beobachteten Größen $l_1, l_2 \ldots l_n$ gegeben:

$$L = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots a_n l_n$$

Jede der Größen l unterscheidet sich von ihrem wahren Werte durch einen gewissen Fehler $X_1, X_2 \ldots X_n$, sodaß auch L mit einem gewissen Fehler x behaftet ist, nämlich:

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Nun kann jede der Größen x alle Werte haben, welche dem Fehlergesetz $\varphi(x)$ genügen. Bildet man den Durchschnittswert der Quadrate der x, also des Ausdrucks:

$$X^2 = a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \ldots a_n^2 x_n^2 + \\ + 2\,(a_1 a_2 x_1 x_2 + a_1 a_3 x_1 x_3 + \ldots)$$

so wird wegen der Bedingung:

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

der Mittelwert der Produkte $a_1 a_2 x_1 x_2 \ldots$ null sein; jener der Quadrate der x aber gibt die Quadrate der mittleren Fehler m der Größen l. Ebenso erhält man als Durchschnittswert von X^2 das Quadrat des mittleren Fehlers M von X. Daher ist:

$$M^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2$$

und:

$$M = \pm \sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es ist z. B. das Molekulargewicht von Titaniumchlorid ($Ti\,Cl_4$) 188·545 mit einem mittleren Fehler von $\pm 0{\cdot}0092$, das Atomgewicht von Chlor 35·179 mit einem mittleren Fehler von $\pm 0{\cdot}0048$. Daher ist das Atomgewicht von Titan:

$$188{\cdot}545 - 4 \cdot 35{\cdot}179 = 47{\cdot}829$$

mit einem mittleren Fehler (nach (1)) von:

$$\pm \sqrt{0{\cdot}0002^2 + 16 \cdot 0{\cdot}0048^2} = \pm 0{\cdot}0213$$

Sind im speziellen die Größen $l_1, l_2 \dots l_n$ Beobachtungen derselben Größe, so ist:

$$m_1 = m_2 = \dots = m$$

ist ferner L das arithmetische Mittel aller l, so hat man:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$$

und der mittlere Fehler M des arithmetischen Mittels:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

In dem obigen Beispiele ist also der mittlere Fehler in der Bestimmung der Dichte der Erde:

$$M = \pm \frac{0{\cdot}222}{\sqrt{29}} = \pm 0{\cdot}041$$

so daß man für die Erddichte erhält:

$$5{\cdot}45 \pm 0{\cdot}041$$

Hieraus ersieht man, daß die Genauigkeit des Resultates einer Beobachtungsreihe nur mit der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen wächst.

Wenn die Abweichungen λ dasselbe Fehlergesetz wie die wahren Fehler x befolgten, so könnte man den durchschnittlichen Fehler der Funktion der λ ebenso berechnen wie als Funktion der x und erhielte:

$$d = \frac{\Sigma|\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

In unserem Beispiel ergibt dies:

$$d = 0{\cdot}181$$

Wie aus (2) und (4) in § 123 folgt, ist für unendlich viele Beobachtungen:

$$\frac{m^2}{d^2} = \frac{\pi}{2} = 1{\cdot}57$$

In unserem Falle ist:

$$\frac{m^2}{d^2} = 1{\cdot}51$$

Beispiele:

1. Man zeige, daß der mittlere Fehler die Abszisse eines Wendepunktes der Fehlerkurve darstellt (s. § 38, Beisp. 3).

2. Zu zeigen, daß der mittlere Fehler M des Produkts zweier Größen l_1, l_2 sich aus den mittleren Fehlern m_1, m_2 derselben durch die Formel berechnet:

$$M = \pm\sqrt{l_1{}^2 m_2{}^2 + l_2{}^2 m_1{}^2}$$

3. Die spezifische Wärme von Zinn ist 0·0537 mit einem mittleren Fehler von $\pm$ 0·0014, das Atomgewicht dieses Elements ist 118·150 $\pm$ 0·0089. Man zeige, daß die Atomwärme von Zinn 6·38 $\pm$ 0·1654 ist.

§ 125. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

Wir haben bei unseren bisherigen Überlegungen stets vorausgesetzt, daß alle Beobachtungen einer Größe die gleiche Genauigkeit besitzen. Dies ist jedoch tatsächlich nicht immer der Fall: wenn zwei Beobachter Messungen derselben Größe vornehmen, oder wenn ein und derselbe Beobachter zu verschiedenen Zeiten oder mit verschiedenen Apparaten mißt, so wird man nicht allen Messungen denselben Grad von Genauigkeit zuschreiben können. Man wird als Maß der Genauigkeit den mittleren Fehler einer Beobachtung oder einer Beobachtungsreihe wählen können. Haben wir beispielsweise zwei Beobachtungen l_1 und l_2 bezügl. mit den mittleren Fehlern m_1 und m_2 gegeben, und ist:

$$\frac{m_1}{m_2} = \mu$$

so werden wir die Beobachtung l_2 für μ-mal genauer ansehen als l_1. Wir können uns vorstellen, jede der beiden Beobachtungen l_1, l_2 sei selbst schon ein Mittel aus mehreren Beobachtungen, aber die genauere l_2 von einer größeren Zahl von Einzelwerten als l_1. Nun haben wir im vorigen Paragraphen gesehen, daß die mittleren Fehler der Resultate zweier Beobachtungsreihen sich cet. par. verkehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Zahlen der Beobachtungen in beiden Reihen. Wir können also annehmen, daß l_2 das Mittel von μ^2-mal so viel Beobachtungen ist als l_1. Ist demnach l_1 das Resultat einer Beobachtung, so ist l_2 das Mittel von μ^2 Beobachtungen, und wir werden als Generalmittel der beiden ungleich genauen Beobachtungen l_1 und l_2 den Ausdruck:

$$\frac{l_1 + \mu^2 l_2}{1 + \mu^2}$$

anzunehmen haben, während bei gleicher Genauigkeit das Mittel einfach $\frac{l_1 + l_2}{2}$ wäre. Setzen wir:

$$\mu^2 = \frac{m_1^{\ 2}}{m_2^{\ 2}} = g$$

so wird das Mittel:

$$\frac{l_1 + g l_2}{1 + g}$$

Man nennt g das Gewicht der Beobachtung l_2; als Gewicht von l_1 ist dabei willkürlich 1 angenommen. Wie man sieht, verhalten sich definitionsgemäß die Gewichte zweier Beobachtungen verkehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.

So z. B. sind 100 Teile Silber äquivalent mit:

$49{\cdot}5365 \pm 0{\cdot}013$	Teilen	NH_4Cl	nach	Pelouze
$49{\cdot}523 \pm 0{\cdot}0055$	„	„	„	Marignac
$49{\cdot}5973 \pm 0{\cdot}0005$	„	„	„	Stas (1867)
$49{\cdot}5992 \pm 0{\cdot}00039$	„	„	„	Stas (1882).

Das Mittel dieser Ergebnisse wird nach dem eben Erörterten gefunden, indem man jede Zahl mit ihrem Gewichte, d. h. mit dem reziproken Quadrat ihres mittleren Fehlers, multipliziert, und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Gewichte dividiert. Dies ergibt:

$$\frac{\dfrac{49{\cdot}5365}{0{\cdot}013^2} + \dfrac{49{\cdot}523}{0{\cdot}0055^2} + \dfrac{49{\cdot}5973}{0{\cdot}0005^2} + \dfrac{49{\cdot}5992}{0{\cdot}00039^2}}{\dfrac{1}{0{\cdot}013^2} + \dfrac{1}{0{\cdot}0055^2} + \dfrac{1}{0{\cdot}0005^2} + \dfrac{1}{0{\cdot}00039^2}} = 49{\cdot}5983$$

Den mittleren Fehler dieser Größe können wir nach der Regel (1) des § 124 finden. Sind nämlich g_1, $g_2 \ldots g_n$ die Gewichte der Beobachtungen l_1, $l_2 \ldots l_n$, so ist deren Mittelwert gegeben durch:

$$\frac{l_1 g_1 + l_2 g_2 + \ldots + l_n g_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}$$

daher der bei der Bildung dieses Mittelwertes begangene mittlere Fehler:

$$M = \frac{\sqrt{m_1^{\ 2} g_1^{\ 2} + m_2^{\ 2} g_2^{\ 2} + \ldots + m_n^{\ 2} g_n^{\ 2}}}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}$$

wobei m_1, $m_2 \ldots m_n$ die mittleren Fehler der Beobachtungen $l_1 \ldots l_n$ sind. Da nun die Quadrate der Größen m den Gewichten verkehrt proportioniert sind, so erhält man:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{m_1^{\ 2}} + \dfrac{1}{m_2^{\ 2}} + \ldots + \dfrac{1}{m_n^{\ 2}}}} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Dies liefert in unserem Beispiele als mittleren Fehler des Mittelwerts:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0{\cdot}013^2} + \frac{1}{0{\cdot}0055^2} + \frac{1}{0{\cdot}00039^2}}}$$

oder:

$$M = \pm 0{\cdot}00031 .$$

Nicht immer ist jedoch wie in diesem Beispiel das Gewicht einer Beobachtung durch Angabe des mittleren Fehlers direkt bestimmt. Vielmehr kommt es oft vor, daß man einzelnen Beobachtungen einer Reihe ein größeres oder kleineres Gewicht beizulegen hat als anderen, weil sie einen anderen Grad der Genauigkeit besitzen; es sind bei ihnen geänderte Umstände gewesen, unter denen man beobachtet hat. Lassen sich diese Umstände verfolgen, so läßt sich das Gewicht der betreffenden Beobachtungen angeben. Dies ist jedoch nur selten der Fall. Insbesondere gibt es fast in jeder Beobachtungsreihe Werte, die vom Mittel abnormal stark abweichen, ohne daß der Grund für diese Abweichung offen läge. Es entsteht die Frage, wann man das Recht hat, einer Beobachtung das Gewicht null zuzuschreiben, d. h. sie gänzlich auszuschließen. Diese Frage exakt durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen zu beantworten, ist bisher nicht gelungen. Es sind aber unter gewissen willkürlichen Voraussetzungen Kriterien angegeben worden, nach denen man entscheiden kann, wann eine Beobachtung auszuschließen ist. Ein solches ist das Kriterium von Chauvenet.

Nach dem Gaußschen Fehlergesetz ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler dem absoluten Betrage nach größer ist als eine gewisse Größe a, gegeben durch:

$$w = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^\infty e^{-t^2 dt}$$

oder wenn wir den mittleren Fehler:

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

einführen:

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{m\sqrt{2}}}^\infty e^{-t^2}\, dt$$

Daher ist die Zahl der Fehler, die über a liegen, wenn die Gesamtzahl der Fehler n beträgt:

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{m\sqrt{2}}}^\infty e^{-t^2}\, dt$$

Chauvenet nimmt nun an, daß ein Fehler von der Größe a auszuscheiden ist, sobald die genannte Zahl kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Die Bedingung für die Ausscheidung einer Beobachtung a ist also:

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{m\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}$$

oder wenn man:

$$\frac{a}{m\sqrt{2}} = t \quad \text{und} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt = \Theta(t)$$

setzt:

$$\Theta(t) = \frac{2n - 1}{2n}$$

Zu dem so berechneten Werte von $\Theta(t)$ findet man in Tafel IX den zugehörigen Wert von t und daher auch jenen von $a = m t \sqrt{2}$. Die Tafel X gibt die Werte von t, die nach Chauvenets Kriterium zu verschiedenen n gehören.

Es seien z. B. bei einer Bestimmung des Atomgewichts von Sauerstoff die folgenden Werte beobachtet worden: 15·96, 19·81, 15·95, 15·95, 15·91, 15·88, 15·91, 15·88, 15·86, 16·01, 15·96, 15·88, 15·93. Ist die verdächtige Beobachtung 19·81 auszuschließen? Das Mittel aller ist 16·22, daher die Abweichung des fraglichen Werts $a = 3{\cdot}59$; der mittlere Fehler einer Beobachtung $m = 1{\cdot}078$, die Zahl aller $n = 13$. Nach Chauvenets Kriterium ist daher:

$$\Theta(t) = \frac{25}{26} = 0{\cdot}962$$

und aus Tafel IX $t = 3{\cdot}07$, daher $a = 4{\cdot}63 > 3{\cdot}59$, demnach wäre diese Beobachtung nicht auszuschließen.

Beispiele:

1. Die mittleren Fehler von vier Reihen von Beobachtungen sind bezüglich 1·2, 0·8, 0·9, 1·1; welche sind die relativen Gewichte der Beobachtungen?

Antwort:

$$7 : 16 : 11 : 8$$

2. Rowland hat den folgenden Jouleschen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalents die in Klammern beigesetzten Gewichte zugesprochen: 442·8 (0); 427·5 (2); 426·8 (10); 428·7 (2); 429·1 (1); 428·0 (1); 425·8 (2); 428·0 (3); 427·1 (3); 426·0 (5); 422·7 (1); 426·3 (1). Man zeige, daß hieraus als Mittelwert 426·9 folgt.

3. Regnault hat für die Dampfspannung des Wasserdampfes bei 0^0 C in drei Versuchsreihen die folgenden Werte gefunden:

I. 4·54, 4·54, 4·52, 4·54, 4·52, 4·54, 4·52, 4·50, 4·50, 4·54.
II. 4·66, 4·67, 4·64, 4·62, 4·64, 4·66, 4·67, 4·66, 4·66.
III. 4·54, 4·54, 4·54, 4·58, 4·58, 4·57, 4.58.

Man zeige, daß hieraus als Generalmittel für die Dampfspannung des Wasserdampfes 4·582 mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0·0064 folgt.

4. Hat Rowland nach Chauvenets Kriterium die Zahl 442·8 in Joules Beobachtungen (Beispiel 2) mit Recht ausgeschlossen?

§ 126. Relativer Fehler; Fehler von Funktionen direkt beobachteter Größen.

Die absolute Angabe der Größe eines Fehlers sagt gar nichts aus über die Genauigkeit einer Messung; vielmehr kommt es stets auf das Verhältnis der Größe des Fehlers zu jener der gemessenen Zahl an. Wenn wir z. B. angeben, daß ein Astronom einen Fehler von 20 000 Meilen bei der Messung der Distanz Erde-Sonne gemacht, ein Physiker hingegen einen solchen von $\frac{1}{10^{10}}$ Meilen bei einer Wellenlängenmessung begangen habe, so geben diese Zahlen gar keine Vorstellung von der Genauigkeit beider Messungen. Erfährt man aber, daß die erste Zahl nur $\frac{1}{1000}$ der zu messenden Größe, die zweite aber von der Größenordnung einer Wellenlänge selbst ist, so sieht man, daß der Astronom viel genauer gemessen hat als der Physiker. Man nennt das Verhältnis des Fehlers f zu der gemessenen Größe g, also die Zahl $\frac{f}{g}$ den relativen Fehler der Messung.

Es kommt nun häufig vor, daß es sich um die Bestimmung einer Größe handelt, welche nicht direkt gemessen wird, sondern als Funktion einer oder mehrerer zu messenden Größen erscheint; es fragt sich, wie man in einem solchen Falle den Fehler der abgeleiteten Größe aus den Fehlern der direkt gemessenen Größen berechnet. Es sei u Funktion der direkt bestimmbaren Größen $x, y, z \ldots .$:

$$u = f(x, y, z \ldots .)$$

Fehler $dx, dy, dz \ldots .$ in $x, y, z \ldots .$ verursachen einen Fehler du in u, und zwar ist:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots .$$

daher ist der relative Fehler bei der Bestimmung von u:

$$\frac{du}{u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} dx + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} dy + \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f} dz + \ldots$$

Man will beispielsweise das Volum V einer Kugel durch Messung ihres Durchmesser D erhalten. Bekanntlich ist:

$$V = \frac{1}{6} D^3 \pi$$

daher der relative Fehler in V:

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{dD}{D}$$

Jeder Fehler in der Messung von D bewirkt also einen dreimal so großen Fehler in der Messung von V.

Man muß sich daher in solchen Fällen wohl überlegen, mit welcher Genauigkeit die einzelnen Größen zu messen sind, um eine bestimmte Genauigkeit im Schlußresultat zu erzielen. Sehr oft ist eine Größe viel genauer zu messen als eine andere, damit die Fehler beider in derselben Weise auf das Resultat einwirken. Es sei beispielsweise die Wärmemenge Q zu bestimmen, die ein Strom von der Stärke J Ampère in einem Leiter vom Widerstande W Ohm während t Sekunden produziert. Nach dem Jouleschen Gesetze ist:

$$Q = 0{\cdot}24\, J^2 W t \,\mathrm{cal}$$

Der Fehler bei der Bestimmung von Q ergibt sich aus den Fehlern in J, W, t durch:

$$\frac{dQ}{Q} = 2 \frac{dJ}{J} + \frac{dW}{W} + \frac{dt}{t}$$

d. h. ein Fehler in der Bestimmung von J bewirkt einen doppelt so großen Fehler in Q als der gleiche Fehler in W oder t. Man muß also in diesem Falle Stromstärken mit der doppelten Genauigkeit messen als Widerstände und Zeiten. Die folgenden Beispiele werden diesen Punkt noch erläutern.

Beispiele:

1. In einer Tangentenbussole ist die Stromstärke J proportional der Tangente des Ablenkungswinkels α der Nadel. Man zeige, daß der relative Fehler in der Stromstärkemessung gegeben ist durch:

$$\frac{dJ}{J} = 2 \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha}$$

und daher am kleinsten ist für $\alpha = 45^0$.

2. Die spezifische Wärme s eines Körpers von der Masse m wird nach der Mischungsmethode durch die Formel bestimmt:

$$s = \frac{m_1 c (T - T_1)}{m (T_2 - T)}$$

in welcher m_1 die Masse, c die spezifische Wärme und T_1 die Anfangstemperatur des verwendeten Wassers, T_2 die Anfangstemperatur des Körpers und T die Ausgleichstemperatur bedeuten. Man zeige, daß ein Fehler in der Ablesung von T_1 einen Fehler:

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dT_1}{T - T_1}$$

hervorbringt, so daß z. B. für einen Temperaturanstieg $T - T_1 = 10^0$ ein Fehler $dT_1 = 0{\cdot}1^0$ schon einen Fehler von $1\,^0/_0$ in der Bestimmung von s bewirkt. Man zeige ferner, daß ebenso:

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dT_2}{T_2 - T}$$

und schließlich:

$$\frac{ds}{s} = \frac{dT}{T - T_1} + \frac{dT}{T_2 - T}$$

Aus dem letzten Ausdruck ersieht man, daß ein Fehler in der Bestimmung von T das Resultat am stärksten beeinflußt.

3. Man weise nach, daß der relative Fehler einer Widerstandsmessung nach der Wheatstoneschen Methode am kleinsten ist, wenn der gesuchte und der Vergleichswiderstand nahe gleich sind, wenn man also in der Nähe der Mitte des Brückendrahtes mißt.

§ 127. Bedingte Beobachtungen.

Es kommt oft vor, daß die Resultate von Beobachtungen noch einer oder mehreren Bedingungsgleichungen zu genügen haben. Hat man z. B. die drei Winkel eines ebenen Dreiecks beobachtet, so muß ihre Summe notwendig 180^0 betragen. Dabei ist es selbstverständlich, daß stets weniger Bedingungsgleichungen als beobachtete Größen vorhanden sein müssen, weil sonst diese durch jene schon vollkommen bestimmt wären. Da nun die Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind, werden sie die geforderten Bedingungen im allgemeinen nicht erfüllen, und sie müssen erst so ausgeglichen werden, daß dies der Fall ist.

Sind die Beobachtungen $l_1, l_2, l_3 \ldots.$ gegeben, und sind sie resp. mit den Fehlern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots.$ behaftet, müssen sie ferner beispielsweise eine Bedingungsgleichung erfüllen, so liefert diese ohne weiteres eine Gleichung für die Fehler λ. Es soll z. B. die Summe aller Beobachtungen gleich einer Größe k sein; so ist:

$$(l_1 + \lambda_1) + (l_2 + \lambda_2) + \ldots\ldots = k$$

Dagegen wird die Summe aller Beobachtungen l gleich einer etwas verschiedenen Größe k_1 sein. Hieraus erhält man:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots\ldots = k - k_1$$

Haben nun alle n Beobachtungen gleiches Gewicht, so ist es am plausibelsten, die λ so zu bestimmen, daß:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots\ldots = \frac{k - k_1}{n}$$

Es habe z. B. die Analyse einer Substanz die folgenden Werte ergeben: 37·2 % Kohlenstoff, 44·1 % Wasserstoff, 19·4 % Stickstoff. Die Summe dieser drei Zahlen sollte 100 ergeben; sie gibt aber 100·7. Daraus folgt für die Fehler λ die Gleichung:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0{\cdot}7$$

Wenn wir also allen drei Zahlen dasselbe Gewicht zuschreiben, so ist:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{0{\cdot}7}{3}$$

Wir korrigieren nun jede Zahl um diesen Betrag und erhalten: 36·97 % C, 43·86 % H, 19·17 % N, welche Zahlen nunmehr die Bedingung erfüllen.

Beispiel:

Die drei Winkel eines ebenen Dreiecks sind gemessen zu $\alpha = 36^0\,25'47''$, $\beta = 90^0\,36'28''$, $\gamma = 52^0\,57'57''$. Man zeige, daß die nach der Bedingungsgleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

ausgeglichenen Beobachtungen betragen:

$$\alpha = 36^0\,25'43'' \qquad \beta = 90^0\,33'24'' \qquad \gamma = 52^0\,57'53''$$

§ 128. Die Methode der kleinsten Quadrate.

Nicht immer erhält man eine gewünschte Größe durch direkte Messung. Vielmehr sind häufig die zu ermittelnden Größen durch Gleichungen mit denen verbunden, welche die direkte Messung liefert. Nun liefert jede Messung eine solche Gleichung, und wir erhalten daher so viele Gleichungen, als Meßresultate vorliegen, also im allgemeinen mehr, als zur Bestimmung der gesuchten Größen nötig sind. Es fragt sich, wie man diese aus einem derartigen Gleichungssystem bestimmt. Wir haben schon in § 76 erwähnt, daß dies nach der von Gauß gegebenen „Methode der kleinsten Quadrate“ geschieht. Dieses Prinzip besagt: Die Unbekannten sind so zu wählen, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Wir wollen hier keine Begründung des Gesetzes geben. Es ist jedoch leicht zu zeigen, daß unter Annahme des Gaußschen Fehlergesetzes (§ 122) die wirklich beobachteten Werte zugleich die wahrscheinlichsten werden, wenn man die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Fehler die Größe λ hat, proportional $\varphi(\lambda) = k e^{-h^2\lambda^2}$. Sind also n Beobachtungen mit den Fehlern $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_n$ und den Präzisionsmaßen $h_1, h_2 \ldots . h_n$ gemacht worden, so ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen dieser n unabhängigen Ereignisse proportional:

$$\varphi(\lambda_1)\,\varphi(\lambda_2) \ldots . \varphi(\lambda_n) = k e^{-(h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + \ldots . + h_n^2\lambda_n^2)}$$

Wenn die wirklich gemachten Fehler zugleich die wahrscheinlichsten sein sollen, so ist dieser Ausdruck zu einem Maximum zu machen. Es soll also:

$$e^{-(h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + \ldots . + h_n^2\lambda_n^2)} = \text{Maximum}$$

oder:

$$h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + \ldots . + h_n^2\lambda_n^2 = \text{Minimum}$$

werden. Nun ist die Größe h dem mittleren Fehler der Beobachtung verkehrt, also der Quadratwurzel aus dem Gewichte g der Beobachtung direkt proportional. Es soll also:

$$\Sigma g \lambda^2 = \text{Minimum}$$

sein. Haben alle Beobachtungen dasselbe Gewicht, so reduziert sich diese Bedingung auf:

$$\Sigma \lambda^2 = \text{Minimum}$$

Für eine einzige Unbekannte x ergibt dies ohne weiteres das arithmetische Mittel aller Beobachtungen l. In der Tat ist in dem Falle:

$$\lambda_1 = x - l_1, \quad \lambda_2 = x - l_2 \ldots . \lambda_n = x - l_n$$

daher:

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \ldots . + (x - l_n)^2 = \text{Minimum}$$

oder:

$$(x - l_1) + (x - l_2) + \ldots . + (x - l_n) = 0$$

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots . + l_n}{n}$$

Nunmehr wollen wir voraussetzen, daß mehrere unbekannte Größen x, y, z durch eine lineare Gleichung mit der wirklich gemessenen Größe zusammenhängen. Ist l_1 der Wert einer Beobachtung, λ_1 der Fehler, so sei:

$$l_1 + \lambda_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$

Die Koeffizienten a_1, b_1, c_1 mögen ebenfalls für jede Beobachtung gesondert gegeben sein. Man erhält dann so viele solcher Gleichungen, als Messungen gemacht werden; nehmen wir beispielsweise an, es seien vier Messungen gemacht worden. Wir erhalten dann das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z \\ \lambda_4 &= -l_4 + a_4 x + b_4 y + c_4 z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Nun gibt die Methode der kleinsten Quadrate jenes Wertsystem der x, y, z als das diesen Gleichungen am besten entsprechende an, das die Summe der Quadrate der λ zu einem Minimum macht. Es soll also:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Sigma\lambda^2) = \frac{\partial}{\partial y}(\Sigma\lambda^2) = \frac{\partial}{\partial z}(\Sigma\lambda^2) = 0$$

sein, oder:

$$\lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} + \lambda_4 \frac{\partial \lambda_4}{\partial x} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} + \lambda_4 \frac{\partial \lambda_4}{\partial y} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \lambda_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial z} + \lambda_4 \frac{\partial \lambda_4}{\partial z} = 0$$

Wir führen aus (1) die Werte der partiellen Differentialquotienten ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 &= 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 &= 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir noch aus (1) die Werte der Größen λ selbst ein und benützen die folgenden Abkürzungen:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = [aa], \text{ analog } [bb] \text{ und } [cc]$$

ferner $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = [ab]$, analog $[ac]$, $[bc]$ usw. So erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [al] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bl] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cl] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die drei Gleichungen (2), die sogenannten Normalgleichungen, stellen die Lösung der Aufgabe dar, da sie die Größen x, y, z vollständig und eindeutig bestimmen.

Um die Gleichungen (2) nach den Unbekannten aufzulösen, hat **Gauß** folgendes Verfahren angegeben: Man berechnet zunächst aus der ersten Gleichung:

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]} y - \frac{[ac]}{[aa]} z + \frac{[al]}{[aa]} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

und substituiert in die zweite und dritte Gleichung. Hierbei führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab]$$

$$[bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} [ac]$$

$$[cc \cdot 1] = [cc] - \frac{[ac]}{[aa]} [ac]$$

$$[bl \cdot 1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]} [al]$$

$$[cl] \cdot 1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]} [al]$$

Man erhält so:

$$[bb \cdot 1] y + [bc \cdot 1] z = [bl \cdot 1]$$
$$[bc \cdot 1] y + [cc \cdot 1] z = [cl \cdot 1]$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$y = -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z + \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Man setzt diesen Wert in die zweite Gleichung und führt die Abkürzungen:

$$[cc \cdot 2] = [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bc \cdot 1]$$

$$[cl \cdot 2] = [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \cdot [bl \cdot 1]$$

ein. Demnach wird:

$$[cc \cdot 2] z = [cl \cdot 2]$$

und:

$$z = \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Gleichungen (3), (4), (5) stellen die Lösungen des Systems (2) dar.

Es läßt sich zeigen, daß die Gewichte der so gefundenen Größen x, y, z gegeben sind durch:

$$g_z = [cc \cdot 2] \qquad g_y = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} g_z \qquad g_x = \frac{[ac][bb \cdot 1]}{[cc][bb] - [bc][bc]} g_z$$

Als Beispiel wählen wir die Gleichung:

$$x + ay = b$$

in der die Größen a, b direkt beobachtet sind; und zwar sei gefunden worden:

$$\begin{array}{llll} b = 3 \cdot 5, & 5 \cdot 7, & 8 \cdot 2, & 10 \cdot 3 \\ a = 0, & 88, & 182, & 274 \end{array}$$

Es ergeben sich die Normalgleichungen:

$$[1 \cdot 1]x + [1 \cdot a]y = [1 \cdot b]$$
$$[1 \cdot a]x + [a \cdot a]y = [a \cdot b]$$

oder da:

$$[1 \cdot 1] = 4, \quad [1 \cdot a] = 544, \quad [1 \cdot b] = 27 \cdot 7, \quad [aa] = 115944$$
$$[ab] = 4816 \cdot 2$$

lauten die Normalgleichungen:

$$4x + 544y = 27 \cdot 7$$
$$544x + 115944y = 4816 \cdot 2$$

Ferner ist:

$$y = \frac{[ab \cdot 1]}{[aa \cdot 1]}$$

$$x = -\frac{[1 \cdot a]}{[1 \cdot 1]} y + \frac{[1 \cdot b]}{[1 \cdot 1]}$$

wobei:

$$[ab \cdot 1] = [ab] - \frac{[1 \cdot a]}{[1 \cdot 1]} [1 \cdot b] = 1049$$

$$[aa \cdot 1] = [aa] - \frac{[1\,a]}{[1 \cdot 1]} [1 \cdot a] = 41960$$

so daß schließlich:

$$y = 0{\cdot}025$$
$$x = 3{\cdot}5248$$

Beispiele:

1. Gauß hat in der „Theoria motus corporum coelestium“ das folgende Beispiel gegeben:

$$x - y + 2z = 3$$
$$3x + 2y - 5z = 5$$
$$4x + y + 4z = 21$$
$$-x + 3y + 3z = 14$$

Man zeige, daß:

$$x = 2{\cdot}470 \qquad y = 3{\cdot}551 \qquad z = 1{\cdot}916$$

ist.

2. Nach Clairaut ist die Länge l eines Sekundenpendels unter der Breite β:

$$l = l_0 + a \sin^2 \beta$$

wobei die Konstanten l_0, a durch die folgenden Beobachtungen zu bestimmen sind:

$$\beta = 0^0, \quad 18^0 27', \quad 48^0 24', \quad 58^0 15', \quad 67^0 4'$$
$$l = 9{\cdot}990564, \quad 0{\cdot}991150, \quad 0{\cdot}993867, \quad 0{\cdot}994589, \quad 0{\cdot}995325$$

Es ist zu zeigen, daß hieraus die Clairautsche Gleichung sich in der Form ergibt:

$$l = 0{\cdot}990555 + 0{\cdot}005679 \sin^2 \beta$$

XII. Abschnitt.

Sammlung von Formeln und Tabellen.

A. Einige arithmetische Formeln.

I. Reihen.

Das n te Glied einer arithmetischen Reihe ist:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn a_1 das erste Glied, d die Differenz bedeutet.

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe lautet:

$$s_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Das $n$te Glied einer geometrischen Reihe ist:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

q ist der konstante Faktor, a_1 das erste Glied. Die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Reihe ist:

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

II. Permutationen, Kombinationen, Variationen.

Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots . (n-2)(n-1) n_1 = n! \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

befinden sich unter den n Elementen p gleiche der einen, q gleiche einer zweiten Art usf., so ist die Anzahl der möglichen Permutationen:

$$\frac{n!}{p!\, q! \ldots .} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Anzahl der Kombinationen $m$ter Klasse ohne Wiederholung, welche n verschiedene Elemente liefern, ist:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)}{m!} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Anzahl der Kombinationen $m$ter Klasse mit Wiederholungen:

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}{m!} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Anzahl aller Variationen:

$$n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Anzahl aller möglichen Verbindungen von n verschiedenen Elementen zu Gruppen von m Elementen ist:

$$n^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

B. Einige Maßformeln.

I. Längen.

R bedeutet Radius des umschriebenen Kreises, resp. bei Körpern der umschriebenen Kugel, r Radius des eingeschriebenen Kreises und der entsprechenden Kugel.

Dreieck:

$$R = \frac{abc}{4f} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad (1)$$

$$r = \frac{f}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (2)$$

a, b, c = Seitenlängen, $a+b+c=2s$; f = Flächeninhalt.

Quadrat:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$r = \frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Tetraeder:

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hexaeder:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$r = \frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Oktaeder:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{6} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Länge des Kreisbogens zum Zentriwinkel α^0:

$$b = r \frac{\pi}{180} \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Länge der Sehne zu diesem Bogen:

$$s = r \sin \frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

II. Flächeninhalte.

Rhombus:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Produkt der Diagonalen} \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Trapez:

$$(a + b) \frac{h}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

a, b = nicht parallele Seiten, h = Höhe.

Dreieck:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \times \text{Höhe} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

siehe auch Abschnitt Trigonometrie.

$$\frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Sphärisches Dreieck:

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

(α, β, γ sind die Winkel in Bogengraden. Vid. C. I.)

Regelm. Polygon:

$$\frac{1}{4} n a^2 \cot \left(\frac{180^0}{n} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

n = Anzahl der Seiten, a = Seitenlänge.

Kreis:

$$r^2 \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Kreisring:

$$(r + r') \pi b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

b = Breite des Ringes.

Kreissektor:

$$\frac{\text{Bogen} \times r}{2} = r^2 \alpha \frac{\pi}{360} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

α = zugehöriger Zentriwinkel.

Kreissegment:

$$\text{a) Sektor} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

wenn $\alpha < 180^0$

b) Sektor $+\frac{r^2}{2}\sin(360^0 - \alpha)$ . . . . (24)

wenn $\alpha > 180^0$

Ellipse:

$a \cdot b \cdot \pi$ . . . . (25)

a und b sind die Achsen.

III. Oberflächen.

Mantelfläche von Zylinder und Prisma:

Umfang der Grundfläche $\times$ Seite . . . (26)

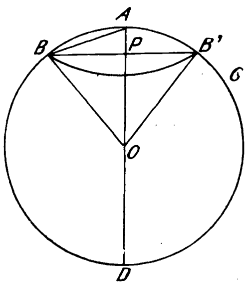

Fig. 103.

Mantelfläche von Pyramide und Kegel:

$\frac{1}{2}$ Umfang der Grundfläche $\times$ Seite . (27)

Oberfläche der Kugel:

$4\,r^2\pi$ . . . . (28)

Oberfläche der Kalotte $BB'A$ (Fig. 103):

$= 2\,r\pi h$ . . . . (29)

$= (\varrho^2 + h^2)\pi$ . . . (30)

$= s^2\pi$ . . . . . (31)

$PA = h \quad BP = \varrho \quad AB = s \quad OB = r$

IV. Volumina.

Prisma und Zylinder:

Grundfläche $\times$ Höhe . . . . . (32)

Pyramide und Kegel:

$\frac{1}{3}$ Grundfläche $\times$ Höhe . . . . . (33)

Regelmäßiges Polyeder:

$\frac{1}{3}$ Oberfläche $\times$ Radius der eingeschr. Kugel . (34)

Kugel:

$\frac{4}{3}r^3\pi$ . . . . (35)

Kugelsektor $OBAB'$ (Fig. 103):

$\frac{2}{3}r^2 h\pi$ . . . . (36)

Kugelsegment BAB' (Fig. 103):

$\frac{1}{3}h^2(3\,r - h)\pi$ . . . . (37)

Rotationsellipsoid:

$$\text{a)}\ \frac{4}{3}a^2 b\pi \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

bei Rotation um b

$$\text{b)}\ \frac{4}{3}ab^2\pi \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

bei Rotation um a

Ovaloid:

$$\frac{4}{3}abc\pi \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

C. Ebene Trigonometrie.

I. Bei den theoretischen Betrachtungen der Mathematik versteht man unter x in den Funktionen $\sin x$, $\cos x$, usw. nicht einen Winkel in Graden, Minuten und Sekunden, sondern das Verhältnis des dem Zentriwinkel α entsprechenden Kreisbogens zum Halbmesser; nimmt man dann den Halbmesser gleich der Einheit an, so ist x die Länge des entsprechenden Kreisbogens.

Dem Winkel:

$$\alpha = 360^0$$

entspricht im Kreis mit dem Radius 1 der Umfang:

$$x = 2\pi$$

einem Winkel:

$$\alpha = 1^0$$

eine Bogenlänge:

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0{\cdot}01\,745\,329\ldots.$$

also einem Winkel von α Graden eine Bogenlänge:

$$x = \frac{\pi}{180}\alpha = x \cdot 0{\cdot}01\,745\,329\ldots.$$

II. $\dfrac{MP}{OM} = \sin POM \qquad \dfrac{MP}{OP} = \tan POM$

$\dfrac{OP}{OM} = \cos POM \qquad \dfrac{OP}{MP} = \cot POM$

$\dfrac{OM}{OP} = \sec POM$

$\dfrac{OM}{MP} = \operatorname{cosec} POM$

(Vid. Fig. 104.)

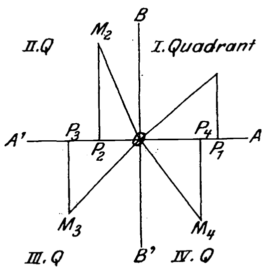

Fig. 104.

III. Vorzeichen und Wertgrenzen der goniometrischen Funktionen:

Quadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
I.	$+$ $0 \quad 1$	$+$ $1 \quad 0$	$+$ $0 \quad \infty$	$+$ $\infty \quad 0$	$+$ $1 \quad \infty$	$+$ $\infty \quad 1$
II.	$+$ $1 \quad 0$	$-$ $0 \quad 1$	$-$ $\infty \quad 0$	$-$ $0 \quad \infty$	$-$ $\infty \quad 1$	$+$ $1 \quad \infty$
III.	$-$ $0 \quad 1$	$-$ $1 \quad 0$	$+$ $0 \quad \infty$	$+$ $\infty \quad 0$	$-$ $1 \quad \infty$	$-$ $\infty \quad 1$
IV.	$-$ $1 \quad 0$	$+$ $0 \quad 1$	$-$ $\infty \quad 0$	$-$ $0 \quad \infty$	$+$ $\infty \quad 1$	$-$ $1 \quad \infty$

Numerische Werte von $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$ für einige bestimmte Winkel:

$\alpha =$ $x =$	0^0 oder 360^0 0 „ 2π	30^0 $\frac{\pi}{6}$	45^0 $\frac{\pi}{4}$	60^0 $\frac{\pi}{3}$	90^0 $\frac{\pi}{2}$	180^0 π	270^0 $\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

Sind keine Tabellen zur Hand, so müssen die numerischen Werte der goniometrischen Funktionen für andere Werte von α bezw. x durch Reihenentwicklung (vid. § 66) ermittelt werden.

V. $(180^0 - \alpha)$ heißt der Supplementwinkel von α; es ist:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \quad \text{bzw.} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \quad „ \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha \quad „ \quad \tan(\pi - x) = -\tan x$$

VI. $(90^0 - \alpha)$ heißt der Komplementwinkel von α; es ist:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha \quad „ \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha \quad „ \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$
$$\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha \quad „ \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

VII. Die Winkel $(90^0 + \alpha)$ und $(180^0 + \alpha)$:

a) $\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$ $\quad \tan(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha$
$\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \cot(90^0 + \alpha) = -\tan\alpha$

b) $\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \tan(180^0 + \alpha) = \tan\alpha$
$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \cot(180^0 + \alpha) = \cot\alpha$

c) Allgemein gilt:

$\sin(2n\pi \pm x) = \pm\sin x$ $\quad \cos(2n\pi \pm x) = \pm\cos x$
$\sin[(2n+1)\pi \pm x] = \mp\sin x$ $\quad \cos[(2n+1)\pi \pm x] = -\cos x$
$\tan(2n\pi \pm x) = \pm\tan x$ $\quad \cot(2\pi \pm x) = \pm\cot x$
$\tan[(2n+1)\pi \pm x] = \pm\tan x$ $\quad \cot[(2n+1)\pi \pm x] = \pm\cot x$

VIII. Negative Winkel:

$$0 > x > -\frac{\pi}{2}$$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$

IX. Grenzwerte:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

X. Weitere Relationen:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad \ldots \quad (8)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{1}{2}(x + y) \cos\frac{1}{2}(x - y) \quad . \quad (9)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{1}{2}(x + y) \sin\frac{1}{2}(x - y) \quad . \quad (10)$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\tan\frac{1}{2}(x + y)}{\tan\frac{1}{2}(x - y)} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{2x}{2} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

$$\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \ldots \quad (18)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) \quad . \quad (19)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y) \quad (20)$$

$$\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = -\frac{\cot \frac{1}{2}(x + y)}{\tan \frac{1}{2}(x - y)} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \ldots \quad (22)$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

$$\tan (x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad \ldots \quad (25)$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \quad \ldots \quad (27)$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

$$\cot \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

$$\cot (x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y} \quad \ldots \quad (30)$$

$$\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

XI. Relationen im rechtwinkligen Dreieck (Fig. 105). Es gelten folgende Sätze:

$$b = a \sin \beta \qquad c = a \sin \gamma$$
$$b = a \cos \gamma \qquad c = a \cos \beta$$
$$b = c \tan \beta \qquad c = b \tan \gamma$$
$$b = c \cot \gamma \qquad c = b \cot \beta$$

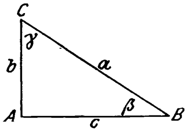

Fig. 105.

Flächeninhalt f:

$$= \frac{bc}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{b^2}{2 \tan \beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

$$= \frac{a^2}{4} \sin 2\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

XII. Relationen im gleichschenkligen Dreieck (Fig. 106):

$$a = 2\, b \cos \beta$$
$$h = b \sin \beta$$

$$f = \frac{a^2}{4} \tan \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

$$f = \frac{b^2}{2} \sin 2\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

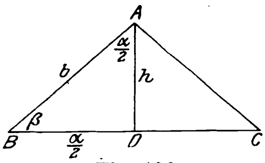

Fig. 106.

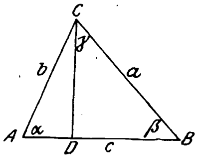

Fig. 107.

XIII. Relationen im Dreieck überhaupt (Fig. 107):

Sinus-Satz: $$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Carnotscher Lehrsatz oder Cosinus-Satz:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\, bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\, ac \cos \beta \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2\, ab \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Halbwinkel-Funktionen:

s ist Abkürzung für $\frac{a+b+c}{2}$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad . \; . \; . \; . \quad (38)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

Die Funktionen von $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ erhält man durch zyklische Vertauschung auf der rechten Seite; ferner ist:

$$\tan\frac{\alpha}{3} = \frac{r}{s-a} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} \qquad (41)$$

wenn r der Radius des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises ist:

NB.: $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Mollweidesche Gleichungen:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

usw.

Der Tangenten-Satz:

$$(a+b):(a-b) = \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad . \quad (44)$$

usw.

Der Flächeninhalt f:

$$= \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{ac}{2}\sin\beta = \frac{bc}{2}\sin\alpha \quad \ldots \quad (45)$$

D. Sphärische Trigonometrie.

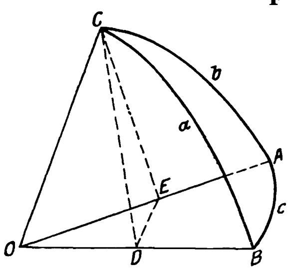

Fig. 108.

I. ABC (Fig. 108) sei ein bei A rechtwinkeliges sphärisches Dreieck; der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel ist 0. a heiße die Hypotenuse, und der ihr gegenüberliegende Winkel α; b nennen wir die eine Kathete, den gegenüberliegenden Winkel β, und c die andere Kathete — gegenüberliegender Winkel γ. Es bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c & \ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ \cos a = \cot\beta \cot\gamma & \ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin b = \sin a \sin\beta & \sin c = \sin a \sin\gamma \quad . \quad . \quad (3) \\ \tan b = \tan a \cos\gamma & \tan c = \tan a \cos\beta \quad . \quad . \quad (4) \\ \tan b = \sin c \tan\beta & \tan c = \sin b \tan\gamma \quad . \quad . \quad (5) \end{cases}$$

$$\cos\beta = \cos b \sin\gamma \qquad \cos\gamma = \cos c \sin\beta \quad . \quad . \quad (6)$$

Führt man statt der Katheten b und c deren Komplemente b' und c' ein, so gelten folgende Formeln:

$$\cos a = \sin b' \sin c' \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\cos b' = \sin a \sin \beta \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\cos b' = \cot c' \cot \gamma \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\cot c' = \tan a \cos \beta \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\cot c' = \cos b' \tan \gamma \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

II. Relationen im schiefwinkeligen sphärischen Dreieck (Fig. 109).

Sinus-Satz:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (12)$$

Cosinus-Satz für eine Seite:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (13)$$

usw.

Cosinus-Satz für einen Winkel:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad (14)$$

usw.

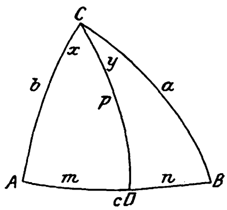

Fig. 109.

Halbwinkel-Sätze:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots \quad (15)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}} \quad \ldots \quad (17)$$

usw.

Halbseiten-Sätze:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}} \quad \ldots \quad (18)$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}} \quad \ldots \quad (19)$$

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}} \quad \ldots \quad (20)$$

NB.: $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$

Gaußsche Gleichungen:

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{\gamma}{2} \quad \ldots \quad (21)$$

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{\gamma}{2} \quad \ldots \quad (22)$$

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{\gamma}{2} \quad \ldots \quad (23)$$

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{\gamma}{2} \quad \ldots \quad (24)$$

usw.

Nepersche Gleichungen:

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\tan\frac{c}{2}\quad\ldots\quad(25)$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\frac{c}{2}\quad\ldots\quad(26)$$

$$\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\gamma}{2}\quad\ldots\quad(27)$$

$$\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\gamma}{2}\quad\ldots\quad(28)$$

usw.

Flächeninhalt:

$$f=r^2\pi\frac{e}{180}\quad\ldots\ldots\quad(29)$$

$e=\alpha+\beta+\gamma-180^0$, der sogenannte sphärische Exzeß.

Für denselben ergibt sich im rechtwinkeligen Dreieck:

$$\tan\frac{e}{2}=\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}\quad\ldots\ldots\quad(30)$$

und im schiefwinkeligen:

$$\tan\frac{e}{4}=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)}\quad(31)$$

E. Gegenseitige Beziehungen der hyperbolischen Funktionen.

(Vid. § 80, S. 238.)

$$\cos x=\cosh\iota x=\frac{1}{2}(e^{-\iota x}+e^{\iota x})\quad\ldots\quad(1)$$

$$\sin x=\frac{1}{\iota}\sinh\iota x=\frac{1}{2\iota}(e^{\iota x}-e^{-\iota x})\quad\ldots\quad(2)$$

$$\cos x+\iota\sin x=\cosh\iota x+\sinh\iota x=e^{\iota x}\quad\ldots\quad(3)$$

$$\cos x-\iota\sin x=\cosh\iota x-\sinh\iota x=e^{-\iota x}\quad\ldots\quad(4)$$

$$\cosh x=\cos\iota x\qquad \iota\sinh x=\sin\iota x\quad\ldots\quad(5)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\tanh x=\sinh x/\cosh x & \coth x=\cosh x/\sinh x\\ \operatorname{cosech} x=1/\sinh x & \operatorname{sech} x=1/\cosh x\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(6)$$

$$\cosh 0 = 1; \quad \sinh 0 = 0; \quad \tanh 0 = 0 \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sinh x}{x} = 1; \quad \lim_{x=0} \frac{\tanh x}{x} = 1; \quad \lim_{x=0} \frac{\cosh x}{x} = 1 \qquad (8)$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x; \ \cosh(-x) = \cosh x; \ \tanh(-x) = -\tanh x \qquad (9)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y \quad . \quad . \qquad (10)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y \quad . \quad . \qquad (11)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \cosh(x + \iota y) &= \cosh x \cdot \cosh \iota y + \sinh x \cdot \sinh \iota y \\ &= \cosh x \cdot \cos y + \iota \sinh x \cdot \sin y \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \sinh(x + \iota y) &= \sinh x \cdot \cosh \iota y + \cosh x \cdot \sinh \iota y \\ &= \sinh x \cdot \cos y + \iota \cosh x \cdot \sin y \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x+y) \cdot \cosh \frac{1}{2}(x-y) \, . \qquad (15)$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{1}{2}(x+y) \cdot \sinh \frac{1}{2}(x-y) \, . \qquad (16)$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{1}{2}(x+y) \cdot \cosh \frac{1}{2}(x-y) \, . \qquad (17)$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x+y) \cdot \sinh \frac{1}{2}(x-y) \, . \qquad (18)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x = 2 \tanh x / (1 - \tanh^2 x) \, . \qquad (19)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

$$= 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 \qquad (21)$$

$$= (1 + \tanh^2 x)/(1 - \tanh^2 x) \quad . \qquad (22)$$

$$\cosh x + 1 = 2 \cosh^2 \frac{1}{2} x; \quad \cosh x - 1 = 2 \sinh^2 \frac{1}{2} x \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} \tanh \frac{1}{2} x &= \sinh x / (1 + \cosh x) \\ &= (\cosh x - 1) / \sinh x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x; \quad \coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x \quad . \qquad (26)$$

$$\cosh x = 1 / \sqrt{(1 - \tanh^2 x)}; \quad \sinh x = \tanh x / \sqrt{(1 - \tanh^2 x)} \qquad (27)$$

$$\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

$$\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (29)$$

$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

F. Tabellen der numerischen Werte einiger wichtiger Funktionen.

Tabelle I. Numerische Werte der Gamma-Funktion.

(Vid. § 58 Seite 156.)

$$\log. \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx + 10, \quad \text{oder} \quad \log.\ \Gamma(n) + 10$$

von $n = 1$ bis $n = 2$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·00		97497	95001	92512	90030	87555	85087	82627	80173	77727
1·01	9·9975287	72855	70430	68011	65600	63196	60798	58408	56025	53648
1·02	51279	48916	46561	44212	41870	39535	37207	34886	32572	30265
1·03	27964	25671	23384	21104	18831	16564	14305	12052	09806	07567
1·04	05334	03108	00889	$\overline{98677}$	$\overline{96471}$	$\overline{94273}$	$\overline{92080}$	$\overline{89895}$	$\overline{87716}$	$\overline{85544}$
1·05	9·9883379	81220	79068	76922	74783	72651	70525	68406	66294	64188
1·06	62089	59996	57910	55830	53757	51690	49630	47577	45530	43489
1·07	41455	39428	37407	35392	33384	31382	29387	27398	25415	23440
1·08	21469	19506	17549	15599	13655	11717	09785	07860	05941	04029
1·09	02123	00223	$\overline{98329}$	$\overline{96442}$	$\overline{94561}$	$\overline{92686}$	$\overline{90818}$	$\overline{88956}$	$\overline{87100}$	$\overline{85250}$
1·10	9·9783407	81570	79738	77914	76095	74283	72476	70676	68882	67095
1·11	65313	63538	61768	60005	58248	56497	54753	53014	51281	49555
1·12	47834	46120	44411	42709	41013	39323	37638	35960	34288	32622
1·13	30962	29308	27659	26017	24381	22751	21126	19508	17896	16289
1·14	14689	13094	11505	09922	08345	06774	05209	03650	02096	00549
1·15	9·9699007	97471	95941	94417	92898	91386	89879	88378	86883	85393
1·16	83910	82432	80960	79493	78033	76578	75129	73686	72248	70816
1·17	69390	67969	66554	65145	63742	62344	60952	59566	58185	56810
1·18	55440	54076	52718	51366	50019	48677	47341	46011	44687	43368
1·19	42054	40746	39444	38147	36856	35570	34290	33016	31747	30483
1·20	9·9629225	27973	26725	25484	24248	23017	21792	20573	19358	18150
1·21	16946	15748	14556	13369	12188	11011	09841	08675	07515	06361
1·22	05212	04068	02930	01796	00669	$\overline{99546}$	$\overline{98430}$	$\overline{97318}$	$\overline{96212}$	$\overline{95111}$
1·23	594015	92925	91840	90760	89685	88616	87553	86494	85441	84393
1·24	83350	82313	81280	80253	79232	78215	77204	76198	75197	74201
1·25	9·9573211	72226	71246	70271	69301	68337	67377	66423	65474	64530
1·26	63592	62658	61730	60806	59888	58975	58067	57165	56267	55374
1·27	54487	53604	52727	51855	50988	50126	49268	48416	47570	46728
1·28	45891	45059	44232	43410	42593	41782	40975	40173	39376	38585
1·29	37798	37016	36239	35467	34700	33938	33181	32429	31682	30940

Tabelle I. — Fortsetzung.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·30	9·9530203	29470	28743	28021	27303	26590	25883	25180	24482	23789
1·31	23100	22417	21739	21065	20396	19732	19073	18419	17770	17125
1·32	16485	15850	15220	14595	13975	13359	12748	12142	11541	10944
1·33	10353	09766	09184	08606	08034	07466	06903	06344	05791	05242
1·34	04698	04158	03624	03094	02568	02048	01532	01021	00514	00012
1·35	9·9499515	99023	98535	98052	97573	97100	96630	96166	95706	95251
1·36	94800	94355	93913	93477	93044	92617	92194	91776	91362	90953
1·37	90549	90149	89754	89363	88977	88595	88218	87846	87478	87115
1·38	86756	86402	86052	85707	85366	85030	84698	84371	84049	83731
1·39	83417	83108	82803	82503	82208	81916	81630	81348	81070	80797
1·40	9·9480528	80263	80003	79748	79497	79250	79008	78770	78537	78308
1·41	78084	77864	77648	77437	77230	77027	76829	76636	76446	76261
1·42	76081	75905	75733	75565	75402	75243	75089	74939	74793	74652
1·43	74515	74382	74254	74130	74010	73894	73783	73676	73574	73475
1·44	73382	73292	73207	73125	73049	72976	72908	72844	72784	72728
1·45	9·9472677	72630	72587	72549	72514	72484	72459	72437	72419	72406
1·46	72397	72393	72392	72396	72404	72416	72432	72452	72477	72506
1·47	72539	72576	72617	72662	72712	72766	72824	72886	72952	73022
1·48	73097	73175	73258	73345	73436	73531	73630	73734	73841	73953
1·49	74068	74188	74312	74440	74572	74708	74848	74992	75141	75293
1·50	9·9475449	75610	75774	75943	76116	76292	76473	76658	76847	77040
1·51	77237	77438	77642	77851	78064	78281	78502	78727	78956	79189
1·52	79426	79667	79912	80161	80414	80671	80932	81196	81465	81738
1·53	82015	82295	82580	82868	83161	83457	83758	84062	84370	84682
1·54	84998	85318	85642	85970	86302	86638	86977	87321	87668	88019
1·55	9·9488374	88733	89096	89463	89834	90208	90587	90969	91355	91745
1·56	92139	92537	92938	93344	93753	94166	94583	95004	95429	95857
1·57	96289	96725	97165	97609	98056	98508	98963	99422	99885	$\overline{00351}$
1·58	500822	01296	01774	02255	02741	03230	03723	04220	04720	05225
1·59	05733	06245	06760	07280	07803	08330	08860	09395	09933	10475
1·60	9·9511020	11569	12122	12679	13240	13804	14372	14943	15519	16098
1·61	16680	17267	17857	18451	19048	19649	20254	20862	21475	22091
1·62	22710	23333	23960	24591	25225	25863	26504	27149	27798	28451
1·63	29107	29766	30430	31097	31767	32442	33120	33801	34486	35175
1·64	35867	36563	37263	37966	38673	39383	40097	40815	41536	42260
1·65	9·9542989	43721	44456	45195	45938	46684	47434	48187	48944	49704
1·66	50468	51236	52007	52782	53560	54342	55127	55916	56708	57504
1·67	58303	59106	59913	60723	61536	62353	63174	63998	64825	65656
1·68	66491	67329	68170	69015	69864	70716	71571	72430	73293	74159
1·69	75028	75901	76777	77657	78540	79427	80317	81211	82108	83008
1·70	9·9583912	84820	85731	86645	87563	88484	89409	90337	91268	92203
1·71	93141	94083	95028	95977	96929	97884	98843	99805	$\overline{00771}$	$\overline{01740}$
1·72	602712	03688	04667	05650	06636	07625	08618	09614	10613	11616
1·73	12622	13632	14645	15661	16681	17704	18730	19760	20793	21830
1·74	22689	23912	24959	26009	27062	28118	29178	30241	31308	32377

Tabelle I. — Fortsetzung.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·75	9·9633451	34527	35607	36690	37776	38866	39959	41055	42155	43258
1·76	44364	45473	46586	47702	48821	49944	51070	52200	53331	54467
1·77	55606	56749	57894	59043	60195	61350	62509	63671	64836	66004
1·78	67176	68351	69529	70710	71895	73082	74274	75468	76665	77866
1·79	79070	80277	81488	82701	83918	85138	86361	87588	88818	90051
1·80	9·9691287	92526	93768	95014	96263	97515	98770	$\overline{00029}$	$\overline{01291}$	$\overline{02555}$
1·81	703823	05095	06369	07646	08927	10211	11498	12788	14082	15378
1·82	16678	17981	19287	20596	21908	23224	24542	25864	27189	28517
1·83	29848	31182	32520	33860	35204	36551	37900	39254	40610	41969
1·84	43331	44697	46065	47437	48812	50190	51571	52955	54342	55733
1·85	9·9757126	58522	59922	61325	62730	64139	65551	66966	68384	69805
1·86	71230	72657	74087	75521	76957	78397	79839	81285	82734	84186
1·87	85640	87098	88559	90023	91490	92960	94433	95910	97389	98871
1·88	800356	01844	03335	04830	06327	07827	09331	10837	12346	13859
1·89	15374	16893	18414	19939	21466	22996	24530	26066	27606	29148
1·90	9·9830693	32242	33793	35348	36905	38465	40028	41595	43164	44736
1·91	46311	47890	49471	51055	52642	54232	55825	57421	59020	60621
1·92	62226	63834	65445	67058	68675	70294	71917	73542	75170	76802
1·93	78436	80073	81713	83356	85002	86651	88302	89957	91614	93275
1·94	94938	96605	98274	99946	$\overline{01621}$	$\overline{03299}$	$\overline{04980}$	$\overline{06663}$	$\overline{08350}$	$\overline{10039}$
1·95	9·9911732	13427	15125	16826	18530	20237	21947	23659	25375	27093
1·96	28815	30539	32266	33995	35728	37464	39202	40943	42688	44435
1·97	46185	47937	49693	51451	53213	54977	56744	58513	60286	62062
1·98	63840	65621	67405	69192	70982	72774	74570	76368	78169	79972
1·99	81779	83588	85401	87216	89034	90854	92678	94504	96333	98165

Tabelle II. Numerische Werte des hyperbolischen Sinus.

$$\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right).$$

(Vid. § 78 Seite 235.)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	0·0000	0·0100	0·0200	0·0300	0·0400	0·0500	0·0600	0·0701	0·0801	0·0901
0·1	0·1002	0·1102	0·1203	0·1304	0·1405	0·1506	0·1607	0·1708	0·1810	0·1911
0·2	0·2013	0·2115	0·2218	0·2320	0·2423	0·2526	0·2629	0·2733	0·2837	0·2941
0·3	0·3045	0·3150	0·3255	0·3360	0·3466	0·3572	0·3678	0·3785	0·3892	0·4000
0·4	0·4108	0·4216	0·4325	0·4434	0·4543	0·4653	0·4764	0·4875	0·4986	0·5098
0·5	0·5211	0·5324	0·5438	0·5552	0·5666	0·5782	0·5897	0·6014	0·6131	0·6248
0·6	0·6367	0·6485	0·6605	0·6725	0·6846	0·6967	0·7090	0·7213	0·7336	0·7461
0·7	0·7586	0·7712	0·7838	0·7966	0·8094	0·8223	0·8353	0·8484	0·8615	0·8748
0·8	0·8881	0·9015	0·9150	0·9286	0·9423	0·9561	0·9700	0·9840	0·9981	1·0122
0·9	1·0265	1·0409	1·0554	1·0700	1·0847	1·0995	1·1144	1·1294	1·1446	1·1598

Tabelle II. — Fortsetzung.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	1·1752	1·1907	1·2063	1·2220	1·2379	1·2539	1·2700	1·2862	1·3025	1·3190
1·1	1·3356	1·3524	1·3693	1·3863	1·4035	1·4208	1·4382	1·4558	1·4735	1·4914
1·2	1·5095	1·5276	1·5460	1·5645	1·5831	1·6019	1·6209	1·6400	1·6593	1·6788
1·3	1·6984	1·7182	1·7381	1·7583	1·7786	1·7991	1·8198	1·8406	1·8617	1·8829
1·4	1·9043	1·9259	1·9477	1·9697	1·9919	2·0143	2·0369	2·0597	2·0827	2·1059
1·5	2·1293	2·1529	2·1768	2·2008	2·2251	2·2496	2·2743	2·2993	2·3245	2·3499
1·6	2·3756	2·4015	2·4276	2·4540	2·4806	2·5075	2·5346	2·5620	2·5896	2·6175
1·7	2·6456	2·6740	2·7027	2·7317	2·7609	2·7904	2·8202	2·8503	2·8806	2·9112
1·8	2·9422	2·9734	3·0049	3·0367	3·0689	3·1013	3·1340	3·1671	3·2005	3·2341
1·9	3·2682	3·3025	3·3372	3·3722	3·4075	3·4432	3·4792	3·5156	3·5523	3·5894
2·0	3·6269	3·6647	3·7028	3·7414	3·7803	3·8196	3·8593	3·8993	3·9398	3·9806
2·1	4·0219	4·0635	4·1056	4·1480	4·1909	4·2342	4·2779	4·3221	4·3666	4·4117
2·2	4·4571	4·5030	4·5494	4·5962	4·6434	4·6912	4·7394	4·7880	4·8372	4·8868
2·3	4·9370	5·9876	5·0387	5·0903	5·1425	5·1951	5·2483	5·3020	5·3562	5·4109
2·4	5·4662	5·5221	5·5785	5·6354	5·6929	5·7510	5·8097	5·8689	5·9288	5·9892
2·5	6·0502	6·1118	6·1741	6·2369	6·3004	6·3645	6·4293	6·4946	6·5607	6·6274
2·6	6·6947	6·7628	6·8315	6·9009	6·9709	7.0417	7·1132	7·1854	7·2583	7·3319
2·7	7·4063	7·4814	7·5572	7·6338	7·7112	7·7894	7·8683	7·9480	8·0285	8·1098
2·8	8·1919	8·2749	8·3586	8·4432	8·5287	8·6150	8·7021	8·7902	8·8791	8·9689
2·9	9·0596	9·1512	9·2437	9·3371	9·4315	9·5268	9·6231	9·7203	9·8185	9·9177
3·0	10·018	10·119	10·221	10·324	11·429	11·534	11·640	11·748	11·856	11·966
3·1	11·076	11·188	11·301	11·415	11·530	12·647	12·764	12·883	12·003	12·124
3·2	12·246	12·369	12·494	12·620	12·747	12·876	13·006	13·137	13·269	13·403
3·3	13·538	13·674	13·812	13·951	14·092	14·234	14·377	14·522	14·668	14·816
3·4	14·965	15·116	15·268	15·422	15·577	15·734	15·893	16·053	16·214	16·378
3·5	16·543	16·709	16·877	17·047	17·219	17·392	17·567	17·744	17·923	18·103
3·6	18·285	18·470	18·655	18·843	19·033	19·224	19·418	19·613	19·811	20·010
3·7	20·211	20·415	20·620	20·828	21·037	21·249	21·463	21·679	21·897	22·117
3·8	22·339	22·564	22·791	23·020	23·252	23·486	23·722	23·961	24·202	24·445
3·9	24·691	24·939	25·190	25·444	25·700	25·958	26·219	26·483	26·749	27·018
4·0	27·290	27·564	27·842	28·122	28·404	28·690	28·979	29·270	29·564	29·862
4·1	30·162	30·465	30·772	31·081	31·393	31·709	32·028	32·350	32·675	33·004
4·2	33·336	33·671	34·009	34·351	34·697	35·046	35·398	35·754	36·113	36·476
4·3	36·843	37·214	37·588	37·966	38·347	38·733	39·122	39·515	39·913	40·314
4·4	40·719	41·129	41·542	41·960	42·382	42·808	43·238	43·673	44·112	44·555
4·5	45·003	45·455	45·912	46·374	46 840	47·311	47·787	48·267	48·752	49·242
4·6	49·737	50·237	50·742	51·252	51·767	52·288	52·813	53·344	53·880	54·422
4·7	54·969	55·522	56·080	56·643	57·213	57·788	58·369	58·955	59·548	60·147
4·8	60·751	61·362	61·979	62·601	63·231	63·866	64·508	65·157	65·812	66·473
4·9	67·141	67·816	68·498	69·186	69·882	70·584	71·293	72·010	72·734	73·465

Tabelle III. Numerische Werte des hyperbolischen Cosinus.

$$\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}).$$

(Vid. § 78 Seite 235.)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	1·0000	1·0001	1·0002	1.0005	1·0008	1·0013	1·0018	1·0025	1·0032	1·0041
0·1	1·0050	1·0061	1·0072	1·0085	1·0098	1·0113	1·0128	1·0145	1·0162	1·0181
0·2	1·0201	1·0221	0·0243	1·0266	1·0289	1·0314	1·0340	1·0367	1·0395	1·0423
0·3	1·0453	1·0484	0·0516	1·0549	1·0584	1·0619	1·0655	1·0692	1·0731	1·0770
0·4	1·0811	1·0852	0·0895	1·0939	1·0984	1·1030	1·1077	1·1125	1·1174	1·1225
0·5	1·1276	1·1329	1·1383	1·1438	1·1494	1·1551	1·1609	1·1669	1·1730	1·1792
0·6	1·1855	1·1919	1·1984	1·2051	1·2119	1·2188	1·2258	1·2330	1·2402	1·2476
0·7	1·2552	1·2628	1·2706	1·2785	1·2865	1·2947	1·3030	1·3114	1·3199	1·3286
0·8	1·3374	1·3464	1·3555	1·3647	1·3740	1·3835	1·3932	1·4029	1·4128	1·4229
0·9	1·4331	1·4434	1·4539	1·4645	1·4753	1·4862	1·4973	1·5085	1·5199	1·5314
1·0	1·5431	1·5549	1·5669	1·5790	1·5913	1·6038	1·6164	1·6292	1·6421	1·6552
1·1	1·6685	1·6820	1·6956	1·7093	1·7233	1·7374	1·7517	1·7662	1·7808	1·7956
1·2	1·8107	1·8258	1·8412	1·8568	1·8725	1·8884	1·9045	1·9208	1·9373	1·9540
1·3	1·9709	1·9880	2·0053	2·0228	2·0404	2·0583	2·0764	2·0947	2·1132	2·1320
1·4	2·1509	2·1700	2·1894	2·2090	2·2288	2·2488	2·2691	2·2896	2·3103	2·3312
1·5	2·3524	2·3738	2·3955	2·4174	2·4395	2·4619	2·4845	2·5073	2·5305	2·5538
1·6	2·5775	2·6013	2·6255	2·6499	2·6746	2·6995	2·7247	2·7502	2·7760	2·8020
1·7	2·8283	2·8549	2·8818	2·9090	2·9364	2·9642	2·9922	3·0206	3·0492	3·0782
1·8	3·1075	3·1371	3·1669	3·1972	3·2277	3·2585	3·2897	3·3212	3·3530	3·3852
1·9	3·4177	3·4506	3·4838	3·5173	3·5512	3·5855	3·6201	3·6551	3·6904	3·7261
2·0	3·7622	3·7987	3·8355	3·8727	3·9103	3·9483	3·9867	4·0255	4·0647	4·1043
2·1	4·1443	4·1847	4·2256	4·2668	4·3085	4·3507	4·3932	4·4362	4·4797	4·5236
2·2	4·5679	4·6127	4·6580	4·7037	4·7499	4·7966	4·8437	4·8914	4·9395	4·9881
2·3	5·0372	5·0868	5·1370	5·1876	5·2388	5·2905	5·3427	5·3954	5·4487	5·5026
2·4	5·5569	5·1619	5·6674	5·7235	5·7801	5·8373	5·8951	5·9535	6·0125	6·0721
2·5	6·1323	6·1931	6·2545	6·3166	6·3793	6·4426	6·5066	6·5712	6·6365	6·7024
2·6	6·7690	6·8363	6·9043	6·9729	7·0423	7·1123	7·1831	7·2546	7·3268	7·3998
2·7	7·4735	7·5479	7·6231	7·6990	7·7758	7·8533	7·9136	8·0106	8·0905	8·1712
2·8	8·2527	8·3351	8·4182	8·5022	8·5871	8·6728	8·7594	8·8469	8·9352	9·0244
2·9	9·1146	9·2056	9·2976	9·3905	9·4844	9·5791	9·6749	9·7716	9·8693	9·9680
3·0	10·068	10·168	10·270	10·373	10·476	10·581	10·687	10·794	10·902	11·011
3·1	11·121	12·233	11·345	11·459	11·574	11·689	11·806	11·925	12·044	12·165
3·2	12·287	13·410	12·534	12·660	12·786	12·915	13·044	13·175	13·307	13·440
3·3	13·575	14·711	13·848	13·987	14·127	14·269	14·412	14·556	14·702	14·850
3·4	14·999	15·149	15·301	15·455	15·610	15·766	15·924	16·084	16·245	16·408
3·5	16·573	16·739	16·907	17·077	17·248	17·421	17·596	17·772	17·951	18·131
3·6	18·313	18·497	18·682	18·870	19·059	19·250	19·444	19·639	19·836	20·035
3·7	20·236	20·439	20·644	20·852	21·061	21·272	21·486	21·702	21·919	22·139
3·8	22·362	22·586	22·813	23·042	23·273	23·507	23·743	23·982	24·222	24·466
3·9	24·711	24·959	25·210	25·463	25·719	25·977	26·238	26·502	26·768	27·037

Tabelle III. — Fortsetzung.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4·0	27·308	27·582	27·860	28·139	28·422	28·707	28·996	29·287	29·581	29·878
4·1	30·178	30·482	30·788	31·097	31·409	31·725	32·044	32·365	32·691	33·019
4·2	33·351	33·686	34·024	34·366	34·711	35·060	35·412	35·768	36·127	36·490
4·3	36·857	37·227	37·601	37·979	38·360	38·746	39·135	39·528	39·925	40·326
4·4	40·732	41·141	41·554	41.972	42·393	42·819	43·250	43·684	44·123	44·566
4·5	45·014	45·466	45·923	46·385	46·851	47·321	47·797	48·277	48·762	49·252
4·6	49·747	50·247	50·752	51·262	51·777	52·297	52·823	53·354	53·890	54·431
4·7	54·978	55·531	56·089	56·652	57·221	57·796	58·377	58·964	59·556	60·155
4·8	60·759	61·370	61·987	62·609	63·239	63·874	64·516	65·164	65·819	66·481
4·9	67·149	67·823	68·505	69·193	69·889	70·591	71·300	72·017	72·741	73·472

Tabelle IV. Numerische Werte des Faktors:

$$0{\cdot}6745\sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

(Vid. § 123 Seite 366.)

n	$\frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n-1}}$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			0·6745	0·4769	0·3894	0·3372	0·3016	0·2754	0·2549	0·2385
1	0·2248	0·2133	·2029	·1947	·1871	·1803	·1742	·1686	·1636	·1590
2	·1547	·1508	·1472	·1438	·1406	·1377	·1349	·1323	·1298	·1275
3	·1252	·1231	·1211	·1192	·1174	·1157	·1140	·1124	·1109	·1094
4	·1080	·1066	·1053	·1041	·1029	·1017	·1005	·0994	·0984	·0974
5	0·0964	0·0954	0·0944	0·0935	0·0926	0·0918	0·0909	0·0901	0·0893	0·0886
6	·0878	·0871	·0864	·0857	·0850	·0843	·0837	·0830	·0824	·0818
7	·0812	·0806	·0800	·0795	·0789	·0784	·0778	·0773	·0768	·0763
8	·0759	·0754	·0749	·0745	·0740	·0736	·0731	·0727	·0723	·0719
9	·0715	·0711	·0707	·0703	·0699	·0696	·0692	·0688	·0685	·0681

Tabelle V. Numerische Werte des Faktors:

$$\frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n\,(n-1)}}$$

(Vid. § 124 Seite 369.)

n	$\frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n\,(n-1)}}$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			0·4769	0·2754	0·1947	0·1508	0·1231	0·1041	0·0901	0·0795
1	0·0711	0·0643	·0587	·0540	·0500	·0465	·0435	·0409	·0386	·0365
2	·0346	·0329	·0314	·0300	·0287	·0275	·0265	·0255	·0245	·0237
3	·0229	·0221	·0214	·0208	·0201	·0196	·0190	·0185	·0180	·0175
4	·0171	·0167	·0163	·0159	·0155	·0152	·0148	·0145	·0142	·0139
5	0·0136	0·0134	0·0131	0·0128	0·0126	0·0124	0·0122	0·0119	0·0117	0·0115
6	·0113	·0111	·0110	·0108	·0106	·0105	·0103	·0101	·0100	·0098
7	·0097	·0096	·0094	·0093	·0092	·0091	·0089	·0088	·0087	·0086
8	·0085	·0084	·0083	·0082	·0081	·0080	·0080	·0079	·0077	·0076
9	·0075	·0074	·0073	·0073	·0072	·0071	·0070	·0069	·0069	·0068

Tabelle VI. Numerische Werte des Faktors:

$$0{\cdot}8453\,\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

(Vid. § 124 Seite 369.)

n	$\frac{0{\cdot}8453}{\sqrt{n\,(n-1)}}$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			0·5978	0·3451	0·2440	0·1890	0·1543	0·1304	0·1130	0·0996
1	0·0891	0·0806	·0736	·0677	·0627	·0583	·0546	·0513	·0483	·0457
2	·0434	·0412	·0393	·0376	·0360	·0345	·0332	·0319	·0307	·0297
3	·0287	·0277	·0268	·0260	·0252	·0245	·0238	·0232	·0225	·0220
4	·0214	·0209	·0204	·0199	·0194	·0190	·0186	·0182	·0178	·0174
5	0·0171	0·0167	0·0164	0·0161	0·0158	0·0155	0·0152	0·0150	0·0147	0·0145
6	·0142	·0140	·0137	·0135	·0133	·0131	·0129	·0127	·0125	·0123
7	·0122	·0120	·0118	·0117	·0115	·0113	·0112	·0110	·0109	·0108
8	·0106	·0105	·0104	·0102	·0101	·0100	·0099	·0098	·0097	·0096
9	·0095	·0093	·0092	·0091	·0090	·0089	·0089	·0088	·0087	·0086

Tabelle VII. Numerische Werte des Faktors:

$$0{\cdot}8453 \frac{1}{n\sqrt{n-1}}$$

n	$\frac{0{\cdot}8453}{n\sqrt{n-1}}$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			0·4227	0·1993	0·1220	0·0845	0·0630	0·0493	0·0399	0·0332
1	0·0282	0·0243	·0212	·0188	·0167	·0151	·0136	·0124	·0114	·0105
2	·0097	·0090	·0084	·0078	·0073	·0069	·0065	·0061	·0058	·0055
3	·0052	·0050	·0047	·0045	·0043	·0041	·0040	·0038	·0037	·0035
4	·0034	·0033	·0031	·0030	·0029	·0028	·0027	·0027	·0026	·0025
5	0·0024	0·0023	0·0023	0·0022	0·0022	0·0021	0·0020	0·0020	0·0019	0·0019
6	·0018	·0018	·0017	·0017	·0017	·0016	·0016	·0016	·0015	·0015
7	·0015	·0014	·0014	·0014	·0013	·0013	·0013	·0012	·0012	·0012
8	·0012	·0012	·0011	·0011	·0011	·0011	·0011	·0010	·0010	·0010
9	·0010	·0010	·0010	·0009	·0009	·0009	·0009	·0009	·0009	·0009

Tabelle VIII. Numerische Werte des Integrals:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} \, d(hx)$$

(Vid. § 123 Seite 364.)

hx	P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	0·0000	0·0113	0·0226	0·0338	0·0451	0·0564	0·0676	0·0789	0·0901	0·1013
0·1	·1125	·1236	·1348	·1459	·1569	·1680	·1790	·1900	·2009	·2118
0·2	·2227	·2335	·2443	·2550	·2657	·2763	·2869	·2974	·3079	·3183
0·3	·3286	·3389	·3491	·3593	·3694	·3794	·3893	·3992	·4090	·4187
0·4	·4284	·4380	·4475	·4569	·4662	·4755	·4847	·4937	·5027	·5117
0·5	0·5205	0·5292	0·5379	0·5465	0·5549	0·5633	0·5716	0·5798	0·5879	0·5959
0·6	·6039	·6117	·6194	·6270	·6346	·6420	·6494	·6566	·6638	·6708
0·7	·6778	·6847	·6914	·6981	·7047	·7112	·7175	·7238	·7300	·7361
0·8	·7421	·7480	·7538	·7595	·7651	·7707	·7761	·7814	·7867	·7918
0·9	·7969	·8019	·8068	·8116	·8163	·8209	·8254	·8299	·8342	·8385

Tabelle VIII. — Fortsetzung.

hx	P 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	04·827	0·8468	0·8508	0·8548	0·8586	0·8624	0·8661	0·8698	0·8733	0·8768
1·1	·8802	·8835	·8868	·8900	·8931	·8961	·8991	·9020	·9048	·9076
1·2	·9103	·9130	·9155	·9181	·9205	·9229	·9252	·9275	·9297	·9319
1·3	·9340	·9361	·9381	·9400	·9419	·9438	·9456	·9473	·9490	·9507
1·4	·9523	·9539	·9554	·9569	·9583	·9597	·9611	·9724	·9637	·9649
1·5	0·9661	0·9673	0·9684	0·9695	0·9706	0·9716	0·9726	0·9736	0·9745	0·9755
1·6	·9763	·9772	·9780	·9788	·9796	·9804	·9811	·9818	·9825	·9832
1·7	·9838	·9844	·9850	·9856	·9861	·9867	·9872	·9877	·9882	·9886
1·8	·9891	·9895	·9899	·9903	·9907	·9911	·9915	·9918	·9922	·9925
1·9	·9928	·9931	·9934	·9937	·9939	·9942	·9944	·9947	·9949	·9951
2·0	0·9953	0·9955	0·9957	0·9959	0·9961	0·9963	0·9964	0·9966	0·9967	0·9969
2·1	·9970	·9972	·9973	·9974	·9975	·9976	·9977	·9979	·9980	·9980
2·2	·9981	·9982	·9983	·9984	·9985	·9985	·9986	·9987	·9987	·9988
2·3	·9989	·9989	·9990	·9990	·9991	·9991	·9992	·9992	·9992	·9993
2·4	·9993	·9993	·9994	.9994	·9994	·9995	·9995	·9995	·9995	·9996
2·5	0·9996	0·9996	0·9996	0·9997	0·9997	0·9997	0·9997	0·9997	0·9998	0·9998
2.6	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9999
∞	1·0000									

Tabelle IX. Numerische Werte des Integrals:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

(Vid. § 125 Seite 373.)

t	P 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0		0·0054	0·0108	0·0161	0·0215	0·0269	0·0323	0·0377	0·0430	0·0484
0·1	0·0538	·0591	·0645	·0699	·0752	·0806	·0859	·0913	·0966	·1020
0·2	·1073	·1126	·1180	·1233	·1286	·1339	·1392	·1445	·1498	·1551
0·3	·1603	·1656	·1709	·1761	·1814	·1866	·1918	·1971	·2023	·2075
0·4	·2127	·2179	·2230	·2282	·2334	·2385	·2436	·2488	·2539	·2590
0·5	0·2641	0·2691	0·2742	0·2793	0·2843	0·2893	0·2944	0·2994	0·3043	0·3093
0·6	·3143	·3192	·3242	·3291	·3340	·3389	·3438	·3487	·3535	·3583
0·7	·3632	·3680	·3728	·3775	·3823	·3870	·3918	·3965	·4012	·4059
0·8	·4105	·4152	·4198	·4244	·4290	·4336	·4381	·4427	·4472	·4517
0·9	·4562	·4606	·4651	·4695	·4739	·4783	·4827	·4860	·4914	·4957

Tabelle IX. — Fortsetzung.

t	P 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	0·5000	0·5043	0·5085	0·5128	0·5170	0·5212	0·5254	0·5295	0·5337	0·5378
1·1	·5419	·5460	·5500	·5540	·5581	·5620	·5660	·5700	·5739	·5778
1·2	·5817	·5856	·5894	·5932	·5970	·6008	·6046	·6083	·6120	·6157
1·3	·6194	·6231	·6267	·6303	·6339	·6375	·6410	·6445	·6480	·6515
1·4	.6550	·6584	·6618	·6652	·6686	·6719	·6753	·6786	·6818	·6851
1·5	0·6883	0·6915	0·6947	0·6979	0·7011	0·7042	0·7073	0·7104	0·7134	0·7165
1·6	·7195	·7225	·7255	·7284	·7313	·7342	·7371	·7400	·7428	·7457
1·7	·7485	·7512	·7540	·7567	·7594	·7621	·7648	·7675	·7701	·7727
1·8	·7753	·7778	·7804	·7829	·7854	·7879	·7904	·7928	·7952	·7976
1·9	·8000	·8023	·8047	·8070	·8093	·8116	·8138	·8161	·8183	·8205
2·0	0·8227	0·8248	0·8270	0·8291	0·8312	0·8332	0·8353	0·8373	0·8394	0·8414
2·1	·8433	·8453	·8473	·8492	·8511	·8530	·8549	·8567	·8585	·8604
2·2	·8622	·8639	·8657	·8674	·8692	·8709	·8726	·8742	·8759	·8775
2·3	·8792	·8808	·8824	·8840	·8855	·8870	·8880	·8901	·8916	·8930
2·4	·8945	·8960	·8974	·8988	·9002	·9016	·9029	·9043	·9056	·9069
2·5	0·9082	0·9095	0·9108	0·9121	0·9133	0·9146	0·9158	0·9170	0·9182	0·9193
2·6	·9205	·9217	·9228	·9239	·9250	·9261	·9272	·9283	·9293	·9304
2·7	·9314	·9324	·9334	·9344	·9354	·9364	·9373	·9383	·9392	·9401
2·8	·9410	·9419	·9428	·9437	·9446	·9454	·9463	·9471	·9479	·9487
2·9	·9495	·9503	·9511	·9519	·9526	·9534	·9541	·9548	·9556	·9563
3·0	0·9570	0·9577	0·9583	0·9590	0·9597	0·9603	0·9610	0·9616	0·9622	0·9629
3·1	·9635	·9641	·9647	·9652	·9658	·9664	·9669	·9675	·9680	·9686
3·2	·9691	·9696	·9701	·9706	·9711	·9716	·9721	·9726	·9731	·9735
3·3	·9740	·9744	·9749	·9753	·9757	·9761	·9766	·9770	·9774	·9778
3·4	·9782	·9786	0·9789	·9793	·9797	·9800	·9804	·9807	·9811	·9814
3·	0·9570	0·9635	·9691	0·9740	0·9782	0·9818	0·9848	0·9874	0·9896	0·9915
4·	·9930	·9943	·9954	·9963	·9970	·9976	·9981	·9985	·9988	·9990
5·	·9993	·9994	·9996	·9997	·9997	·9998	·9998	·9999	·9999	·9999
∞	1·0000									

Tabelle X. Numerische Werte von t, entsprechend verschiedenen Werten von n in der Anwendung auf Chauvenets Kriterium.

(Vid. § 125 Seite 373.)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0				2·05	2·27	2·44	2·57	2·67	2·76	2·84
1	2·91	2·96	3·02	3·07	3·12	3·16	3·19	3·22	3·26	3·29
2	3·32	3·35	3·38	3·41	3·43	3·45	3·47	3·49	3·51	3·53
3	3·55	3·57	3·58	3·60	3·62	3·64	3·65	3·67	3·68	3·69
4	3·71	3·72	3·73	3·74	3·75	3·77	3·78	3·79	3·80	3·81

Tabelle X. — Fortsetzung.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	3·82	3·83	3·84	3·85	3·86	3·87	3·88	3·88	3·89	3·90
6	3·91	3·92	3·93	3·94	3·95	3·95	3·96	3·97	3·97	3·98
7	3·99	3·99	4·00	4·01	4·02	4·02	4.03	4·04	4·05	4·05
8	4·06	4·06	4·06	4·07	4·07	4·08	4·09	4·09	4·10	4·11
9	4·11	4·12	4·13	4·14	4·14	4·15	4·15	4·15	4·16	4·16

Wenn: $n = 100,\ t = 4{\cdot}16;$
$n = 200,\ t = 4{\cdot}68;$
$n = 500,\ t = 4{\cdot}90.$

Tabelle XI. Quadrate der Zahlen von 10—99.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Tabelle XII. Quadratwurzeln der Zahlen von 0·1—9·9.

n	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9
0		0·316	0·447	0·548	0·632	0·707	0·775	0·837	0·894	0·949
1	1·000	1·049	1·095	1·140	1·183	1·225	1·265	1·304	1·342	1·378
2	1·414	1·449	1·483	1·517	1·549	1·581	1·612	1·643	1·673	1·703
3	1·732	1·761	1·789	1·817	1·844	1·871	1·897	1·924	1·949	1·975
4	2·000	2·025	2·049	2·074	2·098	2·121	2·145	2·168	2·191	2·214
5	2·236	2·258	2·280	2·302	2·324	2·345	2·366	2·387	2·408	2·429
6	2·449	2·470	2·490	2·510	2·530	2·550	2·569	2·588	2·608	2·627
7	2·646	2·665	2·683	2·702	2·720	2·739	2·757	2·775	2·793	2·811
8	2·828	2·846	2·864	2·881	2·898	2·915	2·933	2·950	2·966	2·983
9	3·000	3·017	3·033	3·050	3·066	3·082	3·098	3·114	3·130	3·146

Tabelle XIII. Quadratwurzeln der Zahlen von 10—100.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3·162	3·317	3·464	3·606	3·742	3·873	4·000	4·123	4·243	4·359
2	4·472	4·583	4·690	4·796	4·899	5·000	5·099	5·196	5·292	5·385
3	5·477	5·568	5·657	5·745	5·831	5·916	6·000	6·083	6·164	6·245
4	6·325	6·403	6·481	6·557	6·633	6·708	6·782	6·856	6·928	7·000
5	7·071	7·141	7·211	7·280	7·348	7·416	7·483	7·550	7·616	7·681
6	7·746	7·810	7·874	7·937	8·000	8·062	8·124	8·185	8·246	8·307
7	8·367	8·426	8·485	8·544	8·602	8·660	8·718	8·775	8·832	8·888
8	8·944	9·000	9·055	9·110	9·165	9·220	9·274	9·327	9·381	9·434
9	9·487	9·539	9·592	9·644	9·695	9·747	9·798	9·849	9·899	9·950

Tabelle XIV. Dritte Potenzen der Zahlen von 10—100.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859
2	8000	9261	10648	12167	13824	15625	17576	19683	21952	24389
3	27000	29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319
4	64000	68921	74088	79507	85184	91125	97336	103823	110592	117649
5	125000	132651	140608	148877	157464	166375	175616	185193	195112	205379
6	216000	226981	238328	250047	262144	274625	287496	300763	314432	328509
7	343000	357911	373248	389017	405224	421875	438976	456533	474552	493039
8	512000	531441	551368	571787	592704	614125	636056	658503	681472	704969
9	729000	753571	778688	804357	830584	857375	884736	912673	941192	970299

Tabelle XV. Kubikwurzeln der Zahlen von 1—100.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			1·260	1·442	1·587	1·710	1·817	1·913	2·000	2·080
1	2·154	2·224	2·289	2·351	2·410	2·466	2·520	2·571	2·621	2·668
2	2·714	2·759	2·802	2·844	2·884	2·924	2·963	3·000	3·037	3·072
3	3·107	3·141	3·175	3·208	3·240	3·271	3·302	3·332	3·362	3·391
4	3·420	3·448	3·476	3·503	3·530	3·557	3·583	3·609	3·634	3·659
5	3·684	3·708	3·733	3·756	3·780	3.803	3·826	3·849	3·871	3·893
6	3·915	3·936	3·958	3·979	4·000	4·021	4·041	4·062	4·082	4·102
7	4·121	4·141	4·160	4·179	4·198	4·217	4·236	4·254	4·273	4·291
8	4·309	4·327	4·344	4·362	4·380	4·397	4·414	4·431	4·448	4·465
9	4·481	4·498	4·514	4·531	4·547	4·563	4·579	4·595	4·610	4·626

Tabelle XVI. Reziproke Werte der Zahlen von 1—100.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10000	50000	33333	25000	20000	16667	14286	12500	11111
1	10000	90909	83333	76923	71429	66667	62500	58824	55556	52632
2	50000	47619	45455	43478	41667	40000	38462	37037	35714	34483
3	33333	32258	31250	30303	29412	28571	27778	27027	26316	25641
4	25000	24390	23810	23256	22727	22222	21739	21277	20833	20408
5	20000	19608	19231	18868	18519	18182	17857	17544	17241	16949
6	16667	16393	16129	15873	15625	15385	15152	14925	14706	14493
7	14286	14085	13889	13699	13514	13333	13158	12987	12821	12658
8	12500	12346	12195	12048	11905	11765	11628	11494	11364	11236
9	11111	10989	10870	10753	10638	10526	10417	10309	10204	10101

Tabelle XVII. Numerische Werte von e^x, für $x = 0$ bis $x = 10$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1·0000	1·1052	1·2214	1·3499	1·4918	1·6487	1·8221	2·0138	2·2255	2·4596
1	2·7183	3·0042	3·3201	3·6693	4·0552	4·4817	4·9530	5·4739	6·0496	6·6859
2	7·3891	8·1662	9·0250	9·9742	11·023	12·183	13·463	14·880	16·445	18·174
3	20·086	22·198	24·533	27·113	29·964	33·115	36·598	40·447	44·701	49·402
4	54·598	60·340	66·686	73·700	81·451	90·017	99·480	109·95	121·51	134·29
5	148·41	164·03	181·27	200·34	221·41	244·69	270·43	298·87	330·30	365·04
6	403·43	445·86	492·75	545·57	601·85	665·14	735·10	812·41	897·85	992·27
7	1096·6	1212·0	1339·4	1480·3	1636·0	1808·0	1998·2	2208·3	2440·6	2697·3
8	2981·0	3294·5	3641·0	4023·9	4447·1	4914·8	5431·7	6002·9	6634·2	7332·0
9	8103·1	8955·0	9897·0	10938·	12088·	13360·	14765·	16318·	18034·	19930·

Tabelle XVIII. Numerische Werte von e^{-x}, von $x = 0$ bis $x = 10$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1·0000	0·9048	0·8187	0·7408	0·6703	0·6065	0·5488	0·4966	0·4493	0·4066
1	0·3678	·3329	·3012	·2725	·2466	·2231	·2019	·1827	.1653	·1496
2	·1353	·1224	·1108	·1003	·0907	·0821	·0743	·0672	·0608	·0550
3	·0498	·0451	·0408	·0369	·0334	·0302	·0273	·0247	·0224	·0202
4*	·0183	·0166	·0150	·0136	·0123	·0111	·0100	·0^{2}91	·0^{2}82	·0^{2}75
5	0·0^{2}67	0·0^{2}61	0·0^{2}55	0·0^{2}50	0·0^{2}45	0·0^{2}41	0·0^{2}37	0·0^{2}34	0·0^{2}30	0·0^{2}27
6	·0^{2}25	·0^{2}22	·0^{2}20	·0^{2}18	·0^{2}17	·0^{2}15	·0^{2}14	·0^{2}12	·0^{2}11	·0^{2}10
7	·0^{3}91	·0^{3}83	·0^{3}75	·0^{3}68	·0^{3}61	·0^{3}55	·0^{3}50	·0^{3}45	·0^{3}41	·0^{3}37
8	·0^{3}34	·0^{3}30	·0^{3}28	·0^{3}25	·0^{3}23	·0^{3}20	·0^{3}18	·0^{3}17	·0^{3}15	·0^{3}14
9	·0^{3}12	·0^{3}11	·0^{3}10	·0^{4}91	·0^{4}83	·0^{4}75	·0^{4}68	·0^{4}61	·0^{4}56	·0^{4}50

* 0·0^{2}555 bedeutet 0·00555; 0·0^{4}55 bedeutet 0·000055.

Tabelle XIX. Numerische Werte von e^{x^2} und e^{-x^2}, von $x = 0{\cdot}1$ bis $x = 5{\cdot}0$.

x	e^{x^2}	e^{-x^2}	x	e^{x^2}	e^{-x^2}
0·1	1·0101	0·99005	2·6	$8{\cdot}6264 \times 10^{2}$	$1{\cdot}1592 \times 10^{-3}$
0·2	1·0408	·96079	2·7	$1{\cdot}4656 \times 10^{3}$	$6{\cdot}8233 \times 10^{-4}$
0·3	1·0904	·91393	2·8	2·5402 „	3·9367 „
0·4	1·1735	·85214	2·9	4·4918 „	2·2263 „
0·5	1·2840	·77880	3·0	8·1031 „	1·2341 „
0·6	1·4333	0·69768	3·1	$1{\cdot}4913 \times 10^{4}$	$6{\cdot}7055 \times 10^{-5}$
0·7	1·6323	·61263	3·2	2·8001 „	3·5713 „
0·8	1·8965	·52729	3·3	5·2960 „	1·8644 „
0·9	2·2479	·44486	3·4	$1{\cdot}0482 \times 10^{5}$	$9{\cdot}5402 \times 10^{-6}$
1·0	2·7183	·36788	3·5	2·0898 „	4·7851 „
1·1	3·3535	0·29280	3·6	$4{\cdot}2507 \times 10^{5}$	$2{\cdot}3526 \times 10^{-6}$
1·2	4·2207	·23693	3·7	8·8205 „	1·1337 „
1·3	5·4195	·18452	3·8	$1{\cdot}8673 \times 10^{6}$	$5{\cdot}3554 \times 10^{-7}$
1·4	7·0993	·14086	3·9	4·0329 „	2·4796 „
1·5	9·4877	·10540	4·0	8·8861 „	1·1254 „
1·6	12·936	0·077306	4·1	$1{\cdot}9976 \times 10^{7}$	$5{\cdot}0062 \times 10^{-8}$
1·7	17·993	·055576	4·2	4·5809 „	2·1829 „
1·8	25·534	·039164	4·3	$1{\cdot}0718 \times 10^{8}$	$9{\cdot}3303 \times 10^{-9}$
1·9	36·996	·027052	4·4	2·5583 „	3·9088 „
2·0	54·598	·018316	4·5	6·2297 „	1·6052 „
2·1	82·269	0·012155	4·6	$1{\cdot}5476 \times 10^{9}$	$6{\cdot}4614 \times 10^{-10}$
2·2	126·47	$\cdot 0^{2}79070$	4·7	3·9228 „	2·5494 „
2·3	198·34	$\cdot 0^{2}50418$	4·8	$1{\cdot}0143 \times 10^{10}$	$9{\cdot}8595 \times 10^{-11}$
2·4	317·35	$\cdot 0^{2}31511$	4·9	2·6755 „	3·7376 „
2·5	518·02	$\cdot 0^{2}19304$	5·0	7·2005 „	1·3888 „

Tabelle XX. Natürliche Logarithmen der Zahlen von 1—9·99.

n	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
1·0	0·0000	0·0100	0·0198	0·0296	0·0392	0·0488	0·0583	0·0677	0·0770	0·0862
1·1	·0953	·1044	·1133	·1222	·1310	·1398	·1484	·1570	·1655	·1740
1·2	·1823	·1906	·1980	·2070	·2151	·2231	·2311	·2390	·2469	·2546
1·3	·2624	·2700	·2776	·2852	·2927	·3001	·3075	·3148	·3221	·3293
1·4	·3365	·3436	·3507	·3577	·3646	·3716	·3784	·3853	·3920	·3988
1·5	0·4055	0·4121	0·4187	0·4253	0·4318	0·4383	0·4447	0·4511	0·4574	0·4637
1·6	·4700	·4762	·4824	·4886	·4947	·5008	·5068	·5128	·5188	·5247
1·7	·5306	·5365	·5423	·5481	·5539	·5596	·5653	·5710	·5766	·5822
1·8	·5878	·5933	·5988	·6043	·6098	·6152	.6206	·6259	·6313	·6366
1·9	·6419	·6471	·6523	·6575	·6627	·6678	·6729	·6780	·6831	·6881

Tabelle XX. — Fortsetzung.

n	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
2·0	0·6932	0·6981	0·7031	0·7080	0·7130	0·7178	0·7227	0·7276	0·7324	0·7372
2·1	·7419	·7467	·7514	·7561	·7608	·7655	·7701	·7747	·7793	·7839
2·2	·7885	·7930	·7975	·8020	·8065	·8109	·8154	·8198	·8242	·8286
2·3	·8329	·8372	·8416	·8459	·8502	·8544	·8587	·8629	·8671	·8713
2·4	·8755	·8796	·8838	·8879	·8920	·8961	·9002	·9042	·9083	·9123
2·5	0·9163	0·9203	0·9243	0·9282	0·9322	0·9361	0·9400	0·9439	0·9478	0·9517
2·6	·9555	·9594	·9632	·9670	·9708	·9746	·9783	·9821	·9858	·9895
2·7	·9933	·9970	1·0006	1·0043	1·0080	1·0116	1·0152	1·0189	1·0225	1·0260
2·8	1·0296	1·0332	·0367	·0403	·0438	·0472	·0508	·0543	·0578	·0613
2·9	·0647	·0682	·0716	·0750	·0784	·0818	·0852	·0886	·0919	·0953
3·0	1·0986	1·1019	1·1053	1·1086	1·1119	1·1151	1·1184	1·1217	1·1249	1·1282
3·1	·1314	·1346	·1378	·1410	·1442	·1474	·1506	·1537	·1569	·1600
3·2	·1632	·1663	·1694	·1725	·1756	·1787	·1817	·1848	·1878	·1909
3·3	·1939	·1970	·2000	·2030	·2060	·2090	·2119	·2149	·2179	·2208
3·4	·2238	·2267	·2296	·2326	·2355	·2384	·2413	·2442	·2470	·2499
3·5	1·2528	1·2556	1·2585	1·2613	1·2641	1·2670	1·2698	1·2726	1·2754	1·2782
3·6	·2809	·2837	·2865	·2892	·2920	·2947	·2975	·3002	·3029	·3056
3·7	·3083	·3110	·3137	·3164	·3191	·3218	·3244	·3271	·3297	·3324
3·8	·3350	·3376	·3403	·3429	·3455	·3481	·3507	·3533	·3558	·3584
3·9	·3610	·3635	·3661	·3686	·3712	·3737	·3762	·3788	·3813	·3838
4·0	1·3863	1·3888	1·3913	1·3938	1·3963	1·3987	1·4012	1·4036	1·4061	1·4086
4·1	·4110	·4134	·4159	·4183	·4207	·4231	·4255	·4279	·4303	·4327
4·2	·4351	·4375	·4398	·4422	·4446	·4469	·4493	·4516	·4540	·4563
4·3	·4586	·4609	·4633	·4656	·4679	·4702	·4725	·4748	·4771	·4793
4·4	·4816	·4839	·4861	·4884	·4907	·4929	·4954	·4974	·4996	·5019
4·5	1·5041	1·5063	1·5085	1·5107	1·5129	1·5151	1·5173	1·5195	1·5217	1·5239
4·6	·5261	·5282	·5304	·5326	·5347	·5369	·5390	·5412	·5433	·5454
4·7	·5476	·5497	·5518	·5539	·5560	·5581	·5602	·5623	·5644	·5665
4·8	·5686	·5707	·5728	·5748	·5769	·5790	·5810	·5831	·5851	·5872
4·9	·5892	·5913	·5933	·5953	·5974	·5994	·6014	·6034	·6054	·6074
5·0	1·6094	1·6114	1·6134	1·6154	1·6174	1·6194	1·6214	1·6233	1·6253	1·6273
5·1	·6292	·6312	·6332	·6351	·6371	·6390	·6409	·6429	·6448	·6467
5·2	·6487	·6506	·6525	·6544	·6563	·6582	·6601	·6620	·6639	·6658
5·3	·6677	·6696	·6715	·6734	·6752	·6771	·6790	·6808	·6827	·6845
5·4	·6864	·6882	·6901	·6919	·6938	·6956	·6975	·6993	·7011	·7029
5·5	1·7048	1·7066	1·7083	1·7102	1·7120	1·7138	1·7156	1·7174	1·7192	1·7210
5·6	·7228	·7246	·7263	·7281	·7299	·7317	·7334	·7352	·7370	·7387
5·7	·7405	·7422	·7440	·7457	·7475	·7492	·7509	·7527	·7544	·7561
5·8	·7579	·7596	·7613	·7630	·7647	·7664	·7682	·7699	·7716	·7733
5·9	·7750	·7766	·7783	·7800	·7817	·7834	·7851	·7868	·7884	·7901
6·0	1·7917	1·7934	1·7951	1·7967	1·7984	1·8001	1·8017	1·8034	1·8050	1·8067
6·1	·8083	·8099	·8116	·8132	·8148	·8165	·8181	·8197	·8213	·8229
6·2	·8246	·8262	·8278	·8294	·8310	·8326	·8342	·8358	·8374	·8390
6·3	·8406	·8421	·8437	·8453	·8469	·8485	·8500	·8516	·8532	·8547
6·4	·8563	·8579	·8594	·8610	·8625	·8641	·8656	·8672	·8687	·8703

Tabelle XX. — Fortsetzung.

n	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
6·5	1·8718	1·8733	1·8749	1·8764	1·8779	1·8795	1·8810	1·8825	1·8840	1·8856
6·6	·8871	·8886	·8901	·8916	·8931	·8946	·8961	·8976	·8991	·9006
6·7	·9021	·9036	·9051	·9066	·9081	·9095	·9110	·9125	·9140	·9155
6·8	·9169	·9184	·9199	·9213	·9228	·9243	·9257	·9272	·9286	·9301
6·9	·9315	·9330	·9344	·9359	·9373	·9387	·9402	·9416	·9431	·9445
7·0	1·9459	1·9473	1·9488	1·9502	1·9516	1·9530	1·9544	1·9559	1·9573	1·9587
7·1	·9601	·9615	·9629	·9643	·9657	·9671	·9685	·9699	·9713	·9727
7·2	·9741	·9755	·9769	·9782	·9796	·9810	·9824	·9838	·9851	·9865
7·3	·9879	·9892	·9906	·9920	·9933	·9947	·9961	·9974	·9988	2·0001
7·4	2·0015	2·0028	2·0042	2·0055	2·0069	2·0082	2·0096	2·0109	2·0122	·0136
7·5	2·0149	2·0162	2·0176	2·0189	2·0202	2·0216	2·0229	2·0242	2·0255	2·0268
7·6	·0282	·0295	·0308	·0321	·0334	·0347	·0360	·0373	·0386	·0399
7·7	·0412	·0425	·0438	·0451	·0464	·0477	·0490	·0503	·0516	·0528
7·8	·0541	·0554	·0567	·0580	·0592	·0605	·0618	·0631	·0643	·0656
7·9	·0669	·0681	·0694	·0707	·0719	·0732	·0744	·0757	·0769	·0782
8·0	2·0794	2·0807	2·0819	2·0832	2·0844	2·0857	2·0869	2·0882	2·0894	2·0906
8·1	·0919	·0931	·0943	·0956	·0968	·0980	·0992	·1005	·1017	·1029
8·2	·1041	·1054	·1066	·1078	·1090	·1102	·1114	·1126	·1138	·1151
8·3	·1163	·1175	·1187	·1199	·1211	·1223	·1235	·1247	·1259	·1270
8·4	·1282	·1294	·1306	·1318	·1330	·1342	·1354	·1365	·1377	·1389
8·5	2·1401	2·1412	2·1424	2·1436	2·1448	2·1459	2·1471	2·1483	2·1494	2·1506
8·6	·1518	·1529	·1541	·1552	·1564	·1576	·1587	·1599	·1610	·1622
8·7	·1633	·1645	·1656	·1668	·1679	·1691	·1702	·1713	·1725	·1736
8·8	·1748	·1759	·1770	·1782	·1793	·1804	·1816	·1827	·1838	·1849
8·9	·1861	·1872	·1883	·1894	·1905	·1917	·1928	·1939	·1950	·1961
9·0	2·1972	2·1983	2·1994	2·2006	2·2017	2·2028	2·2039	2·2050	2·2061	2·2072
9·1	·2083	·2094	·2105	·2116	·2127	·2138	·2149	·2159	·2170	·2181
9·2	·2192	·2203	·2214	·2225	·2235	·2246	·2257	·2268	·2279	·2289
9·3	·2300	·2311	·2322	·2332	·2343	·2354	·2364	·2375	·2386	·2396
9·4	·2407	·2418	·2428	·2439	·2450	·2460	·2471	·2481	·2492	·2502
9·5	2·2513	2·2523	2·2534	2·2544	2·2555	2·2565	2·2576	2·2586	2·2597	2·2607
9·6	·2618	·2623	·2638	·2649	·2659	·2670	·2680	·2690	·2701	·2711
9·7	·2721	·2732	·2742	·2752	·2762	·2773	·2783	·2793	·2803	·2814
9·8	·2824	·2834	·2844	·2854	·2865	·2875	·2885	·2895	·2905	·2915
9·9	·2925	·2935	·2946	·2956	·2966	·2976	·2986	·2996	·3006	·3016

Berichtigungen.

Auf Seite 9 ist e^x statt e_x zu setzen.

In der Fig. 11, Seite 50, sind die Indices bei r_1 und r_2 zu vertauschen.

Bei Fig. 38 auf Seite 80 hat es links M' statt M zu heißen.